



HAL
open science

Phénomènes de concentration pour les équations elliptiques surcritiques

Hussein Mesmar

► **To cite this version:**

Hussein Mesmar. Phénomènes de concentration pour les équations elliptiques surcritiques. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Lorraine, 2021. Français. NNT : 2021LORR0338 . tel-03627454

HAL Id: tel-03627454

<https://hal.science/tel-03627454>

Submitted on 1 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lorraine

Spécialité : Mathématiques Fondamentales et Appliquées

par

Hussein MESMAR

TITRE

**PHÉNOMÈNES DE CONCENTRATION POUR LES ÉQUATIONS
ELLIPTIQUES SURCRITIQUES**

Thèse soutenue publiquement le 15 décembre 2021 devant le jury composé de

M. Jérôme VÉTOIS	<i>Professeur, McGill University, Canada</i>	<i>Président.</i>
M. Ali FARDOUN	<i>Maître de Conférences, Université de Brest, France</i>	<i>Rapporteur.</i>
M. Jean VAN SCHAFTINGEN	<i>Professeur, Université de Louvain-la-Neuve, Belgique</i>	<i>Examineur.</i>
Mme. Roberta MUSINA	<i>Professeure, Université d'Udine, Italie</i>	<i>Examinatrice.</i>
Mx. Caterina VÂLCU	<i>Maîtresse de Conférences, Université Sorbonne Paris Nord, France</i>	<i>Examinatrice.</i>
M. Frédéric ROBERT	<i>Professeur, Université de Lorraine, France</i>	<i>Directeur.</i>

Table des matières

I	Introduction et Etat de l'art	7
0	Introduction	9
0.1	Version Française	9
0.2	Version Anglaise	19
1	Matériel de base	31
1.1	Géométrie Riemannienne	31
1.2	Des bases de l'analyse non linéaire	39
1.3	Solution faibles et fortes des équations elliptique	42
1.4	Fonction de Green	42
2	Etat de l'art : Résolution des équations modèles par méthode de minimisation	45
2.1	Équation de Laplace	46
2.2	Équation non linéaire sous-critique	48
2.3	Résultat d'existence des solutions pour des équations non linéaire dans le cas critique	50
2.3.1	Cas $n \geq 4$	51
2.3.2	Cas $n = 3$	53
2.3.3	Exemples d'existence des solution avec une perturbation d'ordre minimale	56
II	Solutions de l'équation perturbée de Hardy-Sobolev avec poids	

par le Mountain-Pass Lemma	59
3 Premières meilleures constantes de Hardy-Sobolev en présence d'isométries	61
3.1 Préliminaires sur les variétés invariantes par un groupe d'isométries . . .	61
3.2 Propriétés dans $L^p(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})$	62
3.3 Inclusion et inégalités	66
3.4 Meilleures constantes sur des variétés Riemanniennes à ϵ -près	71
3.5 Régularité sur les variétés	82
4 Équation de Hardy-Sobolev perturbée en présence d'isométrie	91
4.1 Suite de Palais-Smale	93
4.2 Théorème d'existence avec condition générale	108
4.3 Théorème principal d'existence	123
III Phénomènes de concentration dans un problème surcritique invariant par isométries	133
5 Etat de l'art : Théorie H_1^2 de Blow-up pour les équation de Hardy-Sobolev en présence d'isométries	135
5.1 Bulles	137
5.2 Décomposition H_1^2	149
5.3 Estimation dans $C(M)$	156
6 Profile asymptotique et estimations ponctuelles	161
6.1 Phénomène de Blow-up et estimations ponctuelles	164
6.1.1 Estimations ponctuelles faibles	169
6.1.2 Estimations ponctuelles Fortes	172
6.2 Identité de Pohozaev et distance à l'orbite de concentration	180
6.3 Localisation de l'orbite de concentration	195
7 Notation	215
Bibliography	228

Remerciement

Bismillah...

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude

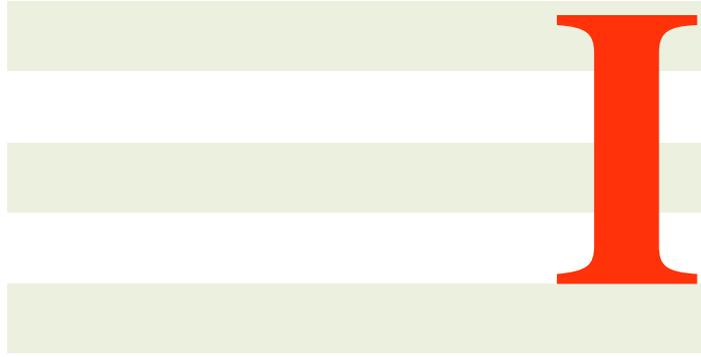
En premier lieu, je remercie mon directeur de thèse Frédéric ROBERT pour son soutien, ses conseils ainsi que nos échanges.

Je tiens à exprimer ma gratitude à M. Jérôme VÉTOIS et M. Ali FARDOUN pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. J'associe également à ces remerciements M. Jean VAN SCHAFTINGEN, Mme. Roberta MUSINA et Mx. Caterina VÂLCU pour avoir fait partie du jury de ma thèse .

Je remercie l'administration du laboratoire IECL, tout particulièrement Élodie Cunnat, Laurence Quirot et Didier Gemmerlé.

Je veux exprimer ici mon infinie gratitude à Hajj Qassem sans qui ni ma famille ni moi ne serions de ce monde aujourd'hui.

Pour mes parents, tous mes amis, membres de la famille, mes deux petites filles Fatima et Nour, le petit Kassem, et ma femme : merci de faire partie de ce voyage.



Introduction et Etat de l'art



Introduction

0.1 Version Française

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension $n \geq 3$. On s'intéresse dans cette thèse à des solutions $u \in C^2(M)$ d'équations de type

$$\begin{cases} \Delta_g u + au = u^p + h(x, u) & \text{sur } M, \\ u > 0 & \text{dans } M \end{cases} \quad (1)$$

où $\Delta_g := -\operatorname{div}_g(\nabla)$ est le Laplacien avec convention de signe moins, $a \in C^0(M)$, $p > 1$ et $(x, u) \mapsto h(x, u)$ est une non-linéarité "négligeable" devant u^p . Ce problème est similaire au problème Euclidien suivant : pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine régulier, on considère les solution $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$

$$\begin{cases} \Delta u + \tilde{a}u = u^p + \tilde{h}(x, u) & \text{sur } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

où $\Delta := -\operatorname{div}(\nabla) = -\sum_i \partial_{ii}$ est le Laplacien usuel, $\tilde{a} \in C^0(\Omega)$, $p > 1$ et $(x, u) \mapsto \tilde{h}(x, u)$ est une non-linéarité "négligeable" devant u^p . Les méthodes exposées ou bien

développées dans ce manuscrit s'appliquent parfaitement au cas Euclidien d'un ouvert de \mathbb{R}^n .

Le problème (1) admet une formulation variationnelle dans l'espace de Sobolev $H_1^2(M)$ qui est le complété de $C^\infty(M)$ pour la norme

$$u \mapsto \|u\|_{H_1^2} := \sqrt{\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2}$$

où les normes $\|\cdot\|_q$ sur les espaces de Lebesgue $L^q(M)$ sont prises par rapport à l'élément de volume Riemannien dv_g . Il suit des plongements de Sobolev que

$$H_1^2(M) \hookrightarrow L^{p+1}(M) \text{ continuellement si } 1 < p \leq 2^* - 1 \text{ avec } 2^* := \frac{2n}{n-2}$$

et que ce plongement est compact si et seulement si $p < 2^* - 1$. Du coup, lorsque l'exposant p est sous-critique, à savoir $1 < p < 2^* - 1$, le problème devient compact et permet l'utilisation de méthodes variationnelles classiques. L'existence et la multiplicité de solutions de (1) sont alors bien connue. On renvoie au Chapitre 2 de ce manuscrit pour la présentation de la méthode variationnelle classique par minimisation.

Le cas critique $p = 2^* - 1$ est plus compliqué car le plongement de Sobolev associé à la formulation variationnelle n'est pas compact, ce qui bloque l'application des théories abstraites classiques. Géométriquement, ce problème critique provient de l'équation de courbure scalaire et a donné lieu au problème de Yamabe qui a été résolu par Gilbarg-Trudinger [22], Aubin [3] et Schoen [42]. Des références possibles sur les problèmes dans le cas critique sont Hebey [25], Lee-Parker [33], Schoen [42]. La méthode développée par Aubin a été reprise par Brezis-Nirenberg [9] dans le cas Euclidien (2). Les méthodes de minimisations ainsi introduites utilisent fondamentalement les meilleures constantes dans les plongements de Sobolev : elles sont détaillées dans le Chapitre 2.

Dans ce travail de thèse, nous nous intéressons au cas surcritique $p > 2^* - 1$. La difficulté première est que le problème n'est pas bien posé dans l'espace de Sobolev naturel $H_1^2(M)$ qui ne se plonge pas dans $L^{p+1}(M)$. Une méthode pour étudier des problèmes surcritiques est d'imposer des invariances par un groupe d'isométries comme ce fut fait dans Escobar-Schoen [16], Hebey-Vaugon [26], Saintier [40] ou encore Faget [17]. On va donc se donner un sous-groupe G du groupe d'isométries de (M, g) . Dans le cas trivial d'une action libre et fidèle, le quotient M/G est une variété lisse de dimension $n - k$, $k \geq 1$, et pour $n - k > 2$, $2^*(k) := \frac{2(n-k)}{n-k-2} > 2^*$. Ainsi, en étudiant un problème

G -invariant surcritique avec l'exposant $2^*(k)$ sur M , on se ramène de façon artificielle à un problème critique sur le quotient M/G de dimension $n - k$. Dans notre travail, nous allons considérer le cas plus difficile de groupes qui n'agissent ni librement ni fidèlement : le problème sera alors que le quotient M/G ne sera plus une variété, et les techniques précédentes ne fonctionneront plus. Nous ferons sur G l'hypothèse fondamentale suivante inspirée du travail de [40] :

Hypothèse 0.1.1. *Pour tout Gx_0 , un G -orbite de dimension minimale k , on peut trouver $\delta > 0$, et G' un sous groupe fermé de $\text{Isom}_g(M)$ tel que :*

1. $G'x_0 = Gx_0$;
2. *Pour tout $x \in B_\delta(Gx_0) := \{y \in M / d_g(y; Gx_0) < \delta\}$, alors $G'x$ est principale et $G'x \subset Gx$.*

En particulier $\dim G'x = \dim Gx_0 = k, \forall x \in B_\delta(Gx_0)$.

L'importance de cette hypothèse est qu'elle assure que $B_\delta(Gx_0)/G'$ peut être considéré comme une variété Riemannienne de dimension $n - k$. On renvoie au Chapitre 3 pour plus de précisions sur ces notions.

Meilleures constantes de Sobolev avec poids et invariance par isométries

Dans le Chapitre 3, nous démontrons que pour tout variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, la première meilleure constante des inégalités Riemanniennes de Hardy-Sobolev G -invariantes est celles de l'inégalité Euclidienne divisée par une puissance de volume d'orbite de dimension minimal. On note

$$H_{1,G}^2(M) := \{u \in H_1^2(M) / u \circ \sigma(x) = u(x) \text{ pour tout } \sigma \in G \text{ et pp } x \in M\}.$$

Pour tout $s \in]0, 2[$, posons $L^p(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})$ l'espace de Lebesgue à poids défini comme étant l'ensemble des fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, telles que $|f|^p d_g(\cdot, Gx_0)^{-s} \in L^1(M)$, et on note $\|f\|_{p,s} = \| |f|^p d_g(\cdot, Gx_0)^{-s} \|_1$. On définit $2^*(k, s) = \frac{2(n-k-s)}{n-k-2}$, et on montre que

Théorème 0.1.2 (Mesmar). *On se donne une variété Riemannienne compacte sans bord (M, g) de dimension $n \geq 3$ et G un sous-groupe d'isométries de (M, g) . On suppose que l'hypothèses 0.1.1 est vérifiée, et on se donne k et Gx_0 comme dans ces hypothèses.*

On suppose que $n - k \geq 3$. Alors, pour tout $q \in [1, 2^*(k, s)]$, $H_{1,G}^2(M)$ est inclus continuellement dans $L^q(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})$. De plus si $1 \leq q < 2^*(k, s)$ l'inclusion est compacte.

Notons que le cas $s = 0$ a été par Faget [17] et le cas $k = 0$ a été traité par Jaber [31]. A partir de cette inclusion, nous définissons la première meilleure constante des inégalité de Hardy-Sobolev en présence d'isométries. Il suit du Théorème 0.1.2 qu'il existe $L, B > 0$ tels que pour tout $u \in H_{1,G}^2(M)$:

$$\|u\|_{2^*(k,s)}^2 \leq L\|\nabla u\|_2^2 + B\|u\|_2^2 \quad (3)$$

Nous définissons la première meilleure constante comme étant

$$L_0 = L_0(M, g, n, k, s, x_0) = \inf\{L \geq 0 \text{ t.q. } \exists B \text{ tel que (3) est vérifiée pour tout } u \in H_{1,G}^2(M)\}$$

Définition 0.1.3. On se donne $m \geq 3$ et on définit la meilleure constante de Sobolev Euclidienne, notée $K_s(m)$. Cette constante ne dépend que de n, s et m , et elle vérifie

$$\frac{1}{K_s(m)} = \inf_{\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \phi|^2 dX}{\left(\int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\phi|^{2^*(k,s)}}{|X|^s} dX\right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} \quad (4)$$

avec $2^*(k, s) = \frac{2(m-s)}{m-2}$.

On note $2^* = 2^*(0, 0)$ et $2^*(k) = 2^*(k, 0)$. En effet dans le cas $k = s = 0$, Aubin [3] et Talenti [44] ont démontré que la première meilleure constante de Sobolev constante de Sobolev, notée $K_0(n)$, vaut

$$K_0(n) = \frac{4}{n(n-2)w_n^{\frac{2}{n}}} \quad (5)$$

où w_n est le volume de la n -sphère unité. D'autre part en prenant A le minimum du volume de dimension d'orbite principale de dimension k , Faget [17] a prouvé que la meilleure constante dans les inégalités de Sobolev pour des fonctions G invariantes est

$$K_0(n, k, A) = \frac{K_0(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k)}}} \quad (6)$$

De plus, pour le cas $k = 0$, Jaber [31] a montré que

$$L_0(M, g, n, 0, s, x_0) = K_s(n) = \frac{1}{(n-2)(n-s)} \left(\frac{1}{2-s} w_{n-1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{n-2}{2-s}\right)}{\Gamma\left(\frac{2(n-s)}{2-s}\right)} \right)^{-\frac{2-s}{n-s}} \quad (7)$$

où Γ est la fonction d'Euler. De plus, il est démontré dans Lieb [34] que les premières meilleures constantes de Sobolev sont atteintes sur \mathbb{R}^n dans ces cas par

$$\phi_{s,n} = C(\lambda^{2-s} + |X|^{2-s})^{-\frac{2-s}{n-s}} \quad (8)$$

Nous utilisons dans ce chapitre ces propriétés pour montrer le

Théorème 0.1.4 (Mesmar). *On se donne une variété Riemannienne compacte sans bord (M, g) de dimension $n \geq 3$ et G un sous-groupe d'isométries de (M, g) . On suppose que l'hypothèse 0.1.1 est vérifiée, et on se donne k et Gx_0 comme dans ces hypothèses. Pour tout $k \in [1, n-2[$, $s \in (0, 2)$ on a*

$$L_0(M, g, n, k, s, x_0) = \frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}$$

En d'autre terme, la première constante Riemannienne $K_s(n, k)$ dépend de la dimension de la variété M , de s et de la géométrie de (M, g) .

Solutions de l'équation perturbée de Hardy-Sobolev avec poids par le Mountain-Pass Lemma

Le but de ce chapitre est de montrer l'existence d'une solution G -invariante positive $u \in C^2(M)$ pour le problème

$$\Delta_g u + au = \frac{u^{2^*(k,s)-1}}{d_g(x, Gx_0)^s} + hu^{q-1}$$

où $a, h \in C^0(M)$ et $2 < q < 2^*(k)$. On définit la fonctionnelle J_q^+ pour tout $v \in H_{1,G}^2(M)$ par

$$J_q^+(v) = \frac{1}{2} \int_M (|\nabla v|_g^2 + av^2) dv_g - \frac{1}{2^*(k,s)} \int_M v_+^{2^*(k,s)} \frac{1}{d_g(x, Gx_0)^s} dv_g - \frac{1}{q} \int_M hv_+^q dv_g$$

On rappelle qu'une suite $(u_N)_{N \in \mathbb{N}} \in H_{1,G}^2(M)$ est dite de Palais-Smale (P-S) pour J_q^+ au niveau β , s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $J_q^+(u_N) \rightarrow \beta$ et $(J_q^+)'(u_N) \rightarrow 0$ fortement dans le dual $H_{1,G}^2(M)'$. On montre que pour tout $\beta < \frac{(2-s)}{2(n-k-s)} \frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}}^{-\frac{m-s}{2-s}}$ et pour toute suite de Palais-Smale $(u_N)_{N \in \mathbb{N}} \in H_{1,G}^2(M)$ pour J_q^+ au niveau β , il existe $u \in H_{1,G}^2(M)$ tel que $J_q^+(u) = \beta$ et la sous-suite près u_N converge fortement vers u dans $H_{1,G}^2(M)$. De plus $(J_q^+)'(u) = 0$. En utilisant le Mountain-Pass-Lemma d'Ambrosetti-Rabinowitz [2], on montre le théorème suivant

Théorème 0.1.5 (Mesmar). *On se donne une variété Riemannienne compacte sans bord (M, g) de dimension $n \geq 3$ et G un sous-groupe d'isométries de (M, g) . On suppose que l'hypothèse 0.1.1 est vérifiée, et on se donne $k \geq 0$ et Gx_0 comme dans ces hypothèses. On suppose de plus que $h \geq 0$, et $\Delta_g + a$ est coercif. S'il existe $u_0 \in H_{1,G}^2(M)$, $u_0 \neq 0$, $u \geq 0$ tel que*

$$\sup_{t \geq 0} J_q^+(tu_0) < \frac{(2-s)}{2(n-k-s)} \frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}}^{-\frac{n-k-s}{2-s}} \quad (9)$$

Par suite l'équation perturbée de Hardy-Sobolev admet une solution non triviale dans $C^0(M) \cap H_{1,G}^2(M)$. De plus, on a $u > 0$ dans M et $u \in C^{0,\alpha} \cap C_{loc}^{1,\nu}(M \setminus \{Gx_0\})$, pour tout $\alpha \in (0, \min\{1, 2-s\})$, $\nu \in (0, 1)$.

Dans le cas $k = 0$, ce résultat a été obtenu par Jaber [30]. Pour $s = 0$, cela a été démontré par Djadli [12]. Il s'agit maintenant de donner des critères afin de satisfaire la condition principale d'existence (9). On parvient à la faire par des fonction-tests modélées sur les extrémales Euclidiennes (8). Ces fonctions vont être transférées sur la variété quotient $N = B_\delta(Gx_0)/G$ avec une métrique adaptée, puis ensuite sur M : elle sont finalement définies ainsi en posant $m := n - k$:

$$u_\epsilon = \begin{cases} \left(\frac{\epsilon^{\frac{2-s}{2}}}{\epsilon^{2-s} + d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^{2-s}} \right)^{\frac{m-2}{2-s}} & \text{si } x \in B_{\rho_0}(Gx_0) \\ \left(\frac{\epsilon^{\frac{2-s}{2}}}{\epsilon^{2-s} + \rho_0^{2-s}} \right)^{\frac{m-2}{2-s}} & \text{si } x \in M \setminus B_{\rho_0}(Gx_0) \end{cases}$$

où $\bar{x} = Gx$ est l'orbite de x selon G et $\tilde{g} = \text{Vol}(Gx)^{\frac{2}{n-k-2}} \bar{g}$ est une métrique sur le quotient N et \bar{g} est la métrique sur N issue de la surjection canonique $M \rightarrow M/G$. On renvoie au Chapitre 3 pour les définitions de ces diverses métriques. On obtient alors

que pour $q > \frac{m}{m-2}$, il existe $c > 0$ tel que

$$J_q(t_\epsilon u_\epsilon) \leq \frac{(2-s)}{2(n-k-s)} \frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} - c h(x_0) \epsilon^{m-\frac{q(m-2)}{2}} + o(\epsilon^{m-\frac{q(m-2)}{2}})$$

où $t_\epsilon > 0$ est tel que $\sup_{t \geq 0} J_q(tu_\epsilon) = J_q(t_\epsilon u_\epsilon)$. La condition générale d'existence (9) et ce dernier résultat impliquent directement le théorème suivant :

Théorème 0.1.6 (Mesmar). *On se donne une variété Riemannienne compacte sans bord (M, g) de dimension $n \geq 3$ et G un sous-groupe d'isométries de (M, g) . On suppose que l'hypothèse 0.1.1 est vérifiée, et on se donne k et Gx_0 comme dans ces hypothèses. Soient $a \in C^0(M)$ G -invariantes telles que $\Delta_g + a$ est coercif et soit $s \in]0, 2[$. On définit $2^*(k, s) = \frac{2(n-k-s)}{n-k-2}$, $2^*(k) = 2^*(k, 0)$ et on considère $q \in]2, 2^*(k)[$ et $h \in C^0(M)$, $h \geq 0$. On suppose que*

1. $n - k \geq 4$;
2. $q > \frac{n-k}{n-k-2}$;
3. $h(x_0) > 0$.

Alors l'équation perturbé de Hardy-Sobolev :

$$\Delta_g u + au = \frac{u^{2^*(k,s)-1}}{d_g(x, Gx_0)^s} + hu^{q-1}; \quad u > 0 \text{ dans } M \quad (\text{E})$$

admet une solution non triviale dans $C^0(M) \cap H_{1,G}^2(M)$. De plus $u \in C^{0,\alpha} \cap C_{loc}^{1,\nu}(M \setminus \{Gx_0\})$, pour tout $\alpha \in (0, \min\{1, 2-s\})$, $\nu \in (0, 1)$.

Phénomènes de concentration dans un problème surcritique invariant par isométries

Comme précédemment, on se donne (M, g) une variété Riemannienne compacte lisse sans bord de dimension n . On note G un groupe d'isométries de M qui vérifie l'hypothèse 0.1.1. On considère une famille $(u_\epsilon)_{\epsilon > 0} \in C^2(M)$ de solutions G -invariantes au problème

$$\Delta_g u_\epsilon + h_\epsilon u_\epsilon = \lambda_\epsilon u_\epsilon^{2^*(k)-1}, \quad \int_M u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 1$$

Où u_ϵ doit être G -invariante positive, la famille $(h_\epsilon)_{\epsilon>0} \in C^{1,\theta}(M)$, $\theta \in (0, 1)$ est telle qu'il existe $h_0 \in C^{1,\theta}(M)$ G -invariante telle que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon = h_0 \text{ dans } C^{1,\theta}. \quad (10)$$

et l'énergie λ_ϵ est de type minimale, à savoir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_\epsilon = \frac{A^{1-\frac{2}{2^*(k)}}}{K_0(n-k)} \quad (11)$$

où $K_0(n-k)$ est la meilleure constante Euclidienne définie dans (4) et A est le volume minimal d'orbite de dimension k .

Nous décrivons dans ce chapitre la théorie pour le comportement de 'Blow-up' des u_ϵ lorsque l'énergie des u_ϵ est de type minimal. Nous supposons dans ce qui suit que l'opérateur $\Delta_g + h_0$ est coercif. On voit facilement que (u_ϵ) est bornée dans $H_{1,G}^2$. On suppose tout au long de ce chapitre après passer à une sous-suite près que u_ϵ converge faiblement dans $H_{1,G}^2$ pour certain u_0 , et on suppose de plus que $u_0 \equiv 0$ pour que la concentration se produise.

Comme dans tous les résultats précédents, on garde les notations de l'hypothèses 0.1.1 et on se donne k et Gx_0 comme dans ces hypothèses. On pose pour $x_0 \in M$ un point de concentration d'orbite de dimension minimale k et de volume minimal, $\delta > 0$,

$$N = B_\delta(Gx_0)/G',$$

(N, \bar{g}) la $(n-k)$ -variété Riemannienne dont la surjection de M est une submersion Riemannienne où $k = \min_{x \in M} \dim Gx$. On considère la métrique \tilde{g} appartenant à la classe conforme de \bar{g} définie par $\tilde{g} = \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \bar{g}$, avec $\bar{v}(\bar{x}) = \text{vol}(\Pi^{-1}(\bar{x})) = \text{vol}(Gx)$. Nous quotientons l'équation principale par notre groupe d'isométries G autour d'un point de concentration. On se ramène ainsi à l'étude sur la variété à bord (N, \tilde{g}) du système

$$\Delta_{\tilde{g}} \bar{u}_\epsilon + \tilde{h}_\epsilon \bar{u}_\epsilon = \tilde{f}_\epsilon \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1}, \quad \int_N \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \bar{u}_\epsilon^{2^*} dv_{\tilde{g}} = 1 + o(1) \quad (\tilde{E}_\epsilon)$$

avec $\tilde{h}_\epsilon = \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \bar{h}_\epsilon$ et $\tilde{f}_\epsilon = \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \lambda_\epsilon$. On suppose de plus qu'il existe $a \in C^{0,\alpha}(M)$,

où $\alpha \in]0, 1[$, et $h > 0$ tel que pour tout $x \in M$, on a

$$0 < h \leq a(x) \leq h_\epsilon(x) \quad (12)$$

et l'opérateur $\Delta_g + a$ est coercif.

Notons que la suite u_ϵ comme décrite ci-dessus apparait naturellement dans plusieurs problèmes. Parmi beaucoup, pour $k = 0$ c'est le cas du problème de Yamabe, où la meilleure constante pour les inégalités de Sobolev intervient. On s'inspire notre travail du cas sans isométries $k = 0$ qui a été traité par Druet-Hebey-Robert [15].

L'hypothèse d'énergie minimal (11) impose la concentration sur une seule orbite Gx_0 de dimension minimale k et de volume minimal $\text{Vol}(Gx_0) = A$. Puis, pour tout $x_\epsilon \in M$ le point où u_ϵ atteint son max, nous définissons μ_ϵ tel que $\mu_\epsilon^{1-\frac{n-k}{2}} = u_\epsilon(x_\epsilon)$. Avec ces notations, on montre que Gx_ϵ converge vers l'orbite de concentration Gx_0 . Notre résultat principal est le contrôle ponctuel de la famille $(u_\epsilon)_\epsilon$:

Théorème 0.1.7 (Mesmar). *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension n , et posons G un sous groupe fermé des isométries de M qui vérifie l'hypothèse 0.1.1. Soit (u_ϵ) une suite de solution de (E_ϵ) de sorte que $u_\epsilon > 0$, G -invariants et*

$$\Delta_g u_\epsilon + h_\epsilon u_\epsilon = \lambda_\epsilon u_\epsilon^{2^*(k)-1}, \quad \int_M u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 1$$

Pour tout ϵ qui converge faiblement vers u_0 dans $H_{1,G}^2(M)$. Où k représente la dimension minimale d'orbite de concentration de G et on note $m = n - k$. On suppose que $u_\epsilon \rightarrow 0$, que h_ϵ vérifie (10) et λ_ϵ vérifie (11). Alors, avec les notations ci-dessus, il existe $C > 0$ indépendant de ϵ , et $\theta_\epsilon \rightarrow 0$ tel que pour tout $x \in M$

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x) &\leq C \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} d_g(Gx_\epsilon, x)^{2-m} + C \theta_\epsilon \\ |\nabla u_\epsilon|(x) &\leq C \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} d_g(Gx_\epsilon, x)^{1-m} + C \theta_\epsilon \end{aligned} \quad (13)$$

avec

$$\theta_\epsilon := \sup_{x \in \partial B_{\delta/2}(Gx_0)} u_\epsilon(x)$$

La difficulté essentielle est que nous passons d'une variété sans bord M , à la variété N avec bord. Du coup, contrairement à l'analyse de Druet-Hebey-Robert qui utilise des propriétés globales sur la variété, nous devons traiter d'un bord sur lequel nous n'avons

aucune information. Ceci est problématique pour la suite de l'analyse et l'application d'une identité de Pohozaev. Nous parvenons à surmonter cette difficulté en prouvant la concentration L^2 de u_ϵ , à savoir pour tout $r > 0$, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{M \setminus B(Gx_\epsilon, r)} u_\epsilon^2 dv_g}{\int_M u_\epsilon^2 dv_g} = 0 \text{ pour } m = n - k \geq 4.$$

On parvient à en déduire un contrôle de θ_ϵ , à savoir

$$\theta_\epsilon^2 = \begin{cases} o(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m \geq 5 \\ o(\mu_\epsilon^2 \ln(\frac{1}{\mu_\epsilon})) & \text{si } m = 4 \end{cases} \quad (14)$$

On suppose maintenant que

$$\text{La fonction } \bar{x} \mapsto \bar{v}(\bar{x}) = \text{Vol}(Gx) \text{ est non-dégénérée au point } \bar{x}_0 \in N \quad (15)$$

Nous parvenons alors à montrer que l'orbite de concentration Gx_ϵ converge très rapidement vers l'orbite limite Gx_0 :

Théorème 0.1.8 (Mesmar). *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension n , et posons G un sous groupe des isométries de M qui vérifie l'hypothèse 0.1.1. Soit (u_ϵ) une suite de solution positives et G -invariantes de*

$$\Delta_g u_\epsilon + h_\epsilon u_\epsilon = \lambda_\epsilon u_\epsilon^{2^*(k)-1}, \quad \int_M u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 1 \quad (E_\epsilon)$$

avec $(h_\epsilon) \in C^1(M)$ G -invariante et $\lambda_\epsilon \in \mathbb{R}$. On suppose que (10), (11), (12) et (15) ont lieu. On suppose que $u_\epsilon \rightarrow 0$ faiblement dans $H_1^2(M)$. Alors Gx_ϵ converge vers le seul orbite de concentration Gx_0 . De plus, on a

$$d_g(x_\epsilon, Gx_0) = o(\mu_\epsilon)$$

A l'aide de ce théorème, et des identités de Pohozaev vues dans Ghoussoub-Robert [20], on peut trouver une relation entre le courbure scalaire d'une métrique sur la variété N et la fonction h_0 et \bar{v} :

Théorème 0.1.9 (Mesmar). *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension n , et posons G un sous groupe fermé des isométries de M qui vérifie l'hy-*

pothèse 0.1.1. Soit (u_ϵ) une suite de solution de (E_ϵ) de sorte que $u_\epsilon > 0$, G -invariants et

$$\Delta_g u_\epsilon + h_\epsilon u_\epsilon = \lambda_\epsilon u_\epsilon^{2^*(k)-1}, \quad \int_M u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 1$$

Où k représente la dimension minimale d'orbite de concentration de G et on note $m = n - k$. On suppose que $u_\epsilon \rightharpoonup 0$ faiblement dans $H_{1,G}^2(M)$. On suppose que (10), (11) et (15) ont lieu. Soit $(x_\epsilon)_{\epsilon>0}$ une suite des points de M où u_ϵ atteint son max qui converge vers x_0 , où Gx_0 est la seule orbite de concentration. Alors

$$h_0(x_0) = \frac{m-2}{4(m-1)} \left(\text{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0) + 3 \frac{\Delta_{\bar{g}} \bar{v}(\bar{x}_0)}{\bar{v}(\bar{x}_0)} \right) \text{ lorsque } m \geq 4 \quad (16)$$

Où $\bar{v}(\bar{x}) = \text{Vol}(Gx)$ et \bar{g} est la métrique du quotient Ω/G introduite au Chapitre 3.

A titre de remarque, notre analyse est assez robuste pour fonctionner sur un problème sur un ouvert de l'espace Euclidien sans condition au bord en faisant une hypothèse de concentration L^2 et de non-dégénérescence de potentiel.

La Partie 7 regroupe les notations utilisées dans tout le manuscrit.

0.2 Version Anglaise

Let (M, g) be a compact Riemannian manifold without boundary of dimension $n \geq 3$. In this thesis, we are concerned with the problem of existence of a function $u \in C^2(M)$ solution of a nonlinear elliptic equation of the type :

$$\begin{cases} \Delta_g u + au = u^p + h(x, u) & \text{in } M, \\ u > 0 & \text{in } M \end{cases} \quad (17)$$

where $\Delta_g := -\text{div}_g(\nabla)$ is the Laplacian with minus sign convention, $a \in C^0(M)$, $p > 1$ and $(x, u) \mapsto h(x, u)$ is a lower-order perturbation of u^p in the sense that $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{h(x, u)}{u^p} = 0$. This problem is similar to the following Euclidean problem : for $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a regular domain, we consider the solutions $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ of

$$\begin{cases} \Delta u + \tilde{a}u = u^p + \tilde{h}(x, u) & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (18)$$

where $\Delta := -\operatorname{div}(\nabla) = -\sum_i \partial_{ii}$ is the usual Laplacian, $\tilde{a} \in C^0(\Omega)$, $p > 1$ et $(x, u) \mapsto \tilde{h}(x, u)$ is a lower-order perturbation of u^p . The methods exposed or developed in this manuscript can be applied perfectly to the Euclidean case of an open subset of \mathbb{R}^n .

The problem (1) admits a variational formulation in the Sobolev space $H_1^2(M)$ which is the completion of $C^\infty(M)$ for the norm

$$u \mapsto \|u\|_{H_1^2} := \sqrt{\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2}$$

where the norms $\|\cdot\|_q$ on the Lebesgue spaces $L^q(M)$ are taken with respect to the Riemannian volume element dv_g . It follows from the Sobolev embeddings that :

$$H_1^2(M) \hookrightarrow L^{p+1}(M) \text{ continually if } 1 < p \leq 2^* - 1 \text{ with } 2^* := \frac{2n}{n-2}$$

and that this embedding is compact if and only if $p < 2^* - 1$. When the exponent p is subcritical, that is $1 < p < 2^* - 1$, the problem becomes compact and allows the use of classical variational methods. The existence and the multiplicity of solutions of (17) are then well known. We refer to Chapter 2 of this manuscript for the presentation of the classical variational method by minimization.

The critical case $p = 2^* - 1$ is more complicated, because the Sobolev embedding associated with the variational formulation is not compact, which blocks the application of classical abstract theories. Geometrically, this critical problem comes from the scalar curvature equation and gave rise to the Yamabe problem which was solved by Gilbarg-Trudinger [22], Aubin [3] and Schoen [42]. Possible references on the problems in the critical case are Hebey [25], Lee-Parker [33], Schoen [42]. The method developed by Aubin was taken up by Brezis-Nirenberg [9] in the Euclidean case (18). The minimization methods thus introduced basically use the best constants in Sobolev embeddings : they are detailed in Chapter 2.

In this thesis, we are interested in the supercritical case $p > 2^* - 1$. The first difficulty is that the problem is not well posed in the natural Sobolev space $H_1^2(M)$ which does not immerse in $L^{p+1}(M)$. One method to study this supercritical problems is to impose an invariances by a group of isometries as was done in Escobar-Schoen [16], Hebey-Vaugon [26], Saintier [40] or even Faget [17]. We are therefore going to give ourselves a subgroup G of the isometric group of (M, g) . In the trivial case of a free action, the

quotient M/G is a smooth manifold of dimension $n - k$, $k \geq 1$, and for $n - k > 2$, $2^*(k) := \frac{2(n-k)}{n-k-2} > 2^*$. Thus, by studying a supercritical invariant G -problem with the exponent $2^*(k)$ on M , we artificially reduce our supercritical problem on M of dimension n to a critical problem on the quotient M/G of dimension $n - k$. In our work, we will consider the more difficult case of groups which does not act freely : the problem will then be that the quotient M/G will no longer be a manifold, and the previous techniques will no longer work. We will make on G the following fundamental hypothesis inspired by the work of [40] :

Hypothesis 0.2.1. *For any Gx_0 , a G -orbit of minimal dimension k , we can find $\delta > 0$, and G' a closed subgroup of $Isom_g(M)$ such that :*

1. $G'x_0 = Gx_0$;
2. For all $x \in B_\delta(Gx_0) := \{y \in M / d_g(y; Gx_0) < \delta\}$, then $G'x$ is principal and $G'x \subset Gx$.

In particular $\dim G'x = \dim Gx_0 = k, \forall x \in B_\delta(Gx_0)$.

The importance of this assumption is that it ensures that $B_\delta(Gx_0)/G'$ can be considered as a Riemannian manifold of dimension $n - k$. We refer to Chapter 3 for more details on these concepts.

Best constants of Sobolev space with weight and isometric invariance

In Chapter 3, we prove that for any compact Riemannian manifold of dimension $n \geq 3$, the first best constant of the Hardy-Sobolev G -invariant Riemannian inequalities is those of the Euclidean inequality divided by a power of volume of minimal dimensional orbit. We notice

$$H_{1,G}^2(M) := \{u \in H_1^2(M) / u \circ \sigma(x) = u(x) \text{ for all } \sigma \in G \text{ a.e } x \in M\}.$$

For all $s \in]0,2[$, let $L^p(M, \frac{dv_g}{d_g(x,Gx_0)^s})$ the Lebesgue space with weight defined as being the set of functions $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, such that $|f|^p d_g(\cdot, Gx_0)^{-s} \in L^1(M)$, and we write $\|f\|_{p,s} = \| |f|^p d_g(\cdot, Gx_0)^{-s} \|_1$. We define $2^*(k, s) = \frac{2(n-k-s)}{n-k-2}$, and we show that

Theorem 0.2.2 (Mesmar). *Let (M, g) be a compact Riemannian manifold without boundary of dimension $n \geq 3$ and G a subgroup of isometries of (M, g) . We suppose that the*

hypothesis 0.2.1 is verified, and we give ourselves k and Gx_0 as in these hypothesis. Assume that $n - k \geq 3$. Then, for any $q \in [1, 2^(k, s)]$, $H_{1,G}^2(M)$ is continuously included in $L^q(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})$. Moreover if $1 \leq q < 2^*(k, s)$ the inclusion is compact.*

Note that the case $s = 0$ was handled by Faget [17] and the case $k = 0$ was handled by Jaber [31]. From this inclusion, we define the first best constant of the Hardy-Sobolev inequalities in the presence of isometries. It follows from Theorem 0.2.2 that there exists $L, B > 0$ such that for all $u \in H_{1,G}^2(M)$:

$$\|u\|_{2^*(k,s),s}^2 \leq L\|\nabla u\|_2^2 + B\|u\|_2^2 \quad (19)$$

We define the first best constant to be

$$L_0 = L_0(M, g, n, k, s, x_0) = \inf\{L \geq 0 \text{ such that } \exists B \text{ verify (19)} \forall u \in H_{1,G}^2(M)\}$$

Definition 0.2.3. For any $m \geq 3$ we define the best constant of Euclidean Sobolev space, denoted by $K_s(m)$. This constant only depends on n, s and k , and it satisfies

$$\frac{1}{K_s(m)} = \inf_{\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \phi|^2 dX}{\left(\int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\phi|^{2^*(k,s)}}{|X|^s} dX\right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} \quad (20)$$

where $m = n - k$ and $2^*(k, s) = \frac{2(m-s)}{m-2}$.

We denote by $2^* = 2^*(0, 0)$ and $2^*(k) = 2^*(k, 0)$. Indeed in the case $k = s = 0$, Aubin [3] and Talenti [44] have shown that the first best constant of Sobolev space, denoted $K_0(n)$, is

$$K_0(n) = \frac{4}{n(n-2)w_n^{\frac{2}{n}}} \quad (21)$$

where w_n is the volume of the n -unit sphere. On the other hand by taking A the minimum of the volume of principal orbit of dimension k , Faget [17] proved that the best constant in Sobolev inequalities for G -invariant is

$$K_0(n, k, A) = \frac{K_0(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k)}}} \quad (22)$$

Moreover, for the case $k = 0$, Jaber [31] showed that

$$L_0(M, g, n, 0, s, x_0) = K_s(n) = \frac{1}{(n-2)(n-s)} \left(\frac{1}{2-s} w_{n-1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{n-2}{2-s}\right)}{\Gamma\left(\frac{2(n-s)}{2-s}\right)} \right)^{-\frac{2-s}{n-s}} \quad (23)$$

where Γ is the Euler function. Moreover, it is shown in Lieb [34] that the first best constant of Sobolev space is achieved on \mathbb{R}^n in these cases, by

$$\phi_{s,n} = C(\lambda^{2-s} + |X|^{2-s})^{-\frac{2-s}{n-s}} \quad (24)$$

In this chapter, we use these properties to prove that

Theorem 0.2.4 (Mesmar). *Let (M, g) a compact Riemannian manifold without boundary of dimension $n \geq 3$ and G a subgroup of isometries of (M, g) . We suppose that the hypothesis 0.2.1 is verified, and we give ourselves k and Gx_0 as in these hypothesis. For all $k \in [1, n-2]$, $s \in (0, 2)$ we have*

$$L_0(M, g, n, k, s, x_0) = \frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}}$$

In other words, the first best constant of Riemannian Sobolev space $K_s(n, k)$ depends on the dimension of the manifold M , on s and on the geometry of (M, g) .

Solutions of the perturbed Hardy-Sobolev equation with weight by the Mountain-Pass Lemma

The aim of this chapter is to show the existence of a positive invariant G -solution $u \in C^2(M)$ for the problem

$$\Delta_g u + au = \frac{u^{2^*(k,s)-1}}{d_g(x, Gx_0)^s} + hu^{q-1}$$

where $a, h \in C^0(M)$ and $2 < q < 2^*(k)$. We define the functional J_q^+ for any $v \in H_{1,G}^2(M)$ by

$$J_q^+(v) = \frac{1}{2} \int_M (|\nabla v|_g^2 + av^2) dv_g - \frac{1}{2^*(k,s)} \int_M v_+^{2^*(k,s)} \frac{1}{d_g(x, Gx_0)^s} dv_g - \frac{1}{q} \int_M hv_+^q dv_g$$

Recall that, a sequence $(u_N)_{N \in \mathbb{N}} \in H_{1,G}^2(M)$ is a Palais-Smale sequence (PS) for J_q^+ at the β -level, if there is $\beta \in \mathbb{R}$ such that $J_q^+(u_N) \rightarrow \beta$ and $(J_q^+)'(u_N) \rightarrow 0$ strongly in the dual $H_{1,G}^2(M)'$. We show that for all $\beta < \frac{(2-s)}{2(n-ks)} \frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}}^{-\frac{ms}{2-s}}$ and for every Palais-Smale sequence $(u_N)_{n \in \mathbb{N}} \in H_{1,G}^2(M)$ for J_q^+ at the β -level, there exists $u \in H_{1,G}^2(M)$ such that $J_q^+(u) = \beta$ and u_N converges strongly to u in $H_{1,G}^2(M)$. In addition $(J_q^+)'(u) = 0$. Using Ambrosetti-Rabinowitz's Mountain-Pass-Lemma [2], we show the following theorem :

Theorem 0.2.5 (Mesmar). *Let (M, g) be a compact Riemannian manifold without boundary of dimension $n \geq 3$ and G a subgroup of isometries of (M, g) . We suppose that the hypothesis 0.2.1 is verified, and we give ourselves k and Gx_0 as in these hypothesis. In addition, we assume that $h \geq 0$ and $\Delta_g + a$ is coercif. If there exists $u_0 \in H_{1,G}^2(M)$, $u_0 \not\equiv 0$, $u \geq 0$ such that*

$$\sup_{t \geq 0} J_q^+(tu_0) < \frac{(2-s)}{2(n-ks)} \frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}}^{-\frac{n-ks}{2-s}} \quad (25)$$

Hence, the perturbed Hardy-Sobolev equation admits a non-trivial solution in $C^0(M) \cap H_{1,G}^2(M)$. In addition, we have $u > 0$ in M and $u \in C^{0,\alpha} \cap C_{loc}^{1,\nu}(M \setminus \{Gx_0\})$, for all $\alpha \in (0, \min\{1, 2-s\})$, $\nu \in (0, 1)$.

In the case $k = 0$, this result was obtained by Jaber [30]. For $s = 0$, this has been proved by Djadli [12]. Now the question is to giving criteria in order to satisfy the main condition of existence (25). We do it by test-functions (24) modeled on the Euclidean extremals . These functions will be transferred to the quotient manifold $N = B_\delta(Gx_0)/G$ with an adapted metric, then to M : they are finally defined by setting $m := n - k$:

$$u_\epsilon = \begin{cases} \left(\frac{\epsilon^{\frac{2-s}{2}}}{\epsilon^{2-s} + d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^{2-s}} \right)^{\frac{m-2}{2-s}} & \text{if } x \in B_{\rho_0}(Gx_0) \\ \left(\frac{\epsilon^{\frac{2-s}{2}}}{\epsilon^{2-s} + \rho_0^{2-s}} \right)^{\frac{m-2}{2-s}} & \text{if } x \in M \setminus B_{\rho_0}(Gx_0) \end{cases}$$

where $\bar{x} = Gx$ is the orbit of x according to G and $\tilde{g} = \text{Vol}(Gx)^{\frac{2}{n-k-2}} \bar{g}$ is a metric on the quotient manifold N and \bar{g} is the metric on N resulting from the canonical surjection

$M \rightarrow M/G$. We refer to Chapter 3 for the definitions of these various metrics. We then obtain that for $q > \frac{m}{m-2}$, there exists $c > 0$ such that

$$J_q(t_\epsilon u_\epsilon) \leq \frac{(2-s)}{2(n-ks)} \frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} \frac{2^*(k,s)}{2^*(k,s)-2} - c h(x_0) \epsilon^{m-\frac{q(m-2)}{2}} + o(\epsilon^{m-\frac{q(m-2)}{2}})$$

where $t_\epsilon > 0$ is such that $\sup_{t \geq 0} J_q(tu_\epsilon) = J_q(t_\epsilon u_\epsilon)$. The general existence condition (25) and this last result directly imply the following theorem :

Theorem 0.2.6 (Mesmar). *Let (M, g) be a compact Riemannian manifold without boundary of dimension $n \geq 3$ and G a subgroup of isometries of (M, g) . We suppose that the hypothesis 0.2.1 is verified, and we give ourselves k and Gx_0 as in these hypothesis. Let $a \in C^0(M)$ be G -invariant such that $\Delta_g + a$ is coercive and let $s \in]0, 2[$. We define $2^*(k, s) = \frac{2(n-ks)}{n-k-2}$, $2^*(k) = 2^*(k, 0)$ and we consider $q \in]2, 2^*(k)[$ and $h \in C^0(M)$, $h \geq 0$. We suppose that*

1. $n - k \geq 4$;
2. $q > \frac{n-k}{n-k-2}$;
3. $h(x_0) > 0$.

Then the perturbed Hardy-Sobolev equation :

$$\Delta_g u + au = \frac{u^{2^*(k,s)-1}}{d_g(x, Gx_0)^s} + hu^{q-1} ; u > 0 \text{ in } M \quad (\text{E})$$

admits a non-trivial solution in $C^0(M) \cap H_{1,G}^2(M)$. In addition $u \in C^{0,\alpha} \cap C_{loc}^{1,\nu}(M \setminus \{Gx_0\})$, for all $\alpha \in (0, \min\{1, 2-s\})$, $\nu \in (0, 1)$.

Concentration phenomena in a supercritical problem invariant by isometries

As before, we give (M, g) a smooth compact Riemannian manifold without boundary of dimension n . We denote by G a group of isometries of M which satisfies the hypothesis 0.2.1. We consider a family $(u_\epsilon)_{\epsilon > 0} \in C^2(M)$ of G -invariants solutions to the problem

$$\Delta_g u_\epsilon + h_\epsilon u_\epsilon = \lambda_\epsilon u_\epsilon^{2^*(k)-1}, \int_M u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 1 \quad (26)$$

Where u_ϵ must be positive G -invariant, the family $(h_\epsilon)_{\epsilon>0} \in C^{1,\theta}(M)$, $\theta \in (0, 1)$ is such that there exists $h_0 \in C^{1,\theta}(M)$ G -invariant such that

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon = h_0 \text{ in } C^{1,\theta}. \quad (27)$$

and the energy λ_ϵ is of minimal type, that is

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_\epsilon = \frac{A^{1-\frac{2}{2^*(k)}}}{K_0(n-k)} \quad (28)$$

where $K_0(n-k)$ is the best constant of Euclidean Sobolev space defined in (20) and A is the minimum volume of dimension k .

We describe in this chapter the theory for the 'Blow-up' behavior of u_ϵ when the energy of u_ϵ is of minimal type. We assume in the following that the operator $\Delta_g + h_0$ is coercive. We can easily see that (u_ϵ) is bounded in $H_{1,G}^2$. We assume throughout this chapter after going to a sub-sequence that u_ϵ converges weakly in $H_{1,G}^2$ for some u_0 , and further assume that $u_0 \equiv 0$ for the concentration to occur.

As in all the previous results, we keep the notations of the hypothesis 0.2.1 and we give ourselves k and Gx_0 as in these hypothesis. We set for $x_0 \in M$ an concentration orbit of minimal dimension k and minimal volume, $\delta > 0$,

$$N = B_\delta(Gx_0)/G',$$

(N, \bar{g}) the Riemannian $(n-k)$ -manifold whose surjection of M is a Riemannian submersion where $k = \min_{x \in M} \dim Gx$. We consider the metric \tilde{g} belonging to the conforming class of \bar{g} defined by $\tilde{g} = \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \bar{g}$, with $\bar{v}(\bar{x}) = \text{vol}(\Pi^{-1}(\bar{x})) = \text{vol}(Gx)$

We quotient the main equation by our group of isometries G around a point of concentration. We thus come back to the study of the bounded manifold (N, \tilde{g}) of the system

$$\Delta_{\tilde{g}} \bar{u}_\epsilon + \tilde{h}_\epsilon \bar{u}_\epsilon = \tilde{f}_\epsilon \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1}, \quad \int_N \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \bar{u}_\epsilon^{2^*} dv_{\tilde{g}} = 1 + o(1) \quad (\tilde{E}_\epsilon)$$

with $\tilde{h}_\epsilon = \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \bar{h}_\epsilon$ and $\tilde{f}_\epsilon = \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \lambda_\epsilon$. We further assume that there exists $a \in C^{0,\alpha}(M)$, where $\alpha \in]0, 1[$, and $h > 0$ such that for all $x \in M$, we have

$$0 < h \leq a(x) \leq h_\epsilon(x) \quad (29)$$

and the operator $\Delta_g + a$ is coercif. Note that the sequence u_ϵ as described above appears naturally in several problems. Among many, for $k = 0$ this is the case of the Yamabe problem, where the best constant for the Sobolev inequalities occurs. We are inspire our work from the case without isometric $k = 0$ which was treated by Druet-Hebey-Robert [15].

The minimal energy assumption (28) imposes the concentration on a single orbit Gx_0 of minimal dimension k and minimal volume $\text{Vol}(Gx_0) = A$. Then, for every $x_\epsilon \in M$ the point where u_ϵ reaches its maximum we define μ_ϵ such that $\mu_\epsilon^{1-\frac{n-k}{2}} = u_\epsilon(x_\epsilon)$. With these notations, we show that Gx_ϵ converges to the single orbit of concentration Gx_0 . Our main result is the punctual control of the family $(u_\epsilon)_\epsilon$:

Theorem 0.2.7 (Mesmar). *Let (M, g) be a compact Riemannian manifold of dimension n without boundary, and let G be a closed subgroup of isometries of M which satisfies the hypothesis 0.2.1. Let (u_ϵ) be a sequence of solution of (26) so that $u_\epsilon > 0$, G -invariants and*

$$\Delta_g u_\epsilon + h_\epsilon u_\epsilon = \lambda_\epsilon u_\epsilon^{2^*(k)-1}, \quad \int_M u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 1$$

For any ϵ , which weakly converges to u_0 in $H_{1,G}^2(M)$. Where k represents the minimum dimension of the concentration orbit of G and we denote by $m = n - k$. Assume that $u_\epsilon \rightharpoonup 0$, that (h_ϵ) satisfies (27) and (29), and λ_ϵ is at (28). Then, with the notations above, there exists $C > 0$ independent of ϵ , and $\theta_\epsilon \rightarrow 0$ such that for all $x \in M$

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x) &\leq C \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} d_g(Gx_\epsilon, x)^{2-m} + C\theta_\epsilon \\ |\nabla u_\epsilon|(x) &\leq C \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} d_g(Gx_\epsilon, x)^{1-m} + C\theta_\epsilon \end{aligned} \quad (30)$$

with

$$\theta_\epsilon := \sup_{x \in \partial B_{\delta/2}(Gx_0)} u_\epsilon(x)$$

The essential difficulty is that we pass from a manifold without boundary M , to the boundary manifold N . Unlike the Druet-Hebey-Robert analysis which uses global properties on the manifold, we have to deal with a boundary on which we have no information. This is problematic for the further analysis and application of a Pohozaev identity. We manage to overcome this difficulty by proving the concentration L^2 of u_ϵ ,

that is, for all $r > 0$, we have

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{M \setminus B(Gx_\epsilon, r)} u_\epsilon^2 dv_g}{\int_M u_\epsilon^2 dv_g} = 0 \text{ for } m = n - k \geq 4.$$

We succeed in deducing a control of θ_ϵ :

$$\theta_\epsilon^2 = \begin{cases} o(\mu_\epsilon^2) & \text{if } m \geq 5 \\ o(\mu_\epsilon^2 \ln(\frac{1}{\mu_\epsilon})) & \text{if } m = 4 \end{cases} \quad (31)$$

It is now assumed that

$$\text{The function } \bar{x} \mapsto \bar{v}(\bar{x}) = \text{Vol}(Gx) \text{ is non-degenerate at } \bar{x}_0 \in N \quad (32)$$

We then manage to show that the concentration orbit Gx_ϵ converges very quickly towards the limiting orbit Gx_0 :

Theorem 0.2.8 (Mesmar). *Let (M, g) be a compact Riemannian manifold without boundary of dimension n , and let G be a subgroup of the isometries of M which satisfies the hypothesis 0.2.1. Let (u_ϵ) be a sequence of positive and G -invariant solutions of*

$$\Delta_g u_\epsilon + h_\epsilon u_\epsilon = \lambda_\epsilon u_\epsilon^{2^*(k)-1}, \quad \int_M u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 1 \quad (E_\epsilon)$$

with $(h_\epsilon) \in C^1(M)$ G -invariant and $\lambda_\epsilon \in \mathbb{R}$. We assume that (27), (28), (29) and (32) hold. Assume that $u_\epsilon \rightharpoonup 0$ weakly in $H_1^2(M)$. Then Gx_ϵ converges to the single concentration orbit Gx_0 . In addition, we have

$$d_g(x_\epsilon, Gx_0) = o(\mu_\epsilon)$$

Using this theorem, and the Pohozaev identities seen in Ghoussoub-Robert [20], we can find a relation between the scalar curvature of a metric on the manifold N and the function h_0 and \bar{v} :

Theorem 0.2.9 (Mesmar). *Let (M, g) be a compact Riemannian manifold of dimension n without boundary, and let G be a closed subgroup of isometries of M which satisfies the hypothesis 0.2.1. Let (u_ϵ) be a sequence of solution of (26), so that $u_\epsilon > 0$, G -*

invariants and

$$\Delta_g u_\epsilon + h_\epsilon u_\epsilon = \lambda_\epsilon u_\epsilon^{2^*(k)-1}, \int_M u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 1$$

Where k represents the minimum dimension of the concentration orbit of G and we denote by $m = n - k$. We assume that $u_\epsilon \rightharpoonup 0$ weakly in $H_{1,G}^2(M)$. We assume that (27), (28), (29) and (32) hold. Let $(x_\epsilon)_{\epsilon>0}$ be a sequence of points of M where u_ϵ reaches its maximum which converges to x_0 , where Gx_0 is the only concentration orbit. Then

$$h_0(x_0) = \frac{m-2}{4(m-1)} \left(\text{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0) + 3 \frac{\Delta_{\bar{g}} \bar{v}(\bar{x}_0)}{\bar{v}(\bar{x}_0)} \right) \text{ when } m \geq 4 \quad (33)$$

Where $\bar{v}(\bar{x}) = \text{Vol}(Gx)$ and \bar{g} is the metric of the quotient Ω/G introduced in Chapter 3.

As a remark, our analysis is robust enough to work on an open problem of Euclidean space without boundary condition by making an assumption of L^2 concentration and non-degeneration of potential.

The chapter 7 groups together the notations used throughout the manuscript.

Matériel de base

Nous rappelons dans ce chapitre des faits de base concernant la géométrie Riemannienne et analyse non linéaire sur les variétés. Pour des raisons de longueur, nous sommes succints et partiels. Les références possibles sont Chavel [10], do Carmo [13], Gallot-Hulin-Lafontaine [18], Hebey [25], Jost [32], Kobayashi-Nomizu [46], Sakai [41], Spivak [43], et Druet-Hebey-Robert [15]. Comme remarque générale, nous mentionnons que la convention de sommation d'Einstein est adoptée : un indice apparaissant deux fois dans un produit doit être additionné. Cela vaut également pour le reste de cette thèse. Il arrivera aussi qu'on conserve la même notation pour des constantes différentes d'un ligne à l'autre et parfois dans la même ligne.

1.1 Géométrie Riemannienne

Nous commençons par quelques notions de géométrie différentielle. Soit M un espace topologique séparé. On dit que M est une variété topologique de dimension n si chaque point de M possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ensemble ouvert de l'espace euclidien \mathbb{R}^n . une carte de M est alors un couple (Ω, φ) où Ω est un ouvert de M , et φ est un homéomorphisme de Ω sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Pour $y \in \Omega$, les coordonnées de $\varphi(y)$ dans \mathbb{R}^n sont dites les coordonnées de y dans (Ω, φ) . Un atlas de M est

une collection de cartes (Ω_i, φ_i) , $i \in I$, telles que $M = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Étant donné un atlas $(\Omega_i, \varphi_i)_{i \in I}$, les fonctions de transition sont

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\Omega_i \cap \Omega_j) \rightarrow \varphi_j(\Omega_i \cap \Omega_j)$$

avec la convention évidente que nous considérons $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ si et seulement si $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$. L'atlas est alors dit de classe C^k si les fonctions de transition sont de classe C^k , et on dit qu'il est C^k -complet s'il n'est pas contenu dans un atlas (strictement) plus grand de classe C^k . Comme on peut facilement le vérifier, chaque atlas de classe C^k est contenu dans un unique atlas C^k -complet. Pour notre propos, nous supposons toujours dans ce qui suit que $k = +\infty$ et que M est connexe. On obtient alors la définition suivante d'une variété lisse : une variété lisse M de dimension n est une variété M de dimension n avec un atlas C^∞ -complet. Des exemples classiques de variétés lisses sont l'espace euclidien \mathbb{R}^n lui-même, le tore T^n , la sphère unité S^n de \mathbb{R}^{n+1} , et l'espace projectif réel $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

Étant donné deux variétés lisses, M et N , et une application lisse $f : M \rightarrow N$ on dit que f est différentiable (ou de classe C^k) si pour n'importe quelle carte (Ω, φ) et $(\bar{\Omega}, \bar{\varphi})$ de M et N tels que $f(\Omega) \subset \bar{\Omega}$, l'application

$$\bar{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \rightarrow \bar{\varphi}(\bar{\Omega})$$

est différentiable (ou de classe C^k). En particulier, cela permet de définir la notion de difféomorphisme et la notion de variétés difféomorphes.

Nous nous référons à la définition ci-dessus d'une variété comme la définition abstraite d'une variété lisse. Une approche plus concrète aurait été de définir les variétés comme des sous-variétés de l'espace euclidien. Selon un résultat bien connu de Whitney [47], toute variété paracompacte de dimension n peut être vue comme une sous-variété d'un certain espace euclidien.

Disons maintenant quelques mots sur l'espace tangent d'une variété. Étant donné M une variété lisse et $x \in M$, soit \mathbb{F}_x l'espace vectoriel des fonctions $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont différentiables en x . Pour $f \in \mathbb{F}_x$, on dit que f est plate en x si pour une certaine carte (Ω, φ) de M en x , $D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} = 0$. Soit \mathbb{N}_x l'espace vectoriel des telles fonctions. on dit alors qu'une forme linéaire X sur \mathbb{F}_x est un vecteur tangent de M en x si $\mathbb{N}_x \subset \text{Ker } X$. Soit $T_x(M)$ l'espace vectoriel de tels vecteurs tangents. Posons (Ω, φ)

une carte en x , de coordonnées associées x^i , on définit $(\frac{\partial}{\partial x_i})_x \in T_x(M)$ par : Pour tout $f \in \mathbb{F}_x$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x .(f) = D_i(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$$

Comme simple remarque, on comprend que les $(\frac{\partial}{\partial x_i})$ forment une base de $T_x(M)$. Maintenant on définit le fibré tangent de M , noté $T(M)$ comme l'union disjointe des $(T_x(M))_{x \in M}$. Si M est de dimension n , on peut montrer que $T(M)$ possède une structure naturelle d'une variété lisse de dimensions $2n$. Étant donné une carte (Ω, φ) de M , on a $(\bigcup_{x \in \Omega} T_x(M), \phi)$ est une carte de $T(M)$, où pour $X \in T_x(M)$, $x \in \Omega$,

$$\phi(X) = (\varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x), X(\varphi^1), \dots, X(\varphi^n))$$

Par définition, un champ vectoriel sur M est une application $X : M \rightarrow T(M)$ tel que pour tout $x \in M$, $X(x) \in T_x(M)$. Puisque M et $T(M)$ sont des variétés lisses, la notion de champ vectoriel de classe C^k a du sens. Une variété M de dimension n est dit parallélisable s'il existe n champs de vecteurs lisses X_i , $i = 1, \dots, n$, tel que pour tout $x \in M$, les $(X_i(x))_{i=1, \dots, n}$, définissent une base de $T_x(M)$.

Étant donné deux variétés lisses, M et N , un point x dans M et une application différentiable $f : M \rightarrow N$ en x , l'application linéaire tangente de f en x (ou l'application différentielle de f en x), notée $f_*(x)$, est l'application linéaire de $T_x(M)$ à $T_{f(x)}(N)$ définie, pour $X \in T_x(M)$ et $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ différentiables en $f(x)$, par

$$(f_*(x).(X)).(g) = X(g \circ f)$$

Par extension, si f est différentiable sur M , on obtient l'application linéaire tangente de f , noté f_* . C'est l'application $f_* : T(M) \rightarrow T(N)$ définie, pour $X \in T_x(M)$, par $f_*(X) = f_*(x).(X)$. Comme on peut facilement le vérifier, f_* est C^{k-1} si f est C^k . Similaire à la construction de l'espace tangent, on peut définir l'espace cotangent d'une variété lisse M comme union disjointe des $(T_x(M)^*)_{x \in M}$. De manière plus générale on peut définir $T_p^q(M)$ comme union disjointe du $T_p^q(T_x(M)^*)$, où $T_p^q(T_x(M)^*)$ est l'espace de (p, q) -tenseurs sur $T_x(M)$. On peut remarque que, $T_p^q(M)$ possède une structure naturelle d'une variété lisse de dimension $n(1 + n^{p+q-1})$. Une carte $T : M \rightarrow T_p^q(M)$ est alors un champ de (p, q) -tenseur sur M si pour tout $x \in M$, $T(x) \in T_p^q(T_x(M))$.

On dit qu'il est de classe C^k s'il est de classe C^k de la variété M dans la variété $T_p^q(M)$.

Étant donné deux variétés M et N , une application $f : M \rightarrow N$ de classe C^{k+1} , et un champ de $(p, 0)$ -tenseur T de classe C^k sur N , on peut définir le pullback f^*T de T par f , c'est le $(p, 0)$ -tenseur sur M défini pour $x \in M$ et $X_1, \dots, X_p \in T_x(M)$, par

$$(f^*T)(x).(X_1, \dots, X_p) = T(f(x)).(f_*(x).X_1, \dots, f_*(x).X_p)$$

Nous définissons maintenant la notion de connexion linéaire. Notons $\Gamma(M)$ l'espace de champs de vecteurs différentiables sur M . Une connexion linéaire D sur M est une application $D : T(M) \times \Gamma(M) \rightarrow T(M)$ qui vérifie

- (i) $\forall x \in M$, si $X \in T_x(M)$, et $Y \in \Gamma(M)$, alors $D(X, Y) \in T_x(M)$
- (ii) $\forall x \in M$, D restreinte à $T_x(M) \times \Gamma(M)$ est bilinéaire
- (iii) $\forall x \in M$, $\forall X \in T_x(M)$, $\forall Y \in \Gamma(M)$, si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, alors $D(X, fY) = X(f)Y(x) + f(x)D(X, Y)$
- (iv) $\forall X, Y \in \Gamma(M)$, et $\forall k \in \mathbb{N}$, si X et Y sont respectivement de classe C^k et C^{k+1} sur M , alors $D(X, Y)$ est de classe C^k sur M , où $D(X, Y)$ est le champ de vecteurs sur M défini pour tout $x \in M$ par la relation $D(X, Y)(x) = D(X(x), Y)$.

On se donne une connexion linéaire D . Soit une carte (Ω, φ) , en coordonnées locales, il existe n^3 fonctions lisses $\Gamma_{ij}^k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, que nous appelons les symboles de Christoffel de la connexion D dans (Ω, φ) . Ils caractérisent la connexion en ce sens que pour tout $X \in T_x(M)$, $x \in \Omega$, et $Y \in \Gamma(M)$,

$$D_X(Y) = X^i(\nabla_i Y)(x) = X^i \left(\left(\frac{\partial Y^j}{\partial x_i} \right)_x + \Gamma_{i\alpha}^j(x) Y^\alpha(x) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_x$$

Où les X^i et Y^i désignent les composantes de X et Y dans la carte (Ω, φ) , et pour $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en x ,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_x = D_i(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$$

On peut vérifier que les Γ_{ij}^k ne sont pas les composantes d'un champ de $(2, 1)$ -tenseur. Une remarque importante est que les connexions linéaires ont des extensions naturelles aux champs de tenseurs différentiables. Étant donné un champ de (p, q) tenseurs différentiable, T , un point x dans M , $X \in T_x(M)$, et une carte (Ω, φ) de M en x , $D_X(T)$ est

le (p, q) -tenseur sur $T_x(M)$ défini par $D_X(T) = X^i(\nabla_i T)(x)$, où

$$\begin{aligned} (\nabla_i T)(x)_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} &= \left(\frac{\partial T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}}{\partial x_i} \right)_x \sum_{k=1}^p \Gamma_{i i_k}^\alpha(x) T(x)_{i_1 \dots i_{k-1} \alpha i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \\ &\quad + \sum_{k=1}^q \Gamma_{i \alpha}^{j_k}(x) T(x)_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_{k-1} \alpha j_{k+1} \dots j_q} \end{aligned}$$

Notons ici, que la dérivée covariante est compatible avec la contraction. Étant donné un (p, q) champ de tenseur de classe C^{k+1} , on pose ∇T le $(p+1, q)$ champ de tenseur de classe C^k dont les composants dans une carte sont donnés par $(\nabla T)_{i_1 \dots i_{p+1}}^{j_1 \dots j_q} = (\nabla_{i_1} T)_{i_2 \dots i_{p+1}}^{j_1 \dots j_q}$.

