



**HAL**  
open science

# **Contribution à la commande robuste de systèmes à relais et sa mise en œuvre expérimentale : Application aux convertisseurs de puissance DC-DC**

Aboubacar Ndoye

## ► To cite this version:

Aboubacar Ndoye. Contribution à la commande robuste de systèmes à relais et sa mise en œuvre expérimentale : Application aux convertisseurs de puissance DC-DC. Automatique / Robotique. INSA Lyon, 2021. Français. <NNT : >. <tel-03621571v1>

**HAL Id: tel-03621571**

**<https://hal.science/tel-03621571v1>**

Submitted on 28 Mar 2022 (v1), last revised 2 Apr 2022 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



# INSA

N°d'ordre NNT : 2021LYSEI085

**THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON**  
opérée au sein de  
**L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

**Ecole Doctorale N° 160**  
**EEA de Lyon**

**Spécialité/ discipline de doctorat** : Automatique

Soutenue publiquement le 07/12/2021, par :  
**Aboubacar NDOYE**

---

**Contribution à la commande robuste de  
systèmes à relais et sa mise en œuvre  
expérimentale : Application aux  
convertisseurs de puissance DC-DC**

---

Devant le jury composé de :

JUNGERS, Marc	Directeur de recherche	Laboratoire CRAN	Rapporteur
GODOY, Emmanuel	Professeur des universités	CentraleSupélec	Rapporteur
TARBOURIECH, Sophie	Directrice de recherche	Laboratoire LAAS	Examinatrice
LIN-SHI, Xuefang	Professeur des Universités	INSA LYON	Directrice de thèse
DELPOUX, Romain	Maître de Conférences	INSA LYON	Co-encadrant de thèse
TRÉGOUËT, Jean-François	Maître de Conférences	INSA LYON	Co-encadrant de thèse



## Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<b><u>CHIMIE DE LYON</u></b> <a href="https://www.edchimie-lyon.fr">https://www.edchimie-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage secretariat@edchimie-lyon.fr	<b>M. Stéphane DANIELE</b> C2P2-CPE LYON-UMR 5265 Bâtiment F308, BP 2077 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69616 Villeurbanne <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b><u>ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u></b> <a href="https://edeea.universite-lyon.fr">https://edeea.universite-lyon.fr</a> Sec. : Stéphanie CAUVIN Bâtiment Direction INSA Lyon Tél : 04.72.43.71.70 secretariat.edeea@insa-lyon.fr	<b>M. Philippe DELACHARTRE</b> INSA LYON Laboratoire CREATIS Bâtiment Blaise Pascal, 7 avenue Jean Capelle 69621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.88.63 <a href="mailto:philippe.delachartre@insa-lyon.fr">philippe.delachartre@insa-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b><u>ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION</u></b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a> Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr	<b>M. Philippe NORMAND</b> Université Claude Bernard Lyon 1 UMR 5557 Lab. d'Ecologie Microbienne Bâtiment Mendel 43, boulevard du 11 Novembre 1918 69 622 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:philippe.normand@univ-lyon1.fr">philippe.normand@univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b><u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ</u></b> <a href="http://ediss.universite-lyon.fr">http://ediss.universite-lyon.fr</a> Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 secretariat.ediss@univ-lyon1.fr	<b>Mme Sylvie RICARD-BLUM</b> Institut de Chimie et Biochimie Moléculaires et Supramoléculaires (ICBMS) - UMR 5246 CNRS - Université Lyon 1 Bâtiment Raulin - 2ème étage Nord 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne Cedex Tél : +33(0)4 72 44 82 32 <a href="mailto:sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr">sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<b><u>INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES</u></b> <a href="http://edinfomaths.universite-lyon.fr">http://edinfomaths.universite-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage Tél : 04.72.43.80.46 infomaths@univ-lyon1.fr	<b>M. Hamamache KHEDDOUCI</b> Université Claude Bernard Lyon 1 Bât. Nautibus 43, Boulevard du 11 novembre 1918 69 622 Villeurbanne Cedex France Tél : 04.72.44.83.69 <a href="mailto:hamamache.kheddouci@univ-lyon1.fr">hamamache.kheddouci@univ-lyon1.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b><u>MATÉRIAUX DE LYON</u></b> <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a> Sec. : Yann DE ORDENANA Tél : 04.72.18.62.44 yann.de-ordenana@ec-lyon.fr	<b>M. Stéphane BENAYOUN</b> Ecole Centrale de Lyon Laboratoire LTDS 36 avenue Guy de Collongue 69134 Ecully CEDEX Tél : 04.72.18.64.37 <a href="mailto:stephane.benayoun@ec-lyon.fr">stephane.benayoun@ec-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b><u>MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE</u></b> <a href="http://edmega.universite-lyon.fr">http://edmega.universite-lyon.fr</a> Sec. : Stéphanie CAUVIN Tél : 04.72.43.71.70 Bâtiment Direction INSA Lyon mega@insa-lyon.fr	<b>M. Jocelyn BONJOUR</b> INSA Lyon Laboratoire CETHIL Bâtiment Sadi-Carnot 9, rue de la Physique 69621 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr">jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<b><u>ScSo*</u></b> <a href="https://edsciencessociales.universite-lyon.fr">https://edsciencessociales.universite-lyon.fr</a> Sec. : Mélina FAVETON INSA : J.Y. TOUSSAINT Tél : 04.78.69.77.79 melina.faveton@univ-lyon2.fr	<b>M. Christian MONTES</b> Université Lumière Lyon 2 86 Rue Pasteur 69365 Lyon CEDEX 07 <a href="mailto:christian.montes@univ-lyon2.fr">christian.montes@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



