



**HAL**  
open science

# Quelques résultats sur le contrôle, la stabilisation et les problèmes inverses pour des équations aux dérivées partielles

Emmanuelle Crépeau

► **To cite this version:**

Emmanuelle Crépeau. Quelques résultats sur le contrôle, la stabilisation et les problèmes inverses pour des équations aux dérivées partielles. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université de Versailles St Quentin en Yvelines, 2019. tel-03629838

**HAL Id: tel-03629838**

**<https://hal.science/tel-03629838v1>**

Submitted on 4 Apr 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**LMV**  
Laboratoire de mathématiques  
de Versailles - CNRS UMR 8100



UNIVERSITÉ VERSAILLES-ST QUENTIN EN  
YVELINES, PARIS SACLAY

Laboratoire de Mathématiques de Versailles (UMR 8100 CNRS)

Mémoire présenté pour l'obtention du

**Diplôme d'habilitation à diriger les recherches**

Discipline : Mathématiques

*par*

**Emmanuelle CREPEAU**

Quelques résultats sur le contrôle, la stabilisation et les  
problèmes inverses pour des équations aux dérivées  
partielles

Rapporteurs :

ENRIQUE FERNANDEZ-CARA  
OLIVIER GLASS  
LUC ROBBIANO

Date de soutenance : 17 juin 2019

Composition du jury :

FATIHA ALABAU  
KARINE BEAUCHARD  
JEAN-MICHEL CORON  
ENRIQUE FERNANDEZ-CARA  
OLIVIER GLASS  
LUC ROBBIANO  
LIONEL ROSIER



*Je tiens tout d'abord à remercier très chaleureusement Enrique Fernandez-Cara et Olivier Glass d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce manuscrit et bien entendu Luc Robbiano d'être mon parrain et de n'avoir cessé pendant ces dernières années de m'encourager à soutenir mon habilitation.*

*Je suis également très reconnaissante à Fatiha Alabau, Karine Beauchard, Jean-Michel Coron et Lionel Rosier d'honorer ce jury de leur présence. J'en profite pour remercier plus particulièrement Jean-Michel et Lionel de m'avoir initiée à la recherche.*

*Je remercie sincèrement tous mes co-auteurs et amis Kaïs, Lucie, Nicolas, Eduardo, Alberto, Christophe, Michel, Julie. J'ai apprécié tous les échanges que nous avons pu avoir ensemble.*

*Je tiens également à associer à ces remerciements mon équipe de recherche au Laboratoire de Mathématiques de Versailles pour la liberté de recherche qu'elle m'a offerte. Je tiens à remercier mes collègues particulièrement pour ces deux dernières années.*

*Merci beaucoup au Laboratoire Jean Kuntzmann à Grenoble qui m'a accueillie chaleureusement, mon installation a été des plus simples et des plus naturelles grâce à leur bienveillance. Je n'ai aucun doute sur nos collaborations futures.*

*Enfin merci à Pascal et nos trois enfants, Antoine, Anaëlle et Léa pour tous ces moments de bonheurs partagés.*

*Emmanuelle*



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Quelques résultats de contrôle</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>Contrôle de l'équation de Korteweg-de Vries.</b>	<b>13</b>
1.1	Introduction . . . . .	13
1.2	Contrôle de KdV sur un segment . . . . .	14
1.2.1	Présentation du problème . . . . .	14
1.2.2	Espace manqué de dimension 1 . . . . .	16
1.2.3	Espace manqué de dimension 2 . . . . .	17
1.2.4	Espace manqué de dimension supérieure à 2 . . . . .	18
1.2.5	Problèmes ouverts . . . . .	19
1.3	Contrôle de KdV sur des segments en série . . . . .	19
1.3.1	Présentation du problème . . . . .	19
1.3.2	Problèmes ouverts . . . . .	22
1.4	Contrôle de KdV sur un réseau . . . . .	23
1.4.1	Présentation du problème dans le cas où on contrôle au noeud central. . . . .	23
1.4.2	Idées de la preuve et résultats obtenus . . . . .	24
1.4.3	Présentation du problème dans le cas où on ne contrôle pas au noeud central. . . . .	27
1.4.4	Idée des preuves et résultats obtenus . . . . .	27
1.4.5	Problèmes ouverts . . . . .	30
1.5	Perspectives . . . . .	31
1.5.1	Système de Hirota-Satsuma . . . . .	31
1.5.2	Equation de KdV posée sur un arbre . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Contrôle de quelques équations posées sur un segment</b>	<b>33</b>
2.1	Contrôle de l'équation de Boussinesq améliorée. . . . .	33
2.1.1	Présentation du problème . . . . .	33
2.1.2	Résultats obtenus . . . . .	34
2.2	Contrôle de l'équation des poutres . . . . .	35
2.2.1	Présentation du problème . . . . .	35
2.2.2	Eléments de démonstration . . . . .	37
2.2.3	Résultats numériques . . . . .	38
2.3	Contrôle d'équations de réaction-diffusion. . . . .	38
2.3.1	Contrôle approché de l'équation de FitzHugh-Nagumo . . . . .	38
2.3.2	Equation de FitzHugh Nagumo non linéaire . . . . .	42

<b>II</b>	<b>Stabilisation</b>	<b>45</b>
<b>3</b>	<b>Cas de l'équation de KdV avec un terme retardé</b>	<b>47</b>
3.1	Présentation du problème . . . . .	47
3.2	Fonction de Lyapunov . . . . .	48
3.3	Inégalité d'observabilité . . . . .	49
3.4	Résultats numériques . . . . .	50
3.5	Problèmes ouverts . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Cas de l'équation de KdV sur un réseau étoilé</b>	<b>53</b>
4.1	Présentation du problème . . . . .	53
4.2	Stabilité dans le cas linéaire . . . . .	54
4.3	Stabilité dans le cas non linéaire . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Autres exemples de stabilisation</b>	<b>59</b>
5.1	Stabilisation rapide de KdV . . . . .	59
5.2	Cas de l'équation de BBM sur un réseau . . . . .	59
<b>III</b>	<b>Problèmes inverses</b>	<b>61</b>
<b>6</b>	<b>Analyse semi-classique de signaux (SCSA).</b>	<b>63</b>
<b>7</b>	<b>Problèmes inverses pour quelques EDP</b>	<b>65</b>
7.1	Equation des ondes sur réseau. . . . .	65
7.1.1	Présentation du problème . . . . .	65
7.1.2	Obtention de l'inégalité de Carleman . . . . .	67
7.1.3	Obtention du résultat de stabilité . . . . .	69
7.1.4	Problèmes ouverts . . . . .	69
7.2	Equation de Kuramoto-Sivashinsky. . . . .	69
7.2.1	Présentation du problème. . . . .	69
7.2.2	Idées de la démonstration . . . . .	71
7.3	Equation de Korteweg-de Vries. . . . .	73
7.3.1	Présentation des résultats. . . . .	73
7.3.2	Idées de la démonstration . . . . .	74
7.3.3	Problèmes ouverts et perspectives . . . . .	76

# Introduction

Ce mémoire regroupe les différentes recherches que j'ai réalisées depuis ma thèse soutenue en 2005. Mes travaux se sont concentrés sur des problèmes de contrôlabilité, stabilisation et résolution de problèmes inverses pour différentes équations aux dérivées partielles. Ces trois thèmes constituent les trois parties de ce mémoire.

La première partie repose sur des problèmes de contrôlabilité exacte de différentes EDP. L'idée générale est de montrer que le problème linéarisé autour de zéro est contrôlable. Pour cela on utilise le résultat classique de dualité entre la contrôlabilité exacte du problème direct et l'observabilité du problème adjoint. L'idée étant de montrer une inégalité d'observabilité forte du problème adjoint rétrograde en temps. Cette inégalité peut se montrer avec différentes techniques, multiplicateurs, décomposition spectrale, inégalités de Ingham, ou encore méthode des moments.

Cette partie se divise en deux chapitres, le premier concernant le contrôle de l'équation de Korteweg-de Vries dans différents cas. Tout d'abord dans le cas d'un domaine borné critique. Ce cas ne rentre pas dans l'idée de démonstration précitée. En effet, le linéarisé autour de zéro n'est pas contrôlable dans certains cas que nous appellerons par la suite critiques. Nous avons démontré en collaboration avec J.M. Coron puis E. Cerpa que nous pouvions obtenir la contrôlabilité exacte du problème non linéaire même si le linéarisé autour de zéro n'est pas contrôlable. Les paragraphes suivants posent la contrôlabilité de l'équation de Korteweg-de Vries dans d'autres cas, lorsque le coefficient principal est constant par morceaux puis lorsque le domaine n'est plus un segment mais un réseau étoilé.

Le deuxième chapitre regroupe différents résultats obtenus pour l'équation de Boussinesq améliorée, l'équation des poutres contrôlée par un actionneur piezo-électrique puis pour des équations de type réaction-diffusion.

Dans la deuxième partie, j'ai regroupé différents résultats de stabilisation. L'idée générale étant d'obtenir également une inégalité d'observabilité mais sur le problème direct, permettant de montrer la décroissance exponentielle de l'énergie et donc la stabilité du problème. Les deux cas étudiés portent également sur l'équation de Korteweg-de Vries, dans un premier cas lorsque le terme de feedback est retardé. On montre que dans ce cas le retard ne déstabilise pas le système. Nous avons souhaité dans cette étude faire deux types de preuve. La première basée sur l'obtention d'une fonction de Lyapunov appropriée à ce système retardé permet d'obtenir de manière constructive le résultat de stabilité asymptotique avec une estimation sur le taux de

décroissance. Néanmoins comme c'est souvent le cas avec l'équation de KdV, cela ne peut être obtenu que pour des longueurs spatiales petites ( $L < \pi\sqrt{3}$ ). Dans un deuxième temps nous avons utilisé une preuve via l'obtention d'une inégalité d'observabilité, celle ci se ramenant à un problème de continuation unique. La preuve étant faite par l'absurde on obtient un résultat optimal du point de vue des longueurs possibles mais nous n'avons plus d'estimation sur le taux de décroissance exponentielle. Enfin dans un souci de clarté nous avons réalisé une simulation numérique.

Le deuxième résultat présenté porte sur la stabilisation de l'équation de Korteweg-de Vries sur un réseau étoilé. Le feedback agissant au noeud central. La preuve repose sur une démonstration par l'absurde de l'inégalité d'observabilité. Une preuve constructive par la construction d'une fonction de Lyapunov aurait également pu être faite dans ce cas, mais nous aurions obtenu un résultat comme précédemment uniquement pour des longueurs "petites". Deux autres résultats de stabilisation sur l'équation de KdV et l'équation de BBM sont présentés succinctement.

Enfin la dernière partie concerne des problèmes inverses. Le premier chapitre, très différent des autres recherches présentées dans ce mémoire regroupe plusieurs articles réalisés en collaboration avec M. Sorine et des membres de son équipe INRIA. Nous avons voulu modéliser l'écoulement de la pression sanguine à l'aide d'une équation de Korteweg-de Vries en proposant un modèle réduit du compartiment vasculaire, prenant en compte la phase systolique rapide (environ 100 ms) où le phénomène d'ondes est prédominant. Le but à long terme étant de fournir une méthode d'analyse des signaux pour l'estimation à partir de mesures non invasives et l'interprétation des caractéristiques de ces ondes (forme, vitesse). Nous avons en particulier remarqué que les solitons, solutions particulières de l'équation de KdV, représentent de manière remarquable l'onde de pression.

Nos travaux se sont orientés dans ce sens et la densité des résultats obtenus et à obtenir nous a conduit à codiriger la thèse de M. Laleg sur ce sujet, thèse soutenue en 2008.

Les chapitres suivants, plus classiques dans la théorie du contrôle, concernent des problèmes inverses pour les équations des ondes posées sur un arbre, puis l'équation de Kuramoto-Sivashinsky et l'équation de KdV. L'étude de l'équation des ondes sur un arbre a été faite en collaboration avec J. Valein et L. Baudouin. Dans un premier temps nous avons montré que le problème de Cauchy est bien posé dans des espaces fonctionnels bien choisis. Nous avons ensuite étudié le problème inverse de détermination du potentiel  $p$  sur chacune des  $n + 1$  branches du réseau à partir de seulement  $n$  mesures faites au niveau des "feuilles". Ce résultat est à notre connaissance le premier résultat de problème inverse sur un réseau via une inégalité de Carleman. Le point crucial est le choix adéquat du poids pour un réseau. Le résultat de stabilité s'obtient ensuite de manière relativement classique en appliquant la méthode de Bukhgeim-Klibanov à partir de l'inégalité de Carleman obtenue. On obtient alors le résultat de stabilité.

En collaboration avec L. Baudouin, E. Cerpa et A. Mercado, nous avons

étudié dans [13] un problème inverse pour l'équation de Kuramoto-Sivashinsky (K-S) et dans [14] un problème inverse pour l'équation de KdV.

Dans les deux cas nous avons démontré des inégalités de Carleman et ensuite utilisé la méthode de Bukhgeim-Klibanov pour résoudre le problème de stabilité et d'unicité du problème inverse. Comme le linéarisé de l'équation K-S est parabolique, on sait que les mesures frontières ne seront pas suffisantes pour prouver la stabilité et on doit considérer une mesure additionnelle sur toute la solution à un temps  $T_0$ . On considère le problème inverse de retrouver le coefficient d'anti-diffusion à partir des mesures frontières de la solution. Pour l'équation de KdV, nous avons souhaité retrouver le coefficient principal de l'équation à partir de mesures au bord de la solution. L'obtention de l'inégalité de Carleman se fait ici sur un intervalle étendu en temps négatifs,  $(0, L) \times (-T, T)$  afin d'éviter une observation de la solution à un temps  $T_0 > 0$  comme dans le cas des équations paraboliques (cf le problème précédent sur l'équation de K-S). Ceci nous a conduit par contre à des hypothèses de symétrie sur la condition initiale et sur le coefficient principal.

Dans chaque partie, des questions et problèmes ouverts sont présentés.



Première partie

Quelques résultats de contrôle



# Chapitre 1

## Contrôle de l'équation de Korteweg-de Vries.

### 1.1 Introduction

A la fin du 19ème siècle, Boussinesq [8] puis Korteweg et de Vries [46] ont modélisé l'écoulement d'une onde dans un canal de faible amplitude à l'aide d'une équation aux dérivées partielles communément appelée équation de Korteweg-de Vries. Elle s'écrit sous la forme normalisée suivante

$$y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0,$$

où  $y(x, t)$  représente l'amplitude de l'onde au temps  $t$  et à la position  $x$ .

Le contrôle au bord de cette équation sur un domaine borné du type  $[0, L]$  a été largement étudié depuis une trentaine d'années. En particulier, si on se pose la question du contrôle du système non linéaire, les conditions au bord peuvent être les suivantes pour que le problème soit bien posé dans des espaces réguliers.

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, \\ y(t, 0) = h_1(t), y(t, L) = h_2(t), y_x(t, L) = h_3(t), \end{cases}$$

Dans le cas d'un seul contrôle le comportement de l'équation de KdV dépend fortement de l'extrémité sur laquelle on place le contrôle. En effet, lorsque le contrôle est placé à droite (en  $L$ ), le système se comporte comme un système hyperbolique et on obtient des résultats de contrôlabilité exacte dans  $L^2(0, L)$  :

— **Cas**  $h_1 = h_2 = 0$ .

L. Rosier a montré dans [74] la contrôlabilité exacte dans le cas où les longueurs spatiales sont dites non critiques, i.e.

$$L \notin \mathcal{N} = \left\{ 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + kl + l^2}{3}}, k, l \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

On peut remarquer que  $\mathcal{N}$  est un ensemble dénombrable. Dans les cas où les longueurs sont critiques, les détails des résultats obtenus seront donnés au paragraphe 1.2 qui suit.

— **Cas**  $h_1 = h_3 = 0$ .

Ce cas a été étudié par O. Glass et S. Guerrero dans [35]. Ils obtiennent la contrôlabilité exacte du système si la longueur du domaine n'appartient pas à un nouvel ensemble de longueurs critiques qui est lui aussi dénombrable. Néanmoins la description des longueurs critiques est moins explicite que celle obtenue dans le premier cas  $h_1 = h_2 = 0$  et de fait limite l'étude des cas critiques.

Lorsque le contrôle agit sur l'extrémité gauche du domaine, le système se comporte à la manière d'un problème parabolique et on obtient un résultat de contrôle à zéro, ou encore de contrôle aux trajectoires :

— **Cas**  $h_2 = h_3 = 0$ .

L'étude de ce cas a été initiée par L. Rosier dans [76]. A l'aide d'une inégalité de Carleman, il montre la contrôlabilité aux trajectoires de ce problème. Ce résultat a ensuite été amélioré par O. Glass et S. Guerrero dans [34] quand à la régularité des trajectoires.

On peut se référer à l'article de L. Rosier et B.Y. Zhang qui regroupe les différents résultats obtenus sur ces problèmes, [79]. Il est à noter que d'autres conditions au bord peuvent être étudiées, voir par exemple [21].

Nous nous focaliserons dans la suite sur le problème de contrôle frontière où  $h_1 = h_2 = 0$  et le contrôle est uniquement  $h_3$ .

## 1.2 Contrôle lorsque le domaine spatial est un segment et les termes sont constants

Ce chapitre regroupe trois articles [Cré01, CC04, CC09a].

### 1.2.1 Présentation du problème

Le problème de la contrôlabilité sur un domaine borné de l'équation de Korteweg-de Vries, que nous noterons KdV dans la suite, a été initié par Lionel Rosier dans [74]. Il s'est intéressé au problème suivant :

Etant donné un domaine spatial de longueur  $L$ , un temps  $T > 0$ , une donnée initiale  $y_0 \in L^2(0, L)$ , une donnée finale  $y_T \in L^2(0, L)$ , peut-on trouver un contrôle  $h = h(t) \in L^2(0, T)$  tel que la solution  $y \in C([0, T], L^2(0, L))$  de

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, & \text{dans } (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = y(t, L) = 0 & \text{sur } (0, T), \\ y_x(t, L) = h(t) & \text{sur } (0, T), \\ y(0, x) = y_0(x) & \text{sur } (0, L), \end{cases} \quad (1.1)$$

vérifie  $y(T, \cdot) = y_T$  ?

Ses travaux ont montré que le linéarisé autour de 0 de cette équation n'est pas contrôlable pour certaines longueurs du domaine que nous appellerons critiques.

**Théorème 1.2.1** [74] Soit  $\mathcal{N} = \{2\pi\sqrt{\frac{k^2+kl+l^2}{3}}, k, l \in \mathbb{N}^*\}$ . Alors pour tous  $T > 0$  et  $L \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathcal{N}$ , pour tous  $y_0, y_T \in L^2(0, L)$ , il existe un contrôle  $h \in L^2(0, T)$  tel que la solution  $y \in C([0, T], L^2(0, L)) \cap L^2(0, T, H^1(0, L))$  de

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0, & \text{dans } (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = y(t, L) = 0, & \text{sur } (0, T), \\ y_x(t, L) = h(t), & \text{sur } (0, T), \\ y(0, x) = y_0(x), & \text{sur } (0, L), \end{cases}$$

vérifie  $y(T, \cdot) = y_T$ .

La preuve de ce résultat repose sur l'obtention d'une inégalité d'observabilité montrée à l'aide de la méthode des multiplicateurs et d'un argument d'existence spectrale démontré par l'absurde. Le résultat d'observabilité est faux lorsqu'on se place sur une longueur critique. Néanmoins il a été montré toujours dans [74], que lorsque le domaine est de longueur critique alors on a contrôlabilité sur un espace restreint,

**Théorème 1.2.2** [74] Soit  $L \in \mathcal{N}$ , il existe un espace vectoriel  $M = M(L) \subset L^2(0, L)$  de dimension finie, tel que pour tout  $T > 0$ , pour tous  $y_0, y_T \in M^\perp$ , il existe un contrôle  $h \in L^2(0, T)$  tel que la solution  $y \in C([0, T], L^2(0, L)) \cap L^2(0, T, H^1(0, L))$  de

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0, & \text{dans } (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = y(t, L) = 0 & \text{sur } (0, T), \\ y_x(t, L) = h(t) & \text{sur } (0, T), \\ y(0, x) = y_0(x) & \text{sur } (0, L) \end{cases}$$

vérifie  $y(T, \cdot) = y_T$ .

L. Rosier a démontré ensuite le résultat de contrôle pour le problème non linéaire dans le cas non critique en utilisant un argument de point fixe.

Mes travaux durant ma thèse et qui ont suivi se sont focalisés sur la possibilité d'obtenir le résultat de contrôlabilité du problème non linéaire dans le cas critique. L'idée étant que le linéarisé autour de zéro n'est certainement pas contrôlable mais le terme non linéaire permet peut-être d'obtenir la contrôlabilité manquante.

Dans un premier temps, j'ai démontré dans [Cré01] que si on linéarise l'équation autour d'un état stationnaire non nul le linéarisé obtenu est alors contrôlable. Ce résultat est démontré avec une recherche précise d'un état stationnaire non nul et ensuite par l'obtention d'une inégalité d'observabilité sur le linéarisé. Le point suivant qui n'a pas été démontré à ma connaissance est de prouver que le problème non linéaire est alors contrôlable localement en utilisant par exemple la méthode du retour de J-M. Coron [27].

Par la suite, nous n'avons pas suivi la méthode du retour qui aurait donné un résultat de contrôle uniquement pour des temps suffisamment grands, mais une nouvelle idée qui consiste à développer aux ordres suivant l'équation autour de 0 et de montrer que les équations obtenues au deuxième voir au troisième ordre permettent d'obtenir un résultat de contrôle.

Ces résultats font l'objet de 3 articles différents suivant la dimension de l'espace  $M$ , manqué par le linéarisé.

### 1.2.2 Espace manqué de dimension 1

Le premier cas réalisé en collaboration avec Jean-Michel Coron dans [CC04] a pour but de montrer le résultat de contrôlabilité dans le cas où les longueurs critiques sont du type  $2k\pi$  avec  $k$  tel qu'on ne puisse pas trouver d'entiers non nuls distincts  $i$  et  $j$  tels que  $3k^2 = i^2 + j^2$ .

Dans ce cas la seule direction manquée par le linéarisé au premier ordre est  $1 - \cos x$  et donc  $M(L) = \text{Vect}\{1 - \cos(x)\}$  est dimension 1. On montre dans [CC04] que le développement à l'ordre 2 n'est pas suffisant pour obtenir la contrôlabilité dans la direction manquée. On effectue alors un développement à l'ordre 3.

On utilise dans un premier temps le théorème 1.2.2 obtenu par Lionel Rosier, concernant la contrôlabilité du linéarisé dans les directions orthogonales à la direction manquée.

Nous démontrons dans [CC04] la proposition suivante, de déplacement à l'ordre 3 de l'état initial nul dans les directions manquées  $\pm(1 - \cos x)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  étant les solutions de l'équation de KdV aux ordres 1, 2 et 3 respectivement.

