



HAL
open science

Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève

Stéphane Favier

► **To cite this version:**

Stéphane Favier. Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève. Education. Université de Genève, 2022. Français. NNT: . tel-03630223

HAL Id: tel-03630223

<https://hal.science/tel-03630223>

Submitted on 15 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**UNIVERSITÉ
DE GENÈVE**

**FACULTÉ DE PSYCHOLOGIE
ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION**

Section des sciences de l'éducation

Sous la co-direction de Sylvie Coppé et Jean-Luc Dorier

**ÉTUDE DES PROCESSUS DE RESOLUTION DE PROBLEMES
PAR ESSAIS ET AJUSTEMENTS
EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES A GENEVE**

THESE

Présentée à la
Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation
de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de Docteur en Sciences de l'Éducation

par

Stéphane FAVIER

Thèse No 801

Soutenue le 8 février 2022 à Genève

No étudiant : 17-346-602

UNIVERSITE DE GENEVE
FACULTE DE PSYCHOLOGIE ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION
SECTION DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

**Étude des processus de résolution de problèmes par essais et
ajustements en classe de mathématiques à Genève**

Stéphane Favier

COMPOSITION DU JURY DE THESE

Sylvie Coppé (Co-Directrice de thèse), Université de Genève

Jean-Luc Dorier (Co-Directeur de thèse), Université de Genève

Stéphane Clivaz, Haute École Pédagogique Vaud

Magali Hersant, Université de Nantes, France

Benjamin Rott, Université de Cologne, Allemagne

Emmanuel Sander, Université de Genève



**UNIVERSITÉ
DE GENÈVE**

FACULTÉ DE PSYCHOLOGIE ET
DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

Doctorat en sciences de l'éducation

Thèse de Stéphane FAVIER

Intitulée : « Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève »

La Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, sur préavis d'une commission formée par les professeur-e-s :

Jean-Luc Dorier, co-directeur, FPSE, Université de Genève
Sylvie Coppé, co-directrice, FPSE, Université de Genève
Stéphane Clivaz, HEP Vaud
Magali Hersant, Université de Nantes
Emmanuel Sander, FPSE, Université de Genève
Benjamin Rott, Université de Cologne, Allemagne

autorise l'impression de la présente thèse, sans prétendre par là émettre d'opinion sur les propositions qui y sont énoncées.

GENEVE, le 8 février 2022

La doyenne :
Mireille Bétrancourt

Thèse No 801
Numéro d'immatriculation : 17.346.602

N.B. L'imprimatur constitue une validation de la réussite de la thèse par la doyenne de la Faculté. L'imprimatur permet de déposer la thèse aux archives ouvertes et ainsi obtenir le diplôme final. En aucun cas il ne fait office de diplôme final.

Remerciements

Mes premières pensées et mes premiers mots sont tout naturellement adressés à Jean-Luc Dorier et Sylvie Coppé. Ils ont permis que mon projet se réalise dans des conditions excellentes et je leur en suis infiniment reconnaissant. Je tiens à leur dire ici tout le plaisir que j'ai eu à travailler à leurs côtés durant ces années. J'ai énormément apprécié leur confiance, leur disponibilité, leur aide, leurs précieux conseils. Je les remercie chaleureusement pour tout ce qu'ils m'ont apporté.

Je remercie sincèrement Magali Hersant, Benjamin Rott et Emmanuel Sander pour leur disponibilité, leur écoute, la qualité de leurs retours toujours constructifs que ce soit sur le manuscrit ou lors des réunions, retours qui m'ont permis d'approfondir ma réflexion. Un grand merci à Stéphane Clivaz d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je remercie également les enseignant·e·s qui m'ont accueilli ainsi que tous les élèves qui se sont prêtés au jeu de l'enregistrement audiovisuel de leur travail avec la caméra embarquée.

Je remercie infiniment Céline, Jana, Marina, Maud et Sylvia, mes dynamiques collègues de bureau. Leur accueil, leur enthousiasme, leur créativité et tout ce qu'elles ont su fédérer créent des conditions de travail exceptionnelles. Je suis également très reconnaissant de leur aide dans les moments de doute ou de difficultés, elles ont su trouver les mots justes pour me rassurer et m'encourager. Je remercie particulièrement Maud pour son implication tout au long de cette recherche (et ce jusqu'aux derniers instants de la soutenance), nos discussions et notre collaboration sont une grande source d'inspiration et de motivation.

Je remercie toutes les personnes qui ont pris part à ce projet FNS, que ce soit au travers des réunions régulières ou lors d'interventions plus ponctuelles.

Je remercie vivement Sandra, Paulo et Béa pour leur écoute, leur aide et pour l'énergie qu'ils ont su m'insuffler.

Je remercie chaleureusement mes amis de « La vie est une fête » pour leur soutien sans faille, leur intérêt croissant au fil des années et leurs encouragements.

J'ai une pensée particulière pour mes amis de « Bourgogne ». Nos échanges et nos week-ends sont une source d'inspiration et de ressourcement qui m'aident à revenir à l'essentiel. Merci pour tout ce que vous m'apportez, difficile à exprimer avec des mots.

Je remercie du fond du cœur Ben et Chrys pour leur présence décisive notamment dans les moments très chaotiques que j'ai dû traverser. Leur soutien, leur écoute et leur vision m'ont été très précieux.

Je pense fort à mes parents et je les remercie tendrement d'être présents, imperturbables, toujours prêts à rendre service malgré les kilomètres qui nous séparent. Ils ont su m'écouter et m'encourager tout au long de ce travail. Merci de m'avoir transmis ce goût de l'effort.

Enfin, je remercie ma petite famille qui a supporté cette thèse et mes humeurs pas toujours faciles. Un grand merci à ma chérie qui a fait de nombreuses concessions et qui a assuré une grande partie du quotidien pendant ces quatre années. Cela n'a pas été un long fleuve tranquille mais ta patience sans limite et ta capacité d'adaptation hors norme ont joué un rôle très important. Et c'est avec une émotion particulière que je remercie mes enfants Alix, Robin et Clément. Je suis vraiment fier de vous et de la manière dont vous avez géré et bonifié les bouleversements que cette thèse a eu sur vos vies. Sachez que je regrette tout le temps que je n'ai pas su ou pu vous accorder durant ces années mais je sais que nous trouverons rapidement un nouvel équilibre pour profiter de la meilleure façon de tous les moments de complicité à venir.

SOMMAIRE

SIGLES ET ABRÉVIATIONS	8
CHAPITRE 1. INTRODUCTION ET PLAN DE LA THÈSE	9
1. Introduction	9
2. Plan de la thèse.....	10
CHAPITRE 2. REVUE DE LITTÉRATURE ET ANCRAGES THÉORIQUES	13
1. Du problème à la résolution de problèmes.....	13
2. La résolution de problèmes.....	14
3. Les heuristiques.....	27
4. Résolution d'un problème par « ajustements d'essais successifs ».....	37
5. Questions de recherche.....	41
CHAPITRE 3. MÉTHODE DE RECUEIL ET D'ANALYSE DES DONNÉES	43
1. Contexte de la recherche	43
2. Le recueil de données.....	45
3. Le traitement des données.....	46
CHAPITRE 4. ANALYSES.....	83
1. Point de vue macroscopique.....	83
2. Point de vue microscopique : les heuristiques	113
3. Analyse des essais et ajustements.....	136
CHAPITRE 5. CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES	189
1. Un triple point de vue pour mieux comprendre les processus de résolution	189
2. L'articulation essais et ajustements.....	191
3. Le rôle de l'enseignant : dévolution et régulation lors de la résolution de problèmes.....	193
4. Perspectives	194
TABLE DES ILLUSTRATIONS	197
RÉFÉRENCES	201

SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Voici la liste des différents sigles ou abréviations utilisés dans cette thèse :

4P : classe de 4^{ème} année du primaire (élèves de 7-8 ans, équivalent au CE1 en France)

8P : classe de 8^{ème} année du primaire (élèves de 11-12 ans, équivalent à la classe de 6^{ème} en France)

10^e : classe de 10^e du CO (élèves de 13-14 ans, équivalent à la classe de 4^{ème} en France)

CO : Cycle d'Orientation (équivalent du collège en France)

CT : filière Communication et Technologie

IA : Intelligence Artificielle

LS : filière Littéraire-Scientifique du CO

MER : Moyens d'Enseignement Romands

MSN : Mathématiques et Sciences de la Nature

PER : Plan d'Études Romand

TSD : Théorie des Situations Didactiques

USAGE DU FÉMININ - MASCULIN

Pour alléger la lecture, nous avons fait le choix d'utiliser le terme enseignant pour désigner aussi bien les enseignantes que les enseignants.

CHAPITRE 1. INTRODUCTION ET PLAN DE LA THÈSE

1. Introduction

La résolution de problèmes comme méthode pour développer les apprentissages en mathématiques des élèves est mise en avant par les différents acteurs du système éducatif qu'ils soient chercheurs ou responsables institutionnels et ce, dans de nombreux pays et à différents niveaux scolaires (Dorier & Garcia, 2013). En Suisse Romande, elle est au cœur du Plan d'études romand (PER). En effet, dès le début des commentaires généraux du domaine Mathématiques et Sciences de la Nature (MSN), une des visées prioritaires est de « se représenter, problématiser et modéliser des situations et résoudre des problèmes en construisant et en mobilisant des notions, des concepts, des démarches et des raisonnements propres aux Mathématiques et aux Sciences de la nature » (Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin, 2010, p.5).

Durant mon parcours professionnel, j'ai eu la chance d'enseigner à des élèves du primaire et du secondaire. J'étais toujours surpris de voir que, dans ces deux contextes scolaires, la résolution de problèmes déclenchait chez les élèves des réactions très contrastées entre enthousiasme et hostilité. Certains élèves montraient beaucoup de persévérance et trouvaient des solutions inattendues, là où d'autres manifestaient de l'opposition, voire abandonnaient rapidement après la lecture de l'énoncé. En tant qu'enseignant, ces constats sont déstabilisants, et ce d'autant plus que ces comportements ne coïncident pas forcément avec le niveau en mathématiques des élèves. Ainsi, certains élèves, pourtant très en difficulté en mathématiques, parviennent à résoudre des problèmes sur lesquels d'autres élèves, habituellement plus en réussite, bloquent ou à l'inverse, des élèves ayant de bonnes notes en mathématiques rechignent à rentrer dans la résolution de problèmes. En effet, comme on le voit particulièrement pour les problèmes comme ceux issus des rallyes mathématiques, ce ne sont pas tant les connaissances mathématiques que la manière de chercher qui semblent être en jeu. Du point de vue des enseignants, on retrouve aussi une certaine dichotomie entre militantisme affiché et litanie de difficultés insurmontables. Outre la perpétuelle question du temps, les enseignants sont souvent démunis, ne sachant pas comment aider ni trop, ni trop peu les élèves durant leur recherche, ou comment organiser et gérer les mises en commun à la suite de la recherche des élèves, d'autant plus si les productions présentent des écarts significatifs.

Ce travail de thèse part de ces différents constats qui remontent du terrain. Il s'inscrit dans le cadre d'un projet¹ financé par le Fonds national suisse (FNS) qui met en lien différents travaux des membres de l'équipe de Didactique des Mathématiques à Genève (DiMaGe) afin de mieux comprendre ce que font et apprennent les élèves lorsque la résolution de problèmes est soit le moyen principal d'enseignement sur des thèmes mathématiques précis, soit quand elle constitue elle-même l'objet d'enseignement. Le parti pris fort qui caractérise ce projet est de se centrer sur les élèves.

Dans ce contexte, les questions qui guident le début de notre réflexion sont les suivantes : Comment les élèves avancent-ils dans leur recherche ? Comment s'élabore leur raisonnement ?

¹ Ce projet s'intitule : « La résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement au cœur des apprentissages dans la classe de mathématiques : un point de vue fédérateur à partir d'études dans différents contextes ». Co-requérants Jean-Luc Dorier et Sylvie Coppé, Subside n° 100019_173105 /1.

Qu'est-ce qui fait que certains élèves réussissent et d'autres échouent lors de la résolution de problèmes ? Quel(s) rôle(s) la gestion des erreurs joue-t-elle dans le processus de recherche ?

Un des objectifs principaux de notre travail est donc de chercher à mettre à jour les démarches des élèves en résolution de problèmes et de tenter de les caractériser, voire d'en dégager des catégories. Cela devrait permettre également d'accéder à une meilleure compréhension des difficultés rencontrées par les élèves.

Cette dernière question relative aux erreurs était en particulier à la source de notre travail et, à ce titre, à l'origine d'une première exploration. Elle a consisté en l'analyse de données immédiatement exploitables recueillies dans le cadre de la thèse de Chanudet (2019). Il s'agissait de 71 narrations de recherche (Bonafé et al., 2002) produites par des élèves de 10^e (élèves de 13-14 ans) à partir du même problème du *château de cartes*². Différents éléments ressortent de ce travail qui a, entre autres, donné lieu à une présentation (Favier, 2018) lors du colloque Espace Mathématique Francophone. D'une part, nous relevons très peu d'erreurs narrées par les élèves alors même que la narration de recherche est un dispositif qui devrait favoriser leur explicitation. Nous en retenons que même dans des conditions très favorables, les erreurs ne sont pas considérées par les élèves comme un point d'appui mais plutôt comme des étapes à cacher. Ceci implique que, d'un point de vue méthodologique, pour documenter ce que l'élève donne à voir de sa résolution de problème, l'analyse de la seule production finale est loin d'être satisfaisante. Il sera décisif de penser un recueil de données au plus près du travail des élèves. D'autre part, un autre point saillant concerne la différence de statut entre *erreur* et *essai*. Brousseau (2001) définit une erreur comme « une décision qui peut être 'reprise' corrigée dans le cours d'une même action » (p. 15) et précise qu' « une erreur doit être rapportée à un moment précis d'une situation, et à une connaissance ou à un savoir déterminés qui permettent de la concevoir » (p. 8). Pour lui, le statut d'erreur est difficile à attribuer et peut même se modifier au cours de la recherche d'un problème « à l'insu des acteurs » (p. 16). À ce sujet, en adoptant le point de vue de l'élève, Brousseau parle de « dialectique des statuts de l'erreur entre 'essai', 'erreur', 'échec à un exercice', 'échec d'un apprentissage', 'faute' » (Ibid.). Lors de l'analyse des narrations de recherche, nous avons pu constater qu'il était difficile de déterminer si telle piste développée par les élèves était un essai, c'est-à-dire une « action entreprise en vue de réaliser, d'obtenir quelque chose, sans être sûr du résultat » (Larousse, s. d.) ou à proprement parler une erreur que l'élève aurait repérée. Aussi, nous a-t-il semblé plus pertinent de porter notre intérêt davantage sur la gestion des essais et des ajustements (pour reprendre le statut le plus favorable aux élèves) que sur le fait de déterminer si telle décision devrait être considérée comme erreur ou comme essai. Ceci nous a également amené à mettre la focale sur des types de problèmes qui ont le potentiel de provoquer l'apparition d'essais tels les problèmes qui se résolvent en faisant des ajustements d'essais successifs, que l'on appelle plus fréquemment des essais-erreurs.

2. Plan de la thèse

Notre thèse s'organise en cinq chapitres. Après ce premier chapitre d'introduction et cette annonce du plan de la thèse, le chapitre 2 présente une revue de littérature selon trois axes. Nous nous intéressons tout d'abord à différents modèles de la résolution de problèmes issus de la psychologie cognitive ou de la *mathematics education*. Nous les confrontons de manière à dégager certains aspects saillants de la résolution de problèmes mathématiques. Ensuite, nous faisons un état des lieux relativement au concept d'heuristique. Nous proposons notamment une étude épistémologique de

² Chanudet (2017) propose une analyse a priori et une synthèse des procédures mises en œuvre par les élèves dans la *Revue de Mathématiques pour l'école* n° 228, p4-13.

L'heuristique mathématique puis didactique de l'heuristique en résolution de problèmes mathématiques qui, partant de la richesse présente dans la littérature scientifique, nous amènent à une manière unificatrice de la caractériser. Enfin, nous abordons de manière plus précise une manière de résoudre des problèmes de mathématiques dite par ajustements d'essais successifs. À l'issue de cette revue de littérature, nous formulons nos questions de recherche. Dans le chapitre 3, nous détaillons les éléments liés au contexte de la recherche (les différentes classes, le choix des problèmes, les conditions de passation) avant de considérer les aspects méthodologiques avec notamment tout ce qui a trait au recueil et au traitement des données. Le chapitre 4 est celui des analyses. Il est articulé selon les différents points de vue considérés. Enfin, le chapitre 5 correspond à la conclusion de cette recherche et nous permet de proposer une synthèse des différents résultats, de dégager des pistes didactiques relatives à l'enseignement de la résolution de problèmes, de pointer certaines limites de notre recherche ainsi que quelques perspectives.

CHAPITRE 2. REVUE DE LITTÉRATURE ET ANCRAGES THÉORIQUES

1. Du problème à la résolution de problèmes

Tout d'abord, il convient de préciser ce que nous appelons *problème* car ce terme est polysémique. Du point de vue étymologique, l'origine grecque $\pi\rho\omicron\beta\lambda\eta\mu\alpha$ indique « ce qu'on a devant soi, obstacle ». Il ressort l'idée qu'un problème engendre un obstacle, relatif à celui qui tente de le résoudre.

Cette idée se retrouve dans certaines définitions de travaux de psychologie comme dans cette citation de Richelle et Droz (1976) : « il y a problème lorsque le sujet ne dispose pas immédiatement d'une réponse de routine applicable à la situation » (p. 242).

Weil-Barais (1993) considère comme *problème* toute situation caractérisée par :

- un ensemble de données (des objets matériels, des actions, des événements, des représentations symboliques linguistiques, graphiques, mathématiques, etc.) ;
- un ensemble de questions qui précisent le but à atteindre ;
- un ensemble de contraintes qui délimitent les actions du sujet. (ibid, p. 562)

En jouant sur les éléments de ces trois ensembles, les chercheurs en psychologie peuvent ainsi différencier les problèmes proposés dans leurs études afin de les adapter aux objectifs visés. Toutefois, cette caractérisation pourrait laisser penser qu'un problème est défini de manière absolue c'est-à-dire indépendamment du sujet. Or, Richard (2004) amène à faire la distinction entre *activités d'exécution* et *activités de résolution de problème* : « On ne peut faire cette distinction en considérant seulement les tâches : certaines tâches sont des problèmes pour certains sujets et sont des situations d'exécution pour d'autres. Il faut donc faire intervenir le couple sujet-tâche [...] » (p. 220).

Ces différentes idées sont synthétisées par la définition proposée par Brun (1990) :

Dans une perspective psychologique, en effet, un problème est généralement défini comme une situation initiale avec un but à atteindre, demandant à un sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème que dans un rapport sujet / situation, où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est dire aussi qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple. (Brun, 1990, p. 2)

Dans le contexte scolaire, cette distinction est également portée par Schoenfeld (1985) ou encore Julo (1995) qui parle d'exercice lorsqu'il existe « une stratégie qui s'impose d'elle-même, une procédure que l'on n'a pas vraiment à élaborer (mais plutôt à appliquer) et donc une représentation que l'on n'a plus vraiment à construire » (p. 19).

Richard (2004) précise alors qu'une situation est perçue comme un problème par un sujet aux deux conditions suivantes : soit le sujet ne dispose pas des connaissances qui correspondent spécifiquement au problème posé, c'est-à-dire qu'il ne sait pas a priori ce qu'il doit faire face à cette situation ; soit les connaissances dont il dispose et qu'il a effectivement mobilisées se sont montrées inefficaces.

Ainsi, dans le contexte scolaire, une même tâche peut être considérée comme un problème à un certain niveau de la scolarité alors qu'elle deviendra plutôt un exercice d'application à des niveaux de scolarité ultérieurs. Et d'ailleurs, pour un niveau donné, même si la plupart des élèves peuvent

percevoir une tâche comme un problème, il est tout à fait envisageable que pour certains élèves du même niveau cette tâche relève d'un exercice d'application.

Ces considérations ne veulent cependant pas dire qu'un problème est constitué de n'importe quelle tâche complexe ou difficile. Schoenfeld (2013) montre très bien, avec l'exemple suivant, que l'idée reçue que problème veut seulement dire tâche difficile est largement discutable :

That is, complexity or difficulty alone did not make a task a problem; solving a system of 100 linear equations in 100 unknowns without the use of technology might be a real challenge for me, but it is not a problem in the sense that I know how to go about getting an answer, even if it might take me a very long time and I agonize over the computations. (p. 10)

Plaçons-nous donc dans le cas où un élève est véritablement face à un problème. Il doit se lancer dans une forme d'activité appelée *résolution de problème* que Mayer et Wittrock (2006) définissent ainsi : « Problem solving is cognitive processing directed at achieving a goal when no solution method is obvious to the problem solver » (p. 287). Du point de vue de la recherche, la difficulté réside alors dans la description de ce qui se passe dans cette résolution. C'est ce que Weil-Barais (1993) explique ici :

La résolution de problèmes est un processus qui se déroule dans le temps. La représentation de ce processus est très dépendante des options théoriques adoptées. En effet, pendant la résolution, c'est-à-dire pendant le temps qui s'écoule entre la saisie du problème et l'émission de la réponse, il se passe des événements observables (des gestes, des verbalisations, des productions symboliques divers) et des événements inobservables (« dans la tête » du sujet) faisant l'objet d'interprétation. (p. 565)

Dans ce contexte, nous allons tout d'abord nous intéresser aux travaux fondateurs réalisés en psychologie en lien avec la résolution de problèmes avec l'intention d'identifier ce qui caractérise chacune de ces approches au regard de la résolution de problèmes. Ensuite, nous présenterons différents modèles qui tentent de rendre compte des processus à l'œuvre en résolution de problèmes mathématiques.

2. La résolution de problèmes

Comme nous venons de l'évoquer, résoudre un problème c'est mettre en œuvre un ensemble de processus cognitifs pour aboutir à une solution. L'objectif de cette partie est de présenter comment les principales approches psychologiques qui étudient la résolution de problèmes cherchent à rendre compte de ces processus de résolution. Sans prétendre être exhaustif, nous cherchons surtout à mettre en évidence les particularités de chaque approche.

2.1 Point de vue historique

Initialement, la résolution de problèmes est devenu un objet d'étude à partir des différentes expériences menées en psychologie animale (Thorndike, 1898) qui sont à l'origine du courant behavioriste. Ce courant théorique ne s'intéressant qu'aux observables, utilise « la manière dont le sujet réagit aux événements que sa conduite provoque » (Weil-Barais, 1993, p. 565) pour rendre compte du processus de résolution. Dans cette approche, le sujet cherche à satisfaire des besoins. Le renforcement et le lien entre stimulus et réponse permettent d'expliquer la conservation ou la modification des différentes réponses qui, au fil des essais, amènent le sujet à produire la bonne réponse. Une des caractéristiques de la résolution de problèmes mise en avant par ce courant est liée au rôle de l'expérience pour trouver une solution : la probabilité de succès d'une réponse est fonction des succès et échecs rencontrés antérieurement dans les contextes les plus similaires. Ceci étant, la principale limitation de ce modèle tient au fait que le sujet n'est considéré qu'au travers de

ses actions, sans prendre en compte la dimension mentale, ce qui oppose cette approche, en particulier, à l'approche gestaltiste. Pour cette dernière, la perception a un rôle primordial. Un sujet découvre une solution après quelques essais et surtout après une phase de réflexion ou d'inactivité apparente, qui correspond à la réorganisation des éléments de la situation. Ce phénomène de restructuration est appelé *insight*. Bien que plusieurs études aient remis en cause la nature précise de ce phénomène en proposant des interprétations différentes (voir à ce sujet Richard (1994, p. 529-531) à propos de la controverse sur le problème des neuf points), il est intéressant de noter que le sujet est susceptible de traiter de manière globale une situation pendant cette phase dite de réflexion et non pas seulement de manière compartimentée.

En psychologie du développement, les travaux initiaux de Piaget se sont centrés sur le *sujet épistémique* « défini comme le noyau commun à la connaissance de sujets d'un même niveau de développement » (Inhelder & de Caprona, 1992, p. 20) dans le but de dégager une « architecture générale de la connaissance » (Ibid.) appelée aussi structure. A la suite de Piaget, des chercheurs genevois ont développé ce qui est connu comme l'approche fonctionnelle genevoise. Inhelder et de Caprona ont ainsi ouvert une autre piste ; ils s'intéressent au *sujet psychologique* en cherchant comment un sujet utilise ses connaissances pour agir dans une situation donnée. Ils s'appuient sur la notion de *schème* développée par Piaget pour en rendre compte. Inhelder et de Caprona (1992) précisent que « dans une résolution de problème, les schèmes conduisent directement à la solution ou font obstruction, selon qu'ils engendrent des procédures adéquates ou non à la situation » (p. 43). C'est ainsi la mise en œuvre de schèmes et leur adaptation qui vont permettre à un sujet de découvrir une solution. Une procédure correcte nécessite l'association de la situation à un ou plusieurs schèmes. Cela a pour conséquence d'attribuer une signification fonctionnelle à ces schèmes qui va les lier également aux objets auxquels ils s'appliquent. Ces objets vont ainsi hériter de certaines propriétés ou de certaines significations. À ce sujet, Inhelder et de Caprona (1992) avancent que :

(...) cette liaison fonctionnelle indissociable du schème et de l'objet est une caractéristique frappante des moments initiaux de la résolution de problèmes. Au cours même de cette dernière, on peut remarquer (...) certaines actions n'ont pas pour but d'actualiser des connaissances, mais visent simplement à « faire parler l'objet » (p. 45).

Dans cette approche, la notion de *représentation* et son rôle fonctionnel viennent compléter celle de schème. Deux aspects complémentaires de cette notion sont envisagés. Le premier concerne la *sémiotité* c'est-à-dire les différents traitements que peuvent engendrer les différents modes de représentation (geste, image, langage) mobilisés. Le second aspect est relatif aux buts et aux moyens qu'un sujet peut envisager. Ainsi, selon Inhelder et de Caprona (1992), « les représentations portent par conséquent aussi bien sur les chemins à prendre que sur les résultats auxquels ils conduisent » (p. 48). Ce courant met donc l'accent sur le rôle des connaissances et des représentations.

A partir des années 1970 avec l'apparition de l'informatique et les débuts de l'intelligence artificielle (IA), se développe l'approche dite du traitement de l'information impulsée par Newell et Simon (1972) qui ouvre une nouvelle voie. Cette approche définit un problème comme la donnée d'un état initial, d'un état final et d'un ou plusieurs opérateurs qui vont permettre au sujet d'agir et de transformer cette situation pour passer de l'état initial à l'état final. L'*espace-problème* correspond à l'ensemble des états qui peuvent être obtenus, en partant de l'état initial, par application des actions autorisées par l'opérateur. Ce courant considère les différents aspects suivants pour rendre compte du processus de résolution d'un problème :

- L'élaboration de la *représentation du problème*, c'est-à-dire l'interprétation effectuée par le sujet des données initiales, des données à rechercher, du but à atteindre et des contraintes ;
- les traitements effectués par le sujet sur les données ou sur les représentations (les identifications, les classifications, les inférences, les calculs en tout genre, les traductions, les transformations...);
- les contrôles exercés et les décisions prises. (Weil-Barais, 1993, p. 570)

Trouver une solution correspond alors à la découverte d'un cheminement dans l'espace-problème à l'aide de règles d'exploration appelées *heuristiques* (cf partie 3). L'outil informatique a permis de modéliser des heuristiques très générales sous forme de programmes de résolution de problèmes. Ces travaux ont pu montrer le rôle majeur joué par les représentations et les mécanismes de contrôle en résolution de problèmes.

Ces quatre approches capturent des aspects différents des processus mis en œuvre en résolution de problèmes. Bien que les behavioristes ne s'intéressent pas aux processus mentaux mais aux comportements, ils ont mis en évidence le rôle des essais pour se rapprocher voire découvrir la solution d'un problème. Toutefois, les psychologues de la forme ont montré les limites d'une telle approche en étudiant des problèmes spécifiques pour lesquels ce ne sont pas tant les essais qui conduisent à la solution mais plutôt la capacité à réorganiser les éléments du problème. Enfin, les psychologues cognitivistes s'intéressent principalement au rôle des connaissances, des représentations et des mécanismes de contrôle.

Après cette présentation des travaux fondateurs de la résolution de problèmes, nous nous focalisons, dans la partie suivante, sur différents modèles qui tentent de rendre compte des processus qui peuvent être en jeu dans la résolution de problèmes mathématiques.

2.2 Différents modèles de la résolution de problèmes mathématiques

La façon dont un sujet résout des problèmes mathématiques est un processus cognitif complexe que de nombreuses recherches ont tenté de comprendre et de modéliser. Dans cette partie, nous commençons par présenter, tout d'abord, un large panel de ces travaux. Ceci nous permettra de mettre en évidence divers modèles de la résolution de problèmes que nous confronterons pour tenter de faire ressortir ce qui les rapproche ou les met en tension afin de dégager certains aspects saillants de la résolution de problèmes mathématiques.

2.2.1 Le modèle des contraintes

Richard (2004) s'intéresse aux problèmes dits de transformation d'états qu'il définit comme des problèmes « qui ont des objectifs d'action, c'est-à-dire un changement de l'état du monde » (p. 227). Le problème de la tour de Hanoï constitue un exemple emblématique de ce type de problèmes. Voici comment Richard (2004) énonce ce problème :

Le matériel comporte un certain nombre de disques de taille différente (de trois à six en général) et trois emplacements délimités par des couleurs que nous appelons A, B et C. [...] L'état initial est une certaine disposition des disques sur les emplacements et l'état à obtenir est une autre disposition des disques. Le cas le plus courant consiste à situer une tour à un emplacement et à demander de le reconstruire à un autre emplacement. Le déplacement des disques doit respecter un certain nombre de contraintes qui sont les suivantes :

- On ne peut déplacer qu'un disque à la fois ;
- On ne peut déplacer que le disque le plus petit d'une pile ;
- On ne peut pas mettre un disque sur un plus petit. (p. 369)

Ce problème se caractérise par le fait d'être « bien défini » (p. 227) c'est-à-dire que « le but est un état à obtenir et les moyens pour résoudre le problème sont indiqués dans la consigne » (Ibid.). De plus, dans ces problèmes de « transformation d'état, la situation n'évolue que dans la mesure où l'on fait quelque chose pour la changer » (p. 228). Ces caractéristiques sont essentielles car elles offrent la possibilité de représenter l'*espace effectif*³ (Richard, 2004) du problème sous la forme d'un

³ L'*espace effectif* correspond à l'*espace de base* de Newell et Simon (1972).

graphique reliant entre eux les différents états que l'on peut atteindre en ayant une interprétation ad hoc des données du problème. On peut également représenter graphiquement l'*espace sémantique* (Poitrenaud, 1998) qui correspond à l'ensemble des états accessibles à partir des contraintes du problème telles que le sujet se les représente. Par exemple, pour le problème de la tour de Hanoi à trois disques, l'espace effectif est représenté par le graphique de la Figure 1.

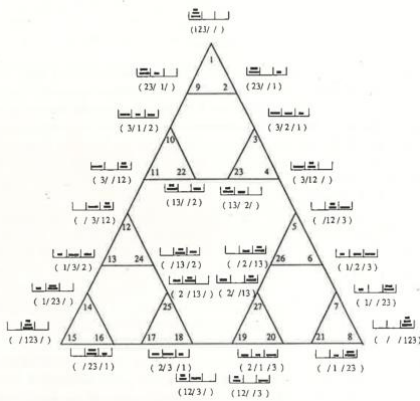


Figure 1. Espace effectif (Tour de Hanoi)

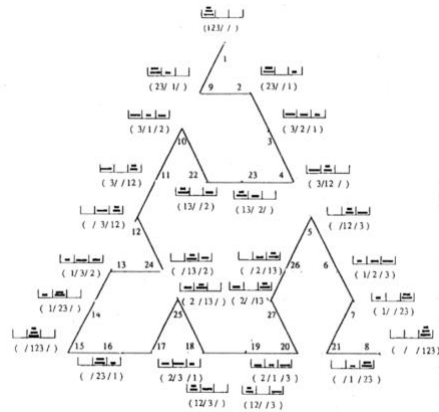


Figure 2. Exemple d'espace sémantique (Tour de Hanoi)

Le graphique de la Figure 2 correspond à l'espace sémantique pour un sujet qui aurait considéré la contrainte « on ne peut déplacer un disque que d'un emplacement à un emplacement voisin ». On remarque que pour un tel sujet, la recherche sera beaucoup plus longue et la réussite beaucoup plus hypothétique car un seul chemin peut le conduire à la solution après 26 déplacements. Cet exemple illustre bien comment l'interprétation d'une donnée peut induire une contrainte supplémentaire qui réduit l'espace effectif de manière drastique rendant la découverte de la solution plus longue ou plus difficile. À l'inverse, la non prise en compte de certaines contraintes du problème peut donner une illusion de facilité ou bien amener le sujet à faire sa recherche dans un espace sémantique qui déborde largement l'espace effectif du problème, ce qui peut bloquer ou au moins rendre plus difficile la découverte d'une solution.

Pour élaborer le modèle des contraintes, Richard considère que la représentation d'un problème de changements d'états est constituée par les interprétations que le sujet peut se faire de la situation et/ou de la consigne ; des heuristiques⁴ générales de résolution de problème et des buts du sujet. Chacune de ces composantes est décrite en termes de contraintes c'est-à-dire comme des « restrictions sur les actions possibles » (Ibid, p. 348). Autrement dit, chacune des contraintes va indiquer si les actions possibles sont permises (code 0) ou non (code 1). Richard propose une présentation de ces différents éléments dans un tableau à double entrées : croisant les actions (en ligne) et les différentes contraintes (en colonne). La somme des différents codes de chaque ligne (c'est-à-dire pour chacune des actions) est donc égal à 0 si toutes les contraintes permettent l'action ou à un nombre supérieur ou égal à 1, dès lors qu'au moins une contrainte bloque l'action considérée. La représentation du problème ainsi définie permet donc de savoir, à un moment donné, quelles sont les actions permises et quelles sont les actions interdites. La représentation sous forme de tableau permet un traitement informatique. Un mécanisme de décision accompagne cette liste de contraintes, selon trois cas de figure :

- une seule action est permise et dans ce cas l'action choisie est celle qui est autorisée ;
- plusieurs actions sont permises: une de ces actions est choisie au hasard ;

⁴ Voir la partie 3.1 Une diversité de caractérisations qui explicite le sens donné par Richard aux heuristiques de résolution de problèmes.

- aucune action n'est permise (ce cas correspond aux impasses) : il est donc nécessaire de faire un arbitrage parmi toutes les contraintes. Pour ce faire il s'agit d'instaurer un ordre de priorité des contraintes de manière à négliger celle qui semble la moins prioritaire et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'une action devienne possible. Une fois cette action réalisée, l'ensemble de toutes les contraintes est reconsidéré.

Ce modèle se veut déterministe puisqu'en traitant de front cette liste de contraintes avec ce mécanisme de décision, Richard parvient à déterminer, à chaque changement, quelle(s) réponse(s) est possible pour l'état de la représentation correspondant à la liste de contraintes. Il obtient ainsi, par la simulation, une approximation des protocoles réels. Selon Richard, un intérêt majeur de ce modèle est de pouvoir avoir une meilleure interprétation de ce que font les sujets lors de la résolution du problème.

Toutefois, certaines difficultés ou limites se posent pour ce modèle comme par exemple l'identification de l'ensemble des contraintes potentielles de manière la plus exhaustive possible car si une contrainte n'est pas prise en compte dans la simulation, certains protocoles ne sauraient être simulés de façon satisfaisante. Le fait que la liste des contraintes soit susceptible d'évoluer tout au long de la résolution du problème est une autre source de difficulté.

Si ce modèle met en avant le rôle contraignant de l'interprétation des données du problème, le modèle suivant envisage également une dimension facilitatrice.

2.2.2 Le modèle de congruence sémantique

Ce modèle (Gros, Thibaut, & Sander, 2020) porte sur les problèmes arithmétiques à énoncés verbaux. Au cours des dernières décennies, de nombreux effets interprétatifs ont été mis en évidence par les recherches relativement à ce type de problèmes. Par exemple, Hudson (1983) montre que le problème « Il y a 5 oiseaux et 3 vers. Combien y a-t-il d'oiseaux de plus que de vers ? » est beaucoup moins bien réussi par de jeunes enfants que si la question est « Combien d'oiseaux n'auront pas de ver ? ». Coquin-Viennot et Moreau (2003) ont proposé le problème suivant : « Pour une remise de prix, un fleuriste prépare pour chacun des 14 candidats 5 roses et 7 tulipes. De combien de fleurs a-t-il besoin en tout ? ». Ce problème est résolu par le calcul : $14 \times 5 + 14 \times 7$ alors que la version légèrement modifiée « Pour une remise de prix, un fleuriste prépare pour chacun des 14 candidats un bouquet composé de 5 roses et 7 tulipes. De combien de fleurs a-t-il besoin en tout ? » est résolue majoritairement par l'expression factorisée : $14 \times (5 + 7)$. Plusieurs modèles tentent d'expliquer les différents effets interprétatifs mis en évidence en cherchant à caractériser ce qu'il se passe lorsque des sujets résolvent ces problèmes sans qu'aucun de ces modèles ne parviennent à les expliquer tous.

Le modèle des schémas (Kintsch & Greeno, 1985; Rumelhart, 1980) suppose que la résolution repose sur des schémas, au sens de structures de données, qui sont créés par la rencontre de plusieurs problèmes qui possèdent la même structure, puis stockés afin de pouvoir être utilisés pour résoudre n'importe quel autre problème ayant cette même structure. Une limite de ce modèle est qu'il ne permet pas de rendre compte des différences de performances entre des problèmes isomorphes.

La théorie des modèles mentaux (Johnson-Laird, 1983; Van Dijk & Kintsch, 1983) avance qu'à la lecture de l'énoncé un sujet se construit une représentation mentale dont la structure est analogue à celle de la situation décrite dans le problème. Cela signifierait que pour un énoncé donné, il n'y aurait qu'une seule représentation encodée qui ne tiendrait pas compte des variations d'interprétation selon l'âge ou les individus constituant une limite de ce modèle.

D'autres travaux ont montré que les relations sémantiques qu'entretiennent les éléments d'un problème influencent les représentations des problèmes par les sujets. Par exemple, (Bassok, Chase,

& Martin, 1998) ont demandé aux participants de leur étude de créer des problèmes arithmétiques mobilisant soit une division, soit une addition à partir de la donnée de différents types d'objets. Les résultats de leur étude montrent que si les objets sont dans une relation asymétrique (par exemple, une relation contenant/contenu comme des vases et des tulipes), les participants créent davantage de problèmes de division que d'addition. À l'inverse, si les objets appartiennent à la même catégorie (par exemple les tulipes et les jonquilles), les participants créent surtout des problèmes d'addition. Leur étude montre également que ce lien sémantique entre les éléments d'un problème et les connaissances mathématiques est renforcé dans les manuels scolaires. Selon elles, la grande majorité des problèmes de division proposés dans les manuels scolaires mettent en scène des éléments asymétriques tandis que les problèmes d'addition s'appuient sur des éléments de même niveau. Le cadre de l'alignement sémantique cherche à rendre compte de ces effets inhérents à l'interprétation du contenu. Étant donné un énoncé verbal de problème arithmétique, la structure interprétée à partir des éléments d'un problème (objets, relation, ...) peut faciliter la résolution si elle est sémantiquement alignée avec la structure mathématique sous-jacente. Par exemple, comme la division est sémantiquement alignée avec des structures asymétriques, un problème impliquant des contenants et leur contenu sera plus facilement résolu s'il nécessite une division qu'une addition.

Le modèle de Gros, Thibaut et Sander (2020) s'appuie sur cette notion de congruence sémantique pour prendre en compte les interactions entre les connaissances sur le monde (World Semantics) et les connaissances mathématiques (Mathematical Semantics) afin d'interpréter les effets observés.

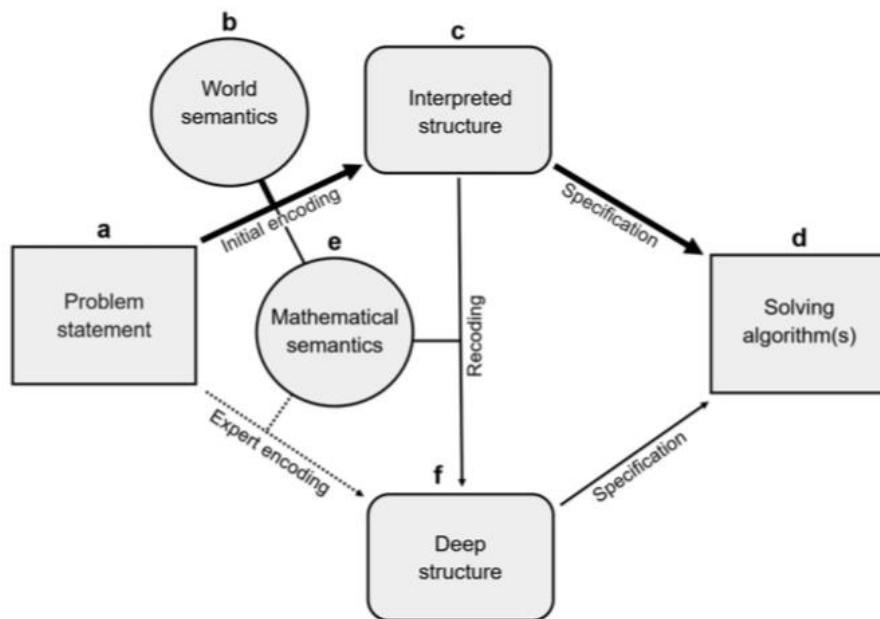


Figure 3. Le modèle de congruence sémantique (Gros, Thibaut et Sander, 2020)

Ce modèle (Figure 3) rend compte des processus d'encodage et de recodage qui peuvent être en jeu dans la résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux. L'énoncé d'un problème (a) est interprété par le sujet non expert à la lumière de ses connaissances sur le monde (b) et de ses connaissances mathématiques (e). Cette interprétation (c) peut ensuite être opérationnalisée par une ou plusieurs opérations arithmétiques (d) dès lors que le contenu sémantique évoqué par l'énoncé du problème est congruent avec les connaissances mathématiques activées du sujet. Sinon le sujet se trouve dans une impasse. Pour en sortir et résoudre le problème, le sujet devra être en mesure de réaliser un recodage sémantique qui, s'appuyant sur les connaissances mathématiques (e), permet d'aboutir à une interprétation plus proche de la structure profonde du problème (f) qui pourra être opérationnalisée par une ou plusieurs opérations.

Le modèle permet également de prendre en compte le cas de sujets suffisamment experts au regard des connaissances mathématiques engagées qui seraient en mesure d'accéder directement à la structure profonde du problème (f) sans passer par une interprétation influencée par les connaissances sur le monde.

2.2.3 Le modèle de Julo

Julo (1995) s'intéresse lui aussi à la construction de la représentation d'un problème de mathématiques. Il suggère que la construction des représentations repose principalement sur trois processus qu'il met en évidence à partir de différents dysfonctionnements observés au cours de la résolution de ces problèmes :

- *le processus d'interprétation et de sélection* : l'énoncé d'un problème communique un ensemble d'éléments, le contexte sémantique, dont l'interprétation permet d'accéder « aux informations concernant l'objet et la tâche qui caractérise le problème » (p. 31). Nos connaissances nous conduisent « à sélectionner certaines informations en leur accordant une signification particulière » (p. 37). Il identifie certains dysfonctionnements de ce processus lorsque « des informations non pertinentes sont prises en compte dans la représentation ou, au contraire, des informations essentielles sont ignorées et ne sont pas intégrées au contenu de la représentation » (p. 39).
- *le processus de structuration* : ce processus n'est pas à imaginer comme un enrichissement progressif de la représentation induite par les éléments communiqués par l'énoncé. Au contraire, Julo nous invite à considérer que les représentations sont des « entités fortement organisées » (p. 42). Leur contenu est « un ensemble structuré, c'est-à-dire que les éléments sont solidaires les uns des autres et constituent *un tout* qui a son fonctionnement et sa logique propres » (Ibid). La représentation peut être structurée de manière forte par l'énoncé mais la plupart du temps ce sont les procédures et les stratégies mises en œuvre qui vont contribuer à sa structuration. Les dysfonctionnements apparaissent lorsque la piste suivie est une impasse. Dans ce cas, une restructuration de la représentation initiale est nécessaire.
- *le processus d'opérationnalisation* : il a pour fonction de « permettre la mise en œuvre de nos connaissances opératoires en vue d'élaborer une procédure » (p. 55). Il permet également à la représentation de « se transformer et d'évoluer dans les cas où elle ne conduit pas immédiatement à une telle procédure » (Ibid.). La nature de ce processus, c'est-à-dire de ce qui fait que les connaissances opératoires viennent se conjuguer à la représentation pour produire des actions, est peu connu.

Selon Julo, ces processus se caractérisent par :

« le double mouvement des opérations de traitement qui les composent. Il existe un mouvement « du bas vers le haut » qui rend l'activité de représentation très dépendante des caractéristiques de la situation et qui explique, en particulier, pourquoi une infime variation de la situation peut changer la représentation que nous en avons. Mais il existe, également, un mouvement « du haut vers le bas » qui, en impliquant de manière forte nos connaissances dans la construction de la représentation, en fait une véritable activité » (Ibid, p. 58)

Nous voyons poindre des points de contact entre ces différents modèles. Nous les examinerons un peu plus bas.

2.2.4 Le modèle de Pólya

Les travaux de Pólya (1945, 1989) sont précurseurs dans le domaine de la résolution de problèmes en mathématiques. Dans *Comment poser et résoudre un problème* (Traduit de : *How to solve it*), Pólya présente un modèle qui se découpe en quatre phases successives :

- Comprendre le problème ;
- Concevoir un plan ;
- Mettre le plan à exécution ;
- Examiner la solution obtenue.

Chacune de ces phases est caractérisée par des questions ou des instructions comme le montre la Figure 4. Elles constituent ce que l'on retrouve sous le terme d'*heuristique* dans la littérature (voir partie 3).

COMPRENDRE LE PROBLÈME

- *Quelle est l'inconnue ? Quelles sont les données ? Quelle est la condition ?*
- *Est-il possible de satisfaire à la condition ? La condition est-elle suffisante pour déterminer l'inconnue ? Est-elle insuffisante ? Redondante ? Contradictoire ?*
- *Dessinez une figure. Introduisez la notation appropriée.*
- *Distinguez les diverses parties de la condition. Pouvez-vous les formuler ?*

CONCEVOIR UN PLAN

- *L'avez-vous déjà rencontré ? Ou bien avez-vous rencontré le même problème sous une forme légèrement différente ?*
- *Connaissez-vous un problème qui s'y rattache ? Connaissez-vous un théorème qui puisse être utile ?*
- *Regardez bien l'inconnue et essayez de penser à un problème qui vous soit familier et qui ait la même inconnue ou une inconnue similaire.*
- *Voici un problème qui se rattache au vôtre et que vous avez déjà résolu. Pourriez-vous vous en servir ? Pourriez-vous vous servir de son résultat ? Pourriez-vous vous servir de sa méthode ? Vous faudrait-il introduire un élément auxiliaire quelconque pour pouvoir vous en servir ?*
- *Pourriez-vous énoncer le problème différemment ? Pourriez-vous l'énoncer sous une autre forme encore ? Reportez-vous aux définitions.*
- *Si vous ne pouvez résoudre le problème qui vous est proposé, essayez de résoudre d'abord un problème qui s'y rattache. Pourriez-vous imaginer un problème qui s'y rattache et qui soit plus accessible ? Un problème plus général ? Un problème plus particulier ? Un problème analogue ? Pourriez-vous résoudre une partie du problème ? Ne gardez qu'une partie de la condition, négligez l'autre partie ; dans quelle mesure l'inconnue est-elle alors déterminée, comment peut-elle varier ? Pourriez-vous tirer des données un élément utile ? Pourriez-vous penser à d'autres données qui pourraient vous permettre de déterminer l'inconnue ? Pourriez-vous changer l'inconnue, ou les données, ou toutes deux s'il est nécessaire, de façon que la nouvelle inconnue et les nouvelles données soient plus rapprochées les unes des autres ?*
- *Vous êtes-vous servi de toutes les données ? Vous êtes-vous servi de la condition tout entière ? Avez-vous tenu compte de toutes les notions essentielles que comportait le problème ?*

METTRE LE PLAN A EXÉCUTION

- *En mettant votre plan à exécution, vérifiez-en chaque détail l'un après l'autre. Pouvez-vous voir clairement si ce détail est correct ? Pouvez-vous démontrer qu'il est correct ?*

REVENIR SUR LA SOLUTION

- *Pouvez-vous vérifier le résultat ? Pouvez-vous vérifier le raisonnement ?*
- *Pouvez-vous obtenir le résultat différemment ? Pouvez-vous le voir d'un coup d'œil ?*
- *Pouvez-vous vous servir du résultat ou de la méthode pour quelque autre problème ?*

Figure 4. Ensemble des questions proposées par Pólya (1989)

Ces heuristiques ne sont pas toutes du même ordre. Par exemple, l'heuristique « pourriez-vous énoncer le problème différemment ? » est en lien avec la manière de se représenter le problème,

tandis que l'heuristique « Connaissez-vous un théorème qui puisse être utile ? » porte sur les connaissances mathématiques qui peuvent être investies. La dimension de vérification de son travail et même le lien avec des activités métacognitives apparaît également dans les dernières heuristiques.

Pour parvenir à ce modèle, Pólya analyse le processus de résolution de problèmes mis en œuvre par des experts dans le domaine des mathématiques. Ce modèle est prescriptif dans le sens où son auteur a l'ambition d'indiquer voire d'enseigner aux élèves les étapes par lesquelles ils doivent passer pour résoudre un problème. Le modèle de Pólya a servi de base à plusieurs chercheurs pour développer leur propre approche dont en particulier Schoenfeld.

2.2.5 Le modèle de Schoenfeld

Schoenfeld (1985) a enrichi le modèle de Pólya en ajoutant une phase qu'il appelle *exploration* (Figure 5) pour rendre compte de la part de la recherche qui tend à s'éloigner de la compréhension de l'énoncé à proprement parler, qui donc ne fait plus partie de la phase d'appropriation, mais pour autant ne se constitue pas (encore) en un plan, qu'il s'agirait de mettre en œuvre. Nous pouvons associer cette phase d'une certaine manière au parcours dans l'espace-problème (au sens de Newell et Simon) pour lequel « the majority of problem-solving heuristics come into play » (Schoenfeld, 1985, p. 110). Par l'ajout de cette phase, Schoenfeld se distingue de Pólya en ce qu'il affirme que le processus n'est pas forcément linéaire, mais qu'il peut être même cyclique. En effet, les cycles sont représentés par une boucle entre les phases planification – exploration – appropriation ou par un aller-retour planification – exploration.

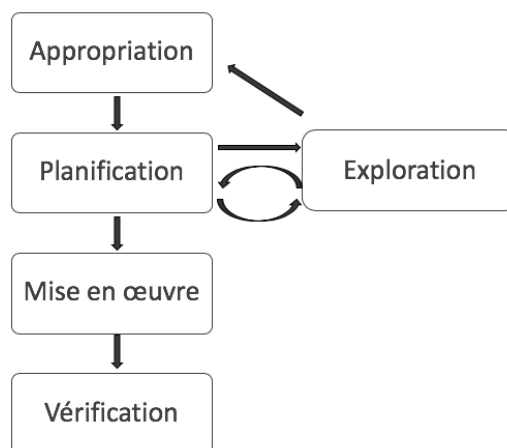


Figure 5. Présentation simplifiée et traduite du modèle de Schoenfeld (1985)

Ce modèle, que l'on peut qualifier de normatif puisqu'il est censé représenter des processus idéaux (Ibid, p. 107), s'inscrit dans un cadre théorique plus large qui comporte quatre catégories. « I argue that the four categories of knowledge and behavior introduced here must be dealt with, if one wishes to 'explain' human problem-solving behavior. » (Ibid, p. 12), explicitées dans la figure suivante :

Resources: Mathematical knowledge possessed by the individual that can be brought to bear on the problem at hand

Intuitions and informal knowledge regarding the domain

Facts

Algorithmic procedures

“Routine” nonalgorithmic procedures

Understandings (propositional knowledge) about the agreed-upon rules for working in the domain

Heuristics: Strategies and techniques for making progress on unfamiliar or nonstandard problems; rules of thumb for effective problem solving, including

Drawing figures; introducing suitable notation

Exploiting related problems

Reformulating problems; working backwards

Testing and verification procedures

Control: Global decisions regarding the selection and implementation of resources and strategies

Planning

Monitoring and assessment

Decision-making

Conscious metacognitive acts

Belief Systems: One’s “mathematical world view,” the set of (not necessarily conscious) determinants of an individual’s behavior

About self

About the environment

About the topic

About mathematics

Figure 6. Explication des quatre catégories qui composent le cadre théorique de Schoenfeld (1985, p. 15)

2.2.6 Le modèle de Rott

Rott (2012b) met quant à lui à l’épreuve les modèles de Pólya et Schoenfeld en analysant les processus effectivement mobilisés par des élèves de 10-12 ans pour résoudre des problèmes dans des conditions de laboratoire (élèves volontaires pris hors temps scolaire). Ses analyses montrent que les processus mobilisés par les élèves ne sont pas tous linéaires (30 sur un total de 98 observations). Ce nombre, loin d’être négligeable, met bien en évidence le fait qu’un modèle strictement linéaire comme celui de Pólya n’est pas adapté pour décrire de façon réaliste le travail des élèves. De plus, parmi ces 30 résolutions, Rott en compte 12 pour lesquelles le processus peut être considéré comme cyclique et donc 18 de ces résolutions présentent des processus non-linéaires. Aussi, les modèles d’analyse non-linéaires doivent permettre des jonctions entre les différentes phases du processus de résolution. Le modèle cyclique de Schoenfeld est un sous-cas de tous les cas envisageables par un modèle non-linéaire. Par ailleurs, Rott observe que les élèves n’explicitent pas forcément leur plan de résolution avant de le mettre en œuvre, ce qui l’amène à regrouper les phases de planification et de mise en œuvre. Enfin, les élèves ne passent pas toujours directement de l’appropriation à la planification et sa mise en œuvre, mais bien souvent, par une phase d’exploration. Cela confirme l’importance de considérer cette phase d’exploration pour rendre compte de la dimension non structurée d’une partie de certains processus.

Rott dégage des propriétés que devrait posséder un modèle pour décrire les processus de résolution de problème pour des élèves de 10-12 ans :

There should be a distinction between structured and unstructured behavior (Planning and Exploration) as in Schoenfeld’s model.

It should be possible to intertwine Planning and Implementation.

The framework should be able to display both linear and cyclic processes – with the majority of those processes being linear. (p. 105-106)

Ces différentes idées sont représentées par le schéma suivant (Ibid.) :

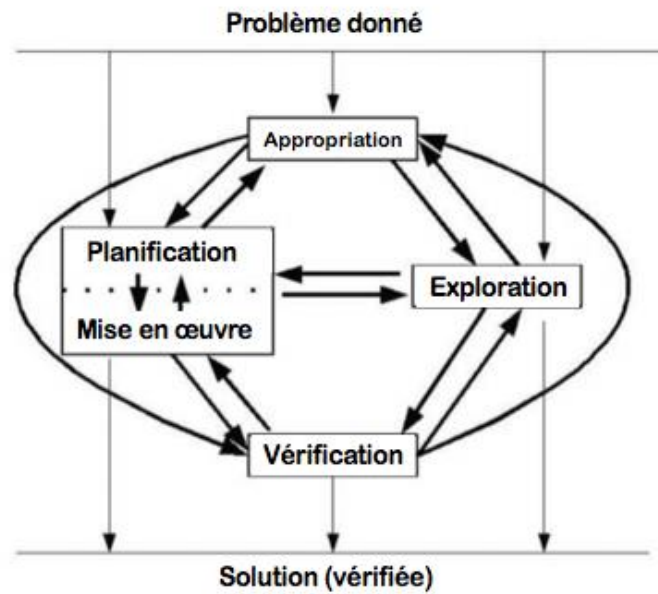


Figure 7. Traduction du modèle de Rott (2012b)

Ainsi, selon Rott, ce modèle permet une description des processus de résolution de problèmes.

2.2.7 Synthèse

Ces différents modèles rendent compte de certains aspects de la résolution de problèmes. Nous tentons, dans cette synthèse, de faire ressortir leurs points de contact ou les différences qui peuvent exister entre eux.

Les différences les plus évidentes portent sur le type de problèmes mathématiques considéré, le public étudié et la fonction du modèle. Nous regroupons ces différentes informations dans le tableau suivant :

Modèles	Types de problèmes	Public étudié	Fonctions du modèle
Richard	problèmes de transformations d'états	Tout public	Prédictif, interprétatif
Gros et al	problèmes arithmétiques à énoncés verbaux	Jeunes enfants	Interprétatif
Julo	problèmes de mathématiques plus généraux	Tout public	Interprétatif
Pólya	problèmes de mathématiques plus généraux	Experts en mathématiques	Normatif et Prescriptif
Schoenfeld	problèmes de mathématiques plus généraux	Étudiants et experts en mathématiques	Normatif
Rott	problèmes de mathématiques plus généraux	Élèves de 10-12 ans volontaires	Descriptif et interprétatif

Tableau 1. Présentation de quelques caractéristiques différenciant les 6 modèles considérés

Les problèmes de transformations d'états permettent de connaître a priori tous les états possibles par lesquels sont susceptibles de passer les sujets. Ce qui est étudié est donc la séquence des différents états rencontrés contrairement aux autres études qui laissent beaucoup plus de place à des contenus qui peuvent prendre des formes très différentes. De plus, les connaissances mathématiques investies dans de tels problèmes touchent davantage au raisonnement qu'à des savoirs mathématiques à proprement parler ce qui les différencie des problèmes étudiés dans les autres études.

Notons que tous les modèles rendent compte de processus qui ont une granularité différente. Les trois premiers étudient principalement les questions de représentation et des heuristiques qui sont des éléments appartenant au niveau microscopique de la résolution de problèmes. Les trois derniers mettent en avant un découpage temporel plus macroscopique qui est complété par des éléments de niveau microscopique.

En effet, les trois derniers modèles sont constitués de différentes étapes par lesquelles peut passer celui qui résout un problème de mathématiques. Ces étapes sont colorées différemment par un ensemble d'heuristiques (Pólya) ou la prise en compte d'heuristiques, ressources, croyances (Schoenfeld) qui permettent d'explicitier la place accordée notamment aux questions de représentation et à celle des connaissances mathématiques qui auraient pu sembler absentes dans ces modèles.

Cette présentation en étapes permet d'intégrer la dimension temporelle qui est exploitée différemment selon ces modèles. Citons par exemple l'exploitation prescriptive du modèle de Pólya que l'on retrouve encore aujourd'hui dans les moyens d'enseignement romands (Conférences Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), 2019) ; les enseignants sont invités à se référer à ce modèle pour enseigner à leurs élèves quelles étapes ils doivent réaliser pour résoudre un problème. Quant au modèle de Rott, il permet de décrire dans un ordre chronologique la trajectoire empruntée par ceux qui résolvent les problèmes. D'ailleurs, nous avons vu que c'est en étudiant ces trajectoires que Rott a enrichi le modèle de Schoenfeld en connectant les différentes étapes et en précisant de plus que ces flèches représentent les activités d'auto-régulation.

Les trois premiers modèles étudient spécifiquement des processus liés à la représentation que se construit un sujet lorsqu'il résout des problèmes. Ce processus de représentation se décline suivant des aspects différents :

- Richard considère les interprétations que le sujet peut se faire de la situation et/ou de la consigne ; les heuristiques générales de résolution de problème et les buts du sujet. Il définit la représentation comme un ensemble de contraintes. Les connaissances mathématiques n'apparaissent pas explicitement ;
- Julio met en évidence trois processus principaux qui caractérisent, selon lui, la représentation. Il situe ces processus dans un double mouvement entre les caractéristiques de la situation et les connaissances du sujet ;
- Gros et al. introduisent une précision supplémentaire puisqu'ils différencient, relativement aux connaissances du sujet, les connaissances du monde et les connaissances mathématiques du sujet. La représentation est vue au travers d'un encodage et, dans les cas de non congruence sémantique, d'un potentiel recodage sémantique.

Les phénomènes d'impasse sont décrits et potentiellement dépassés de manières différentes selon les modèles. Pour Richard, il s'agit d'un cumul de contraintes n'autorisant plus d'action parmi celles possibles. La sortie de l'impasse se fait en hiérarchisant les contraintes de manière à relâcher les moins primordiales.

Selon Gros et al, un sujet se trouve dans une impasse dans le cas où :

« no tractable algorithm can be derived from the interpreted structure encoded , the solver faces a dead-end and the need for a recoding process arises. Such a process would appeal to mathematical semantics (e) and not to world semantics, in order to encode a new representation consistent with the deep structure (f) of the problem and thus allow the use of a new algorithm as a result. » (2020, p. 74).

Il est intéressant de noter que ce modèle prévoit une sortie de l'impasse par un recodage sémantique qui repose seulement sur les connaissances mathématiques du sujet.

Les phénomènes d'impasses sont interprétés par Julio comme des dysfonctionnements qu'il attribue aux processus en jeu dans la construction de la représentation. Par exemple, l'interprétation du contexte sémantique (*processus d'interprétation et de sélection*) peut introduire une contrainte très forte qui impacte le contenu de la représentation et le cadre à l'intérieur duquel elle se structure (*processus de structuration*). Cette vision sous forme de contrainte n'est pas s'en rappeler celle de Richard exposée juste avant. Dans d'autres cas, ce peut être la conséquence d'une structuration autour « d'un prototype de problème c'est-à-dire d'une connaissance qui se présente comme un problème rassemblant plusieurs traits caractéristiques d'un ensemble de problèmes » (Julio, 1995, p. 45). Ce cas de figure nous semble correspondre à un cas de non congruence sémantique. Dans tous les cas, la sortie de l'impasse passe, selon lui, par une évolution de la représentation « qui ne peut résulter que d'un processus complexe impliquant à la fois une remise en cause de la représentation construite et une restructuration de celle-ci » (Ibid, p. 47). Sur ce point, il y a un écart avec le modèle de congruence sémantique dans la mesure où dans ce dernier le recodage sémantique ne s'appuie que sur les connaissances mathématiques tandis que pour Julio, les connaissances du sujet, c'est-à-dire les connaissances mathématiques et les connaissances du monde, ainsi que les caractéristiques de la situation peuvent jouer un rôle pour cette restructuration.

Enfin, la question de l'expertise a une place différente selon les modèles. Nous avons vu que les modèles de Pólya et de Schoenfeld sont construits sur l'analyse du travail d'experts en mathématiques. Par exemple, Schoenfeld précise que son modèle : « represents what may be called the *ideal* problem solver, or the most systematic behavior of good problem solvers » (Schoenfeld, 1985, p. 107). Le modèle de Rott et celui de Gros et al s'emparent également de la question de l'expertise mais comme des cas particuliers inclus dans un modèle plus général. En effet, il est possible de retrouver l'enchaînement des phases des modèles de Pólya et de Schoenfeld dans le modèle enrichi de Rott. Et le modèle de Gros et al. prévoit un encodage qui s'appuie uniquement sur les connaissances mathématiques et qui permet d'accéder directement à la structure profonde du problème. Cet encodage est appelé « expert encoding ». Notons par ailleurs, que cet aspect a été également étudié par Schoenfeld d'un point de vue plus microscopique qui a conclu que : « expert's

perceptions are based on deep structure while novice's are based on surface structure » (Schoenfeld, 1985, p. 265).

2.2.8 Conclusion

De par les différences relatives notamment aux types de problèmes et aux différents publics étudiés, la confrontation de ces modèles constitue une sorte de mosaïque qui permet de capturer des aspects différents de la résolution de problèmes. Ces aspects se différencient aussi par le grain d'analyse.

Les modèles macroscopiques ont l'avantage et l'intérêt de prendre en compte la chronologie de la recherche. Ceci se fait au travers de la caractérisation des différentes étapes du modèle ainsi que de leur enchaînement. D'ailleurs, de manière très récente, Rott, Specht et Knipping (2021) ont proposé de telles analyses auprès d'étudiants en formation initiale d'enseignants. Ils font ressortir des différences intéressantes relativement à des groupes qui résolvent des problèmes de mathématiques dans des conditions différentes (par exemple avec un logiciel de géométrie dynamique *vs* papier-crayon). Cette dimension macroscopique est intéressante pour décrire les démarches des élèves mais est non suffisante puisque, comme nous l'avons vu plus haut, chacun des modèles macroscopiques est complété par des éléments d'une granularité plus fine. Ce sont ces éléments qui sont l'aspect central des autres modèles. Nous faisons le choix de nous concentrer sur la représentation du problème et les heuristiques.

Concernant la représentation du problème, nous retenons l'idée de différents processus qui interviennent jusqu'à être suffisamment opérationnels pour donner lieu à des actions. Nous nous saisissons également de la notion de contraintes, comme par exemple celles liées à l'interprétation des données du problème, qui nous paraît très intéressante pour rendre compte de certaines difficultés.

Concernant les heuristiques, cet aspect de la résolution de problèmes suscite aussi notre intérêt car comme l'affirme Rott (2015) en résumant différentes recherches relatives aux heuristiques: « there seems to be a positive correlation (not necessarily in a statistical sense) between the use of heuristics, the success in problem solving and increasing competencies in problem solving respectively » (p. 125). Toutefois, nous observons des écarts significatifs dans la manière de caractériser ce concept d'heuristique dans la littérature ne serait-ce que celles mentionnées ci-avant. C'est ce dont nous allons rendre compte à présent.

3. Les heuristiques

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au concept d'heuristique. Nous commençons l'étude en nous appuyant sur des recherches notamment dans le domaine de la psychologie cognitive pour pointer l'intérêt et le potentiel de ce concept pour expliquer certains phénomènes observés en résolution de problèmes. Cet appui est aussi l'occasion d'esquisser la diversité des caractérisations et des propriétés des heuristiques. S'ensuivent une étude épistémologique de l'heuristique mathématique puis didactique de l'heuristique en résolution de problèmes mathématiques qui, partant de la richesse présente dans la littérature, nous amènent à une manière unificatrice de la caractériser.

3.1 Une diversité de caractérisations

Selon le (CNRTL, s.d.), le terme *heuristique* provient du grec *εὕρισκω* (qui signifie « je trouve ») qui, conjugué au passé, donne le célèbre cri, *Eurêka* (« j'ai trouvé »), qu'Archimède aurait lancé, selon la

légende, en découvrant les principes qui régissent la poussée que les objets subissent lorsqu'ils sont plongés dans un liquide. Dans son acception générale et toujours selon le CNRTL, ce terme est à la fois un substantif « art de trouver, de découvrir » et un adjectif « qui sert à la découverte ». Si l'idée principale est bien liée à la découverte, elle est colorée de manière différente en fonction du contexte. Par exemple, en psychologie cognitive, et à la suite de Newell et Simon (1972), Richard (1994) définit les heuristiques comme « des règles générales d'exploration de l'espace-problème » (p. 536). Il met en évidence trois catégories générales d'heuristiques sur des problèmes de transformation d'états⁵. La plus basique est l'exploration aléatoire pour laquelle les actions sont choisies au hasard parmi celles autorisées. La deuxième catégorie correspond aux heuristiques qui reposent sur « l'évaluation de l'écart au but [...] : elles partent de l'état actuel et tentent de progresser vers le but » (p. 537). La dernière catégorie rassemble « les heuristiques de production de buts » (Ibid). Il s'agit, à l'inverse de la seconde, de partir du but du problème pour remonter vers l'état initial. Richard complète ces heuristiques générales par des heuristiques plus élémentaires. Citons par exemple « ne pas revenir en arrière » (2004, p. 250), « faire l'action qui laisse ultérieurement la plus grande liberté d'action » (2004, p. 251) lorsqu'on a le choix entre plusieurs actions ou encore « ne pas répéter l'action faite la dernière fois » (Ibid.) lorsque l'on pense se trouver dans une impasse déjà rencontrée. Ces heuristiques jouent un rôle, selon Richard, notamment pour interpréter certains échecs massifs. Illustrons cette idée avec le problème des missionnaires et des cannibales (Figure 8) :

Il y a au départ 3 missionnaires et 3 cannibales sur la rive gauche d'une rivière. La tâche est de les transporter tous sur l'autre rive en respectant les contraintes suivantes :

- on dispose d'un bateau qui ne contient que deux personnes (il faut entendre que dans la traversée de la rivière il doit y avoir toujours au moins une personne dans le bateau pour le conduire) ;
- il faut qu'à aucun moment il n'y ait sur une rive (ou sur la rive et dans le bateau, si le bateau est sur la rive) plus de cannibales que de missionnaires.

Figure 8. Problème des missionnaires et des cannibales (Richard, 2004)

La représentation graphique de l'espace effectif de ce problème (voir Figure 9) montre qu'il est finalement très simple. En effet, lorsque l'on effectue uniquement des déplacements autorisés en s'interdisant de revenir en arrière, on devrait aboutir directement à la solution avec le nombre minimal d'étapes. Pour autant, ce problème se révèle difficile selon Richard, qui constate que de nombreux sujets ne trouvent pas de solution principalement lorsqu'ils sont à la position repérée en rouge sur la Figure 9.

⁵ Voir partie **Error! Reference source not found.** pour une définition de ce type de problèmes

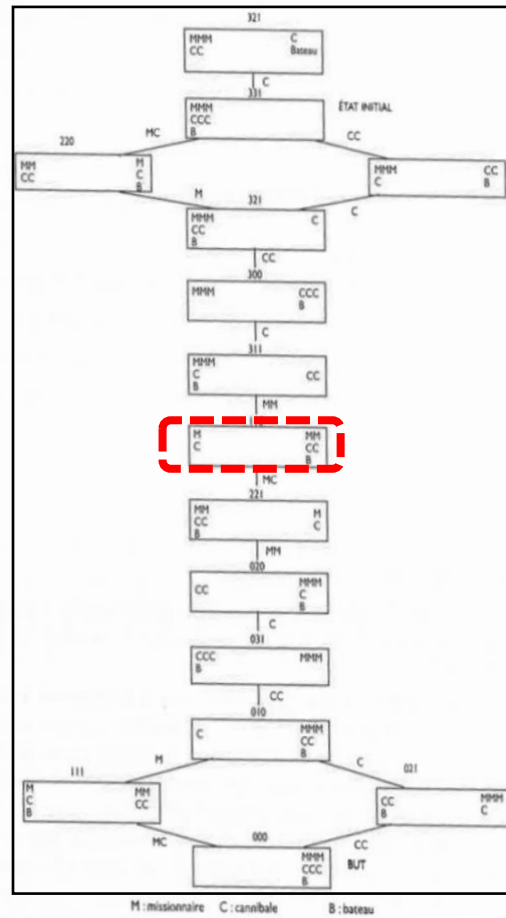


Figure 9. Repérage du point de blocage sur l'espace effectif (Missionnaires et cannibales)

En effet, à ce stade, Richard observe que les sujets reviennent en arrière ou tentent un mouvement interdit (par exemple ramener un missionnaire sur la rive gauche ce qui implique que sur la rive droite se trouvent plus de cannibales que de missionnaires). Il explique ces observations fréquentes qui peuvent paraître étonnantes par la mobilisation de l'heuristique « ne pas s'éloigner du but » : après avoir ramené deux personnages sur la rive droite, les sujets pensent s'éloigner de la solution en ramenant deux autres personnages sur la rive gauche. Dans ce cas, la mobilisation d'une certaine heuristique semble pertinente pour expliquer un échec important. La caractérisation des heuristiques se réalise ainsi par l'énonciation de règles générales ou particulières.

De son côté, Kahneman (2012) définit l'heuristique comme une « procédure simple qui permet de trouver des réponses adéquates, bien que souvent imparfaites, à des questions difficiles » (p. 123) et de préciser qu'elle n'est pas mise en œuvre de manière « délibérée » par un sujet. Pour Houdé (2019), « une heuristique est une stratégie très rapide, très efficace – donc économique cognitivement –, qui marche très bien, très souvent, mais pas toujours !... [...] il s'agit souvent d'automatismes » (p. 369). Il apparaît, dans ces deux définitions, l'idée que la mise en œuvre d'heuristiques se fait de manière automatique, non délibérée, par un sujet, ce qui les distingue assez nettement des définitions précédentes.

Dans un autre domaine, celui de l'intelligence artificielle (IA), Romanycia et Pelletier (1985) proposent une revue de littérature des différentes définitions des heuristiques proposées par les chercheurs en IA et mettent en exergue le fait qu'elles recouvrent parfois des propriétés différentes. Par exemple, pour Feigenbaum et Feldman « a process that may solve a given problem, but offers no guarantees of doing so, is called a heuristic for that problem » (1963, p. 141) tandis que Tonge (1960) met en avant les notions d'efficacité et de réduction de l'effort pour parvenir à une solution

satisfaisante reléguant l'idée de non garantie de la solution au second plan. Romanycia et Pelletier discutent également de l'opposition ou non entre heuristique et algorithme qui fait débat dans leur communauté.

Ce tour d'horizon, bien que non exhaustif, est suffisant pour appréhender à la fois le rôle pertinent des heuristiques pour expliquer certains phénomènes observés en résolution de problèmes et la diversité inhérente à la nature des heuristiques. Nous allons à présent recentrer notre propos en étudiant plus spécifiquement l'heuristique en mathématiques du point de vue épistémologique puis didactique.

3.2 Point de vue épistémologique de l'heuristique mathématique

Pólya (1957) distingue l'Heuristique ou Heurétiqque ou « *ars inveniendi* » qui est une science qui a « pour objet l'étude des règles et des méthodes de la découverte et de l'invention » (p. 93) de l'Heuristique moderne qui « s'efforce de comprendre la méthode qui conduit à la solution des problèmes, en particulier les *opérations mentales qui s'avèrent typiquement utiles* » (souligné par Pólya, Ibid).

Nous commençons notre investigation sur la notion d'heuristique par une quête des fondements épistémologiques à travers l'étude de deux célèbres mathématiciens hongrois du vingtième siècle : Pólya et Lakatos. Dans la préface de son ouvrage *Les mathématiques et le raisonnement plausible*, Pólya (1958) explique que :

Le résultat du travail créateur du mathématicien est un raisonnement démonstratif, une preuve ; mais la preuve est découverte, par un raisonnement plausible, elle est d'abord devinée. Si l'étude des mathématiques reflète, jusqu'à un certain point, les cheminements de la découverte il faut y ménager une place pour l'art de deviner, pour l'inférence plausible. (p. X)

Cette citation permet de saisir la brèche créée par Pólya vis à vis de l'heuristique mathématique basée sur le déductivisme qui a prévalu depuis l'époque des mathématiciens de la Grèce antique dont l'un de ses illustres représentants est Pappus d'Alexandrie. Ce renouveau de l'heuristique mathématique impulsé par Pólya s'appuie sur l'induction qu'il définit comme « une manière de raisonner qui conduit à la découverte de lois générales en partant de l'observation d'exemples particuliers et de leur combinaison » (Pólya, 1957, p. 110). Le terme *induction* est bien pris ici dans son acception dans le champ de l'étude du raisonnement, et donc à distinguer de l'*induction mathématique* autrement appelée raisonnement par récurrence. Prenons un exemple pour illustrer cette distinction. On peut observer que :

$$1^3 = 1 = 1^2$$

$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2$$

Le mathématicien peut induire une conjecture plus générale du type « la somme des n premiers cubes est un carré ». Une observation supplémentaire permet de se rendre compte que pour ces différents cas :

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

C'est encore par induction que le mathématicien peut formuler une loi plus générale du type :

Pour $n = 1, 2, 3, \dots$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)^2$$

Ceci étant, les différentes valeurs de n qui peuvent être testées ne font rien de plus qu'accroître le degré de vraisemblance de cette conjecture. Seule une démonstration rigoureuse permet d'obtenir ce résultat de manière définitive et sûre. En l'occurrence, ce résultat se démontre⁶ facilement à l'aide d'un raisonnement par récurrence, une induction mathématique. Ce petit exemple permet d'appréhender à la fois la distinction entre ces deux types d'induction et leurs utilisations conjointes dans des fonctions très différentes : conjecturer et prouver.

Revenons à l'heuristique mathématique. Si l'inspiration est clairement du côté de l'heuristique scientifique, Pólya distingue l'activité mathématique en ce sens que « dans les sciences physiques, en effet il n'y a rien au-dessus de l'observation et de l'induction, tandis qu'en mathématiques, on trouve, en plus, la preuve rigoureuse » (Ibid, p. 112). L'exemple précédent illustre également cette distinction.

En conclusion, pour Pólya « les mathématiques en gestation sont une science expérimentale, inductive » (Ibid, p. 112) au sein de laquelle la généralisation, la particularisation et l'analogie jouent un rôle fondamental. Lakatos salue les avancées dues à son collègue et compatriote mais il en pointe aussi une limite liée au fait que Pólya ne considère que cette nature inductive des mathématiques. En effet, selon Lakatos (1984) :

Heuristique mathématique et heuristique scientifique sont très semblables, non parce qu'elles sont toutes deux inductives mais parce que toutes deux se caractérisent par la mise en œuvre de conjectures, de preuves et de réfutations. La différence, importante, réside dans la nature respective des conjectures, des preuves (en sciences, des explications) et des contre-exemples. (souligné par Lakatos, p. 94)

Concernant les conjectures, Lakatos parle de conjecture naïve pour évoquer une conjecture qui est suivie d'une tentative de preuve. Il considère ainsi qu'une conjecture naïve n'est pas forcément inductive, c'est-à-dire suggérée par les faits, mais qu'elle peut être le fruit d'une succession de conjectures et de réfutations.

Pour illustrer cette idée, prenons l'exemple de la construction de la relation d'Euler retracée par Lakatos dans son ouvrage *Preuves et réfutations* (1984). Il explique que la formule à laquelle sont parvenus les mathématiciens à savoir que le nombre de sommets (S) d'un polyèdre augmenté du nombre de faces (F) est égal au nombre d'arêtes (A) plus deux ($F+S=A+2$) n'a pas été obtenue en suivant une démarche inductive c'est-à-dire en observant le nombre de faces, arêtes et sommets de plusieurs polyèdres pour en faire ressortir une relation. Selon lui, les mathématiciens y sont arrivés « par essais et erreurs ; par une suite de conjectures et de réfutations » (1984, p. 94). Ils ont d'abord conjecturé que F augmente avec S. Cette conjecture a été réfutée pour laisser place à une autre conjecture : A augmente avec F. Nouvelle réfutation et nouvelle conjecture : A augmente avec S. Enfin, une autre réfutation les a amenés à la conjecture que F+S augmente avec A puis à la relation $F+S=A+2$. Ainsi, selon Lakatos, les essais correspondent à des conjectures et les erreurs aux réfutations. Il montre ainsi dans ce cas que ce sont les conjectures réfutées qui ont suggéré les faits et non l'inverse.