*Nous réalisons que ce que nous  
accomplissons n'est qu'une goutte dans  
l'océan. Mais si cette goutte n'existait  
pas dans l'océan, elle manquerait.*

---

Mère Teresa



# Remerciements

Au terme de la rédaction de ce mémoire, c'est un devoir agréable d'exprimer en quelques lignes la reconnaissance que je dois à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de ma thèse. Qu'elles trouvent ici mes vifs respects et ma profonde gratitude.

Tout d'abord, je tiens à remercier très vivement ma directrice de thèse Xuefang LIN-SHI pour son implication et son encadrement de qualité tout au long de la thèse. Merci pour les précieux conseils concernant les pistes de recherche à explorer mais aussi pour les remarques pertinentes sur la rédaction des documents scientifiques.

Je remercie très chaleureusement mes encadrants Romain DELPOUX et Jean-François TRÉGOUËT pour leur investissement dans ce travail, leur patience et leur rigueur scientifique. Merci pour les nombreuses heures passées, parfois le weekend ou même tard dans la nuit, pour m'apporter votre aide dans la rédaction des documents scientifiques. Merci également pour les conseils et les discussions intéressantes que nous avons eu tout au long de la thèse.

J'adresse mes sincères remerciements à Messieurs Emmanuel GODOY et Marc JUNGERS pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse et de participer au jury de soutenance. Merci pour votre lecture approfondie du mémoire et les échanges fructueux qui en ont découlé, ainsi que pour vos commentaires encourageants.

Merci également à Madame Sophie TARBOURIECH pour avoir accepté d'être membre du jury et pour son intérêt pour ce travail.

Je tiens aussi à remercier Messieurs Alexandre KRUSZEWSKI et Laurentiu HETEL pour leur aide apportée dans cette thèse et particulièrement à Laurentiu pour sa disponibilité tout au long de la thèse et ses qualités scientifiques et humaines.

Merci à l'ensemble du personnel du laboratoire AMPERE et notamment ceux de Saint-Exupéry pour tous les moments passés ensemble : Xavier, Jean-Yves, Vincent, Damien, Sylvie, Laura, Paolo, Willy, Eric et tous les autres.

Je remercie également les doctorants et contractuels du laboratoire pour leurs qualités humaines mais également scientifiques : Jérémie, Thibault, David, Vincent, Kévin (continu et discret), Xiaokang, Tanguy, Gabriel, Laurent, Simon, Tahereh, Adrien.

Un merci tout particulier à mes parents, mon frère et ma sœur ainsi que ma belle famille pour leurs encouragements et pour leurs prières. Merci à tous mes amis, ceux du

---

groupe Terminus, de l'ESP et notamment ceux de Barcelone (du groupe NMG) qui m'ont apporté tout leur soutien et encouragement durant cette thèse.