**Proposition 1.2.3** *Soit  $T > 0$ , il existe 3 contrôles,  $(u_{\pm}, v_{\pm}, w_{\pm}) \in L^2(0, T)^3$  tels que si  $\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}, \gamma_{\pm}$  sont les solutions de*

$$\begin{cases} \alpha_{\pm t} + \alpha_{\pm x} + \alpha_{\pm xxx} = 0, \\ \alpha_{\pm}(t, 0) = \alpha_{\pm}(t, 2k\pi) = 0, \\ \alpha_{\pm x}(t, 2k\pi) = u_{\pm}(t), \\ \alpha_{\pm}(0, x) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_{\pm t} + \beta_{\pm x} + \beta_{\pm xxx} = -\alpha_{\pm}\alpha_{\pm x}, \\ \beta_{\pm}(t, 0) = \beta_{\pm}(t, 2k\pi) = 0, \\ \beta_{\pm x}(t, 2k\pi) = v_{\pm}(t), \\ \beta_{\pm}(0, x) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_{\pm t} + \gamma_{\pm x} + \gamma_{\pm xxx} = -(\alpha_{\pm}\beta_{\pm})_x, \\ \gamma_{\pm}(t, 0) = \gamma_{\pm}(t, 2k\pi) = 0, \\ \gamma_{\pm x}(t, 2k\pi) = w_{\pm}(t), \\ \gamma_{\pm}(0, x) = 0, \end{cases}$$

alors,

$$\alpha_{\pm}(T, x) = 0, \beta_{\pm}(T, x) = 0, \gamma_{\pm}(T, x) = \pm(1 - \cos(x)).$$

On utilise ensuite deux théorèmes de point fixe successivement en projetant sur  $M(L)^{\perp}$  puis sur  $M(L)$  les solutions. On applique tout d'abord le théorème du point fixe de Banach pour le contrôle du non linéarisé sur  $M(L)^{\perp}$  et ensuite le théorème du point fixe de Brower sur l'espace  $M(L)$  des directions manquées, qui est de dimension 1. On obtient alors le résultat principal suivant de contrôlabilité exacte locale du problème non linéaire pour tout temps.

**Théorème 1.2.4** *Soit  $T > 0$ , alors il existe  $C > 0$  et  $r > 0$  tels que pour tous  $y_0, y_T \in L^2(0, 2k\pi)$ , tels que*

$$\|y_0\|_{L^2(0, 2k\pi)} < r \text{ et } \|y_T\|_{L^2(0, 2k\pi)} < r,$$

*il existe  $y \in C([0, T], L^2(0, 2k\pi)) \cap L^2(0, T, H^1(0, 2k\pi))$  et  $u \in L^2(0, T)$  vérifiant (1.1) et tels que*

$$y(T, \cdot) = y_T \text{ et } \|u\|_{L^2(0, T)} \leq C(\|y_0\|_{L^2(0, 2k\pi)} + \|y_T\|_{L^2(0, 2k\pi)})^{1/3}.$$

### 1.2.3 Espace manqué de dimension 2

La démonstration du cas où l'espace manqué par le linéarisé est de dimension 2 exactement a été faite par Eduardo Cerpa dans [16]. Il démontre un résultat semblable au précédent en prouvant que le terme à l'ordre 2 permet d'entrer dans l'espace manqué à partir de la donnée initiale nulle.

**Proposition 1.2.5** [16] *Soit  $L \in \mathcal{N}$  tel que l'espace manqué  $M(L)$  soit de dimension 2, soit  $T > 0$  alors il existe 2 contrôles  $(u, v) \in L^2(0, T)^2$  tels que si  $\alpha, \beta$  sont les solutions de*

$$\begin{cases} \alpha_t + \alpha_x + \alpha_{xxx} = 0, \\ \alpha(t, 0) = \alpha(t, L) = 0, \\ \alpha_x(t, L) = u(t), \\ \alpha(0, x) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_t + \beta_x + \beta_{xxx} = -\alpha\alpha_x, \\ \beta(t, 0) = \beta(t, L) = 0, \\ \beta_x(t, L) = v(t), \\ \beta(0, x) = 0, \end{cases}$$

alors,

$$\alpha(T, x) = 0, \beta(T, x) \in M \setminus \{0\}.$$

En laissant alors le système évoluer sans contrôle, la direction obtenue  $\beta(x, T)$  tourne à une vitesse prescrite par  $L$ , dans l'espace d'ordre 2,  $M(L)$  et on arrive ainsi à décrire tout l'espace manqué  $M(L)$  par le terme linéarisé au premier ordre. Il est important de noter que, dans ce choix de démonstration, on laisse le système évoluer sans contrôle pendant un certain temps, de fait il apparaît un temps minimal de contrôle  $T > T(L)$  fonction de  $L$ . C'est en fait le temps nécessaire à la solution pour "tourner dans  $M(L)$ " et décrire tout  $M(L)$ .

En appliquant alors un double argument de point fixe comme dans [CC04], on obtient le résultat de contrôlabilité exacte locale suivant.

**Théorème 1.2.6** [16] *Soit  $L \in \mathcal{N}$  tel que l'espace manqué  $M(L)$  soit de dimension 2. Il existe  $T_L > 0$  tel que pour tout  $T > T_L$ , il existe  $C > 0$  et  $r > 0$  tels que pour tous  $y_0, y_T \in L^2(0, L)$ , tels que*

$$\|y_0\|_{L^2(0, L)} < r \text{ et } \|y_T\|_{L^2(0, L)} < r,$$

*il existe  $y \in C([0, T], L^2(0, L)) \cap L^2(0, T, H^1(0, L))$  et  $u \in L^2(0, T)$  vérifiant (1.1) et tels que*

$$y(T, \cdot) = y_T \text{ et } \|u\|_{L^2(0, T)} \leq C(\|y_0\|_{L^2(0, L)} + \|y_T\|_{L^2(0, L)})^{1/2}.$$

### 1.2.4 Espace manqué de dimension supérieure à 2

Le cas où l'espace manqué est de dimension supérieure à 2 a été résolu par Eduardo Cerpa et moi-même dans [CC09a].

Pour une longueur critique  $L$  telle que  $\dim M(L) > 2$ , on recherche tout d'abord toutes les décompositions possibles de  $L$  comme longueur critique.

Il existe donc  $n = E\left(\frac{\dim M(L) + 1}{2}\right)$  couples distincts d'entiers  $(k_j, l_j) \in$

$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  avec  $k_j \geq l_j$  vérifiant  $L = 2\pi\sqrt{\frac{k_j^2 + k_j l_j + l_j^2}{3}}$ . ( $E$  désignant la fonction partie entière).

On introduit alors les notations

$$J^> := \{j \in \{1, \dots, n\}; k_j > l_j\}, J^= := \{j \in \{1, \dots, n\}; k_j = l_j\}, n^> := |J^>|$$

Pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on définit le réel

$$p_j := (2k_j + l_j)(k_j - l_j)(2l_j + k_j) \left(\frac{2\pi}{3L}\right)^3.$$

**Lemme 1.2.7** *Avec les précédentes notations on a*

1. si  $j \in J^>$ ,  $p_j \neq 0$ ,
2. si  $j \in J^=$ ,  $p_j = 0$ ,
3. si  $i \neq j$ ,  $p_i \neq p_j$ .

Les  $p_j$  représentent les vitesses auxquelles tournent les solutions dans les espaces manqués  $M_j$  correspondants aux couples  $(k_j, l_j)$ . On peut remarquer qu'avec cette décomposition on a :

- les vitesses  $p_j$  sont toutes différentes,
- les espaces  $M_j$  sont de dimension 1 (si  $k_j = l_j$ ) ou 2 (si  $k_j > l_j$ ),
- $M = \bigoplus_{j=1 \dots n} M_j$

L'idée est alors de reprendre les résultats obtenus dans les deux cas précédents, [CC04] et [16]. Ensuite en combinant les différents contrôles permettant d'entrer dans les différents espaces manqués qui sont orthogonaux deux à deux et en laissant le système évoluer sans contrôle on démontre qu'on peut atteindre toutes les directions manquées avec un temps minimal, chaque espace évoluant avec sa propre vitesse.

On applique ensuite comme dans le cas de dimension 1 les théorèmes du point fixe de Banach puis de Brouwer pour avoir le résultat de contrôle local pour le problème non linéaire.

**Théorème 1.2.8** *Pour tout  $L \in \mathcal{N}$ , il existe  $T_L > 0$  tel que pour tout  $T > T_L$ , il existe  $r > 0$  tel que pour tous  $y_0, y_T \in L^2(0, L)$ , tels que  $\|y_0\|_{L^2(0, L)} < r$  et  $\|y_T\|_{L^2(0, L)} < r$ , il existe  $y \in C([0, T], L^2(0, L)) \cap L^2(0, T, H^1(0, L))$  et  $u \in L^2(0, T)$  vérifiant (1.1) et tels que  $y(T, \cdot) = y_T$ .*

### 1.2.5 Problèmes ouverts

#### 1. Temps de contrôle.

Dans la preuve de la contrôlabilité lorsque le domaine non contrôlable par le linéarisé est de dimension supérieure ou égale à deux, on obtient un temps de contrôle minimal qui est directement lié à la méthode de démonstration. On peut se demander si un tel temps minimal de contrôle existe réellement. L'équation de KdV ayant une vitesse de propagation infinie nous aurions tendance à répondre par la négative à cette question. Néanmoins, l'équation de Schrödinger a également une vitesse de propagation infinie et il a pourtant été montré dans [26] que la contrôlabilité locale autour d'un état fondamental pour l'équation de Schrödinger n'est pas possible en temps petit. Le problème reste ouvert dans le cas de l'équation de KdV.

#### 2. Méthode de développement asymptotique appliqué à d'autres EDP.

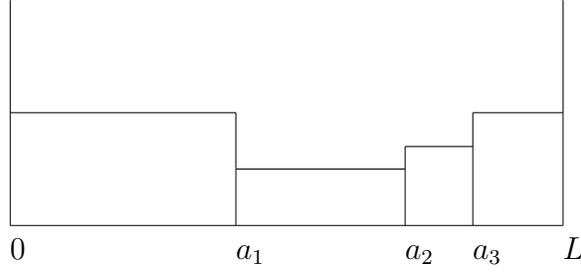
La méthode de développement asymptotique de l'équation non linéaire quand le linéarisé n'est pas contrôlable a été utilisée pour montrer la contrôlabilité de l'équation de Schrödinger dans [5]. D'autres équations dont le linéarisé n'est pas contrôlable pourraient faire l'objet d'une étude par les développements asymptotiques. Par exemple pour d'autres types de contrôles frontières, cf [35] ou encore [21], ou bien pour des systèmes couplant plusieurs EDP, comme par exemple le système de Boussinesq KdV-KdV étudié récemment dans [13]. Un article récent de S. Chowdhury et S. Ervedoza, reprend cette méthode de développement asymptotique pour montrer la stabilisation des équations de Navier-Stokes 2D, [23].

## 1.3 Contrôle de KdV avec un coefficient principal constant par morceaux.

Cette partie présente un résultat de contrôle exact de l'équation de KdV lorsque le coefficient du terme principal,  $y_{xxx}$  est constant par morceaux, voir [Cré16].

### 1.3.1 Présentation du problème

Ce type d'équation peut en particulier modéliser l'écoulement d'un fluide dans un canal possédant un fond non plat comme dans la figure proposée, voir par exemple l'article [70] qui modélise un écoulement dans un fond possédant une marche.



J'ai dans un premier temps cherché un système d'équations bien posé pour ce type de problème, en particulier en ce qui concernait les conditions aux interfaces. Le système obtenu est décrit ci-dessous, où  $p$  est un coefficient constant par morceaux, défini par  $p(x) = p_i > 0$  sur  $[a_i, a_{i+1}]$  avec  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_N = L$  une subdivision de notre intervalle  $[0, L]$ .

$$\begin{cases} y_t + y_x + p(x)y_{xxx} + yy_x = 0, & (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = 0, y(t, L) = 0, & t \in (0, T), \\ y_x(t, L) = h(t), & t \in (0, T), \\ y(t, a_i^-) = y(t, a_i^+), & t \in (0, T), i = 1, \dots, N-1, \\ \sqrt{p_{i-1}}y_x(t, a_i^-) = \sqrt{p_i}y_x(t, a_i^+), & t \in (0, T), i = 1, \dots, N-1, \\ p_{i-1}y_{xx}(t, a_i^-) = p_iy_{xx}(t, a_i^+), & t \in (0, T), i = 1, \dots, N-1, \\ y(0, x) = y_0(x), & x \in (0, L). \end{cases}$$

Le problème de contrôle était alors le suivant :

Etant donné un temps  $T > 0$ , des conditions initiales et finales  $y_0$  et  $y_T$  prises dans des espaces bien choisis, peut-on trouver un contrôle  $h$  dans un espace à déterminer, tel que la solution du problème précédent vérifie  $y(T, \cdot) = y_T$  sur  $(0, L)$  ?

L'approche développée par Lionel Rosier dans [74] ne semble pas accessible ici. En effet, le nombre de paramètres  $p_i$  et  $a_i$  est trop important pour espérer obtenir une description précise des longueurs critiques. L'approche choisie a donc été d'obtenir une inégalité d'observabilité forte sur le problème adjoint à l'aide de multiplicateurs pertinents. Pour cela, on construit une fonction qui soit continue par morceaux, et qui fasse disparaître les termes d'interface lors des différentes intégrations par parties.

L'inégalité d'observabilité à montrer est du type

$$c\|\phi_x(\cdot, L)\|_{L^2(0, T)} \leq \|\phi_T\|_{L^2(0, L)} \leq C\|\phi_x(\cdot, L)\|_{L^2(0, T)},$$

pour le système adjoint rétrograde en temps suivant,

$$\begin{cases} \phi_t + \phi_x + p(x)\phi_{xxx} = 0, & (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ \phi(t, 0) = 0, \phi_x(t, 0) = 0, \phi(t, L) = 0, & t \in (0, T), \\ \phi(t, a_i^-) = \phi(t, a_i^+), & t \in (0, T), i = 1, \dots, N-1, \\ \sqrt{p_{i-1}}\phi_x(t, a_i^-) = \sqrt{p_i}\phi_x(t, a_i^+), & t \in (0, T) i = 1, \dots, N-1, \\ p_{i-1}\phi_{xx}(t, a_i^-) = p_i\phi_{xx}(t, a_i^+), & t \in (0, T) i = 1, \dots, N-1, \\ \phi(T, x) = \phi_T(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (1.2)$$

On choisit alors une fonction multiplicatrice continue, affine par morceaux  $q$  telle que

$$\begin{cases} q = q_i \text{ sur } [a_i, a_{i+1}), & i = 0, \dots, N-1, \\ q_{i-1}(t, a_i^-) = q_i(t, a_i), & i = 1, \dots, N-1, \\ \sqrt{p_{i-1}}q_x(t, a_i^-) = \sqrt{p_i}q_x(t, a_i), & i = 1, \dots, N-1, \\ q_{xx} = 0. \end{cases}$$

En multipliant la première equation de (1.2) par  $q\phi$  et en intégrant par parties sur  $(s, T) \times (0, L)$  on obtient,

$$\begin{aligned} \int_0^L q(T)|\phi(T)|^2 - q(s)|\phi(s)|^2 dx &= \int_s^T \int_0^L (q_t + q_x)|\phi|^2 dx dt \\ &- 3 \int_s^T \int_0^L q_x p |\phi_x|^2 dx dt + \int_s^T q(L) p_{N-1} |\phi_x(t, L)|^2 dt. \end{aligned} \quad (1.3)$$

1. On choisit dans un premier temps  $q(t, x) = t$  dans (1.3) et  $s = 0$ , alors

$$T \int_0^L |\phi(T)|^2 dx \leq \int_0^T \int_0^L |\phi|^2 dx dt + T p_{N-1} \int_0^T |\phi_x(t, L)|^2 dt. \quad (1.4)$$

2. Ensuite on prend  $q = 1$  dans (1.3) pour obtenir

$$\int_0^L |\phi(T)|^2 - |\phi(s)|^2 dx = \int_s^T p_{N-1} |\phi_x(t, L)|^2 dt \geq 0.$$

Donc

$$\int_0^T \int_0^L |\phi|^2 dx \leq T \int_0^L |\phi(T)|^2 dx. \quad (1.5)$$

Ce qui n'est pas suffisant pour absorber le terme de droite de (1.4) en

$$\int_0^T \int_0^L |\phi|^2 dx.$$

3. On choisit alors

$$\begin{cases} q_{N-1}(t, x) = \frac{x-L}{\sqrt{p_{N-1}}}, \\ q_i(t, x) = \frac{x-a_{i+1}}{\sqrt{p_i}} + q_{i+1}(a_{i+1}), \quad i = 0, \dots, N-2, \end{cases}$$

ainsi  $q \leq 0$  et  $q_x = \frac{1}{\sqrt{p}}$ . On remplace dans (1.3) avec  $s = 0$  et on obtient

$$3 \int_0^T \int_0^L \sqrt{p} |\phi_x|^2 dx dt \leq \int_0^T \int_0^L \frac{1}{\sqrt{p}} |\phi|^2 dx dt + \|q\|_\infty \int_0^L |\phi(T, x)|^2 dx.$$

Avec (1.5) cela nous donne

$$3 \min(\sqrt{p}) \int_0^T \int_0^L |\phi_x|^2 dx dt \leq \left( \frac{T}{\min(\sqrt{p})} + \|q\|_\infty \right) \int_0^L |\phi(T, x)|^2 dx. \quad (1.6)$$

Il nous reste à appliquer l'inégalité de Poincaré avec comme constante  $L/\pi$ , en utilisant les inégalités (1.4) et (1.6), pour obtenir

$$\begin{aligned} \left( T - \frac{L^2}{3\pi^2 \min(\sqrt{p})} \left( \frac{T}{\min(\sqrt{p})} + \|q\|_\infty \right) \right) \int_0^L |\phi(T)|^2 dx \\ \leq T p_{N-1} \int_0^T |\phi_x(t, L)|^2 dt. \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \left( T \left( 1 - \frac{L^2}{3\pi^2 \min(p)} \right) - \|q\|_\infty \frac{L^2}{3\pi^2 \min(\sqrt{p})} \right) \int_0^L |\phi(T)|^2 dx \\ \leq T p_{N-1} \int_0^T |\phi_x(t, L)|^2 dt. \end{aligned}$$

Ainsi pour  $T$  suffisamment grand et un coefficient  $\frac{L}{\min(\sqrt{p})}$  suffisamment petit, afin d'avoir un coefficient dans le membre de gauche positif, on obtient l'inégalité d'observabilité souhaitée. La dualité observabilité/contrôlabilité nous permet alors de conclure avec le résultat suivant.

**Proposition 1.3.1** *Soient  $T, L, p = (p_i)_{i=0, \dots, N-1} > 0$  tels que*

$$\frac{L}{\min(\sqrt{p})} < \sqrt{3}\pi, \quad (1.7)$$

et

$$T > \frac{NL^3}{3\pi^2 \min p - L^2}.$$

Soit  $a = (0 = a_0 < a_1 < \dots < a_N = L)$ , alors pour tous  $y_0, y_T \in L^2(0, L)$  il existe un contrôle  $h \in L^2(0, T)$  tel que la solution  $y \in C([0, T], L^2(0, L)) \cap L^2(0, T, H^1(0, L))$  de

$$\begin{cases} y_t + y_x + p(x)y_{xxx} = 0, & (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = 0, y(t, L) = 0, & t \in (0, T), \\ y_x(t, L) = h(t), & t \in (0, T), \\ y(t, a_i^-) = y(t, a_i^+), & t \in (0, T), i = 1, \dots, N-1, \\ \sqrt{p_{i-1}}y_x(t, a_i^-) = \sqrt{p_i}y_x(t, a_i^+), & t \in (0, T), i = 1, \dots, N-1, \\ p_{i-1}y_{xx}(t, a_i^-) = p_i y_{xx}(t, a_i^+), & t \in (0, T), i = 1, \dots, N-1, \\ y(0, x) = y_0(x), & x \in (0, L), \end{cases}$$

vérifie  $y(T, \cdot) = y_T(\cdot)$ .

### 1.3.2 Problèmes ouverts

1. La condition (1.7) vient uniquement du choix du multiplicateur et de la constante de Poincaré. Elle apparaît également dans le cas 1D constant

dans l'étude d'Eduardo Cerpa, [18] où il est montré le résultat de contrôlabilité pour le problème de KdV linéaire avec la méthode des multiplicateurs si la longueur du domaine  $L$  vérifie  $L < \sqrt{3}\pi$ . Il serait bien sûr beaucoup plus pertinent de trouver un multiplicateur tel que le problème soit contrôlable pour  $L < 2\pi$  qui est la première longueur critique. Cette question est ouverte à ma connaissance.

2. Le problème inverse de retrouver le coefficient  $p$  sur le système proposé est également ouvert. Dans la suite on verra en paragraphe 7.3, la résolution d'un tel problème quand le coefficient  $p$  est suffisamment régulier. Nous pourrions nous poser la même question mais dans le cas d'un coefficient continu par morceaux. Ce problème pourrait en particulier se retrouver dans la modélisation de l'écoulement sanguin dans les artères, si on modélise le réseau artériel comme une série de tuyaux de différents diamètres.

## 1.4 Contrôle de l'équation de KdV posée sur un réseau étoilé

### 1.4.1 Présentation du problème dans le cas où on contrôle au noeud central.

Cette partie concerne un travail commencé en collaboration avec Kaïs Ammari lors de son année passée au laboratoire de Mathématiques de Versailles, voir article [AC18a]. Nous avons introduit un modèle pour l'équation de Korteweg-de Vries sur un réseau étoilé orienté.

Nous supposons donc que nous avons une étoile avec  $N$  branches numérotées de 1 à  $N$ , chacune ayant sa longueur propre notée  $l_j$ . Les branches sont toutes reliées en un seul point que nous appelons le noeud central et qui sera l'origine de chaque repère pour chaque branche. Dans un premier temps nous avons cherché les bonnes conditions de transmission à imposer au noeud central du réseau qui nous permettent d'avoir existence et unicité des solutions dans les bons espaces.

Nous avons obtenu le système suivant, dans un souci de clarté, nous n'avons pas indiqué la variable spatiale  $x = x_j$  évoluant sur chaque branche,

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_t u_j + \partial_x u_j + u_j \partial_x u_j + \partial_x^3 u_j)(t, x) = 0, & \forall x \in (0, l_j), \\ & t > 0, j = 1, \dots, N, \\ u_j(t, 0) = u_k(t, 0), & \forall j, k = 1, \dots, N, t > 0, \\ \sum_{j=1}^N (\partial_x^2 u_j(t, 0) + \frac{\alpha}{N} u_j(t, 0)) = \frac{N}{3} u_1^2(t, 0) + g(t), & \forall t > 0, \\ u_j(t, l_j) = 0, & \forall t > 0, j = 1, \dots, N, \\ \partial_x u_1(t, l_1) = 0, \partial_x u_j(t, l_j) = g_j(t), & \forall t > 0, j = 2, \dots, N, \\ u_j(0, x) = u_j^0(x), & \forall x \in (0, l_j), j = 1, \dots, N, \end{array} \right. \quad (1.8)$$

La question que nous nous sommes posée est la suivante :

Etant donné un temps  $T$ , des conditions initiales et finales  $(u_j^0)_{j=1..N}$  et  $(u_j^T)_{j=1..N}$  dans des espaces à déterminer, peut-on trouver  $N + 1$  contrôles  $g_1, \dots, g_N, g$  (ou moins) agissant sur les  $N$  conditions de Neumann extérieures au réseau et au noeud central tels que la solution du problème précédent vérifie  $u_j(T, \cdot) = u_j^T$ , pour tout  $j = 1 \dots N$  ?

Le réseau peut se représenter comme dans la figure 1.4.1, qui est un réseau à 4 branches, le contrôle étant appliqué aux noeuds rouges.

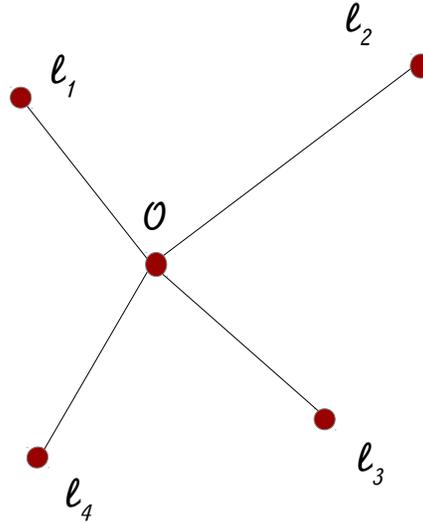


FIGURE 1.1 – Réseau étoilé pour  $N = 4$

## 1.4.2 Idées de la preuve et résultats obtenus

Pour résoudre ce problème, nous avons dans un premier temps linéarisé le problème autour de zéro puis nous nous sommes appuyés sur une inégalité d'observabilité que nous avons obtenue pour le problème de stabilité que je détaillerai dans le paragraphe 4. En nous appuyant sur les travaux de L. Rosier sur le contrôle de KdV, voir [74], la preuve de l'inégalité d'observabilité repose sur l'obtention d'une propriété de continuation unique pour le problème adjoint, puis sur un problème spectral avec des conditions supplémentaires.