Par extension, on peut alors définir $\nabla^2 T$, $\nabla^3 T$, etc. Pour $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse, on a que $\nabla f = df$ et, dans toute carte (Ω, φ) de M ,

$$(\nabla^2 f)(x)_{ij} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_x - \Gamma_{ij}^k(x) \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_x$$

où $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_x = D_{ij}^2(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$. Dans le contexte Riemannien, $\nabla^2 f$ est appelé le Hessian de f et est parfois noté par $Hess(f)$.

La torsion T d'une connexion linéaire D peut être vue comme le champ de $(2, 1)$ -tenseur lisse dont les composants dans n'importe quelle carte sont données par la relation $T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$. On dit que la connexion est sans torsion si $T \equiv 0$. La courbure R de D peut être vu comme le champ de $(3, 1)$ -tenseur lisse dont les composantes dans toute carte sont données par la relation

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ki}^l}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^l}{\partial x_k} + \Gamma_{j\alpha}^l \Gamma_{ki}^\alpha - \Gamma_{k\alpha}^l \Gamma_{ji}^\alpha$$

On peut facilement vérifier que $R_{ijk}^l = -R_{ikj}^l$. De plus lorsque la connexion est sans torsion, on a $R_{ijk}^l + R_{kij}^l + R_{jki}^l = 0$ et $(\nabla_i R)_{mj k}^l + (\nabla_k R)_{mi j}^l + (\nabla_j R)_{mk i}^l = 0$. Ces relations sont appelées la première et la seconde identité de Bianchi.

Nous discutons maintenant la géométrie Riemannienne. Soit M une variété lisse, une Riemannienne métrique g sur M est un champ de $(2, 0)$ -tenseur lisse sur M tel que pour tout $x \in M$, $g(x)$ est un produit scalaire sur $T_x(M)$. Une variété Riemannienne

lisse est un paire (M, g) où M est une variété lisse et g une métrique Riemannienne sur M . Par Whitney, pour tout n -variété lisse paracompact, il existe un plongement lisse $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$. On obtient alors que n'importe quelle variété paracompact lisse possède une métrique Riemannienne. Pensez simplement à $g = f^*\xi$, où ξ est la métrique Euclidienne. Deux variétés Riemanniennes (M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont dites isométriques s'il existe un difféomorphisme $f : M_1 \rightarrow M_2$ tel que $f^*g_2 = g_1$.

Étant donné une variété Riemannienne lisse (M, g) , et $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ une courbe de classe C^1 , la longueur de γ est

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\gamma(t)) \cdot \left(\left(\frac{d\gamma}{dt} \right)_t, \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)_t \right)} dt$$

où $\left(\frac{d\gamma}{dt} \right)_t \in T_{\gamma(t)}(M)$ est tel que $\left(\frac{d\gamma}{dt} \right)_t \cdot f = (f \circ \gamma)'(t)$, pour tout $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable à $\gamma(t)$. Si γ est C^1 par morceaux, la longueur de γ peut être définie comme somme des longueurs de ses C^1 morceaux. Pour x et y dans M soit C_{xy} l'espace de courbes C^1 par morceaux $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ telles que $\gamma(a) = x$ et $\gamma(b) = y$. Ensuite $d_g(x, y) = \inf_{\gamma \in C_{xy}} L(\gamma)$ définit une distance sur M dont la topologie coïncide avec celle d'origine de M (en particulier, d'après le théorème de Stone toute variété Riemannienne lisse est paracompacte). Par définition, d_g est la distance associée à g .

Soit (M, g) une variété Riemannienne lisse. Il existe un unique connexion sans torsion sur M ayant la propriété $\nabla g = 0$. Une telle connexion est dite la connexion de Lévi-Civita de g . Dans toute carte (Ω, φ) de M , de coordonnées associées x^i , et pour tout $x \in \Omega$, ses symboles de Christoffel sont donnés par les relations

$$\Gamma_{ij}^k(x) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x_i} \right)_x + \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x_j} \right)_x - \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right)_x \right) g(x)^{mk}$$

où les g^{ij} sont tels que $g_{im}g^{mj} = \delta_i^j$. Soit R la courbure de la connexion de Lévi Civita comme présenté ci-dessus. On définit

- (I) La courbure Riemannienne Rm_g de g comme un champ de $(4, 0)$ -tenseur lisse sur M dont les composantes dans une carte sont $R_{ijkl} = g_{i\alpha} R_{jkl}^\alpha$
- (II) La courbure de Ricci Rc_g de g comme un champ de $(2, 0)$ -tenseur lisse sur M dont les composantes dans une carte sont $R_{ij} = R_{\alpha i \beta j} g^{\alpha \beta}$
- (III) La courbure scalaire $Scal_g$ de g comme une fonction lisse à valeur réelle sur M

dont l'expression dans une carte est $\text{Scal}_g = R_{ij}g^{ij}$

On peut vérifier que dans n'importe quelle carte, $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}$ et les deux identités de Bianchi sont $R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0$ et $(\nabla_i Rm_g)_{jklm} + (\nabla_m Rm_g)_{jkil} + (\nabla_l Rm_g)_{jkmi} = 0$. En particulier, la courbure de Ricci est symétrique, de sorte que dans toute carte $R_{ij} = R_{ji}$.

Etant donné une variété Riemannienne lisse (M, g) , et sa connexion de Levi-Civita D , une courbe lisse $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ est dite géodésique, si pour tout t ,

$$D_{\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_t} \left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$$

Cela signifie à nouveau que dans n'importe quelle carte, et pour tout k ,

$$(\gamma^k)''(t) + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))(\gamma^i)'(t)(\gamma^j)'(t) = 0$$

Pour tout $x \in M$, et tout $X \in T_x(M)$, il existe une unique géodésique $\gamma : [0, \epsilon] \rightarrow M$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_0 = X$. Soit $\gamma_{x,X}$ cette géodésique, pour $\lambda > 0$ réel, $\gamma_{x,\lambda X}(t) = \gamma_{x,X}(\lambda t)$. Par conséquent, pour $\|X\|$ petit, où $\|\cdot\|$ représente la norme dans $T_x(M)$ associé à $g(x)$, on a que $\gamma_{x,X}$ est défini sur $[0, 1]$. La fonction exponentielle de x est la fonction d'un voisinage de 0 dans $T_x(M)$, à valeurs dans M , définies par $\exp_x(X) = \gamma_{x,X}(1)$. Si M est de dimension n , et par l'assimilation de $T_x(M)$ à \mathbb{R}^n par le choix d'une base orthonormée, on obtient une carte (Ω, \exp_x^{-1}) de M au point x . Cette carte est normale en x dans le sens où les composantes g_{ij} de g dans cette carte sont telles que $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$, avec la propriété supplémentaire que les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k de la connexion de Levi-Civita dans cette carte sont tels que $\Gamma_{ij}^k(x) = 0$. Les coordonnées associées à cette carte sont appelées coordonnées normales géodésiques.

Étant donné une variété Riemannienne lisse (M, g) de dimension n , on peut définir une positive mesure du Radon sur M . En particulier, la théorie de l'intégration de Lebesgue peut être appliquée. Pour certains atlas de M , $(\Omega_i, \varphi_i)_{i \in I}$, nous dirons qu'une famille $(\Omega_j, \varphi_j, \alpha_j)_{j \in J}$ est une partition de l'unité subordonnée à $(\Omega_i, \varphi_i)_{i \in I}$ si ce qui suit est vrai :

- (i) $(\alpha_j)_j$ est une partition lisse de l'unité subordonnée au revêtement $(\Omega_i)_i$,
- (ii) $(\Omega_j, \varphi_j)_{j \in J}$ est un atlas de M ,
- (iii) pour tout j , $\text{supp} \alpha_j \subset \Omega_j$

On peut vérifier que pour n'importe quel atlas $(\Omega_i, \varphi_i)_{i \in I}$ de M , il existe une partition de l'unité $(\Omega_j, \varphi_j, \alpha_j)_{j \in J}$ subordonnée à $(\Omega_i, \varphi_i)_{i \in I}$. On peut alors définir l'élément de volume Riemannien comme suit : étant donnée une application continue $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ avec support et un atlas compact $(\Omega_i, \varphi_i)_{i \in I}$ de M ,

$$\int_M f dv_g = \sum_{j \in J} \int_{\varphi_j(\Omega_j)} (\alpha_j \sqrt{|g|} f) \circ \varphi_j^{-1} dx$$

Où $(\Omega_j, \varphi_j, \alpha_j)_{j \in J}$ est une partition de l'unité subordonnée à $(\Omega_i, \varphi_i)_{i \in I}$, $|g|$ est le déterminant de la matrice dont les éléments sont les composantes de g dans $(\Omega_j, \varphi_j)_{j \in J}$ et dx représente l'élément de volume de Lebesgue de \mathbb{R}^n . On peut prouver qu'une telle construction ne dépend pas du choix de l'atlas $(\Omega_i, \varphi_i)_{i \in I}$ et la partition de l'unité $(\Omega_j, \varphi_j, \alpha_j)_{j \in J}$.

Le Laplacien agissant sur les fonctions d'une variété Riemannienne lisse (M, g) est l'opérateur Δ_g dont l'expression dans une carte locale de coordonnées associées x^i est

$$\Delta_g u = -g^{ij} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)$$

Pour u et v de classe C^2 sur M , on a alors la formule d'intégration suivante par parties :

$$\int_M (\Delta_g u) v dv_g = \int_M (\nabla u, \nabla v) dv_g = \int_M u (\Delta_g v) dv_g$$

où (\cdot, \cdot) est le produit scalaire associé à g pour les 1-formes.

Revenons aux géodésiques, on peut définir le rayon d'injectivité de (M, g) à un point x , noté $i_g(x)$, comme le plus grand nombre réel positif r pour lequel toute géodésique partant de x et de longueur inférieure à r est minimisante. On peut alors définir le rayon d'injectivité (global) par $i_g = \inf_{x \in M} i_g(x)$. On a que $i_g > 0$ pour une variété compacte, mais il peut être nul pour une variété non compacte. De la même manière, on peut définir le lieu de coupe C_x de x , où C_x est un sous-ensemble de M tel que $i_g(x) = d_g(x, C_x)$, et prouver que C_x a la mesure nulle. Par suite \exp_x est un difféomorphisme d'un domaine en forme d'étoile de $T_x(M)$ en 0 sur $M \setminus C_x$. En particulier, on obtient que la fonction de distance r à un point donné est différentiable presque partout, avec la propriété supplémentaire que $|\nabla r| = 1$ presque partout. On se donne le tenseur de Ricci sans trace de g , on définit la courbure de Weyl, noté $Weyl_g$ comme le champs de $(0, 4)$

-tenseur lisse dont les composantes dans une carte sont donnée par la formyl suivante sont respectivement le tenseur de Weyl de g et le tenseur de Ricci sans trace de g . Dans une carte locale, les composants de W_g dans une variété de dimension n sont

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2} (R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}) \\ + \frac{\text{Scal}_g}{(n-1)(n-2)} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$$

1.2 Des bases de l'analyse non linéaire

Étant donné une variété Riemannienne compacte et lisse (M, g) de dimension n , on définit les espaces de Sobolev $H_k^p(M)$ et $H_{k,0}^p(M)$. Lorsque $k = 1$ et $p > 1$, on peut définir le Espace Sobolev $H_1^p(M)$ comme suit : pour $u \in C^\infty(M)$, on pose

$$\|u\|_{H_1^p(M)} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p$$

Où $\|\cdot\|_p$ est la norme $L^p(M)$ par rapport à la mesure Riemannienne dv_g . Nous définissons ensuite $H_1^p(M)$ (respectivement $H_{1,0}^p(M)$) comme le complété de $C^\infty(M)$ (respectivement $C_c^\infty(M)$) par rapport à $\|u\|_{H_1^p(M)}$. Notons que $H_{1,0}^2(M)$ peut être vue d'une autre manière

$$H_{1,0}^2(M) = \{u \in H_1^2(M) / u|_{\partial M} = 0\}$$

Une définition similaire est valable pour $H_k^p(M)$ (respectivement $H_{k,0}^p(M)$), avec

$$\|u\|_{H_k^p(M)} = \sum_{i=0}^k \|\nabla^i u\|_p.$$

Des propriétés très utiles de $H_1^p(M)$ sont que les fonctions de Lipschitz sur M appartiennent aux espaces de Sobolev $H_1^p(M)$ pour tout p , et que si $u \in H_1^p(M)$ pour certains p , alors on a que $|u|$ l'est aussi et de plus $|\nabla|u|| = |\nabla u|$ presque pour tout $x \in M$.

Or pour les sous-ensembles ouverts bornés de l'espace euclidien, le théorème d'inclusion de Sobolev (plongements continus) et le théorème de Rellich-Kondrakov (compact plongements) sont applicables. Une version de ce théorème vue dans Hebey [27] est la suivante : pour tout $p \in [1 + \infty]$,

1. Si $p < n$, alors $H_k^p(M) \hookrightarrow L^q(M)$ d'une façon continue pour tout $1 \leq q \leq p^* := \frac{pn}{n-p}$. De plus, ce plongement est compacte si et seulement si $q < p^*$.
2. Si $p = n$, alors $H_k^p(M) \hookrightarrow L^q(M)$ d'une façon continue et compacte pour tout $q \in [1, +\infty[$.
3. Si $p > n$, alors $H_k^p(M) \hookrightarrow C^{0,\beta}(M)$ d'une façon continue pour tout $0 \leq \beta \leq 1 - \frac{n}{p}$. De plus, ce plongement est compact si et seulement si $\beta < 1 - \frac{n}{p}$.

Les deux premières inclusions sont notées parfois dans cette thèse, comme la première inclusion de Sobolev. D'autre part, la dernière inclusion est appelée deuxième inclusion de Sobolev. Pour fixer les idées, on pose $k = 1$ et $p = 2$. Pour $n \geq 3$, soit

$$2^* = \frac{2n}{n-2}$$

est l'exposant critique de Sobolev. Alors, pour tout $q \in [1, 2^*]$:

$$H_1^2(M) \hookrightarrow L^q(M) \tag{1.1}$$

Ce plongement est continu, avec la propriété qu'il est également compact si $q < 2^*$. L'inégalité de Sobolev correspondant au plongement continu $H_1^2(M) \hookrightarrow L^{2^*}(M)$ s'écrit : Pour tout $u \in H_1^2(M)$

$$\|u\|_{2^*} \leq A\|\nabla u\|_2 + B\|u\|_2$$

Où A et B sont des constantes positives indépendantes de u , mais cela peut dépendre de la variété. Une autre inégalité très utile est l'inégalité de Poincaré. Lorsque nous travaillons sur $H_1^2(M)$, elle se lit comme l'existence d'une constante positive A telle que, pour tout $u \in H_1^2(M)$,

$$\|u - \bar{u}\|_2 \leq A\|\nabla u\|_2 \tag{1.2}$$

où

$$\bar{u} = \frac{1}{V_g} \int_M u dv_g$$

est la moyenne de u , et V_g le volume de M par rapport à g . En particulier, grâce à la caractérisation de Rayleigh de la première valeur propre non nulle du laplacien, A peut être considéré comme l'inverse de la racine carrée de cette valeur propre. En combinant l'inégalité de Sobolev et l'inégalité de Poincaré, on obtient l'inégalité de Sobolev-Poincaré :

il existe $A > 0$ tel que pour tout $u \in H_1^2(M)$

$$\|u - \bar{u}\|_{2^*} \leq A \|\nabla u\|_2$$

Une notion très utile concernant les plongements de Sobolev, qui sont utiles dans de nombreux problèmes comme le problème de Yamabe, est celle des meilleures constantes. Dans le cas particulier $k = 1$ et $p = 2$, l'inégalité de Sobolev dans l'espace Euclidien sera

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq K_0(n) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \quad (1.3)$$

La meilleur constante de cette inégalité est

$$K_0(n) = \frac{4}{n(n-2)w_n^{\frac{2}{n}}}$$

où w_n est le volume de la n -sphère unité. L'égalité dans (1.3) est atteinte par des fonctions connues, exprimées ainsi : Pour tout $\lambda > 0$, $\mu \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}^n$:

$$u_{\lambda,a,\mu}(x) = \mu (\lambda + |x - a|^2)^{\frac{2-n}{2}}$$

Pour une variété Riemannienne compacte, on considère l'inégalité de Sobolev

$$\|u\|_{2^*}^2 \leq A \|\nabla u\|_2^2 + B \|u\|_2^2$$

On peut vérifier qu'une telle constante A doit satisfaire $A \geq K_0(n)$ (voir Théorème 3.4.6 pour un résultat équivalent dans un contexte similaire). Inversement, nous nous référons à Hebey-Vaugon [26], on peut prouver qu'il existe une constante positive B tel que pour tout $u \in H_1^2(M)$

$$\|u\|_{2^*}^2 \leq K_0(n) \|\nabla u\|_2^2 + B \|u\|_2^2$$

Plus de développements sur les espaces de Sobolev, les inégalités de Sobolev et la notion de la meilleure constante sont dans Druet-Hebey [14] et Hebey [27].

1.3 Solution faibles et fortes des équations elliptique

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte et lisse. Soient a, f sont des fonctions données sur M et $\Delta_g = -\text{div}_g(\nabla)$ le laplacien par rapport à la métrique g . L'opérateur $(\Delta_g + a)$ est dit coercif s'il existe $c > 0$ tel que pour tout $u \in H_1^2(M)$

$$\int_M (|\nabla u|^2 + au^2) dv_g \geq c \|u\|_{H_1^2(M)}^2 \quad (1.4)$$

Les équations que nous allons considérer sont de la forme

$$\Delta_g u + au = f$$

Une fonction $u \in H_1^2(M)$ est considérée comme une solution faible de cette équation si, pour tout $\varphi \in H_1^2(M)$

$$\int_M (\nabla u, \nabla \varphi)_g dv_g + \int_M au\varphi dv_g = \int_M f\varphi dv_g$$

Les résultats de régularité pour cette équation sont valables, ils sont similaires aux résultats traditionnels exprimés dans le contexte euclidien. Le résultat de régularité que nous utiliserons le plus souvent est le suivant : si a est lisse et $f \in H_k^p(M)$ pour certain $k \in \mathbb{N}$ et $p > 1$ alors une solution faible u de l'équation ci-dessus est en $H_{k+2}^p(M)$. En particulier, il découle de ce résultat et de la Théorie d'intégration de Sobolev, que lorsque f est lisse, u est également lisse. Une excellence référence est [24] de Han et Lin.

Parallèlement à la régularité, les principes du maximum très utiles valent pour le Laplacien sur les variétés Riemanniennes. Un énoncé commode est le suivant : si une solution positive de notre équation $u \in C^2(M)$ est telle que, pour tout $x \in M$, $\Delta_g u(x) \geq u(x)h(x, u(x))$ pour certaines fonctions continues $h : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors soit u est soit partout strictement positive, ou u est la fonction nulle. Cela découle du principe du maximum de Hopf vu dans plusieurs références comme [?] et [6].

1.4 Fonction de Green

Soit (\bar{M}, g) une variété Riemannienne lisse compacte connexe de dimension $n \geq 3$, éventuellement à bord ∂M . Si $\partial M \neq \emptyset$, on suppose que \bar{M} et ∂M sont orientées

1.4 FONCTION DE GREEN

et compatibles et on note $\vec{\nu}$ le vecteur normal unité extérieur. Si $\partial\bar{M} = \emptyset$, on pose $M = \bar{M}$. Si $\partial\bar{M} \neq \emptyset$, alors $\partial\bar{M}$ est une variété compacte de dimension $(n - 1)$ et on pose $M = \bar{M} \setminus \partial\bar{M}$. On a ainsi $\partial M = \partial\bar{M}$. En particulier, \bar{M} coïncide avec la fermeture de M dans \bar{M} .

Soit $a \in L^\infty(M)$, on cherche une fonction de Green adaptée au problème sur M

$$\Delta_g u + au = f$$

Avec condition de Dirichlet au bord. On suppose de plus que l'opérateur $\Delta_g + a$ est coercif.

On dit que $G : M \times M \setminus \{(x, x) / x \in M\}$ est une fonction de Green pour l'opérateur $\Delta_g + a$ avec condition de Dirichlet au bord si, en notant $G_x := G(x, \cdot)$, les deux assertions suivantes sont satisfaites pour tout $x \in M$:

(i) $G_x \in L^1(M)$

(ii) Pour tout $\varphi \in C^2(\bar{M})$ telle que $\varphi|_{\partial M} = 0$, on a $\int_M G_x (\Delta_g \varphi + a\varphi) dv_g = \varphi(x)$

Les résultats de [23] nous assurent l'existence d'une unique fonction de Green G pour l'opérateur $\Delta_g + a$. De plus, elle est symétrique et se prolonge en $G \in C^{1,\theta}(\bar{M} \times \bar{M} \setminus \{(x, x) / x \in \bar{M}\})$ pour tout $\theta \in (0, 1)$. Plus précisément, pour tout $x \in M$ et $\varphi \in C^2(\bar{M})$, on a

$$\int_M G_x (\Delta_g \varphi + a\varphi) = \varphi(x) + \int_{\partial M} \partial_\nu G_x \varphi d\nu$$

De plus, $G_x \equiv 0$ si $x \in \partial M$. Par suite, en utilisant la théorie de régularité standard pour les équations elliptiques, on vérifie simplement que pour tout $x \in M$, G_x vérifie le système suivant

$$\Delta_g G_x + aG_x = 0 \text{ dans } M \setminus \{x\}$$

D'autre part, une fonction de Green admet un contrôle ponctuel très précis : En notant

$$\mathcal{H}_M(x, y) := d_g(x, y)^{2-n} \min \left\{ 1, \frac{d_g(x, \partial M) d_g(y, \partial M)}{d_g(x, y)^2} \right\}$$

pour tout $x, y \in M$, $x \neq y$, il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$C_2 \mathcal{H}_M(x, y) \leq G(x, y) \leq C_1 \mathcal{H}_M(x, y)$$

et

$$|\nabla G_x(y)| \leq C_1 d_g(x, y)^{1-n} \min \left\{ 1, \frac{d(x, \partial M)}{d_g(x, y)} \right\}$$

Où les constantes C_1, C_2 ne dépendent que de (M, g) , et de a .



2

Etat de l'art : Résolution des équations modèles par méthode de minimisation

Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte et lisse de dimension $n \geq 3$ et $a \in C^{0,\theta}(M)$ pour certain $\theta \in]0, 1[$. Nous étudions dans ce chapitre le problème d'existence d'une fonction u satisfaisant l'équation elliptique non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \Delta_g u + au = u^p & \text{sur } M, \\ u > 0 & \text{sur } M, \\ u = 0 & \text{sur } \partial M. \end{cases} \quad (E^p)$$

Où l'exposant $p \leq \frac{n+2}{n-2} := 2^* - 1$ l'exposant critique au point de vue d'injection de Sobolev de $H_{1,0}^2(M)$ dans $L^{p+1}(M)$. En fait, il y a un fort contraste entre le cas $p < 2^* - 1$ pour lequel l'injection est compacte, et le cas $p = 2^* - 1$ où l'injection est seulement continue. Par conséquent, il y a de sérieuses difficultés lors de la recherche de points critiques par méthodes variationnelles. Des nombreux résultats d'existence pour le problème (E^p) sont connus lorsque $p < 2^* - 1$ (voir l'article de Lions [36] et son abondante liste de références). D'autre part un résultat d'existence bien connu dans le cas critique est celui de Brezis-Nirenberg [9] (voir Théorèmes 2.3.1 et 2.3.2 ci-dessous).

Afin de commencer cette section, nous donnons un exemple basique d'une résolution possible pour un telle système . Nous discutons ici de l'existence (et de l'unicité) d'une solution u au Équation de Laplace sur une variété Riemannienne compacte.

2.1 Équation de Laplace

Dans cette section, on reformule un résultat vu dans Hebey [25]

Théorème 2.1.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord. Nous supposons ici de plus que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse. l'équation de Laplace $\Delta_g u = f$ admet une solution si et seulement si f est de moyenne nulle. En d'autre terme*

$$\exists u \in C^2(M) \text{ telle que } \Delta_g u = f \iff \int_M f dv_g = 0$$

De plus, la solution u est unique à multiplication par une constante près.

Preuve : En intégrant l'équation de Laplace, on voit que la condition que f soit de moyenne nulle est une condition nécessaire. Nous prouvons maintenant que c'est aussi une condition suffisante. Soit

$$\mathcal{H} = \left\{ u \in H_1^2(M) \text{ tel que } \int_M u dv_g = 0 \text{ et } \int_M f u dv_g = 1 \right\}$$

et

$$\mu = \inf_{u \in \mathcal{H}} \int_M |\nabla u|^2 dv_g$$

Clairement, $\mathcal{H} \neq \emptyset$. Considérons une suite minimisante $(u_i) \in \mathcal{H}$ pour μ , de sorte que pour tout i , $u_i \in \mathcal{H}$, et

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_M |\nabla u_i|^2 dv_g = \mu$$

Par l'inégalité de Poincaré (1.2) dont nous avons discuté dans le chapitre 1, il existe $A > 0$ tel que, pour tout $u \in H_1^2(M)$ de moyenne nulle, on a

$$\int_M u^2 dv_g \leq A \int_M |\nabla u|^2 dv_g$$

2.1 ÉQUATION DE LAPLACE

Il s'ensuit facilement que les u_i sont bornés dans $H_1^2(M)$. Comme $H_1^2(M)$ est espace réflexif, et l'injection $H_1^2(M)$ dans $L^2(M)$ est compact par le théorème de Rellich-Kandakov (1.1), il existe une fonction $u \in H_1^2(M)$ et une sous-suite de (u_i) , qu'on le note aussi (u_i) , telle que

- (i) (u_i) converge faiblement vers certain u dans $H_1^2(M)$
- (ii) (u_i) converge vers u dans $L^2(M)$

par (2), $u \in \mathcal{H}$. Par (1), et une propriété de base de la limite faible (la norme d'une limite faible est inférieur ou égale de la limite inférieur des normes de la suite), on obtient que $\int_M |\nabla u|^2 dv_g \leq \mu$, par suite

$$\int_M |\nabla u|^2 dv_g = \mu$$

et μ est atteint. Par un théorème connu de Lagrange, cela nous implique l'existence de deux constantes α et β , les multiplicateurs de Lagrange, tels que, pour tout $\varphi \in H_1^2(M)$,

$$\int_M (\nabla u, \nabla \varphi)_g dv_g = \alpha \int_M \varphi dv_g + \beta \int_M f \varphi dv_g$$

Posons $\varphi = 1$, nous obtenons que $\alpha = 0$. posons $\varphi = u$, nous obtenons que $\beta = \mu$. D'où $\mu^{-1}u$ est une solution faible de l'équation de Laplace. Par résultats de régularité standard, $\mu^{-1}u$ est lisse.

La preuve de l'unicité est simple. Si u et v sont deux solutions du équation de Laplace, alors $\Delta_g(u - v) = 0$. Multiplions cette relation par $(u - v)$ et intégrons sur M pour obtenir

$$\int_M |\nabla(u - v)|^2 dv_g = 0$$

Par conséquent, $(u - v)$ est constante, et cela met fin à notre preuve. □

Remarque 2.1.2. On définit $\lambda_1 = \mu^{-1}$, comme la première valeur propre du Laplace avec condition du Dirichlet au bord, par suite

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}} \frac{\int_M |\nabla u|^2 dv_g}{\int_M |u|^2 dv_g}$$

2.2 Équation non linéaire sous-critique

Soient (M, g) une variété bornée compacte lisse avec ou sans bord de dimension $n \geq 3$, $a \in L^\infty(M)$, $\lambda > 0$ et $1 \leq p < 2^* - 1$. Posons le système

$$\begin{cases} \Delta_g u + au = \lambda u^p & \text{sur } M, \\ u > 0 & \text{sur } M, \\ u = 0 & \text{sur } \partial M. \end{cases} \quad (E_\lambda^p)$$

(On peut donc avoir éventuellement $\partial M = \emptyset$). Pour montrer l'existence de solutions de (E_λ^p) , on dispose d'une méthode variationnelle, qui consiste à étudier la fonctionnelle $C^1(H_{1,0}^2(M))$ suivante.

$$\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_M (|\nabla u|^2 + au^2) dv_g - \frac{\lambda}{p+1} |u|^{p+1} dv_g \quad (2.1)$$

Théorème 2.2.1. *Le $\min_{u \in H_{1,0}^2(M) \setminus \{0\}} \frac{\int_M (|\nabla u|^2 + au^2) dv_g}{\left(\int_M |u|^{p+1} dv_g\right)^{\frac{2}{p+1}}}$ est atteint en une fonction lisse solution de (E_λ^p) pour certain $\lambda \in \mathbb{R}$*

Preuve : pour tout $u, \varphi \in H_{1,0}^2(M)$ on pose

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{2} \int_M (|\nabla u|^2 + au^2) dv_g, \quad \Phi_2(u) = \frac{1}{p+1} \int_M |u|^{p+1} dv_g$$

c'est simple à vérifier que $\Phi_1, \Phi_2 \in C^1(H_{1,0}^2(M))$, et de plus

$$\Phi_1'(u)[\varphi] = \int_M ((\nabla u, \nabla \varphi) + au\varphi) dv_g, \quad \Phi_2'(u)[\varphi] = \int_M |u|^{p-1} u \varphi dv_g$$

Soit $\mathcal{A} = \left\{ \Phi_1(u)/u \in H_{1,0}^2(M) \text{ et } \Phi_2(u) = \frac{1}{p+1} \right\}$, et on pose $\mu = \inf \mathcal{A}$. Notons que

$$2\mu = \inf_{u \in H_{1,0}^2(M) \setminus \{0\}} \frac{\int_M (|\nabla u|^2 + au^2) dv_g}{\left(\int_M |u|^{p+1} dv_g\right)^{\frac{2}{p+1}}}.$$

Comme $a \in L^\infty(M)$ et M est bornée, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ et \mathcal{A} est minoré. Considérons une suite minimisante $(u_i) \in \mathcal{A}$ pour μ , de sorte que pour tout i , $u_i \in \mathcal{A}$, et

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Phi_1(u_i) = \mu, \quad \text{et} \quad \int_M |u_i|^{p+1} dv_g = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

2.2 ÉQUATION NON LINÉAIRE SOUS-CRITIQUE

Par l'inégalité de Poincaré (1.2) et le fait que M est bornée on vérifie facilement que les u_i sont bornés dans $H_{1,0}^2(M)$. D'autre part l'injection $H_{1,0}^2(M)$ dans $L^{p+1}(M)$ est compacte par le théorème de Rellich-Kandakov (1.1), donc il existe une fonction $u \in H_1^2(M)$ et une sous-suite de (u_i) , qu'on le note aussi (u_i) , telle que si on pose $w_i = u_i - u$

(i) (w_i) converge faiblement vers 0 dans $H_{1,0}^2(M)$

(ii) (w_i) converge vers 0 dans $L^{p+1}(M)$

En particulier par (2) et les inégalités de Hölder on a $\|w_i\|_2 \rightarrow 0$, par suite

$$\begin{aligned} \mu + o(1) &= \Phi_1(u_i) = \Phi_1(u) + o(1) + \frac{1}{2} \int_M (|\nabla w_i|^2 + a w_i^2) dv_g \\ &= \Phi_1(u) + o(1) + \frac{1}{2} \int_M |\nabla w_i|^2 dv_g \end{aligned}$$

Or $\int_M |\nabla w_i|^2 dv_g \geq 0$ et par définition de μ on a $\Phi_1(u) \geq \mu$, alors nécessairement $\Phi_1(u) = \mu$ et ∇w_i converge vers 0 dans $L^2(M)$. Donc $|u|$ est un minimiseur de \mathcal{A} .

On a $u = \min_{v \in H_{1,0}^2(M) \setminus \{0\}} \{ \Phi_1(v) / \Phi_2(v) = \frac{1}{p+1} \}$, utilisons le théorème des extremums liées vue dans [25], il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\phi'_1(u) = \lambda \Phi'_2(u)$. En d'autre terme $|u|$ est un point critique du problème variationnel Φ_λ et par suite une solution faible puis par résultats de régularité standard une solution lisse de (E_λ^p) . \square

Corollaire 2.2.2. Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte bornée et lisse de dimension $n \geq 3$ et $a \in C^{0,\theta}(M)$ pour certain $\theta \in]0, 1[$. On suppose que $\Delta_g + a$ est coercif. Alors, $\forall \lambda > 0$, $p < 2^* - 1$, le système (E_λ^p) admet une solution.

Preuve : D'après le Théorème 2.2.1, pour tout $p < 2^* - 1$, il existe λ_0 tel que le système $(E_{\lambda_0}^p)$ admet une solution u . La coercivité donne $\lambda_0 > 0$. Pour tout $\lambda \geq 0$ posons μ tel que $\lambda = \lambda_0 \mu^{1-p}$, et par suite (μv) sera une solution de (E_λ^p) \square

Remarque 2.2.3. si $p = 1$, $\lambda_1 = \min_{u \in H_{1,0}^2(M) \setminus \{0\}} \frac{\int_M (|\nabla u|^2 + a u^2) dv_g}{\int_M |u|^2 dv_g}$ est dite la première valeur propre de $\Delta_g + a$ avec condition de Dirichlet au bord. Il est facile de vérifier que $\lambda_1 > 0$ si et seulement si $\Delta_g + a$ est coercif.

Remarque 2.2.4. Soit $f \in C^\infty(M)$ tel que $f > 0$, en minimisant

$$\mathcal{A}_f = \left\{ \Phi_1(u) / u \in H_{1,0}^2(M) \text{ et } \int_M f |u|^{p+1} = \frac{1}{p+1} \right\}$$

d'une même manière que dans la preuve du théorème 2.2.1, on peut vérifier l'existence d'une solution du système

$$\begin{cases} \Delta_g u + au = fu^p & \text{sur } M, \\ u > 0 & \text{sur } M, \\ u = 0 & \text{sur } \partial M. \end{cases} \quad (E_\lambda^f)$$

2.3 Résultat d'existence des solutions pour des équations non linéaire dans le cas critique

Dans cette section, on suppose que $M = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ où $n \geq 3$, un ouvert borné connexe régulier non vide. Soit $p = 2^* - 1 = \frac{n+2}{n-2}$. Avec $\Delta = -\sum_i \partial_{ii}$, posons le système

$$\begin{cases} \Delta u + au = u^{\frac{n+2}{n-2}} & \text{sur } \Omega, \\ u > 0 & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (E^{2^*})$$

Nous cherchons un critère d'existence d'une fonction u satisfaisant l'équation elliptique non linéaire ci-dessus. L'exposant p est critique au point de vue de l'injection de Sobolev. En effet, les solutions de (E^{2^*}) correspondent à des points critique du fonctionnelle $C^1(H_{1,0}^2(\Omega))$ suivante.

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + au^2) dx - \frac{n-2}{2n} \int_{\Omega} |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx \quad (2.2)$$

Puisque l'injection n'est pas compacte, il y a des difficultés lors de la recherche de points critiques par méthode variationnelles. En fait, il y a un fort contraste entre le cas sous critique et notre cas critique. De nombreux résultats d'existence pour ce problème (E^{2^*}) sont connus. D'autre part, un résultat d'inexistence bien connu de Pohozaev [5] affirme que si notre domaine est étoilé, et a est nulle, il n'y a pas de solution à notre problème. Mais, comme nous le verrons, la perturbation a peuvent changer cette situation. L'exemple le plus courant est le problème de Yamabe. Étonnamment, les cas où $n = 3$ et $n \geq 4$ se révèlent assez différents. En s'inspire dans tout le reste de cette section du travail du Brezis-Nirenberg [9].

**2.3 RÉSULTAT D'EXISTENCE DES SOLUTIONS POUR DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRE
DANS LE CAS CRITIQUE**

2.3.1 Cas $n \geq 4$

Théorème 2.3.1 (Brezis-Nirenberg [9]). *On suppose qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $a(x_0) < 0$. Alors le système (E^{2^*}) admet une solution.*

Preuve : Par continuité de a , il existe $R > 0$ tel que $a(x) < 0$ pour tout $x \in B(x_0, R) \subset \Omega$. En d'autre terme, il existe $\delta < 0$ tel que $a(x) \leq \delta$ pour tout $x \in B(x_0, R) \subset \Omega$. On pose $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\theta \leq 1$ et $\theta(x) = 0$ sur $B(0, R)^c$. Soit également $\eta \in C^\infty(\Omega)$ qui vérifie $\eta(x) = \theta(|x - x_0|)$. On vérifie simplement que $u_\epsilon(x) = \frac{\eta(x)}{(\epsilon + |x - x_0|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \in H_{1,0}^2(\Omega)$ pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$. On pose

$$\mathcal{J} = \left\{ \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + au^2) dx \text{ tel que } u \in H_{1,0}^2(\Omega) \text{ et } \|u\|_{\frac{2n}{n-2}} = 1 \right\}$$

et

$$\mu = \inf \mathcal{J}$$

Nous considérons la métrique sur \mathbb{R}^n définit par :

$$\tilde{\xi}(X) = \xi(X - x_0)$$

De plus, notons $U_\epsilon(X) = u_\epsilon(X + x_0)$ et $\tilde{a}(X) = a(X + x_0)$ pour tout $X \in B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$. En utilisant le théorème de convergence dominée par Lebesgue

$$\int_{\Omega} a(x)|u_\epsilon(x)|^2 dx = \int_{B(0,R)} \tilde{a}(X)|U_\epsilon(X)|^2 dX = O(1) + \int_{|X|<R} \frac{\tilde{a}(X)}{(\epsilon + |X|^2)^{n-2}} dX$$

Pour $n = 4$, $\int_{|X|<R} \frac{\tilde{a}(X)}{(\epsilon + |X|^2)^{n-2}} dX \leq \delta \pi^2 \ln(\frac{1}{\epsilon}) + O(1)$. Or pour $n \geq 5$

$$\begin{aligned} \int_{|X|<R} \frac{\tilde{a}(X)}{(\epsilon + |X|^2)^{n-2}} dX &\leq \delta \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\epsilon + |X|^2)^{n-2}} dX + O(1) \\ &\leq \delta \epsilon^{\frac{2}{n-4}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |X|^2)^{n-2}} dX + O(1) \end{aligned}$$

Quitte à refaire le calcul de Brezis-Nirenberg [9]

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_{\epsilon}|^2 dx &= \int_{B(0,R)} |\nabla U_{\epsilon}|^2 dX = \epsilon^{\frac{2}{n-2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla \left(\frac{1}{(1+|X|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \right) \right|^2 dX + O(1) \\ \left(\int_{\Omega} u_{\epsilon}^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} &= \left(\int_{B(0,R)} U_{\epsilon}^{\frac{2n}{n-2}} dX \right)^{\frac{n-2}{n}} = \epsilon^{\frac{2}{n-2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|X|^2)^{n-2}} dX \right)^{\frac{n-2}{n}} + O(1) \end{aligned}$$

D'autre part, par [3], on sait que

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla \left(\frac{1}{(1+|X|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \right) \right|^2 dX}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|X|^2)^{n-2}} dX \right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{1}{K_0(n)}$$

Par suite, pour ϵ assez petit dépend de $\delta < 0$

$$\frac{\int_{\Omega} (|\nabla u_{\epsilon}|^2 + a u_{\epsilon}^2) dx}{\left(\int_{\Omega} u_{\epsilon}^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}}} < \frac{1}{K_0(n)}$$

Donc $\mu < \frac{1}{K_0(n)}$. D'autre part, par coercivité de $\Delta + a$ et le théorème d'injection de Sobolev (1.1), $\mu > 0$.

Considérons une suite minimisante $(u_i) \in \mathcal{J}$ pour μ , de sorte que pour tout i , $u_i \in \mathcal{J}$, et

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (|\nabla u_i|^2 + a u_i^2) dx = \mu, \text{ et } \int_{\Omega} |u_i|^{\frac{2n}{n-2}} dx = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Par l'inégalité de Poincaré (1.2) et le fait que Ω est bornée on vérifie facilement que les u_i sont bornés dans $H_{1,0}^2(\Omega)$. D'autre part l'injection $H_{1,0}^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est continue et compact par le théorème de Rellich-Kandrov (1.1), et l'injection $H_{1,0}^2(\Omega)$ dans $L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ est seulement continue, donc il existe une fonction $u \in H_{1,0}^2(\Omega)$ et une sous-suite de (u_i) , qu'on le note aussi (u_i) , telle que si on pose $w_i = u_i - u$

- i** (w_i) converge faiblement vers 0 dans $H_{1,0}^2(\Omega)$
- ii** (w_i) converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$
- iii** (w_i) converge faiblement vers 0 dans $L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$

2.3 RÉSULTAT D'EXISTENCE DES SOLUTIONS POUR DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRE DANS LE CAS CRITIQUE

En particulier, par (iii) et les inégalités de Hölder on a

$$\|\nabla w_i\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \int_{\Omega} au^2 dx = \mu + o(1) \quad (2.3)$$

Le converge forte dans $L^2(M)$ nous assure que, à extraction près, $w_i(x)$ converge presque pour tout $x \in M$ vers 0, et par suite, par le Lemme de Brezis-Lieb [8]

$$\|u_i\|_{\frac{2n}{n-2}}^{\frac{2n}{n-2}} = \|w_i\|_{\frac{2n}{n-2}}^{\frac{2n}{n-2}} + \|u\|_{\frac{2n}{n-2}}^{\frac{2n}{n-2}} + o(1)$$

Le convergence faible nous assure que $\|u\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \leq \liminf \|u_i\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 = 1$, Alors

$$1 \leq \|u\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 + \|w_i\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 + o(1)$$

Utilisons les inégalités du Poincaré (1.2) et Sobolev (1.3)

$$1 \leq \|u\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 + K_0(n)\|\nabla w_i\|_2^2 + o(1)$$

Regroupons cette inégalité avec (2.3) et $\mu < \frac{1}{K_0(n)}$:

$$\|\nabla u\|_2^2 + \int_M au^2 dv_g \leq \mu \|u\|_{\frac{2n}{n-2}}^2$$

L'autre sens de l'inégalité est vrai par la définition de μ , par suite μ est atteint par u qui est une solution faible de notre système (E^{2*}) puis par résultats de régularité standard une solution lisse. \square

2.3.2 Cas $n = 3$

Soient Ω un ouvert borné régulier connexe non-vidé de \mathbb{R}^3 . Nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = u^5 + \lambda u & \text{sur } \Omega, \\ u > 0 & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (E_{\lambda}^5)$$

Ce problème s'avère assez délicat et nous avons une solution complète uniquement lorsque Ω est une boule. Dans ce cas, la première valeur propre de Laplace est $\lambda_1 = \pi^2$, pour la fonction propre $|x|^{-1} \sin(\pi|x|)$, voir [9]. Le résultat principal est le suivant

Théorème 2.3.2 (Brezis-Nirenberg [9]). *Supposons que Ω est une boule de \mathbb{R}^3 , il existe une solution du système (E_λ^5) si et seulement si $\lambda \in]\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1[$*

Preuve : Sans perdre de généralité, on pose $\Omega = B(0, 1)$ et soient $u_\epsilon(x) = \frac{\varphi(r)}{(\epsilon+r^2)^{\frac{1}{2}}}$ et $U(x) = \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}$, où $r = |x|$, $\epsilon > 0$ et $\varphi \in [0, 1]$ une fonction lisse tel que $\forall r \in]0, 1[$, $\varphi(r) = \varphi'(0) = \varphi(1) = 0$. Posons

$$\mu_\lambda = \inf \{ \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 \text{ tel que } u \in H_{1,0}^2(\Omega) \text{ et } \|u\|_6 = 1 \}.$$

En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on retrouvera avec les estimations vue dans Brezis-Nirenberg [9]

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\epsilon\|_2^2 &= \epsilon^{\frac{1}{2}} \|\nabla U\|_2^2 + \frac{4}{3}\pi \int_0^1 |\varphi'(r)|^2 dr + O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \\ \|u_\epsilon\|_2^2 &= \frac{4}{3}\pi \int_0^1 \varphi^2(r) dr + O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \\ \|u_\epsilon\|_6^2 &= \epsilon^{\frac{1}{2}} \|U\|_6^2 + O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

Rappelons que [3] nous assure que $K_0(3)$ est atteinte par U , par suite

$$\frac{\|\nabla u_\epsilon\|_2^2 - \lambda \|u_\epsilon\|_2^2}{\|u_\epsilon\|_6^2} = \frac{1}{K_0(3)} + \frac{4}{3}\pi \epsilon^{\frac{1}{2}} \|U\|_6^2 \left[\int_0^1 |\varphi'(r)|^2 dr - \lambda \int_0^1 \varphi^2(r) dr \right] + O(\epsilon)$$

Posons, $\varphi(r) = \cos(\frac{\pi}{2}r)$, par suite il existe $c > 0$ tel que

$$\frac{\|\nabla u_\epsilon\|_2^2 - \lambda \|u_\epsilon\|_2^2}{\|u_\epsilon\|_6^2} = \frac{1}{K_0(3)} + c\epsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\lambda_1 - \lambda \right) + O(\epsilon)$$

Donc, si $\lambda \in]\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1[$, on arrive à une situation tel que $\mu_\lambda < \frac{1}{K_0(3)}$, pour $\epsilon \rightarrow 0$. Refaisons les calculs comme dans la preuve du Théorème 2.3.1 on montre l'existence du solution de notre système, et la condition suffisante est vérifiée.

D'autre part, soit une fonction propre positive (φ_1) de Laplace associé à la première valeur propre λ_1 , et supposons que u est une solution de (E_λ^5)

$$\int_\Omega (\Delta u) \varphi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega u \varphi_1 dx = \int_\Omega u^5 \varphi_1 dx + \lambda \int_\Omega u \varphi_1 dx > \lambda \int_\Omega u \varphi_1 dx$$

2.3 RÉSULTAT D'EXISTENCE DES SOLUTIONS POUR DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRE DANS LE CAS CRITIQUE

et par suite λ doit être inférieur strict que λ_1 . Supposons maintenant que u est une solution de système. D'après Gidas-Ni-Nirenberg [21], on sait que u doit être de symétrie radiale, par suite pour $r = |x| \in]0, 1[$

$$-u'' - \frac{2}{r}u' = u^5 + \lambda u, \text{ et } u(1) = u(0) = 0$$

Multiplions notre système par $r^2\psi u'$ où $\psi \in C^\infty(]0; 1[)$, et intégrons

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |u'|^2 \left[\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi \right] dr - \frac{1}{2}|u'(1)|^2\psi(1) \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^1 u^6 (r^2\psi' + 2r\psi) dr - \frac{1}{2}\lambda \int_0^1 u^2 [r^2\psi' + 2r\psi] dr \end{aligned}$$

Multiplions notre système par $(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi)u$, et intégrons

$$\begin{aligned} & \int_0^1 u'^2 (\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi) dr - \frac{1}{4} \int_0^1 u^2 r^2 \psi''' dr \\ &= \int_0^1 u^6 (\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi) dr + \lambda \int_0^1 u^2 (\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi) dr \end{aligned}$$

Groupons ces 2 égalités

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_0^1 u^2 r^2 \psi''' dr - \frac{1}{2}|u'(1)|^2\psi(1) \\ &= \int_0^1 u^6 \left(-\frac{2}{3}r^2\psi' + \frac{2}{3}r\psi\right) dr - \lambda \int_0^1 u^2 r\psi' \end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 u^2(r) \left(\frac{1}{4}\psi'''(r) + \lambda\psi'(r)r^2\right) dr \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 u^6(r) (r\psi(r) - r^2\psi'(r)) dr + \frac{1}{2}|u'(1)|^2\psi(1) \end{aligned}$$

Posons $\psi(r) = \sin\left((4\lambda)^{\frac{1}{2}} r\right)$, on aura

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \int_0^1 u^6(r) (r\psi(r) - r^2\psi'(r)) \, dr + \frac{1}{2} |u'(1)|^2 \psi(1) &> 0 \\ \int_0^1 u^2(r) \left(\frac{1}{4}\psi'''(r) + \lambda\psi'(r)r^2\right) \, dr &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui fait une contradiction. Par suite $\lambda \leq \frac{1}{4}\lambda_1$, et la condition nécessaire est vérifiée.

□

2.3.3 Exemples d'existence des solution avec une perturbation d'ordre minimale

Soit Ω un ouvert connexe borné non vide dans \mathbb{R}^n , ($n \geq 3$) Posons le système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + f(x; u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (E_{\mathbb{R}}^p)$$

avec $p = \frac{n+2}{n-2}$, $f(x; 0) = 0$ et $f(x; u)$ est une perturbation sous-critique de u^p dans le sens que $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(x; u)}{u^p} = 0$. Un exemple typique est $f(x, u) = \lambda u$, où λ est une constante positive (comme dans les sous-sections précédentes). On suppose de plus que, $f(x, u)$ peut être écrit sous la forme $f(x, u) = a(x)u + h(x)u^q$. Où $a, h \in L^\infty(\Omega)$, et $q \in]1, p[$ (en d'autre terme, $h(x)u^q = o(u)$ lorsque u tends vers 0, et $h(x)u^q = o(u^p)$ lorsque u tends vers $+\infty$). On rappelle que le puissance p est critique du point de vue de l'injection de Sobolev, et que les solutions de notre système sont les points critiques de la fonctionnelle suivante :

$$\phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} \, dx - \int_{\Omega} F(x, u) \, dx$$

Où $F(x, u) = \int_0^u f(x, t) \, dt$. Notons que Brezis-Nirenberg [9] ont montré que s'il existe une fonction $f(u)$ telle que $f(x, u) \geq f(u) \geq 0$, presque pour tout $x \in \omega$ et pour tout $u \geq 0$, où ω est un ouvert non vide de Ω , et supposons que la primitive $F(u) =$

2.3 RÉSULTAT D'EXISTENCE DES SOLUTIONS POUR DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRE DANS LE CAS CRITIQUE

$\int_0^u f(t)dt$ satisfait :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_0^{\epsilon^{\frac{-1}{2}}} F \left[\left(\frac{\epsilon^{\frac{-1}{2}}}{1+s^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right] s^{n-1} ds = +\infty \quad (2.4)$$

Alors le système (E_{ϵ}^p) admet une solution. En fait, la preuve est basée sur le Mountain-Pass lemma de Ambrosetti-Rabinowitz [?] qu'on énoncera dans le chapitre 4. Voici plusieurs cas où la condition (2.4) est vérifiée, par suite notre système (E_{ϵ}^p) admet une solution :

(I) $(n \geq 5)$.

Si $a(x)u + h(x)u^q \geq 0$ presque pour tout $x \in \omega$, et pour tout $u \geq 0$, et de plus elle est strictement positive pour tout $u \in I$, où I est un intervalle ouvert non vide de $]0, +\infty[$.

(II) $(4 \leq n \leq 5)$.

Si $q > \frac{6-n}{n-2}$, et $a(x)u + h(x)u^q \geq 0$ presque pour tout $x \in \omega$, et pour tout $u \geq 0$, et de plus $h(x) > 0$ pour tout $x \in \omega$.

(III) $(n = 3)$.

Si $a(x)u + h(x)u^q \geq 0$ presque pour tout $x \in \omega$, et pour tout $u \geq 0$, et de plus $\lim_{u \rightarrow +\infty} h(x)u^{q-3} = +\infty$ uniformément en x .



**Solutions de l'équation perturbée de
Hardy-Sobolev avec poids par le
Mountain-Pass Lemma**

Premières meilleures constantes de Hardy-Sobolev en présence d'isométries

3.1 Préliminaires sur les variétés invariantes par un groupe d'isométries

Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension n , G un groupe fermé d'isométries de (M, g) et $k := \min_{x \in M} \dim Gx \geq 1$ où Gx est l'orbite du point x sous l'action de G . Posons $x_0 \in G$ tel que $\dim Gx_0 = k$.

Rappelons maintenant quelques résultats géométriques connus et fixons quelques notations. Nous nous référons à Hebey-Vaugon [27], Faget [17] et Saintier [40], et on pose G' un sous groupe fermé de $Isom_g(M)$. Alors G' est un groupe de Lie. D'autre part pour tout $x \in M$, on note $\bar{x} := \Pi(x)$ où $\Pi : M \rightarrow M/G'$ la surjection canonique. On définit $G'x := \{gx/g \in G'\}$ l'orbite de x sous G' et $S'x := \{g \in G'/g(x) = x\}$ le stabilisateur de x sous G' .

Notons que $G'x$ est une sous-variété compacte isomorphe au groupe quotient $G'/S'x$,

et on définit une orbite principale $G'x$ si son stabilisateur est minimal ($\forall y \in M, S'y$ contient un sous-groupe conjugué de $S'x$), en particulier les orbites principales sont de dimension maximale mais l'inverse n'est pas vraie.

Soit $\Omega := \bigcup Px$ où Px est une orbite principal. On a Ω un ouvert dense de M et Ω/G' est une variété lisse qu'on peut munir d'une distance Riemannienne \bar{g} tel que la surjection $\Omega \rightarrow \Omega/G'$ est une submersion Riemannienne. On pose

$$\tilde{g} = \bar{v}^{\frac{2}{n-k-2}} \bar{g}$$

avec $\bar{v}(\bar{x}) = \text{vol}(\Pi^{-1}(\bar{x})) = \text{vol}(G'x)$. On suppose que $k = \min_{x \in M} \dim Gx \geq 1$. Soit l'hypothèse suivante

Hypothèse 3.1.1. *Pour tout Gx_0 , un G -orbite de dimension $k \geq 1$, on peut trouver $\delta > 0$, et G' un sous groupe fermé de $\text{Isom}_g(M)$ tel que :*

$$(H_1) : G'x_0 = Gx_0$$

Et pour tout $x \in B_\delta(Gx_0) := \{y \in M / d_g(y; Gx_0) < \delta\}$

$$(H_2) : G'x \text{ est principale, et } G'x \subset Gx$$

En particulier $\dim G'x = \dim Gx_0 = k, \forall x \in B_\delta(Gx_0)$.

On considère maintenant la $(n-k)$ variété Riemannienne quotient $N := B_\delta(Gx_0)/G'$. Cette variété est alors munie des métrique \bar{g} et \tilde{g} .

On fixe $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in B(0; 1) \\ 0 & \text{pour } x \in B(0; 2)^c \end{cases}$ avec $0 \leq \eta \leq 1$. Pour tout $\bar{x}_1 \in N$ et $\delta' \in]0, \frac{i_{\tilde{g}}(N)}{2}[$, on note $\eta_{\bar{x}_1, \delta'}(\bar{x}) = \eta(\frac{d_{\tilde{g}}(\bar{x}_1, \bar{x})}{\delta'})$.

3.2 Propriétés dans $L^p(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})$

Définition 3.2.1. *Soient (M, g) une variété Riemannienne, on dit qu'une fonction w est un poids sur M , si elle est une fonction définie presque partout sur M et strictement positive presque partout.*

3.2 PROPRIÉTÉS DANS $L^p(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})$

Proposition 3.2.2. Soient (M, g) une variété Riemannienne, $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et w un poids sur M . On considère $f \in L^p(M, wdv_g)$ et $g \in L^q(M, wdv_g)$. Alors on a

$$\int_M |fg| w dv_g \leq \|f\|_{L^p(M, wdv_g)} \|g\|_{L^q(M, wdv_g)} \quad (3.1)$$

En particulier, pour G un groupe d'isométries sur M , avec $x_0 \in M$, et $s \in]0, 2[$, si

$$\begin{aligned} w : M \setminus Gx_0 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto d_g(x, Gx_0)^{-s} \end{aligned}$$

Alors

$$\int_M |fg| \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \leq \left(\int_M |f|^p \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_M |g|^q \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.2)$$

Preuve : Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \int_M |fg| w dv &= \int_M |f w^{\frac{1}{p}}| |g w^{\frac{1}{q}}| dv_g \\ &\leq \| |f w^{\frac{1}{p}}| \|_p \| |g w^{\frac{1}{q}}| \|_q \\ &= \|f\|_{L^p(M, wdv_g)} \|g\|_{L^q(M, wdv_g)} \end{aligned}$$

En remplaçant w par sa valeur dans (3.1), on aura (3.2). □

Proposition 3.2.3. Soient (M, g) une variété Riemannienne, $p \in [1, +\infty[$ et w un poids sur M . Pour tout $f, g \in L^p(M, wdv_g)$, on a

$$\|f + g\|_{L^p(M, wdv_g)} \leq \|f\|_{L^p(M, wdv_g)} + \|g\|_{L^p(M, wdv_g)} \quad (3.3)$$

En particulier, pour G un groupe d'isométries sur M , avec $x_0 \in M$, et $s \in]0, 2[$, si

$$\begin{aligned} w : M \setminus Gx_0 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto d_g(x, Gx_0)^{-s} \end{aligned}$$

Alors

$$\int_M |f + g| \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \leq \left(\int_M |f|^p \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_M |g|^p \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.4)$$

Preuve : Soient $f, g \in L^p(M, w dv_g)$, et un réel $q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a

$$|f + g|^p \leq |f| |f + g|^{\frac{p}{q}} + |g| |f + g|^{\frac{p}{q}}$$

par suite

$$\|f + g\|_{L^p(M, w dv_g)}^p \leq \int_M |f| |f + g|^{\frac{p}{q}} w dv_g + \int_M |g| |f + g|^{\frac{p}{q}} w dv_g$$

Appliquons (3.1)

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p(M, w dv_g)} &\leq \|f\|_{L^p(M, w dv_g)} \|(f + g)^{\frac{p}{q}}\|_{L^q(M, w dv_g)} \\ &\quad + \|g\|_{L^p(M, w dv_g)} \|(f + g)^{\frac{p}{q}}\|_{L^q(M, w dv_g)} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \|(f + g)^{\frac{p}{q}}\|_{L^q(M, w dv_g)} &= \left(\int_M |f + g|^p w dv_g \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f + g\|_{L^q(M, w dv_g)}^{\frac{p}{q}} \\ &= \|f + g\|_{L^q(M, w dv_g)}^{p-1} \end{aligned}$$

Donc

$$\|f + g\|_{L^p(M, w dv_g)}^p \leq \left(\|f\|_{L^p(M, w dv_g)} + \|g\|_{L^p(M, w dv_g)} \right) \|f + g\|_{L^q(M, w dv_g)}^{p-1}$$

Il s'ensuit que l'inégalité (3.3) est vérifiée. En remplaçant w par sa valeur dans (3.3), on aura (3.4). □

Proposition 3.2.4. Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte, G un groupe d'isométries sur M , $p \geq 2$ et $x_0 \in M$. Si l'injection de $C_G^\infty(M)$ munie de la norme

3.2 PROPRIÉTÉS DANS $L^p(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})$

$\|\cdot\|_{H_{1,G}^2(M)}$ dans $L^p(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})$ est continue, alors l'injection de $H_{1,G}^2(M)$ l'est encore

notation 3.2.5. Pour simplifier l'écriture on note dans toute la reste, pour tout $f \in L^p(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})$

$$\|f\|_{p,s} = \|f\|_{L^p(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})} = \left(\int_M |f|^p \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Preuve : Supposons que $(C_G^\infty(M), \|\cdot\|_{H_{1,G}^2(M)}) \subset (L^p(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s}), \|\cdot\|_{p,s})$ continuellement, alors il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout $u \in C_G^\infty(M)$, on a :

$$\|u\|_{p,s} \leq A \|u\|_{H_{1,G}^2(M)} \quad (3.5)$$

Soit $u \in H_{1,G}^2(M)$, puisque $C_G^\infty(M)$ est dense dans l'espace $H_{1,G}^2(M)$ munie de sa norme associée, il existe une suite $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ dans $C^\infty(M)$ qui converge vers u pour la norme associée. En d'autre terme :

$$\int_M |u_N - u|^2 dv_g \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \quad (3.6)$$

$$\int_M |\nabla(u_N - u)|^2 dv_g \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \quad (3.7)$$

En utilisant (3.5), on a pour tout $m, l \in \mathbb{N}$, $m \neq l$:

$$\|u_m - u_l\|_{p,s} \leq A \|u_m - u_l\|_{H_{1,G}^2(M)} \quad (3.8)$$

On déduit que $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace $(L^p(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s}), \|\cdot\|_{p,s})$ qui est de Banach. Donc il existe $\bar{u} \in L^p(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})$ tel que $\|u_N - \bar{u}\|_{p,s} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. En plus, on a :

$$\|\bar{u}\|_{p,s} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_N\|_{p,s} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} A \|u_N\|_{H_{1,G}^2(M)} = A \|u\|_{H_{1,G}^2(M)} \quad (3.9)$$

Notons que, comme M est compacte alors $B := \sup\{d_g(y, Gx) \mid x, y \in M\} < +\infty$.

Par suite

$$\begin{aligned} \|u_N - \bar{u}\|_p^p &\leq \int_M |u_N - \bar{u}|^p d_g(x, Gx_0)^s \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\ &\leq B^s \|u_N - \bar{u}\|_{p,s}^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

D'autre part $p \geq 2$, alors $L^p(M) \subset L^2(M)$. Par suite $(u_N)_{N \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{u}$ pour la norme $\|u\|_2$. D'où la suite $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ admet deux limite u et \bar{u} dans $L^2(M)$ donc $u = \bar{u}$ presque par tout sur M . Avec (3.9), on déduit que

$$\|u\|_{p,s} \leq A \|u\|_{H_{1,G}^2(M)}$$

D'où le résultat . □

3.3 Inclusion et inégalités

Théorème 3.3.1. *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, G un groupe d'isométries de M , $x_0 \in M$ tel que Gx_0 est une orbite de dimension minimal $k \in [1, n - 2[$, et $s \in [0, 2]$. On définit $2^*(k, s) = \frac{2(n-k-s)}{n-k-2}$, $2^* = 2^*(0, 0)$. On suppose que l'hypothèse 3.1.1 est vérifiée. Alors l'espace de Sobolev $H_{1,G}^2(M)$ est inclus continuellement dans $L^{2^*(k,s)}\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s}\right)$*

Preuve : En effet, soit $u \in H_{1,G}^2(M)$. Par Hebey [27], la première inclusion de Sobolev en présence de la géométrie (le cas où $s = 0$), implique l'existence d'une constante positive C tel que

$$\|u\|_{2^*(k)} \leq C \|u\|_{H_{1,G}^2(M)} \quad (3.10)$$

D'autre part, en partant de l'inégalité de Hardy sur \mathbb{R}^{n-k} (la preuve de cette inégalité est faite dans Ghoussoub-Robert [19])

$$\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \frac{\phi^2}{|X|^2} dX \leq \frac{4}{(n-k-2)^2} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} |\nabla \phi|^2 dX, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-k}) \quad (3.11)$$

3.3 INCLUSION ET INÉGALITÉS

On suppose maintenant que (M, g) et G vérifient l'Hypothèse 3.1.1 et on suit les notations introduites dans la Section 3.1.

Soit $u \in C_G^\infty(M)$ tel qu'il existe $r_0 > 0$, tel que $\text{supp } u \subset B_{r_0}(Gx_0)$. On note $\bar{u} = u \circ \Pi$, où Π est la projection de x sur la $(n - k)$ -Variété Riemannienne N . Par (3.11), il existe $C_1 > 0$ tel que

$$\int_N \frac{\bar{u}^2}{d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^2} dv_{\bar{g}} \leq C_1 \|\nabla \bar{u}\|_2^2 \quad (3.12)$$

D'autre part, il existe $C_2, C_3 \geq 0$ tel que

$$\int_M \frac{u^2}{d_g(x, Gx_0)^2} dv_g = \int_N \frac{\bar{u}^2}{d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^2} \bar{v} dv_{\bar{g}} \leq C_2 \int_N \frac{\bar{u}^2}{d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^2} dv_{\bar{g}}$$

Et

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq C_3 \|\nabla \bar{u}\|_2^2$$

Groupons les trois dernières inégalités. Alors, pour tout $u \in C_G^\infty(M)$ tel que $\text{supp } u \subset B_{r_0}(Gx_0)$, il existe $C > 0$ tel que

$$\int_M \frac{u^2}{d_g(x, Gx_0)^2} dv_g \leq C \|u\|_{H_{1,G}^2(M)}^2 \quad (3.13)$$

Posons maintenant $p = p(s) > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{s}{2} = 1$. Pour une fonction $u \in C_{c,G}^\infty(M)$ tel que $\text{supp } u \subset B_{r_0}(Gx_0)$, par Hölder, on a

$$\int_M |u|^{2^*(k,s)-s} \left(\frac{u}{d_g(x, Gx_0)} \right)^s dv_g \leq \left(\int_M |u|^{\frac{2(2^*(k,s)-s)}{2-s}} dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{u^2}{d_g(x, Gx_0)^2} dv_g \right)^{\frac{s}{2}} \quad (3.14)$$

Puisque $\frac{2(2^*(k,s)-s)}{2-s} = 2^*(k)$, en élevant l'inégalité précédente à la puissance $\frac{2}{2^*(k,s)}$ on aura :

$$\left(\int_M |u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \leq \left(\int_M |u|^{\frac{2-s}{2^*(k,s)}} dv_g \right)^{\frac{2-s}{2^*(k,s)}} \left(\frac{u^2}{d_g(x, Gx_0)^2} dv_g \right)^{\frac{s}{2^*(k,s)}} \quad (3.15)$$

Groupons cette inégalité avec (3.10) et sachant que $\frac{2^*(k)(2-s)}{2 \cdot 2^*(k,s)} + \frac{s}{2^*(k,s)} = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \left(\int_M |u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} &\leq C \left(\|u\|_{H_{1,G}^2(M)}^2 \right)^{\frac{2^*(k)(2-s)}{2 \cdot 2^*(k,s)}} C' \left(\|u\|_{H_{1,G}^2(M)}^2 \right)^{\frac{s}{2^*(k,s)}} \\ &\leq C'' \|u\|_{H_{1,G}^2(M)}^2 \end{aligned}$$

Où C, C', C'' sont des constantes strictement positives ne dépend que de M, k , et s .