Enfin, un grand merci à ma femme Aminata pour sa patience, ses encouragements et pour son soutien tout au long de cette thèse.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>vii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>x</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xiii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xv</b>
<b>Liste des symboles</b>	<b>xviii</b>
<b>Résumé</b>	<b>xix</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions introductives</b>	<b>5</b>
Introduction . . . . .	6
1.1 Modélisation des convertisseurs . . . . .	6
1.2 Stabilisation des systèmes à relais . . . . .	20
Conclusion . . . . .	27
<b>2 Stabilisation des systèmes à relais incertains</b>	<b>29</b>
Introduction . . . . .	30
2.1 Formulation du problème . . . . .	31
2.2 Une solution générale au problème 2.1.1 . . . . .	32
2.3 Le cas linéaire associé à un polytope convexe . . . . .	38
Conclusion . . . . .	60
<b>3 Application à l'interconnexion de convertisseurs DC-DC en parallèle</b>	<b>61</b>
Introduction . . . . .	62
3.1 Reformulation du système à étudier . . . . .	62
3.2 Synthèse de la commande robuste à relais . . . . .	64
3.3 Présentation des résultats . . . . .	70
Conclusion . . . . .	90
<b>4 Comparaison de l'approche à relais avec une approche basée sur le modèle moyen</b>	<b>91</b>
Introduction . . . . .	92

4.1 Synthèse de la commande . . . . .	92
4.2 Présentation des résultats . . . . .	101
Conclusion . . . . .	110
<b>Conclusion générale</b>	<b>111</b>
<b>A Notions de solutions de Phillipov</b>	<b>115</b>
<b>B Exemple illustrant la remarque 2.3.5</b>	<b>118</b>
<b>C Quelques propriétés de la fonction <math>\phi_c</math> définie dans (2.17)</b>	<b>120</b>
<b>Références</b>	<b>121</b>

# Table des figures

1.1	Schéma de principe des convertisseurs DC-DC . . . . .	7
1.2	Schéma électrique du convertisseur Buck . . . . .	7
1.3	Chronogrammes de la commande et du courant pour le cas continu (a) et le cas discontinu (b) . . . . .	8
1.4	Représentation du convertisseur Buck avec les résistances parasites . . . . .	8
1.5	Représentation de $m$ convertisseurs Buck en parallèle avec les résistances parasites . . . . .	9
1.6	Phénomènes transitoires du courant lors des changements d'état de la commande . . . . .	14
1.7	Schéma illustratif du fonctionnement de la MLI centrée (le signal $d(t)$ est quantifié) . . . . .	14
1.8	Stratégie de prise de mesures pour l'approche de la MLI . . . . .	15
1.9	Chronogrammes de l'horloge du processeur et du signal numérique de la porteuse de la MLI . . . . .	16
1.10	Schéma de principe de l'implémentation de la commande pour l'approche MLI . . . . .	17
1.11	Illustration de la paramétrisation de $T_s$ et de $T_{MLI}$ . . . . .	17
1.12	Exemple de chronogrammes de la commande et du courant obtenus avec l'approche à relais . . . . .	18
1.13	Schéma de principe de l'implémentation de la commande pour l'approche à relais . . . . .	18
1.14	Chronogrammes du courant et de la commande pour l'approche à relais et l'approche MLI . . . . .	19
2.1	Illustration de la construction de $\mathcal{V}$ et de $\mathcal{P}(c)$ . . . . .	43
2.2	Évolution de la variable d'état $x$ , de la commande $u$ et du paramètre $\theta$ pour le système (2.1) associé aux matrices définies dans (2.69) . . . . .	54
2.3	Illustration de la construction de $\mathcal{V}$ et de $\mathcal{P}(c)$ pour le système défini par (2.72) . . . . .	56
2.4	Évolution du vecteur d'état $x$ (en bleu approche Lur'e et en rouge approche quadratique) et du paramètre $\theta$ pour le système (2.1) associé aux matrices définies dans (2.72) . . . . .	59
3.1	Représentation idéale de l'interconnexion de $m$ convertisseurs Buck . . . . .	63
3.2	Impact du conditionnement numérique par rapport au nombre $m$ de convertisseurs. . . . .	68