Le problème adjoint rétrograde dans notre cas est le suivant,

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_t \varphi_j + \partial_x \varphi_j + \partial_x^3 \varphi_j)(t, x) = 0, & \forall x \in (0, \ell_j), t > 0, j = 1, \dots, N, \\ \varphi_j(t, 0) = \varphi_k(t, 0), & \forall t > 0, \forall j, k = 1, \dots, N, \\ \partial_x \varphi_j(t, 0) = 0 & \forall t > 0, j = 1, \dots, N, \\ \sum_{j=1}^N \left( \partial_x^2 \varphi_j(t, 0) + \left(1 - \frac{\alpha}{N}\right) \varphi_j(t, 0) \right) = 0, & \forall t > 0, \\ \varphi_j(t, \ell_j) = 0, & \forall t > 0, j = 1, \dots, N, \\ \varphi_j(T, x) = \varphi_j^T(x), & \forall x \in (0, \ell_j), j = 1, \dots, N. \end{array} \right.$$

et le lemme spectral conduisant à l'inégalité d'observabilité peut s'énoncer comme suit.

**Lemme 1.4.1** Soient  $(\ell_i)_{i=1..N} \in (0, +\infty)^N$ . Considérons l'assertion suivante :

$$\begin{aligned} \exists (\lambda_i)_{i=1..N} \in \mathbb{C}^N, \exists (y_1, \dots, y_N) \in \left[ \prod_{i=1}^N H^3(0, \ell_i) \right] \setminus \{0\} \text{ t.q.} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_i y_i + y_i' + y_i''' = 0, & \forall i = 1 \dots N, \\ y_i(\ell_i) = 0, & \forall i = 1 \dots N, \\ y_i(0) = 0, & \forall i = 1 \dots N, \\ y_i'(0) = 0, & \forall i = 1 \dots N, \\ y_i'(\ell_i) = 0, & \forall i = 2 \dots N, \\ \sum_{i=1}^N y_i''(0) = 0. \end{array} \right. \quad (1.9) \end{aligned}$$

Alors (1.9)  $\Leftrightarrow \#\{(\ell_i)_{i=2..N} \in \mathcal{N}\} \geq 1$ .

**Preuve.** Rappelons le lemme suivant obtenu dans [74] :

**Lemme 1.4.2** [74, Lemme 3.5] Soit  $L \in (0, +\infty)$ . Considérons l'assertion suivante,

$$\begin{aligned} \exists \lambda \in \mathbb{C}, \exists y \in H^3(0, L) \setminus \{0\} \text{ t.q.} \\ \left\{ \begin{array}{l} \lambda y + y' + y''' = 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y(L) = 0, y'(L) = 0. \end{array} \right. \quad (1.10) \end{aligned}$$

Alors (1.10)  $\Leftrightarrow L \in \mathcal{N}$ .

1. Si  $\forall i = 2 \dots N, \ell_i \notin \mathcal{N}$  alors le Lemme 1.4.2 appliqué à  $(y_2, \dots, y_N)$ , nous donne  $(y_2, \dots, y_N) = 0$ . Ensuite on utilise les conditions sur  $y_1$ . Elle vérifie,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 y_1 + y_1' + y_1''' = 0, \\ y_1(\ell_1) = 0, \\ y_1(0) = 0, y_1'(0) = 0, \\ y_1''(0) = -\sum_{i=2}^N y_i''(0) = 0. \end{array} \right.$$

Avec les 3 conditions de nullité à 0 on en déduit que  $y_1 = 0$ .

Donc  $\underline{y} = (y_1, \dots, y_N) = 0$ .

2. Si  $\#\{(\ell_i)_{i=2,\dots,N} \in \mathcal{N}\} \geq 1$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $\ell_2 \in \mathcal{N}$ . Alors on peut prendre  $y_i = 0$  pour  $i = 3 \dots N$ . Le Lemme 1.4.2 nous donne l'existence de  $\lambda_2$  et d'une fonction non nulle  $y_2$  qui vérifie

$$\begin{cases} \lambda_2 y_2 + y_2' + y_2''' = 0, \\ y_2(\ell_2) = 0, y_2'(\ell_2) = 0, \\ y_2(0) = 0, y_2'(0) = 0. \end{cases}$$

et l'équation en  $y_1$  devient,

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1 + y_1' + y_1''' = 0, \\ y_1(\ell_1) = 0, \\ y_1(0) = 0, y_1'(0) = 0, \\ y_1''(0) = -\sum_{i=2}^N y_i''(0) = -y_2''(0). \end{cases}$$

Comme  $y_2$  est non nulle, nécessairement  $y_2''(0) \neq 0$  et donc il suffit de trouver une solution  $z_1$  non nulle de

$$\begin{cases} \lambda_1 z_1 + z_1' + z_1''' = 0, \\ z_1(\ell_1) = 0, \\ z_1(0) = 0, z_1'(0) = 0 \end{cases}$$

De même  $z_1''(0) \neq 0$  et on prend alors  $y_1 = -\frac{y_2''(0)}{z_1''(0)} z_1$ . La fonction  $\underline{y} = (y_1, \dots, y_N)$  est solution du système et non identiquement nulle.

On en déduit alors l'inégalité d'observabilité forte suivante,

**Théorème 1.4.3** *Soient  $(\ell_i)_{i=1..N} \in (0, +\infty)^N$  tels que  $\forall i = 2, \dots, N, \ell_i \notin \mathcal{N}$ . Alors pour tout  $T > 0$ , il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $\underline{\varphi}^T \in \mathbb{L}^2(\mathcal{T})$  on ait,*

$$\|\underline{\varphi}^T\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{T})}^2 \leq C \left( \sum_{j=1}^N \|\partial_x \varphi_j(\cdot, \ell_j)\|_{L^2(0,T)}^2 + \int_0^T \varphi_1^2(t, 0) dt \right),$$

où  $\underline{\varphi} \in \mathbb{B}$  est la solution du problème adjoint rétrograde en temps.

On en déduit alors le résultat de contrôlabilité exacte suivant, tant que le réseau n'est pas "critique".

**Théorème 1.4.4** *Soient  $T > 0$ ,  $\alpha > \frac{N}{2}$  et  $(\ell_i)_{i=1,\dots,N} \in (0, +\infty)^N$  tels que  $\forall i = 2, \dots, N, \ell_i \notin \mathcal{N}$ . Alors pour tout  $\underline{u}^0, \underline{u}^T \in \mathbb{L}^2(\mathcal{T})$ , il existe  $(g_1, \dots, g_N) \in L^2(0, T)$  et  $g \in L^2(0, T)$  tels que la solution  $\underline{u} \in \mathbb{B}$  de (1.8) vérifie  $\underline{u}(0, \cdot) = \underline{u}^0$  et  $\underline{u}(T, \cdot) = \underline{u}^T$ .*

Une fois obtenu le résultat de contrôlabilité exacte du problème linéarisé, on applique des arguments usuels de point fixe pour avoir la contrôlabilité exacte locale (pour des données initiales et finales "petites") du problème non linéaire.

**Théorème 1.4.5** *Soient  $T > 0$ ,  $\alpha > \frac{N}{2}$  et  $(\ell_i)_{i=1,\dots,N} \in (0, +\infty)^N$  tels que  $\forall i = 2, \dots, N, \ell_i \notin \mathcal{N}$ . Alors il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $\underline{u}^0, \underline{u}^T \in \mathbb{L}^2(\mathcal{T})$  avec  $\|\underline{u}^0\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{T})} < r$  et  $\|\underline{u}^T\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{T})} < r$ , il existe  $N$  contrôles  $(g_1, \dots, g_N) \in L^2(0, T)$  et  $g \in L^2(0, T)$  tels que la solution  $\underline{u} \in \mathbb{B}$  de (1.8) vérifie  $\underline{u}(0, \cdot) = \underline{u}^0$  et  $\underline{u}(T, \cdot) = \underline{u}^T$ .*

### 1.4.3 Présentation du problème dans le cas où on ne contrôle pas au noeud central.

Les détails se trouvent dans [CCM18].

Pour des raisons d'applications, il n'est pas satisfaisant de contrôler le problème au noeud central. Nous nous sommes donc intéressé avec Eduardo Cerpa et Claudia Moreno au même problème que précédemment mais avec seulement  $N$  contrôles agissant sur les noeuds extérieurs. Le problème est alors le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_t u_j + \partial_x u_j + u_j \partial_x u_j + \partial_x^3 u_j)(t, x) = 0, & \forall x \in (0, \ell_j), t > 0, j = 1, \dots, N, \\ u_j(t, 0) = u_k(t, 0), & \forall j, k = 1, \dots, N, t > 0, \\ \sum_{j=1}^N \left( \partial_x^2 u_j(t, 0) + \frac{\alpha}{N} u_j(t, 0) \right) = \frac{N}{3} u_1^2(t, 0), & \forall t > 0, \\ u_j(t, \ell_j) = 0, & \forall t > 0, j = 1, \dots, N, \\ \partial_x u_1(t, \ell_1) = 0, \partial_x u_j(t, \ell_j) = g_j(t), & \forall t > 0, j = 2, \dots, N, \\ u_j(0, x) = u_j^0(x), & \forall x \in (0, \ell_j), j = 1, \dots, N, \end{array} \right. \quad (1.11)$$

La figure 1.4.3 représente ce problème où le contrôle est appliqué aux noeuds rouges.

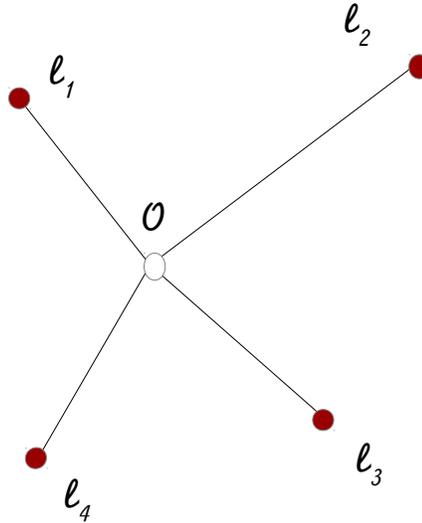


FIGURE 1.2 – Réseau étoilé pour  $N = 4$

### 1.4.4 Idée des preuves et résultats obtenus

En appliquant toujours la dualité entre observabilité et contrôlabilité, la contrôlabilité du problème linéarisé autour de zéro revient à montrer une

inégalité d'observabilité sur le problème adjoint rétrograde en temps :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_t \varphi_j + \partial_x \varphi_j + \partial_x^3 \varphi_j)(t, x) = 0, & \forall x \in (0, \ell_j), t > 0, j = 1, \dots, N, \\ \varphi_j(t, 0) = \varphi_k(t, 0), & \forall t > 0, \forall j, k = 1, \dots, N, \\ \partial_x \varphi_j(t, 0) = 0 & \forall t > 0, j = 1, \dots, N, \\ \sum_{j=1}^N \left( \partial_x^2 \varphi_j(t, 0) + \left(1 - \frac{\alpha}{N}\right) \varphi_j(t, 0) \right) = 0, & \forall t > 0, \\ \varphi_j(t, \ell_j) = 0, & \forall t > 0, j = 1, \dots, N, \\ \varphi_j(T, x) = \varphi_j^T(x), & \forall x \in (0, \ell_j), j = 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (1.12)$$

et d'obtenir sur ce problème une inégalité d'observabilité du type :

$$\|\underline{\varphi}^T\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{T})}^2 \leq C \sum_{j=1}^N \|\partial_x \varphi_j(\cdot, \ell_j)\|_{L^2(0, T)}^2,$$

Une première idée était d'utiliser comme dans le cas précédent une démonstration par l'absurde, le problème revenant alors à montrer que le système suivant est sur-déterminé :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda_i y_i + y_i' + y_i''' = 0, & \forall i = 1 \dots N, \\ y_i(\ell_i) = 0, & \forall i = 1 \dots N, \\ y_i(0) = y_j(0), & \forall i, j = 1 \dots N, \\ y_i'(0) = 0, & \forall i = 1 \dots N, \\ y_i'(\ell_i) = 0, & \forall i = 2 \dots N, \\ \sum_{i=1}^N y_i''(0) + \left(1 - \frac{\alpha}{N}\right) y_i(0) = 0. \end{array} \right.$$

Mais nous n'avons pas réussi à résoudre ce problème qui peut s'écrire comme un problème d'algèbre linéaire finalement assez simple d'énoncé en résolvant les équations différentielles et en cherchant à ajuster les constantes.

Nous avons donc choisi de montrer l'inégalité d'observabilité par la méthode des multiplicateurs déjà utilisée dans la partie 1.3.

Dans un premier temps en choisissant comme multiplicateur  $t$ , on obtient par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \int_0^{\ell_j} T |\varphi_j(T, x)|^2 dx &\leq \int_0^T \sum_{j=1}^N \int_0^{\ell_j} |\varphi_j(t, x)|^2 dx dt \\ &+ T \int_0^T \sum_{j=1}^N |\partial_x \varphi_j(t, \ell_j)|^2 dt + T(2\alpha - N) \int_0^T |\varphi_1(t, 0)|^2 dt. \end{aligned}$$

Le but est alors d'absorber les termes du membre de droite,  $T \int_0^T \sum_{j=1}^N |\partial_x \varphi_j(t, \ell_j)|^2 dt$  et  $T(2\alpha - N) \int_0^T |\varphi_1(t, 0)|^2 dt$ .

Puis on multiplie par la fonction 1, pour obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} |\varphi_j(T, x)|^2 dx - \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} |\varphi_j(s, x)|^2 dx &= \int_s^T \sum_{j=1}^N |\partial_x \varphi_j(t, l_j)|^2 dt \\ &+ (2\alpha - N) \int_s^T |\varphi_1(t, 0)|^2 dt, \end{aligned}$$

Puis, en multipliant par une fonction régulière  $q_j$  sur chaque branche et en intégrant par partie, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} |\varphi_j(T, x)|^2 q_j(T, x) dx - \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} |\varphi_j(s, x)|^2 q_j(s, x) dx &= \\ \int_s^T \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} (\partial_t q_j + \partial_x q_j + \partial_x^3 q_j) |\varphi_j|^2 dx dt - 3 \int_s^T \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} |\partial_x \varphi_j|^2 \partial_x q_j dx dt & \\ + \int_s^T \sum_{j=1}^N |\varphi_j(t, 0)|^2 \partial_x^2 q_j(t, 0) dt + \int_s^T \sum_{j=1}^N |\varphi_j(t, 0)|^2 q_j(t, 0) dt & \\ + \int_s^T \sum_{j=1}^N |\partial_x \varphi_j(t, l_j)|^2 q_j(t, l_j) dt + 2 \int_s^T \sum_{j=1}^N q_j(t, 0) \partial_x^2 \varphi_j(t, 0) \varphi_j(t, 0) dt. & \end{aligned}$$

Pour obtenir une estimation du terme  $T(2\alpha - N) \int_0^T |\varphi_1(t, 0)|^2 dt$  il faudrait donc une fonction  $q_j$  concave, positive, de dérivée négative sur  $[0, l_j]$  pour estimer les termes. Nous avons donc choisi la fonction  $\frac{(2l_j - x)(l_j - x)}{2l_j^2}$  qui vérifie

1.  $0 \leq q_j(t, x) \leq 1$ , pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times [0, l_j]$ ,
2.  $\frac{-3}{2l_j} \leq \partial_x q_j(t, x) \leq \frac{-1}{2l_j}$ , pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times [0, l_j]$ ,
3.  $\partial_x^2 q_j(t, x) = \frac{1}{l_j^2} > 0$ , pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times [0, l_j]$ ,

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \sum_{j=1}^N \frac{1}{l_j^2} |\varphi_j(t, 0)|^2 dt + \int_0^T \sum_{j=1}^N \frac{3}{2l_j} \int_0^{l_j} |\partial_x \varphi_j(t, x)|^2 dx dt & \\ \leq \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} |\varphi_j(T, x)|^2 dx + \int_0^T \sum_{j=1}^N \frac{3}{2l_j} \int_0^{l_j} |\varphi_j(t, x)|^2 dx dt & \\ - (2\alpha - N) \int_0^T |\varphi_1(t, 0)|^2 dt. & \end{aligned}$$

En utilisant une inégalité de Poincaré et en regroupant les termes, on obtient alors l'inégalité d'observabilité voulue.

**Théorème 1.4.6** Soient  $(l_j)_{j=1, \dots, N} \in (0, +\infty)^N$  et  $\alpha \geq N/2$ .

Il existe  $L_0, T_{\min} > 0$  tels que si

$$L = \max_{j=1, \dots, N} l_j < L_0 \quad \text{et} \quad T > T_{\min},$$

alors on a

$$\|\varphi^T\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{T})}^2 \leq C \sum_{j=1}^N \|\partial_x \varphi_j(t, l_j)\|_{L^2(0, T)}^2, \quad \forall \varphi^T \in \mathbb{L}^2(\mathcal{T}),$$

avec  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  solution de (1.12) de condition finale  $\varphi^T = (\varphi_1^T, \dots, \varphi_N^T)$  et  $C$  une constante positive.

Le résultat de contrôlabilité exacte du problème linéarisé en découle immédiatement et ensuite on applique un résultat de point fixe pour avoir la contrôlabilité du problème non linéaire.

**Théorème 1.4.7** Soient  $(l_j)_{j=1, \dots, N} \in (0, +\infty)^N$  et  $\alpha \geq N/2$ . Il existe  $L_0, T_{\min} > 0$  tels que si

$$L = \max_{j=1, \dots, N} l_j < L_0 \quad \text{and} \quad T > T_{\min},$$

alors le système non linéaire (1.11) est localement exactement contrôlable autour de zéro sur  $\mathbb{L}^2(\mathcal{T})$  avec  $N$  contrôles agissant aux noeuds externes  $g = (g_1, \dots, g_N) \in L^2(0, T)^N$ .

**Remarque(s) 1.4.8** En travaillant un peu plus sur les inégalités, on arrive à inclure le terme  $\alpha = \frac{N}{2}$  dans notre résultat de contrôle. Ce que nous n'avons pas fait pour le premier résultat présenté en paragraphe 1.4.

### 1.4.5 Problèmes ouverts

Plusieurs problèmes ouverts peuvent se poser naturellement sur les réseaux.

1. Un point intéressant serait d'étudier le cas du réseau étoilé infini. Le problème serait alors le suivant,

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_t u_j + \partial_x u_j + u_j \partial_x u_j + \partial_x^3 u_j)(t, x) = 0, & \forall x > 0, t > 0, \\ u_j(t, 0) = u_k(t, 0), & \begin{array}{l} j = 1, \dots, N, \\ \forall j, k = 1, \dots, N, \\ t > 0, \end{array} \\ \sum_{j=1}^N (\partial_x^2 u_j(t, 0) + u_j(t, 0)) = \frac{N}{3} u_1^2(t, 0) + g(t), & \forall t > 0, \\ u_j(0, x) = u_j^0(x), & \begin{array}{l} \forall x > 0, \\ j = 1, \dots, N. \end{array} \end{array} \right.$$

Des résultats sur le contrôle de KdV dans un quart de plan ont été obtenus par Lionel Rosier dans [75], via l'utilisation d'inégalités de Carleman et pourraient être un point de départ pour cette étude.

2. Une autre question serait d'imposer des coefficients principaux réguliers mais différents sur chaque branche et de regarder le problème inverse de retrouver ces coefficients avec des observations sur la solution. Ce problème est à rapprocher du problème inverse étudié en paragraphe 7.3. C'est de plus un problème intéressant du point de vue de la modélisation du réseau artériel. Il permettrait d'obtenir des informations sur la compliance ou la rigidité des artères par exemple.

## 1.5 Perspectives

### 1.5.1 Système de Hirota-Satsuma

Lors de mon séjour au Chili en Octobre 2017, j'ai eu l'occasion de travailler avec Eduardo Cerpa et Nicolás Carreño. Nous avons choisi de travailler sur le système de Hirota-Satsuma, [38, 82]. Ce système de trois équations couplées de type KdV possède une équation correspondant à des ondes se déplaçant de la droite vers la gauche, tandis que les deux autres équations correspondent à des ondes se déplaçant de la gauche vers la droite. Nous avons choisi d'étudier la contrôlabilité interne de ce système, posé sous la forme suivante,

$$\begin{cases} u_t - u_{xxx} - u_x - w_x - uu_x + vv_x = 0, \\ v_t + v_{xxx} + v_x + uv_x = \mathbb{1}_{\omega_2} h_2(t), \\ w_t + w_{xxx} + w_x + 3uw_x = \mathbb{1}_{\omega_3} h_3(t), \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, u_x(t, 0) = 0, \\ v(t, 0) = v(t, L) = 0, v_x(t, L) = 0, \\ w(t, 0) = w(t, L) = 0, w_x(t, L) = 0. \end{cases}$$

Notre but est de répondre à la question suivante,

**Question :** Peut-on contrôler ce système en tout temps avec uniquement 2 contrôles  $h_2$  et  $h_3$  agissant respectivement sur deux ouverts  $\omega_2$  et  $\omega_3$  de  $(0, L)$  ?

Pour répondre à cette question, nous avons choisi d'écrire une inégalité de Carleman sur le problème adjoint linéarisé afin d'obtenir une inégalité d'observabilité sur ce système,

Pour cela, nous avons repris l'inégalité de Carleman pour l'équation de KdV prouvée dans [2] et [12]. Les points clés à résoudre sont alors

- de faire disparaître les termes en dérivées premières et secondes apparaissant sur le terme de droite de l'inégalité de Carleman. Pour cela, nous avons choisi d'adapter une technique de Bootstrap déjà utilisée pour KdV dans [34, 12, 2]. Comme nous n'avons pas besoin d'estimer sur la trace de la dérivée seconde à la frontière nous interpolons seulement dans l'espace de Sobolev  $H^{7/3}$ . Ceci nous permet de gagner un cran de démonstration.
- de faire disparaître les termes en  $\phi$  apparaissant sur le terme de droite de l'inégalité de Carleman. Pour cela, nous avons supposé que le contrôle  $h_3$  touche un bord du domaine pour pouvoir appliquer l'inégalité de Poincaré et avec un même argument de Bootstrap obtenir seulement des termes en  $\phi_x$  sur le terme de droite de Carleman. On peut alors utiliser le couplage pour faire disparaître les termes en  $\phi_x$ .

Ces résultats sont actuellement en cours de rédaction.

### 1.5.2 Equation de KdV posée sur un arbre

Lors de mon récent séjour au Chili en décembre 2018, nous avons réfléchi avec Julie Valein et Eduardo Cerpa au problème de KdV posé non pas sur une étoile mais sur un arbre. L'équation de Korteweg-de Vries ayant un sens de



# Chapitre 2

## Contrôle de quelques équations posées sur un segment

### 2.1 Contrôle de l'équation de Boussinesq améliorée.

Les détails de cette partie se trouvent dans les articles [Cré03] et [CC18].