Soit maintenant $u \in H_{1,G}^2(M)$, et posons $h(x) = \eta\left(\frac{d_g(\bar{x}, Gx_0)}{\delta}\right)$ où δ est obtenue de l'hypothèse 3.1.1. On a alors $0 \leq h \leq 1$ et de plus $\text{supp } h \subset B_\delta(Gx_0)$. D'après ce qui précède on sait qu'il existe $C \geq 0$ tel que

$$\|hu\|_{L^{2^*(k,s)}\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s}\right)} \leq C \|u\|_{H_{1,G}^2(M)} \quad (3.16)$$

D'autre part, il existe $\delta' < \delta$ et $C \geq 0$, tel que

$$\begin{aligned} \left(\int_M |(1-h)u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} &= \left(\int_{M \setminus B_{\delta'}(Gx_0)} |(1-h)u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \\ &\leq C \left(\int_M |u|^{2^*(k,s)} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \end{aligned}$$

Par Faget [17], on sait qu'il existe C tel que, pour tout $u \in H_{1,G}^2(M)$, on a

$$\|u\|_{L^{2^*(k,s)}(M)}^2 \leq \|u\|_{H_{1,G}^2(M)}$$

Par suite, il existe $C \geq 0$ tel que

$$\left(\int_M |(1-h)u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \leq C \|u\|_{H_{1,G}^2(M)} \quad (3.17)$$

Or on a $u = hu + (1-h)u$. Groupons (3.17) et (3.16), on trouvera le résultat demandé. \square

Théorème 3.3.2. *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, G un groupe d'isométries de M , $x_0 \in M$ tel que Gx_0 est une orbite de dimension minimal $k \in [1, n-2[$, et $s \in [0, 2]$. On définit $2^*(k, s) = \frac{2(n-k-s)}{n-k-2}$. On suppose*

que l'hypothèse 3.1.1 est vérifiée. Alors pour tout $q \in [1, 2^*(k, s)]$, $H_{1,G}^2(M)$ est inclus continuellement dans $L^q(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})$. De plus si $1 \leq q < 2^*(k, s)$ l'inclusion est compacte.

Preuve : On décompose la preuve en deux parties :

Partie I Montrons d'abord qu'on a $H_{1,G}^2(M) \hookrightarrow L^q(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})$.

Soit $u \in H_{1,G}^2(M)$, par l'inégalité de Hölder (3.1)

$$\|u\|_{q,s} \leq \|u\|_{2^*(k,s)} \left(\int_M \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*(k,s)}}$$

Et d'après théorème 3.3.1, on sait qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $v \in H_{1,G}^2(M)$, on a

$$\|v\|_{2^*(k,s),s} \leq C \|v\|_{H_{1,G}^2(M)}$$

Par suite, on a :

$$\|u\|_{q,s} \leq C \|u\|_{H_{1,G}^2(M)} \left(\int_M \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*(k,s)}}$$

D'où le résultat d'injection continue.

Partie II Démontrons maintenant l'injection compacte. Pour cela on se réfère au théorème de Rellich-Kandrov qui nous assure l'injection compacte de $H_{1,G}^2(M)$ dans $L^2(M)$.

Posons $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $H_{1,G}^2(M)$ (Il existe $C > 0$ tel que $\|u\|_{H_{1,G}^2(M)} \leq C$). La réflexivité de l'espace $H_{1,G}^2(M)$ et le théorème de Rellich-Kandrov assure l'existence d'une fonction $u \in H_{1,G}^2(M)$, dont à sous suite près qu'on le note aussi $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ on a

- i) $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers u dans $H_{1,G}^2(M)$
- ii) $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers u dans $L^2(M)$
- iii) $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge presque pour tout $x \in M$ vers u

Soit $\epsilon > 0$. On définit pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $A > 0$ l'ensemble

$$\Omega_i(A) = \{x \in M / |u_i(x) - u(x)| < A\}$$

Par l'injection continue de la partie précédente et par le fait que u_i est bornée dans $H_{1,G}^2(M)$, il existe $C, C', C'' > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \int_{M \setminus \Omega_i(A)} |u_i - u|^q \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} &\leq \frac{1}{A^{2^*(k,s)-q}} \int_{\Omega_i(A)} |u_i - u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\ &\leq \frac{C}{A^{2^*(k,s)-q}} \|u_i - u\|_{H_{1,G}^2(M)}^{2^*(k,s)} \\ &\leq \frac{C}{A^{2^*(k,s)-q}} (C' + \|u\|_{H_{1,G}^2(M)})^{2^*(k,s)} \\ &\leq \frac{C''(n, k, s, u)}{A^{2^*(k,s)-q}} \end{aligned}$$

Or $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{C''(n, k, s, u)}{A^{2^*(k,s)-q}} = 0$. Donc il existe $A_0 = A_0(\epsilon)$ telle que pour tout $A > A_0$ on a

$$\frac{C''(n, k, s, u)}{A^{2^*(k,s)-q}} < \frac{\epsilon}{2}$$

d'autre part, posons la suite des fonctions $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définie sur M par

$$f_i(x) = \frac{|u_i(x) - u(x)|^q}{d_g(x, Gx_0)^s} \mathbb{1}_{\Omega_i(A)}(x)$$

C'est une suite de fonctions intégrables et qui est dominée par ϕ tel que $\phi(x) = A^q d_g(x, Gx_0)^{-s}$ qui est intégrable. De plus elle converge presque pour tout $x \in M$ vers 0. Alors, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit qu'il existe $i_0 = i_0(\epsilon) > 0$, tel que pour tout $i > i_0$ on a :

$$\int_M f_i dv_g < \frac{\epsilon}{2}$$

Ensuite, pour tout $i > i_0$, $A > A_0$, on a

$$\begin{aligned} \|u_i - u\|_{q,s}^q &= \int_M |u_i - u|^q \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\ &= \int_{M \setminus \Omega_i(A)} |u_i - u|^q \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} + \int_M f_i dv_g \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

D'où $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge u dans l'espace $L^q(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})$

□

3.4 Meilleures constantes sur des variétés Riemanniennes à ϵ -près

Définition 3.4.1. Soient $n \geq 3$, $s \in [0, 2]$ et $1 \leq k < n - 2$. On note $m = n - k$. On suppose que $m \geq 3$ et on définit la meilleure constante de Sobolev Euclidienne qu'on note $K_s(m)$. Cette constante ne dépend que de n , s et k , et elle vérifie

$$K_s(m)^{-1} = \inf_{\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \phi|^2 dX}{\left(\int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\phi|^{2^*(k,s)}}{|X|^s} dX \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} \quad (3.18)$$

avec $2^*(k, s) = \frac{2(m-s)}{m-2}$.

notation 3.4.2. On note $2^* = 2^*(0, 0)$ et $2^*(k) = 2^*(k, 0)$. En effet dans le cas $k = s = 0$, des inclusions de Sobolev $H_1^2(M) \hookrightarrow L^p(M)$ pour $p \in]2, 2^*[$ sont démontrés, et Aubin [3] et Talenti [44] on démontré que la première meilleure constante de Sobolev constante de Sobolev est noté $K_0(n)$, sa forme explicite est

$$K_0(n) = \frac{4}{n(n-2)w_n^{\frac{2}{n}}} \quad (3.19)$$

où w_n est le volume de la n -sphère unitaire. D'autre part en prenant A le minimum de volum de dimension d orbite principale de dimension k , Faget [17] a prouvé que la meilleure constante dans les inégalités de Sobolev pour des fonction G invariantes est

$$K_0(n, k) = \frac{K_0(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k)}}} \quad (3.20)$$

De plus, pour le cas $k = 0$, Jaber [31] a montré qu'à ϵ -près

$$K_s(n) = \frac{1}{(n-2)(n-s)} \left(\frac{1}{2-s} w_{n-1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{n-2}{2-s}\right)}{\Gamma\left(\frac{2(n-s)}{2-s}\right)} \right)^{-\frac{2-s}{n-s}} \quad (3.21)$$

où Γ est la fonction d'Euler. De plus, il est démontré dans Lieb [34] que les premiers meilleurs constantes de Sobolev sont atteintes sur \mathbb{R}^n dans ces cas par

$$\phi_{s,n} = C(\lambda^{2-s} + |X|^{2-s})^{-\frac{2-s}{n-s}} \quad (3.22)$$

Définition 3.4.3. Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, G un groupe d'isométries de M , $x_0 \in M$ tel que Gx_0 est une orbite principale de dimension minimal $k \in [1, n-2[$, et $s \in (0, 2)$. Une constante $L > 0$ est dite la première constante des inégalités de Sobolev Riemannienne si elle vérifie pour tout $u \in H_{1,G}^2(M)$

$$\|u\|_{2^*(k,s),s}^2 \leq L\|\nabla u\|_2^2 + B\|u\|_2^2 \quad (I_L^B)$$

Définition 3.4.4. On appelle la première meilleure constante des inégalités de Sobolev Riemannienne la constante $L_0 = L_0(M, g, n, k, s, x_0)$ qui vérifie.

$$L_0 = \inf\{L > 0 \text{ tel que } (I_L^B) \text{ est vérifié}\}$$

Proposition 3.4.5. Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, G un groupe d'isométries de M , $x_0 \in M$ tel que Gx_0 est une orbite de dimension minimal $k \in [1, n-2[$, $s \in (0, 2)$ et $2^*(k, s) = \frac{2(n-k-s)}{n-k-2}$ l'exposant critique de Sobolev. On suppose que l'Hypothèse 3.1.1 est vérifiée. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe B_ϵ , tel que pour tout $u \in H_{1,G}^2(M)$, on a

$$\|u\|_{2^*(k,s),s}^2 \leq \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \epsilon \right) \|\nabla u\|_2^2 + B_\epsilon \|u\|_2^2 \quad (3.23)$$

Preuve : On suit dans cette preuve le travail de Jaber [?] dans le cas particulier où $k = 0$.

Étape I : (Construction d'un recouvrement fini de $N = B_\sigma(Gx_0)/G$ par des boules exponentielles).

On pose la $(n-k)$ variété Riemannienne (N, \bar{g}) . Pour δ la métrique euclidienne sur \mathbb{R}^m et par critère de compacité de M (plus de détail dans Jaber [?], Proposition 1.2.1 et Appendice I), et par suite sur N , nous avons pour tout $\bar{x} \in N$, et tout $\rho > 0$, il existe $r = r(x, \rho) \in]0, \frac{i_{\bar{g}}(N)}{2}[$, tel que $\lim_{\rho \rightarrow 0} r(x, \rho) = 0$ et la carte exponentielle $(B_{2r}(\bar{x}), \exp_{\bar{x}}^{-1})$ satisfait les propriétés suivantes :

$$(a) \quad (1 - \rho)\delta \leq \bar{g} \leq (1 + \rho)\delta$$

$$(b) \quad (1 - \rho)^{\frac{m}{2}} dx \leq dv_{\bar{g}} \leq (1 + \rho)^{\frac{m}{2}} dx$$

$$(c) \quad D_{\delta}^{-1}|T|_{\delta} \leq |T|_{\bar{g}} \leq D_{\delta}|T|_{\delta} \text{ pour tout } T \text{ tenseur 1-covariant sur } N$$

Avec $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} D_{\delta} = 1$.

Étape II : On démontre que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $u \in C_c^{\infty}(B_{r_0}(Gx_0))$ G -invariante, on a :

$$\|u\|_{2^{*(k,s)},s}^2 \leq \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^{*(k,s)}}}} + \frac{\epsilon}{2} \right) \|\nabla u\|_2^2 \quad (3.24)$$

Par la définition de la meilleur constante de Sobolev (3.21) vues en Jaber [31], on a pour tout $\Phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n-k})$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \frac{|\Phi|^{2^{*(k,s)}}}{|X|_{\xi}^s} dX \right)^{\frac{2}{2^{*(k,s)}}} \leq K_s(n-k) \int_{\mathbb{R}^{n-k}} |\nabla \Phi|_{\xi}^2 dX \quad (3.25)$$

Soit $u \in C_c^{\infty}(B_{\alpha}(Gx_0))$, G -invariante pour certain $\alpha > 0$. On pose $N = B_{r_0}(Gx_0)/G \subset \mathbb{R}^m$ muni de sa métrique \bar{g} . On note $\bar{u} = u \circ \Pi$ où Π est la projection canonique de (M, g) vers (N, \bar{g}) (voir l'hypothèse 3.1.1). En utilisant les trois propriétés de notre carte exponentielle développées dans l'étape précédente et (3.25), mais cette fois sur $N \subset \mathbb{R}^{n-k}$ on écrit

$$\begin{aligned} \|\bar{u}\|_{L^{2^{*(k,s)}}(N, \frac{dv_{\bar{g}}}{d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)})}^2 &\leq (1 + \rho)^{\frac{m}{2^{*(k,s)}}} K_s(n-k) \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla(\bar{u} \circ \exp_{\bar{x}_0})|_{\delta}^2 dX \\ &\leq D_{\rho}^2 (1 + \rho)^{\frac{m}{2^{*(k,s)}}} (1 - \rho)^{-\frac{m}{2}} K_s(n-k) \int_N |\nabla \bar{u}|_{\bar{g}}^2 dv_{\bar{g}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Puisque $\lim_{\rho \rightarrow 0} D_{\rho}^2 (1 + \rho)^{\frac{m}{2^{*(k,s)}}} (1 - \rho)^{-\frac{m}{2}} = 1$, il s'ensuit que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\rho_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \rho < \rho_0$, on a

$$\left(\int_{B_{r_0}(\bar{x}_0)} |\bar{u}|^{2^{*(k,s)}} \frac{dv_{\bar{g}}}{d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^{*(k,s)}}} \leq \left(K_s(n-k) + \frac{\epsilon}{2} \right) \int_{B_{r_0}(\bar{x}_0)} |\nabla \bar{u}|_{\bar{g}}^2 dv_{\bar{g}}$$

D'après Faget [17] (formule (1.10)), pour toute fonction $f \in C_c^{\infty}(M)$ G -invariante,

et pour tout $\epsilon > 0$, il existe U_{Gx_0} un voisinage de Gx_0 , tel que

$$\int_M f dv_g \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \text{Vol}(Gx_0) \int_{U_{Gx_0}} \bar{f} dv_{\bar{g}}$$

Et aussi

$$\int_M |\nabla f|_g^2 dv_g \geq \frac{1-\epsilon}{(1+\epsilon)^2} \text{Vol}(Gx_0) \int_{U_{Gx_0}} |\nabla \bar{f}|_{\bar{g}}^2 dv_{\bar{g}}$$

Posons alors r_0 assez petit tel que $B_{r_0}(Gx_0) \subset U_{Gx_0}$, on aura

$$\begin{aligned} & \left(\int_{B_{r_0}(Gx_0)} |u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \\ & \leq \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \text{Vol}(Gx_0) \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \left(\int_{B_{r_0}(\bar{x}_0)} |\bar{u}|^{2^*(k,s)} \frac{dv_{\bar{g}}}{d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \\ & \leq \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \text{Vol}(Gx_0) \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \left(K_s(n-k) + \frac{\epsilon}{2} \right) \int_{B_{r_0}(\bar{x}_0)} |\nabla \bar{u}|_{\bar{g}}^2 dv_{\bar{g}} \\ & \leq \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}+2} \text{Vol}(Gx_0)^{\frac{2}{2^*(k,s)}-1} \left(K_s(n-k) + \frac{\epsilon}{2} \right) \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g \\ & \leq \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}+2} A^{\frac{2}{2^*(k,s)}-1} \left(K_s(n-k) + \frac{\epsilon}{2} \right) \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g \end{aligned}$$

Et ceci est vraie pour tout $\epsilon > 0$. Donc, pour tout $\epsilon > 0$ on a (3.24) est vérifiée.

Étape III : On démontre que pour tout $\epsilon > 0$, $r_0 > 0$ et $u \in C_c^\infty(M \setminus B_{r_0}(Gx_0))$ G -invariante, il existe $B_{s,\epsilon} > 0$ tel que :

$$\|u\|_{2^*(k,s),s}^2 \leq \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \frac{\epsilon}{2} \right) \|\nabla u\|_2^2 + B_{s,\epsilon} \|u\|_2^2 \quad (3.27)$$

Pour tout $x_1 \in M$, tel que $d_g(x_1, Gx_0) > r_0$, on pose $u \in C_c^\infty(B_{r_1}(Gx_1))$

G -invariante. Alors pour tout x dans le support de u , on a

$$d_g(x, Gx_0) \geq r_0 > 0$$

Par suite

$$\begin{aligned} \left(\int_M |u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} &= \left(\int_{B_{r_1}(Gx_1)} |u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \\ &\leq \frac{1}{r_0^{\frac{2s}{2^*(k,s)}}} \left(\int_{B_{r_1}(Gx_1)} |u|^{2^*(k,s)} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \end{aligned}$$

Pour montrer (3.27) il suffit de montrer que, pour tout $\beta > 0$, il existe $B_\beta > 0$ tel que pour tout $u \in H_{1,G}^2(M)$, on a

$$\|u\|_{2^*(k,s)}^2 \leq \beta \|\nabla u\|_2^2 + B_\beta \|u\|_2^2 \quad (3.28)$$

Pour montrer (3.28), on suppose par l'absurde, qu'il existe ϵ_0 tel que pour tout $B > 0$, il existe $u_B \in H_{1,G}^2(M)$ qui vérifie

$$\|u_B\|_{2^*(k,s)}^2 \geq \beta \|\nabla u_B\|_2^2 + B \|u_B\|_2^2$$

En particulier, pour $B = l \in \mathbb{N}$, on a

$$\|u_l\|_{2^*(k,s)}^2 \geq \beta \|\nabla u_l\|_2^2 + l \|u_l\|_2^2 \quad (3.29)$$

On pose $v_l = \frac{u_l}{\|u_l\|_{2^*(k,s)}}$, (3.29) sera

$$1 \geq \beta \|\nabla v_l\|_2^2 + l \|v_l\|_2^2 \quad (3.30)$$

Ceci est vraie pour tout $\beta > 0$. Par suite, pour l assez grand :

$$\|v_l\|_2^2 \leq \frac{2}{l} \quad (3.31)$$

Or, par (3.30) on déduit que v_l est bornée dans $H_{1,G}^2(M)$. Comme $2^*(k, s) < 2^*(k)$, par Faget [17], l'injection continue de l'espace $H_{1,G}^2(M)$ dans $L^{2^*(k,s)}$ est

continue donc v_l à sous-suite près converge fortement vers certain v_0 dans $L^{2^*(k,s)}$. D'autre part, par (3.31), v_l converge fortement vers 0 dans $L^2(M)$. Alors par unicité de la limite forte, à sous suite près, on a :

$$v_l \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^{2^*(k,s)} \quad (3.32)$$

Mais par définition de v_l , on a $\|v_l\|_{2^*(k,s)}^2 = 1$, ce qui contredit (3.32). Alors, (3.28) est vérifiée et par suite (3.27) l'est aussi.

Étape IV : On montre (3.23) pour tout $u \in C_c^\infty(M)$, G -invariant. Pour cela, on pose $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$, tel que $0 \leq \phi \leq 1$ et $\phi(x) = 1$ pour tout $x \leq 1$ et $\phi(x) = 0$ pour tout $x \geq 2$. Pour tout $\delta > 0$, on pose $\eta := \phi\left(\frac{d_g(x, Gx_0)}{2\delta}\right) \in C_c^\infty(B_\delta(Gx_0))$. Notons que η et $(1 - \eta)$ sont G -invariant, et de plus il existe $H > 0$ tel que

$$|\nabla \eta^{\frac{1}{2}}|_g, |\nabla(1 - \eta)^{\frac{1}{2}}|_g \leq H \quad (3.33)$$

Soit $\epsilon > 0$, et posons $u \in C_G^\infty(M)$. Puisque $\frac{2^*(k,s)}{2^*(k)} > 1$, donc d'après la Proposition 3.2.3 on a :

$$\begin{aligned} & \left(\int_M |u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \\ & \leq \|\eta u^2 + (1 - \eta)u^2\|_{\frac{2^*(k,s)}{2}, s} \\ & \leq \|\eta u^2\|_{\frac{2^*(k,s)}{2}, s} + \|(1 - \eta)u^2\|_{\frac{2^*(k,s)}{2}, s} \\ & \leq \left(\int_M |\eta^{\frac{1}{2}} u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} + \left(\int_M |(1 - \eta)^{\frac{1}{2}} u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \end{aligned}$$

Par (3.24), et (3.27), pour tout $\epsilon > 0$, il existe $B_{s,\epsilon} > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_M |u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \\
 & \leq \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \frac{\epsilon}{2} \right) \int_M \left(|\nabla(\eta^{\frac{1}{2}}u)|_g^2 + |\nabla((1-\eta)^{\frac{1}{2}}u)|_g \right) dv_g + B_{s,\epsilon} \|u\|_2^2 \\
 & = \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \frac{\epsilon}{2} \right) \int_M \left(\eta^{\frac{1}{2}} |\nabla u|_g + |u| |\nabla \eta^{\frac{1}{2}}|_g \right)^2 dv_g \\
 & \quad + \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \frac{\epsilon}{2} \right) \int_M \left((1-\eta)^{\frac{1}{2}} |\nabla u|_g + |u| |\nabla(1-\eta)^{\frac{1}{2}}|_g \right)^2 dv_g + B_{s,\epsilon} \|u\|_2^2 \\
 & \leq \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \frac{\epsilon}{2} \right) \left(\int_M \left(\eta |\nabla u|_g^2 + 2\eta^{\frac{1}{2}} |\nabla u|_g |u|_g |\nabla \eta^{\frac{1}{2}}|_g + |u|^2 |\nabla \eta^{\frac{1}{2}}|_g^2 \right) dv_g \right. \\
 & \quad \left. + \int_M \left((1-\eta) |\nabla u|_g^2 + 2\eta^{\frac{1}{2}} |\nabla u|_g |u|_g |\nabla(1-\eta)^{\frac{1}{2}}|_g + |u|^2 |\nabla(1-\eta)^{\frac{1}{2}}|_g^2 \right) dv_g \right) \\
 & \quad + B_{s,\epsilon} \|u\|_2^2
 \end{aligned}$$

Avec (3.33), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_M |u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \\
 & \leq \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \frac{\epsilon}{2} \right) (\|\nabla u\|_2^2 + 4H\|\nabla u\|_2 \|u\|_2 + 2H^2\|u\|_2^2) + B_{s,\epsilon} \|u\|_2^2
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Posons ϵ_0 tel que, $1 < 1 + \epsilon_0 < \frac{\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \epsilon}{\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \frac{\epsilon}{2}}$, alors

$$\left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \frac{\epsilon}{2} \right) (1 + \epsilon_0) \leq \frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \epsilon$$

Et utilisant le fait que

$$4H\|\nabla u\|_2 \|u\|_2 \leq \epsilon_0 \|\nabla u\|_2^2 + \frac{(2H)^2}{\epsilon_0} \|u\|_2^2$$

En utilisant (3.34), on obtient

$$\begin{aligned} \left(\int_M |u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} &\leq \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \frac{\epsilon}{2} \right) (1 + \epsilon_0) \|\nabla u\|_2^2 + B_\epsilon \|u\|_2^2 \\ &\leq \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \epsilon \right) \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + B_\epsilon \int_M |u|^2 dv_g \end{aligned}$$

Avec

$$B_\epsilon = \left(\frac{(2H)^2}{\epsilon_0} + 2H^2 \right) \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \frac{\epsilon}{2} \right) + B_{s,\epsilon} \quad (3.35)$$

Ce qui termine cette étape.

Étape V : Soit maintenant $u \in H_{1,G}^2(M)$. Comme M est compacte, alors $C_G^\infty(M)$ est dense dans $(H_{1,G}^2(M), \|\cdot\|_{H_{1,G}^2(M)})$. Il s'ensuit qu'il existe $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ dans $C^\infty(M)$ vérifiant (3.23) qui converge vers u pour la norme de $H_{1,G}^2(M)$. Avec les mêmes arguments de densité utilisés dans la preuve de la Proposition 3.2.4, on démontre que u vérifie aussi l'inégalité (3.23)

□

Théorème 3.4.6. Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, G un groupe d'isométries de M , $x_0 \in M$ tel que Gx_0 est une orbite de dimension minimal $k \in [1, n-2[$, $s \in [0, 2]$ et $2^*(k, s) = \frac{2(n-k-s)}{n-k-2}$ l'exposant critique de Sobolev. On suppose que l'Hypothèse 3.1.1 est vérifiée. Alors on a

$$L_0 = L_0(M, g, n, k, s, x_0) = \frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}}$$

Où $K_s(n-k)$ est la meilleure constante de l'inégalité de Sobolev Euclidienne avec poids dans \mathbb{R}^{n-k} définie dans (3.21), et A est le volume minimal des orbites de dimension k .

Preuve : Soit L_1 tel qu'il existe B_{L_1} vérifiant

$$\|u\|_{L^{2^*(k,s)}(N, d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^s)}^2 \leq L_1 \|\nabla u\|_2^2 + B_{L_1} \|u\|_2^2 \quad (3.36)$$

On considère $(B_{\rho_0}(\bar{x}_0), \exp_{\bar{x}_0}^{-1})$ une carte exponentielle sur (N, \tilde{g}) où $N := B_\delta(\bar{x}_0)/G$.

Soit $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$. On pose $(\Phi_\mu)_{\mu>0}$ la famille dans $C_c^\infty(N)$ définie pour tout $\mu > 0$ assez petit vérifiant $\mu \leq \frac{\rho_0}{R}$ par :

$$\Phi_\mu(\bar{x}) = \Phi(\mu^{-1} \exp_{\bar{x}_0}^{-1}(\bar{x}))$$

En appliquant l'inégalité (3.36) notre suite Φ_μ , on peut écrire :

$$\|\Phi_\mu\|_{L^{2^*(k,s)}(N, d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^s)}^2 \leq L_1 \|\nabla \Phi_\mu\|_2^2 + B_{L_1} \|\Phi_\mu\|_2^2 \quad (3.37)$$

Soit $\epsilon > 0$. Par critère de compacité de \bar{N} , il existe $R_\epsilon > 0$, tel que pour tout $p \in B_{R_\epsilon}(0) \subset \mathbb{R}^m$ on a :

$$(1 - \epsilon)\delta \leq (\exp_{\bar{x}_0}^* \tilde{g})(p) \leq (1 + \epsilon)\delta$$

Or, $\lim_{\mu \rightarrow 0} R\mu = 0$, donc pour ce R_ϵ , il existe $\mu_0 = \mu_0(\epsilon)$ tel que pour tout $\mu < \mu_0$, on $R\mu < R_\epsilon$. Alors quitte au changement de variable $X = \mu^{-1} \exp_{\bar{x}_0}^{-1}(\bar{x})$ et

$$dv_{\exp_{\bar{x}_0}^{-1} * \delta} = d(\exp_{\bar{x}_0}(\mu X)) = \mu^m dX$$

Alors pour tout $\mu < \mu_0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} & \left(\int_{B_{\mu R}(\bar{x}_0)} |\Phi_\mu|^{2^*(k,s)} \frac{dv_{\tilde{g}}}{d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \\ & \geq (1 - \epsilon)^{\frac{m}{2^*(k,s)}} \left(\int_{B_{\mu R}(\bar{x}_0)} \frac{\Phi^{2^*(k,s)}(\mu^{-1} \exp_{\bar{x}_0}^{-1}(x))}{d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^s} dv_{\exp_{\bar{x}_0}^{-1} * \delta} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \\ & = (1 - \epsilon)^{\frac{m}{2^*(k,s)}} \left(\int_{B_R(0)} \frac{\Phi^{2^*(k,s)}(X)}{|\mu X|^s} \mu^m dX \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \\ & = \mu^{m-2} (1 - \epsilon)^{\frac{m}{2^*(k,s)}} \left(\int_{B_R(0)} \frac{\Phi^{2^*(k,s)}(X)}{|X|^s} dX \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \quad (3.38) \end{aligned}$$

Et de plus

$$\begin{aligned}
 \int_N |\nabla \Phi_\mu|_{\tilde{g}}^2 dv_{\tilde{g}} &= \int_{B_{\mu R}(\bar{x}_0)} |\nabla \Phi(\mu^{-1} \exp_{\bar{x}_0}^{-1}(x))|_{\tilde{g}}^2 dv_{\tilde{g}} \\
 &\leq (1 + \epsilon)^{\frac{m}{2}} \int_{B_{\mu R}(\bar{x}_0)} |\nabla \Phi(\mu^{-1} \exp_{\bar{x}_0}^{-1}(x))|_{\exp_{\bar{x}_0}^{-1} * \delta}^2 dv_{\exp_{\bar{x}_0}^{-1} * \delta} \\
 &= \frac{(1 + \epsilon)^{\frac{m}{2}}}{1 - \epsilon} \mu^{m-2} \int_{B_R(0)} |\nabla \Phi|_{\delta}^2 dX
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Avec les mêmes arguments, on démontre que

$$\int_N \Phi_\mu^2 dv_{\tilde{g}} \leq (1 + \epsilon)^{\frac{m}{2}} \mu^m \int_{B_R(0)} \Phi^2 dX \tag{3.40}$$

En combinant (3.38), (3.39) et (3.40) avec (3.37) on aura pour tout $\epsilon > 0$, $\mu < \mu_0$ que

$$\begin{aligned}
 &\left(\int_{B_R(0)} \frac{\Phi^{2^*(k,s)}(X)}{|X|^s} dX \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \\
 &\leq \frac{(1 + \epsilon)^{\frac{m}{2}}}{(1 - \epsilon)^{\frac{m}{2^*(k,s)}}} \left[\frac{L_1}{(1 - \epsilon)} \int_{B_R(0)} |\nabla \Phi|_{\delta}^2 dX + \mu^2 B_{L_1} \int_{B_R(0)} \Phi^2 dX \right]
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Passons $\epsilon \rightarrow 0$ et $\mu \rightarrow 0$, on obtient

$$\left(\int_{B_R(0)} \frac{\Phi^{2^*(k,s)}(X)}{|X|^s} dX \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \leq L_1 \int_{B_R(0)} |\nabla \Phi|_{\delta}^2 dX \tag{3.42}$$

Par conséquence, en utilisant la définition de la meilleur constante de Sobolev sur la variété N on sait que pour tout L_1 vérifiant (3.36), on a :

$$L_1 \geq K_s(n - k) \tag{3.43}$$

D'autre part, soit $L \in \mathbb{R}$, tel qu'il existe B_L vérifiant cette fois pour tout $u \in H_{1,G}^2(M)$

$$\|u\|_{2^*(k,s),s}^2 \leq L \|\nabla u\|_2^2 + B_L \|u\|_2^2 \tag{3.44}$$

On pose la G -invariante $C_c^\infty(M)$ suite $\phi_\mu(x) = \Phi_\mu(\bar{x})$. On a

$$\begin{aligned} \|\phi_\mu\|_{2^*(k,s),s}^2 &= \left(\int_{B_{\mu R}(Gx_0)} |\phi_\mu|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, x_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \\ &= \left(\int_{B_{\mu R}(\bar{x}_0)} \bar{v}^{\frac{-2}{n-k-2}} |\Phi_\mu|^{2^*(k,s)} \frac{dv_{\tilde{g}}}{d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \\ &\leq (A + C_R \mu)^{-1 + \frac{2}{2^*(k,s)}} \left(\int_{B_{\mu R}(\bar{x}_0)} |\Phi_\mu|^{2^*(k,s)} \frac{dv_{\tilde{g}}}{d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Et par définition de \tilde{g} , on a

$$\int_N |\nabla \Phi_\mu|_{\tilde{g}}^2 dv_{\tilde{g}} = \int_M |\nabla \phi_\mu|_g^2 dv_g$$

Par suite, en utilisant (3.42) dans (3.45), on a

$$\|\phi_\mu\|_{2^*(k,s),s}^2 \leq (A + c'_R \mu)^{1 - \frac{2}{2^*(k,s)}} L \int_M |\nabla \phi_\mu|_g^2 dv_g$$

Pour tout L qui vérifie (3.44), posons $L_1 = (A + c'_R \mu)^{1 - \frac{2}{2^*(k,s)}} L$ qui vérifie (3.36). En utilisant (3.43), on aura que on a $L \geq \frac{K_s(n-k)}{A^{1 - \frac{2}{2^*(k,s)}}$. Et ceci est vraie pour tout L vérifiant (3.44), en particulier pour L_0 . D'autre part, par la définition de L_0 et la proposition 3.4.5, on a que $L_0 \leq \frac{K_s(n-k)}{A^{1 - \frac{2}{2^*(k,s)}}$. Donc, on aura l'égalité demandée. \square

Remarque 3.4.7. Dans le cas $s = 0$, ce résultat a été démontré par Faget [17]. La meilleure constante est alors

$$\frac{K_0(n-k)}{A^{1 - \frac{2}{2^*(k)}}} \quad (3.46)$$

Avec A est le minimum volume des orbite principale de dimension k

Remarque 3.4.8. D'après le Théorème 3.4.6, on a que la meilleure constante L_0 n'est pas celle du cas Euclidien. Effectivement, $L_0 = L_0(M, n, k, s, x_0)$ dépend de la géométrie de la variété (M, g)

Remarque 3.4.9. La Proposition 3.4.5 ne permet pas de conclure si L_0 est atteint ou

non, en d'autres termes pour le moment on ne sait pas si cette inégalité est vraie pour $\epsilon = 0$

3.5 Régularité sur les variétés

En suivant l'article [19] de Ghoussoub et Robert (voir la Proposition 8.1), nous démontrons un résultat sur les variétés Riemanniennes compactes.

Proposition 3.5.1. *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $a \in C^0(M)$, G un groupe d'isométries de M , $x_0 \in M$ tel que Gx_0 est une orbite de dimension minimal $k \in [1, n - 2]$. On pose de plus $s \in (0, 2)$ et on suppose que l'hypothèse 3.1.1 est vérifiée. On pose $2^*(k, s) = \frac{2(n-k-s)}{n-k-2}$ l'exposant critique de Sobolev en présence de géométrie, et on considère $q \in [2, 2^*(k, s)[$ et $h \in C^0(M)$, $h \geq 0$. On suppose qu'il existe $u \in H_{1,G}^2(M)$, solution faible de l'équation de Sobolev perturbée*

$$\Delta_g u + au = \frac{u |u|^{2^*(k,s)-2}}{d_g(x, Gx_0)^s} + hu |u|^{q-2} \quad (3.47)$$

Alors pour tout $p > 1$, $u \in L^p(M)$.

Preuve : On procède par étapes. On pose

$$G_L(t) = \begin{cases} t |t|^{\beta-1} & \text{si } |t| \leq L \\ \beta L^{\beta-1}(t - L) + L^\beta & \text{si } t \geq L \\ \beta L^{\beta-1}(t + L) - L^\beta & \text{si } t \leq -L \end{cases}$$

et

$$H_L(t) = \begin{cases} t |t|^{\frac{\beta-1}{2}} & \text{si } |t| \leq L \\ \frac{\beta+1}{2} L^{\frac{\beta-1}{2}}(t - L) + L^{\frac{\beta+1}{2}} & \text{si } t \geq L \\ \frac{\beta+1}{2} L^{\frac{\beta-1}{2}}(t + L) - L^{\frac{\beta+1}{2}} & \text{si } t \leq -L \end{cases}$$

On vérifie simplement que pour $L > 0, t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq tG_L(t) \leq H_L(t)^2 \quad \text{et} \quad G'_L(t) = \frac{4\beta}{(\beta+1)^2} (H'_L(t))^2$$

De plus, les fonctions G_L et H_L sont lipschitziennes donc $G_L(u), H_L(u) \in H^2_{1,G}(M)$.
Soit $\eta \in C_c^\infty(M)$, alors on a :

$$\eta^2 G_L(u), \eta H_L(u) \in H^2_{1,G}(M).$$

Comme u est une solution faible de l'équation (3.47) on a :

$$\int_M (\nabla u, \nabla(\eta^2 G_L(u)))_g dv_g = \int_M \eta^2 u G_L(u) \left(\frac{|u|^{2^*(k,s)-2}}{d_g(x, Gx_0)^s} + h|u|^{q-2} - a \right) dv_g \quad (3.48)$$

Or, on a que

$$\nabla(\eta^2 G_L(u)) = \eta^2 \nabla(G_L(u)) + \nabla(\eta^2) G_L(u) = \eta^2 G'_L(u) \nabla u + \nabla(\eta^2) G_L(u)$$

En posant pour $t \in \mathbb{R}$, $J_L(t) = \int_0^t G_L(r) dr$ et intégrant par partie, on aura

$$\begin{aligned} & \int_M (\nabla u, \nabla(\eta^2 G_L(u)))_g dv_g \\ &= \int_M \eta^2 G'_L(u) |\nabla u|^2 dv_g + \int_M (\nabla(\eta^2), \nabla J_L(u))_g dv_g \\ &= \frac{4\beta}{(\beta+1)^2} \int_M \eta^2 |\nabla H_L(u)|^2 dv_g + \int_M (\Delta \eta^2) J_L(u) dv_g \\ &= \frac{4\beta}{(\beta+1)^2} \int_M |\nabla(\eta H_L(u))|^2 dv_g - \frac{4\beta}{(\beta+1)^2} \int_M \eta \Delta \eta |H_L(u)|^2 dv_g + \int_M (\Delta \eta^2) J_L(u) dv_g \end{aligned} \quad (3.49)$$

D'autre part, on a

$$\int_M (\nabla u, \nabla(\eta^2 G_L(u)))_g dv_g \leq \int_M \left(|a| + \frac{|u|^{2^*(k,s)-2}}{d_g(x, Gx_0)^s} + |h| |u|^{q-2} \right) (\eta H_L(u))^2 dv_g$$

On applique l'inégalité de Hölder en présence de poids et celle de la Proposition 3.2.2 sur le membre droite de l'inégalité ci-dessus pour les fonctions

$$\begin{aligned} f_1(x) &= |a|d_g(x, Gx_0)^s + |u|^{2^*(k,s)-2} \in L^{\frac{2^*(k,s)}{2^*(k,s)-2}}(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s}) \\ f_2(x) &= |h| |u|^{q-2} \in L^{\frac{2^*(k)}{2^*(k)-2}}(M, dv_g) \\ g(x) &= (\eta H_L(u))^2(x) \end{aligned}$$

Donc on tire que :

$$\begin{aligned} & \int_M (\nabla u, \nabla(\eta^2 G_L(u)))_g dv_g \\ & \leq \left(\int_{\text{supp}(\eta)} | |a|d_g(x, Gx_0)^s + |u|^{2^*(k,s)-2} |^{\frac{2^*(k,s)}{2^*(k,s)-2}} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{1 - \frac{2}{2^*(k,s)}} \\ & \quad \times \left(\int_M |\eta H_L(u)|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \\ & \quad + \left(\int_{\text{supp}(\eta)} | |h| |u|^{q-2} |^{\frac{2^*(k)}{2^*(k)-2}} dv_g \right)^{1 - \frac{2}{2^*(k)}} \left(\int_M |\eta H_L(u)|^{2^*(k)} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*(k)}} \end{aligned}$$

Or par Faget [17], on sait qu'il existe $C \geq 0$ tel que

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\text{supp}(\eta)} | |h| |u|^{q-2} |^{\frac{2^*(k)}{2^*(k)-2}} dv_g \right)^{1 - \frac{2}{2^*(k)}} \left(\int_M |\eta H_L(u)|^{2^*(k)} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*(k)}} \\ & \leq C \left(\int_M |\nabla \eta H_L(u)|^2 dv_g + \int_M |\eta H_L(u)|^2 dv_g \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Or, d'après la Proposition 3.4.5, on sait qu'il existe une constante $B_1 > 0$, telle que pour tout $f \in H_{1,G}^2(M)$, on a :

$$\left(\int_M |f|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \leq \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + 1 \right) \|\nabla f\|_2^2 + B_1 \|f\|_2^2 \quad (3.51)$$

On pose

$$l(\eta) = \left(\int_{\text{supp}(\eta)} \left| |a|d_g(x, Gx_0)^s + |u|^{2^*(k,s)-2} \left| \frac{2^*(k,s)}{2^*(k,s)-2} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right| \right)^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}} \right. \\ \left. + \left(\int_{\text{supp}(\eta)} \left| |h| |u|^{q-2} \left| \frac{2^*(k)}{2^*(k)-2} dv_g \right| \right)^{1-\frac{2}{2^*(k)}} \right)$$

Remarquons que l est toujours finie si $q \leq 2^*(k)$. En utilisant ce qui précède, et (3.50), il existe $c \geq 0$ tel que :

$$\int_M (\nabla u, \nabla(\eta^2 G_L(u)))_g dv_g \\ \leq l(\eta) \left(\left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + 1 + c \right) \int_M |\nabla \eta H_L(u)|^2 dv_g + B_1 \int_M |\eta H_L(u)|^2 dv_g \right) \quad (3.52)$$

En combinant (3.49) et (3.52) avec (3.48), il existe $B_2 \geq 0$ tel que :

$$\left(\frac{4\beta}{(\beta+1)^2} - \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + 1 + c \right) l(\eta) \right) \int_M |\nabla(\eta H_L(u))|^2 dv_g \\ \leq \frac{4\beta}{(\beta+1)^2} \int_M |\eta \Delta \eta| |H_L(u)|^2 dv_g + \int_M |\Delta(\eta^2) J_L(u)| dv_g + l(\eta) B_2 \int_M |\eta H_L(u)|^2 dv_g \quad (3.53)$$

On va montrer maintenant que pour tout $p \geq 2$, $u \in L^p(M)$. Pour cela, on fixe $p \geq 2$ tel que $u \in L^p(M)$. Soit $\beta = p - 1 > 1$. Pour tout $x \in M$, on pose $r_x > 0$ tel que

$$\left[\left(\int_{B_{2r_x}(x)} \left| |a|d_g(x, Gx_0)^s + |u|^{2^*(k,s)-2} \left| \frac{2^*(k,s)}{2^*(k,s)-2} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right| \right)^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\int_{B_{2r_x}(x)} \left| |h| |u|^{q-2} \left| \frac{2^*(k)}{2^*(k)-2} dv_g \right| \right)^{1-\frac{2}{2^*(k)}} \right) \right] \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + 1 + c \right) \leq \frac{2\beta}{(\beta+1)^2} \quad (3.54)$$

Puisque M est compacte, donc elle peut être recouverte par un nombre finie de $B_{r_x}(x)$,

en d'autres termes il existe $x_1, \dots, x_N \in M$ tels que

$$M = \bigcup_{i=1}^N B_{r_{x_i}}(x_i)$$

Fixons maintenant $i \in \{1, \dots, N\}$ et prenons $\eta \in C^\infty(B_{2r_{x_i}}(x_i))$ telle que $\eta|_{B_{r_{x_i}}(x_i)} \equiv 1$. Par suite les inégalités (3.53) et (3.54) donnent :

$$\begin{aligned} & \frac{2\beta}{(\beta+1)^2} \int_M |\nabla(\eta H_L(u))|^2 dv_g \\ & \leq \frac{4\beta}{(\beta+1)^2} \int_M |\eta \Delta \eta| |H_L(u)|^2 dv_g + \int_M |\Delta(\eta)^2 J_L(u)| dv_g \\ & \quad + \frac{2\beta B_1}{(\beta+1)^2 \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-2^*(k,s)}} + 1 + c \right)} \int_M |\eta H_L(u)|^2 dv_g \end{aligned} \quad (3.55)$$

On peut vérifier qu'il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ dépendant seulement de β , telles que pour tous $t \in \mathbb{R}$, $L > 0$

$$|J_L(t)| \leq c_1 |t|^{\beta+1} \quad \text{et} \quad |H_L(t)|^2 \leq c_2 |t|^{\beta+1}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_M |\Delta(\eta^2) J_L(u)| dv_g & \leq \|\Delta(\eta^2)\|_\infty \int_M |J_L(u)| dv_g \\ & \leq c_1 \|\Delta(\eta^2)\|_\infty \int_M |u|^{\beta+1} dv_g \\ & \leq c_1 \|\Delta(\eta^2)\|_\infty \|u\|_{\beta+1}^{\beta+1} \end{aligned} \quad (3.56)$$

et

$$\int_M |H_L(u)|^2 dv_g \leq c_2 \int_M |u|^{\beta+1} dv_g = c_2 \|u\|_{\beta+1}^{\beta+1} \quad (3.57)$$

En combinant (3.55), (3.56) et (3.57) avec le fait que $u \in L^{\beta+1}(M) = L^p(M)$, on déduit

qu'il existe $c_3 = c_3(\beta, \eta) \geq 0$ telle que :

$$\begin{aligned} \frac{2\beta}{(\beta+1)^2} \int_M |\nabla(\eta H_L(u))|^2 dv_g &\leq c_3 \int_M |H_L(u)|^2 dv_g + \int_M |\Delta(\eta^2) J_L(u)| dv_g \\ &\leq c_1 \|\Delta(\eta^2)\|_\infty \|u\|_{\beta+1}^{\beta+1} + c_2 c_3 \|u\|_{\beta+1}^{\beta+1} \\ &:= c_4(u, \beta, \eta) \end{aligned} \quad (3.58)$$

En utilisant encore une fois l'inégalité (3.51) et en la combinant avec (3.57) et (3.58), on tire qu'il existe une constante $c = c(u, \eta, \beta)$ ne dépend pas de L telle que

$$\int_{B_{r_{x_i}}(x_i)} |H_L(u)|^{2^*(k)} dv_g \leq \int_M |H_L(u)|^{2^*(k)} dv_g \leq c$$

En faisant $L \rightarrow +\infty$, on obtiendra ensuite que pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on a

$$\int_{B_{r_{x_i}}(x_i)} |u|^{\frac{2^*(k)(\beta+1)}{2}} dv_g < +\infty$$

d'où $u \in L^{\frac{2^*(k)(\beta+1)}{2}}(M) = L^{\frac{(n-k)p}{n-k-2}}(M)$ avec $\frac{(n-k)p}{n-k-2} > p$. Par suite on tire le résultat demandé par itération. \square

Théorème 3.5.2. Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, G un groupe d'isométries de M . On se donne

$$L = \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_{ij} + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i + c$$

un opérateur différentiel elliptique, tel que pour tout $i, j = 1, \dots, n$, $a^{ij}, b^i \in C^\infty(M)$ et $c \in L^\infty(M)$. On considère $f \in L^p(M)$, $p > 1$ et $u \in H_{1,G}^2(M)$ une solution faible de l'équation $Lu = f$. Alors $u \in H_{2,G}^p(M)$

Preuve : Soit $L_1 = L - c$, on a donc u solution faible de l'équation $L_1 u = f - cu$. Il s'ensuit de la Théorie standard des E.D.P elliptique (voir Gilbarg-Trudinger [22]) que si $f - cu \in L^p(M)$, alors $u \in H_{2,G}^p(M)$. On distingue deux cas

Cas 1 : $p \leq 2^*(k)$. Dans ce cas le Théorème 3.3.2, nous assure que $H_{1,G}^2(M)$ injecte dans $L^p(M)$, par suite $u \in L^p(M)$ et ensuite $f - cu \in L^p(M)$. D'où $u \in H_{2,G}^p(M)$.

Cas 2 : $p > 2^*(k)$. Dans ce cas, en utilisant une autre fois le Théorème 3.3.2, on aura que

$H_{1,G}^2(M)$ s'injecte dans $L^{2^*(k)}(M)$, par suite $u \in H_{2,G}^{2^*(k)}(M)$. Avec la formule de la première inclusion de Sobolev en présence d'isométries vue dans Faget [17], on aura que pour q_1 tel que $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{2^*(k)} - \frac{2}{n-k}$, $H_{2,G}^{2^*(k)}(M)$ injecte dans $L^{q_1}(M)$. Donc $u \in L^{q_1}(M)$. Deux sous-cas sont distingués :

cas 2.1 : $p \leq q_1$. Dans ce cas on revient au premier cas.

cas 2.2 : $p > q_1$. Dans ce cas on a que $L^p(M) \hookrightarrow L^{q_1}(M)$, par suite $u \in L^{q_1}(M)$, de même pour $f - cu$. D'autre part, avec la formule de la première inclusion de Sobolev en présence d'isométrie, on a que $H_{2,G}^{q_1}(M) \hookrightarrow L^{q_2}(M)$, où q_2 est tel que $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{2}{n-k}$. On aura $u \in L^{q_2}(M)$

Supposons par l'absurde, qu'on pourrait construire par récurrence une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n < p$, $u \in L^{q_n}(M)$ et $\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{q_n} - \frac{2}{n-k}$. La suite (q_n) est croissante et majorée par p , donc elle converge vers certain $q \in \mathbb{R}$, on tire par suite une contradiction en passant à la limite, avec la définition de la suite q_n . Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $q_{n_0} > p$, et par suite $u \in L^{q_{n_0}}(M)$, et ceci termine la preuve. □

Corollaire 3.5.3. Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, G un groupe d'isométries de M . On suppose que l'hypothèse 3.1.1 est vérifiée. Soit $u \in H_{1,G}^2(M)$ solution faible de l'équation

$$\Delta_g u + au = f_u$$

avec $a \in C^0(M)$.

1. Si $f \in L^p(M)$, pour un certain $p > n - k$. Alors il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $u \in C^{1,\alpha}(M)$
2. Si $f \in L^p(M)$, pour un certain p , qui vérifie $\frac{n-k}{2} < p < \frac{n-k}{s'}$, où $s' \in]0, 2[$. Alors pour tout $\alpha \in]0, \min(1, 2 - s')[$, on a $u \in C^{0,\alpha}$

Soit $p > n - k$, tel que $f \in L^p(M)$. Alors il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $u \in C^{1,\alpha}(M)$

Preuve : Soit $p > n$. D'après le théorème 3.5.2, $u \in H_{2,G}^2(M)$. Utilisons la deuxième inclusion de Sobolev en présence d'isométries vue dans Faget [17], on tire que $H_{1,G}^2(M) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(M)$ pour $\alpha = 1 - \frac{n-k}{p}$ et ceci termine la preuve de la première assertion.

D'autre part, pour $\frac{n-k}{2} < p < \frac{n-k}{s'}$, où $s' \in]0, 2[$, d'après le théorème 3.5.2, $u \in H_{2,G}^2(M)$. Utilisant la deuxième inclusion de Sobolev en présence d'isométrie, on tire

que pour tout $\beta \in]0, \min(1, 2 - \frac{n-k}{p})[$, on a $H_{1,G}^2(M) \hookrightarrow C^{0,\beta}(M)$. Mais ceci est vrai pour tout $p < \frac{n-k}{s'}$, ceci termine la preuve de la deuxième assertion en prenant p tends vers $\frac{n-k}{s'}$ \square

Proposition 3.5.4. *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, G un groupe d'isométries de M , et*

$$L = \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_{ij} + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i + c$$

un opérateur différentiel elliptique, tel que pour tout $i, j = 1, \dots, n$, $a^{ij}, b^i \in C^\infty(M)$ et $c \in L^\infty(M)$. On suppose que L est strictement elliptique à coefficients bornées, au sens qu'il existe $\lambda_1 > 0$ telle que pour tout $x \in M$, $Y \in T_x(M)$, on a $a^{ij} Y_i Y_j \geq \lambda_1 |Y|^2$. On considère $f \in L^2(M)$, et $u \in H_{1,G}^2(M)$ une solution faible de l'équation $Lu = f$. Alors il existe une constante C , telle que

$$\|u\|_{C^0(M)} \leq C \left(\|u\|_2 + \|f\|_{C^0(M)} \right)$$

Et pour tout $\alpha \in]0, 1[$

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq \left(\|u\|_{C^0(M)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}} \right)$$

Preuve : Par arguments de compacité sur M et en utilisant le Théorème 8.17 et le corollaire 6.3 de Gilbarg-Trudinger [22], on tire le résultat demandé. \square

Théorème 3.5.5. *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $a \in C^0(M)$ tel que $\Delta_g + a$ est coercif, G un groupe d'isométries de M , $x_0 \in M$ tel que l'orbite de Gx_0 est de dimension minimal $k \in [1, n - 2[$, et $s \in [0, 2[$. On suppose que l'hypothèse 3.1.1 est vérifiée. On définit $2^*(k, s) = \frac{2(n-k-s)}{n-k-2}$, et on considère $q \in [2, 2^*(k)[$ où $2^*(k) = 2^*(k, 0)$. Soit $h \in C^0(M)$, $h \geq 0$. On suppose qu'il existe $u \in H_{1,G}^2(M)$, Solution faible du système*

$$\Delta_g u + au = \frac{|u|^{2^*(k,s)-2} u}{d_g(x, Gx_0)^s} + h|u|^{q-2} u \quad (\text{E})$$

Alors $u \in C^{0,\alpha}(M) \cap C_{loc}^{1,\nu}(M \setminus \{Gx_0\})$, pour tout $\alpha \in (0, \min\{1, 2 - s\})$, $\nu \in (0, 1)$.

Preuve : On pose $f_u(x) = \frac{|u|^{2^*(k,s)-1}}{d_g(x, Gx_0)^s} + h|u|^{q-1}$. Notons que pour tous $p, p_1 \in]1, \frac{n-k}{s}[$, $p_2 \in]1, q]$, tels que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, par les inégalités de Hölder il existe une constante $c \geq 0$ tel que

$$\|f_u\|_p \leq \|d_g(x, Gx_0)^{-s}\|_{p_1} \|u\|_{p_2} + c\|u\|_{p_2} \quad (3.59)$$

D'après la proposition 3.5.1, $u \in L^t(M)$, pour tout $t \geq 1$. D'autre part, $p_1 < \frac{n-k}{s}$, alors $d_g(\cdot, Gx_0)^{-s} \in L^{p_1}(M)$, et $u \in L^{p_2}(M)$. L'inégalité (3.59) implique donc, que pour tout $1 < p < \frac{n-k}{s}$, $f_u \in L^p$. Il s'ensuit du Corollaire 3.5.3 que pour tout $\alpha \in]0, \min(1, 2-s)[$, $u \in C^{0,\alpha}(M)$.

D'autre part, puisque $u \in L^t(M)$, pour tout $t \geq 1$, donc $f_u \in L^q_{loc}(M) \setminus \{Gx_0\}$ pour tout $t \geq 1$. En prenant $t > n - k$ suffisamment grand, on tire du corollaire 3.5.3 que pour tout $\nu \in (0, 1)$, $u \in C^{1,\nu}_{loc}(M \setminus \{Gx_0\})$

□

Équation de Hardy-Sobolev perturbée en présence d'isométrie

Rappelons quelques notations de la Section 3.1.

Pour tout $x \in M$, $\bar{x} := \Pi(x)$ où $\Pi : M \rightarrow M/G$ la surjection canonique, on note $Gx := \{gx/g \in G\}$ l'orbite de x sous G et $Sx := \{g \in G/g(x) = x\}$ le stabilisateur de x sous G . Remarquons que Gx est une sous-variété compacte isomorphe au groupe quotient G/Sx . On définit une orbite principal Gx si son stabilisateur est minimal ($\forall y \in M$, Sy contient un sous-groupe conjugué de Sx), en particulier les orbites principales sont de dimension maximale mais l'inverse n'est pas vraie.

Soit maintenant $\Omega := \bigcup Px$ où Px est une orbite principal. On a Ω un ouvert dense de M et Ω/G' est une variété lisse qu'on peut le munir d'une distance Riemannienne \bar{g} tel que la surjection $\Omega \rightarrow \Omega/G'$ est une submersion Riemannienne. On considère la métrique \tilde{g} appartenant à la classe conforme de \bar{g} définie par

$$\tilde{g} = \bar{v}^{\frac{2}{n-k-2}} \bar{g},$$

avec $\bar{v}(\bar{x}) = \text{vol}(\Pi^{-1}(\bar{x})) = \text{vol}(Gx)$.

On fait de nouveau les hypothèses des Chapitres précédents sur le group G , à savoir :

Hypothèse 4.0.1. *Pour tout Gx_0 , un G -orbite de dimension minimale $k \geq 1$, on peut trouver $\delta > 0$, et G' un sous groupe fermé de $Isom_g(M)$ tel que :*

1. $G'x_0 = Gx_0$;
2. *Pour tout $x \in B_\delta(Gx_0) := \{y \in M / d_g(y; Gx_0) < \delta\}$, alors $G'x$ est principale et $G'x \subset Gx$.*

En particulier $\dim G'x = \dim Gx_0 = k, \forall x \in B_\delta(Gx_0)$.

L'importance de cette hypothèse est qu'elle assure que $B_\delta(Gx_0)/G'$ peut être considéré comme une variété Riemannienne de dimension $n - k$. Cette variété est alors munie des métriques \bar{g} et \tilde{g} .

On considère la fonction euclidienne ϕ définie par

$$X \in \mathbb{R}^m \mapsto (1 + |X|^{2-s})^{-\frac{m-2}{2-s}}. \quad (4.1)$$

où $m = n - k$. Par Lieb [35] et Jaber [31], nous savons que c'est une fonction extrémale de l'égalité suivante

$$K_s(n - k)^{-1} = \inf_{\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \phi|^2 dX}{\left(\int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\phi|^{2^*(k,s)}}{|X|^s} dX \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}}$$

Grâce à l'hypothèse 3.1.1, on rappelle que

$$N := B_{Gx}(\rho_0)/G = B_{\bar{x}_0}(\rho_0)$$

est une variété compacte à bord de dimension $m \geq 3$ pour certain $\rho_0 > 0$ assez petit.

Le but de ce chapitre est de montrer l'existence de solution $u \in C_G^2(M)$ G -invariante de l'équation sur M de Hardy-Sobolev perturbée suivante :

$$\Delta_g u + au = \frac{u^{2^*(k,s)-1}}{d_g(x, Gx_0)^s} + hu^{q-1}; u > 0.$$

4.1 Suite de Palais-Smale

On définit de plus la fonctionnelle J_q pour tout $v \in H_{1,G}^2(M)$ par

$$J_q(v) = \frac{1}{2} \int_M (|\nabla v|_g^2 + av^2) dv_g - \frac{1}{2^*(k,s)} \int_M v^{2^*(k,s)} \frac{1}{d_g(x, Gx_0)^s} dv_g - \frac{1}{q} \int_M hv^q dv_g \quad (4.2)$$

On rappelle qu'une suite $(u_N)_{N \in \mathbb{N}} \in H_{1,G}^2(M)$ est une suite de Palais-Smale (P-S) pour la fonctionnelle J_q s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $J_q(u_N) \rightarrow \beta$ et $J'_q(u_N) \rightarrow 0$ fortement dans le dual $H_{1,G}^2(M)'$. La suite $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est dite de Palais-Smale (P-S) pour J_q au niveau β . D'autre part, on dit que la fonctionnelle J_q satisfait la condition de Palais-Smale (P-S) au niveau β si pour toute suite $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ dans $H_{1,G}^2(M)$ telle que $J_q(u_N) \rightarrow \beta$, on peut extraire une sous-suite $(u_{N_i})_{i \in \mathbb{N}}$ de $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ qui converge fortement dans $H_{1,G}^2(M)$.

Lemme 4.1.1. *Pour tout $q \in]2, 2^*(k, s)[$, il existe $C_1 = C_1(q) > 0$, $C_2 = C_2(q) > 0$, et $C_3 = C_3(q) > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^*$*

$$\begin{aligned} ||x + y|^q - |x|^q - q|x|^{q-2}xy| &\leq C_1 (|x|^{q-2}|y|^2 + |y|^q) \\ |(x + y)|x + y|^q - x|x|^q| &\leq C_2 (|x|^q|y| + |y|^{q+1}) \\ ||x|^q - |y|^q - |x - y|^q| &\leq C_3 (|x|^{q-1}|x - y| + |x - y|^{q-1}|y|) \end{aligned}$$

Preuve : Rappelons que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $q > n$

$$(|x|^q)^{(n)} = \prod_{k=0}^{n-1} (q - k)x|x|^{q-n-1}$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^*$, il existe $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $y = tx$. On distingue deux cas :

Cas 1 : $t \rightarrow 0$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} |x + y|^q &= |x|^q(1 + t)^q = |x|^q [1 + qt + O(t^2)] \\ &= |x|^q + q|x|^{q-2}xy + O(|x|^{q-2}y^2) \end{aligned}$$

Où $C' > 0$ ne dépend que par q .

Cas 2 : $t \rightarrow \pm\infty$. Dans ce cas il existe $C'' > 0$ dépendant seulement de q , tel que

$$|x + y|^q = |x|^q(1 + t)^q \leq |x|^q [1 + C''|t|^q]$$

Comme $t \rightarrow \pm\infty$, il existe $\epsilon_0 > 0$ telle que $|t| > \epsilon_0$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \left| |x + y|^q - |x|^q - q|x|^{q-2}xy \right| &\leq |x|^q [2 + C''|t|^q + qt] \\ &\leq |x|^q |t|^q \left[\frac{1}{|t|^q} + C'' + \frac{q}{|t|^{q-1}} \right] \\ &\leq |x|^q |t|^q \left[\frac{1}{\epsilon_0^q} + C'' + \frac{q}{\epsilon_0^{q-1}} \right] \\ &\leq C''' |y|^q \end{aligned}$$

Où la constante $C''' > 0$ ne dépend que de q .

En combinant les deux cas précédentes, il existe alors une constante C_1 qui vérifie la premier inégalité de notre lemme. Avec les mêmes arguments que ci-dessus, on montre la deuxième inégalité de notre lemme. □

Proposition 4.1.2. *Soit $q \in]2, 2^*(k, s)]$, alors la fonction Φ_q définit par*

$$\begin{aligned} \Phi_q : H_{1,G}^2(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \int_M |\varphi|^q \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s}. \end{aligned}$$

est de classe C^1 sur $H_{1,G}^2(M)$. De plus, pour tout $\varphi \in H_{1,G}^2(M)$ on a

$$\begin{aligned} d\Phi_q(\varphi) : H_{1,G}^2(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto q \int_M h\varphi |\varphi|^{q-2} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s}. \end{aligned}$$

Preuve : Pour tout $\varphi \in H_{1,G}^2(M)$, on pose

$$\begin{aligned} \Psi_q(\varphi) : H_{1,G}^2(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto q \int_M h\varphi |\varphi|^{q-2} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s}. \end{aligned}$$

Notons que, pour tout $\varphi, h \in H_{1,G}^2(M)$ on a

$$\begin{aligned} |\Psi(\varphi)h| &\leq q \int_M |h| \times |\varphi|^{q-1} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\ &\leq \|h\|_{L^q(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})} \|\varphi\|_{L^q(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})}^{q-1} \end{aligned}$$

Par l'injection continue et compact de $H_{1,G}^2(M)$ dans $L^q(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})$ du théorème 3.3.1, il existe $c > 0$ tel que

$$|\Psi(\varphi)h| \leq c \|h\|_{H_{1,G}^2(M)} \|\varphi\|_{H_{1,G}^2(M)}^{q-1} < +\infty$$

Donc, $\Psi(\varphi)$ est bien définie et évidemment linéaire et est continue. De l'inégalité de Hölder, l'injection continue et compacte de Sobolev, et le Lemme 4.1.1, il existe $C_1(q) > 0$ tel que pour tout $h \in H_{1,G}^2(M)$ où $\|h\|_{H_{1,G}^2(M)} < 1$, on a

$$\begin{aligned} &|\Phi_q(\varphi + h) - \Phi_q(\varphi) - \Psi_q(\varphi)h| \\ &\leq \int_M \left| |\varphi + h|^q - |\varphi|^q - qh\varphi|\varphi|^{q-2} \right| \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\ &\leq C_1(q) \int_M h^2 |\varphi|^{q-2} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} + C_1(q) \int_M |h|^q \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\ &\leq C_1(q) \left[\|\varphi\|_{L^q(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})}^{1-\frac{2}{q}} \|h\|_{L^q(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})}^2 + \|h\|_{L^q(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})}^q \right] \\ &\leq C(\|h\|_{H_{1,G}^2(M)}^2 + \|h\|_{H_{1,G}^2(M)}^q) \end{aligned}$$

D'où Φ_q est une fonction différentiable sur $H_{1,G}^2(M)$ et sa différentielle vaut Ψ_q . Il reste à démontrer que Ψ_q est de classe C^0 , pour cela, on considère une suite $(\varphi_N)_{n \in \mathbb{N}^*} \in H_{1,G}^2(M)$ qui converge en norme vers φ , en d'autre terme en pose pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\eta_N \in H_{1,G}^2(M)$, tel que $\eta_N \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow +\infty$ et on a $\varphi_N = \varphi + \eta_N$. Par la deuxième inégalité du Lemme 4.1.1, les inégalité de Hölder et l'injection continue de Sobolev, pour tout $h \in H_{1,G}^2(M)$, vérifiant $\|h\|_{H_{1,G}^2(M)} \leq 1$, il existe $C_1, C_2, C_3 > 0$

dépendent de q tel que

$$\begin{aligned}
 & |\Psi_q(\varphi_N)h - \Psi_q(\varphi)h| \\
 & \leq q \int_M |h\varphi_N|\varphi_N|^{q-2} - h\varphi|\varphi|^{q-2}| \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\
 & \leq qC_1 \int_M (|\varphi|^{q-2}|\eta_N| + |\eta_N|^{q-1}) |h| \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\
 & \leq C_2 \|\varphi^{q-2}\|_{\frac{q}{q-2}}^q \|\eta_N\|_q \|h\|_q + C_3 \|\eta_N\|_{q-1}^{q-1}
 \end{aligned}$$

Or $q \leq 2^*(k, s)$, alors par le Théorème 3.3.2, il existe $c \geq 0$ tel que

$$|\Psi_q(\varphi_N)h - \Psi_q(\varphi)h| \leq c(\|\eta_N\|_{H_{1,G}^2(M)} + \|\eta_N\|_{H_{1,G}^2(M)}^{q-1})$$

Par suite,

$$\sup_{\substack{h \in H_{1,G}^2(M) \setminus \{0\} \\ \|h\|_{H_{1,G}^2(M)} \leq 1}} |\Psi_q(\varphi_N)h - \Psi_q(\varphi)h| = O\left(\|\eta_N\|_{H_{1,G}^2(M)}\right)$$

D'où le résultat. □

Proposition 4.1.3. *Pour tout $a \in C^0(M)$, la fonction Φ définie par*

$$\begin{aligned}
 \Phi : H_{1,G}^2(M) & \rightarrow \mathbb{R} \\
 \varphi & \mapsto \frac{1}{2} \int_M (|\nabla\varphi|^2 + a\varphi^2) dv_g.
 \end{aligned}$$

est de classe C^1 sur $H_{1,G}^2(M)$. De plus, pour tout $\varphi \in H_{1,G}^2(M)$ on a

$$\begin{aligned}
 d\Phi(\varphi) : H_{1,G}^2(M) & \rightarrow \mathbb{R} \\
 h & \mapsto \int_M ((\nabla\varphi, h)_g + a\varphi h) dv_g
 \end{aligned}$$

Preuve :

Pour tout $\varphi \in H_{1,G}^2(M)$, on pose

$$\begin{aligned} \Psi(\varphi) &: H_{1,G}^2(M) \rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto \int_M ((\nabla\varphi, h)_g + a\varphi h) dv_g \end{aligned}$$

Évidemment, Ψ est bien définie, linéaire et continue. Soit maintenant $h \in H_{1,G}^2(M) \setminus \{0\}$, en utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} &|\Phi(\varphi + h) - \Phi(\varphi) - \Psi(\varphi)h| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_M (|\nabla h|^2 + ah^2) dv_g \\ &\leq (\|a\|_\infty + 1) \|h\|_{H_{1,G}^2(M)}^2 \end{aligned}$$

D'où Φ est une fonction différentiable sur $H_{1,G}^2(M)$, et sa différentielle vaut Ψ (on peut vérifier qu'elle est dans $C^0(M)$).