Une autre caractéristique essentielle de l'heuristique mathématique selon Lakatos concerne les preuves et le rôle joué par les contre-exemples. Par preuve, il entend une « expérience mentale (ou

⁶ Voir (Pólya, 1957, p. 113-115) pour un exemple de cette démonstration.

une quai-expérience) qui suggère une décomposition de la conjecture originale en sous-conjectures ou lemmes » (1984, p. 12).

Ainsi, l'heuristique mathématique selon Lakatos s'appuie sur les cinq règles suivantes :

- Règle 1 : En présence d'une conjecture, mettre en chantier sa preuve comme sa réfutation. Examiner la preuve avec précaution pour préparer une liste de lemmes non triviaux (la preuve-analytique) ; trouver des contre-exemples à la fois à la conjecture (aspect global) et aux lemmes suspects (aspect local).
- Règle 2 : En présence d'un contre-exemple global, écarter votre conjecture, ajouter à la preuve-analytique un lemme convenable, réfuté par le contre-exemple, et remplacer la conjecture écartée par une version améliorée en lui incorporant ce lemme sous forme de condition. Ne pas accepter qu'une réfutation soit écartée comme un monstre. Essayer d'explicitier tous les 'lemmes cachés'.
- Règle 3 : En présence d'un contre-exemple local, vérifier s'il n'est pas non plus global. Si oui, il est aisé d'appliquer la Règle 2.
- Règle 4 : En présence d'un contre-exemple local et non global, essayer d'améliorer la preuve analytique en remplaçant le lemme réfuté par un autre qui ne le soit pas.
- Règle 5 : En présence de contre-exemples, quel qu'en soit le type, essayer de trouver par une spéculation déductive un théorème plus profond pour lequel ce ne sont plus des contre-exemples. (p. 63-97)

Chaque contre-exemple, quelle que soit sa nature globale et/ou locale, est un levier qui permet d'améliorer la conjecture et/ou la preuve. Il s'agit d'une rupture nette avec l'heuristique de Pappus qui, partant d'une conjecture, en fait l'analyse-synthèse et parvient à la prouver ou l'infirmier sans possibilité d'amélioration. La difficulté est que cette rupture n'est pas visible puisque Lakatos constate, à l'instar de Pólya, que « conjecture naïve et contre-exemples n'apparaissent pas dans la structure déductive pleinement achevée ; le zig-zag de la découverte ne peut être discerné dans le produit final » (p. 53). Leurs écrits respectifs tentent ainsi de mettre à jour leur justification heuristique en lien avec certaines découvertes mathématiques.

Cette idée de rendre visible la partie cachée de l'activité mathématique ne se cantonne pas au travail du mathématicien car Pólya (1958) propose de s'en inspirer également pour l'enseignement des mathématiques :

Bien entendu, enseigner la démonstration aux élèves des classes de mathématiques est, sans aucun doute, une chose désirable. Mais ne leur apprendre que des démonstrations pourrait être moins désirable. Si l'on cache aux élèves, systématiquement, que les théorèmes démontrés aujourd'hui furent devinés autrefois, et si on leur cache aussi les raisons inductives ou analogiques qui peuvent provoquer la découverte, on ne leur rend pas le meilleur service, on ne les « éclaire » pas suffisamment (p. 273)

C'est sans doute cette volonté qui l'a mené à chercher à identifier les « opérations mentales qui s'avèrent typiquement utiles » pour trouver les solutions des problèmes. Il y a ici un implicite lexical à comprendre. Comme la langue française permet de faire la distinction, précieuse dans le cadre de la TSD, entre savoir et connaissance, la langue allemande propose deux termes : heuristik et heurism, pour faire la différence entre la discipline « heuristik » qui étudie les méthodes de la découverte et de l'invention et ce qui correspond aux heuristiques propres à la résolution de problèmes appelées « heurism ». Dans ce paragraphe, nous avons présenté les heuristiques mathématiques au sens de « heuristik » de Pólya et Lakatos. Dans le paragraphe suivant, nous nous intéressons aux heuristiques (« heurism ») liées à la résolution de problèmes et montrons toute la richesse en partant bien évidemment du travail fondateur de Pólya.

3.3 Les heuristiques en didactique des mathématiques

Pólya analyse les solutions des problèmes et les méthodes utilisées pour les résoudre afin de dégager des traits communs et de déterminer des caractéristiques qui soient indépendantes du problème. Pólya cherche ainsi à mieux comprendre les « opérations mentales typiquement utiles dans la solution d'un problème » (1957, p. 94). Il fait l'hypothèse que cette meilleure compréhension peut avoir des effets favorables sur les méthodes d'enseignement. Son intention est prescriptive et la forme que prend son travail le confirme. En effet, il complète chacune des quatre phases qui constituent son modèle⁷ par différentes questions ou suggestions (voir Figure 4) que celui qui cherche à résoudre un problème peut se poser ou suivre. La plupart de ces questions ou suggestions sont reprises de manière détaillée dans ce que l'auteur appelle « Petit dictionnaire d'heuristique » (1957, p. 43). La définition proposée par Pólya éclaire à la fois sur la nature : « opérations mentales » et sur une propriété des heuristiques : leur utilité au cours de la résolution de problèmes. De nombreux auteurs se sont emparés de ce travail et ont contribué également au développement et à la richesse de ce concept en proposant des approches complémentaires.

C'est le cas notamment de Schoenfeld (1985) qui, en définissant les heuristiques comme des « rules of thumb for successful problem solving, general suggestions that help an individual to understand a problem better or to make progress toward its solution » (p. 23) explicite leur utilité. Certains donnent une définition très générale à l'instar de Larson (1983) « Strategy or tactics in problem-solving is called heuristics » (p. 1) ou de Posamentier et Krulik (2009) « heuristics is the process by which a problem solver attempts various approaches to find the solution to a problem » (p. 4). Ces définitions précisent des natures différentes : règle générale, stratégie, tactique et même processus. Goldin (1998) reprend cette idée de processus et la spécifie à l'aide d'exemples : « the heuristic process is in my view the most useful organizational unit, and culminating construct, in a system of planning, monitoring, and executive control. Such processes include “trial and error,” “think of a simpler problem,” “explore special cases,” “draw a diagram,” etc. » (p. 153). Cette définition met en lien heuristique et activités de planification et de contrôle. Koichu, Berman et Moore (2006) complètent cette dimension métacognitive par des éléments relatifs au domaine d'application des heuristiques :

(...) we refer to heuristics as a systematic approach to representation, analysis and transformation of mathematical problems that solvers of those problems use in planning and monitoring their solutions. Some heuristics are narrow and domain-specific, whereas others are universal and cut across many problem-solving domains. In actual problem solving, a particular heuristics can come as an enduring or as a transient way of thinking. (p.458)

Pour ces différents chercheurs, les heuristiques peuvent être transversales à plusieurs domaines de la résolution de problèmes mais aussi être très spécifiques, et ne s'appliquer qu'à un domaine particulier. Ce dernier point élargit la conception initiale de Pólya et met également en évidence l'importance que peut avoir une heuristique dans la solution dont les pôles extrêmes sont : constituer la structure principale de cette solution ou représenter une étape très locale de la résolution.

La caractérisation de Julo (1995) met en exergue l'efficacité non garantie d'une heuristique car, selon lui, les heuristiques sont des « connaissances propres à la résolution de problèmes qui ne conduisent pas directement à la solution d'un problème donné mais qui augmentent la probabilité de découvrir celui-ci » (p. 22). Nous retrouvons cette même idée chez Verschaffel (1999) et, de manière moins explicite, chez Brousseau (2012) quand il indique que « si les heuristiques ont la

⁷ Rappelons que ces quatre phases sont : comprendre le problème, concevoir un plan, mettre le plan à exécution et revenir sur la solution.

forme de règles ou d'énoncés mathématiques, les conditions de leur validité et surtout de leur emploi n'en font pas des théorèmes : 'il faut essayer' » (p. 118).

Enfin, une dernière propriété, en lien avec l'idée que nous venons d'énoncer, est pointée par Glaeser (1999) qui oppose heuristique à algorithmique. L'algorithmique se caractérise par des procédures systématiques qui aboutissent à une réponse de manière certaine. Au-delà de l'efficacité non garantie, cette opposition vise à faire ressortir la part de la résolution de problèmes qui consiste « à deviner, à tâtonner, à renoncer à des fausses pistes dans lesquelles on s'égaré, à inventer, à découvrir... » (p. 112)

Pour conclure cette partie, nous retenons que la confrontation de toutes ces définitions ou de ces caractérisations, fait ressortir qu'une heuristique est considérée tour à tour comme une opération mentale, une règle générale, une suggestion, une stratégie, une tactique, une connaissance ou encore un processus. De plus, les éléments qui caractérisent une heuristique sont très variés. Nous avons évoqué entre autres l'utilité, l'absence de garantie, le domaine d'application, la dimension métacognitive. Le constat est clair, comme le suggère Rott (2014), « despite its importance for problem solving (research), there is not a generally accepted definition of the term "heuristic" » (p. 176). Dans ce foisonnement de définitions, une distinction nous a cependant paru porteuse c'est celle ayant trait à la fonction prescriptive ou descriptive des heuristiques, que nous allons maintenant aborder.

3.4 Heuristique prescriptive *vs* heuristique descriptive

Dans cette partie, nous rendons compte de plusieurs études qui ont tenté de mettre en évidence un lien favorable entre l'utilisation d'heuristiques et la réussite en résolution de problèmes (heuristique descriptive). Pour cela, la plupart des études que nous évoquons ont proposé un enseignement fondé sur les heuristiques avant d'en mesurer les effets. Nous allons voir que la plupart de ces travaux restent timides sur la possibilité de mettre en place un enseignement des heuristiques qui permettrait d'améliorer nettement les capacités des élèves à résoudre des problèmes de mathématiques (heuristique prescriptive). Nous explicitons ensuite les arguments qui peuvent expliquer, selon leurs auteurs, les effets relativement faibles de l'enseignement des heuristiques.

Lucas (1974) a proposé un protocole à un groupe de 30 étudiants universitaires répartis en un groupe expérimental et un groupe contrôle. Chaque groupe a reçu un programme d'enseignement d'une durée de huit semaines dont la différence essentielle concernait l'accent mis sur les stratégies de résolution de problèmes. Les problèmes étaient discutés de manière plus approfondie relativement aux stratégies de résolution dans le groupe expérimental contrairement au groupe contrôle pour lequel le traitement des problèmes abordait principalement l'exposition de la solution avec peu d'attention accordée à la dimension des heuristiques, les discussions visant le renforcement des concepts mathématiques. De plus, douze articles décrivant et montrant différentes stratégies heuristiques ont été distribués, comme lecture facultative, aux étudiants du groupe expérimental. Les résultats de cette recherche montrent un effet positif au niveau du changement de stratégies heuristiques ainsi qu'au niveau de l'amélioration de la performance de certains aspects de la résolution de problèmes.

De son côté, Kantowski (1977) a mené une étude exploratoire auprès de huit élèves de 9^e grade (14-15 ans) sur une durée totale de cinq mois. Contrairement au dispositif précédent, les huit élèves ont reçu le même enseignement. Une phase de 4 semaines (3 leçons par semaine) avait pour but de familiariser les sujets avec la méthode d'enseignement heuristique et de les initier à l'utilisation des heuristiques dans la résolution de problèmes. Puis une phase de 4 mois comprenait l'enseignement de la géométrie à l'aide de techniques d'instruction heuristiques. Notons qu'aucune information supplémentaire n'est communiquée relativement à cette méthode d'enseignement

heuristique. Pour chaque sujet, Kantowski attribue un score de « process-product » (p. 165) qui rend compte de la réussite à partir d'indicateurs comme la suggestion d'un plan de solution, l'absence d'erreurs d'exécution, le résultat correct, etc... Parallèlement, elle code l'utilisation d'heuristiques sans l'intégrer dans le score de « process-product ». Bien que l'échantillon soit réduit, Kantowski observe que pour chaque sujet, les solutions qui présentent une plus grande réussite sont celles qui montrent la fréquence d'utilisation d'heuristiques la plus élevée. De plus, la tendance à utiliser des heuristiques augmente avec la capacité à résoudre des problèmes.

Plus récemment, Koichu et al. (2007) ont mené une étude qui interroge la relation entre la culture heuristique et les résultats en mathématiques. Ils définissent la culture heuristique comme la capacité qu'a un individu à utiliser un vocabulaire heuristique dans un discours de résolution de problèmes et à aborder des problèmes mathématiques scolaires en utilisant une variété d'heuristiques. Pendant cinq mois, trente-sept élèves de 8^e grade (13-14 ans) ont suivi des séances menées par leur enseignant, mais conçues par les chercheurs de manière à viser un enrichissement heuristique tout en suivant le programme prévu dans la classe. Cela consistait au développement d'un vocabulaire heuristique, partagé par les élèves et les enseignants, mis en évidence par des discussions et la stabilisation de modèles particuliers de discours qui ont émergé en classe lors de la réflexion des élèves sur leur résolution de problèmes. Et de manière simultanée, les élèves étaient confrontés à des problèmes difficiles non routiniers. Certains de ces problèmes étaient accompagnés d'une aide progressive en termes de vocabulaire heuristique. Leurs résultats montrent que l'évolution au niveau de la culture heuristique et celle relative aux résultats en mathématiques sont corrélées mais inégalement réparties parmi les élèves qui ont participé à l'intervention. Notamment, les élèves les plus faibles en termes de résultats mathématiques au début de l'intervention sont ceux qui ont fait les progrès les plus importants en ce qui concerne les deux mesures.

Rott (2012a) a étudié les processus de résolution de problèmes mis en œuvre en laboratoire par des élèves de 5^e grade (10-12 ans) volontaires. Rott et ses assistants ont alors codé les processus selon le niveau de réussite d'une part et selon le nombre d'heuristiques utilisées d'autre part. Contrairement aux recherches précédentes, les élèves observés n'avaient pas suivi d'enseignement spécifique relativement aux heuristiques, du fait que cela ne fait pas partie du curriculum des années antérieures. Malgré cela, Rott observe que les élèves utilisent déjà des heuristiques. De manière plus précise, il met en évidence une corrélation entre le nombre d'heuristiques utilisées et la réussite en résolution de problèmes sans pour autant pouvoir en conclure que plus un élève utilise d'heuristiques, meilleure sera sa réussite.

Si ces différentes études indiquent que l'utilisation des heuristiques est positivement reliée à la performance en résolution de problèmes, Schoenfeld (1985, 1992a) les relativise en précisant que les effets de l'enseignement sont relativement faibles : « attempts to teach students to use heuristic strategies have consistently produced less than was hoped for » (Schoenfeld, 1985, p. 70). Il avance plusieurs raisons qui expliquent, selon lui, les limites de l'heuristique prescriptive telle que promue par Pólya. Prenons par exemple l'heuristique « examiner un cas particulier » qui est décrite par Schoenfeld (1985, p. 76) de la manière suivante : pour mieux comprendre un problème non familier, on peut exemplifier ce problème en considérant différents cas particuliers qui pourraient suggérer une direction ou une possibilité de solution. Schoenfeld, comme Julo (1995, p. 23) nous amènent à prendre conscience de l'écart qui existe, selon eux, entre étiqueter et décrire une heuristique de telle sorte que les étudiants puissent les reconnaître (dimension descriptive) et le fait de fournir des indications suffisamment précises pour que les étudiants les utilisent à des moments opportuns lorsqu'ils résolvent des problèmes (dimension prescriptive). Schoenfeld va plus loin en disant que certaines heuristiques sont en réalité une étiquette qui englobe plusieurs heuristiques relativement proches. Chacune de ces heuristiques plus précise nécessiterait d'être explicitée pour que les étudiants puissent les utiliser. Schoenfeld (1985, p. 76-81) illustre cette idée pour l'heuristique « examiner un cas particulier ». Il suggère ainsi que pour les problèmes qui contiennent

un paramètre, examiner un cas particulier peut consister en donner des valeurs particulières comme 0, 1, 2, 3, etc. Pour certains problèmes de géométrie, les cas particuliers peuvent être des polygones réguliers ou des triangles rectangles ou isocèles. Pour les problèmes relatifs aux polynômes, il peut être intéressant de démarrer la recherche avec des polynômes qui possèdent des racines faciles à calculer. Il s'agit bien à chaque fois de la même heuristique mais qui se décline d'une manière différente en fonction notamment du domaine mathématique en jeu. À ce propos, Schoenfeld parle de paradoxe des heuristiques dans la mesure où les experts utilisent ces différentes (sous-)heuristiques alors que les novices trouvent difficile d'utiliser les heuristiques à partir de leur intitulé général.

De plus, on mesure avec cet exemple que le nombre d'heuristiques, que ce soit dans une fonction prescriptive ou descriptive, risque d'être très important. Schoenfeld nous livre ici un autre argument : tout au long de la résolution d'un problème, différentes heuristiques peuvent se révéler pertinentes, ce qui pose la question des choix que l'étudiant doit faire. Or, s'il ne dispose pas de moyens efficaces pour choisir ou pour sortir des choix qui se révèlent inefficaces, les bénéfices potentiels des heuristiques pour résoudre des problèmes peuvent être très réduits voire négligeables.

Enfin, en écho aux arguments avancés par Schoenfeld, Brousseau (2012) pour qui, comme nous l'avons dit plus haut, les heuristiques ne sont pas des théorèmes, met en garde contre certains glissements méta-didactiques qui consistent à enseigner aux élèves à chercher la solution d'un problème en essayant différentes méthodes au détriment de l'analyse de la situation mathématique. Il pense au contraire que : « dans la relation didactique, pour les élèves, les heuristiques sont des connaissances mais ils ne doivent pas les traiter comme des références c'est-à-dire comme des savoirs » (Ibid.).

Ainsi, les caractérisations des heuristiques que l'on trouve dans la littérature sont in fine davantage descriptives que prescriptives. Plusieurs travaux ont mis en évidence un certain nombre d'écueils relatifs à leur enseignement. Cela étant, de nombreuses recherches utilisent les heuristiques a posteriori comme outil d'analyse pour décrire le travail des élèves. Cet aspect nous paraît intéressant, pertinent et prometteur. Toutefois, la pluralité des caractérisations reste un point d'achoppement. Dans la section suivante, nous voyons comment dépasser cet obstacle en parvenant à une caractérisation unificatrice.

3.5 Vers une caractérisation unificatrice

Pour tenter de clarifier les contours de la notion d'heuristique et ainsi mieux la comprendre, Rott (2014) a mené une étude qui tient en plusieurs étapes. Tout d'abord, il recense les définitions ou caractérisations du terme *heuristics* ou de ses assimilés *heuristic strategie*, *problem solving strategies* dans la littérature. Il en trouve plus d'une vingtaine et les code à partir de différentes catégories de la littérature complétées par des catégories issues de l'étude approfondie de ces définitions et caractérisations. Les catégories retenues pour son étude sont les suivantes : *Effectiveness*, *Analysis*, *Awareness*, *Problem space*, *Range*, *Algorithm*, *Metacognition*, *Description*. La Figure 10 propose un exemple du codage obtenu à partir de la caractérisation de Koichu et al (2007).

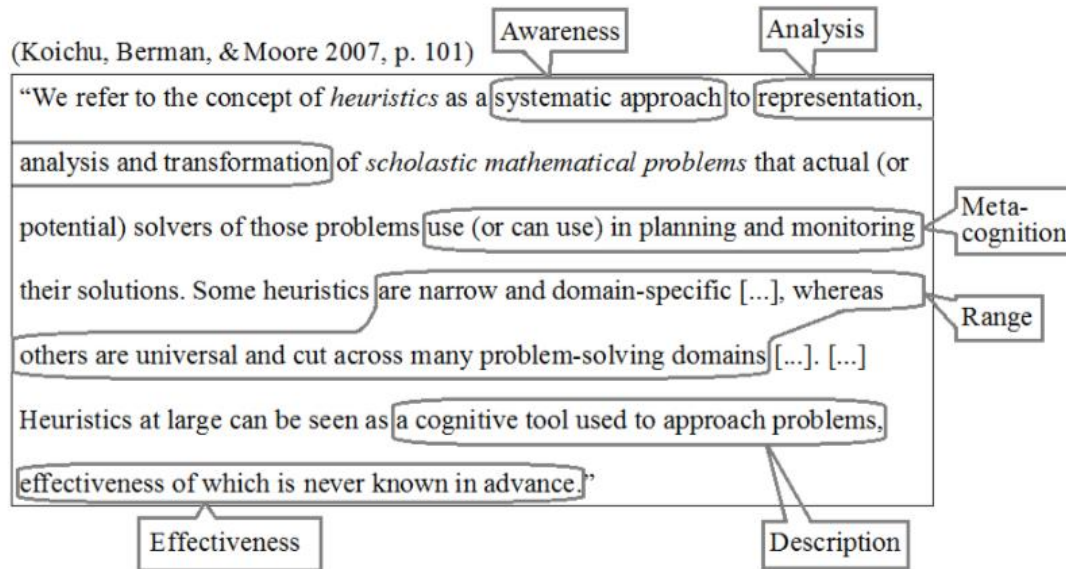


Figure 10. Exemple d'une caractérisation d'une heuristique (Koichu et al., 2007) codée à partir des différentes catégories (Rott, 2014)

Dans la deuxième partie de son étude, Rott a soumis un questionnaire à des experts en *mathematics education* leur demandant leur degré d'accord avec neuf de ces définitions ou caractérisations issues de la littérature (mais dont les auteurs ne sont pas précisés) qui couvrent l'ensemble des catégories listées ci-dessus. L'analyse des 18 réponses confirme que le terme *heuristique* recouvre une grande variété d'aspects différents voire contradictoires pour les acteurs de notre communauté. Il n'y a pas de définition ou de caractérisation qui englobe toutes les catégories ou qui fasse l'unanimité auprès des experts, qu'elle soit approuvée ou rejetée par tous. Rott conclut son étude en proposant une définition qui fait une sorte de compromis entre ces différentes catégories :

Heuristics is a collective term for devices, methods, or (cognitive) tools, often based on experience. They are used under the assumption of being helpful when solving a problem (but do not guarantee a solution). There are general (e.g., "working back-wards") as well as domain-specific (e.g., "reduce fractions first") heuristics. Heuristics being helpful regards all stages of working on a problem, the analysis of its initial state, its transformation as well as its evaluation. Heuristics foster problem solving by reducing effort (e.g., by narrowing the search space), by generating new ideas (e.g., by changing the problem's way of representation or by widening the search space), or by structuring (e.g., by ordering the search space or by providing strategies for working on or evaluating a problem). Though their nature is cognitive, the application and evaluation of heuristics is operated by metacognition. (p. 190)

Pour notre part, nous prenons cette définition du terme *heuristique* comme référence dans notre recherche. En effet, elle présente l'intérêt de se positionner sur chacune des différentes caractéristiques relevées dans la littérature. De plus, nous utilisons les heuristiques dans leur fonction descriptive afin de rendre compte d'aspects plus qualitatifs mis en œuvre en résolution de problèmes.

4. Résolution d'un problème par « ajustements d'essais successifs »

Dans cette partie, nous étudions plus en détails une manière de résoudre les problèmes que nos expérimentations devraient permettre d'observer. Rappelons qu'un de nos intérêts est d'investiguer la manière dont les élèves progressent dans leur résolution de problèmes et notamment comment

ils gèrent les essais et les erreurs qu'ils peuvent réaliser. Pour cela, nous avons fait le choix de proposer des problèmes susceptibles de favoriser l'apparition de ces essais et erreurs, ce qui est généralement appelé une résolution par essais-erreurs, *trial-and-error* ou *guess-and-check* dans la littérature, et ajustements d'essais successifs dans les programmes scolaires suisses romands. Aussi, nous exposons, dans un premier temps, certains fondements historico-épistémologiques à la suite de quoi nous discutons des écarts implicites que peuvent renfermer ces différentes appellations. Ceci nous permet de justifier pourquoi nous gardons l'expression ajustements d'essais successifs. Enfin, nous présentons les résultats des études didactiques relatives à cette manière de résoudre les problèmes de mathématiques.

La résolution par essais-erreurs trouve son origine au début du XX^e siècle où elle était d'ailleurs plutôt considérée comme une forme d'apprentissage. Dans ses travaux sur l'intelligence animale, Thorndike (1898) réalise une série d'expériences dans lesquelles des chats sont enfermés dans des cages et doivent découvrir le mécanisme pour se libérer et accéder à la nourriture. Il observe que ceux-ci, après quelques déplacements sans stratégie ou sans but apparents, découvrent par hasard l'action qui leur apporte la solution. Après plusieurs essais, leur sortie de la cage est de plus en plus rapide. Si cette méthode explique certaines acquisitions, elle est cependant l'objet de nombreuses critiques, car elle laisserait croire que le sujet ne serait pas un sujet intelligent, doué de compréhension. L'autre critique forte est que la solution est trouvée par hasard ce qui confère une connotation négative à cette manière de trouver la solution. Nonobstant, une caractéristique intéressante à relever est que dans ce type de problèmes, les essais réalisés sont susceptibles d'être solution du problème et que le test permet de statuer directement sur la (in)validité de l'essai. Pour le dire avec les termes de la TSD, les contraintes ou les données du problème offrent un milieu suffisamment antagoniste pour que chaque essai soit suivi d'une rétroaction qui va informer l'élève sur la validité de l'essai. C'est l'interprétation de ces rétroactions par l'élève qui doit lui permettre, théoriquement, de se rapprocher voire de trouver la solution.

Lorsque nous avons traité plus haut des heuristiques mathématiques du point de vue épistémologique, nous avons vu que les mathématiciens hongrois Lakatos et Pólya font également référence explicitement aux essais et aux essais-erreurs mais selon deux approches différentes.

Les essais peuvent correspondre à des « cas particuliers observés [qui] suggèrent une proposition de caractère général » (Pólya, 1958, p. 5). Ainsi, par exemple, après observation des relations :

$$6=3+3$$

$$8=3+5$$

$$10=3+7=5+5$$

$$12=5+7$$

$$14=3+11=7+7$$

$$16=3+13=5+11$$

nous remarquons que tous ces nombres pairs s'écrivent comme la somme de deux nombres premiers impairs et nous pouvons nous demander si cela est toujours vrai. C'est l'observation de certaines régularités qui permet de formuler une « hypothèse » (Ibid) par un processus que Pólya nomme « induction » (Ibid). D'autres essais peuvent être effectués pour « éprouver » (Pólya, 1958, p. 6) cette proposition. Dans le cas où ces nouveaux essais confirment l'hypothèse formulée, ils en constituent des « exemples supplémentaires », des « points de contact apportant une confirmation » (Pólya, 1958, p. 6-7). Ils permettent d'augmenter le crédit à accorder à cette hypothèse, son degré de vraisemblance, mais cela ne permet pas de modifier sa valeur épistémique. D'ailleurs, l'exemple que nous reprenons plus haut n'est autre que la conjecture de Goldbach : tout nombre pair

supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers⁸ qui, à l'heure où nous écrivons, n'a pas encore été démontrée.

Pólya résume ces idées ainsi :

Les cas particuliers que nous avons examinés sont de deux espèces : ceux qui ont précédé la formulation de l'hypothèse et ceux qui sont venus après. Les premiers ont suggéré l'hypothèse, les seconds l'ont confirmée. Ces deux sortes de cas fournissent chacun un contact entre l'hypothèse et « les faits ». (Ibid, p. 7)

Toutefois, certains essais appelés « contre-exemple » (Lakatos, 1984, p. 17) permettent, quant à eux, de modifier la valeur épistémique d'une conjecture de vraisemblable à fausse. Dans ce cas, un seul contre-exemple est suffisant pour anéantir l'hypothèse.

Si Pólya suggère que les conjectures sont inductives et la conséquence de différents essais, Lakatos renverse ce processus et avance que les essais peuvent être aussi des conjectures dont les réfutations vont générer un certain nombre de faits. Selon lui, les mathématiciens travaillent dans ce cas « par essais et erreurs ; par une suite de conjectures et de réfutations » (1984, p. 94). Il appelle ainsi la première conjecture qui va être suivie d'une tentative de preuve, la « conjecture naïve » (Lakatos, 1984, p. 94). Par preuve, Lakatos entend une « expérience mentale (ou une quasi-expérience) qui suggère une décomposition de la conjecture originale en sous-conjectures ou lemmes » (Lakatos, 1984, p. 12). En effet, les contre-exemples évoqués plus haut sont dits « globaux » dans la mesure où ils critiquent la conjecture sans remettre en question la preuve. Lakatos les désigne comme des « monstres » et propose une méthode dite de « relégation des monstres [qui] prend la défense de cette conjecture naïve en réinterprétant ses termes de telle façon qu'à la fin on ait *le théorème libéré des monstres* » (1984, p. 52). Lakatos identifie également des contre-exemples « locaux », appelés « exceptions ». Ils sont une critique de la preuve mais pas de la conjecture. Lakatos propose, dans ce cas, d'« améliorer la preuve en remplaçant le lemme faux par un autre obtenu en le modifiant légèrement » (1984, p. 14).

Pour synthétiser ces considérations historico-épistémologiques des essais-erreurs, nous pouvons mettre en évidence des natures et des fonctions différentes des essais et des erreurs. Ils peuvent ainsi être :

- des candidats potentiellement solutions du problème, ce qui signifie que les caractéristiques de l'essai réalisé sont susceptibles de respecter toutes les contraintes imposées par le problème. Si tel est le cas, l'essai validé devient une solution du problème et on peut même parler de solution prouvée par ostension pour les problèmes d'existence. Une « erreur » est un essai invalidé c'est-à-dire un essai pour lequel une ou plusieurs données ou contraintes du problème ne sont pas respectées.
- des cas particuliers qui, contrairement au point précédent, n'ont pas vocation à être solution du problème. La fonction de ce type d'essais diffère selon si une conjecture est émise ou non. Ainsi, ils peuvent permettre un enrichissement du milieu de manière à favoriser le repérage de régularités et, in fine, à formuler une conjecture. Notons l'absence de rétroaction dans ce cas de figure. Lorsqu'une conjecture est formulée, leur fonction tient en l'augmentation du degré de confiance, de vraisemblance de la conjecture ou en son invalidation. En cas d'invalidation, l'essai est alors appelé contre-exemple.
- des conjectures et les erreurs sont appelées des réfutations qui peuvent avoir deux fonctions : soit elles remettent en question la conjecture et doivent permettre de l'améliorer sans remettre en cause la preuve ; soit elles remettent en question la preuve et doivent permettre de l'améliorer sans remettre en cause la conjecture.

⁸ Le site [WIMS](https://wims.univ-cotedazur.fr/wims/wims.cgi?session=C0213EEABB.2&+lang=fr&+module=tool%2Fnumber%2Fgoldbach.fr) de l'université de Nice propose de calculer la décomposition en sommes de deux nombres premiers, pour n'importe quel nombre de notre choix, à l'adresse <https://wims.univ-cotedazur.fr/wims/wims.cgi?session=C0213EEABB.2&+lang=fr&+module=tool%2Fnumber%2Fgoldbach.fr>

Au niveau scolaire, les problèmes qui peuvent se résoudre par essais-erreurs ou par ajustements d'essais successifs sont principalement du premier type. Ainsi, pour résoudre ces problèmes, les élèves sont en mesure de caractériser des essais, solutions potentielles du problème, qu'ils vont pouvoir confronter aux données du problème et ainsi (in)valider. L'invalidation et l'interprétation de la rétroaction de manière efficiente sont ce qui va permettre d'ajuster c'est-à-dire caractériser un autre essai plus proche de la solution, voire la solution elle-même. C'est cet aspect de la démarche qui est mis en évidence par l'idée d'ajuster, ce qui a l'avantage de supprimer la connotation liée au hasard. Cette idée d'ajuster nous semble également en lien avec « l'art de deviner » avancée par Pólya (1958): « [...] il devrait y avoir place dans l'enseignement des mathématiques pour l'art de deviner [...]. M'adressant à tous les professeurs de mathématiques quels qu'ils soient, je leur dis : apprenons à nos élèves à deviner. » (p. 271) Idée défendue également par Posamentier & Krulik (2009), sous le label *Intelligent guessing and testing*, qui avancent : « Although this strategy does not sound very mathematical, it is a frequently used strategy. Some books refer to it as “trial and error.” But it is more than that! This strategy is extremely powerful and quite sophisticated.» (p. 24) Ajuster n'est pas (encore) un savoir reconnu par la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques. Néanmoins, cette manière de résoudre des problèmes se rencontre fréquemment dans la vie de tous les jours (Elia et al., 2009; Posamentier & Krulik, 2009) ce qui nous amène à lui attribuer le statut de pratique sociale de référence (Chevallard, 1985). En effet, il existe de nombreuses situations qui peuvent nous amener à procéder à des ajustements : régler la température de l'eau, peser un ingrédient avec une balance Roberval ou préparer une certaine masse d'un ingrédient à l'aide d'une balance numérique, accorder une guitare, programmer un robot pour qu'il effectue un déplacement, positionner un cadre de niveau, mettre un meuble de niveau avec des cales, lancer des fléchettes, etc. C'est sans doute parce que les élèves sont confrontés à de telles situations que Stacey (1991) avance que « guess and check is an intuitive strategy available to all » (p. 6). Dans le même ordre d'idée, l'étude conduite par Elia et al (2009) montre que c'est la stratégie la plus largement efficace. Ces chercheurs expliquent que « when students are not explicitly taught any heuristic strategies, trial-and-error may be the only strategy they can use, as it does not entail high cognitive demands and it is widely used in a variety of mathematical and everyday situations. » (p. 616) Stacey (1991) relativise ces résultats en mettant en évidence deux obstacles à l'utilisation de cette stratégie. Le premier concerne la difficulté à savoir quoi deviner c'est-à-dire à caractériser un essai. Le deuxième concerne l'identification des contraintes qui peuvent être utilisées pour contrôler un essai. Elle nous met également en garde sur le fait de ne pas utiliser cette stratégie de manière systématique ou automatique ce qui constituerait un frein à l'utilisation d'outils mathématiques plus puissants.

En dépit de tous ces éléments favorables à cette manière de résoudre des problèmes, il s'avère que cette stratégie n'a pas toujours bonne réputation en particulier auprès des enseignants, car elle semble manquer de sérieux et est associée au hasard, au « bol ». Par exemple, dans une étude conduite par Vlassis et al (2014), il ressort que le tâtonnement, autre synonyme de cette manière de résoudre les problèmes, est la démarche « la moins plébiscitée » et « la moins appréciée » (p. 168) par les enseignants interrogés dans l'enseignement primaire luxembourgeois. Ils reprochent le rôle qu'y jouerait le hasard, l'expression non mathématique de telles solutions et le manque de généralité de cette démarche sur d'autres problèmes analogues.

Sur le plan institutionnel, il est intéressant de noter que cette manière de résoudre des problèmes bénéficie d'une reconnaissance à l'échelle internationale. Citons, à titre d'exemple, le cas des évaluations internationales PISA 2012 (OECD, 2013, p. 41) qui prévoient le code « résolution correcte par une méthode d'essais-erreurs (code 23) » (p. 42) pour analyser les productions des élèves. À l'échelle romande, résoudre des problèmes par ajustements d'essais successifs est un objectif présent dans le PER, à tous les niveaux de la scolarité obligatoire. Faut-il y voir une

difficulté dans cet apprentissage qui nécessite un temps si long ou bien le fait qu'on lui donne de l'importance ?

Si les différentes recherches dont nous avons fait état nous éclairent sur l'utilisation ou non par les élèves de cette manière de résoudre des problèmes et sur son efficacité, elles n'apportent pas d'éléments sur la démarche en tant que telle c'est-à-dire sur comment les élèves avancent dans leur résolution et comment ils gèrent leurs essais et leurs ajustements, ni à quel niveau se situent les écarts entre les élèves qui réussissent et les autres.

5. Questions de recherche

En introduction, nous avons présenté le début de notre réflexion sous la forme de questions générales qui fixent le fil conducteur de cette recherche qui tente de mieux comprendre et décrire les démarches des élèves en résolution de problèmes : Comment les élèves avancent-ils dans leur recherche ? Comment s'élabore leur raisonnement ? Qu'est-ce qui fait que certains élèves réussissent et d'autres échouent lors de la résolution de problèmes ? Ce qui constitue à la fois l'originalité et la difficulté de notre travail tient au fait que nous souhaitons étudier les démarches des élèves dans les conditions réelles et habituelles de la classe, lorsque la séance est menée par l'enseignant, sans contrôle du chercheur. Ceci introduit une complexité qui n'est pas prise en charge par les différents modèles présentés dans la revue de littérature puisque ceux-ci se concentrent soit sur des problèmes spécifiques (problèmes de transformation d'états, problèmes arithmétiques), soit sur des problèmes plus généraux de la pensée mathématique mais étudiés dans des conditions particulières (résolution d'experts en mathématiques ou résolution d'élèves volontaires dans des conditions de laboratoire).

Notre recherche vise donc à mieux comprendre et à décrire les processus de résolution de problèmes mis en œuvre par des élèves **dans les conditions habituelles de la classe** et travaillant sur un type de problème assez classique à l'école.

Ces conditions d'étude induisent une première question méthodologique :

- Comment recueillir, dans le contexte de la classe, des données expérimentales au plus près du travail de chaque élève ?

Pour cela, nous allons combiner trois points de vue différents correspondant à trois grains d'analyse différents que nous retenons de la revue de littérature.

Le premier point de vue, que nous qualifions de macroscopique, porte sur l'organisation temporelle et globale de la résolution et nous amène à nous poser les questions suivantes :

- Comment caractériser les différentes phases de travail des élèves ?
- Comment s'enchainent ces différentes phases ?
- Observe-t-on des enchainements particuliers (de type linéaire ou plus complexes) ?
- Comment prendre en compte le rôle de l'enseignant dans cette caractérisation ?
- Peut-on dégager des caractéristiques de la réussite ou non des élèves au problème ?

D'un point de vue général, nous nous poserons aussi la question de savoir quel modèle semble le plus pertinent pour rendre compte des processus de résolution de problème des élèves en classe.

Le deuxième point de vue, microscopique celui-là, est celui des heuristiques. Les questions qui vont nous guider sont alors :

- Quelles heuristiques sont mises en œuvre et comment les prendre en compte pour analyser les démarches des élèves ?

- Quel rôle jouent ces heuristiques dans la dynamique du processus de résolution ?
- Comment prendre en compte les éventuelles heuristiques proposées par l'enseignant au cours de ses interventions ?
- Qu'est-ce qui, du point de vue des heuristiques, semble caractéristique de la réussite ou non des élèves ?

Nous nous posons ensuite des questions méthodologiques, du fait de la coordination de ces deux points de vue macroscopique et plus microscopique :

- Comment ces deux points de vue se combinent-ils ?
- Plus précisément, quel rôle jouent les heuristiques dans l'enchaînement des phases macroscopiques ?
- La combinaison de ces deux points de vue permet-elle de caractériser plus finement les processus de résolution des élèves ?

Ces deux points de vue semblent pouvoir être étudiés à partir de n'importe quel type de problèmes mathématiques. Dans notre travail toutefois, nous avons limité nos observations à des problèmes qui se résolvent par essais et ajustements. Aussi, nous regarderons spécifiquement le travail des élèves selon un troisième point de vue, caractéristique de la phase d'essais, qui se décline selon les questions suivantes :

- Quels éléments prendre en compte pour analyser les essais et ajustements mis en œuvre par les élèves ?
- Comment les élèves exploitent-ils leurs essais ? De quelle manière les ajustent-ils ?
- Où se situent les écarts entre les élèves qui trouvent la solution et ceux qui ne trouvent pas ?

Dans le chapitre 3, nous précisons le dispositif de recherche avant de décrire, pour chaque point de vue, les éléments méthodologiques liés notamment au recueil et au traitement des données. Le chapitre 4 rassemble, quant à lui, l'ensemble des analyses.

CHAPITRE 3. MÉTHODE DE RECUEIL ET D'ANALYSE DES DONNÉES

Les questions qui guident notre recherche s'articulent autour de la caractérisation des démarches de résolution des élèves en résolution de problèmes. Dans cette partie, nous commençons donc par présenter le contexte et les choix qui ont permis de circonscrire notre recherche de manière à la rendre réalisable du point de vue méthodologique. Ensuite, nous détaillerons le protocole de recueil des données puis les outils d'analyse de ces données correspondant aux trois niveaux d'analyse évoqués dans la partie précédente.

1. Contexte de la recherche

1.1 Les classes

Notre recherche s'effectue dans le canton de Genève avec la volonté de couvrir les trois cycles de la scolarité obligatoire soit de la 1^e primaire (élèves de 4-5 ans) à la 11^e du cycle d'orientation (élèves de 14-15 ans). Nous faisons l'hypothèse que varier les niveaux scolaires peut potentiellement favoriser l'apparition de démarches diverses. Dans le même temps, nous souhaitons pouvoir documenter les écarts entre élèves pour un même degré. Nous avons ainsi fait le choix de nous intéresser à trois degrés différents répartis sur le primaire et le secondaire 1 :

- 4^e année de primaire (4P) qui est la dernière année du cycle 1 et correspond à des élèves de 7-8 ans ;
- 8^e année de primaire (8P) qui est la dernière année du cycle 2 et correspond à des élèves de 11-12 ans ;
- 10^e année qui est la classe centrale du cycle d'orientation et correspond à des élèves de 13-14 ans.

Chaque degré est représenté par deux classes différentes. Pour la 10^e année, nous visons une classe de la section CT⁹ et une classe de la section LS¹⁰ de manière à avoir l'éventail le plus large possible pour ce degré. Les classes qui nous ont accueilli ont été recrutées d'une manière différente pour chacun des trois degrés. Avant de les expliciter, nous devons préciser que pour mener des expérimentations dans des classes de la scolarité obligatoire à Genève, il faut soumettre une *demande d'autorisation pour effectuer une recherche dans les écoles publiques genevoises* via un formulaire. Cette commission valide la recherche puis lance un appel aux établissements scolaires du canton pour trouver des classes d'accueil à moins d'être en mesure de proposer des enseignants. Pour les 4P, l'établissement et les enseignants ont été recrutés par l'intermédiaire de cette commission. Pour les 8P, nous avons proposé deux enseignants rencontrés par l'intermédiaire d'une collègue. Pour les 10^e, nous avons cherché en priorité à recruter un professeur de mathématiques qui enseigne dans les deux classes (LS et CT) pour déterminer s'il y a des différences entre les élèves. Cette condition a pu être réalisée grâce à l'aide des responsables du groupe de mathématiques qui sont l'interface entre l'ensemble des professeurs de mathématiques et le département de l'instruction publique

⁹ La section CT signifie Communication et Technologie. Les élèves de 10^e CT sont issus du regroupement R1 de 9^e c'est-à-dire ayant les moyennes les plus faibles en français et mathématiques parmi tous les élèves admis au cycle d'orientation (CO). Pour être admis au CO, il est nécessaire d'avoir la moyenne en français et en mathématiques.

¹⁰ La section LS signifie Littéraire-Scientifique. Les élèves de 10^e LS sont issus du regroupement R3 de 9^e c'est-à-dire ayant les moyennes les plus fortes en français et mathématiques parmi tous les élèves admis au CO.

(DIP). Nous avons pu obtenir la liste des professeurs de mathématiques enseignant à la fois en LS et en CT. Une seule enseignante a donné suite au mail présentant notre recherche envoyé à l'ensemble de ces 16 enseignant·e·s de la liste.

Les trois établissements se situent dans des secteurs qui présentent une certaine mixité sociale. Pour cette raison, ils semblent représentatifs de la plupart des écoles du canton de Genève. Il est toutefois bien clair que notre enquête ne peut avoir un caractère statistique et reste de type clinique.

1.2 Les problèmes

Nous avons choisi de faire porter notre étude sur les problèmes qui peuvent amener les élèves à faire des ajustements d'essais successifs. Nous avons pris soin de sélectionner des problèmes qui ne figurent pas dans les moyens d'enseignement romands pour éviter que certains élèves les aient déjà rencontrés. Le premier est une adaptation d'un problème extrait des documents d'application des programmes français (Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2005, p. 7-9). Le deuxième est adapté d'un problème tiré d'un rallye mathématique¹¹ et présente un niveau de difficulté plus important pour que cela constitue effectivement un problème pour des élèves de 8P. Nous avons imaginé le troisième pour qu'il soit isomorphe au deuxième mais avec un contexte plus en phase avec l'âge des élèves. Voici donc les trois problèmes proposés :

- En 4P, *Le jeu de cartes*

Chaque carte de mon jeu représente soit un triangle, soit un carré. Je tire au hasard 15 cartes. Je compte tous les côtés des figures dessinées sur les cartes que j'ai tirées et je trouve 49. A ton avis, combien ai-je tiré de triangles et de carrés ?

- En 8P, *Dragons et compagnie*

Sur un écran d'ordinateur sont représentés des perroquets, des crocodiles et des dragons. Au total, j'ai compté 20 têtes, 72 pattes et 30 ailes. Combien y a-t-il de perroquets, de crocodiles et de dragons ?

- En 10^e, *Ballon d'essai*

Afin de renouveler son matériel sportif, une école fait une première commande de 2 ballons de rugby, 4 ballons de basket et 4 ballons de foot pour un montant total de 72 CHF. Elle effectue ensuite une deuxième commande composée de 2 ballons de rugby et 2 ballons de basket et paie 30 CHF. On sait qu'un ballon de rugby, un ballon de foot et un ballon de basket coûtent ensemble 20 CHF.

Quel est le prix de chacun des ballons ?

L'analyse a priori de ces problèmes est décrite dans la partie 3.3.1.

1.3 Conditions de passation

Le contrat de recherche était volontairement peu contraignant car l'idée était d'observer les démarches de résolution des élèves au plus près des conditions habituelles de travail. Ainsi, le canevas que nous avons proposé aux différents enseignants est le suivant :

- Introduction de l'énoncé, réponses aux éventuelles questions de compréhension

¹¹ L'énoncé original se situe à l'adresse : http://maths-msf.site.ac-strasbourg.fr/MSF_junior/Epreuves/E_10_Def.pdf

- 1^{er} temps de recherche individuelle
- 2^e temps de recherche en groupe

Nous demandions également aux enseignants de gérer la séance de manière habituelle tout en veillant à laisser vivre au maximum la recherche des élèves dans la limite d'une période (environ 45 minutes).

2. Le recueil de données

Pour tenter de répondre à nos questions de recherche, nous avons besoin de recueillir des données expérimentales au plus près du travail des élèves. Cela étant, le fait que notre recherche s'effectue dans le contexte de classe habituel, de manière à garantir des conditions de passation les plus ordinaires et stables possibles, induit certaines contraintes. En l'occurrence, recueillir des données audiovisuelles au moyen d'une caméra sur pied ne nous semble pas réaliste ou du moins très périlleux. Il suffit d'imaginer une classe dans laquelle une caméra sur pied fait face à chaque groupe d'élèves pour appréhender le caractère périlleux, intrusif et coûteux au niveau de sa mise en place. Un autre type de recueil de données largement utilisé s'appuie sur des techniques de « thinking aloud » c'est-à-dire que le chercheur demande à l'élève de penser à voix haute au cours de sa résolution du problème et le relance au bout d'un certain temps de silence. De manière évidente, ceci n'est absolument pas réaliste dans le cadre d'un contexte de classe ordinaire. De la même façon, nous n'avons pas retenu non plus les entretiens de type explicitations (Vermersch, 1994) qui, s'ils sont très intéressants pour accéder au point de vue d'un sujet, présentent l'inconvénient de prendre du temps et ne sont pas réalisables dans le contexte ordinaire de la classe.

Toutes ces limites ont pu être dépassées grâce aux progrès des instruments techniques de captation vidéo. En effet, nous avons utilisé une caméra embarquée dont les « caractéristiques techniques en font un outil intéressant pour la capture d'image dans des conditions difficiles » (Morieux, 2016, p. 128). Régulièrement utilisée en cours d'Éducation Physique et Sportive, la caméra embarquée permet des « prises de vue originales et l'accès à des images d'un grand intérêt didactique, pédagogique [...] » (Ibid, p. 68). Si l'utilisation d'une caméra extérieure à l'acteur (conditions classiques de recueil de données) permet une perception en « troisième personne » (Andrieu & Burel, 2014), filmer avec une caméra embarquée sur le corps de l'acteur offre une perception en « première personne » (Ibid). Cela donne accès à l'espace de travail de l'élève avec son propre point de vue. Nous pouvons ainsi voir :

- tout ce que l'élève pointe ou désigne ;
- des éléments de son champ de vision ;
- tous les gestes qu'il fait dans son champ de vision ;
- toutes les manipulations réalisées avec du matériel (auxquelles il est habituellement très difficile d'avoir accès, à moins d'observer finement un élève) ;
- tout ce qu'il écrit, même s'il efface ensuite.

Nous pouvons aussi enregistrer tout ce que l'élève dit et probablement (presque) tout ce qu'il entend. Ces différents éléments sont précieux pour documenter les démarches mises en œuvre par les élèves lors de la résolution de problèmes.

Cet enregistrement en première personne nous livre la chronologie complète et réelle des différentes étapes qui constituent la recherche de l'élève. Nous devrions ainsi avoir accès au « travail privé » (Coppé, 1993) de l'élève, entre autres à tous les essais et toutes les erreurs produits par l'élève et non pas seulement aux « traces publiques » (Ibid.) de son travail qu'il veut bien montrer.

Comme le soulignent Andrieu et Burel (2014), l'effet d'embarquement permet la « production d'images non volontairement filmées » (p. 51). Cet aspect caractérise la richesse de ce dispositif mais peut en constituer une limite importante. En effet, le chercheur n'a plus la maîtrise de ce qui est capté donc recueilli. Il doit accepter de faire confiance au porteur de la caméra.

Une autre conséquence concerne la question du cadrage. En effet, il est nécessaire de vérifier régulièrement si le cadrage est correct et de régler à nouveau lorsque les élèves ont touché la caméra.

En complément de ce type de recueil de données, nous faisons le choix d'équiper l'enseignant.e d'un micro-cravate et de suivre et enregistrer ses interventions à l'aide d'une caméra contrôlée par le chercheur.

3. Le traitement des données

Les données recueillies sont donc les enregistrements audio-visuels en continu à l'aide des caméras embarquées. En général, nous déclenchons le début de l'enregistrement lorsque nous installons la caméra sur la tête des élèves avant l'introduction de l'énoncé et l'arrêtons à la récupération de la caméra à la fin de la séance ou de la résolution.

Une fois les expérimentations réalisées, nous avons préparé le corpus des données à analyser en renommant chaque fichier à l'aide d'un code composé par :

- le degré : 4P, 8P ou 10 ;
- l'initiale de l'enseignant pour les classes primaire : C, S, V ou la filière pour le secondaire I : CT ou LS ;
- la référence au problème : Jc pour *Jeu de cartes*, Dr pour *Dragons et compagnie* et Ba pour *Ballon d'essai* ;
- le numéro de la caméra embarquée

Ainsi, le fichier 8PVD_r7 correspond au groupe 7 de la classe de 8^e de Valérie et travaillant sur le problème *Dragons et compagnie*. La précision du problème peut sembler superflu puisque chaque degré a travaillé sur un problème différent. Elle nous a été néanmoins nécessaire puisque dans le même temps nous avons recueilli des données sur d'autres problèmes¹² pour les mêmes élèves.

Enfin, nous avons écarté de ce corpus les quelques groupes pour lesquels les audios ou les visuels n'étaient pas exploitables. Comme le montre le Tableau 2, cela ne concerne en moyenne qu'un seul groupe par classe. Et nous n'avons pas retenu le groupe (8PVD_r10) puisque l'élève ne portant pas la caméra avait trouvé la solution pendant la recherche individuelle.

Voici de manière synthétique, le nombre de groupes filmés et le nombre de groupes constituant le corpus des données à analyser :

Classe	4PC	4PS	8PS	8PV	10CT	10LS	Total
Nombre de groupes filmés	7	6	6	6	5	8	38
Nombre de groupes à analyser	6	5	4	5	5	8	33

¹² Les données recueillies sur les autres problèmes ne font pas partie du corpus analysé dans la thèse.

Tableau 2. Répartition des groupes filmés et à analyser par classe

Nous allons analyser ces données expérimentales selon trois points de vue que nous explicitons dans les parties qui suivent.

3.1 Point de vue macroscopique

3.1.1 Le découpage en *épisodes* (Schoenfeld, 1985)

Pour traiter les données audiovisuelles recueillies au sein de chaque groupe à l'aide d'une caméra embarquée, nous avons utilisé la méthode d'analyse de Schoenfeld (1985). Elle consiste à découper le travail de recherche des élèves en blocs macroscopiques appelés *épisodes* : « an episode is a period of time during which an individual or a problem-solving group is engaged in one large task or a closely related body of tasks in the service of the same goal. » (1985, p. 292) Schoenfeld caractérise cinq types d'épisodes étiquetés par des verbes d'action : lire, s'approprier, explorer, planifier/mettre en œuvre et vérifier¹³. Voici de manière plus précise la manière dont est caractérisé chacun de ces épisodes :

- Lecture : cet épisode, comme son nom l'indique, correspond à la lecture de l'énoncé par l'élève mais comprend aussi le temps passé à s'approprier les différents éléments de l'énoncé que ce soit sous forme de silences, de verbalisations, de relectures silencieuses.
- Appropriation : cet épisode correspond aux essais réalisés pour mieux comprendre le problème, adopter un point de vue et reformuler le problème dans ses termes, et examiner tout principe qui pourrait être approprié.
- Exploration : cet épisode se distingue du précédent de par sa structure (elle est bien moins structurée) mais aussi de par son contenu qui s'éloigne du problème initial, à la recherche d'informations pertinentes.
- Planification/Mise en œuvre : dans cet épisode, l'accent est mis sur ce qui concerne la dimension contrôle c'est pourquoi il n'est pas fait état des éléments relatifs à la formation du plan. Ainsi, il est plus déterminant de savoir si le plan est structuré ou non, si la mise en œuvre du plan est méthodique, si l'élève procède à un contrôle du processus avec des feedbacks sur la planification ou sur l'évaluation aux niveaux local ou global.
- Vérification : Schoenfeld considère que la nature de cet épisode est évidente.

Il complète ces cinq épisodes par un épisode dit de transition :

- Transition : cet épisode code les jonctions entre les autres épisodes qui sont des nœuds durant la plupart desquels des décisions, qui peuvent impacter dans un sens ou un autre la solution, sont prises.

Ce protocole d'analyse est mis en œuvre par son auteur sur des données audiovisuelles d'étudiants qui viennent résoudre des problèmes en laboratoire et en binôme. Rott (2011, 2012b) a adapté cette méthode pour analyser le travail de résolution de problèmes effectué également en laboratoire et en binôme par des élèves volontaires de 10-12 ans. Les caractéristiques de ces données le conduisent à introduire deux épisodes supplémentaires : *digression* et *écriture*¹⁴.

- Digression : cet épisode prend en compte les différents comportements d'élèves non liés à la tâche de résolution de problèmes comme par exemple, lorsque les élèves parlent de personnages de dessins animés ou de séries télévisées, etc... au lieu de travailler sur le contenu mathématique.

¹³ Les termes originaux utilisés par Schoenfeld (1985) sont : read, analyse, explore, plan/implement et verify

¹⁴ Traduction de *digression* et *writing*.

- Écriture : cet épisode permet de coder le temps passé à écrire (comme par exemple la copie d'une réponse) sans obtenir de nouvelles informations ou sans faire de véritables progrès dans la résolution de problèmes.

Comme nous l'avons dit plus haut, nos expérimentations se déroulent en classe, les élèves travaillant par groupe de deux ou trois. La séance est menée par un.e enseignant.e dans des conditions les plus proches possibles des séances ordinaires. Aussi, la mise en œuvre de cette méthode d'analyse dans le contexte de notre recherche nécessite donc une adaptation supplémentaire. C'est pourquoi, nous proposons d'introduire une catégorie supplémentaire d'épisode que nous qualifions de *régulation*, de manière à prendre en compte les échanges qui peuvent intervenir entre les élèves et l'enseignant.e.

De plus, nous faisons le choix de coder un seul protocole par groupe. Nous discuterons plus loin de certaines implications inhérentes à ce choix.

Sur un plan plus opérationnel, nous avons été confronté à des situations très diverses. En effet, certains épisodes sont facilement identifiables. Par exemple, des observables tels que la lecture à voix haute d'un élève (épisode de lecture), la discussion entre élève(s) et enseignant (épisode de régulation) ou encore la discussion entre élèves d'un sujet qui n'a rien à voir avec le problème (épisode de digression) sont assez faciles à repérer et à interpréter. En cas d'hésitation ou de difficulté sur d'autres passages moins évidents, nous cherchons d'abord à délimiter dans le temps l'extrait en repérant les ruptures ou les changements. Puis nous visionnons l'extrait à plusieurs reprises de manière à identifier le maximum d'indices. Pour décider de la nature de certains épisodes, nous avons eu besoin d'effectuer un certain nombre de choix que nous évoquons dans les sections suivantes.

3.1.2 La fiabilité des résultats de codage en épisodes

Ce codage en épisodes est du type *coverage codes* (Jacobs et al., 2003) défini ainsi « coverage codes parsed the entire lesson, or a specified part of the lesson, into non-overlapping segments. Every moment of the lesson, or specified part, was "covered" by one of the mutually exclusive and exhaustive categories. » (p. 88). En cela, un épisode se caractérise par sa nature et par un time-code de début et de fin. Pour viser une meilleure fiabilité des résultats de codage, nous avons été amené à faire plusieurs choix que nous présentons ci-dessous. Tout d'abord, concernant la nature des épisodes et dans le prolongement de Schoenfeld qui s'est emparé également de cette question de la fiabilité du codage, nous avons fait le choix de préciser, contextualiser certains épisodes. Ensuite, relativement au grain d'analyse qui ne doit pas être trop fin, nous avons défini des durées minimales pour quelques épisodes.

i. Des choix a priori : la nature des épisodes

Au sujet de la fiabilité de ce type de codage, Schoenfeld (1992b, p. 194) suggère qu'une difficulté importante réside dans le fait de décider si un épisode doit être codé comme exploration ou appropriation. Sur ce point, il avance que « the distinction between analysis [traduit appropriation] and exploration remains one of "feel" rather than one specified by clean objective criteria » (Ibid.). De son côté, Rott (2011, 2012b) a dépassé cette difficulté en assumant une analogie entre le modèle développé par Schoenfeld et celui de Pólya « The steps of Schoenfeld (1985) and Pólya can be assigned to each other directly. The only exception being the splitting of Pólya's "Devising a plan" into "Exploration" and "Planning" » (Rott, 2012b, p. 99-100). Rott (2011) utilise ainsi les différentes questions proposées par Pólya comme une aide pour décider s'il code l'épisode comme exploration ou appropriation (p. 4-69). Nous nous appuyons aussi sur cette analogie ce qui nous permet de mieux distinguer les actions des élèves qui sont principalement orientées vers la compréhension du problème (codées comme appropriation) de celles qui sont tournées vers la résolution du problème

(codées comme exploration ou planification – mise en œuvre). Nous codons d'ailleurs comme un épisode de planification – mise en œuvre tous les épisodes de planification et/ou de mise en œuvre d'un plan.

Une autre difficulté concerne la distinction entre les épisodes de planification – mise en œuvre et exploration. Dans la définition des épisodes de planification – mise en œuvre, ce qui les caractérise est qu'ils sont plus structurés que ceux relatifs à l'exploration. Ils ne doivent cependant pas être associés seulement au caractère correct de l'approche utilisée par les élèves. Autrement dit, nous pourrions être amené à coder des épisodes de planification – mise en œuvre pour des procédures qui mènent à une solution incorrecte. Toutefois, cette idée de structuration n'est pas toujours simple à appréhender en particulier sur les problèmes comme ceux de notre recherche. En effet, prenons l'exemple du problème du *Jeu de cartes*, la plupart des productions des élèves prennent la forme d'un dessin d'une succession de triangles et de carrés. Sur le fond, ces essais et leur enchaînement peuvent être très différents mais seule une analyse fine permettrait de le décider. Or, l'esprit de ce niveau d'analyse est d'en rester aux grandes étapes sans rentrer dans la finesse du travail des élèves. Pour obtenir une meilleure fiabilité des codages, nous introduisons deux idées qui permettent de mettre à profit la qualité de nos données audio-visuelles. En cas d'hésitation entre planification – mise en œuvre et exploration, nous cherchons des indices (intonation de la voix, manière d'écrire, ...) qui peuvent permettre d'interpréter si les élèves sont plutôt sûrs d'eux durant l'élaboration de leurs essais (codé comme planification – mise en œuvre) ou plutôt hésitants (codé comme exploration). Si cela s'avère insuffisant, nous complétons en repérant si la piste suivie est rapidement abandonnée (codé comme exploration) ou au contraire s'il y a une certaine persévérance (codé comme planification – mise en œuvre).

D'autre part, nous utilisons l'épisode de transition pour coder différents éléments qui ne rentrent pas dans le champ d'un épisode de digression et qui dans le même temps nous semblent, a priori, peu décisifs dans l'avancée du travail des élèves. Par exemple, lorsque les élèves se prononcent sur la difficulté du problème, ou bien lorsque l'enseignant-e intervient auprès d'un groupe relativement à leur organisation matérielle du travail sans apport d'éléments en lien avec la résolution. Dans le même ordre d'idée, les encouragements du chercheur sont codés comme des épisodes de transition. Enfin, il en est de même des moments durant lesquels les élèves attendent l'enseignant-e après l'avoir appelé-e, ou de leurs échanges à propos de la caméra embarquée. Pour résumer, tous les moments durant lesquels la résolution du problème n'avance pas, bien que les élèves ne soient pas en train de digresser, sont pris en charge par cet épisode de transition.

Nous avons évoqué plus haut le choix de ne coder qu'un seul protocole par groupe. Ceci étant, il est arrivé que deux élèves produisent des actions différentes dans le même temps. Dans ce cas, nous choisissons l'interprétation la plus informative du point de vue de la résolution de problèmes. Ainsi, par exemple dans un groupe composé de trois élèves, lorsque deux élèves sont en train de discuter d'un événement survenu pendant la récréation alors que le troisième est en train de relire l'énoncé du problème, nous codons le travail de ce groupe par un épisode de lecture. Pour les quelques cas moins évidents à interpréter, nous ne décidons pas tout de suite. Nous analysons la suite de la vidéo afin de revenir déterminer lequel des deux épisodes semble le plus en lien avec la suite.

Enfin, une dernière difficulté soulevée par Schoenfeld (1992b, p. 194) concernant l'*exploration* est de savoir si : « a somewhat meandering period of exploration should be coded as one long exploration episode or as two or more shorter, contiguous exploration episodes » (Ibid.). Schoenfeld avance une piste de réponse qui tient en l'idée que si une nouvelle information arrive pendant la phase où l'élève explore le problème mais sans qu'elle soit utilisée, on repère cette nouvelle information au sein de l'épisode. Si au contraire elle amène l'élève à abandonner son approche pour en explorer une autre, il faut mettre fin à cet épisode et en ouvrir un autre. Pour notre recherche, nous considérons qu'un autre épisode d'exploration est déclenché dès que la piste

poursuivie est abandonnée au profit d'une autre indépendamment de l'apparition d'éventuelles nouvelles informations.

Ceci nous amène à évoquer la question de la durée des épisodes.

ii. Des choix a priori : les repères temporels

Schoenfeld (1992, p. 194) admet que « the written descriptions of the method produced thus far do not suffice to define the "grain size" of an episode, particularly of an exploration episode » ce qui impacte nécessairement la durée des épisodes. Pour éviter de tomber dans un découpage trop fin qui ne nous semble pas rendre compte de la structure macroscopique du travail des élèves, nous décidons de ne pas coder les épisodes d'une durée inférieure à trente secondes qui viennent s'immiscer dans un épisode plus long. Cette restriction s'applique à tous les épisodes à l'exception des épisodes de transition, vérification et régulation pour lesquels une durée même courte peut être décisive. Enfin, les épisodes de lecture sont quant à eux comptabilisés dès lors que leur durée dépasse les dix secondes.

Comme nous venons de l'exposer, la question de la fiabilité se pose au niveau de la nature des épisodes. Nous la traitons en effectuant certains choix qui permettent d'affiner la caractérisation des épisodes et leur repérage temporel. Mais cette question est également à envisager du point de vue du processus de production du codage qui en constitue une dimension importante.

3.1.3 Le processus de codage

i. Description

Pour renforcer la fiabilité de ce codage et la réplicabilité des analyses, nous faisons le choix de procéder à un double-codage c'est-à-dire que deux évaluateurs, en l'occurrence une assistante de recherche¹⁵ et nous même, codent l'ensemble des données. À la suite de ce double-codage réalisé de manière indépendante¹⁶, une confrontation est organisée et permet d'aboutir à un accord entre codeurs sur les points de divergence. Concrètement, nous avons avancé le codage degré par degré en commençant par les 4P, les 8P pour finir avec les 10^e LS puis les 10^e CT. Nous avons procédé à la confrontation des résultats de codage régulièrement c'est-à-dire sans attendre que l'ensemble des protocoles d'un même degré soient codés. De plus, un temps de confrontation était prévu après le codage de seulement deux groupes d'élèves à chaque changement de degré car le changement de problème nécessite une sorte d'étalonnage en particulier pour les épisodes de planification – mise en œuvre et d'exploration. C'est au cours de ces premières confrontations que sont apparus les besoins de précision de certains épisodes évoqués précédemment. Nous avons également appliqué ce fonctionnement au changement entre les classes de LS et CT car nous avons remarqué lors du recueil de données que les procédures entre les élèves de ces deux classes sont très différentes.

Ce qui nous intéresse principalement c'est que le résultat final du codage, c'est-à-dire après confrontation, soit le plus fiable au sens de le plus stable possible sur l'ensemble du corpus des données afin de permettre des comparaisons inter-degrés. Nous avons pu ressentir qu'au fil de l'avancée du codage au sein d'un même degré, les résultats de codage étaient de plus en plus proches que ce soit au niveau de la nature des épisodes qu'au niveau des repères temporels. Pour dépasser ce constat très subjectif, nous cherchons à rendre compte de cette fiabilité en tentant de la « mesurer » de manière plus objective. C'est ce qui nous amène à étudier la question de l'évaluation de l'accord inter-codeurs.

¹⁵ Une étudiante repérée dans le cours d'une collègue que nous avons formée et payée.

¹⁶ Dans un souci d'économie de temps compte tenu de la quantité de données à coder, nous avons fait le choix de communiquer les repères temporels de début et de fin. Le reste du codage a été réalisé de manière indépendante.

ii. Calcul de l'accord inter-codeurs

Il existe de nombreuses manières de calculer l'accord inter-codeurs, qui dépendent de différentes variables de l'expérimentation. Le nombre de codeurs, le fait que les mêmes évaluateurs codent tout ou partie des protocoles, la nature de l'échelle de codage (ordinaire, nominale, ...) en sont quelques exemples. Nous sommes dans le cas où les deux mêmes juges codent l'intégralité du corpus de données. L'échelle de codage, qui correspond aux différents épisodes, est de nature nominale c'est-à-dire que la différence est d'ordre qualitatif et non pas ordinaire comme sur une échelle de *Lickert* par exemple. Une particularité de notre codage est que la confrontation porte sur la nature des épisodes mais également sur leur repérage temporel. De plus, le nombre total d'épisodes donc de codes à confronter n'est pas prédéterminé et peut différer d'un codeur à l'autre. Enfin, nous ne disposons pas d'un protocole codé « type » qui permettrait d'étalonner les écarts entre les juges, ni de données qui auraient pu permettre un entraînement jusqu'à obtenir un accord presque parfait avant de se lancer dans le codage du corpus de données.

Pour calculer l'accord inter-codeurs dans les conditions de notre recherche, nous avons dans un premier temps eu recours au calcul du *percent agreement* (Jacobs et al., 2003, p. 100) à l'aide de la formule suivante :

$$P = \frac{\text{Nombre d'accords}}{\text{Nombre d'accords} + \text{Nombre de désaccords}}$$

Nous calculons donc ce pourcentage d'agrément relativement à la nature des épisodes mais aussi à leur repérage temporel :

- Codage en épisodes : il y a accord lorsqu'un segment de temps est codé par un épisode de même nature de la part des deux codeurs comme c'est le cas de l'épisode d'exploration de l'extrait qui se trouve en Figure 11, même si les repères temporels ne correspondent pas complètement. Il arrive que l'un des codeurs effectue un découpage plus fin que l'autre. Ce cas de figure est illustré par l'épisode de planification – Mise en œuvre (Figure 11) qui est compté comme un seul accord pour chaque codeur même s'il apparaît deux fois pour le codeur A. L'épisode de transition supplémentaire du codeur A (26:07 à 26:24) est comptabilisé quant à lui comme un désaccord. Enfin, le désaccord correspond aussi au cas où un même segment est codé par deux épisodes de nature différente à l'image des épisodes de régulation (Codeur A) versus transition (Codeur B).

Codeur A			Codeur B		
19:29	00:21:20	Exploration	19:30	21:20	Exploration
21:20	00:21:31	Régulation	21:20	21:33	Transition
21:31	00:26:07	Planification/mise en œuvre	21:33	27:40	Planification - Mise en œuvre
26:07	00:26:24	Transition			
26:24	00:27:41	Planification/mise en œuvre			

Figure 11. Extrait du codage du groupe 10CTBa13

En résumé, sur l'extrait de la Figure 11, nous comptons 4 accords et 3 désaccords.

- Codage temporel : nous fixons une tolérance d'une vingtaine de secondes au niveau des écarts de temps. Dans quelques cas, elle a été plus importante pour prendre en compte des différences d'interprétation de certains longs silences qui peuvent aussi bien faire partie de l'épisode en cours que du suivant. Pour l'extrait de la Figure 11, nous considérons 6 accords

contre 2 désaccords, sachant que seuls les time-code de début (colonne de gauche sur l'extrait) sont comptés. Ce choix est totalement arbitraire et transparent car nous aurions pu prendre de la même façon le time-code de fin. Comme nous avons délimité et communiqué les début et fin de chaque protocole à l'autre codeur, le premier time-code de chaque protocole étant forcément identique n'est pas comptabilisé.

Les pourcentages d'accord ont pu être calculés pour la classe de 8PV, et les deux classes de 10^e. Pour les classes de 4P et 8PS, nous avons enregistré le résultat de la confrontation sur le même document que notre codage initial. Nous avons ainsi perdu le codage initial nous privant de la possibilité de calculer l'accord inter-codeurs pour ces trois classes.

Les tableaux suivants représentent le nombre d'accords et de désaccords par groupe. Cela permet de calculer le pourcentage d'accord inter-codeurs par classe puis en cumulé.

Pourcentage d'accord _ Épisodes				
Classes	Groupes	Nombre d'accords	Nombre de désaccords	
8PVDr	2	10	3	
	3	40	26	
	7	58	17	
	8	44	14	
	9	14	1	
Total		166	61	$P_{8PV} = 0,73$
10LS	7	12	1	
	8	10	1	
	9	6	0	
	10	38	3	
	11	34	9	
	12	16	8	
	13	22	16	
	14	12	1	
Total		150	39	$P_{10LS} = 0,79$
10CT	7	26	2	
	10	30	11	
	12	28	17	
	13	34	11	
	14	40	12	
Total		158	53	$P_{10CT} = 0,75$
Cumulé		474	153	$P_{\text{cumulé}} = 0,76$

Tableau 3. Répartition du nombre d'accords/désaccords et calcul du pourcentage d'accord inter-codeurs pour le codage de la nature des épisodes

Pourcentage d'accord _ Codage temporel				
Classes	Groupes	Nombre d'accords	Nombre de désaccords	
8PVDr	2	8	4	
	3	52	13	
	7	64	10	
	8	48	9	
	9	12	1	
Total		184	37	P_{8PV} = 0,83
10LS	7	8	4	
	8	8	2	
	9	4	0	
	10	36	5	
	11	34	7	
	12	18	5	
	13	18	19	
	14	10	2	
Total		136	44	P_{10LS} = 0,76
10CT	7	26	1	
	10	32	8	
	12	36	9	
	13	38	6	
	14	44	6	
Total		176	30	P_{10CT} = 0,85
Cumulé		496	111	P_{cumulé} = 0,82

Tableau 4. Répartition du nombre d'accords/désaccords et calcul du pourcentage d'accord inter-codeurs pour le codage temporel

Tinsley et Weiss (1975) pointent que "Guttman et al. (1971) concluded, after a review of the literature, that there was a "tacit" consensus that 65% represented the minimum acceptable agreement". Les pourcentages d'accord inter-codeurs calculés pour ces codages semblent donc tout à fait acceptables. Ceci étant, Stemler (2001, p. 3) met en avant une limite de cet indicateur de fiabilité dans la mesure où

(...) it does not account for the fact that raters are expected to agree with each other a certain percentage of the time simply based on chance (Cohen, 1960). In order to combat this shortfall, reliability may be calculated by using Cohen's Kappa, which approaches 1 as coding is perfectly reliable and goes to 0 when there is no agreement other than what would be expected by chance. (p. 3)

Nous cherchons donc à calculer le coefficient Kappa de Cohen (1960) à l'aide de la formule suivante :

$$k = \frac{P_0 - P_c}{1 - P_c}$$

Où P_0 désigne la proportion d'accords entre les deux codeurs, et P_c , la proportion de codages pour lesquels l'accord a pu être obtenu par hasard.

Pour cela, nous reportons les accords et désaccords des deux codeurs dans le Tableau 5 dont chaque entrée correspond à un des épisodes. Il est de plus nécessaire de rajouter une entrée appelée « Non codé » pour prendre en compte les désaccords liés au grain de finesse c'est-à-dire lorsqu'un épisode est codé par un seul des juges. C'est le cas de l'épisode de transition du codeur A dans la Figure 11.

Cumulé		Codeur B									Non codé
		Lecture	Appropriation	Exploration	Planif/Mise en O	Vérification	Digression	Ecriture	Régulation	Transition	
Codeur A	Lecture	28									2
	Appropriation	2	22	2	2						1
	Exploration			80	46					2	10
	Planif/Mise en O			8	82	2					4
	Vérification					8					
	Digression						84			6	4
	Ecriture							6			4
	Régulation					2			96	8	1
	Transition						6		2	68	13
	Non codé		2	2	8		3	1	1	9	
Nombre total de décisions											627

Tableau 5. Synthèse de tous les codes-épisodes pour les deux codeurs

Cumulé		Codeur B									Total	
		Lecture	Appropriation	Exploration	Planif/Mise en O	Vérification	Digression	Ecriture	Régulation	Transition		
Codeur A	Lecture	0,0447									0,0032	0,0478
	Appropriation	0,0032	0,0351	0,0032	0,0032						0,0016	0,0463
	Exploration			0,1276	0,0734					0,0032	0,0159	0,2201
	Planif/Mise en O			0,0128	0,1308	0,0032					0,0064	0,1531
	Vérification					0,0128						0,0128
	Digression						0,1340			0,0096	0,0064	0,1499
	Ecriture							0,0096			0,0064	0,0159
	Régulation					0,0032			0,1531	0,0128	0,0016	0,1707
	Transition						0,0096		0,0032	0,1085	0,0207	0,1419
	Non codé		0,0032	0,0032	0,0128		0,0048	0,0016	0,0016	0,0144		
Total	0,0478	0,0383	0,1467	0,2201	0,0191	0,1483	0,0112	0,1579	0,1483		1,0000	

Tableau 6. Synthèse des proportions de tous les codes-épisodes pour les deux codeurs

P_0 correspond à la somme des nombres situés sur la diagonale grisée, ainsi $P_0 = 0,7560$.

Stemler (2001) indique que pour calculer P_c , il faut dans un premier temps additionner les proportions par épisodes pour le codeur A, notées P_{nA} avec n désignant le n-ième épisode sur les 9 au total (colonne orangée) et le codeur B, notées P_{nB} (ligne orangée). Notons que cette proportion n'a pas de sens pour la catégorie « Non codé ». Ensuite, il reste à faire la somme :

$$P_c = \sum_{n=1}^9 P_{nA} \cdot P_{nB} = 0,0478 \times 0,0478 + 0,0463 \times 0,0383 + \dots + 0,1419 \times 0,1483$$

Soit $P_c = 0.1407$

Ce qui donne finalement un coefficient Kappa de Cohen : $k = 0,72$

En nous référant aux repères proposés par Landis et Koch (1977, p. 165) pour interpréter ce coefficient (Tableau 7), nous en concluons un accord inter-codeurs important. C'est encore le cas en considérant les codages par degré car, nous obtenons :

$$k_{8PV} = 0,68 ; k_{10LS} = 0,76 \text{ et } k_{10CT} = 0,7 .$$

<u>Kappa Statistic</u>	<u>Strength of Agreement</u>
<0.00	Poor
0.00–0.20	Slight
0.21–0.40	Fair
0.41–0.60	Moderate
0.61–0.80	Substantial
0.81–1.00	Almost Perfect

Tableau 7. Repères pour l'interprétation du coefficient Kappa de Cohen (Landis & Koch, 1977, p. 165)

Les calculs (sur la moitié de notre corpus de données) du pourcentage d'accord et du coefficient Kappa de Cohen révèlent un accord inter-codeurs qualifié d'important. Comme nous avons suivi le même processus de codage, nous supposons que l'accord inter-codeurs à l'échelle du corpus entier peut être considéré comme important. Ainsi, les résultats obtenus à l'aide du double codage puis de la confrontation nous semblent suffisamment stables à l'échelle du corpus pour supporter des comparaisons inter-degrés.

iii. Analyse a posteriori de l'accord inter-codeurs

De manière plus qualitative, il ressort différents éléments à analyser du Tableau 5 présentant les accords/désaccords. Une première source de désaccords correspond à la nature des épisodes mais qui peut être affinée car finalement la principale source d'écart à ce niveau est supportée par Exploration vs Planification/Mise en œuvre. Ceci semble révéler une difficulté à distinguer ces deux épisodes. Ce n'est pas vraiment une surprise car Schoenfeld (1992) pointe cette difficulté en lien avec l'exploration. Cette difficulté mise de côté, nous constatons très peu de désaccords en lien avec la nature des autres épisodes.