3.3	Schéma bloc de la mise en œuvre de la commande . . . . .	70
3.4	Résultats de simulation : graphes de la tension, des courants, de la commande $u_1$ et de la charge en fonction du temps pour l'approche locale quadratique . . . . .	75
3.5	Résultats de simulation : graphes de la tension, des courants, de la commande $u_1$ et de la charge en fonction du temps pour l'approche locale Lur'e . . . . .	76
3.6	Résultats de simulation : graphes de la tension, des courants, de la commande $u_1$ et de la charge en fonction du temps pour l'approche globale . . . . .	77
3.7	Comparaison des graphes en simulation de la tension pour les approches locale et globale : $v_{lq}$ représente la tension obtenue avec l'approche locale quadratique, $v_l$ avec l'approche locale Lur'e, et $v_g$ celle obtenue avec l'approche globale . . . . .	78
3.8	Graphe de la tension en fonction du temps pour l'approche de stabilité globale avec différentes valeurs de $\delta$ et pour $\theta_n = 1/10$ : à $t = 3\text{ms}$ la valeur de la charge passe $10 \Omega$ à $5 \Omega$ . . . . .	78
3.9	Graphe de la tension en fonction du temps pour les approches de stabilité locale quadratique et Lur'e avec $\delta = 0.23$ et pour $\theta_n = 1/5$ : $v_{lq}$ représente la tension obtenue avec l'approche locale quadratique et $v_l$ avec l'approche locale Lur'e (à $t = 3\text{ms}$ la valeur de la charge passe $10 \Omega$ à $5 \Omega$ ) . . . . .	80
3.10	Banc d'essai expérimental . . . . .	81
3.11	Procédure d'implémentation du FPGA avec Xilinx System Generator . . . . .	82
3.12	Xilinx Blockset . . . . .	82
3.13	Synchronisation des mesures du Convertisseur Analogique-Numérique (CAN) . . . . .	83
3.14	Schéma bloc de la mise en œuvre de la loi de commande . . . . .	84
3.15	Illustration des différentes fréquences mises en jeu dans l'implémentation de la commande . . . . .	85
3.16	Résultats expérimentaux : graphes de la tension, du courant, de la commande et de la charge en fonction du temps pour l'approche locale . . . . .	86
3.17	Résultats expérimentaux : graphes de la tension, du courant, de la commande et de la charge en fonction du temps pour l'approche globale . . . . .	87
3.18	Zoom de la commande $u_1$ pour l'asservissement de la tension en utilisant l'approche de la stabilité globale . . . . .	88
3.19	Zoom de la commande $u_1$ après application de l'échelon de charge pour l'approche de la stabilité globale . . . . .	88
3.20	Comparaison des graphes expérimentaux de la tension pour les approches locale et globale : $v_l$ représente la tension obtenue avec l'approche locale et $v_g$ celle obtenue avec l'approche globale . . . . .	89
4.1	Schéma électrique d'un convertisseur Buck . . . . .	93
4.2	Définition de l'expérience de référence. . . . .	97
4.3	Illustration des critères de comparaison : $T_r$ , $D\%$ et $\Delta v$ . . . . .	99
4.4	Illustration des ondulations de courant en régime permanent . . . . .	99
4.5	Représentation du convertisseur Buck avec les résistances parasites . . . . .	100

4.6	Microcontrôleur ATSAME70 (à gauche) et carte Explorer 16/32 (à droite)	102
4.7	'MPLAB Device Blocks for Simulink' . . . . .	102
4.8	Procédure de génération de code et de programmation de la carte . . . . .	103
4.9	Résultats expérimentaux : commande à relais pour $T_s = \{1.1, 8, 55\}\mu s$ . . . . .	104
4.10	Résultats expérimentaux : commande continue basée sur la MLI pour $T_s = \{12.5, 50\}\mu s$ ( $u$ est la commande discontinue générée par la MLI) . . . . .	105
4.11	Graphe du rendement pour les différentes approches considérées . . . . .	108
4.12	Diagramme en étoile des résultats consignés sur le tableau 4.2 . . . . .	109