□

Lemme 4.1.4. *Soit E un espace métrique mesuré compact, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite des fonctions bornées dans $L^p(E)$ avec $p > 1$. Si $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge presque partout vers une fonction f , alors $f \in L^p(E)$ et $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers f dans $L^p(E)$*

Preuve : Une preuve, inspirée de Hebey, est dans la thèse de Hassan Jaber (Lemme 6.5.1 de [?]).

□

Lemme 4.1.5. (*Mountain-Pass Lemma*)

Soit $J \in C^1(E, \mathbb{R})$, où E est un espace de Banach. On suppose que

- i) $J(0) = 0$
- ii) Il existe $\alpha, r > 0$ tel que $J(v) \geq \alpha$ pour tout $v \in E$ vérifiant $\|v\|_E = r$
- iii) Il existe $v_0 \in E$ tel que $\limsup_{t \rightarrow +\infty} J(tv_0) < 0$

On considère $t_0 > 0$ suffisamment large tel que $\|t_0 v_0\|_E > r$ et $J(t_0 v_0) < 0$.

Alors J admet une suite $(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \in E$ tel que $J(u_i)$ converge vers β_0 , et de plus $J'(u_i)$ converge vers 0 dans E' le dual de E , où $\beta_0 = \min_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t))$ dont $\Gamma = \{\gamma \in C^0([0,1], E) / \gamma(0) = w, \gamma(1) = t_0 v_0\}$. En particulier, $\beta_0 \leq \sup_{t \geq 0} J(tv_0)$.

Preuve : C'est une version du Mountain-Pass Lemma d'Ambrosetti-Rabinowitz [?] vue dans Jaber [31]

□

Proposition 4.1.6. *Pour tout $u_0 \in H_{1,G}^2(M)$, $u_0 \neq 0$, $u_0 \geq 0$, il existe $\beta_0 = \beta_0(u_0) > 0$ et une suite $(u_N)_{n \in \mathbb{N}} \in H_{1,G}^2(M)$ qui est une suite de Palais-Smale pour la fonctionnelle J_q au niveau β_0 . De plus $\beta_0 \leq \sup_{t \geq 0} J_q(tu_0)$.*

Preuve : D'après les proposition 4.1.2 et 4.1.3, la fonctionnelle J_q est de classe C^1 sur $H_{1,G}^2(M)$, alors il suffit de vérifier les trois condition du lemme Mountain-Pass Lemma 4.1.5, pour $J = J_q$ et $E = H_{1,G}^2(M)$. En effet :

- i) On a que $J_q(0) = 0$
- ii) La coercivité de l'opérateur $\Delta_g + a$ et les inclusions de Sobolev et de Cotsiolis-Ledoux [11] impliquent qu'il existent $C_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ telles que pour tout $v \in H_{1,G}^2(M)$, on a :

$$J_q(v) \geq C_1 \|v\|_{H_{1,G}^2(M)}^2 - C_2 \|v\|_{H_{1,G}^2(M)}^{2^*(k,s)} - C_3 \|v\|_{H_{1,G}^2(M)}^q \quad (4.3)$$

On considère la fonction réelle $f(r) = C_1 - C_2 r^{2^*(k,s)-2} - C_3 r^{q-2}$. Comme $q, 2^*(k,s) > 2$, alors $f(r) \rightarrow C_1$ lorsque $r \rightarrow 0$. En d'autre terme, il existe $r_0 > 0$, tel que pour tout $r < r_0$, $f(r) > \frac{C_1}{2}$. Donc, pour tout $v \in H_{1,G}^2(M)$, vérifiant $\|v\|_{H_{1,G}^2(M)} = \frac{r_0}{2}$, par (4.3) on a $J_q(v) \geq \frac{C_1 r_0^2}{8}$

- iii) Soit $u_0 \in H_{1,G}^2(M) \setminus \{0\}$, par suite

$$\begin{aligned} J_q(tu_0) &= \frac{t^2}{2} \int_M (|\nabla u_0|^2 + a u_0) dv_g - \frac{t^{2^*(k,s)}}{2^*(k,s)} \int_M |u_0|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\ &\quad - \frac{t^q}{q} \int_M h |u_0|^q \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\ &:= at^2 - bt^{2^*(k,s)} - ct^q \\ &= t^{2^*(k,s)} (at^{2-2^*(k,s)} - b - ct^{q-2^*(k,s)}) \\ &\leq t^{2^*(k,s)} (at^{2-2^*(k,s)} - b) \end{aligned}$$

Où $a, b > 0$ et $c \geq 0$. Sachant que $t^{2^*(k,s)} \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, alors $J_q(tu_0) \rightarrow -\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Donc $\limsup_{t \rightarrow +\infty} J(tu_0) < 0$

4.1 SUITE DE PALAIS-SMALE

Soit $t_0 > 0$, $\beta_0 = \beta_0(u_0)$ et Γ comme dans le Mountain Pass lemma. Alors $\forall \gamma(t) \in \Gamma$, $t \in [0, 1]$, $J_q(\gamma(t)) \geq \lambda$, où $\lambda = C_1 \frac{r_0^2}{8}$, par suite $\beta_0 \geq \lambda > 0$. Donc pour $t_0 > 0$ suffisamment grand, notre proposition est prouvée. \square

Proposition 4.1.7. Soient $p, q > 0$ tels que $p + q = 2^*(k, s)$, $u \in H_{1,G}^2(M)$, $f \in L^\infty(M)$, et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $H_{1,G}^2(M)$ qui converge presque partout vers $w \in H_{1,G}^2(M)$. Alors, à une sous-suite près, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f |u|^p w_n^q \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} = \int_M f |u|^p w^q \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s}$$

Preuve : Soit $r = \frac{2^*(k,s)}{p} > 1$ et r' sont conjugué. L'inclusion du Théorème 3.3.1, implique qu'il existe $C = C(M, g, k, s) > 0$ telle que, pour tout $v \in H_{1,G}^2(M)$, on a

$$\|v\|_{L^{2^*(k,s)}(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})} \leq C \|v\|_{H_{1,G}^2(M)}.$$

Par suite, $f |u|^p \in L^r(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})$. D'autre part $\| |w_n|^q \|_{L^{r'}(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})} = \|w_n\|_{L^{2^*(k,s)}(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})}^q$, par suite la suite $(|w_n|^q)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, et on peut appliquer le Lemme 4.1.4 et vérifier que $(|w_n|^q)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $(|w|^q)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $L^{r'}(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})$. Ceci implique que $L(|w_n|^q)$ converge vers $L(|w|^q)$ avec :

$$L : L^{r'}(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \mapsto \int_M f |u|^p \varphi \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s}$$

linéaire et continue. Ce qui termine la preuve de cette proposition. \square

Proposition 4.1.8. Soit (M, g) et G comme dans l'Hypothèse 3.1.1. On se donne $a, h \in C_G^0(M)$ tels que $\Delta_g + a$ est coercif et $h \geq 0$. On se donne une suite de Palais-Smale $(u_N)_{n \in \mathbb{N}} \in H_{1,G}^2(M)$ pour J_q au niveau $\beta \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\beta < c_{n,k,s} \frac{K_s (n-k)^{-\frac{m-s}{2-s}}}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}}, \text{ avec } c_{n,k,s} = \frac{2-s}{2(m-s)}.$$

Alors il existe $u \in H_{1,G}^2(M)$ tel que $J_q(u) = \beta$ et à sous suite près (u_N) converge

fortement vers u dans $H_{1,G}^2(M)$. De plus $J'_q(u) = 0$.

Preuve : Rappelons que notre opérateur $\Delta_g + a$ est coercif, et que $h \geq 0$. Soit $\beta < c_{n,k,s} \frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}}^{-\frac{m-s}{2-s}}$, et $(u_N)_{n \in \mathbb{N}} \in H_{1,G}^2(M)$ est une suite de Palais-Smale pour J_q au niveau β , c'est-à-dire :

$$J_q(u_N) \rightarrow \beta \text{ et } J'_q(u_N) \rightarrow 0 \text{ fortement dans } H_{1,G}^2(M)' \quad (4.4)$$

Notons que, pour tout $\psi \in H_{1,G}^2(M)$, on a

$$\begin{aligned} \langle J'_q(u_N), \psi \rangle &= \int_M ((\nabla u_N, \nabla \psi)_g + a u_N \psi) dv_g - \int_M \psi u_N |u_N|^{2^*(k,s)-2} \frac{1}{d_g(x, Gx_0)^s} dv_g \\ &\quad - \int_M h \psi u_N |u_N|^{q-2} dv_g \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nous procédons ici par étapes :

Étape I : On démontre que la suite $(u_N)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_{1,G}^2(M)$. En effet par coercivité de l'opérateur $\Delta_g + a$ et la définition de notre fonctionnelle, il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \|u_N\|_{H_{1,G}^2(M)}^2 &\leq C \int_M (|\nabla u_N|_g^2 + a u_N^2) dv_g \\ &\leq C \left[2J_q(u_N) + \frac{2}{2^*(k,s)} \int_M |u_N|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} + \frac{2}{q} \int_M h |u_N|^q dv_g \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

D'autre part, de (4.5) on tire que

$$\begin{aligned} o(\|u_N\|_{H_{1,G}^2(M)}) &= \langle J'_q(u_N), u_N \rangle \\ &= \int_M (|\nabla u_N|_g^2 + a u_N^2) dv_g - \int_M |u_N|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} - \int_M h |u_N|^q dv_g \end{aligned}$$

En mettant l'égalité précédente dans J_q , on a

$$\begin{aligned}
 2J_q(u_N) &= \left(1 - \frac{2}{2^*(k,s)}\right) \int_M |u_N|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\
 &\quad + \left(1 - \frac{2}{q}\right) \int_M h|u_N|^q dv_g + o(\|u_N\|_{H_{1,G}^2(M)})
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

En combinant (4.6) et (4.7), on obtient

$$\begin{aligned}
 \|u_N\|_{H_{1,G}^2(M)}^2 &\leq C \left[\int_M |u_N|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} + \int_M h|u_N|^q dv_g \right] \\
 &\quad + o(\|u_N\|_{H_{1,G}^2(M)})
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

En utilisant (4.7), (4.4) et le fait que $h \geq 0$

$$\begin{aligned}
 &\left(1 - \frac{2}{2^*(k,s)}\right) \int_M |u_N|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\
 &= 2\beta - \left(1 - \frac{2}{q}\right) \int_M h|u_N|^q dv_g + o(\|u_N\|_{H_{1,G}^2(M)}) \\
 &\leq 2\beta + o(\|u_N\|_{H_{1,G}^2(M)})
 \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\int_M |u_N|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} = O(1) + o(\|u_N\|_{H_{1,G}^2(M)}) \tag{4.9}$$

utilisant cette égalité avec (4.7) et (4.4)

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{2}{q}\right) \int_M h|u_N|^q dv_g &= 2\beta - \frac{2}{2^*(k,s)} \int_M |u_N|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} + o(\|u_N\|_{H_{1,G}^2(M)}) \\
 &= O(1) + o(\|u_N\|_{H_{1,G}^2(M)})
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Groupons (4.8), (4.9) et (4.10) on tire que

$$\|u_N\|_{H_{1,G}^2(M)}^2 = O(1) + o(\|u_N\|_{H_{1,G}^2(M)})$$

Si $\|u_N\|_{H_{1,G}^2(M)}$ n'est pas bornée. Alors en quotientant la dernière équation par $\|u_N\|_{H_{1,G}^2(M)}$, on tire une contradiction lorsque $N \rightarrow \infty$. Ce qui termine la preuve

de cette étape.

Étape II : On prétend qu'il existe $u \in H_{1,G}^2(M)$ tel que $(u_N)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement à sous suite près dans $H_{1,G}^2(M)$ vers u et fortement dans les cas suivant. $L^{p_1}(M)$, pour tout $p_1 \in [2, 2^*(k)[$ et $L^{p_2}(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})$, pour tout $p_2 \in [2, 2^*(k, s)[$. De plus, $J'_q(u) = 0$.

En effet, par l'injection de Sobolev continue et compact du théorème 3.3.2 , et le fait que la suite (u_N) est bornée, il existe une fonction $u \in H_{1,G}^2(M)$ et une sous-suite de (u_N) , qu'on le note aussi (u_N) , telle que

1. (u_N) converge faiblement vers u dans $H_{1,G}^2(M)$
2. (u_N) converge fortement vers u dans $L^{p_1}(M)$ pour tout $p_1 \in [2, 2^*[$
3. (u_N) converge fortement vers u dans $L^{p_2}(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})$ pour tout $p_2 \in [2, 2^*(k, s)[$

Il reste à démontrer que $J'_q(u) = 0$. Par le convergence faible de u_N , pour tout $\psi \in H_{1,G}^2(M)$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M ((\nabla u_N, \nabla \psi)_g + a u_n \psi) dv_g = \int_M ((\nabla u, \nabla \psi)_g + a u \psi) dv_g \quad (4.11)$$

D'autre part, appliquons la proposition 4.1.7 à notre suite (u_N)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_M \psi u_N |u_N|^{2^*(k,s)-2} \frac{1}{d_g(x, Gx_0)^s} dv_g + \int_M h \psi u_N |u_N|^{q-1} dv_g \right) \\ &= \left(\int_M \psi u |u|^{2^*(k,s)-2} \frac{1}{d_g(x, Gx_0)^s} dv_g + \int_M h \psi u |u|^{q-1} dv_g \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

En utilisant (4.11) et (4.12), après passage à la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ dans (4.5), le résultat demandé est prouvé.

Étape III : On démontre qu'à sous-suite près de $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$:

$$\|\nabla(u_N - u)\|_2^2 = \int_M (u_N - u)^{2^*(k,s)} \frac{1}{d_g(x, Gx_0)^s} dv_g + o(1) \quad (4.13)$$

et

$$c_{n,k,s} \|\nabla(u_N - u)\|_2^2 \leq \beta + o(1), \text{ avec } c_{n,k,s} = \frac{2-s}{2(m-s)}, \quad (4.14)$$

En effet, on pose $w_N = u_N - u$, et on utilise le Lemme 4.1.1, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\left| |u_N|^{2^*(k,s)} - |u|^{2^*(k,s)} - |w_N|^{2^*(k,s)} \right| \leq C (|u|^{2^*(k,s)-1}|w_N| + |u||w_N|^{2^*(k,s)-1}) \quad (4.15)$$

Utilisons cette inégalité, et appliquons la Proposition 4.1.7 à notre suite w_N , on tire

$$\int_M (|u_N|^{2^*(k,s)} - |u_N - u|^{2^*(k,s)}) \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} = \int_M |u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} + o(1) \quad (4.16)$$

Testons $J'_q(u_N) - J'_q(u)$ sur $u_N - u$

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle J'_q(u_N) - J'_q(u), u_N - u \rangle \\ &= \int_M (|\nabla(u_N - u)|_g^2 + a(u_N - u)^2) dv_g + \int_M h(u_N - u) [u_N |u_N|^{q-2} - u |u|^{q-1}] dv_g \\ &\quad - \int_M (u_N - u) [u_N |u_N|^{2^*(k,s)-2} - u |u|^{2^*(k,s)-2}] \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\ &= \int_M (|\nabla(u_N - u)|_g^2 + a(u_N - u)^2) dv_g \\ &\quad - \int_M (|u_N|^{2^*(k,s)} - u u_N |u_N|^{2^*(k,s)-2} + |u|^{2^*(k,s)} - u u_N |u|^{2^*(k,s)-2}) \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\ &\quad - \int_M h (|u_N|^q + |u|^q - u u_N |u_N|^{q-2} - u u_N |u|^{q-2}) dv_g \quad (4.17) \end{aligned}$$

D'autre part, la proposition 4.1.7 donne

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_M u u_N |u_N|^{2^*(k,s)-2} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} &= \int_M |u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_M u u_N |u|^{q-2} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_M h u u_N |u_N|^{q-2} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} &= \int_M h |u|^q \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_M h u u_N |u|^{q-2} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \end{aligned}$$

En outre, la convergence faible de (u_N) vers u dans $H_{1,G}^2(M)$, les dernières égalités, ainsi que (4.16) et (4.17) impliquent (4.13). D'autre part, la convergence faible de (u_N) vers u dans $H_{1,G}^2(M)$ ce qui implique la convergence forte dans $L^q(M)$, et de plus (4.13) impliquent

$$\begin{aligned} J_q(u_N) - J_q(u) &= \frac{1}{2} \int_M (|\nabla u_N|_g^2 - |\nabla u|_g^2) dv_g + o(1) \\ &\quad - \frac{1}{2^*(k,s)} \int_M (|u_N|^{2^*(k,s)} - |u|^{2^*(k,s)}) \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(k,s)} \right) \int_M (|\nabla u_N|_g^2 - |\nabla u|_g^2) dv_g + o(1) \end{aligned} \quad (4.18)$$

On a, $\langle J'_q(u), u \rangle = 0$, alors

$$\int_M (|\nabla u|_g^2 + au^2) dv_g = \int_M u^{2^*(k,s)} \frac{1}{d_g(x, Gx_0)^s} dv_g + \int_M hu^q dv_g$$

Par suite

$$J_q(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(k,s)} \right) \int_M u^{2^*(k,s)} \frac{1}{d_g(x, Gx_0)^s} dv_g + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \int_M hu^q dv_g$$

Où $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(k,s)} \right)$ et $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right)$ sont positif, alors $J_q(u) \geq 0$. De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_q(u_N) = \beta$,. Alors la relation (4.18) nous donne

$$c_{n,k,s} \int_M (|\nabla u_N|_g^2 - |\nabla u|_g^2) dv_g \leq \beta + o(1) \quad (4.19)$$

On considère maintenant la forme linéaire $L_u \in H_{1,G}^2(M)'$ définie par

$$L_u : H_{1,G}^2(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi \mapsto \int_M (\nabla u, \nabla \phi)_g dv_g$$

Par convergence faible de u_N , on a $L_u(u_N) = L_u(u) + o(1)$, ce qui implique

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla(u_N - u)|_g^2 dv_g &= \int_M |\nabla u_N|_g^2 dv_g + \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g - 2 \int_M (\nabla u, \nabla \phi)_g dv_g \\ &= \int_M (|\nabla u_N|_g^2 - |\nabla u|_g^2) dv_g + o(1) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Combinons (4.19) et (4.20), cela donne (4.14)

Étape IV : Il reste à démontrer que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_M |\nabla u_N|_g^2 dv_g = \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g$$

Il suit du Théorème 3.4.6, pour tout $\epsilon > 0$ qu'il existe $B_\epsilon = B_\epsilon(M, g, k, s, \epsilon) > 0$ tel que pour tout $v \in H_{1,G}^2(M)$, on a

$$\left(\int_M \frac{|v|^{2^*(k,s)}}{d_g(x, Gx_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}} \leq \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \epsilon \right) \|\nabla v\|_2^2 + B_\epsilon \|v\|_2^2.$$

Testons cette inégalité pour $v = u_N - u$, en utilisant le fait que u_N converge vers u fortement dans $L^2(M)$

$$\|u_N - u\|_{L^{2^*(k,s)}(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})}^{2^*(k,s)} \leq \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \epsilon \right)^{\frac{2^*(k,s)}{2}} \|\nabla(u_N - u)\|_2^{2^*(k,s)} + o(1) \quad (4.21)$$

Utilisons ce résultat avec (4.13)

$$\begin{aligned}
 o(1) &= \|\nabla(u_N - u)\|_2^2 - \int_M |u_N - u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\
 &= \|\nabla(u_N - u)\|_2^2 \left[1 - \left(\int_M |u_N - u|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right) \|\nabla(u_N - u)\|_2^{-2} \right] \\
 &\geq \|\nabla(u_N - u)\|_2^2 \left[1 - \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \epsilon \right)^{\frac{2^*(k,s)}{2}} \|\nabla(u_N - u)\|_2^{2^*(k,s)-2} + o(1) \right]
 \end{aligned}$$

cette inégalité et (4.14) impliquent

$$o(1) \geq \|\nabla(u_k - u)\|_2^2 \left[1 - \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \epsilon \right)^{\frac{2^*(k,s)}{2}} \left(\frac{\beta}{c_{n,k,s}} \right)^{\frac{2^*(k,s)-2}{2}} + o(1) \right]$$

Comme $\beta < c_{n,k,s} \frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}}^{-\frac{m-s}{2-s}}$, il s'ensuit alors de l'inégalité précédente que pour ϵ assez petit, il existe $C > 0$ telle que

$$o(1) \geq C \|\nabla(u_N - u)\|_2^2$$

D'où le résultat □

Théorème 4.1.9. Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $a \in C^0(M)$ tel que $\Delta_g + a$ est coercif, G un groupe d'isométries de M , $x_0 \in M$, $s \in (0, 2)$ et $k \in [1, n-2]$. On suppose que l'hypothèse 4.0.1 est vérifiée. On définit $2^*(k, s) = \frac{2(n-k-s)}{n-k-2}$, $2^*(k) = 2^*(k, 0)$ et on considère $q \in (2, 2^*(k))$ et $h \in C^0(M)$, $h \geq 0$. On suppose qu'il existe $u_0 \in H_{1,G}^2(M)$, $u_0 \not\equiv 0$, $u \geq 0$ tel que

$$\sup_{t \geq 0} J_q(tu_0) < c_{n,k,s} \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} \right)^{-\frac{n-k-s}{2-s}}, \quad (4.22)$$

Où $c_{n,k,s} = \frac{2-s}{2(n-k-s)}$ et $\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}}$ comme défini dans la remarque 3.4.7. Par suite l'équation perturbé de Hardy-Sobolev :

$$\Delta_g u + au = \frac{|u|^{2^*(k,s)-2} u}{d_g(x, Gx_0)^s} + h|u|^{q-2} u \quad (\text{E})$$

admet une solution non triviale dans $C^0(M) \cap H_{1,G}^2(M)$. De plus, la solution u est strictement positif dans M et $u \in C^{0,\alpha} \cap C_{loc}^{1,\nu}(M \setminus \{Gx_0\})$, pour tout $\alpha \in [0, \min\{1, 2-s\}]$, $\nu \in [0, 1]$.

Preuve : On fait la preuve par étapes :

Étape 1 : On suppose qu'il existe $u_0 \in H_{1,G}^2(M)$, $u_0 \not\equiv 0$, $u \geq 0$ tel que $\sup_{t \geq 0} J_q(tu_0) <$

$c_{n,k,s} \frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}}^{-\frac{n-k-s}{2-s}}$, et on prouve qu'il existe $u \in H_{1,G}^2(M) \setminus \{0\}$ qui vérifie l'équation suivante au sens faible

$$\Delta_g u + au = \frac{|u|^{2^*(k,s)-2}u}{d_g(x, Gx_0)^s} + h|u|^{q-2}u \quad (4.23)$$

En fait, par la proposition 4.1.6, il existe $\beta_0 = \beta_0(u_0) > 0$ et une suite de Palais-Smale $(u_N)_{k \in \mathbb{N}} \in H_{1,G}^2(M)$ pour J_q au niveau $\beta_0 \leq \sup_{t \geq 0} J_q(tu_0)$. Par suite

$\beta_0 \leq c_{n,k,s} \frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}}^{-\frac{n-k-s}{2-s}}$. Par l'Étape I, il existe $u \in H_{1,G}^2(M) \setminus \{0\}$ tel que u_k converge fortement vers u dans $H_{1,G}^2(M)$ ce qui implique directement que $\beta_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} J_q(u_N) = J_q(u)$, par suite $u \not\equiv 0$, et $J'_q(u) = 0$, ce qui vérifie (E) au sens faible

Étape 2 : (Régularité) Appliquons le théorème 3.5.5, on vérifie que $u \in C^{0,\alpha} \cap C_{loc}^{1,\nu}(M \setminus \{Gx_0\})$, pour tout $\alpha \in (0, \min\{1, 2-s\})$, $\nu \in (0, 1)$.

Étape 3 : (Positivité) Pour tout $u \in H_{1,G}^2(M)$ on pose

$$u_+ = \begin{cases} u & \text{si } u \geq 0 \\ 0 & \text{si } u \leq 0 \end{cases}$$

$$u_- = \begin{cases} 0 & \text{si } u \geq 0 \\ -u & \text{si } u \leq 0 \end{cases}$$

En refaisant le même calcul pour $J_q(u)$, on montre que $(J_q^+)'(u) \equiv 0$, où pour

tout $v \in H_{1,G}^2(M)$ on a posé

$$J_q^+(v) = \frac{1}{2} \int_M (|\nabla v|_g^2 + av^2) dv_g - \frac{1}{2^*(k,s)} \int_M |v_+|^{2^*(k,s)-1} v_+ \frac{1}{d_g(x, Gx_0)^s} dv_g - \frac{1}{q} \int_M h |v_+|^{q-1} v_+ dv_g$$

En particulier, $\langle (J_q^+)'(u), u_- \rangle = 0$, par suite

$$0 = - \int_M (|\nabla u_-|_g^2 + au_-^2) dv_g + \int_M |u_+|^{2^*(k,s)-1} \frac{u_-}{d_g(x, Gx_0)^s} dv_g + \int_M h |v_+|^{q-1} u_- dv_g$$

Alors

$$\int_M (|\nabla u_-|_g^2 + au_-^2) dv_g = 0$$

En utilisant le fait que $\Delta_g + a$ est coercif, on montre que $\|u_-\|_{H_{1,G}^2(M)} = 0$. Alors $u_- \equiv 0$ et $u = u_+ \geq 0$. Par le principe de maximum pour les opérateur elliptique [?], nous prouvons que $u > 0$ sur M .

□

4.2 Théorème d'existence avec condition générale

On se donne (M, g) et G qui satisfont l'hypothèse 3.1.1 de la Section 3.1. On pose la suite des fonctions tests $(\bar{u}_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ définies pour tout $\epsilon > 0$, $\bar{x} \in N$ par

$$\bar{u}_\epsilon(\bar{x}) := \left(\frac{\epsilon^{\frac{2-s}{2}}}{\epsilon^{2-s} + d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^{2-s}} \right)^{\frac{m-2}{2-s}}$$

Lemme 4.2.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, et $(B_{\rho_0}(x_0), \exp_{x_0}^{-1})$ une boule exponentielle centré en x_0 et de rayon $\rho \in]0, i_g(M)[$. Alors en posant $x = \exp_{x_0}(r\theta)$, pour tout $x \in B_{\rho_0}(x_0)$, on a*

$$\int_{S^{n-1}} f \circ \exp_{x_0}(x) \sqrt{\det(g)}(x) d\theta = w_{n-1} \left[f(x_0) - \left(\frac{\Delta_g f(x_0)}{2n} + \frac{f(x_0)}{6n} \text{Scal}_g(x_0) \right) \right] + O(r^3) \quad (4.24)$$

4.2 THÉORÈME D'EXISTENCE AVEC CONDITION GÉNÉRALE

Pour tout $f \in C^0(M)$, où $r = d_g(x, x_0)$ et $d\theta$ est l'élément d'aire sur la sphère unité S^{n-1} de \mathbb{R}^n . Ce développement est dit développement de Cartan.

Preuve : En effet, on sait que pour toute fonction matricielle $A : X \in \mathbb{R}^n \mapsto A(X) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe C^∞ , et pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la formule de différentiation du déterminant en A est la suivante :

$$d(\det(A))(H) = \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1}H)$$

Le développement limité de la fonction $x \in M \mapsto \det(g(x))$ au voisinage de $B_{\rho_0}(x_0)$ et la dernière formule permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \det(g(x)) &= \det(g(x_0)) + d(\det(g))(x_0)(g(x) - g(x_0)) + O(\|g(x) - g(x_0)\|_m^2) \\ &= \det(g(x_0)) + \det(g(x_0)) \operatorname{tr}(g^{ij}(x_0)(g(x) - g(x_0))_{ij}) + O(\|g(x) - g(x_0)\|_m^2) \end{aligned}$$

Où $\|\cdot\|_m$ désigne une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'autre part, $(B_{\rho_0}(x_0), \exp_{x_0}^{-1})$ est une carte exponentielle en x_0 , donc $g(x_0) = I_n$. Par suite, pour tout $x \in B_{\rho_0}(x_0)$, on a

$$\det(g(x)) = 1 + \operatorname{tr}(\delta^{ij}(g(x) - g(x_0))_{ij}) + O(\|g(x) - g(x_0)\|_m^2) \quad (4.25)$$

Or, le développement de Cartan de la métrique g à l'ordre 2 (pour la preuve voir Hebey [25]) pour tout point $x \in B_{\rho_0}(x_0)$ est

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{i\alpha\beta j} x^\alpha x^\beta + O(r^3) \quad (4.26)$$

Où les x^α , $\alpha = 1, \dots, n$ sont les coordonnées géodésiques normales du point x , et les $R_{i\alpha\beta j}$ désignent les composantes du tenseur Rm_g dans $B_{\rho_0}(x_0)$. En combinant (4.25) et (4.26), on tire que

$$\begin{aligned} \det(g(x)) &= 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\delta^{ij} R_{i\alpha\beta j}(x_0) x^\alpha x^\beta) + O(r^3) \\ &= 1 - \frac{1}{3} R_{i\alpha i\beta}(x_0) x^\alpha x^\beta + O(r^3) \\ &= 1 - \frac{1}{3} R_{\alpha\beta}(x_0) x^\alpha x^\beta + O(r^3) \\ &= 1 - \frac{r^2}{3} R_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta + O(r^3) \end{aligned}$$

avec pour tout $i = 1, \dots, n$, θ^i désigne la i -ème coordonnées sphérique explicitées dans \mathbb{R}^m de $x = \exp_{x_0}(r\theta)$, $r = d_g(x, Gx_0)$ et $\theta \in S^{n-1}$. Par suite, on a :

$$\sqrt{\det(g)}(x) = 1 - \frac{r^2}{6} R_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta + O(r^3)$$

En utilisant, la formule ci dessus, on aura

$$\begin{aligned} & \int_{S^{n-1}} f \circ \exp_{x_0}(x) \sqrt{\det(g)}(x) d\theta \\ &= \int_{S^{n-1}} \left[f(x_0) + \partial_i f \circ \exp_{x_0}(0) x^i + \frac{1}{2} \partial_{ij} f \circ \exp_{x_0}(0) x^i x^j \right] \left[1 - \frac{r^2}{6} R_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta \right] d\theta + O(r^3) \\ &= w_{n-1} \left[f(x_0) - \left(-\frac{\partial_{\alpha\beta} f \circ \exp_{x_0}(0)}{2} + \frac{f(x_0)}{6} R_{\alpha\beta} \right) r^2 \int_{S^{n-1}} \theta^\alpha \theta^\beta d\theta \right] + O(r^3) \end{aligned}$$

Mais

$$\int_{S^{n-1}} \theta^\alpha \theta^\beta d\theta = \frac{w_{n-1}}{n} \delta^{\alpha\beta} \text{ et } \text{Scal}_g(x_0) = \sum_{\alpha=1}^n R_{\alpha\alpha}(x_0)$$

Notons que, la carte exponentiel est une carte normale en 0, par suite

$$\begin{aligned} \Delta_g f(x_0) &= -g^{ij}(0) (\partial_{ij} f \circ \exp_{x_0}(0) - \Gamma_{ij}^k(0) \partial_k f \circ \exp_{x_0}(0)) \\ &= - \sum_{i=1}^n \partial_{ii} f \circ \exp_{x_0}(0) \end{aligned}$$

En regroupant ces égalités, on obtient le résultat annoncé. □

Remarque 4.2.2. Dans la carte exponentielle $(N, \exp_{\bar{x}_0}^{-1})$, on passe aux coordonnées polaires (r, θ) telles que pour tout $\bar{x} \in N$, on a $r = d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)$ et $\theta \in S^{m-1}$. On a donc pour tout $\bar{x} \in B_{\rho_0}(\bar{x}_0)$

$$dv_{\tilde{g}}(\bar{x}) = \sqrt{\det(\tilde{g})}(\bar{x}) d\bar{x} = \sqrt{\det(\tilde{g})}(\bar{x}) r^{m-1} d\theta \quad (4.27)$$

avec $d\bar{x} = (\exp_{\bar{x}_0}^{-1})^*(dX)$, et d'après le Lemme de Gauss (voir par exemple Hebey

[25]),

$$\tilde{g}_{1i}(\bar{x}) = \delta_{1i} \quad (4.28)$$

Lemme 4.2.3. *Sous nos hypothèses, on a*

$$\|\nabla \bar{u}_\epsilon\|_{L^2(N)}^2 = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \phi|^2 dX - \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \phi|^2 dX}{6m} \text{Scal}_{\tilde{g}}(\bar{x}_0) \epsilon^2 + o(\epsilon^2) & \text{si } m \geq 5 \\ \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \phi|^2 dX - \frac{w_3}{6} \text{Scal}_{\tilde{g}}(\bar{x}_0) \epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + O(\epsilon^2) & \text{si } m = 4 \end{cases}$$

Preuve :

En effet \bar{u}_ϵ est une fonction radiale, donc par (4.28) pour tout $\bar{x} \in N$

$$\begin{aligned} |\nabla \bar{u}_\epsilon|_{\tilde{g}}^2 &= \tilde{g}^{ij} \nabla_i \bar{u}_\epsilon \nabla_j \bar{u}_\epsilon = \tilde{g}^{rr} (\nabla_r \bar{u}_\epsilon)^2 \\ &= (m-2)^2 \epsilon^{m-2} \frac{r^{2(1-s)}}{(\epsilon^{2-s} + r^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} \end{aligned}$$

On intègre $|\nabla \bar{u}_\epsilon|_{\tilde{g}}^2$ sur N en utilisant (4.27) et le développement de Cartan (4.24) et en effectuant un changement de variable $r = \epsilon \rho$, on écrit

$$\begin{aligned} \int_N |\nabla \bar{u}_\epsilon|_{\tilde{g}}^2 dv_{\tilde{g}} &= (m-2)^2 \epsilon^{m-2} w_{m-1} \int_0^{\rho_0} r^{m+1} \frac{\left(1 - \frac{\text{Scal}_{\tilde{g}}(\bar{x}_0)}{6m} r^2 + O(r^3)\right)}{r^{2s} (\epsilon^{2-s} + r^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} dr \\ &= (m-2)^2 w_{m-1} \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \rho^{m+1} \frac{\left(1 - \frac{\text{Scal}_{\tilde{g}}(\bar{x}_0)}{6m} (\epsilon \rho)^2 + O((\epsilon \rho)^3)\right)}{\rho^{2s} (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} d\rho \\ &:= A(\epsilon) - \frac{(m-2)^2}{6m} \text{Scal}_{\tilde{g}}(\bar{x}_0) w_{m-1} B(\epsilon) + C(\epsilon) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Étape A : On commence à calculer, $A(\epsilon)$:

$$\begin{aligned} A(\epsilon) &:= (m-2)^2 w_{m-1} \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{m+1} d\rho}{\rho^{2s} (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} \\ &= (m-2)^2 w_{m-1} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\rho^{m+1} d\rho}{\rho^{2s} (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} - \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{m+1} d\rho}{\rho^{2s} (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \phi|^2 dX - (m-2)^2 w_{m-1} \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{m+1} d\rho}{\rho^{2s} (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} \end{aligned}$$

et

$$\int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{m+1} d\rho}{\rho^{2s} (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} \leq \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{m-1}} = \frac{1}{m-2} \left(\frac{\epsilon}{\rho_0} \right)^{m-2} = O(\epsilon^{m-2})$$

Par suite

$$A(\epsilon) = \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \phi|^2 dX + O(\epsilon^{m-2}) \quad (4.30)$$

Étape B : D'autre part, la fonction $\rho \mapsto \frac{\rho^{m+3}}{\rho^{2s} (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}}$ est intégrable au voisinage de 0 pour $m \geq 3$ (en particulier pour $m \geq 4$), et est intégrable à l'infinie pour tout $m \geq 5$. Donc pour $m \geq 5$, on a

$$\int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{m+3} d\rho}{\rho^{2s} (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} \leq \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{m-3}} = \frac{1}{m-4} \left(\frac{\epsilon}{\rho_0} \right)^{m-4}$$

Par suite on a

$$\begin{aligned} B(\epsilon) &= \epsilon^2 \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{m+3} d\rho}{\rho^{2s} (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} \\ &= \epsilon^2 \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{m+3} d\rho}{\rho^{2s} (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} - \epsilon^2 \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{m+3} d\rho}{\rho^{2s} (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} \\ &= \epsilon^2 (m-2)^{-2} w_{m-1}^{-1} \int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \phi|^2 dX + O(\epsilon^{m-2}) \end{aligned}$$

Pour $m = 4$

$$\begin{aligned}
 B(\epsilon) &= \epsilon^2 \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^7 d\rho}{\rho^{2s} (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(4-s)}{2-s}}} \\
 &= \epsilon^2 \int_0^1 \frac{\rho^7 d\rho}{\rho^{2s} (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(4-s)}{2-s}}} + \epsilon^2 \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^7 d\rho}{\rho^{2s} (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(4-s)}{2-s}}} \\
 &= O(\epsilon^2) + \epsilon^2 \left(\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho}{\rho} + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^7}{\rho^{2s}} \left[\frac{1}{(1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(4-s)}{2-s}}} + \frac{1}{(\rho^{2-s})^{\frac{2(4-s)}{2-s}}} \right] d\rho \right) \\
 &= O(\epsilon^2) + \epsilon^2 \ln\left(\frac{\rho_0}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^7}{\rho^{2s}} \left[\frac{1 - (1 + \frac{1}{\rho^{2-s}})^{\frac{2(4-s)}{2-s}}}{(1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(4-s)}{2-s}}} \right] d\rho \\
 &= O(\epsilon^2) + \epsilon^2 \ln\left(\frac{\rho_0}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{7-2s} O\left(\frac{1}{\rho^{2-s}}\right)}{(1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(4-s)}{2-s}}} d\rho
 \end{aligned}$$

Or

$$\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{7-2s} O\left(\frac{1}{\rho^{2-s}}\right)}{(1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(4-s)}{2-s}}} d\rho \leq C \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho}{\rho^{3-s}} \leq C \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\rho_0}\right)^{2-s} \right]$$

Donc

$$B(\epsilon) = \begin{cases} \epsilon^2 (m-2)^2 w_{m-1}^{-1} \int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \phi|^2 dX + O(\epsilon^{m-2}) & \text{si } m \geq 5 \\ O(\epsilon^2) + \epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) & \text{si } m = 4 \end{cases} \quad (4.31)$$

Étape C : finalement,

$$\begin{aligned}
 C(\epsilon) &= (m-2)^2 w_{m-1} \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{m+1} O((\epsilon\rho)^3) d\rho}{\rho^{2s} (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} \\
 &= O\left(\epsilon^3 \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{m+4} d\rho}{\rho^{2s} (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} \right) \\
 &= O\left(\epsilon^3 + \epsilon^3 \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \rho^{4-m} d\rho \right)
 \end{aligned}$$

Donc

$$C(\epsilon) = \begin{cases} o(\epsilon^2) & \text{si } m \geq 5 \\ O(\epsilon^2) & \text{si } m = 4 \end{cases} \quad (4.32)$$

Groupons (4.30), (4.31) et (4.32) dans (4.29), et nous obtenons l'estimation demandé.

□

Lemme 4.2.4. *Soit $f \in C^2(N)$ qui vérifient $\partial_i f(\bar{x}_0) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$, $m \geq 4$, alors*

$$\begin{aligned} \int_N \frac{f|\bar{u}_\epsilon|^{2^*(k,s)}}{d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^s} dv_{\bar{g}} &= f(x_0) \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\phi|^{2^*(k,s)}}{|X|^s} dX \\ &\quad - \epsilon^2 \left(\frac{\Delta_{\bar{g}} f(x_0)}{2m} + \frac{f(x_0)}{6m} \text{Scal}_{\bar{g}} \right) \int_{\mathbb{R}^m} |X|^{2-s} |\phi|^{2^*(k,s)} dX \\ &\quad + o(\epsilon^2) \end{aligned}$$

En particulier comme Gx_0 est une orbite de dimension minimal alors la fonction $f = \bar{v}^p$ pour tout $p \neq 0$ vérifies l'égalité ci dessus

Preuve : On calcule $\|\bar{u}_\epsilon\|_{L^{2^*(k,s)}(N, \frac{dv_{\bar{g}}}{d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^s})}^{2^*(k,s)}$ en utilisant (4.27) et le développement de Cartan (4.24) et en effectuant un changement de variable $r = \epsilon\rho$

$$\begin{aligned} \int_N f|\bar{u}_\epsilon|^{2^*(k,s)} \frac{dv_{\bar{g}}}{d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^s} &= w_{m-1} \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \rho^{m-1} \frac{(f(\bar{x}_0) - C(\epsilon\rho)^2 + O((\epsilon\rho)^3))}{\rho^s (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} d\rho \\ &:= f(\bar{x}_0)A(\epsilon) - Cw_{m-1}B(\epsilon) + C(\epsilon) \end{aligned} \quad (4.33)$$

avec $C = \left(\frac{\Delta_{\bar{g}} f(x_0)}{2m} + \frac{f(x_0)}{6m} \text{Scal}_{\bar{g}} \right)$

Étape A : On commence à calculer, $A(\epsilon) : \frac{dw_g}{d_g(x, Gx_0)^s}$

$$\begin{aligned} A(\epsilon) &:= w_{m-1} \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{m-1} d\rho}{\rho^s (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} \\ &= w_{m-1} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\rho^{m-1} d\rho}{\rho^s (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} - \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{m-1} d\rho}{\rho^s (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\phi|^{2^*(k,s)}}{|X|^s} dX - w_{m-1} \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{m-1} d\rho}{\rho^s (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} \end{aligned}$$

et

$$\int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{m-1} d\rho}{\rho^s (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} \leq \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{m-s+1}} = \frac{\epsilon^{m-s}}{(m-s)\rho_0^{m-s}}$$

Par suite

$$A(\epsilon) = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\phi|^{2^*(k,s)}}{|X|^s} dX + O(\epsilon^{m-s}) \quad (4.34)$$

Étape B : Vu que la fonction $\rho \mapsto \frac{\rho^{m+1}}{\rho^s (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}}$ est intégrable à l'infinie pour tout $m \geq 4$,

et puisque

$$\int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{m+1} d\rho}{\rho^s (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} = O(\epsilon^{m-s-2})$$

Par suite pour tout $m \geq 4$, on a

$$\begin{aligned} B(\epsilon) &= \epsilon^2 \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{m+3} d\rho}{\rho^s (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} \\ &= \epsilon^2 \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{m+1} d\rho}{\rho^s (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} - \epsilon^2 \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{m+1} d\rho}{\rho^s (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} \\ &= \epsilon^2 w_{m-1}^{-1} \int_{\mathbb{R}^m} |X|^{2-s} |\phi|^{2^*(k,s)} dX + O(\epsilon^{m-s}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Étape C : finalement,

$$\begin{aligned}
 C(\epsilon) &= w_{m-1} \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{m-1} O((\epsilon\rho)^3) d\rho}{\rho^s (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} \\
 &= O \left(\epsilon^3 \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{m+2} d\rho}{\rho^s (1 + \rho^{2-s})^{\frac{2(m-s)}{2-s}}} \right) \\
 &= O \left(\epsilon^3 + \epsilon^3 \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho}{\rho^{m-s-2}} \right)
 \end{aligned}$$

Ceci nous permet de conclure

$$C(\epsilon) = \begin{cases} O(\epsilon^3) & \text{si } m \geq 5; m = 4 \text{ et } s < 1 \\ O(\epsilon^3 \ln(\frac{1}{\epsilon})) & \text{si } m = 4 \text{ et } s = 1 \\ O(\epsilon^{m-s}) & \text{si } m = 4 \text{ et } s > 1 \end{cases} \quad (4.36)$$

En rassemblant les différents résultats (4.36), (4.35) et (4.35) dans (4.33), on aura le résultat annoncé.

□

Lemme 4.2.5. Pour tout $g \in C^0(N)$, et $q \in]0, 2^*(k)[$ on a

$$\int_N g |\bar{u}_\epsilon|^q dv_{\bar{g}} = \begin{cases} \epsilon^{m - \frac{q(m-2)}{2}} g(\bar{x}_0) \int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^q dX + o(\epsilon^{m - \frac{q(m-2)}{2}}) & \text{si } q > \frac{2^*(k)}{2} \\ \epsilon^{\frac{m}{2}} \ln(\frac{1}{\epsilon}) g(\bar{x}_0) w_{m-1} + O(\epsilon^{\frac{m}{2}} \ln \frac{1}{\epsilon}) & \text{si } q = \frac{2^*(k)}{2} \\ O \left(\epsilon^{\frac{q(m-2)}{2} (m-2)} \right) & \text{si } q < \frac{2^*(k)}{2} \end{cases} \quad (4.37)$$

En particulier,

$$\int_N g \bar{u}_\epsilon^2 dv_{\bar{g}} = \begin{cases} \epsilon^2 g(\bar{x}_0) \int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^2 dX + o(\epsilon^2) & \text{si } m \geq 5 \\ g(\bar{x}_0) w_3 \epsilon^2 \ln(\frac{1}{\epsilon}) + O(\epsilon^2) & \text{si } m = 4 \end{cases}$$

Preuve : Le développement de Cartan (4.24) dans la boule $B_{\rho_0}(\bar{x}_0)$ et le changement de coordonnées $X = \exp_{\bar{x}_0}^{-1}(\bar{x})$ permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
 \int_N g|\bar{u}_\epsilon|^q dv_{\tilde{g}} &= \int_N \frac{g\epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}}}{(\epsilon^{2-s} + d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^{2-s})^{\frac{q(m-2)}{2-s}}} dv_{\tilde{g}} \\
 &= \int_{B_{\rho_0}(\bar{x}_0)} \frac{g(\exp_{\bar{x}_0}(X))\epsilon^{(m-2)\frac{q}{2}}(1 + O(|X|^2))}{(\epsilon^{2-s} + |X|^{2-s})^{\frac{q(m-2)}{2-s}}} dX \\
 &= \epsilon^{(m-2)\frac{q}{2}} \int_{B_{\rho_0}(\bar{x}_0)} \frac{g(\bar{x}_0) + \tilde{\eta}(X)}{(\epsilon^{2-s} + |X|^{2-s})^{\frac{q(m-2)}{2-s}}} dX \\
 &:= A(\epsilon) + B(\epsilon)
 \end{aligned}$$

où pour tout $X \in B_{\rho_0}(\bar{x}_0)$, $\tilde{\eta}(X) = (g(\exp_{\bar{x}_0}(X)) - g(\bar{x}_0))(1 + O(|X|^2))$. Clairement, la fonction $\tilde{\eta}$ est continue sur $B_{\rho_0}(\bar{x}_0)$ et vérifie $\lim_{X \rightarrow 0} \tilde{\eta}(X) = 0$

Étape A en utilisant les coordonnées polaires, on a

$$\begin{aligned}
 A(\epsilon) &= \epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}} g(\bar{x}_0) \int_{B_{\rho_0}(\bar{x}_0)} \frac{dX}{(\epsilon^{2-s} + |X|^{2-s})^{\frac{q(m-2)}{2-s}}} \\
 &= \epsilon^{m - \frac{q(m-2)}{2}} g(\bar{x}_0) w_{m-1} \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{m-1} d\rho}{(1 + \rho^{2-s})^{\frac{q(m-2)}{2-s}}}
 \end{aligned}$$

On pose

$$S(\epsilon) = \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{m-1} d\rho}{(1 + \rho^{2-s})^{\frac{q(m-2)}{2-s}}}$$

On a la fonction $\rho \mapsto \frac{\rho^{m-1}}{(1 + \rho^{2-s})^{\frac{q(m-2)}{2-s}}}$ est intégrable au voisinage de 0 et est intégrable à l'infinie si $q > \frac{2^*(k)}{2}$. Donc on distingue 3 cas

Étape A.i : si $q > \frac{2^*(k)}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
 S(\epsilon) &= \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{m-1} d\rho}{(1 + \rho^{2-s})^{\frac{q(m-2)}{2-s}}} - \int_{\frac{\rho_0}{3}}^{+\infty} \frac{\rho^{m-1} d\rho}{(1 + \rho^{2-s})^{\frac{q(m-2)}{2-s}}} \\
 &= w_m^{-1} \int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^q dX + O\left(\int_{\frac{\rho_0}{3}}^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{(m-2)q-m+1}}\right) \\
 &= w_m^{-1} \int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^q dX + O(\epsilon^{(m-2)q-m})
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que si $q > \frac{2^*(k)}{2}$, on a

$$A(\epsilon) = \epsilon^{m - \frac{q(m-2)}{2}} g(\bar{x}_0) \int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^q dX + O\left(\epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}}\right)$$

Étape A.ii : si $q < \frac{2^*(k)}{2}$, par suite il existe $C_1 \geq 0$ tel que

$$\begin{aligned}
 A(\epsilon) &= \epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}} g(\bar{x}_0) \int_{B_{\rho_0}(\bar{x}_0)} \frac{dX}{(\epsilon^{2-s} + |X|^{2-s})^{\frac{q(m-2)}{2-s}}} \\
 &\leq C_1 \epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}} \int_{B_{\rho_0}(\bar{x}_0)} |X|^{-q(m-2)} dX
 \end{aligned}$$

Or $m > q(m-2)$, par suite $|X|^{-q(m-2)}$ est intégrable sur $B_{\rho_0}(\bar{x}_0)$. Alors :

$$A(\epsilon) = O\left(\epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}}\right)$$

Étape A.iii : si $q = \frac{2^*(k)}{2}$

$$\begin{aligned}
 A(\epsilon) &= \epsilon^{\frac{m}{2}} g(\bar{x}_0) w_{m-1} \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{m-1} d\rho}{(1 + \rho^{2-s})^{\frac{m}{2-s}}} \\
 &= \epsilon^{\frac{m}{2}} g(\bar{x}_0) w_{m-1} \left[\int_0^1 \frac{\rho^{m-1} d\rho}{(1 + \rho^{2-s})^{\frac{m}{2-s}}} + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{m-1} d\rho}{(1 + \rho^{2-s})^{\frac{m}{2-s}}} \right] \\
 &= O(\epsilon^{\frac{m}{2}}) + \epsilon^{\frac{m}{2}} g(\bar{x}_0) w_{m-1} \left(\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho}{\rho} + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \left[\frac{\rho^{m-1}}{(1 + \rho^{2-s})^{\frac{m}{2-s}}} - \frac{1}{\rho} \right] d\rho \right) \\
 &= O(\epsilon^{\frac{m}{2}}) + \epsilon^{\frac{m}{2}} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) g(\bar{x}_0) w_{m-1}
 \end{aligned}$$

Donc

$$A(\epsilon) = \begin{cases} \epsilon^{m - \frac{q(m-2)}{2}} g(\bar{x}_0) \int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^q dX + O\left(\epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}}\right) & \text{si } q > \frac{2^*(k)}{2} \\ O(\epsilon^{\frac{m}{2}}) + \epsilon^{\frac{m}{2}} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) g(\bar{x}_0) w_{m-1} & \text{si } q = \frac{2^*(k)}{2} \\ O\left(\epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}}\right) & \text{si } q < \frac{2^*(k)}{2} \end{cases} \quad (4.38)$$

Étape B Posons $\alpha \in]0, \rho_0[$, par suite

$$\begin{aligned}
 |B(\epsilon)| &\leq \epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}} \int_{B_{\rho_0}(0)} \frac{|\tilde{\eta}(X)|}{(\epsilon^{2-s} + |X|^{2-s})^{\frac{q(m-2)}{2-s}}} dX \\
 &\leq \epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}} \int_{B_{\rho_0}(0) \setminus B_\alpha(0)} \frac{|\tilde{\eta}(X)|}{(\epsilon^{2-s} + |X|^{2-s})^{\frac{q(m-2)}{2-s}}} dX \\
 &\quad + \epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}} \int_{B_\alpha(0)} \frac{|\tilde{\eta}(X)|}{(\epsilon^{2-s} + |X|^{2-s})^{\frac{q(m-2)}{2-s}}} dX \\
 &\leq \epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}} \frac{\|\tilde{\eta}\|_\infty \text{Vol}(B_{\rho_0}(0))}{\alpha^{q(m-2)}} \\
 &\quad + \epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}} w_{m-1} \left(\sup_{|X| < \alpha} |\tilde{\eta}(X)| \right) \left[\int_0^\alpha \frac{r^{m-1} dr}{(\epsilon^{2-s} + r^{2-s})^{\frac{q(m-2)}{2-s}}} \right] \\
 &\leq C(\alpha) \epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}} + \epsilon^{m - \frac{q(m-2)}{2}} w_{m-1} \left(\sup_{|X| < \alpha} |\tilde{\eta}(X)| \right) \int_0^\alpha \frac{\rho^{m-1} d\rho}{(1 + \rho^{2-s})^{\frac{q(m-2)}{2-s}}} \\
 &\leq C(\alpha) \epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}} + \epsilon^{m - \frac{q(m-2)}{2}} w_{m-1} \left(\sup_{|X| < \alpha} |\tilde{\eta}(X)| \right) \int_0^\alpha \frac{\rho^{m-1} d\rho}{(1 + \rho^{2-s})^{\frac{q(m-2)}{2-s}}}
 \end{aligned}$$

On pose

$$S(\epsilon) = \epsilon^{m - \frac{q(m-2)}{2}} w_{m-1} \int_0^{\frac{\alpha}{\epsilon}} \frac{\rho^{m-1} d\rho}{(1 + \rho^{2-s})^{\frac{q(m-2)}{2-s}}}$$

On distingue trois cas :

Étape B.i : $q < \frac{2^*(k)}{2}$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} |B(\epsilon)| &\leq \epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}} \int_{B_{\rho_0}(0)} \frac{|\tilde{\eta}(X)|}{(\epsilon^{2-s} + |X|^{2-s})^{\frac{q(m-2)}{2-s}}} dX \\ &\leq \epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}} \sup_{|X| < \rho_0} |\tilde{\eta}(X)| w_{m-1} \int_0^{\rho_0} r^{m-1-q(m-2)} dr \\ &= O(\epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}}) \end{aligned}$$

Étape B.ii : $q > \frac{2^*(k)}{2}$. Comme dans **Étape A** de cette preuve, on obtient que

$$S(\epsilon) = \epsilon^{m - \frac{q(m-2)}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^q dX + C'(\alpha) \epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}}$$

Ceci implique qu'il existe $D > 0$ et $C''(\alpha) > 0$, tel que

$$\begin{aligned} |B(\epsilon)| &\leq C(\alpha) \epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}} \\ &\quad + \epsilon^{m - \frac{q(m-2)}{2}} \sup_{|X| < \alpha} |\tilde{\eta}(X)| \int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^q dX + C'(\alpha) \epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}} \\ &\leq C''(\alpha) \epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}} + D \epsilon^{m - \frac{q(m-2)}{2}} \sup_{|X| < \alpha} |\tilde{\eta}(X)| \end{aligned}$$

Par suite

$$\frac{|B(\epsilon)|}{\epsilon^{m - \frac{q(m-2)}{2}}} \leq D \sup_{|X| < \alpha} |\tilde{\eta}(X)| + C''(\alpha) \epsilon^{q(m-2) - m}$$

Or $\forall \theta > 0$, il existe $\alpha_0 = \alpha(\theta)$ tel que pour tout $\alpha < \alpha_0$ on a $D \sup_{|X| < \alpha} |\tilde{\eta}(X)| < \frac{\theta}{2}$. D'autre part, il existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(\theta) > 0$ tel que pour tout $\epsilon < \epsilon_0$, on a

4.2 THÉORÈME D'EXISTENCE AVEC CONDITION GÉNÉRALE

$C'''(\alpha)\epsilon^{q(m-2)-m} < \frac{\theta}{2}$. Alors $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|B(\epsilon)|}{\epsilon^{m-\frac{q(m-2)}{2}}} = 0$. En d'autre terme $B(\epsilon) = o\left(\epsilon^{m-\frac{q(m-2)}{2}}\right)$

Étape B.iii : $q = \frac{2^*(k)}{2}$. Comme déjà fait dans **Étape A** de cette preuve

$$\begin{aligned} |B(\epsilon)| &\leq C(\alpha)\epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}} + \epsilon^{m-\frac{q(m-2)}{2}} w_m \left(\sup_{|X|<\alpha} |\tilde{\eta}(X)| \right) \int_0^{\frac{\alpha}{\epsilon}} \frac{\rho^{(m-1)} d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{m}{2-s}}} \\ &\leq C(\alpha)\epsilon^{\frac{m}{2}} + \epsilon^{\frac{m}{2}} w_2 \sup_{|X|<\alpha} |\tilde{\eta}(X)| \left(C''(\alpha) + \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \right) \\ &= C(\alpha)\epsilon^{\frac{m}{2}} + \epsilon^{\frac{m}{2}} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) D \sup_{|X|<\alpha} |\tilde{\eta}(X)| \end{aligned}$$

Avec des arguments similaires que ceux utilisés dans le cas $q > \frac{2^*(k)}{2}$, on démontre que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|B(\epsilon)|}{\epsilon^{\frac{m}{2}} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} = 0$.

Groupons tous nos calculs, on aura l'estimation demandée. □

Lemme 4.2.6. On pose pour $m \geq 5$

$$\begin{aligned} k_1 &:= \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla\phi|^2 dX} \\ k_2 &:= -\frac{1}{2^*(k,s)3m} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |X|^{2-s} |\phi|^{2^*(k,s)} dX}{\int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\phi|^{2^*(k,s)}}{|X|^s} dX} + \frac{1}{6m} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla\phi|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla\phi|^2 dX} \\ k_3 &:= +\frac{1}{2^*(k,s)m} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |X|^{2-s} |\phi|^{2^*(k,s)} dX}{\int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\phi|^{2^*(k,s)}}{|X|^s} dX} \end{aligned}$$

Alors on a

$$\frac{k_2}{k_1} = c'_{n,k,s} = \frac{(m-2)(6-s)}{12(2m-2-s)} \quad (4.39)$$

et

$$\frac{k_3}{k_1} = c''_{n,k,s} = \frac{(m-2)(m-4)}{4(2m-2-s)} \quad (4.40)$$

Preuve : Soient $p, q > 0$ tel que $p - q > 1$. On considère $I_p^q = \int_0^{+\infty} \frac{t^q dt}{(1+t)^p}$, une intégration par partie montre que $I_p^q = \frac{p}{q+1} I_{p+1}^{q+1}$. De plus, on peut montrer facilement que $I_p^q = I_{p+1}^q + I_{p+1}^{q+1}$. Ces deux relation nous permet de trouver les résultats suivants

qui seront utiles pour le calcul de nos rapports principaux :

$$I_{p+1}^q = \frac{p-q-1}{p} I_p^q \text{ et } I_{p+1}^{q+1} = \frac{q+1}{p-q-1} I_{p+1}^q \quad (4.41)$$

Maintenant , on va calculer le rapport $\frac{k_2}{k_1}$ moyennant (4.41). En effet, on a :

$$\frac{k_2}{k_1} = -\frac{2}{2^*(k,s)6m} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |X|^{2-s} |\phi|^{2^*(k,s)} dX}{\int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\phi|^{2^*(k,s)}}{|X|^s} dX} \cdot \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \phi|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^2 dX} + \frac{1}{6m} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \phi|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^2 dX} \quad (4.42)$$

En passant en coordonnées polaire (r, θ) , et en posant $t = r^{2-s}$ tel que $dr = \frac{1}{2-s} t^{-\frac{1-s}{2-s}} dt$, on aura

$$\int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^2 dX = w_{m-1} \int_0^{+\infty} \frac{r^{m-1} dr}{(1+r^{2-s})^{\frac{2(m-2)}{2-s}}} = \frac{w_{m-1}}{2-s} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m}{2-s}-1}}{(1+t)^{\frac{2(m-2)}{2-s}}} dt \quad (4.43)$$

D'une même manière on peut prouver que

$$\int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \phi|^2 dX = \frac{(m-2)^2 w_{m-1}}{2-s} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m}{2-s}+1}}{(1+t)^{\frac{2(m-2)}{2-s}+2}} dt \quad (4.44)$$

En utilisant (4.43) et (4.44) et (4.41), pour $q = \frac{m}{2-s} - 1$, $p = \frac{2(m-2)}{2-s}$, on aura

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \phi|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^2 dX} &= \frac{\frac{(m-2)^2 w_{m-1} I_{p+2}^{q+2}}{2-s}}{\frac{w_{m-1} I_p^q}{2-s}} = \frac{(m-2)^2 (q+1)(q+2)}{p(p+1)} \\ &= \frac{m(m-2)(m+2-s)}{2(2m-2-s)} \end{aligned} \quad (4.45)$$

D'une façon similaire, on aura pour $p = \frac{2(m-2)}{2-s}$, $q = \frac{m}{2-s} - 1$

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^m} |X|^{2-s} |\phi|^{2^*(k,s)} dX}{\int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^2 dX} = \frac{I_{p+2}^{q+1}}{I_p^q} = \frac{p-q-1}{p+1} \times \frac{q+1}{p} = \frac{m(m-4)}{2(m-2)(2m-2-s)} \quad (4.46)$$

et pour $p = \frac{2(m-s)}{2-s}$, $q = \frac{m-s}{2-s} - 1$

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \phi|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\phi|^{2^*(k,s)}}{|X|^s} dX} = (m-2)^2 \frac{I_p^{q+1}}{I_p^q} = (m-2)^2 \frac{q+1}{p-1-q-1} = (m-2)(m-s) \quad (4.47)$$

En combinant (4.45), (4.46), et (4.47) dans la formule (4.42) on vérifie (4.39)

□

4.3 Théorème principal d'existence

Théorème 4.3.1. *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $a \in C^0(M)$ tel que $\Delta_g + a$ est coercif, G un groupe d'isométries de M , $x_0 \in M$, $s \in]0, 2[$ et $k \in [1, n-2[$ vérifiant l'hypothèse 4.0.1. On définit $2^*(k, s) = \frac{2(n-k-s)}{n-k-2}$, $2^*(k) = 2^*(k, 0)$ et on considère $q \in]2, 2^*(k)[$ et $h \in C^0(M)$, $h \geq 0$. On suppose que*

- i) $n - k \geq 4$;
- ii) $q > \frac{n-k}{n-k-2}$;
- iii) $h(x_0) > 0$.

Alors l'équation perturbée de Hardy-Sobolev :

$$\Delta_g u + au = \frac{u^{2^*(k,s)-1}}{d_g(x, Gx_0)^s} + hu^{q-1} \quad (E)$$

admet une solution non triviale dans $C^0(M) \cap H_{1,G}^2(M)$. De plus, la solution u est strictement positive dans M et $u \in C^{0,\alpha}(M) \cap C_{loc}^{1,\nu}(M \setminus \{Gx_0\})$, pour tout $\alpha \in (0, \min\{1, 2-s\})$, $\nu \in (0, 1)$.