La deuxième source de désaccords est inhérente à la taille du grain de l'analyse. Cela correspond aux nombres situés dans la catégorie « Non codé » c'est-à-dire que certains épisodes ont été identifiés par un codeur mais pas par l'autre. Là non plus, ce n'est pas surprenant puisque, rappelons-le, Schoenfeld suggérerait que les descriptions écrites ne sont pas suffisantes pour définir la « taille du grain » d'un épisode.

Dans tous les cas, ces différents désaccords ont tous été discutés, et dans certains cas, les extraits ont été visionnés et codés conjointement par les deux codeurs, de manière à parvenir à un consensus qui sera le support des analyses correspondant à ce niveau macroscopique.

Tout au long de cette partie, nous avons explicité différents éléments méthodologiques en lien avec l'analyse relative au niveau macroscopique dont notamment l'adaptation majeure qui tient en l'ajout d'un épisode de régulation et les nombreux choix a priori nécessaires pour favoriser une fiabilité du processus de codage. La partie suivante vise à rendre compte de la construction de notre outil d'analyse des heuristiques et de sa mise en œuvre. Nous évoquons également la question de la fiabilité des résultats de ce type de codage.

3.2 Point de vue microscopique : les heuristiques

Pour analyser le travail des élèves en termes d'heuristiques, nous devons dépasser deux écueils. Le premier est lié à la très grande diversité au niveau de la manière de caractériser une heuristique et ce même au sein de la communauté des chercheurs en *mathematics education*. Pour compléter les éléments évoqués précédemment sur ce point, nous faisons référence à une étude de Rott (2015). Ce chercheur a analysé des situations fictives identiques à la lumière de trois caractérisations (et donc méthodologies) différentes : Koichu, Berman, and Moore (2007); Kantowski (1974); et Rott (2012a). Il montre ainsi que des caractérisations différentes conduisent à des manières de coder différentes et par conséquent, certaines actions peuvent être analysées, comptées ou interprétées comme heuristique (ou non) ce qui impacte automatiquement les résultats. Ainsi, les résultats

provenant de caractérisations différentes ne peuvent pas être comparés. Rott avance même que les résultats d'études dont la caractérisation considérée pour l'heuristique n'est pas explicitée clairement restent discutables. Comme nous l'avons dit plus haut, nous faisons le choix de prendre comme référence la définition établie par Rott (2104, p.190).

La deuxième difficulté concerne la partie spécifique du codage. Dans le cadre de sa recherche de thèse, Kilpatrick (1967) est un des premiers à avoir analysé, de manière rigoureuse le processus de résolution d'un problème à la lumière des heuristiques. Pour cela, il a établi une liste à partir des questions tirées de Pólya (1945). Ses premières tentatives l'ont amené à constater qu'un grand nombre de ces heuristiques n'est pas utilisé et qu'il est difficile de coder ces heuristiques de manière fiable. Par la suite, il a réduit la liste à certains comportements ce qui augmente la fiabilité et permet le comptage des heuristiques mobilisées. Ceci étant, comme une grande quantité d'informations relatives au processus de résolution sont perdues avec ce type d'analyses, Kilpatrick propose un autre système de codage des séquences du processus de résolution. Ce travail a servi de base aux recherches de Lucas (1972) et Kantowski (1977) avec seulement quelques modifications liées à l'introduction d'heuristiques spécifiques aux domaines mathématiques étudiés (calcul et géométrie). À la suite de ces études, six chercheurs (Lucas et al., 1980) ont collaboré pour mettre au point un système de codage des processus mis en œuvre pendant la résolution du problème. Il consiste en une séquence de lettres, de chiffres et d'autres symboles. Ce type de codage est illustré dans la figure suivante où un extrait de résolution de problème (séquence A) est codé par le Code A :

Sequence A: The problem solver reads the problem, hesitates, rereads part of the problem, says the problem resembles another problem and he will try to use the same method, then deduces correctly a piece of information from one of the given data.

Code A: R, R, L₈ P_i D_{a5}⁴,

Figure 12. Exemple de codage (Lucas et al., 1980, p. 361)

Ce code se déchiffre à l'aide d'un dictionnaire qui comporte plusieurs pages. L'idée forte est d'accéder à une certaine compréhension de la résolution de problèmes et de garantir une bonne fiabilité dans le codage. Mais, du fait de la complexité de tels systèmes et de la lourdeur inhérente à la quantité de symboles à traiter, ces systèmes n'ont pas été réinvestis ; les recherches suivantes, durant les années quatre-vingt, préférant se concentrer sur des aspects plus restreints du processus de résolution.

Plus récemment, Koichu et al. (2007) ont proposé un protocole de codage qui s'appuie sur un certain nombre de comportements heuristiques dont une description est proposée comme le montre l'extrait suivant :

Heuristic behaviors	Descriptions
3. <i>Activating a previous experience, including...</i>	Activating knowledge and problem-solving methods that are known to the student from his or her past learning and problem-solving experience.
3a. <i>Recalling related problems</i>	Recalling related problems solved in the past and using the structure of a known problem to help to solve a new one.
3b. <i>Recalling related theorems</i>	Recalling related theorems which may help to solve a problem.
4. <i>Creating a model, including...</i>	Representing a problem by means of a representational system different from a given representational system. For example, translating a word problem into algebraic equation.
4a. <i>Denoting and labeling</i>	Denoting and labeling the elements of a given problem.
4b. <i>Drawing a picture</i>	Drawing a figure, a diagram, or a graph.
5. <i>Exploring particular cases, including...</i>	Approaching a given problem by consideration of its particular cases and (generic) examples

Figure 13. Extrait du manuel de codage de Koichu et al. (2007)

Il est à noter que ce protocole est appliqué sur des données issues d'entretiens à voix haute.

Enfin, le dernier type de codage qui s'inscrit dans la lignée des précédents est celui de Rott (2012a) qui ressemble beaucoup sur la forme à celui de Koichu et al. La différence, outre la caractérisation de l'heuristique en elle-même, réside dans l'ajout d'exemples qui permettent d'illustrer les formes différentes en fonction des problèmes.

Code	Description	Exemples
Drawing a figure	Drawing a figure, a graph, or a diagram.	Coasters: a drawing of possible positions of the two squares. Number Series: drawing a diagram of numbers with possible neighbors.
Special cases	Assigning special values (like 0 or 1) to algebraic problems or examining special positions in geometric problems.	Coasters: positions of the two squares which make it evident that the marked area amounts to one fourth of a square.
Back-tracking	Working forwards until being stuck; then tacking back steps to try alternate ways.	Number Series: working till getting stuck (e.g., at 8 or 9) and then deleting numbers till being able to proceed with another number.

Figure 14. Extrait du manuel de codage de Rott (2012a)

À la lumière de ces différents outils d'analyse, nous avons fait le choix de construire notre propre outil qui prend une forme similaire à celui de Koichu et al. (2007) et basé sur la définition d'une heuristique proposée par Rott (2014). Nous explicitons dans la partie suivante ce processus d'élaboration.

3.2.1 Méthode d'analyse

Pour analyser les démarches de résolution des élèves en termes d'heuristiques, nous avons imaginé une méthode qui tient en trois étapes dont le point de départ est la définition d'une heuristique proposée par Rott (2014).

Les deux premières étapes de la méthodologie concernent l'élaboration d'un manuel de codage et la troisième correspond au codage des données :

- trier et extraire de la littérature les différentes propositions d'heuristiques qui satisfont la définition prise comme référence ;
- mettre à l'épreuve cette liste d'heuristiques sur certaines de nos données avec l'idée d'enrichir cette liste ou de préciser certaines heuristiques de manière à rendre le manuel plus opérationnel ;
- Coder les données avec le manuel élaboré.

Lors de la première étape, nous avons parcouru la littérature scientifique à partir des différents mots-clés : heuristique, stratégie heuristique, stratégie, processus heuristique, principe heuristique, tactique et leurs traductions anglaises. Les sources consultées et retenues sont soit des articles de recherche pour lesquels nous retrouvons une dimension très majoritairement descriptive des heuristiques, soit des ouvrages écrits par des chercheurs avec cette fois-ci une optique davantage prescriptive. L'Annexe 1 présente la liste des auteurs correspondant pour chaque heuristique retenue. Dans ces différentes sources, les heuristiques peuvent être seulement mentionnées ou bien décrites voire illustrées à l'aide de problèmes. Comme les caractérisations peuvent être légèrement différentes d'un auteur à l'autre, d'un domaine mathématique à l'autre, nous proposons ici une description pour préciser le sens que nous retenons pour notre étude :

<i>Intitulé</i>	<i>Description</i>
Faire un dessin, un schéma, une figure, un graphique	L'intitulé est suffisamment explicite et ne s'applique pas seulement aux problèmes de géométrie. Mettre en œuvre cette heuristique peut permettre entre autres de faire évoluer la représentation du problème, de mettre en lien certaines données du problème ou encore de générer de nouvelles idées. Dans nos données, nous n'avons pas codé cette heuristique lorsque les élèves dessinaient un essai en particulier en 4P puisque dans ce cas le dessin est un registre de représentation sémiotique.
Organiser les données, les essais sous une forme particulière (lignes, colonnes, tableau)	Il s'agit de présenter sous une forme organisée, en générale lignes, colonnes ou tableau, toutes ou une partie des données communiquées dans l'énoncé et/ou les essais déjà réalisés. Cette heuristique est utile en particulier pour mettre en lien les éléments du problème, pour repérer des régularités.
Reformuler le problème	Tenter de reformuler le problème sous une forme équivalente mais plus simple. Cette reformulation peut être en langue naturelle ou dans un autre registre.
Simuler/jouer l'action du problème	Les élèves qui cherchent à résoudre un problème prennent l'initiative de simuler l'action du problème par exemple sous forme de jeu de rôle. Cette heuristique peut être très utile, particulièrement pour de jeunes élèves, pour mieux comprendre le problème.
Introduire des noms ou des notations	Les noms ou les notations introduites par les élèves ne sont pas mentionnés dans l'énoncé du problème.
Réduire le problème à un problème plus simple	Se ramener à un problème proche mais plus simple que ce soit en modifiant, fixant ou abandonnant certaines conditions du problème ou en réduisant la complexité de la question (par exemple en changeant la « taille » ou la nature des nombres).

Envisager une autre façon d'interpréter les objets du problème	Un ou plusieurs éléments du problème ou leurs relations sont interprétés d'une autre façon que celle initiale.
Changer de registre de représentation sémiotique	Changer de registre de représentation sémiotique par rapport à celui (ou ceux) de l'énoncé ou celui déjà mobilisé par l'élève dans la première partie de la résolution.
Introduire des éléments auxiliaires	Des éléments de construction, des lignes auxiliaires, une nouvelle variable..., non mentionnés dans l'énoncé, sont introduits dans le problème.
Faire le lien avec un problème déjà rencontré	Les élèves cherchent à s'appuyer sur la structure ou le raisonnement d'un problème déjà rencontré et résolu.
Faire le lien avec un outil mathématique (théorème, propriété)	Les élèves convoquent un outil mathématique non indiqué dans l'énoncé du problème mais sans garantie de son efficacité.
Explorer une donnée particulière	L'exploration d'une donnée particulière peut permettre de mettre en évidence son rôle dans le problème. Par exemple, on peut ignorer temporairement une donnée particulière pour mieux voir à quel niveau elle intervient.
Explorer des cas particuliers	Envisager des valeurs particulières, extrêmes ou limites pour certains paramètres ou données du problème ou au niveau des essais à réaliser.
Faire un essai	Cette heuristique recouvre aussi bien un essai réalisé dans le cadre d'une démarche d'ajustements d'essais successifs que dans le cadre d'une démarche expérimentale.
Générer de nouvelles données de manière systématique	C'est l'aspect systématique qui prévaut pour cette heuristique. Par exemple, les élèves font une liste d'objets répondant à une ou plusieurs conditions du problème.
Rechercher des similitudes ou des différences	Les élèves examinent les données proposées dans le problème ou celles qu'ils ont générées de manière à repérer des régularités ou des différences. Ces régularités peuvent par exemple être utilisées pour émettre une conjecture.
Rechercher ce qui est invariant	Comme son nom l'indique, il s'agit de rechercher ce qui ne change pas dans le problème tandis que plusieurs autres facteurs changent. Dans certains problèmes, cela peut supposer aussi de construire des objets ayant certains aspects invariants.
Exploiter les propriétés de symétrie	Les élèves identifient des éléments symétriques ou produisent des données qui revêtissent une dimension symétrique. La symétrie peut intervenir sous différentes formes et pas seulement dans les problèmes de géométrie.
Chercher un contre-exemple	L'intitulé est suffisamment explicite.
Décomposer le domaine du problème et travailler cas par cas	Le problème peut être divisé en plusieurs sous-problèmes qui vont être traités les uns après les autres de manière indépendante.

Travailler en avançant	Cela consiste à déduire certaines informations à partir des éléments à disposition. L'avancée dans la résolution se fait dans le sens des données vers la solution.
Retour arrière	Les élèves travaillent en avançant jusqu'à se trouver confrontés au choix entre plusieurs pistes. Ils explorent une de ces pistes jusqu'à être bloqués ou se rendre compte qu'elle est infructueuse. Puis ils retournent à l'endroit du choix et explorent une autre piste.
Travailler à reculons	Partir de la conclusion (la solution cherchée), puis essayer de trouver une ou plusieurs affirmations précédentes qui, prises ensemble, impliqueraient la conclusion. Répéter cette étape jusqu'à arriver à quelque chose de connu ou de facilement prouvable.

Comme nous voulions coder des données audiovisuelles d'élèves de primaire et secondaire I, nous avons construit une liste pertinente à ce niveau. De ce fait, nous ne retenons pas certaines heuristiques trouvées dans la littérature comme par exemple « the induction principle » (Engel, 1998, p. 205) qui concerne des problèmes propres au secondaire II ou au supérieur. Inversement, nous avons retiré l'heuristique « Finding what is easy to find » (Koichu et al., 2007, p. 125). En effet, il nous semblait par exemple que dans le problème *Dragons et compagnie*, trouver le nombre de crocodiles aurait pu être codé par cette heuristique. Mais cet aspect est apparu loin d'être facile pour de nombreux élèves de 8P et nous a fait prendre conscience du caractère éminemment subjectif et relatif de cette heuristique. Ne connaissant pas le niveau individuel des élèves, nous avons choisi de ne pas retenir cette heuristique.

Cette liste de départ a été mise à l'épreuve de certaines données expérimentales ce qui nous a amené à la compléter avec les trois heuristiques suivantes :

Recopier ou mettre en évidence certaines données	Mettre l'accent sur certaines données soit en les recopiant, soit en les mettant en évidence dans l'énoncé (souligner, surligner, entourer ou désigner par des gestes). Par exemple : surligner des données de même nature de la même couleur.
Introduire des artefacts ou du matériel	Les élèves prennent l'initiative d'utiliser des artefacts (compas, tableur,...) ou du matériel (jetons, multicubes, ficelle, ...). De manière générale, ces éléments introduits permettent aux élèves de manipuler.
Aller chercher de l'information (manuel, internet, ...)	Les élèves utilisent d'autres médias pour aller chercher de l'information. Là encore, les informations récupérées ont du potentiel pour avancer dans la résolution sans pour autant garantir le succès.

Remarquons que l'ensemble de ces heuristiques retenues nous semble suffisamment général pour permettre l'analyse d'un grand nombre de problèmes qui dépasseraient le cadre de notre expérimentation.

3.2.2 La fiabilité des résultats de codage des heuristiques

Ce codage des heuristiques est du type *occurrence codes* (Jacobs et al., 2003, p. 88) où il s'agit de marquer chaque occurrence pour chacune des heuristiques. Il est alors possible qu'une même heuristique soit codée à plusieurs reprises tout au long de la vidéo analysée ou au contraire qu'elle n'apparaisse jamais. Nous cherchons donc à connaître quelles heuristiques sont mobilisées et le moment où elles le sont. Nous venons de préciser les éléments relatifs à la nature des heuristiques. Il convient d'aborder la question des repères temporels. En effet, une difficulté inhérente à la durée d'une heuristique impacte le codage temporel. Certaines heuristiques (exemple : Recopier ou mettre en évidence certaines données) ont un empan assez large quand d'autres (exemple : Introduire des noms ou des notations) sont très ponctuelles. D'ailleurs, pour une même heuristique (exemple : Faire un essai), nous pouvons être confronté à des durées très différentes selon la mise en œuvre des élèves. Dans tous les cas, nous avons fait le choix de coder le moment où les élèves évoquent l'heuristique ou le début de l'action lorsqu'ils la mettent en œuvre.

Ainsi, ces différents choix relatifs à la nature des heuristiques et au codage temporel sont un premier niveau de garantie pour obtenir une meilleure fiabilité des résultats de codage. Cette question de la fiabilité s'envisage également au niveau du processus de production du codage.

3.2.3 Le processus de codage

i. Description

Comme pour le codage en épisodes, nous faisons le choix de procéder à un double-codage. C'est-à-dire que la même assistante de recherche et moi-même codons de manière indépendante les différents groupes. Puis, nous confrontons nos résultats de codages et procédons à un codage conjoint pour parvenir à un consensus dans les cas de désaccords. Le temps à disposition pour la collaboration avec l'assistante de recherche a induit de restreindre le nombre de groupes codés. Aussi, nous faisons le choix de retenir les groupes qui présentent la plus grande variété du point de vue de la démarche employée, du fait d'avoir trouvé la réponse ou non et des régulations de la part de l'enseignant et ce pour chaque degré. Le Tableau 8 présente le nombre et la répartition par classe des groupes retenus pour le codage en heuristiques. Les groupes non retenus sont utilisés pour la mise à l'épreuve de la liste d'heuristiques issues de la littérature.

Classe	4PC	4PS	8PS	8PV	10CT	10LS	Total
Nombre de groupes filmés	7	6	6	6	5	8	38
Nombre de groupes codés en épisodes	6	5	4	5	5	8	33
Nombre de groupes codés en heuristiques	3	2	2	3	3	4	17

Tableau 8. Nombre et répartition par classe des groupes retenus pour le codage en heuristiques

Nous avons pu mener l'étape de mise à l'épreuve de la liste d'heuristiques issues de la littérature (qui a également constitué une phase d'entraînement pour les codeurs) sur quatre groupes (deux en 4P, un en 8P et un en 10eLS) avant de procéder au codage des 17 groupes retenus.

Le codage de ces 17 groupes s'est déroulé en alternant les degrés comme suit :

4P 8P 10LS 10CT 4P 8P 10LS 10CT 4P 4P 4P 8P 8P 8P 10CT 10LS 10LS

Les premières confrontations ont fait apparaître le risque de sur-interpréter certaines actions des élèves. Pour illustrer cette idée, prenons l'exemple d'un groupe d'élèves de 10^eLS qui écrit les données du problème sous forme d'équations. Ceci peut aussi bien être codé comme « changer de registre de représentation sémiotique » que « faire le lien avec un outil mathématique ». Face à cette ambivalence, il nous est apparu intéressant d'introduire l'idée de cause et de conséquence en tentant de repérer quelle semble être l'heuristique que les élèves ont l'intention de mobiliser et de ne pas coder les autres que nous considérons alors comme conséquences. Ainsi, nous avons été amenés à coder plusieurs heuristiques pour un même time-code seulement dans les cas où elles apportent une précision comme ce peut être le cas par exemple de l'heuristique « Explorer des cas particuliers » qui vient préciser « Faire un essai ».

Ces choix ainsi que les évolutions du manuel de codage présentées plus haut sont intervenus au fil du codage. Les analyses ultérieures portent effectivement sur les résultats de codage après confrontation et obtention d'un consensus dans les cas de désaccord, néanmoins nous étudions et rendons compte, dans le paragraphe suivant, de l'accord inter-codeurs.

ii. Calcul de l'accord inter-codeurs

À l'appui des éléments présentés au sujet de l'accord inter-codeurs relatif au codage en épisodes (voir partie 3.1.3), nous avons fait le choix de calculer le pourcentage d'agrément au niveau des repères temporels, d'une part, et de la nature des heuristiques, d'autre part. Nous utilisons ici aussi la formule (Jacobs et al., 2003, p. 100) :

$$P = \frac{\text{Nombre d'accords}}{\text{Nombre d'accords} + \text{Nombre de désaccords}}$$

Pour le codage temporel, un repère est considéré comme en accord avec une certaine tolérance (de l'ordre de la dizaine de secondes). Dans de rares cas, la tolérance a été plus importante s'il s'agissait de la même action qui est compatible avec la même heuristique mais codée à un moment différent (début et fin par exemple). Lorsque l'écart est trop important ou qu'il n'y a pas de correspondance cela constitue un cas de désaccord.

Concernant la nature des épisodes, une heuristique identique identifiée au même repère temporel est un accord. Tous les autres cas sont comptés comme désaccords.

Le Tableau 9 présente la synthèse des accords/désaccords et le pourcentage d'agrément relativement aux repères temporels et à la nature des heuristiques.

	Temps		Nature	
	Accords	Désaccords	Accords	Désaccords
4PCJc7	12	0	8	4
8PSDr3	12	4	14	7
10CTBa7	34	5	34	5
10LSBa10	32	1	26	14
4PCJc9	26	6	28	11
8PSDr10	20	3	8	25
10CTBa10	14	1	12	3
10LSBa11	22	1	22	1
4PCJc10	24	3	24	5
4PSJc10	16	1	18	1
4PSJc12	46	2	48	2
8PVDr2	6	1	6	1
8PVDr7	30	7	28	12
8PVDr9	18	6	16	10
10CTBa14	24	4	24	4
10LSBa12	20	13	20	15
10LSBa14	6	5	6	5
Total	362	63	342	125
% Agrément	0,85		0,73	

Tableau 9. Calcul du pourcentage d'agrément en temps et nature des heuristiques

Ainsi, le pourcentage d'agrément en temps est de 0,85 et de 0,73 pour la nature des heuristiques. Comme Tinsley et Weiss (1975), se référant à Guttman et al. (1971), le soulignent "there was a "tacit" consensus that 65% represented the minimum acceptable agreement". Les pourcentages d'accord inter-codeurs calculés pour ces codages semblent donc tout à fait acceptables.

Pour avoir un regard encore plus fin et tenter de mieux comprendre le nombre de désaccords qui peut sembler important pour certains groupes, nous présentons les accords et désaccords dans un tableau à double entrée en distinguant le type de désaccords. Le Tableau 10 illustre les différents cas de figures. Les cellules coloriées en vert représentent les accords, c'est-à-dire que les juges A et B ont codé la même heuristique au même moment. Toutes les autres cellules représentent des désaccords :

- Les cellules blanches représentent les désaccords pour lesquels une heuristique est codée différemment par les deux codeurs, au même instant. Par exemple, le chiffre « 2 » indique que le juge A a codé l'heuristique *b* alors que le juge B a codé l'heuristique *c* ;
- Les cellules en orange correspondent aux heuristiques identifiées par un seul des juges. Par exemple, le « 1 » signifie que l'heuristique *c* est codée par le juge A tandis que le juge B ne l'a pas identifiée pour ce time-code.

		Codeur B				
		Heuristique a	Heuristique b	Heuristique c	...	Heuristique non codée
Codeur A	Heuristique a					
	Heuristique b			2		
	Heuristique c					1
	...					
	Heuristique non codée					

Tableau 10. Explicitation des accords et des différents types de désaccords

Dans l'extrait ci-dessous (Tableau 11), nous remarquons que :

- À 10:50, l'heuristique « faire un essai » est un point d'accord entre les deux codeurs ce qui se matérialiserait par un ajout de 2 unités dans la cellule verte de la diagonale correspondant à cette heuristique. De plus, la cellule au croisement de la ligne « heuristique non codée » (codeur A) et de la colonne « explorer des cas particuliers » (codeur B) est incrémentée d'une unité.
- À 38:20, la même action est codée différemment pour les deux codeurs. Dans ce cas, la cellule au croisement de la ligne « faire un essai » (codeur A) et de la colonne « travailler en avançant » (codeur B) serait incrémentée de 2 unités.

		Codeur A	8PSDr10	Codeur B	
Time-code	Intitulé			Time-code	Intitulé
10:50	faire un essai			10:50	Faire un essai - Explorer des cas particuliers
...
38:20	faire un essai			38:20	Travailler en avançant

Tableau 11. Extrait d'une grille de codage (8PSDr10)

En reportant de la sorte tous les codages des deux codeurs, nous obtenons le Tableau 12. Notons que les heuristiques non codées par les deux juges ont été retirées du tableau pour l'alléger et faciliter la lecture.

À partir de ce tableau, nous pouvons calculer le coefficient Kappa de Cohen en suivant la même procédure que pour le calcul de celui relatif au codage en épisodes (voir la section 3.1.3 ii Calcul de l'accord inter-codeurs). Nous obtenons $k = 0,62$. En nous référant aux repères proposés par Landis et Koch (1977, p. 165) (voir Tableau 7), nous pouvons qualifier cet accord inter-codeurs d'important.

Codeur B

	Organiser les données, les essais sous une forme particulière (lignes, figures, tableaux)	Reformuler le problème	Recopier ou mettre en évidence certaines données	Simuler/jouer l'action du problème	Introduire des noms ou des notations	Réduire le problème à un problème plus simple	Envisager une autre façon d'interpréter les objets du problème	Changer de registre de représentation sémiotique	Introduire des artefacts ou du matériel	Faire le lien avec un problème déjà rencontré	Faire le lien avec un outil mathématique (théorème, propriété)	Explorer une donnée particulière	Explorer des cas particuliers	Faire un essai	Générer de nouvelles données, faire une liste systématique	Rechercher des similitudes ou des différences	Exploiter les propriétés de symétrie	Chercher un contre-exemple	Travailler en avançant	Travailler à reculons	Non codée	Total
	2		2																			2
		2																				2
		2	18																1	21		21
					4														2	2		2
						4																4
						2													4	6		6
																						0
			2				8												2	12		12
								2														2
									4													4
							2															2
										10									2	14		14
												2										9
												6										11
																			1	7		7
						2				4										22		22
									216											12		256
												4										4
																			5	5		5
																			1	1		1
																			1	1		1
									4											19		87
										2										2		2
																						2
			1																			24
			2	4	21	0	2	2	4	4	4	2	11	2	2	2	4	4	4	2	0	69
	2	4	21	0	4	2	2	2	4	4	4	19	0	12	228	4	4	0	4	0	4	467

Codeur A

Tableau 12. Synthèse de l'ensemble des heuristiques pour les deux codeurs

Nous retrouvons effectivement les 342 accords pointés dans le Tableau 9. Pour ce qui concerne les désaccords, nous remarquons que 32 correspondent à une heuristique interprétée de deux manières différentes par les deux juges dont 16 correspondent aux deux heuristiques « travailler en avançant » et « faire un essai ». Et de manière encore plus précise, 10 de ces 16 désaccords concernent le seul groupe 8PSDr10 (cf Tableau 9), c'est-à-dire que des actions similaires interprétées plusieurs fois de manières différentes mais stables pèsent lourdement sur l'accord inter-codeur. Ainsi, nous retenons que lorsqu'une heuristique est identifiée par les deux codeurs, l'accord est presque parfait. L'essentiel des désaccords, à savoir les 93 désaccords restants (soit environ les trois quarts du total), correspondent à des heuristiques codées par un seul des juges. Les cellules indiquant les totaux montrent que 69 heuristique sont codées par le seul juge A tandis que 24 le sont par le seul juge B. Ces nombres mettent en évidence la difficulté que représente le codage des heuristiques en ce qui concerne le grain d'analyse. D'ailleurs, un élément qu'il est nécessaire de rappeler et de garder à l'esprit est que certaines de ces heuristiques sont également des stratégies de résolution. La différence réside dans l'interprétation du niveau de confiance des élèves qui les mettent en jeu. Dit autrement, lorsque les élèves mobilisent une stratégie en étant presque certain de son efficacité elle ne devrait pas être comptée comme une heuristique. Si par contre, l'attitude ou les verbalisations des élèves amènent à penser qu'ils ne sont pas complètement sûrs de l'efficacité, cette stratégie doit être codée comme heuristique (Julo, 1995 ; Verschaffel, 1999).

Pour conclure sur cet aspect, rappelons que tous les désaccords ont été discutés lors de la confrontation des codages, et si besoin recodés de manière conjointe par les deux juges, afin de parvenir à un consensus. La suite des analyses portera uniquement sur les heuristiques retenues à l'issue de ces confrontations.

3.3 Analyse des ajustements d'essais successifs

Dans cette partie, nous allons présenter les différentes stratégies susceptibles d'être mises en œuvre pour résoudre les problèmes de notre expérimentation. Comme nos analyses a posteriori se centrent sur les procédures qui mobilisent des ajustements d'essais successifs, nous détaillons davantage les stratégies relatives à cette dimension. Précisons que cette analyse a priori s'est enrichie de l'observation et de l'analyse de différents groupes.

3.3.1 Analyse a priori des problèmes

i. Problème Le jeu de cartes

Tout d'abord, rappelons l'énoncé du problème à destination des élèves de 4P :

Chaque carte de mon jeu représente soit un triangle, soit un carré. Je tire au hasard 15 cartes. Je compte tous les côtés des figures dessinées sur les cartes que j'ai tirées et je trouve 49. A ton avis, combien ai-je tiré de triangles et de carrés ?

Voici les différentes stratégies que nous avons identifiées pour résoudre ce problème :

- Une première stratégie est l'utilisation d'un raisonnement algébrique. En effet, le problème peut être modélisé par un système de deux équations à deux inconnues dans lequel t , respectivement c , représente le nombre de triangles, respectivement le nombre de carrés :

$$\begin{cases} t+c=15 \\ 3t+4c=49 \end{cases}$$

En utilisant une méthode de substitution, une résolution possible de ce système est la suivante :

$$\begin{cases} t+c=15 \\ 3t+4c=49 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} t=15-c \\ 3.(15-c)+4c=49 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} t=15-c \\ c=4 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} t=11 \\ c=4 \end{cases}$$

La solution unique de ce problème correspond au tirage de 4 carrés et de 11 triangles. Bien évidemment cette méthode de résolution, tout comme celle par combinaison, n'est pas envisageable pour les élèves de notre expérimentation puisque les méthodes algébriques n'ont pas encore été enseignées. La résolution de systèmes d'équations est au programme de la classe de 11^e du CO. En particulier, ce problème étant proposé aux classes de 4P, nous pensons que ces élèves devraient réaliser des essais. Les différentes stratégies suivantes tentent de décrire la pluralité des procédures qui peut être induite par la manière d'ajuster et/ou par la manière de caractériser et tester un essai. Dans la suite, nous explicitons chacune de ces stratégies en les illustrant avec des exemples.

- Caractériser un essai consiste à proposer des valeurs possibles pour chaque grandeur. Ces valeurs sont fixées en tenant compte (ou pas) des données du problème qui les concernent. Imaginons par exemple qu'un élève propose comme premier essai 10 carrés. Il déduit, des données du problème, qu'il y a 5 triangles. Le test de l'essai relativement au nombre total de côtés donne 55. Ce nombre étant différent de celui communiqué dans l'énoncé (du fait que 55 est supérieur à 49), il peut déduire qu'il y a trop de côtés donc qu'il faut en enlever. Il y a deux moyens pour cela. Soit on enlève des cartes, soit on remplace des cartes par d'autres. Enlever des cartes présente l'inconvénient que le nombre total de cartes n'est pas invariant ce qui constitue un obstacle important. En effet, en procédant ainsi et lorsque le nombre total de côtés visé est atteint, l'élève devra vérifier si le nombre total de cartes est correct. Si tel n'est pas le cas, il risque, selon le même principe, de rajouter des cartes, etc. Aussi, cette première manière d'enlever des côtés est peu efficace puisqu'elle ne permet pas d'augmenter le nombre de données respectées au fil de la résolution du problème et est potentiellement source d'erreurs dans le cas d'un élève qui ne vérifierait pas si l'ensemble des données est respecté. Mais, pour enlever des côtés, l'élève peut aussi jouer sur le remplacement de cartes. L'avantage est que le nombre total de cartes peut être conservé invariant si l'élève remplace un certain nombre de cartes par le même nombre d'autres. Pour savoir quelles et combien de cartes il faut remplacer, il faut s'appuyer sur le fait qu'un carré a plus de côtés qu'un triangle. En investissant cette connaissance mathématique, l'élève peut par exemple proposer de remplacer 3 carrés par 3 triangles c'est-à-dire réaliser l'essai 7 carrés et 8 triangles. Si un élève procède ainsi, nous parlerons d'**ajustement qualitatif**, que le raisonnement soit verbalisé ou non. Un sous-cas de ce type d'ajustement est l'**ajustement systématique** qui consiste à faire une série d'ajustements qualitatifs qui diffèrent tous d'une unité c'est-à-dire, dans notre illustration précédente, en remplaçant un seul carré par un seul triangle pour chaque nouvel essai réalisé. Si l'interprétation de la rétroaction est correcte, cet ajustement systématique conduit nécessairement à la bonne solution mais le chemin peut être long en fonction des problèmes et du point de départ. D'ailleurs, à propos du point de départ, notons que le premier essai peut être un cas extrême (essai qui ne contient que des carrés ou que des triangles), un cas équilibré entre le nombre de triangles et de carrés ou un cas quelconque (la répartition est déséquilibrée sans être extrême).

- Après le test du 1^{er} essai réalisé précédemment (55 côtés au lieu de 49), l'élève peut aussi ajuster en partant du constat qu'il y a 6 côtés en trop donc qu'il faut enlever 6 côtés. Là aussi, l'élève peut proposer d'enlever 2 triangles ceci ayant pour conséquence la modification du nombre total de cartes. Cette manière d'ajuster n'est pas efficace puisque, comme précédemment, le nombre de données respectées n'évolue pas. Une autre manière d'ajuster s'appuie sur la connaissance mathématique qu'un carré a 1 côté de plus qu'un triangle. Ainsi, remplacer un carré par un triangle fait diminuer le nombre total de côtés d'une unité. Et pour faire diminuer le nombre total de côtés de 6 unités, il faut remplacer 6 carrés par 6 triangles. Dans ce cas, nous parlerons d'**ajustement quantitatif** puisque l'écart quantitatif est utilisé pour déduire **en une fois** la bonne réponse.

- Ces trois manières d'ajuster sont envisageables à partir d'un essai qui est défini comme un assortiment de cartes quel que soit le registre de représentation sémiotique adopté (iconique, arithmétique). Une difficulté relative à la manière d'ajuster peut émerger dans le cas d'un essai défini à partir de la répétition d'un motif. En effet, imaginons un élève qui propose l'essai composé de la

répétition du motif « 3 triangles et 2 carrés ». Il teste cet essai et trouve donc 51 côtés. Il est possible que l'élève ajuste sur le motif en proposant par exemple le motif « 3 triangles et 1 carré » avec une diminution du nombre de carrés puisqu'il y a trop de côtés. Dans ce cas, l'ajustement est contraint par le mode de génération de l'essai et peut limiter la découverte de la solution.

- Les stratégies décrites jusqu'à présent prennent appui sur des essais dont le nombre de cartes correspond aux données du problème et dont les ajustements sont pilotés par le nombre de côtés. Nous allons à présent considérer des stratégies prenant appui sur des essais qui respectent le nombre de côtés donné dans l'énoncé et dont les ajustements sont pilotés par le nombre de cartes carré ou triangle. Ainsi, nous pourrions imaginer que les élèves comptabilisent le nombre de côtés au fur et à mesure de l'élaboration de l'essai pour arrêter lorsque le nombre total de côtés correspond à celui de l'énoncé. Les élèves qui oublieraient de vérifier le nombre de cartes seraient ainsi amenés à terminer leur recherche d'une manière qu'ils pourraient juger triomphale. Les autres devront interpréter l'écart entre le nombre de figures de leur essai et celui imposé par l'énoncé. Illustrons ceci à partir de l'exemple suivant : un essai totalisant 49 côtés est constitué de 14 figures réparties en 7 carrés et 7 triangles. Pour que le nombre de côtés soit conservé, il s'agit de remplacer un nombre n de cartes ayant au total p côtés par un nombre $n+1$ de cartes ayant aussi p côtés au total. Dans cet exemple, nous mettons toutes les chances de notre côté si nous remplaçons n carrés par $n+1$ triangles. Ceci se traduit par l'équation : $4n=3(n+1)$ soit $n=3$. Ainsi ce sont 3 carrés qu'il faut remplacer par 4 triangles. Les élèves n'auront pas recours à un tel raisonnement algébrique. Ils sont susceptibles d'y parvenir à partir du dessin des figures s'ils enlèvent un côté à plusieurs carrés (car on ne peut pas les enlever aux triangles) pour constituer une figure supplémentaire. Ils pourraient aussi déterminer ce nombre en procédant par ajustements (organisés de manière systématique ou non) en testant le remplacement de 1 carré par 2 triangles, 2 carrés par 3 triangles, 3 carrés par 4 triangles. Ce type de stratégie impose des exploitations pertinentes de l'écart au but révélé par l'essai c'est-à-dire a minima une interprétation qualitative de la rétroaction.

- Pour compléter la liste des stratégies basées sur des ajustements d'essais successifs, nous pouvons envisager des stratégies qui reposent sur des essais qui respectent soit le nombre de côtés, soit le nombre de cartes et ce, d'une manière qui ne présente pas de régularité apparente ou qui se passerait du respect d'une contrainte à l'autre. De plus, un enchaînement d'essais qui serait le fruit du hasard est une manière de résoudre le problème imaginable mais forcément peu efficace.

- Un autre type de stratégies s'appuie sur la décomposition additive des 49 côtés qui permette de déduire une collection de carrés et triangles. Cette stratégie implique de vérifier ensuite si le nombre de cartes correspond bien à celui présent dans l'énoncé. Illustrons cette stratégie à partir d'une des décompositions les plus évidentes à savoir celle mobilisant les propriétés de la numération décimale et qui repose sur la décomposition de : $49=10+10+10+9$. Ainsi pour obtenir 9, il n'y a pas d'autre choix que de prendre 3 triangles et pour obtenir 10, la seule collection possible est composée de 2 triangles et 1 carré. Cette décomposition amène à une réponse correcte. D'autres décompositions sont envisageables bien qu'elles ne mènent pas directement à la solution. Par exemple, on peut envisager que : $49=40+9$ en considérant cette fois-ci 40 comme 10 fois 4 côtés (10 carrés) et 9 comme 3 fois 3 côtés (3 triangles). Cet essai ne comportant que 13 figures n'est donc pas solution du problème. Enfin une autre décomposition peut être proposée : $49=7 \cdot 7$ et comme $7=4+3$ on en déduit que 49 peut s'obtenir comme 7 fois (1 carré +1 triangle). Cette décomposition est intéressante pour trouver un essai qui vérifie les 49 côtés mais elle n'est pas solution du problème car elle ne comporte que 14 cartes.

Bien entendu ces stratégies sont présentées de manière structurée mais les procédures des élèves seront sans doute une combinaison de ces différentes stratégies.

En termes de variables didactiques, nous pouvons identifier :

- VD1 : le nombre de catégories de cartes en jeu qui peut prendre les valeurs entières supérieures ou égales à 2. Le choix de deux catégories de cartes offre une résistance suffisante pour des élèves de 4P.

- VD2 : la taille des nombres en jeu dans l'énoncé, en particulier le nombre de cartes. Des valeurs de cette variable trop petites sont susceptibles de réduire de manière drastique le champ des possibles et donc de favoriser l'accès à la solution sans offrir une résistance suffisante. À l'inverse, des valeurs trop grandes de cette variable risquent de bloquer l'accès à la solution mais pour des raisons strictement liées à la gestion des calculs. Le choix de cette valeur (15 cartes) a été discutée avec les enseignantes de l'expérimentation pour qu'elle soit adaptée au niveau des capacités calculatoires de leurs élèves au moment de la passation.

- VD3 : la composition de l'assortiment solution du problème. Trois valeurs sont identifiables : les cas extrêmes c'est-à-dire presque toutes les cartes sont de la même catégorie, le cas particulier pour lequel il y a une répartition équilibrée et les autres cas pour lesquels la répartition est déséquilibrée (sans être extrême). C'est à cette troisième valeur que correspond le choix réalisé (11 cartes triangle et 4 cartes carré). Cette composition a été préférée à sa symétrique (11 cartes carré et 4 cartes triangle) pour réduire légèrement la taille du nombre total de côtés (49 au lieu de 56).

- VD4 : L'écart entre le nombre de côtés des catégories de figures qui peut prendre les valeurs entières supérieures ou égales à 1. Le choix fait est celui minimal c'est-à-dire une seule unité. Ceci devrait permettre de rendre plus accessible l'émergence de conjectures liées à l'effet du remplacement d'une catégorie de figure par une autre si les élèves ne disposent pas ou n'investissent pas ces connaissances.

Pour des élèves de 4P, les connaissances mathématiques nécessaires pour faire et tester les essais se réduisent au dénombrement d'une collection. Pour autant, additionner, compter de 3 en 3 ou de 4 en 4 ou connaître les livrets de 3 et de 4 ne sont pas indispensables mais peuvent leur permettre d'aller un peu plus vite.

Pour ajuster de manière qualitative, les élèves doivent être en mesure de comparer des nombres entiers inférieurs à 100. Pour interpréter le résultat de cette comparaison, ils doivent savoir que pour avoir moins (resp. plus) de côtés, il faut remplacer des carrés par des triangles (resp. des triangles par des carrés).

Pour ajuster de manière quantitative, les élèves doivent en plus calculer des écarts sur des nombres inférieurs à 100 et investir la connaissance qu'un carré a 1 côté de plus qu'un triangle. Ils pourront ainsi déduire que si l'écart est de n côtés en trop (resp. il manque n côtés), il faut remplacer n carrés par n triangles (resp. n triangles par n carrés).

Par ailleurs, si les connaissances mathématiques telles que « un carré a plus de côtés qu'un triangle » ou « un carré a 1 côté de plus qu'un triangle » ne sont pas disponibles pour les élèves ou s'ils ne les investissent pas dans la situation, ils peuvent toutefois observer des régularités entre les valeurs fixées pour deux (ou plusieurs) essais et les résultats de ces essais. Cela peut les amener à conjecturer ou mettre en œuvre sans les formuler des règles du type « si je remplace des carrés par des triangles le nombre total de côtés diminue » ou « si je remplace un carré par un triangle le nombre total de côtés diminue de 1 ». Ce type de conjectures peut soutenir les élèves dans leurs ajustements aussi bien qualitatifs que quantitatifs.

ii. Problème Dragons et compagnie...

Pour les élèves de 8P, nous avons proposé le problème dont l'énoncé suit :

Sur un écran d'ordinateur sont représentés des perroquets, des crocodiles et des dragons. Au total, j'ai compté 20 têtes, 72 pattes et 30 ailes. Combien y a-t-il de perroquets, de crocodiles et de dragons ?

- Commençons par la résolution avec un système de 3 équations à 3 inconnues bien que là-aussi elle soit hors de la portée des élèves de 8P. Dans notre modélisation, la lettre p représente le nombre de perroquets que l'on recherche, la lettre c le nombre de crocodiles et la lettre d le nombre de dragons. Les données du problème nous permettent d'écrire le système suivant :

$$\begin{cases} p+c+d=20 & (1) \\ 2p+4c+4d=72 & (2) \\ 2p+2d=30 & (3) \end{cases}; \text{ la combinaison } 2(1)-(3) \text{ nous permet d'obtenir : } 2c=10 \text{ soit } c=5.$$

En reportant la valeur trouvée pour c , il reste à résoudre le système de 2 équations à 2 inconnues suivant :

$$\begin{cases} 2p+4d=52 \\ 2p+2d=30 \end{cases}; \text{ en soustrayant la } 2^{\text{e}} \text{ ligne de la } 1^{\text{e}}, \text{ on déduit : } 2d=22 \text{ soit } d=11 \text{ puis } p=4.$$

Il y a ainsi 4 perroquets, 5 crocodiles et 11 dragons.

Ces manipulations algébriques n'ont pas de sens si on les transpose dans le contexte du problème, il est donc peu probable d'obtenir un raisonnement arithmétique qui s'apparente à celui-là.

- Par contre, les élèves sont susceptibles de mettre en œuvre un raisonnement arithmétique qui, s'appuyant sur ce contexte et ce choix de valeurs de certaines variables didactiques, permet de trouver une des inconnues. En effet, le fait qu'il y ait deux types d'animaux et, qui plus est, avec le même nombre d'ailes permet de déduire le nombre d'animaux qui ont des ailes : 30 ailes réparties en animaux qui ont chacun 2 ailes donnent 15 animaux à 2 ailes. Comme l'on connaît le nombre total d'animaux (20 têtes = 20 animaux) on trouve le nombre d'animaux qui n'ont pas d'ailes : 20 animaux – 15 animaux à ailes = 5 crocodiles. Dans ce cas, nous nous ramenons à un problème sensiblement identique à celui des 4P puisque nous connaissons le nombre d'animaux à ailes (15) et leur nombre total de pattes (52). Nous pensons que les procédures évoquées pour le problème précédent en ce qui concerne les ajustements d'essais successifs que ce soit les ajustements quantitatifs, qualitatifs ou systématiques sont applicables ici aussi. Néanmoins une différence essentielle porte sur la nature des connaissances support de ces ajustements. Pour illustrer cette idée, partons du problème une fois le nombre de crocodiles trouvé. Il reste donc 15 animaux à ailes dont le nombre total de pattes est de 52. Imaginons un essai avec 10 perroquets et 5 dragons. Le test de cet essai sur le nombre total de pattes donne 40. Pour ajuster cet essai, les élèves peuvent remarquer qu'il manque des pattes donc qu'il faut en rajouter. Nous ne revenons pas sur la manière d'ajouter des pattes qui consisterait à rajouter des animaux. Nous avons montré son manque d'efficacité dans le problème du *Jeu de cartes*. Donc pour ajouter des pattes, les élèves peuvent jouer sur le remplacement d'animaux. La question est de savoir quels animaux il faut remplacer. Pour cela, il faut s'appuyer sur la connaissance liée au nombre de pattes des animaux en jeu dans le problème c'est-à-dire, ici, savoir qu'un dragon a plus de pattes qu'un perroquet. Contrairement au problème précédent pour lequel la connaissance en jeu pour ajuster est de nature mathématique, dans ce problème elle est de nature culturelle. En investissant cette connaissance culturelle, les élèves déduisent qu'il faut remplacer des perroquets par des dragons. Ils peuvent par exemple proposer de remplacer 3 perroquets par 3 dragons c'est-à-dire réaliser l'essai 8 dragons et 7 perroquets. De tels ajustements seront dits **qualitatifs**, que le raisonnement soit verbalisé ou non. Un sous-cas de ce type d'ajustement est l'**ajustement systématique** qui consiste à faire une série d'ajustements qualitatifs qui diffèrent tous d'une unité c'est-à-dire, dans notre illustration précédente, en remplaçant un seul perroquet par un seul dragon pour chaque nouvel essai réalisé. Si l'interprétation de la rétroaction est correcte, cet ajustement systématique conduit nécessairement à la bonne solution mais l'accès peut être coûteux selon le point de départ. Le premier essai peut, ici aussi, être un cas extrême (essai qui ne contient que des dragons ou que des perroquets), un cas équilibré entre le nombre de dragons et de perroquets ou un cas quelconque (la répartition est déséquilibrée sans être extrême).

Les élèves peuvent aussi procéder à un **ajustement quantitatif** c'est-à-dire trouver la solution en un seul ajustement. La connaissance nécessaire pour cela est liée à l'écart entre le nombre de pattes (ou d'ailes) des animaux concernés par le test de l'essai. Par exemple, après le premier essai évoqué précédemment (10 perroquets et 5 dragons) qui donne 40 pattes, les élèves peuvent remarquer qu'il manque 12 pattes pour obtenir les 52 pattes visées donc qu'il faut rajouter 12 pattes. Ils devront s'appuyer sur la connaissance culturelle suivante : un dragon a 2 pattes de plus qu'un perroquet pour trouver qu'il faut remplacer 6 perroquets par 6 dragons. Le nouvel essai est donc composé de 4 perroquets et 11 dragons.

- Les élèves peuvent mener un autre raisonnement arithmétique comparable mais cette fois-ci relativement au nombre de pattes. Partant de la supposition que tous les animaux ont 2 pattes, on peut déduire qu'il y aurait $72 : 2 = 36$ animaux au total. Or comme on sait qu'il y en a 20, cela signifie que $36 - 20 = 16$ animaux n'ont pas 2 pattes mais 4 pattes. Ainsi, 20 animaux – 16 animaux à 4 pattes = 4 animaux à 2 pattes c'est-à-dire 4 perroquets. Un raisonnement similaire est possible partant de la supposition que tous les animaux ont 4 pattes. Ayant trouvé le nombre de perroquets la suite de la résolution est plus simple puisque l'on peut déduire le nombre de dragons et, in fine, le nombre de crocodiles. Dans ce cas de déductions pertinentes, les ajustements sont évitables.

D'une manière plus générale, nous percevons ici que des déductions locales permettent de réduire le champ des possibles à étudier par les ajustements. En effet, l'accès à la solution risque d'être difficile et coûteux pour les élèves qui se lanceraient directement dans un essai et des ajustements d'essais successifs en jouant sur les trois grandeurs (tête, pattes et ailes). Toutefois une telle stratégie n'est pas à écarter.

- Un point de départ peut être de diviser les 20 têtes par les 3 catégories d'animaux. Le fait que ça ne tombe pas rond devrait bloquer tout de suite l'idée d'un partage équitable entre les catégories. Un essai possible correspondant à une répartition équilibrée peut émerger de cette division comme par exemple 6-7-7. La suite va consister en des ajustements d'essais successifs.

En termes de variables didactiques, nous pouvons identifier :

- VD1 : le nombre de catégories d'animaux en jeu qui peut prendre les valeurs entières supérieures ou égales à 2. Contrairement aux 4P, le choix de deux catégories d'animaux ne nous semble pas offrir suffisamment de résistance pour des élèves de 8P. Aussi avons-nous fait le choix de 3 catégories différentes tout en jouant sur d'autres valeurs de variables didactiques pour que le problème ne soit pas trop complexe non plus.

- VD2 : deux variables didactiques imbriquées sont le nombre de catégories d'animaux à ailes qui a comme valeur 1 ; 2 ou 3 (compte tenu de la valeur fixée pour VD1) et si le nombre d'ailes est identique ou pas pour ces catégories d'animaux. L'idée ici est de trouver un compromis pour adapter la résistance du problème aux élèves de 8P. La présence d'une seule catégorie d'animaux à ailes rend évidente la découverte du nombre d'animaux correspondant. La présence de 3 catégories va jouer sur le nombre de solutions notamment si les 3 catégories ont le même nombre d'ailes puisque les données du problème liées au nombre de têtes et d'ailes seront dans une relation de linéarité. Si le nombre d'ailes n'est pas le même, la résistance est trop importante et ne peut pas être diminuée facilement. Ainsi, le choix qui nous semble le plus pertinent est de choisir 2 catégories d'animaux qui ont, chacune, le même nombre d'ailes. Ce choix de valeurs permet de trouver le nombre d'animaux qui n'ont pas d'ailes pour se ramener, ensuite, à un problème comparable à celui des 4P en termes d'accessibilité et de coût de la solution. L'idée étant qu'il existe une solution (unique).

- VD3 : deux autres variables didactiques imbriquées sont le nombre de catégories d'animaux à pattes qui a comme valeur 1 ; 2 ou 3 (compte tenu de la valeur fixée pour VD1) et si le nombre de pattes est identique ou pas pour ces catégories d'animaux. Pour que les données du problème ne

soient pas colinéaires et qu'il existe une solution (unique), nous faisons le choix d'avoir au moins une catégorie d'animaux ayant un nombre de pattes différent des deux autres.

- VD4 : la composition de l'assortiment solution du problème notamment pour ce qui concerne le nombre d'animaux à ailes puisque c'est relativement à ces animaux que nous nous attendons à observer des ajustements d'essais successifs. Trois valeurs sont identifiables : les cas extrêmes c'est-à-dire presque tous les animaux sont de la même catégorie, le cas particulier pour lequel il y a une répartition équilibrée et les autres cas pour lesquels la répartition est déséquilibrée (sans être extrême). C'est aussi à cette troisième valeur que correspond le choix réalisé (11 dragons et 4 perroquets) qui au passage est similaire au problème précédent. Ces différentes valeurs peuvent peser sur le coût en termes d'ajustements d'essais successifs à réaliser.

- VD5 : L'écart entre le nombre de pattes des catégories d'animaux à ailes qui peut prendre les valeurs paires supérieures ou égales à 2. Le choix fait est 2 pour les mêmes raisons que celles évoquées précédemment (VD4 du « jeu de cartes »).

Pour des élèves de 8P, les connaissances mathématiques nécessaires pour faire et tester les essais sont les quatre opérations arithmétiques de base.

Pour ajuster de manière qualitative, les élèves doivent savoir comparer des nombres entiers et interpréter le résultat de cette comparaison pour produire un nouvel essai qui permettrait de se rapprocher de la solution. L'interprétation du résultat dépend des grandeurs impliquées dans le test de l'essai. Par exemple, pour interpréter le résultat d'une comparaison relativement à la grandeur 'nombre de pattes', ils doivent savoir que pour avoir moins (resp. plus) de pattes, il faut remplacer des animaux par d'autres qui ont moins de pattes (resp. plus de pattes).

Pour ajuster de manière quantitative, les élèves doivent de plus calculer des écarts et investir des connaissances liées aux différences entre le nombre de pattes (ou ailes) des animaux concernés. Ainsi, s'ils constatent un écart de $2n$ pattes, ils devront remplacer n dragons par n perroquets (ou n perroquets par n dragons selon si l'écart est en plus ou en moins). De manière générale, il faut exprimer l'écart sous la forme kn où k correspond à l'écart entre le nombre de pattes des deux catégories d'animaux impliquées dans le test de l'essai. Dans ce cas n correspond au nombre d'animaux à remplacer.

Si ces connaissances culturelles liées au nombre de pattes de chaque animal ne sont pas disponibles pour les élèves ou s'ils ne les investissent pas, les élèves peuvent ajuster en observant des régularités entre les valeurs fixées pour deux (ou plusieurs) essais et les résultats de ces essais. Cela devrait pouvoir les amener à formuler ou utiliser en acte des conjectures du type : « si je remplace des perroquets par des dragons le nombre total de pattes augmente » ou « si je remplace un dragon par un perroquet le nombre total de pattes diminue de 2 » etc. De telles conjectures seront précieuses pour ajuster de manière qualitative ou quantitative.

iii. Problème Ballon d'essai

Le problème destiné aux élèves de 10^e est le suivant :

Afin de renouveler son matériel sportif, une école fait une première commande de 2 ballons de rugby, 4 ballons de basket et 4 ballons de foot pour un montant total de 72 CHF. Elle effectue ensuite une deuxième commande composée de 2 ballons de rugby et 2 ballons de basket et paie 30 CHF. On sait qu'un ballon de rugby, un ballon de foot et un ballon de basket coûtent ensemble 20 CHF.

Quel est le prix de chacun des ballons ?

Du point de vue algébrique, ce problème est isomorphe au précédent puisque ce sont exactement les mêmes données numériques et la modélisation algébrique conduit aux mêmes trois équations.

Si nous modélisons le problème en appelant r le prix du ballon de rugby, b celui de basket et f celui de foot, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} 2r + 4b + 4f = 72 & (l1) \\ 2r + 2b = 30 & (l2) \\ r + f + b = 20 & (l3) \end{cases}$$

Néanmoins, le contexte sémantique apporte deux différences importantes. D'une part, la solution recherchée pourrait être de nature décimale (partie décimale composée de 2 chiffres maximum) puisqu'il s'agit de prix. L'espace du problème est donc beaucoup plus vaste que pour le problème précédent (bien que la solution soit in fine composée de trois nombres entiers). D'autre part, les combinaisons de ces trois données ont toutes du sens puisqu'elles aboutissent à d'autres compositions de commandes de ballons ce qui n'est pas le cas avec le problème précédent.

- Ainsi, du point de vue des stratégies, toutes les résolutions arithmétiques basées sur des combinaisons de ces données sont envisageables. D'ailleurs, si les élèves s'engagent dans de telles combinaisons de commandes, nous pouvons nous attendre à avoir une résolution complète sans recours à des essais et ajustements de prix. À l'image d'une résolution à l'aide d'un système d'équations, le cœur de cette stratégie réside dans la pertinence des combinaisons. Signalons tout de même qu'une difficulté peut être inhérente au fait que les trois données communiquées n'ont pas exactement la même nature. Les deux premières ($l1$ et $l2$) sont des commandes passées par les écoles tandis que la troisième donnée ($l3$) est un complément d'information. Cela est susceptible d'amener certains élèves à limiter les combinaisons aux seules données relatives aux commandes.

- En particulier, il est possible que les élèves utilisent la propriété multiplicative de la linéarité et ainsi trouve que si 2 ballons de rugby et 2 ballons de basket coutent 30 CHF, alors 1 ballon de rugby et 1 ballon de basket coutent deux fois moins soit 15 CHF. La confrontation avec ($l3$) permet de trouver que le prix du ballon de foot est de 5 CHF. Le problème se réduit alors à trouver le prix des ballons de rugby et basket sachant que 2 ballons de rugby, 4 ballons de basket coutent 52 CHF et que 1 ballon de rugby et 1 ballon de basket coutent 15 CHF. Il s'agit d'un problème comparable à celui des 4P et des 8P pour lesquels toutes les procédures évoquées concernant les ajustements d'essais successifs que ce soit les ajustements quantitatifs, qualitatifs ou systématiques peuvent s'appliquer. Toutefois, les connaissances qui vont permettre d'ajuster ne sont ni de nature mathématique, ni de nature culturelle ; elles sont liées à des informations très contextuelles correspondant à la composition des commandes. Par exemple, si comme premier essai les élèves proposent 7 CHF pour le ballon de rugby et donc 8 CHF pour le ballon de basket, ils obtiennent un total de commande de 46 CHF. Pour ajuster cet essai, ils peuvent remarquer que le prix n'est pas assez élevé. Pour rendre le total de cette commande plus élevé, ils doivent jouer sur la modification du prix de certains types de ballon. La difficulté est de savoir de quels types de ballon augmenter ou diminuer le prix. Pour le déterminer, ils doivent rechercher dans la commande support du test de l'essai quel type de ballons est le plus représenté. C'est ce type de ballon qu'il faut augmenter, tout en diminuant l'autre type de ballon du même écart si l'on veut que la somme des prix de ces deux types de ballon reste invariante. Dans notre exemple, nous savons que 2 ballons de rugby, 4 ballons de basket coutent 52 CHF. Ce sont les ballons de basket les plus représentés donc un essai ajusté peut être 10 CHF pour le ballon de basket et 5 CHF pour le ballon de rugby. Un tel ajustement est dit **qualitatif** puisqu'il permet de se rapprocher de la solution sans pour autant être sûr de tomber sur la bonne réponse.

Ils peuvent aussi se livrer à un ajustement **quantitatif** qui permet de trouver la solution en un seul ajustement. Pour cela, ils doivent, en plus de ce que nous venons d'évoquer, tenir compte de l'écart dans la composition des commandes. En repartant de l'exemple précédent et de l'essai 7 CHF pour le ballon de rugby et 8 CHF pour le ballon de basket, le total de commande est de 46 CHF soit 6 CHF en-dessous du prix visé. Comme dans la commande correspondante, il y a 2 ballons de rugby et 4 ballons de basket c'est-à-dire un écart de 2 en faveur des ballons de basket, pour augmenter le

prix total, il faut augmenter le prix des ballons de baskets et chaque augmentation de 1 CHF a comme effet d'augmenter le total de 2 CHF. Ainsi, il est nécessaire d'augmenter le prix des ballons de basket de 3 CHF (et de diminuer en conséquence le prix des ballons de rugby). L'essai ajusté de manière quantitative est donc : 4 CHF pour le ballon de rugby et 11 CHF pour le ballon de basket.

- Nous avons explicité les connaissances nécessaires pour ajuster sur un exemple ayant deux grandeurs. Nous pouvons nous attendre à ce que certains tentent de résoudre le problème en faisant des ajustements d'essais successifs à partir des trois grandeurs. Ceci étant, le champ des possibles étant tellement vaste, cette démarche risque de se révéler peu efficace.

En termes de variables didactiques, nous pouvons identifier :

- VD1 : le nombre de types de ballon en jeu qui peut prendre les valeurs entières supérieures ou égales à 2. Comme pour les élèves de 8P, nous avons fait le choix de 3 types différents tout en jouant sur d'autres valeurs de variables pour que le problème ne soit pas trop complexe.

- VD2 : l'existence ou non d'une relation de proportionnalité entre la composition en nombre de chaque type de ballon dans les différentes commandes. Comme nous voulons que la solution du problème existe et soit unique, nous avons veillé à éviter une telle relation de proportionnalité.

- VD3 : la nature des nombres solution du problème peut être entière ou décimale (la partie décimale comportant 2 chiffres au plus) en contextualisant ce problème sur des prix. Nous avons fait le choix d'une solution entière pour limiter le coût de la solution.

Comme pour les élèves de 8P, les connaissances mathématiques nécessaires pour faire et tester les essais sont les quatre opérations arithmétiques de base.

Pour ajuster de manière qualitative, les élèves doivent savoir comparer des nombres entiers ou décimaux et interpréter le résultat de cette comparaison pour produire un essai ajusté qui permettra de se rapprocher de la solution. L'interprétation du résultat dépend des ballons impliqués dans la commande support du test de l'essai et plus exactement de la composition en nombre de ballons de chaque catégorie. Les élèves doivent alors savoir que pour augmenter (resp. diminuer) le prix total d'une commande, il faut augmenter (resp. diminuer) le prix des ballons appartenant à la catégorie la plus représentée et diminuer (resp. augmenter) le prix des ballons appartenant à la catégorie la moins représentée.

Pour ajuster de manière quantitative, les élèves doivent de plus calculer des écarts et rechercher les informations liées aux différences entre le nombre de ballons concernés. Ils doivent ainsi diviser l'écart de prix résultant de la comparaison du test par l'écart entre le nombre de ballons de chaque type dans la commande concernée. Le résultat correspondant à l'augmentation (ou la diminution) du prix qu'il faut appliquer.

Si les élèves ne recourent pas à ces informations liées à la composition en nombre de ballons de la commande testée, ils peuvent ajuster en observant des régularités entre les valeurs fixées pour deux (ou plusieurs) essais et les résultats de ces essais. Cela devrait pouvoir les amener à formuler ou utiliser en acte des règles d'action. Ces règles seront décisives pour ajuster de manière qualitative ou quantitative.

iv. Synthèse

Les différents choix réalisés ont pour but de concevoir trois problèmes qui offrent suffisamment de résistance aux élèves compte tenu de leur degré scolaire tout en conservant une progressivité dans le niveau de difficulté. Cette gradation est effectuée par le choix d'un couple de valeurs entières à trouver pour les 4P, un triplet de valeurs entières pour les 8P et un triplet de valeurs entières (mais qui pourraient être décimales de par la contextualisation du problème) pour les 10^e. Les valeurs de certaines variables didactiques ont été choisies de telle sorte que les problèmes des 8P et 10^e puissent permettre, à l'aide d'une déduction, le passage de la recherche d'un triplet à un couple qu'il

restera à déterminer en faisant des essais. De plus, chaque problème est pensé pour avoir une solution unique. L'existence de cette solution peut être prouvée par ostension puisqu'il suffit d'exhiber un assortiment qui vérifie toutes les conditions du problème.

3.3.2 Méthode d'analyse des démarches d'ajustements d'essais successifs

Nous avons vu dans la revue de littérature qu'une particularité des problèmes de notre dispositif expérimental tient au fait que les données du problème puissent offrir un milieu suffisamment antagoniste pour que chaque essai soit suivi d'une rétroaction qui va informer l'élève sur la validité de l'essai, ce qui caractérise le *caractère rétroactif* du milieu

c'est-à-dire à sa capacité de renvoyer à l'élève des rétroactions qui lui permettent de valider ou invalider ses propositions. Cette propriété conditionne la possibilité de dévoluer aux élèves la validation dans le sens où sans milieu antagoniste il n'y a pas de « tri » possible des propositions des élèves sans intervention de l'enseignant. (Hersant, 2010, p. 43)

Lors de l'analyse a priori, nous avons illustré que non seulement ces rétroactions permettent de valider ou d'invalider les essais mais qu'elles peuvent aussi être interprétées de manière qualitative (en déterminant si l'écart est en plus ou en moins), voire même quantitative (en déterminant exactement cet écart). C'est l'exploitation des interprétations de ces rétroactions par l'élève qui doit lui permettre, théoriquement, d'ajuster de manière pertinente afin de se rapprocher voire de trouver la solution. En conséquence, pour analyser les essais et ajustements, nous faisons le choix de :

- Décrire les essais réalisés et, si nos données le permettent, d'illustrer chaque essai par une photographie de la production des élèves ;
- Décrire les éléments qui sont en lien avec le test de l'essai et donc avec la rétroaction ainsi que les éléments en lien avec l'interprétation de la rétroaction : ces éléments peuvent être des verbalisations, des gestes, des bruits, des intonations de la voix, etc. ;
- Analyser chacune des rétroactions à la lumière de l'interprétation précédente.

Ces différentes rubriques constituent, dans cet ordre, les trois premières colonnes du tableau qui présente les analyses. Une quatrième colonne intitulée « remarques » est prévue pour renseigner des éléments complémentaires qui pourraient être pertinents pour mieux comprendre et interpréter le travail des élèves (enrichissement du milieu hors ajustements, éléments relatifs aux erreurs, aux régulations, etc.)

Chaque essai est numéroté de manière à pouvoir s'y référer plus facilement lors des synthèses. Un indicateur temporel est précisé, il correspond au début de la caractérisation de chaque essai. Dans le cas où les élèves travaillent séparément, le prénom de l'élève qui réalise l'essai est indiqué. Il peut arriver également que deux élèves réalisent deux essais différents de manière simultanée. Entre de tels essais, nous considérons qu'il n'y a pas d'ajustement et, de fait, nous les numérotons par un bis, par exemple 'essai 3' suivi de 'essai 3bis'.

Enfin, dans la 2^e colonne du tableau qui présente les analyses, nous faisons le choix de séparer ce qui concerne le test de l'essai et la rétroaction de l'interprétation de la rétroaction par la flèche « → ».

Voici un extrait qui illustre la forme que prennent ces analyses :

Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques


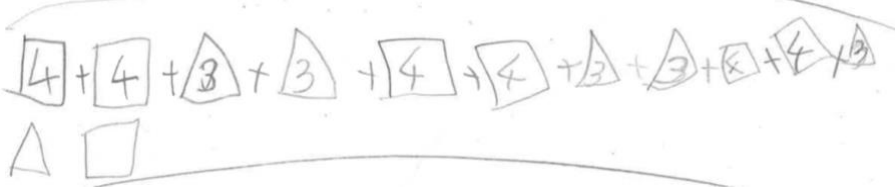
Essai 1 (Laura 2:18 pendant la phase de travail individuel)			
			
15 figures dessinées présentant l'alternance d'un carré et d'un triangle	Compte les côtés et s'arrête à 49 (alors qu'il reste une figure) → Recompte les figures	Invalidation (non verbalisée) → Remise en question du nombre de figures	Échange avec l'enseignante au sujet de l'idée de l'alternance d'un carré et d'un triangle (cf contenu de cette régulation dans la synthèse ci-dessous)
Essai 2 (Aïcha 10:38)			
			

Figure 15. Extrait du tableau qui présente les analyses du groupe 4PCJc7

Comme nous nous concentrons sur les essais et ajustements, nous rappelons, pour certains groupes, les faits marquants qui ont pu se dérouler en amont de la phase d'essais.

Pour cette analyse, nous avons retenu, parmi les groupes analysés du point de vue des heuristiques, ceux qui mettaient en œuvre une démarche par ajustements d'essais successifs, soit onze groupes au total.

3.4 Évaluation de la réussite ou de la non-réussite au problème

Dans cette partie, nous présentons la manière dont nous avons évalué et codé la réussite ou la non-réussite au problème pour chaque groupe d'élèves. Le travail de certains groupes d'élèves a été modifié ou influencé par les régulations de l'enseignant, aussi nous ne pouvons pas nous contenter d'un codage binaire réussite/non-réussite de leurs productions. En effet, si la non-réussite peut être évaluée de manière objective à partir du critère « la réponse du problème n'est pas trouvée », nous devons nuancer l'évaluation des cas de réussite. Le cas simple est celui où le groupe d'élèves n'a pas eu d'interaction avec l'enseignant, la réponse étant donc trouvée sans aide. Mais, à de nombreuses reprises, les enseignants sont intervenus auprès des groupes. Nous regroupons ces différents cas autour de deux positions différentes. Les groupes qui ont réussi à résoudre le problème avec une aide légère de l'enseignant, un petit coup de pouce à un moment de la résolution ; l'essentiel de la résolution ayant été à la charge des élèves. Les groupes ayant trouvé la solution du problème grâce à une aide substantielle, c'est-à-dire que l'enseignant a pris en charge

tout ou partie de la résolution du problème, les élèves devenant des exécutants des idées suggérées par l'enseignant. Ainsi, nous faisons le choix de coder la réussite des groupes selon les quatre niveaux suivants :

- Réponse trouvée sans aide
- Réponse trouvée avec aide légère
- Réponse trouvée avec aide forte ou guidage important
- Réponse non trouvée

Donc dans un premier temps, nous avons identifié les groupes qui n'ont pas trouvé la réponse (absence de réponse ou réponse incorrecte) quand bien même ils auraient été aidés par l'enseignant. Le code correspondant pour ces groupes est évidemment « réponse non trouvée ». À l'inverse mais de manière aussi évidente, le travail des groupes qui ont trouvé la réponse sans avoir été aidés par l'enseignant est codé comme « Réponse trouvée sans aide ». Les difficultés résident dans les cas où les groupes ont trouvé la réponse et que l'enseignant a apporté son aide. Pour tenter de discerner de la manière la plus stable possible ces différences dans le niveau d'aide que peut apporter l'enseignant, nous nous appuyons sur une proposition de Rott (2020) qui caractérise selon trois manières différentes le comportement des enseignants lors d'une séance de résolution de problèmes. Le premier type de comportement dit « closely managed » (p. 905) désigne le cas où les élèves sont dirigés de façon assez serrée. Un deuxième type de comportement appelé « emphasizing strategies » (p. 906) désigne le cas où les élèves sont encouragés à poursuivre leurs idées, et à envisager diverses stratégies. Un troisième type de comportement dit « neutral » (p. 906) désigne les cas où l'enseignant ne cherche pas à restreindre les approches des élèves, ni à mettre l'accent sur les diverses stratégies possibles. Pour opérationnaliser ces trois types de comportement, Rott propose une grille (Tableau 13) qui les caractérise pour chaque grande phase du modèle de Pólya tout en veillant à préciser que : « Pólya's phases are used to broadly describe the courses of lessons in a linear way, neglecting the fact that individual students' PS [Problem Solving] processes might deviate from the progression of the lesson. »

Phase	Closely managed	Neutral	Emphasizing strategies
Understand the problem	The teacher explains the problem (formulation).	The teacher does not comment on the problems and does not answer students' questions.	The teacher gives hints but does not explain the problem.
Devise a plan	The teacher tells the students which ("correct") approach to use.	The teacher does not give any guidelines and strategic support.	The teacher hints at [ideally] different approaches and encourages the students to follow their ideas.
Carry out the plan	The teacher gives the students concrete content-related support (often early in the process).	The teacher gives (almost) no (strategic) help and does not answer students' questions related to the problem.	The teacher gives staggered aids (motivational/feedback/general strategic/task-specific strategic/content-related).
Look back	The teacher fixates on results; perhaps, one (arithmetic) approach is presented.	Different approaches are presented; however, strategic ideas or the differences between approaches are not highlighted explicitly.	The teacher highlights approaches and strategies; results might also be presented, but it is of secondary importance.

Tableau 13. Grille utilisée pour analyser les régulations des enseignants (Rott, 2020)

Ainsi, nous nous appuyons sur cette grille pour analyser les différentes régulations apportées par les enseignants au cours de la résolution de problèmes. Nous cherchons à voir à quelle cellule de la grille peut correspondre chacune des interventions de l'enseignant. Nous considérons a priori que si les élèves trouvent la réponse à la suite d'une ou plusieurs interventions de type « closely managed », leur réussite est classée comme « Réponse trouvée avec aide forte ou guidage important » quand bien même certaines interventions ne seraient pas classées dans ce type de comportement. Si aucune intervention n'est répertoriée dans le type « closely managed », et qu'une ou plusieurs interventions de la part de l'enseignant sont dans le type « emphasizing strategies », la réussite du groupe est codée comme « Réponse trouvée avec aide légère ». Enfin, lorsque les régulations sont uniquement du type « neutral », la réussite des élèves est classée comme « Réponse trouvée sans aide ».

Voici à titre d'illustration l'évaluation que nous avons réalisée pour deux groupes (l'ensemble des groupes se situent à l'Annexe 2). R_n indique la n-ième régulation qui a eu lieu pendant la résolution.

Pour chaque régulation, l'instant de début est précisé entre parenthèses et précède une brève description des éléments signifiants. Ensuite, chaque régulation est classée dans le tableau selon la phase à laquelle elle se réfère et le type de comportement retenu.

– Groupe 4PSJc12

R₁ (14:32): l'enseignante propose d' « avancer comme ça en essayant » et de « peut-être plus y réfléchir ».

R₂ (20:43): L'enseignante rappelle une donnée du problème.

R₃ (33:30): L'enseignante aide les élèves à invalider leur essai.

Phase	Closely managed	Neutral	Emphasizing strategies
Understand the problem			R ₂
Devise a plan			R ₁
Carry out the plan			R ₃
Look back			

Tableau 14. Analyse des régulations pour le groupe 4PSJc12

Toutes les régulations sont classées dans le profil « emphasizing strategies ». Nous concluons ainsi que ce groupe a trouvé la réponse avec une aide légère.

– Groupe 8PVDr7

R₁ (05:54): *Régulation collective* : L'enseignante interrompt le travail individuel pour faire un temps collectif centré sur la compréhension de l'énoncé. Aucune explication ou élément de réponse n'est donné puisque les informations échangées portent sur les caractéristiques des animaux dessinés.

R₂ (11:00): L'enseignante verbalise ce qu'elle voit écrit sur les productions des élèves. Faustine explique son raisonnement. Puis l'enseignante demande aux élèves ce qu'elles avaient fait avant.

R₃ (26:39) : L'enseignante demande aux élèves de verbaliser leur raisonnement puis elle fait le point sur ce qu'elles sont en train de chercher.

R₄ (29:05) : Les élèves questionnent l'enseignante et verbalisent leurs idées. Pas de réponse de la part de l'enseignante.

R₅ (52:57) : L'enseignante questionne les élèves en particulier sur l'opération 52:4. Cassandre explicite l'origine de ce dividende et interprète le résultat comme 13 animaux. L'enseignante rappelle le raisonnement tenu précédemment (20 animaux moins 5 crocodiles égale 15 animaux) et pointe le fait que ces deux résultats ne sont pas compatibles.

R₆ (58:08) : l'enseignante verbalise différents éléments de la réflexion menée par les élèves et rappelle des éléments (qui correspondent à la bonne réponse) qui semblaient avoir été écartés par les élèves.

R₇ (1:03:30) : L'enseignante guide le test de la solution proposée par des questions du type : « 4 perroquets ça fait combien de pattes ». Puis, une fois les pattes validées, elle les questionne de la même manière pour les ailes. Enfin, elle prend le crayon et écrit les nombres de pattes trouvées pour chaque animal. Elles valident la réponse. L'enseignante leur demande comment elles ont trouvé le 4 et le 11 et, en l'absence de réponse des élèves, conclut « en essayant ». Puis elle continue à écrire les nombres d'ailes pour chaque animal.

Phase	Closely managed	Neutral	Emphasizing strategies
Understand the problem		R ₁	
Devise a plan		R ₄	
Carry out the plan	R ₆ – R ₇	R ₂	R ₃ – R ₅
Look back			

Tableau 15. Analyse des régulations pour le groupe 8PVDr7

Même si plusieurs régulations sont de type « neutral » (R₁ ; R₂ et R₄) ou « emphasizing strategies » (R₃ et R₅), les régulations R₆ et R₇ nous amènent à considérer que la réponse a été trouvée avec aide forte ou guidage important.

Le tableau suivant présente les choix que nous avons réalisés relativement aux situations les plus fréquentes :

- A- Les enseignants proposent de faire des essais
- B- Les enseignants accompagnent ou suggèrent un essai particulier
- C- Les enseignants aident à l'invalidation
- D- Les enseignants questionnent ou verbalisent le raisonnement des élèves sans apporter d'élément supplémentaire
- E- Les enseignants rappellent une donnée du problème

Phase	Closely managed	Neutral	Emphasizing strategies
Understand the problem			E
Devise a plan			
Carry out the plan	B	D	A - C
Look back			

Tableau 16. Tableau récapitulant le classement des régulations les plus fréquentes

En analysant ainsi la réussite ou la non-réussite au problème de chacun des groupes de notre expérimentation, nous obtenons la synthèse suivante :

Réponse trouvée sans aide	Réponse trouvée avec aide légère	Réponse trouvée avec aide forte ou guidage important	Réponse non trouvée
	4PCJc7		
		4PCJc9	
4PCJc10			
		4PCJc11	
4PCJc12			
			4PCJc14
		4PSJc7	
4PSJc9			
		4PSJc10	
	4PSJc12		
	4PSJc14		
8PSDr3			
			8PSDr8
8PSDr9			
			8PSDr10
8PVDr2			
		8PVDr3	
		8PVDr7	
			8PVDr8
8PVDr9			
			10CTBa7
			10CTBa10
			10CTBa12
			10CTBa13
			10CTBa14
10LSBa7			
10LSBa8			
10LSBa9			
			10LSBa10
			10LSBa11
10LSBa12			
			10LSBa13
10LSBa14			
12 groupes	3 groupes	6 groupes	12 groupes

Tableau 17. Synthèse de la réussite ou non-réussite au problème pour l'ensemble des groupes

Pour la suite des analyses, nous considérons que les groupes des deux premières colonnes ont réussi le problème tandis que les groupes des deux dernières colonnes ne l'ont pas réussi (seuls).

CHAPITRE 4. ANALYSES

1. Point de vue macroscopique

1.1 Mise en forme des analyses

Rappelons que nous analysons le travail d'élèves provenant de six classes, deux classes différentes pour chacun des trois degrés (4P, 8P et 10^e). Les élèves travaillant en groupe, nous avons une caméra embarquée au sein de chaque groupe. C'est donc *in fine* le travail de 33 groupes (voir Tableau 2) qui est analysé du point de vue macroscopique. Pour ce niveau d'analyse, nous avons retenu et mis en œuvre la méthode de Schoenfeld (1985) consistant à découper le travail des élèves en épisodes (voir chap.3 partie 3.1). Chaque vidéo a ainsi été codée en épisodes de manière indépendante par deux codeurs : une assistante de recherche et nous. Ces deux analyses ont été confrontées et chaque point de désaccord a été discuté et recodé de manière conjointe pour obtenir un codage consensuel. Le résultat de l'intégralité de ce processus de double-codage se présente sous la forme d'un fichier tableur dont le tableau suivant est un extrait correspondant aux groupes 4PCJc7 et 4PCJc14.