#### 2.1.1 Présentation du problème

Lors de mes travaux de thèse, j'ai étudié la contrôlabilité au bord de l'équation de Boussinesq communément appelée "bonne" équation de Boussinesq, voir [Cré03]. Le problème étudié était alors de savoir si, étant donné un temps  $T > 0$  et une longueur de domaine spatial  $L > 0$ , des conditions initiales et finales suffisamment régulières, on peut trouver un contrôle  $h = h(t)$  tel que la solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_{tt} - y_{xx} = (y^2 + y_{xx})_{xx} & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(t, 0) = 0 = y(t, L) = 0, & t \in (0, T), \\ \left\{ \begin{array}{l} y_x(t, 0) = 0, y_x(t, L) = h(t) \\ \text{ou } y_{xx}(t, 0) = 0, y_{xx}(t, L) = h(t), \end{array} \right. & t \in (0, T), \\ y(0, x) = y^0(x), y_t(0, x) = y^1(x), & x \in (0, 1) \end{array} \right.$$

vérifie  $y(T, x) = y_T^0$  et  $y_t(T, x) = y_T^1$ . Pour cela nous avons exhibé une inégalité d'observabilité sur le problème adjoint du linéarisé, en étudiant le comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur associé linéarisé et en appliquant une inégalité de type Ingham.

Le cas du contrôle de la "mauvaise" équation de Boussinesq ( $y_{tt} - y_{xx} - y_{xxxx} = (y^2)_{xx}$ ) n'est pas envisageable, cette équation n'ayant pas de résultats de well-posedness, néanmoins, en collaboration avec Eduardo Cerpa, [CC18], nous avons étudié le cas du contrôle au bord de l'équation de Boussinesq améliorée, ( $y_{tt} - y_{xx} - y_{xxtt} = (y^2)_{xx}$ ) qui approche la "mauvaise" équation de Boussinesq, cf [56]. Nous avons dans un premier temps montré que le linéarisé n'est pas spectralement contrôlable, dû à la présence d'un point d'accumulation fini dans le spectre du système. Ce résultat est à rapprocher des résultats obtenus pour le contrôle de l'équation de Benjamin-Bona-Mahomy dans [61] ou

encore pour l'équation des ondes amorties dans [78]. On peut cependant dans de tels cas espérer obtenir un résultat de contrôlabilité avec un contrôle mobile. De tels résultats ont été obtenus pour les équations citées précédemment dans [80] et [22].

### 2.1.2 Résultats obtenus

Dans une première partie, nous démontrons que le problème linéarisé posé sur un domaine borné avec contrôle frontière n'est pas exactement contrôlable, ni même spectralement contrôlable (aucune combinaison finie non triviale de fonction propre ne peut être ramenée à zéro en temps fini). Le système étudié est alors le suivant.

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} - y_{xxtt} = 0, & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ y(t, 0) = 0, y(t, 1) = h(t), & t \in (0, T), \\ y(0, x) = y^0(x), y_t(0, x) = y^1(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (2.1)$$

Nous réécrivons ce système sous la forme

$$y_{tt} + Ay = 0,$$

où, avec  $D(A) = H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$ , on définit l'opérateur  $A$ ,  $A : D(A) \subset L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$  par

$$A : w \mapsto -(I - \partial_{xx})^{-1} \partial_{xx} w.$$

Les valeurs propres de l'opérateur  $A$  s'écrivent  $\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{k^2 \pi^2 + 1}$  et on remarque facilement que les  $\lambda_k \in \mathbb{R}^+$  sont des valeurs propres simples, et que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = 1$ . Ainsi, le spectre de  $A$  admet un point limite. On montre alors par l'absurde et à l'aide du théorème de Paley-Wiener que le système ne peut être contrôlé spectralement et par conséquent nous ne pouvons avoir ni contrôle exact ni contrôle à zéro. Néanmoins nous arrivons à prouver un résultat de continuation unique qui nous donne un résultat de contrôlabilité approchée.

**Théorème 2.1.1** *Le système (2.1) est contrôlable de manière approchée dans  $L^2(0, 1)$  pour tout temps  $T > 0$ .*

Dans une deuxième partie, nous démontrons la contrôlabilité exacte de l'équation de Boussinesq améliorée posée sur le tore, avec un contrôle interne mobile. Le problème est alors le suivant,

Etant donnés, un temps  $T > 0$ , des conditions initiales  $(y^0, y^1)$  et finales  $(y_T^0, y_T^1)$  dans des espaces à préciser, peut-on trouver un contrôle  $h = h(t, x)$  tel que la solution du problème,

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} - y_{xxtt} = (y^2)_{xx} + b(x + ct)h(t, x), & x \in \mathbb{T}, t > 0, \\ y(0, x) = y^0(x), y_t(0, x) = y^1(x), & x \in \mathbb{T}, \end{cases} \quad (2.2)$$

vérifie  $y(T) = y_T^0$  et  $y_t(T) = y_T^1$ , où  $b = b(x)$  est une fonction régulière non-nulle ?

Pour répondre à cette question, nous étudions les valeurs propres de l'opérateur linéarisé associé. Nous démontrons que si la vitesse de déplacement du contrôle,  $c$ , est suffisamment grande ( $|c| > 2$ ) alors les valeurs propres sont toutes différentes et possèdent un gap asymptotique  $\Delta$ . On applique alors la théorie des moments avec l'existence d'une famille biorthogonale, voir [81], pour obtenir le résultat de contrôle souhaité pour le linéarisé. Pour obtenir le résultat de contrôlabilité locale du problème non linéaire on utilise un argument de point fixe. Le théorème principal est alors le suivant.

**Théorème 2.1.2** *Soit  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $|c| > 2$ . Soit  $b = b(x) \in C^\infty(\mathbb{T})$  tel que  $\{x \in \mathbb{T}, b(x) \neq 0\} \neq \emptyset$ . Alors pour tout  $T > \frac{2\pi}{\Delta}$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $(y^0, y^1), (y_T^0, y_T^1) \in H^2(\mathbb{T})^2$  vérifiant*

$$\|(y^0, y^1)\|_{H^2(\mathbb{T})^2} \leq \epsilon, \quad \|(y_T^0, y_T^1)\|_{H^2(\mathbb{T})^2} \leq \epsilon,$$

*il existe un contrôle  $h \in L^2(0, T, L^2(\mathbb{T}))$  tel que le problème (2.2) admet une unique solution  $y \in C^1([0, T], H^2(\mathbb{T}))$  vérifiant*

$$y(T, x) = y_T^0(x), \quad \text{and} \quad y_t(T, x) = y_T^1(x).$$

## 2.2 Contrôle de l'équation des poutres sous actionneur piézo-électrique.

Cette partie concerne l'article [CP06].

### 2.2.1 Présentation du problème

En collaboration avec Christophe Prieur, nous avons considéré le problème de la contrôlabilité d'une poutre flexible sous l'action d'une cellule piézo-électrique. La poutre de longueur  $L$  est supposée encastree à une extrémité et libre à l'autre. Le modèle de type Euler-Bernouilli s'écrit alors comme suit,

$$\begin{cases} w_{tt} + \frac{YI}{\rho A_b} w_{xxxx} = \frac{1}{\rho A_b} m_{xx}, & (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, L) \\ w(t, 0) = 0, w_x(t, 0) = 0, & t > 0 \\ w_{xx}(t, L) = 0, w_{xxx}(t, L) = 0, & t > 0 \\ w(0, x) = w_0(x), w_t(0, x) = w_1(x), & x \in (0, L). \end{cases}$$

sous les notations suivantes,

- $w(t, x)$  est la déformation de la poutre au temps  $t$  et au point  $x \in [0, L]$  ;
- $\rho$  est la densité (linéique et uniforme) de la poutre ;
- $A_b$  est l'aire de la section ;
- $Y$  est le module d'Young ;
- $I$  est le moment d'inertie ;
- $m$  est le moment exercé par la cellule piézo-électrique.

Le moment exercé par la cellule piézo-électrique est fonction de la tension appliquée,

$$m(t, x) = K_a V_a(t)[H(x - \xi) - H(x - \eta)],$$

où  $K_a$  est une constante dépendant des propriétés de la poutre et de l'actionneur piézoélectrique,  $V_a(t)$  est la tension appliquée à l'actionneur piézoélectrique et  $x \mapsto H(x)$  est la fonction de Heaviside, i.e. nulle pour tout  $x < 0$ , et égale à 1 pour tout  $x \geq 0$ . Ici  $\xi$  et  $\eta$  représentent les abscisses des extrémités de la cellule piézoélectrique.

Nous introduisons les espaces  $Y_\alpha$  définis ci dessous pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Soit  $Y_0 = L^2(0, L)$ . Pour tout  $\alpha > 0$ , soit  $Y_\alpha$  l'adhérence dans  $H^\alpha(0, L)$  de l'ensemble des  $y \in C^\infty([0, L])$  vérifiant pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} y^{(4n)}(0) &= 0, \\ y^{(4n+1)}(0) &= 0, \\ y^{(4n+2)}(L) &= 0, \\ y^{(4n+3)}(L) &= 0. \end{aligned}$$

Pour tout  $\alpha > 0$ , on définit  $Y_{-\alpha}$  comme étant l'espace dual de  $Y_\alpha$  par rapport à  $Y_0$ .

Les résultats de contrôlabilité que nous avons obtenu dans [CP06] sont les suivants,

**Théorème 2.2.1** *Soit  $\epsilon > 0$ , il existe un ensemble  $A \subset (0, L)^2$  de mesure de Lebesgue égale à  $L^2$  tel que pour tout  $(\xi, \eta) \in A$ , toutes les conditions initiales dans  $Y_{3+\epsilon} \times Y_{1+\epsilon}$  sont exactement  $L^2(0, T)$ -contrôlables en temps  $T > 0$ , pour tout  $T > 0$ .*

**Théorème 2.2.2** *Il existe un ensemble non vide  $B \subset (0, L)^2$  non dénombrable mais de mesure de Lebesgue nulle tel que pour tout  $(\xi, \eta) \in B$ , toute condition initiale dans  $Y_3 \times Y_1$  est exactement  $L^2(0, T)$ -contrôlable en temps  $T > 0$ , pour tout  $T > 0$ .*

**Remarque 2.2.3** *Dans le cas très spécifique où  $(\xi, \eta) = (0, L)$ , toute condition initiale dans  $Y_1 \times Y_{-1}$  est exactement  $L^2(0, T)$ -contrôlable en temps  $T > 0$ , pour tout  $T > 0$ .*

Les démonstrations de ces résultats sont basés sur la Méthode d'Unicité Hilbertienne, H.U.M, [52]. Pour obtenir le résultat d'observabilité sur le problème adjoint nous avons recherché un nouveau résultat d'approximation diophantienne issu de la théorie des nombres. Ces nouveaux résultats d'approximation diophantienne ont été utilisés par la suite pour montrer un résultat de stabilisation de la poutre dans [51].

### 2.2.2 Eléments de démonstration

Cette partie regroupe quelques éléments de démonstration des théorèmes 2.2.1 et 2.2.2.

Le point essentiel est l'obtention d'une inégalité d'observabilité sur le problème adjoint rétrograde en temps. Dans un premier temps nous avons renormalisé le système pour une longueur de poutre égale à  $L = \pi$ . Le problème adjoint s'écrit alors,

$$\begin{cases} \phi_{tt} + \phi_{xxxx} = 0, \\ \phi(0, t) = \phi_x(0, t) = 0, \\ \phi_{xx}(\pi, t) = \phi_{xxx}(\pi, t) = 0, \\ \phi(x, T) = 0, \phi_t(x, T) = 0. \end{cases}$$

Nous avons besoin d'une inégalité d'observabilité sur la quantité

$$\int_0^T |\phi_x(\xi, t) - \phi_x(\eta, t)|^2 dt.$$

Soient  $(\psi_k)_{k \geq 1}$  les fonctions propres normalisées de  $A$  associées aux valeurs propres  $\alpha_k^4$ . Nous avons montré que

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\cos(\alpha_k x) - \cosh(\alpha_k x) + \mu_k (\sinh(\alpha_k x) - \sin(\alpha_k x))),$$

où  $\alpha_k$  est la  $k$ -ème racine positive de

$$1 + \cos(\alpha_k \pi) \cosh(\alpha_k \pi) = 0,$$

et

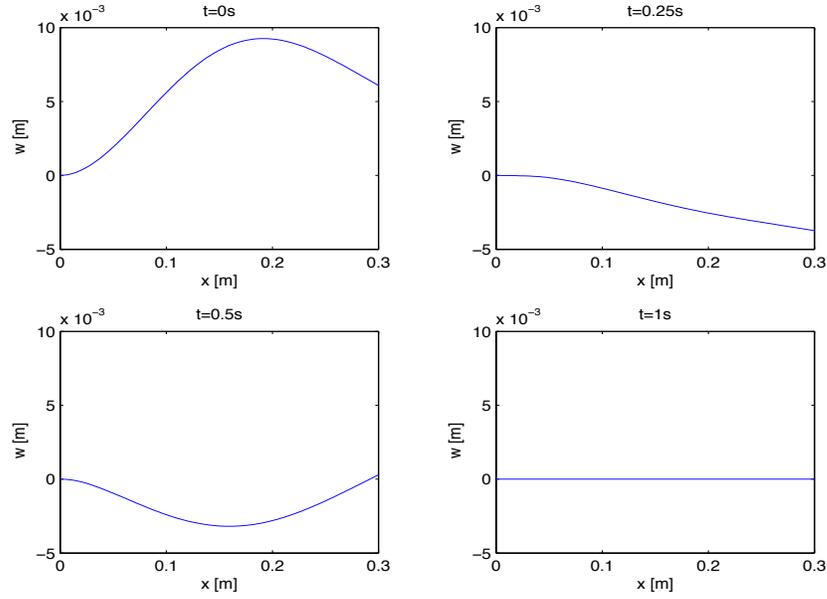
$$\begin{aligned} \mu_k &= \frac{\cos(\alpha_k \pi) + \cosh(\alpha_k \pi)}{\sin(\alpha_k \pi) + \sinh(\alpha_k \pi)}, \\ \gamma_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \end{aligned}$$

Comme  $\alpha_k^2 - \alpha_{k+1}^2 \rightarrow +\infty$  on peut appliquer une inégalité de type Ingham et obtenir le résultat suivant,

**Lemme 2.2.4** *Pour tout  $T > 0$ , il existe deux constantes  $C_1$  et  $C_2 > 0$  telles que pour tout  $(\phi_0, \phi_1) \in Y_1 \times Y_{-1}$  on ait,*

$$\begin{aligned} C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left( |\phi_k^0|^2 + \left| \frac{\phi_k^1}{\alpha_k^2} \right|^2 \right) |\psi'_k(\xi) - \psi'_k(\eta)|^2 &\leq \int_0^T |\phi_x(\xi, t) - \phi_x(\eta, t)|^2 dt \\ &\leq C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( |\phi_k^0|^2 + \left| \frac{\phi_k^1}{\alpha_k^2} \right|^2 \right) |\psi'_k(\xi) - \psi'_k(\eta)|^2. \end{aligned}$$

Nous avons alors besoin d'un résultat d'approximation diophantienne pour connaître la dépendance par rapport à  $k$  de la distance de la suite  $(\alpha_k \frac{\xi - \eta}{2\pi})$  aux entiers relatifs, distance que nous noterons  $d(\alpha_k \frac{\xi - \eta}{2\pi}, \mathbb{Z})$ . Pour démontrer ces résultats, nous avons utilisé [14] et [48] et obtenu les lemmes suivants qui démontrent les théorèmes 2.2.1 et 2.2.2. Le théorème 2.2.3 est un cas particulier.

FIGURE 2.1 – Profil de la poutre pour  $t \in [0, T]$  pour  $T = 12s$ 

**Lemme 2.2.5** *Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un ensemble  $A \subset (0, 1)$  de mesure de Lebesgue égale à 1 tel que pour tout  $a \in A$ , il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on ait*

$$d(\alpha_k a, \mathbb{Z}) \geq \frac{c}{k^{1+\epsilon}}.$$

et

**Lemme 2.2.6** *Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un ensemble  $B \subset (0, 1)$  dénombrable et de mesure de Lebesgue nulle tel que pour tout  $b \in B$ , il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on ait*

$$d(\alpha_k b, \mathbb{Z}) \geq \frac{c}{k}.$$

### 2.2.3 Résultats numériques

La Méthode d'Unité Hilbertienne est une méthode constructive d'obtention du contrôle. Nous l'avons utilisé numériquement pour obtenir un profil de contrôle. Les choix des données ont été fait à partir de données physiques, voir [CP06]. Nous avons à partir d'un schéma de discrétisation d'Euler obtenu les résultats numériques suivants pour un temps de contrôle  $T = 12s$ , cf figures 2.1 et 2.2.

Il est à noter que les simulations numériques effectuées montrent bien que plus le temps de contrôle est petit plus la tension à appliquer doit être élevée.

## 2.3 Contrôle d'équations de type réaction-diffusion.

### 2.3.1 Contrôle approché de l'équation de FitzHugh-Nagumo

Voir les détails dans [CP08].

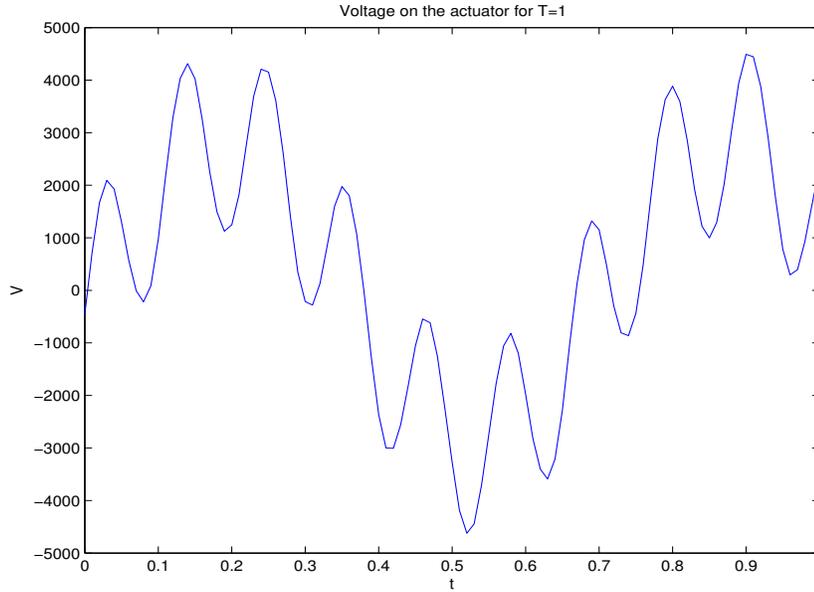


FIGURE 2.2 – Tension-contrôle à appliquer à la cellule piézoélectrique pour  $T = 12s$ .

Toujours en collaboration avec Christophe Prieur, nous avons étudié le problème de la contrôlabilité approchée pour un système de type réaction-diffusion dégénéré (nous prendrons dans la suite  $\delta = 0$ ),

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_{xx} + \mu \mathbf{y}_x + A\mathbf{y} + Bz, \\ z_t = \delta z_{xx} + C\mathbf{y} + dz, \\ \mathbf{y}_x(t, 0) = \mathbf{0}, G\mathbf{y}_x(t, L) + \mathbf{y}(t, L) = \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(0, x) = \mathbf{0}, z(0, x) = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

où,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des espèces diffusantes et  $z \in \mathbb{R}$  celui des espèces stockées. Les paramètres  $A, G \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times p}$ ,  $\mu, \delta, d \in \mathbb{R}$  sont donnés. La fonction vectorielle dépendant du temps  $\mathbf{u}$  est le contrôle dans  $L^2(0, T)^p$ .

Ce type de systèmes apparaît dans des domaines variés comme par exemple la chimie, l'électrophysiologie, la génétique, la combustion... Le cas dégénéré  $\delta = 0$  modélise en particulier les équations de FitzHugh Nagumo qui apparaissent en électrophysiologie, voir par exemple [32, 62] où  $y$  représente le potentiel électrique et  $z$  la concentration chimique. D'autre part, les équations gouvernant une réaction chimique dans un modèle de réacteur tubulaire peuvent s'écrire exactement comme (2.3) où  $y$  représente la température ( $p = 1$ ) et  $z$  la concentration en combustible solide. Dans le cas de la combustion de solides, le réactant ne diffuse pas et on est donc bien dans le cas dégénéré,  $\delta = 0$ , voir [58]. On peut remarquer que les électrodes à gaz peuvent être également modélisées par le système (2.3) où  $\mathbf{y}$  représente la concentration des espèces diffusantes avec  $p \leq 4$  et  $z$  représente la concentration de l'espèce stockée, voir [44].

La contrôlabilité approchée du cas non dégénéré, i.e.  $\delta \neq 0$ , a été étudiée

en détails dans [33, 49] pour le cas linéaire et dans [60] pour un cas non linéaire spécifique, voir aussi la référence [27]. L'idée est d'introduire des fonctions de type Gevrey afin d'exhiber une "sortie plate" pour ces équations. La contrôlabilité à zéro du cas non dégénéré a aussi été étudié via les inégalités de Carleman dans [45, 1]. Une première étude de la contrôlabilité du système de FitzHugh Nagumo a été réalisée dans [10] où un résultat de contrôle optimal a été obtenu.

Dans ce papier, nous avons étudié la contrôlabilité approchée du système (2.3), dans le cas dégénéré  $\delta = 0$ , en utilisant une démonstration par platitude. Pour notre objectif de contrôle via la platitude, nous avons besoin des hypothèses suivantes,

$$C \neq \mathbf{0}, \sum_{k=1}^p B_k C_k \neq 0, \text{ et } A(BC) = (BC)A. \quad (2.4)$$

On peut remarquer que ces hypothèses sont satisfaites si  $p = 1$  et  $BC \neq 0$ . Dans le cas scalaire, l'hypothèse  $C \neq 0$  est nécessaire pour obtenir un résultat de contrôlabilité sinon si  $C = 0$ , le système en  $z$  est complètement découplé du contrôle  $\mathbf{u}$ .

Si  $A(BC) \neq (BC)A$ , le résultat reste valide mais les calculs sont beaucoup plus compliqués (en particulier (2.7) ci-dessous).

Notre résultat principal stipule que le système (2.3) avec  $\delta = 0$  est approximativement contrôlable dans  $L^2(0, 1)^{p+1}$ . Plus précisément, pour tout  $T > 0$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , pour toutes conditions finales  $(\mathbf{y}_T, z_T)$  dans  $L^2(0, 1)^{p+1}$  de (2.3) avec  $\delta = 0$ , on peut expliciter la loi de contrôle  $\mathbf{u}$  dans  $C^\infty([0, T], L^2(0, 1)^p)$  telle que la solution de (2.3) avec  $\delta = 0$  vérifie  $\|\mathbf{y}(T, \cdot) - \mathbf{y}_T\|_{L^2(0,1)} \leq \epsilon$  et  $\|z(T, \cdot) - z_T\|_{L^2(0,1)} \leq \epsilon$ .

Pour cela, nous avons introduit une propriété de "quasi-platitude" où la trajectoire du système dépend non seulement de la sortie plate et de ses dérivées mais également de ses primitives. Ceci est dû au caractère intégro-différentiel du système considéré.

### Eléments de démonstration

Nous avons considéré le système dégénéré suivant, avec  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ ,  $z \in \mathbb{R}$ ,  $A, G \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times p}$ ,  $\mu, d \in \mathbb{R}$ ,  $L = 1$  et  $C$  non nul et vérifiant (2.4).

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_{xx} + \mu\mathbf{y}_x + A\mathbf{y} + Bz, \\ z_t = C\mathbf{y} + dz, \\ \mathbf{y}_x(t, 0) = \mathbf{0}, G\mathbf{y}_x(t, 1) + \mathbf{y}(t, 1) = \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(0, x) = \mathbf{0}, z(0, x) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Nous avons dans un premier temps réalisé le changement de variables suivant,  $\bar{z} = e^{-dt+\mu x/2}z$ ,  $\bar{\mathbf{y}} = e^{-dt+\mu x/2}\mathbf{y}$  et  $\bar{\mathbf{u}} = e^{-dt+\mu/2}\mathbf{u}$ . Le système (2.5) devient alors un système découplé avec  $\bar{A} = (d + \frac{\mu^2}{4})I_p - A$ ,  $\bar{B} = -B$ .