# Liste des tableaux

2.1	Solutions numériques obtenues en résolvant (2.66) pour différentes valeurs de $\delta$ . . . . .	56
2.2	Volume de $\mathcal{E}(\gamma r^{-1}P, \mathbf{0}, 1)$ pour différentes valeurs de $\delta$ . . . . .	57
3.1	Valeurs numériques des paramètres du système pour $m > 1$ . . . . .	68
3.2	Valeurs numériques des paramètres du système . . . . .	70
4.1	Paramètres du convertisseur Buck . . . . .	94
4.2	Synthèse des critères de comparaison pour les différentes commandes . . .	106



# Nomenclature

## Acronymes

CAN	Convertisseur Analogique-Numérique.
CNA	Convertisseur Numérique-Analogique.
CPU	Central Processing Unit.
LMI	Linear Matrices Inequalities.
MLI	Modulation à Largeur d'Impulsion.

## Notations

$\mathbf{0}_{m \times n}$	Matrice nulle de dimension $m \times n$ .
$\mathbf{1}_m$ ( $\mathbf{0}_m$ )	Vecteur colonne composé d'éléments égaux à 1 (0).
$\mathbf{I}_n$	Matrice identité de dimension $n \times n$ .
$\Lambda_N$	Simplexe unitaire $\{[\lambda_1, \dots, \lambda_N]^\top \in \mathbb{R}_{\geq 0}^N : \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1\}$ .
$\mathbb{S}_+^n$	Ensemble des matrices symétriques définies positives : $\{P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n} : \forall x \neq \mathbf{0}, x^\top P x > 0\}$ .
$\mathcal{I}_N$	$\{1, 2, \dots, N\}$ .
$\text{conv}\{\mathcal{U}\}$	Enveloppe convexe de $\mathcal{U}$ .
$\text{diag}\{x\}$	Opérateur qui construit une matrice diagonale à partir des éléments du vecteur $x$ .
$\text{sat}_\alpha(\cdot)$	Fonction : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie telle que pour un réel $\alpha > 0$ , on a

$$\text{sat}_\alpha(x) := \begin{cases} -\alpha & \text{si } x < -\alpha, \\ x & \text{si } -\alpha \leq x \leq \alpha, \\ \alpha & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

$\overline{\text{conv}}\{\mathcal{U}\}$	Ensemble convexe fermé de $\mathcal{U}$ .
$\text{sat}_a(\cdot)$	Fonction : $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie telle que pour un vecteur $a \in \mathbb{R}_{>0}^m$ , on a

$$\text{sat}_a(x) := \begin{bmatrix} \text{sat}_{a_1}(x_1) \\ \vdots \\ \text{sat}_{a_m}(x_m) \end{bmatrix}.$$

$B(x, c_B)$	Boule ouverte de centre $x$ et de rayon $c_B > 0$ .
$M_i$ ( $v_i$ )	$i$ -ème ligne (composante) de la matrice $M$ (du vecteur $v$ ).
$M_{i,j}$	Composante de la matrice $M$ se trouvant à la $i$ -ème ligne et à la $j$ -ème colonne.

$P_{\Sigma}(s)$  Matrice de Rosenbrock du système  $\{A, B, C, \mathbf{0}\}$  :

$$P_{\Sigma}(s) := \begin{bmatrix} A - s\mathbf{I}_n & B \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

# Résumé

Le travail présenté dans cette thèse comporte deux volets. Le premier est orienté sur la synthèse de lois de commande stabilisantes pour les systèmes à relais en prenant en compte les incertitudes du modèle. Dans la littérature, la plupart des résultats présentés sont dédiés à la stabilisation de ces systèmes en considérant le modèle comme parfaitement connu. Par conséquent, ces résultats ne sont pas exploitables en pratique où les incertitudes peuvent exister. Nous nous sommes dès lors intéressés à cette problématique. La synthèse de commande proposée se base sur la théorie de Lyapunov, l'introduction d'un contrôleur dynamique et sur l'existence d'une commande continue par retour d'état stabilisante. De plus, sous certaines conditions, une méthode constructive de synthèse des gains du contrôleur, basée sur les inégalités matricielles linéaires (Linear Matrix Inequalities (LMI) en anglais), est fournie. Le deuxième volet de cette thèse porte sur la mise en œuvre expérimentale de la loi de commande à relais avec une application sur l'interconnexion de convertisseurs DC-DC en parallèle. Nous porterons une attention particulière sur la prise de mesures des grandeurs électriques malgré les fréquences variables de la commande. La validation expérimentale de notre approche est effectuée en utilisant une MicrolabBox qui est un équipement dSpace permettant le prototypage rapide de code VHDL sur FPGA. Finalement, une comparaison avec l'approche classique basée sur la technique de la Modulation à Largeur d'Impulsion (MLI) est présentée afin de bien mettre en évidence les avantages et inconvénients de chacune d'elles.