4PCJc7		
01:00	02:16	Lecture
02:16	05:03	Mise en œuvre
05:03	06:28	Transition
06:28	08:46	Mise en œuvre
08:46	10:12	Régulation
10:12	11:53	Exploration
11:53	12:59	Transition
12:59	14:05	Mise en œuvre
14:05	14:15	Vérification
14:15	15:15	Planification
15:15	16:23	Transition
16:23	16:55	Mise en œuvre
16:55	18:12	Digression
18:12	19:05	Mise en œuvre
19:05	19:22	Vérification
19:22	20:15	Transition
20:15	23:39	Mise en œuvre
23:39	24:47	Régulation
24:47	25:32	Mise en œuvre
25:32	25:48	Vérification

4PCJc14		
00:20	00:30	Lecture
00:30	01:42	Mise en œuvre
01:42	03:10	Lecture
03:10	03:40	Mise en œuvre
03:40	05:07	Transition
05:07	06:40	Mise en œuvre
06:40	07:09	Régulation
07:09	10:40	Mise en œuvre
10:40	11:50	Transition
11:50	12:30	Mise en œuvre
12:30	13:03	Régulation
13:03	16:53	Planification - mise en œuvre
16:53	17:58	Digression
17:58	20:09	Mise en œuvre
20:09	20:42	Planification - mise en œuvre
20:42	22:54	Digression
22:54	25:45	Planification - mise en œuvre
25:45	30:33	Digression
30:33	37:20	Régulation
37:20	43:20	Planification - mise en œuvre
43:20	57:17	Digression
57:17	58:10	Mise en œuvre
58:10	01:00:08	Digression
01:00:08	01:01:40	Mise en œuvre
01:01:40	01:01:50	Vérification
01:01:50	01:03:13	Transition
01:03:13	01:05:05	Régulation
01:05:05	01:06:14	Mise en œuvre
01:06:14	01:06:55	Transition
01:06:55	01:08:45	Régulation
01:08:45	01:10:20	Planification - mise en œuvre
01:10:20	01:10:30	Vérification

Tableau 18. Résultats de l'analyse en épisodes pour les groupes 4PCJc7 et 4PCJc14

Les résultats complets de cette analyse se trouvent dans l'Annexe 3. La première colonne correspond à l'instant de début d'un épisode tandis que la deuxième colonne marque l'instant de fin de cet épisode. L'intitulé de l'épisode codé figure dans la troisième colonne. Le fait que cette analyse soit de type *coverage codes* (Jacobs et al., 2003), c'est-à-dire que l'entièreté de la vidéo est découpée en continu, est visible dans la mesure où l'instant de fin de l'épisode n correspond systématiquement à l'instant de début de l'épisode $n+1$. Remarquons également que l'instant de départ du premier épisode n'est pas à 0:00. Cette durée comprise entre l'instant zéro et le début du premier épisode correspond au temps qui s'est déroulé entre le lancement de l'enregistrement une fois la caméra embarquée installée sur la tête de l'élève et le début effectif du travail de l'élève. Nous faisons le choix de garder ce repérage temporel relatif à chaque vidéo dans ce tableur pour nous repérer plus facilement et retrouver rapidement les extraits susceptibles de nous intéresser.

Pour rendre compte de l'activité des élèves de manière plus précise, nous avons également rédigé un descriptif de chaque épisode reprenant les principaux éléments survenus pendant le travail de résolution des élèves. Ce descriptif se trouve en Annexe 4. La figure suivante en présente un extrait pour le groupe 4PCJc7 :

Groupe 4PCJc7

Laura¹ - Aïcha

1:00-2:16 Lecture

Après un moment de silence, Laura lit la deuxième partie de l'énoncé en suivant la lecture avec le doigt.

2:16-5:03 Mise en œuvre

Laura dessine un premier essai composé de 15 figures qui alternent de manière régulière le motif carré-triangle. Elle s'arrête lorsqu'elle a dessiné 15 figures et compte le nombre total de côtés.

5:03-6:28 Transition

À la suite de la demande de l'enseignante, les élèves s'installent par groupe.

6:28-8:46 Mise en œuvre

Elles comptent le nombre de figures sur la production de Aïcha puis complètent jusqu'à ce qu'elles obtiennent 15 figures. Puis chacune compte le nombre total de côtés de son essai et l'invalidé. Laura allait se lancer dans une idée lorsque l'enseignante intervient dans le groupe.

8:46-10:12 Régulation

L'enseignante intervient dans le groupe pour demander aux élèves ce qu'elles sont en train de faire. À son tour, Laura demande à l'enseignante si elles ont le droit de « mettre deux fois la même chose », jusqu'à présent l'une et l'autre n'ont dessiné que des essais avec l'alternance : un carré et un triangle. L'enseignante leur fait comprendre que oui.

10:12-11:53 Exploration

Aïcha dessine un total de 15 figures mais en cassant l'alternance : un carré et un triangle. (Dans le même temps, Laura dessine quelques figures en conservant cette alternance. Aïcha lui explique qu'il ne faut pas garder cette alternance.)

11:53-12:59 Transition

Aïcha se rend compte que l'écran de la caméra est éteint et s'en inquiète. Elle sollicite sa maitresse qui elle-même demande au chercheur.

12:59-14:05 Mise en œuvre

Laura finalise son essai en continuant de dessiner un carré et un triangle de manière alternative. Tout en dessinant ces figures, elle comptabilise le nombre total de côtés et s'arrête quand elle découvre avec surprise qu'elle tombe sur 49.

14:05-14:15 Vérification

Laura compte le nombre de figures et trouve quatorze.

14:15-15:15 Planification

Aïcha explique cette idée qu'il ne faut pas dessiner un carré et un triangle de manière alternative mais qu'à un moment donné il faut faire deux fois la même figure.

Figure 16. Extrait du descriptif des épisodes pour le groupe 4PCJc7

Comme nous pouvons le constater en observant le Tableau 18 ou en parcourant l'Annexe 3, cette présentation sous forme de tableaux n'est pas très propice à faire ressortir des éléments remarquables, c'est pourquoi nous représentons ces résultats sous la forme de graphiques. Nous choisissons un type de graphiques en barres qui permet de visualiser à la fois l'enchaînement chronologique de tous les épisodes mais également la durée de chacun. La légende suivante (Figure 17) permet d'associer chaque épisode à la couleur lui correspondant.

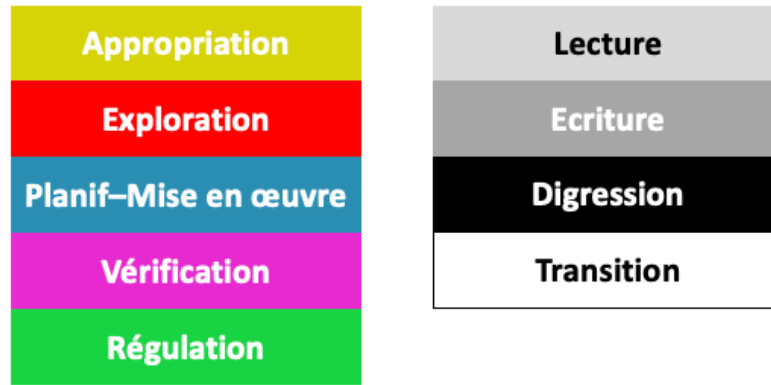


Figure 17. Légende couleur/épisode pour les graphiques en barres

Comme ces différents épisodes constituent une échelle de codage de nature nominale, c'est-à-dire que la différence est d'ordre qualitatif, nous faisons un choix de couleurs qui permette de rester cohérent avec cette idée. Ainsi, nous optons pour :

- Des couleurs proches des couleurs primaires et secondaires pour représenter les cinq épisodes majeurs du point de vue de l'activité des élèves et de l'avancée dans leur travail ;
- Deux couleurs dégradées de gris pour les épisodes où l'élève est dans la résolution sans que cela n'avance de manière concrète ;
- La couleur noire pour symboliser les « trous » dans la recherche c'est-à-dire les épisodes durant lesquels les élèves font autre chose que résoudre le problème ;
- La couleur blanche pour les transitions qui permet d'alléger les graphiques présentés justement sur un fond blanc.

Notons également que dans les analyses présentées dans les tableaux nous différencions les épisodes de Planification ; Mise en œuvre ; Planification-Mise en œuvre. Par contre, toujours dans cette idée d'alléger les graphiques, nous faisons le choix de représenter ces trois épisodes de la même couleur bleu.

Pour faciliter encore davantage les comparaisons, nous ramenons à la même échelle de temps l'ensemble des codages. Ainsi, les repères temporels représentés par les graduations sont cette fois-ci absolus ce qui, de fait, génère un décalage entre les tableaux de codes en épisodes et les graduations des graphiques. Ce décalage correspond à la durée entre l'instant zéro et l'instant de début du premier épisode codé. Il est donc, par exemple, de 60 secondes pour le groupe 4PCJc7 et de 20 secondes pour le groupe 4PCJc14. Il arrive que ce décalage soit de l'ordre de plusieurs minutes pour certains groupes. Comme le travail de groupe le plus long est de l'ordre de 71 minutes, nous avons représenté tous les travaux sur une échelle de 0 à 4320 secondes (72 minutes).

Voici l'ensemble des graphiques obtenus pour les 33 groupes analysés, regroupés par classe :

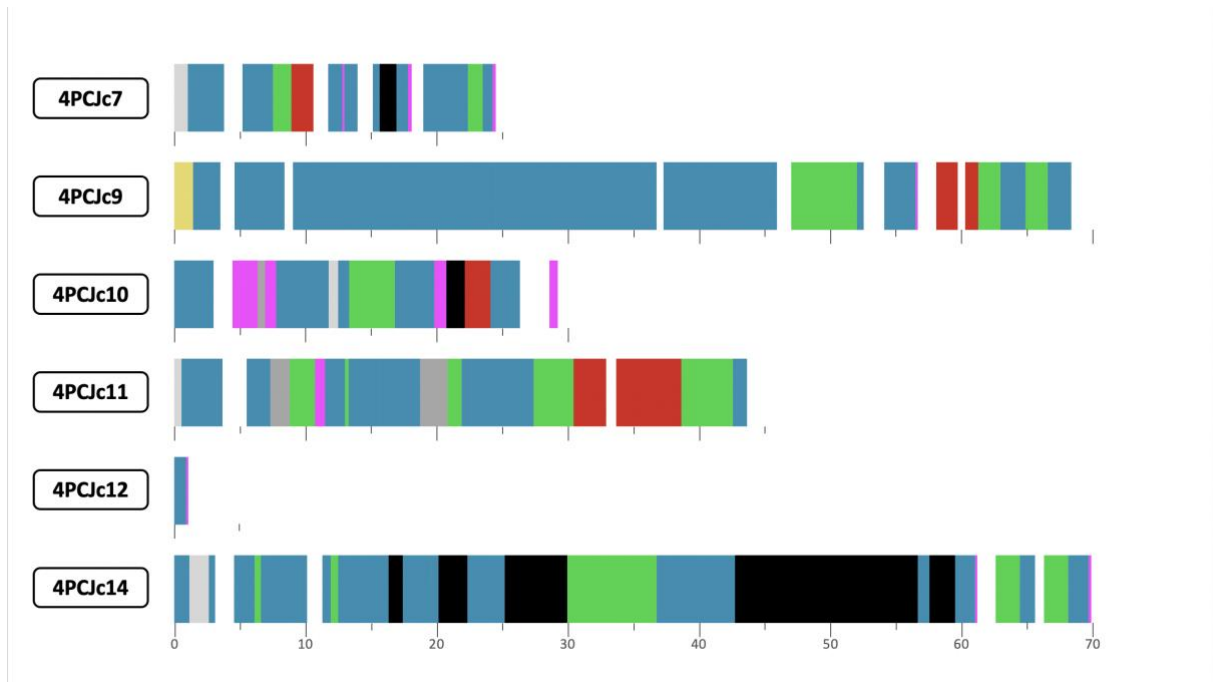


Figure 18. Représentations graphiques de l'analyse en épisodes pour chaque groupe de la classe 4PC

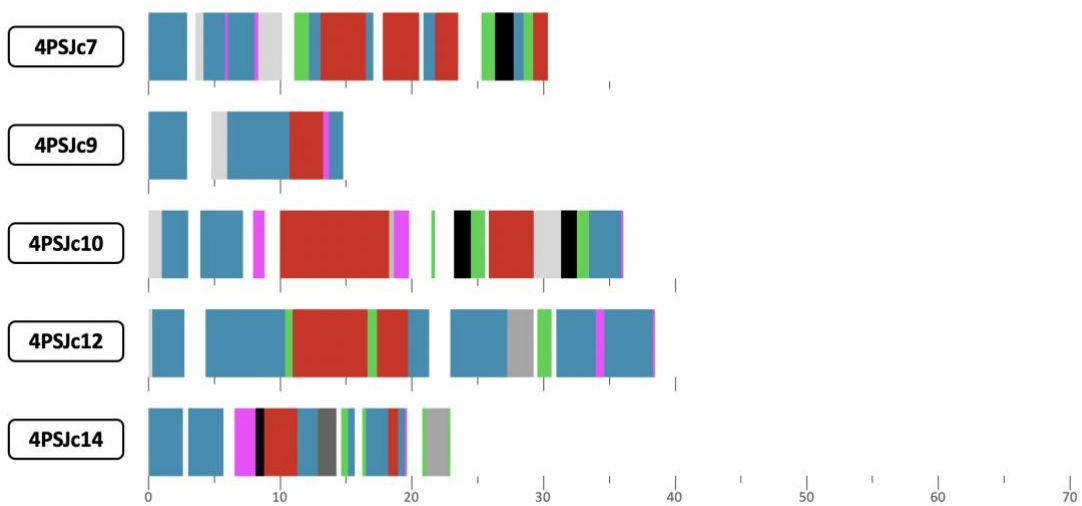


Figure 19. Représentations graphiques de l'analyse en épisodes pour chaque groupe de la classe 4PS

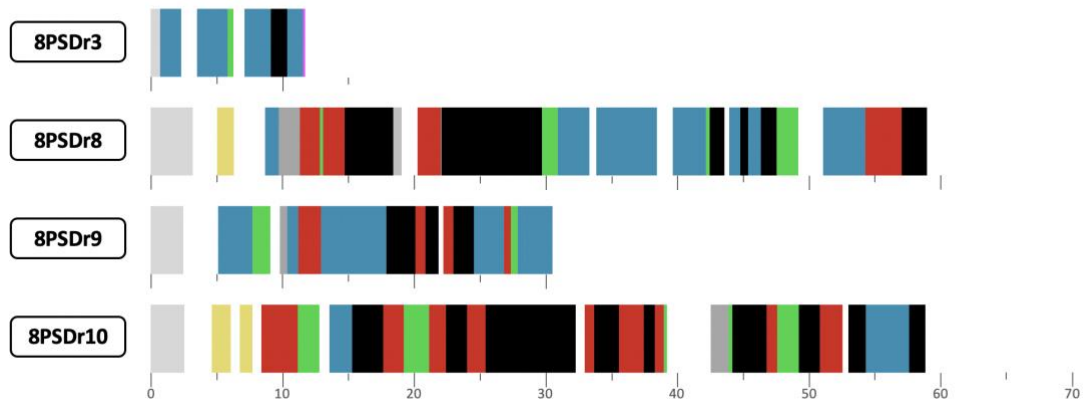


Figure 20. Représentations graphiques de l'analyse en épisodes pour chaque groupe de la classe 8PS

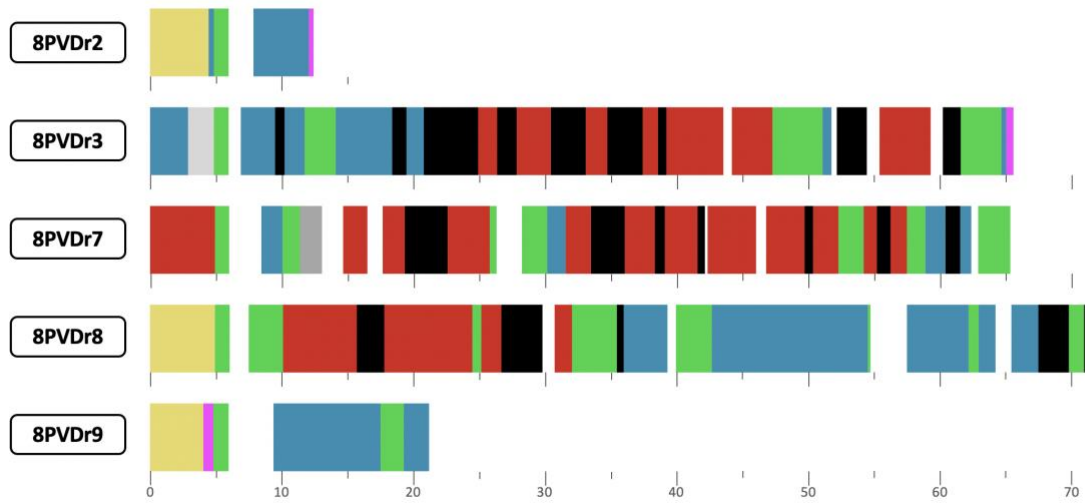


Figure 21. Représentations graphiques de l'analyse en épisodes pour chaque groupe de la classe 8PV

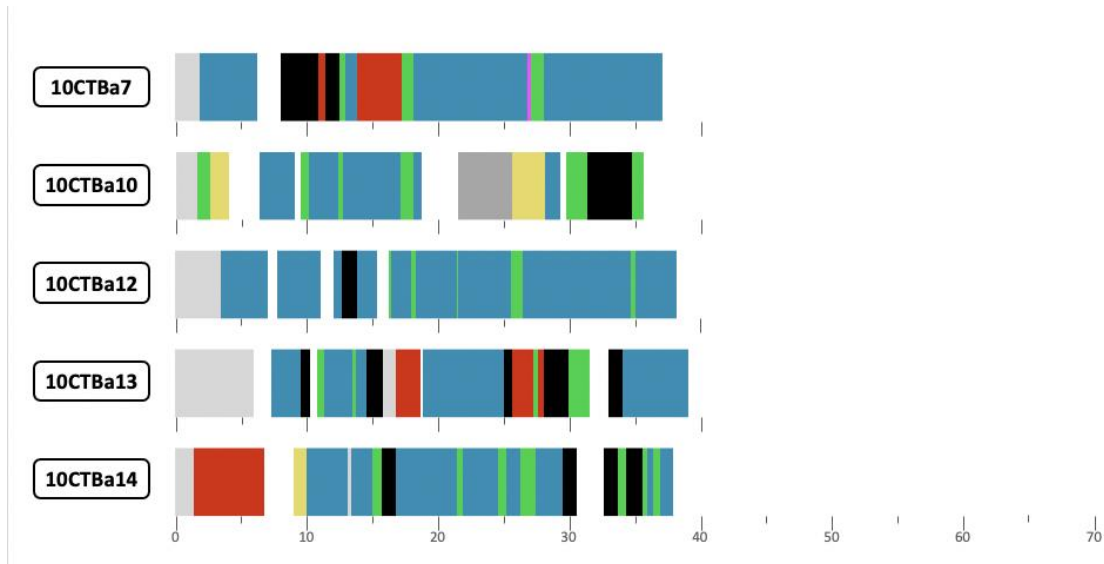


Figure 22. Représentations graphiques de l'analyse en épisodes pour chaque groupe de la classe 10CT

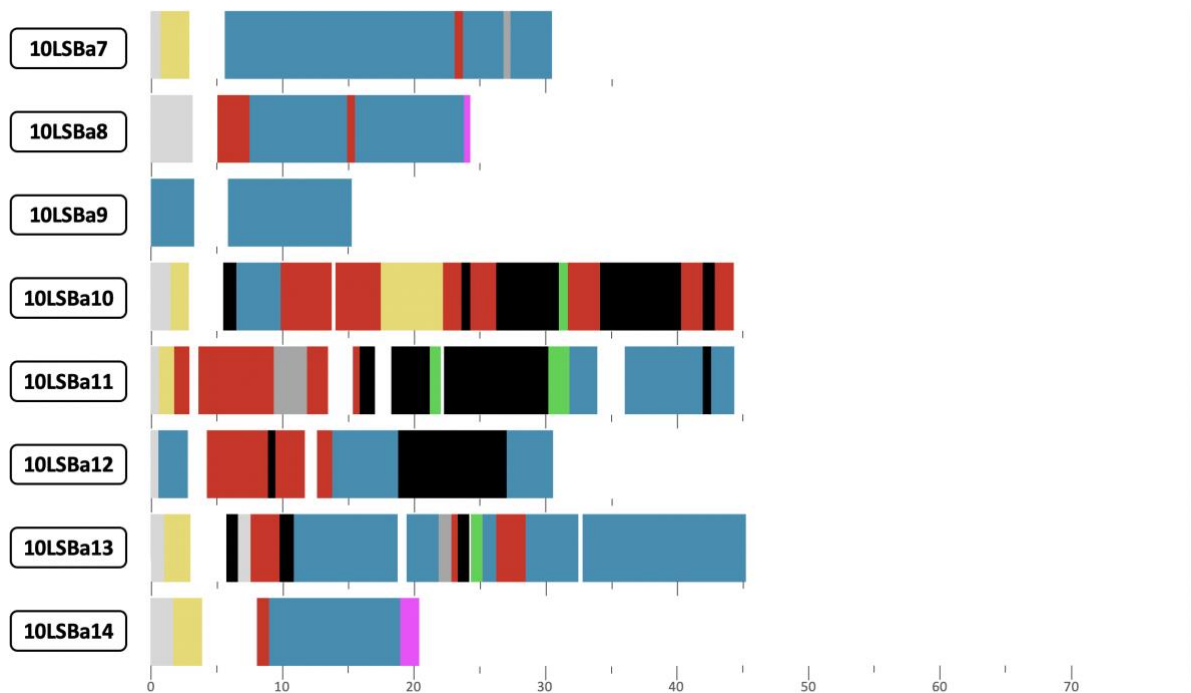


Figure 23. Représentations graphiques de l'analyse en épisodes pour chaque groupe de la classe 10LS

1.2 Premières interprétations des régularités et contrastes observés

Cette analyse en épisodes doit nous permettre de caractériser les démarches des élèves du point de vue macroscopique et potentiellement mettre à jour des régularités ou des écarts entre les élèves. Dans cette section, nous proposons d'identifier et d'interpréter certaines régularités à la lumière des conditions expérimentales et/ou des habitudes de travail. Ceci nous permettra ensuite de discuter des groupes éventuellement en contraste avec ces régularités observées.

Nous observons, sur tous les graphiques de la classe 8PV (Figure 21), un épisode de régulation situé au bout de 5 minutes. Cette régularité est inhérente au fait que l'enseignante a effectué un petit temps collectif entre le temps de recherche individuelle et la mise en groupe. Ce temps a été

introduit de la manière suivante : « Ok on fait un petit stop alors je vois qu'il y a trois élèves qui sont encore bloqués qu'est-ce qu'on a pu remarquer dans le problème déjà qu'est-ce que vous avez comme informations ». Les élèves répondent en rappelant des éléments présentés dans l'énoncé. Puis, lorsqu'un élève commence à expliquer son raisonnement « puisqu'il y a trente ailes du coup il doit y avoir », l'enseignante lui coupe la parole « alors je veux pas forcément des réponses c'est des remarques d'accord dans ceux qui n'ont pas compris est-ce que vous avez des questions avant que je vous mette en groupes [silence] pas de question vous avez compris l'énoncé au moins ». L'enseignante conclut ce temps en rappelant que « les dessins vous aidaient qu'on voyait les ailes les pattes c'est bon ça » puis en communiquant la composition des groupes. Cet épisode, à l'initiative de l'enseignante, correspond effectivement à un temps d'interactions entre élèves et enseignante donc il est légitime de le coder comme régulation. Cette régularité est à relier, de manière peu discutable, au choix de l'enseignante concernant la gestion de la séance et en particulier au regard de la prise en compte des élèves en situation de blocage.

Les graphiques de la classe 8PS (Figure 20) présentent tous (à l'exception de celui codé 8PSDr3 que nous expliciterons ci-après) un seul épisode, avant la transition (qui code la mise en groupe), qui correspond à un épisode de lecture. Ceci s'explique par le fait que l'enseignant a distribué les énoncés à l'envers sur les pupitres des élèves et n'a pas procédé à la lecture de l'énoncé en collectif au préalable. Lorsque les consignes de travail ont été passées, l'enseignant a demandé aux élèves de retourner leur feuille. Il semble donc naturel que les élèves aient commencé leur recherche par un épisode de lecture. Il est de plus remarquable que cet épisode de lecture soit le seul avant la mise en groupe. En effet, pendant la passation des consignes, l'enseignant a invité les élèves à commencer leur recherche tout en leur indiquant : « évitez pour l'instant de noter des choses mais réfléchissez à comment vous allez pouvoir résoudre ce problème ». Le contraste relevé pour le groupe 8PSDr3 tient au fait que cet élève explique à voix basse le raisonnement qu'il élabore ce qui a été codé comme mise en œuvre.

Dans les classes de 10^eCT et 10^eLS, tous les groupes (sauf 10LSBa9) commencent leur recherche par la lecture de l'énoncé. Il n'y a pas eu non plus de lecture collective préalable. L'enseignante a transmis les différentes consignes de travail puis a distribué les feuilles au moment où les élèves pouvaient commencer leur recherche. Ce premier épisode de lecture nous semble donc imputable là aussi au choix de l'enseignante qui mène la séance. Pour ce qui concerne le travail du groupe 10LSBa9, l'élève porteur de la caméra n'effectue pas de lecture complète de l'énoncé. Nous observons que sa tête reste fixée sur l'énoncé et qu'après 5 secondes seulement, il pointe un élément de l'énoncé « 2 ballons de rugby » (voir Figure 24). Puis il commence à écrire la définition de cette inconnue, comme l'illustre la première ligne de la Figure 25.

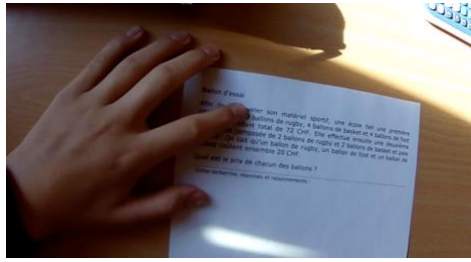


Figure 24. Geste du porteur de la caméra pointant l'énoncé

$$\begin{aligned}
 &1 \text{ ballon de rugby} \Rightarrow 1x \quad R \\
 &1 \text{ ballon de basket} \Rightarrow 1y \quad B \\
 &1 \text{ ballon de foot} \Rightarrow 1z \quad F \\
 &2x + 4y + 4z = 72.- \\
 &2x + 2y = 30.-
 \end{aligned}$$

Figure 25. Début du travail écrit du porteur de la caméra du groupe 10LSBa9

Après avoir écrit cette première ligne, il reste fixé sur la feuille quelques instants puis se met à écrire la deuxième inconnue (2^e ligne de la Figure 25). Il répète ceci une troisième fois pour la troisième inconnue. Puis, il enchaîne (15 secondes après) avec l'écriture des deux équations (bas de la Figure 25). Nous remarquons que cet élève se lance dans un codage de l'énoncé dans un mode sténographique avant même d'avoir lu complètement l'énoncé. Sa lecture semble viser prioritairement le repérage de ce qui va jouer le rôle d'inconnues dans la résolution.

Dans la classe de 8PV (Figure 21), nous remarquons, au contraire de ce que nous avons observé pour les classes de 8PS et de 10^e, que le travail des élèves ne débute pas par un épisode de lecture. Dans cette classe, la lecture a été collective après la distribution de l'énoncé et semble suffisante pour permettre aux élèves de se lancer dans la recherche de ce problème.

Il est intéressant de noter que pour chacune des deux classes de 4P, la lecture de l'énoncé a également été collective et suivie d'un temps durant lequel chaque enseignante a montré des cartes telles que celles utilisées dans le problème. Nous avons préparé ce matériel et l'avons laissé à disposition des enseignantes au cas où elles souhaiteraient l'utiliser, ce qui a été effectivement le cas dans les deux classes. Cette manière d'introduire le problème a permis à sept groupes de se lancer directement dans la résolution sans relire l'énoncé. Quatre groupes ont, pour leur part, eu recours à un temps de lecture pour initier leur recherche. Nous pensons, en outre, que cette manière d'introduire le problème est probablement en lien avec la quasi-absence d'épisodes d'appropriation pour ces deux classes de 4P. En effet, nous ne relevons qu'un seul épisode de ce type sur l'ensemble des onze groupes de 4P.

Sur l'ensemble des groupes de 10^oLS, nous pouvons remarquer qu'il y a seulement 4 épisodes de régulation. Ceci fait écho à un échange que nous avons pu avoir avec l'enseignante, durant l'expérimentation, car nous avons relevé que les élèves de cette classe ne posaient pas de question.

Chercheur : ils te posent pas de question

Enseignante : Non

Chercheur : même les groupes en difficulté ils te posent pas de questions

Enseignante : Non

Chercheur : ils font comme ça d'habitude

Enseignante : très souvent oui il faut que j'aille vraiment vers eux pour leur dire euh dans l'autre classe [10°CT] demain à mon avis ils poseront beaucoup plus de questions mais là non

Cette régularité propre à cette classe de 10°LS semble être en lien avec les habitudes de travail. Il semble également que le fait que l'enseignante n'aille pas trop intervenir dans les groupes soit sa manière de tenir compte des consignes de l'expérimentation qui étaient, rappelons-le, de gérer la séance de manière habituelle tout en veillant à laisser vivre au maximum la recherche des élèves.

Dans la classe de 10°CT, le temps de travail des différents groupes est assez homogène. Étant donné qu'aucun groupe n'a trouvé la réponse, les différents groupes ont arrêté leur recherche sensiblement au même moment c'est-à-dire à la sonnerie signalant la fin de la période. Dans toutes les autres classes, des écarts, parfois même de taille, sont relevés entre les premiers groupes qui ont trouvé et les derniers groupes qui ne trouvent pas. Les écarts sont de l'ordre du simple au double ou au triple. Le groupe le plus en contraste sur cet aspect est celui codé 4PCJc12 dont l'élève porteur de la caméra a trouvé la solution au premier essai en moins de 2 minutes.

Ainsi, la présence de certaines régularités observées en termes d'épisodes se trouve davantage être l'expression de certaines conditions liées à l'expérimentation ou aux choix réalisés par les enseignants quant à la gestion de la séance. Ceci étant, nous avons pu mettre en évidence et discuter le travail de quelques groupes qui se démarque de ces régularités et qui nous semble justement pointer des particularités propres aux élèves.

1.3 Les épisodes de digression

Le paragraphe précédent nous a permis d'identifier les moments des observations directement imputables aux conditions expérimentales ou aux choix dans la gestion de la séance de la part des enseignants. Ici, nous allons nous intéresser aux épisodes de digression qui semblent particulièrement présents pour certains groupes et totalement absents pour d'autres. Pour tenter de faire ressortir des éléments d'interprétation des écarts observés, nous regarderons trois indicateurs différents : le nombre d'épisodes de digression, l'apparition du premier épisode de digression et la durée passée dans des épisodes de digression.

Le graphique suivant représente la répartition du nombre de groupes en fonction du nombre d'épisodes de digressions.

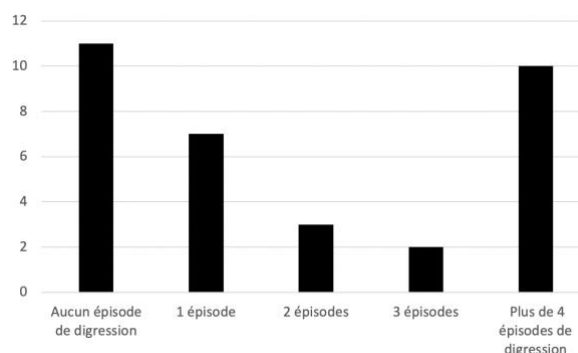


Figure 26. Répartition du nombre de groupes en fonction du nombre d'épisodes de digression

Il apparaît clairement une répartition très déséquilibrée. Un tiers des groupes exactement n'a pas digressé durant sa recherche tandis qu'un autre tiers environ (10 groupes pour être précis) a, au contraire, digressé à quatre reprises voire beaucoup plus. La Figure 27 représente cette répartition par degrés scolaires.

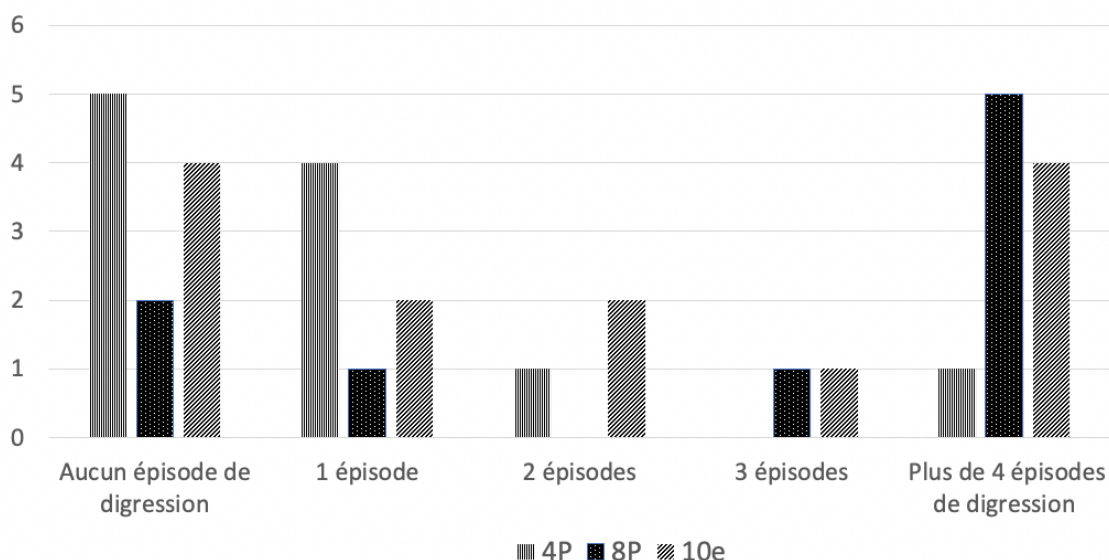


Figure 27. Répartition du nombre de groupes par degré en fonction du nombre d'épisodes de digression

Il est intéressant de noter que chaque degré présente des tendances différentes. Les 10^e suivent la répartition moyenne en se polarisant aux deux extrêmes c'est-à-dire que soit ces élèves ne digressent pas du tout, soit ils digressent de manière nette. Il n'en est pas de même pour les deux autres degrés. En effet, le degré 4P est celui qui majoritairement ne digresse pas ou très peu (1 épisode). Plusieurs groupes de 4P ont même été en mesure de travailler sur des durées très longues sans digresser : 38 ; 44 et même 69 minutes. À l'inverse, le degré 8P est celui qui, proportionnellement au nombre de groupes, a tendance à digresser le plus. D'ailleurs, c'est également pour ce degré que l'on observe les valeurs les plus importantes de 5 ; 6 ; 7 ; 7 et 9 épisodes de digression répartis au sein des deux classes de 8P. Tandis que les autres valeurs pour cette catégorie sont : 4 ; 4 ; 4 ; 5 et 5 épisodes de digression pour les groupes des deux autres degrés. Ainsi, ce premier indicateur montre que ces élèves de 8P sont plus sujet que les autres élèves de l'expérimentation à digresser au cours de leur résolution.

Nous allons à présent nous focaliser de manière encore plus précise sur les 22 groupes qui présentent des épisodes de digression en considérant l'instant d'apparition du premier épisode de digression. Pour cela, nous avons relevé et arrondi en minutes le début du premier épisode de digression pour chacun de ces groupes. Le Tableau 19 présente ces données ainsi que la moyenne correspondant à chaque degré.

Degré	Instant d'apparition du premier épisode de digression (en min)									Moyenne
4P	16	16	21	26	23	8				18
8P	9	15	18	15	9	19	16			14
10e	6	16	9	6	8	31	13	9	16	13

Tableau 19. Instant d'apparition du premier épisode de digression de chaque groupe (répartition par degré)

Nous constatons que la moyenne de la première digression est de 18 minutes pour les 4P, 14 minutes pour les 8P et 13 minutes pour les 10^e. Ces résultats sont assez surprenants et pour le moins contre-intuitifs puisque l'on aurait pu s'attendre à ce que des élèves plus jeunes décrochent avant des élèves plus âgés. La figure suivante donne un aperçu encore plus fin de cette répartition. Dans ce graphique, chaque petit marqueur vertical positionne l'instant d'apparition du premier épisode de digression. Chaque groupe qui présente des épisodes de digression est donc représenté une seule fois par un de ces marqueurs.

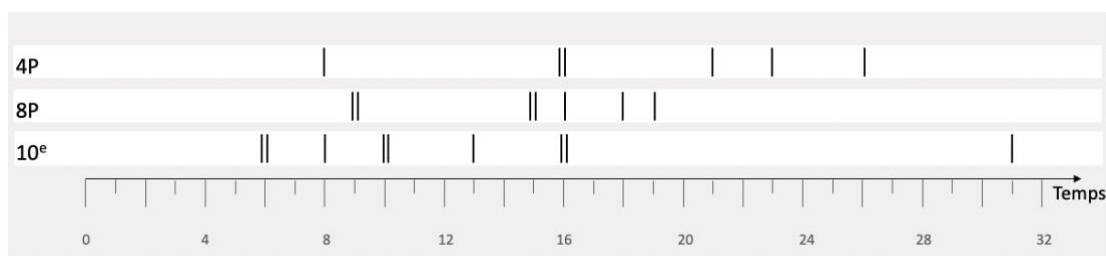


Figure 28. Répartition des groupes par degré en fonction de l'instant du premier épisode de digression

Ce graphique illustre, de manière significative, que les élèves de notre expérimentation commencent à digresser plus tôt dans leur résolution en 10^e et même en 8P qu'en 4P. Ces deux indicateurs sont tous deux plus favorables aux élèves de 4P qu'aux élèves plus âgés.

Notre dernier indicateur concerne la durée passée en digression proportionnellement à la durée totale de travail de chaque groupe. Ainsi, pour chacun de ces 22 groupes présentant au moins un épisode de digression, nous avons totalisé la durée exacte, en secondes, représentée par les différents épisodes de digression. Puis, nous avons calculé la proportion du temps passé par chacun de ces groupes à digresser. Notons que la moyenne, indiquée par la cinquième colonne, est calculée en faisant le rapport de la somme des durées des épisodes de digression de tous les groupes d'un même degré (cellules de la 3^e colonne correspondant au degré considéré) par la somme des durées totales pour ce même degré (cellules de la 2^e colonne correspondant).

Code groupe	Durée totale du travail	Durée cumulée des épisodes de digression (en s)	Proportion	Moyenne (%)
4PCJc7	1488	77	5	15
4PCJc10	1771	85	5	
4PCJc14	4210	1440	34	
4PSJc7	1811	82	5	
4PSJc10	2153	148	7	
4PSJc14	1367	38	3	
8PSDr3	704	75	11	22
8PSDr8	3518	966	27	
8PSDr9	1860	283	15	
8PSDr10	3505	1214	35	
8PVDr3	3908	1017	26	
8PVDr7	3895	594	15	
8PVDr8	4268	518	12	16
10CTBa7	2230	236	11	
10CTBa10	2116	199	9	
10CTBa12	2289	69	3	
10CTBa13	2337	324	14	
10CTBa14	2257	265	12	
10LSBa10	2641	807	31	
10LSBa11	2638	756	29	
10LSBa12	1818	524	29	
10LSBa13	2691	171	6	

Tableau 20. Proportion du temps passé à digresser, par groupe et par degré

Ces moyennes sont aussi en faveur du degré 4P et défavorables au degré 8P puisqu'ils passent 15% de leur temps de travail à digresser contre près de 22% en 8P. En combinant ces trois indicateurs, il ressort que ces groupes d'élèves de 4P présentent un nombre de digressions moindre qui

interviennent le plus tardivement au cours de la résolution et pour des durées relativement faibles proportionnellement à la durée de travail. À l'inverse, les groupes de 8P sont ceux qui digressent le plus en nombre d'épisodes mais également au regard de la proportion du temps de travail. Au sein du degré de 10^e, les proportions sont très différentes entre la classe de LS dont trois groupes passent presque un tiers de leur temps de travail en digressions contre 9 à 14% pour les groupes de CT. Cet écart est peut-être à mettre en lien avec la quasi-absence d'épisodes de régulation en 10^eLS (voir plus haut) alors qu'en 10^eCT, de nombreux épisodes de régulation ont sans doute maintenu les élèves dans le travail. Ceci montre bien l'importance des régulations y compris pour les élèves en réussite.

Sur l'ensemble de ces 22 groupes, nous relevons que 7 groupes se détachent nettement avec des proportions comprises entre 26 et 35%. Ceci signifie que ces groupes passent d'un quart à plus d'un tiers de leur temps de travail à digresser. Il apparaît ici une première piste qui pourrait expliquer que certains groupes avancent peu ou pas dans leur recherche. En effet, le travail de ces groupes est interrompu à de nombreuses reprises par des digressions et, qui plus est, sur des temps significatifs. Les élèves doivent ensuite relancer leur travail ce qui semble peu efficient. Cette idée d'interruptions fréquentes dans le travail nous paraît une piste intéressante à approfondir et nous a amené à définir l'avancée propre du travail des élèves que nous détaillons dans le paragraphe suivant.

1.4 Avancée « propre » du travail des élèves

Les graphiques obtenus à l'issue du codage en épisodes (Figure 18 à Figure 23) mettent en évidence un nombre d'épisodes relativement élevé et, qui plus est, une forte dispersion comme le montre la boîte à moustaches suivante :

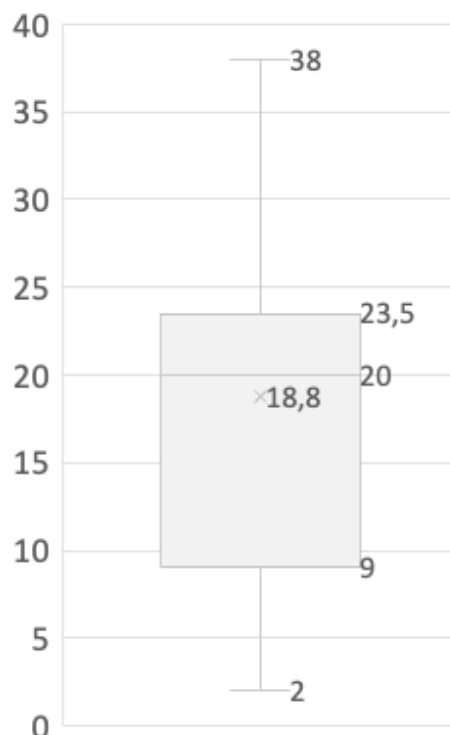


Figure 29. Boîte à moustaches représentant la dispersion du nombre total d'épisodes pour chaque groupe

En effet, le travail des élèves est découpé en 2 épisodes au minimum et 38 épisodes au maximum. De plus, 75% des découpages comptent plus de 9 épisodes et 50% en comptent même plus de 20. En l'état, ce découpage et codage en épisodes rend difficile les comparaisons puisqu'une très grande

richesse s'exprime au travers à la fois de la chronologie des différents épisodes, de leur durée et de leurs natures. Pour pouvoir tenter d'interpréter ces résultats, nous avons donc été amené à réduire la complexité de ces découpages. La première réduction que nous allons opérer va se focaliser sur l'avancée que nous qualifions de « propre » du travail des élèves. Elle correspond aux moments durant lesquels les élèves travaillent effectivement, seul ou en groupe, sur le problème qu'ils ont à résoudre. En termes d'épisodes, cette avancée propre est représentée par les épisodes d'appropriation, planification, mise en œuvre, exploration, vérification, lecture et écriture. Ainsi, une juxtaposition de plusieurs de ces épisodes constituent une série continue matérialisant l'avancée propre du travail des élèves. En dehors de ces épisodes, nous considérons que les élèves interrompent le cours de leur réflexion, de leur raisonnement. Aussi, les épisodes de digression, transition et régulation sont conservés à l'identique et considérés comme venant mettre en pause le raisonnement des élèves. Cette idée est illustrée de manière graphique dans la figure suivante pour trois groupes. Les épisodes appropriation, planification, mise en œuvre, exploration, vérification, lecture et écriture du découpage initial sont représentés par la même couleur orange sur le graphique mettant en évidence l'avancée propre du travail des élèves.

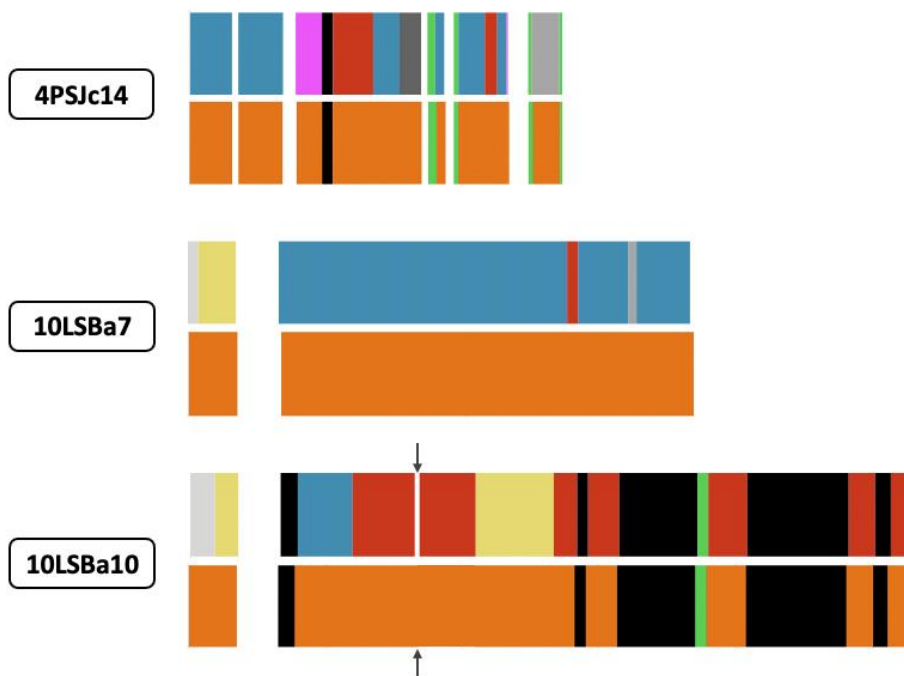


Figure 30. Représentations graphiques du découpage en épisodes et de l'avancée propre du travail des élèves pour trois groupes

Évoquons quelques précisions méthodologiques. Rappelons que les épisodes de digression sont codés dès lors que leur durée est supérieure ou égale à 30 secondes. Cela n'était pas le cas pour les épisodes de transition. En parcourant tous les épisodes de transition inférieurs à 30 secondes, nous remarquons que presque tous ces épisodes sont juxtaposés à un épisode de digression ou de régulation donc qu'ils n'interrompent pas, seuls, l'avancée propre du travail des élèves. Par contre, nous avons identifié trois épisodes de transition d'une durée de 13 ; 16 et 18 secondes (respectivement pour les groupes 10CTBa13 ; 10LSBa10 et 10LSBa13) qui devraient interrompre, en toute rigueur méthodologique, l'avancée propre du travail des élèves. Ceci étant, considérant ces durées très courtes, nous ferons abstraction de ces trois épisodes de transition en les englobant dans la série d'épisodes constituant l'avancée propre du travail des élèves. Sur les deux graphiques du bas de la Figure 30, une petite flèche pointe un épisode de transition de 16 secondes. Nous voyons que dans le dernier graphique, il est représenté de la couleur orange pour signifier que nous considérons qu'il n'interrompt pas l'avancée propre du travail des élèves. Par contre, tous les épisodes de régulation, quelle que soit leur durée, sont considérés comme interrupteurs de l'avancée

propre du travail des élèves. Nous pourrions discuter du fait qu'un épisode de régulation vienne mettre le travail des élèves en pause. C'est sans doute dans une moindre mesure que pour un épisode de digression mais nous maintenons ce choix méthodologique car échanger avec un enseignant sur le travail réalisé, poser des questions et comprendre les éléments apportés par l'enseignant ou répondre aux questions de l'enseignant nous semblent suffisamment prégnants pour « effacer » la mémoire à court terme des élèves et les obliger à se relancer dans leur raisonnement ou à adopter une autre piste susceptible d'émerger lors de la régulation.

Définie et représentée ainsi, nous pouvons visualiser l'avancée propre du travail des élèves et comptabiliser le nombre de séries qui la composent. Par exemple, l'avancée propre du travail des élèves des trois groupes de la Figure 30 compte respectivement 7 ; 2 et 6 séries. Cela permet également de calculer sa durée et par conséquent la proportion du temps consacré à l'avancée propre du travail des élèves. Notons que pour la suite de cette analyse, nous ne tenons pas compte du travail du groupe (ou plutôt de l'élève) codé 4PCJc12 qui a trouvé en deux minutes, pendant la phase de travail individuel. Les tableaux suivants (Tableau 21) présentent la proportion de l'avancée propre du travail des élèves (tableau de gauche) et le nombre de séries caractérisant cette avancée (tableau de droite). Pour chacun de ces tableaux, les groupes sont ordonnés selon l'ordre croissant de l'indicateur considéré et nous avons indiqué, en dernière colonne, la réussite ou non au problème dont la légende est rappelée sous les tableaux. Les groupes appartenant aux 25% ayant la plus grande proportion d'avancée propre ou le nombre de séries le plus faible sont colorés en orange. À l'inverse, les groupes appartenant aux 25% ayant la plus petite proportion d'avancée propre ou le nombre de séries le plus important sont colorés en gris.

Code groupe	Durée totale du travail	Durée de l'avancée propre du travail des élèves	Proportion de l'avancée propre du travail des élèves	Réussite / Non-réussite	Code groupe	Nombre de séries	Réussite / Non-réussite
8PSDr10	3505	1439	41		8PVDr7	16	
4PCJc14	4210	1798	43		8PSDr10	15	
8PSDr8	3518	1789	51		8PVDr3	14	
10LSBa11	2638	1372	52		4PCJc14	12	
8PVDr3	3908	2048	52		8PSDr8	12	
8PVDr7	3895	2155	55		8PVDr8	10	
10CTBa10	2116	1235	58		4PCJc9	10	
8PVDr8	4268	2582	60		10CTBa12	9	
10LSBa10	2641	1624	61		10CTBa14	8	
10LSBa12	1818	1153	63		10CTBa13	8	
10CTBa14	2257	1471	65		4PCJc11	8	
8PSDr9	1860	1207	65		4PCJc7	8	
4PCJc7	1488	985	66		10CTBa10	7	
8PSDr3	704	482	68		4PSJc7	7	
4PSJc10	2153	1496	69		8PSDr9	7	
10CTBa13	2337	1633	70		4PSJc14	7	
8PVDr9	1265	886	70		10LSBa11	6	
4PCJc11	2635	1860	71		10LSBa10	6	
4PSJc7	1811	1292	71		4PSJc10	6	
4PCJc10	1771	1254	71		4PSJc12	6	
8PVDr2	741	561	76		10CTBa7	5	
4PSJc14	1367	1057	77		10LSBa13	5	
4PCJc9	4117	3204	78		10LSBa12	5	
10CTBa7	2230	1752	79		4PCJc10	5	
10LSBa14	1203	958	80		8PSDr3	4	
10LSBa13	2691	2241	83		8PVDr9	3	
10LSBa9	911	759	83		8PVDr2	2	
4PSJc12	2290	1920	84		10LSBa14	2	
10CTBa12	2289	1948	85		10LSBa9	2	
4PSJc9	885	776	88		4PSJc9	2	
10LSBa7	1817	1659	91		10LSBa7	2	
10LSBa8	1447	1337	92		10LSBa8	2	





	Réponse trouvée sans aide
	Réponse trouvée avec aide légère
	Réponse trouvée avec aide forte ou guidage important
	Réponse non trouvée

Tableau 21. Tableaux présentant la proportion de l'avancée propre du travail des élèves (tableau de gauche) et le nombre de séries caractérisant cette avancée (tableau de droite)

Intéressons-nous, tout d'abord, à la proportion de l'avancée propre du travail des élèves (tableau de gauche). Nous remarquons que les proportions les plus faibles sont de l'ordre de 50% voire moins. Ceci signifie que ces groupes passent la moitié du temps dédié à la résolution, voire moins, à chercher effectivement le problème. À l'autre bout, 25% des groupes ont une proportion comprise entre 80 et 90%. Le rapport entre le premier et le dernier quartile est presque du simple au double. Ce premier indicateur permet de mesurer concrètement les écarts en temps passé à chercher le problème. De plus, en croisant cette proportion de l'avancée propre du travail des

élèves avec la réussite ou non au problème, il ressort que les groupes du premier quartile ne trouvent pas la réponse ou seulement si l'enseignant prend la résolution à son compte. Dans le même temps, six groupes sur les huit qui composent le quatrième quartile trouvent la réponse. Sur l'ensemble des groupes, on constate que cet indicateur qu'est la proportion d'avancée propre du travail des élèves ne semble pas pouvoir être corrélé avec la réussite. Ceci étant nous pouvons remarquer qu'en dessous de 60% de temps passé à chercher aucun groupe n'a trouvé la réponse, seul ou sans une aide forte de l'enseignant.

Passons maintenant au nombre de séries qui caractérisent cette avancée propre du travail des élèves. 25% des groupes présentent un nombre de séries compris entre 2 et 4. Ces groupes effectuent une recherche relativement continue et, qui plus est efficace, puisque tous résolvent le problème. Ce n'est pas le cas des groupes du dernier quartile qui ont un nombre de séries supérieur à 9, atteignant même les 15 ou 16 séries. Ceci signifie que leur recherche est très hachée. Les élèves de ces groupes relancent leur recherche et ce, à de très nombreuses reprises. L'efficacité n'est pas au rendez-vous puisque tous ces groupes ne trouvent pas la réponse ou seulement si l'enseignant prend la résolution à son compte. Là encore, cet indicateur ne nous surprend pas mais l'intérêt réside, nous semble-t-il, dans la quantification des écarts, assez spectaculaires, entre des groupes qui réussissent et d'autres qui ne trouvent pas la réponse.

Enfin, le tableau suivant (Tableau 22) nous permet de mettre en regard ces deux manières de caractériser les démarches de résolution des élèves à l'appui de l'avancée propre du travail des élèves. Précisons que les groupes sont classés selon l'ordre croissant du nombre de séries.

Code groupe	Durée totale du travail	Durée de l'avancée propre du travail des élèves	Proportion de l'avancée propre du travail des élèves	Nombre de séries	Réussite / Non-réussite
8PVDr2	741	561	76	2	
10LSBa14	1203	958	80	2	
10LSBa9	911	759	83	2	
4PSJc9	885	776	88	2	
10LSBa7	1817	1659	91	2	
10LSBa8	1447	1337	92	2	
8PVDr9	1265	886	70	3	
8PSDr3	704	482	68	4	
10LSBa12	1818	1153	63	5	
4PCJc10	1771	1254	71	5	
10CTBa7	2230	1752	79	5	
10LSBa13	2691	2241	83	5	
10LSBa11	2638	1372	52	6	
10LSBa10	2641	1624	61	6	
4PSJc10	2153	1496	69	6	
4PSJc12	2290	1920	84	6	
10CTBa10	2116	1235	58	7	
8PSDr9	1860	1207	65	7	
4PSJc7	1811	1292	71	7	
4PSJc14	1367	1057	77	7	
10CTBa14	2257	1471	65	8	
4PCJc7	1488	985	66	8	
10CTBa13	2337	1633	70	8	
4PCJc11	2635	1860	71	8	
10CTBa12	2289	1948	85	9	
8PVDr8	4268	2582	60	10	
4PCJc9	4117	3204	78	10	
4PCJc14	4210	1798	43	12	
8PSDr8	3518	1789	51	12	
8PVDr3	3908	2048	52	14	
8PSDr10	3505	1439	41	15	
8PVDr7	3895	2155	55	16	





	Réponse trouvée sans aide
	Réponse trouvée avec aide légère
	Réponse trouvée avec aide forte ou guidage important
	Réponse non trouvée

Tableau 22. Tableau présentant la proportion de l'avancée propre du travail des élèves et le nombre de séries caractérisant cette avancée

Nous constatons que 6 des 8 groupes du dernier quartile cumulent un nombre de séries très important avec une proportion de l'avancée propre du travail parmi les plus faibles. Ceci met en évidence les difficultés qu'éprouvent ces groupes à persévérer dans la résolution du problème. En effet, ils travaillent pendant environ la moitié du temps et de manière très hachée devant relancer leur réflexion à de nombreuses reprises. Il semble par conséquent difficile de résoudre un problème dans ces conditions ce qui est confirmé car nous avons vu plus haut que la réussite au problème n'est pas au rendez-vous pour ces 6 groupes. Notons que les groupes 10LSBa11 et 10CTBa10 se démarquent de ce dernier quartile puisqu'ils présentent un nombre de séries dans la moyenne (respectivement 6 et 7 séries alors que la moyenne est de 6,9 séries) mais une proportion de l'avancée propre du travail des élèves parmi les plus basses. Ceci indique que ces deux groupes restent longtemps dans des épisodes qui ne sont pas en lien avec l'avancée propre du travail des élèves ce qui fait chuter cette proportion. À titre d'illustration, le groupe 10LSBa11 reste près de 15 minutes consécutives sans avancer véritablement dans leur recherche.

Par ailleurs, nous observons que 5 groupes, sur les 8 qui représentent le premier quartile, cumulent à la fois un nombre de séries très faible et une proportion de l'avancée propre du travail parmi les meilleures. Donc non seulement ces élèves passent presque tout leur temps à chercher le problème mais, en plus, leur recherche est presque continue et efficace. Ce cumul fait ressortir une certaine persévérance et la capacité à rester dans la recherche du problème.

Le groupe 10CTBa12 est atypique puisqu'il est le seul à présenter une bonne proportion de travail avec un grand nombre de séries. En regardant de manière plus fine le travail réalisé par ce groupe, nous remarquons que les épisodes qui viennent interrompre cette avancée sont relativement courts, dont notamment 4 épisodes de régulation (23 ; 7 ; 54 ; 23 secondes). Nous pouvons supposer que ces interventions de l'enseignante, courtes mais régulières, ont, certes augmenté le nombre de séries, mais surtout soutenu l'activité des élèves de ce groupe et les ont maintenus dans la recherche du problème. D'ailleurs, ce constat dépasse le cadre de ce groupe puisque la plupart des autres groupes de cette classe présente une avancée propre du travail des élèves supérieure à la moyenne (la moyenne est de 65,8% sur l'ensemble des 32 groupes) avec, dans le même temps, un nombre de séries assez important dû notamment à des régulations courtes mais régulières. Une piste intéressante pourrait être de s'intéresser au contenu de ces régulations qui durent une vingtaine de secondes voire moins pour déterminer de manière plus précise le rôle qu'elles ont pu jouer dans le maintien des élèves dans leur recherche. On pourrait ainsi penser que la qualité des relances est un facteur déterminant.

En conclusion, caractériser l'avancée propre du travail des élèves nous permet de quantifier le temps que passent effectivement les élèves à chercher le problème et la manière dont est réparti ce temps. Pour comparer ces durées, nous avons choisi de calculer la proportion que représente cette avancée propre du travail des élèves par rapport à la durée totale passée par chaque groupe sur sa recherche. Nous avons ainsi pu remarquer des écarts significatifs notamment entre les 25% les plus hauts et les 25% les plus bas. Nous avons également caractérisé l'avancée propre du travail des élèves en nombre de séries qui la composent. Là aussi les écarts sont très importants.

La confrontation de ces deux caractéristiques indique que les tendances les plus propices pour résoudre le problème sont cumulées par les mêmes groupes d'élèves et que les tendances les moins propices sont également cumulées par d'autres mêmes groupes d'élèves. Ces derniers passent à peine plus de la moitié de leur temps à résoudre le problème et, en plus, ce temps est interrompu à de nombreuses reprises. Ces observations en lien avec le cumul de ces deux indicateurs ne sont peut-être pas statistiquement significatives mais elles nous questionnent. Ceci étant, l'échantillon nous semble suffisamment important et, qui plus est, porte sur trois degrés différents pour que ces observations soient remarquées, à défaut d'être remarquables.

Enfin, nous avons vu aussi que certains groupes ne cumulent pas ces deux tendances les moins propices. Ces groupes sont ceux qui interrompent peu leur recherche mais lorsqu'ils le font, cela

peut durer très longtemps (10LSBa11 et 10CTBa10). Il semble également que dans la classe de 10CT, des régulations très régulières mais courtes aient augmenté le nombre de séries mais avec un impact favorable sur l'avancée propre du travail des élèves. L'avancée propre du travail des élèves permet d'appréhender le travail des élèves d'un point de vue quantitatif. Pour la suite, nous allons proposer une autre réduction de la complexité des résultats des découpages en épisodes en nous intéressant à un aspect plus qualitatif qui tient en l'enchaînement des épisodes.

1.5 Focus sur les enchaînements d'épisodes

Pour effectuer ces analyses, nous opérationnalisons, dans un premier temps, le modèle de Rott et al. (2021). Puis, après avoir pointé une limite importante mise en évidence par nos données expérimentales, nous proposons un enrichissement de ce modèle de manière à permettre la poursuite des analyses.

1.5.1 À l'aide du modèle descriptif des processus de résolution de problèmes (Rott et al., 2021)

Pour ce faire, nous prenons appui sur le modèle descriptif des processus de résolution de problèmes proposé par Rott (2012b) et Rott et al (2021) que nous rappelons ci-dessous :

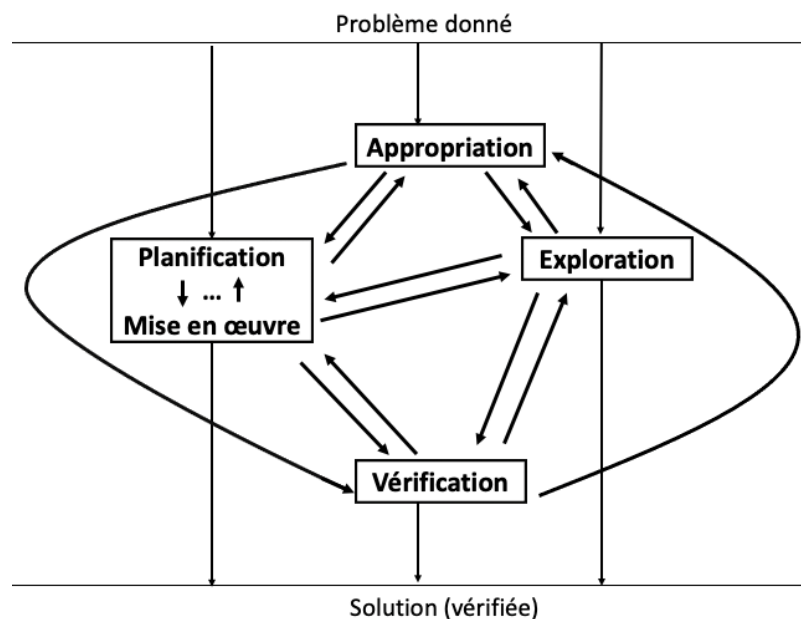


Figure 31. Notre traduction du modèle descriptif des processus de résolution de problèmes (Rott, 2012b; Rott et al., 2021)

À la suite de ces auteurs, nous nommons *phase* les différentes parties de ce modèle ; le terme *épisode* est réservé pour le codage des données audiovisuelles. Ce modèle est complété par le nombre de passages d'une phase à une autre qui est inscrit dans un cercle disposé à côté de la flèche correspondant. En ce qui concerne nos données expérimentales, ce modèle nous semble opérationnel pour décrire le travail des groupes d'élèves pour lesquels il n'y a pas eu d'intervention de l'enseignant, c'est-à-dire qui ne présentent pas d'épisodes de régulation. Cela concerne sept groupes. Nous présentons ci-dessous le travail de ces sept groupes à l'aide de ce modèle. À côté de chaque nombre de passages (nombre encadré), nous avons rajouté un autre nombre, écrit avec une police italique de couleur grise, qui précise l'ordre de parcours dans le modèle. Chacune des figures suivantes regroupe les résultats par proximité avec les modèles normatifs connus.

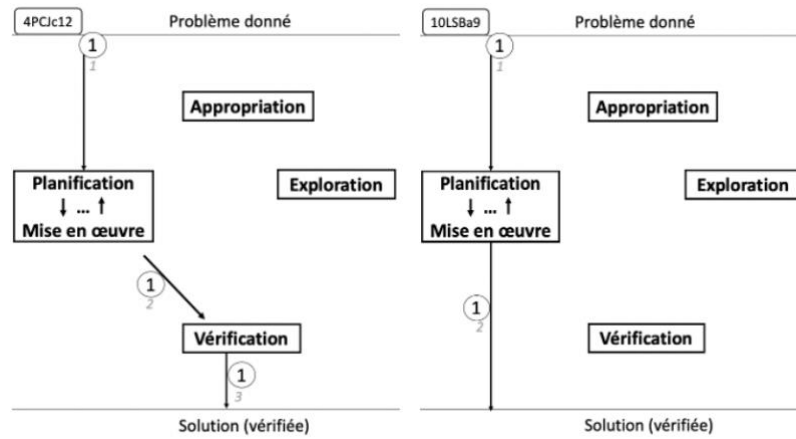


Figure 32. Groupes dont le processus de résolution est linéaire (au sens de Pólya)

Ces deux premiers groupes présentent un parcours linéaire « descendant » du modèle. Cette caractérisation linéaire fait écho au modèle normatif de Pólya (1989). Ceci étant, nous pouvons déjà constater un petit écart dans la mesure où ces deux groupes ne passent pas par une phase d'appropriation comme envisagé par Pólya.

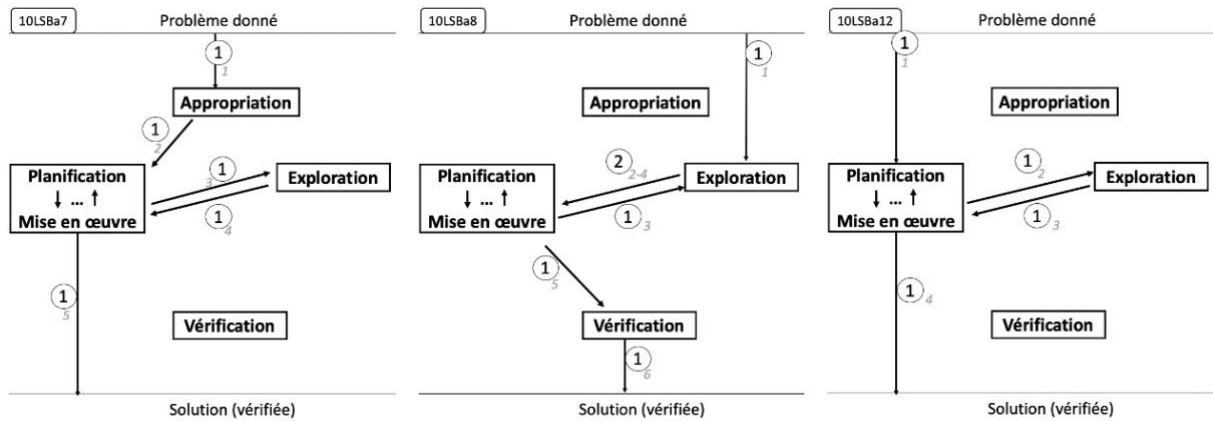


Figure 33. Groupes dont le processus de résolution est cyclique au sens de Schoenfeld

Ces trois groupes sont comparables en ce qui concerne les aller-retours entre les phases de planification-mise en œuvre et d'exploration. Cet aspect cyclique d'une partie du processus est à mettre en relation avec le modèle de Schoenfeld (1985). Comme nous l'avons remarqué quelques lignes plus haut, ces trois groupes illustrent trois manières différentes de démarrer la résolution. Seul le groupe 10LSBa7 (à gauche sur la Figure 33) est fidèle au modèle de Schoenfeld puisque le processus commence par une phase d'appropriation. Les deux autres groupes mettent en évidence la nécessité d'enrichir ce modèle de Schoenfeld en prévoyant d'entrer directement par une phase de planification ou d'exploration comme le permet le modèle de Rott et al.

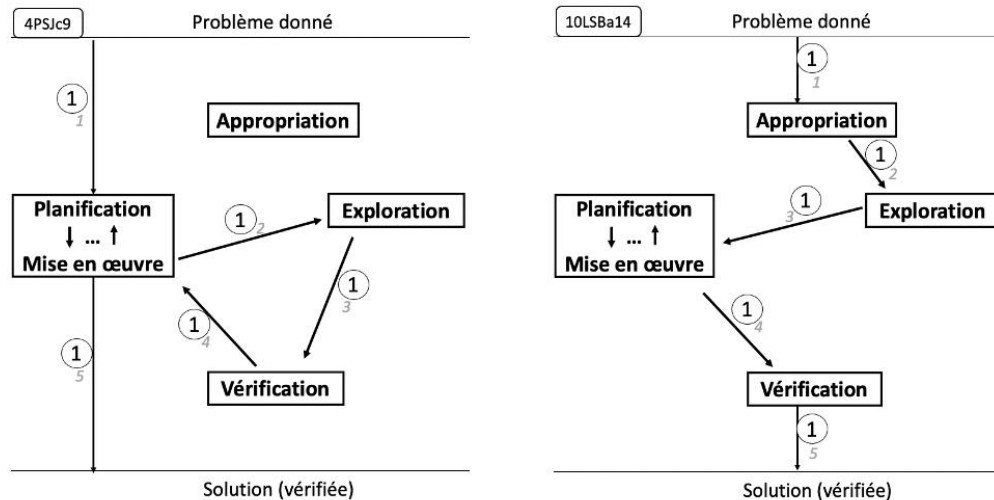


Figure 34. Groupes dont le processus est non apparenté à un modèle normatif

Enfin, ces deux derniers groupes marquent une rupture avec les cinq groupes précédents. Celui de gauche (4PSJc9) présente une « remontée » dans le modèle après la phase de vérification. Celui de droite (10LSBa14) montre une phase d'appropriation suivie d'une phase d'exploration qui correspond à un enchaînement non pris en charge par le modèle de Schoenfeld. Les processus de ces deux groupes ne s'apparentent pas aux deux modèles évoqués précédemment. Il permet d'appréhender et de confirmer (Rott et al., 2021) que les modèles de Pólya et de Schoenfeld ne sont pas suffisants pour rendre compte de la contingence observée en classe.

L'ensemble de ces sept groupes met en évidence l'opérationnalité du modèle de Rott et al puisqu'il permet de décrire des processus à la fois linéaires, cycliques mais aussi ceux qui peuvent leur échapper de par l'aspect plus dynamique du parcours. Il offre également la possibilité de décrire les processus qui débutent par une phase de planification – mise en œuvre ou d'exploration et non pas seulement d'appropriation. Ceci étant, la confrontation de ce modèle aux autres données expérimentales dont nous disposons pointe une limite importante qui nous a amené nous-même à l'enrichir.

1.5.2 Proposition d'un modèle descriptif des processus de résolution de problèmes dans le cas d'interventions de l'enseignant

Pour expliciter cette limite, nous devons préciser que la recherche des problèmes par les sujets de l'étude de Rott et al (2021) a été encadrée, comme le précisent ces auteurs, d'une aide aussi réduite que possible de la part d'un tuteur. Il semble que cette aide ait été suffisamment réduite pour être négligée dans le codage des données. En ce qui nous concerne, la gestion de la séance par l'enseignant et les interventions qu'il a pu avoir auprès de certains groupes d'élèves sont loin d'être négligeables. En effet, caractériser le processus de résolution de problèmes des élèves en classe nécessite d'intégrer la participation de l'enseignant ce qui apporte nécessairement une complexité nouvelle dans la description des phénomènes. Ces interventions de l'enseignant ne sont pas prises en compte par le modèle de Rott et al. Par ailleurs, ces moments où l'enseignant intervient ne peuvent pas être considérés comme étant de même nature que les autres phases du modèle. Nous proposons ainsi d'enrichir ce modèle en ajoutant une dimension pour rendre compte de la régulation. Ainsi, cette dimension supplémentaire se trouve sur un autre plan que la résolution et nous choisissons de la matérialiser dans une troisième dimension (au sens géométrique), dans le modèle enrichi. En mettant à l'épreuve de nos données expérimentales cette proposition de modèle enrichi, il apparaît que cette régulation peut être connectée avec toutes les autres phases du modèle

de base. Des doubles flèches sont donc nécessaires pour représenter ces différentes connexions possibles. De plus, nous avons pu observer quelques groupes pour lesquels une régulation intervenait au tout début de la recherche ce qui explique la flèche qui part du problème et pointe vers la régulation. Dans le même ordre d'idée, il est arrivé que la solution soit trouvée ou vérifiée pendant une régulation : soit parce que c'est l'enseignant qui fait le travail, soit parce qu'il le guide. Il est donc nécessaire de rajouter une flèche qui part de la régulation et pointe vers la solution. Par conséquent, le modèle que nous retenons pour décrire les processus de résolution de problèmes dans les cas où l'enseignant intervient est le suivant :

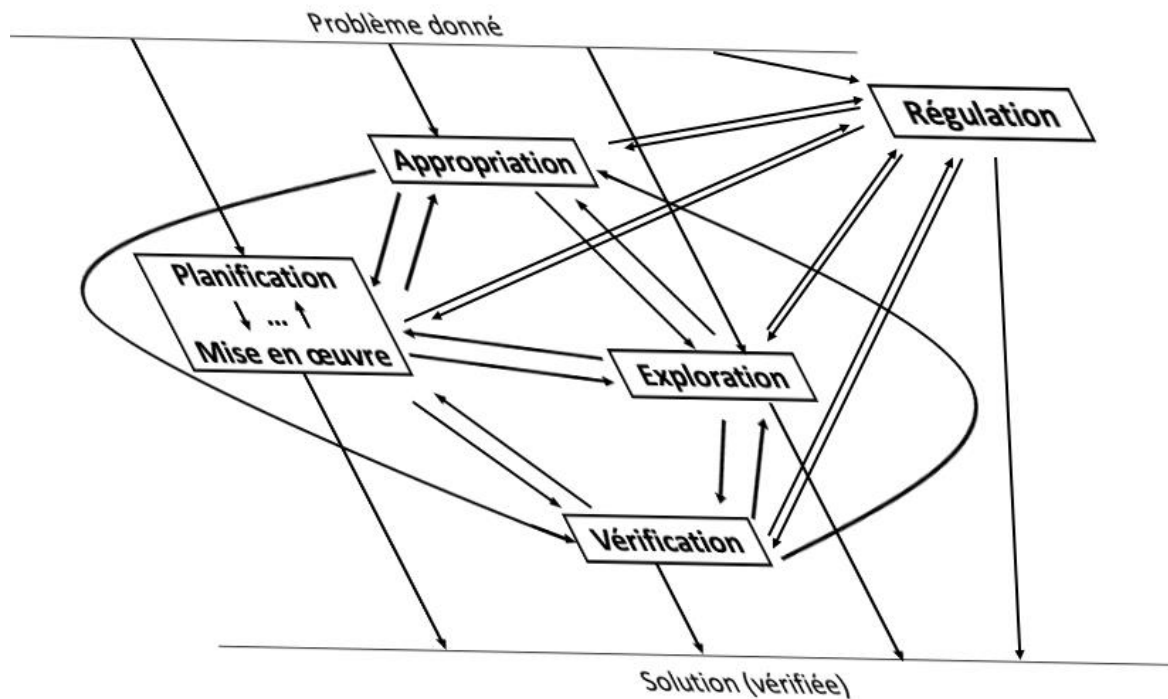


Figure 35. Proposition de modèle permettant de décrire les processus de résolution des élèves dans le cas d'interventions de l'enseignant

La figure suivante présente deux exemples qui permettent de visualiser les descriptions que nous obtenons à l'aide de ce modèle :

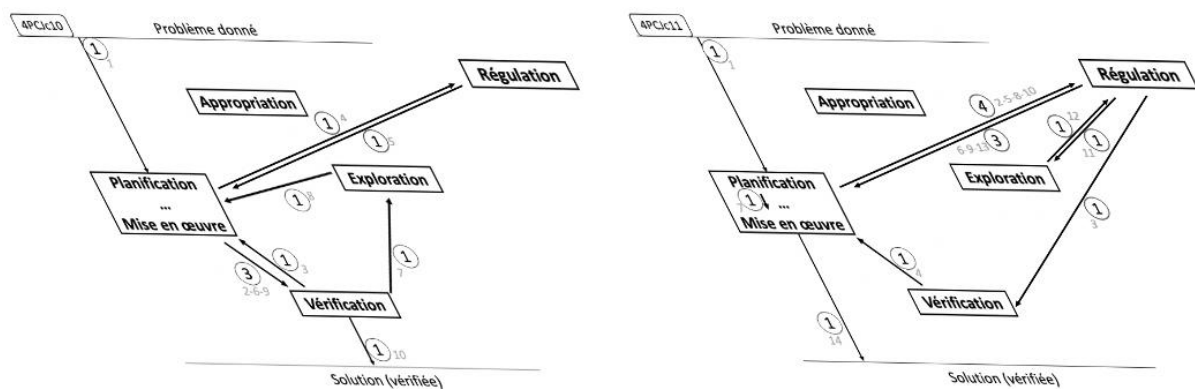


Figure 36. Deux exemples (groupes 4PCJc10 et 4PCJc11) des résultats obtenus avec notre modèle enrichi

Les graphiques correspondant à l'ensemble des groupes de notre corpus se trouvent en Annexe 5. La mise en comparaison de ces différents processus fait apparaître également trois tendances

générales : les processus linéaires (au sens de Pólya), les processus cycliques (au sens de Schoenfeld) et ceux, très dynamiques, qui ne sont pas pris en charge par ces deux modèles.

i. Les processus linéaires

Les trois groupes codés 8PSDr3, 8PVDr2 et 10CTBa12 présentent un processus linéaire qui se caractérise par un parcours uniquement descendant du modèle. Les régulations ne dévient pas la trajectoire linéaire du parcours dans le modèle.