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{y}}_t = \bar{\mathbf{y}}_{xx} - \bar{A}\bar{\mathbf{y}} - \bar{B}\bar{z}, \\ \bar{z}_t = C\bar{\mathbf{y}}, \\ \bar{\mathbf{y}}_x(t, 0) = \mu\bar{\mathbf{y}}(t, 0)/2, G\bar{\mathbf{y}}_x(t, 1) + (I_p - G\mu/2)\bar{\mathbf{y}}(t, 1) = \bar{\mathbf{u}}(t), \\ \bar{\mathbf{y}}(0, x) = \mathbf{0}, \bar{z}(0, x) = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

Nous définissons la fonction suivante, jouant le rôle de sortie quasi-plate  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p$  par, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\mathbf{S}(t) = \bar{\mathbf{y}}(t, 0).$$

On suppose dans un premier temps que  $\mathbf{S}$  est suffisamment régulière et on définit pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(0)}(t) &= \mathbf{S}(t), \mathbf{S}^{(n)}(t) = \frac{d}{dt}(\mathbf{S}^{(n-1)})(t), \text{ for } n \geq 1, \\ \mathbf{S}^{(-n)}(t) &= \int_0^t \mathbf{S}^{(-n+1)}(\tau) d\tau, \text{ for } n \geq 1. \end{aligned}$$

La solution formelle peut ainsi s'écrire de manière quasi-plate sous la forme, pour tout  $(x, t) \in [0, 1] \times [0, +\infty)$

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{y}}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k C_n^k C_k^j \bar{A}^{k-j} (\bar{B}C)^j \mathbf{S}^{(n-k-j)}(t) \right] \left( \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\mu}{2} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right), \\ \bar{z}(x, t) = C \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k C_n^k C_k^j \bar{A}^{k-j} (\bar{B}C)^j \mathbf{S}^{(n-k-j-1)}(t) \right] \left( \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\mu}{2} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right). \end{cases} \quad (2.7)$$

Le contrôle formel de (2.6) est alors défini pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}(t) &= (I_p - G\mu/2)\bar{\mathbf{y}}(1, t) + G\bar{\mathbf{y}}_x(1, t), \\ &= (I_p - G\mu/2) \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k C_n^k C_k^j \bar{A}^{k-j} (\bar{B}C)^j \mathbf{S}^{(n-k-j)}(t) \right] \left( \frac{4n+2+\mu}{2(2n+1)!} \right) \\ &\quad + G \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k C_n^k C_k^j \bar{A}^{k-j} (\bar{B}C)^j \mathbf{S}^{(n-k-j)}(t) \right] \left( \frac{4n+\mu}{2(2n)!} \right). \end{aligned}$$

Nous montrons ensuite à l'aide d'espaces de type Gevrey que la série formelle est bien convergente et en choisissant la sortie plate sous la forme d'une fonction de type "bosse", on peut montrer le résultat de contrôle approché. Le résultat nouveau est le développement de la solution en fonction non seulement de la sortie plate et de ses dérivées mais également de ses primitives.

### Problèmes ouverts

L'étude de la contrôlabilité des systèmes de type réaction-diffusion s'est fortement développée ces dernières années. Concernant les systèmes dégénérés comme celui présenté ci-dessus peu de résultats sont disponibles actuellement.

Il est à noter qu'un résultat récent dû à F. Chaves-Silva, L. Rosier et E. Zuazua, [22], pourrait certainement être adapté à notre cas dégénéré pour obtenir des résultats de contrôle plus précis.

Un problème ouvert à ce jour serait également de contrôler ce type d'équations mais avec un contrôle saturé ce qui serait plus intéressant d'un point de vue applicatif. Ce type de contrôle est très fréquent en automatique, on peut par exemple citer l'article [57] qui contrôle l'équation de Korteweg-de Vries avec un contrôle saturé.

### 2.3.2 Equation de FitzHugh Nagumo non linéaire

Voir les détails dans [Cré11].

Nous considérons dans cet article le système non linéaire de FitzHugh Nagumo, en 1D, qui est un système de type réaction-diffusion avec une non-linéarité cubique. Les conditions au bord choisies sont de type Robin. On se place sur un intervalle  $\Omega$  borné, par commodité on prendra dans la suite  $\Omega = [-1, 0]$ .

$$(FHN) \begin{cases} y_t = y_{xx} + h(y) - z, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times (-1, 0) \\ z_t = \delta y - \gamma z, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times (-1, 0) \\ \alpha y_x(t, -1) + y(t, -1) = u(t), & t \in \mathbb{R}^+ \\ y_x(t, 0) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ y(0, x) = y^0(x), z(0, x) = 0 & x \in (-1, 0). \end{cases}$$

ici  $h$  est une non-linéarité de type cubique, i.e.  $h(y) = -y(y - \beta)(y - 1)$  avec un paramètre  $\beta > 0$ . Dans ce système,  $y$  représente l'espèce diffusante et  $z$  l'espèce stockée, les paramètres  $\delta > 0$ ,  $\gamma \geq 0$  et  $\alpha$  sont des constantes connues et  $u$  est le contrôle dans  $L^2(0, T)$ , on suppose que la composante  $z$  est nulle à l'instant initial.

Ce type de système apparaît dans de nombreuses modélisations de systèmes chimiques, à la fois en biologie et en industrie. En 1952, Hodgkin et Huxley développent ce modèle pour représenter la conduction électro-chimique dans un nerf [39]. La variable  $y$  joue alors le rôle du potentiel électrique et  $z$  la concentration chimique. Il sert également de modèle pour la propagation de l'onde électrique dans le cœur. Dans ce cas,  $y$  représente le potentiel transmembranaire et  $z$  est une variable auxiliaire,  $u$  le signal d'entrée et on peut mesurer la réponse de sortie,  $y(0, t)$ , à l'aide d'un électrocardiogramme, voir [4].

De nombreux résultats d'existence et d'unicité ont été obtenus pour ce système. Citons en particulier [72], [43], ou bien encore [84]. Pour le cas qui nous intéresse, dans un domaine borné avec les conditions de Robin, Rauch, dans [71], a montré le résultat d'existence de solutions globales suivant.

**Théorème 2.3.1 ([71])** *Pour tout  $y_0 \in H^2(\Omega)$ , il existe un unique couple de solutions  $(y, z)$  dans  $C([0, \infty), H^2(\Omega)^2) \cap C^1([0, \infty), L^2(\Omega)^2)$  au problème (FHN) homogène.*

La question de la contrôlabilité pour ce type de problème a été assez peu étudiée à notre connaissance. La contrôlabilité approchée d'une version linéarisée de ce système, *i.e.* lorsque  $h(y) = -\beta y$  a déjà été démontrée dans [CP08] à l'aide d'une résolution de type platitude (voir paragraphe précédent). On montre que toute condition finale dans  $L^2(\Omega)$  peut être approchée aussi près que l'on veut par un contrôle dans  $C^\infty(0, T)$ .

Quant au problème non linéaire avec conditions de Dirichlet et contrôle interne, un résultat de contrôle optimal a été obtenu dans [9] à l'aide du formalisme de Dubovistky-Milyutin.

Dans cet article nous nous intéressons au problème de planification de trajectoire, *i.e.* étant donné une sortie, nous souhaitons reconstruire le signal sous la forme d'une série dépendant de cette sortie. La planification de trajectoires pour des EDP est étudiée dans [50] pour le problème de la chaleur, où il est démontré que lorsque la sortie plate est de type Gevrey, la série solution obtenue est convergente. D'autres résultats de platitude pour des équations paraboliques non-linéaires avec une non-linéarité quadratique sont donnés dans [55] et [31]. Dans cet article nous appliquons ces résultats à notre non-linéarité cubique. Le point clé étant d'estimer correctement les termes non linéaires apparaissant dans la série formelle et montrer que cette série est effectivement convergente.



# Deuxième partie

## Stabilisation



# Chapitre 3

## Cas de l'équation de KdV avec un terme retardé

Cette partie résume l'article [CBV18].

### 3.1 Présentation du problème

Les systèmes physiques comportant la plupart du temps des éléments retardés avec Julie Valein et Lucie Baudouin nous avons souhaité étudier le problème de stabilisation de l'équation de Korteweg-de Vries sur un segment lorsque le terme de feedback est retardé. Pour cela nous avons choisi d'étudier le cas "classique" où les conditions au bord sont de type Dirichlet homogènes et on impose un feedback sur la condition de Neumann à droite via celle de Neumann à gauche. La stabilisation d'un tel système dans le cas non retardé a été montrée par B.Y. Zhang [86] pour le cas  $L = 1$  puis par G. Perla Menzala, C.F. Vasconcellos, et E. Zuazua dans [67] dans le cas où les longueurs sont non critiques ( $L \notin \mathcal{N}$ ). Dans le cas critique, il est montré dans [67] et ensuite dans [65] qu'ajouter un terme de damping interne permet de stabiliser le système dans tous les cas.

Le système que nous considérons est le suivant,

$$\begin{cases} y_t(x, t) + y_{xxx}(x, t) + y_x(x, t) + y(x, t)y_x(x, t) = 0, & x \in (0, L), t > 0, \\ y(0, t) = y(L, t) = 0, & t > 0, \\ y_x(L, t) = \alpha y_x(0, t) + \beta y_x(0, t - h), & t > 0, \\ y_x(0, t) = z_0(t), & t \in (-h, 0), \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $h > 0$  représente le retard,  $L > 0$  la longueur du domaine spatial,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes réelles. La donnée initiale  $y_0$  est supposée appartenir à  $L^2(0, L)$  et la donnée de Neumann retardée  $z_0$  appartient à  $L^2(-h, 0)$ . Nous avons défini un espace de Hilbert adapté pour les conditions initiales et frontières,  $\mathcal{H} := L^2(0, L) \times L^2(-h, 0)$ , muni de la norme suivante, pour tout  $(y, z) \in \mathcal{H}$  on a

$$\|(y, z)\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^L y^2(x) dx + |\beta|h \int_{-h}^0 z^2(s) ds.$$

On définit alors l'énergie du système par  $(y(\cdot, t), y_x(0, t - h \cdot))$  sur  $\mathcal{H}$  :

$$E(t) = \int_0^L y^2(x, t) dx + |\beta|h \int_0^1 y_x^2(0, t - h\rho) d\rho. \quad (3.2)$$

Ce type d'énergie est classique quand on considère des termes frontières retardés, voir par exemple [63] et [64] pour les équations de la chaleur et des ondes. De plus nous allons supposer que les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  satisfont la limitation suivante,

$$|\alpha| + |\beta| < 1. \quad (3.3)$$

On retrouve la condition nécessaire pour la stabilisation dans le cas sans retard, ( $\beta = 0$ ,  $|\alpha| < 1$ ) voir [86].

Le point important de ce travail est de montrer qu'un feedback retardé ne déstabilise pas le système contrairement à ce qui peut se voir dans de nombreux autres systèmes (voir [29], [30], [54], [73], [36]).

Nous avons souhaité dans cette étude faire deux types de preuve. La première basée sur l'obtention d'une fonction de Lyapunov appropriée à ce système retardé permet d'obtenir de manière constructive le résultat de stabilité asymptotique avec une estimation sur le taux de décroissance. Néanmoins comme nous l'avons déjà vu pour l'obtention de l'inégalité d'observabilité pour le contrôle de KdV, avec la méthode des multiplicateurs, cela ne peut être obtenu que pour des longueurs petites ( $L < \pi\sqrt{3}$ ), (cf section 1.3.2). Dans un deuxième temps, nous avons utilisé une preuve via l'obtention d'une inégalité d'observabilité, celle ci se ramenant à un problème de continuation unique. La preuve étant faite par l'absurde on obtient un résultat optimal du point de vue des longueurs possibles mais nous n'avons plus d'estimation sur le taux de décroissance exponentielle. Enfin dans un souci de clarté nous avons réalisé quelques simulations numériques.

## 3.2 Fonction de Lyapunov

Dans un premier temps, nous montrons que l'énergie est décroissante tant que  $y_x(0, t)$  ne s'annule pas,

**Proposition 3.2.1** *Supposons que (3.3) est satisfaite. Alors, pour toute solution suffisamment régulière de (3.1), l'énergie  $E$  définie par (3.2) est décroissante et vérifie,*

$$E'(t) = (\alpha^2 - 1 + |\beta|) y_x^2(0, t) + (\beta^2 - |\beta|) y_x^2(0, t - h) + 2\alpha\beta y_x(0, t) y_x(0, t - h) \leq 0.$$

Ce résultat n'étant pas suffisant pour montrer la décroissance exponentielle de l'énergie, nous avons introduit une fonctionnelle de Lyapunov, définie par

$$V(t) = E(t) + \mu_1 V_1(t) + \mu_2 V_2(t),$$

où  $\mu_1$  et  $\mu_2 \in (0, 1)$  sont des constantes positives et  $E$  est l'énergie définie précédemment (3.2). Pour définir  $V_1$ , on choisit un multiplicateur usuel de KdV, "x",

$$V_1(t) = \int_0^L xy^2(x, t)dx,$$

et  $V_2$  tient compte du terme de retard et est défini par

$$V_2(t) = h \int_0^1 (1 - \rho)y_x^2(0, t - h\rho)d\rho.$$

Il est clair que  $E$  et  $V$  sont équivalentes, dans le sens où

$$E(t) \leq V(t) \leq \left(1 + \max \left\{ L\mu_1, \frac{\mu_2}{|\beta|} \right\}\right) E(t).$$

A l'aide d'intégrations par parties, on montre que  $V$  est un bon choix de fonctionnelle, i.e.

$$\frac{d}{dt} V(t) + 2\gamma V(t) \leq 0, \quad \forall t > 0.$$

On en déduit alors le premier résultat de stabilité exponentielle suivant,

**Théorème 3.2.2** *Supposons que  $\alpha$  et  $\beta \neq 0$  vérifient (3.3) et supposons que la longueur  $L$  vérifie*

$$L < \pi\sqrt{3}.$$

*Alors, il existe  $r > 0$ ,  $\mu_1 > 0$  et  $\mu_2 \in (0, 1)$  suffisamment petits, tels que pour tout  $(y_0, z_0) \in \mathcal{H}$  vérifiant*

$$\|(y_0, z_0)\|_{\mathcal{H}} \leq r,$$

*l'énergie du système (3.1), notée  $E$  et définie par (3.2), décroît exponentiellement. Plus précisément, il existe deux constantes positives  $\gamma$  et  $\kappa$  telles que*

$$E(t) \leq \kappa E(0)e^{-2\gamma t}, \quad t > 0,$$

où

$$\gamma \leq \min \left\{ \frac{(9\pi^2 - 3L^2 - 2L^{3/2}r\pi^2)\mu_1}{6L^2(1 + L\mu_1)}, \frac{\mu_2}{2(\mu_2 + |\beta|)h} \right\}.$$

Ce théorème permet d'obtenir un premier résultat de stabilité avec une estimation sur le taux de décroissance. Néanmoins, il n'est valable que pour des longueurs de domaine telles que  $L < \pi\sqrt{3}$ . Dans un deuxième temps nous avons donc cherché une inégalité d'observabilité pour obtenir la décroissance exponentielle de l'énergie dans les cas où  $L \notin \mathcal{N}$ .

### 3.3 Inégalité d'observabilité

La preuve de l'inégalité d'observabilité sur le système linéaire retardé se base sur une démonstration par l'absurde comme dans [74] mais en tenant compte des termes de retard. Pour cela, nous récrivons le système linéarisé sous forme d'un système du premier ordre et nous utilisons la théorie des opérateurs. Nous obtenons alors le résultat suivant,

**Théorème 3.3.1** *Supposons que (3.3) soit vérifiée. Soit  $L \in (0, +\infty) \setminus \mathcal{N}$  et  $T > h$ . Alors il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $(y_0, z_0(-h \cdot)) \in L^2(0, L) \times L^2(0, 1)$ , nous avons l'inégalité d'observabilité*

$$\int_0^L y_0^2(x) dx + |\beta|h \int_0^1 z_0^2(-h\rho) d\rho \leq C \int_0^T (y_x^2(0, t) + z^2(1, t)) dt$$

où  $(y, z)$  est la solution du système linéarisé correspondant.

Avec cette inégalité d'observabilité nous obtenons la stabilité exponentielle du système linéarisé. A l'aide des estimations obtenues nous en déduisons la stabilité du système non linéaire pour des données initiales suffisamment petites à partir d'estimés fines sur le terme non linéaire. Nous nous sommes basées sur la preuve de stabilisation présentée dans [18]. Le résultat est alors le suivant.

**Théorème 3.3.2** *Supposons que la longueur  $L > 0$  vérifie  $L \notin \mathcal{N}$  et que  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient (3.3). Alors il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $(y_0, z_0) \in \mathcal{H}$  tels que*

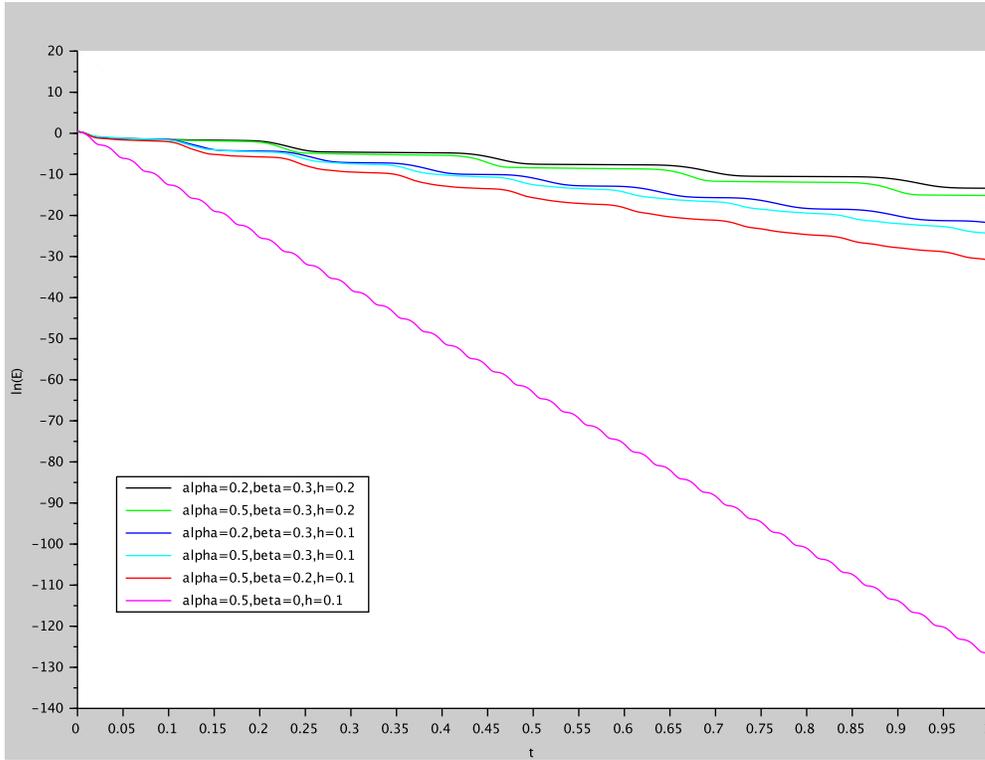
$$\|(y_0, z_0)\|_{\mathcal{H}} \leq r,$$

*l'énergie du système (3.1), notée  $E$  et définie par (3.2), décroît exponentiellement. Plus précisément, il existe deux constantes  $\nu$  et  $\kappa$  telles que*

$$E(t) \leq \kappa E(0) e^{-\nu t}, \quad t > 0.$$

### 3.4 Résultats numériques

Dans un souci de clarté, nous avons illustré nos résultats par des simulations numériques. Pour cela, nous avons implémenté le schéma numérique proposé par T. Colin et M. Gisclon dans [25] que nous avons adapté à notre système retardé. En choisissant comme valeurs de paramètres  $T = 1$ ,  $L = 1$ ,  $\delta t = 0.001$ ,  $\delta x = 0.01$ ,  $\delta \rho = 0.001$  et comme conditions initiales,  $y_0(x) = 1 - \cos(2\pi x)$  et  $z_0(\rho) = 0.1 \sin(-2\pi \rho h)$  nous obtenons la figure 3.4, qui représente  $t \mapsto \ln(E(t))$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ , du retard  $h$  et du coefficient de retard  $\beta$ . Nous pouvons remarquer que sans retard, l'énergie décroît plus rapidement qu'avec retard et que si le coefficient de retard  $\beta$ , ou le temps de retard,  $h$  augmentent alors l'énergie décroît moins rapidement. Par ailleurs on peut remarquer que si  $\alpha < \beta$  le système est toujours stable.



### 3.5 Problèmes ouverts

1. Pour ce problème nous avons considéré un retard constant, nous pourrions nous poser le même problème mais avec un retard dépendant du temps comme dans [64] en nous inspirant de leur preuve.
2. Une autre question serait celle de la stabilisation dans le cas des longueurs critiques. Le retard ne change pas les longueurs critiques, nous pourrions donc par exemple stabiliser le problème en rajoutant un terme de damping interne comme dans [67] mais avec un retard. Ce problème est en cours d'étude par J. Valein.
3. Enfin une question que nous souhaitons approfondir avec K. Ammari est d'appliquer le retard sur le terme non linéaire, l'équation serait alors

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + y(t - \tau, x)y_x = 0, & \forall x \in (0, L), t > 0, \\ y(t, 0) = y(t, L) = y_x(t, L) = 0, & \forall t > 0, \\ y(0, x) = y_0(x), & \forall x \in (0, L), \\ y(t - \tau, x) = f_0(t - \tau, x), & \forall (t, x) \in (0, \tau) \times (0, L), \end{cases}$$

où  $\tau > 0$ .

La question que nous souhaitons étudier est de savoir si ce système est stable suivant les valeurs de  $\tau$  et également d'avoir une estimation du taux de décroissance suivant  $\tau$  et ainsi de voir son explosion quand  $\tau$  tend vers 0 pour des longueurs critiques.



# Chapitre 4

## Cas de l'équation de KdV sur un réseau étoilé

### 4.1 Présentation du problème

Cette section résume l'article [AC18a].

Avec Kaïs Ammari, nous avons dans un premier temps modélisé l'écoulement d'un fluide dans un réseau de type étoile par l'équation de KdV posée sur chaque branche. Nous avons choisi des conditions au noeud central qui permettaient d'obtenir le caractère bien posé de notre modèle. Nous supposons dans la suite que le réseau,  $\mathcal{R}$ , est une étoile à  $N$  branches de longueurs  $\ell_j$  et 0 représente le noeud central. De plus, on impose un amortissement au noeud central de coefficient  $\alpha$ .

$$(KdV) \begin{cases} (\partial_t u_j + \partial_x u_j + u_j \partial_x u_j + \partial_x^3 u_j)(t, x) = 0, & \forall x \in (0, \ell_j), t > 0, \\ & j = 1, \dots, N, \\ u_j(t, 0) = u_k(t, 0), & \forall j, k = 1, \dots, N, t > 0, \\ \sum_{j=1}^N \partial_x^2 u_j(t, 0) = -\alpha u_1(t, 0) - \frac{N}{3} u_1^2(t, 0), & \forall t > 0, \\ u_j(t, \ell_j) = \partial_x u_j(t, \ell_j) = 0, & \forall t > 0, j = 1, \dots, N, \\ u_j(0, x) = u_j^0(x), & \forall x \in (0, \ell_j), j = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Dans un premier temps nous avons étudié la stabilité du linéarisé autour de la solution nulle,

$$(LKdV) \begin{cases} (\partial_t u_j + \partial_x u_j + \partial_x^3 u_j)(t, x) = 0, & \forall x \in (0, \ell_j), t \in (0, \infty), \\ & j = 1, \dots, N, \\ u_j(t, 0) = u_k(t, 0), & \forall j, k = 1, \dots, N, t > 0, \\ \sum_{j=1}^N \partial_x^2 u_j(t, 0) = -\alpha u_1(t, 0), & \forall t > 0, \\ u_j(t, \ell_j) = \partial_x u_j(t, \ell_j) = 0, & \forall t > 0, j = 1, \dots, N, \\ u_j(0, x) = u_j^0(x), & \forall x \in (0, \ell_j), j = 1, \dots, N, \end{cases}$$

Si on définit l'énergie naturelle  $E(t)$  de la solution  $\underline{u} = (u_1, \dots, u_N)$  de

l'équation de KdV notée (KdV) ou de l'équation de KdV linéarisée (LKdV) par

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int_0^{\ell_j} |u_j(t, x)|^2 dx.$$

On remarque que pour toute solution suffisamment régulière, en choisissant le paramètre  $\alpha$  tel que  $\alpha > \frac{N}{2}$ , on a la loi de dissipation d'énergie suivante,

$$E'(t) = - \left( \alpha - \frac{N}{2} \right) |u_1(t, 0)|^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N |\partial_x u_j(t, 0)|^2 \leq 0,$$

l'énergie est donc une fonction décroissante en la variable temps  $t$ .