Preuve : On considère la fonction euclidienne ϕ définie par

$$X \in \mathbb{R}^m \mapsto (1 + |X|^{2-s})^{-\frac{m-2}{2-s}}. \quad (4.48)$$

où $m = n - k$. Par la notation 3.4.7, c'est une fonction extrémale de l'inégalité suivante

$$K_s(n-k)^{-1} = \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \phi|^2 dX}{\left(\int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\phi|^{2^*(k,s)}}{|X|^s} dX \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} \quad (4.49)$$

soit $\rho > 0$, on pose $N := B_{Gx_0}(\rho_0)/G = B_{\bar{x}_0}(\rho_0)$, une variété compacte de dimension $m \geq 4$. On pose la suite des fonctions tests $(\bar{u}_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ définie pour tout $\epsilon > 0$, $\bar{x} \in N$ par

$$\bar{u}_\epsilon(\bar{x}) := \left(\frac{\epsilon^{\frac{2-s}{2}}}{\epsilon^{2-s} + d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^{2-s}} \right)^{\frac{m-2}{2-s}}$$

Et

$$u_\epsilon = \begin{cases} \left(\frac{\epsilon^{\frac{2-s}{2}}}{\epsilon^{2-s} + d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^{2-s}} \right)^{\frac{m-2}{2-s}} & \text{si } x \in B_{\rho_0}(Gx_0) \\ \left(\frac{\epsilon^{\frac{2-s}{2}}}{\epsilon^{2-s} + \rho_0^{2-s}} \right)^{\frac{m-2}{2-s}} & \text{si } x \in M \setminus B_{\rho_0}(Gx_0) \end{cases}$$

Notons que $u_\epsilon \in H_{1,G}^2(M)$. Soit la fonctionnelle J_q défini au début. Pour tout $\epsilon > 0$, et $t \geq 0$, on pose

$$J_q(tu_\epsilon) = \frac{t^2}{2} \int_M (|\nabla u_\epsilon|_g^2 + au_\epsilon^2) dv_g - \frac{t^{2^*(k,s)}}{2^*(k,s)} \int_M u_\epsilon^{2^*(k,s)} \frac{1}{d_g(x, Gx_0)^s} dv_g - \frac{t^q}{q} \int_M hu_\epsilon^q dv_g \quad (4.50)$$

$$= \frac{t^2}{2} A_\epsilon - \frac{t^{2^*(k,s)}}{2^*(k,s)} B_\epsilon - \frac{t^q}{q} C_\epsilon \quad (4.51)$$

Où

$$\begin{aligned} A_\epsilon &:= \int_N (|\nabla \bar{u}_\epsilon|_{\bar{g}}^2 + \bar{a}\bar{u}_\epsilon^2) dv_{\bar{g}} + \int_{M \setminus B_{\rho_0}(Gx_0)} (|\nabla u_\epsilon|_g^2 + au_\epsilon^2) dv_g \\ B_\epsilon &:= \int_N \bar{f} |\bar{u}_\epsilon|^{2^*(k,s)} \frac{dv_{\bar{g}}}{d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_0)^s} + \int_{M \setminus B_{\rho_0}(Gx_0)} u_\epsilon^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \\ C_\epsilon &:= \int_N \bar{h} |\bar{u}_\epsilon|^q dv_{\bar{g}} + \int_{M \setminus B_{\rho_0}(Gx_0)} hu_\epsilon^q dv_g \end{aligned}$$

avec $\bar{h}(\bar{x}) = \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} h(\Pi(x))$, $\bar{a}(\bar{x}) = \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} a(\Pi(x))$, et $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{v}^{-\frac{2-s}{n-k-2}} (\Pi(x))$.
Notons que, c'est simple à vérifier comme dans que Les lemmes 4.2.3 et 4.2.5 en dehors

de la boule centré en Gx_0 que

$$\begin{aligned} \int_{M \setminus B_{\rho_0}(Gx_0)} (|\nabla u_\epsilon|_g^2 + a u_\epsilon^2) dv_g &= O(\epsilon^{m-2}) \\ \int_{M \setminus B_{\rho_0}(Gx_0)} u_\epsilon^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} &= O(\epsilon^{m-s}) \\ \int_{M \setminus B_{\rho_0}(Gx_0)} h u_\epsilon^q dv_g &= O(\epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}}) \end{aligned}$$

En utilisant les égalités ci-dessus, et Les lemmes 4.2.3 et 4.2.5 on aura :

$$A_\epsilon = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \phi|^2 dX - \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \phi|^2 dX}{6m} \text{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0) \epsilon^2 + \epsilon^2 \bar{a}(\bar{x}_0) \int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^2 dX + o(\epsilon^2) & \text{si } m \geq 5 \\ \int_{\mathbb{R}^4} |\nabla \phi|^2 dX - \frac{w_3}{6} \text{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0) \epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + \bar{a}(\bar{x}_0) w_3 \epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + o(\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)) & \text{si } m = 4 \end{cases}$$

$$B_\epsilon = \bar{f}(\bar{x}_0) \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\phi|^{2^*(k,s)}}{|X|^s} dX - \epsilon^2 \left(\frac{\Delta_{\bar{g}} \bar{f}(\bar{x}_0)}{2m} + \frac{\bar{f}(\bar{x}_0)}{6m} \text{Scal}_{\bar{g}} \right) \int_{\mathbb{R}^m} |X|^{2-s} |\phi|^{2^*(k,s)} dX + o(\epsilon^2)$$

$$C_\epsilon = \begin{cases} \epsilon^{m - \frac{q(m-2)}{2}} \bar{h}(\bar{x}_0) \int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^q dX + o\left(\epsilon^{m - \frac{q(m-2)}{2}}\right) & \text{si } q > \frac{2^*(k)}{2} \\ \epsilon^{\frac{m}{2}} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \bar{h}(\bar{x}_0) w_{m-1} + o(\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)) & \text{si } q = \frac{2^*(k)}{2} \\ O\left(\epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}}\right) & \text{si } q < \frac{2^*(k)}{2} \end{cases}$$

Par suite, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$

$$A_\epsilon \rightarrow A_0 := \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \phi|^2 dX, \quad B_\epsilon \rightarrow B_0 := f(x_0) \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\phi|^{2^*(k,s)}}{|X|^s} dX, \quad \text{et } C_\epsilon \rightarrow 0 \quad (4.52)$$

Étape I On démontre que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un unique $t_\epsilon > 0$ tel que $\sup_{t \geq 0} J_q(tu_\epsilon) = J_q(t_\epsilon u_\epsilon)$. De plus, t_ϵ vérifie

$$t_\epsilon = T_\epsilon (1 - \alpha_0 C_\epsilon + o(C_\epsilon)) \quad (4.53)$$

Avec $T_\epsilon = (A_\epsilon B_\epsilon^{-1})^{\frac{1}{2^*(k,s)-2}}$, $\alpha_0 > 0$, et la suite t_ϵ converge et sa limite t_0 vérifie $t_0^{2^*(k,s)} B_0 = A_0$.

En effet $\frac{dJ_q(tu_\epsilon)}{dt}$ s'annule pour $t = 0$ ou bien pour t vérifie l'équation (E_ϵ) suivante

$$A_\epsilon = f_\epsilon(t) := t^{2^*(k,s)-2}B_\epsilon + t^{q-2}C_\epsilon \quad (E_\epsilon)$$

D'autre part, $A_\epsilon > 0$, $B_\epsilon, C_\epsilon \geq 0$ et f_ϵ est une fonction strictement croissante alors il existe un unique $t_\epsilon > 0$ vérifiant (E_ϵ) et étant le maximum pour $t \geq 0$ de $J_q(tu_\epsilon)$. Or

$$t_\epsilon^{2^*(k,s)-2}B_\epsilon = A_\epsilon - t_\epsilon^{q-2}C_\epsilon \leq A_\epsilon$$

Il s'ensuit que $t_\epsilon \leq T_\epsilon = (A_\epsilon B_\epsilon^{-1})^{\frac{1}{2^*(k,s)-2}}$. Mais d'après (4.52), $T_\epsilon \rightarrow (A_0 B_0^{-1})^{\frac{1}{2^*(k,s)-2}}$. Par suite, $(t_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée, et il existe donc $t_0 > 0$ telle que $t_\epsilon \rightarrow t_0$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. En passant à la limite dans (E_ϵ) , on obtient que $t_0^{2^*(k,s)-2}B_0 = A_0$.

En outre t_ϵ vérifie (E_ϵ) , on a donc

$$\begin{aligned} t_\epsilon &= (A_\epsilon B_\epsilon^{-1} - t_\epsilon^{q-2}C_\epsilon B_\epsilon^{-1})^{\frac{1}{2^*(k,s)-2}} \\ &= T_\epsilon (1 - t_\epsilon^{q-2}A_\epsilon^{-1}C_\epsilon)^{\frac{1}{2^*(k,s)-2}} \\ &= T_\epsilon (1 - \alpha_0 C_\epsilon + o(C_\epsilon)) \end{aligned}$$

Avec $\alpha_0 = \frac{t_0^{q-2}A_0^{-1}}{2^*(k,s)-2}$. Ceci termine notre étape.

Étape II On démontre qu'à sous suite près de $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$, on a

$$J_q(t_\epsilon u_\epsilon) = c_{n,k,s} (I(u_\epsilon))^{\frac{2^*(k,s)}{2^*(k,s)-2}} - \frac{T_0^q}{q} C_\epsilon + o(C_\epsilon) \quad (4.54)$$

Avec $c_{n,k,s} = \frac{2-s}{2(n-k-s)}$ et

$$I(u_\epsilon) = \frac{\int_M (|\nabla u_\epsilon|^2 + a u_\epsilon) dv_g}{\left(\int_M |u_\epsilon|^{2^*(k,s)} \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}}}$$

En effet, les développements (4.50) et (4.53) de $J_q(tu_\epsilon)$ et t_ϵ impliquent

$$\begin{aligned}
J_q(t_\epsilon u_\epsilon) &= \frac{t_\epsilon^2}{2} A_\epsilon - \frac{t_\epsilon^{2^*(k,s)}}{2^*(k,s)} B_\epsilon - \frac{t_\epsilon^q}{q} C_\epsilon \\
&= \frac{T_\epsilon^2}{2} (1 - 2\alpha_0 C_\epsilon + o(C_\epsilon)) A_\epsilon - \frac{T_\epsilon^{2^*(k,s)}}{2^*(k,s)} (1 - 2^*(k,s)\alpha_0 C_\epsilon + o(C_\epsilon)) B_\epsilon \\
&\quad - \frac{T_\epsilon^q}{q} (1 - q\alpha_0 C_\epsilon + o(C_\epsilon)) C_\epsilon \\
&= \frac{T_\epsilon^2}{2} A_\epsilon - \frac{T_\epsilon^{2^*(k,s)}}{2^*(k,s)} B_\epsilon + \alpha_0 (-T_\epsilon^2 A_\epsilon + T_\epsilon^{2^*(k,s)} B_\epsilon + T_\epsilon^q C_\epsilon) C_\epsilon - \frac{T_\epsilon^q}{q} C_\epsilon + o(C_\epsilon)
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Mais

$$-T_\epsilon^2 A_\epsilon + T_\epsilon^{2^*(k,s)} B_\epsilon = 0 \tag{4.56}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{T_\epsilon^2}{2} A_\epsilon - \frac{T_\epsilon^{2^*(k,s)}}{2^*(k,s)} B_\epsilon &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(k,s)} \right) A_\epsilon^{\frac{2^*(k,s)}{2^*(k,s)-2}} (B_\epsilon^{-1})^{\frac{2}{2^*(k,s)-2}} \\
&= c_{n,k,s} \left(\frac{A_\epsilon}{B_\epsilon^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} \right)^{\frac{2^*(k,s)}{2^*(k,s)-2}} \\
&= c_{n,k,s} (I(u_\epsilon))^{\frac{2^*(k,s)}{2^*(k,s)-2}}
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Combinons (4.55), (4.56) et (4.57), nous trouvons (4.54).

Étape III On démontre que

$$\begin{aligned}
\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} I(u_\epsilon) &= 1 + \\
\begin{cases} \left(k_1 \bar{a}(\bar{x}_0) - k_2 \text{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0) + k_3 \frac{\Delta_{\bar{g}} \bar{f}(\bar{x}_0)}{f(\bar{x}_0)} \right) \epsilon^2 + o(\epsilon^2) & \text{si } m \geq 5, \\ w_3 \left(\int_{\mathbb{R}^4} |\nabla \phi|^2 dX \right)^{-1} \left(\bar{a}(\bar{x}_0) - \frac{1}{6} \text{Scal}_{\bar{g}} \right) \epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + o\left(\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right) & \text{si } m = 4, \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Où k_1, k_2, k_3 sont des constantes comme dans le Lemme 4.2.6. On distingue 2 cas

Étape III.a $m = 4$. Dans ce cas on a

$$I(u_\epsilon) = \frac{C_1 + C_2 w_3 \epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) o\left(\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)}{(C_3 + C_4 \epsilon^2 + o(\epsilon^2))^{\frac{2}{2^*(k,s)}}}$$

où

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{\mathbb{R}^4} |\nabla \phi|^2 dX \\ C_2 &= \bar{a}(\bar{x}_0) - \frac{1}{6} \text{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0) \\ C_3 &= \bar{f}(\bar{x}_0) \int_{\mathbb{R}^4} \frac{|\phi|^{2^*(k,s)}}{|X|^s} dX \\ C_4 &= - \left(\frac{\bar{f}(\bar{x}_0)}{24} \text{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0) + \frac{\Delta_{\bar{g}} \bar{f}(\bar{x}_0)}{8} \right) \int_{\mathbb{R}^m} |X|^{2-s} |\phi|^{2^*(k,s)} dX \end{aligned}$$

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} I(u_\epsilon) &= \frac{1}{C_3^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} \left[\frac{C_1 + C_2 w_3 \epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) 2 + o\left(\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)}{\left(1 + \frac{C_4}{C_3} \epsilon^2 + o(\epsilon^2)\right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} \right] \\ &= \frac{1}{C_3^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} \left(\frac{C_1 + C_2 w_3 \epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + o\left(\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)}{1 + \frac{2C_4}{2^*(k,s)C_3} \epsilon^2 + o(\epsilon^2)} \right) \\ &= \frac{1}{C_3^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} \left(C_1 + C_2 w_3 \epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + o\left(\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right) \right) \left(1 - \frac{2C_4}{2^*(k,s)C_3} \epsilon^2 + o(\epsilon^2) \right) \\ &= \frac{1}{C_3^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} \left(C_1 + C_2 w_3 \epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + O(\epsilon^2) \right) \\ &= \frac{C_1}{C_3^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \frac{C_2}{C_3^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} w_3 \epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + o\left(\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right) \\ &= \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} \right)^{-1} \left(1 + \frac{C_2}{C_1} w_3 \epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + o\left(\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right) \right) \end{aligned}$$

La proposition est démontrée dans ce cas-là

Étape III.b $m \geq 5$. Dans ce cas on a

$$I(u_\epsilon) = \frac{C_1 + C_2 \epsilon^2 + o(\epsilon^2)}{(C_3 + C_4 \epsilon^2 + o(\epsilon^2))^{\frac{2}{2^*(k,s)}}}$$

où

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \phi|^2 dX \\
 C_2 &= \bar{a}(\bar{x}_0) \int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^2 dX - \frac{1}{6m} \text{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0) \int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \phi|^2 dX \\
 C_3 &= \bar{f}(\bar{x}_0) \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\phi|^{2^*(k,s)}}{|X|^s} dX \\
 C_4 &= - \left(\frac{\bar{f}(\bar{x}_0)}{6m} \text{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0) + \frac{\Delta_{\bar{g}} \bar{f}(\bar{x}_0)}{2m} \right) \int_{\mathbb{R}^m} |X|^{2-s} |\phi|^{2^*(k,s)} dX
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
 I(u_\epsilon) &= \frac{1}{C_3^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} \left[\frac{C_1 + C_2 \epsilon^2 + o(\epsilon^2)}{\left(1 + \frac{C_4}{C_3} \epsilon^2 + o(\epsilon^2)\right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} \right] \\
 &= \frac{1}{C_3^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} \left(\frac{C_1 + C_2 \epsilon^2 + o(\epsilon^2)}{1 + \frac{2C_4}{2^*(k,s)C_3} \epsilon^2 + o(\epsilon^2)} \right) \\
 &= \frac{1}{C_3^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} (C_1 + C_2 \epsilon^2 + o(\epsilon^2)) \left(1 - \frac{2C_4}{2^*(k,s)C_3} \epsilon^2 + o(\epsilon^2)\right) \\
 &= \frac{1}{C_3^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} \left[C_1 + \left(C_2 - \frac{2C_1 C_4}{2^*(k,s)C_3} \right) \epsilon^2 + o(\epsilon^2) \right] \\
 &= \frac{C_1}{C_3^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \left(\frac{C_2}{C_3^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} - \frac{2C_1 C_4}{2^*(k,s)C_3^{\frac{2}{2^*(k,s)}+1}} \right) \epsilon^2 + o(\epsilon^2) \\
 &= \frac{C_1}{C_3^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} + \frac{C_1}{C_3^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} \left(\frac{C_2}{C_1} - \frac{2C_4}{2^*(k,s)C_3} \right) \epsilon^2 + o(\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

On voit clairement que

$$\frac{C_2}{C_1} - \frac{2C_4}{2^*(k,s)C_3} = k_1 \bar{a}(\bar{x}_0) - k_2 \text{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0) + k_3 \frac{\Delta_{\bar{g}} \bar{f}(\bar{x}_0)}{\bar{f}(\bar{x}_0)}$$

Et par la (4.49) que

$$\frac{C_1}{C_3^{\frac{2}{2^*(k,s)}}} = \frac{K_s(n-k)^{-1}}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}}$$

le Lemme 4.2.6 termine la preuve de ce cas.

Étape IV On montre qu'il existe une constante $c > 0$ qui vérifient

$$J_q(t_\epsilon u_\epsilon) \leq c_{n,k,s} \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} \right)^{\frac{2^*(k,s)}{2^*(k,s)-2}} - c h(x_0) \epsilon^{m-\frac{q(m-2)}{2}} + o(\epsilon^{m-\frac{q(m-2)}{2}})$$

Pour $m \geq 5$

$$I(u_\epsilon) \leq \frac{K_s(n-k)^{-1}}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + k_5 \left(\bar{a}(\bar{x}_0) - c'_{n,k,s} \text{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0) + c''_{n,k,s} \frac{\Delta_{\bar{g}} \bar{f}(\bar{x}_0)}{\bar{f}(\bar{x}_0)} \right) \epsilon^2 + o(\epsilon^2) \quad (4.59)$$

avec, comme dans (4.39),

$$c'_{n,k,s} = \frac{(m-2)(6-s)}{12(2m-2-s)} \text{ et } c''_{n,k,s} = \frac{(m-2)(m-4)}{4(2m-2-s)}$$

Par suite, il existe $k_5 := k_5(m, s) > 0$ tel que

$$\begin{aligned} & J_q(t_\epsilon u_\epsilon) \\ & \leq c_{n,k,s} \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} \right)^{\frac{2^*(k,s)}{2^*(k,s)-2}} + k_6 \left(\bar{a}(\bar{x}_0) - c'_{n,k,s} \text{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0) + c''_{n,k,s} \frac{\Delta_{\bar{g}} \bar{f}(\bar{x}_0)}{\bar{f}(\bar{x}_0)} \right) \epsilon^2 \\ & \quad + o(\epsilon^2) - \frac{T_0^q}{q} C_\epsilon + o(C_\epsilon) \end{aligned} \quad (4.60)$$

avec

$$C_\epsilon = \epsilon^{m-\frac{q(m-2)}{2}} \bar{h}(\bar{x}_0) \int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^q dX + O\left(\epsilon^{\frac{q(m-2)}{2}}\right) + o(\epsilon^{m-\frac{q(m-2)}{2}})$$

Or $m - \frac{q(m-2)}{2} < 2$, il s'ensuit que $\epsilon^2 = o(\epsilon^{m-\frac{q(m-2)}{2}})$ ce qui prouve notre égalité.

Pour $m = 4$, par les étapes précédents il existe $k_6 := k_6(m, s) > 0$ tel que

$$I(u_\epsilon) \leq \frac{K_s(n-k)^{-1}}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} + k_5 (\bar{a}(\bar{x}_0) - c'_{n,k,s} \mathbf{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0)) \epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + o\left(\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} & J_q(t_\epsilon u_\epsilon) \\ & \leq c_{n,k,s} \left(\frac{K_s(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} \right)^{\frac{2^*(k,s)}{2^*(k,s)-2}} + k_6 (\bar{a}(\bar{x}_0) - c'_{n,k,s} \mathbf{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0)) \epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \\ & \quad + o\left(\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right) - \frac{T_0^q}{q} C_\epsilon + o(C_\epsilon) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Dans ce cas

$$C_\epsilon = \epsilon^{4-q} \bar{h}(\bar{x}_0) \int_{\mathbb{R}^m} |\phi|^q dX + o(\epsilon^{4-q})$$

Ensuite, $\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = o(C_\epsilon)$ ce qui prouve le reste de notre étape.

En utilisant le fait que $h(x_0) > 0$ dans (4.59), on arrive à vérifier les conditions du théorème 4.1.9, et cela implique la preuve de ce théorème. □



**Phénomènes de concentration dans un
problème surcritique invariant par
isométries**

Etat de l'art : Théorie H_1^2 de Blow-up pour les équation de Hardy-Sobolev en présence d'isométries

Comme dans les chapitres précédents, on se donne (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension n , G un groupe fermé d'isométries de (M, g) et $k := \min_{x \in M} \dim Gx \geq 1$ où Gx est l'orbite du point x sous l'action de G . Posons $x_0 \in G$ tel que $\dim Gx_0 = k$. Rappelons, voir la section 3.1 du Chapitre 3, qu'il existe Ω un ouvert dense de M tel que Ω/G est une variété lisse qu'on peut munir d'une distance Riemannienne \bar{g} telle que la surjection $\Omega \rightarrow \Omega/G$ est une submersion Riemannienne. On pose alors

$$\tilde{g} = \bar{v}^{\frac{2}{n-k-2}} \bar{g}$$

avec $\bar{v}(\bar{x}) = \text{Vol}(Gx)$. On suppose

Hypothèse 5.0.1. *Pour tout Gx_0 , un G -orbite de dimension $k \geq 1$, il existe $\delta > 0$, et*

G' un sous groupe fermé de $Isom_g(M)$ tel que :

$$(H_1) : G'x_0 = Gx_0$$

Et pour tout $x \in B_\delta(Gx_0) := \{y \in M / d_g(y; Gx_0) < \delta\}$

$$(H_2) : G'x \text{ est principale, et } G'x \subset Gx$$

En particulier $\dim G'x = \dim Gx_0 = k, \forall x \in B_\delta(Gx_0)$.

On considère alors la $(n - k)$ variété Riemannienne quotient $N := B_\delta(Gx_0)/G'$. Cette variété est alors munie des métrique \bar{g} et \tilde{g} .

On fait dans ce chapitre, une étude détaillé du théorème principal vu dans Saintier [40], dans le cas spécifique où $p = 2$. Cet étude nous sera utile pour les chapitres suivants et de plus nous aide à comprendre l'idée de "Blow-up" des solutions dans le cas sur-critique de point de vue de l'injection de Sobolev. On considère des fonctions $u \in C^2(M)$ qui sont G -invariantes et solutions de

$$\Delta_g u + h_\epsilon u = f u^{2^*(k)-1} \tag{E_\epsilon}$$

ici $2^*(k) = \frac{2(n-k)}{n-k-2}$ le puissance critique au point de vue de l'injection de Sobolev de l'espace $H_{1,G}^2(M)$ (vu dans le chapitre 3), $f \in C^1(M)$ est G -invariante et (h_ϵ) est une famille de fonctions continues G -invariantes telle qu'il existe $h_0 \in C^0(M)$ G -invariante telle que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon = h_0 \text{ uniformément dans } C^0(M). \tag{5.1}$$

Une solution de (E_ϵ) est une solution faible dans $H_1^2(M)$, de plus on suppose que l'opérateur $h_0 + \Delta_g$ est coercif au sens qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall u \in H_{1,G}^2(M)$:

$$\int_M \{|\nabla u|^2 + h_0 u^2\} dv_g \geq \lambda \|u\|_{H_1^2(M)}^2 \tag{5.2}$$

Notons que (5.2) est vraie si et seulement si pour tout $u \in H_{1,G}^2(M)$, on peut trouver $\lambda > 0$, tel que $\int_M \{|\nabla u|^2 + h_0 u^2\} dv_g \geq \lambda \|u\|_{L^2(M)}^2$

Remarque 5.0.2. Une condition nécessaire pour que (E_ϵ) admet une solution u est que $\max_{x \in M} f(x) > 0$

Preuve : Multiplions (E_ϵ) par u et intégrons par parties en utilisant la coercivité, on arrive :

$$\int_M f u^{2^*} dv_g \geq \lambda \|u\|_{H_1^2(M)}^2 + o(1)$$

Soit u solution de (E_ϵ) alors :

$$\int_M \{\Delta u \cdot u + h_\epsilon u^2\} dv_g = \int_M f u^{2^*} dv_g$$

passant à la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_M \{\Delta u + h_0 u^2\} dv_g &= \int_M f u^{2^*(k)} dv_g \\ \int_M \{(\nabla u \cdot \nabla u) + h_0 u^2\} dv_g &= \int_M f u^{2^*(k)-1} dv_g \geq \lambda \|u\|_{H_1^2(M)}^2 > 0 \end{aligned}$$

Alors f est strictement positif dans un voisinage d'un certain x , par suite $\max_{x \in M} f(x) > 0$ □

On pose l'équation limite d'équation quand $\epsilon \rightarrow 0$

$$\Delta_g u + h_0 u = f u^{2^*-1} \tag{E_0}$$

Et pour tout $\epsilon > 0$, posons u_ϵ G-invariant solution faible de (E_ϵ) , de plus on suppose que u_ϵ est borné dans $H_1^2(M)$. Le but de ce chapitre est de décrire le profile asymptotiques pour les solutions u_ϵ . En fait, référant à Saintier [39] dans le contexte Euclidienne où le groupe d'isométries est réduite pour l'identité, on sait que u_ϵ peut être écrite comme la somme d'une solution faible de l'équation limite (E_0) plus un somme finie de bulles et une suite qui converge fortement vers 0 dans $H_1^2(M)$.

5.1 Bulles

On définit une bulle dans notre contexte :

Définition 5.1.1. Soit (x_ϵ) une suite des points qui converge vers $x_0 \in M$ tel que $\dim Gx_0 = k$. On suppose valide l'hypothèse 5.0.1 : il existe alors G' et δ qui vérifie (H_1) et (H_2) , et soit $(R_\epsilon) \subset [0; \infty[$ tel que $R_\epsilon \rightarrow +\infty$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, et on pose

$\tilde{w} \in H_1^2(\mathbb{R}^{n-k})$ solution positif de :

$$\Delta \tilde{w} = f(x_0) \text{vol}(Gx_0)^{-\frac{2}{n-k-2}} \tilde{w}^{2^*(k)-1} \quad (E_{\tilde{w}})$$

On définit la bulle (\bar{B}_ϵ) de centre (\bar{x}_ϵ) et de poids (R_ϵ) par :

$$\bar{B}_\epsilon(\bar{x}) = \eta_{\bar{x}_\epsilon, \delta'}(\bar{x}) R_\epsilon^{\frac{n-k-2}{2}} \tilde{w}(R_\epsilon(\exp_{\bar{x}_\epsilon}^{-1}(\bar{x}))) \text{ pour } \bar{x} \in N \quad (5.3)$$

Puis, on définit une bulle B_ϵ de centre x_ϵ et de poids R_ϵ comme la G' -invariante fonction qui satisfait $B_\epsilon = \bar{B}_\epsilon \circ \Pi$ avec $\Pi : B_\delta(Gx_0) \rightarrow N$ la surjection canonique.

Remarque 5.1.2. *Une bulle généralisée est définie d'une même manière que la bulle normale, en prenant une solution non triviale et non nécessairement positive du système Euclidienne suivant :*

$$\Delta u = f(x_0) \text{Vol}(Gx_0)^{-\frac{2}{n-k-2}} |u|^{2^*(k)-1} u \quad (5.4)$$

On remarque que cette définition étend clairement la définition habituelle d'une bulle au cas de fonctions G -invariantes.

Définition 5.1.3. *On définit l'énergie généralisée d'une bulle par :*

$$E(B) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} |\nabla u|^2 dx - \frac{f(x_0) \text{Vol}(Gx_0)^{-\frac{2}{n-k-2}}}{2^*(k)} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} |u|^{2^*} dx \quad (5.5)$$

où u est une solution non triviale de (5.4).

Proposition 5.1.4. *on a*

$$E(B) \geq f(x_0)^{-\frac{n-k-2}{2}} \text{Vol}(Gx_0) \frac{1}{n-k} K_0(n-k)^{k-n} \quad (5.6)$$

Où $K_0(n-k)$ est la meilleure constante de Sobolev pour l'injection de $D_1^2(\mathbb{R}^{n-k})$ dans $L^{2^*(k)}(\mathbb{R}^{n-k})$ donnée par (3.18).

Preuve : Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^{n-k})$ solution non trivial de l'équation critique (5.4). D'après la définition de la constante de Sobolev euclidienne (voir chapitre 3 ou Faget [17]), on

a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} |\nabla u|^2 d\xi &= f(x_0) \text{Vol}(Gx_0)^{-\frac{2}{n-k-2}} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} |u|^{2^*(k)} d\xi \\ &\leq K_0(n-k)^{2^*(k)} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-k}} |\nabla u|^2 d\xi \right)^{\frac{2^*(k)}{2}} \end{aligned}$$

Par suite

$$\int_{\mathbb{R}^{n-k}} |\nabla u|^2 d\xi \geq K_0(n-k)^{-2} f(x_0)^{-\frac{m-2}{2}} \text{Vol}(Gx_0)$$

En utilisant l'inégalité ci-dessus dans la définition de l'énergie d'une bulle (5.5), on aura

$$\begin{aligned} E(B) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} |\nabla u|^2 - \frac{f(x_0) \text{Vol}(Gx_0)^{-\frac{m-2}{2}}}{2^*(k)} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} |u|^{2^*(k)} \\ &\geq f(x_0)^{-\frac{n-k-2}{2}} \text{Vol}(Gx_0) \frac{1}{n-k} K_0(n-k)^{k-n} \end{aligned}$$

□

Remarque 5.1.5. Si on pose A le volume minimal des G -orbite de dimension k , alors en utilisant (5.6) on peut vérifier facilement que :

$$E(B) \geq \left(\max_{x \in M} f(x) \right)^{-\frac{n-k-2}{2}} \frac{A}{n-k} K_0(n-k)^{k-n} \quad (5.7)$$

Définition 5.1.6. Soit (u_ϵ) une suite de Palais-Smale pour pour le fonctionnel I_g définie sur $H_1^2(M)$ comme suit

$$I_g(u) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla u|^2 dv_g - \frac{1}{2^*(k)} \int_M f|u|^{2^*(k)} dv_g \quad (I_g)$$

qui converge faiblement vers 0 dans $H_1^2(M)$. Supposons qu'il existe $x_0 \in M$ tel que pour tout $\delta > 0$, on a :

$$\limsup_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{B_\delta(Gx_0)} f|v_\alpha|^{2^*(k)} dv_g > 0 \quad (5.8)$$

Alors, l'orbite Gx_0 dans ce cas est appelé orbite de concentration.

Lemme 5.1.7. *Soit (M, g) est une variété Riemannienne lisse et compacte de dimension n , et soit un sous-groupe d'isométries G qui vérifie l'hypothèse 5.0.1. On se donne $(u_N)_N$ est une suite bornée dans $H_{1,G}^2(M)$ tel que (u_N) converge faiblement vers u dans $H_1^2(M)$, et supposons*

$$\begin{aligned} |\nabla u_N|^2 dv_g &\rightharpoonup \mu \text{ (en mesure)} \\ |u_N|^{2^*(k)} dv_g &\rightharpoonup \nu \text{ (en mesure)} \end{aligned}$$

Où μ et ν sont deux mesures positives bornées. Alors :

1. *Il existe un ensemble dénombrable $J \subset \mathbb{N}$, une suite des points $(x_i)_{i \in J} \in M$ et une suite des nombres positifs et $(\nu_j)_{j \in J} \in]0; \infty[$ telles que :*

$$\nu = |u|^{2^*} + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{Gx_j}$$

avec $\delta_{Gz}(\phi) = \int_G \phi(\sigma z) d\sigma$ où $d\sigma$ est la mesure de Haar sur G .

2. *De plus on a :*

$$\mu \geq |\nabla u|^2 + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{Gx_j}$$

Pour $\mu_j > 0$ qui satisfait

$$\nu_j^{\frac{2}{2^*}} \leq \mu_j \frac{K_0(n-k)}{A^{\frac{2}{n-k}}}$$

Preuve : La preuve de ce Lemme est du même type que celle du Lemme 1.1 de Lions [37]. □

Proposition 5.1.8 (Saintier [40]). *On se donne une variété Riemannienne (M, g) et un groupe d'isométries G qui satisfont les hypothèse 5.0.1. On se donne une suite de Palais-Smale v_ϵ pour (I_g) dans $H_{1,G}^2(M)$ qui converge faiblement vers 0 dans $H_1^2(M)$ et pas fortement. Alors il existe un nombre fini d'orbite de concentration. Si Gx_0 est l'un d'eux alors $\dim Gx_0 = k$ et $f(x_0) > 0$. De plus Gx_0 est une orbite de concentration*

pour v_ϵ si et seulement si pour tout $\delta > 0$

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_\delta(Gx_0)} |\nabla v_\epsilon|_g^2 dv_g > 0 \quad (5.9)$$

Preuve : Supposons que Gx_0 est une orbite de concentration, et supposons de plus que $\dim Gx_0 = k' > k$. D'après Faget [17]

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \dim Gx \geq k' > k, \forall x \in B_\delta(Gx_0)$$

Soit $\delta' \in]0; \delta[$, par l'injection de Sobolev en présence d'isométries (voir chapitre 3), si $n - k' \leq 2$ alors l'injection de $H_{1;G}^2(B_{\delta'}(Gx_0))$ dans $L^{2^*(k)}(B_{\delta'}(Gx_0))$ est continue et compact. d'autre part si $n - k' > 2$ alors on peut vérifier que $2^*(k) < \frac{(n-k')^2}{n-k'-2}$ alors en réutilisant l'injection de Sobolev en présence d'isométries on vérifie que $H_{1;G}^{2;0}(B_{\delta'}(Gx_0))$ injecte continument et compacte dans $L^{2^*(k)}(B_{\delta'}(Gx_0))$ or u_ϵ converge faiblement dans $H_1^2(M)$ vers 0, alors aussi dans $H_1^2(B_{\delta'}(Gx_0))$ par suite $(u_\epsilon) \rightarrow 0$ fortement dans $L^{2^*(k)}(B_{\delta'}(Gx_0))$, donc $\forall \delta' \in]0; \delta[$:

$$\int_{B_{\delta'}(Gx_0)} f |v_\epsilon|^{2^*(k)} dv_g \leq \|f\|_\infty \|v_\epsilon\|_{L^{2^*(k)}(B_{\delta'}(Gx_0))} \rightarrow 0$$

Ce qui contredit (5.8), et par suite $\dim Gx_0 = k$

D'autre part v_ϵ est borné dans $H_{1;G}^2(M)$ alors $\exists \mu; \nu$ deux mesures positives G -invariants tel que $|v_\epsilon|^{2^*(k)} dv_g$ et $|\nabla v_\epsilon|^2 dv_g$ convergent faiblement vers eux.

Soit $\alpha > 0$ d'après Faget [17], il existe $C_\alpha > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $\phi \in C(M)$ G -invariante fonction, on a :

$$\begin{aligned} & \left(\int_M |\phi v_\epsilon|^{2^*(k)} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*(k)}} \\ & \leq \left(\frac{K_0(n-k)}{A^{\frac{2}{n-k}}} + \alpha \right) \int_M |\nabla(\phi v_\epsilon)|^2 dv_g + C_\alpha \int_M |\phi v_\epsilon|^2 dv_g \end{aligned} \quad (5.10)$$

Passant à la limite lorrssque $\epsilon \rightarrow 0$, et puis $\alpha \rightarrow 0$, en notant que $v_\epsilon \rightarrow 0$ dans $L^2(M)$, on aura :

$$\left(\int_M |\phi|^{2^*(k)} d\nu \right)^{\frac{2}{2^*(k)}} \leq \left(\frac{K_0(n-k)}{A^{\frac{2}{n-k}}} \right) \int_M |\phi|^2 d\mu$$

Et ceci est vrai pour tout $\phi \in C(M)$ G -invariante. Appliquons maintenant le Lemme 5.1.7, on trouve une ensemble $J \subset \mathbb{N}$ dénombrable et une famille $(x_i)_{i \in J}$ de points distincts de M et $(\nu_j)_{j \in J}; (\mu_j)_{j \in J} \in]0; \infty[$ tel que :

$$|v_\epsilon|^{2^*(k)} dv_g \rightharpoonup \nu = \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{Gx_j} \quad (5.11)$$

$$|\nabla v_\epsilon|^2 dv_g \rightharpoonup \mu \geq \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{Gx_j} \quad (5.12)$$

$$\nu_j^{\frac{2}{2^*(k)}} \leq \mu_j \frac{K_0(n-k)}{A^{\frac{2}{n-k}}} \quad (5.13)$$

avec $\delta_{Gx_j}(\phi) = \int_G \phi(\sigma x_j) d\sigma = \int_{Gx_j} \phi d\mu_{Gx_j}$. En particulier si ϕ est G -invariants alors $\delta_{Gx_j}(\phi) = \phi(x_j)$. Soit $\phi \in C(M)$ alors :

$$\begin{aligned} DI_g(v_\epsilon)(v_\epsilon \phi) &= o(1) \\ &= \int_M |\nabla v_\epsilon|^2 dv_g + \int_M v_\epsilon (\nabla v_\epsilon, \nabla \phi) dv_g - \int_M f \phi |v_\epsilon|^{2^*(k)} dv_g \end{aligned}$$

En utilisant Hölder, le deuxième intégrale converge vers 0. Passons à la limite dans l'expression précédente, on arrive à montrer que pour tout $\phi \in C(M)$, on a :

$$\int_M \phi d\mu = \int_M \phi f d\nu$$

Donc $\mu = f = \nu$ en particulier, $\forall i \in J$

$$\mu(Gx_i) = \int_{Gx_i} f d\nu$$

Alors

$$\mu_i \leq f(x_i) \nu_i$$

Alors $\forall i \in J$, $f(x_i) > 0$. En utilisant (5.11) on peut vérifier que $\forall i \in J$

$$\begin{aligned} \nu_i &\geq \frac{AK_0(n-k)^{(k-n)/2}}{f(x_i)^{\frac{n-k}{2}}} \geq \frac{AK_0(n-k)^{(k-n)/2}}{(\max f)^{\frac{n-k}{2}}} \\ \mu_i &\geq \frac{AK_0(n-k)^{(k-n)/2}}{f(x_i)^{\frac{n-k-2}{2}}} \geq \frac{AK_0(n-k)^{(k-n)/2}}{(\max f)^{\frac{n-k-2}{2}}} \end{aligned}$$

Or, v_ϵ est une suite de Palais-Smale pour (I_g) pour certain β_0 , alors

$$\beta_0 = \int_M |\nabla v_\epsilon|^2 dv_g + o(1) \geq \sum_{j \in J} \mu_j \geq \text{card}(J) \frac{AK_0(n-k)^{(k-n)/2}}{(\max f)^{\frac{n-k-2}{2}}}$$

Par suite J est finie et donc v_ϵ admet un nombre finie d'orbite de concentration et

$$\mu = f\nu = \sum_{j \in J} \nu_j f(x_j) \delta_{Gx_j} \quad (5.14)$$

En utilisant cette formule, on peut déduire directement l'équivalence du formule (5.9). \square

Corollaire 5.1.9. *On conserve les mêmes hypothèses sur (M, g) et G . Soit Gx_0 une orbite de concentration pour v_ϵ , alors \bar{x}_0 est un point de concentration pour \bar{v}_ϵ dans le sens : Pour tout $\delta > 0$ et assez petit*

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_{\bar{x}_0}(\delta)} |\nabla \bar{v}_\epsilon|_g^2 dv_{\bar{g}} > 0$$

Preuve : Soit Gx_0 une orbite de concentration, d'après la Proposition 5.1.8 on a $\dim Gx_0 = k$. Appliquons l'hypothèse 5.0.1, alors il existe $\delta_0 > 0$ et un sous groupe G' de $Isom_g(M)$ tel que (H_1) et (H_2) sont vérifiées. Par suite, pour tout $\delta \in]0; \delta_0[$ on a :

$$\int_{B_\delta(Gx_0)} |\nabla v_\epsilon|_g^2 dv_g = \int_{B_{\bar{x}_0}(\delta)} |\nabla \bar{v}|_g^2 \bar{v}_\epsilon dv_{\bar{g}} = \int_{B_{\bar{x}_0}(\delta)} |\nabla \bar{v}_\epsilon|_g^2 dv_{\bar{g}}$$

On pose :

$$m := \inf_{\bar{x} \in B_{\bar{x}_0}(\delta)} v(x)^{\frac{1}{n-k-2}} = \inf_{\bar{x} \in B_{\bar{x}_0}(\delta)} Vol(\Pi^{-1}\bar{x})$$

et

$$M := \sup_{\bar{x} \in B_{\bar{x}_0}(\delta)} v(x)^{\frac{1}{n-k-2}} = \sup_{\bar{x} \in B_{\bar{x}_0}(\delta)} \text{Vol}(\Pi^{-1}\bar{x})$$

Par suite, pour tout $\bar{x} \in B_{\bar{x}_0}(\delta)$, on a $\frac{1}{M}d_{\bar{g}}(\bar{x}; \bar{x}_0) \leq d_{\bar{g}}(\bar{x}; \bar{x}_0) \leq \frac{1}{m}d_{\bar{g}}(\bar{x}; \bar{x}_0)$. Par conséquence

$$0 < \int_{B_{\delta}(Gx_0)} |\nabla v_{\epsilon}|_g^2 dv_g \leq \int_{B_{\bar{x}_0}(\frac{\delta}{m})} |\nabla \bar{v}|_{\bar{g}}^2 dv_{\bar{g}}$$

□

Proposition 5.1.10 (Saintier [40]). *On se donne (M, g) et G qui vérifient les hypothèses de la Proposition 5.1.8. En particulier, l'hypothèse 5.0.1 a lieu, et on se donne une orbite Gx_0 qui vérifie cette hypothèse. Soit une suite de Palais-Smale dans $v_{\epsilon} \in H_{1,G}^2(M)$ pour (I_g) qui converge faiblement vers 0 dans $H_1^2(M)$ et pas fortement. Alors (\bar{v}_{ϵ}) est une suite de Palais-Smale pour la fonctionnelle $(I_{\bar{g}})$ définie sur $H_1^2(N)$ par :*

$$I_{\bar{g}}(\bar{u}) = \frac{1}{2} \int_N |\nabla \bar{u}|_{\bar{g}}^2 dv_{\bar{g}} - \frac{1}{2} \int_N \bar{f} |\bar{u}|^{2^*} \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} dv_{\bar{g}} \quad (I_{\bar{g}})$$

où $N = B_{\delta_0}(Gx_0)/G'$

Preuve : Soit $\bar{\phi} \in C_c^\infty(N)$ et $\phi \in C_c^\infty(B_{\delta_0}(Gx_0))$ tel que $\bar{\phi} \circ \Pi = \phi$. En utilisant les meme arguments vue dans le Chapitre 3, dans les Propositions 4.1.2 et 4.1.3, on a $(I_{\bar{g}})$ est bien définie est aussi $C^1(N)$. D'autre part (v_{ϵ}) est une suite de Palais-Smale pour (I_g) , on a alors

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle I_{\bar{g}}(v_{\epsilon}), \bar{\phi} \rangle \\ &= \int_{B_{\delta_0}(Gx_0)} (\nabla v_{\epsilon}, \nabla \phi)_g dv_g - \int_{B_{\delta_0}(Gx_0)} f |v_{\epsilon}|_g^{2^*(k)-2} v_{\epsilon} \phi dv_g \\ &= \int_{B_{\bar{x}_0}(\delta)} (\nabla \bar{v}_{\epsilon}, \nabla \bar{\phi})_{\bar{g}} \bar{v} dv_{\bar{g}} - \int_{B_{\bar{x}_0}(\delta)} \bar{f} |v_{\epsilon}|^{2^*(k)-2} \bar{v}_{\epsilon} \bar{\phi} dv_{\bar{g}} \\ &= \int_{B_{\bar{x}_0}(\delta)} (\nabla \bar{v}_{\epsilon}, \nabla \bar{\phi})_{\bar{g}} dv_{\bar{g}} - \int_{B_{\bar{x}_0}(\delta)} \bar{f} |v_{\epsilon}|^{2^*(k)-2} \bar{v}_{\epsilon} \bar{\phi} dv_{\bar{g}} \\ &= \langle I'_{\bar{g}}(\bar{v}_{\epsilon}), \bar{\phi} \rangle \end{aligned}$$

□

Proposition 5.1.11 (Saintier [40]). *On se donne (M, g) et G qui vérifient les hypothèses de la Proposition 5.1.8. En particulier, l'hypothèse 5.0.1 a lieu. Soit une suite de Palais-Smale v_ϵ pour (I_g) qui converge faiblement vers 0 dans $H_1^2(M)$ et pas fortement. Alors, il existe une suite $\bar{x}_\epsilon \in N$, et une suite $R_\epsilon \rightarrow +\infty$ tel que pour $\delta > 0$ assez petit, la suite \tilde{v}_ϵ définie pour tout $X \in B_0(R_\epsilon\delta) \subset \mathbb{R}^{n-k}$ comme suit*

$$\tilde{v}_\epsilon(X) = R_\epsilon^{-\frac{n-k-2}{2}} \bar{v}_\epsilon(\exp_{\bar{x}_\epsilon}(R_\epsilon^{-1}X))$$

converge localement fortement dans $H_1^2(\mathbb{R}^{n-k})$ vers \tilde{w} , où \tilde{w} est une solution de

$$\Delta_\xi \tilde{w} = f(x_0) \text{Vol}(Gx_0)^{-\frac{2}{n-k-2}} |\tilde{w}|^{2^*(k)-2} \tilde{w} \quad (5.15)$$

Preuve : D'après la Proposition 5.1.8 il existe une orbite de concentration Gx_1 pour v_ϵ , et par suite Gx_0 est dite une orbite de concentration tel que $\dim Gx_0 = k$. En utilisant notre hypothèse 5.0.1, on peut trouver $\delta_0 > 0$, et un sous groupe d'isométries G' de $\text{Isom}_g(M)$ qui satisfait (H_1) et (H_2) sur $B_{2\delta}(Gx_0)$. Par suite, pour tout $t > 0$ on pose :

$$\mu_\epsilon(t) = \max_{\bar{x} \in N} \int_{B_{\bar{x}}(t)} |\nabla \bar{v}_\epsilon|_{\bar{g}}^2 dv_{\bar{g}}$$

Comme vue dans la Proposition 5.1.8, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que, à une sous suite près,

$$\mu_\epsilon(\delta_0) \geq \int_{B_{\bar{x}_0}(\delta_0)} |\nabla \bar{v}_\epsilon|_{\bar{g}}^2 dv_{\bar{g}} \geq \lambda_0$$

Or μ_ϵ est continue alors pour toute $\lambda \in]0; \lambda_0[$, on peut trouver $t_\epsilon \in]0; \delta_0[$ et $\bar{x}_\epsilon \in N$ tel que $\bar{x}_\epsilon \rightarrow \bar{x}_0$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Alors, on a pour tout ϵ

$$\mu_\epsilon(t_\epsilon) = \max_{\bar{x} \in N} \int_{B_{\bar{x}_\epsilon}(t_\epsilon)} |\nabla \bar{v}_\epsilon|_{\bar{g}}^2 dv_{\bar{g}} = \lambda$$

Par la Proposition 5.1.10, on sait que \bar{v}_ϵ est une suite de Palais-Smale pour $(I_{\bar{g}})$. D'après Saintier [39], il existe une suite $R_\epsilon \rightarrow +\infty$ et $\tilde{w} \in D_1^2(\mathbb{R}^{n-k})$ le complété de $C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-k})$

pour la norme $u \mapsto \|\nabla u\|_2$, tel que :

$$\tilde{v}_\epsilon \rightarrow \tilde{w} \text{ localement dans } H_1^2(\mathbb{R}^{n-k}) \text{ et } \tilde{w} \neq 0 \quad (5.16)$$

Il nous reste donc à montrer que \tilde{w} vérifie l (5.15). Pour cela, soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-k})$, et $R > 0$ tel que $\text{supp}\phi \subset B_0(R)$. Pour tout ϵ assez petit, on définit $\phi_\epsilon \in C_c^\infty(N)$ par :

$$\phi_\epsilon(\bar{x}) = R_\epsilon^{\frac{n-k-2}{2}} \phi(R_\epsilon(\exp_{\bar{x}_\alpha}^{-1}(\bar{x})))$$

C'est simplement vu que ϕ_ϵ est borné dans $H_1^2(N)$. D'autre part, on a

$$o(1) = \langle I_{\tilde{g}}(\tilde{v}_\epsilon), \phi_\epsilon \rangle = \int_{B_0(R)} (\nabla \tilde{v}_\epsilon, \nabla \phi) dv_{\tilde{g}_\epsilon}$$

Où \tilde{g}_α est la métrique définie sur la boule Euclidienne $X \in B_0(R_\epsilon \delta) \subset \mathbb{R}^{n-k}$, pour tout $\delta \in]0, \frac{i_{\tilde{g}}(\bar{x}_0)}{2}[$, où $i_{\tilde{g}}(\bar{x}_0)$ est le rayon d'injectivité de (N, \tilde{g}) au point \bar{x}_0 par :

$$\tilde{g}_\epsilon(X) = (\exp_{\bar{x}_\epsilon}^* \tilde{g})(R_\alpha^{-1} X)$$

Comme $R_\epsilon \rightarrow +\infty$ alors \tilde{g}_ϵ converge vers la métrique Euclidienne ξ localement uniformément. Alors, passons à la limite et utilisons (5.16), on aura :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-k}} (\nabla v, \nabla \phi)_\xi dx - \bar{f}(\bar{x}_0) \bar{v}(\bar{x}_0)^{-\frac{2}{n-k-2}} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} |v|^{2^*(k)-2} v \phi dx$$

alors \tilde{w} est une solution faible de notre système. D'autre part, en utilisant des théorème de régularité standard pour les opérateur elliptique comme le théorème vue dans la proposition 3.5.4, on termine la preuve de notre proposition □

Théorème 5.1.12. [Saintier [40]] *On se donne (M, g) et G qui vérifient les hypothèses de la Proposition 5.1.8. En particulier, l'hypothèse 5.0.1 a lieu. Soit le fonctionnelle I_g , défini sur $H_{1,G}^2(M)$ par*

$$I_g(u) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla u|^2 dv_g - \frac{1}{2^*(k)} \int_M f|u|^{2^*(k)} dv_g$$

Supposons que $(v_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est une suite de Palais-Smale de I_g , tel qu'elle converge faiblement vers 0 dans dans $H_1^2(M)$ et pas fortement. Alors il existe une bulle généralisé

$(B_\epsilon) = B$ tel que $w_\epsilon := v_\epsilon - B_\epsilon$ est une suite de Palais-Smale pour I_g qui converge faiblement vers 0 dans $H_1^2(M)$. De plus $I_g(w_\epsilon) = I_g(v_\epsilon) - E(B) + o(1)$

Preuve : Notons que les fonctions $C_G^\infty(M)$ sont denses dans $H_{1,G}^2(M)$, alors on peut supposer que v_ϵ est lisse. D'autre part v_ϵ ne converge pas fortement vers 0 dans $H_1^2(M)$, il existe $\beta_0 > 0$ tel que :

$$\int_M |\nabla v_\epsilon|_g^2 dv_g = \beta_0 + o(1) \quad (5.17)$$

D'autre part, $\langle I'_g(v_\epsilon), v_\epsilon \rangle = o(1)$, donc on a

$$\int_M f|v_\epsilon|^{2^*(k)} dv_g = \beta_0 + o(1) \quad (5.18)$$

L'orbite Gx_0 dans ce cas est une orbite de concentration, par suite utilisons la Proposition 5.1.10, (\bar{v}_ϵ) est une suite de Palais-Smale pour la fonctionnelle $(I_{\bar{g}})$ définie sur $H_1^2(N)$ par :

$$I_{\bar{g}}(\bar{u}) = \frac{1}{2} \int_N |\nabla \bar{u}|_{\bar{g}}^2 dv_{\bar{g}} - \frac{1}{2} \int_N \bar{f} |\bar{u}|^{2^*} \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} dv_{\bar{g}}$$

où $N = B_{\delta_0}(Gx_0)/G'$. D'autre part, par la Proposition 5.1.11, il existe une suite $\bar{x}_\epsilon \in N$, et une suite $R_\epsilon \rightarrow +\infty$ tel que pour $\delta > 0$ assez petit, la suite $\tilde{v}_\epsilon = R_\epsilon^{-\frac{n-k-2}{2}} \bar{v}_\epsilon(\exp_{\bar{x}_\epsilon}(R_\epsilon^{-1}X))$ définie pour tout $X \in B_0(R_\epsilon\delta) \subset \mathbb{R}^{n-k}$ converge localement fortement dans $H_1^2(\mathbb{R}^{n-k})$ vers \tilde{w} , où \tilde{w} vérifie $\Delta_\xi \tilde{w} = f(x_0) Vol(Gx_0)^{-\frac{2}{n-k-2}} |\tilde{w}|^{2^*(k)-2} \tilde{w}$. Soient maintenant $\delta > 0$ assez petit, et $\bar{B}_\epsilon(\bar{x}) = \eta_{\bar{x}_\epsilon, \delta}(\bar{x}) R_\epsilon^{\frac{n-k-2}{2}} \tilde{w}(R_\epsilon \exp_{\bar{x}_\epsilon}^{-1}(\bar{x}))$ et on pose $\bar{w}_\epsilon = \bar{v}_\epsilon - \bar{B}_\epsilon$. Alors par Saintier [39], on a que \bar{B}_ϵ converge faiblement vers 0 dans $H_1^2(N)$ et plus $I'_g(\bar{B}_\epsilon + \bar{w}_\epsilon)$ converge fortement vers 0 dans le dual de $H_1^2(N)$, de plus

$$I_{\bar{g}}(\bar{w}_\epsilon) = I_{\bar{g}}(\bar{v}_\epsilon) - E(\tilde{w}) + o(1) \quad (5.19)$$

où

$$E(\tilde{w}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} |\nabla \tilde{w}|_\xi^2 dX - \frac{f(x_0) \bar{v}(\bar{x}_0)^{-\frac{2}{n-k-2}}}{2^*(k)} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} |\tilde{w}|^{2^*(k)} dx$$

On définit la bulle (B_ϵ) par la relation $B_\epsilon = \bar{B}_\epsilon \circ \Pi$ et $w_\epsilon = v_\epsilon - B_\epsilon$. On montre que

$B_\epsilon \rightharpoonup 0$ car $v_\epsilon \rightharpoonup 0$, or comme B_ϵ est bornée dans $H_{1,G'}^2(M)$ alors il suffit de montrer que $B_\epsilon \rightharpoonup 0$ dans $L^2(M)$.

Soit $\psi \in L_{G'}^2(M)$, et $\bar{\psi} \in L^2(N, \tilde{g})$ tel que $\psi = \bar{\psi} \circ \Pi$ dans $B_{2\delta}(Gx_0)$. Par la convergence faible de \bar{B}_ϵ vers 0 dans le dual de $H_1^2(N)$, on a

$$\int_M B_\epsilon \psi dv_g = \int_N \bar{B}_\epsilon \bar{\psi} \bar{v}_\epsilon^{-\frac{2}{n-k-2}} dv_{\tilde{g}} \rightarrow 0$$

Par suite B_ϵ converge faiblement vers 0 dans $L_{G'}^2(M)$, et comme B_ϵ est bornée dans $H_{1,G}^2(M)$, alors elle converge faiblement vers 0 dans $H_1^2(M)$. Par suite on a

$$w_\epsilon \rightharpoonup 0 \text{ dans } H_1^2(M) \tag{5.20}$$

D'autre part, soit $\phi \in H_{1,G}^2(M)$, $\delta \in]0; \delta_0[$ et $\eta_0 \equiv \eta_{\bar{x}_0, 3\delta} \in C_c^\infty(B_{6\delta}(Gx_0))$. Pour ϵ assez petit tel que $d_{\tilde{g}}(\bar{x}_0; \bar{x}_\epsilon) < \delta$, alors on a :

$$\begin{aligned} \langle I'_g(w_\epsilon), \phi \rangle &= \langle I'_g(w_\epsilon), (\eta_0 \phi) \rangle + \langle I'_g(w_\epsilon), ((1 - \eta_0)\phi) \rangle \\ &= \langle I'_{\tilde{g}}(\bar{w}_\epsilon), (\eta_0 \bar{\phi}) \rangle + \langle I'_g(v_\epsilon), ((1 - \eta_0)\phi) \rangle \\ &= o\left(\|\eta_0 \bar{\phi}\|_{H_1^2(N)}\right) + o\left(\|(1 - \eta_0)\phi\|_{H_1^2(M)}\right) \\ &= o\left(\|\phi\|_{H_1^2(M)}\right) \end{aligned}$$

On pose :

$$\phi_G = \int_G \phi(\sigma x) d\sigma$$

où σ est la mesure de probabilité de Haar sur G , alors :

$$\begin{aligned} o(1)\|\phi_G\|_{H_1^2(M)} &= \langle I'_g(w_\epsilon), \phi_G \rangle \\ &= \int_G \left(\int_M (\nabla w_\epsilon; \nabla(\phi \circ \sigma)) dv_g \right) d\sigma - \int_G \left(\int_M f|w_\epsilon|^{2^*-2} w_\epsilon (\phi \circ \sigma) dv_g \right) d\sigma \\ &= m(G) \langle I'_g(w_\epsilon), \phi \rangle \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, on a :

$$\|\phi_G\|_{H_1^2}^2 = \int_M \left| \int_G \nabla(\phi \circ \sigma) d\sigma \right|^2 dv_g + \int_M \left| \int_G (\phi \circ \sigma) d\sigma \right|^2 dv_g \leq \|\phi\|_{H_1^2(M)}^2$$

Par conséquence $\langle I'_g(w_\epsilon), \phi \rangle = o(1) \|\phi\|_{H_1^2(M)}$, alors w_ϵ est une suite de Palais-Smale de I_g . D'autre part en utilisant (5.19) on a

$$\begin{aligned} & I_g(w_\epsilon) \\ &= \frac{1}{2} \int_{M \setminus B_{2\delta}(Gx_0)} |\nabla v_\epsilon|_g^2 dv_g - \frac{1}{2^*(k)} \int_{M \setminus B_{2\delta}(Gx_0)} f |v_\epsilon|^{2^*(k)} dv_g \\ &\quad + I_{\tilde{g}}(\tilde{v}_\epsilon) - E(\tilde{w}) + o(1) \\ &= I_g(v_\epsilon) - E(\tilde{w}) + o(1) \end{aligned}$$

En rappelons que $\tilde{w} \not\equiv 0$, cela termine le preuve du théorème. □

5.2 Décomposition H_1^2

On se donne les fonctionnelles suivantes :

$$I_g^\epsilon(u) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + \frac{1}{2} \int_M h_\epsilon |u|^2 dv_g - \frac{1}{2^*(k)} \int_M f |u|^{2^*(k)} dv_g \quad (5.21)$$

$$I_g^0(u) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + \frac{1}{2} \int_M h_0 |u|^2 dv_g - \frac{1}{2^*(k)} \int_M f |u|^{2^*(k)} dv_g \quad (5.22)$$

Et posons (u_ϵ) une suite de Palais-Smale de I_g^ϵ

Lemme 5.2.1. *Pour tout $p >$, il existe $\theta = \theta(p) \in]0, 1[$ et $c = c(p) > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^*$ on a*

$$\begin{aligned} & \left| |x + y|^{p-2}(x + y) - |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y \right| \leq c \left(|x|^{p-1-\theta}|y|^\theta + |y|^{p-1-\theta}|x|^\theta \right) \\ & \left| |x + y|^p - |x|^p - |y|^p \right| \leq c \left(|x|^{p-\theta}|y|^\theta + |y|^{p-\theta}|x|^\theta \right) \end{aligned}$$

Preuve : Le preuve de ce Lemme est identique au preuve de le Lemme 4.1.1 □

Théorème 5.2.2 (Saintier [40]). *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension n et soit G un sous-groupe d'isométries de G dont les orbites sont de dimension minimale $k \geq 1$. On suppose que $n - k \geq 3$ et que l'hypothèse 5.0.1 a lieu. Soit $(u_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ une suite de solutions G -invariantes de (E_ϵ) bornée dans $H_1^2(M)$. Alors il existe $u_0 \in H_{1;G}^2(M)$ tel que $u_0 \equiv 0$ ou $u_0 > 0$ solution de (E_0) . De plus il existe l bulles $B^i = (B_\epsilon^i)$, $i = 1; \dots; l$ tel que, à une sous suite près,*

$$u_\alpha = u_0 + \sum_{i=1}^l B_\epsilon^i + S_\alpha \quad (5.23)$$

où $S_\alpha \rightarrow 0$ fortement dans $H_1^2(M)$ et

$$I_g^\epsilon(u_\epsilon) = I_g^0(u_0) + \sum_{i=1}^l E(B^i) + o(1) \quad (5.24)$$

où les fonctionnelles I_g^α et I_g^∞ sont définies sur $H_1^2(M)$ par (5.21) et (5.22), et l'énergie de bulles $E(B^i)$ est définie par (5.5).

Preuve : le preuve est faite par étapes

Étape 1 On montre que pour toute suite $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ de Palais-Smale pour I_g^ϵ au niveau β , où $\beta \in \mathbb{R}$, on a (u_N) est bornée dans $H_1^2(M)$.

En effet on a

$$\frac{1}{2} \int_M |\nabla u_N|_g^2 dv_g + \frac{1}{2} \int_M h_\epsilon u_N^2 dv_g - \frac{1}{2^*(k)} \int_M f |u_N|^{2^*(k)} dv_g = \beta + o(1)$$

On pose $\|u\| = \sqrt{\int_M (|\nabla u|^2 + h_\epsilon u^2) dv_g}$, et on note $a_N := \|u_N\|^2$ et $b_N := \int_M f |u_N|^{2^*(k)} dv_g$, alors :

$$\frac{1}{2} a_N - \frac{1}{2^*(k)} b_N = \beta + o(1) \quad (5.25)$$

D'autre part $D(I_g^\epsilon)(u_N) \rightarrow 0$, alors pour tout $\phi \in H_1^2(M)$, on a

$$|\langle D(I_g^\epsilon)(u_N), \phi \rangle| \leq \|D(I_g^\epsilon)(u_N)\|_{H_1^2(M)} \cdot \|\phi\|_{H_1^2(M)}$$

Par suite

$$|\langle D(I_g^\epsilon)(u_N), u_N \rangle| \leq \|D(I_g^\epsilon)(u_N)\|_{H_1^2(M)} \cdot \|u_N\|_{H_1^2(M)} = o(\|u_N\|_{H_1^2(M)})$$

Et on a : $D(I_g^\epsilon)(u_N)[u_N] = \|u_N\|^2 - \int_M f|u_N|^{2^*(k)} dv_g$ Donc

$$a_N = b_N + o(\|u_N\|) \quad (5.26)$$

En groupant (5.25) et (5.26) on arrive a montrer que a_k et b_k sont bornés et par conséquence u_N est borné dans $H_1^2(M)$.

Étape 2 . Soit $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ une suite de Palais-Smale pour I_g^ϵ tel que u_ϵ converge faiblement vers u_0 dans $H_1^2(M)$ alors u_0 est une solution de l'équation limite (E_0)

Par la définition d'une suite de Palais-Smale, on sait que pour toute $\phi \in C_c^\infty(M)$:

$$\int_M \langle \nabla u_\epsilon, \nabla \phi \rangle dv_g + \int_M h_\epsilon u_\epsilon \phi dv_g - \int_M f|u_\epsilon|^{2^*(k)-2} u_\epsilon \phi dv_g = o(1) \quad (5.27)$$

Or $u_\epsilon \rightharpoonup u_0$ dans $H_1^2(M)$, alors par l'injection continue de l'espace de Sobolev $H_1^2(M)$ dans $L^2(M)$, et quitte à remplacer u_ϵ par une sous suite on peut supposer que u_ϵ converge vers u_0 presque pour tout $x \in M$ et aussi dans $L^2(M)$. Par suite passons à la limite dans (5.27) on aura :

$$\int_M \langle \nabla u_0, \nabla \phi \rangle dv_g + \int_M h_0 u_0 \phi dv_g - \int_M f|u_0|^{2^*(k)-2} u_0 \phi dv_g = 0$$

Et ceci est vrai $\forall \phi \in C_c^\infty(M)$. En particulier u_0 est solution faible de l'équation limite (E_0), et de plus, comme le convergence est presque pour tout $x \in M$, alors $u_0 \in H_{1,G}^2(M)$

Étape 3 Soit u_ϵ une suite de Palais-Smale pour I_g^ϵ tel que u_ϵ converge faiblement dans $H_1^2(M)$ vers u_0 , et posons $v_\epsilon = u_\epsilon - u_0$ donc v_ϵ est une suite de Palais-Smale pour I_g et de plus

$$I_g(v_\epsilon) = I_g^\epsilon(u_\epsilon) - I_g^\infty(u_0) + o(1)$$

On a :

$$I_g^\epsilon(u_\epsilon) = I_g^\epsilon(u_0) + I_g(v_\epsilon) + \frac{1}{2} \int_M (|\nabla(v_\epsilon + u_0)|_g^2 - |\nabla u_0|_g^2 - |\nabla v_\epsilon|_g^2) dv_g \quad (\text{A})$$

$$+ \frac{1}{2} \int_M h_\epsilon (|v_\epsilon + u_0|^2 - |u_0|^2) dv_g \quad (\text{B})$$

$$- \frac{1}{2^{*(k)}} \int_M f (|v_\epsilon + u_0|^{2^{*(k)}} - |v_\epsilon|^{2^{*(k)}} - |u_0|^{2^{*(k)}}) dv_g \quad (\text{C})$$

Mais v_ϵ converge fortement vers 0 dans $L^2(M)$, alors $B \rightarrow 0$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. D'autre part d'après l'étape précédente, on a que u_0 est une solution de l'équation limite (E_0). Par suite, en appliquant le lemme de Brezis-Lieb [8], on peut déduire que A et C converge vers 0, alors :

$$I_g^\epsilon(u_\epsilon) = I_g^\epsilon(u_0) + I_g(v_\epsilon) + o(1)$$

Notons que $I_g^0(u_0) = I_g^\epsilon(u_0) + o(1)$ alors $I_g(v_\epsilon) = I_g^\epsilon(u_\epsilon) - I_g^\infty(u_0) + o(1)$ est borné, et il nous reste de montrer que $DI_g(v_\epsilon)$ converge vers 0 dans le dual de $H_1^2(M)$. Soit $\phi \in C_c^\infty(M)$, comme on a u_0 est une solution faible de (E_0) :

$$\begin{aligned} \langle DI_g^\epsilon(u_\epsilon), \phi \rangle - \langle DI_g(v_\epsilon), \phi \rangle &= - \int_M f \psi_\epsilon \phi dv_g + \int_M \langle \nabla u_\epsilon, \nabla \phi \rangle dv_g \\ &\quad - \int_M \langle \nabla v_\epsilon, \nabla \phi \rangle dv_g + \int_M h_\epsilon u_\epsilon \phi dv_g \\ &\quad - \int_M f |u_0|^{2^{*(k)}-2} u_0 \phi dv_g \\ &= - \int_M f \psi_\epsilon \phi dv_g + \int_M \langle \nabla u_\epsilon, \nabla \phi \rangle dv_g \\ &\quad - \int_M \langle \nabla v_\epsilon, \nabla \phi \rangle dv_g + \int_M h_\epsilon u_\epsilon \phi dv_g \\ &\quad - \int_M h_0 u_0 \phi dv_g - \int_M \langle \nabla u_0, \nabla \phi \rangle dv_g \\ &= \int_M \langle \nabla(u_\epsilon - v_\epsilon - u_0), \nabla \phi \rangle dv_g \\ &\quad - \int_M f \psi_\epsilon \phi dv_g + \int_M h_\epsilon u_\epsilon \phi dv_g - \int_M h_0 u_0 \phi dv_g \end{aligned}$$

où $\psi_\epsilon = |v_\epsilon + u_0|^{2^*(k)-2}(v_\epsilon + u_0) - |v_\epsilon|^{2^*(k)-2}v_\epsilon - |u_0|^{2^*(k)-2}u_0$. Appliquons le Lemme 5.2.1, on trouve $c > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$:

$$|\psi_\epsilon| \leq c \left(|v_\epsilon|^{2^*(k)-1-\theta} |u_0|^\theta + |u_0|^{2^*(k)-1-\theta} |v_\epsilon|^\theta \right)$$

En utilisant Hölder, :

$$\begin{aligned} \left| \int_M f \psi_\epsilon \phi dv_g \right| &\leq \|f\|_\infty \left(\int_M |\psi_\epsilon|^{\frac{2^*(k)}{2^*(k)-1}} dv_g \right)^{\frac{2^*(k)-1}{2^*(k)}} \left(\int_M \phi^{2^*(k)} dv_g \right)^{\frac{1}{2^*(k)}} \\ &\leq c \|f\|_\infty \|\phi\|_{2^*(k)} \left(\| |v_\epsilon|^{2^*(k)-1-\theta} |u_0|^\theta \|_{\frac{2^*(k)}{2^*(k)-1}} \right. \\ &\quad \left. + \| |u_0|^{2^*(k)-1-\theta} |v_\epsilon|^\theta \|_{\frac{2^*(k)}{2^*(k)-1}} \right) \end{aligned}$$

Par suite en utilisant le théorème de convergence dominé de Lebesgue, et l'injection continue de Sobolev de l'espace $H_{1,G}^2(M)$ dans $L^{2^*(k)}(M)$, on aura :

$$\int_M f \psi_\epsilon \phi dv_g = o(1) \|\phi\|_{2^*(k)} = o(1) \|\phi\|_{H_1^2(M)}$$

et

$$\int_M (h_\epsilon u_\epsilon - h_0 u_0) \phi dv_g = o(1) \|\phi\|_{H_1^2(M)}$$

Notons que par le théorème de convergence dominé de Lebesgue, on a que

$$\int_M \langle \nabla(u_\epsilon - v_\epsilon - u_0), \nabla \phi \rangle dv_g = o(1)$$

Par suite $\langle DI_g^\epsilon(u_\epsilon), \phi \rangle - \langle DI_g(v_\epsilon), \phi \rangle = o(1) \|\phi\|_{H_1^2(M)}$, et par le fait que u_ϵ est une suite de Palais-Smale pour (I_g) , on aura v_ϵ l'est aussi.