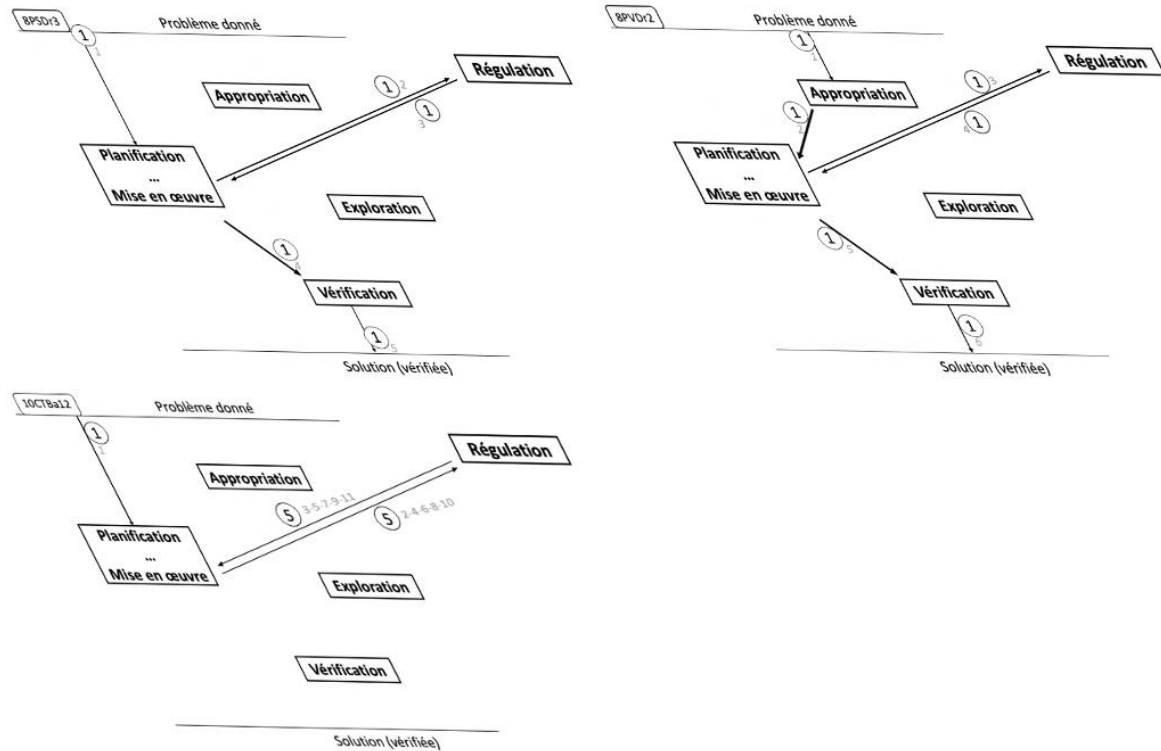


Figure 37. Groupes dont le processus a une tendance linéaire (au sens de Pólya)

Ceci étant, ces graphiques décrivent des réalités très différentes qui sont mises en évidence par le nombre de régulations (nombre encadré à côté des flèches qui partent ou pointent la régulation). En effet, le groupe (10CTBa12) montre de nombreuses régulations tandis que les deux autres groupes (8PSDr3 et 8PVDr2) n'en possèdent qu'une seule chacun.

ii. Les processus cycliques (au sens de Schoenfeld)

Rappelons que nous considérons qu'un processus est cyclique (au sens de Schoenfeld) dans la mesure où il y a un enchaînement entre les trois phases appropriation - planification/mise en œuvre – exploration dans cet ordre ou des aller-retours entre les phases de planification/mise en œuvre et exploration. Ainsi, parmi l'ensemble des processus analysés, les trois suivants correspondent à cette caractérisation cyclique au sens de Schoenfeld :

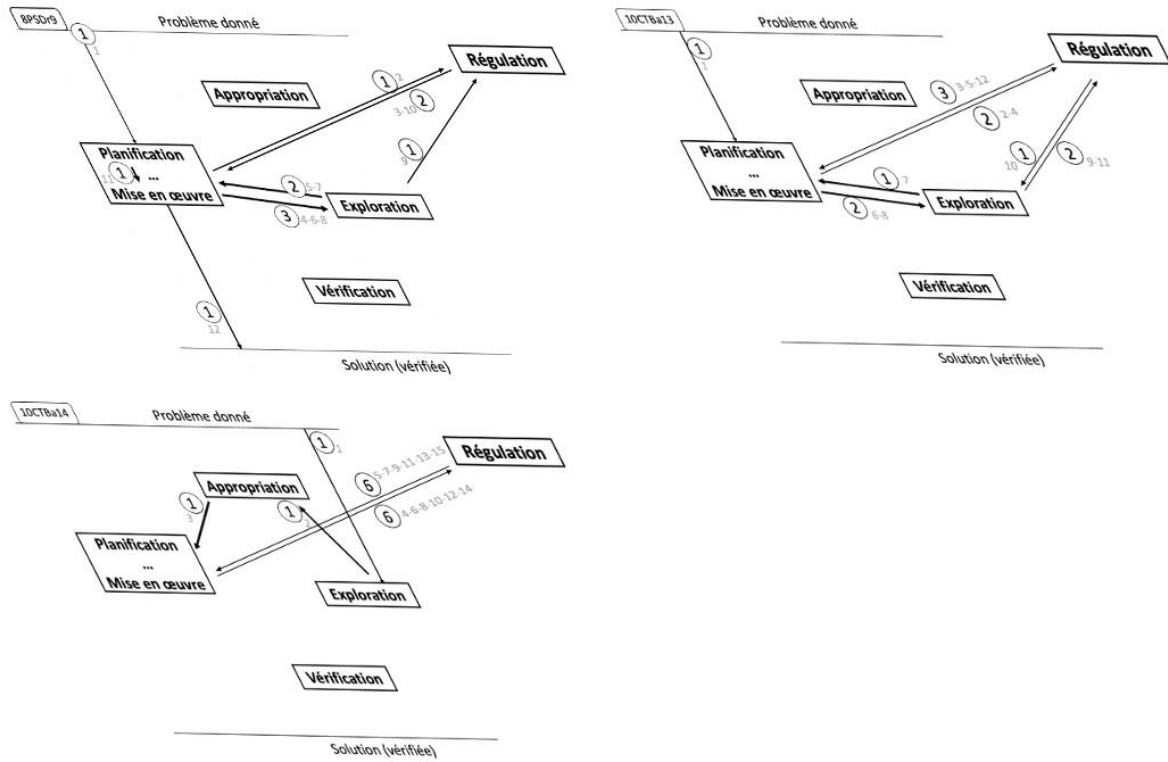


Figure 38. Groupes dont le processus a une tendance cyclique (au sens de Schoenfeld)

Les deux premiers groupes présentent des aller-retours directs entre les phases de planification/mise en œuvre et exploration qui correspondent aux étapes 4-5-6-7-8 pour le groupe 8PSDr9 et aux étapes 6-7-8 pour le groupe 10CTBa13. Ceci étant, les aller-retours sont aussi assurés par certaines régulations : étapes 9-10 pour le groupe 8PSDr9 et étapes 11-12 pour le groupe 10CTBa13.

Certains groupes peuvent être associés au modèle de Schoenfeld dans la mesure où ce sont les régulations qui permettent des déplacements décrits par ce modèle. Trois groupes sont représentatifs de cet aspect comme l'illustre la Figure 39.

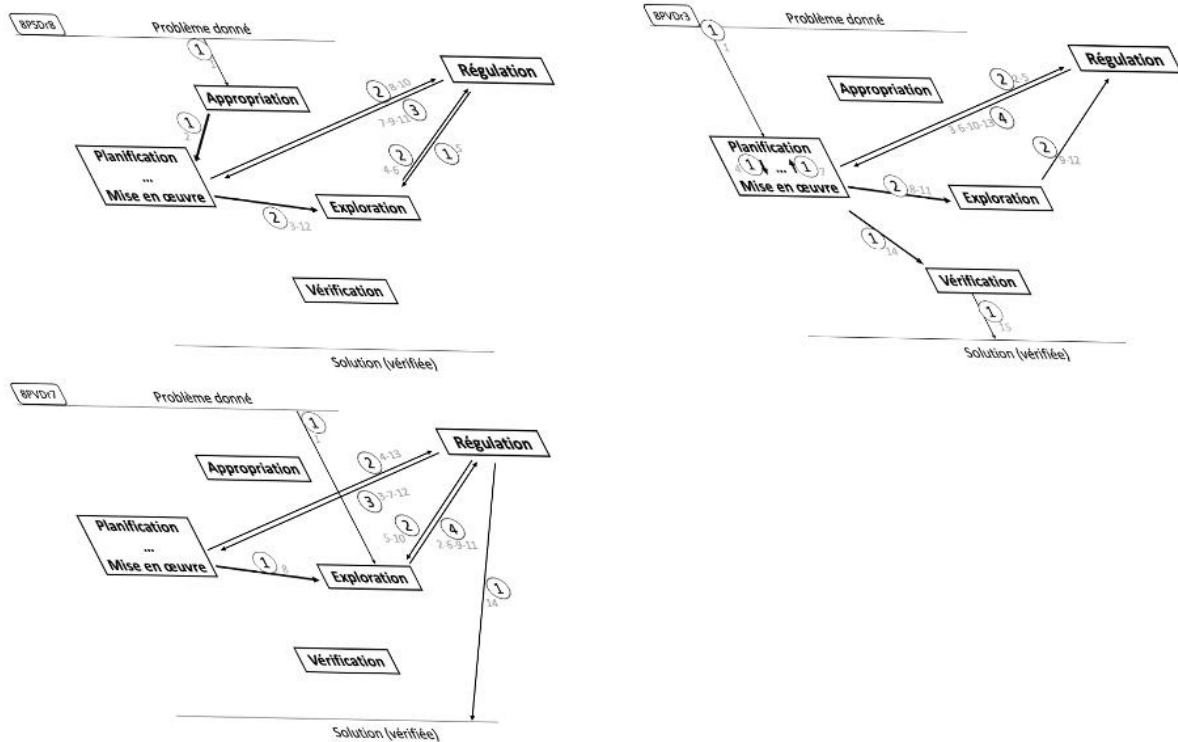


Figure 39. Groupes dont le processus a une tendance cyclique grâce aux régulations

Prenons l'exemple du groupe 8PSDr8. Ce sont les enchaînements 6-7 qui permettent de faire le retour de la phase d'exploration à celle de planification – mise en œuvre. Pour le groupe 8PVDr7, différents aller-retours sont matérialisés par les étapes 2-3 ; 4-5-6-7 ; 11-12. Pour ces trois groupes, les régulations permettent davantage de passer d'une phase d'exploration à une phase de planification-mise en œuvre que l'inverse.

iii. Les processus non apparentés à un modèle normatif

Tous les autres groupes présentent des processus dont la tendance ne s'apparente pas aux modèles normatifs évoqués précédemment, c'est-à-dire que le parcours du modèle se fait selon un enchaînement de phases qui dépasse le cadre de ceux permis par les deux modèles précédents. Pour certains groupes, ces enchaînements sont directement assurés par les élèves c'est-à-dire sans passer par des régulations.

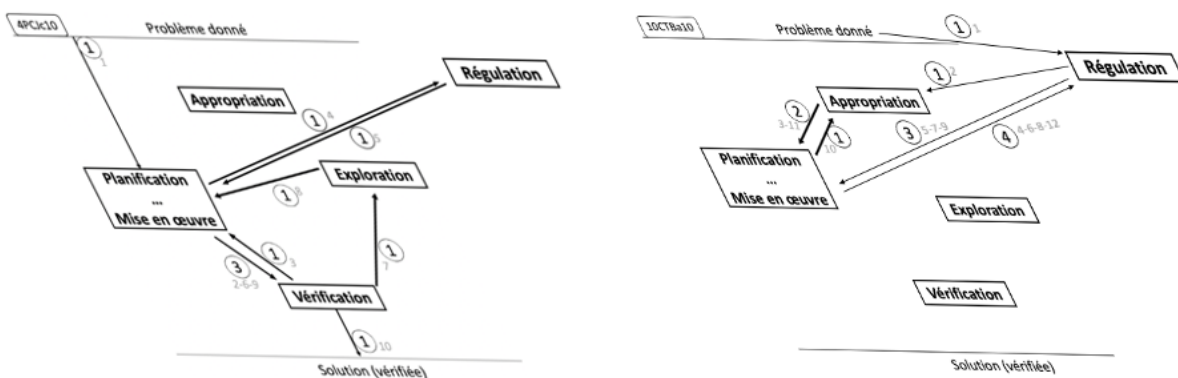


Figure 40. Groupes dont le processus a une tendance non apparentée à un modèle normatif

C'est le cas par exemple pour les enchaînements numérotés 3 et 7 du groupe 4PCJc10 qui mettent en évidence que les élèves passent d'une phase de vérification à une phase de planification-mise en œuvre (3) ou d'une phase de vérification à une phase d'exploration (7). Pour le groupe 10CTBa10,

c'est l'étape 10 qui révèle l'enchaînement d'une phase de planification-mise en œuvre et d'appropriation. Pour d'autres groupes, ces enchaînements sont permis par les régulations. Ainsi, les étapes 9-10 des groupes 4PCJc14 et 10CTBa7 (Figure 41) montrent que le travail des élèves est passé d'une phase de vérification à une phase de planification-mise en œuvre via une régulation.

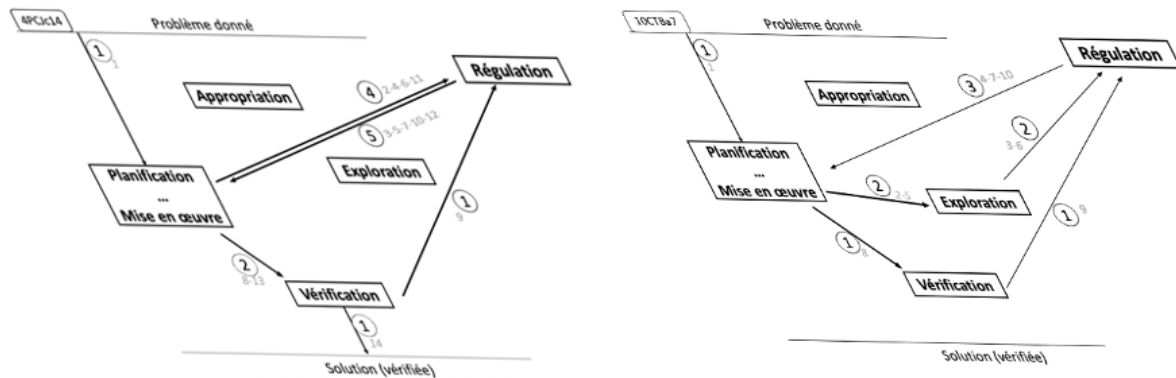


Figure 41. Groupes dont le processus a une tendance non apparentée à un modèle normatif grâce à une régulation

En conclusion, le modèle enrichi que nous proposons est opérationnel pour décrire les processus de résolution des élèves dans le cas où l'enseignant intervient. Il permet de dégager les mêmes tendances que le modèle de Rott et al (2021) lorsqu'il n'y a pas d'intervention de l'enseignant. Nous avons ainsi dénombré 3 groupes dont les processus ont une tendance linéaire, 6 groupes dont les processus ont une tendance cyclique au sens strict de Schoenfeld, et 17 groupes échappant à ces deux tendances. Ces 17 groupes représentent tout de même les deux tiers du corpus pour lequel des interventions d'enseignant sont enregistrées, ce qui est très conséquent. Ceci révèle les limites des modèles normatifs en particulier lorsque l'on cherche à décrire le travail effectif des élèves en classe. Ce modèle nous a toutefois permis de mettre en évidence toute la diversité et toute la contingence que peuvent présenter les processus de résolution des élèves en classe.

Pour compléter cette partie, nous remarquons qu'un type de processus identifié par Schoenfeld (1985) ne semble pas apparaître dans nos analyses. C'est ce que nous explicitons dans la section suivante.

1.5.3 Un type de processus de résolution de problème absent

Schoenfeld (1985) a mis en évidence un type de processus de résolution de problème qu'il a appelé « wild goose chase » et qu'il décrit de la manière suivante « The students [...] embarked on a series of computations without considering their utility and failed to curtail those explorations when (to the outside observer) it became clear they were on a wild goose chase. » (p. 316) Une opérationnalisation de ce type de processus est proposée par Rott et al (2021):

A process is considered by us to be a “wild goose chase”, if it consists of only *Exploration* or *Analysis & Exploration* episodes, whereas processes that are not of this type contain *planning* and/or *verifying* activities (only considering content-related episode types).

Aucun des groupes de notre corpus ne peut être a priori classé dans ce type. À première vue, ce résultat peut sembler surprenant puisque notre corpus, composé de 33 groupes répartis en 6 classes, représente un échantillon modeste mais qui nous semble suffisant pour observer la diversité des processus. Aussi, nous ne pensons pas qu'il y a aucun groupe de ce type dans nos données mais plutôt que la caractérisation proposée par Rott et al n'est pas opérationnelle pour les identifier parmi nos données. En effet, le fait que nos expérimentations aient lieu en classe avec des

interventions d'un enseignant qui gère la séance nous amène à penser que ce type d'élèves se manifeste par d'autres comportements. Nous faisons l'hypothèse que les enseignants de notre dispositif expérimental ont repéré ces élèves ou groupes d'élèves qui auraient pu avoir tendance à gaspiller leur temps sur des calculs sans tenir compte de leur utilité et à se perdre dans des fausses pistes et qu'ils sont intervenus auprès de ces groupes. Ainsi, ce seraient les interventions des enseignants qui viennent impacter le comportement des élèves et qui nous empêcheraient de repérer les processus susceptibles de caractériser ce profil « wild goose chase ». Ceci étant, si nous ne pouvons pas repérer ces groupes d'élèves, nous pouvons caractériser un autre type de processus. En effet, cinq groupes, 4PCJc14, 8PVDr8, 10CTBa10, 10CTBa12 et 10CTBa14, présentent des processus assez remarquables du point de vue du nombre important de connexions, presque toujours consécutives, entre une phase de planification-mise en œuvre et la régulation apportée par l'enseignant. Par exemple, pour le groupe 10CTBa14, la description permise par notre modèle montre l'enchaînement de 6 aller-retours entre une phase de planification-mise en œuvre et la régulation. Ces aller-retours sont consécutifs puisqu'ils correspondent aux enchaînements numérotés de 4 à 15. Nous enregistrons 5 aller-retours du même type pour le groupe 10CTBa12 (enchaînements numérotés de 2 à 11) et 4 pour les trois autres groupes.

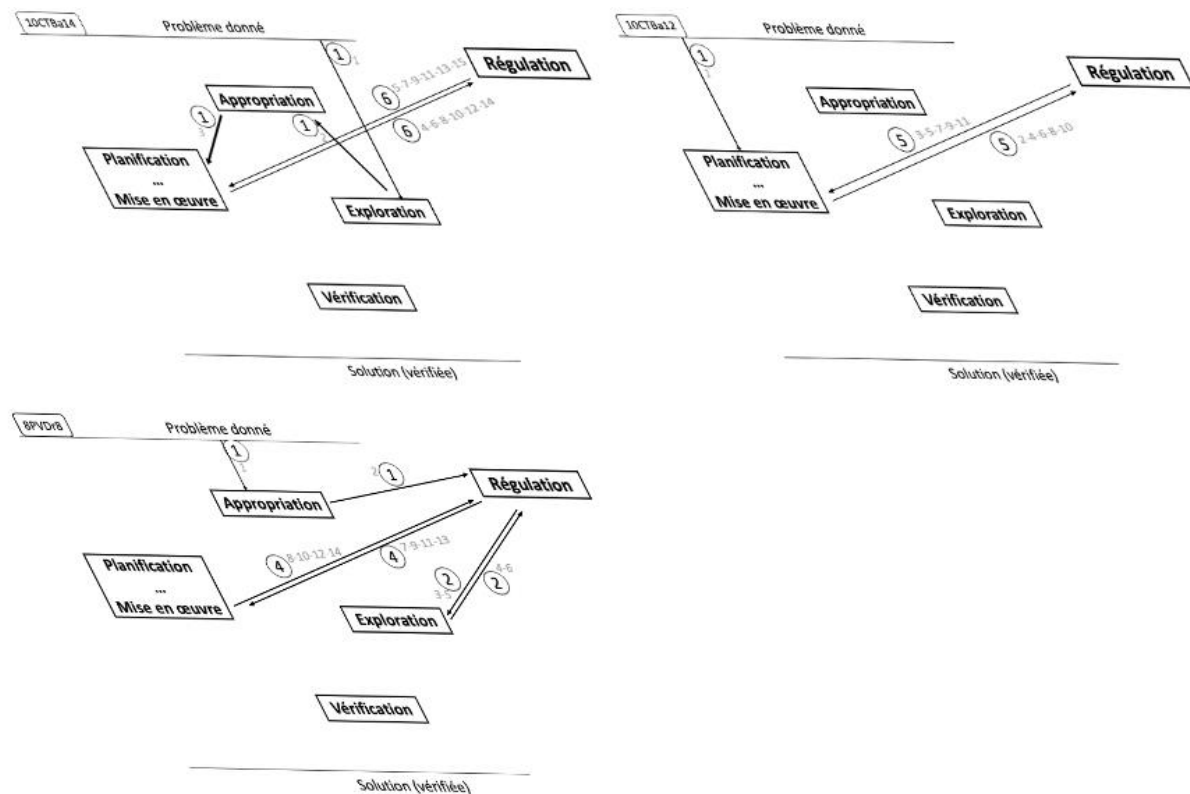
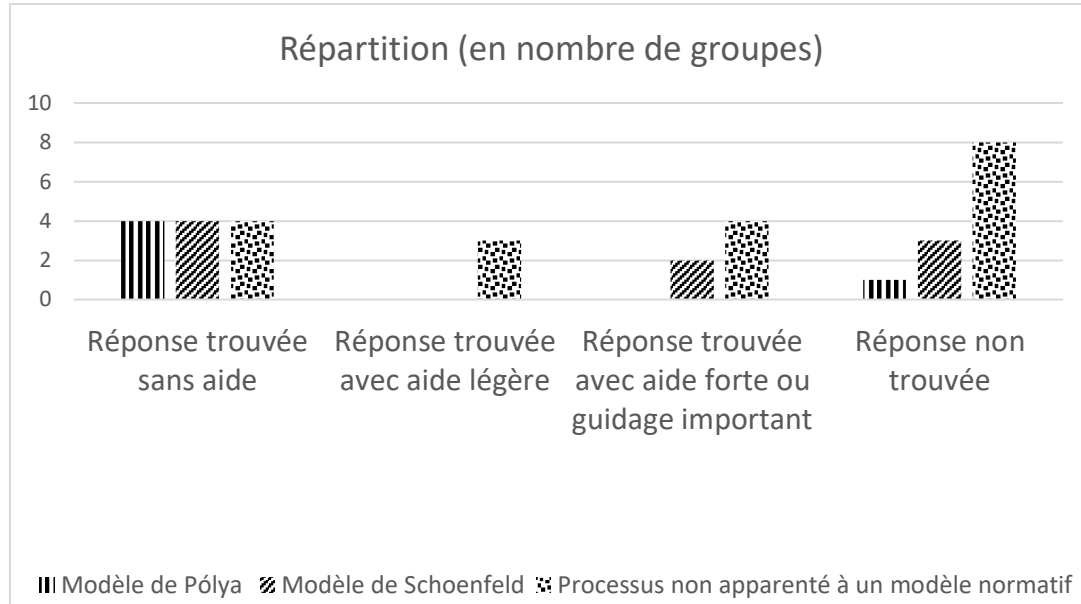


Figure 42. Groupes caractérisés par un nombre important d'aller-retours entre une phase de planification-mise en œuvre et de régulation

Ainsi, le point commun de ces 5 groupes tient en la présence importante de l'enseignant au travers d'un grand nombre de régulations. Il semble donc que ces groupes ont besoin d'être soutenus dans leur travail ce qui expliquerait que leur processus est rythmé par les nombreuses interventions de l'enseignant. Toutefois, le fait que les régulations soient en lien avec une phase de planification-mise en œuvre indique qu'après chaque régulation, les élèves sont en mesure de mettre en œuvre une piste qui a émergé de la régulation même si l'on ne sait pas, a priori, si la piste est proposée par l'enseignant, par les élèves ou si elle est co-construite. Cette mise en évidence est d'autant plus significative que ces cinq groupes appartiennent à trois classes différentes et donc trois enseignants différents.

1.6 Lien entre la réussite au problème et le type de modèle

Dans cette section, nous étudions la répartition des différents groupes selon le type de modèle auquel il se réfère et selon la réussite au problème.



Cette répartition indique que quatre groupes sur les cinq dont le processus s'apparente au modèle de Pólya ont résolu le problème et, qui plus est, sans aide. De plus, ces quatre groupes figurent parmi ceux qui ont trouvé la réponse dans le temps le plus court (de 1 à 15 minutes) comparativement aux autres groupes qui ont trouvé dans un temps compris entre 20 et 30 minutes. Ces indicateurs laissent penser que le problème a pu leur sembler plus simple. Ceci confirme que le modèle de Pólya est plus adapté pour rendre compte du travail des groupes pour lesquels le problème n'a pas offert une grande résistance.

Parmi les groupes qui ne sont pas parvenus à résoudre le problème c'est-à-dire ceux pour lesquels la résistance a été suffisamment forte, nous remarquons que les processus non apparentés à un modèle normatif dominant largement (12 groupes sur 18).

1.7 Conclusion

Dans ce premier niveau d'analyse relatif au niveau macroscopique, nous avons découpé le travail des élèves en différents épisodes. Nous avons retenu les épisodes inclus dans l'outil d'analyse original développé par Schoenfeld (1985) à savoir : *lecture, appropriation, exploration, planification/mise en œuvre, vérification* et *transition*. Nous avons complété ces épisodes par ceux proposés par Rott (2011, 2012b) : *écriture* et *digression*. Enfin, l'originalité de nos données expérimentales nous a conduit à introduire un nouvel épisode appelé *régulation* pour prendre en compte les interventions possibles des enseignants. Ce découpage nous semblait être une manière intéressante et prometteuse de caractériser les démarches des élèves lorsqu'ils résolvent des problèmes. Les analyses que nous avons pu faire de ce découpage viennent le confirmer.

En effet, après avoir fait ressortir certaines régularités qui sont davantage des effets des conditions expérimentales ou liés au contrat didactique que des caractéristiques propres aux élèves, nous avons cherché à mettre en comparaison ces différents groupes. Un premier élément qui a suscité notre intérêt tient aux épisodes de *digression*. La richesse de nos analyses descriptives nous a permis de

quantifier les phénomènes de digression selon trois indicateurs : le nombre d'épisodes de digression, l'apparition du premier épisode de digression et la durée totale passée dans des épisodes de digression. Nous avons pu remarquer que, de manière un peu surprenante, les groupes de 4P sont ceux qui présentent en moyenne les meilleures tendances pour chacun des indicateurs. De plus, les écarts mesurés entre le nombre d'épisodes de digression comme le temps passé à digresser de certains groupes nous ont interpellé et amené à nous intéresser au rythme de la recherche des élèves.

Pour cela, nous avons défini l'avancée propre du travail des élèves, en mettant en évidence les moments durant lesquels les élèves travaillent effectivement, seul ou en groupe, sur le problème qu'ils ont à résoudre. Dans notre analyse descriptive en épisodes, cette avancée propre est représentée par les épisodes : *appropriation, planification, mise en œuvre, exploration, vérification, lecture et écriture*. Nous avons ainsi fusionné tous ces épisodes pour faire ressortir la manière dont les groupes d'élèves avancent dans leur travail. Nous avons alors quantifié cette avancée propre du travail des élèves selon deux indicateurs : la proportion de temps qu'elle représente et le nombre de séries qui la caractérise. Là encore, pour chacun de ces deux indicateurs, les écarts sont conséquents voire spectaculaires. De plus, nous avons montré que la plupart des groupes d'élèves dont l'avancée propre du travail présente le plus petit nombre de séries sont également ceux ayant la meilleure proportion et tous parviennent à résoudre le problème en travaillant de manière presque continue et sur la majeure partie du temps consacré à la résolution du problème. De la même façon, la plupart des groupes dont l'avancée propre du travail présente le plus grand nombre de séries sont aussi ceux qui passent la plus faible proportion de temps à l'avancée propre et aucun ne parvient à résoudre le problème. Cela met en évidence une deuxième catégorie d'élèves pour laquelle la recherche est plus chaotique, très hachée et avec beaucoup de gaspillage de temps puisque seulement la moitié du temps imparti à la résolution du problème est exploitée.

Après ces considérations quantitatives, nous avons mené une analyse plus qualitative en nous intéressant à l'enchaînement de certains épisodes. Nous avons mis à l'épreuve de nos données expérimentales le modèle descriptif des processus de résolution de problèmes proposé par Rott et al (2021). Ce modèle est très opérationnel pour les groupes sans intervention de l'enseignant. Par contre, il ne permet pas de modéliser le travail des autres, où l'enseignant est intervenu. Cela nous a amené à enrichir le modèle de Rott et al (2021), présenté en deux dimensions, par l'ajout d'une troisième dimension connectée avec l'ensemble des phases du modèle initial. L'opérationnalisation de ce modèle enrichi permet de faire ressortir trois types de processus numériquement inégalement répartis : les processus dits linéaires (au sens de Pólya), les processus dits cycliques (au sens de Schoenfeld) et les processus plus dynamiques dans la mesure où le parcours du modèle ne présente pas de régularité. Ce dernier type est celui le plus largement représenté ce qui montre que les modèles normatifs utilisés pour l'enseignement¹⁷ sont en réel décalage avec la contingence observée en classe.

Enfin, nous avons pu mettre en évidence que certains processus sont marqués par une présence forte de la part de l'enseignant. Nous avons vu que cette présence forte avait l'avantage de permettre aux élèves d'avoir une bonne proportion de l'avancée propre de leur travail donc de rester dans la recherche du problème. Ceci étant, notre modèle enrichi pointe que ces régulations sont suivies essentiellement pour ces groupes par une phase de mise en œuvre. Ceci nous interroge d'une part sur la qualité et le contenu des régulations et d'autre part sur la part de recherche qui est laissée effectivement aux élèves. Autrement dit, si ces élèves restent dans le travail, quelle est la nature effective de ce travail, recherche du problème à leur initiative ou application des idées de l'enseignant ?

¹⁷ À titre d'exemple, à l'heure où nous écrivons cette note, c'est le modèle linéaire de Pólya qui sert encore de base aux Moyens d'Enseignement Romands tant pour le primaire que pour le secondaire.

Passons maintenant à un autre point de vue plus microscopique du processus de résolution de problèmes mis en œuvre par les élèves au travers des heuristiques.

2. Point de vue microscopique : les heuristiques

2.1 Mise en forme des analyses

Comme nous l'avons indiqué dans la partie 3.2 du chapitre 3, nous avons codé les heuristiques à partir de la liste que nous avons enrichie. Les résultats de l'analyse des 17 groupes se présentent sous la forme d'un tableau contenant le repère temporel, la description de l'action observée ou de la verbalisation entendue et l'intitulé de l'heuristique.

L'ensemble de ces codages se trouvent en Annexe 6. Le Tableau 23 en est une illustration pour le groupe 4PSJc12 :

	4PSJc12	
Time-code	Action	Heuristique
04:30	Solenne dessine 15 cartes vierges puis les complète en dessinant, de manière alternée, un carré et un triangle.	Faire un essai
06:35	Elle efface un carré et dessine un triangle à la place.	Faire un essai
08:31	Solenne propose et réalise un autre essai en répétant le motif 3 triangles et 1 carré.	Faire un essai
10:57	Nouvel essai basé sur le motif 2 triangles et 1 carré initié mais arrêté rapidement.	Faire un essai
11:20	Nouvel essai basé sur le motif 2 triangles et 2 carrés.	Faire un essai
12:38	Nouvel essai basé sur le motif 2 triangles et 1 carré.	Faire un essai
14:18	Nouvel essai juste évoqué basé sur le motif 3 carrés et 2 triangles.	<i>Faire un essai</i>
15:00	L'enseignante propose d' « avancer comme ça en essayant ».	<i>Faire un essai</i>
15:03	Solenne émet l'idée de passer par un calcul "Moi je barre le dessin et on va se mettre au calcul"	Changer de registre de représentation sémiotique
15:31	Elle tente de compter de 4 en 4 jusqu'à 49 à l'aide de ses deux mains.	Faire un essai - Explorer des cas particuliers
16:52	Ils comptent de 4 en 4 jusqu'à 40 puis continuent de 3 en 3.	<i>Faire un essai</i>
19:50	Ils calculent le résultat de 49-12 puis, partant de cette réponse, surcomptent de 3 en 3.	Faire un essai
21:42	Nouvel essai en comptant de 4 en 4 puis de 3 en 3 à partir de 36.	Faire un essai
23:50	Solenne propose d'aller jusqu'à 20 en comptant de 4 en 4 puis de continuer en comptant de 3 en 3.	<i>Faire un essai</i>
23:57	Même idée évoquée mais jusqu'à 30 au lieu de 20.	<i>Faire un essai</i>
24:03	Nouvel essai en comptant de 4 en 4 jusqu'à 20 puis ils ajoutent 4 triangles puis 1 carré puis ils se perdent.	Faire un essai
24:55	Darell propose de représenter les triangles par des ronds et les carrés par des barres.	<i>Changer de registre de représentation sémiotique</i>
25:15	Solenne pense à utiliser des jetons.	Introduire des outils ou du matériel
28:00	Nouvel essai commencé avec des jetons bleus (correspondants aux carrés) puis des jetons rouges (pour les triangles) à partir de 36.	Faire un essai
30:32	Nouvel essai à partir d'une certaine quantité de jetons conservée mais sans que leur nombre ait été vraiment discuté.	Faire un essai
31:02	Darell propose d'enlever un jeton rouge et de mettre un jeton bleu à la place.	Faire un essai
35:00	Solenne propose: "on pioche 15 au bol" mais en fait elle repart sur les bases de l'essai précédemment invalidé et rajoute un jeton rouge et un jeton bleu.	Faire un essai
35:55	Ils remplacent un jeton bleu par un jeton rouge.	Faire un essai
37:11	Ils pensent échanger encore un jeton bleu par un jeton rouge mais en réalité ils ont juste enlever un jeton bleu.	Faire un essai
38:50	Ils remplacent un jeton bleu par un jeton rouge et rajoutent un jeton rouge pour avoir 15 figures.	Faire un essai
41:04	Ils remplacent un jeton bleu par un jeton rouge.	Faire un essai
41:38	Ils remplacent un jeton bleu par un jeton rouge.	Faire un essai

Tableau 23. Résultats du codage en heuristiques pour le groupe 4PSJc12

Nous avons joué sur la mise en forme du tableau pour faire apparaître les différents cas d'heuristiques effectivement mises en œuvre par les élèves ou seulement évoquées par certains

élèves ou par l'enseignant. Ainsi, les lignes sur fond blanc représentent les heuristiques repérées dans le travail des élèves, tandis que les lignes sur fond vert correspondent à celles proposées par l'enseignant. Les heuristiques dont l'intitulé est écrit en police droite aligné à gauche dans la cellule sont celles qui ont été effectivement mises en œuvre. Celles dont l'intitulé est en police italique et aligné à droite dans la cellule ont été évoquées seulement mais non réalisées effectivement. Par exemple, à 12:38 les élèves réalisent un essai basé sur la répétition du motif 2 triangles et 1 carré. Cet essai est testé et invalidé. Alors que l'essai dont il est question à 14:18 a seulement été évoqué mais non testé par la suite.

Il est arrivé, à plusieurs reprises, que différentes heuristiques soient codées pour le même repère temporel. C'est par exemple le cas à l'instant 15:31 pour le groupe 4PSJc12, où non seulement Solenne réalise un autre essai (heuristique : Faire un essai) et cet essai est un cas particulier, son comptage de 4 en 4 indiquant qu'elle ne considère que des figures à 4 côtés (heuristique : explorer des cas particuliers).

Pour interpréter le résultat de ces analyses, nous mobilisons, dans un premier temps, les processus mis en évidence par Julio (Voir à ce sujet la partie 2.2.3 du chapitre 2). En particulier, le processus d'opérationnalisation nous intéresse particulièrement puisque c'est « celui qui permet le passage à l'action, qu'il s'agisse d'une action effective (commencer des calculs, faire un dessin, tâtonner...) ou d'une action mentale (faire des déductions, élaborer un plan, ...) ». (Ibid., p. 50) En cela, nous faisons l'hypothèse que les heuristiques identifiées sont des traces visibles du processus d'opérationnalisation de la représentation. Pour prendre une métaphore, les heuristiques sont comme des carottes qui nous permettent de sonder, à certains instants, la représentation que se construisent les élèves au cours de leur résolution. Le graphique de la Figure 43 permet de visualiser cette idée pour le groupe 4PSJc12. Les petits segments verticaux situés au-dessus de l'axe temporel représentent les heuristiques dont les intitulés sont rappelés de manière condensée sur le graphique. Notons que les traits verticaux pleins correspondent aux heuristiques effectivement mises en œuvre, les traits en pointillés celles qui sont seulement évoquées. La couleur violette est attribuée aux heuristiques 'élèves' tandis que la couleur verte est réservée aux heuristiques qui émanent de l'enseignant.

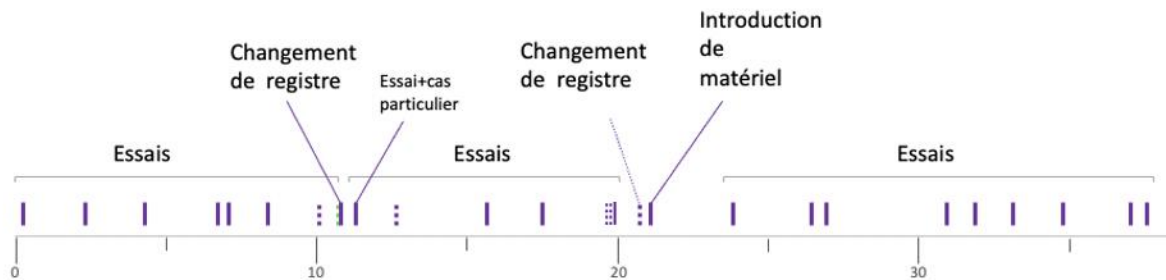


Figure 43. Représentation graphique des différentes heuristiques sur un axe temporel (groupe 4PSJc12)

Ce graphique permet ainsi de situer chaque heuristique dans la chronologie de la résolution.

Selon Julio, « le fait d'agir a de nombreuses répercussions sur la représentation et il est, vraisemblablement, l'un des moteurs essentiels de son évolution. » (Ibid., p. 54) L'évolution de la représentation peut se traduire par le renforcement de la structuration ou par « la mise en place d'une nouvelle structuration mais aussi la mobilisation de nouvelles connaissances » (Ibid., p. 55). Ces idées se traduisent par des continuités dans le cas de renforcement de la structuration ou par des ruptures lorsqu'il y a mise en place d'une nouvelle structuration ou lorsque de nouvelles connaissances sont investies. Nous choisissons de matérialiser graphiquement chacune de ces continuités par un trait horizontal violet reliant les heuristiques qui permettent le renforcement d'une certaine structuration de la représentation comme le montre le graphique suivant (Figure 44)

pour le groupe 4PSJc12. Une heuristique non reliée ou la première heuristique de chaque nouveau renforcement indique une rupture.

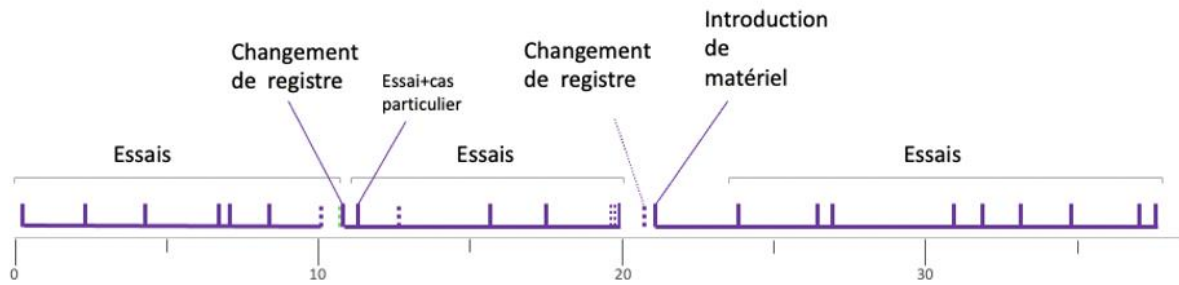


Figure 44. Mise en évidence du lien entre certaines heuristiques (groupe 4PSJc12)

Ainsi, sur cet exemple, les sept premiers essais ont tous la particularité d'être caractérisés par la répétition d'un certain motif (n triangles et p carrés) correspondant à une certaine structuration de la représentation symbolisée par le trait qui les relie. La 8^e heuristique (changement de registre) marque une rupture puisqu'elle induit une nouvelle structuration de la représentation à partir d'un nouveau registre de représentation sémiotique (le registre arithmétique). Cette nouvelle structuration est renforcée par la série des sept essais suivants (heuristiques 9 à 15) qui sont ainsi tous reliés entre eux. Ensuite, un autre registre est évoqué (heuristique 16 : changement de registre) induisant une nouvelle structuration donc une rupture. Mais cette nouvelle structuration n'est pas renforcée par d'autres heuristiques, elle n'est donc pas reliée de manière directe aux autres heuristiques. Enfin, l'introduction de jetons à l'initiative des élèves (heuristique 17 : introduction de matériel) induit une nouvelle structuration de la représentation marquant ainsi une nouvelle rupture. Les neuf derniers essais sont réalisés à l'aide de ces jetons et mettent en évidence le renforcement de cette structuration de la représentation d'où le trait qui les relie.

Pour aller plus loin dans l'exploitation de cette analyse, nous nous appuyons sur Newell et Simon (1972) : « We postulate that problem solving takes place by search in a problem space. This principle is a major invariant of problem solving behavior that holds across tasks and across subjects. » (p. 809) Le concept d'espace du problème (appelé aussi espace de recherche) a été développé et précisé pour les problèmes dits de transformation d'états (Voir 2.2.1). Rappelons que Richard (2004) définit l'*espace effectif* comme l'ensemble des états accessibles en appliquant les contraintes réelles du problème ; tandis que Poitrenaud (1998) caractérise l'*espace sémantique* comme l'ensemble des états accessibles à partir de l'interprétation des contraintes du problème par le sujet lui-même. Cette interprétation des contraintes génère des manières d'agir différentes. En s'inspirant de ces aspects, nous identifions quatre espaces sémantiques différents relativement à la résolution réalisée par le groupe 4PSJc12. Ces quatre espaces sémantiques marquent les différentes ruptures observées comme le montre la Figure 45 dans laquelle ces différents espaces sémantiques sont entourés.

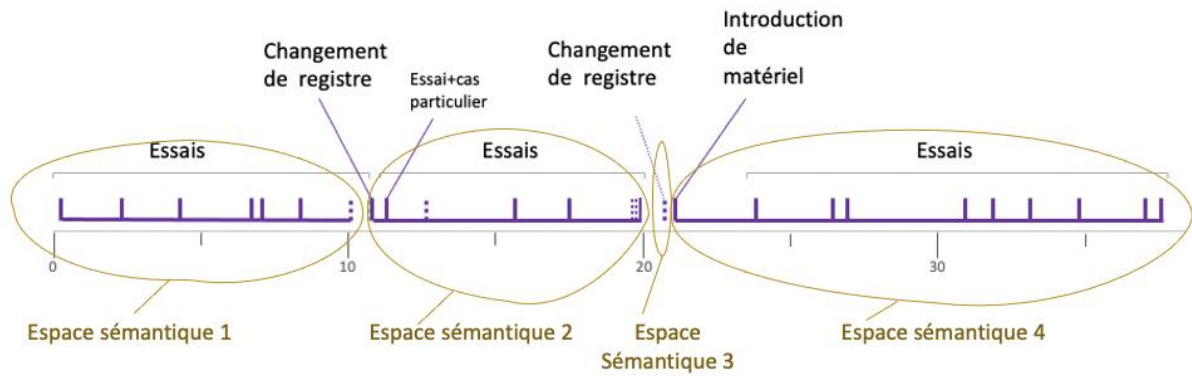


Figure 45. Mise en évidence des espaces sémantiques (groupe 4PSJc12)

L'espace sémantique 1 est caractérisé par une contrainte respectée par les élèves que nous pourrions formuler ainsi : la solution doit être constituée d'un motif qui se répète. Les différents essais réalisés constituent une certaine exploration de cet espace sémantique. Puis la mobilisation du registre arithmétique crée une rupture et ouvre un autre espace sémantique. En effet, la contrainte n'est plus respectée (ni même évoquée) et la mobilisation d'un nouveau registre de représentation sémiotique génère de nouvelles propriétés à disposition des élèves. Cet espace sémantique est exploré au travers de 7 essais réalisés ou évoqués. Ensuite, le registre iconique est évoqué et vient ouvrir un autre espace sémantique, le troisième, qui n'est pas du tout exploré. Enfin, l'introduction de matériel crée une rupture supplémentaire et les nouvelles propriétés que ce matériel induit caractérise un nouvel espace sémantique. Ce dernier espace sémantique est exploré par les neuf derniers essais et de manière efficace puisque le tout dernier essai correspond à la solution du problème.

Relativement au groupe pris en exemple, chaque nouvelle structuration et son éventuel renforcement constitue un espace sémantique. Ces concepts semblent se superposer. L'analyse du travail de certains autres groupes met en évidence une des plus-values de mobiliser le concept d'espace sémantique. Prenons par exemple le groupe 4PCJc10 (Figure 46). Nous identifions trois espaces sémantiques. Le 1^{er} est caractérisé par une recherche à l'aide d'essais dessinés (registre iconique), aucune contrainte n'étant ajoutée par les élèves. L'espace sémantique 2 est ouvert par l'enseignante ce qui induit une idée chez les élèves (heuristique : travailler en avançant). Cette idée est invalidée et abandonnée, ce qui crée une nouvelle rupture et l'ouverture d'un autre espace qui présente les mêmes caractéristiques que l'espace sémantique 1 : même registre, pas de contrainte supplémentaire.

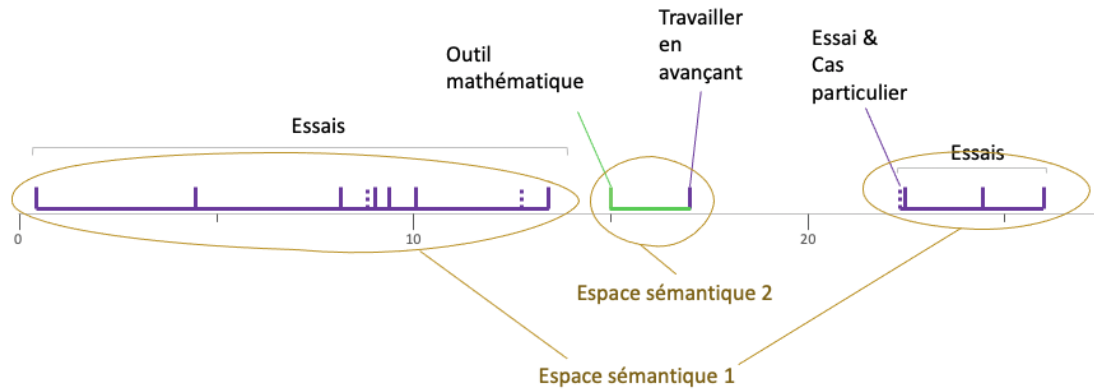


Figure 46. Mise en évidence des espaces sémantiques (groupe 4PCJc10)

Ainsi, considérer les espaces sémantiques permet de mettre en lien ceux qui présentent les mêmes caractéristiques. Ce lien sera explicité et mis en évidence plus bas à l'aide d'une représentation graphique (voir Figure 47, Figure 48, Figure 49).

À la lumière de l'analyse de ces groupes, nous proposons une définition provisoire qui étend le concept d'espace sémantique à des problèmes de mathématiques qui ne sont pas que des problèmes de transformations d'états : espace de recherche caractérisé par l'interprétation des contraintes du problème faite par l'élève ou par les registres mobilisés. Un espace sémantique crée un empan d'exploration plus ou moins étendu. L'empan d'exploration minimal correspond à un espace vide comme c'est le cas de l'espace sémantique 3 de la Figure 45. Soulignons également que les espaces sémantiques présentent des propriétés différentes (registres de représentation sémiotique, contraintes) ce qui facilite leur identification de manière très opérationnelle, soit par la continuité de ces propriétés, soit par les ruptures qui peuvent se produire. Une idée forte de l'espace sémantique au sens de Poitrenaud est qu'il peut être plus restreint que l'espace effectif. Cette idée s'étend aux problèmes de notre dispositif expérimental. En effet, dans le problème du *Jeu de cartes*, une contrainte telle que celle évoquée plus haut (la solution doit être constituée d'un motif qui se répète) peut limiter l'accès à la solution puisque non seulement le nombre de compositions possibles dans l'alternance des figures se trouve réduit mais cette contrainte peut peser aussi sur la manière d'ajuster qui s'en trouve limitée. Nous parlerons ainsi d'*espace sémantique limitant* lorsque l'interprétation des données du problème par l'élève ou les propriétés mobilisées par l'élève constituent des contraintes fortes qui vont limiter l'accès à la solution.

Dans le même ordre d'idée, nous parlerons d'*espace sémantique bloquant* lorsque l'interprétation des données du problème par l'élève ou les propriétés qu'il mobilise constituent des contraintes si fortes qu'elles bloquent l'accès à la solution. Dans le problème *Ballon d'essai*, considérer que tous les ballons coutent le même prix est un exemple d'espace sémantique bloquant puisque cette contrainte n'est pas compatible avec la solution.

Pour visualiser ces différents espaces sémantiques, nous choisissons de les représenter sur des lignes différentes afin de marquer les sauts qui symbolisent les ruptures dans la résolution du problème. L'axe temporel marque la distinction entre les espaces sémantiques limitant ou bloquant (situés sous l'axe) et les espaces sémantiques qui présentent d'autres caractéristiques, non limitantes et non bloquantes (situés au-dessus de l'axe). Deux nuances de gris délimitent les espaces sémantiques bloquant (gris très foncé) et limitant (gris plus clair) sous l'axe temporel. Le blanc et un gris encore plus clair délimitent les différents espaces sémantiques qui peuvent être adéquats au-dessus de l'axe temporel. Précisons qu'une même ligne représente des contraintes ou des propriétés identiques.

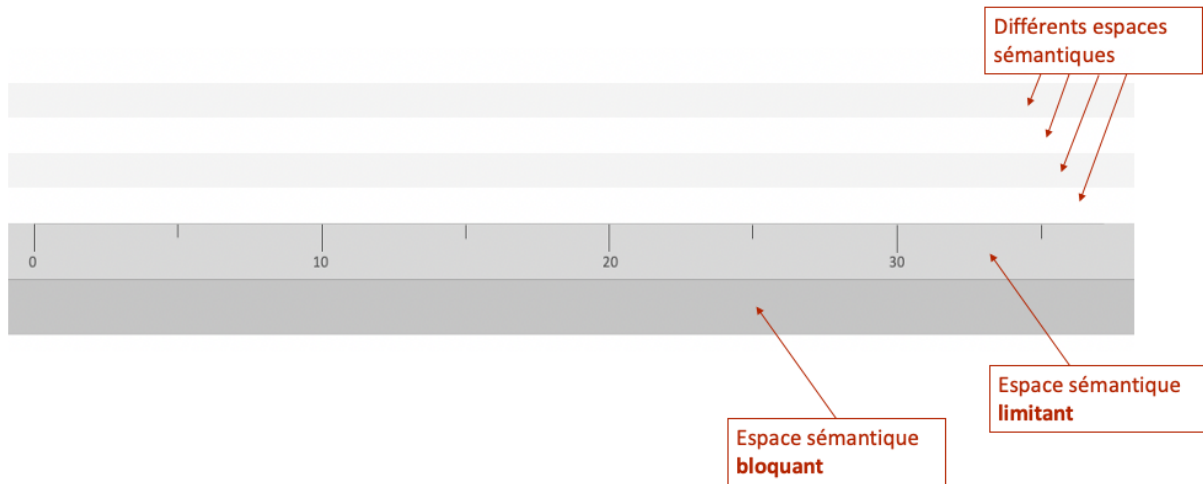


Figure 47. Représentation graphique des différents types d'espaces sémantiques

Finalement, la Figure 48 suivante montre la représentation graphique de la démarche de résolution mise en œuvre par le groupe 4PSJc12 :

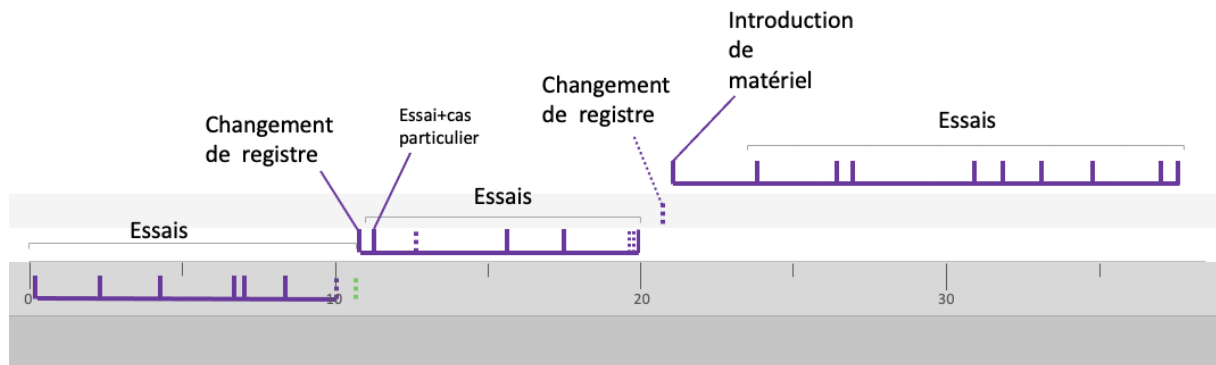


Figure 48. Démarche de résolution pour le groupe 4PSJc12

La démarche de résolution de ce groupe d'élèves se fait au travers de 4 espaces sémantiques qui peuvent être explorés (espaces sémantiques 1, 2 et 4) ou non (espace sémantique 3)

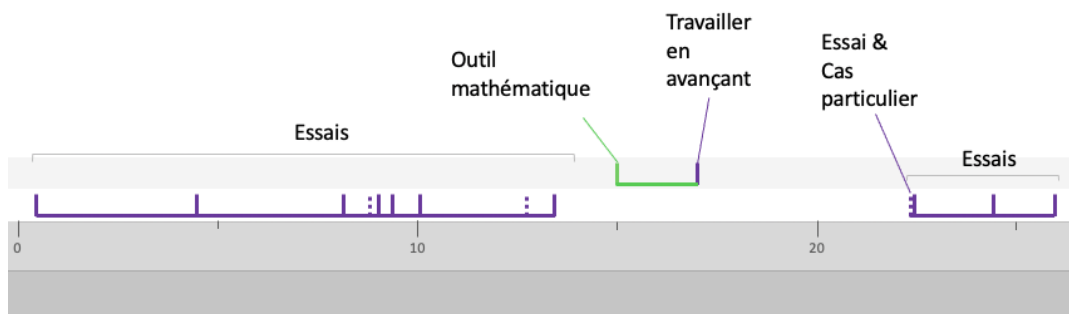


Figure 49. Démarche de résolution pour le groupe 4PCJc10

Pour le groupe 4PCJc10, nous avons plus haut que le 3^e espace sémantique ouvert et exploré correspond au 1^{er} d'où la représentation de cet espace sémantique sur la même ligne que le 1^{er} sur le graphique ci-dessus.

Nous avons analysé ainsi toutes les démarches de résolution, mises en œuvre par les 17 groupes, en termes d'espaces sémantiques. Cette analyse nous a permis d'élargir la définition provisoire d'un espace sémantique proposée plus haut. En effet, pour opérationnaliser ce concept d'espace

sémantique, nous avons dû chercher à identifier les continuités et les ruptures entre les différents espaces sémantiques ouverts par les élèves. Ces continuités et ces ruptures peuvent concerner les contraintes que les élèves respectent. Or, ces contraintes peuvent être inhérentes à l'interprétation des données du problème (par exemple : l'expression « tirer au hasard » est interprétée par une élève comme tirer les yeux fermés), mais elles peuvent être également de l'ordre des croyances des élèves sur la résolution de problèmes (on doit résoudre le problème en faisant une opération, on doit utiliser tous les nombres de l'énoncé). Les continuités et les ruptures identifiées peuvent concerner également les registres de représentation sémiotique utilisés par les élèves ou les connaissances mathématiques (notions mathématiques, types de raisonnement, problèmes déjà résolus). La liste n'est probablement pas exhaustive. **Un espace sémantique est donc un espace de recherche caractérisé par des contraintes plus ou moins fortes (apportées par l'interprétation des données du problème, les croyances) et/ou des registres de représentation sémiotique et/ou des connaissances mathématiques investies par les élèves.** La partie suivante présente la synthèse des résultats obtenus.

2.2 Résultats des analyses en termes d'espaces sémantiques

L'analyse des démarches de résolution des élèves en termes d'espaces sémantiques fait ressortir des différences significatives selon deux critères différents :

- le niveau d'exploration des espaces sémantiques, selon qu'il l'est par de nombreuses heuristiques ou seulement quelques-unes,
- le nombre d'espaces sémantiques ouverts.

À partir du croisement de ces deux critères, nous pouvons dégager trois profils d'élèves que nous nommons : explorateur, papillonneur et prospecteur, et que nous allons à présent caractériser.

2.2.1 Le profil explorateur

Le profil explorateur, dont le groupe 4PSJc12 (Figure 48) est représentatif, se caractérise par un nombre d'espaces sémantiques ouverts relativement faible, de l'ordre de 1 à 3. Dans le même temps, chacun de ces espaces est exploré à l'aide de plusieurs heuristiques. Par exemple, pour le groupe 4PSJc12 chaque espace sémantique est exploré par plus de 6 heuristiques. Les Figure 50 et Figure 51 présentent la démarche de deux autres groupes explorateurs.

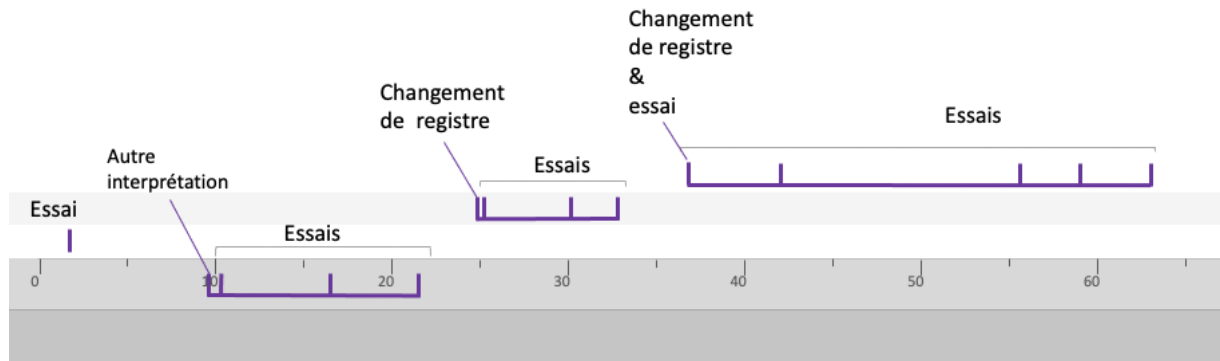


Figure 50. Démarche de résolution pour le groupe 4PCJc9

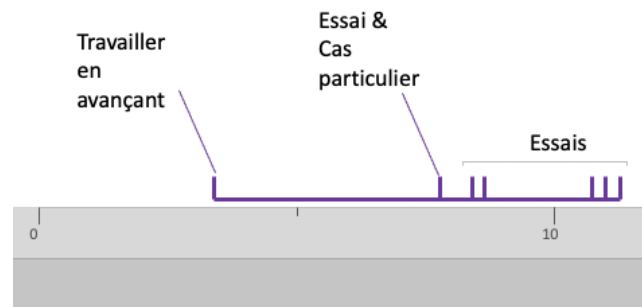


Figure 51. Démarche de résolution pour le groupe 8PSDr3

Les explorateurs se montrent persistants puisqu'ils recourent à plusieurs heuristiques avant de trouver la réponse (groupe 8PSDr3) ou d'envisager un autre espace sémantique (groupe 4PCJc9). Pour ces trois groupes comme pour les groupes 10LSBa14 et 8PVDr2, la recherche n'est pas impactée par l'enseignant c'est-à-dire que les espaces sémantiques ouverts le sont à l'initiative des élèves. Ce n'est pas toujours le cas puisque nous voyons bien sur la Figure 52, qui représente la démarche du groupe 10CTBa7, que l'espace sémantique est ouvert par l'enseignant. Dans la suite de la résolution, c'est cet espace sémantique qui est exploré par les élèves. Puis, ne trouvant pas la solution au problème, les élèves reviennent dans l'espace sémantique bloquant initial. C'est à nouveau l'enseignant qui ramène les élèves dans l'espace sémantique adéquat précédemment envisagé et qui, cette fois, va être exploré à l'aide de nombreuses heuristiques.

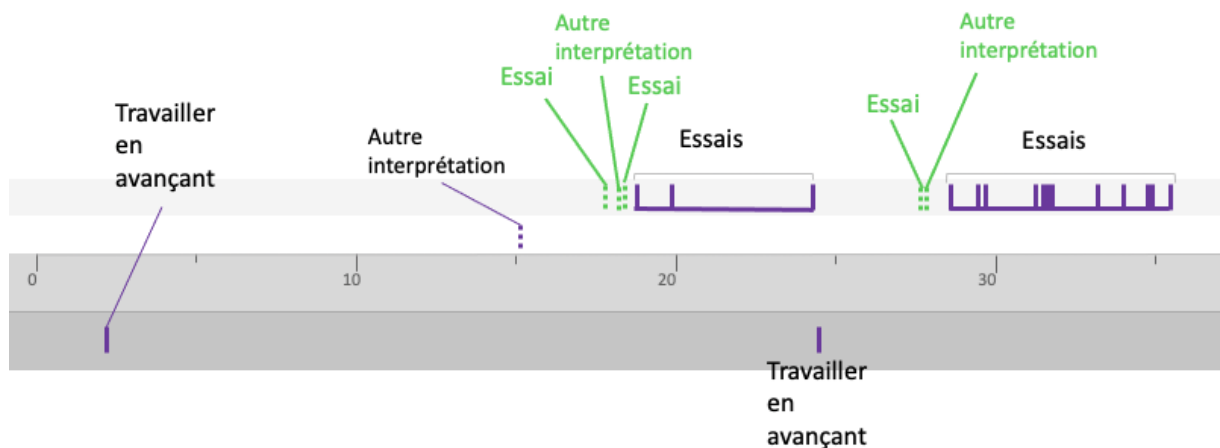


Figure 52. Démarche de résolution pour le groupe 10CTBa7

À l'inverse, les explorateurs du groupe 4PCJc10 (Figure 53) persistent dans l'exploration du premier espace sémantique ouvert. L'enseignant les amène à envisager un autre espace sémantique qui sera

peu exploré puisque les élèves vont revenir dans leur espace sémantique initial pour en continuer l'exploration qui sera d'ailleurs couronnée de succès.

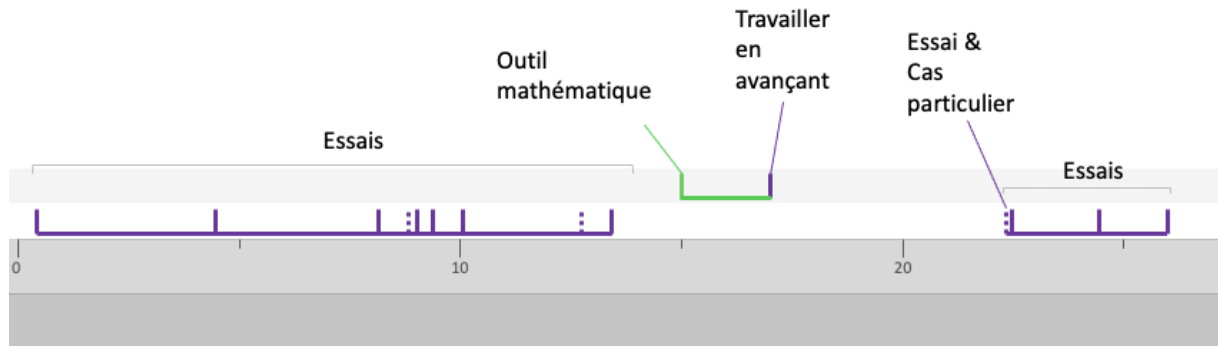


Figure 53. Démarche de résolution pour le groupe 4PCJc10

2.2.2 Le profil papillonneur

Les démarches des groupes 8PVDr7 et 10LSBa10 sont représentatives de ce profil. En effet, plusieurs espaces sémantiques sont ouverts, ce nombre pouvant monter jusqu'à 7, mais surtout, ce qui est très caractéristique de ce profil papillonneur est que chacun de ces espaces sémantiques n'est pas du tout exploré. Même si plusieurs heuristiques peuvent appartenir au même espace sémantique, nous remarquons qu'il n'y a pas de continuité temporelle entre celles-ci. Tout se passe comme si les papillonneurs envisageaient un espace sémantique puis en ouvraient un autre sans l'avoir exploré. Cette description pourrait paraître négative, néanmoins il est à noter que les papillonneurs parviennent à ouvrir de nombreux espaces sémantiques ce qui met en évidence une certaine flexibilité, une certaine capacité à imaginer différentes idées.

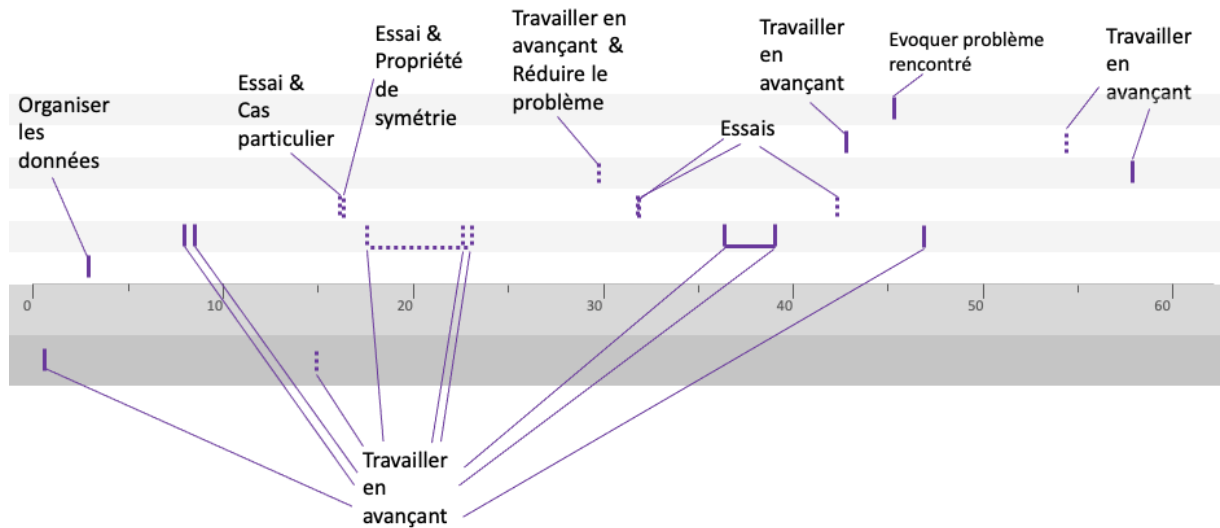


Figure 54. Démarche de résolution pour le groupe 8PVDr7

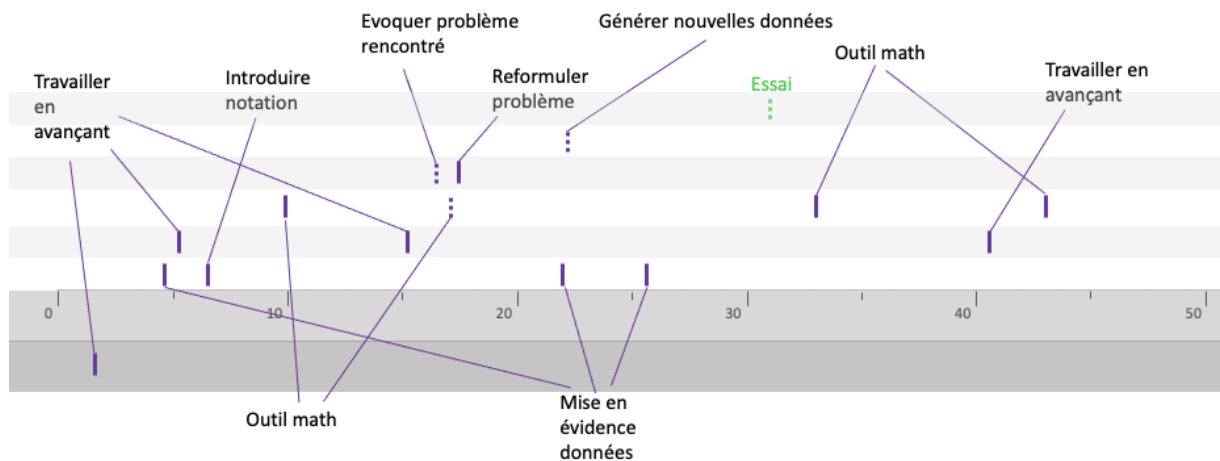


Figure 55. Démarche de résolution pour le groupe 10LSBa10

Si on s'intéresse au rôle de l'enseignant, nous remarquons (Figure 55) que durant la résolution de problèmes l'enseignant ouvre un espace sémantique qui n'est pas du tout exploré par les élèves. Les groupes 4PSJc10, 8PSDr10 et 10CTBa10 (Voir Annexe 7) présentent des caractéristiques similaires.

2.2.3 Le profil prospecteur

Ce profil apparaît comme une combinaison des deux profils précédents. En effet, les prospecteurs passent par une phase durant laquelle ils envisagent différents espaces sémantiques qu'ils n'explorent pas avant de se fixer sur un espace sémantique qu'ils vont explorer à l'aide de plusieurs heuristiques. Le groupe 10CTBa14 (Figure 56) est représentatif de ce type de démarche.

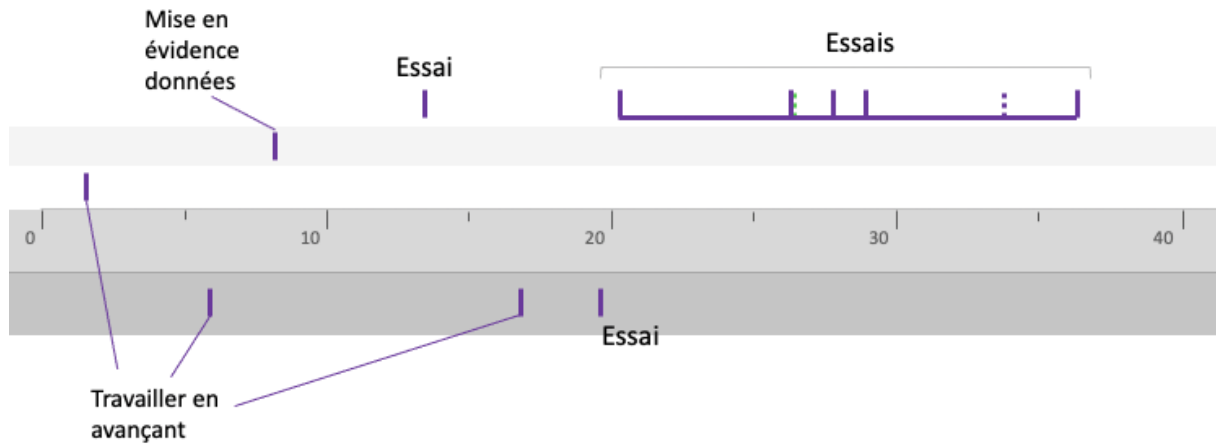


Figure 56. Démarche de résolution pour le groupe 10CTBa14

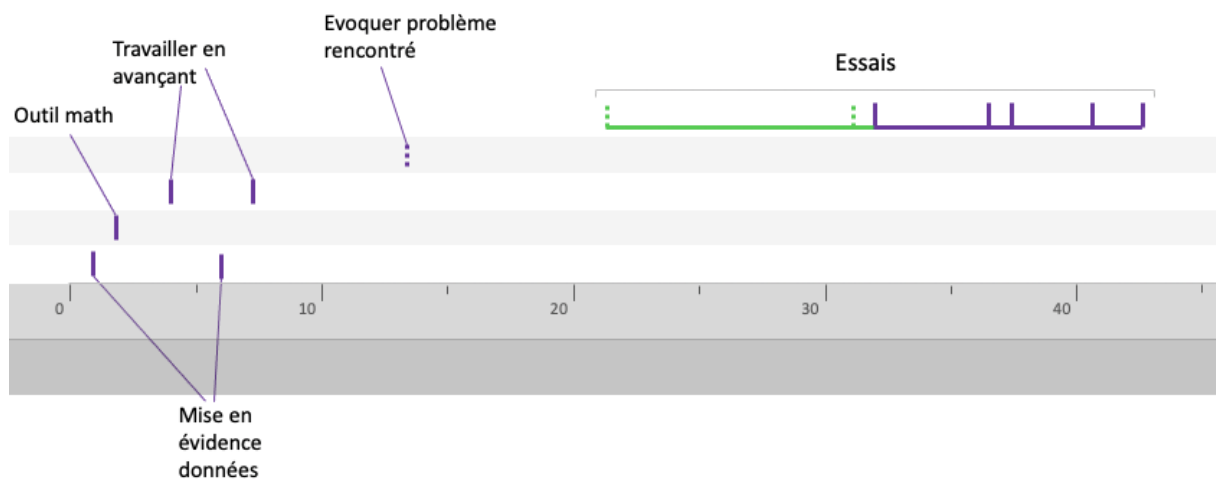


Figure 57. Démarche de résolution pour le groupe 10LSBa11

Quant au groupe 10LSBa11 (Figure 57), il nous permet d'illustrer que c'est l'enseignant qui ouvre l'espace sémantique qui sera exploré par les élèves au cours de leur résolution. Ce qui est très différent des groupes des papillonneurs évoqués plus haut qui n'explorent pas les espaces sémantiques ouverts par l'enseignant.

Pour représenter graphiquement ces différents profils, nous associons à chaque démarche de résolution un couple de nombres entiers. Le premier correspond au nombre d'espaces sémantiques ouverts au cours de la résolution de problèmes. Le deuxième correspond au nombre maximum d'heuristiques liées (c'est-à-dire reliées graphiquement par un trait horizontal). Par exemple, pour le groupe 4PCJc9 (Figure 50), nous considérons que 4 espaces sémantiques sont ouverts et que le nombre d'heuristiques est de 5 puisque les espaces sémantiques ont été explorés via respectivement 4 ; 4 et 5 heuristiques. Ainsi le couple correspondant à ce groupe est (4 ; 5). Autre exemple, pour le groupe 8PVDr7 (Figure 54), 7 espaces sémantiques ont été envisagés. Le nombre d'heuristiques liées est 2 puisqu'un des espaces sémantiques contient 2 heuristiques liées. Nous admettons que même si les élèves reviennent dans cet espace sémantique, l'heuristique n'est pas liée à la précédente. Ainsi, le couple (7 ; 2) est associé au groupe 8PVDr7. En représentant dans un repère orthonormé l'ensemble des 17 couples correspondant aux 17 groupes analysés nous obtenons la représentation graphique suivante :

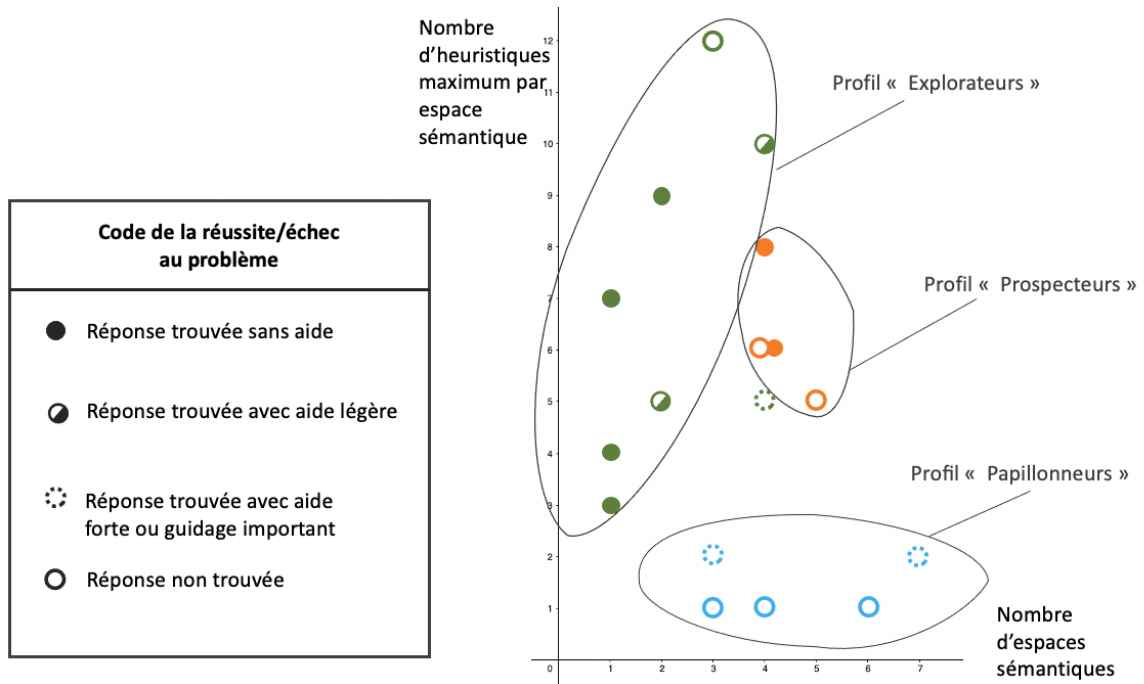


Figure 58. Positionnement des différents groupes selon le nombre d'espaces sémantiques ouverts, le nombre d'heuristiques maximum par espace sémantique et la réussite/échec au problème

Les points représentant les groupes « explorateurs » sont de couleur verte, la couleur orange symbolise les « prospecteurs » et la couleur bleue les « papillonneurs ». Ces trois profils se dessinent assez nettement sur le graphique par les 3 zones entourées. Cela permet de bien mettre en opposition les profils explorateur et papillonneur, alors que les prospecteurs se situent dans un entre-deux.