La question que nous nous sommes posée était la suivante :

Sous quelles conditions sur les longueurs du réseau, peut-on montrer la stabilité exponentielle du système? Et dans le cas où la stabilité est mise en défaut, peut-on en ajoutant un terme de damping interne sur certaines branches obtenir la stabilité exponentielle du système?

Les résultats que nous avons obtenus dépendent des longueurs du réseau comme nous pouvions le supposer. Ces résultats sont à rapprocher des résultats obtenus par G. Perla Menzala, C.F. Vasconcelos et E. Zuazua dans [68], puis améliorés par A. Pazoto dans [66] dans le cas de la stabilisation de l'équation de KdV sur un segment.

## 4.2 Stabilité dans le cas linéaire

En utilisant le même type d'inégalités d'observabilité que dans le chapitre 1.4, on peut montrer que le système

$$(LKdV) \left\{ \begin{array}{ll} (\partial_t u_j + \partial_x u_j + \partial_x^3 u_j)(t, x) = 0, & \forall x \in (0, \ell_j), t \in (0, \infty), \\ & j = 1, \dots, N, \\ u_j(t, 0) = u_k(t, 0), & \forall j, k = 1, \dots, N, t > 0, \\ \sum_{j=1}^N \partial_x^2 u_j(t, 0) = -\alpha u_1(t, 0), & \forall t > 0, \\ u_j(t, \ell_j) = \partial_x u_j(t, \ell_j) = 0, & \forall t > 0, j = 1, \dots, N, \\ u_j(0, x) = u_j^0(x), & \forall x \in (0, \ell_j), j = 1, \dots, N, \end{array} \right.$$

est exponentiellement stable, lorsque qu'il y a au plus une branche critique dans le réseau et lorsque le coefficient  $\alpha$  est suffisamment grand.

### Théorème 4.2.1 Stabilité dans le cas non critique :

Soient  $(\ell_i)_{i=1..N} \in (0, +\infty)^N$  telles que  $\#\{\ell_i \in \mathcal{N}\} \leq 1$ ,  $\alpha > N/2$  alors il existe  $C > 0$  et  $\mu > 0$  tel que pour tout  $\underline{u}^0 \in \mathbb{L}^2(\mathcal{T})$  la solution de (LKdV) vérifie,

$$\|\underline{u}(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{T})} \leq C \|\underline{u}^0\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{T})} e^{-\mu t}.$$



1. Pour les  $l_j$  non critiques,  $u_j$  est la solution de (LKdV) et telle que  $u_j(\cdot, 0) = \partial_x u_j(\cdot, 0) = 0$ . Alors avec le lemme de L. Rosier, Lemme 1.4.2,  $u_j = 0$ .
2. Pour les  $l_j$  critiques moins une longueur,  $\int_0^T \int_0^{l_j} a_j(x) |u_j|^2 dx dt = 0$ , donc  $a_j u_j = 0$  et  $u_j = 0$  sur  $(0, T) \times \omega_j$ . Alors  $\partial_t u_j + \partial_x u_j + \partial_x^3 u_j = 0$  et grace au Théorème de Holmgren  $u_j = 0$ .
3. Pour la dernière longueur  $l_j$  critique,  $u_j$  vérifie,

$$\begin{cases} \partial_t u_j + \partial_x u_j + \partial_x^3 u_j = 0, \\ u_j(t, 0) = 0, \partial_x u_j(t, 0) = 0, \partial_x^2 u_j(t, 0) = 0, \\ u_j(t, l_j) = \partial_x u_j(t, l_j) = 0. \end{cases}$$

Donc  $u_j = 0$ .

D'où le résultat de stabilité.

### 4.3 Stabilité dans le cas non linéaire

Le problème non linéaire dans le cas général est le suivant, où  $a_j$  a été défini dans (4.2), donc si il y a au plus une longueur critique,  $a$  est nulle.

$$(KdV_{damped}) \begin{cases} (\partial_t u_j + \partial_x u_j + \partial_x^3 u_j + a_j u_j + u_j \partial_x u_j)(t, x) = 0 & \forall x \in (0, l_j), t > 0, \\ u_j(t, 0) = u_k(t, 0), & j = 1, \dots, N, \\ \sum_{j=1}^N \partial_x^2 u_j(t, 0) = -\alpha u_1(t, 0) - \frac{N}{3} u_1^2(t, 0), & \forall j, k = 1, \dots, N, t > 0, \\ u_j(t, l_j) = \partial_x u_j(t, l_j) = 0, & \forall t > 0, j = 1, \dots, N, \\ u_j(0, x) = u_j^0(x), \forall x \in (0, l_j), & j = 1, \dots, N, \end{cases}$$

On déduit des résultats précédents sur la stabilité du problème linéarisé la stabilité pour des solutions de petite amplitude du problème non linéaire en appliquant un argument de point fixe.

#### Théorème 4.3.1 Stabilité du non linéaire :

Soient  $(l_i)_{i=1, \dots, N} \in (0, +\infty)^N$  et  $\underline{a} \in \mathbb{L}^\infty(\mathcal{T})$  comme dans le cas précédent. Alors il existe  $C, \mu, r > 0$  tels que pour tout  $\underline{u}^0 \in \mathbb{L}^2(\mathcal{T})$  avec  $\|\underline{u}^0\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{T})} \leq r$  alors la solution  $\underline{u}$  de  $(KdV_{damped})$  vérifie,

$$\|\underline{u}(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{T})} \leq C e^{-\mu t} \|\underline{u}^0\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{T})}, \forall t \geq 0.$$

Si on applique l'amortissement sur toutes les branches alors on a un résultat de stabilité semi-globale, énoncé comme suit.

#### Théorème 4.3.2 Stabilité semi-globale :

Soient  $(l_i)_{i=1, \dots, N} \in (0, +\infty)^N$ , soit  $\underline{a} \in \mathbb{L}^\infty(\mathcal{T})$  agissant sur des morceaux de toutes les branches et  $R > 0$ . Alors pour tout  $\underline{u}^0 \in \mathbb{L}^2(\mathcal{T})$  avec  $\|\underline{u}^0\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{T})} \leq R$  il existe  $C = C(R) > 0$  et  $\mu = \mu(R) > 0$  tels que la solution  $\underline{u}$  de  $(KdV_{damped})$  vérifie,

$$\|\underline{u}(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{T})} \leq C e^{-\mu t} \|\underline{u}^0\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{T})}, \forall t \geq 0.$$

**Idée de la preuve :**

Nous avons utilisé un raisonnement par l'absurde et la propriété de continuation unique suivante,

**Théorème 4.3.3** (*Saut, Scheurer [83]*) Soit  $L > 0$  et  $y \in L^2(0, T, H^3(0, L))$  solution de

$$y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0,$$

tel que  $y(t, x) = 0, \forall t \in (t_1, t_2)$  et  $x \in \omega$  où  $\omega$  est un ouvert non vide de  $(0, L)$ .  
Alors  $y(t, x) = 0, \forall t \in (t_1, t_2)$  et  $x \in (0, L)$ .



# Chapitre 5

## Autres exemples de stabilisation

### 5.1 Stabilisation rapide de KdV

Les détails de cette partie se trouvent dans [CC09b].

En collaboration avec Eduardo Cerpa, nous avons étudié le problème de la stabilisation rapide de l'équation de KdV sur un segment. Le problème est le suivant, peut-on trouver une loi de feedback  $u(t) = \Pi(y(t))$  telle que le système en boucle fermée suivant ait un taux de décroissance exponentielle aussi grand qu'on veut ?

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0, \\ y(t, 0) = y(t, L) = 0, \\ y_x(t, L) = u(t) \end{cases}$$

Ce cas est différent de celui proposé en chapitre 3 et 4 où la loi de feedback était prescrite.

Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé une méthode due à J. Urquiza, [85]. Cette méthode constructive est basée sur des hypothèses de régularité et contrôlabilité de l'opérateur associé.

Dans [19], E. Cerpa et J.M. Coron utilisent la méthode du backstepping pour montrer la stabilisation rapide de KdV avec une loi de feedback agissant sur la donnée de Dirichlet à gauche. Ils obtiennent alors la stabilisation rapide de l'équation non linéaire.

### 5.2 Cas de l'équation de BBM sur un réseau

Les détails de cette partie se trouvent dans [AC18b].

Avec Kaïs Ammari, nous nous sommes posé la même question de stabilité sur un réseau mais avec l'équation de BBM  $u_t - u_{xxt} + u_x + uu_x = 0$ . Cette équation est une alternative à l'équation de KdV. Elle est plus adaptée à la modélisation sur un réseau car elle comporte un nombre pair de conditions frontières ce qui rend les conditions aux noeuds internes et externes plus simples à exprimer. Néanmoins l'existence d'un point limite dans le spectre du problème adjoint empêche la contrôlabilité exacte, cf [61, 80]. L. Rosier



**Troisième partie**  
**Problèmes inverses**



# Chapitre 6

## Analyse semi-classique de signaux (SCSA).

Cette partie regroupe les articles suivants, [CS05, LCS<sup>+</sup>06, CS07, LCPS07, LCS07, LKCS13]

Dans cette partie regroupant plusieurs articles réalisés en collaboration avec M. Sorine et des membres de son équipe INRIA, nous avons voulu modéliser l'écoulement de la pression sanguine à l'aide d'une équation de Korteweg-de Vries en proposant un modèle réduit du compartiment vasculaire, prenant en compte la phase systolique rapide (environ 100 ms) où le phénomène d'ondes est prédominant. Le but à long terme étant de fournir une méthode d'analyse des signaux pour l'estimation à partir de mesures non invasives et l'interprétation des caractéristiques de ces ondes (forme, vitesse). Nous avons en particulier remarqué que les solitons, solutions particulières de l'équation de KdV, représentent de manière remarquable l'onde de pression.

Nos travaux se sont orientés dans ce sens et la densité des résultats obtenus et à obtenir nous a conduit à codiriger la thèse de Meriem Laleg sur ce sujet. Ses travaux ont porté sur des problèmes d'identification du modèle et de représentation simplifiée de la pression. Nous avons utilisé une méthode originale de décomposition de signaux, en particulier du signal de pression, sur une base de type solitons, à l'aide d'une méthode de scattering et inverse scattering. Cette méthode est basée sur la résolution d'un problème spectral de Schrödinger où le potentiel dépend linéairement de la mesure à représenter. Le potentiel s'exprime alors en fonction des valeurs propres négatives du spectre discret associé à l'opérateur de Schrödinger et correspond à un N-soliton.

L'intérêt principal de la méthode appelée semi-classical signal analysis (SCSA) est de représenter un signal avec un nombre fini de paramètres ayant un sens physiologique. Elle peut s'apparenter à une transformation de Fourier non linéaire conservant à la fois la norme  $L^2$  du signal mais également sa norme  $L^1$ . L'étude clinique réalisée par C. Médigue et Y. Papelier de l'équipe Sisyphe a permis de mettre en valeur la pertinence des résultats obtenus à partir de la SBSA et de donner des informations jusqu'alors inaccessibles en expérimentation non invasive sur un sujet, sur la contractilité ventriculaire et le volume de Stroke, [47]. D'autre part la SBSA n'est pas seulement ap-

plicable au signal de pression, d'autres signaux physiologiques, en particulier l'électrocardiogramme, semblent tout à fait pouvoir être étudiés à partir de la SBSA.

D'autres résultats sur la partie théorique de la SBSA ont été obtenus par Bernard Helffer et Taous Meriem Laleg-Kirati dans [37].

Cette partie étant très différente des autres résultats présentés dans ce mémoire, je ne détaillerai pas plus les méthodes et résultats obtenus.

# Chapitre 7

## Problèmes inverses pour quelques EDP

### 7.1 Equation des ondes sur réseau.

Voir les détails dans [BCV11].

En collaboration avec Lucie Baudouin et Julie Valein nous avons analysé la stabilité du problème inverse suivant : déterminer un potentiel de l'équation des ondes posée sur un réseau étoilé ou de type arbre.

#### 7.1.1 Présentation du problème

Pour plus de lisibilité nous avons décrit un réseau de type étoilé  $\mathcal{R}$  à  $n + 1$  branches  $e_j$  de longueurs respectives  $l_j > 0$  connectées à un unique noeud central que nous supposons être l'origine de chaque branche, cf figure 7.1. On adopte les notations suivantes : pour toute fonction  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on pose

$$f_j = f|_{e_j} \text{ la restriction de } f \text{ à la branche } e_j,$$
$$[f]_0 = \sum_{j=0}^n f_j(0) \text{ le crochet de transmission au noeud } 0.$$

Nous avons considéré sur ce réseau 1-D une équation des ondes avec un potentiel différent sur chaque branche. Le système peut s'écrire comme suit.

$$\begin{cases} u_{j,tt} - u_{j,xx} + p_j(x)u_j = g_j, & \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, (t, x) \in (0, T) \times (0, l_j), \\ u_j(t, l_j) = h_j(t), & \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, t \in (0, T), \\ u(0, x) = u^0(x), u_t(0, x) = u^1(x), & x \in \mathcal{R}, \end{cases} \quad (7.1)$$

sous les hypothèses de continuité et de loi de Kirschhoff au noeud central 0, données par

$$u_j(t, 0) = u_i(t, 0) =: u(t, 0), \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\}, 0 < t < T, \quad (7.2)$$

$$[u_x(t)]_0 := \sum_{j=0}^n u_{j,x}(t, 0) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (7.3)$$

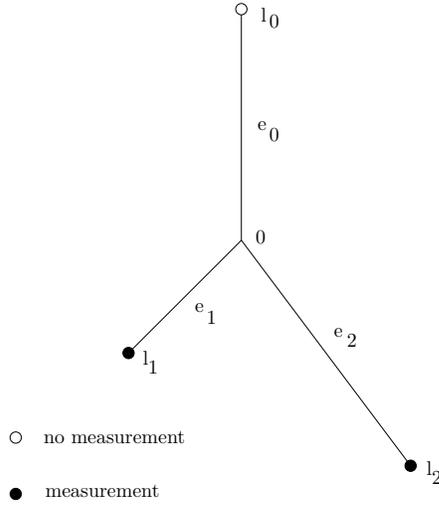


FIGURE 7.1 – Etoile à 3 branches.

Dans cette partie, on définit les espaces fonctionnels suivants :

$$L^2(\mathcal{R}) = \{f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_j \in L^2(0, l_j), \forall j \in \{0, \dots, n\}\},$$

$$H_0^1(\mathcal{R}) = \{f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_j \in H^1(0, l_j), f_j(l_j) = 0, f_j(0) = f_i(0), \forall i, j \in \{0, \dots, n\}\}.$$

Pour plus de lisibilité on adopte la notation intégrale suivante, pour  $f \in L^1(\mathcal{R}) = \{f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_j \in L^1(0, l_j), \forall j \in \{0, \dots, n\}\}$  on note,

$$\int_{\mathcal{R}} f dx = \sum_{j=0}^n \int_0^{l_j} f_j(x) dx.$$

Les normes dans les espaces de Hilbert  $L^2(\mathcal{R})$  et  $H_0^1(\mathcal{R})$  sont alors définis par

$$\|f\|_{L^2(\mathcal{R})}^2 = \int_{\mathcal{R}} |f|^2 dx \text{ et } \|f\|_{H_0^1(\mathcal{R})}^2 = \int_{\mathcal{R}} |f_x|^2 dx.$$

Dans un premier temps nous avons montré que le problème de Cauchy est bien posé, i.e. si  $u^0 \in L^2(\mathcal{R})$ ,  $u^1 \in H^{-1}(\mathcal{R})$ ,  $p \in L^\infty(\mathcal{R})$ ,  $h \in L^2((0, T) \times \mathcal{R})$  et  $g \in L^1(0, T; L^2(\mathcal{R}))$  sont connus, et en supposant que les conditions de compatibilité sont vérifiées ( $h_j(0) = u_j^0(l_j)$ ) alors le problème de Cauchy (7.1)-(7.3) est bien posé et on peut montrer par une méthode de transposition que

$$u \in C([0, T], L^2(\mathcal{R})) \cap C^1([0, T], H^{-1}(\mathcal{R})).$$

Nous avons ensuite étudié le problème inverse de détermination du potentiel  $p$  sur chacune des  $n + 1$  branches du réseau à partir de seulement  $n$  mesures faites au niveau des "feuilles", c'est-à-dire des  $(u_{i,x}(\cdot, l_i))_{i=1..n}$  sur  $(0, T)$ . Le théorème principal de cet article est le suivant,

**Théorème 7.1.1** *Soit  $m > 0$  et  $r > 0$ . Supposons que  $p \in L_{\leq m}^{\infty}(\mathcal{R})$  et que la solution  $u[p]$  de (7.1)-(7.3) vérifie*

$$u[p] \in H^1(0, T; L^{\infty}(\mathcal{R})).$$

*Supposons également que la donnée initiale  $u^0$  soit telle que*

$$|u^0(x)| \geq r > 0, \text{ pp dans } \mathcal{R}.$$

*Alors pour tout  $q \in L_{\leq m}^{\infty}(\mathcal{R})$ , et pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$ ,  $u_{j,x}[p](l_j) - u_{j,x}[q](l_j) \in H^1(0, T)$  et il existe une constante  $C = C(T, m) > 0$  telle que  $\forall q \in L_{\leq m}^{\infty}(\mathcal{R})$  :*

$$\sum_{j=1}^n \|u_{j,x}[p](l_j) - u_{j,x}[q](l_j)\|_{H^1(0, T)} \leq C \|u[p]\|_{W^{1,1}(0, T; L^{\infty}(\mathcal{R}))} \|q - p\|_{L^2(\mathcal{R})}.$$

*De plus, il existe  $T_0 > 0$  tel que pour tout  $T \geq T_0$ , alors il existe une constante  $C = C(T, r, m, l_0, \dots, l_n) > 0$  telle que  $\forall q \in L_{\leq m}^{\infty}(\mathcal{R})$  :*

$$\|q - p\|_{L^2(\mathcal{R})} \leq C \sum_{j=1}^n \|u_{j,x}[p](l_j) - u_{j,x}[q](l_j)\|_{H^1(0, T)}.$$

## 7.1.2 Obtention de l'inégalité de Carleman

Le point crucial pour l'obtention de l'inégalité de Carleman est le choix adéquat du poids pour un réseau. Nous nous sommes inspirées des poids définis par A. Benabdallah, Y. Dermenjian et J. Le Rousseau dans [6]. Le point important est que leur poids ne vérifie pas les conditions de continuité ni la loi de Kirchoff au point de transmission. Nous avons étendu leur poids au cas d'un réseau de la manière suivante.

Soit  $\lambda > 0$ . Nous définissons la fonction poids  $\varphi = \varphi(t, x)$  pour tout  $(t, x) \in (-T, T) \times \mathcal{R}$  par

$$\varphi(t, x) = e^{\lambda\phi(t, x)},$$

où  $\phi$  satisfait le lemme suivant.

**Lemme 7.1.2** *Nous définissons la fonction poids  $\phi$  sur chaque branche  $e_j$  du réseau comme suit :*

*Pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x \in (0, l_j)$  et  $t \in \mathbb{R}$ ,*

$$\phi|_{e_j}(t, x) := \phi_j(t, x) = (x - x_j)^2 - \beta t^2 + M_j.$$

*Il existe  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^-)^n$ ,  $\beta \in (0, 1)$  et  $T > 0$  tels que*

*$\beta T \leq \frac{\min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|}{2}$  et il existe  $M_0, M_1, \dots, M_n > 0$ , tels que pour tout  $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $t \in (-T, T)$ ,  $x \in (0, l_j)$ ,*

$$\phi_i(t, 0) = \phi_j(t, 0),$$

$$\phi_j(t, x) \geq 1$$

et tel que la  $(n+1) \times (n+1)$  matrice symétrique suivante soit définie positive alors,

$$\exists \alpha > 0, \forall t \in [-T, T], \forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1}, (A_\phi(t)\xi, \xi) \geq \alpha|\xi|^2,$$

avec  $A_\phi(t) :=$

$$\begin{pmatrix} \phi_{0,x}(0) + \phi_{1,x}(0) & \phi_{0,x}(0) & \cdots & \phi_{0,x}(0) & -\phi_{0,x}(0)[\phi_x]_0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & -\phi_{0,x}(0)[\phi_x]_0 \\ & & \ddots & \phi_{0,x}(0) & \vdots \\ & & & \phi_{0,x}(0) + \phi_{n,x}(0) & -\phi_{0,x}(0)[\phi_x]_0 \\ & & & & A_{\phi,n+1,n+1}(t) \end{pmatrix}.$$

où  $A_{\phi,n+1,n+1}(t) = \phi_{0,x}(0)[\phi_x]_0^2 + [\phi_x^3]_0 - \phi_t^2(0, t)[\phi_x]_0$ .

De plus on a directement que pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et pour tout  $x \in (0, l_j)$ ,

$$\phi_j(0, x) > M_j$$

et si on note  $\rho := \max_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket, x \in [0, l_i]} |x - x_i|$ , alors si  $T > \frac{2\rho^2}{\min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|}$ , on peut choisir

$\beta > \frac{\rho^2}{T^2}$  tel que

$$\phi_j(\pm T, x) < M_j,$$

et il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $t \in [-T, -T + \eta] \cup [T - \eta, T]$ ,

$$\phi_j(t, x) \leq M_j.$$

On obtient alors en gérant les termes au noeud central grâce à la matrice symétrique définie positive définie ci-dessus, l'inégalité de Carleman pour l'équation des ondes sur un réseau, qui suit,

**Théorème 7.1.3** Soit  $p \in L^\infty(\mathcal{R})$  tel que  $\|p\|_{L^\infty(\mathcal{R})} \leq m$ . Supposons que  $L$  soit l'opérateur différentiel défini par  $L = \partial_{tt} - \partial_{xx} + p$  sur le réseau étoilé  $\mathcal{R}$  comme dans l'équation (7.1) et  $\varphi = e^{\lambda\phi}$  avec  $\phi$  vérifiant le lemme 7.1.2. Il existe  $s_0 > 0$ ,  $\lambda_0 > 0$  et une constante  $M = M(s_0, \lambda_0, \mathcal{R}, T, m, \beta, x_0, \dots, x_n) > 0$  tels que :

$$\begin{aligned} & s\lambda \int_{-T}^T \int_{\mathcal{R}} \varphi (v_t^2 + v_x^2) e^{2s\varphi} dxdt + s^3 \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\mathcal{R}} \varphi^3 v^2 e^{2s\varphi} dxdt \\ & \leq M \int_{-T}^T \int_{\mathcal{R}} |Lv|^2 e^{2s\varphi} dxdt + Ms\lambda \sum_{j=1}^n \int_{-T}^T v_{j,x}^2(l_j) e^{2s\varphi(l_j)} dt, \end{aligned}$$

pour tout  $s > s_0$ ,  $\lambda > \lambda_0$  et  $v$  satisfaisant les conditions au noeud central (7.2) et (7.3) et

$$\begin{cases} Lv \in L^2(\mathcal{R} \times (-T, T)), \\ v \in H^1(-T, T; H_0^1(\mathcal{R})), \\ v(\pm T) = \partial_t v(\pm T) = 0 \text{ dans } \mathcal{R}. \end{cases}$$

### 7.1.3 Obtention du résultat de stabilité

Le résultat de stabilité s'obtient de manière relativement classique en appliquant la méthode de Bukhgeim-Klibanov, cf [11] à partir de l'inégalité de Carleman obtenue dans la section précédente. On obtient alors le résultat de stabilité 7.1.1.