Étape 4 On montre que pour tout $(w_\epsilon)_{\epsilon>0}$ une suite de Palais-Smale pour (I_g) , qui converge faiblement vers 0 dans $H_1^2(M)$ et tel que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_g(w_\epsilon) < \|f\|_\infty^{-\frac{n-k-2}{2}} A\beta^*$ où $\beta^* = \frac{1}{(n-k)K_0(n-k)^{(n-k)/2}}$ alors w_ϵ converge fortement vers 0 dans $H_1^2(M)$. Soit w_ϵ une suite de Palais Smale pour (I_g) au niveau β , qui vérifie $\beta < \|f\|_\infty^{-\frac{n-k-2}{2}} A\beta^*$. Alors $\langle DI_g(w_\epsilon), w_\epsilon \rangle = \int_M |\nabla w_\epsilon|^2 dv_g - \int_M f |w_\epsilon|^{2^*(k)} dv_g = o(1)$ et $I_g(w_\epsilon) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla w_\epsilon|^2 dv_g - \frac{1}{2^*(k)} \int_M f |w_\epsilon|^{2^*(k)} dv_g = \beta + o(1)$. En combinant ces 2 égalités

on déduit que :

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla w_\epsilon|^2 dv_g &= (n-k)\beta + o(1) \\ \int_M f |w_\epsilon|^{2^*(k)} dv_g &= (n-k)\beta + o(1) \end{aligned} \quad (5.28)$$

En particulier $\beta \geq 0$, et de plus d'après l'injection continue et compacte de l'espace de Sobolev $H_{1,G}^2(M)$ dans $L^2(M)$, on a w_ϵ converge fortement vers 0 dans $L^2(M)$. En utilisant l'inégalité de Sobolev en présence d'isométries de Faget [17], on aura que pour tout $\alpha > 0$ il existe $C_\alpha \geq 0$ tel que

$$\|w_\epsilon\|_{2^*(k)}^2 \leq \left(\frac{K(n-k)^2}{A^{\frac{2}{n-k}}} + \alpha \right) \int_M |\nabla w_\epsilon|^2 dv_g + C_\alpha \int_M |w_\epsilon|^2 dv_g$$

Utilisons le fait que $(\int_M f |w_\epsilon|^{2^*(k)} dv_g)^{\frac{2}{2^*(k)}} \leq (\|f\|_\infty \int_M |w_\epsilon|^{2^*(k)} dv_g)^{\frac{2}{2^*(k)}}$ avec l'inégalité précédente, après passons à la limite de ϵ dans la deuxième inégalité de (5.28), nous obtenons que pour tout $\alpha > 0$, on a :

$$((n-k)\beta)^{\frac{2}{2^*(k)}} \leq \|f\|_\infty^{\frac{2}{2^*(k)}} \|w_\epsilon\|_{2^*(k)}^2 \leq \|f\|_\infty^{\frac{n-k-2}{n-k}} \left(\frac{K_0(n-k)}{A^{\frac{2}{n-k}}} + \alpha \right) (n-k)\beta$$

On suppose pour le moment que $\beta > 0$, Alors et on utilise notre hypothèse sur β pour vérifier que

$$((n-k)\beta)^{\frac{-2}{n-k}} \leq \|f\|_\infty^{\frac{n-k-2}{n-k}} \left(\frac{K_0(n-k)}{A^{\frac{2}{n-k}}} + \alpha \right)$$

Ceci est vrai pour tout $\alpha > 0$, alors passons à la limite lorsque $\alpha \rightarrow 0$, on aura

$$\begin{aligned} K_0(n-k) &= ((n-k)\beta^*)^{\frac{-2}{n-k}} \\ &< \left((n-k)\beta \frac{\|f\|_\infty^{\frac{n-k-2}{2}}}{A} \right)^{\frac{-2}{n-k}} \\ &\leq ((n-k)\beta)^{\frac{-2}{n-k}} \|f\|_\infty^{-\frac{n-k-2}{n-k}} A^{\frac{2}{n-k}} \\ &\leq K_0(n-k) \end{aligned}$$

C'est une contradiction, alors $\beta = 0$. En remplaçant β par sa valeur dans la pre-

mière égalité de (5.28), on prouve la convergence forte de w_ϵ vers 0 dans $H_1^2(M)$

Étape 5 . Soit (u_ϵ) une suite de Palais-Smale de I_g^ϵ au niveau $c \in \mathbb{R}$, définie comme dans notre théorème. Par la première étape u_ϵ est bornée dans $H_1^2(M)$, alors il existe u_0 tel que à sous suite près :

$$\begin{aligned} u_\epsilon &\rightharpoonup u_0 && \text{faiblement dans } H_1^2(M) \\ u_\epsilon &\longrightarrow u_0 && \text{fortement dans } L^2(M) \\ u_\epsilon &\longrightarrow u_0 && \text{presque pour tout } x \in M \end{aligned}$$

Or, par la deuxième étape, on peut vérifier que u_0 est une solution faible de (E_0) . Notons que, en utilisant des résultats de régularité pour les solutions des EDP elliptique comme celle vue dans le chapitre 3, on arrive à montrer que u_0 est une solution forte de (E_0) , et de plus par le principe de max [?] on peut vérifier que $u_0 \equiv 0$ ou $u_0 > 0$. On utilise la troisième étape pour vérifier que $v_\epsilon := u_\epsilon - u_0$ est une suite de Palais-Smale pour (I_g) qui vérifie

$$I_g(v_\epsilon) = I_g^\epsilon(u_\epsilon) - I_g^0(u_0) + o(1) = c - I_g^0(u_0) + o(1)$$

Supposons maintenant que $c - I_g^\infty(u_0) < \|f\|_\infty^{-\frac{n-k-2}{2}} A\beta^*$, alors par la quatrième étape on a que v_ϵ converge fortement vers 0 dans $H_1^2(M)$. Si $c - I_g^\infty(u_0) \geq \|f\|_\infty^{-\frac{n-k-2}{2}} A\beta^*$, alors par le Théorème 5.1.12, on peut trouver (v_ϵ^1) une suite de Palais-Smale de (I_g) , qui converge faiblement vers 0 dans $H_1^2(M)$ et

$$I_g(v_\epsilon^1) = I_g(v_\epsilon) - E(\tilde{w}) + o(1)$$

Où \tilde{w} vérifie $\Delta \tilde{w} = f(x_0)(\text{vol}G(x_0))^{-\frac{2}{n-k-2}} |\tilde{w}|^{2^*(k)-2} \tilde{w}$. D'autre part, en utilisant la Proposition 5.1.4 on aura que : on sait que :

$$E(\tilde{w}) \geq f(x_0)^{-\frac{n-k-2}{2}} (\text{vol}G(x_0))\beta^*$$

Et par suite :

$$I_g(v_\epsilon^1) \leq I_g(v_\epsilon) - \|f\|_\infty^{-\frac{n-k-2}{2}} A\beta^* + o(1)$$

Si maintenant , $c - I_g^\infty(u_0) < 2\|f\|_\infty^{-\frac{n-k-2}{2}} A\beta^*$, on applique une autre fois la

quatrième étape pour montrer que v_ϵ^1 converge fortement vers 0 dans $H_1^2(M)$, donc (5.23) et (5.24) sont vrais pour $l = 1$. Si non, on répète le travail une autre fois jusqu'à qu'on arrive à vérifier (5.23) et (5.24) pour un certain $l > 1$

□

5.3 Estimation dans $C(M)$

Théorème 5.3.1 (Saintier [40]). *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension n et soit G un sous-groupe fermé d'isométries de (M, g) . On suppose que l'hypothèse 5.0.1 a lieu et on note $k := \min_x \dim Gx$. Soit $(u_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ une suite de solutions G -invariantes de (E_ϵ) bornée dans $H_1^2(M)$ qui converge faiblement vers u_0 solution de (E_0) . On note pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$, le groupe G'_i donné par l'hypothèse 3.1.1 sur l'orbite de concentration Gx_0^i . Alors il existe $C > 0$ indépendant de ϵ et x , tel que pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $x \in M$:*

$$v_\epsilon(x) := R'_\epsilon(x)^{\frac{n-k-2}{2}} u_\epsilon(x) \leq C, \quad (5.29)$$

avec

$$R'_\epsilon(x) = \min_{i=1, \dots, l} d_g(G'_i x, G'_i x_\epsilon^i)$$

De plus

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in M \setminus \Omega_\epsilon(R)} R_\epsilon(x)^{\frac{n-k-2}{2}} |u_\epsilon(x) - u_0(x)| = 0 \quad (5.30)$$

où (x_ϵ^i) et (μ_ϵ^i) sont les centres et les inverses de poids des bulles (B_ϵ^i) tel que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x_\epsilon^i = x_0^i$, $R_\epsilon(x) = \min_{i=1, \dots, l} d_g(Gx_\epsilon^i; Gx)$ et pour $R > 0$ on définit $\Omega_\epsilon(R) = \bigcup_{i=1}^l B_{Gx_\epsilon^i}(R\mu_\epsilon^i)$

Preuve : Nous supposons par contradiction qu'il existe $y_\epsilon \in M$ tel que

$$v_\epsilon(y_\epsilon) = \max_{x \in M} v_\epsilon(x) \rightarrow +\infty \quad (5.31)$$

5.3 ESTIMATION DANS C(M)

lorsque $\epsilon \rightarrow +\infty$ et on laisse $\mu_\epsilon := u_\epsilon(y_\epsilon) \frac{-2}{n-k-2} \rightarrow 0$ quand $\epsilon \rightarrow +\infty$. Soit $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} y_\epsilon = y_0$. Nous affirmons que l'orbite Gy_0 a une dimension minimale k . En effet, nous procédons par contradiction et supposons que $\dim Gy_0 > k$. Comme à l'étape , nous avons qu'il existe $q_0 > 2^*(k)$ et $\delta > 0$ tels que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon = u^0$ dans $L^{q_0}(B_{Gy_0}(\delta))$. Il découle ensuite de (E_ϵ) et de la théorie de la régularité standard que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon = u^0$ dans $C^0(B_{Gy_0}(\delta'))$ pour tout $\delta' < \delta$. Ce qui est contradictoire avec (5.31).

On suppose alors que G' est le groupe donné par l'hypothèse 5.0.1 au point y_0 . Soit $I_0 = \{i \in \{1, \dots, l\} / x_\infty^i \in Gy_0\}$ (notons que I_0 peut être vide). Ensuite, pour tout $i \in I_0$, on a que $G' = G'_i$. Nous considérons $N := B_{G'y_0}(\delta)/G'$ où $\delta > 0$ assez petit donné par notre hypothèse. Ici encore nous considérons la fonction $\bar{u}_\epsilon(\bar{x}) = u_\epsilon(x)$ pour $\bar{x} \in N$. On fixe $R_0 \in (0, i_{\bar{g}}(\bar{y}_0))$ et nous considérons la fonction w_ϵ définie sur la boule euclidienne $B_0(R_0\mu_\epsilon^{-1})$ par

$$w_\epsilon(x) := \mu_\epsilon^{\frac{n-k-2}{2}} \bar{u}_\epsilon(\exp_{\bar{y}_\epsilon}(\mu_\epsilon x)).$$

Étant donné que $i \in I_0$, nous obtenons que

$$\begin{aligned} d_g(G'z_\epsilon, G'x_\epsilon^i) &\geq d_g(G'x_\epsilon^i, G'y_\epsilon) - d_g(G'y_\epsilon, G'z_\epsilon) \\ &\geq R'_\epsilon(y_\epsilon) - d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon, \bar{z}_\epsilon) \\ &\geq R'_\epsilon(y_\epsilon) - \mu_\epsilon |x| \\ &\geq \left(1 - \frac{\rho\mu_\epsilon}{R'_\epsilon(y_\epsilon)}\right) R'_\epsilon(y_\epsilon). \end{aligned}$$

Par définition de y_ϵ et μ_ϵ , nous avons que $\mu_\epsilon R'_\epsilon(y_\epsilon)^{-1} \rightarrow 0$ quand $\epsilon \rightarrow 0$, et donc le côté droit de l'équation ci-dessus est positif. Dans le cas où $j \notin I_0$, nous obtenons que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} d_g((\mu_\epsilon x - \bar{y}_\epsilon), G'_i x_\epsilon^i) = d_g(G'_{y_0}, G'_i x_\infty^i) = d_g(G_{y_0}, G_i x_\infty^i) > 0 \in C_{loc}^0(\mathbb{R}^{n-k}).$$

Depuis le fait que $R'_\epsilon(y_\epsilon) \rightarrow 0$ quand $\epsilon \rightarrow 0$ nous obtenons que

$$R'_\epsilon((\mu_\epsilon x) - \bar{y}_\epsilon) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho\mu_\epsilon}{R'_\epsilon(y_\epsilon)}\right) R'_\epsilon(y_\epsilon) > 0$$

pour tout $x \in B_0(\rho)$ et pour tout $\epsilon > 0$. On peut alors écrire pour $x \in B_0(\rho)$ que

$$\begin{aligned} w_\epsilon(x) &= \frac{\mu_\epsilon^{\frac{n-k-2}{2}} v_\epsilon(z_\epsilon)}{R'_\epsilon(\exp_{\bar{y}_\epsilon}(\mu_\epsilon x))^{\frac{n-k-2}{2}}} \\ &\leq 2^{\frac{n-k-2}{2}} \left(1 - \frac{\rho\mu_\epsilon}{R'_\epsilon(y_\epsilon)}\right)^{-\frac{n-k-2}{2}} \frac{u_\epsilon(y_\epsilon)^{-1} v_\epsilon(y_\epsilon)}{R'_\epsilon(y_\epsilon)^{\frac{n-k-2}{2}}} \\ &\leq 2^{\frac{n-k-2}{2}} \left(1 - \frac{\rho\mu_\epsilon}{R'_\epsilon(y_\epsilon)}\right)^{-\frac{n-k-2}{2}} \end{aligned}$$

Uniformément pour $x \in B_0(\rho) \subset \mathbb{R}^{n-k}$ quand $\epsilon \rightarrow \infty$. Ainsi la séquence (w_ϵ) est uniformément borné sur chaque sous-ensemble compact de \mathbb{R}^{n-k} . Soit \bar{g}_ϵ le métrique Riemannienne sur \mathbb{R}^{n-k} définie par

$$\bar{g}_\epsilon(x) = \exp_{\bar{y}_\epsilon}^* \bar{g}(\mu_\epsilon x).$$

L'équation (E_ϵ) devient

$$-div_{\bar{g}_\epsilon}(\tilde{v}_\epsilon \nabla w_\epsilon) + \mu_\epsilon^2 \tilde{h}_\epsilon \tilde{v}_\epsilon w_\epsilon = \tilde{f}_\epsilon \tilde{v}_\epsilon w_\epsilon^{2^*(k)-1}$$

où $\tilde{h}_\epsilon(x) = \bar{h}_\epsilon(((\mu_\epsilon x) - \bar{y}_\epsilon))$, $\tilde{f}_\epsilon(x) = \bar{f}_\epsilon(((\mu_\epsilon x) - \bar{y}_\epsilon))$ et $\tilde{v}_\epsilon(x) = \bar{v}_\epsilon(\exp_{\bar{y}_\epsilon}(\mu_\epsilon x))$. Puisque, $\mu_\epsilon \rightarrow 0$ quand $\epsilon \rightarrow \infty$, la métrique \bar{g}_ϵ converge vers la métrique euclidienne ξ dans $C_{loc}^2(\mathbb{R}^{n-k})$ quand $\epsilon \rightarrow \infty$. Il s'ensuit alors de Tolksdorff [45] que, à extraction près, il existe $w \in C^{1,\theta}(\mathbb{R}^{n-k})$ tel que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} w_\epsilon = w \text{ dans } C_{loc}^{1,\theta}(\mathbb{R}^{n-k}).$$

Puisque $w_\epsilon(0) = 1$, on obtient que $w(0) = 1$ et ensuite $w \not\equiv 0$. On pose $R > 0$. D'autre part on a

$$\int_{B_0(R)} w_\epsilon^{2^*(k)} dv_{\bar{g}_\epsilon} = \int_{B_{y_\epsilon}(R\mu_\epsilon)} \bar{v}_\epsilon^{2^*} dv_{\bar{g}} = \int_{B_{G'_{y_\epsilon}}(R\mu_\epsilon)} Vol(G'x)^{-1} u_\epsilon^{2^*}(x) dv_g(x)$$

Par suite, on aura que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_{G'_{y_\epsilon}}(R_{\mu\epsilon})} u_\epsilon^{2^*} dv_g = Vol(Gy_0) \int_{B_0(R)} w^{2^*} dv_\xi > 0$$

Avec la décomposition H_2^1 du Théorème 5.2.2, nous obtenons alors que

$$\begin{aligned} 1 &\leq C \int_{B_{G'_{y_\epsilon}}(R_{\mu\epsilon})} \left(u_0 + \sum_{i=1}^l B_\epsilon^i + S_\epsilon \right)^{2^*} dv_g \\ &\leq C \sum_{i=1}^l \int_{B_{G'_{y_\epsilon}}(R_{\mu\epsilon})} (B_\epsilon^i)^{2^*} dv_g + o(1) \\ &\leq C \sum_{i \in I_0} \int_{B_{G'_{y_\epsilon}}(R_{\mu\epsilon})} (B_\epsilon^i)^{2^*} dv_g + o(1) \\ &\leq C \sum_{i \in I_0} \int_{B_{y_\epsilon}(R_{\mu\epsilon})} (\bar{B}_\epsilon^i)^{2^*} dv_{\bar{g}} + o(1) \end{aligned}$$

où, là encore, nous avons pris le quotient du groupe G' : c'est licite puisque nous travaillons aux points x_ϵ^i tels que $x_\epsilon^i = y_0$. On peut alors prouver exactement, comme dans Saintier [40], que le côté droit de cette inégalité va à 0 lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Ce qui prouve (5.29) par contradiction. La preuve de 5.30 procède d'une manière identique : si (5.30) n'est pas satisfait, alors on construit une suite (y_ϵ) . On "Blow-up" u_ϵ à y_ϵ et on obtient une contradiction comme avant. \square

Corollaire 5.3.2 (Saintier [40]). *On conserve les hypothèses du Théorème 5.3.1. Soit $(u_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ une suite positive de solutions G -invariantes de (E_ϵ) bornée dans $H_1^2(M)$ qui converge faiblement vers u_0 solution de (E_0) . Alors, il existe $C > 0$ tel que pour tout ϵ et tout $x \in M$,*

$$R_\epsilon(x)^{\frac{n-k-2}{2}} u_\epsilon(x) \leq C \tag{5.32}$$

où (x_ϵ^i) est comme définie dans le théorème précédent 5.3.1 et $R_\epsilon(x) = \min_{i=1, \dots, l} d_g(Gx_\epsilon^i; Gx)$

Preuve : la preuve va par contradiction et nous considérons une suite des points (y_ϵ) telle que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} R_\epsilon(x)^{\frac{n-k-p}{p}} u_\epsilon(y_\epsilon) = +\infty$$

. Avec des arguments similaires à ceux du Théorème 5.3.1, nous obtenons que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} y_\epsilon = y_0 \in M$$

telle que G_{y_0} est une orbite de concentration des u_ϵ . L'hypothèse 3.1.1 donne un groupe G_0 satisfaisant (H1) et (H2). Avec (H2), on obtient que $d_g(Gy_\epsilon, Gx_\epsilon^i) \leq d_g(G'y_\epsilon, G'x_\epsilon^i)$ pour un i tel que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x_\epsilon^i \in Gy_0$. En étudiant séparément les index i restants, nous obtenons que $R_\epsilon(y_\epsilon) \leq CR'_\epsilon(y_\epsilon)$ et nous appliquons (5.29) pour obtenir une contradiction avec notre hypothèse initiale. Cela prouve que (5.32) est vrai. \square

Corollaire 5.3.3. *On suppose que (u_ϵ) est tel que $I_g(u_\epsilon) = E_m + o(1)$ où $E_m = \frac{1}{n-k} K_0(n-k)^{(k-n)/2} \min \frac{Vol(Gx)}{f(x)^{\frac{n-k-2}{2}}}$ et $u_\alpha \rightarrow 0$ alors on peut vérifier simplement que $l = 1$ et que :*

$$\begin{aligned} u_\epsilon &= B_\epsilon^1 + S_\epsilon \\ I_g(u_\epsilon) &= E(B_\epsilon^1) + o(1) \end{aligned}$$

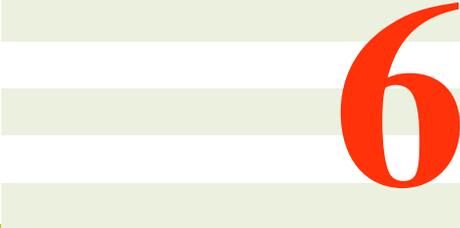
De plus :

$$d_g(Gx_\epsilon^1; Gx) \frac{n-k-2}{2} |u_\epsilon(x)| \leq c$$

Et :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in M \setminus B_{Gx_\epsilon^1}(R\mu_\epsilon^{\frac{1}{2}})} d_g(Gx_\epsilon^1; Gx) \frac{n-k-2}{2} |u_\epsilon(x)| = 0$$

Preuve : C'est une application directe des Théorèmes 5.3.1 et 5.2.2, et le corollaire 5.3.2 \square



6

Profile asymptotique et estimations ponctuelles

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte lisse de dimension n et sans bord. On note G un sous-groupe fermé d'isométries de M . On a vu au Chapitre 3 qu'il existe un ouvert Ω dense dans M tel que Ω/G est une variété lisse qu'on peut munir d'une distance Riemannienne \bar{g} tel que la surjection $\Omega \rightarrow \Omega/G$ est une submersion Riemannienne. On suppose que $k := \min_{x \in M} \dim G_x \geq 1$. En suivant une fois de plus les notations et hypothèses du Chapitre 3, on suppose :

Hypothèse 6.0.1. *Pour tout Gx_0 , un G -orbite de dimension minimale $k \geq 1$, on peut trouver $\delta > 0$, et G' un sous groupe fermé de $Isom_g(M)$ tel que :*

$$(H_1) : G'x_0 = Gx_0$$

Et pour tout $x \in B_\delta(Gx_0) := \{y \in M / d_g(y; Gx_0) < \delta\}$

$$(H_2) : G'x \text{ est principale, et } G'x \subset Gx$$

En particulier $\dim G'x = \dim Gx_0 = k, \forall x \in B_\delta(Gx_0)$.

On considère maintenant la $(n-k)$ variété Riemannienne quotient $N := B_\delta(Gx_0)/G'$. Cette variété est alors munie de la métrique \bar{g} et de la métrique

$$\tilde{g} = \bar{v}^{\frac{2}{n-k-2}} \bar{g}$$

avec $\bar{v}(\bar{x}) = \text{Vol}_g(G'x)$ pour tout $x \in M$. On note toujours $2^*(k) = \frac{2(n-k)}{n-k-2}$ pour $k \geq 1$ qui est un exposant critique pour l'injection de Sobolev de $H_1^{2,G}(M)$ dans $L^2(M)$ vue dans le chapitre 3. Soit $h_{\epsilon\epsilon} \in C^1(M)$ une suite de fonctions G -invariantes sur M telles qu'il existe $h_0 \in C^1(M)$ telle que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon = h_0 \text{ in } C^1(M) \quad (6.1)$$

On considère des équations du type

$$\Delta_g u + h_\epsilon u = \lambda_\epsilon u^{2^*(k)-1}, \quad \int_M u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 1 \quad (E_\epsilon)$$

Où $u \in C^2(M)$ doit être G -invariante et positive. La constante $\lambda_\epsilon \in \mathbb{R}$ sera discutée plus bas. Soit (u_ϵ) une suite de solution de (E_ϵ) de sorte que $u_\epsilon \in C^2(M)$, G -invariantes et

$$\Delta_g u_\epsilon + h_\epsilon u_\epsilon = \lambda_\epsilon u_\epsilon^{2^*(k)-1}, \quad \int_M u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 1$$

pour tout $\epsilon > 0$. L'existence d'une telle solution est prouvé dans Saintier [40] avec une suite de (h_ϵ) précis, mais nous décrivons dans ce papier la théorie pour le comportement d'explosion des u_ϵ lorsque l'énergie des u_ϵ est de type minimal. Comme dans le chapitre 5, nous supposons dans ce qui suit qu'il existe $0 < \theta < 1$ une fonction lisse G -invariant h_0 sur M telle que l'opérateur $\Delta_g + h_0$ est coercif et $h_\epsilon \rightarrow h_0$ dans $C^{1,\theta}$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. On voit facilement que (u_ϵ) est bornée dans $H_{1,G}^2$. On suppose tout au long de ce papier après passer à une sous-suite près que

$$u_\epsilon \rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } H_{1,G}^2(M) \quad (6.2)$$

On se trouve alors dans le cas du Corollaire 5.3.3.

Nous quotientons l'équation (E_ϵ) par notre groupe d'isométries G et multiplions notre système par $\phi \in C^\infty(N)$ à support compact et intégrons sur N par rapport à la métrique

\bar{g} on aura :

$$\int_N \bar{v} [(\nabla \bar{u}_\epsilon, \nabla \phi)_{\bar{g}} + \bar{h}_\epsilon \bar{u}_\epsilon] dv_{\bar{g}} = \int_N \bar{v} \lambda_\epsilon \phi \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1} dv_{\bar{g}}$$

Par suite

$$\int_N \bar{v} \left[\bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} (\nabla \bar{u}_\epsilon, \nabla \phi)_{\bar{g}} + \bar{h}_\epsilon \bar{u}_\epsilon \right] \bar{v}^{-\frac{n-k}{n-k-2}} dv_{\bar{g}} = \int_N \bar{v} \lambda_\epsilon \phi \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1} \bar{v}^{-\frac{n-k}{n-k-2}} dv_{\bar{g}}$$

Posons alors

$$\tilde{h}_\epsilon = \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \bar{h}_\epsilon \text{ et } \tilde{f}_\epsilon = \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \lambda_\epsilon. \quad (6.3)$$

Ainsi, sur (N, \tilde{g}) , on récupère le problème

$$\Delta_{\tilde{g}} \bar{u}_\epsilon + \tilde{h}_\epsilon \bar{u}_\epsilon = \tilde{f}_\epsilon \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1}, \quad \int_N \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)} dv_{\tilde{g}} = 1 + o(1) \quad (\tilde{E}_\epsilon)$$

On note dans ce qui suit A le volume minimal des orbites de dimensions k , et on rappelle la définition de la meilleure constante de Sobolev en présence d'isométries vue dans Faget [17] et dans le chapitre 3 par

$$K_0(n, k, A) = \frac{K_0(n-k)}{A^{\frac{2}{n-k}}} = \frac{K_0(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k)}}} \quad (6.4)$$

Ainsi, nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 6.0.2. *Pour tout $\epsilon > 0$, on suppose que*

$$\lambda_\epsilon \leq (K_0(n, k, A))^{-1} \quad (6.5)$$

Hypothèse 6.0.3. *Il existe $a \in C^{0,\alpha}(M)$, où $\alpha \in]0, 1[$, et $h > 0$ tel que pour tout $x \in M$*

$$0 < h \leq a(x) \leq h_\epsilon(x) \quad \text{et l'opérateur } \Delta_g + a \text{ est coercif} \quad (6.6)$$

L'équation (E_ϵ) avec l'hypothèse (6.5) apparaît naturellement dans l'étude du problème de minimisation suivant :

$$\lambda_\epsilon = \inf_{u \in H_{1,G}^2 \setminus \{0\}} \frac{\int_M |\nabla_g u|^2 dv_g + \int_M h_\epsilon u^2 dv_g}{\left(\int_M |u|^{2^*(k)} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*(k)}}} \quad (6.7)$$

En effet, nous arrivons toujours à une situation tel que (6.5) a lieu, et si l'infimum

est atteint pour certain u_ϵ , alors après normalisation, (u_ϵ) vérifie l'équation (E_ϵ) . Nous n'avons pas besoin dans ce papier l'hypothèse que u_ϵ résout par un telle problème de minimisation mais seulement le plus générale hypothèse 6.0.2. Notons que la suite u_ϵ comme décrit ci-dessus apparaisse naturellement dans plusieurs problèmes. Parmi beaucoup, pour $k = 0$ c'est le cas du problème de Yamabe, ou de la meilleure constant dans les inégalités de Sobolev. On s'inspire du cas $k = 0$ qui est déjà traité sans groupes d'isométries par Druet-Hebey-Robert [15].

Notre travail est composé de plusieurs parties, chacune d'entre elle constituant un pas en avant vers la description la plus détaillées du phénomène d'explosion et du profil asymptotique exact de u_ϵ pour trouver à la fin une relation entre la fonction h_0 et la courbure scalaire de la variété Riemannienne (N, \tilde{g}) .

6.1 Phénomène de Blow-up et estimations ponctuelles

Définition 6.1.1. *Nous disons maintenant que Gx_0 est une orbite de concentration pour la suite (u_ϵ) si pour tout $\delta > 0$*

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_\delta(Gx_0)} u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g > 0$$

Notons que cette définition est équivalente à celle introduite dans le chapitre 5.

Nous prouvons d'abord ce qui suit :

Théorème 6.1.2. *Sous l'hypothèse (6.5), grâce à l'extraction d'une sous suite, il existe un et un seul orbite de concentration Gx_0 pour u_ϵ , et pour tout $\delta > 0$,*

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_\delta(Gx_0)} u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 1$$

De plus

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon = 0 \text{ dans } C_{loc}^0(M \setminus Gx_0)$$

Preuve : Supposons que pour tout $Gx \in M$, il existe δ_x tel que $\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_{\delta_x}(Gx)} u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 0$. Puisque M est compacte, on peut la recouvrir par un nombre fini de boules centrées en Gx et de rayon δ_x , et par suite $\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_M u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 0$ ce qui contredit le fait que

$\int_M u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 1$. Alors il existe au moins x_0 tel que Gx_0 est une orbite de concentration.

On pose $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in B(0; 1) \\ 0 & \text{pour } x \in B(0; 2)^c \end{cases}$

Soit également $\delta > 0$, et $\eta \in C^0(M)$ une fonction G -invariante qui vérifie $\eta(x) = \theta(\frac{d_{\bar{g}}(Gx_0, x)}{\delta})$ en d'autre terme $\eta = 0$ sur $M \setminus B_{2\delta}(Gx_0)$ et $\eta = 1$ sur $B_\delta(Gx_0)$. Multiplions (E_ϵ) par $\eta^2 u_\epsilon^l$ pour certain $l > 1$ et intégrons sur M ,

$$\int_M \eta^2 u_\epsilon^l \Delta_g u_\epsilon dv_g + \int_M \eta^2 h_\epsilon u_\epsilon^{l+1} dv_g = \lambda_\epsilon \int_M \eta^2 u_\epsilon^{l+2^*(k)-1} dv_g \quad (6.8)$$

Intégrons par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \int_M \eta^2 u_\epsilon^l \Delta_g u_\epsilon dv_g \\
 = & \int_M \nabla_g (\eta^2 u_\epsilon^l) \nabla_g u_\epsilon dv_g \\
 = & \int_M \eta^2 \nabla_g u_\epsilon^l \nabla_g u_\epsilon dv_g + \int_M 2\eta u_\epsilon^l \nabla_g \eta \nabla_g u_\epsilon dv_g \\
 = & l \int_M \eta^2 \left(u_\epsilon^{\frac{l-1}{2}} \nabla_g u_\epsilon \right)^2 dv_g + \frac{2}{l+1} \int_M \eta \nabla_g \eta \nabla_g u_\epsilon^{l+1} dv_g \\
 = & \frac{4l}{(l+1)^2} \int_M \left| \eta \nabla_g u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}} \right|^2 dv_g + \frac{2}{l+1} \int_M \eta \nabla_g \eta \nabla_g u_\epsilon^{l+1} dv_g \\
 = & \frac{4l}{(l+1)^2} \int_M \left| \nabla_g \left(\eta u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}} \right) - u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}} \nabla_g \eta \right|^2 dv_g + \frac{2}{l+1} \int_M \eta \nabla_g \eta \nabla_g u_\epsilon^{l+1} dv_g \\
 = & \frac{4l}{(l+1)^2} \int_M \left| \nabla_g \left(\eta u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}} \right) \right|^2 dv_g + \frac{4l}{(l+1)^2} \int_M u_\epsilon^{l+1} |\nabla_g \eta|^2 dv_g \\
 & - \frac{8l}{(l+1)^2} \int_M u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}} \nabla_g \left(\eta u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}} \right) \nabla_g \eta dv_g + \frac{2}{l+1} \int_M \eta \nabla_g \eta \nabla_g u_\epsilon^{l+1} dv_g \\
 = & \frac{4l}{(l+1)^2} \int_M \left| \nabla_g \left(\eta u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}} \right) \right|^2 dv_g - \frac{4l}{(l+1)^2} \int_M u_\epsilon^{l+1} |\nabla_g \eta|^2 dv_g \\
 & - \frac{8l}{(l+1)^2} \cdot \frac{l+1}{2} \int_M \eta u_\epsilon^{\frac{l-1}{2}} u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}} \nabla_g u_\epsilon \nabla_g \eta dv_g + \frac{2}{l+1} \int_M \eta \nabla_g \eta \nabla_g u_\epsilon^{l+1} dv_g \\
 = & \frac{4l}{(l+1)^2} \int_M \left| \nabla_g \left(\eta u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}} \right) \right|^2 dv_g - \frac{4l}{(l+1)^2} \int_M u_\epsilon^{l+1} |\nabla_g \eta|^2 dv_g \\
 & - \frac{8l}{(l+1)^2} \cdot \frac{l+1}{2} \int_M \eta u_\epsilon^{\frac{l-1}{2}} u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}} \nabla_g \eta \nabla_g u_\epsilon dv_g + \frac{2}{l+1} \int_M \eta \nabla_g \eta \nabla_g u_\epsilon^{l+1} dv_g \\
 = & \frac{4l}{(l+1)^2} \int_M \left| \nabla_g \left(\eta u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}} \right) \right|^2 dv_g - \frac{4l}{(l+1)^2} \int_M u_\epsilon^{l+1} |\nabla_g \eta|^2 dv_g \\
 & - \frac{4l}{(l+1)^2} \int_M \eta \nabla_g \eta \nabla_g u_\epsilon^{l+1} dv_g + \frac{2}{l+1} \int_M \eta \nabla_g \eta \nabla_g u_\epsilon^{l+1} dv_g \\
 = & \frac{4l}{(l+1)^2} \int_M \left| \nabla_g \left(\eta u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}} \right) \right|^2 dv_g - \frac{4l}{(l+1)^2} \int_M u_\epsilon^{l+1} |\nabla_g \eta|^2 dv_g \\
 & - \frac{2(l-1)}{(l+1)^2} \int_M \eta \nabla_g \eta \nabla_g u_\epsilon^{l+1} dv_g \\
 = & \frac{4l}{(l+1)^2} \int_M \left| \nabla_g \left(\eta u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}} \right) \right|^2 dv_g - \frac{4l}{(l+1)^2} \int_M u_\epsilon^{l+1} |\nabla_g \eta|^2 dv_g \\
 & + \frac{2(l-1)}{(l+1)^2} \int_M |\nabla_g \eta|^2 u_\epsilon^{l+1} dv_g - \frac{2(l-1)}{(l+1)^2} \int_M \eta \Delta_g \eta u_\epsilon^{l+1} dv_g \\
 = & \frac{4l}{(l+1)^2} \int_M \left| \nabla_g \left(\eta u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}} \right) \right|^2 dv_g - \frac{2}{(l+1)^2} \int_M u_\epsilon^{l+1} |\nabla_g \eta|^2 dv_g \\
 & - \frac{2(l-1)}{(l+1)^2} \int_M \eta \Delta_g \eta u_\epsilon^{l+1} dv_g
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & \int_M |\nabla_g(\eta u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}})|^2 dv_g \\ &= \frac{(l+1)^2}{4l} \int_M \eta^2 u_\epsilon^l \Delta_g u_\epsilon dv_g + \frac{l+1}{2l} \int_M \left(|\nabla_g \eta|^2 + \frac{l-1}{l+1} \eta \Delta_g \eta \right) u_\epsilon^{l+1} dv_g \end{aligned}$$

Ce qui donne avec (6.8) et les inégalités de Hölder

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla_g(\eta u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}})|^2 dv_g &= \frac{(l+1)^2}{4l} \lambda_\epsilon \int_M \eta^2 u_\epsilon^{l+2^*(k)-1} dv_g - \frac{(l+1)^2}{4l} \int_M \eta^2 h_\epsilon u_\epsilon^{l+1} dv_g \\ &\quad + \frac{l+1}{2l} \int_M \left(|\nabla_g \eta|^2 + \frac{l-1}{l+1} \eta \Delta_g \eta \right) u_\epsilon^{l+1} dv_g \\ &\leq \frac{(l+1)^2}{4l} \lambda_\epsilon \left(\int_M \left(\eta u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}} \right)^{2^*(k)} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*(k)}} \left(\int_{B_{Gx}(2\delta)} \eta u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g \right)^{1-\frac{2}{2^*(k)}} \\ &\quad + \frac{(l+1)^2}{4l} \|h_\epsilon\|_0 \|u_\epsilon\|_{l+1}^{l+1} \\ &\quad + \frac{l+1}{2l} \int_M \left(|\nabla_g \eta|^2 + \frac{l-1}{l+1} \eta \Delta_g \eta \right) u_\epsilon^{l+1} dv_g \end{aligned} \quad (6.9)$$

Par les résultats de Faget [17], il existe $B > 0$ tel que, pour tout ϵ ,

$$\left(\int_M \left(\eta u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}} \right)^{2^*(k)} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*(k)}} \leq \frac{K_0(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k)}}} \int_M |\nabla_g(\eta u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}})|^2 dv_g + B \int_M \eta^2 u_\epsilon^{l+1} dv_g$$

En combinant cette inégalité avec (6.9), on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(\int_M \left(\eta u_\epsilon^{\frac{l+1}{2}} \right)^{2^*(k)} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*(k)}} \left[1 - \frac{(l+1)^2}{4l} \lambda_\epsilon \left(\frac{K_0(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k)}}} \right) \left(\int_{B_{Gx}(2\delta)} u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g \right)^{1-\frac{2}{2^*(k)}} \right] \\ & \leq \frac{K_0(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k)}}} \frac{(l+1)^2}{4l} \|h_\epsilon\|_0 \|u_\epsilon\|_{l+1}^{l+1} \\ & + \left(\left(\frac{K_0(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k)}}} \right) \frac{l+1}{2l} \| |\nabla_g \eta|^2 + \frac{l-1}{l+1} \eta \Delta_g \eta \|_0 + B \right) \|u_\epsilon\|_{l+1}^{l+1} \end{aligned} \quad (6.10)$$

La relation (6.10) est valable pour tout $x \in M$ et $l > 1$. Supposons maintenant que Gx

est une orbite de concentration pour u_ϵ et pour certain $\delta > 0$,

$$a(2\delta) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_{Gx}(2\delta)} u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g < 1 \quad (6.11)$$

En utilisant (6.5) et choisissons l assez proche de 1 tel que $l + 1 < 2^*(k)$,

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\lambda_\epsilon \left(\frac{K_0(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k,s)}}} \right) \frac{(l+1)^2}{4l} a(2\delta)^{1-\frac{2}{2^*(k)}} \right) < 1 \quad (6.12)$$

En appliquant (6.10) avec un tel l , et le fait que (6.1) a lieu, on a

$$\left(\int_{B_{Gx}(\delta)} u_\epsilon^{\frac{(l+1)2^*(k)}{2}} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*(k)}} \leq C$$

Pour certains C indépendante de ϵ . Par l'inégalité de Hölder, cela conduit à

$$\begin{aligned} \int_{B_{Gx}(\delta)} u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g &\leq \left(\int_{B_{Gx}(\delta)} u_\epsilon^{\frac{(l+1)2^*(k)}{2}} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*(k)}} \left(\int_{B_{Gx}(\delta)} u_\epsilon^{2^*(k) - \frac{(l-1)2^*(k)}{2^*(k)-2}} dv_g \right)^{1-\frac{2}{2^*(k)}} \\ &\leq C \left(\int_{B_{Gx}(\delta)} u_\epsilon^{2^*(k) - \frac{(l-1)2^*(k)}{2^*(k)-2}} dv_g \right)^{1-\frac{2}{2^*(k)}} \end{aligned}$$

Or, pour $l > 1$ assez proche de 1, $\frac{l-1}{2^*(k)-1} := \zeta > 0$, donc d'après l'injection compacts de Sobolev de $H_{1,G}^2$ dans $L^{2^*(k)-\zeta}(M)$, et du fait que u_ϵ converge faiblement vers 0 dans $H_{1,G}^2$, on aura que $u_\epsilon \rightarrow 0$ dans $L^{2^*(k)-\zeta}(M)$. Par suite la partie droite de cette inégalité tends vers 0. Nous obtenons

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_{Gx}(\delta)} u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 0$$

C'est une contradiction puisque Gx est une orbite de concentration, Ainsi avec (E $_\epsilon$), (6.11) doit être fausse. Cela prouve que grâce à l'extraction d'une sous suite, u_ϵ admet une seul orbite de concentration $Gx_0 \in M$. En réutilisant (6.12), on prouve aussi que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_\epsilon = \left(\frac{K_0(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k)}}} \right)^{-1} \quad (6.13)$$

En revenant à (6.10), et une simple application du schéma de Moser [1], on arrive à

trouver $q > 2^*(k)$ et un $C > 0$, tel que pour tout $\Omega \subset M \setminus \{Gx_0\}$ et ϵ assez grand

$$\int_{\Omega} u_{\epsilon}^q dv_g \leq C$$

Et par suite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{\epsilon} = 0$ dans $C_{loc}^0(M \setminus Gx_0)$

□

6.1.1 Estimations ponctuelles faibles

Soit maintenant $x_{\epsilon} \in M$ un point où u_{ϵ} atteint son max, et définissons nous μ_{ϵ} par

$$u_{\epsilon}(x_{\epsilon}) = \|u_{\epsilon}\|_{\infty} = \mu_{\epsilon}^{1-\frac{n-k}{2}} \quad (6.14)$$

Il est clair avec le théorème 6.1.2 que $Gx_{\epsilon} \rightarrow Gx_0$ (à isométries près, on peut supposer que $x_{\epsilon} \rightarrow x_0$), et $\mu_{\epsilon} \rightarrow 0$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. En prenant les notations du début du chapitre, rappelons qu'on a :

$$\Delta_{\tilde{g}} \bar{u}_{\epsilon} + \tilde{h}_{\epsilon} \bar{u}_{\epsilon} = \tilde{f}_{\epsilon} \bar{u}_{\epsilon}^{2^*(k)-1}, \quad \int_N \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \bar{u}_{\epsilon}^{2^*(k)} dv_{\tilde{g}} = 1 + o(1) \quad (6.15)$$

Soit $\delta > 0$ plus petit que le rayon d'injectivité de (N, \tilde{g}) . On pose la métrique suivante

$$\tilde{g}_{\epsilon}(X) = (\exp_{\bar{x}_{\epsilon}})^* \tilde{g}(\mu_{\epsilon} X) \quad \text{sur } B_{\frac{\delta}{\mu_{\epsilon}}}(0) \subset \mathbb{R}^{n-k} \quad (6.16)$$

Puisque, $\mu_{\epsilon} \rightarrow 0$ quand $\epsilon \rightarrow 0$, la métrique \tilde{g}_{ϵ} converge vers la métrique euclidienne ξ dans $C_{loc}^2(\mathbb{R}^m)$ quand $\epsilon \rightarrow 0$. On définit

$$\tilde{w}_{\epsilon}(X) := \mu_{\epsilon}^{\frac{m-2}{2}} \bar{u}_{\epsilon}(\exp_{\bar{x}_{\epsilon}}(\mu_{\epsilon} X)) \quad \text{pour tout } X \in B_{\frac{\delta}{\mu_{\epsilon}}}(0) \subset \mathbb{R}^{n-k} \quad (\tilde{w}_{\epsilon})$$

qui vérifie l'équation suivante sur $B_{\frac{\delta}{\mu_{\epsilon}}}(0)$

$$\Delta_{\tilde{g}_{\epsilon}} \tilde{w}_{\epsilon}(X) + \mu_{\epsilon}^2 \hat{h}_{\epsilon} \tilde{w}_{\epsilon} = \hat{f}_{\epsilon} \tilde{w}_{\epsilon}^{2^*(k)-1} \quad (E_{\tilde{w}_{\epsilon}})$$

Où

$$\hat{h}_{\epsilon}(X) = \tilde{h}_{\epsilon}(\exp_{\bar{x}_{\epsilon}}(\mu_{\epsilon} X)) \quad \text{et} \quad \hat{f}_{\epsilon}(X) = \lambda_{\epsilon} (\bar{v}(\exp_{\bar{x}_{\epsilon}}(\mu_{\epsilon} X)))^{-\frac{2}{n-k-2}}. \quad (6.17)$$

Comme déjà vu dans le chapitre précédent, il s'ensuit de Tolksdorff [45] que, à extraction près, il existe $w \in C^2(\mathbb{R}^m)$ tel que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{w}_\epsilon = \tilde{w} \quad \text{dans } C_{loc}^2(\mathbb{R}^m). \quad (6.18)$$

et

$$\tilde{w}_\epsilon(0) = \tilde{w}(0) = 1$$

Notre prochaine résultat donne à la fois une estimation de la vitesse de concentration de la $L^{2^*(k)}$ -masse de u_ϵ autour de l'orbite Gx_ϵ , des estimations ponctuelles faibles pour les u_ϵ

Théorème 6.1.3. *Sous l'hypothèse 6.0.2, l'estimation intégrale suivante est vérifiée :*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_{Gx_\epsilon}(R\mu_\epsilon)} u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 1 \quad (6.19)$$

Quant à l'estimation ponctuelle faible, il existe C indépendant de ϵ , tel que pour tout $\epsilon > 0$ et tout $x \in M$

$$d_g(Gx, Gx_\epsilon)^{\frac{n-k-2}{2}} |u_\epsilon(x)| \leq C$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in M \setminus B_{Gx_\epsilon}(R\mu_\epsilon)} d_g(x, Gx_\epsilon)^{\frac{n-k-2}{2}} |u_\epsilon(x)| = 0$$

Preuve : Avec les notations introduis ci-dessus, on peut écrire le système $(E_{\tilde{w}_\epsilon})$ sous la forme

$$\Delta_{\tilde{g}_\epsilon} \tilde{w}_\epsilon = \psi_\epsilon$$

Où $\psi_\epsilon \in L^p(B_{2R}(0))$ pour certain $R > 0$. et pour tout $p \geq 1$. Appliquons le schéma de Moser vu dans Gilbarg-Trudinger [22], il existe $C = C(R) \geq 0$ tel que :

$$\|\tilde{w}_\epsilon\|_{C^1(B_R(0))} \leq C \left(\|\tilde{w}_\epsilon\|_{L^p(B_{2R}(0))} + \|\psi_\epsilon\|_{L^p(B_{2R}(0))} \right)$$

Or pour p assez grand, en utilisant la deuxième inclusion de Sobolev, on tire que $H_k^p\left(B_{\frac{R}{2}}(0)\right) \hookrightarrow$

$C^{0,\alpha}\left(B_{\frac{R}{2}}(0)\right)$ pour $\alpha = 1 - \frac{n-k}{p}$. Appliquons une autre fois le schéma de Moser on trouve qu'il existe une constante C , telle que pour tout $\alpha \in]0, 1[$

$$\|\tilde{w}_\epsilon\|_{C^{2,\alpha}\left(B_{\frac{R}{2}}(0)\right)} \leq \left(\|\tilde{w}_\epsilon\|_{C^0(B_R(0))} + \|\psi_\epsilon\|_{C^{0,\alpha}(B_R(0))}\right)$$

Alors, il existe $C \geq 0$ tel que

$$\|\tilde{w}_\epsilon\|_{C^{2,\alpha}\left(B_{\frac{R}{2}}(0)\right)} \leq C$$

Par le Théorème d'Ascoli, l'injection de $C^{2,\alpha}\left(B_{\frac{R}{2}}(0)\right)$ dans $C^2\left(B_{\frac{R}{2}}(0)\right)$ est compacte, par suite il existe $\tilde{w} \in C^2\left(B_{\frac{R}{2}}(0)\right)$ tel que la suite \tilde{w}_ϵ converge fortement vers \tilde{w} lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Et de plus en utilisant (6.13), \tilde{w} vérifie le système $(E_{\tilde{w}})$, dans notre contexte, elle vérifie le système suivant :

$$\Delta \tilde{w} = \frac{A^{-\frac{2}{m-2}}}{K_0(n, k, A)} \tilde{w}^{2^*(k)-1} \quad (E'_{\tilde{w}})$$

Or par la définition de la meilleure constante de Sobolev $K_0(n-k)$ vue dans Faget [17], on sait que

$$K_0(n-k)^{-1} \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^{n-k}} |\nabla \tilde{w}|_\xi^2 dX}{\left(\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \tilde{w}^{2^*(k)} dX\right)^{\frac{2}{2^*(k)}}}$$

En utilisant cette inégalité dans $(E_{\tilde{w}})$, on aura

$$1 \leq A^{-\frac{2}{m-2}} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \tilde{w}^{2^*(k)} dv_{\tilde{g}_\epsilon} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_R(0)} \bar{v}^{-\frac{2}{m-2}} (\exp_{x_\epsilon}(\mu_\epsilon x)) \tilde{w}_\epsilon^{2^*(k)} dv_{\tilde{g}_\epsilon}$$

D'autre part

$$\int_{B_R(0)} \bar{v}^{-\frac{2}{m-2}} (\exp_{x_\epsilon}(\mu_\epsilon x)) \tilde{w}_\epsilon^{2^*(k)} dv_{\tilde{g}_\epsilon} = \int_{B_{Gx_\epsilon}(R\mu_\epsilon)} u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g \leq \int_M u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 1$$

Par suite (6.19) est vérifiée. Une application du corollaire 5.3.3, nous assure les estimation ponctuelles faibles de u_ϵ

□

6.1.2 Estimations ponctuelles Fortes

Lemme 6.1.4. *Soit (M, g) , une variété Riemannienne de dimension n . Soit L un opérateur elliptique sur M . Posons $u \in H_1^2(M)$, qui vérifie $Lu = 0$. Alors, pour tout $r > 0$, tel que $B_x(r) \subset M$, il existe $C \geq 0$ qui ne dépend que de g, r , la constante de coercivité et une borne sur les coefficients de L tel que*

$$\sup_{y \in B_x(r)} u(x) \leq C \inf_{y \in B_x(r)} u(x) \quad (6.20)$$

Preuve : C'est une version de l'inégalité de Harnack vue dans Gilbarg-Trudinger [22] chapitre 8. □

Lemme 6.1.5. *Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n . Pour tous $\alpha, \beta \in (0, n)$, on a $\int_M d_g(x, y)^{\alpha-n} d_g(y, z)^{\beta-n} dv_g \leq C \begin{cases} d_g(x, y)^{\alpha+\beta-n} & \text{si } \alpha + \beta < n \\ 1 & \text{si } \alpha + \beta > n \end{cases}$*

Preuve : c'est une version du lemme de Giraud vue dans [15] □

Théorème 6.1.6. *Sous les hypothèses 6.0.1, (6.5) et (6.6), il existe $C > 0$ indépendant de ϵ , et $\theta_\epsilon \rightarrow 0$ tel que pour tout $x \in M$*

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x) &\leq C \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} d_g(Gx_\epsilon, x)^{2-m} + C \theta_\epsilon \\ |\nabla_g u_\epsilon|(x) &\leq C \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} d_g(Gx_\epsilon, x)^{1-m} + C \theta_\epsilon \end{aligned} \quad (6.21)$$

avec

$$\theta_\epsilon := \sup_{x \in \partial B_{\delta/2}(Gx_0)} u_\epsilon(x)$$

Preuve : On rappelle $f \in H_{1,G}^2(M)$, on note $\bar{f} = f \circ \Pi$ où Π est la projection canonique de M dans N et $\tilde{f} = \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \bar{f}$.

Pour ν_1 assez petit on peut trouver $\alpha_0 > 0$ tel que l'opérateur $\Delta_{\tilde{g}} + \frac{\tilde{a}-\alpha_0}{1-\nu_1}$ est coercif

où a est celle de l'hypothèse (6.6) et $\tilde{a} = \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \bar{a}$. En effet pour tout $\bar{u} \in H_0^1(N)$ on a

$$\begin{aligned} \int_N [|\nabla_{\tilde{g}} \bar{u}|^2 + \frac{\tilde{a} - \alpha_0}{1 - \nu_1} \bar{u}^2] dv_{\tilde{g}} &\geq \int_N [|\nabla_{\tilde{g}} \bar{u}|^2 + \frac{a}{1 - \nu_1} \bar{u}^2 - \frac{\alpha_0}{1 - \nu_1} \bar{u}^2] dv_{\tilde{g}} \\ &\geq \int_N [|\nabla_{\tilde{g}} \bar{u}|^2 + \tilde{a} \bar{u}^2 - \frac{\alpha_0}{1 - \nu_1} \bar{u}^2] dv_{\tilde{g}} \\ &\geq C \|\bar{u}\|_{H_0^1(N)}^2 - \frac{\alpha_0}{1 - \nu_1} C' \|\bar{u}\|_{H_0^1(N)}^2 \end{aligned}$$

Posons alors α_0 tel que $C - \frac{\alpha_0}{1 - \nu_1} C' > 0$. On note \tilde{G}_1 sa fonction de Green sur $N = B_\delta(Gx_0)$ qui est positive. Soit l'opérateur $L_\epsilon \bar{u} = \Delta_{\tilde{g}} \bar{u} + \tilde{h}_\epsilon \bar{u} - \hat{f}_\epsilon \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-2} \bar{u}$, notons que $L_\epsilon \bar{u}_\epsilon = 0$ alors le principe du maximum de Berestycki-Nirenberg-Varadhan [4] est valable pour L_ϵ avec $\bar{u}_\epsilon > 0$ sur N . Notons que pour $\nu_1 \in]0, 1[$ on a :

$$\frac{\Delta_{\tilde{g}} \tilde{G}_1^{(1-\nu_1)}}{\tilde{G}_1^{(1-\nu_1)}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon) = \frac{(1 - \nu_1)(\alpha_0 - \tilde{a}(\bar{x}))}{1 - \nu_1} + \nu_1(1 - \nu_1) \left| \frac{\nabla_{\tilde{g}} \tilde{G}_1}{\tilde{G}_1} \right|_{\tilde{g}}^2$$

Or par l'hypothèse 6.0.3, on a

$$\frac{L_\epsilon \tilde{G}_1^{(1-\nu_1)}}{\tilde{G}_1^{(1-\nu_1)}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon) \geq \alpha_0 - \hat{f}_\epsilon \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-2}(\bar{x}) + \nu_1(1 - \nu_1) \left| \frac{\nabla_{\tilde{g}} \tilde{G}_1}{\tilde{G}_1} \right|_{\tilde{g}}^2 \quad (6.22)$$

Par propriété standard de la fonction de Green [38], $\exists c > 0$ et $\exists \rho > 0$ indépendant de ϵ tel que

$$\left| \frac{\nabla_{\tilde{g}} \tilde{G}_1}{\tilde{G}_1} \right|_{\tilde{g}} \geq \frac{C}{d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon)}, \forall \bar{x} \in B(\bar{x}_\epsilon, \rho) \quad (6.23)$$

Nous laissons $R > 0$ a fixer, puisque $\bar{u}_\epsilon \rightarrow 0$ dans $C_{loc}^0(N \setminus \bar{x}_\epsilon)$ nous obtenons avec (6.22) que $\frac{L_\epsilon \tilde{G}_1^{(1-\nu_1)}}{\tilde{G}_1^{(1-\nu_1)}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon) \geq 0$ sur $N \setminus B(\bar{x}_\epsilon, \rho)$ alors $L_\epsilon \tilde{G}_1^{(1-\nu_1)} \geq 0$ dans $N \setminus B(\bar{x}_\epsilon, \rho)$.

Pour $R > 0$ assez grand, pour $\bar{x} \in B(\bar{x}_\epsilon, \rho) \setminus B(\bar{x}_\epsilon, R\mu_\epsilon)$, en utilisant le Théorème 6.1.3 on a :

$$d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon)^{\frac{m-2}{2}} \bar{u}_\epsilon(\bar{x}) \leq \epsilon(R)^{\frac{m-2}{4}}$$

donc

$$d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon)^2 \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-2}(\bar{x}) \leq \epsilon(R) \rightarrow 0 \text{ lorsque } R \rightarrow \infty$$

Or, combinons (6.22) et (6.23) à cette inégalité pour R assez grand :

$$\begin{aligned} \frac{L_\epsilon \tilde{G}_1^{(1-\nu_1)}}{\tilde{G}_1^{(1-\nu_1)}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon) &\geq \alpha_0 + \nu_1(1-\nu_1) \frac{C^2}{d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon)^2} - \hat{f}_\epsilon \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-2}(\bar{x}) \\ &\geq \alpha_0 + \frac{\nu_1(1-\nu_1)C^2 - \hat{f}_\epsilon \epsilon(R)}{d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon)^2} \\ &\geq 0 \quad \text{dans } B(\bar{x}_\epsilon, \rho) \setminus B(\bar{x}_\epsilon, R\mu_\epsilon) \end{aligned}$$

Nous avons donc prouvé que dans $N \setminus B(\bar{x}_\epsilon, R\mu_\epsilon)$ on a : $L_\epsilon \tilde{G}_1^{(1-\nu_1)}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon) \geq 0$.

Il découle des propriétés standards de la fonction de Green [38] qu'il existe $c > 0$ indépendant de ϵ tel que :

$$\tilde{G}_1^{(1-\nu_1)}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon) \geq \frac{C}{\mu_\epsilon^{(1-\nu_1)(m-2)}} \text{ sur } \partial B(\bar{x}_\epsilon, R\mu_\epsilon)$$

Rappelons que $\bar{u}_\epsilon(\bar{x}_\epsilon) = \|\bar{u}_\epsilon\|_\infty = \mu_\epsilon^{(1-\frac{m}{2})}$ et fixons $C_\epsilon := C^{-1}\mu_\epsilon^{(1-\nu_1)(m-2)-\frac{m-2}{2}}$, alors :

$$C_\epsilon \tilde{G}_1^{(1-\nu_1)}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon) \geq \frac{C_\epsilon C}{\mu_\epsilon^{(1-\nu_1)(m-2)}} \geq \mu_\epsilon^{\frac{2-m}{2}} \geq \bar{u}_\epsilon(\bar{x}) \text{ sur } \partial B(\bar{x}_\epsilon, R\mu_\epsilon)$$

On pose

$$N' := B_{\delta/2}(Gx_0) = B_{\delta/2}(\bar{x}_0).$$

On a $\bar{x}_\epsilon \rightarrow \bar{x}_0$ où \bar{x}_0 est à distance $r_0 > 0$ de bord de N' . Par suite, pour tout $\bar{x} \in \partial N'$, on a

$$\bar{u}_\epsilon(\bar{x}) \leq \sup_{\bar{x} \in \partial N'} \bar{u}_\epsilon(\bar{x}) := \theta_\epsilon$$

Mais, \bar{u}_ϵ se concentre autour de \bar{x}_ϵ . Par conséquence, on a $\theta_\epsilon \rightarrow 0$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, tel que

$$\bar{u}_\epsilon(\bar{x}) = O(\theta_\epsilon) \tag{6.24}$$

Soit maintenant \tilde{G}_2 la fonction du Green pour l'opérateur $\Delta_{\tilde{g}} + \frac{\alpha-\alpha_0}{1-\nu_1}$ sur N , il existe

$C \geq 0$ tel que :

$$\begin{aligned}\tilde{G}_2(\bar{x}_\epsilon, \bar{x}) &\geq C d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon)^{2-m} \\ &\geq C r_0^{2-m}, \forall \bar{x} \in \partial N'\end{aligned}$$

et $\bar{u}_\epsilon = O(\theta_\epsilon)$ sur $\partial N'$, alors on peut trouver une constante $C \geq 0$ tel que :

$$\bar{u}_\epsilon(\bar{x}) = O(\theta_\epsilon) \frac{\tilde{G}_2^{(1-\nu_2)}}{C r_0^{(2-m)(1-\nu_2)}} \leq C \theta_\epsilon \tilde{G}_2^{(1-\nu_2)} \text{ pour } \nu_2 \in]0; 1[$$

Où $\theta_\epsilon \rightarrow 0$, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Or $L_\epsilon(C_\epsilon \tilde{G}_1^{(1-\nu_1)} + \hat{\theta}_\epsilon \tilde{G}_2^{(1-\nu_2)}) > L_\epsilon(\bar{u}_\epsilon)$ sur $N' \setminus B(\bar{x}_\epsilon, R\mu_\epsilon)$ et

$\bar{u}_\epsilon \leq C_\epsilon \tilde{G}_1^{(1-\nu_1)} + \hat{\theta}_\epsilon \tilde{G}_2^{(1-\nu_2)}$ sur $\partial(N' \setminus B(\bar{x}_\epsilon, R\mu_\epsilon))$. Appliquons le principe de maximum de Berestycki-Nirenberg-Varadhan [4] pour \bar{u}_ϵ sur N' on aura :

$$\bar{u}_\epsilon(\bar{x}) \leq C_\epsilon \tilde{G}_1^{(1-\nu_1)} + O(\theta_\epsilon) \tilde{G}_2^{(1-\nu_2)} \text{ sur } N' \setminus B(\bar{x}_\epsilon, R\mu_\epsilon)$$

Et cela c'est simplement vérifier sur $B(\bar{x}_\epsilon, R\mu_\epsilon)$. Par suite,

$$\bar{u}_\epsilon(\bar{x}) \leq C_\epsilon \tilde{G}_1^{(1-\nu_1)} + O(\theta_\epsilon) \tilde{G}_2^{(1-\nu_2)} \text{ sur } N'$$

Par l'inégalité précédente, et en utilisant les propriétés standards de la fonction de Green on peut vérifier que pour tout $\bar{x} \in N'$, on a

$$\bar{u}_\epsilon(\bar{x}) \leq C \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2} - \nu_1(m-2)} d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon)^{(2-m)(1-\nu_1)} + O(\theta_\epsilon) d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon)^{(2-m)(1-\nu_2)} \quad (6.25)$$

On définit pour $l = 1, 2$

$$\tilde{v}_\epsilon^l := \begin{cases} \tilde{v}_\epsilon^1 := |\nabla_{\tilde{g}} \bar{u}_\epsilon| & \text{si } l = 1 \\ \tilde{v}_\epsilon^2 := \bar{u}_\epsilon & \text{si } l = 2 \end{cases}$$

D'autre part, on pose $\bar{y}_\epsilon^l \in N'$ tel que $d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon)^{m-l} \tilde{v}_\epsilon^l(\bar{x}_\epsilon) \bar{u}_\epsilon(\bar{x})$ atteint son max. Soit $\hat{H}_2(\bar{x}) := \hat{G}(\bar{x}, \bar{y})$ la fonction du Green de l'opérateur $\Delta_{\tilde{g}} + \tilde{a}$ sur N' , et posons $\hat{H}_1(\bar{x}) = \nabla_{\tilde{g}} \hat{G}(\bar{x}, \bar{y})$. Nous obtenons :

$$\bar{u}_\epsilon(\bar{y}_\epsilon^l) = \int_{N'} \hat{H}_2(\bar{y}_\epsilon^l) (\Delta_{\tilde{g}} \bar{u}_\epsilon(\bar{x}) + \tilde{a} \bar{u}_\epsilon(\bar{x})) dv_{\tilde{g}} - \int_{\partial N'} \partial_\nu \hat{G}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{z}) \bar{u}_\epsilon(\bar{z}) d(\bar{z})$$

et

$$|\nabla_{\tilde{g}} \bar{u}_\epsilon(\bar{y}_\epsilon^l)| = \left| \int_{N'} \hat{H}_1(\bar{y}) (\Delta_{\tilde{g}} \bar{u}_\epsilon(\bar{x}) + \tilde{a} \bar{u}_\epsilon(\bar{x})) dv_{\tilde{g}} - \int_{\partial N'} \nabla_{\tilde{g}} (\partial_n \hat{G}(\bar{y}, \bar{z}) \bar{u}_\epsilon(\bar{z})) d_n(\bar{z}) \right|$$

Rappelons que pour tout $\epsilon < \epsilon_1$, on a $\bar{x}_\epsilon \notin \partial N'$, par suite $d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon) > 0$. Par conséquence, $|\partial_\nu \hat{G}| \leq C d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon)^{1-m} \leq C'$ et $|\nabla_{\tilde{g}} \partial_\nu \hat{G}| \leq C'$ et de plus $\bar{u}_\epsilon(\bar{z}) = O(\theta_\epsilon) \rightarrow 0$, pour tout $\bar{z} \in \partial N'$.