# Abstract

This thesis is dedicated to the design and the implementation of a robust control law for uncertain relay systems. Various approaches have been proposed for the design of stabilizing switching rules in the literature under the assumption that the equilibrium point is perfectly known. However, uncertainties prevent those results to be implemented in most practical cases. Here, to cope with model uncertainties, a dynamic controller is introduced in the design procedure which is based on the existence of an exponentially globally stabilizing continuous state feedback controller. Asymptotic stability of the closed-loop system, as well as zero steady-state error on the controlled output, are proven. Besides, under certain conditions, a constructive method to compute the gains of the controller parameters is provided using Linear Matrix Inequalities (LMI). The proposed strategy is then applied on a parallel interconnection of DC/DC converters. For this system, an extensive discussion is offered on specific difficulties about ill-conditioned matrix inequalities. The experimental validation of our approach is carried out using a user-programmable Field-Programmable Gate Array (FPGA). Finally, a comparison with Pulse Width Modulation (PWM) approaches is presented to put in light the advantages and drawbacks of each strategy.

# Introduction générale

## Contexte et problématique

Avec le développement de l'électrification et l'intégration de sources d'énergies renouvelables, les convertisseurs de puissance sont devenus incontournables. En effet ils permettent de contrôler et d'adapter l'énergie électrique fournie par une source d'énergie à un récepteur. Depuis quelques temps, la mise en parallèle de ces convertisseurs de puissance a suscité beaucoup d'intérêt de la part de la communauté de l'électronique de puissance en raison de son utilisation dans plusieurs applications telles que les alimentations basse tension/fort courant ou encore dans les réseaux microgrids ([Gue+10]). Ces derniers, en forte croissance dans le monde, sont des réseaux électriques à petite échelle, constitués localement d'au moins une unité de production, de stockage et de consommation. Ces installations sont généralement associées à des convertisseurs, connectés au même réseau de sorte à réaliser une interconnexion.

Les convertisseurs de puissance sont pilotés par l'intermédiaire de transistors, jouant le rôle d'interrupteurs commandés. Ils peuvent donc être modélisés comme des systèmes à commutations et peuvent être pilotés en utilisant des commandes à relais ([TT+84]). Ce type de commande a attiré une grande attention de la part de la communauté automatique traitant la commande des systèmes dynamiques hybrides [BS04] ; [Dea+10] ; [Tro+12] ; [SGZ15] ; [HFF15] ; [Ben+19]. Ces travaux résolvent formellement le problème en proposant des fonctions de commutations respectant différents critères d'optimisation. Cependant, ce type de commande pose des problèmes de mise en œuvre, dus principalement à ses fréquences de commutations variables et au fait qu'elle requiert un processeur avec une grande rapidité de calcul. En outre, la plupart des travaux sont dédiés à la synthèse de lois de commande pour le cas où le point d'équilibre est connu, ce qui ne reflète pas le cas pratique où des incertitudes peuvent apparaître.

Afin de contourner les problèmes cités précédemment, une des techniques largement utilisée dans le domaine du génie électrique est la Modulation à Largeur d'Impulsion (MLI) ([KSV91] ; [Kaz08]). Cette méthode a l'avantage d'être simple en considérant un modèle approché à entrée continue (le rapport cyclique de la MLI). Elle donne lieu à des signaux dont le contenu spectral est également mieux maîtrisé, car essentiellement lié à la

---

fréquence de la MLI qui est imposée lors de la conception du convertisseur. Cependant, le modèle requiert une séparation fréquentielle entre la période de la MLI et la dynamique du système afin de valider les hypothèses mises en jeux. Ceci aura pour conséquence de limiter les performances du contrôleur concernant, par exemple, la dynamique de rejet de perturbation. Notons toutefois qu'il existe, dans la littérature, plusieurs travaux s'intéressant à la robustesse de la commande par rapport aux incertitudes du modèle (voir par exemple [Ola+09]; [Sum+17]; [TD19]; [KV20]; [Roc+20]).