### 7.1.4 Problèmes ouverts

Nous avons obtenus un résultat de reconstruction du potentiel en observant uniquement  $n$  mesures sur les  $n+1$  noeuds extérieurs. En parallèle à notre travail deux résultats de problèmes inverses sur un réseau ont été obtenus par Liviu Ignat, Ademir Pazoto et Lionel Rosier dans [41], pour l'équation de la chaleur et pour l'équation de Schrödinger. Le cas de l'équation de Schrödinger est particulièrement intéressant. En effet, les auteurs obtiennent un résultat de reconstruction du potentiel mais en observant sur tous les  $n+1$  noeuds externes. La question de la reconstruction avec seulement  $n$  mesures semble un problème toujours ouvert.

Un autre problème en cours d'étude en collaboration avec Lionel Rosier et Julie Valein est le problème inverse de retrouver le coefficient de diffusion pour une équation de la chaleur sur un réseau, la continuité du coefficient de diffusion n'étant pas imposée au noeud central. Ce problème peut se rapprocher des articles suivants, [69] et [28]. Le point à résoudre ici est d'obtenir une inégalité de Carleman pour notre problème dans  $H^{-1}$ . Ces résultats sont en cours de rédaction.

## 7.2 Equation de Kuramoto-Sivashinsky.

Voir les détails dans [BCCM13]

### 7.2.1 Présentation du problème.

Dans ce papier, réalisé en collaboration avec Lucie Baudouin, Eduardo Cerpa et Alberto Mercado, nous avons considéré une équation 1D non linéaire de type parabolique du quatrième ordre, l'équation de Kuramoto-Sivashinsky (K-S). Cette équation peut servir de modèle pour la phase de turbulence dans un système de réaction-diffusion mais également pour la modélisation d'un front de flamme où l'influence de la diffusion et de la conduction thermique du gaz sont décrites.

L'équation de K-S comportant des coefficients non constants décrivant la diffusion,  $\sigma = \sigma(x)$ , et l'anti-diffusion  $\gamma = \gamma(x)$ , est donnée par

$$\begin{cases} y_t + (\sigma(x)y_{xx})_{xx} + \gamma(x)y_{xx} + yy_x = g, & \forall (t, x) \in Q, \\ y(t, 0) = h_1(t), \quad y(t, 1) = h_2(t), & \forall t \in (0, T), \\ y_x(t, 0) = h_3(t), \quad y_x(t, 1) = h_4(t), & \forall t \in (0, T), \\ y(0, x) = y_0(x), & \forall x \in (0, 1), \end{cases} \quad (7.4)$$

où  $Q := (0, T) \times (0, 1)$ ,  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , et les fonctions  $y_0, g, h_j$  sont respectivement les conditions initiales, le terme source et les données au bord. Tous ces termes sont supposés connus et compatibles.

Pour cette équation non linéaire, le terme d'ordre quatre modélise la diffusion, et le terme du second ordre modélise les instabilités naissantes. On considère le problème inverse de retrouver le coefficient d'anti-diffusion  $\gamma$  à partir des mesures frontières de la solution. Ceci correspond par exemple à l'obtention d'information sur l'instabilité d'un milieu de réaction-diffusion en mesurant une seule solution, qui peut représenter la flamme se propageant dans le domaine. Concernant les mesures frontières que nous allons considérer il faut remarquer que dans un problème parabolique du quatrième ordre comme K-S, les mesures au bord  $u_{xx}$  et  $u_{xxx}$  seront désignées comme les mesures de Neumann, qui en réalité représentent les flux de chaleur dans ce type de modèle.

A notre connaissance il n'y avait pas d'autres résultat dans la littérature concernant la détermination de coefficients pour ce type d'équation non linéaire. Cependant, une inégalité de type Carleman a été obtenue afin d'obtenir la contrôlabilité à zéro pour l'équation de K-S [20] pour le cas du coefficient constant. (D'autres résultats sur le contrôle de l'équation de K-S ont été obtenus dans [40, 3, 24, 53, 17]).

Comme le problème linéarisé est parabolique, on sait que les mesures frontières ne seront pas suffisantes pour prouver la stabilité et on doit considérer une mesure additionnelle sur toute la solution à un temps  $T_0$  (voir par exemple [7, 42] ).

Notre premier résultat concerne le caractère bien posé de l'équation non linéaire. Nous abordons ensuite le problème inverse suivant,

Est-il possible de retrouver le coefficient d'anti-diffusion  $\gamma = \gamma(x)$  à partir des mesures de  $y_{xx}(t, 0)$  et de  $y_{xxx}(t, 0)$  sur  $(0, T)$  et de la mesure de  $y(T_0, x)$  sur  $(0, 1)$ , où  $y$  est la solution de l'équation (7.4) et  $T_0 \in (0, T)$  ?

Nous donnons une réponse locale à ce problème inverse. Plus explicitement, soit  $\tilde{\gamma}$  donné et fixé. On note  $\tilde{y}$  la solution à l'équation (7.4) où  $\gamma$  est remplacé par  $\tilde{\gamma}$ . Ce papier porte essentiellement sur la question suivante concernant l'inconnue  $\gamma$  et  $y$ .

**Stabilité** : Est-il possible d'estimer  $\|\tilde{\gamma} - \gamma\|_{L^2(0,1)}$  par des normes appropriées  $\|\tilde{y}(T_0, x) - y(T_0, x)\|$  en espace et  $\|\tilde{y}_{xx}(t, 0) - y_{xx}(t, 0)\|$ ,  $\|\tilde{y}_{xxx}(t, 0) - y_{xxx}(t, 0)\|$  en temps ?

Une réponse positive implique bien entendu un résultat d'unicité.

**Unicité** : Est-ce que les égalités de mesures  $\tilde{y}_{xx}(t, 0) = y_{xx}(t, 0)$  et  $\tilde{y}_{xxx}(t, 0) = y_{xxx}(t, 0)$  pour  $t \in (0, T)$  et  $\tilde{y}(T_0, x) = y(T_0, x)$  pour  $x \in (0, 1)$  impliquent que  $\tilde{\gamma} = \gamma$  sur  $(0, 1)$  ?

Pour résoudre ces problèmes nous avons appliqué la méthode de Bukhgeïm-Klibanov, [11]. Tout d'abord nous montrons une inégalité de Carleman glo-

bale pour l'équation de K-S linéarisée autour de zéro avec des coefficients non constants.

Pour des raisons de clarté du résultat, on introduit pour  $m > 0$ , l'ensemble

$$L_{\leq m}^{\infty}(0, 1) := \{ \gamma \in L^{\infty}(0, 1) \text{ s.t. } \|\gamma\|_{L^{\infty}(0, 1)} \leq m \},$$

$$H^s := H^s(0, 1)$$

ainsi que

$$\mathcal{Z} := \{ z \in C([0, T]; H^6) \cap L^2(0, T; H^8), \text{ t.q. } z_t \in C([0, T]; H^2) \cap L^2(0, T; H^4) \}.$$

On a alors le résultat suivant,

**Théorème 7.2.1** *Considérons  $\sigma \in H^4(0, 1)$ ,  $\gamma \in H^4(0, 1)$ ,  $g \in L^2(0, T; H^4) \cap H^1(0, T; L^2)$  et les données  $y_0 \in H^6(0, 1)$  et  $h_j \in H^2(0, T)$  pour  $j = 1, \dots, 4$  sous certaines conditions de compatibilité. Soit  $y \in \mathcal{Z}$  la solution de (7.4), et  $\tilde{y} \in \mathcal{Z}$  la solution correspondant à un  $\tilde{\gamma} \in H^4(0, 1)$  donné au lieu de  $\gamma$ . On suppose qu'il existe  $\eta > 0$  et  $T_0 \in (0, T)$  tels que*

$$\inf \{ |\tilde{y}_{xx}(T_0, x)|, x \in (0, 1) \} \geq \eta,$$

*Alors, étant donné  $M > 0$ , il existe une constante positive  $C$  dépendant des paramètres  $(T, m, M, \eta)$ , telle que pour tout  $\gamma \in L_{\leq m}^{\infty}(0, 1)$ ,*

$$\begin{aligned} \|\gamma - \tilde{\gamma}\|_{L^2(0, 1)} &\leq C \|y_{xx}(\cdot, 0) - \tilde{y}_{xx}(\cdot, 0)\|_{H^1(0, T)} + C \|y_{xxx}(\cdot, 0) - \tilde{y}_{xxx}(\cdot, 0)\|_{H^1(0, T)} \\ &\quad + C \|y(T_0, \cdot) - \tilde{y}(T_0, \cdot)\|_{H^4(0, 1)} + C \|y(T_0, \cdot) - \tilde{y}(T_0, \cdot)\|_{H^1(0, 1)}^2 \end{aligned} \quad (7.5)$$

*pour tout  $y$  vérifiant*

$$\|y\|_{\mathcal{Z}} \leq M.$$

Il est à noter que le terme carré de l'inégalité (7.5) vient du terme non linéaire de l'équation de K.S.

## 7.2.2 Idées de la démonstration

Dans cet article, nous utilisons à nouveau la méthode de Bukhgeim-Klibanov pour résoudre le problème de stabilité et d'unicité du problème inverse. Le point important est donc l'obtention d'une inégalité de Carleman pour l'équation de K-S à coefficients non constants.

Nous définissons l'espace

$$\mathcal{V} = \{ v \in L^2(0, T; H^4 \cap H_0^2(0, 1)) / Lv \in L^2((0, T) \times (0, 1)) \}$$

où

$$Lv = v_t + (\sigma v_{xx})_{xx} + q_2 v_{xx} + q_1 v_x + q_0 v$$

avec  $q_j \in L^\infty(\Omega)$  for  $j = 0, 1, 2$ .

Considérons  $\beta \in C^4([0, 1])$  tel que pour  $r > 0$  on ait, pour tout  $x \in (0, 1)$  :

$$\begin{aligned} 0 < r &\leq \beta(x), \\ 0 < r &\leq \beta'(x), \\ \beta''(x) &\leq -r < 0, \\ |\sigma'(x)\beta'(x)| &\leq \frac{r}{4} \min_{z \in [0,1]} \{\sigma(z)\}. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Par exemple, si  $\sigma$  est constant, on peut choisir  $\beta(x) = \sqrt{1+x}$ .

D'autre part, étant donné  $T_0 \in (0, T)$  on peut choisir  $\phi_0 \in C^1([0, T])$  tel que

$$\begin{aligned} \phi_0(0) &= \phi_0(T) = 0, \quad \text{et} \\ 0 < \phi_0(t) &\leq \phi_0(T_0) \quad \text{pour tout } t \in (0, T). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Par exemple, si  $T_0 = T/2$ , on peut choisir  $\phi_0(t) = t(T-t)$ .

Finalement, on définit la fonction

$$\phi(t, x) = \frac{\beta(x)}{\phi_0(t)}, \tag{7.8}$$

pour  $(t, x) \in (0, T) \times [0, 1]$ , qui représente la fonction poids pour l'inégalité de Carleman. A l'aide de (7.6) et (7.7) il n'est pas difficile de voir que  $\phi$  vérifie les propriétés suivantes,

$$\begin{aligned} \exists C > 0 \text{ tel que } \phi &\leq C\phi_x \text{ et} \\ \phi^n &\leq C\phi^m \quad \text{pour tout entier positif } n < m. \end{aligned}$$

**Théorème 7.2.2** *Soit  $\phi$  une fonction définie par (7.8) et  $m > 0$ . Alors il existe  $\lambda_0 > 0$  et une constante  $C = C(T, \lambda_0, r, m) > 0$  telle que si*

*$\|q_i\|_{L^\infty((0,T) \times (0,1))} \leq m$  pour  $i = 0, 1, 2$  alors on a*

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^1 e^{-2\lambda\phi} \left( \frac{|v_t|^2 + |(\sigma v_{xx})_{xx}|^2}{\lambda\phi} \right) dxdt \\ &+ \int_0^T \int_0^1 e^{-2\lambda\phi} (\lambda^7 \phi^7 |v|^2 + \lambda^5 \phi^5 |v_x|^2 + \lambda^3 \phi^3 |v_{xx}|^2 + \lambda\phi |v_{xxx}|^2) dxdt \\ &\leq C \int_0^T \int_0^1 e^{-2\lambda\phi} |Lv|^2 dxdt \\ &+ C \int_0^T e^{-2\lambda\phi(t,0)} \left( \lambda^3 \phi_x^3(t,0) \sigma(0)^2 |v_{xx}(t,0)|^2 + \lambda\phi_x(t,0) \sigma^2(0) |v_{xxx}(t,0)|^2 \right) dt \end{aligned}$$

pour tout  $v \in \mathcal{V}$ , pour tout  $\lambda \geq \lambda_0$ .

Nous appliquons alors deux fois de suite cette inégalité de Carleman pour obtenir notre résultat sur le problème inverse.

**Remarque 7.2.3** *Le problème inverse de retrouver le coefficient de diffusion  $\sigma$  a été résolu par la suite par P. Guzman dans [59]. Il s'est également basé sur une inégalité de Carleman et la méthode de Bukhgeïm-Klibanov.*

## 7.3 Equation de Korteweg-de Vries.

Voir article [BCCM14].

### 7.3.1 Présentation des résultats.

Comme nous l'avons vu dans la section 6, l'équation de Korteweg-de Vries peut modéliser l'écoulement du sang dans les artères et de ce fait, les coefficients apparaissant dans l'équation sont très importants d'un point de vue médical. Avec Lucie Baudouin, Eduardo Cerpa et Alberto Mercado nous avons voulu étudier un problème inverse sur cette équation posée sur un intervalle borné,  $[0, L]$  :

$$\begin{cases} y_t + a(x)y_{xxx} + y_x + yy_x = 0, & \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ y(t, 0) = y(t, L) = y_x(t, L) = 0, & \forall t \in (0, T), \\ y(0, x) = y_0(x), & \forall x \in (0, L), \end{cases} \quad (7.9)$$

où le coefficient principal  $a$  vérifie  $a(x) \geq a_0 > 0$  pour tout  $x \in [0, L]$ . La question que nous nous sommes posée est la suivante, pouvons nous retrouver le coefficient principal  $a$  à partir de mesures de  $y_x(0, t)$ ,  $y_{xx}(0, t)$  and  $y_{xx}(L, t)$  on  $(0, T)$ , où  $y$  est la solution de l'équation (7.9). Notre résultat principal est le suivant,

**Théorème 7.3.1** *Soit  $r_0, a_0, \alpha$  et  $K$  des constantes positives données. Supposons que la donnée initiale  $y_0 \in \{w \in H^7(0, L); w(0) = w(L) = w'(L) = 0\}$  vérifie pour tout  $x \in [0, L]$*

$$y_0'''(x) = y_0'''(L - x) \quad (7.10)$$

et

$$|y_0'''(x)| \geq r_0 > 0.$$

On définit l'espace

$$\Sigma(a_0, \alpha) = \left\{ a \in W^{6, \infty}(0, L) \mid \forall x \in [0, L], a(x) \geq a_0 > 0, a(x) = a(L - x), \right. \\ \left. \text{and } \|a\|_{W^{6, \infty}(0, L)} \leq \alpha \right\}. \quad (7.11)$$

Alors il existe une constante  $C = C(L, T, r_0, a_0, \alpha, K) > 0$  telle que

$$C\|a - \tilde{a}\|_{L^2(0, L)} \leq \|y_x(t, 0) - \tilde{y}_x(t, 0)\|_{H^1(0, T)} + \|y_{xx}(t, 0) - \tilde{y}_{xx}(t, 0)\|_{H^1(0, T)} \\ + \|y_{xx}(t, L) - \tilde{y}_{xx}(t, L)\|_{H^1(0, T)}$$

pour tout  $a, \tilde{a}$  dans  $\Sigma(a_0, \alpha)$  tels que les solutions correspondantes de l'équation (7.9) vérifient

$$\max\{\|y\|_{W^{1, \infty}(0, T; W^{3, \infty}(0, L))}, \|\tilde{y}\|_{W^{1, \infty}(0, T; W^{3, \infty}(0, L))}\} \leq K.$$

### 7.3.2 Idées de la démonstration

La démonstration du résultat repose cette fois encore sur la méthode de Bughkein-Klibanov. L'obtention de l'inégalité de Carleman se fait ici sur un intervalle étendu en temps négatifs,  $(-T, T) \times (0, L)$  afin d'éviter une observation de la solution à un temps  $T_0 > 0$  comme dans le cas des équations paraboliques (cf le chapitre précédent par exemple sur l'équation de Kuramoto-Sivashinski). Ceci nous conduit par contre à des hypothèses de symétrie sur la condition initiale et sur le coefficient principal.

Soit  $d \in L^\infty((-T, T) \times (0, L))$ ,  $b \in L^\infty(-T, T; W^{1,\infty}(0, L))$  et  $a \in W^{3,\infty}(0, L)$ , tel que  $a(x) \geq a_0$  pour tout  $x \in [0, L]$ , and  $\|a\|_{W^{3,\infty}(0,L)} \leq \alpha$ , où  $a_0, \alpha > 0$ . On définit l'opérateur

$$P = \partial_t + a(x)\partial_{xxx} + b(t, x)\partial_x + d(t, x) \quad (7.12)$$

et l'espace

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in L^2(-T, T; H^3 \cap H_0^1(0, L)) / Pv \in L^2((0, L) \times (-T, T)) \right\}. \quad (7.13)$$

Soit  $\beta \in C^3([0, L])$  tel que pour un certain  $r > 0$  on ait

$$0 < r \leq \beta(x) \quad \text{et} \quad 0 < r \leq \beta'(x), \quad \forall x \in (0, L). \quad (7.14)$$

On définit, pour tout  $\lambda > 0$ , les fonctions

$$\phi(t, x) = \frac{e^{2\lambda\|\beta\|_\infty} - e^{\lambda\beta(x)}}{(T+t)(T-t)}, \quad \theta(t, x) = \frac{e^{\lambda\beta(x)}}{(T+t)(T-t)} \quad (7.15)$$

pour  $(t, x) \in (-T, T) \times [0, L]$ . On peut remarquer qu'il existe une constante  $C = C(T)$  telle que

$$0 < \frac{1}{C} \leq \theta(t, x) \quad \text{et} \quad |\theta_t(t, x)| \leq C\theta^2(t, x), \quad \forall (t, x) \in (-T, T) \times [0, L].$$

Nous pouvons alors démontrer l'inégalité de Carleman suivante.

**Théorème 7.3.2** *Soit  $\phi$  et  $\theta$  définis par (7.15), et soit  $P$  l'opérateur de KdV linéarisé défini par (7.12). Il existe  $s_0 > 0$ ,  $\lambda_0 > 0$  et une constante  $C(L, T, s_0, \lambda_0, \alpha, a_0, r) > 0$  telle que pour tout  $s \geq s_0$  et  $\lambda \geq \lambda_0$ ,*

$$\begin{aligned} & \int_{-T}^T \int_0^L e^{-2s\phi} (s^5 \lambda^6 \theta^5 |u|^2 + s^3 \lambda^4 \theta^3 |u_x|^2 + s \lambda^2 \theta |u_{xx}|^2) dx dt \\ & \leq C \int_{-T}^T \int_0^L e^{-2s\phi} |Pu|^2 dx dt + C s^3 \lambda^3 \int_{-T}^T e^{-2s\phi(t,L)} \theta^3(t, L) |u_x(t, L)|^2 dt \\ & \quad + C s \lambda \int_{-T}^T e^{-2s\phi(t,L)} \theta(t, L) |u_{xx}(t, L)|^2 dt \end{aligned}$$

pour tout  $u \in \mathcal{V}$  défini par (7.13).

**Remarque 7.3.3** Si on cherche une inégalité de Carleman à un seul paramètre (comme dans [34, 76] où  $\phi = \frac{\beta(x)}{(t+T)(T-t)}$ ), des hypothèses supplémentaires sur la dérivée seconde de la fonction  $\beta$  doivent être imposées. L'utilisation d'un second paramètre  $\lambda$  permet d'éviter ces hypothèses.

On considère deux coefficients  $a, \tilde{a}$  et leurs solutions correspondantes pour (7.9),  $y$  et  $\tilde{y}$ , et on définit

$$u(t, x) := y(t, x) - \tilde{y}(t, x), \quad \text{et} \quad \sigma(x) := \tilde{a}(x) - a(x).$$

La fonction  $u$  vérifie

$$\begin{cases} u_t + a(x)u_{xxx} + (1 + \tilde{y})u_x + y_x u = \sigma \tilde{y}_{xxx}, & \forall (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, L) = 0, \quad u_x(t, L) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ u(0, x) = 0, & \forall x \in (0, L). \end{cases}$$

On considère maintenant  $z(t, x) := u_t(t, x)$ , solution du système

$$\begin{cases} z_t + a(x)z_{xxx} + (1 + \tilde{y})z_x + y_x z = f, & \forall (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ z(t, 0) = 0, \quad z(t, L) = 0, \quad z_x(t, L) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ z(0, x) = \sigma(x)y_0'''(x), & \forall x \in (0, L), \end{cases} \quad (7.16)$$

où  $f = \sigma(x)\tilde{y}_{xxx} - y_{xt}u - \tilde{y}_t u_x$ . On peut remarquer que maintenant  $\sigma$ , que l'on cherche à estimer, apparaît non seulement dans le terme source de l'équation mais également dans la condition initiale.

Afin d'estimer  $\sigma$  avec  $z(0, x)$  en utilisant l'inégalité de Carleman obtenue précédemment, nous étendons l'équation de KdV sur des temps négatifs comme cela a pu être fait pour l'équation des ondes ou de Schrödinger. Nous avons besoin de définir deux types d'extension, une *extension symétrique* de toute fonction  $g$  définie sur  $[0, T] \times [0, L]$  par

$$\hat{g}(t, x) = \begin{cases} g(t, x) & \text{si } x \in [0, L], t \in [0, T], \\ g(-t, L - x) & \text{si } x \in [0, L], t \in (-T, 0). \end{cases}$$

Cette extension vérifie  $\hat{f}\hat{g} = \widehat{fg}$ . On définit également une *extension anti-symétrique* de  $[-T, T] \times [0, L]$  de toute fonction  $g$  définie sur  $[0, T] \times [0, L]$  par

$$\check{g}(t, x) = \begin{cases} g(t, x) & \text{si } x \in [0, L], t \in [0, T], \\ -g(-t, L - x) & \text{si } x \in [0, L], t \in [-T, 0). \end{cases}$$

Ainsi on suppose que la condition initiale  $z_0(x) = z(0, x)$  de l'équation (7.16) vérifie

$$z_0(x) = z_0(L - x) \quad \forall x \in [0, L].$$

Ce qui signifie que nous devons également supposer cette symétrie pour  $a, \tilde{a}$  et  $y_0'''$ , comme nous l'avons fait dans les hypothèses (7.10) et (7.11). On définit l'extension de  $y$  (resp.  $\tilde{y}$ ) solution de l'équation (7.9) par  $\hat{y}$  (resp.  $\hat{\tilde{y}}$ ). On peut

alors définir  $v := \hat{z}$  sur  $[-T, T] \times [0, L]$ , qui est solution de l'équation donnée par

$$\begin{cases} v_t + a(x)v_{xxx} + (1 + \hat{y})v_x + \hat{y}_x v = \check{f}, & \forall x \in (0, L), t \in (-T, T), \\ v(t, 0) = 0, \quad v(t, L) = 0, & \forall t \in (-T, T), \\ v_x(L, t) = 0, & \forall t \in (0, T), \\ v_x(t, L) = -z_x(-t, 0), & \forall t \in (-T, 0), \\ v(0, x) = \sigma(x)y_0'''(x), & \forall x \in (0, L). \end{cases}$$

L'opérateur aux dérivées partielles de cette équation satisfait les conditions pour l'inégalité de Carleman du Théorème 7.3.2, selon (7.12) avec  $b = 1 + \hat{y}$  et  $d = \hat{y}_x$ , tant que  $b \in L^\infty(-T, T; W^{1, \infty}(0, L))$  et  $d \in L^\infty((-T, T) \times (0, L))$ . Cette régularité est vérifiée grâce aux hypothèses sur la régularité de  $y_0$ ,  $a$  et  $\tilde{a}$ , qui assurent que les solutions correspondantes  $y$  et  $\tilde{y}$  sont suffisamment régulières.