Alors, pour $\delta > 0$, assez petit qu'on fixera après, on a

$$\begin{aligned} \tilde{v}_\epsilon^l(\bar{y}_\epsilon^l) &\leq \int_{N'} \hat{H}_l(\bar{y}_\epsilon^l) |\Delta_{\tilde{g}} \bar{u}_\epsilon(\bar{x}) + \tilde{a} \bar{u}_\epsilon(\bar{x})| dv_{\tilde{g}} + O(\theta_\epsilon) \\ &\leq \int_{N'} \hat{H}_l(\bar{y}_\epsilon^l) |\Delta_{\tilde{g}} \bar{u}_\epsilon(\bar{x}) + \tilde{h}_\epsilon \bar{u}_\epsilon(\bar{x})| dv_{\tilde{g}} + O(\theta_\epsilon) \\ &= \int_{N'} \hat{f}_\epsilon \hat{H}_l(\bar{y}_\epsilon^l) \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1}(\bar{x}) dv_{\tilde{g}} + O(\theta_\epsilon) \\ &= \int_{B(\bar{x}_\epsilon, \delta)} \hat{f}_\epsilon \hat{H}_l(\bar{y}_\epsilon^l) \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1}(\bar{x}) dv_{\tilde{g}} + \int_{N' \setminus B(\bar{x}_\epsilon, \delta)} \hat{f}_\epsilon \hat{H}_l(\bar{y}_\epsilon^l) \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1}(\bar{x}) dv_{\tilde{g}} + O(\theta_\epsilon) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\int_{N'} \hat{H}_l(\bar{y}_\epsilon^l) \theta_\epsilon^{2^*(k)-1} \tilde{G}_2^{(1-\nu_2)(2^*(k)-1)} dv_{\tilde{g}} \leq \int_N d_{\tilde{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x})^{l-m} \theta_\epsilon^{2^*(k)-1} d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon)^{-(2+m)(1-\nu_2)} dv_{\tilde{g}}$$

Posons $\alpha = l$ et $\beta = -(2+m)(1-\nu_2) + m$ alors $\alpha + \beta > m$, appliquons le Lemme 6.1.5 pour tout $\nu_2 > 1 - \frac{l}{m+2}$, on aura :

$$\int_N \hat{H}_l(\bar{y}_\epsilon^l) \hat{\theta}_\epsilon^{2^*(k)-1} \tilde{G}_2^{(1-\nu_2)(2^*(k)-1)} dv_{\tilde{g}} \leq O(\theta_\epsilon)$$

Or

$$\begin{aligned}
 & \int_{N' \setminus B(\bar{x}_\epsilon, \delta)} \hat{H}_l(\bar{y}_\epsilon^l) \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1}(\bar{x}) dv_{\bar{g}} \\
 & \leq O\left(\mu_\epsilon^{\frac{m+2}{2}-\nu_1(m+2)} \int_{N' \setminus B(\bar{x}_\epsilon, \delta)} \hat{H}_l(\bar{y}_\epsilon^l) dv_{\bar{g}}\right) + O(\theta_\epsilon) \\
 & \leq O\left(\mu_\epsilon^{\frac{m+2}{2}-(m+2)\nu_1} \int_{N'} \hat{H}_l(\bar{y}_\epsilon^l) dv_{\bar{g}}\right) + O(\theta_\epsilon) \\
 & \leq O\left(\mu_\epsilon^{\frac{m+2}{2}-(m+2)\nu_1}\right) + O(\theta_\epsilon)
 \end{aligned}$$

Alors, pour tout $\nu_1 < \frac{2}{m+2}$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}_\epsilon^l(\bar{y}_\epsilon^l) & \leq O\left(\mu_\epsilon^{\frac{m+2}{2}-(m+2)\nu_1}\right) + O(\hat{\theta}_\epsilon) + C \int_{B(\bar{x}_\epsilon, \delta)} \hat{H}_l(\bar{y}_\epsilon^l) \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1}(\bar{x}) dv_{\bar{g}} \\
 & \leq o\left(\mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}}\right) + O(\hat{\theta}_\epsilon) + C \int_{B(\bar{x}_\epsilon, \delta)} \hat{H}_l(\bar{y}_\epsilon^l) \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1}(\bar{x}) dv_{\bar{g}}
 \end{aligned}$$

On divise la majoration de $\int_{B(\bar{x}_\epsilon, \delta)} \hat{H}_l(\bar{y}_\epsilon^l) \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1}(\bar{x}) dv_{\bar{g}}$ en 3 cas

Cas 1 : On suppose que quitte à l'extraction d'une sous suite que $\bar{y}_\epsilon^l \rightarrow \bar{y}_0 \neq \bar{x}_0$. Puis nous nous fixons $\delta > 0$ tel que $d_{\bar{g}}(\bar{y}_0, \bar{x}_0) \geq 3\delta$. Alors

$$\begin{aligned}
 & \int_{B(\bar{x}_\epsilon, \delta)} \hat{H}_l(\bar{y}_\epsilon^l) \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1} dv_{\bar{g}} \\
 & \leq C d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}_\epsilon)^{l-m} \int_{B(\bar{x}_\epsilon, \delta)} \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1} dv_{\bar{g}} \\
 & \leq C d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}_\epsilon)^{l-m} \int_{B(\bar{x}_\epsilon, \mu_\epsilon)} \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1} dv_{\bar{g}} \\
 & + C \mu_\epsilon^{\frac{m+2}{2}-(m+2)\nu_1} d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}_\epsilon)^{l-m} \int_{B(\bar{x}_\epsilon, \delta) \setminus B(\bar{x}_\epsilon, \mu_\epsilon)} d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}_\epsilon)^{-(m+2)(1-\nu_1)} dv_{\bar{g}} \\
 & + O(\hat{\theta}_\epsilon)
 \end{aligned}$$

Posons $\nu_1 < \frac{2}{m+2}$, on aura :

$$\int_{B(\bar{x}_\epsilon, \delta)} \hat{H}_l(\bar{y}_\epsilon^l) \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1} dv_{\bar{g}} \leq C d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}_\epsilon)^{l-m} \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} + O(\hat{\theta}_\epsilon)$$

alors :

$$\tilde{v}_\epsilon^l(\bar{x}) \leq C d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon)^{l-m} \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} + O(\hat{\theta}_\epsilon)$$

Cas 2 : On suppose que quitte à l'extraction d'une sous suite que $\bar{y}_\epsilon^l \rightarrow \bar{y}_0 = \bar{x}_0$ et que $d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}_\epsilon) \leq C \mu_\epsilon$ où C est indépendante de ϵ . Alors il existe une constante $C \geq 0$, tel que :

$$d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^2, \bar{x}_\epsilon)^{m-2} \bar{u}_\epsilon(\bar{y}_\epsilon^2) \bar{u}_\epsilon(\bar{x}_\epsilon) \leq C \bar{u}_\epsilon(\bar{x}_\epsilon)^{-1} \bar{u}_\epsilon(\bar{y}_\epsilon^2) \leq C$$

D'autre part, posons Z_ϵ tel que $y_\epsilon^1 = \exp_{\bar{x}_\epsilon}(\mu_\epsilon Z_\epsilon)$. Notons que, $\nabla \tilde{w}_\epsilon(X) = \mu_\epsilon^{\frac{m}{2}} \nabla \bar{u}_\epsilon(\exp_{\bar{x}_\epsilon}(\mu_\epsilon X))$ (voir (\tilde{w}_ϵ)). En utilisant (6.18), on peut trouver $C' \geq 0$ tel que

$$|\nabla \tilde{w}_\epsilon(Z_\epsilon)|_{\bar{g}} \leq C'$$

En d'autres termes

$$|\nabla \bar{u}_\epsilon(y_\epsilon^1)|_{\bar{g}} \leq \frac{C'}{\mu_\epsilon^{\frac{m}{2}}}$$

Alors

$$d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^1, \bar{x}_\epsilon)^{m-1} |\nabla \bar{u}_\epsilon(\bar{y}_\epsilon^1)|_{\bar{g}} \bar{u}_\epsilon(\bar{x}_\epsilon) \leq C C'$$

Par conséquence :

$$\tilde{v}_\epsilon^l(\bar{x}) \leq C d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon)^{l-m} \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} + O(\hat{\theta}_\epsilon)$$

Cas 3 : On suppose à l'extraction d'une sous-suite que $\bar{y}_\epsilon^l \rightarrow \bar{y}_0 = \bar{x}_0$ et que $r_\epsilon := \frac{d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}_\epsilon)}{\mu_\epsilon} \rightarrow \infty$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, par suite on aura

$$\tilde{v}_\epsilon^l(\bar{y}_\epsilon^l) \leq O(\hat{\theta}_\epsilon) + o(\mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}}) + C \int_{B_\epsilon^{l,1}} \hat{H}_k(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}) \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1} dv_{\bar{g}} + C \int_{B_\epsilon^{l,2}} \hat{H}_k(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}) \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1} dv_{\bar{g}}$$

Avec $B_\epsilon^{l,1} = \{\bar{x} \in B(\bar{x}_\epsilon, \delta) \text{ tel que } d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}) \geq \frac{1}{2} d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}_\epsilon)\}$ Et $B_\epsilon^{l,2} = B(\bar{x}_\epsilon, \delta) \setminus$

$B_\epsilon^{l,1}$. Pour $\nu_1 < \frac{2}{2^*(k)-1}$, comme dans le premier cas, il existe $c \geq 0$ tel que :

$$\int_{B_\epsilon^{l,1}} \hat{H}_l(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}) \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1} dv_{\bar{g}} \leq C d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon)^{l-m} \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} + O(\hat{\theta}_\epsilon)$$

Par suite, on a :

$$\tilde{v}_\epsilon^l(\bar{y}_\epsilon^l) \leq O(\mu_\epsilon^{\frac{m+2}{2}}) + O(\theta_\epsilon) + C d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon)^{l-m} \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} + C \int_{B_\epsilon^{l,2}} d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x})^{l-m} \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1} dv_{\bar{g}} \quad (6.26)$$

D'autre part, pour tout $\bar{x} \in B_\epsilon^{l,2}$

$$d_{\bar{g}}(\bar{x}_\epsilon, \bar{x}) \geq d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}_\epsilon) - d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}) \geq \frac{1}{2} d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}_\epsilon)$$

Et

$$d_{\bar{g}}(\bar{x}_\epsilon, \bar{x}) \leq d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}_\epsilon) + d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}) \leq \frac{3}{2} d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}_\epsilon)$$

Posons pour $C \geq 0$

$$M_\epsilon = C \left[\mu_\epsilon^{2-\nu_1(m+2)} d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}_\epsilon)^{-(m+2)(1-\nu_1)+m-l} + O(\theta_\epsilon) \mu_\epsilon^{-\frac{m-2}{2}} d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}_\epsilon)^{-(m+2)(1-\nu_2)+m-l} \right]$$

En utilisant (6.25), on a

$$\begin{aligned} \int_{B_\epsilon^{l,2}} d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x})^{l-m} \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1} dv_{\bar{g}} &\leq \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x})^{l-m} M_\epsilon \int_{B_\epsilon^{l,2}} d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x})^{l-m} dv_{\bar{g}} \\ &\leq \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x})^{l-m} M_\epsilon \int_{d_{\bar{g}}(\bar{x}_\epsilon, \bar{x}) < \frac{1}{2} d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}_\epsilon)} d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x})^{l-m} dv_{\bar{g}} \\ C &\leq \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x})^{l-m} M_\epsilon d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}_\epsilon)^l \end{aligned}$$

Pour $\nu_1 < \frac{2}{m+2}$ et $\nu_2 > 1 - \frac{l}{m+2}$, on a : $M_\epsilon d_{\bar{g}}(\bar{y}_\epsilon^l, \bar{x}_\epsilon)^l = o(1) + o(\theta_\epsilon \mu_\epsilon^{-\frac{-(m-2)}{2}})$.

Par suite, on peut vérifier qu'il existe $C \geq 0$, tel que

$$\tilde{v}_\epsilon^l(\bar{x}) \leq C d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon)^{l-m} \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} + O(\theta_\epsilon)$$

Alors on a vérifier dans tous le cas que, qu'il existe $C \geq 0$, et une suite θ_ϵ qui converge vers 0, tel que pour tout $\bar{x} \in N'$, on a

$$\tilde{v}_\epsilon^l(\bar{x}) \leq C d_{\bar{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon)^{l-m} \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} + O(\hat{\theta}_\epsilon) \quad (6.27)$$

Alors pour tout $X \in B_{r_0}(Gx_0)$, on a

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x) &\leq C \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} d_g(Gx_\epsilon, x)^{2-m} + O(\theta_\epsilon) \\ |\nabla_g u_\epsilon(x)| &\leq C \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} (Gx_\epsilon, x)^{1-m} + O(\theta_\epsilon) \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 6.1.4, on arrive a montrer que ces inégalité restes valables pour tout $x \in M$.

□

6.2 Identité de Pohozaev et distance à l'orbite de concentration

Lemme 6.2.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un domaine borné lisse, et soit $u \in C^2(\bar{\Omega})$ tel que $u \geq 0$. Alors pour tout $f \in C(\Omega)$, et $c \in \mathbb{R}$ on a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$*

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \partial_i u (\Delta_\xi u - c f u^{2^*(k)-1}) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \left[-\nu_i \left(\frac{|\nabla_\xi u|^2}{2} - \frac{c f u^{2^*(k)}}{2^*(k)} \right) + \partial_i u \partial_\nu u \right] d\sigma - \frac{c}{2^*(k)} \int_{\Omega} \partial_i f(x) u^{2^*(k)} dx \end{aligned} \quad (6.28)$$

Preuve : L'identité classique de Pohozaev pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, vue dans Ghoussoub-

Robert [20] :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left((x-z)^i \partial_i u + \frac{n-2}{2} u \right) \Delta_{\xi} u dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \left[\langle (x-z), \nu \rangle_{\xi} \frac{|\nabla_{\xi} u|^2}{2} - \left((x-z)^i \partial_i u + \frac{n-2}{2} u \right) \partial_{\nu} u \right] d\sigma \end{aligned} \quad (6.29)$$

En intégrant par partie pour tout $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left((x-z)^i \partial_i u + \frac{n-2}{2} u \right) c f u^{2^*(k)-1} dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{c f \langle x-z, \nu \rangle_{\xi} u^{2^*(k)}}{2^*(k)} d\sigma - \frac{1}{2^*(k)} \int_{\Omega} c f \langle \nabla f(x), x-z \rangle_{\xi} u^{2^*(k)} dx \end{aligned} \quad (6.30)$$

L'association de ces deux égalités aboutit à l'identité générale

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left((x-z)^i \partial_i u + \frac{n-2}{2} u \right) (\Delta_{\xi} u - c f u^{2^*(k)-1}) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \left[\langle (x-z), \nu \rangle_{\xi} \left(\frac{|\nabla_{\xi} u|^2}{2} - \frac{c f u^{2^*(k)}}{2^*(k)} \right) - \left((x-z)^i \partial_i u + \frac{n-2}{2} u \right) \partial_{\nu} u \right] d\sigma \\ &+ \frac{1}{2^*(k)} \int_{\Omega} c \langle \nabla f(x), x-z \rangle_{\xi} u^{2^*(k)} dx \end{aligned} \quad (6.31)$$

On dérive par rapport à z^i pour obtenir (6.28)

□

Soit δ plus petit que le rayon de l'injectivité de (N, \tilde{g}) . Posons la métrique sur \mathbb{R}^m suivante

$$\hat{g}_{\epsilon} = (\exp_{\tilde{x}_{\epsilon}}^* \tilde{g})(X)$$

Nous considérons la fonction \hat{u}_{ϵ} définie sur une boule euclidienne de \mathbb{R}^m

$$\hat{u}_{\epsilon}(X) := u_{\epsilon}(\exp_{\tilde{x}_{\epsilon}}(X)) \text{ pour tout } X \in B_{\delta}(0) \subset \mathbb{R}^m \quad (6.32)$$

Remarque 6.2.2. On rappelle que, $\tilde{w}_{\epsilon}(X) := \mu_{\epsilon}^{\frac{m-2}{2}} \tilde{u}_{\epsilon}(\exp_{\tilde{x}_{\epsilon}}(\mu_{\epsilon} X))$ pour tout $X \in B_{\frac{\delta}{\mu_{\epsilon}}}(0) \subset \mathbb{R}^{n-k}$, qui converge dans $C^2(\mathbb{R}^m)$ vers \tilde{w} qui vérifie l'équation $(E'_{\tilde{w}})$. Or,

d'après [28], on sait que

$$\tilde{w}(X) = \left(\frac{K^2}{K^2 + |X|^2} \right)^{\frac{m-2}{2}} \quad (6.33)$$

Où, avec (6.5), on a

$$K^2 = \frac{(n-k)(n-k-2)}{K_0(n-k)A^{-\frac{2}{m-2}}} \quad (6.34)$$

Dans cette section, nous utiliserons largement les conséquences suivantes de l'estimation ponctuelle forte (6.21) et (6.24) :

$$\hat{u}_\epsilon(X) \leq C \left(\frac{\mu_\epsilon}{\mu_\epsilon^2 + |X|^2} \right)^{\frac{m-2}{2}} + O(\theta_\epsilon) \quad \text{dans } B_\delta(0) \quad (6.35)$$

$$\hat{u}_\epsilon(X) = O(\theta_\epsilon) \rightarrow 0 \quad \text{sur } \partial B_\delta(0) \quad (6.36)$$

$$|\nabla \hat{u}_\epsilon|(X) \leq C \frac{\mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}}}{(\mu_\epsilon^2 + |X|^2)^{\frac{m-1}{2}}} + O(\theta_\epsilon) \quad \text{dans } B_\delta(0) \quad (6.37)$$

$$|\nabla \hat{u}_\epsilon(X)| = O(\theta_\epsilon) \rightarrow 0 \quad \text{sur } \partial B_\delta(0) \quad (6.38)$$

$$\tilde{w}_\epsilon(X) \leq C \left(\frac{1}{1 + |X|^2} \right)^{\frac{m-2}{2}} + O(\theta_\epsilon) \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} \quad \text{dans } B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0) \quad (6.39)$$

$$|\nabla \tilde{w}_\epsilon|(X) \leq C \frac{1}{(1 + |X|^2)^{\frac{m-1}{2}}} + O(\theta_\epsilon) \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} \quad \text{dans } B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0) \quad (6.40)$$

Il est facile, en utilisant (\tilde{E}_ϵ) de vérifier que

$$\Delta_{\hat{g}_\epsilon} \hat{u}_\epsilon + \hat{h}_\epsilon \hat{u}_\epsilon = \hat{f}_\epsilon \hat{u}_\epsilon^{2^*(k)-1}, \quad \int_{B_\delta(0)} \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \hat{u}_\epsilon^{2^*} dv_{\hat{g}_\epsilon} = 1 + o(1) \quad (\hat{E}_\epsilon)$$

Où $\hat{h}_\epsilon(X) := \tilde{h}_\epsilon(\exp_{\bar{x}_\epsilon}(X))$ et $\hat{f}_\epsilon(X) := \tilde{f}_\epsilon(\exp_{\bar{x}_\epsilon}(X))$. Grâce au Lemme 6.1.4, et sans perdre généralité on peut supposer que $N = B(\bar{x}_\epsilon, 2r_0)$ pour un certain $r_0 > 0$

Lemme 6.2.3. *Sous les hypothèses 6.0.1, (6.5) et (6.6), pour tout $m \geq 4$ on a*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{M \setminus B(Gx_\epsilon, \delta)} u_\epsilon^2 dv_g}{\int_M u_\epsilon^2 dv_g} = 0 \text{ si } m = n - k \geq 4 \quad (6.41)$$

pour tout $\delta > 0$.

Preuve :

$$\begin{aligned} \int_{M \setminus B(Gx_\epsilon, \delta)} u_\epsilon^2 dv_g &\leq \int_{M \setminus B(Gx_\epsilon, \delta)} \sup_{M \setminus B(Gx_\epsilon, \delta)} u_\epsilon u_\epsilon dv_g \\ &\leq \sup_{M \setminus B(Gx_\epsilon, \delta)} u_\epsilon \int_{M \setminus B(Gx_\epsilon, \delta)} u_\epsilon dv_g \end{aligned}$$

En utilisons (6.20), on a

$$\begin{aligned} \int_{M \setminus B(Gx_\epsilon, \delta)} u_\epsilon^2 dv_g &\leq c \inf_{M \setminus B(Gx_\epsilon, \delta)} u_\epsilon \int_{M \setminus B(Gx_\epsilon, \delta)} u_\epsilon dv_g \\ &\leq c \left(\int_{M \setminus B(Gx_\epsilon, \delta)} \inf_{M \setminus B(Gx_\epsilon, \delta)} u_\epsilon^2 dv_g \right)^{\frac{1}{2}} \int_M u_\epsilon dv_g \\ &\leq \left(\int_M u_\epsilon^2 dv_g \right)^{\frac{1}{2}} \int_M u_\epsilon dv_g \\ &\leq \|u_\epsilon\|_2 \int_M u_\epsilon dv_g \end{aligned}$$

D'autre part, comme $\partial M = \emptyset$ en intégrant (E_ϵ) on aura $\int_M h_\epsilon u_\epsilon dv_g = \int_M u_\epsilon^{2^*(k)-1} dv_g$ par suite $\int_M u_\epsilon dv_g \leq \frac{1}{h} \int_M u_\epsilon^{2^*(k)-1} dv_g$, où $h > 0$ venant de (6.6). Alors :

$$\int_{M \setminus B(Gx_\epsilon, \delta)} u_\epsilon^2 dv_g \leq c \|u_\epsilon\|_{2^*(k)-1}^{2^*(k)-1} \|u_\epsilon\|_2$$

Si $m \geq 6$, on a $2^*(k) - 1 \leq 2$, donc par Hölder on aura $\|u_\epsilon\|_{2^*(k)-1}^{2^*(k)-1} \leq c \|u_\epsilon\|_2^{2^*(k)-1}$, et comme $u_\epsilon \rightarrow 0$ dans $L^2(M)$ alors

$$\int_{M \setminus B(Gx_\epsilon, \delta)} u_\epsilon^2 dv_g \leq c \|u_\epsilon\|_2^{2^*(k)} = o(\|u_\epsilon\|_2^2)$$

Si $4 \leq m \leq 5$, on a $2^*(k) - 1 = 2\omega + (1 - \omega)2^*(k)$ avec $\omega = \frac{m-2}{4} > 0$. Par Hölder on

aura $\|u_\epsilon\|_{2^{*(k)-1}}^{2^{*(k)-1}} \leq \|u_\epsilon\|_2^{2\omega} \|u_\epsilon\|_{2^{*(k)}}^{(1-\omega)2^{*(k)}}$. Par suite

$$\begin{aligned} \int_{M \setminus B(Gx_\epsilon, \delta)} u_\epsilon^2 dv_g &\leq \|u_\epsilon\|_{2^{*(k)-1}}^{2^{*(k)-1}} \|u_\epsilon\|_2 \\ &\leq \|u_\epsilon\|_2^{1+2\omega} \|u_\epsilon\|_{2^{*(k)}}^{(1-\omega)2^{*(k)}} \\ &\leq o(\|u_\epsilon\|_2^2) \end{aligned}$$

□

Lemme 6.2.4. *Sous les hypothèses 6.0.1, (6.5) et (6.6), on a :*

$$\theta_\epsilon^2 = \begin{cases} o(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m \geq 5 \\ o(\mu_\epsilon^2 \ln(\frac{1}{\mu_\epsilon})) & \text{si } m = 4 \end{cases} \quad (6.42)$$

Preuve : Pour tout $R > 0$ on a

$$\int_N \bar{u}_\epsilon^2 dv_{\tilde{g}} = \int_{B(\bar{x}_\epsilon, R\mu_\epsilon)} \bar{u}_\epsilon^2 dv_{\tilde{g}} + \int_{N \setminus B(\bar{x}_\epsilon, R\mu_\epsilon)} \bar{u}_\epsilon^2 dv_{\tilde{g}}$$

En utilisant la convergence de \tilde{w}_ϵ et le fait que $\int_{B(\bar{x}_\epsilon, R\mu_\epsilon)} \bar{u}_\epsilon^2 dv_{\tilde{g}} = \mu_\epsilon^2 \int_{B(0, R)} \tilde{w}_\epsilon^2 dv_{\tilde{g}_\epsilon}$, on aura

$$o\left(\int_{B(\bar{x}_\epsilon, R\mu_\epsilon)} \bar{u}_\epsilon^2 dv_{\tilde{g}}\right) = o(\mu_\epsilon^2)$$

D'autre part, par (6.21)

$$\int_{N \setminus B(\bar{x}_\epsilon, R\mu_\epsilon)} \bar{u}_\epsilon^2 dv_{\tilde{g}} = C\mu_\epsilon^{m-2} \int_{N \setminus B(\bar{x}_\epsilon, R\mu_\epsilon)} d_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\epsilon)^{2(2-m)} dv_{\tilde{g}} + O(\theta_\epsilon^2)$$

Par suite, pour $m \geq 5$

$$o\left(\int_{N \setminus B(\bar{x}_\epsilon, R\mu_\epsilon)} \bar{u}_\epsilon^2 dv_{\tilde{g}}\right) = o(\mu_\epsilon^2) + o(\theta_\epsilon^2)$$

Et pour $m = 4$,

$$o\left(\int_{N \setminus B(\bar{x}_\epsilon, R\mu_\epsilon)} \bar{u}_\epsilon^2 dv_{\bar{g}}\right) = o(\mu_\epsilon^2) + o(\theta_\epsilon^2) + o\left(\mu_\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\mu_\epsilon}\right)\right)$$

Donc

$$o\left(\int_N \bar{u}_\epsilon^2 dv_{\bar{g}}\right) = \begin{cases} o(\mu_\epsilon^2) + o(\theta_\epsilon^2) & \text{si } m \geq 5 \\ o(\mu_\epsilon^2) + o(\theta_\epsilon^2) + o\left(\mu_\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\mu_\epsilon}\right)\right) & \text{si } m = 4 \end{cases} \quad (6.43)$$

Avec $r_0 > 0$ tel que $B(\bar{x}_\epsilon, 2r_0) = N$, pour tout $\delta > 0$, en utilisant le Lemme 6.1.4, pour $m \geq 4$

$$\begin{aligned} \int_{N \setminus B(\bar{x}_\epsilon, \delta)} \bar{u}_\epsilon^2 dv_{\bar{g}} &\geq \int_{B(\bar{x}_\epsilon, 2r_0) \setminus B(\bar{x}_\epsilon, \delta)} \bar{u}_\epsilon^2 dv_{\bar{g}} \\ &\geq c \inf_{B(\bar{x}_\epsilon, 2r_0) \setminus B(\bar{x}_\epsilon, \delta)} \bar{u}_\epsilon^2 \\ &\geq c \sup_{\partial B(\bar{x}_\epsilon, 2r_0)} \bar{u}_\epsilon^2 \\ &\geq c\theta_\epsilon^2 \end{aligned}$$

Alors, pour tout $m \geq 4$

$$o\left(\int_{N \setminus B(\bar{x}_\epsilon, \delta)} \bar{u}_\epsilon^2 dv_{\bar{g}}\right) \geq O(\theta_\epsilon^2) \quad (6.44)$$

En groupant (6.43) et (6.44) dans le Lemme 6.2.3 on aura si $m \geq 5$:

$$\theta_\epsilon^2 \leq o(\mu_\epsilon^2) + o(\theta_\epsilon^2)$$

et, si $m = 4$

$$\theta_\epsilon \leq o(\mu_\epsilon^2) + o(\theta_\epsilon^2) + o\left(\mu_\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\mu_\epsilon}\right)\right)$$

Par suite (6.42) est vérifiée. □

Lemme 6.2.5. Soit $\phi_\epsilon \in C(B_\delta(0))$ pour $\delta > 0$, tel que $\phi_\epsilon(t_\epsilon) \rightarrow s \in \mathbb{R}$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$

où $t_\epsilon \rightarrow 0$. Donc, pour tout $p \geq 0$, $q \geq 2$ on a

$$\begin{aligned} & \int_{B_\delta(0)} \phi_\epsilon |X|^p \hat{u}_\epsilon^q dX \\ &= o(\mu_\epsilon^{m+p+1}) + O(\theta_\epsilon^q) + \begin{cases} \mu_\epsilon^{m+p-\frac{q(m-2)}{2}} \ln\left(\frac{1}{\mu_\epsilon}\right) (K^{q(m-2)} w_{m-1} s + o(1)) & m(q-1) = 2q+p \\ \mu_\epsilon^{m+p-\frac{q(m-2)}{2}} (s \int_{\mathbb{R}^m} |X|^p \tilde{w}^q dX + o(1)) & m(q-1) > 2q+p \end{cases} \end{aligned}$$

Où K est définie dans (6.33).

Preuve : En utilisant (6.39), le Lemme 6.2.4 et le fait que pour $m(q-1) > 2q+p$ on a $X \mapsto \frac{|X|^p}{(1+|X|^2)^{\frac{q(m-2)}{2}}} \in L^1(\mathbb{R}^m)$, nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue, pour $\epsilon \rightarrow 0$ pour prouver que

$$\int_{B_\delta(0)} \phi_\epsilon |X|^p \hat{u}_\epsilon^q dX = \mu_\epsilon^{m+p-\frac{q(m-2)}{2}} \left(s \int_{\mathbb{R}^m} |X|^p \tilde{w}^q dX + o(1) \right) + O(\theta_\epsilon^q)$$

D'autre part pour $m(q-1) = 2q+p$

$$\begin{aligned} & K^{-q(m-2)} \int_{B_{\delta\mu_\epsilon^{-1}}(0)} \frac{|X|^p}{\left(1 + \left|\frac{X}{K}\right|^2\right)^{\frac{q(m-2)}{2}}} dX = \int_{B_{\delta\mu_\epsilon^{-1}}(0)} \frac{|X|^p}{(K^2 + |X|^2)^{\frac{q(m-2)}{2}}} dX \\ &= w_{m-1} \int_1^{\delta\mu_\epsilon^{-1}} \frac{r^{m-1+p}}{(K^2 + r^2)^{\frac{q(m-2)}{2}}} dr + O(1) \\ &= w_{m-1} \int_1^{\delta\mu_\epsilon^{-1}} \frac{1}{r} dr + O\left(\int_1^{\delta\mu_\epsilon^{-1}} \frac{1}{r^{m(q-1)+p}}\right) + O(1) \\ &= w_{m-1} \ln\left(\frac{\delta}{\mu_\epsilon}\right) + O(1) \end{aligned}$$

En utilisant les résultat vue dans Cheikh-Ali [28], on peut vérifier que pour tout $\alpha > 0$, il existe $r_\alpha > 0$ tel que

$$\frac{1}{1+\alpha} \frac{1}{\left(1 + \left|\frac{X}{K}\right|^2\right)^{\frac{m-2}{2}}} + O(\theta_\epsilon) \mu^{\frac{m-2}{2}} \leq \tilde{w}_\epsilon \leq (1+\alpha) \frac{1}{\left(1 + \left|\frac{X}{K}\right|^2\right)^{\frac{m-2}{2}}} + O(\theta_\epsilon) \mu^{\frac{m-2}{2}}$$

pour tout $X \in \mathbb{R}^m$ tel que $|X| < r_\alpha \mu_\epsilon^{-1}$. Combinons les dernières égalités, en posant $\epsilon \rightarrow 0$ et puis $\alpha \rightarrow 0$ on aura le résultat attendu.

□

Lemme 6.2.6. Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension $n \geq 3$. Soient $(x_\epsilon)_{\epsilon>0} \in M$ une suite des points qui converge vers $x_0 \in M$. Posons $f \in C(M)$ tel que $\nabla f(x_0) = 0$. Alors

$$\partial_i(f \circ \exp_{x_\epsilon})(0) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(f \circ \exp_{x_0})(0) (\exp_{x_0}^{-1}(x_\epsilon))^j + o(d_g(x_\epsilon, x_0))$$

Preuve : Nous estimons $\partial_i(f \circ \exp_{x_\epsilon})(0)$ avec le développement de Taylor en x_ϵ . Nous prenons la carte exponentielle \exp_{x_0} en x_0 . Nous définissons $\tilde{f} := f \circ \exp_{x_0}$. Par suite on a

$$\partial_i \tilde{f}(0) = 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, n.$$

On définit $X_\epsilon \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_\epsilon = \exp_{x_0}(X_\epsilon)$. Puisque $x_\epsilon \rightarrow x_0$, on a que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} X_\epsilon = 0$. On a alors

$$f \circ \exp_{x_\epsilon}(X) = \tilde{f} \circ \varphi(X_\epsilon, X) \text{ pour } X \in \mathbb{R}^n$$

Où

$$\varphi(Z, X) := \exp_{x_0}^{-1} \circ \exp_{\exp_{x_0}(Z)}(X)$$

Notons que

$$\varphi(0, X) = X \text{ et } \varphi(Z, 0) = Z \text{ pour } X, Z \in \mathbb{R}^n.$$

On aura

$$\begin{aligned} \partial_i(f \circ \exp_{x_\epsilon})(0) &= \frac{\partial}{\partial X_i} \tilde{f} \circ \varphi(X_\epsilon, X)|_{X=0} = d\tilde{f}_{\varphi(X_\epsilon, 0)} \frac{\partial}{\partial X_i} \varphi(X_\epsilon, X)|_{X=0} \\ &= d\tilde{f}_{\varphi(0, 0)} \frac{\partial}{\partial X_i} \varphi(0, X)|_{X=0} + \frac{\partial}{\partial Z_j} \left(d\tilde{f}_{\varphi(Z, 0)} \frac{\partial}{\partial X_i} \varphi(Z, X) \right) \Big|_{X=Z=0} (X_\epsilon)^j + o(|X_\epsilon|) \end{aligned}$$

D'autre part, $\varphi(0, 0) = 0$ et $d\tilde{f}_0 = 0$. Donc

$$\begin{aligned} \partial_i(f \circ \exp_{x_\epsilon})(0) &= \frac{\partial}{\partial Z_j} \left(d\tilde{f}_{\varphi(Z, 0)} \right) \Big|_{Z=0} \left(\frac{\partial}{\partial X_i} \varphi(0, X) \right) \Big|_{X=0} (X_\epsilon)^j + o(|X_\epsilon|) \\ &= \frac{\partial}{\partial Z_j} \left(d\tilde{f}_{\varphi(Z, 0)} \right) \Big|_{Z=0} \tilde{e}_i(X_\epsilon)^j + o(|X_\epsilon|) \quad \text{puisque } \varphi(0, X) = X \\ &= \frac{\partial}{\partial Z_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{f}(\varphi(Z, 0)) \right) \Big|_{Z=0} (X_\epsilon)^j + o(|X_\epsilon|) \end{aligned}$$

Et comme $\varphi(Z, 0) = Z$, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \partial_i(f \circ \exp_{x_\epsilon})(0) &= \frac{\partial}{\partial Z_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{f}(Z) \right)_{|Z=0} (X_\epsilon)^j + o(|X_\epsilon|) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tilde{f}(0) (X_\epsilon)^j + o(d_g(x_\epsilon, x_0)) \end{aligned}$$

□

Hypothèse 6.2.7. *On suppose que la fonction \bar{v} est non dégénérée en \bar{x}_0 , au sens qu'il existe $C > 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ on a*

$$\frac{\partial^2 \bar{v}(\bar{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} X^i X^j \geq C |X|^2 \text{ pour tout } X \in \mathbb{R}^m$$

Nous montrons que l'orbite converge suffisamment vite vers l'orbite limite :

Théorème 6.2.8 (Mesmar). *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension n , et posons G un sous groupe des isométries de M qui vérifie l'hypothèse 6.0.1. Soit (u_ϵ) une suite de solution positives et G -invariantes de*

$$\Delta_g u_\epsilon + h_\epsilon u_\epsilon = \lambda_\epsilon u_\epsilon^{2^*(k)-1}, \quad \int_M u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 1 \quad (E_\epsilon)$$

avec $(h_\epsilon) \in C^1(M)$ G -invariante et $\lambda_\epsilon \in \mathbb{R}$. On suppose que (6.6), (6.5) et (6.2.7) ont lieu. On suppose que $u_\epsilon \rightharpoonup 0$ faiblement dans $H_1^2(M)$. Alors Gx_ϵ converge vers une unique orbite de concentration Gx_0 de dimension minimale k et de volume minimal. De plus, on a

$$d_g(x_\epsilon, Gx_0) = o(\mu_\epsilon)$$

Preuve : Le théorème ?? nous assure l'existence et l'unicité de l'orbite de concentration, ainsi que la convergence de x_ϵ vers cette orbite. Il nous reste à démontrer l'estimation de la distance. Or $d_g(x_\epsilon, Gx_0) = O(d_{\bar{g}}(\bar{x}_\epsilon, \bar{x}_0))$, par suite il suffit de démontrer que $d_{\bar{g}}(\bar{x}_\epsilon, \bar{x}_0) = o(\mu_\epsilon)$. L'identité de Pohozaev (6.28) appliquée à notre suite de solution \hat{u}_ϵ s'écrit

$$A_\epsilon = -B_\epsilon + C_\epsilon - D_\epsilon \quad (6.45)$$

Avec

$$\begin{aligned}
 A_\epsilon &:= -\frac{1}{2^*(k)} \int_{B_\delta(0)} \partial_l \hat{f}_\epsilon \hat{u}_\epsilon^{2^*(k)} dX \\
 B_\epsilon &:= \int_{\partial B_\delta(0)} - \left[\nu_l \left(\frac{|\nabla \hat{u}_\epsilon|^2}{2} - \frac{\hat{f}_\epsilon \hat{u}_\epsilon}{2^*(k)} \right) + \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_\nu \hat{u}_\epsilon \right] d\nu \\
 C_\epsilon &:= \int_{B_\delta(0)} \partial_l \hat{u}_\epsilon \hat{h}_\epsilon \hat{u}_\epsilon dX \\
 D_\epsilon &:= \int_{B_\delta(0)} \partial_l \hat{u}_\epsilon (\Delta_{\hat{\xi}} \hat{u}_\epsilon - \Delta_{\hat{g}_\epsilon} \hat{u}_\epsilon) dX
 \end{aligned}$$

Or,

$$- \int_{B_\delta(0)} \partial_l \hat{u}_\epsilon \hat{h}_\epsilon \hat{u}_\epsilon dX = \int_{B_\delta(0)} \partial_l \frac{\hat{h}_\epsilon}{2} \hat{u}_\epsilon^2 dX - \int_{\partial B_\delta(0)} \hat{h}_\epsilon \frac{\hat{u}_\epsilon^2}{2} \vec{\nu}_l d\sigma$$

Par (6.38) et le Lemme 6.2.4, on a

$$\int_{\partial B_\delta(0)} \hat{h}_\epsilon \frac{\hat{u}_\epsilon^2}{2} \vec{\nu}_l d\sigma = O(\theta_\epsilon^2) = o(\mu_\epsilon^2)$$

D'autre part, $\mu_\epsilon \rightarrow 0$, par suite $\partial_i \hat{h}_\epsilon(\mu_\epsilon X) \rightarrow \text{Vol}(Gx_0)(\partial_i h_0)(x_0)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Par suite, par le Lemme 6.2.5, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, on aura avec (6.42) que

$$\int_{B_\delta(0)} \partial_l \frac{\hat{h}_\epsilon}{2} \hat{u}_\epsilon^2 dX = \begin{cases} \mu_\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\mu_\epsilon}\right) (K^4 \text{Vol}(Gx_0)(\partial_l h_0)(x_0) + o(1)) & \text{si } m = 4 \\ \mu_\epsilon^2 (\text{Vol}(Gx_0)(\partial_l h_0)(x_0) \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{w}^2 dX + o(1)) & \text{si } m \geq 5 \end{cases}$$

Alors

$$C_\epsilon = \begin{cases} O\left(\mu_\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\mu_\epsilon}\right)\right) & \text{si } m = 4 \\ o(\mu_\epsilon) & \text{si } m \geq 5 \end{cases}$$

Par (6.38), (6.35) et le Lemme 6.2.4, on a pour tout $X \in \partial B_\delta(0)$ on a $\hat{u}_\epsilon, |\nabla \hat{u}_\epsilon| =$

$O(\theta_\epsilon) = o(\mu_\epsilon)$, alors

$$B_\epsilon = O(\theta_\epsilon^2) = o(\mu_\epsilon^2) = o(\mu_\epsilon)$$

Il nous reste à estimer D_ϵ . Notons que Cheikh-Ali [28] a montré que $-(\Delta_{\hat{g}_\epsilon} - \Delta_\xi) = (\hat{g}_\epsilon^{ij} - \delta^{ij})\partial_{ij} - \hat{g}_\epsilon^{ij}\hat{\Gamma}_{ij}^k\partial_k$ et les symboles de Christoffel sont

$\hat{\Gamma}_{ij}^k := \frac{1}{2}\hat{g}_\epsilon^{kp}(\partial_i(\hat{g}_\epsilon)_{jp} + \partial_j(\hat{g}_\epsilon)_{ip} - \partial_p(\hat{g}_\epsilon)_{ij})$. Par suite, on écrit

$$D_\epsilon = D_{1,\epsilon} - D_{2,\epsilon} \tag{6.46}$$

Où

$$D_{1,\epsilon} := \int_{B_\delta(0)} (\hat{g}_\epsilon^{ij} - \delta^{ij})\partial_l\hat{u}_\epsilon\partial_{ij}\hat{u}_\epsilon dX$$

$$D_{2,\epsilon} := \int_{B_\delta(0)} \hat{g}_\epsilon^{ij}\hat{\Gamma}_{ij}^k\partial_l\hat{u}_\epsilon\partial_k\hat{u}_\epsilon dX$$

Nous estimons maintenant les $D_{i,\epsilon}$ séparément. Notons que, puisque l'application exponentielle est normale en 0, nous avons que $\partial_l\hat{g}_\epsilon^{ij}(0) = 0$ pour tout $i, j, l = 1, \dots, m$. Pour $i, j, k = 1, \dots, m$, la formule de Taylor en 0

$$\hat{\Gamma}_{ij}^k(X) = \sum_{q=1}^m X^q\partial_q\hat{\Gamma}_{ij}^k(0) + O(|X|^2) \tag{6.47}$$

et

$$\hat{g}_\epsilon^{ij}(X) - \delta^{ij} = \frac{1}{2}\sum_{\beta_1, \beta_2} X^{\beta_1}X^{\beta_2}\partial_{\beta_1\beta_2}\hat{g}_\epsilon^{ij}(0) + O(|X|^3) \tag{6.48}$$

Étape I : Estimation de $D_{1,\epsilon}$. On note $b^{ij} = (\hat{g}_\epsilon^{ij} - \delta^{ij})$ pour tout $i, j, l = 1, \dots, m$. En utilisant les estimations de \hat{u}_ϵ et de \tilde{w}_ϵ vue dans (6.35) et (6.39) on a

$$D_{1,\epsilon} = \int_{B_\delta(0)} b^{ij}\partial_l\hat{u}_\epsilon\partial_{ij}\hat{u}_\epsilon dX$$

$$= - \int_{B_\delta(0)} \partial_i b^{ij}\partial_l\hat{u}_\epsilon\partial_j\hat{u}_\epsilon dX - \int_{B_\delta(0)} b^{ij}\partial_j\hat{u}_\epsilon\partial_{il}\hat{u}_\epsilon dX + \int_{\partial B_\delta(0)} b^{ij}\partial_j\hat{u}_\epsilon\partial_l\hat{u}_\epsilon d\sigma \vec{\nu}_i$$

Par (6.36) et le Lemme 6.2.4

$$\int_{\partial B_\delta(0)} b^{ij} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_l \hat{u}_\epsilon d\sigma \vec{\nu}_i = O(\theta_\epsilon^2) = o(\mu_\epsilon^2)$$

Par suite

$$D_{1,\epsilon} = - \int_{B_\delta(0)} \partial_i b^{ij} \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX + D'_{1,\epsilon} + o(\mu_\epsilon^2)$$

avec

$$\begin{aligned} D'_{1,\epsilon} &= - \int_{B_\delta(0)} b^{ij} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_{il} \hat{u}_\epsilon dX \\ &= \int_{B_\delta(0)} b^{ij} \partial_{lj} \hat{u}_\epsilon \partial_i \hat{u}_\epsilon dX + \int_{B_\delta(0)} \partial_l b^{ij} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_i \hat{u}_\epsilon dX + o(\mu_\epsilon^2) \\ &= \int_{B_\delta(0)} b^{ji} \partial_{li} \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX + \int_{B_\delta(0)} \partial_l b^{ij} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_i \hat{u}_\epsilon dX + o(\mu_\epsilon^2) \end{aligned}$$

Notons que $b^{ij} = b^{ji}$, par suite

$$D'_{1,\epsilon} = \int_{B_\delta(0)} b^{ij} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_{il} \hat{u}_\epsilon dX + \int_{B_\delta(0)} \partial_l b^{ij} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_i \hat{u}_\epsilon dX + o(\mu_\epsilon^2)$$

Alors

$$D'_{1,\epsilon} = \frac{1}{2} \int_{B_\delta(0)} \partial_l b^{ij} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_i \hat{u}_\epsilon dX + o(\mu_\epsilon^2)$$

Posons $A_{jl} = \frac{1}{2}\partial_l b^{jj} - \partial_j b^{jj}$. Par conséquent, avec (6.42)

$$\begin{aligned}
 D_{1,\epsilon} &= \int_{B_\delta(0)} A_{ijl} \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX + o(\mu_\epsilon^2) \\
 &= \partial_{\beta_1} A_{ijl}(0) \int_{B_\delta(0)} X^{\beta_1} \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^2 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX\right) + o(\mu_\epsilon^2) \\
 &= \mu_\epsilon \partial_{\beta_1} A_{ijl}(0) \int_{B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0)} X^{\beta_1} \partial_i \tilde{w}_\epsilon \partial_j \tilde{w}_\epsilon dX + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^2 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX\right) + o(\mu_\epsilon^2) \\
 &= \mu_\epsilon \left[\frac{1}{m} \partial_{\beta_1} A_{ijl}(0) \int_{\mathbb{R}^m} X^{\beta_1} |\nabla \tilde{w}|^2 dX + o(1) \right] + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^2 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX\right) + o(\mu_\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

En changeant le role de X^{β_1} par $-X^{\beta_1}$, où \tilde{w} est de symétrie radiale (voir Cheikh-Ali [28]), on déduit que $\int_{\mathbb{R}^m} X^{\beta_1} |\nabla \tilde{w}|^2 dX = 0$. Par suite

$$D_{1,\epsilon} = o(\mu_\epsilon) + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^2 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX\right)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 \int_{B_\delta(0)} |X|^2 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX &= \int_{B_{R\mu_\epsilon}(0)} |X|^2 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX + \int_{B_\delta(0) \setminus B_{R\mu_\epsilon}(0)} |X|^2 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX \\
 &= \mu_\epsilon^2 \int_{B_R(0)} |X|^2 |\nabla \tilde{w}_\epsilon|^2 dX + \int_{B_\delta(0) \setminus B_{R\mu_\epsilon}(0)} |X|^2 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX
 \end{aligned}$$

D'après la convergence forte de \tilde{w}_ϵ vers \tilde{w} vue dans (6.18), on a que $\int_{B_R(0)} |X|^2 |\nabla \tilde{w}_\epsilon|^2 dX = O(1)$. Par nos estimations (6.37), le fait que $\theta_\epsilon = o(\mu_\epsilon)$ et comme dans la preuve du Lemme 6.2.5, on obtient

$$\int_{B_\delta(0) \setminus B_{R\mu_\epsilon}(0)} |X|^2 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX = \begin{cases} O\left(\mu_\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\mu_\epsilon}\right)\right) & \text{si } m = 4 \\ o(\mu_\epsilon) & \text{si } m \geq 5 \end{cases}$$

En groupant ces valeurs, on aura

$$\int_{B_\delta(0)} |X|^2 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX = \begin{cases} O\left(\mu_\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\mu_\epsilon}\right)\right) & \text{si } m = 4 \\ o(\mu_\epsilon) & \text{si } m \geq 5 \end{cases} \quad (6.49)$$

Par suite, pour $m \geq 4$

$$D_{1,\epsilon} = o(\mu_\epsilon)$$

Étape II : Comme $\hat{g}_\epsilon^{ij} - \delta^{ij} = O(|X|^2)$ quand $X \rightarrow 0$, en utilisant (6.42) et (6.47), lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, nous avons

$$\begin{aligned} D_{2,\epsilon} &= \int_{B_\delta(0)} \hat{g}_\epsilon^{ij} \hat{\Gamma}_{ij}^k \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_k \hat{u}_\epsilon dX \\ &= \delta^{ij} \int_{B_\delta(0)} \hat{\Gamma}_{ij}^k \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_k \hat{u}_\epsilon dX + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^2 \hat{\Gamma}_{ij}^k \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_k \hat{u}_\epsilon dX\right) \\ &= \partial_q \hat{\Gamma}_{ij}^k(0) \int_{B_\delta(0)} X^q \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_k \hat{u}_\epsilon dX + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^2 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX\right) \\ &= \mu_\epsilon \partial_q \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) \int_{B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0)} X^q \partial_l \tilde{w}_\epsilon \partial_k \tilde{w}_\epsilon dX + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^2 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX\right) \\ &= \mu_\epsilon \partial_q \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) \left(\int_{\mathbb{R}^m} X^q (\tilde{w}')^2 dX + o(1)\right) + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^2 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX\right) + o(\mu_\epsilon) \end{aligned}$$

Comme déjà fait dans l'étape précédente, on a $\int_{\mathbb{R}^m} X^q (\tilde{w}')^2 dX = 0$. Par suite en utilisant (6.49), nous obtenons pour $m \geq 4$

$$D_{2,\epsilon} = o(\mu_\epsilon)$$

En mettant nos égalités dans (6.45), on aura pour $m \geq 4$

$$A_\epsilon = o(\mu_\epsilon) \quad (6.50)$$

Posons maintenant $X_\epsilon := \exp_{\bar{x}_0}^{-1}(\bar{x}_\epsilon)$ et estimons A_ϵ . En utilisant encore (6.42), on a

$$A_\epsilon = -\frac{1}{2^{*(k)}} \int_{B_\delta(0)} \partial_i \hat{f}_\epsilon \hat{u}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX \quad (6.51)$$

$$= -\frac{1}{2^{*(k)}} \partial_i \hat{f}_\epsilon(0) \int_{B_\delta(0)} \hat{u}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX - \frac{1}{2^{*(k)}} \partial_{ij} \hat{f}_\epsilon(0) \int_{B_\delta(0)} X^j \hat{u}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX \quad (6.52)$$

$$+ O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^2 \hat{u}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX\right) \quad (6.53)$$

$$= -\frac{1}{2^{*(k)}} \partial_i \hat{f}_\epsilon(0) \int_{B_\delta(0)} \hat{u}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX - \frac{1}{2^{*(k)}} \partial_{ij} \hat{f}_\epsilon(0) \mu_\epsilon \int_{B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0)} X^j \tilde{w}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX \quad (6.54)$$

$$+ O\left(\mu_\epsilon^2 \int_{B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0)} |X|^2 \tilde{w}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX\right) \quad (6.55)$$

$$= -\frac{1}{2^{*(k)}} \partial_i \hat{f}_\epsilon(0) \int_{B_\delta(0)} \hat{u}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX + o(\mu_\epsilon) \quad (6.56)$$

$$(6.57)$$

d'autre part, par le Lemme 6.2.6, on a

$$\partial_i \hat{f}_\epsilon(0) = \partial_i (\tilde{f}_\epsilon \circ \exp_{x_\epsilon})(0) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\tilde{f}_\epsilon \circ \exp_{x_0})(0) (\exp_{x_0}^{-1}(x_\epsilon))^j + o(|X_\epsilon|) \quad (6.58)$$

$$= \lambda_\epsilon a_{ij}(0) X_\epsilon^j + o(|X_\epsilon|) \quad (6.59)$$

Où $a_{ij}(0) = \partial_{ij} \left(\bar{v}(\bar{x}_0)^{-\frac{2}{m-2}} \right)$. Et par le théorème 6.1.3, il existe $C_0 > 0$ tel que

$$\int_{B_\delta(0)} \hat{u}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX = C_0 + o(1) \quad (6.60)$$

Groupons (6.60), (6.58) et (6.51), nous obtenons

$$a_{ij}(0) X_\epsilon^j + o(|X_\epsilon|) = o(\mu_\epsilon)$$

Multiplions par X_ϵ^i et faisons la somme sur i

$$a_{ij}(0)X_\epsilon^j X_\epsilon^i + o(|X_\epsilon|^2) = o(\mu_\epsilon |X_\epsilon|)$$

Par hypothèse 6.2.7, il existe $C > 0$ tel que

$$C \sum_{ij} |X_\epsilon|^2 \leq a_{ij}(0)X_\epsilon^j X_\epsilon^i + o(|X_\epsilon|^2) = o(\mu_\epsilon |X_\epsilon|)$$

Par suite $|X_\epsilon| = o(\mu_\epsilon)$ et l'estimation de notre théorème est vérifiée. □

6.3 Localisation de l'orbite de concentration

Lemme 6.3.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un domaine borné lisse, et soit $u \in C^2(\bar{\Omega})$ tel que $u \geq 0$. Alors pour tout $f \in C(\Omega)$, et $c \in \mathbb{R}$ on a*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(x^i \partial_i u + \frac{m-2}{2} u \right) (\Delta_\xi u - c f u^{2^*-1}) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \left[\langle x, \nu \rangle \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} - \frac{c f u^{2^*(k)}}{2^*(k)} \right) - \left(x^i \partial_i u + \frac{m-2}{2} u \right) \partial_\nu u \right] d\sigma \\ & - \frac{1}{2^*(k)} \int_{\Omega} \langle \nabla f(x), x \rangle u^{2^*(k)} dx \end{aligned} \quad (6.61)$$

Preuve : Posons $z = 0$ dans (6.31), on aura (6.61). □

Lemme 6.3.2. *Pour tout $i, j, \beta_1, \beta_2 \geq 1$ et pour $m = 4$ on a*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\mu_\epsilon}\right)} \int_{B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0)} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_i \tilde{w}_\epsilon \partial_j \tilde{w}_\epsilon = \frac{(m-2)^2}{m(m+2)} K^4 w_{m-1} (\delta^{ij} \delta^{\beta_1 \beta_2} + \delta^{i\beta_1} \delta^{j\beta_2} + \delta^{i\beta_2} \delta^{j\beta_1}) \quad (6.62)$$

Preuve : Par Cheikh-Ali [28], pour tout $i, j, \beta_1, \beta_2 \geq 1$ et pour $m = 4$, en utilisant

(6.42), on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\mu_\epsilon}\right)} \int_{B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0)} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_i \tilde{w}_\epsilon \partial_j \tilde{w}_\epsilon = (m-2)^2 K^4 \int_{S^{m-1}} \sigma^i \sigma^j \sigma^{\beta_1} \sigma^{\beta_2} d\sigma \quad (6.63)$$

Où K est défini dans (6.33). D'autre part, il suit de [7] que

$$\int_{S^{m-1}} \sigma^i \sigma^j \sigma^{\beta_1} \sigma^{\beta_2} d\sigma = \frac{1}{m(m+2)} w_{m-1} (\delta^{ij} \delta^{\beta_1 \beta_2} + \delta^{i\beta_1} \delta^{j\beta_2} + \delta^{i\beta_2} \delta^{j\beta_1}) \quad (6.64)$$

Groupons ces deux égalités on aura (6.62) □

Théorème 6.3.3. *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension n , et posons G un sous groupe fermé des isométries de M qui vérifie l'hypothèse 6.0.1. Soit (u_ϵ) une suite de solution de (E_ϵ) de sorte que $u_\epsilon > 0$, G -invariants et*

$$\Delta_g u_\epsilon + h_\epsilon u_\epsilon = \lambda_\epsilon u_\epsilon^{2^*(k)-1}, \quad \int_M u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 1$$

Où k représente le dimension minimal de volume d'orbite de concentration de G et on note $m = n - k$. On suppose que $u_\epsilon \rightharpoonup 0$ faiblement dans $H_{1,G}^2(M)$. On suppose que (6.6), (6.5) et (6.2.7) ont lieu. Soit $(x_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ une suite des points de M où u_ϵ atteint son max qui converge vers x_0 , où Gx_0 est la seule orbite de concentration. Alors

$$h_0(x_0) = \frac{m-2}{4(m-1)} \left(\text{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0) + 3 \frac{\Delta_{\bar{g}} \bar{v}(\bar{x}_0)}{\bar{v}(\bar{x}_0)} \right) \text{ lorsque } m \geq 4 \quad (6.65)$$

Où $\bar{v}(\bar{x}) = \text{Vol}(Gx)$ et \bar{g} est la métrique du quotient Ω/G introduite au Chapitre 3.

Preuve :

l'identité de Pohozaev (6.61) s'écrit :

$$A_\epsilon + B_\epsilon = C_\epsilon + D_\epsilon \quad (6.66)$$

Avec, pour $l = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned}
 B_\epsilon &:= \int_{\partial B_\delta(0)} (X, \nu) \left(\frac{|\nabla \hat{u}_\epsilon|^2}{2} - \frac{\hat{f}_\epsilon \hat{u}_\epsilon^{2^*(k)}}{2^*(k)} \right) - \left(X^l \partial_l \hat{u}_\epsilon + \frac{m-2}{2} \hat{u}_\epsilon \right) \partial_\nu \hat{u}_\epsilon d\nu \\
 C_\epsilon &:= - \int_{B_\delta(0)} \left(X^l \partial_l \hat{u}_\epsilon + \frac{m-2}{2} \hat{u}_\epsilon \right) \hat{h}_\epsilon \hat{u}_\epsilon dX \\
 D_\epsilon &:= - \int_{B_\delta(0)} \left(X^l \partial_l \hat{u}_\epsilon + \frac{m-2}{2} \hat{u}_\epsilon \right) (\Delta_{\hat{g}_\epsilon} \hat{u}_\epsilon - \Delta_\xi \hat{u}_\epsilon) dX \\
 A_\epsilon &:= \frac{1}{2^*(k)} \int_{B_\delta(0)} (\nabla \hat{f}_\epsilon, X) \hat{u}_\epsilon^{2^*(k)} dX
 \end{aligned}$$

Étape 1. On montre que

$$C_\epsilon = \begin{cases} h_0(x_0) \mu_\epsilon^2 \ln \left(\frac{1}{\mu_\epsilon} \right) K^4 w_3 + o(\mu_\epsilon^2 \ln \frac{1}{\mu_\epsilon}) & \text{si } m = 4 \\ h_0(x_0) \mu_\epsilon^2 \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{w}^2 dX + o(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m \geq 5 \end{cases} \quad (6.67)$$

En effet on a

$$\begin{aligned}
 C_\epsilon &= - \int_{B_\delta(0)} \left(X^i \partial_i \hat{u}_\epsilon + \frac{m-2}{2} \hat{u}_\epsilon \right) \hat{h}_\epsilon \hat{u}_\epsilon dX \\
 &= \int_{B_\delta(0)} \left(X^i \partial_i \frac{\hat{h}_\epsilon}{2} + \hat{h}_\epsilon \right) \hat{u}_\epsilon^2 dX - \int_{\partial B_\delta(0)} X^i \hat{h}_\epsilon \frac{\hat{u}_\epsilon^2}{2} d\sigma \vec{\nu}_i
 \end{aligned}$$

Par (6.35) et le Lemme 6.2.4 on peut montrer facilement que

$$\int_{\partial B_\delta(0)} X^i \hat{h}_\epsilon \frac{\hat{u}_\epsilon^2}{2} d\sigma \vec{\nu}_i = O(\theta_\epsilon^2) = o(\mu_\epsilon^2)$$

Notons que $\hat{h}_\epsilon(\mu_\epsilon X) \rightarrow h_0(x_0)$, par suite par le lemme 6.2.5 et en utilisant encore (6.42), on a

$$\int_{B_\delta(0)} \left(X^i \partial_i \frac{\hat{h}_\epsilon}{2} + \hat{h}_\epsilon \right) \hat{u}_\epsilon^2 dX = \begin{cases} h_0(x_0) \mu_\epsilon^2 \ln \left(\frac{1}{\mu_\epsilon} \right) K^4 w_3 + o(\mu_\epsilon^2 \ln \frac{1}{\mu_\epsilon}) & \text{si } m = 4 \\ h_0(x_0) \mu_\epsilon^2 \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{w}^2 dX + o(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m \geq 5 \end{cases}$$

En groupant les deux derniers égalités on aura (6.67)

Étape 2. On montre que

$$B_\epsilon = o(\mu_\epsilon^2) \quad (6.68)$$

C'est une conséquence directe de (6.38) et du Lemme 6.2.4.

Étape 3. On vérifie que

$$D_\epsilon = \begin{cases} -\mu_\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\mu_\epsilon}\right) \frac{1}{6} \text{Scal}_{\hat{g}_\epsilon}(\bar{x}_\epsilon) w_3 K^4 + o(\mu_\epsilon^2 \ln \frac{1}{\mu_\epsilon}) & \text{si } m = 4 \\ -\mu_\epsilon^2 \frac{m-2}{4(m-1)} \text{Scal}_{\hat{g}_\epsilon}(\bar{x}_\epsilon) \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{w}^2 dX + o(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m \geq 5 \end{cases} \quad (6.69)$$

Par Cheikh-Ali [28] $-(\Delta_{\hat{g}_\epsilon} - \Delta_{Eucl}) = (\hat{g}_\epsilon^{ij} - \delta^{ij}) \partial_{ij} - \hat{g}_\epsilon^{ij} \hat{\Gamma}_{ij}^k \partial_k$ et les symboles de Christoffel sont $\hat{\Gamma}_{ij}^k := \frac{1}{2} \hat{g}_\epsilon^{kp} (\partial_i(\hat{g}_\epsilon)_{jp} + \partial_j(\hat{g}_\epsilon)_{ip} + \partial_p(\hat{g}_\epsilon)_{ij})$. Par suite, on écrit

$$D_\epsilon = D_{1,\epsilon} - D_{2,\epsilon} + \frac{m-2}{2} D_{3,\epsilon} - \frac{m-2}{2} D_{4,\epsilon} \quad (6.70)$$

Où

$$\begin{aligned} D_{1,\epsilon} &:= \int_{B_\delta(0)} (\hat{g}_\epsilon^{ij} - \delta^{ij}) X^l \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_{ij} \hat{u}_\epsilon dX \\ D_{2,\epsilon} &:= \int_{B_\delta(0)} \hat{g}_\epsilon^{ij} X^l \hat{\Gamma}_{ij}^k \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_k \hat{u}_\epsilon dX \\ D_{3,\epsilon} &:= \int_{B_\delta(0)} (\hat{g}_\epsilon^{ij} - \delta^{ij}) \hat{u}_\epsilon \partial_{ij} \hat{u}_\epsilon dX \\ D_{4,\alpha} &:= \int_{B_\delta(0)} \hat{g}_\epsilon^{ij} X^l \hat{\Gamma}_{ij}^k \hat{u}_\epsilon \partial_k \hat{u}_\epsilon dX \end{aligned}$$

Nous estimons maintenant les $D_{i,\epsilon}$ séparément.