De plus, on voit que quatre groupes explorateurs trouvent la réponse sans aide, deux groupes avec aide légère, un autre avec aide forte et seulement un groupe ne trouve pas. Tandis que pour les papillonneurs, deux groupes trouvent avec un guidage important et les trois autres groupes ne trouvent pas. Les groupes prospecteurs sont répartis de manière équilibrée puisque deux groupes trouvent sans aide et deux groupes ne trouvent pas. Ainsi, les groupes qui résolvent le problème se retrouvent majoritairement dans le profil explorateur alors que ceux qui ne trouvent pas se retrouvent dans le profil papillonneur.

Une autre lecture peut être réalisée en marquant si les groupes d'élèves sont du primaire (10 groupes représentés par un point gris clair) ou du secondaire (7 groupes avec un point gris foncé), comme représenté sur le graphique suivant.

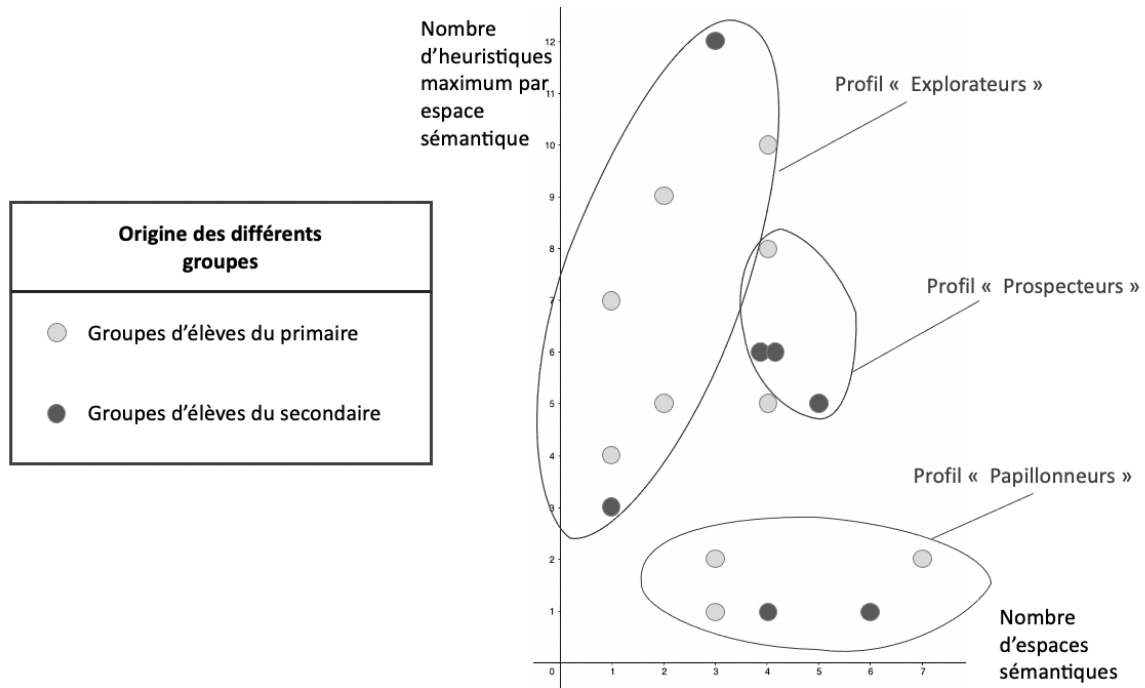


Figure 59. Positionnement des différents groupes selon le nombre d'espaces sémantiques ouverts, le nombre d'heuristiques maximum par espace sémantique et l'origine scolaire

Le profil papillonneur est clairement équilibré selon l'origine des différents groupes. Ce n'est pas le cas des deux autres profils puisque les groupes provenant du secondaire sont sur-représentés chez les prospecteurs (3 pour 1). À l'inverse, ce sont les groupes du primaire qui sont majoritaires chez les explorateurs (6 pour 2). Cette répartition déséquilibrée ne nous semble pas suffisamment marquée, du fait également des effectifs réduits, pour mettre en évidence une relation entre le profil et l'appartenance au primaire ou au secondaire des élèves. Nonobstant, cette hypothétique relation mériterait d'être investiguée sur des cohortes plus importantes.

Si l'on fait abstraction des profils, il ressort tout de même que les groupes du primaire sont plutôt rassemblés sur la gauche du graphique c'est-à-dire qu'ils n'ont pas tendance à ouvrir un grand nombre d'espaces sémantiques (4 tout au plus à une exception près). Quant aux groupes du secondaire, leur répartition principalement sur la partie basse du graphique semble indiquer qu'ils explorent un peu moins les espaces sémantiques ouverts relativement aux élèves du primaire.

Les élèves du primaire ont sans doute moins d'habitudes de recherche mais ils compensent par une plus grande persévérance dans les pistes qu'ils envisagent. Les élèves du secondaire semblent davantage à la recherche de la bonne manière de résoudre, c'est-à-dire la recherche de l'idée qui pourrait leur permettre de trouver la solution rapidement. Peut-être que cela met également en évidence un effet de contrat didactique, si on utilise la bonne méthode, le bon outil on trouve rapidement donc, à l'inverse, si on ne trouve pas rapidement c'est que ce n'est pas la bonne direction.

À la suite de ces analyses portant spécifiquement sur les heuristiques, nous allons examiner s'il semble exister une relation entre épisodes et heuristiques en tentant notamment d'interroger si les heuristiques jouent un rôle au niveau du changement d'épisodes.

2.3 Étude du lien entre épisodes et heuristiques

Nous étudions à présent la question du lien susceptible d'exister entre les heuristiques et les épisodes, en suivant deux pistes différentes. Dans la première, nous cherchons à voir si les heuristiques jouent un rôle au niveau du changement d'épisodes. Tandis que la deuxième vise plutôt

à chercher si les trois profils mis en évidence à partir de l'analyse heuristique de la partie précédente, se caractérisent aussi, et dans l'affirmative de quelle manière, au travers du découpage en épisodes.

2.3.1 Heuristiques et changements d'épisodes

i. Méthode d'analyse

Pour étudier si les heuristiques jouent un rôle au niveau de la rupture entre épisodes, nous avons mis en œuvre une méthode d'analyse que nous illustrons maintenant sur le groupe 4PSJc12. Dans un premier temps, nous avons superposé les représentations graphiques correspondant au découpage en épisodes et à l'analyse en heuristiques en veillant bien évidemment à conserver les mêmes repères chronologiques.

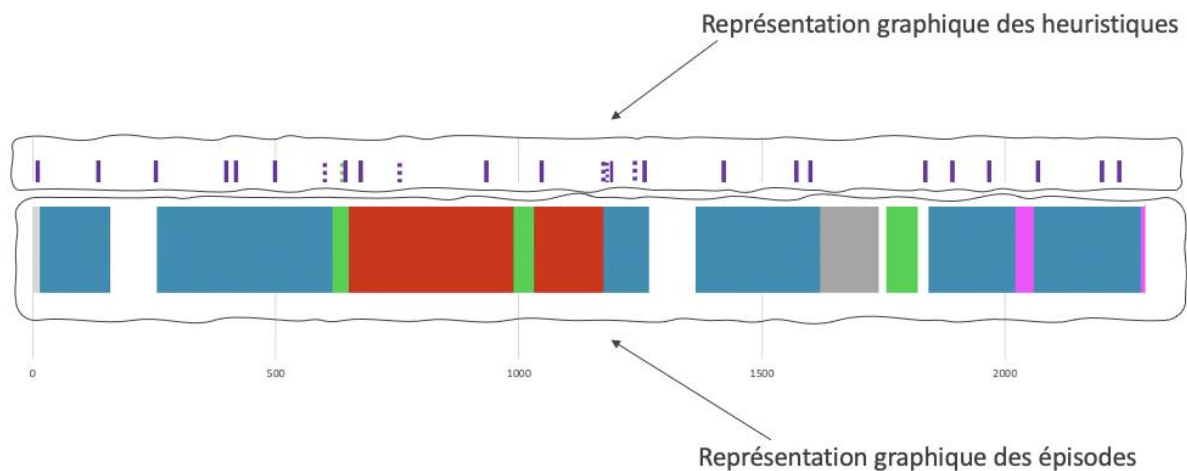


Figure 60. Exemple de superposition des représentations graphiques des épisodes et des heuristiques

Puis nous avons repéré les heuristiques qui se situent aux changements d'épisodes. Pour chacune de ces heuristiques, nous nous sommes référés à la vidéo et/ou à la description des épisodes afin d'identifier si l'heuristique est en lien effectivement avec la rupture observée. Si ce lien est avéré, cela se traduit, d'un point de vue graphique, par le rallongement du trait vertical représentant l'heuristique. Dans le cas contraire, la longueur du trait reste inchangée. Dans la figure suivante, c'est le cas pour sept heuristiques différentes.

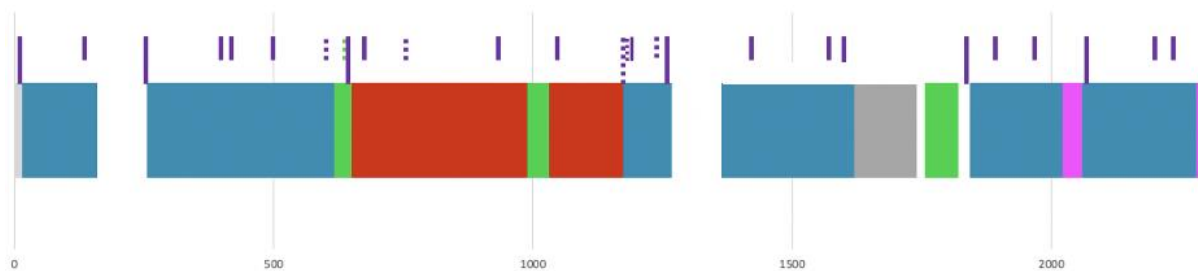


Figure 61. Repérage des heuristiques en lien avec un changement d'épisodes

Enfin, nous avons procédé de la sorte relativement aux heuristiques très proches d'une rupture considérant une certaine tolérance temporelle. Ainsi, par exemple, nous avons identifié que l'heuristique entourée dans le graphique suivant est en lien avec le changement d'épisodes.

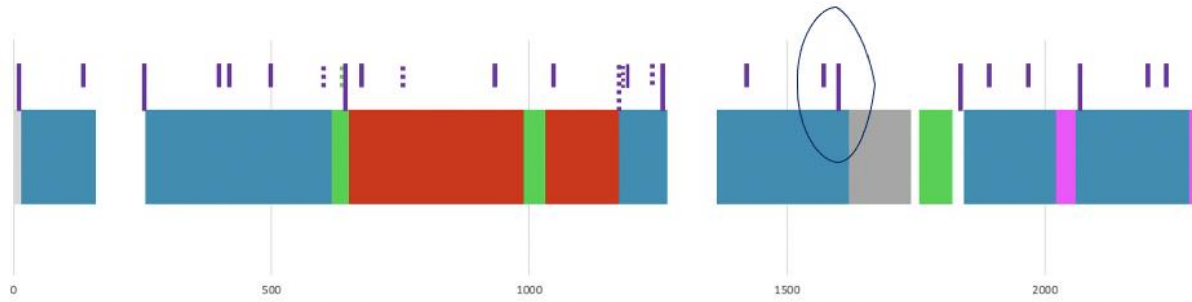


Figure 62. Illustration de la tolérance temporelle

En procédant de la sorte et à l'appui de ces représentations graphiques, nous sommes en mesure d'identifier, d'une part les heuristiques qui sont liées à des changements d'épisodes et d'autre part celles qui interviennent au cours d'un épisode.

ii. Analyses

L'inventaire de ces différentes heuristiques ventilé selon le moment où elles interviennent et selon l'appartenance à l'enseignement primaire ou secondaire des groupes d'élèves est représenté graphiquement dans la Figure 63.

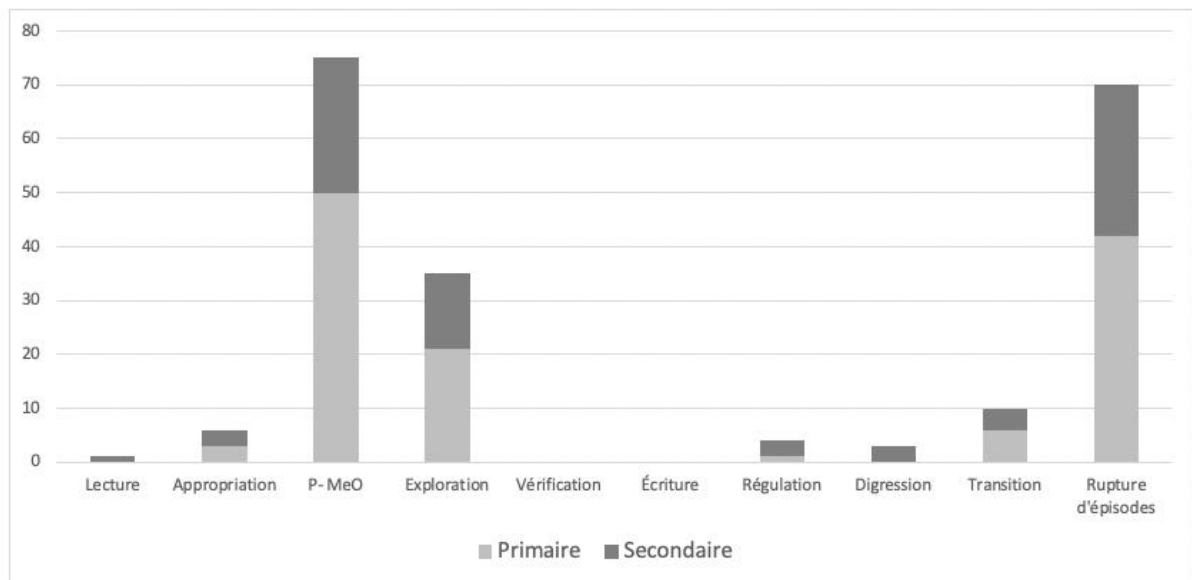


Figure 63. Répartition des heuristiques selon le moment où elles interviennent et selon l'origine primaire ou secondaire des élèves

Trois moments concentrent nettement la majeure partie des heuristiques. Plus précisément, plus de la moitié des heuristiques (environ 54%) interviennent au cours d'un épisode de planification – mise en œuvre ou d'exploration. Rappelons que ce qui distingue les épisodes de mise en œuvre de ceux d'exploration est principalement le caractère structuré ou non de la piste proposée par les élèves. Il semble donc que ce soit les deux épisodes au cœur de la recherche qui renferment la majorité des heuristiques. Cela confirme et étend les résultats de Schoenfeld (1985, p. 110) qui affirme que la majorité des heuristiques interviennent au cours de l'exploration. En outre, la concentration équilibrée entre le primaire et le secondaire de cette répartition donne plus de poids à ce résultat.

Par ailleurs, plus d'un tiers des heuristiques (environ 34%) est responsable des changements d'épisodes. Étudions la manière dont se répartissent les épisodes interrompus et provoqués par ces heuristiques. Pour cela, nous avons identifié, pour chacune de ces heuristiques, l'épisode qui est

avant la rupture et celui qui la suit. Ces informations sont rassemblées dans le tableau suivant pour lequel la ligne correspond à un épisode donné et la colonne à l'épisode qui le suit.

		Épisode suivant									
		Lecture	Appropriation	Planification- Mise en Œuvre	Exploration	Vérification	Écriture	Régulation	Digression	Transition	Total
Épisode actuel	Lecture		3	7	1						11
	Appropriation			2	3						5
	Planification- Mise en Œuvre			2	2		1			1	6
	Exploration		1	4						2	7
	Vérification			2							2
	Écriture		1								1
	Régulation			10	4				1		15
	Digression			3	7						10
	Transition			5	8						13
	Total	0	5	35	25	0	1	0	1	3	70

Tableau 24. Répartition en nombre des heuristiques selon la nature de l'épisode qui la précède et qui la suit

Par exemple, la cellule qui indique « 10 » signifie qu'au total 10 heuristiques ont eu pour fonction de passer d'un épisode de régulation à un épisode de planification – mise en œuvre. La cellule directement à droite indique que 4 heuristiques interrompent un épisode de régulation pour initier un épisode d'exploration.

Partant de cet inventaire, nous représentons ensuite graphiquement les informations totalisées par ligne et colonne c'est-à-dire les informations présentes dans les cellules grisées. La Figure 64 rend compte de la répartition des épisodes qui sont interrompues par les heuristiques. La Figure 65 montre la répartition des épisodes provoqués par ces mêmes heuristiques.

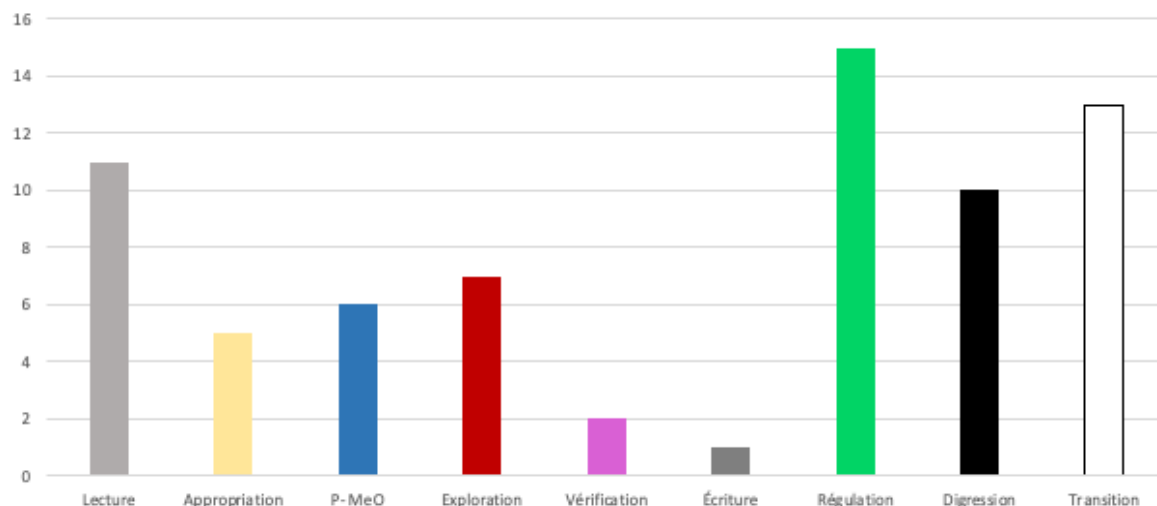


Figure 64. Répartition des épisodes situés avant la rupture provoquée par une heuristique

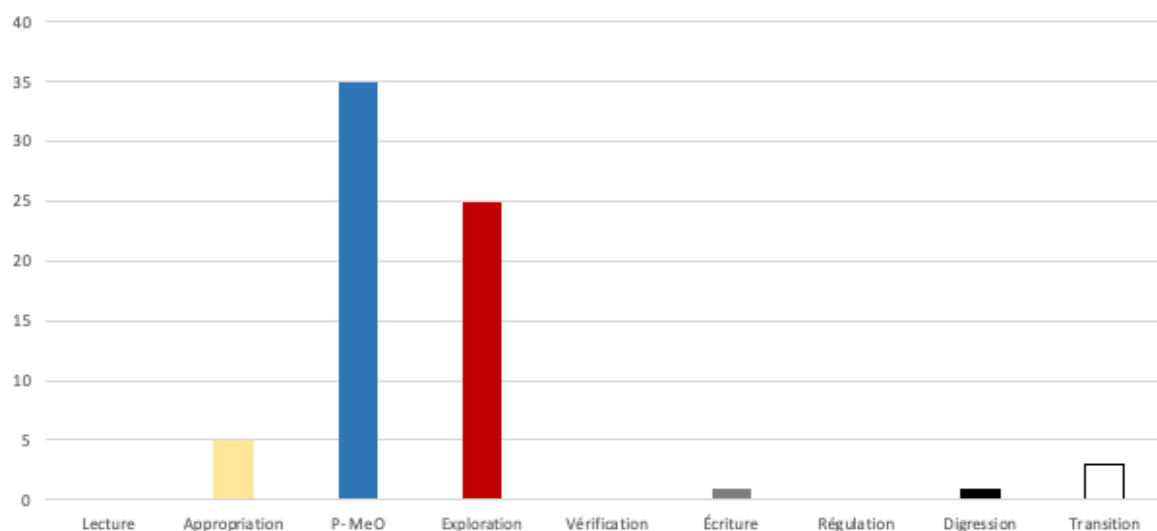


Figure 65. Répartition des épisodes situés après la rupture provoquée par une heuristique

Sur le premier graphique, les quatre épisodes principalement concernés sont ceux de régulation, transition, lecture et digression. Cela signifie que les heuristiques mettent principalement un terme aux épisodes qui ne participent pas à l'avancée propre du travail des élèves (régulation, transition et digression) dans plus de 50% des cas (38 heuristiques sur les 70 recensées).

Le deuxième graphique présente une répartition concentrée sur deux épisodes : planification – mise en œuvre et exploration. Ainsi, lorsqu'une heuristique met un terme à un épisode, c'est dans 85% des cas pour passer à une phase de mise en œuvre ou d'exploration. La confrontation des deux graphiques fait ressortir nettement que les heuristiques permettent de recentrer le travail des élèves sur les épisodes au cœur de la recherche. Ceci est intéressant et montre le potentiel des heuristiques pour favoriser l'aspect recherche d'un problème.

Si on met en comparaison ces données entre primaire et secondaire, nous obtenons les représentations graphiques suivantes :

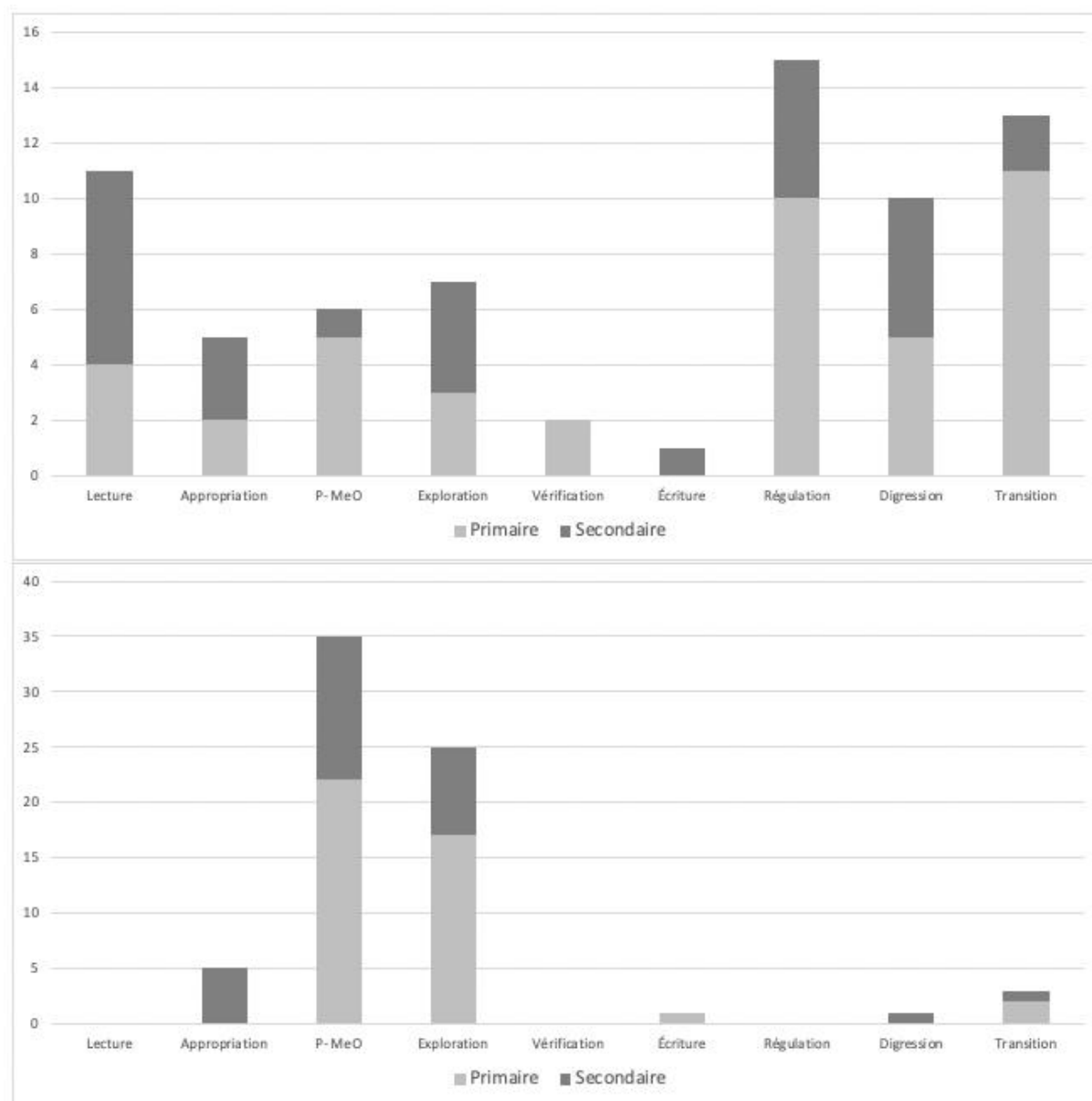


Figure 66. Répartition des épisodes situés avant (haut) et après (bas) la rupture provoquée par une heuristique en fonction de la provenance primaire / secondaire des groupes d'élèves

Les 10 groupes provenant du primaire sont concernés par 42 heuristiques contre 28 heuristiques pour les 7 groupes du secondaire. Les moyennes sont sensiblement les mêmes. De plus, les équilibres, proportionnellement au nombre de groupes de chaque ordre, sont également respectés dans l'ensemble. Les quelques déséquilibres comme par exemple relativement aux épisodes de vérification et écriture pour le 1^{er} graphique ou appropriation pour le 2nd portent sur quelques heuristiques seulement ce qui les rend marginaux. L'intérêt de ces représentations graphiques tient au fait que notre conclusion précédente sur le fait que les heuristiques permettent de recentrer le travail des élèves sur les épisodes au cœur de la recherche est valable aussi bien pour les élèves du primaire que du secondaire de notre recherche.

Pour compléter cette analyse des heuristiques responsables des ruptures, regardons si la nature des heuristiques peut être mise en relation avec les changements d'épisodes. Pour cela, pour chaque heuristique responsable d'une rupture, nous avons relevé et reporté dans le tableau suivant (Tableau 25) sa nature. La numérotation permet de repérer chacune de ces heuristiques dans le tableau à double-entrée (Tableau 26) pour identifier l'épisode avant le changement et celui qui suit. Notons

que, dans le cas d'une heuristique en lien avec un changement d'épisodes suivant une régulation, nous avons précisé si l'heuristique était également en lien avec le contenu de la régulation ou non. Dit autrement, cela permet de décider si c'est la régulation qui a induit l'heuristique qui est en lien avec le changement d'épisodes.

Groupes	Intitulé des heuristiques en lien avec un changement d'épisodes
4PCJc7	1- Essai 2- Autre interprétation (Heuristique de l'enseignant) 3- Essai
4PCJc9	4- Essai 5- Autre interprétation 6- Changement de registre 7- Changement de registre 8- Essai 9- Essai (en lien avec la régulation)
4PCJc10	10- Essai 11- Idée d'essai évoquée mais non réalisée 12- Travailler en avançant (en lien avec la régulation) 13- Essai & Cas particulier (évoquée mais influence la suite) 14- Essai
4PSJc10	15- Essai & Cas particulier 16- Essai (Heuristique de l'enseignant)
4PSJc12	17- Essai 18- Essai 19- Changement de registre (ne semble pas provoqué par la régulation) 20- Essai 21- Introduction de matériel 22- Essai 23- Essai (suite à invalidation par l'enseignant) 24- Essai (suite à invalidation)
8PSDr3	
8PSDr10	25- Cas particulier 26- Travailler en avançant 27- Travailler en avançant (ne semble pas provoqué par la régulation) 28- Travailler en avançant
8PVDr2	
8PVDr7	29- Travailler en avançant 30- Travailler en avançant (évoquée) 31- Essai & Cas particulier (évoquée) 32- Travailler en avançant (évoquée) 33- Travailler en avançant (évoquée) 34- Travailler en avançant & réduire le problème (évoquée et ne semble pas provoquée par la régulation) 35- Essai (évoquée) 36- Travailler en avançant 37- Travailler en avançant 38- Essai (évoquée) 39- Travailler en avançant 40- Travailler en avançant (évoquée et semble liée à la régulation) 41- Travailler en avançant (semble liée à la régulation)
8PVDr9	42- Outil mathématique
10CTBa7	43- Travailler en avançant 44- Essai (semble liée à la régulation) 45- Essai (semble liée à la régulation)
10CTBa10	46- Changement de registre

	47- Travailler en avançant
10CTBa14	48- Travailler en avançant 49- Essai 50- Travailler en avançant 51- Essai (juste évoquée pendant la régulation) 52- Essai (semble liée à la régulation)
10LSBa10	53- Travailler en avançant 54- Introduire une notation 55- Outil mathématique 56- Reformuler le problème 57- Générer de nouvelles données 58- Travailler en avançant 59- Outil mathématique
10LSBa11	60- Mise en évidence de données 61- Outil mathématique 62- Travailler en avançant 63- Évoquer un problème déjà rencontré 64- Essai (semble liée à la régulation) 65- Essai
10LSBa12	66- Introduire une notation 67- Essai & Cas particulier
10LSBa14	68- Outil mathématique 69- Travailler en avançant (évoquée) 70- Travailler en avançant

Tableau 25. Liste des intitulés des heuristiques en lien avec un changement d'épisodes

	Lecture	Appropriation	Planification- Mise en œuvre	Exploration	Vérification	Écriture	Régulation	Digression	Transition
Lecture		53-60-68	1-11-15-17-43-49-66	48					
Appropriation			4-47	42-57-61					
Planification- Mise en œuvre			6-7	35-55		22			21
Exploration		56	14-20-67-70						31-63
Vérification			10-24						
Écriture		46							
Régulation			9-12-16-23-34-41-44-45-52-64	2-19-27-40				51	
Digression			50-54-65	13-28- 33-36-37-58-59					
Transition			3-5-18-26-29	8-25-30-32-38-39-62-69					

Tableau 26. Tableau présentant le lien entre la nature des heuristiques et les enchaînements d'épisodes

Cette analyse permet de faire ressortir la variété des heuristiques impliquées dans un changement d'épisodes. En effet, parmi les 15 heuristiques différentes codées sur ces 17 groupes, 11 sont impliquées dans au moins un changement d'épisodes. Si on zoome sur les deux heuristiques les plus représentées (Figure 67) : faire un essai et travailler en avançant, nous remarquons qu'elles incarnent toutes deux les tendances générales décrites plus haut à savoir qu'elles peuvent intervenir au cours de presque tous les épisodes (Figure 67 - graphique du haut) et qu'elles provoquent essentiellement des épisodes de planification - mise en œuvre ou exploration (Figure 67 - graphique du bas). L'heuristique faire un essai provoque 20 épisodes de planification - mise en œuvre contre 4 épisodes d'exploration. L'heuristique travailler en avançant amène 9 épisodes de planification - mise en œuvre contre 13 épisodes d'exploration. Cette répartition très déséquilibrée amène à penser que certaines heuristiques pourraient davantage orienter la recherche sur l'exploration et d'autres sur la planification - mise en œuvre. Cette hypothèse mériterait d'être expérimentée à plus grande échelle car les effectifs de notre échantillon restent trop modestes.

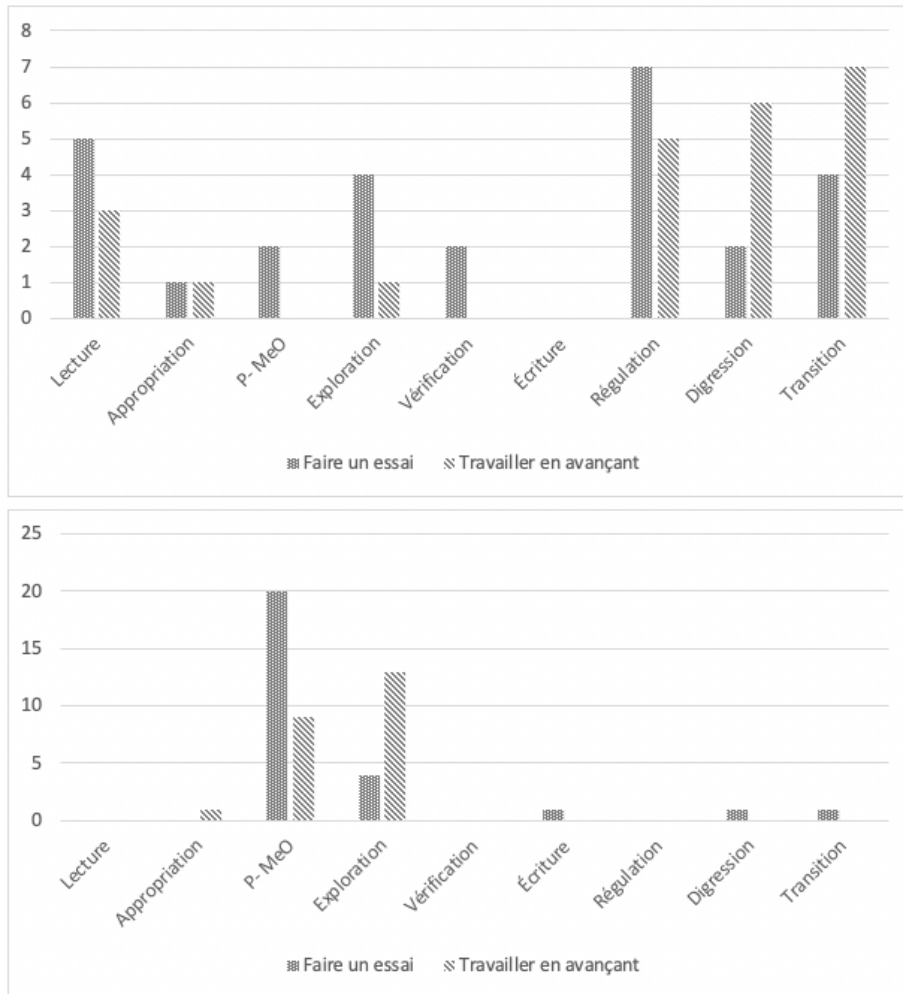


Figure 67. Répartition des épisodes situés avant (haut) et après (bas) la rupture provoquée par les heuristiques faire un essai et travailler en avançant

iii. Conclusion

En nous intéressant au lien susceptible d'exister entre les heuristiques et les épisodes, nous avons mis en évidence la manière dont les heuristiques influencent les démarches des élèves. D'une part, les heuristiques interviennent majoritairement au cours des épisodes qui correspondent au cœur de la recherche à savoir les épisodes de planification – mise en œuvre et d'exploration confirmant ainsi les résultats de Schoenfeld (1985). D'autre part, nos résultats montrent que les heuristiques qui dévient la trajectoire des démarches des élèves, décrite en termes d'épisodes, favorisent également les épisodes centrés sur la recherche : planification - mise en œuvre et exploration au détriment des autres épisodes dont principalement ceux qui ne participent pas de l'avancée propre du travail des élèves. Ces résultats de recherche méritent évidemment d'être consolidés mais ils offrent des perspectives intéressantes pour l'enseignement notamment du point de vue de l'aide à la résolution de problèmes.

Nous allons à présent questionner le lien entre épisodes et heuristiques sous l'angle des trois profils d'élèves dégagés précédemment pour étudier s'ils peuvent être mis en relation avec la description analytique en épisodes.

2.3.2 Mise en relation des trois profils d'élèves et du découpage en épisodes de leur travail

Nous reprenons les trois profils dégagés de l'analyse en heuristiques de la partie précédente à savoir les explorateurs, les papillonneurs et les prospecteurs. Rappelons que ces trois profils caractérisent des trajectoires différentes, mises en évidence par les heuristiques, au sein de l'espace problème. L'idée est donc de chercher si des ressemblances au sein des groupes d'un même profil ou des différences d'un profil à l'autre ressortent au niveau de l'analyse en épisodes. Nous avons ainsi rassemblé et confronté les représentations graphiques correspondant au découpage en épisodes de ces différents groupes. La figure suivante présente cette confrontation :

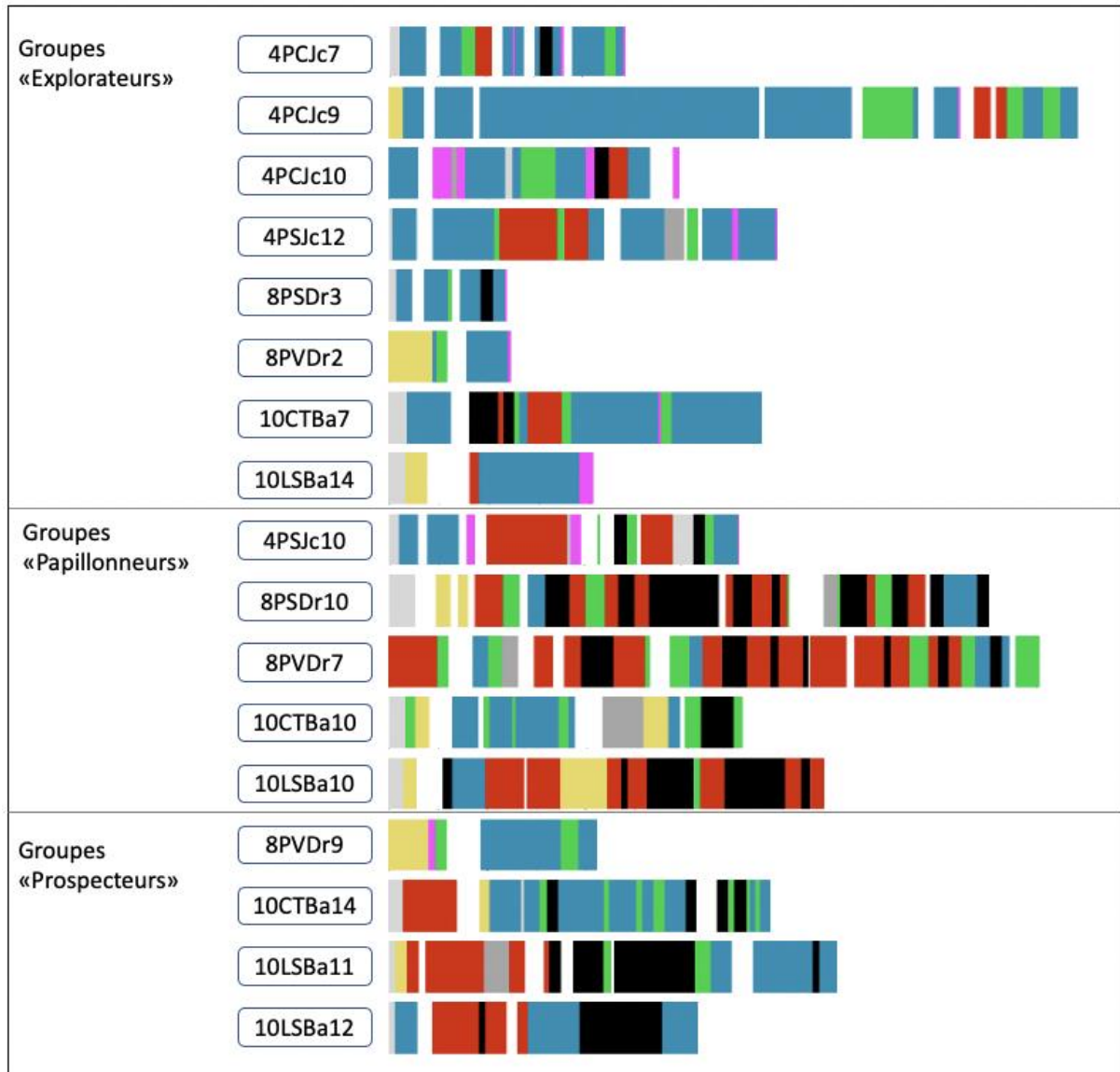


Figure 68. Répartition par profil des représentations graphiques correspondant au découpage en épisodes

Nous remarquons que les groupes du profil explorateur sont marqués principalement par des épisodes de planification – mise en œuvre (couleur bleu) contrairement aux groupes du profil papillonneur pour lesquels les épisodes appelés exploration (couleur rouge) dominant. Nous remarquons également que les représentations graphiques des papillonneurs présentent de nombreux épisodes de digressions ce qui n'est pas le cas des explorateurs. Enfin, au moins un épisode de vérification caractérise chacun des groupes explorateurs ce qui est bien loin d'être le cas

pour les autres profils. Les groupes prospecteurs sont là encore, un entre-deux des deux autres profils puisque le groupe 8PVDr9 a des caractéristiques qui le rapproche de celles des explorateurs tandis qu'au contraire les trois autres groupes ressemblent d'avantage aux groupes des papillonners. Ces distinctions sont visuelles. Tentons de mettre en évidence de manière plus quantitative ces différences en nous intéressant à l'avancée propre du travail des élèves que nous avons définie à partir de l'analyse en épisodes. Cette avancée propre est caractérisée selon deux indicateurs : la proportion de l'avancée propre du travail des élèves par rapport au temps total dévolu à la résolution de problèmes et le nombre total de séries qui composent cette avancée propre. Les valeurs correspondant à ces deux indicateurs sont reportées dans le tableau suivant dans lequel les groupes sont rassemblés par profil.

Profil	Code groupe	Proportion de l'avancée propre du travail des élèves	Moyenne	Nombre de séries	Moyenne
Explorateurs	4PCJc7	66	75	8	5,3
	4PCJc9	78		10	
	4PCJc10	71		5	
	4PSJc12	84		6	
	8PSDr3	68		4	
	8PVDr2	76		2	
	10CTBa7	79		5	
	10LSBa14	80		2	
Prospecteurs	8PVDr9	70	63	3	5,5
	10CTBa14	65		8	
	10LSBa11	52		6	
	10LSBa12	63		5	
Papillonners	4PSJc10	69	57	6	10
	8PSDr10	41		15	
	8PVDr7	55		16	
	10CTBa10	58		7	
	10LSBa10	61		6	

Tableau 27. Caractérisation de l'avancée propre du travail des élèves selon le profil des élèves

Concernant la proportion de l'avancée propre du travail des élèves, les groupes du profil explorateur présentent une moyenne de 75% tandis que les groupes du profil papillonneur ne se situent qu'à 57%. Encore une fois les groupes du profil prospecteur réalisent le compromis avec 63%. La proportion diminue selon le profil ce qui fait également écho avec la réussite bien meilleure pour les explorateurs comparativement aux papillonners (Voir la Figure 58). Le nombre de séries qui composent l'avancée propre du travail des élèves est deux fois moindre chez les explorateurs et même chez les prospecteurs que chez les papillonners. Ainsi, les groupes du profil explorateur cumulent assez nettement les tendances les plus propices à la résolution de problèmes relativement aux indicateurs utilisés pour caractériser l'avancée propre du travail des élèves. Tandis que les groupes du profil papillonners cumulent assez nettement les deux tendances les moins propices à la résolution de problèmes.

En conclusion, les profils dégagés à partir de l'analyse en heuristiques s'incarnent également au niveau des épisodes. Ce sont les deux indicateurs retenus pour caractériser l'avancée propre du travail des élèves qui permettent de mettre cette relation en évidence.

Néanmoins, tous les groupes explorateurs et prospecteurs ayant mis en œuvre des démarches d'ajustements d'essais successifs ne parviennent pas à résoudre le problème pour autant. Nous allons tenter d'identifier ce qui peut différencier les démarches des élèves du point de vue de la gestion des essais et ajustements qui constituent la spécificité du type de problème que nous avons choisi pour notre dispositif expérimental.

3. Analyse des essais et ajustements

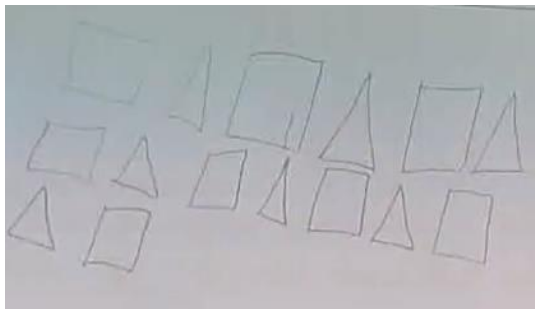
Cette partie présente les analyses du travail des élèves relativement aux essais et ajustements qu'ils ont réalisés. La répartition de ces onze groupes suivant leur réussite ou non est donnée dans le tableau suivant :


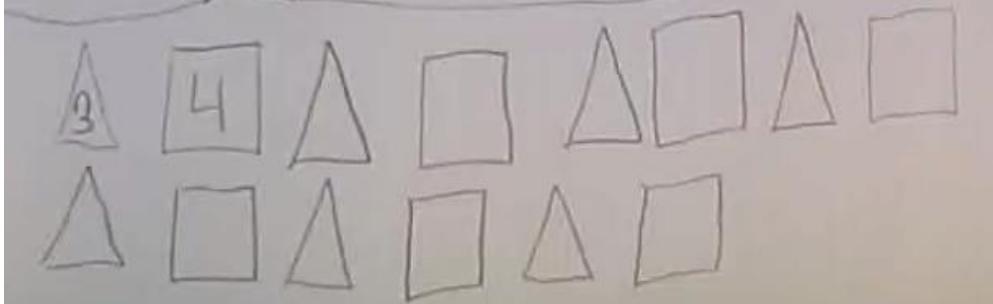
Réponse trouvée sans aide	Réponse trouvée avec aide légère	Réponse trouvée avec aide forte ou guidage important	Réponse non trouvée
4PCJc10	4PCJc7	4PCJc9	10CTBa7
8PSDr3	4PSJc12		10CTBa14
8PVDr2			10LSBa11
8PVDr9			
10LSBa12			



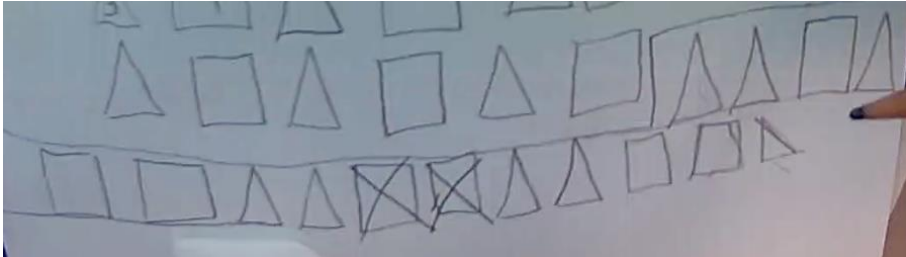
Tableau 28. Répartition des onze groupes analysés suivant la réussite ou non du problème

Pour chaque groupe, les synthèses qui suivent chaque tableau s'articulent autour de la manière d'ajuster et des interprétations des rétroactions. Nous proposons également dans ces synthèses une interprétation du travail des élèves à la lumière de l'évolution de la représentation mentale à l'appui des trois processus identifiés par Julot (1995) : interprétation et sélection, structuration et opérationnalisation.

3.1 Analyse du groupe 4PCJc7

Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
Essai 1 (Laura 2:18 pendant la phase de travail individuel)			
			

<p>15 figures dessinées présentant l'alternance d'un carré et d'un triangle</p>	<p>Compte les côtés et s'arrête à 49 (alors qu'il reste une figure) → Recompte les figures</p>	<p>Invalidation (non verbalisée) → Remise en question du nombre de figures</p>	<p>Échange avec l'enseignante au sujet de l'idée de l'alternance d'un carré et d'un triangle (cf contenu de cette régulation dans la synthèse ci-dessous)</p>
<p>Essai 2 (Aïcha 10:38)</p> 			
<p>Dessine des figures tout en comptant les côtés au fur et à mesure du dessin.</p> <p>On observe l'alternance de deux carrés et de deux triangles.</p>	<p>Elle dit « 48 » après avoir dessiné le dernier carré (erreur de dénombrement) → Elle s'arrête</p>	<p>Invalidation (non verbalisée)</p>	
<p>Essai 2bis (Laura 10:45)</p> 			
<p>Dessine des figures tout en comptant les côtés au fur et à mesure du dessin jusqu'à obtenir 49</p> <p>L'alternance d'un carré et d'un triangle est encore respectée.</p>	<p>Compte le nombre de figures → « c'est impossible » → suite à la discussion avec Aïcha par rapport à l'alternance d'un carré et d'un triangle « je dois faire deux fois la même forme alors on recommence »</p>	<p>Invalidation → Interprétation de la rétroaction provoque l'abandon de la contrainte de l'alternance d'un carré et d'un triangle</p>	
<p>Essai 3 (Laura 15:35)</p>			

			
<p>Dessine des figures tout en comptant les côtés au fur et à mesure du dessin jusqu'à obtenir 49</p>	<p>Compte le nombre de figures et trouve 14 → « ça fait toujours 14 ça fait pas 15 c'est pas normal ça »</p>	<p>Invalidation (non verbalisée)</p>	
<p>Essai 4 (Laura 20:22)</p>			
			
<p>Sur l'essai précédent, elle barre 2 carrés.</p>	<p>Elle dénombre tous les côtés en comptant 2 triangles à la place des 2 carrés barrés → dessine 2 côtés supplémentaires pour arriver à 49</p>	<p>Invalidation (non verbalisée)</p>	
<p>Essai 5 (Laura 21:40)</p>			
			
<p>Sur l'essai précédent, elles complètent la figure amorcée pour faire un triangle</p>	<p>Elle dénombre tous les côtés en comptant 2 triangles à la place des 2 carrés barrés → s'arrête à 49 alors qu'il reste 1 côté à dénombrer</p>	<p>Invalidation (non verbalisée)</p>	
<p>Essai 6 (Laura 22:36)</p>			



Sur l'essai précédent, elle barre un carré supplémentaire et complète en dessinant un triangle à la place de chaque carré barré.	Elle dénombre tous les côtés → « j'ai réussi ça donne 49 avec tout ça » → Compte les figures, « j'ai trouvé »	Validation	
--	--	------------	--

Synthèse :

Laura construit l'essai 1 en s'imposant la contrainte supplémentaire d'alterner un carré et un triangle. Elle pose explicitement une question à l'enseignante en lien avec cette contrainte :


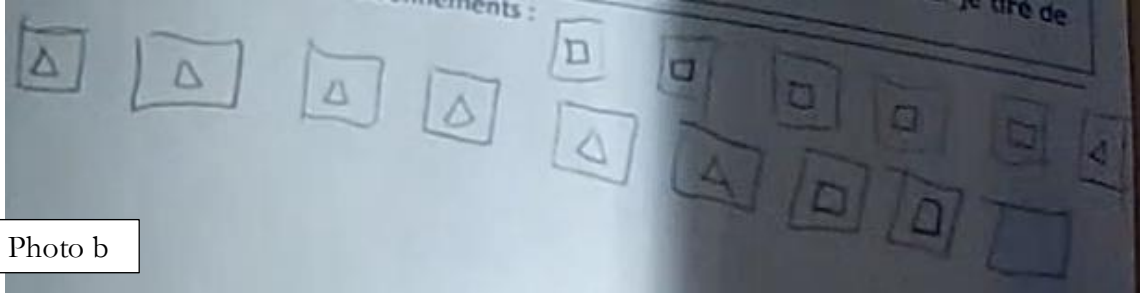
Laura : est-ce qu'on peut mettre deux fois la même chose deux fois la même forme

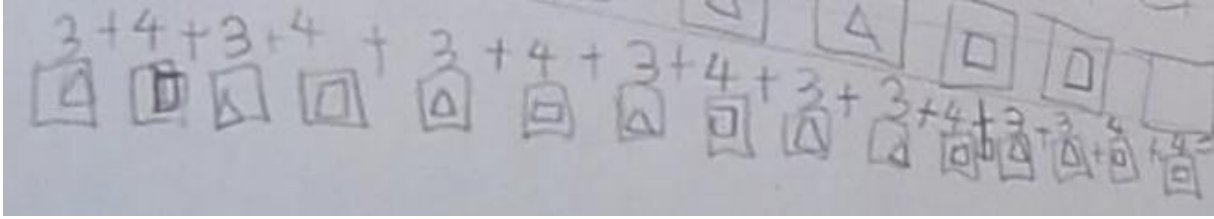
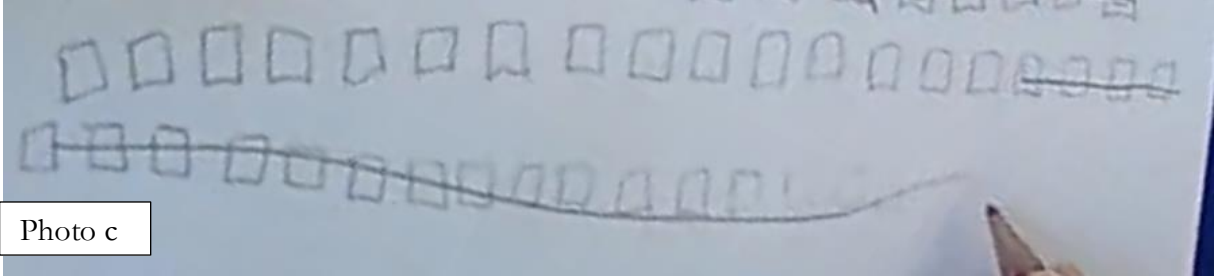
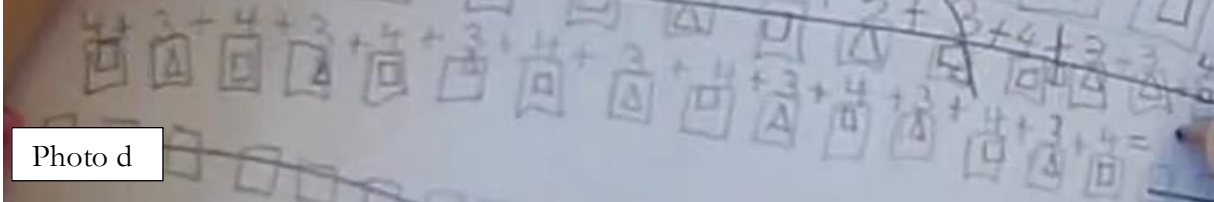

Enseignante : la même forme c'est-à-dire deux fois des carrés mais comment est-ce que tu voudrais arriver sinon t'as tiré quinze cartes t'as des cartes triangle et t'as des cartes carré donc forcément tu vas devoir tirer plusieurs fois un carré et plusieurs fois un triangle non

Cet échange est intéressant pour illustrer le cas où deux représentations différentes ne se rencontrent pas : la représentation effective de l'enseignante pour laquelle l'ordre de tirage des figures n'a pas d'importance et celle de Laura pour laquelle cet ordre est à prendre en compte. Il semble que l'enseignante interprète la question de Laura à la lumière de sa propre représentation du problème. Sa réponse ne fait pas évoluer la représentation de Laura puisqu'elle propose son 2^e essai (essai 2bis) avec cette même contrainte. Pour Aïcha (essai 2), l'alternance passe d'une figure de chaque à 2 figures de chaque ce qui constitue toujours une contrainte qui caractérise sa représentation. C'est l'interprétation de la rétroaction de l'essai 2bis « je dois faire deux fois la même forme alors on recommence » qui marque chez Laura l'abandon de cette contrainte liée à l'alternance d'un carré et d'un triangle et donc la restructuration de la représentation.

Les trois derniers essais sont construits à l'aide d'ajustements sur la base de l'essai précédent. Ces ajustements sont différents à chaque fois : échange de 2 carrés avec 2 triangles, ajout d'une figure et échange de 1 carré avec 1 triangle. Ils sont également pertinents à chaque fois et permettent de trouver la solution. Ceci met en évidence que ces élèves disposent des deux manières d'ajuster : à l'essai 6, un côté est rajouté pour former un triangle sans modification des autres figures. À l'essai 7, un carré est remplacé par un triangle mais l'essai est quand même testé. Ces essais 6 et 7 amènent à penser que ces ajustements qualitatifs ne semblent pas s'appuyer sur une règle qui mette en relation l'ajustement de l'essai qui concerne les figures avec le test de l'essai qui concerne le nombre de côtés. Il semble que l'obtention de la solution, prouvée par ostension, ait pris le pas sur l'élaboration d'une règle qui lierait le test et l'ajustement.

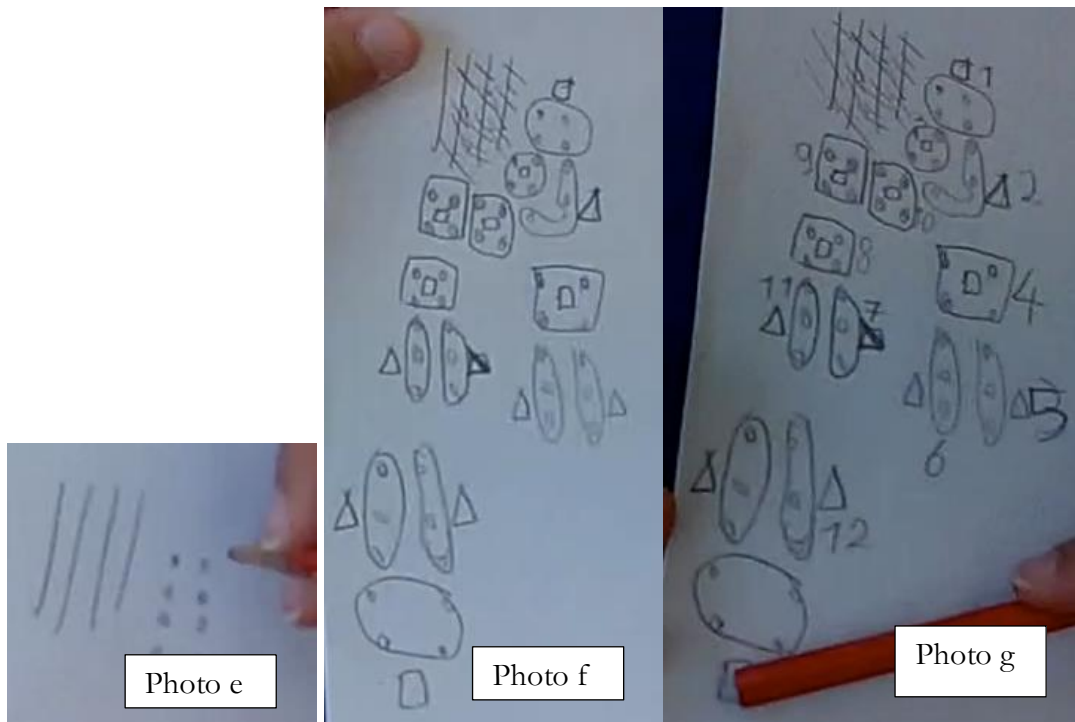
3.2 Analyse du groupe 4PCJc9

Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
<p>Essai 1 (Iris 2:00 commencé pendant la phase de travail individuel et finalisé en binôme)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div data-bbox="279 568 432 622">Photo a</div>  </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 20px;"> <div data-bbox="256 1010 410 1064">Photo b</div>  </div>			
<p>Dessin de 15 cartes vierges. Iris est interrompue, pour la mise en groupe, alors qu'elle dessinait des figures sur ces cartes (Photo a)</p>	<p>Compte les cartes à plusieurs reprises au fur et à mesure de leur dessin → arrêt à 15 puis commence à compléter les cartes vierges par des triangles ou des carrés « Moi j'ai fait 15 cartes pour voir comment on pourrait faire et j'arrivais à combien »(4:58)</p>	<p>Validation du nombre de cartes vierges</p>	
<p>L'essai est finalisé (Photo b) en complétant les cartes vierges par le même nombre de carrés et de triangles que sur le travail de Natacha qui a écrit la somme de 14 termes '$3+4+3+4+3+4\dots=49$'</p>	<p>Iris se rend compte qu'il reste une carte vierge « quoi attends y a un problème » (7:17), elle compte les figures dessinées puis barre l'essai « on va tout barrer et on va recommencer » (8:16).</p>	<p>Invalidation sur le nombre total de cartes « on peut tout recommencer » (8:26)</p>	
<p>Essai 2 (10:30)</p>			

			
<p>Dessin de 15 cartes vierges puis des figures les yeux fermés par Iris.</p> <p>Lorsque Iris dessine 2 triangles consécutifs, Natacha signale qu'il ne faut pas avoir 2 triangles consécutifs « si c'est grave » (13:26) « c'est grave si on a fait 2 triangles » (14:38)</p>	<p>Compte les côtés (52) → Iris tape des deux mains sur la table et Natacha dit « je t'avais dit que ça jouait pas » (15:42)</p>	<p>Invalidation sur le nombre total de côtés → Iris barre un des deux triangles consécutifs et dessine un carré à la place puis barre tout l'essai</p>	<p>En faisant référence à l'énoncé, Iris exploite l'information « au hasard » et l'interprète comme « tirer [les cartes] les yeux fermés » (9:50)</p>
<p>Essai 3 (16:40)</p>			
			
			
<p>Photo c</p>	<p>Photo d</p>		
<p>Dessin de 15 cartes vierges puis des figures les yeux fermés par Natacha (photo d)</p>	<p>Compte les côtés (53) → lorsqu'elle compte, le ton de sa voix change quand elle prononce 50 et les mots nombres suivants.</p>	<p>Invalidation → barre le dernier carré</p>	<p>Natacha est partie pour dessiner 49 cartes vierges. Iris l'arrête et barre celle en trop pour en laisser 15 (Photo c).</p>
<p>Essai 4 (21:37)</p>			
			

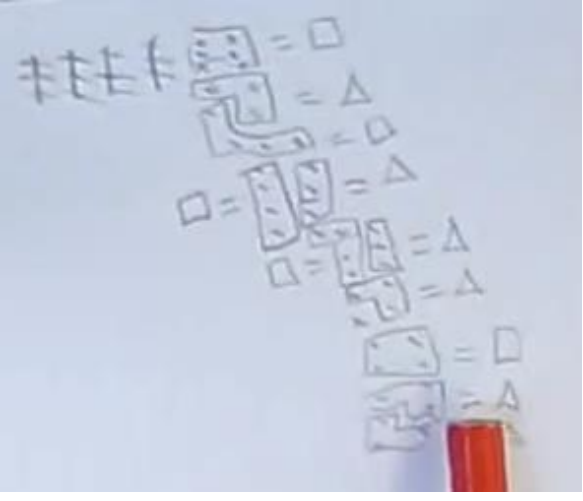
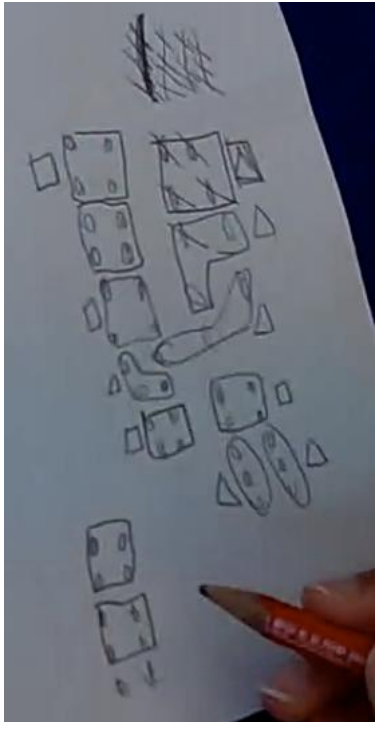
<p>Sur l'essai précédent, Iris barre le dernier carré et annonce le résultat (49) sans rien compter de plus (elle n'écrit que le chiffre des dizaines à la ligne).</p>	<p>Natacha remarque « ah oui il y a 15 cartes » (22:02) au moment où Iris écrit « 49 » ce qui l'interrompt après avoir écrit le « 4 ».</p>	<p>Invalidation sur le nombre total de cartes</p>	<p>Le fait qu'Iris ne recompte pas les côtés montre que : soit elle fait un lien du type 'si j'enlève un carré je diminue le nombre de côtés de 4' soit elle a mémorisé qu'avant de dénombrer le dernier carré elle en était à 49.</p>
--	--	---	--

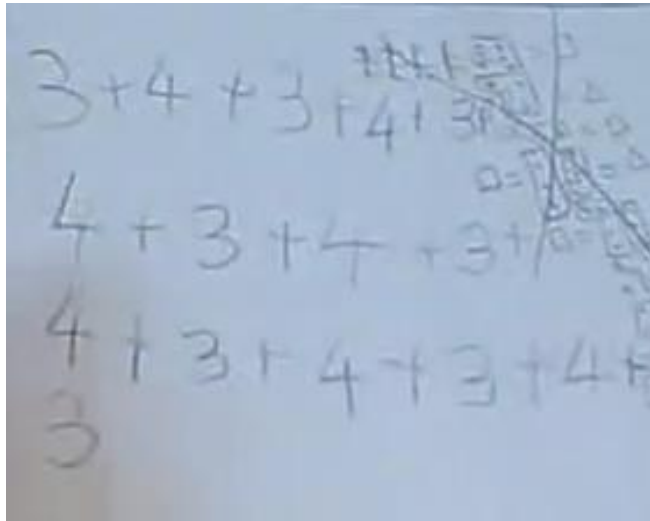
Essai 5 (25:25)



<p>Iris part de la représentation d'un nombre en dizaines et unités (Photo e) pour proposer un nouvel essai (Photo f).</p>	<p>Compte les figures tout en écrivant leur nombre à côté des figures (Photo g) → « Non il en manque encore un » (30:17) et elle barre l'essai</p>	<p>Invalidation sur le nombre total de cartes</p>	
--	--	---	--

Essai 5bis (30:30)

			
<p>Natacha finit son essai suivant le même registre de représentation sémiotique que l'essai 5.</p>	<p>Iris compte les figures (11) « aaaah toi tu as 11 moi j'ai 14 » (31:32)</p>	<p>Invalidation sur le nombre total de cartes</p>	<p>L'erreur semble due à l'oubli des 9 unités de 49.</p>
<p>Essai 6 (33:00)</p>			
			
<p>Iris réalise un nouvel essai suivant le même registre de représentation sémiotique que les essais 5 et 5bis.</p>	<p>Après avoir entouré les 4 dernières unités, Iris dit « il m'en reste 2 après » (36:55) puis elle compte les figures (13) « ah non » (37:01). Elle barre l'essai.</p>	<p>Invalidation du fait qu'il reste 2 unités qui ne forment pas une figure puis sur le nombre total de cartes</p> <p>Propose de faire un calcul, changement de registre (« changement de truc » à 37:05)</p>	

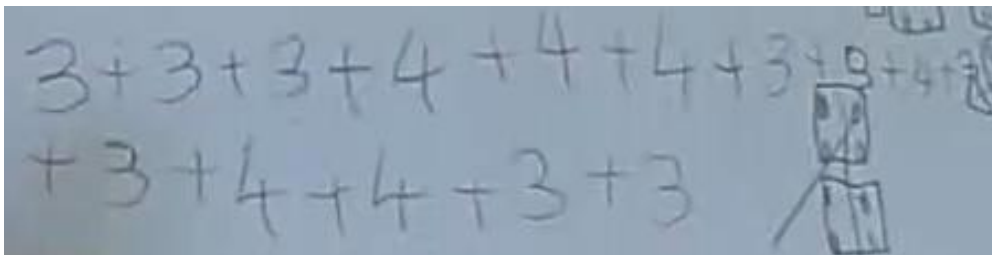
Essai 7 (37:05)

Écriture d'une somme de 15 termes avec alternance

Iris compte les côtés (52)
 → Natacha dit « ça marche pas » (41:30)
 → Iris propose « on doit faire 15 mais pas comme ça on va faire trois trois trois trois » (41:44)

Invalidation sur le nombre total de côtés.
 Idée d'un nouvel essai qui casse l'alternance triangle / carré

C'est le même assortiment de figure que lors des essais 3 et 4.

Essai 8 (42:16)

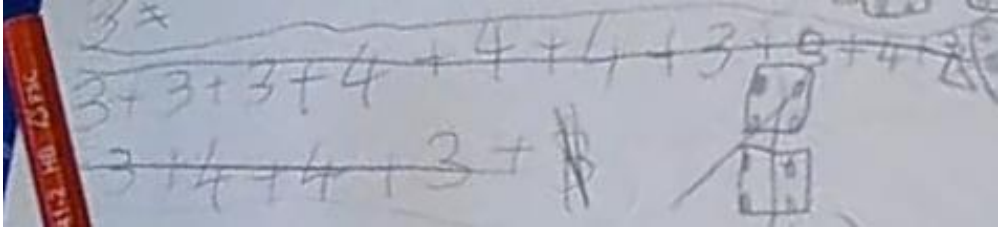
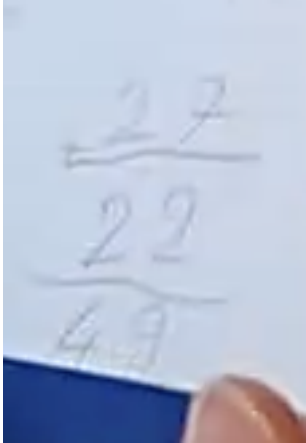
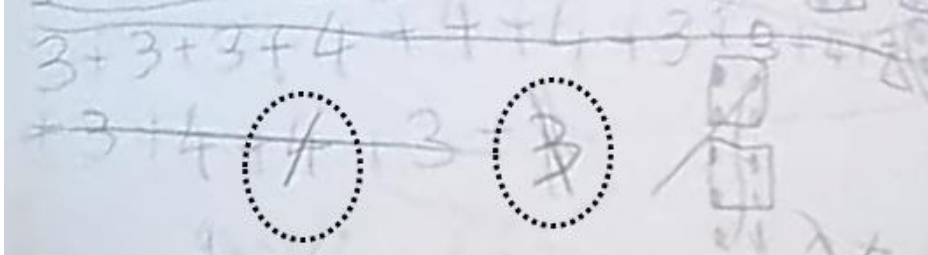
Écriture d'une somme de 15 termes sans alternance

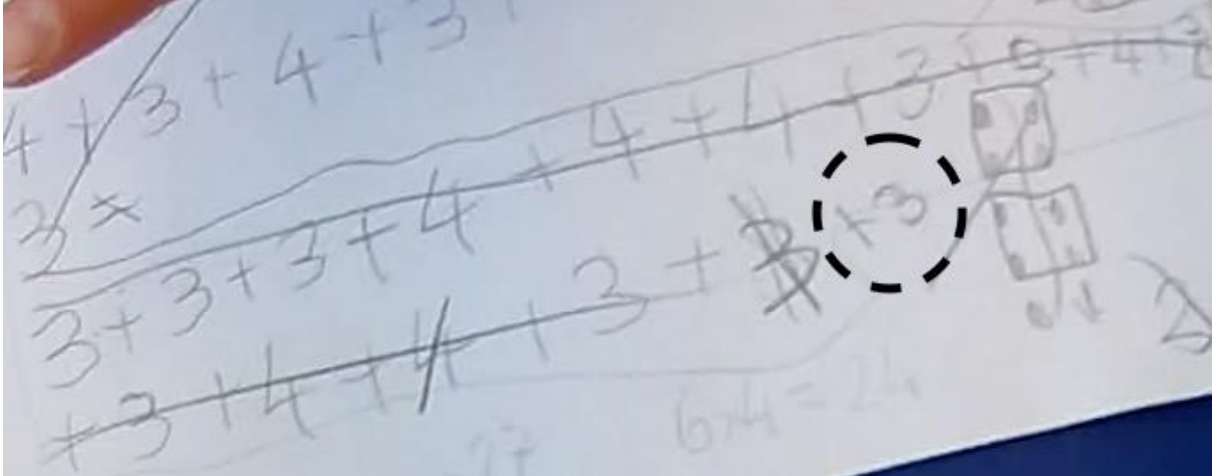
Iris compte le nombre de côtés (51) → elle barre l'essai

Invalidation sur le nombre de côtés

Régulation de l'enseignante amène à écrire 9x3 et 6x4, à trouver les résultats puis leur demande de calculer la somme pour trouver combien il y a de côtés en trop ou le nombre qu'il manque.

Essai 9 (55:52)

			
Après avoir calculé la somme (51), Iris barre le dernier terme « 3 » sur l'addition correspondant au dernier essai.	Iris compte tous les côtés (49 au lieu de 48) → compte les termes (14) et laissent échapper un « aaaaaah » (7:19) de dépit puis « c'est pas possible » (7:22)	Validation du nombre de côtés (due à une erreur de dénombrement) Invalidation du nombre de cartes	
Essai 10 (59:19)			
			
Iris cherche et trouve quel nombre ajouter à 27 pour obtenir 49	Opération barrée par Iris « non ça va jamais marché » (1:00:08)	Invalidé mais sans argument verbalisé. Essai non finalisé puisque le terme 22 n'a pas été converti en figures.	À une demande similaire (compléter l'addition à trou $27 + \dots = 49$), Natacha refuse en disant « après on va pas pouvoir faire les carrés » (1:01:27)
Pendant la régulation, l'enseignante fait rechercher le nombre de côtés en trop (2) sur le dernier essai réalisé. Elle explique que ce ne sera pas possible de se ramener à 49 en enlevant une figure (pas de figure à 2 côtés et en plus il n'y aurait que 14 figures). Elle leur demande de trouver une autre solution.			
Essai 11 (1:03:40)			
			

À la fin de la régulation, Iris propose de remettre le « 3 » et de barrer un « 4 » sur le dernier essai.	Compte les côtés (46 au lieu de 47) → rajoute un « 3 » à l'addition « plus trois ça fait 49 » (1:04:22)	Invalidation sur le nombre de côtés	
Essai 12 (1:04:31)			
			
Natacha rajoute un terme « 3 » à l'essai précédent.	Compte les côtés (50)	Invalidation sur le nombre de côtés	
Nouvelle régulation de l'enseignante qui prend tout le raisonnement à sa charge jusqu'à trouver la réponse.			

Synthèse :

Ces deux élèves semblent s'être construit des représentations mentales différentes du problème. En effet, pour élaborer son 1^{er} essai, Iris dessine 15 cartes vierges ce qui lui permet de tenir compte facilement du nombre de cartes tout en comptant le nombre de côtés. C'est d'ailleurs cet élément qui leur permet d'invalider leur 1^{er} essai collectif. Aucune contrainte supplémentaire ne pèse sur l'assortiment de figures dessinées. Le 1^{er} essai que Natacha réalise durant la phase de travail individuel (une somme de 14 termes alternant successivement les nombres 3 et 4) révèle à la fois la prise en compte d'une contrainte supplémentaire, celle de tirer successivement une carte de chaque catégorie, ainsi que la prise en compte de la seule donnée « nombre de côtés ». Ce dernier point est confirmé également par l'erreur commise par Natacha qui, lorsqu'Iris lui demande de dessiner les cartes vierges, en dessine 49 (Photo c). Les représentations du problème de ces deux élèves vont rentrer en conflit lors de l'essai 2 puisque lorsqu'Iris dessine consécutivement deux figures identiques, Natacha réagit et signale qu'il ne faut pas avoir 2 triangles consécutifs « si c'est grave » (13:26) puis « c'est grave si on a fait 2 triangles » (14:38). Lorsque le test est invalidé c'est le non-respect de cette contrainte qui semble justifier cette invalidation « je t'avais dit que ça jouait pas » (15:42). Notons par ailleurs qu'une contrainte supplémentaire est introduite par Iris pour les essais 2 à 4 : elle interprète l'expression « au hasard » par « en tirant les cartes les yeux fermés ». Cette contrainte supplémentaire n'impacte que la manière de dessiner les figures puisqu'elle dessine les figures les yeux fermés (la difficulté étant de dessiner la figure dans la carte dessinée au préalable).

Le conflit entre les deux représentations du problème (essai 2) va tourner à l'avantage de Natacha car la contrainte du tirage d'une carte différente à chaque fois va guider les essais 3 et 4. L'essai 3 est invalidé. La manière d'ajuster consiste à supprimer une figure, ce qui permet bien d'obtenir 49 côtés et de conserver cette contrainte mais plus la donnée des 15 cartes.

À la suite de l'invalidation de l'essai 4, une nouvelle opérationnalisation est caractérisée par une structuration différente : Iris investit une nouvelle connaissance qui est la représentation de 49 sous la forme du dessin des dizaines et des unités. Les essais 5, 5bis et 6 sont construits ainsi. Cette nouvelle opérationnalisation a l'avantage de permettre le respect de la contrainte des 49 côtés. La rétroaction se fait cette fois sur le nombre de figures, ce qui dénote une bonne flexibilité dans l'utilisation des données qui permettent de rétroagir. Pour autant, la représentation du problème qui semble dominée ici est marquée par un traitement indépendant des deux grandeurs en jeu. En effet, alors même que le registre de représentation sémiotique utilisé présente le potentiel de jouer facilement sur les deux grandeurs de manière simultanée, nous n'observons pas d'ajustement réalisé entre ces essais, l'interprétation des rétroactions porte uniquement sur l'invalidation des essais.

L'essai 7 est effectué dans un nouveau registre de représentation sémiotique mais pour autant l'assortiment de cartes est exactement le même qu'à l'essai 3 c'est-à-dire avec une alternance d'une figure de chaque catégorie. Cet essai met clairement en évidence la ténacité de cette structuration du problème basée sur la contrainte de tirer successivement une carte de chaque catégorie mise en évidence sur les premiers essais. L'interprétation de la rétroaction « on doit faire 15 mais pas comme ça, on va faire trois trois trois trois » (41:44) conduit les élèves à remettre en cause cette alternance pour l'essai 8. Cette remise en cause et donc cette re-structuration sera définitive.

L'essai 9 est obtenu par un ajustement qui consiste à supprimer un terme. Nous retrouvons le même moyen d'agir qui a suivi l'essai 3 c'est-à-dire que pour diminuer le nombre total de côtés, l'élève enlève une figure.

L'essai 10 est déconnecté des autres essais et est sans doute la conséquence de la régulation de l'enseignante qui avait amené les élèves à poser une addition pour trouver le nombre total de côtés.

L'essai 11 est construit sur la proposition de remettre le « 3 » barré que nous interprétons comme le retour à l'essai de départ, celui qui a 51 côtés, puis de barrer un « 4 ». Nous retrouvons une fois de plus cette manière d'ajuster qui consiste à enlever une figure pour diminuer le nombre total de côtés. Enfin, les élèves ajustent par l'ajout d'un triangle pour obtenir l'essai 12.

Ainsi, on voit que tous les essais ne sont pas le fruit d'ajustements des essais précédents. En effet, la plupart du temps, ce groupe propose des essais qui sont indépendants les uns des autres. D'ailleurs relativement aux quelques essais résultant d'un ajustement, les élèves partent d'un essai et le modifient en ajoutant ou supprimant une figure ce qui constitue une limite importante de la manière d'ajuster.