On peut alors appliquer l'inégalité de Carleman démontrée ci-dessus et obtenir les résultats voulus.

### 7.3.3 Problèmes ouverts et perspectives

Ce résultat de problème inverse sur l'équation de Korteweg-de Vries est un des premiers résultats sur cette équation. Nous avons vu dans la partie 6 que l'équation de Korteweg-de Vries peut modéliser les signaux de pression artérielle. Dans cette optique, de nombreux problèmes inverses peuvent être soulevés, comme la détermination de la pression à la sortie du coeur (entrée de l'aorte) par une simple mesure non invasive de pression au doigt par exemple, on peut également s'intéresser à la détermination de constantes physiques comme la rigidité des parois artérielles, coefficient qui apparaît directement comme facteur de l'équation de Korteweg-de Vries, [CS05].

Un projet d'étude est l'utilisation du modèle de KdV obtenu sur un réseau vu en paragraphe 1.4 pour résoudre un problème inverse. L'idée est d'avoir des coefficients principaux différents sur chaque branche du réseau et de retrouver ces coefficients. Cette étude combinerait à la fois le modèle du paragraphe 1.4 et le problème inverse étudié en 7.3.

Un autre problème en cours d'étude par C. Moreno dans le cadre de sa thèse co-encadrée par E. Cerpa et moi-même est l'étude du problème inverse de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky posée sur un réseau étoilé. Pour cela elle utilise les conditions de transmissions proposées dans [15], l'idée étant ensuite de réécrire une inégalité de Carleman adaptée à son réseau comme nous avons fait dans [BCV11].

# Liste de publications

- [AC18a] Kaïs Ammari and Emmanuelle Crépeau. Feedback stabilization and boundary controllability of the Korteweg–de Vries Equation on a star-shaped network. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 56(3) :1620–1639, 2018.
- [AC18b] Kaïs Ammari and Emmanuelle Crépeau. Well-posedness and stabilization of the Benjamin-Bona-Mahony equation on star-shaped networks. *to be published in Systems & Control Letters, arXiv preprint arXiv :1803.07914*, 2018.
- [BCCM13] Lucie Baudouin, Eduardo Cerpa, Emmanuelle Crépeau, and Alberto Mercado. Lipschitz stability in an inverse problem for the Kuramoto–Sivashinsky equation. *Applicable Analysis*, 92(10) :2084–2102, 2013.
- [BCCM14] Lucie Baudouin, Eduardo Cerpa, Emmanuelle Crépeau, and Alberto Mercado. On the determination of the principal coefficient from boundary measurements in a KdV equation. *J. Inverse Ill-Posed Probl*, 22(6) :819–846, 2014.
- [BCV11] Lucie Baudouin, Emmanuelle Crépeau, and Julie Valein. Global Carleman estimate on a network for the wave equation and application to an inverse problem. *Mathematical Control and Related Fields*, 1(3), 2011.
- [CBV18] Emmanuelle Crépeau, Lucie Baudouin, and Julie Valein. Two approaches for the stabilization of the nonlinear KdV equation with boundary time-delay feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018.
- [CC04] Jean-Michel Coron and Emmanuelle Crépeau. Exact boundary controllability of a nonlinear KdV equation with critical lengths. *Journal of the European Mathematical Society*, 6(3) :367–398, 2004.
- [CC09a] Eduardo Cerpa and Emmanuelle Crépeau. Boundary controllability for the nonlinear Korteweg–de Vries equation on any critical domain. In *Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, volume 26, pages 457–475. Elsevier, 2009.
- [CC09b] Eduardo Cerpa and Emmanuelle Crépeau. Rapid exponential stabilization for a linear Korteweg–de Vries equation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 11(3) :655–668, 2009.

- [CC18] Eduardo Cerpa and Emmanuelle Crépeau. On the controllability of the improved Boussinesq equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 56(4) :3035–3049, 2018.
- [CCM18] Eduardo Cerpa, Emmanuelle Crépeau, and Claudia Moreno. On the boundary controllability of the Korteweg–de Vries equation on a star-shaped network. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2018.
- [CP06] Emmanuelle Crépeau and Christophe Prieur. Control of a clamped-free beam by a piezoelectric actuator. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 12(03) :545–563, 2006.
- [CP08] Emmanuelle Crépeau and Christophe Prieur. Approximate controllability of a reaction-diffusion system. *Systems & Control Letters*, 57(12) :1048–1057, 2008.
- [Cré01] Emmanuelle Crépeau. Exact boundary controllability of the Korteweg-de Vries equation around a non-trivial stationary solution. *International Journal of Control*, 74(11) :1096–1106, 2001.
- [Cré03] Emmanuelle Crépeau. Exact controllability of the Boussinesq equation on a bounded domain. *Differential and Integral Equations*, 16(3) :303–326, 2003.
- [Cré11] Emmanuelle Crépeau. Planification de trajectoire d’un système non linéaire de type FitzHugh Nagumo. *Journal européen des systèmes automatisés*, 45(7-10) :631–643, 2011.
- [Cré16] Emmanuelle Crépeau. Exact boundary controllability of the Korteweg–de Vries equation with a piecewise constant main coefficient. *Systems & Control Letters*, 97 :157–162, 2016.
- [CS05] Emmanuelle Crépeau and Michel Sorine. Identifiability of a reduced model of pulsatile flow in an arterial compartment. In *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC’05. 44th IEEE Conference on*, pages 891–896. IEEE, 2005.
- [CS07] Emmanuelle Crépeau and Michel Sorine. A reduced model of pulsatile flow in an arterial compartment. *Chaos, Solitons & Fractals*, 34(2) :594–605, 2007.
- [LCPS07] Taous-Meriem Laleg, Emmanuelle Crépeau, Yves Papelier, and Michel Sorine. Arterial blood pressure analysis based on scattering transform . In *Engineering in Medicine and Biology Society, 2007. EMBS 2007. 29th Annual International Conference of the IEEE*, pages 5326–5329. IEEE, 2007.
- [LCS+06] Taous-Meriem Laleg, Emmanuelle Crépeau, Michel Sorine, et al. Travelling-wave analysis and identification. A scattering theory framework. In *European Control Conference ECC’07*, 2006.
- [LCS07] Taous-Meriem Laleg, Emmanuelle Crépeau, and Michel Sorine. Separation of arterial pressure into a nonlinear superposition of solitary waves and a windkessel flow. *Biomedical signal processing and control*, 2(3) :163–170, 2007.

- [LKCS13] Taous-Meriem Laleg-Kirati, Emmanuelle Crépeau, and Michel Sorine. Semi-classical signal analysis. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 25(1) :37–61, 2013.



# Bibliographie

- [1] F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH, AND C. DUPAIX, *Null-controllability of some reaction–diffusion systems with one control force*, Journal of mathematical analysis and applications, 320 (2006), pp. 928–943.
- [2] F. D. ARARUNA, E. CERPA, A. MERCADO, AND M. C. SANTOS, *Internal null controllability of a linear Schrödinger–KdV system on a bounded interval*, Journal of Differential Equations, 260 (2016), pp. 653–687.
- [3] A. ARMAOU AND P. D. CHRISTOFIDES, *Feedback control of the Kuramoto–Sivashinsky equation*, Physica D : Nonlinear Phenomena, 137 (2000), pp. 49–61.
- [4] N. AYACHE, D. CHAPELLE, F. CLÉMENT, Y. COUDIÈRE, H. DELINGETTE, J. DÉSIDÉRI, M. SERMESANT, M. SORINE, AND J. URQUIZA, *Towards Model-Based Estimation of the Cardiac Electro-Mechanical Activity from ECG Signals and Ultrasound Images*, Lecture Notes in Computer Science, 2230 (2001), pp. 120–127.
- [5] K. BEAUCHARD AND J.-M. CORON, *Controllability of a quantum particle in a moving potential well*, Journal of Functional Analysis, 232 (2006), pp. 328–389.
- [6] A. BENABDALLAH, Y. DERMENJIAN, AND J. LE ROUSSEAU, *Carleman estimates for the one-dimensional heat equation with a discontinuous coefficient, and applications*, Comptes Rendus Mécanique, 334 (2006), pp. 582–586.
- [7] A. BENABDALLAH, P. GAITAN, AND J. L. ROUSSEAU, *Stability of discontinuous diffusion coefficients and initial conditions in an inverse problem for the heat equation*, SIAM Journal on Control and Optimization, 46 (2007), pp. 1849–1881.
- [8] J. BOUSSINESQ, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Impr. nationale, 1877.
- [9] A. BRANDAO, E. FERNANDEZ-CARA, P. MAGALHAES, AND M. ROJAS-MEDAR, *Theoretical analysis and control results for the Fitzhugh-Nagumo equation*, Electronic Journal of Differential equations, 164 (2008), pp. 1–20.
- [10] A. J. BRANDAO, E. FERNANDEZ-CARA, P. M. MAGALHAES, AND M. A. ROJAS-MEDAR, *Theoretical analysis and control results for the*

- FitzHugh-Nagumo equation*, Electronic Journal of Differential Equations, 2008 (2008), pp. 1–20.
- [11] A. BUKHGEIM AND M. V. KLIBANOV, *Uniqueness in the magnitude of one class of multidimensional inverse problems*, Doklady Akademii Nauk SSSR, 260 (1981), pp. 269–272.
- [12] R. A. CAPISTRANO-FILHO, A. F. PAZOTO, AND L. ROSIER, *Internal controllability of the Korteweg–de Vries equation on a bounded domain*, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, 21 (2015), pp. 1076–1107.
- [13] R. A. CAPISTRANO-FILHO, A. F. PAZOTO, AND L. ROSIER, *Control of a Boussinesq system of KdV-KdV type on a bounded interval*, arXiv preprint arXiv :1709.09924, (2017).
- [14] J. W. S. CASSELS, *An introduction to Diophantine approximation*, vol. 45, University Press Cambridge, 1957.
- [15] C. M. CAZACU, L. I. IGNAT, AND A. F. PAZOTO, *Null-controllability of the linear Kuramoto–Sivashinsky equation on star-shaped trees*, SIAM Journal on Control and Optimization, 56 (2018), pp. 2921–2958.
- [16] E. CERPA, *Exact controllability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation on a critical spatial domain*, SIAM Journal on Control and Optimization, 46 (2007), pp. 877–899.
- [17] —, *Null controllability and stabilization of the linear Kuramoto–Sivashinsky equation*, Commun. Pure Appl. Anal, 9 (2010), pp. 91–102.
- [18] —, *Control of a Korteweg-de Vries equation : a tutorial*, Math. Control Relat. Fields, 4 (2014), pp. 45–99.
- [19] E. CERPA AND J.-M. CORON, *Rapid stabilization for a korteweg-de vries equation from the left dirichlet boundary condition*, IEEE Transactions on Automatic Control, 58 (2013), pp. 1688–1695.
- [20] E. CERPA AND A. MERCADO, *Local exact controllability to the trajectories of the 1-D Kuramoto–Sivashinsky equation*, Journal of Differential Equations, 250 (2011), pp. 2024–2044.
- [21] E. CERPA, I. RIVAS, AND B.-Y. ZHANG, *Boundary controllability of the Korteweg–de Vries equation on a bounded domain*, SIAM Journal on Control and Optimization, 51 (2013), pp. 2976–3010.
- [22] F. W. CHAVES-SILVA, L. ROSIER, AND E. ZUAZUA, *Null controllability of a system of viscoelasticity with a moving control*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 101 (2014), pp. 198–222.
- [23] S. CHOWDHURY AND S. ERVEDOZA, *Open loop stabilization of incompressible Navier-Stokes equations in a 2d channel using power series expansion*, (2017).
- [24] P. D. CHRISTOFIDES AND A. ARMAOU, *Global stabilization of the Kuramoto–Sivashinsky equation via distributed output feedback control*, Systems & Control Letters, 39 (2000), pp. 283–294.

- [25] T. COLIN AND M. GISCLON, *An initial-boundary value problem that approximate the quarter-plane problem for the Korteweg-de Vries equation*, Non linear analysis theory, methods and applications, (2001), pp. 869–892.
- [26] J.-M. CORON, *On the small-time local controllability of a quantum particle in a moving one-dimensional infinite square potential well*, Comptes Rendus Mathematique, 342 (2006), pp. 103–108.
- [27] —, *Control and nonlinearity*, no. 136, American Mathematical Soc., 2009.
- [28] M. CRISTOFOL, P. GAITAN, K. NIINIMÄKI, AND O. POISSON, *Inverse problem for a coupled parabolic system with discontinuous conductivities : One-dimensional case*, Inverse Problems and Imaging, 7 (2013), pp. 159–182.
- [29] R. DATKO, *Not all feedback stabilized hyperbolic systems are robust with respect to small time delays in their feedbacks*, SIAM Journal on Control and Optimization, 26 (1988), pp. 697–713.
- [30] R. DATKO, J. LAGNESE, AND M. POLIS, *An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations*, SIAM Journal on Control and Optimization, 24 (1986), pp. 152–156.
- [31] W. DUNBAR, N. PETIT, P. ROUCHON, AND P. MARTIN, *Motion planning for a nonlinear Stefan problem*, ESAIM COCV, 9 (2003), pp. 275–296.
- [32] R. FITZHUGH, *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane*, Biophysical journal, 1 (1961), pp. 445–466.
- [33] M. FLIESS, H. MOUNIER, P. ROUCHON, AND J. RUDOLPH, *A distributed parameter approach to the control of a tubular reactor : a multivariable case*, in Decision and Control, 1998. Proceedings of the 37th IEEE Conference on, vol. 1, IEEE, 1998, pp. 439–442.
- [34] O. GLASS AND S. GUERRERO, *Some exact controllability results for the linear KdV equation and uniform controllability in the zero-dispersion limit*, Asymptotic Analysis, 60 (2008), pp. 61–100.
- [35] —, *Controllability of the Korteweg–de Vries equation from the right Dirichlet boundary condition*, Systems & Control Letters, 59 (2010), pp. 390–395.
- [36] B.-Z. GUO AND K.-Y. YANG, *Output feedback stabilization of a one-dimensional Schrödinger equation by boundary observation with time delay*, IEEE Transactions on Automatic Control, 55 (2010), pp. 1226–1232.
- [37] B. HELFFER AND T. LALEG-KIRATI, *On semi-classical questions related to signal analysis*, Asymptotic Analysis, 75 (2011), pp. 125–144.
- [38] R. HIROTA AND J. SATSUMA, *Soliton solutions of a coupled Korteweg-de Vries equation*, Physics Letters A, 85 (1981), pp. 407–408.
- [39] A. HODGKIN AND A. HUXLEY, *A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in a nerve*, J. Physiol., 117 (1952), pp. 500–544.

- [40] C. HU AND R. TEMAM, *Robust boundary control for the Kuramoto-Sivashinsky equation*, in Optimal control and partial differential equation. Conference, 2001, pp. 353–362.
- [41] L. I. IGNAT, A. F. PAZOTO, L. ROSIER, ET AL., *Inverse problem for the heat equation and the Schrodinger equation on a tree*, Inverse Problems, 28 (2012).
- [42] O. Y. IMANUVILOV AND M. YAMAMOTO, *Lipschitz stability in inverse parabolic problems by the Carleman estimate*, Inverse problems, 14 (1998), p. 1229.
- [43] D. JACKSON, *Existence and regularity for the FitzHugh Nagumo equations with inhomogeneous boundary equations*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 14 (1990), pp. 201–216.
- [44] A. KEFTI-CHERIF, *Vehicules automobiles à basse consommation : Modélisation mathématique d'organes, Applications en simulation, estimation et commande*, PhD thesis, Thèse de l'université Paris Dauphine, 1999.
- [45] F. A. KHODJA, A. BENABDALLAH, C. DUPAIX, AND I. KOSTIN, *Null-controllability of some systems of parabolic type by one control force*, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, 11 (2005), pp. 426–448.
- [46] D. J. KORTEWEG AND G. DE VRIES, *Xli. on the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 39 (1895), pp. 422–443.
- [47] T.-M. LALEG-KIRATI, C. MÉDIGUE, Y. PAPELIER, F. COTTIN, AND A. VAN DE LOUW, *Validation of a semi-classical signal analysis method for stroke volume variation assessment : A comparison with the PiCCO technique*, Annals of biomedical engineering, 38 (2010), pp. 3618–3629.
- [48] S. LANG, *Introduction to diophantine approximations*, Springer.
- [49] B. LAROCHE, P. MARTIN, AND P. ROUCHON, *Motion planning for the heat equation*, International journal of robust and nonlinear control, 10 (2000), pp. 629–643.
- [50] B. LAROCHE, P. MARTIN, AND P. ROUCHON, *Motion planning for the heat equation*, J. Robust Nonlinear Control, 10 (2000), pp. 629–643.
- [51] P. LE GALL, C. PRIEUR, AND L. ROSIER, *Output feedback stabilization of a clamped-free beam*, International Journal of Control, 80 (2007), pp. 1201–1216.
- [52] J. L. LIONS, *Contrôlabilité exacte perturbations et stabilisation de systèmes distribués (Tome 1, Contrôlabilité exacte. Tome 2, Perturbations)*, Recherches en mathématiques appliquées, (1988).
- [53] W.-J. LIU AND M. KRSTIĆ, *Stability enhancement by boundary control in the Kuramoto-Sivashinsky equation*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, 43 (2001), pp. 485–507.

- [54] H. LOGEMANN, R. REBARBER, AND G. WEISS, *Conditions for robustness and nonrobustness of the stability of feedback systems with respect to small delays in the feedback loop*, SIAM Journal on Control and Optimization, 34 (1996), pp. 572–600.
- [55] A. LYNCH AND J. RUDOLPH, *Flatness-based boundary control of a nonlinear parabolic equation modelling a tubular reactor*, vol. 259, Springer, edited by a. isidori, f. lamnabhi-lagarrigue and w. respondek ed., 2000.
- [56] V. MAKHANKOV, *Dynamics of classical solitons (in non-integrable systems)*, Physics reports, 35 (1978), pp. 1–128.
- [57] S. MARX, E. CERPA, C. PRIEUR, AND V. ANDRIEU, *Global stabilization of a korteweg–de vries equation with saturating distributed control*, SIAM Journal on Control and Optimization, 55 (2017), pp. 1452–1480.
- [58] B. MATKOWSKY AND G. SIVASHINSKY, *Propagation of a pulsating reaction front in solid fuel combustion*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 35 (1978), pp. 465–478.
- [59] P. G. MELÉNDEZ, *Lipschitz stability in an inverse problem for the main coefficient of a kuramoto–sivashinsky type equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 408 (2013), pp. 275–290.
- [60] T. MEURER, J. BECKER, AND M. ZEITZ, *Flatness-based feedback tracking control of a distributed parameter tubular reactor model*, system, 3 (2003), p. 9.
- [61] S. MICU, *On the Controllability of the Linearized Benjamin–Bona–Mahony Equation*, SIAM Journal on Control and Optimization, 39 (2001), pp. 1677–1696.
- [62] J. NAGUMO, S. ARIMOTO, AND S. YOSHIKAWA, *An active pulse transmission line simulating nerve axon*, Proceedings of the IRE, 50 (1962), pp. 2061–2070.
- [63] S. NICAISE AND C. PIGNOTTI, *Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks*, SIAM Journal on Control and Optimization, 45 (2006), pp. 1561–1585.
- [64] S. NICAISE, J. VALEIN, AND E. FRIDMAN, *Stability of the heat and of the wave equations with boundary time-varying delays*, Discrete and Continuous Dynamical Systems *i*, Series S, 2 (2009), p. 559.
- [65] A. PAZOTO, *Unique continuation and decay for the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 11 (2005), pp. 473–486.
- [66] A. F. PAZOTO, *Unique continuation and decay for the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, 11 (2005), pp. 473–486.
- [67] G. PERLA MENZALA, C. VASCONCELLOS, AND E. ZUAZUA, *Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, Quart. Appl. Math., 60 (2002), pp. 111–129.

- [68] G. PERLA MENZALA, C. F. VASCONCELLOS, AND E. ZUAZUA, *Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, Quarterly of Applied Mathematics, 60 (2002), pp. 111–129.
- [69] O. POISSON, *Carleman estimates for the heat equation with discontinuous diffusion coefficients*, Applicable Analysis, 87 (2008), pp. 1129–1144.
- [70] K. PRAMOD AND M. VEDAN, *Long-wave propagation in water with bottom discontinuity*, International journal of non-linear mechanics, 27 (1992), pp. 197–201.
- [71] J. RAUCH, *Global existence for the Fitzhugh-Nagumo equations*, Comm. Partial Differential Equations 1, 6 (1976), pp. 609–621.
- [72] J. RAUCH AND J. SMOLLER, *Qualitative theory of the FitzHugh Nagumo equations*, Advances in Mathematics, 27 (1978), pp. 12–44.
- [73] R. REBARBER AND S. TOWNLEY, *Robustness with respect to delays for exponential stability of distributed parameter systems*, SIAM journal on control and optimization, 37 (1998), pp. 230–244.
- [74] L. ROSIER, *Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain*, Control Optimisation and Calculus of Variations, 2 (1997), pp. 33–55.
- [75] L. ROSIER, *Exact boundary controllability for the linear korteweg-de vries equation on the half-line*, Siam J. Control Optim., 39 (2000), pp. 331–351.
- [76] L. ROSIER, *Control of the surface of a fluid by a wavemaker*, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, 10 (2004), pp. 346–380.
- [77] —, *On the benjamin-bona-mahony equation with a localized damping*, J. Math. Study, 49 (2016), pp. 195–204.
- [78] L. ROSIER AND P. ROUCHON, *On the controllability of a wave equation with structural damping*, Int. J. Tomogr. Stat, 5 (2007), pp. 79–84.
- [79] L. ROSIER AND B.-Y. ZHANG, *Control and stabilization of the Korteweg-de Vries equation : recent progresses*, Journal of Systems Science and Complexity, 22 (2009), pp. 647–682.
- [80] —, *Unique continuation property and control for the Benjamin–Bona–Mahony equation on a periodic domain*, Journal of Differential Equations, 254 (2013), pp. 141–178.
- [81] D. L. RUSSELL, *Nonharmonic Fourier series in the control theory of distributed parameter systems*, J. Math. Anal. Appl., 18 (1967), pp. 542–560.
- [82] J. SATSUMA AND R. HIROTA, *A coupled KdV equation is one case of the four-reduction of the KP hierarchy*, Journal of the Physical Society of Japan, 51 (1982), pp. 3390–3397.
- [83] J.-C. SAUT AND B. SCHEURER, *Unique continuation for some evolution equations*, Journal of differential equations, 66 (1987), pp. 118–139.
- [84] M. SCHONBECK, *Boundary Value Problems for the FitzHugh Nagumo Equations*, J. of Differential Equations, 30 (1978), pp. 119–147.

- [85] J. M. URQUIZA, *Rapid exponential feedback stabilization with unbounded control operators*, SIAM journal on control and optimization, 43 (2005), pp. 2233–2244.
- [86] B. ZHANG, *Boundary stabilization of the Korteweg-de Vries equation*, Control and estimation of distributed parameter systems : nonlinear phenomena (Vorau, 1993), 118 (1994), pp. 371–389.