Étape 3.i On montre que

$$D_{1,\epsilon} = \begin{cases} \mu_\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\mu_\epsilon}\right) K^4 \left(-4 \partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) + \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ii}(0) \right) + O(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m = 4 \\ \mu_\epsilon^2 \left[-\frac{1}{m} \partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \tilde{w}|^2 dX \right. \\ \quad \left. + \frac{m}{4} \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_j \tilde{w} \partial_i \tilde{w} dX \right] \\ \quad + o(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m \geq 5 \end{cases} \quad (6.71)$$

On note $b^{ijl} = (\hat{g}_\epsilon^{ij} - \delta^{ij})X^l$ pour tout $i, j, l = 1, \dots, m$. Par suite

$$\begin{aligned}
 D_{1,\epsilon} &= \int_{B_\delta(0)} b^{ijl} \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_{ij} \hat{u}_\epsilon dX \\
 &= - \int_{B_\delta(0)} \partial_i b^{ijl} \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX - \int_{B_\delta(0)} b^{ijl} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_{il} \hat{u}_\epsilon dX \\
 &\quad + \int_{\partial B_\delta(0)} b^{ijl} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_l \hat{u}_\epsilon \vec{\nu}_i d\sigma \\
 &= - \int_{B_\delta(0)} \partial_i b^{ijl} \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX + D'_{1,\epsilon} + O(\theta_\epsilon^2) \\
 &= - \int_{B_\delta(0)} \partial_i b^{ijl} \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX + D'_{1,\epsilon} + o(\mu_\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 D'_{1,\epsilon} &= - \int_{B_\delta(0)} b^{ijl} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_{il} \hat{u}_\epsilon dX \\
 &= - \int_{B_\delta(0)} b^{ijl} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_{li} \hat{u}_\epsilon dX \\
 &= \int_{B_\delta(0)} b^{ijl} \partial_{lj} \hat{u}_\epsilon \partial_i \hat{u}_\epsilon dX + \int_{B_\delta(0)} \partial_l b^{ijl} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_i \hat{u}_\epsilon dX + O(\theta_\epsilon^2) \\
 &= \int_{B_\delta(0)} b^{jil} \partial_{li} \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX + \int_{B_\delta(0)} \partial_l b^{ijl} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_i \hat{u}_\epsilon dX + o(\mu_\epsilon^2) \\
 &= \int_{B_\delta(0)} b^{ijl} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_{il} \hat{u}_\epsilon dX + \int_{B_\delta(0)} \partial_l b^{ijl} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_i \hat{u}_\epsilon dX + o(\mu_\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

Par suite $D'_{1,\epsilon} = \frac{1}{2} \int_{B_\delta(0)} \partial_l b^{ijl} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_i \hat{u}_\epsilon dX + o(\mu_\epsilon^2)$. D'autre part

$$\begin{aligned}
 \int_{B_\delta(0)} |X|^3 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX &= \int_{B_{R\mu_\epsilon}(0)} |X|^3 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX + \int_{B_\delta(0) \setminus B_{R\mu_\epsilon}(0)} |X|^3 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX \\
 &= \mu_\epsilon^3 \int_{B_R(0)} |X|^3 |\nabla \tilde{w}_\epsilon|^2 dX + \int_{B_\delta(0) \setminus B_{R\mu_\epsilon}(0)} |X|^3 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX
 \end{aligned}$$

D'après la convergence forte de \tilde{w}_ϵ vers \tilde{w} , on a que $\int_{B_R(0)} |X|^2 |\nabla \tilde{w}_\epsilon|^2 dX = O(1)$. Par nos estimations (6.36) et avec encore (6.42), comme dans la preuve

de le Lemme 6.2.5, on obtient

$$\int_{B_\delta(0)} |X|^3 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX = \begin{cases} O(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m = 4 \\ o(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m \geq 5 \end{cases} \quad (6.72)$$

Utilisons (6.48) et (6.72) dans l'estimation de $D_{1,\epsilon}$ pour $m \geq 5$, on aura

$$\begin{aligned}
 D_{1,\epsilon} &= - \int_{B_\delta(0)} \partial_i b^{ijkl} \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX + \frac{1}{2} \int_{B_\delta(0)} \partial_l b^{ijkl} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_i \hat{u}_\epsilon dX + O(\theta_\epsilon^2) \\
 &= - \int_{B_\delta(0)} X^l \partial_i \hat{g}_\epsilon^{ij} \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX - \int_{B_\delta(0)} (\hat{g}_\epsilon^{ij} - \delta^{ij}) \delta^{il} \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{B_\delta(0)} X^l \partial_l \hat{g}_\epsilon^{ij} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_i \hat{u}_\epsilon dX + \frac{m}{2} \int_{B_\delta(0)} (\hat{g}_\epsilon^{ij} - \delta^{ij}) \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_i \hat{u}_\epsilon dX + O(\theta_\epsilon^2) \\
 &= - \partial_{i\beta_1} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{B_\delta(0)} X^{\beta_1} X^l \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX \\
 &\quad - \frac{1}{2} \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{B_\delta(0)} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \delta^{il} \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX \\
 &\quad + \frac{1}{2} \partial_{l\beta_1} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{B_\delta(0)} X^{\beta_1} X^l \partial_i \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX \\
 &\quad + \frac{m}{4} \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{B_\delta(0)} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_i \hat{u}_\epsilon dX \\
 &\quad + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX\right) + o(\mu_\epsilon^2) \\
 &= - \partial_{i\beta_1} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{B_\delta(0)} X^{\beta_1} X^l \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX \\
 &\quad + \frac{m}{4} \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{B_\delta(0)} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_j \hat{u}_\epsilon \partial_i \hat{u}_\epsilon dX + o(\mu_\epsilon^2) \\
 &\quad + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX\right) \\
 &= \mu_\epsilon^2 \left[- \partial_{i\beta_1} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0)} X^{\beta_1} X^l \partial_l \tilde{w}_\epsilon \partial_j \tilde{w}_\epsilon dX \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m}{4} \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0)} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_j \tilde{w}_\epsilon \partial_i \tilde{w}_\epsilon dX \right] + o(\mu_\epsilon^2) \\
 &\quad + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX\right)
 \end{aligned}$$

Cas 1 : En utilisant les symétries de la sphère et (6.42), pour $m \geq 5$ on aura

$$D_{1,\epsilon} = \mu_\epsilon^2 \left[-\partial_{i\beta_1} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} X^{\beta_1} X^l \partial_l \tilde{w} \partial_j \tilde{w} dX \right. \quad (6.73)$$

$$\left. \frac{m}{4} \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_j \tilde{w} \partial_i \tilde{w} dX \right] \quad (6.74)$$

$$+ o(\mu_\epsilon^2) + O \left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX \right) \quad (6.75)$$

$$(6.76)$$

Où \tilde{w} est de symétrie radiale.

$$\begin{aligned} D_{1,\epsilon} &= \mu_\epsilon^2 \left[-\partial_{i\beta_1} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} X^{\beta_1} X^j (\tilde{w}')^2 dX \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{4} \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_j \tilde{w} \partial_i \tilde{w} dX \right] + o(\mu_\epsilon^2) \\ &= \mu_\epsilon^2 \left[-\partial_{i\beta_1} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{S^{m-1}} \theta^{\beta_1} \theta^j d\theta \int_0^\infty r^{m+1} |\nabla_r \tilde{w}|^2 dr \right] \\ &\quad + \mu_\epsilon^2 \left[\frac{m}{4} \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^n} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_j \tilde{w} \partial_i \tilde{w} dX \right] + o(\mu_\epsilon^2) \\ &= \mu_\epsilon^2 \left[-\frac{1}{m} w_{m-1} \partial_{i\beta_1} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \delta^{\beta_1 j} \int_0^\infty r^{m+1} |\nabla_r \tilde{w}|^2 dr \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{4} \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_j \tilde{w} \partial_i \tilde{w} dX \right] + o(\mu_\epsilon^2) \end{aligned}$$

Alors pour $m \geq 5$

$$\begin{aligned} D_{1,\epsilon} &= \mu_\epsilon^2 \left[-\frac{1}{m} \partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \tilde{w}|^2 dX \right. \quad (6.77) \\ &\quad \left. + \frac{m}{4} \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_j \tilde{w} \partial_i \tilde{w} dX \right] + o(\mu_\epsilon^2) \end{aligned}$$

Cas 2 : pour $m = 4$, de la même manière que dans la preuve du Lemme 6.2.5,

on aura

$$\int_{B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0)} X^{\beta_1} X^l \partial_l \tilde{w}_\epsilon \partial_j \tilde{w}_\epsilon dX = \ln\left(\frac{1}{\mu_\epsilon}\right) (w_3 K^4 \delta_{\beta_1 j} + o(1))$$

Mettons cette égalité dans (6.73) nous obtenons que

$$D_{1,\epsilon} = \mu_\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\mu_\epsilon}\right) K^4 \left(-4\partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) + \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ii}(0)\right) + o\left(\mu_\epsilon^2 \ln\frac{1}{\mu_\epsilon}\right) \text{ si } m = 4$$

Alors

Étape 3.ii On montre que

$$D_{2,\epsilon} = \begin{cases} \frac{1}{m} \partial_k \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) w_3 K^2 \mu_\epsilon^2 \ln\frac{1}{\mu_\epsilon} + O(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m = 4 \\ \frac{\mu_\epsilon^2}{m} \partial_k \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) \int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \tilde{w}|^2 dX + o(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m \geq 5 \end{cases} \quad (6.78)$$

On a $\hat{g}_\epsilon^{ij} - \delta^{ij} = O(|X|^2)$ quand $X \rightarrow 0$ et par (6.47) et le théorème de convergence dominé de Lebesgue, nous estimons lorsque $m \geq 5$ et $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} D_{2,\epsilon} &= \int_{B_\delta(0)} \hat{g}_\epsilon^{ij} X^l \hat{\Gamma}_{ij}^k \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_k \hat{u}_\epsilon dX \\ &= \delta^{ij} \int_{B_\delta(0)} X^l \hat{\Gamma}_{ij}^k \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_k \hat{u}_\epsilon dX + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 \hat{\Gamma}_{ij}^k \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_k \hat{u}_\epsilon dX\right) \\ &= \partial_q \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) \int_{B_\delta(0)} X^l X^q \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_k \hat{u}_\epsilon dX + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX\right) \\ &= \mu_\epsilon^2 \partial_q \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) \int_{B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0)} X^l X^q \partial_l \tilde{w}_\epsilon \partial_k \tilde{w}_\epsilon dX + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 \hat{\Gamma}_{ij}^k \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_k \hat{u}_\epsilon dX\right) \\ &= \mu_\epsilon^2 \partial_q \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) \int_{\mathbb{R}^m} X^l X^q \partial_l \tilde{w} \partial_k \tilde{w} dX + o(\mu_\epsilon^2) + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 \hat{\Gamma}_{ij}^k \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_k \hat{u}_\epsilon dX\right) \\ &= \mu_\epsilon^2 \partial_q \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) \int_{\mathbb{R}^m} X^k X^q (\tilde{w}')^2 dX + o(\mu_\epsilon^2) + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 \hat{\Gamma}_{ij}^k \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_k \hat{u}_\epsilon dX\right) \\ &= \mu_\epsilon^2 \partial_q \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) \int_{S^{m-1}} \theta^k \theta^q d\theta \int_0^\infty r^{m+1} |\nabla_r \tilde{w}|^2 dr + o(\mu_\epsilon^2) \\ &\quad + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 \hat{\Gamma}_{ij}^k \partial_l \hat{u}_\epsilon \partial_k \hat{u}_\epsilon dX\right) \end{aligned}$$

En utilisant (6.72), on vérifie (6.78) lorsque $m \geq 5$. La preuve pour $m = 4$

est similaire à celle de l'estimée de $D_{1,\epsilon}$.

Étape 3.iii Estimation de $D_{3,\epsilon}$.

$$D_{3,\epsilon} = \begin{cases} \mu_\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\mu_\epsilon}\right) K^4 w_3 \left(\frac{1}{3} \partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) - \frac{1}{12} \partial_{\beta_1 \beta_1} \hat{g}_\epsilon^{ii}(0) \right) + O(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m = 4 \\ \mu_\epsilon^2 \left[\partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} |\tilde{w}|^2 dX \right. \\ \quad \left. - \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_i \tilde{w} \partial_j \tilde{w} dX \right] & \\ + o(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m \geq 5 \end{cases} \quad (6.79)$$

En utilisant (6.72)

$$\begin{aligned} D_{3,\epsilon} &= \int_{B_\delta(0)} (\hat{g}_\epsilon^{ij} - \delta^{ij}) \hat{u}_\epsilon \partial_{ij} \hat{u}_\epsilon dX \\ &= - \left(\int_{B_\delta(0)} \partial_i \hat{g}_\epsilon^{ij} \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX + \int_{B_\delta(0)} (\hat{g}_\epsilon^{ij} - \delta^{ij}) \partial_i \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX \right) \\ &\quad + O \left(\int_{\partial B_\delta(0)} |X|^2 |\nabla \hat{u}_\epsilon| \hat{u}_\epsilon d\nu \right) \end{aligned}$$

Or, par (6.36), et (6.37) on a $\int_{\partial B_\delta(0)} |X|^2 |\nabla \hat{u}_\epsilon| \hat{u}_\epsilon d\nu = O(\theta_\epsilon^2) = o(\mu_\epsilon^2)$. Par suite

$$\begin{aligned} D_{3,\epsilon} &= - \left(\int_{B_\delta(0)} \partial_i \hat{g}_\epsilon^{ij} \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX + \int_{B_\delta(0)} (\hat{g}_\epsilon^{ij} - \delta^{ij}) \partial_i \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX \right) + o(\mu_\epsilon^2) \\ &= - \frac{1}{2} \left(\int_{B_\delta(0)} \partial_i \hat{g}_\epsilon^{ij} \partial_j (\hat{u}_\epsilon)^2 dX + \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{B_\delta(0)} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_i \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX \right) \\ &\quad + O \left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX \right) + O(\theta_\epsilon^2) \\ &= - \frac{1}{2} \left(- \int_{B_\delta(0)} \partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij} (\hat{u}_\epsilon)^2 dX + \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{B_\delta(0)} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_i \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX \right) \\ &\quad + O \left(\int_{\partial B_\delta(0)} |X| \hat{u}_\epsilon^2 d\nu \right) + O \left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX \right) + o(\mu_\epsilon^2) \end{aligned}$$

En utilisant (6.35), on a $\int_{\partial B_\delta(0)} |X| \hat{u}_\epsilon^2 d\nu = O(\theta_\epsilon^2) = o(\mu_\epsilon^2)$, alors

$$\begin{aligned}
 D_{3,\epsilon} &= -\frac{1}{2} \left(-\int_{B_\delta(0)} \partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij} (\hat{u}_\epsilon)^2 dX + \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{B_\delta(0)} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_i \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX \right) \\
 &\quad + O \left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX \right) + o(\mu_\epsilon^2) \\
 &= -\frac{1}{2} \left(-\int_{B_\delta(0)} \partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij} (\hat{u}_\epsilon)^2 dX + \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{B_\delta(0)} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_i \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX \right) \\
 &\quad + O \left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX \right) + o(\mu_\epsilon^2) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{B_\delta(0)} (\hat{u}_\epsilon)^2 dX - \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{B_\delta(0)} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_i \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX \right) \\
 &\quad + O \left(\int_{B_\delta(0)} |X| \hat{u}_\epsilon^2 dX \right) + O \left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX \right) + o(\mu_\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

Par le Lemme 6.2.5, on sait que

$$\int_{B_\delta(0)} |X| \hat{u}_\epsilon^2 dX = \begin{cases} O(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m = 4 \\ o(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m \geq 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{B_\delta(0)} |X|^3 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX = \begin{cases} O(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m = 4 \\ o(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m \geq 5 \end{cases}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
 D_{3,\epsilon} &= \frac{1}{2} \left(\partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{B_\delta(0)} (\hat{u}_\epsilon)^2 dX - \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{B_\delta(0)} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_i \hat{u}_\epsilon \partial_j \hat{u}_\epsilon dX \right) \\
 &\quad + O \left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX \right) + o(\mu_\epsilon^2) \\
 &= \frac{\mu_\epsilon^2}{2} \left[\partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0)} \tilde{w}_\epsilon^2 dX - \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0)} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_i \tilde{w}_\epsilon \partial_j \tilde{w}_\epsilon dX \right] \\
 &\quad + O \left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 |\nabla \hat{u}_\epsilon|^2 dX \right) + o(\mu_\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

On distingue deux cas comme déjà fait dans l' **Étape 3.i**, et on arrive à l'estimation demandée (6.79). Par le théorème de convergence dominée de

Lebesgue lorsque $m \geq 5$ et $\epsilon \rightarrow 0$

$$D_{3,\epsilon} = \frac{\mu_\epsilon^2}{2} \left[\partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{w}^2 dX - \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_i \tilde{w} \partial_j \tilde{w} dX \right] + o(\mu_\epsilon^2) + O(\theta_\epsilon^2) \quad (6.80)$$

Étape 3.iv On montre que

$$D_{4,\epsilon} = \begin{cases} -\mu_\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\mu_\epsilon}\right) K^4 w_3 \partial_k \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) + O(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m = 4 \\ -\frac{\mu_\epsilon^2}{2} \partial_k \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{w}^2 dX + o(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m \geq 5 \end{cases} \quad (6.81)$$

On a

$$\begin{aligned} D_{4,\epsilon} &= \int_{B_\delta(0)} \hat{g}_\epsilon^{ij} \hat{u}_\epsilon \hat{\Gamma}_{ij}^k \partial_k \hat{u}_\epsilon dX \\ &= \frac{1}{2} \int_{B_\delta(0)} \hat{g}_\epsilon^{ij} \hat{\Gamma}_{ij}^k \partial_k (\hat{u}_\epsilon)^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{B_\delta(0)} \partial_k \hat{\Gamma}_{ii}^k \hat{u}_\epsilon^2 dX + \frac{1}{2} \int_{\partial B_\delta(0)} \hat{\Gamma}_{ii}^k \hat{u}_\epsilon^2 d\nu + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X| \hat{u}_\epsilon^2 dX\right) \end{aligned}$$

Or par (6.36), on a $\int_{\partial B_\delta(0)} \hat{\Gamma}_{ii}^k \hat{u}_\epsilon^2 d\nu = O(\theta_\epsilon^2) = o(\mu_\epsilon^2)$, par suite

$$\begin{aligned} D_{4,\epsilon} &= -\frac{1}{2} \int_{B_\delta(0)} \partial_k \hat{\Gamma}_{ii}^k \hat{u}_\epsilon^2 dX + o(\mu_\epsilon^2) + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X| \hat{u}_\epsilon^2 dX\right) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_k \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) \int_{B_\delta(0)} \hat{u}_\epsilon^2 dX + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X| \hat{u}_\epsilon^2 dX\right) + o(\mu_\epsilon^2) \\ &= -\frac{\mu_\epsilon^2}{2} \partial_k \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) \int_{B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0)} \tilde{w}_\epsilon^2 dX + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X| \hat{u}_\epsilon^2 dX\right) + o(\mu_\epsilon^2) \end{aligned}$$

En distinguant les cas $m = 4$ et $m \geq 5$, comme dans l' **Étape 3.i**, on aura l'estimation annoncée (6.81)

Pour $m \geq 5$ on a :

$$\begin{aligned}
 & D_{1,\epsilon} + \frac{m-2}{2} D_{3,\epsilon} \\
 = & \mu_\epsilon^2 \left[-\frac{1}{m} \partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \tilde{w}|^2 dX + \frac{m-2}{4} \partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{w}^2 dX \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} X^{\beta_1} X^{\beta_2} \partial_j \tilde{w} \partial_i \tilde{w} dX \right] + o(\mu_\epsilon^2) + O(\theta_\epsilon^2) \\
 = & \mu_\epsilon^2 \left[-\frac{1}{m} \partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \tilde{w}|^2 dX + \frac{m-2}{4} \partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{w}^2 dX \right. \\
 & \left. + \frac{w_{m-1}^{-1}}{2} \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{S^{m-1}} \sigma^i \sigma^j \sigma^{\beta_1} \sigma^{\beta_2} d\sigma \int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \tilde{w}|^2 dX \right] + o(\mu_\epsilon^2) + O(\theta_\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

Il résulte de [7] que

$$\int_{S^{m-1}} \sigma^i \sigma^j \sigma^{\beta_1} \sigma^{\beta_2} d\sigma = \frac{1}{m(m+2)} w_{m-1} (\delta^{ij} \delta^{\beta_1 \beta_2} + \delta^{i\beta_1} \delta^{j\beta_2} + \delta^{i\beta_2} \delta^{j\beta_1})$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & D_{1,\epsilon} + \frac{m-2}{2} D_{3,\epsilon} \\
 = & \mu_\epsilon^2 \left[\frac{1}{m} \left(-\partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) + \frac{1}{2(m+2)} \left(\partial_{jj} \hat{g}_\epsilon^{ii}(0) + 2\partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \right) \right) \int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \tilde{w}|^2 dX \right. \\
 & \left. + \frac{m-2}{4} \partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{w}^2 dX \right] + o(\mu_\epsilon^2) \\
 = & \mu_\epsilon^2 \left[\frac{1}{m} \left(-\frac{m+1}{m+2} \partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) + \frac{1}{2(m+2)} \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\epsilon^{ii}(0) \right) \int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \tilde{w}|^2 dX \right. \\
 & \left. + \frac{m-2}{4} \partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{w}^2 dX \right] + o(\mu_\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

Par suite, en utilisant la définition de D_ϵ , nous obtenons

$$\begin{aligned} D_\epsilon &= D_{1,\epsilon} - D_{2,\epsilon} + \frac{m-2}{2} D_{3,\epsilon} - \frac{m-2}{2} D_{4,\epsilon} \\ &= \mu_\epsilon^2 \left[\frac{1}{m} \left(-\frac{m+1}{m+2} \partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) + \frac{1}{2(m+2)} \partial_{\beta_1 \beta_2} \hat{g}_\alpha^{ii}(0) - \partial_k \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) \right) \int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \tilde{w}|^2 dX \right. \\ &\quad \left. + \frac{m-2}{4} \left(\partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) + \partial_k \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) \right) \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{w}^2 dX \right] + o(\mu_\epsilon^2) \end{aligned}$$

Comme $\hat{g}_\epsilon^{ij}(\hat{g}_\epsilon)_{ij} = Id_m$ et $\partial_k \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) = 0$, alors $\partial_{ij} \hat{g}_\epsilon^{ij}(0) = -(\hat{g}_\epsilon)_{ij}(0)$ pour tout $i, j = 1, \dots, m$. Donc

$$\begin{aligned} D_\epsilon &= \mu_\epsilon^2 \left[\frac{1}{m} \left(\frac{m+1}{m+2} \partial_{ij} (\hat{g}_\epsilon)_{ij}(0) - \frac{1}{2(m+2)} \partial_{\beta_1 \beta_2} (\hat{g}_\alpha)_{ii}(0) - \partial_k \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) \right) \right. \\ &\quad \left. \int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \tilde{w}|^2 dX + \frac{m-2}{4} \left(-\partial_{ij} (\hat{g}_\epsilon)_{ij}(0) + \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) \right) \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{w}^2 dX \right] \\ &\quad + o(\mu_\epsilon^2) + O(\theta_\epsilon^2) \end{aligned}$$

Par Jaber [31], en posant $\Phi(X) = (1+|X|^2)^{-\frac{m-2}{2}}$ de sorte que $\tilde{w}(X) = \Phi(K^{-1}X)$, nous avons

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\nabla \Phi|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^m} \Phi^2 dX} = \frac{m(m-2)(m+2)}{4(m-1)} \quad (6.82)$$

D'autre part, le développement de Cartan de la métrique \tilde{g} qui est C^∞ dans la carte exponentielle $(B_\delta(\bar{x}_\epsilon), \exp_{\bar{x}_\epsilon}^{-1})$ nous donne

$$\begin{aligned} \partial_{\beta_1 \beta_2} \tilde{g}_{\epsilon ij}(\bar{x}) &= \frac{1}{3} (R_{ipqj}(\bar{x}) \delta^{p\beta_2} \delta^{q\beta_1} + R_{ipqj}(\bar{x}) \delta^{p\beta_1} \delta^{q\beta_2}) \\ &= \frac{1}{3} (R_{i\beta_2 \beta_1 j}(\bar{x}) + R_{i\beta_1 \beta_2 j}(\bar{x})) \end{aligned}$$

Notons que, par Cheikh-Ali [28], et les identités de Bianchi nous avons que $R_{iijj} = 0$ et $R_{ijst} = -R_{ijts}$. Puisque $R_{ijij} = \text{Scal}_{\tilde{g}_\epsilon}(\bar{x}_\epsilon)$, on obtient alors que $\sum_{i,j=1}^m \partial_{ij} \tilde{g}_{ij}(\bar{x}_\epsilon) = \frac{1}{3} \text{Scal}_{\tilde{g}_\epsilon}(\bar{x}_\epsilon)$ et $\sum_{i,\beta_1=1}^m \partial_{\beta_1 \beta_1} \tilde{g}_{\epsilon ii}(\bar{x}_\epsilon) = -\frac{2}{3} \text{Scal}_{\tilde{g}_\epsilon}(\bar{x}_\epsilon)$. De plus en utilisant les symboles de

Christoffel et le fait que $\partial_k \tilde{g}_{\epsilon ij}(\bar{x}_\epsilon) = 0$, nous obtenons que $\partial_k \Gamma_{ii}^k(\bar{x}_\epsilon) = \frac{1}{3}(R_{ikik} - R_{ikki})$, par suite on a $\sum_{i,k=1}^m \partial_k \Gamma_{ii}^k(\bar{x}_\epsilon) = \frac{2}{3} \text{Scal}_{\tilde{g}_\epsilon}(\bar{x}_\epsilon)$. En appliquant ces formules, on obtient

$$\begin{aligned} D_\epsilon &= \mu_\epsilon^2 \left[\left(\frac{m+1}{m+2} \partial_{ij}(\hat{g}_\epsilon)_{ij}(0) - \frac{1}{2(m+2)} \partial_{\beta_1 \beta_2}(\hat{g}_\alpha)_{ii}(0) - \partial_k \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) \right) \frac{(m-2)(m+2)}{4(m-1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m-2}{4} \left(-\partial_{ij}(\hat{g}_\epsilon)_{ij}(0) + \partial_k \hat{\Gamma}_{ii}^k(0) \right) \right] \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{w}^2 dX + o(\mu_\epsilon^2) \\ &= \mu_\epsilon^2 \left[\left(\frac{m+1}{3(m+2)} + \frac{1}{3(m+2)} - \frac{2}{3} \right) \text{Scal}_{\tilde{g}_\epsilon}(\bar{x}_\epsilon) \frac{(m-2)(m+2)}{4(m-1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m-2}{4} \text{Scal}_{\tilde{g}_\epsilon}(\bar{x}_\epsilon) \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) \right] \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{w}^2 dX + o(\mu_\epsilon^2) \end{aligned}$$

Alors

$$D_\epsilon = -\mu_\epsilon^2 \frac{m-2}{4(m-1)} \text{Scal}_{\tilde{g}_\epsilon}(\bar{x}_\epsilon) \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{w}^2 dX + o(\mu_\epsilon^2) \quad (6.83)$$

En faisant, un analyse similaire pour le cas $m = 4$, on aura (6.81).

Étape 4. On montre que

$$A_\epsilon = \begin{cases} -\frac{1}{m 2^{*(k)}} \Delta_{\hat{g}_\epsilon} \hat{f}_\epsilon(0) \mu_\epsilon^2 \ln\left(\frac{1}{\mu_\epsilon}\right) K^4 w_3 + o(\mu_\epsilon^2) & \text{si } m = 4 \\ -\frac{1}{m 2^{*(k)}} \Delta_{\hat{g}_\epsilon} \hat{f}_\epsilon(0) \mu_\epsilon^2 \int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 |\tilde{w}|^{2^{*(k)}} dX & \text{si } m \geq 5 \end{cases} \quad (6.84)$$

Posons $X_\epsilon := \exp_{\bar{x}_\epsilon}^{-1}(\bar{x}_0)$. Rappelons \bar{x}_0 est un minimum pour $\bar{v}(\bar{x})$, par conséquence X_ϵ est un minimum de \hat{f}_ϵ , donc on a $\partial_i \hat{f}_\epsilon(X_\epsilon) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$.

Estimons maintenant A_ϵ

$$\begin{aligned}
 A_\epsilon &= \frac{1}{2^{*(k)}} \int_{B_\delta(0)} \partial_i \hat{f}_\epsilon(0) X^i \hat{u}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX + \frac{1}{2^{*(k)}} \partial_{ij} \hat{f}_\epsilon(0) \int_{B_\delta(0)} X^i X^j \hat{u}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX \\
 &\quad + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 \hat{u}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX\right) \\
 &= \int_{B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0)} \partial_i \hat{f}_\epsilon(X_\epsilon) X^i \hat{u}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX + \frac{1}{2^{*(k)}} \partial_{ij} \hat{f}_\epsilon(0) \mu_\epsilon^2 \int_{B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0)} X^i X^j \tilde{w}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX \\
 &\quad + O\left(|X_\epsilon| \int_{B_\delta(0)} |X| \hat{u}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX\right) + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 \hat{u}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX\right) \\
 &= \frac{1}{2^{*(k)}} \partial_{ij} \hat{f}_\epsilon(0) \mu_\epsilon^2 \int_{B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0)} X^i X^j \tilde{w}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX + O\left(|X_\epsilon| \int_{B_\delta(0)} |X| \hat{u}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX\right) + O\left(\int_{B_\delta(0)} |X|^3 \hat{u}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX\right)
 \end{aligned}$$

Par le Lemme 6.2.5 on a $\int_{B_\delta(0)} |X|^3 \hat{u}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX = o(\mu_\epsilon^2)$ et $\int_{B_\delta(0)} |X| \hat{u}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX = O(\mu_\epsilon)$. D'autre part, par le Théorème 6.2.8 on a $|X_\epsilon| = o(\mu_\epsilon)$. Par suite

$$A_\epsilon = \frac{1}{2^{*(k)}} \partial_{ij} \hat{f}_\epsilon(0) \mu_\epsilon^2 \int_{B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0)} X^i X^j \tilde{w}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX + o(\mu_\epsilon^2)$$

De la même manière que dans le travail du Lemme 6.2.5, on aura

$$\mu_\epsilon \int_{B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0)} X^i X^j \hat{u}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX = \mu_\epsilon^2 \int_{\mathbb{R}^m} X^i X^j \tilde{w}_\epsilon^{2^{*(k)}} dX + o(\mu_\epsilon^2) \text{ si } m \geq 4$$

Avec cette égalité, en passant à la limite, et utilisant le fait que $X^i X^j$ est symétrique, on aura (6.84).

Étape 5. Nous groupons (6.84), (6.68), (6.67), et l'Étape 3.) dans (6.66), on aura pour $m = 4$

$$\bar{h}_0(x_0) - \frac{1}{6} \text{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0) = O(\mu_\epsilon)$$

Et pour $m \geq 5$

$$\left(\bar{h}_0(\bar{x}_0) - \frac{(m-2)}{4(m-1)} \text{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0)\right) \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{w}^2 dX + \frac{1}{m 2^{*(k)}} \Delta_{\bar{g}} \hat{f}_\epsilon(0) \int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 \tilde{w}^{2^{*(k)}} dX = o(\mu_\epsilon)$$

Passant à la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, on obtiendra

$$\bar{h}_0(\bar{x}_0) - \frac{1}{6} \text{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0) = 0 \quad (6.85)$$

Et

$$\left(\bar{h}_0(\bar{x}_0) - \frac{(m-2)}{4(m-1)} \text{Scal}_{\bar{g}}(\bar{x}_0) \right) \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{w}^2 dX + \frac{1}{m2^*(k)} \Delta_{\bar{g}} \tilde{f}_0(0) \int_{\mathbb{R}^m} |X|^2 \tilde{w}^{2^*(k)} dX = 0 \quad (6.86)$$

Sachant que $\tilde{f}_0 = \frac{A^{\frac{2}{m}}}{K_0(n-k)} \bar{v}^{-\frac{2}{m-2}}$, que $\tilde{g} = \bar{v}^{\frac{2}{m-2}} \bar{g}$, en utilisant l'égalité (6.82) on obtient l'égalité (6.65), ce qui termine la preuve du Théorème.

□

Notation et bibliographie

Notation

Chapitre 1

\mathbb{F}_x l'espace vectoriel des fonctions $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont différentiables en x

\mathbb{N}_x l'espace vectoriel des fonctions tel que $D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} = 0$

$f_*(x)$ l'application linéaire tel que $(f_*(x).(X)).(g) = X(g \circ f)$

f^*T le pullback tel que $(f^*T)(x).(X_1, \dots, X_p) = T(f(x)).(f_*(x).X_1, \dots, f_*(x).X_p)$

$D : T(M) \times \Gamma(M) \rightarrow T(M)$ une connexion linéaire

$$D_X(Y) = X^i(\nabla_i Y)(x) = X^i \left(\left(\frac{\partial Y^j}{\partial x_i} \right)_x + \Gamma_{i\alpha}^j(x) Y^\alpha(x) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_x$$

$\Gamma_{ij}^k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ les symboles de Christoffel de la connexion D

$$\Gamma_{ij}^k(x) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x_i} \right)_x + \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x_j} \right)_x - \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right)_x \right) g(x)^{mk}$$

Rm_g la courbure Riemannienne : $R_{ijkl} = g_{i\alpha} R_{jkl}^\alpha$

Rc_g La courbure de Ricci : $R_{ij} = R_{\alpha i \beta j} g^{\alpha\beta}$

Scal_g La courbure scalaire : $\text{Scal}_g = R_{ij}g^{ij}$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_x = D_i(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$$

$$(\nabla^2 f)(x)_{ij} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_x - \Gamma_{ij}^k(x) \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_x$$

$$\Delta_g u = -g^{ij} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$$

$\exp_x(X) = \gamma_{x,X}(1)$ carte exponentielle normale

$Weyl_g$ la courbure de Weyl

$$\begin{aligned} W_{ijkl} &= R_{ijkl} - \frac{1}{n-2} (R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}) \\ &\quad + \frac{\text{scal}_g}{(n-1)(n-2)} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \end{aligned}$$

$H_1^p(M)$ le complété de $C^\infty(M)$ par rapport à $\|u\|_{H_1^p(M)}$.

$$\|u\|_{H_1^p(M)} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p$$

$$H_{1,0}^2(M) = \{u \in H_1^2(M) / u_{\partial M} = 0\}$$

$$K(n) = \sqrt{\frac{4}{n(n-2)w_n^{\frac{2}{n}}}}$$

w_n est le volume de la n -sphère unitaire

$$2^* = \frac{2n}{n-2}$$

Chapitre 2

$$\begin{cases} \Delta_g u + au = u^p & \text{sur } M, \\ u > 0 & \text{sur } M, \\ u = 0 & \text{sur } \partial M. \end{cases} \quad (E^p)$$

$$\mathcal{H} = \left\{ u \in H_1^2(M) \text{ tel que } \int_M u dv_g = 0 \text{ et } \int_M f u dv_g = 1 \right\}$$

$$\mu = \inf_{u \in \mathcal{H}} \int_M |\nabla u|^2 dv_g$$

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_1^2(M)} \frac{\int_M |\nabla u|^2 dv_g}{\int_M |u|^2 dv_g}$$

$$\begin{cases} \Delta_g u + au = \lambda u^p & \text{sur } M, \\ u > 0 & \text{sur } M, \\ u = 0 & \text{sur } \partial M. \end{cases} \quad (E_\lambda^p)$$

$$\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_M (|\nabla u|^2 + au^2) dv_g - \frac{\lambda}{p+1} |u|^{p+1} dv_g$$

$$\begin{cases} \Delta_g u + au = f u^p & \text{sur } M, \\ u > 0 & \text{sur } M, \\ u = 0 & \text{sur } \partial M. \end{cases} \quad (E_\lambda^f)$$

$$\begin{cases} \Delta_g u + au = u^{\frac{n+2}{n-2}} & \text{sur } \Omega, \\ u > 0 & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (E^{2*})$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + au^2) dx - \frac{n-2}{2n} \int_\Omega |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx$$

$$u_\epsilon(x) = \frac{\eta(x)}{(\epsilon + d_g(x_0, x)^2)^{-\frac{n-2}{2}}} \in H_{1,0}^2(\Omega)$$

$$\mathcal{J} = \left\{ \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + au^2) dx \text{ tel que } u \in H_{1,0}^2(\Omega) \text{ et } \|u\|_{\frac{2n}{n-2}} = 1 \right\}$$

$$\mu = \inf \mathcal{J}$$

ξ la métrique sur \mathbb{R}^n

$$\tilde{\xi}(X) = \xi(X - x_0)$$

$$U_\epsilon(X) = u_\epsilon(X + x_0)$$

$$\tilde{a}(X) = a(X + x_0)$$

$$\begin{cases} \Delta_g u = u^5 + \lambda u & \text{sur } \Omega, \\ u > 0 & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (E_\lambda^5)$$

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + f(x; u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (E_f^p)$$

Chapitre 3

(M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord de \mathbb{R}^n

G un groupe fermé d'isométries de (M, g)

$k := \min_{x \in M} \dim Gx$

Gx est l'orbite du point x sous l'action de G

G' un sous groupe fermé de $Isom_g(M)$

$\bar{x} := \Pi(x)$

$\Pi : M \rightarrow M/G'$ la surjection canonique

$G'x := \{gx/g \in G'\}$ l'orbite de x sous G'

$S'x := \{g \in G'/g(x) = x\}$ le stabilisateur de x sous G'

$\Omega := \bigcup Px$

Px est une orbite principal

$$\tilde{g} = \bar{v}^{\frac{2}{n-k-2}} \bar{g}$$

$$\bar{v}(\bar{x}) = \text{vol}(\Pi^{-1}(\bar{x})) = \text{vol}(G'x)$$

$$k = \min_{x \in M} \dim Gx \geq 1.$$

$$N := B_\delta(Gx_0)/G'$$

$$\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \text{ tel que } \eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in B(0; 1) \\ 0 & \text{pour } x \in B(0; 2)^c \end{cases}$$

$$\eta_{\bar{x}_1, \delta'}(\bar{x}) = \eta\left(\frac{d_{\tilde{g}}(\bar{x}_1, \bar{x})}{\delta'}\right)$$

$$\|f\|_{p,s} = \|f\|_{L^p(M, \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s})} = \left(\int_M |f|^p \frac{dv_g}{d_g(x, Gx_0)^s} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$2^*(k, s) = \frac{2(n-k-s)}{n-k-2}$$

$$2^* = 2^*(0, 0)$$

$$K_s(m)^{-1} = \inf_{\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \phi|^2 dX}{\left(\int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\phi|^{2^*(k,s)}}{|X|^s} dX \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}}$$

$$K_0(n) = \frac{4}{n(n-2)w_n^{\frac{2}{n}}}$$

A le minimum des volumes des orbites principales de dimension k

$$K_0(n, k, A) = \frac{K_0(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k)}}$$

$$K_s(n) = \frac{1}{(n-2)(n-s)} \left(\frac{1}{2-s} w_{n-1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{n-2}{2-s}\right)}{\Gamma\left(\frac{2(n-s)}{2-s}\right)} \right)^{-\frac{2-s}{n-s}}$$

Γ est la fonction d'Euler.

$$\phi_{s,n} = C(\lambda^{2-s} + |X|^{2-s})^{-\frac{2-s}{n-s}}$$

$$\|u\|_{2^*(k,s),s}^2 \leq L \|\nabla u\|_2^2 + B \|u\|_2^2 \quad (I_L^B)$$

$$L_0 = \inf \{ L > 0 \text{ tel que } (I_L^B) \text{ est vérifié} \}$$

$$\Delta_g u + au = \frac{u |u|^{2^*(k,s)-2}}{d_g(x, Gx_0)^s} + hu |u|^{q-2}$$

$$G_L(t) = \begin{cases} t |t|^{\beta-1} & \text{si } |t| \leq L \\ \beta L^{\beta-1} (t - L) + L^\beta & \text{si } t \geq L \\ \beta L^{\beta-1} (t + L) - L^\beta & \text{si } t \leq -L \end{cases}$$

$$H_L(t) = \begin{cases} t |t|^{\frac{\beta-1}{2}} & \text{si } |t| \leq L \\ \frac{\beta+1}{2} L^{\frac{\beta-1}{2}} (t - L) + L^{\frac{\beta+1}{2}} & \text{si } t \geq L \\ \frac{\beta+1}{2} L^{\frac{\beta-1}{2}} (t + L) - L^{\frac{\beta+1}{2}} & \text{si } t \leq -L \end{cases}$$

Chapitre ??

(M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord de \mathbb{R}^n

G un groupe fermé d'isométries de (M, g)

$k := \min_{x \in M} \dim Gx$

Gx est l'orbite du point x sous l'action de G

G' un sous groupe fermé de $Isom_g(M)$

$\bar{x} := \Pi(x)$

$\Pi : M \rightarrow M/G'$ la surjection canonique

$G'x := \{gx/g \in G'\}$ l'orbite de x sous G'

$S'x := \{g \in G'/g(x) = x\}$ le stabilisateur de x sous G'

$$\Omega := \bigcup Px$$

Px est une orbite principale

$H_{1,G}^2(M)$ est les fonction G -invariant de $H_1^2(M)$

$$\bar{v}(\bar{x}) = \text{vol}(\Pi^{-1}(\bar{x})) = \text{vol}(G'x)$$

$$k = \min_{x \in M} \dim Gx \geq 1.$$

$$N := B_\delta(Gx_0)/G'$$

$$\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \text{ tel que } \eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in B(0; 1) \\ 0 & \text{pour } x \in B(0; 2)^c \end{cases}$$

$$\eta_{\bar{x}_1, \delta'}(\bar{x}) = \eta\left(\frac{d_{\bar{g}}(\bar{x}_1, \bar{x})}{\delta'}\right)$$

$$m = n - k$$

$$2^*(k) = 2^*(k, 0) = \frac{2(n - k)}{n - k - 2}$$

$$\tilde{g} = \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \bar{g}$$

$$\Delta_g u + au = \frac{|u|^{2^*(k,s)-2} u}{d_g(x, Gx_0)^s} + h|u|^{q-2} u \quad (\text{E})$$

$$\phi(X) = (1 + |X|^{2-s})^{-\frac{m-2}{2-s}}.$$

$$K_s(n - k)^{-1} = \inf_{\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \phi|^2 dX}{\left(\int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\phi|^{2^*(k,s)}}{|X|^s} dX \right)^{\frac{2}{2^*(k,s)}}}$$

$$J_q(v) = \frac{1}{2} \int_M (|\nabla v|_g^2 + av^2) dv_g - \frac{1}{2^*(k,s)} \int_M v^{2^*(k,s)} \frac{1}{d_g(x, Gx_0)^s} dv_g - \frac{1}{q} \int_M hv^q dv_g$$

$$c_{n,k,s} = \frac{2-s}{2(n-k-s)}$$

$$\bar{u}_\epsilon(\bar{x}) := \left(\frac{\epsilon^{\frac{2-s}{2}}}{\epsilon^{2-s} + d_g(\bar{x}, \bar{x}_0)^{2-s}} \right)^{\frac{m-2}{2-s}}$$

$$c'_{n,k,s} = \frac{(m-2)(6-s)}{12(2m-2-s)}$$

$$c''_{n,k,s} = \frac{(m-2)(m-4)}{2(2m-2-s)}$$

Chapitre 5

(M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord de \mathbb{R}^n

G un groupe fermé d'isométries de (M, g)

$k := \min_{x \in M} \dim Gx$

Gx est l'orbite du point x sous l'action de G

G' un sous groupe fermé de $Isom_g(M)$

$\bar{x} := \Pi(x)$

$\Pi : M \rightarrow M/G'$ la surjection canonique

$G'x := \{gx/g \in G'\}$ l'orbite de x sous G'

$S'x := \{g \in G'/g(x) = x\}$ le stabilisateur de x sous G'

$\Omega := \bigcup Px$

Px est une orbite principale

$H^2_{1,G}(M)$ est l'ensemble des fonctions G -invariant de $H^2_1(M)$

$\bar{v}(\bar{x}) = vol(\Pi^{-1}(\bar{x})) = vol(G'x)$

$k = \min_{x \in M} \dim Gx \geq 1.$

$N := B_\delta(Gx_0)/G'$

$\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in B(0; 1) \\ 0 & \text{pour } x \in B(0; 2)^c \end{cases}$

$$\eta_{\bar{x}_1, \delta'}(\bar{x}) = \eta\left(\frac{d_{\bar{g}}(\bar{x}_1, \bar{x})}{\delta'}\right)$$

$$m = n - k$$

$$2^*(k) = 2^*(k, 0) = \frac{2(n-k)}{n-k-2}$$

$$\tilde{g} = \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \bar{g}$$

$$\tilde{g}_\epsilon(X) = (\exp_{\bar{x}_\epsilon}^* \tilde{g})(R_\alpha^{-1} X)$$

$$\bar{g}_\epsilon(x) = \exp_{\bar{y}_\epsilon}^* \bar{g}(\mu_\epsilon x).$$

$$\Delta_g u + h_\epsilon u = f u^{2^*(k)} \quad (E_\epsilon)$$

$$\Delta_g u + h_0 u = f u^{2^*-1} \quad (E_0)$$

$$\Delta \tilde{w} = f(x_0) \text{vol}(Gx_0)^{-\frac{2}{n-k-2}} \tilde{w}^{2^*(k)-1} \quad (E_{\tilde{w}})$$

$$\bar{B}_\epsilon(\bar{x}) = \eta_{\bar{x}_\epsilon, \delta'}(\bar{x}) R_\epsilon^{\frac{n-k-2}{2}} \tilde{w}(R_\epsilon(\exp_{\bar{x}_\epsilon}^{-1}(\bar{x}))) \text{ pour } \bar{x} \in N$$

$$E(B) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} |\nabla u|^2 dx - \frac{f(x_0) \text{Vol}(Gx_0)^{-\frac{2}{n-k-2}}}{2^*(k)} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} |u|^{2^*} dx$$

$$I_g^\epsilon(u) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + \frac{1}{2} \int_M h_\epsilon |u|^2 dv_g - \frac{1}{2^*(k)} \int_M f |u|^{2^*(k)} dv_g$$

$$I_g^0(u) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + \frac{1}{2} \int_M h_0 |u|^2 dv_g - \frac{1}{2^*(k)} \int_M f |u|^{2^*(k)} dv_g$$

$$I_g(u) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla u|^2 dv_g - \frac{1}{2^*(k)} \int_M f |u|^{2^*(k)} dv_g \quad (I_g)$$

$$I_{\tilde{g}}(\bar{u}) = \frac{1}{2} \int_N |\nabla \bar{u}|_{\tilde{g}}^2 dv_{\tilde{g}} - \frac{1}{2} \int_N \bar{f} |\bar{u}|^{2^*(k)} \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} dv_{\tilde{g}} \quad (I_{\tilde{g}})$$

$$\tilde{v}_\epsilon(X) = R_\epsilon^{-\frac{n-k-2}{2}} \bar{v}_\epsilon(\exp_{\bar{x}_\epsilon}(R_\epsilon^{-1}X))$$

$$\Delta_\xi \tilde{w} = f(x_0) \text{Vol}(Gx_0)^{-\frac{2}{n-k-2}} |\tilde{w}|^{2^*(k)-2} \tilde{w}$$

$$\beta^* = \frac{1}{(n-k)K_0(n-k)^{n-k}}$$

$$\mu_\epsilon(t) = \max_{\bar{x} \in N} \int_{B_{\bar{x}}(t)} |\nabla \bar{v}_\epsilon|_{\bar{g}}^2 dv_{\bar{g}}$$

$$\phi_\epsilon(\bar{x}) = R_\alpha^{\frac{n-k-2}{2}} \phi(R_\alpha(\exp_{\bar{x}_\alpha}^{-1}(\bar{x})))$$

$$I_g(u) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla u|^2 dv_g - \frac{1}{2^*(k)} \int_M f|u|^{2^*(k)} dv_g$$

$$w_\epsilon(x) := \mu_\epsilon^{\frac{n-k-2}{2}} \bar{u}_\epsilon(\exp_{\bar{y}_\epsilon}(\mu_\epsilon x)).$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} w_\epsilon = w \text{ dans } C_{loc}^{1,\theta}(\mathbb{R}^{n-k}).$$

Chapitre 6

(M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord de \mathbb{R}^n

G un groupe fermé d'isométries de (M, g)

$k := \min_{x \in M} \dim Gx$

Gx est l'orbite du point x sous l'action de G

G' un sous groupe fermé de $Isom_g(M)$

$\bar{x} := \Pi(x)$

$\Pi : M \longrightarrow M/G'$ la surjection canonique

$G'x := \{gx/g \in G'\}$ l'orbite de x sous G'

$S'x := \{g \in G'/g(x) = x\}$ le stabilisateur de x sous G'

$\Omega := \bigcup Px$

Px est une orbite principale

$H_{1,G}^2(M)$ est les fonction G -invariant de $H_1^2(M)$

$\bar{v}(\bar{x}) = \text{vol}(\Pi^{-1}(\bar{x})) = \text{vol}(G'x)$

$k = \min_{x \in M} \dim Gx \geq 1.$

$N := B_\delta(Gx_0)/G'$

$\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in B(0; 1) \\ 0 & \text{pour } x \in B(0; 2)^c \end{cases}$

$$\eta_{\bar{x}_1, \delta'}(\bar{x}) = \eta\left(\frac{d_{\bar{g}}(\bar{x}_1, \bar{x})}{\delta'}\right)$$

$$m = n - k$$

$$2^*(k) = 2^*(k, 0) = \frac{2(n - k)}{n - k - 2}$$

$$\tilde{g} = \bar{v}^{\frac{2}{n-k-2}} \bar{g}$$

$$\tilde{g}_\epsilon(X) = (\exp_{\bar{x}_\epsilon})^* \tilde{g}(\mu_\epsilon X) \quad \text{sur } B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0) \subset \mathbb{R}^{n-k}$$

$$\hat{g}_\epsilon = (\exp_{\bar{x}_\epsilon}^* \tilde{g})(X)$$

$$\hat{g}_0 = (\exp_{\bar{x}_0}^* \tilde{g})(X)$$

$$\Delta_g u + h_\epsilon u = \lambda_\epsilon u^{2^*(k)-1}, \quad \int_M u_\epsilon^{2^*(k)} dv_g = 1 \quad (E_\epsilon)$$

$$\Delta_{\tilde{g}} \bar{u}_\epsilon + \tilde{h}_\epsilon \bar{u}_\epsilon = \tilde{f}_\epsilon \bar{u}_\epsilon^{2^*(k)-1}, \quad \int_N \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \bar{u}_\epsilon^{2^*} dv_{\tilde{g}} = 1 + o(1) \quad (\tilde{E}_\epsilon)$$

$$\Delta_{\tilde{g}_\epsilon} \tilde{w}_\epsilon(X) + \mu_\epsilon^2 \hat{h}_\epsilon \tilde{w}_\epsilon = \hat{f}_\epsilon \tilde{w}_\epsilon^{2^*(k)-1} \quad (E_{\tilde{w}_\epsilon})$$

$$\Delta \tilde{w} = K_0(n-k)^{-1} \tilde{w}^{2^*(k)-1} \quad (E'_{\tilde{w}})$$

$$\Delta_{\hat{g}_\epsilon} \hat{u}_\epsilon + \hat{h}_\epsilon \hat{u}_\epsilon = \hat{f}_\epsilon \hat{u}_\epsilon^{2^*(k)-1}, \quad \int_{B_\delta(0)} \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \hat{u}_\epsilon^{2^*} dv_{\hat{g}_\epsilon} = 1 + o(1) \quad (\hat{E}_\epsilon)$$

(u_ϵ) une suite de solution de (E_ϵ)

(N, \bar{g}) est une $(n-k)$ -variété Riemannienne

$$\bar{v}(\bar{x}) = \text{vol}(\Pi^{-1}(\bar{x})) = \text{vol}(Gx)$$

$$K_0(n, k, A) = \frac{K_0(n-k)}{A^{\frac{2}{n-k}}} = \frac{K_0(n-k)}{A^{1-\frac{2}{2^*(k)}}}$$

$$\lambda_\epsilon = \inf_{u \in H_{1,G}^2 \setminus \{0\}} \frac{\int_M |\nabla_g u|^2 dv_g + \int_M h_\epsilon u^2 dv_g}{\left(\int_M |u|^{2^*(k)} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*(k)}}}$$

$x_\epsilon \in M$ un point où u_ϵ atteint son max

$$\mu_\epsilon^{1-\frac{n-k}{2}} = u_\epsilon(x_\epsilon) = \|u_\epsilon\|_0$$

$$\tilde{w}_\epsilon(X) := \mu_\epsilon^{\frac{m-2}{2}} \bar{u}_\epsilon(\exp_{\bar{x}_\epsilon}(\mu_\epsilon X)) \text{ pour tout } X \in B_{\frac{\delta}{\mu_\epsilon}}(0) \subset \mathbb{R}^{n-k} \quad (\tilde{w}_\epsilon)$$

$$\hat{h}_\epsilon(X) = \tilde{h}_\epsilon(\exp_{\bar{x}_\epsilon}(\mu_\epsilon X))$$

$$\hat{f}_\epsilon(X) = \lambda_\epsilon (\bar{v}(\exp_{\bar{x}_\epsilon}(\mu_\epsilon X)))^{-\frac{2}{n-k-2}}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{w}_\epsilon = \tilde{w} \quad \text{dans } C_{loc}^2(\mathbb{R}^m).$$

$$\tilde{a} = \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \bar{a}$$

. \tilde{G}_1 la fonction du Green pour l'opérateur $\Delta_{\tilde{g}} + \frac{a-\alpha_0}{1-\nu_1}$ sur N' \tilde{G}_2 la fonction du Green pour l'opérateur $\Delta_{\tilde{g}} + \frac{a-\alpha_0}{1-\nu_2}$ sur N'

$$N' = B(\bar{x}_0, 2r_0) \subset N$$

$$\tilde{h}_\epsilon = \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \bar{h}_\epsilon$$

$$\tilde{f}_\epsilon = \bar{v}^{-\frac{2}{n-k-2}} \lambda_\epsilon$$

$$\theta_\epsilon := \sup_{\bar{x} \in \partial N'} \bar{u}_\epsilon(\bar{x}) \geq \bar{u}_\epsilon(\bar{x})$$

$$\tilde{v}_\epsilon^l := \begin{cases} \tilde{v}_\epsilon^1 := |\nabla_{\tilde{g}} \bar{u}_\epsilon| & \text{si } l = 1 \\ \tilde{v}_\epsilon^2 := \bar{u}_\epsilon & \text{si } l = 2 \end{cases}$$

$\hat{H}_2(\bar{x}) := \hat{G}(\bar{x}, \bar{y})$ la fonction du Green de l'opérateur $\Delta_{\tilde{g}} + \tilde{a}$ sur N'

$$\hat{H}_1(\bar{x}) = \nabla_{\tilde{g}} \hat{G}(\bar{x}, \bar{y})$$

$\hat{u}_\epsilon(X) := u_\epsilon(\exp_{\bar{x}_\epsilon}(X))$ pour tout $X \in B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^m$

$$\tilde{w}(X) = \left(\frac{K^2}{K^2 + |X|^2} \right)^{\frac{m-2}{2}}$$

$$K^2 = (n - k)(n - k - 2)K_0(n - k)^{-1}$$

$$\hat{h}_\epsilon(X) := \tilde{h}_\epsilon(\exp_{\bar{x}_\epsilon}(X))$$

$$\hat{f}_\epsilon(X) := \tilde{f}_\epsilon(\exp_{\bar{x}_\epsilon}(X))$$

Bibliographie

- [1] Serge Alinhac and Patrick Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Savoirs Actuels. [Current Scholarship]. InterEditions, Paris ; Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Meudon, 1991. [168](#)
- [2] Antonio Ambrosetti and Paul H. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Functional Analysis*, 14 :349–381, 1973. [14](#), [24](#)
- [3] Thierry Aubin. Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev. *J. Differential Geometry*, 11(4) :573–598, 1976. [10](#), [12](#), [20](#), [22](#), [52](#), [54](#), [71](#)
- [4] H. Berestycki, L. Nirenberg, and S. R. S. Varadhan. The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains. *Comm. Pure Appl. Math.*, 47(1) :47–92, 1994. [173](#), [175](#)
- [5] Marie-Francoise Bidaut-Véron and Stanislav Pohozaev. Nonexistence results and estimates for some nonlinear elliptic problems. *J. Anal. Math.*, 84 :1–49, 2001. [50](#)
- [6] Jean-Michel Bony. Principe du maximum et inégalité de Harnack pour les opérateurs elliptiques dégénérés. In *Séminaire de Théorie du Potentiel, dirigé par M. Brelot, G. Choquet et J. Deny : 1967/1968, Exp. 10*, page 20. Secrétariat mathématique, Paris, 1969. [42](#)
- [7] Simon Brendle. Blow-up phenomena for the Yamabe equation. *J. Amer. Math. Soc.*, 21(4) :951–979, 2008. [196](#), [207](#)
- [8] Haïm Brézis and Elliott Lieb. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 88(3) :486–490, 1983. [53](#), [152](#)
- [9] Haïm Brézis and Louis Nirenberg. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math.*, 36(4) :437–477, 1983. [10](#), [20](#), [45](#), [50](#), [51](#), [52](#), [53](#), [54](#), [56](#)

-
- [10] Isaac Chavel. *Riemannian geometry—a modern introduction*, volume 108 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993. [31](#)
- [11] Athanase Cotsoioli and Nikos Labropoulos. Ledoux-type rigidity results on manifolds with boundary in the presence of symmetries. *Nonlinear Anal.*, 198 :111887, 23, 2020. [98](#)
- [12] Zindine Djadli. Nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent on compact Riemannian manifolds. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 8(4) :293–326, 1999. [14](#), [24](#)
- [13] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian geometry*. pages xiv+300, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty. [31](#)
- [14] Olivier Druet and Emmanuel Hebey. The AB program in geometric analysis : sharp Sobolev inequalities and related problems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 160(761) :viii+98, 2002. [41](#)
- [15] Olivier Druet, Emmanuel Hebey, and Frédéric Robert. *Blow-up theory for elliptic PDEs in Riemannian geometry*, volume 45 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2004. [17](#), [27](#), [31](#), [164](#), [172](#)
- [16] José F. Escobar and Richard M. Schoen. Conformal metrics with prescribed scalar curvature. *Invent. Math.*, 86(2) :243–254, 1986. [10](#), [20](#)
- [17] Zoé Faget. Best constants in Sobolev inequalities on Riemannian manifolds in the presence of symmetries. *Potential Anal.*, 17(2) :105–124, 2002. [10](#), [12](#), [20](#), [22](#), [61](#), [68](#), [71](#), [73](#), [75](#), [81](#), [84](#), [88](#), [138](#), [141](#), [154](#), [163](#), [167](#), [171](#)
- [18] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990. [31](#)
- [19] N. Ghoussoub and F. Robert. The effect of curvature on the best constant in the Hardy-Sobolev inequalities. *Geom. Funct. Anal.*, 16(6) :1201–1245, 2006. [66](#), [82](#)
- [20] Nassif Ghoussoub and Frédéric Robert. The Hardy-Schrödinger operator with interior singularity : the remaining cases. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 56(5) :Paper No. 149, 54, 2017. [18](#), [28](#), [181](#)
- [21] B. Gidas, Wei Ming Ni, and L. Nirenberg. Symmetry and related properties via the maximum principle. *Comm. Math. Phys.*, 68(3) :209–243, 1979. [55](#)

- [22] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition. [10](#), [20](#), [87](#), [89](#), [170](#), [172](#)
- [23] Hans-Christoph Grunau and Frédéric Robert. Positivity and almost positivity of biharmonic Green's functions under Dirichlet boundary conditions. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 195(3) :865–898, 2010. [43](#)
- [24] Qing Han and Fanghua Lin. *Elliptic partial differential equations*, volume 1 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York ; American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2011. [42](#)
- [25] Emmanuel Hebey. *Nonlinear analysis on manifolds : Sobolev spaces and inequalities*, volume 5 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York ; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. [10](#), [20](#), [31](#), [46](#), [49](#), [109](#), [111](#)
- [26] Emmanuel Hebey and Michel Vaugon. The best constant problem in the Sobolev embedding theorem for complete Riemannian manifolds. *Duke Math. J.*, 79(1) :235–279, 1995. [10](#), [20](#), [41](#)
- [27] Emmanuel Hebey and Michel Vaugon. Sobolev spaces in the presence of symmetries. volume 76, pages 859–881. 1997. [39](#), [41](#), [61](#), [66](#)
- [28] Cheikh Ali Hussein. The second best constant for the hardy-sobolev inequality on manifolds. *Pacific journal of mathematics*, 2020. [182](#), [186](#), [190](#), [192](#), [195](#), [198](#), [208](#)
- [29] Hassan Jaber. *Équations de Hardy-Sobolev sur les variétés Riemanniennes compactes : Influence de la géométrie*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2014.
- [30] Hassan Jaber. Hardy-Sobolev equations on compact Riemannian manifolds. *Nonlinear Anal.*, 103 :39–54, 2014. [14](#), [24](#)
- [31] Hassan Jaber. Optimal Hardy-Sobolev inequalities on compact Riemannian manifolds. *J. Math. Anal. Appl.*, 421(2) :1869–1888, 2015. [12](#), [13](#), [22](#), [23](#), [71](#), [73](#), [92](#), [98](#), [208](#)
- [32] Jürgen Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, fifth edition, 2008. [31](#)

- [33] John M. Lee and Thomas H. Parker. The Yamabe problem. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 17(1) :37–91, 1987. [10](#), [20](#)
- [34] Elliott H. Lieb. Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities. volume 118, pages 349–374. 1983. [13](#), [23](#), [71](#)
- [35] Elliott H. Lieb. Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities. volume 118, pages 349–374. 1983. [92](#)
- [36] P.-L. Lions. On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. *SIAM Rev.*, 24(4) :441–467, 1982. [45](#)
- [37] P.-L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1(1) :145–201, 1985. [140](#)
- [38] Frédéric Robert. Existence et asymptotiques optimales des fonctions de green des opérateurs elliptiques d’ordre deux. *site web : iecl.univ-lorraine.fr/membre-iecl/robert-frederic/*, 2009. [173](#), [174](#)
- [39] Nicolas Saintier. Asymptotic estimates and blow-up theory for critical equations involving the p -Laplacian. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 25(3) :299–331, 2006. [137](#), [145](#), [147](#)
- [40] Nicolas Saintier. Blow-up theory for symmetric critical equations involving the p -Laplacian. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 15(1-2) :227–245, 2008. [10](#), [11](#), [20](#), [21](#), [61](#), [136](#), [140](#), [144](#), [145](#), [146](#), [150](#), [156](#), [159](#), [162](#)
- [41] Takashi Sakai. *Riemannian geometry*, volume 149 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Translated from the 1992 Japanese original by the author. [31](#)
- [42] Richard M. Schoen. Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics. In *Topics in calculus of variations (Montecatini Terme, 1987)*, volume 1365 of *Lecture Notes in Math.*, pages 120–154. Springer, Berlin, 1989. [10](#), [20](#)
- [43] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. V*. Publish or Perish, Inc., Boston, Mass., 1975. [31](#)
- [44] Giorgio Talenti. Best constant in Sobolev inequality. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 110 :353–372, 1976. [12](#), [22](#), [71](#)
- [45] Peter Tolksdorf. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. *J. Differential Equations*, 51(1) :126–150, 1984. [158](#), [170](#)

BIBLIOGRAPHIE

- [46] V. V. Vagner. *The foundations of differential geometry and modern algebra*. Izdat. Akad. Nauk SSSR, Leningrad, 1963. [31](#)
- [47] Hassler Whitney. Differentiable manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 37(3), 1936. [32](#)

Résumé

Cette thèse présente divers aspects de la résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires avec exposant surcritique de Sobolev, sur des variétés Riemanniennes compactes. Une méthode pour étudier des problèmes surcritiques est d'imposer des invariances par un groupe d'isométrie. On va donc se donner un sous-groupe du groupe d'isométries de notre variété. Dans le cas trivial d'une action libre et fidèle, le quotient de la variété par ce groupe est une variété lisse de dimension inférieure. Ainsi, en étudiant un problème invariant par un tel groupe, on se ramène de façon artificielle à un problème critique sur la variété quotient de dimension inférieure. Dans notre travail, nous considérons le cas plus difficile de groupes qui n'agissent ni librement ni fidèlement : le problème sera alors que le quotient ne reste plus une variété, et les techniques précédentes ne fonctionneront plus. Des hypothèses sur ce groupe seront explicitées. Dans la première partie, nous déterminons la meilleure constante dans les inégalités de Hardy-Sobolev avec invariance par un tel groupe d'isométries : cette constante dépend de la meilleure constante euclidienne correspondante et nous permet d'obtenir des solutions de l'équation de Hardy-Sobolev perturbée via le Lemme du Col d'Ambrosetti-Rabinowitz. Dans la deuxième partie, nous effectuons une analyse du phénomène de concentration d'une famille de solutions de l'équation surcritique avec invariances. Sous des hypothèses adaptées, nous montrons que l'orbite de concentration converge très rapidement vers l'orbite limite, ce qui nous permet de montrer une relation entre le potentiel et la géométrie en l'orbite de concentration.

Mots clés

Équations aux dérivées partielles non linéaires, Équation de Hardy-Sobolev, Meilleure constante de Sobolev, Invariance par isométrie, phénomène de concentration, Puissance surcritique, Identités de Pohozaev, Orbite de concentration

Abstract

In this manuscript, we present several aspects of the resolution of nonlinear elliptic partial differential equations with supercritical Sobolev exponent. We are considering the context of a compact Riemannian manifold and we fix a subgroup of the isometries of this manifold. Taking a problem invariant under the action of this group permits to get a reasonable supercritical problem. More precisely, if the action of such a group is free, the quotient is also a smooth manifold of an inferior dimension: this transforms a supercritical problem on the initial manifold into a critical problem on the quotient manifold. Therefore, under this free-action hypothesis, the problem is artificially supercritical. In our work, we consider the more intricate case of a group that does not act freely, so that the quotient space is not necessarily a manifold, and the preceding method fails. We make an explicit hypothesis on the group to be able to perform some analysis. In the first part, we compute the best constant in the Hardy-Sobolev supercritical inequalities with invariance under such a group: this constant depends on the corresponding Euclidean best constant. This constant allows us to get solutions to a supercritical Hardy-Sobolev equation with perturbation via the Mountain-Pass Lemma of Ambrosetti-Rabinowitz. In the second part, we perform an analysis of the concentration phenomenon associated with supercritical equations with invariance. Under suitable hypothesis, we show that the concentration orbit converges very fast to a limiting orbit. This allows to get a relation between the potential and the geometry at the concentration orbit.

Key Words

Nonlinear elliptic partial differential equations, Hardy-Sobolev equation, Best constant of Sobolev space, Invariance under the action of a group of isometries, BLow-up, Supercritical exponent, Pohozaev identities, Concentration orbit