Les différents essais qui correspondent à des opérationnalisations différentes de la représentation du problème mettent en évidence :

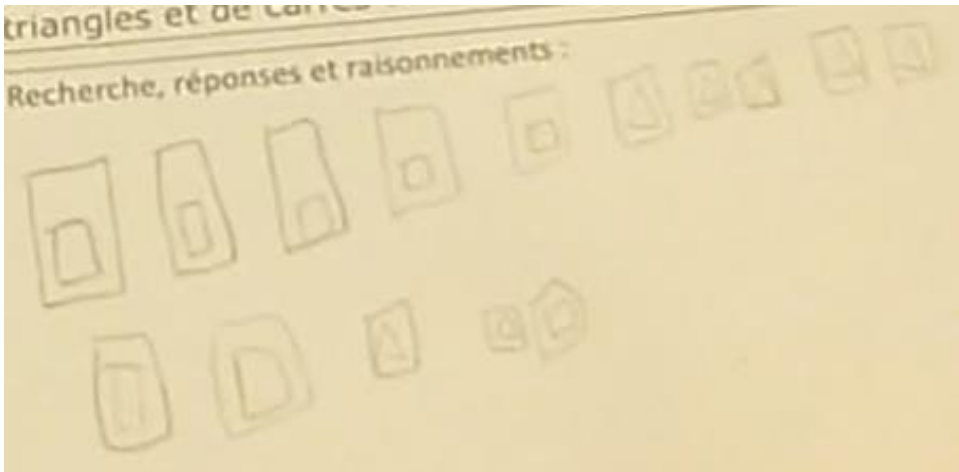
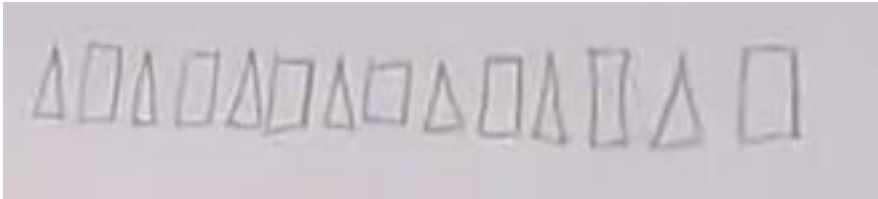
- l'impact de certaines contraintes liées à la sélection et l'interprétation des données du problème
- L'évolution de la structuration par l'abandon de contraintes ou le recours à des connaissances investies dans d'autres situations. Notons que, comme le précise Julo, cette évolution de la structuration se fait de manière non linéaire puisque chaque structuration apparaît comme ayant ses règles propres comme peuvent l'illustrer par exemple les essais 4 ; 5 et 10.

Nous pensons ainsi que la fonction de certains essais est de faire évoluer la représentation du problème.

Les rétroactions portent toutes sur l'invalidation. Seules quelques rétroactions ont été interprétées et ce sont ces interprétations qui ont permis aux élèves de remettre en cause la contrainte forte qui a pesé sur le début de la résolution.

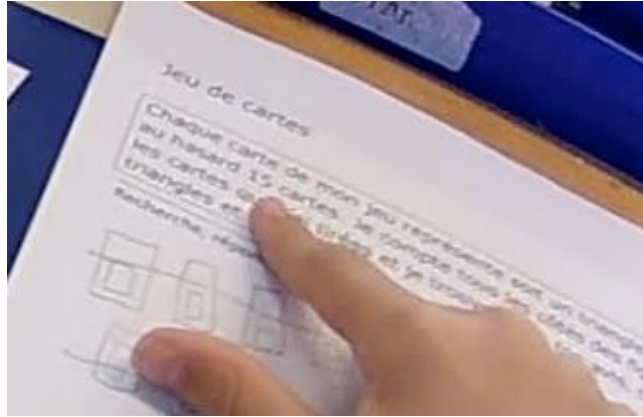
Les potentialités de certains registres de représentation sémiotique ne sont pas exploitées.

3.3 Analyse du groupe 4PCJc10

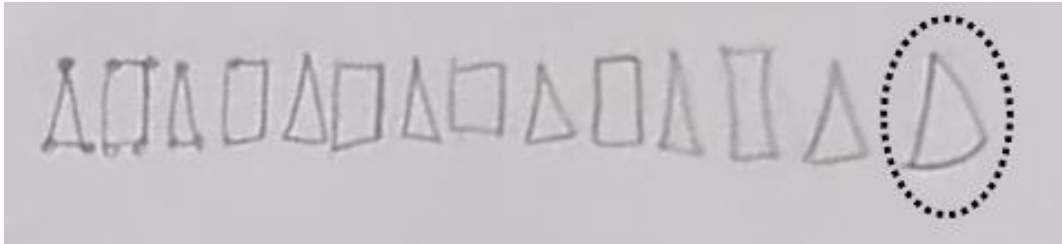
Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
<p>Essai 1 (Cyril 00:44)</p> 			
Dessin de 15 figures	Compte tous les côtés, s'arrête à 49 alors qu'il reste un certain nombre de côtés à dénombrer → fait non de la tête et barre l'essai (2:44)	Invalidation sur le nombre total de côtés	
<p>Essai 1bis (Naelle 4:45)</p> 			
Essai* réalisé pendant la phase de travail individuelle	<p>1) Compte les côtés (50 au lieu de 49) → Cyril propose de remplacer le dernier carré par un triangle « parce que là c'est 4 et là 3 ça va faire 49 » (5 :43)</p> <p>2) Naelle ne tient pas compte de cette idée et recompte les côtés (49). Cyril recompte également (49). → Naelle applaudit et Cyril dit « je dois recopier » (6:50)</p>	<p>1) L'interprétation de la rétroaction proposée par Cyril est adéquate, l'ajustement est de type quantitatif</p> <p>2) Validation de l'essai. (Le nombre de figures n'est pas vérifié.)</p>	*Production de l'essai non enregistré. Hypothèse : Naelle a dessiné une figure de chaque catégorie en comptant au fur et à mesure le nombre de côtés, arrêt à 49 côtés.
Cyril recopie l'essai qu'ils pensent être solution. Il recopie figure par figure les 4 premières puis il continue, sans consulter la feuille de sa voisine, en dessinant une figure de chaque catégorie tout en			

comptant les figures dessinées au fur et à mesure. D'ailleurs, il oublie de comptabiliser une des figures dessinées. Pendant, qu'il recopie ainsi, Naelle compte les figures sur sa copie et annonce « il y en a 14 » (7:16). Cyril s'arrête lorsqu'il a dessiné 15 figures. Il les compte et en trouve 16. Cyril invalide l'essai et en pointant l'énoncé et en disant « 15 cartes », il parvient à convaincre Naelle

« ah non mais j'ai pas pensé à ça » (8:03).



Essai 2 (8:28)



Sur son essai, Naelle remplace le dernier carré par un triangle

Compte tous les côtés (48)
→ geste rageur du point, puis elle dit « peut-être qu'il faut remplacer aussi un triangle par un carré » (9:07)

Invalidation sur le nombre total de côtés
L'ajustement proposé n'est pas pertinent puisqu'il ramène à la situation de départ.

Manière d'agir en lien avec la proposition précédente de Cyril

Essai 3 (9:08)

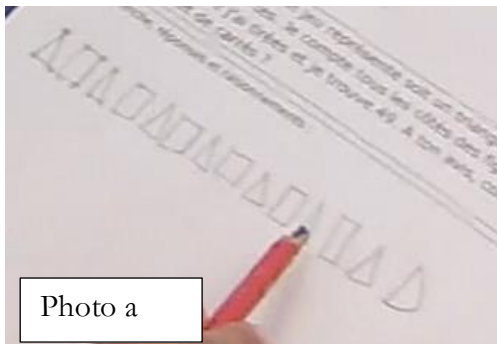


Photo a

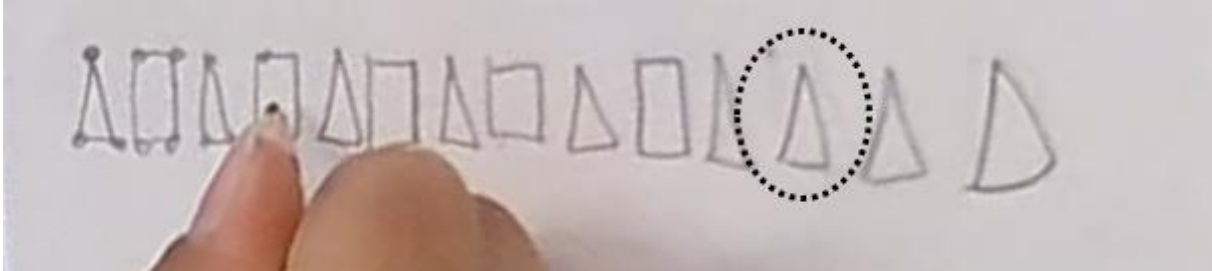
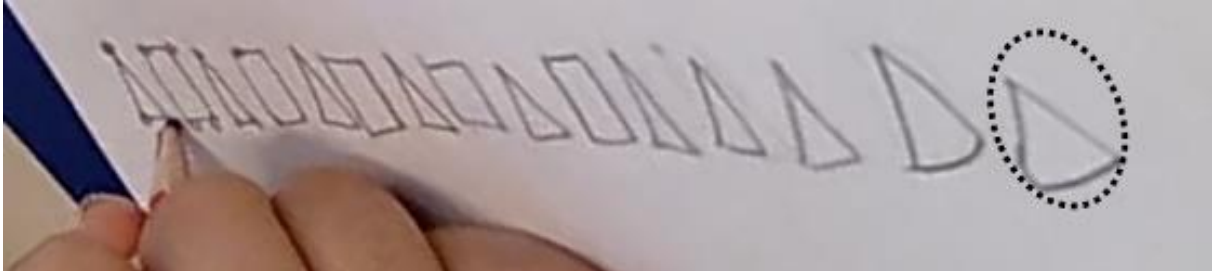
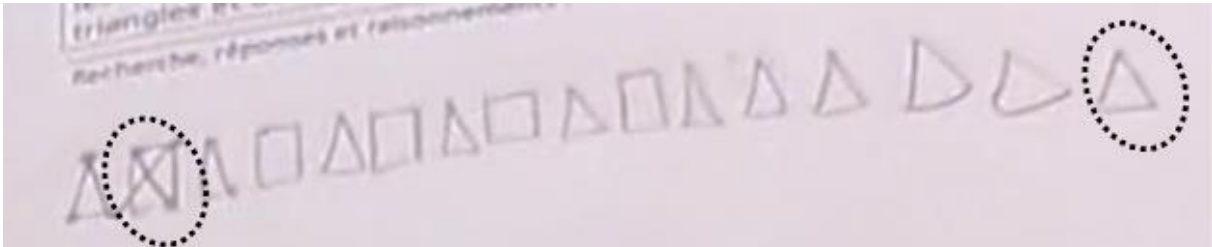


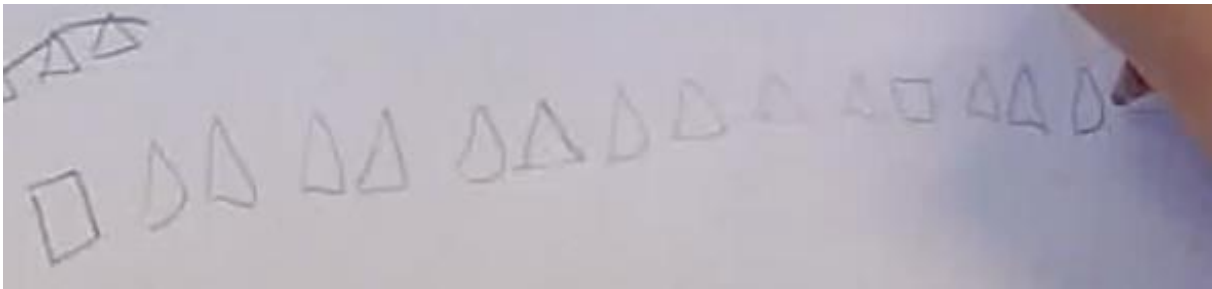
Photo b

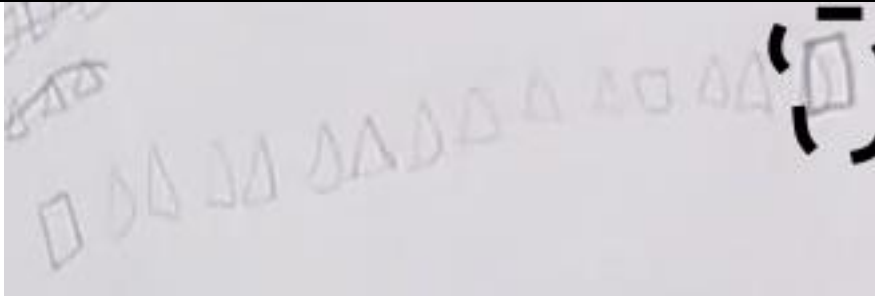
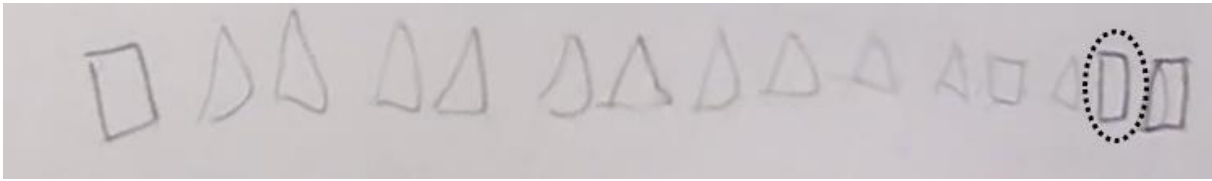
L'idée du remplacement d'un triangle par un carré est évoquée seulement en désignant (photo a)

Cyril surcompte (photo b) à partir de 48 les 4 côtés du carré (52) → Naelle efface un carré et dessine un triangle à la place

Invalidation sur le nombre total de côtés
L'ajustement proposé n'est pas pertinent

un triangle à remplacer		puisqu'il éloigne de la solution.	
Essai 4 (9:20)			
			
Naelle remplace un carré par un triangle sur son essai	Compte les figures (14) → « ah ce travail il m'énerve » (9:34) puis elle dessine un triangle supplémentaire	Invalidation sur le nombre total de figures. Ajustement pertinent du point de vue du nombre de figures.	
Essai 5 (9:40)			
			
Naelle dessine un triangle supplémentaire.	Compte tous les côtés (50) → Cyril dit « on est mort » (10:06). Naelle barre un carré et rajoute un triangle.	Invalidation sur le nombre total de côtés. Ajustement pertinent du point de vue des côtés.	
Essai 6 (10:22)			
			
Naelle barre le 1 ^{er} carré de la série et rajoute un triangle à la fin	Compte tous les côtés (47* au lieu de 49) → surcompte sur ses doigts jusqu'à 49 « ça m'énerve » (Naelle, 11:02), « si jamais il y avait une forme avec deux côtés là » (Cyril, 11:05) → compte tous	Invalidation, calcul de l'écart à la solution avec l'idée d'un ajustement pertinent par ajout d'une figure Relecture de l'énoncé	*Erreurs de dénombrement : deux sommets sont pointés pour un seul mot nombre à deux reprises

	les côtés de son essai recopié à la suite de l'essai 1bis (52) « on est mort » et il barre cet essai (12:06)		
Essai 7 (13:01)			
Naelle suggère l'idée de rajouter un triangle mais ne le dessine pas	compte à nouveau tous les côtés de l'essai 6 (50 au lieu de 49) → « ah ce 50 il m'énerve » (13:30)		
Essai 8 (13:44)			
Naelle barre le 1 ^{er} triangle et suggère de rajouter 2 carrés mais ne les dessine pas.	Essai non testé, l'enseignante intervient dans le groupe		
Essai 9 (22:40)			
Cyril évoque l'idée de dessiner 15 fois le carré.	Naelle lui répond : « mais non n'importe quoi »	L'essai est donc invalidé avant d'être testé, aucune justification n'est donnée.	
Essai 10 (22:44)			
			
Cyril dessine un autre essai de 15 figures	Compte tous les côtés (47) → Intonation particulière, Naelle surcompte de 3 côtés sur ses doigts pour arriver à 50 puis fait un geste de rage, « on est mort » (Cyril, 24:26) puis elle compte jusqu'à 4 en pointant le dernier triangle et après un temps de réflexion de quelques secondes annonce « je crois que j'ai trouvé » (24:38)	Invalidation sur le nombre total de côtés Cherche à ajuster en ajoutant une figure puis propose un ajustement pertinent du point de vue de la bonne direction.	Cet assortiment semble un peu le fruit du hasard.
Essai 11 (24:46)			

			
Naelle dessine un carré sur un triangle sur l'essai de Cyril	Compte tous les côtés (48) → geste de rage Compte à nouveau (48) → propose de remplacer un triangle par un carré	Invalidation sur le nombre total de côtés	
Essai 12 (26:20)			
			
Naelle remplace un triangle par un carré	Compte tous les côtés (49) → « quarante-neuf j'ai trouvé » Puis Cyril compte le nombre de figures (15) → ils applaudissent	Validation de l'essai- Solution trouvée	

Synthèse :

La confrontation des essais 1 (de Cyril) et 1bis (de Naelle) met en évidence deux représentations différentes du problème. Cyril, qui dessine 15 cartes vierges puis les figures, a une représentation du problème qui prend en compte les deux grandeurs de ce problème. De plus, sur l'essai 1bis de sa voisine, il propose de remplacer le dernier carré par un triangle « parce que là c'est 4 et là 3 ça va faire 49 » (5:43). Cet ajustement révèle qu'il traite ces deux grandeurs de manière simultanée. Naelle réalise un premier essai qui compte bien 49 côtés mais pour 14 figures seulement. Sa représentation du problème se caractérise ainsi par la prise en compte d'une seule donnée du problème. De plus, l'essai se présente sous la forme de la succession d'une figure de chaque catégorie ce qui constitue une contrainte supplémentaire pour ce problème.

Pour les essais 2, 3 et 4, Naelle ajuste en mettant en œuvre le même mode d'action que celui proposé par Cyril (remplacement d'une figure par une autre) mais dans des situations où ce n'est pas pertinent c'est-à-dire relativement à des essais qui ne comptent que 14 figures. Ce n'est qu'à l'issue de l'essai 4 que la représentation du problème semble évoluer vers la prise en compte des deux grandeurs. À ce stade nous faisons l'hypothèse que, sur le début de la recherche, Naelle ne met pas en lien le remplacement de figures et l'effet qu'il peut avoir.

À l'essai 6, ce même mode d'action est pertinent et permet d'ailleurs d'obtenir la solution. L'ajustement se fait dans la bonne direction. L'erreur de dénombrement ne permet cependant pas à Naelle de valider cet essai. Le fait qu'elle ne décèle pas l'erreur révèle qu'elle n'anticipe pas le nombre total de côtés qu'elle aurait dû obtenir. Ainsi, si l'effet du remplacement de figures commence à émerger, cet effet se limite à l'aspect qualitatif et ne concerne pas l'aspect quantitatif c'est-à-dire relativement au nombre total de côtés en plus ou en moins.

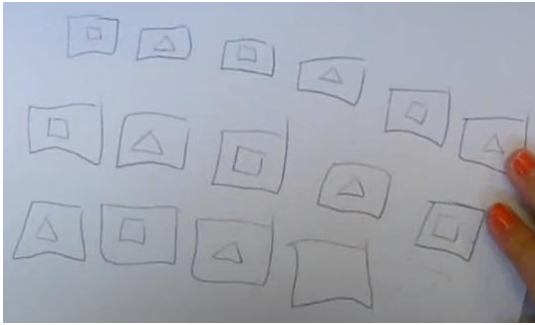
L'essai 10 proposé par Cyril est une remise à zéro, ne s'appuyant sur aucun autre essai.


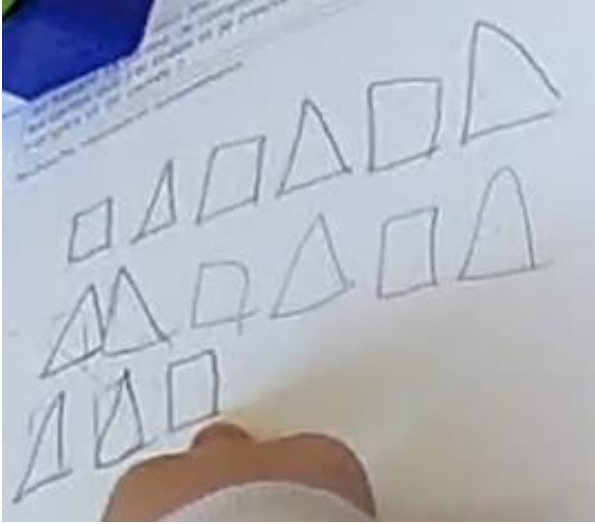
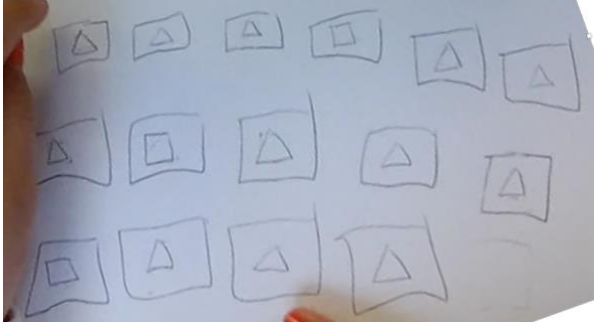
Les ajustements des essais 11 et 12 sont dans la bonne direction ce qui confirme que le remplacement de figures est utilisé de façon adéquate du point de vue qualitatif. Ceci étant, avant l'ajustement pertinent de l'essai 11, Naelle s'exclame « je crois que j'ai trouvé » (24:38) et son geste de rage lorsque le test de l'essai donne 48 indique qu'elle s'attendait vraiment à obtenir la bonne réponse. Le remplacement de figures n'est pas mis en relation quantitativement avec son effet précis sur le nombre total de côtés.

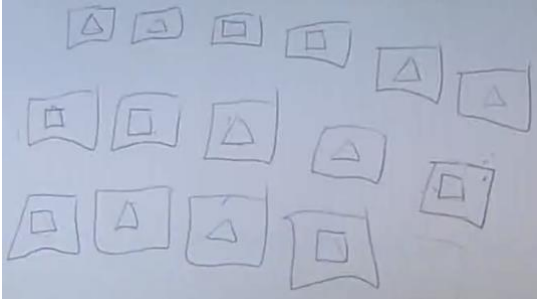
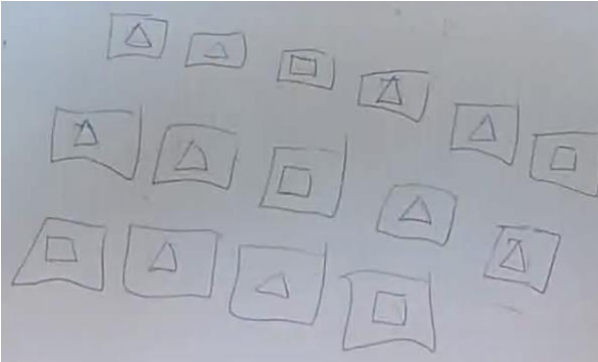
Au fil de ses essais, Naelle semble construire un lien de type qualitatif entre la manière d'ajuster qui consiste à remplacer des figures et l'effet sur le nombre total de côtés. Néanmoins l'aspect quantitatif de ce lien ne semble pas compris, en tout cas, il n'est pas opérationnel chez cette élève.

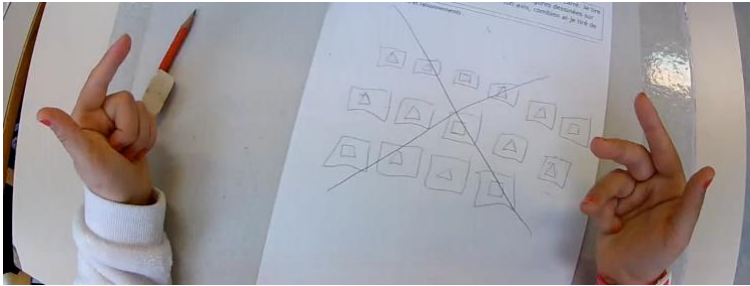
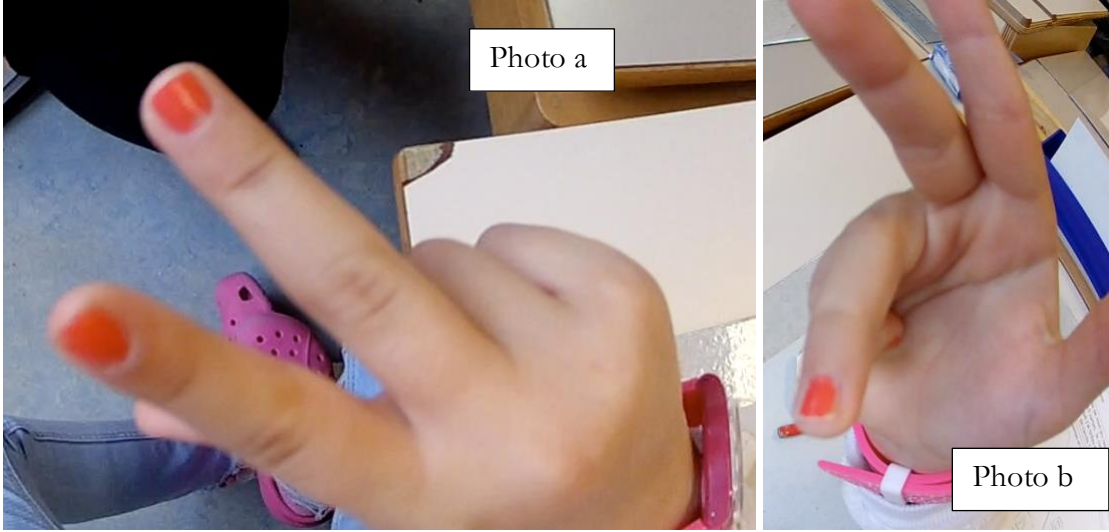
La représentation du problème évolue rapidement vers une représentation adéquate correspondant à la prise en compte simultanée des deux grandeurs. Tout se passe comme si Naelle disposait d'un mode d'action, introduit dans le milieu par Cyril au début du travail de groupe, mais sans vraiment en connaître les effets sur le nombre total de côtés. Cela nous semble être en lien avec l'« effet structurant de l'action » dont parle Julo (1995, p. 55). À l'inverse, Cyril dispose à la fois du mode d'action et des connaissances relatives mais il ne les exploitera plus après le 1^{er} essai.

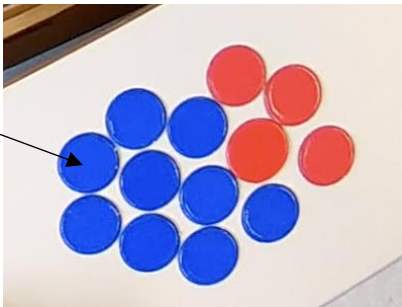
3.4 Analyse du groupe 4PSJc12

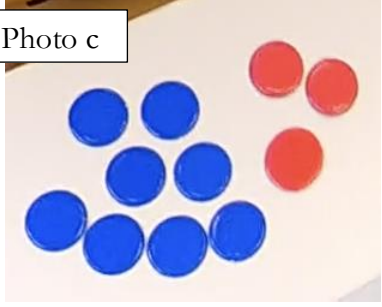
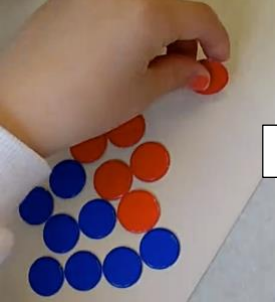
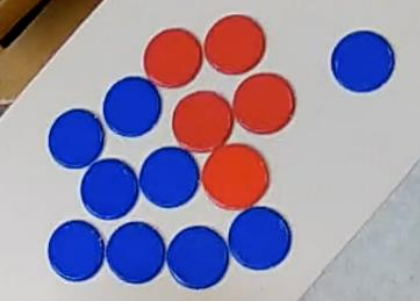
Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
Essai 1 (Solenne, pendant la phase de travail individuel 4:30)			
			
Solenne dessine 15 cartes vierges puis les complète en dessinant, de manière alternée, un carré et un triangle. Elle compte les côtés au fur et à mesure du dessin des figures. Elle s'arrête à 49.	→ « Ah ça marche pas » 6:28	Invalidation sur le nombre total de figures	
Essai 2 (Solenne, pendant la phase de travail individuel 6:35)			

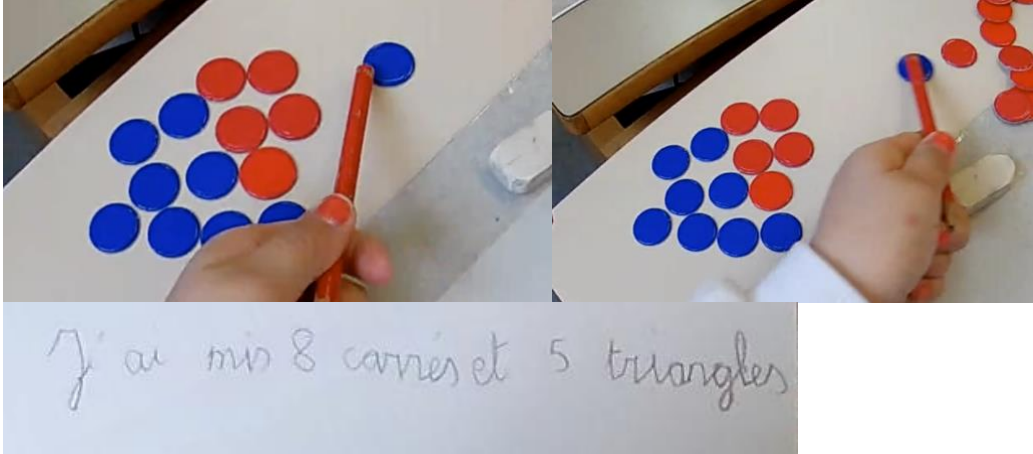

			
<p>Elle efface le 1^{er} carré et dessine un triangle à la place.</p>	<p>Partant de 49, elle décompte de 4 et surcompte de 3 (48) → elle prend son stylo et donne l'impression qu'elle s'apprête à dessiner une figure dans la dernière carte vierge mais elle est interrompue par l'enseignante</p>	<p>L'essai ne semble pas finalisé puisque Solenne semblait vouloir compléter la carte vierge.</p>	
<p>Essai 2bis (Darell, pendant la phase de travail individuel testé à 7:30)</p>			
			
<p>15 figures dessinées</p>	<p>Compte tous les côtés → il s'arrête de compter à 49 et dit « non ça marche pas » (7:58)</p>	<p>Invalidation sur le nombre total de côtés</p>	
<p>Essai 3 (8:31)</p>			
			

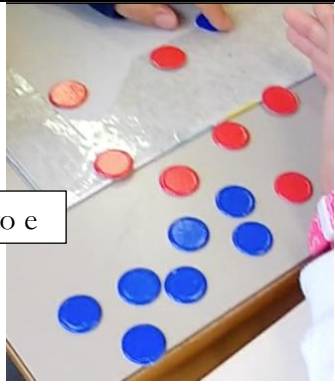
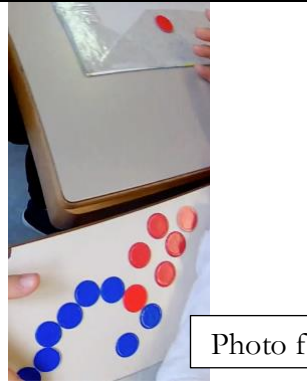
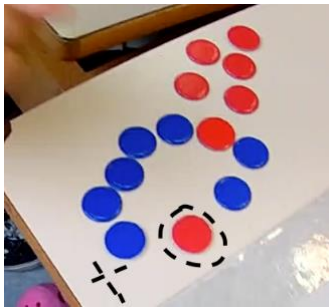
Nouvel essai en répétant le motif 3 triangles et 1 carré	Compte tous les côtés au fur et à mesure (48) → geste d'humeur et s'exclame « Non il me reste un je suis à 48 » (10:03), elle compte à nouveau	Invalidation sur le nombre total de côtés Écart au but verbalisé	
Essai 4 (10:57)			
Proposition d'un nouvel essai basé sur la répétition du motif 2 triangles et 1 carré		Essai rapidement interrompu pour proposer un autre motif	
Essai 5 (11:20) 			
Nouvel essai basé sur la répétition du motif 2 triangles et 2 carrés	Compte tous les côtés au fur et à mesure (52) → « je suis à 52 » (12:20) dit en se repoussant de la table	Invalidation sur le nombre total de côtés	
Essai 6 (12:38) 			
Nouvel essai basé sur la répétition du motif 2 triangles et 1 carré	Compte tous les côtés au fur et à mesure (51), Darell trouve 50 → Darell pointe qu'ils ne trouvent pas le même nombre, Solenne lui répond « c'est pas grave de toutes façons c'est plus »	Invalidation sur le nombre total de côtés L'écart n'est pas considéré, seul le fait que ce soit plus est retenu par Solenne.	
Essai 7 (14:18)			

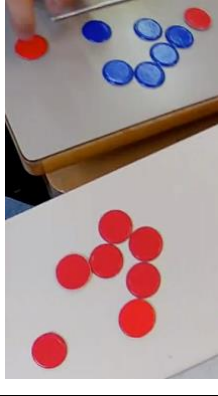
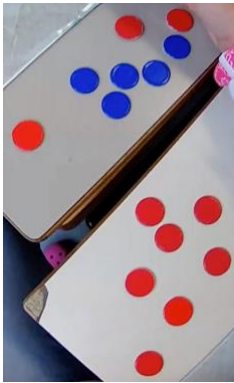

Évocation d'un nouvel essai basé sur la répétition du motif 3 carrés et 2 triangles		Essai non dessiné et non testé	
Essai 8 (15:31)			
			
Solenne compte de 4 en 4 à l'aide de ses deux mains	Arrêt à 48 côtés pour la 12 ^e figure → idée de Darell de compter de 3 en 3 à partir de 40	Invalidation sur le nombre total de côtés	
Essai 9 (16:52)			
Darell suggère de compter 3 en 3 à partir de 40	Ils trouvent 49 → « ah oui ça marche on a trouvé » (16:48) puis dans un 2 ^e temps ils cherchent à déterminer le nombre de cartes (13)	Validation du nombre total de côtés Invalidation du nombre de cartes	
Essai 10 (19:50)			
			
Solenne propose de déduire 12 côtés aux 49 à atteindre (en montrant 3 sur ses doigts- Photo a) puis ils surcomptent de 3 en 3 jusqu'à 49 à	Ils trouvent que cela donne 14 cartes (Photo b) → « Non il nous reste un ah » (20:15)	Invalidation du nombre de cartes	

partir du résultat obtenu (37)			
Essai 11 (21:42)			
Nouvel essai en comptant de 4 en 4 puis de 3 en 3 à partir de 36.	Naelle mémorise sur ses doigts le nombre de figures comptées au fur et à mesure. Arrêt à 49. → « il nous faut encore 2 cartes là par contre » (22:25)	Invalidation du nombre de cartes	
Essai 12 (23:50)			
Solenne propose d'aller jusqu'à 20 en comptant de 4 en 4 puis de continuer en comptant de 3 en 3.	Suggère cette idée et conclut en disant « ou ça va faire beaucoup ». (23:56)	Essai non testé	
Essai 13 (23:57)			
Même idée évoquée mais jusqu'à 30 au lieu de 20.		Essai non testé	
Essai 14 (24:03)			
Nouvel essai en comptant de 4 en 4 jusqu'à 20 puis ils ajoutent 4 triangles puis 1 carré et arrêtent.	Essai interrompu en cours « attends je suis perdue mais il faut qu'on écrive combien il y a de carrés et combien de triangles du coup pendant que je compte on sait pas les carrés ni les triangles » (24:38)	Essai non testé La mémorisation du nombre total de figures sur les doigts ne leur permet pas de retrouver la répartition carrés/triangles dans cet essai où ils mélangent les figures.	
Essai 15 (28:00)			
<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-right: 10px;">carré</div>  <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-left: 10px;">triangle</div> </div>			

<p>Nouvel essai commencé avec des jetons bleus (correspondants aux carrés) puis des jetons rouges (pour les triangles) à partir de 36.</p>	<p>Ils comptent les côtés au fur et à mesure tout en rajoutant un jeton de la couleur correspondante. Arrêt à 48. --> « il faut qu'on arrive à 49 avec les jetons comme ça et après on compte s'il y a 15 de cartes » (30:08)</p>	<p>Invalidation sur le nombre total de côtés</p>	
<p>Essai 16 (30:32)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>Photo c</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Photo d</p> </div> </div>			
<p>Ils repartent d'une partie des jetons précédents (Photo c) et complètent l'essai en cherchant à obtenir les 49 côtés</p>	<p>Après avoir rajouté plusieurs triangles, ils trouvent 50. (Photo d) → petit arrêt dans le comptage à 49 puis l'intonation change pour dire 50.</p>	<p>Invalidation sur le nombre total de côtés</p>	
<p>Essai 17 (31:02)</p> <div style="text-align: center;">  </div>			
<p>Darell propose d'enlever un jeton rouge et de mettre un jeton bleu à la place.</p>	<p>Darell justifie son idée « parce que $44 + 5^*$ est égal à » (31:05) pour lui répondre, Solenne effectue ce calcul et trouve 49 → « yes on a trouvé » (31:12)</p>	<p>Validation du nombre total de côtés Pas de test du nombre de total de figures</p>	<p>Ils pensent avoir trouvé la solution. *Deux interprétations possibles de l'erreur commise ici. Soit Darell cherche à obtenir 49 sans mettre en relation l'écart trouvé (5) avec une des figures. Soit il voulait dire $45 + 4$ (inversion produite à l'oral), l'erreur se situant</p>

			plutôt sur le nombre de côtés qui est effectivement de 47 et non 45.
<p>Pendant qu'ils écrivent la phrase réponse, Solenne enlève le dernier jeton bleu rajouté en disant, « non ça on l'avait pas pris » (31:35)</p>			
			
<p>Pendant la régulation, l'enseignante leur demande de recompter. Ils trouvent 47 puis 51 après l'ajout d'un carré. Ils invalident leur essai. L'enseignante leur indique également que leur essai ne comporte pas 15 cartes « ah oui on a oublié ce détail » (34:30). Les élèves comptent le nombre total de jetons et trouvent 13.</p>			
Essai 18 (35:00)			
			
Solenne propose un essai « au hasard » en complétant l'essai précédent de manière à obtenir 15 jetons	Compte les côtés correspondants → s'arrête à 48 alors qu'il reste encore 2 jetons rouges à dénombrer	Invalidation sur le nombre total de côtés	
Essai 19 (35:55)			

			
<p>Solenne remplace un jeton bleu par un jeton rouge sur l'essai précédent (Photo e)</p>	<p>Compte les côtés correspondants → s'arrête à 50 alors qu'il reste encore 1 jeton rouge à dénombrer (Photo f)</p>	<p>Invalidation sur le nombre total de côtés</p>	
<p>Essai 20 (37:11)</p> 			
<p>Darell échange un jeton bleu contre le jeton rouge situé en haut de la photo f. Ces deux jetons faisaient partie initialement de l'essai précédent</p>	<p>Compte les côtés correspondants (49) → Ils s'écrient « yes » ensemble puis comptent les jetons</p>	<p>Validation du nombre total de côtés Invalidation sur le nombre total de cartes En échangeant ces deux jetons qui font partie du même essai puis en retirant le jeton bleu au moment du comptage, ils réalisent un essai qui comporte 14 jetons.</p>	
<p>Essai 21 (38:50)</p>			

				
<p>Ils remplacent un jeton bleu par un jeton rouge et rajoutent un jeton rouge.</p>	<p>Avant de compter, Solenne dit « attends je crois que ça va faire 48 euh 50 je sais pas vas-y essaie » (39:00)</p> <p>Compte les côtés correspondants (51) → intonation de voix change</p>	<p>Invalidation sur le nombre total de côtés</p>		
<p>Essai 22 (41:04)</p> <div data-bbox="727 920 962 1301" data-label="Image">  </div>				
<p>Ils remplacent un jeton bleu par un jeton rouge.</p>	<p>Compte les côtés correspondants (50) → pause à 49 puis changement d'intonation pour dire 50</p> <p>« attends ça fait 50 »</p>			
<p>Essai 23 (41:38)</p> <div data-bbox="722 1581 967 1962" data-label="Image">  </div>				

Ils remplacent un jeton bleu par un jeton rouge.	<p>Avant de compter, Solenne dit : « attends ça fait 49 regarde » (41:45)</p> <p>Compte les côtés correspondants (49) → ils s'écrient « yes » ensemble puis comptent tous les jetons (15) « yes » une fois de plus</p>	Solution trouvée	
--	--	------------------	--

Synthèse :

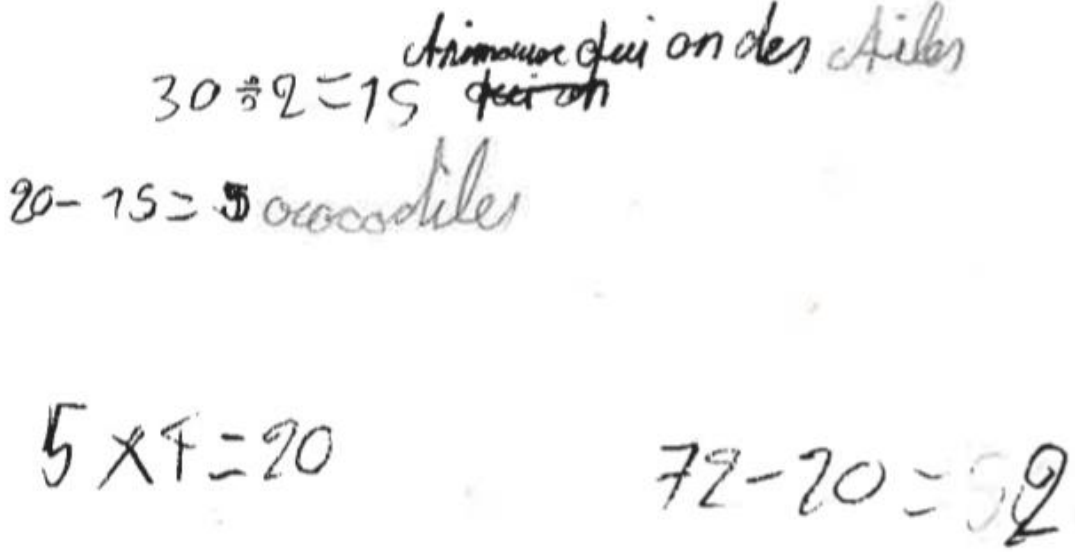

La représentation initiale de Solenne mise en évidence par son 1^{er} essai peut se caractériser par la prise en compte des deux grandeurs en jeu à laquelle s'ajoute la contrainte de proposer un essai qui s'appuie sur la répétition d'un même motif de figures. Les essais 3 à 7 ont comme point commun cette représentation du problème qui s'opérationnalise au travers du même registre de représentation sémiotique. Les ajustements entre chacun de ces essais concernent le motif qui est répété. Aucune interprétation n'est proposée par les élèves, seule l'invalidation est l'objet des rétroactions. D'ailleurs, à la suite du test de l'essai 6, les deux élèves ne comptabilisent pas le même nombre de côtés et Solenne conclut : « c'est pas grave de toutes façons c'est plus ». Cette remarque montre le fait que l'écart au but puisse être exploité pour proposer un autre essai plus proche de la solution n'est pas acquis ou au moins n'est pas un élément important à prendre en considération pour résoudre ce problème. La limite de cette contrainte du respect d'un motif est indéniable puisque le motif de l'essai 3 aurait pu permettre d'obtenir la bonne réponse à condition de commencer par le carré.

Ensuite, Darell propose de compter de 4 en 4 puis peu après il propose « de faire un calcul jusqu'à on arrive à 40 » (15:07). Cette idée provoque une restructuration de la représentation du problème pour les essais 8 à 14. Les élèves opérationnalisent cette idée en effectuant un double comptage sur les doigts : des figures et des côtés. Solenne tente tout d'abord de gérer seule le double comptage puis demande de l'aide. Darell compte les côtés tandis que Solenne compte les figures. Les ajustements portent sur le nombre de carrés, plus exactement, le nombre de côtés correspondants qui est tour à tour de 40, 36, 20 puis 30. La manière de compléter l'essai évolue à l'essai 14 puisque les élèves ajoutent 4 triangles puis un carré. L'obstacle ou plutôt la limite de ce registre de représentation sémiotique est perçue rapidement par Solenne : « attends je suis perdue mais il faut qu'on écrive combien il y a de carrés et combien de triangles du coup pendant que je compte on sait pas les carrés ni les triangles » (24:38). Leur manière d'agir à l'appui des doigts ne leur permet pas de retrouver le nombre de triangles et de carrés de l'essai qu'ils testent dès lors qu'ils ajoutent tantôt des triangles tantôt des carrés.

L'utilisation de jetons est la solution que les élèves mettent en œuvre pour conserver la mémoire de la composition de l'essai testé. Les essais 15 à 23 sont ainsi réalisés avec des jetons bleus représentant les carrés et des jetons rouges pour les triangles. Dans le premier temps de cette phase de recherche avec les jetons (essais 15 à 17), les élèves tentent d'obtenir 49 sans tenir compte de la donnée des 15 cartes, donc de 15 jetons. Ils y parviennent et c'est l'enseignante qui les aide à invalider leur essai. La mobilisation de ce nouveau registre semble avoir perturbé la représentation que les élèves ont du problème puisqu'ils n'ont pris en compte qu'une seule des deux grandeurs. Dans un deuxième temps, ils vont constituer un essai composé de 15 jetons puis ajuster de manière à conserver ces 15 jetons tout en essayant d'obtenir les 49 côtés. La conservation des 15 jetons les amène, de manière assez naturelle, à ajuster en proposant des échanges de jetons. Les échanges sont à chaque fois pertinents.

Il apparaît que la stabilité de la représentation du problème associée à la stabilité du registre de représentation sémiotique utilisé a permis à Solenne de construire une règle d'action qui lui a permis de mettre en relation le remplacement de figures et son effet sur le nombre total de côtés. En effet, avant le test de l'essai 21 obtenu par le remplacement d'un carré par un triangle et l'ajout d'un triangle, Solenne tente d'anticiper le nombre total de côtés « attends je crois que ça va faire 48 euh 50 je sais pas vas-y essaie » (39:00) mais sans trop de certitude. Avant le test de l'essai 23 obtenu par le remplacement d'un carré par un triangle, Solenne annonce avec beaucoup plus d'assurance « attends ça fait 49 regarde » (41:45), anticipation qui s'avère être exacte. Si l'on compare avec l'essai 2 obtenu lui aussi par le remplacement d'un carré par un triangle, Solenne avait décompté de 4 puis surcompté de 3 pour trouver le nombre total de côtés. La régularité des effets des ajustements des derniers essais semble être repérée par Solenne qui en induit une règle d'action que nous pourrions formuler ainsi : 'si je remplace un carré par un triangle, le nombre total de côtés diminue de un'.

3.5 Analyse du groupe 8PSDr3

Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
<p>Erwann a trouvé précédemment qu'il y a 5 crocodiles. Les essais portent sur la détermination du nombre de perroquets et de dragons comme l'ont fait les élèves précédents de 4P avec le <i>jeu de cartes</i>.</p> <p style="text-align: center;">  </p>			
<p>Essai 1 (10:16)</p> <p style="text-align: center;">  </p>			
<p>Essai avec 14 dragons et 1 perroquet « Maintenant on va faire le maximum de</p>	<p>Calcul de 14×4 à la calculatrice (56) → « 56 donc c'est pas possible il y a pas 14</p>	<p>Invalidation sur le nombre de pattes</p>	

chacun donc combien avec 14 dragons » (Erwann, 10:16)	dragons » (10:48) et il barre le facteur « 14 »		
Essai 2 (10:54)			
Il écrit 13×4			
Essai avec 13 dragons	Calcul de 13×4 à la calculatrice (52) → « donc c'est pas possible non plus il faut quand même qu'il y ait au moins 2 perroquets » (10 :58) et il barre le facteur « 13 » puis efface les deux multiplications en ligne	Invalidation sur le nombre de pattes	
Essai 3 (11:09)			
Essai avec 12 dragons	La réponse de 12×4 est calculée avant même que l'opération soit écrite (48) → « attendez 48 c'est possible ça ça fait 48 plus 4 parce qu'il y a 2 perroquets qui ont 2 pattes c'est possible » (11:13)	Pas d'invalidation dans un premier temps puisqu'il réussit à trouver un assortiment qui vérifie la donnée 52 du problème Le nombre d'animaux n'est pas testé.	
Essai 4 (13:14)			
Essai avec 12 dragons et 3 perroquets	Erwann prend la calculatrice commence à taper « $12 \times$ » puis s'interrompt et dit « non c'est pas possible » (13 :24)	Invalidation	
Essai 5 (13:30)			
Essai avec 11 dragons et 4 perroquets	Erwann propose « il nous faudrait 11 dragons [il tape en même temps 11×4 puis 2×4] » (13 :28) → après avoir effectué les calculs « ouais mais attends ça pourrait être autrement non on essaie quand même » (13 :40)	Validation de cet essai mais fait l'hypothèse qu'il pourrait y avoir une autre solution possible.	
Essai 6 (13:48)			

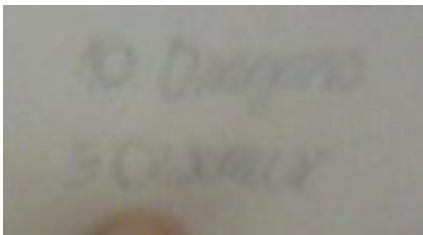
Essai avec 10 dragons et 5 perroquets	Calculs effectués à la calculatrice → « ouais ça doit être ça c'est obligé d'être ça donc c'est 11 dragons et 4 perroquets » (14:04)	Invalidation de cet essai. Invalidation de l'hypothèse d'une 2 ^e solution (sans justification verbalisée). Test du nombre d'ailes et de têtes	
---------------------------------------	--	--	--

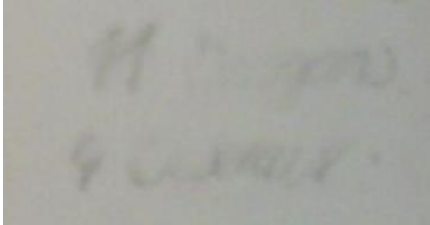
Synthèse :

Dans cette série d'ajustements d'essais successifs, les élèves partent d'un cas extrême possible (14 dragons et 1 perroquet) et testent le nombre de pattes. Chaque nouvel essai est construit à partir du précédent par le remplacement d'1 dragon par 1 perroquet. La nature systématique les amène à trouver la solution en quelques essais. Les verbalisations relatives aux interprétations des rétroactions portent sur l'invalidation.

Ce parcours systématique des différents essais a pris le pas sur la construction d'une règle qui lie le remplacement de figures et son effet sur le nombre de côtés.

3.6 Analyse du groupe 8PVDr2

Éléments descriptifs de l'essai	Description de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
Les élèves ont trouvé qu'il y a 5 crocodiles et ont déduit qu'il reste 52 pattes pour les deux catégories d'animaux restant. Gauthier affirme : « maintenant on a plus qu'à estimer des trucs » (9:33)			
Essai 1 (10:02)			
		10 Dragons 5 Oiseaux	
Essai avec 10 dragons et 5 perroquets « Je dis un truc au bol je dis il y a 10 dragons et 5 perroquets » (10:02)	- Calcul du nombre total de têtes → « déjà là on est bons » (10:28) - Calcul du nombre total de pattes → « ah on est presque 70 pattes »	Validation du nombre total de têtes Invalidation du nombre total de pattes	
Essai 2 (11:20)			

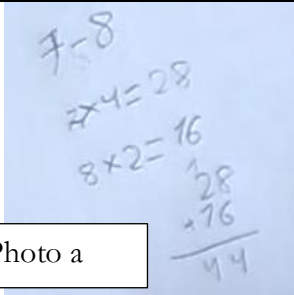
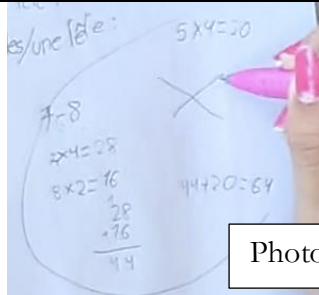
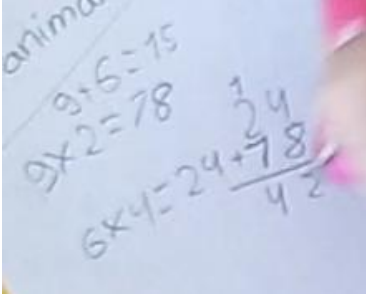
		11 Dragons 4 Oiseaux
Essai avec 11 dragons et 4 perroquets « Si on enlève un perroquet et on ajoute 1 dragon ça fait moins 2 plus 4 » (11:18)	- Calcul du nombre total de têtes - Calcul du nombre total de pattes (72) → « on a trouvé » (11:58)	Validation du nombre total de têtes et de pattes → solution trouvée

Synthèse :

Le 1^{er} essai, effectué au hasard, tombe très proche de la bonne solution. La justification « ça fait moins 2 plus 4 » montre que les élèves font le lien entre le nombre d'animaux et le nombre total de pattes. La représentation du problème semble s'appuyer sur un traitement simultané des grandeurs en jeu et les connaissances mathématiques investies sont efficaces.

3.7 Analyse du groupe 8PVDr9

Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
Essai 1 (8:09)			
Louise explique qu'elle a fait un essai avec 7 dragons et 8 perroquets et aussi avec 4 dragons et 11 perroquets mais que ça ne marche pas. (8:10)	Calcul du nombre de pattes : Elle a écrit : $4*7=28$ puis $8*2=16$ et a posé $28*16$ → « ça ne marche pas parce que c'est trop » (8:18)	Invalidation sur le nombre total de pattes	
Essai 2 (11:07)			

			
<p>Reprise de l'essai 7 dragons et 8 perroquets</p>	<p>Calcul du nombre de pattes (Photo a) « c'est peut-être juste si on rajoute combien de fois quatre » (12:55). Calcul du nombre total de pattes, crocodiles compris → « non c'est faux » (13:12) Lucie explique son raisonnement « si t'as 15 animal avec ailes t'auras forcément 5 animal sans ailes » (13:30) qui lui permet de trouver le nombre de crocodiles puis d'invalider (elle dessine une croix Photo b) « 44 plus 20 ça fait pas 72 » (13:40).</p>	<p>Invalidation sur le nombre total de pattes Interprétation de la rétroaction : Louise souhaite calculer l'écart au but</p>	
<p>Interprétation de la rétroaction par les élèves suite à l'essai 2 (13:45) :</p> <p><i>Lucie : 44 plus 20 ça fait pas 72</i></p> <p><i>Louise : ça fait ça fait combien</i></p> <p><i>Lucie : mais je m'en fous de toutes façons ça fait pas le chiffre</i></p> <p><i>Louise : mais il faut savoir combien ça fait pour savoir s'il faut faire plus ou moins</i></p> <p><i>Lucie : [calculant la somme] ça fait 64</i></p>			
<p>Essai 3 (14:05)</p> 			
<p>Essai 9 perroquets et 6 dragons.</p>	<p>Calcul du nombre de pattes → « j'arrive à 42 sauf que c'est moins »</p>	<p>Invalidation sur le nombre total de pattes</p>	

Interprétation de la rétroaction par les élèves suite à l'essai 3 (15:07) :

Lucie : j'arrive à 42 sauf que c'est moins

Louise : mais c'est ce que je t'ai dit avant je t'ai dit faut pas faire lui c'est moins

Lucie : ben il faut juste essayer dans l'autre sens parce que en fait nous on a fait que 9 c'était fois 2 donc les pattes sauf que si tu fais fois 4 ça fait forcément plus

Essai 4 (15:40)

Essai 6 perroquets et 9 dragons

Calcul du nombre total de pattes → « Je suis arrivée à 68 » (Lucie, 16:20), elle dessine une croix à côté de l'essai. « mais on se rapproche » (Louise, 17:12)

Invalidation sur le nombre total de pattes

Interprétation de la rétroaction par les élèves suite à l'essai 4

Lucie : on fait 10 et 5

Louise : on fait 10 fois 4 [dit sur un ton interrogatif]

Lucie : moi j'ai fait 10 fois 4

Louise : ben alors moi je fais 10 fois 2

Essai 5 (Louise 17:10)

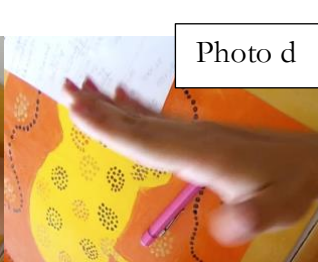
(Non visible)

Essai 5 dragons et 10 perroquets

Calcul du nombre total de pattes → « 40 Lucie ça c'est faux »

Invalidation sur le nombre total de pattes

Essai 5bis (Lucie 17:25)

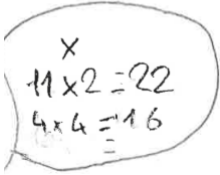
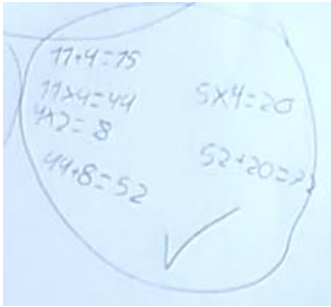


Essai 10 dragons et 5 perroquets.

Calcul du nombre total de pattes → « moi aussi c'est faux en fait Louise moi il

Invalidation sur le nombre total de pattes

« truc à l'envers » est accompagnée du geste (photos c-d-e)

	manque 2 donc je pense que c'est le truc à l'envers » (Lucie, 19:30) « Non à l'envers ça donne 40 sans ajouter les 20 [...] il faut essayer 11 et 4 » (Louise, 19:42)		→ expression pour désigner la composition symétrique
(Échanges à 20:10) <i>Louise</i> : [désignant le perroquet et dit sur un ton interrogatif] c'est lui qui a 11 <i>Lucie</i> : oui enfin moi je vais faire comme ça <i>Louise</i> : ok bon alors moi je fais que c'est le dragon qui a 11 <i>Lucie</i> : non non parce que moi si je continue dans ma logique moi le 11 c'est lui [désignant le dragon] qui l'a <i>Louise</i> : ok bon alors moi je fais 11 fois 2			
Essai 6 (Louise, 20:23)			
			
Essai 4 dragons et 11 perroquets	Calcul du nombre total de pattes → « non ça fait pas assez dans ce sens là » (20:45)	Invalidation sur le nombre total de pattes	
Essai 6bis (Lucie, 20:26)			
			
Essai 11 dragons et 4 perroquets	Calcul du nombre total de pattes → (20:47) - ben moi c'est juste - oh c'est juste ça veut dire que peut-être on a trouvé - ben oui Elle entoure l'essai « Voilà »	Validation sur le nombre total de pattes	

Synthèse :

Ces élèves proposent des premiers essais qui s'appuient sur la donnée des 30 ailes. Pour tester le 1^{er} essai, Louise calcule le nombre de pattes des 7 dragons et 8 perroquets. Elle invalide cet essai

car elle trouve 448 pattes suite à une erreur sur la manière de calculer (elle a multiplié le nombre de pattes des dragons par le nombre de pattes des crocodiles). Après s'être rendu compte de cette erreur de mise de sens, les élèves reprennent ce même essai (essai 2).

Cependant, cet essai sur les animaux à ailes ne peut pas être testé directement car elles ne connaissent pas le nombre de pattes correspondant à ces animaux. C'est sans doute ce qui amène Lucie à déduire qu'il y a 5 crocodiles qui ont 20 pattes, information qui sera exploitée lors du test de tous les essais suivants. L'essai 2 est invalidé car « 44 plus 20 ça fait pas 72 » (13:40). S'ensuit un échange très intéressant relativement à l'interprétation de cette rétroaction qui met en évidence que Louise souhaite connaître l'écart au but car « il faut savoir combien ça fait pour savoir s'il faut faire plus ou moins ». Tandis que pour Lucie cet écart n'a pas d'importance : « mais je m'en fous de toutes façons ça fait pas le chiffre ». Bien que Louise ait proposé de calculer cet écart au but, elle ne l'exploitera pas une seule fois au cours de la résolution. Nous faisons l'hypothèse qu'elle ne parvient pas à interpréter cet écart sur le nombre de pattes en un ajustement sur le nombre d'animaux. D'ailleurs, avant chaque essai, c'est elle qui demande si par exemple : « on fait 10 fois 4 » et plus tard encore « [désignant le perroquet et dit sur un ton interrogatif] c'est lui qui a 11 ».

Lucie n'exploite pas du tout cet écart comme le prouve cette interprétation de la rétroaction (essai 5bis) « c'est faux en fait Louise moi il manque 2 donc je pense que c'est le truc à l'envers ».

Ainsi, ce n'est pas l'exploitation de l'écart au but qui va guider les ajustements mais plutôt un parcours organisé et systématique de l'espace problème :

- organisé par le test d'un essai (par exemple 5 dragons et 10 perroquets) et de son symétrique (10 dragons et 5 perroquets) impulsé par Lucie : « il faut juste essayer dans l'autre sens » (15:07) puis plus tard « je pense que c'est le truc à l'envers » (19:30) accompagné du geste de la main (photos c-d-e).

- systématique car les essais diffèrent d'une unité à chaque fois relativement au nombre d'animaux. Cet aspect systématique apparaît dans la suite des essais réalisés (6-9 puis 5-10 puis 4-11) et est verbalisé par Lucie : « moi si je continue dans ma logique moi le 11 c'est lui [désignant le dragon] qui l'a » (20:10)

3.8 Analyse du groupe 10CTBa7

Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
Essai 1 (21:12)			
10 – 10 et 6 (sans que l'on sache à quel type de ballon ces prix correspondent)	« ça fait 26 » mais aucun élève n'exploite ce résultat pour invalider. Ils n'ont pas l'air d'accord sur la manière de calculer le montant total puis ils semblent partir sur autre chose.	Pas de test de l'essai à proprement parlé.	
Essai 2 (22:18)			

Part de la proposition de prix $b=6$ et $f=6$ puis à l'aide de la 1 ^e commande déduit 24 CHF pour les ballons de rugby	Lorsqu'il trouve 24 CHF pour les ballons de rugby, il vérifie à la calculatrice $48+24$ et s'exclame : « c'est bon j'ai trouvé » Lenny invalide cette idée en calculant le prix d'un ballon de chaque sport « $6+6+6$ ça fait 18 ». Adam propose d'arrondir.	Validation (Adam) sur la base de la <u>seule</u> 1 ^e commande. Invalidation (Lenny) sur la somme des prix d'un ballon de chaque sport		
Essai 3 (24:39)				
Adam calcule $20 : 3$ puis propose 6,67 comme prix pour chacun des ballons	Calcul du montant de la 1 ^e commande (66,7) → efface le résultat et tape d'autres calculs	Invalidation sur le montant de la 1 ^e commande		
Lenny teste aussi différentes valeurs. Un essai (auquel nous n'avons pas accès) donne 74. Il s'exclame alors : « oh je suis à 74 oh à 2 près ».				
Essai 4 (26:45)				
Lenny propose en même temps qu'il effectue le calcul : $r=8$; $b=8$ et $f=6$.	Calcul du montant de la 1 ^e commande (72) → « oh j'ai trouvé » Adam et Agathe lui demandent « et les autres [données du problème] »	Pas d'invalidation ni de validation claire		
Adam reprend la calculatrice et effectue $72+30+20$ (=122) puis $122 : 17$ (=7,17...) et $7,17*2+7,17*4+7,17*4$ (=71,7). Il pense avoir trouvé si on arrondit. Il teste ensuite ce prix avec une autre donnée du problème $7,17*2+7,17*2$ (=28,68). Selon Adam, cette réponse valide la solution « j'ai trouvé c'est 7,17 et on arrondit ça donne 30 ».				
Pendant la régulation, l'enseignante dit que ce n'est pas possible que tous les ballons aient le même prix et lui indique de fixer un prix différent pour chaque ballon. Adam semble comprendre pendant cet échange qu'il ne peut pas arrondir.				
Adam continue la recherche seul (entre 31:00 et 39:38) et réalise une longue série d'essais en effectuant les calculs à la calculatrice. Il ne garde aucune trace écrite de ces différents essais. Il remonte sur ses différents résultats affichés pour retrouver le prix des ballons qu'il suppose. Voici les différents essais qu'il effectue ainsi que la donnée du problème qui lui a permis de tester ces valeurs:				
Essais	Rugby	Basket	Foot	Numéro de la donnée (1 ; 2 ou 3) avec laquelle le test est réalisé.
5	6	6	8	3 (20) puis 1 (68)
6	8	6	6	1 (64)

7	8	6	8	1 (72) puis il teste 8-6-6 avec la 3 ^e donnée (20) pour retrouver le prix d'un seul ballon de chaque sport puis teste à nouveau sur 1. « 72 voilà 'ai raison ah non non non attends attends j'ai capté j'ai capté » et il propose l'essai suivant.
8	8	4	6	3 (18)
9	8	4,5	6	3 (18,5)
10	8,5	4,5	6,5	3 (19,5)
11	8,5	5	6,5	3 (20) puis teste avec 8-8,5-5 avec la 1 ^e donnée (70)
12	8	5	6,5	1 (62) « waoua c'est compliqué d'abord on va calculer ça [désignant la donnée 3] c'est plus facile »
13	8	4	8	3 puis 1 (64)
14	7	8	8	1 (78)
15	4	8	8	Le 4 est déduit de la donnée 1. La sonnerie interrompt le travail de test sur la donnée 2.

Synthèse :

Le 1^{er} essai proposé par Agathe (10 ; 10 et 6) ne vérifie aucune des données du problème. De plus, lorsque Lenny lui indique que ça fait 26, elle ne réagit pas sur l'invalidation directe possible en lien avec la 3^e donnée du problème et reste sur le calcul du montant de la 1^e commande. Nous pouvons nous demander si Agathe ne cherche pas à résoudre le problème en n'utilisant que les données relatives aux deux commandes. En effet, les trois données de l'énoncé n'ont pas le même statut du point de vue du contexte du problème alors que du point de vue mathématique elles peuvent être utilisées de manière identique. Lenny semble l'avoir bien compris puisqu'il invalide également l'essai 2 en recourant à la 3^e donnée : « $6+6+6$ ça fait 18 ».

À la suite de cette invalidation, Adam propose d'arrondir. Cette idée est révélatrice d'une représentation caractérisée par le relâchement d'une contrainte, celle de l'exactitude des montants des commandes.

Les prix proposés par Adam lors de l'essai 3 sont obtenus après avoir effectué à la calculatrice $20:3$. Ce calcul met en évidence une représentation bloquante caractérisée par le fait que tous les ballons coutent le même prix. Elle correspond d'ailleurs à la 1^e représentation qu'Adam s'est construite.

En effet, il avait initié sa recherche individuelle en posant ce même calcul (4:40).

Cette représentation est tenace car elle résiste à la régulation de l'enseignante « Le prix du ballon de basket va peut-être être différent du prix de ballon de rugby ça c'est sûr » (20:35). C'est également autour de cette idée que se structure le raisonnement effectué après l'essai 4 : $72+30+20 (=122)$

puis 122 :17. C'est la 2^e régulation de l'enseignante qui va permettre à la représentation d'évoluer (au moins pour Adam) :

- Abandon de la contrainte : tous les ballons coutent le même prix
- Prise en compte de la contrainte : on ne peut pas arrondir les résultats des opérations.

Voici les échanges de cette 2^e régulation :

Adam : [dit sur un ton interrogatif] ça doit faire pile poil

Lenny : [dit sur un ton interrogatif] si on arrondit ça donne ou quoi

Enseignante : non parce que tu n'as pas à arrondir si tu divises comme ça par 8 ; 3 ou 10 ça veut dire que tous les ballons ont le même prix c'est pas possible d'accord

Adam : ça doit être le chiffre exacte 72 francs

Enseignante : oui

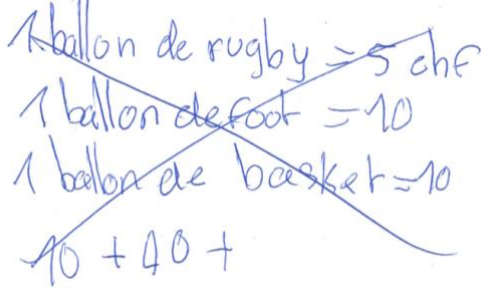

La 2^e partie de la recherche se fait seul pour Adam. Il effectue tous ses calculs à la calculatrice ce qui ne lui permet pas de garder la mémoire des essais. Il contourne cette difficulté en remontant sur l'affichage de sa calculatrice.

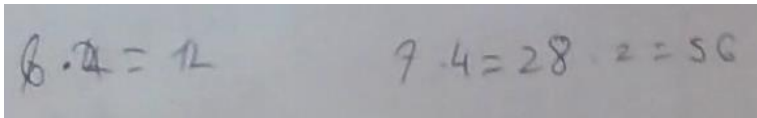
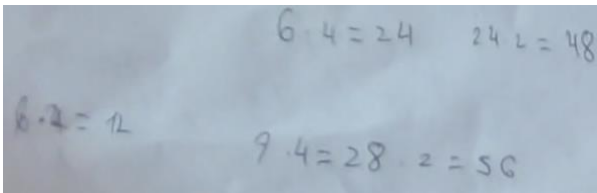
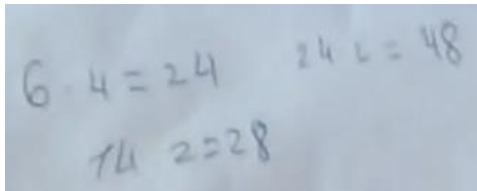
Dans l'ensemble, cette 2^e partie de recherche se caractérise par la gestion de front des 3 prix ce qui rend difficile les ajustements. La 2^e donnée n'est pas du tout exploitée.

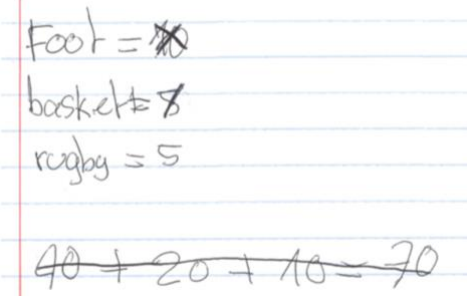
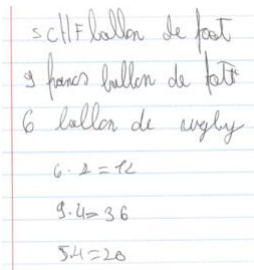
Nous repérons une continuité dans l'enchaînement des essais 8-9-10-11 qui sont pilotés par la 3^e donnée et lui permettent de trouver des prix qui vérifient cette 3^e donnée. Ceci étant, ces quatre essais illustrent une fois de plus, et qui plus est sur un exemple assez simple, le fait que l'écart au but n'est pas utilisé de manière quantitative mais qualitative. En effet, le test de l'essai 8 en lien avec la donnée 3 du problème donne 18 CHF. Il est immédiat pour des élèves de 10^e qu'il manque 2 CHF pour obtenir les 20 CHF de l'énoncé ce qui aurait dû permettre de les ajouter sur un seul des prix ou répartis entre les prix de deux ou même trois types de ballons. Au lieu de cela, Adam augmente le prix d'un seul ballon de 50 centimes. Les deux ajustements suivants vont être opérés de la même manière prouvant qu'Adam interprète uniquement le résultat du test de l'essai 8 de manière qualitative c'est-à-dire c'est trop ou pas assez sans chercher à exploiter l'écart au but.

3.9 Analyse du groupe 10CTBa14

Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
<p>Durant la phase de recherche individuelle, Angelo calcule 20:3. À la mise en groupe, il explique à Malik qu'il a trouvé la réponse. Malik teste, sur la 1^e commande, la réponse trouvée par Angelo : « je vais te montrer que ce que tu dis c'est faux ». Il trouve 66 CHF et conclut que la réponse d'Angelo est fausse.</p>			
<p>Essai 1 (Malik, 15:07)</p>			

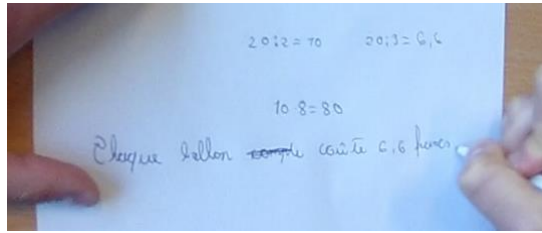
			
r=5 f=10 et b=10	Calcul du montant de la 1 ^e commande → il barre l'essai « oh madame en fait il y a pas de solution »	Invalidation par rapport au montant de la 1 ^e commande	
<p>Malik : « j'ai une autre idée et si on fait 3 divisé par 72 ». Il écrit 3 :72 sur sa feuille et tape 72:3 sur sa calculatrice. Il continue son raisonnement en écrivant et en effectuant 24 :3 avant de conclure : « je pense que chaque ballon est égal à 8 ». Il calcule le montant de la 1^e commande : « mais non j'étais à 8 francs de la solution » et il barre son calcul.</p>			
<p>Essai 2 (Malik, 21:20)</p>			
			
r=b=f=7 CHF	Calcul du montant de la 1 ^e commande → « ok là j'étais à 2 oh là j'étais à 2 »	Invalidation par rapport au montant de la 1 ^e commande	<p>Régulation : Malik : j'ai l'impression que c'est différent [parlant des prix des ballons]</p> <p>Enseignante :oui les prix sont différents ça il y a de fortes chances</p>
<p>Essai 2bis (Angelo, 21:58)</p>			
b=f=7 CHF (r = 8)	Le prix du ballon de rugby est déduit de la 1 ^e commande calculée avec b=f=7 → « c'est bon j'ai trouvé comment c'est » (23:28)	Validation du <u>seul</u> montant de la 1 ^e commande. Ils pensent avoir résolu le problème car Malik recopie cette solution et ils écrivent une phrase réponse et appellent l'enseignante « c'est bon on a terminé – vous avez trouvé – oui » (26:10).	<p>Régulation : enseignante leur demande s'ils ont vérifié avec les autres données du problème. Pendant que Malik est en train de faire le test avec la 2^e commande, l'enseignante revient et invalide leur essai</p>

			par rapport à la 3 ^e donnée.
<p>(28:30)</p> <p>Malik : ab mais madame en fait il re-commande les prix sont différents</p> <p>Enseignante : oui</p> <p>Malik : ça veut dire dans celui-là là [pointant la 1^e donnée de l'énoncé] dans la première commande les prix n'étaient pas la même chose que la deuxième</p> <p>Enseignante : ab si si si si si le prix du basket il est fixé quelle que soit la commande c'est toujours le même prix de basket</p> <p>Malik : c'est compliqué madame</p> <p>Enseignante : mais non justement c'est ça qui le rend facile</p>			
<p>Essai 3 (Angelo, pendant l'échange précédent, 27:59)</p>			
			
r=6 f=b=7	Calcul du montant de la 1 ^e commande (68) → « ah non c'est faux » (29:17)	Invalidation par rapport au montant de la 1 ^e commande	
<p>Essai 4 (Angelo, 29:30)</p>			
			
f=b=6 (r=7)	Commence à effectuer les différents calculs en lien avec la 1 ^e commande mais le montant total n'est pas calculé explicitement → il propose d'autres prix.	On peut se demander s'il est vraiment en train de tester cet essai ou si, par un calcul mental, il s'est rendu compte que 12+48 ne font pas 72.	
<p>Essai 5 (Angelo, 30:37)</p>			
			
f=b=6 et r=14	Calcul du montant de la 1 ^e commande (76) → « p** c'est faux mec et vas-y c'est galère » (30:48)	Invalidation par rapport au montant de la 1 ^e commande	
<p>Essai 6 (Malik, 35:30)</p>			

			
f=10 r=b=5	Calcul du montant de la 1 ^e commande (70) → « oh madame regardez ce que j'ai trouvé [il montre sa feuille à l'enseignante] encore deux deux je sais pas c'est bizarre madame »(37:48)	Invalidation par rapport au montant de la 1 ^e commande S'ensuit un échange avec l'enseignante (cellule ci-dessous).	
<p>(37:48) Suite de l'échange :</p> <p><i>Enseignante : donc du coup essaie de voir comment tu pourrais changer puisqu'il te manque que deux qu'est-ce que tu pourrais changer peut-être soit tu changes un chiffre ici [désignant un des prix]</i></p> <p><i>Malik : si je mets plus ça va plus faire vingt francs ça va faire plus</i></p> <p><i>Enseignante : ben oui mais si tu mets un de plus ici [désignant le prix du ballon de foot] tu dois baisser ici [désignant le prix du ballon de rugby ou basket] en baisser un donc tu fais ça vas-y essaie</i></p> <p><i>Malik : ouais bien vu madame bien vu bien vu bien vu</i></p> <p>Il écrit ensuite les prix suivants : f=11 b=4 et r=5 mais n'aura pas le temps de tester ces valeurs.</p>			
<p>Essai 7 (Angelo, 38:04)</p>			
			
f=5 b=9 et r=6	Calcul du montant de la 1 ^e commande (68) → pose la calculatrice et la sonnerie retentit.	Invalidation par rapport au montant de la 1 ^e commande	

Synthèse :

Le début de la recherche individuelle menée par Angelo met en évidence une représentation du problème basée sur le fait que tous les ballons coutent le même prix (calcul de 20:3) et la prise en compte d'une seule des données puisqu'il écrit une phrase réponse et va indiquer au chercheur, pendant l'installation en groupe, qu'il a trouvé.



D'ailleurs, lorsqu'ils confrontent leurs idées au début du travail de groupe, Malik propose 5 CHF pour le ballon de rugby (essai 1) et Angelo lui rétorque « mais 5 fois 3 ça fait 15 » considérant certainement que tous les ballons coutent le même prix. Cette contrainte est également présente chez Malik : « j'ai une autre idée et si on fait 3 divisé par 72 » (il calcule en réalité $72:3$) et, peu après, il propose des prix identiques (7 CHF) pour tous les ballons (essai 2). Suite à cet essai, Malik sollicite l'enseignante, voici le contenu de l'échange :

Malik : j'ai l'impression que c'est différent [parlant des prix des ballons]

Enseignante : oui les prix sont différents ça il y a de fortes chances

Plus tard, l'échange suivant toujours entre Malik et l'enseignante montre que la représentation est en train de se re-structurer mais autour d'une contrainte encore différente de celle qui correspond à la compréhension ad hoc de ce problème. En effet, cette fois-ci Malik pense que les prix ne sont pas les mêmes d'une commande à l'autre :

Malik : ah mais madame en fait il re-commande les prix sont différents

Enseignante : oui

Malik : ça veut dire dans celui-là là [pointant la 1^e donnée de l'énoncé] dans la première commande les prix n'étaient pas la même chose que la deuxième

Enseignante : ah si si si si si le prix du basket il est fixé quelle que soit la commande c'est toujours le même prix de basket

Malik : c'est compliqué madame

Enseignante : mais non justement c'est ça qui le rend facile

Cet échange met en évidence un malentendu autour de l'interprétation de la phrase « les prix des ballons sont différents ».

À la suite de cet échange, les élèves travaillent sur la base d'une représentation correcte du problème au regard de cette contrainte.

À l'inverse, ce qui fait l'enjeu du problème à savoir trouver des prix de ballon qui vérifient toutes les données n'est pas pris en compte par Angelo. Nous avons vu qu'au début il pensait avoir trouvé la solution (6,6) à partir de la seule 3^e donnée du problème. L'essai 2bis révèle également la prise en compte d'une seule des données puisque lorsqu'il se rend compte que les prix qu'il teste valide la 1^e commande, il s'exclame « c'est bon j'ai trouvé comment c'est » (23:28). Puis, ils font comme si le problème était résolu : recopie de la solution sur la feuille de Malik, écriture d'une phrase réponse et appel de l'enseignante « c'est bon on a terminé ».

Les interprétations des rétroactions se limitent à l'invalidation pour Angelo : « c'est faux » verbalisé à la suite du test des essais 3 et 5.

Malik, pour sa part, verbalise l'écart au but : « j'étais à huit francs de la solution » (suite à l'essai 1) ; « oh là j'étais à deux » (suite à l'essai 2) ; « encore deux deux » (suite à l'essai 6). Ceci étant, il n'exploitera jamais cet écart. Le dernier échange avec l'enseignante à la toute fin de la séance, nous donne sans doute un élément d'explication : il ne sait pas ajuster de telle sorte que le montant total soit toujours respecté. L'extrait suivant est très explicite sur ce point :

Enseignante : donc du coup essaie de voir comment tu pourrais changer puisqu'il te manque que deux qu'est-ce que tu pourrais changer peut-être soit tu changes un chiffre ici [désignant un des prix]

Malik : si je mets plus ça va plus faire vingt francs ça va faire plus

Enseignante : ben oui mais si tu mets un de plus ici [désignant le prix du ballon de foot] tu dois baisser ici [désignant le prix du ballon de rugby ou basket] en baisser un donc tu fais ça vas-y essaie

Malik : ouais bien vu madame bien vu bien vu bien vu

3.10 Analyse du groupe 10LSBa11

Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
<p>Lors d'une régulation, l'enseignante propose aux élèves de résoudre le problème par essais-erreurs (24:30).</p> <p>Plus tard, Maxime interpelle le chercheur qui passe à proximité du groupe. Le chercheur leur demande ce que l'enseignante leur a proposé puis leur redit : « elle [l'enseignante] vous proposait de faire par tâtonnement en faisant des essais et des erreurs ». Maxime explicite alors cette manière de résoudre (34 :00) :</p> <p><i>Maxime : on essaie de changer les prix pour voir si ça marche par exemple on dit que le ballon de basket ça coute euh 10 francs</i></p> <p><i>Sakina : ça change quoi</i></p> <p><i>Maxime : ben après justement si on change si à chaque fois on change les prix pour essayer d'avoir 72 francs à la fin pour celui-là [désigne la 1° commande sur l'énoncé] et ben après on peut voir si ça marche avec les autres</i></p>			
<p>Essai 1 (34:50)</p> <div data-bbox="668 1196 1018 1384" style="text-align: center;"> </div>			
<p>r=6; b=10 et f=4. « donc là ça fait 20 francs ça va avec celui-là [désignant la 3° donnée de l'énoncé]</p>	<p>Calcul du montant de la 2° commande → « 12 plus 20 ah non ça marche pas » (36:17)</p>	<p>Invalidation par rapport au montant de la 2° commande</p>	
<p><i>Sakina : bon du coup le raisonnement exceptionnel qu'ils avaient dit que ça marchait</i></p> <p><i>Maxime : ben il faut qu'on trouve les bons prix en fait c'est tout</i></p> <p><i>Sakina : oui mais on peut pas trouver par hasard [inaudible] test</i></p> <p><i>Maxime : ben justement</i></p> <p><i>Sakina : ben oui ben alors on a fait un test ça a raté</i></p> <p><i>Maxime : oui</i></p> <p><i>Sakina : et le prochain test</i></p>			

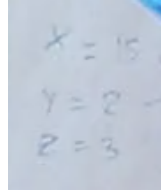
Maxime : le prochain test on va dire que

Sakina : x est égal à quoi [écrivant « $x=$ »]

Maxime : je sais pas

Sakina : le ballon de rugby la dernière fois c'était 6 là

Essai 2 (39:23)



$r=15$; $b=2$ et $f=3$
« là ça fait 20 »

Commence à calculer le montant de la 2^e commande
→ « deux ballons de rugby ça fait 30 ah ben non du coup ça marche pas » ; « ça fait 34 francs du coup pour les ballons de rugby et de basket » (39:50)

Invalidation par rapport au montant de la 2^e commande

Sakina : donc il faut rajouter plus

Maxime : non il faut mettre moins genre

Essai 3 (40:15)



Photo a



Photo b

Photo c

$r=13$; $b=2$ et $f=5$
« quand on fait fois deux les deux [désignant 13 et 2, photos a et b] ça fait 30 »

Calcul du montant de la 1^e commande (54) → Sakina demande « ça marche », Maxime répond « non » et il trace une croix à côté des calculs (photo c).

Invalidation par rapport au montant de la 1^e commande

(42:21)

Maxime : essaie de trouver toi aussi moi j'ai des données des idées

Sakina : moi j'ai pas compris la technique

Maxime : tu donnes un prix random à x un prix random à y et un prix random à z il faut que ces prix fassent 20 et après on essaie de voir si 2 fois x et 2 fois y ça fait 30 et voir si 2 fois x 4 fois y et 4 fois z ça fait 72

Sakina : mais est-ce qu'à partir de ce truc-là tu sais si là il faut mettre moins s'il faut mettre plus

Maxime : j'ai rien compris à ta question

Sakina : genre est-ce que tu sais à partir des données qu'on a là [désignant les essais réalisés précédemment] si pour x il faut mettre plus

Maxime : oui

Sakina : donc là à partir de là est-ce qu'il faut que je mette plus ou moins que 13

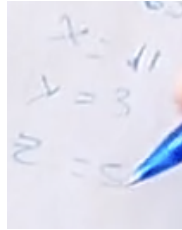
Maxime : ben en fait il va falloir que tu changes un des deux après aussi

Sakina : tu penses selon ton instinct qu'il faut mettre plus ou moins

Maxime : j'en sais rien

Sakina : ben on va dire qu'on va mettre moins

Essai 4 (43:25)



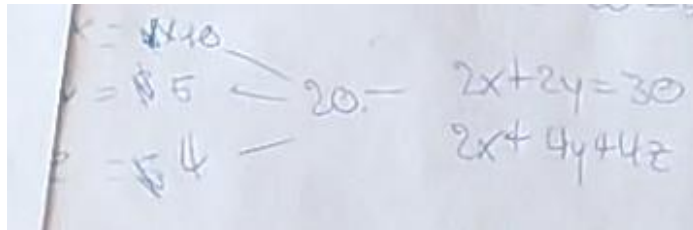
$r=11$;

« il faudra que les deux-là [désignant y et z] fassent 8 » $b=3$ et $f=5$

Calcul du montant de la 2^e commande → « 22 non ça marche pas ça marche pas parce que 22 plus 6 ça fait 28 et pas 30 »

Invalidation par rapport au montant de la 2^e commande

Essai 5 (45:25)



$r=10$; $b=5$ et $f=4$

- Validation de la 3^e donnée (erronée car le total fait 19 et non pas 20)
 - Validation de la 2^e commande
 - calcul du montant de la 1^e commande (46) → « ok ça marche pas » il barre l'essai

- Validation des 2^e et 3^e données

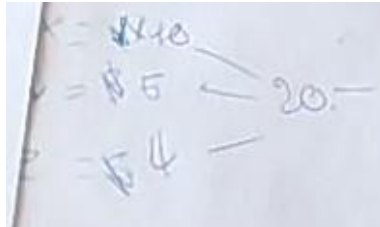
- Invalidation par rapport au montant de la 1^e commande

Synthèse :

Ces élèves montrent une représentation ad hoc du problème : toutes les données sont prises en compte et aucune contrainte n'est ajoutée. La difficulté porte sur la gestion des essais et des ajustements, c'est-à-dire la prise en compte simultanée de toutes les données, d'autant plus qu'ils gèrent les 3 grandeurs de front.

Maxime explicite à plusieurs reprises comment procéder : « tu donnes un prix random à x un prix random à y et un prix random à z il faut que ces prix fassent 20 et après on essaie de voir si 2 fois x et 2 fois y ça fait 30 et voir si 2 fois x 4 fois y et 4 fois z ça fait 72 ».

Lorsqu'il propose les trois prix sur les premiers essais, il verbalise « là ça fait 20 » montrant qu'il prend bien en compte la 3^e donnée pour fixer les prix. Sur les derniers essais, cette donnée est respectée sur l'intention mais pas dans les faits certainement à cause des erreurs de calcul (cf photo suivante).



À l'essai 3, Maxime parvient à prendre en compte en plus la 2^e donnée comme il le verbalise : « quand on fait fois deux les deux [désignant 13 et 2] ça fait 30 ». Leur représentation du problème s'affine puisqu'il parvient à prendre en compte les 2^e et 3^e données du problème de manière simultanée.

La 1^e commande est utilisée pour tester les essais et sert uniquement pour l'invalidation, aucun écart au but n'est calculé ou exploité. Nous ne notons pas non plus d'interprétation qualitative de la rétroaction alors même que Sakina pose explicitement la question à l'issue de l'essai 3 :

Sakina : genre est-ce que tu sais à partir des données qu'on a là [désignant les essais réalisés précédemment] si pour x il faut mettre plus

Maxime : oui

Sakina : donc là à partir de là est-ce qu'il faut que je mette plus ou moins que 13

Maxime : ben en fait il va falloir que tu changes un des deux après aussi

Sakina : tu penses selon ton instinct qu'il faut mettre plus ou moins

Maxime : j'en sais rien

Ainsi, il n'y a pas vraiment de lien entre les derniers essais, ni entre le résultat d'un test et la composition d'un essai. Nonobstant, ce court échange montre que Maxime sait ajuster en procédant à des échanges.

3.11 Analyse du groupe 10LSBa12

Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
<p>Janice propose de combiner (soustraction) les deux commandes. Elle écrit cette idée sous forme d'une équation : $2b + 4f = 42$. Zineb dit que ce serait bien si tous les ballons coutaient le même prix, elle propose de calculer $20:3$. Janice rappelle les différentes équations puis propose : « si on y va par tâtonnement ».</p> <p>Zineb écrit la liste des nombres entiers de 1 à 14 et de leur double.</p>			

$[2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28]$
 ces ballons peuvent être

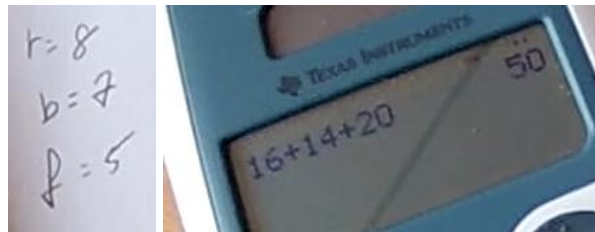
Elle conclut, après avoir fini d'écrire sa liste, qu'un ballon de rugby et de basket peut coûter entre 1 et 14 francs.

Zineb explique que ça peut coûter « soit 2 et 28 » etc et continue ainsi en mettant en relation, à l'aide de traits, les nombres dont la somme fait 30.

et
 $r + b + f = 20$
 et
 $2r + 2b = 30$

$[2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28]$
 ces ballons peuvent être

Essai 1 (15:15)

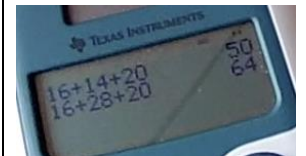


$b=7$ et $r=8$ (et déduit $f=5$ de la 3^e donnée)
essai établi à partir de la liste de Zineb

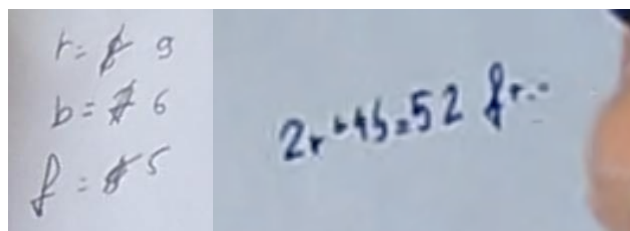
Calcul du montant de la 1^e commande (50, mais erreur seulement 2 ballons de basket au lieu de 4) → « on n'est pas assez haut allez il faut monter de un » (16:40)

Invalidation par rapport au montant de la 1^e commande
Interprétation en lien avec la liste de nombres

L'erreur sera repérée plus tard



Essai 2 (17:16)

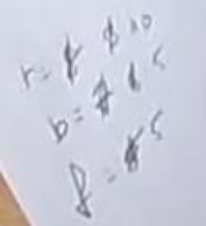


$b=6$, $r=9$ et $f=5$
Elles déduisent que f est toujours égal à 5 et simplifient l'équation de la 1^e commande.

Calcul du montant de la 1^e commande sans les ballons de foot (42) → claquer des doigts et se reporte à la liste « après il y a quoi 10 et 5 »

Invalidation par rapport au montant de la 1^e commande
Interprétation en lien avec la liste de nombres

Essai 3 (24:57)

			
b=5 et r=10	Commence à calculer le montant de la 1 ^e commande sans les ballons de foot Zineb dit « donc ce n'est pas [inaudible] » ce qui fait réagir Janice : « ah mais ça peut être soit l'un soit l'autre »	Comprend que chaque configuration de la liste correspond à 2 cas symétriques.	
Essai 4 (25:31)			
b=10 et r=5 (c'est-à-dire la configuration symétrique)	Calcul du montant de la 1 ^e commande sans les ballons de foot (50) → « il manque un petit truc j'y suis presque j'y suis presque » (25:50) et elle se reporte à la liste.	Invalidation par rapport au montant de la 1 ^e commande Interprétation en lien avec la liste de nombres	
Essai 5 (25:53)			
r=4 et b=11	Calcul du montant de la 1 ^e commande sans les ballons de foot (52) → « on a trouvé »	Validation par rapport au montant de la 1 ^e commande	

Synthèse :

La première partie de la recherche voit se confronter des idées qui traduisent des représentations du problème très différentes :

- avec la contrainte que tous les ballons coutent le même prix et la division 20:3 ;
- par la mobilisation d'une méthode de résolution connue : le tâtonnement ;
- par l'investissement d'une connaissance mathématique : les équations ;
- l'interprétation d'une donnée du problème dans un autre registre de représentation sémiotique : sous forme d'une liste de nombres.

C'est finalement le tâtonnement à l'appui de la liste de nombres qui va être mis en œuvre.

Zineb propose une interprétation de la 2^e commande sous forme d'une liste de solutions possibles reliées deux à deux.

$r+b+f=20$
 et
 $2r+2b=30$
 [2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 28]

Notons que cette liste est limitée aux entiers mais cela n'aura pas de conséquence puisque la solution du problème est un triplet de nombres entiers. Ainsi chaque couple de nombres reliés dans cette liste respecte de fait la 2^e commande.

Nous observons deux opérationnalisations différentes de cette liste qui mettent en évidence deux interprétations différentes : un couple correspond à une configuration possible (Janice) versus un couple correspond à deux configurations symétriques possibles (Zineb). Avec son interprétation première, Janice effectue sa recherche dans un espace sémantique trop restreint car il ne contient pas la solution. C'est à la suite de l'essai 3 que l'interprétation de Janice va évoluer pour rejoindre celle de Zineb produisant une ouverture de l'espace sémantique suffisante pour englober la solution.

Janice interprète certaines rétroactions : « on n'est pas assez haut allez il faut monter de un » ou bien « il manque un petit truc j'y suis presque ». Mais nous constatons que l'utilisation de la liste de nombres comme guide pour parcourir de manière systématique l'espace du problème prend le pas sur les interprétations verbalisées. En effet, les trois premiers essais s'éloignent de la solution et ce n'est pas une interprétation qualitative de la rétroaction qui réoriente la recherche mais plutôt la prise de conscience de la possibilité de configurations symétriques.

Si l'interprétation des rétroactions se limite donc à l'invalidation de l'essai, il est intéressant de mettre en avant le fait que Janice déduit de nouvelles informations lors de la caractérisation des essais. En effet, l'élaboration du 2^e essai et sa confrontation avec le 1^{er} essai amènent Janice à repérer que le prix du ballon de foot est de 5 francs dans les deux cas. Elle généralisera ce constat ce qui lui permet de simplifier le problème pour la suite. Cet exemple illustre une fonction différente des essais.

3.12 Discussion et conclusion

Rappelons que l'analyse de chacun des groupes précédents est articulée autour de trois axes que sont la représentation mentale du problème et son évolution au cours de la résolution, la manière d'ajuster et l'interprétation des rétroactions susceptibles de suivre les essais. Dans cette conclusion, nous faisons la synthèse de cette analyse en tentant de faire ressortir les écarts entre les élèves qui réussissent à résoudre le problème ou qui montrent des éléments intéressants liés à cette manière de résoudre des problèmes par ajustements d'essais successifs et, au contraire, les élèves qui rencontrent des difficultés.

3.12.1 Au niveau de la représentation mentale du problème

Plusieurs groupes d'élèves montrent une représentation du problème qui se caractérise par l'ajout de contraintes supplémentaires. Par exemple, pour le problème du Jeu de cartes, les contraintes concernent la prise en compte de l'ordre du tirage des cartes, qui amène les élèves à proposer des essais avec une alternance d'une figure de chaque catégorie ou la répétition d'un motif ; ou bien encore, l'expression « au hasard » est interprétée comme « tirer des cartes les yeux fermés ». Pour le problème Ballon d'essai, c'est principalement la croyance que les ballons coutent le même prix

qui contraint les représentations des élèves. Notons que lors des régulations de l'enseignante, l'affirmation *tous les ballons ne coutent pas le même prix* est aussi interprétée de deux manières différentes : soit le prix des ballons de rugby est différent du prix des ballons de basket, etc..., soit le prix des ballons est différent d'une commande à l'autre. Dans ces différents cas de figures, nous ne pouvons pas dire que les élèves n'ont pas compris le problème mais plutôt que leur compréhension embarque des contraintes qu'ils se donnent et qui pèsent sur la résolution. Ces contraintes caractérisent un espace sémantique du problème qui peut être bloquant s'il empêche l'accès à la solution du problème ou limitant s'il rend l'accès à la solution plus difficile.

La prise en compte de ces contraintes provoque une structuration de la représentation du problème qui est plus ou moins résistante selon les groupes d'élèves. Si dans certains groupes, ces contraintes peuvent être rapidement abandonnées, nous avons pu voir que parfois il fallait plusieurs régulations de l'enseignante pour provoquer une restructuration de la représentation du problème. D'autres fois ce sont les interprétations des rétroactions qui amènent à abandonner une contrainte, déclenchant alors cette restructuration.

Par ailleurs, nous observons que certains groupes proposent une opérationnalisation de leur représentation du problème qui embarque une des données du problème. Par exemple, le dessin de 15 cartes vierges pour le problème du Jeu de cartes permet de proposer un essai qui respecte de facto le nombre de cartes imposé par l'énoncé. Faire la liste des prix possibles pour le problème Ballon d'essai permet également de respecter la donnée relative à la 2^e commande. Ceci favorise un traitement simultané des différentes données du problème qui est a priori indispensable pour résoudre le problème.

A contrario, certains groupes d'élèves ne traitent qu'une seule donnée et pensent avoir terminé dès lors qu'ils ont trouvé une solution qui respecte cette donnée. Dans d'autres cas, le traitement des données est indépendant ce qui fait que les élèves parviennent à respecter tour à tour l'une ou l'autre des données sans parvenir à trouver une solution au problème. Ce dernier point met en lumière une représentation du problème qui n'est pas efficiente. De nombreux élèves, tous degrés confondus semblent ignorer qu'une solution du problème doit respecter en même temps toutes les données du problème ou bien s'agit-il d'un effet de contrat didactique qui amène à trouver la solution en faisant une opération. Enfin, nous avons pu remarquer que l'investissement de certaines connaissances mathématiques permet également de faire évoluer voire de restructurer la représentation du problème.

Selon Julo (1995) ou Gros et al (2020), la construction de la représentation du problème est dépendante des caractéristiques de la situation (appelées aussi connaissances sur le monde) et des connaissances mathématiques. Nos analyses vont dans ce sens et confortent ces résultats sur un autre type de problème et dans le cadre d'une recherche du problème en classe dans une séance menée par l'enseignant. En effet, les contraintes supplémentaires prises en compte par les élèves sont liées à l'interprétation de l'énoncé par les élèves. De l'autre côté, la représentation du problème qui implique un traitement simultané des données du problème est en lien avec les connaissances mathématiques.

3.12.2 Au niveau de la manière d'ajuster

Les difficultés relatives à la manière d'ajuster peuvent être liées aux contraintes supplémentaires. Par exemple, le groupe d'élèves qui caractérise les essais à partir de la répétition d'un motif dans le problème *Jeu de cartes* ajuste en modifiant le motif à chaque essai.

Un autre obstacle tient au fait que les élèves ne mettent en œuvre qu'un seul mode d'ajustement qui est l'ajout ou la suppression de figures, d'animaux, etc. Tandis que les élèves qui résolvent le problème peuvent aussi ajuster en procédant à des échanges de figures, d'animaux, etc. La plus-value des échanges est qu'ils permettent de modifier les parties tout en conservant le tout. Par

exemple, échanger un carré contre un triangle permet de modifier le nombre total de côtés tout en conservant le nombre total de figures. Un échange entre Malik (groupe 10CTBa14) et son enseignante est emblématique et illustre bien que cette manière d'ajuster nécessite d'être explicitée pour certains élèves.

Ceci étant, nous distinguons deux catégories d'élèves parmi ceux qui réalisent des échanges :

- Les élèves qui connaissent les effets d'un échange : Cyril (groupe 4PCJc10) constate que le test de l'essai donne 50 côtés et propose immédiatement le remplacement d'un carré par un triangle « parce que là c'est 4 et là 3 ça va faire 49 ». Nous retrouvons le même type d'ajustement et de justification pour un élève du groupe 8PVDr2 qui identifie un écart au but de 2 pattes et propose le remplacement d'un perroquet par un dragon. Dans ces deux cas, un lien est établi entre l'écart au but issu du résultat du test et l'effet d'une modification de l'essai par échange.
- Les élèves qui ne connaissent pas les effets d'un échange c'est-à-dire qui effectuent des échanges sans pouvoir anticiper l'impact sur le résultat de l'essai (par exemple les groupes 4PCJc7 ou 10LSBa11). Ce n'est pas l'écart au but qui impulse l'échange et d'ailleurs dans certains cas, les échanges sont même mis en œuvre de manière non pertinente (voir les premiers ajustements de Naelle, groupe 4PCJc10).

Garder la mémoire des essais, ou au moins de l'essai précédent, est un autre facteur qui peut également impacter la manière d'ajuster. En effet, certains registres de représentation sémiotique comme le dessin, les écritures arithmétiques ou même les jetons permettent de garder la mémoire des essais afin de permettre des comparaisons et favoriser l'interprétation des rétroactions. Les comparaisons sont une première étape pour aller vers la recherche de régularités et potentiellement la conjecture d'une règle. À l'inverse, la recherche quasi-exclusivement à la calculatrice ne permet pas un tel appui.

Pour mieux comprendre les ajustements réalisés, nous devons nous intéresser aux interprétations des rétroactions.

3.12.3 Au niveau de l'interprétation des rétroactions

Nous avons pu identifier différents niveaux d'interprétation des rétroactions. Le niveau de base est celui de la validation. Un essai validé est une solution prouvée par ostension. Tous les groupes qui ont validé un essai, ont mis fin à la recherche du problème. Un seul élève (Erwann, groupe 8PSDr3) émet l'idée qu'il pourrait y avoir une autre solution et effectue un essai supplémentaire avant d'arrêter sa recherche.

Un essai invalidé est interprété par les élèves, de manière évidente, comme n'étant pas solution du problème. Les groupes 4PCJc7 et 4PCJc9 interprètent une invalidation à la lumière d'une contrainte prise en compte et proposent ainsi d'abandonner cette contrainte pour les essais suivants. Cette interprétation de la rétroaction impacte donc la représentation qu'ont les élèves du problème sans pour autant permettre aux élèves de proposer un essai qui serait plus proche de la solution.

Pour aller dans le sens de ce dernier point (se rapprocher de la solution), il est nécessaire que les élèves exploitent deux autres types d'informations renvoyés par les essais invalidés : l'écart au but et si cet écart l'est par excès ou par défaut. Nos analyses mettent en avant que ces informations sont très peu identifiées (ni même recherchées) ou non exploitées.

La discussion entre deux élèves de 8P (groupe 8PVDr9) montre bien cette difficulté :

Lucie : 44 plus 20 ça fait pas 72

Louise : ça fait ça fait combien

Lucie : mais je m'en fous de toutes façons ça fait pas le chiffre

Louise : mais il faut savoir combien ça fait pour savoir s'il faut faire plus ou moins

Les propos de Lucie prouvent qu'elle se contente d'interpréter la rétroaction comme une invalidation. Quant à Louise, elle sait que l'écart au but est une information précieuse qu'elle souhaite obtenir. Pour autant, bien qu'elle parvienne à connaître l'écart au but, la suite de sa recherche montre qu'elle ne l'exploitera pas. Il s'avère, d'après nos analyses et contrairement à nos idées de départ, qu'une telle exploitation n'est pas si évidente que cela pour les élèves.

L'exemple d'Adam (groupe 10CTBa7) est intéressant pour illustrer que dans certains cas qui pourraient paraître faciles, les élèves n'exploitent que l'aspect qualitatif de l'écart au but. En effet, Adam propose l'essai 8 ; 4 et 6 francs pour les prix des ballons et testent cet essai au regard de la 3^e donnée du problème à savoir que la somme des trois prix est égale à 20 francs. Il est raisonnable de penser qu'Adam détermine de manière automatique l'écart au but qui est de 2 francs. Une interprétation quantitative de cette rétroaction amènerait à ajouter 2 francs à un des ballons ou 1 franc à deux ballons ou etc. Les essais suivants : 8 ; 4,5 et 6 puis 8,5 ; 4,5 et 6,5 et enfin 8,5 ; 5 et 6,5 montrent plutôt que ces essais sont le résultat d'interprétations qualitatives de l'écart au but.

Pour exploiter l'écart au but, il est nécessaire de l'interpréter en lien avec la caractérisation de l'essai de départ. Tout se passe comme s'il y avait deux espaces : celui de l'essai et celui de la rétroaction.

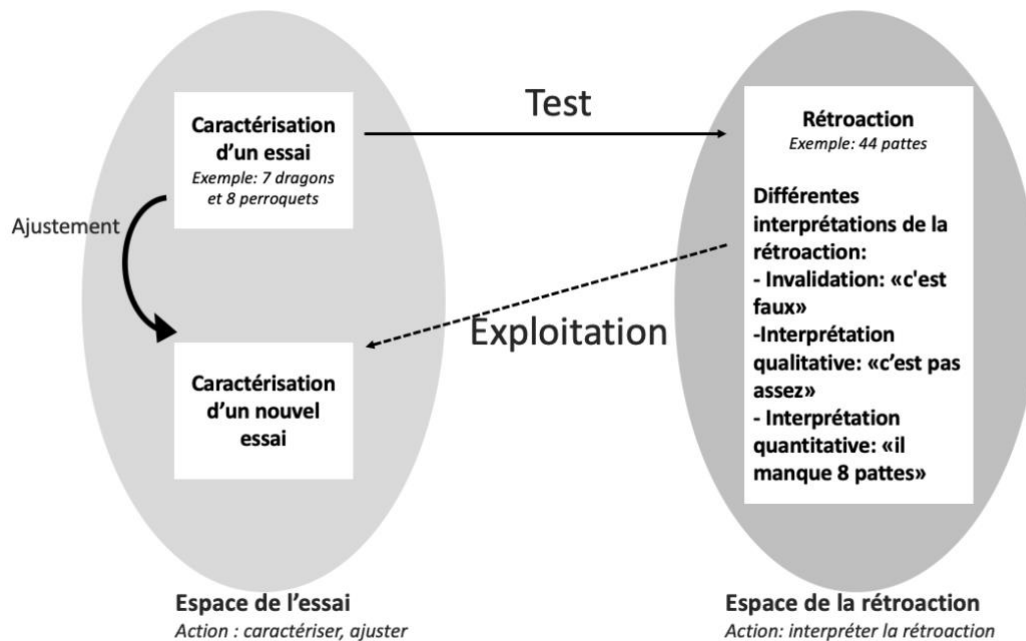


Figure 69. Différentes interprétations de la rétroaction et exploitation potentielle

Pour exploiter l'interprétation qualitative ou quantitative réalisée, il faut « remonter » du test à l'essai ce qui n'est possible que si l'on dispose d'une règle qui établit le lien entre un changement relatif aux éléments du problème (figures, animaux, ...) et l'effet de ce changement sur la grandeur testée (nombre total de côtés, de pattes, ...). Si ce changement concerne l'ajout ou la suppression, l'effet est majoritairement connu. Par contre, si ce changement est un échange, nous avons vu plus haut que très peu d'élèves semblent en connaître les effets les privant des exploitations auxquelles on pourrait s'attendre. Cette connaissance constitue une première différence entre les groupes d'élèves qui réussissent à résoudre le problème et les autres.

Une deuxième différence concerne la possibilité de construire une telle connaissance qui a la forme d'une règle. Le travail de deux groupes nous éclaire à ce sujet.

Dans sa démarche de résolution du problème du Jeu de cartes, Naelle (groupe 4PCJc10) propose des échanges de figures de manière plus ou moins pertinente sur la première partie de sa recherche. Ses derniers essais (essais 11 et 12) sont au contraire très pertinents. Elle pense avoir trouvé

lorsqu'elle propose l'essai 11 mais son geste rageur du poing lorsque le test de l'essai donne 48 (au lieu de 49) indique qu'elle s'attendait vraiment à obtenir la bonne réponse. Ainsi, au fil de ses essais, Naelle semble construire un lien de type qualitatif entre la manière d'ajuster qui consiste à remplacer des figures et l'effet sur le nombre total de côtés.

C'est un processus identique que nous observons avec le travail du groupe 4PSJc12 sauf que celui-ci va jusqu'à construire un lien de type quantitatif. En effet, après avoir proposé plusieurs essais obtenus en remplaçant un jeton bleu (un carré) par un jeton rouge (un triangle), Solenne parvient finalement à anticiper le résultat d'un tel changement. Avant l'essai 21, elle annonce sans trop de certitude : « attends je crois que ça va faire 48 euh 50 je sais pas vas-y essaie ». Avant l'essai 23, elle déclare avec beaucoup plus d'assurance : « attends ça fait 49 regarde ». Anticiper le résultat du test, implique que Solenne a construit une règle qui puisse mettre en relation l'ajustement et son effet que nous pourrions formuler de la manière suivante dans ce cas présent : 'Si je remplace un carré par un triangle, le nombre total de côtés diminue de un'. La stabilité entre les différents essais au niveau du type d'ajustement et probablement même du registre de représentation sémiotique utilisé semble être une condition favorisante. La figure suivante illustre ce processus de construction d'une règle à partir de l'interprétation des différentes rétroactions.

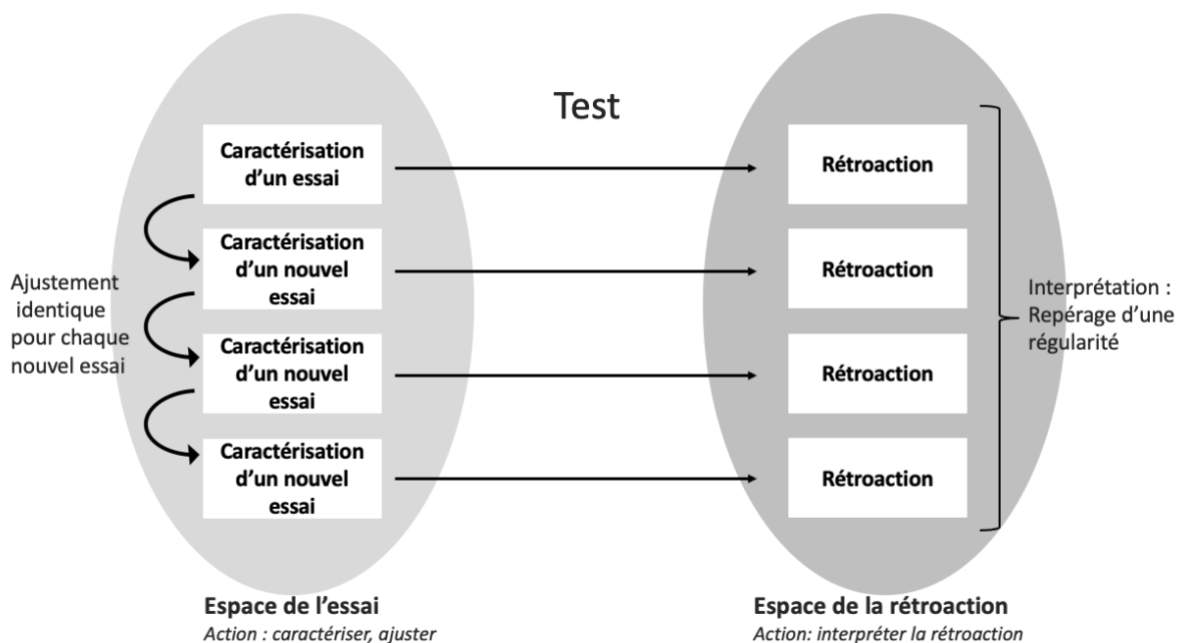


Figure 70. Autre interprétation des rétroactions: le repérage d'une régularité

Nous avons pu également observer que certains groupes proposent différents ajustements comme le montre la figure précédente. Ces groupes (8PSDr3, 8PVDr9 et 10LSBa12) réalisent en fait un parcours systématique de l'espace problème sans chercher forcément à interpréter les rétroactions. Ce parcours systématique prend le pas sur le repérage de régularité, en tout cas pour ce qui concerne les groupes que nous avons analysés.

Enfin, le repérage de régularité a été mis en évidence pour le groupe 10LSBa12 au moment de la caractérisation des essais. En effet, la caractérisation de l'essai 2 et la confrontation avec l'essai 1 permettent à Janice de repérer que le prix du ballon de foot est de 5 francs dans les deux cas. Elle généralise ensuite ce constat ce qui lui permet de simplifier le problème.

CHAPITRE 5. CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Cette conclusion générale s'organise selon différents axes. Le premier considère la dimension méthodologique de la recherche. Le second nous amène à envisager l'aspect spécifique des essais et ajustements. Ensuite, nous présentons quelques pistes relatives à l'enseignant et à son rôle pendant la résolution. Enfin, nous esquisserons quelques pistes de prolongement pour cette recherche.

1. Un triple point de vue pour mieux comprendre les processus de résolution

Notre recherche s'attache à étudier les processus de résolution de problèmes mis en œuvre par des élèves de différents niveaux scolaires en classe de mathématiques lorsque la séance est menée par l'enseignant. Nous avons ainsi observé 33 groupes d'élèves répartis dans 6 classes de 3 niveaux différents.

Ces conditions d'étude au plus proche de la réalité de la classe induisent une complexité que peu de recherches sur le même sujet ont abordé et cela constitue donc une des originalités de notre travail. Une première étape a consisté à imaginer et à mettre en œuvre un dispositif de recueil de données pertinent qui permette de capter des données relatives au travail de chaque élève (ou groupe d'élèves) à tout moment pendant la classe. Nous avons ainsi choisi d'utiliser des caméras embarquées sur la tête d'un élève par groupe. Ce dispositif technique nous a permis d'obtenir des enregistrements audiovisuels du travail des élèves tout à fait pertinents et exploitables. Signalons toutefois qu'une limite de ce type de recueil de données tient au fait que le chercheur ne maîtrise pas ce qui est filmé, il confie cette responsabilité aux élèves. Une très grande vigilance doit être apportée notamment sur le cadrage suite aux éventuelles manipulations de la caméra par les élèves.

Pour analyser ces données audiovisuelles, nous avons proposé un triple regard. Du point de vue macroscopique, c'est-à-dire relativement à l'organisation temporelle, nous avons mis en œuvre le cadre d'analyse vidéo développé par Schoenfeld (1985) et adapté par Rott (2011, 2012b) qui consiste à découper le travail des élèves en différents épisodes. La particularité de nos données nous a amené à proposer une adaptation supplémentaire en introduisant un épisode nommé *régulation* pour prendre en compte les interventions de l'enseignant dans le travail des élèves. Pour obtenir une fiabilité et une validité satisfaisante de ce découpage, nous avons fait le choix de procéder à un double-codage réalisé de manière indépendante par une assistante de recherche et nous-même. Ceci nous a en particulier amené à préciser différents points comme la nature de certains épisodes ou les repères temporels.

Les résultats de ce découpage révèlent une grande variété, ne serait-ce que du point de vue du nombre d'épisodes, qui rend difficiles les comparaisons directes. Nous avons ainsi dû réduire la complexité de ces découpages. Pour cela, nous avons défini et étudié l'avancée propre du travail des élèves selon deux indicateurs : la proportion du temps que les élèves passent effectivement à chercher le problème et le nombre de séries qui la caractérisent. Les résultats montrent, pour chacun de ces indicateurs, que les différents groupes sont distribués de manière uniforme entre deux positions extrêmes qui marquent des tendances très différentes. À quelques exceptions près, nous retrouvons les mêmes groupes dans le premier quartile de chacun de ces indicateurs. Ceci signifie que ces groupes cumulent à la fois un nombre de séries très faible et une proportion de l'avancée propre du travail parmi les meilleures. Ainsi, ces élèves passent presque tout leur temps

dans la résolution du problème et, en plus, leur recherche est presque continue et efficace. Ce cumul fait ressortir une certaine persévérance et la capacité à rester dans la recherche du problème pour ces groupes qui trouvent la réponse correcte au problème. Ce sont également presque les mêmes groupes qui composent le quatrième quartile de chacun des indicateurs. La résolution proposée par ces groupes, dont aucun ne parvient à résoudre le problème, est marquée par une durée de recherche très réduite proportionnellement au temps total dévolu à la résolution qui plus est composée d'un nombre important de séries c'est-à-dire marquée par de nombreuses interruptions. Leur travail est donc très haché, ces élèves doivent relancer leur réflexion à de multiples reprises.

Nous avons ensuite proposé un autre type de réduction de la complexité des découpages en nous focalisant sur les épisodes qui constituent le cœur de la recherche et leur enchaînement. Ainsi pour les analyser, nous avons enrichi le modèle de Rott et al. (2021) de manière à prendre en compte l'impact des interventions de l'enseignant sur le processus de résolution des élèves. Les résultats montrent que dans un contexte de classe, la grande majorité des processus sont non linéaires du fait des différents aller-retour entre les phases du modèle. La contingence du travail des élèves s'exprime par une grande diversité de parcours du modèle sans que des régularités n'apparaissent. Ces résultats concernent tout autant les élèves du primaire que du secondaire 1. Il semble donc peu réaliste d'attendre des élèves qu'ils résolvent des problèmes en suivant des phases préconçues. Ceci questionne ainsi les modèles linéaires, inspirés de Pólya, utilisés encore aujourd'hui notamment lorsqu'il s'agit d'enseigner la résolution de problèmes. À titre d'exemple, les MER qui correspondent au manuel officiel prescrit en Suisse romande sont fortement marqués par de tels modèles linéaires.

Nous nous sommes ensuite attachés au point de vue des heuristiques qui nous a permis de porter un autre regard plus microscopique sur les mêmes données. De notre lecture des différents travaux sur le sujet, nous avons dégagé les différentes heuristiques que les auteurs ont identifiées, puis nous avons tenté de les repérer dans les résolutions des élèves. Nous avons alors élaboré notre outil d'analyse qui nous a permis, sur la base de nos données d'observation, de dégager différents profils d'élèves que nous avons nommés : les « explorateurs », les « papillonneurs » et les « prospecteurs ». Les élèves qui sont dans le profil explorateur se caractérisent par une certaine persistance dans la ou les pistes envisagées au cours de la résolution et semblent globalement plus souvent réussir à résoudre correctement le problème. Ceux qui sont dans le profil papillonneur se caractérisent par une recherche beaucoup plus superficielle qui n'aboutit généralement pas à résoudre correctement le problème bien que ces élèves présentent une certaine richesse dans les heuristiques mises en œuvre. Quant au profil prospecteur, il apparaît comme un compromis des deux autres profils en ce sens que, comme les élèves du profil papillonneur, ils ont ouvert un certain nombre de pistes différentes ; et comme les élèves du profil explorateur, ils ont pu explorer de manière plus approfondie une de ces pistes.

En lien avec ce niveau d'analyse mais sur un plan méthodologique, nous pensons que le manuel de codage que nous avons élaboré est opérationnel pour analyser d'autres types de problèmes du primaire et du secondaire 1. Pour autant, le fait de nous être cantonné à un seul type de problèmes (pour des raisons de faisabilité) constitue une limite de notre recherche. En effet, nous nous demandons si de tels profils d'élèves émergeraient de l'étude d'un autre type de problèmes ou s'ils sont spécifiques aux problèmes qui se résolvent par essais et ajustements. Nous faisons l'hypothèse que de tels profils se dégageraient de l'analyse des démarches des élèves sur d'autres types de problèmes. Le profil explorateur le serait peut-être de manière moins nette puisque les phases d'essais ont permis de générer un grand nombre d'heuristiques pour un même espace sémantique ce qui ne sera sans doute pas le cas sur un autre type de problèmes.

Par ailleurs, la combinaison de nos deux points de vue, global et sur les heuristiques, nous a permis de mettre en évidence deux caractéristiques intéressantes relativement au rôle des heuristiques. En effet, nous avons pu montrer, d'une part, qu'elles interviennent majoritairement au cours des phases qui correspondent au cœur de la recherche, ce qui confirme les résultats de Schoenfeld

(1985) mais, ceci, dans le contexte habituel de la classe. D'autre part, les heuristiques ont eu comme effet de mettre fin à un épisode pour en ouvrir un autre, de nature différente. Ces nouveaux épisodes ouverts correspondent presque à chaque fois aux phases de mise en œuvre ou d'exploration. Ainsi, les heuristiques présentent un potentiel intéressant du point de vue de l'aide à la résolution de problèmes pour relancer la recherche des élèves.

Malgré nos deux points de vue et leur mise en perspective dans l'analyse de nos données, il apparaît toutefois que nos outils d'analyse présentent certaines limites. En effet, nous avons pu observer certains duos de groupes (par exemple les groupes 4PCJc9 et 4PSJc12 ou encore 10LSBa11 et 10LSBa12) du même niveau scolaire, avec un même profil quant à leur usage des heuristiques et qui pour autant présentent des réussites différentes.

La mise en œuvre d'un troisième point de vue faisant intervenir de manière spécifique les essais et ajustements a permis, notamment, de rendre compte de ces écarts de réussite. Pour cette analyse, nous avons utilisé les processus de représentation identifiés par Julio (1995) en partant de l'hypothèse que les heuristiques sont des traces visibles du processus d'opérationnalisation. Nous avons également complété cette analyse par celle des rétroactions, de leurs interprétations et de la manière d'ajuster. Nous présentons les résultats principaux de ce dernier groupe d'analyses dans la section suivante.

2. L'articulation essais et ajustements

Les analyses fines des démarches d'ajustements d'essais successifs mises en œuvre par les groupes d'élèves révèlent différentes fonctions des essais réalisés. Elles ont permis également de mettre à jour des connaissances ignorées ou laissées implicites qui nous amènent à mieux caractériser la démarche d'ajustements d'essais successifs.

i. Fonction des essais

La principale fonction est celle qui consiste à tester des solutions potentielles de manière à se rapprocher de la solution du problème. Ceci étant, le rapprochement peut se faire suivant différentes logiques : en suivant un parcours systématique de l'espace problème, en testant un essai et sa configuration symétrique, en exploitant les interprétations des rétroactions ou en mettant en œuvre un même type d'ajustements afin d'observer les effets.

Par ailleurs, il arrive que certains essais servent aussi à faire évoluer la représentation mentale du problème. En effet, l'interprétation de la rétroaction peut provoquer par exemple l'abandon de certaines contraintes et ainsi une re-structuration de la représentation du problème.

Enfin, les essais peuvent aussi permettre de repérer des régularités. Ces régularités peuvent émaner de la confrontation des différentes caractérisations des essais (groupe 10LSBa12). Mais la plupart du temps, elles concernent les effets possibles d'un certain ajustement (groupes 4PSJc12 et 4PCJc10) et peuvent amener les élèves à conjecturer des règles d'action.

Ainsi, et contrairement aux idées des enseignants de l'étude de Vlassis et al. (2014) qui ne valorisent pas cette démarche d'ajustements d'essais successifs car perçue comme « non mathématique », les élèves qui résolvent des problèmes en faisant des ajustements d'essais successifs peuvent être amenés à développer la capacité à comparer, à repérer des régularités et à en déduire des conjectures, autant d'actes qui sont au cœur de l'activité mathématique.

ii. Connaissances ignorées et/ou laissées implicites

Nos analyses mettent également en lumière un certain nombre de difficultés que les élèves ont du mal à surmonter. Tout d'abord, le fait qu'une solution doit respecter en même temps toutes les

données du problème est loin de s'imposer à tous les élèves. Ensuite, ajuster en modifiant des parties tout en conservant le tout n'est pas acquis pour tous les élèves. Un autre point central qui a causé de nombreuses difficultés concerne le lien entre l'essai et la rétroaction, que ce soit l'exploitation de l'écart au but pour caractériser un nouvel essai pertinent ou l'anticipation des effets d'un ajustement. Tous ces éléments viennent relativiser l'idée de Stacey (1991) selon laquelle « guess and check is an intuitive strategy available to all » (p. 6). C'est sans doute le cas pour une pesée avec une balance ou la mise à niveau d'un meuble par exemple car les ajustements sont moins complexes, du fait qu'ils n'impliquent qu'une seule grandeur. Nos analyses montrent que les problèmes de mathématiques que nous avons étudiés renferment un niveau de difficulté supérieur car ils demandent de traiter simultanément plusieurs grandeurs dont les élèves, contrairement aux experts, ne connaissent pas a priori les relations qui les lient.

Finalement, nous pensons que les différents éléments que nous venons d'évoquer sont trop souvent traités comme des implicites par les enseignants (mais peut être également par la recherche) et, de fait, nécessiterait un apprentissage spécifique. De plus, nous ne notons pas d'évolution entre les élèves de 4^e et ceux de 10^e relativement à cette capacité à ajuster et à interpréter de manière efficiente les rétroactions du milieu. Peut-être encore que c'est parce que les élèves ne sont pas assez souvent confrontés à ce type de problèmes. Enfin, si les enseignants mettent plutôt l'accent sur les essais, nous pensons que la manière d'ajuster reste un point aveugle et qu'un enseignement spécifique est nécessaire mais reste difficile car cet aspect n'était pas clairement identifié, ce qui pose également la question du processus d'institutionnalisation qui est proposé à partir de ce type de problèmes.

À ce propos, la modélisation sous forme de deux espaces (essai et rétroaction, voir Figure 69 et Figure 70) nous paraît être un outil intéressant pour se questionner sur les différents niveaux d'interprétations possibles des rétroactions et formuler des règles qui permettent d'exploiter ces interprétations et ainsi aider à repérer les connaissances susceptibles d'être institutionnalisées.

iii. Caractérisation de la démarche d'ajustements d'essais successifs

Ceci nous amène in fine à proposer une caractérisation de la démarche d'ajustements d'essais successifs qui rende compte de la complexité du travail des élèves. Notre proposition tente de faire ressortir les points saillants de cette démarche. Nous entendons par points saillants, les points où les élèves risquent de rencontrer des difficultés donc également ceux sur lesquels l'enseignant peut organiser son enseignement, prélever des observables pour analyser le travail des élèves et réguler :

Résoudre un problème par ajustements d'essais successifs consiste à :

- **Caractériser un essai, solution potentielle du problème ;**
- **Tester cet essai c'est-à-dire le confronter aux données du problème et ainsi l'(in)valider ;**
- **Et en cas d'invalidation, interpréter la rétroaction de manière efficiente pour ajuster c'est-à-dire caractériser un autre essai, en théorie plus proche de la solution, voire la solution elle-même ou pour faire évoluer la représentation du problème**

L'idée de la première puce est d'explicitier le fait d'imaginer une proposition qui pourrait tout à fait être une solution du problème ce qui n'est pas le cas des essais réalisés dans les problèmes qui mobilisent une démarche expérimentale par exemple. Le terme « caractériser » met la focale sur le registre de représentation sémiotique utilisé, ses potentialités ou ses limites.

Dans la dernière puce, la référence à l'évolution de la représentation du problème permet de prendre en considération une fonction des essais non envisagée jusqu'alors et de tenter d'identifier si certaines contraintes font obstacle à une représentation efficiente du problème.

Enfin, un des enjeux de la résolution du problème est de dépasser l'invalidation de l'essai pour aller vers une interprétation de la rétroaction et idéalement une exploitation de cette interprétation. Le

levier ici consiste à identifier si une interprétation est proposée par les élèves (et si oui, laquelle) et si cette interprétation est en lien avec les ajustements proposés.

Ces différents éléments nous amènent à envisager quelques pistes relativement au rôle de l'enseignant.

3. Le rôle de l'enseignant : dévolution et régulation lors de la résolution de problèmes

L'étude des processus des élèves dans les conditions réelles de la classe intègre de fait l'enseignant dans le système didactique, ce qui nous a permis d'effectuer certaines analyses du rôle de l'enseignant notamment en lien avec l'aide et les régulations qu'il peut apporter au cours de la résolution. Voici quelques propositions ou pistes de réflexion.

Tout d'abord, nos expériences de formateur montrent que les enseignants peuvent (ou pensent qu'il faut) passer beaucoup de temps sur la phase d'appropriation voire amorcer le travail (et donc renoncer à une part de la dévolution) pour que les élèves comprennent bien le problème avant de se lancer dans la résolution. Or, nous avons pu mettre en évidence (du point de vue macroscopique) que de nombreux groupes d'élèves pouvaient rentrer dans le problème directement par une phase de planification – mise en œuvre ou d'exploration. De plus, dans nos analyses du troisième niveau, nous avons remarqué que ce n'est pas tant le fait que les élèves ne comprennent pas le problème, qui apparaît, mais plutôt que leur représentation du problème embarque des contraintes qu'ils se rajoutent à tort et qui vont gêner voire rendre impossible la résolution. Aussi, il nous semble plus pertinent de permettre aux élèves de rentrer dans le problème avec leur compréhension qui correspond à la représentation qu'ils se sont construite. Le rôle de l'enseignant sera alors de prélever des informations sur la représentation qu'ont les élèves du problème afin de repérer les éventuelles contraintes que les élèves se rajoutent puis de les aider à en prendre conscience afin qu'ils puissent faire évoluer leur représentation du problème (de manière à passer dans un espace sémantique adéquat), plutôt que passer du temps à expliquer le problème. À l'inverse, il arrive également que les élèves ne prennent pas en compte toutes les contraintes ou données du problème, mais en général, et nos données le confirment, dans ce cas, les enseignants le repèrent facilement.

D'autre part, nous avons mis en évidence des cas où la représentation de l'enseignant sur le problème ne rencontre pas du tout celle des élèves. Dans ce cas, les régulations se sont révélées inefficaces, ne suscitant aucune évolution de la représentation du problème du côté des élèves. Ceci questionne le fait pour l'enseignant d'imposer sa représentation du problème et sa manière de le résoudre (qui correspond souvent à une méthode experte) d'autant plus si les élèves effectuent leur recherche dans un espace sémantique adéquat c'est-à-dire sans se rajouter de contraintes. Pour aller encore plus loin sur cette question des régulations nous pouvons exploiter une potentialité¹⁸ de notre modèle enrichi en accumulant les différents processus de résolution des différents groupes d'une même classe sur un seul et même modèle. La Figure 71 illustre l'accumulation réalisée pour la classe de 4PC et celle de 4PS.

¹⁸ Cette potentialité est proposée et explicitée dans (Rott, Specht, & Knipping, 2021).

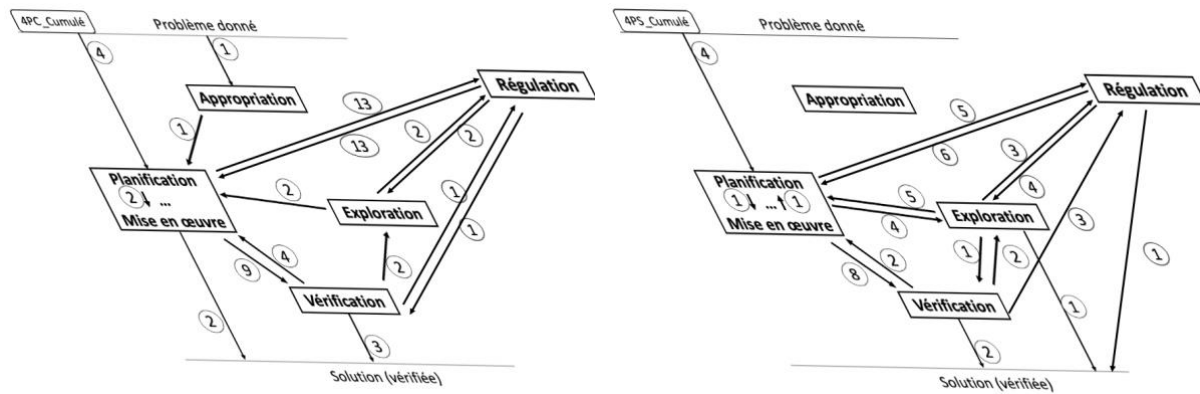


Figure 71. Accumulation des processus de résolution pour la classe de 4PC (gauche) et 4PS (droite)

Ces graphiques permettent d'effectuer des comparaisons entre ces deux classes. Ainsi, nous observons que 13 des 16 régulations opérées par l'enseignante de la classe de 4PC sont suivies d'une phase de « planification – mise en œuvre », 2 sont suivies par une phase d'exploration et 1 d'une phase de vérification. Pour ce qui concerne l'enseignante de la classe de 4PS, 6 régulations (sur un total de 11) sont suivies d'une phase de « planification – mise en œuvre », 4 par une phase d'exploration et 1 consiste à vérifier le problème avec les élèves. Ce qui en ressort pour notre propos est que les régulations de l'enseignante de la classe de 4PC sont clairement et majoritairement suivies d'une phase de « planification – mise en œuvre » tandis que c'est beaucoup plus équilibré pour les régulations de l'enseignante de la classe de 4PS. Ceci est une invitation à approfondir l'analyse du contenu des régulations de manière à déterminer leur potentiel pour relancer la recherche.

4. Perspectives

Les perspectives se situent sur le plan de la formation tout d'abord. En effet, une spécificité cantonale du contexte genevois est la présence d'un cours centré sur l'apprentissage de la résolution de problèmes destiné aux élèves de 10^eLS profil S. Pour aider les enseignants qui n'ont jamais eu à dispenser ce cours, l'institution leur impose de participer à une formation continue d'une journée que nous¹⁹ animons depuis 2018. Cette formation se colore progressivement de nos résultats de recherche respectifs. Nous pensons notamment introduire lors de cette prochaine journée de formation, la modélisation en deux espaces (espace de l'essai et espace de la rétroaction, voir Figure 69) qui nous semble être un outil intéressant pour mieux cerner les difficultés des élèves et même pour structurer l'analyse a priori relativement aux problèmes qui se résolvent par essais et ajustements. La présentation des analyses fines du travail des élèves devrait permettre également de mettre en discussion la complexité des essais, les difficultés que peuvent rencontrer les élèves, les connaissances pouvant être institutionnalisées tout en remettant en question l'idée de recherche suivant des étapes linéaires véhiculée par les programmes.

De plus, nous espérons poursuivre ce travail d'analyse du travail des élèves sur un autre type de problème. Pour cela, nous disposons de données, comparables à celles étudiées dans le cadre de cette thèse, recueillies sur un problème dit de pattern c'est-à-dire pour lequel les élèves doivent repérer des régularités et formuler une conjecture. Ceci devrait nous permettre de continuer

¹⁹ Maud Chanudet et nous-même

d'explorer la complexité de cette notion d'essai dans une fonction d'enrichissement du milieu afin de conjecturer.

Dans une optique orientée vers la recherche cette fois, et en lien avec le dernier point évoqué dans la section précédente, nous avons montré le potentiel des heuristiques pour orienter ou relancer la recherche des élèves car elles permettent d'ouvrir des espaces sémantiques adéquats susceptibles d'être explorés par les élèves. Ceci nous amène à formuler les questions suivantes qui pourraient guider une autre recherche : Quelles régulations sont pertinentes pour soutenir l'activité et les apprentissages des élèves en résolution de problèmes ? Comment les enseignants peuvent-ils recourir à des heuristiques pour favoriser le potentiel de recherche des problèmes ?

Enfin, nous avons fait émerger quelques éléments en lien avec les processus de dévolution et d'institutionnalisation à l'échelle d'un type de problème particulier. Nous souhaiterions étendre ce travail à d'autres types de problèmes avec comme objectif sur plus long terme d'étudier comment s'opèrent ces processus de dévolution et d'institutionnalisation lors de séances dédiées à la résolution de problèmes mais sur une échelle plus conséquente de l'ordre d'une année scolaire et idéalement en lien avec les autres travaux de l'équipe de Didactique des Mathématiques à Genève comme ce fut le cas pour cette recherche doctorale.

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figures

- Figure 1. Espace effectif (Tour de Hanoï)
- Figure 2. Exemple d'espace sémantique (Tour de Hanoï)
- Figure 3. Le modèle de congruence sémantique (Gros, Thibaut et Sander, 2020)
- Figure 4. Ensemble des questions proposées par Pólya (1989)
- Figure 5. Présentation simplifiée et traduite du modèle de Schoenfeld (1985)
- Figure 6. Explication des quatre catégories qui composent le cadre théorique de Schoenfeld (1985, p. 15)
- Figure 7. Traduction du modèle de Rott (2012b)
- Figure 8. Problème des missionnaires et des cannibales (Richard, 2004)
- Figure 9. Repérage du point de blocage sur l'espace effectif (Missionnaires et cannibales)
- Figure 10. Exemple d'une caractérisation d'une heuristique (Koichu et al., 2007) codée à partir des différentes catégories (Rott, 2014)
- Figure 11. Extrait du codage du groupe 10CTBa13
- Figure 12. Exemple de codage (Lucas et al., 1980, p. 361)
- Figure 13. Extrait du manuel de codage de Koichu et al. (2007)
- Figure 14. Extrait du manuel de codage de Rott (2012a)
- Figure 15. Extrait du tableau qui présente les analyses du groupe 4PCJc7
- Figure 16. Extrait du descriptif des épisodes pour le groupe 4PCJc7
- Figure 17. Légende couleur/épisode pour les graphiques en barres
- Figure 18. Représentations graphiques de l'analyse en épisodes pour chaque groupe de la classe 4PC
- Figure 19. Représentations graphiques de l'analyse en épisodes pour chaque groupe de la classe 4PS
- Figure 20. Représentations graphiques de l'analyse en épisodes pour chaque groupe de la classe 8PS
- Figure 21. Représentations graphiques de l'analyse en épisodes pour chaque groupe de la classe 8PV
- Figure 22. Représentations graphiques de l'analyse en épisodes pour chaque groupe de la classe 10CT
- Figure 23. Représentations graphiques de l'analyse en épisodes pour chaque groupe de la classe 10LS
- Figure 24. Geste du porteur de la caméra pointant l'énoncé
- Figure 25. Début du travail écrit du porteur de la caméra du groupe 10LSBa9
- Figure 26. Répartition du nombre de groupes en fonction du nombre d'épisodes de digression
- Figure 27. Répartition du nombre de groupes par degré en fonction du nombre d'épisodes de digression
- Figure 28. Répartition des groupes par degré en fonction de l'instant du premier épisode de digression
- Figure 29. Boîte à moustaches représentant la dispersion du nombre total d'épisodes pour chaque groupe
- Figure 30. Représentations graphiques du découpage en épisodes et de l'avancée propre du travail des élèves pour trois groupes
- Figure 31. Notre traduction du modèle descriptif des processus de résolution de problèmes (Rott, 2012b; Rott et al., 2021)
- Figure 32. Groupes dont le processus de résolution est linéaire (au sens de Pólya)

- Figure 33. Groupes dont le processus de résolution est cyclique au sens de Schoenfeld
- Figure 34. Groupes dont le processus est non apparenté à un modèle normatif
- Figure 35. Proposition de modèle permettant de décrire les processus de résolution des élèves dans le cas d'interventions de l'enseignant
- Figure 36. Deux exemples (groupes 4PCJc10 et 4PCJc11) des résultats obtenus avec notre modèle enrichi
- Figure 37. Groupes dont le processus a une tendance linéaire (au sens de Pólya)
- Figure 38. Groupes dont le processus a une tendance cyclique (au sens de Schoenfeld)
- Figure 39. Groupes dont le processus a une tendance cyclique grâce aux régulations
- Figure 40. Groupes dont le processus a une tendance non apparentée à un modèle normatif
- Figure 41. Groupes dont le processus a une tendance non apparentée à un modèle normatif grâce à une régulation
- Figure 42. Groupes caractérisés par un nombre important d'aller-retours entre une phase de planification-mise en œuvre et de régulation
- Figure 43. Représentation graphique des différentes heuristiques sur un axe temporel (groupe 4PSJc12)
- Figure 44. Mise en évidence du lien entre certaines heuristiques (groupe 4PSJc12)
- Figure 45. Mise en évidence des espaces sémantiques (groupe 4PSJc12)
- Figure 46. Mise en évidence des espaces sémantiques (groupe 4PCJc10)
- Figure 47. Représentation graphique des différents types d'espaces sémantiques
- Figure 48. Démarche de résolution pour le groupe 4PSJc12
- Figure 49. Démarche de résolution pour le groupe 4PCJc10
- Figure 50. Démarche de résolution pour le groupe 4PCJc9
- Figure 51. Démarche de résolution pour le groupe 8PSDr3
- Figure 52. Démarche de résolution pour le groupe 10CTBa7
- Figure 53. Démarche de résolution pour le groupe 4PCJc10
- Figure 54. Démarche de résolution pour le groupe 8PVDr7
- Figure 55. Démarche de résolution pour le groupe 10LSBa10
- Figure 56. Démarche de résolution pour le groupe 10CTBa14
- Figure 57. Démarche de résolution pour le groupe 10LSBa11
- Figure 58. Positionnement des différents groupes selon le nombre d'espaces sémantiques ouverts, le nombre d'heuristiques maximum par espace sémantique et la réussite/échec au problème
- Figure 59. Positionnement des différents groupes selon le nombre d'espaces sémantiques ouverts, le nombre d'heuristiques maximum par espace sémantique et l'origine scolaire
- Figure 60. Exemple de superposition des représentations graphiques des épisodes et des heuristiques
- Figure 61. Repérage des heuristiques en lien avec un changement d'épisodes
- Figure 62. Illustration de la tolérance temporelle
- Figure 63. Répartition des heuristiques selon le moment où elles interviennent et selon l'origine primaire ou secondaire des élèves
- Figure 64. Répartition des épisodes situés avant la rupture provoquée par une heuristique
- Figure 65. Répartition des épisodes situés après la rupture provoquée par une heuristique
- Figure 66. Répartition des épisodes situés avant (haut) et après (bas) la rupture provoquée par une heuristique en fonction de la provenance primaire / secondaire des groupes d'élèves
- Figure 67. Répartition des épisodes situés avant (haut) et après (bas) la rupture provoquée par les heuristiques faire un essai et travailler en avançant
- Figure 68. Répartition par profil des représentations graphiques correspondant au découpage en épisodes
- Figure 69. Différentes interprétations de la rétroaction et exploitation potentielle
- Figure 70. Autre interprétation des rétroactions: le repérage d'une régularité

Figure 71. Accumulation des processus de résolution pour la classe de 4PC (gauche) et 4PS (droite)

Tableaux

- Tableau 1. Présentation de quelques caractéristiques différenciant les 6 modèles considérés
- Tableau 2. Répartition des groupes filmés et à analyser par classe
- Tableau 3. Répartition du nombre d'accords/désaccords et calcul du pourcentage d'accord inter-codeurs pour le codage de la nature des épisodes
- Tableau 4. Répartition du nombre d'accords/désaccords et calcul du pourcentage d'accord inter-codeurs pour le codage temporel
- Tableau 5. Synthèse de tous les codes-épisodes pour les deux codeurs
- Tableau 6. Synthèse des proportions de tous les codes-épisodes pour les deux codeurs
- Tableau 7. Repères pour l'interprétation du coefficient Kappa de Cohen (Landis & Koch, 1977, p. 165)
- Tableau 8. Nombre et répartition par classe des groupes retenus pour le codage en heuristiques
- Tableau 9. Calcul du pourcentage d'agrément en temps et nature des heuristiques
- Tableau 10. Explication des accords et des différents types de désaccords
- Tableau 11. Extrait d'une grille de codage (8PSDr10)
- Tableau 12. Synthèse de l'ensemble des heuristiques pour les deux codeurs
- Tableau 13. Grille utilisée pour analyser les régulations des enseignants (Rott, 2020)
- Tableau 14. Analyse des régulations pour le groupe 4PSJc12
- Tableau 15. Analyse des régulations pour le groupe 8PVDr7
- Tableau 16. Tableau récapitulatif du classement des régulations les plus fréquentes
- Tableau 17. Synthèse de la réussite ou non-réussite au problème pour l'ensemble des groupes
- Tableau 18. Résultats de l'analyse en épisodes pour les groupes 4PCJc7 et 4PCJc14
- Tableau 19. Instant d'apparition du premier épisode de digression de chaque groupe (répartition par degré)
- Tableau 20. Proportion du temps passé à digresser, par groupe et par degré
- Tableau 21. Tableaux présentant la proportion de l'avancée propre du travail des élèves (tableau de gauche) et le nombre de séries caractérisant cette avancée (tableau de droite)
- Tableau 22. Tableau présentant la proportion de l'avancée propre du travail des élèves et le nombre de séries caractérisant cette avancée
- Tableau 23. Résultats du codage en heuristiques pour le groupe 4PSJc12
- Tableau 24. Répartition en nombre des heuristiques selon la nature de l'épisode qui la précède et qui la suit
- Tableau 25. Liste des intitulés des heuristiques en lien avec un changement d'épisodes
- Tableau 26. Tableau présentant le lien entre la nature des heuristiques et les enchaînements d'épisodes
- Tableau 27. Caractérisation de l'avancée propre du travail des élèves selon le profil des élèves
- Tableau 28. Répartition des onze groupes analysés suivant la réussite ou non du problème

RÉFÉRENCES

- Andrieu, B., & Burel, N. (2014). La communication directe du corps vivant. Une émergiologie en première personne. *Hermès, La Revue*, 1, 46-52.
- Bassok, M., Chase, V. M., & Martin, S. A. (1998). Adding apples and oranges : Alignment of semantic and formal knowledge. *Cognitive Psychology*, 35(2), 99-134.
- Bonafé, F., Chevalier, A., Combes, M.-C., Deville, A., Dray, L., Robert, J.-P., & Sauter, M. (2002). *Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée*. Paris; Montpellier: APMEP ; IREM de Montpellier.
- Brousseau, G. (2012). Des dispositifs Piagétien... Aux situations didactiques. *Éducation et didactique [En ligne]*, 6(2). Consulté à l'adresse <http://journals.openedition.org/educationdidactique/1475>
- Brousseau, Guy. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques. *Etudes dans le cadre de la théorie des Situations Didactique./Petix x*, 57, 5-30.
- Brun, J. (1990). La résolution de problèmes arithmétiques : Bilan et perspectives. *Math-Ecole*, 141, 2-15.
- Chanudet, M. (2017). Le problème des châteaux de cartes. *Revue de mathématiques pour l'école*, 228, 4-13.
- Chanudet, M. (2019). *Etude des pratiques évaluatives des enseignants dans le cadre d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes en mathématiques* (Thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation). Université de Genève.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La pensée sauvage.
- CNRTL. (s.d.). Heuristique. Consulté à l'adresse <https://www.cnrtl.fr/definition/heuristique>
- Cohen, J. (1960). A coefficient of agreement for nominal scales. *Educational and Psychological Measurement*, 20, 37-46.
- Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin. (2010). Commentaires généraux du domaine Mathématiques et Sciences de la nature (premier cycle). In *Plan d'études romand* (p. 5-11). Neuchâtel: CIIP. Consulté à l'adresse http://www.plandetudes.ch/documents/10273/36537/PER_print_MSN_CG.pdf
- Conférences Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP). (2019). *Aide-mémoire*. LEP.
- Coppé, S. (1993). *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé*. Thèse de l'Université Claude Bernard. Lyon I.
- Coquin-Viennot, D., & Moreau, S. (2003). Highlighting the role of the episodic situation model in the solving of arithmetical problems. *European Journal of Psychology of Education*, 18(3), 267-279.
- Dorier, J.-L., & Garcia, F. J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM the international journal on mathematics education*, 45(6), 837-849.
- Elia, I., Den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics.

ZDM, 41(5), 605-618.

Engel, A. (1998). *Problem-solving strategies* (Springer). New York.

Favier, S. (2018). Prise en compte des erreurs par les élèves : Le cas des narrations de recherche. In M. Abboud (Éd.), *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines. Actes du colloque EMF*. (p. 990-998). Gennevilliers: IREM de Paris.

Feigenbaum, E. A., & Feldman, J. (1963). *Computers and thought* (McGraw-Hill). New York.

Glaeser, G. (1999). *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 137-165.

Gros, H., Thibaut, J. P., & Sander, E. (2020). Semantic congruence in arithmetic : A new conceptual model for word problem solving. , 55(2), 69-87. *Educational Psychologist*, 55(2), 69-87.

Guttman, H. A., Spector, R. M., Sigal, J. J., Rakoff, V., & Epstein, N. B. (1971). Reliability of coding affective communication in family therapy sessions : Problems of measurement and interpretation. *Journal of Consulting and Clinical Psychology*, 37, 397-402.

Hersant, M. (2010). *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques : De l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires*. Note de synthèse HDR, Université de Nantes, Nantes.

Houdé, O. (2019). *Comment raisonne notre cerveau* (Que sais-je?).

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development*, 54(1), 84-90.

Inhelder, B., & de Caprona, D. (1992). Vers le constructivisme psychologique : Structures ? Procédures ? Les deux indissociables. In *Le cheminement des découvertes de l'enfant* (Delachaux and Niestlé). Paris.

Jacobs, J., Garnier, H., Gallimore, R., Hollingsworth, H., Bogard Givvin, K., Rust, K., ... Stigler, J. (2003). *Third International Mathematics and Science Study 1999 Video Study Technical Report. Volume 1 : Mathematics*. Washington: National Center for Education Statistics.: Institute of Education Statistics, U. S. Department of Education.

Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models : Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness* (No. 6). Cambridge: MA: Harvard University Press.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.

Kahneman, D. (2012). *Système 1/ système 2 : Les deux vitesses de la pensée* (Flammarion).

Kantowski, E. L. (1974). *Processes involved in Mathematical Problem Solving*. (Unpublished doctoral dissertation). University of Georgia.

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for research in mathematics education*, 8(3), 163-180.

Kilpatrick, J. (1967). *Analyzing the solution of word problems in mathematics : An exploratory study*. (Unpublished doctoral dissertation, Stanford University). Stanford.

Kintsch, W., & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), 109-129.

- Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2006). Patterns of middle school students' heuristic behaviors in solving seemingly familiar problems. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N., Krátká, M., & Stehlíková, N. (Éds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, p. 457-464). Prague:PME.
- Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2007). Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. *Instructional Science*, 35(2), 99-139.
- Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations*. (trad. Balacheff&Laborde). Paris: Hermann.
- Landis, J. R., & Koch, G. G. (1977). The measurement of observed agreement for categorical data. *Biometrics*, 33(1), 159-174.
- Larousse. (s. d.). Essai. Consulté à l'adresse <https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/essai/31080>
- Larson, L. C. (1983). *Problem-solving through problems*. Springer-Verlag New York Inc.
- Lucas, J. F. (1972). *An exploratory study on the diagnostic teaching of heuristic problem solving strategies in calculus*. Wisconsin- Madison.
- Lucas, J. F. (1974). The teaching of heuristic problem-solving strategies in elementary calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 5(1), 36-46.
- Lucas, J. F., Branca, N., Goldberg, D., Kantowski, M. G., Kellogg, H., & Smith, P. (1980). A process-sequence coding system for behavioral analysis of mathematical problem solving. In *Task variables in mathematical problem solving* (p. 345-378). Columbus, Ohio.
- Mayer, R. E., & Wittrock, M. C. (2006). Problem solving. In *Handbook of educational psychology* (Vol. 2, p. 287-303).
- Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche. (2005). *Documents d'accompagnement des programmes*. Scéren édition.
- Morieux, M. (2016). *Dispositifs technologiques en EPS et convergence numérique : Quel corps dans une pédagogie augmentée depuis 1985? : Intégration des TIC (Technologies de l'Information et de la Communication) dans l'enseignement de l'EPS*. Université Sorbonne Paris Cité.
- Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- OECD. (2013). *PISA 2012 Unités Libérées—Mathématiques*. Consulté à l'adresse https://pisa.educa.ch/sites/default/files/20161124/exercices_mathematiques_2012_avec_codification.pdf
- Poitrenaud, S. (1998). *La représentation des procédures chez l'opérateur. Description et mise en oeuvre des savoir-faire*. (Thèse de Doctorat). Université de Paris 8.
- Pólya, G. (1957). *Comment poser et résoudre un problème (Traduit de : How to solve it)* (Dunod).
- Pólya, G. (1958). *Les mathématiques et le raisonnement plausible* (L. Couffignal & R. Vallée, Trad.). Paris: Gauthiers-Villars.
- Pólya, G. (1989). *Comment poser et résoudre un problème (Traduit de : How to solve it)*. Sceaux: J. Gabay.
- Pólya, George. (1945). *How to solve It*. Princeton University: Princeton NJ.

- Posamentier, A. S., & Krulik, S. (2009). *Problem solving in mathematics, grades 3-6 : Powerful strategies to deepen understanding*. Corwin Press.
- Richard, J.-F. (1994). La résolution de problèmes. In *Traité de psychologie expérimentale* (Vol. 2, p. 523-570). Paris: Presses Universitaires de France.
- Richard, J.-F. (2004). *Les activités mentales* (4e éd.). Paris: Armand Colin.
- Richelle, M., & Droz, R. (1976). *Manuel de psychologie. Introduction à la psychologie scientifique* (Pierre Mardaga). Bruxelles.
- Romanycia, M. H., & Pelletier, F. J. (1985). What is a heuristic? *Computational Intelligence*, 1(1), 47-58.
- Rott, B. (2011). Problem Solving Processes of Fifth Graders : An Analysis. In B. Ubuz (Éd.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p. 65-72). Ankara, Türkiye.
- Rott, B. (2012a). Heuristics in the problem solving processes of fifth graders. In T. Y. Tso (Éd.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p. 35-42).
- Rott, B. (2012b). Models of the problem solving process—A discussion referring to the processes of fifth graders. In T. Bergqvist (Éd.), *Learning Problem Solving and Learning Through Problem Solving, proceedings from the 13th ProMath conference* (p. 95-109). Umeå, Sweden.
- Rott, B. (2014). Rethinking Heuristics – Characterizations and Examples. In A. Ambrus & E. Vasarhelyi (Éds.), *Problem Solving in Mathematics Education – Proceedings of the 15th ProMath Conference* (p. 176-192). Haxelnyomda, Hungary.
- Rott, B. (2015). Rethinking heuristics—characterizations and vignettes. *LUMAT Online Journal*, 3(1), p. 122-126.
- Rott, B. (2020). Teachers' behaviors, epistemological beliefs, and their interplay in lessons on the topic of problem solving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(5), 903-924.
- Rott, B., Specht, B., & Knipping, C. (2021). A descriptive phase model of problem-solving processes. *ZDM – Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01244-3>
- Rumelhart, D. E. (1980). Schemata : The building blocks of cognition. In R. J. Spiro, B. C. Bruce, & W. F. Brewer (Éds.), *Theoretical issues in reading comprehension* (p. 33-58). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press Inc.
- Schoenfeld, A. H. (1992a). Learning to think mathematically : Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (D. Grouws, p. 334-370). New York: MacMillan.
- Schoenfeld, A. H. (1992b). On paradigms and methods : What do you do when the ones you know don't do what you want them to ? Issues in the analysis of data in the form of videotapes. *The Journal of the Learning Sciences*, 2(2), 179-214.
- Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 9-34.
- Stacey, K. (1991). The effects on students' problem solving behaviour of long-term teaching through a problem solving approach. In F. Furinghetti (Éd.), *Proceedings of the 15th conference*

of the international group for the psychology of mathematics education (Vol. 3, p. 278-285). Assisi: PME.

Stemler, S. E. (2001). An overview of content analysis. *Practical Assessment, Research and Evaluation*, 7(17).

Thorndike, E. L. (1898). *Animal intelligence: An experimental study of the associative processes in animals*. Columbia.

Tinsley, H. E., & Weiss, D. J. (1975). Interrater reliability and agreement of subjective judgments. *Journal of Counseling Psychology*, 22(4).

Tonge, F. M. (1960). Summary of a heuristic line balancing procedure. *Management Science*, 7(1), 21-42.

Van Dijk, T. A., & Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. New York: NY: Academic Press.

Vermersch, P. (1994). *L'entretien d'explicitation (ESF)*. Paris.

Verschaffel, L. (1999). Realistic mathematical modeling and problem solving in the upper elementary school: Analysis and improvement. In J. H. M. Hamers, J. E. H. Van Luit, & B. Csapó (Éds.), *Teaching and learning thinking skills* (Lisse: Swets&Zeitlinger, p. 215-239).

Vlassis, J., Mancuso, G., & Poncelet, D. (2014). Le rôle des problèmes dans l'enseignement des mathématiques: Analyse des croyances d'enseignants du primaire. *Cahiers des Sciences de l'Education*, 36, 143-175.

Weil-Barais, A. (1993). *L'Homme cognitif*. Paris: PUF.