## Objectif de la thèse

L'objectif de cette thèse est la synthèse et la mise en œuvre expérimentale de loi de commande robuste à relais avec une application sur les convertisseurs de puissance en parallèle. En effet, il n'existe pas, à notre connaissance, d'approches de synthèse en mesure de traiter le problème considéré à ce jour.

Ainsi, dans un premier temps, nous nous sommes intéressés au développement d'une méthodologie pour la synthèse d'une commande robuste à relais. Un résultat général est d'abord proposé pour le cas des systèmes à relais incertains et non linéaires. Afin de proposer des méthodes de synthèse de commande robuste constructive, l'étude est ensuite spécialisée aux systèmes à relais incertains linéaires.

Les convertisseurs Buck en parallèle font partie de cette dernière classe. Cela nous permet de valider l'approche proposée et donc de répondre à la problématique expérimentale. L'étude de la mise en œuvre expérimentale et une comparaison avec des solutions classiques basées sur la MLI nous permettent d'évaluer les avantages et inconvénients de chacune des méthodes.

## Organisation du mémoire

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres présentés comme suit :

### Chapitre 1

Le premier chapitre est dédié à la présentation du système considéré dans ce mémoire qui est l'interconnexion de  $m \in \mathbb{N}^*$  convertisseurs Buck en parallèle alimentant une charge résistive dont la valeur est inconnue. Ce système appartient à la classe des systèmes à relais. Un état de l'art des techniques présentées dans la littérature pour traiter ce type de système sera détaillé. Certaines approches sont fondées sur le modèle hybride et d'autres sur le modèle moyen basé sur la technique de la MLI. Enfin, on montrera que la prise en compte d'incertitudes dans le modèle nécessite de considérer une synthèse robuste de la commande. Alors que ce type de synthèse est largement traité dans le cas

du modèle moyen, les approches hybrides pour ces systèmes sont plus rares. Une étude bibliographique sur la stabilisation robuste des systèmes à relais incertains montrera, qu'à notre connaissance, aucune approche n'est capable de traiter la classe de système considérée et permettra de situer nos contributions sur ce sujet.

## Chapitre 2

Puisque le chapitre 1 a montré l'absence de méthodologies existantes pour notre problème, le chapitre 2 est dédié à la synthèse d'une commande robuste à relais capable de résoudre cette problématique. Ceci constitue une des contributions majeures de cette thèse. Cette synthèse de commande est basée sur la théorie de Lyapunov et sur l'existence d'une commande continue stabilisante. Les incertitudes sont prises en compte par l'introduction d'un contrôleur dynamique issue d'une approche de type modèle interne. Traité dans un premier temps pour un système non linéaire, la restriction à un modèle linéaire incertain permet de proposer une solution de synthèse de loi de commande constructive, basée sur des inégalités matricielles linéaires (Linear Matrix Inequalities (LMI) en anglais).

## Chapitre 3

Ce chapitre est consacré à la validation de la stratégie proposée dans le chapitre 2 sur les convertisseurs Buck en parallèle. Cette validation s'effectue en simulation dans un premier temps, puis sur un système réel. Nous disposons pour cela d'un banc d'essai composé de  $m = 3$  convertisseurs Buck hétérogènes (c'est-à-dire que les bobines, diodes et transistors sont différents d'une branche à l'autre) et équipé d'un système de prototypage rapide dSpace avec un FPGA (Field Programmable Gate Arrays) programmable. La rapidité de calcul de ce système est en effet une des conditions de mise en œuvre des lois de commande pour les systèmes à relais. Il est effectivement connu que ces systèmes n'atteignent un régime asymptotique stationnaire que sous l'hypothèse qu'une fréquence de commutation infinie est possible [Lib03]. Cette validation permettra de discuter de l'efficacité de notre approche ainsi que des aspects de mise en œuvre pratique.

## Chapitre 4

Dans les chapitres précédents, des résultats théoriques et expérimentaux ont montré qu'il était possible de mettre en œuvre une commande robuste à relais pour des systèmes incertains. Ceci a permis de combler une lacune de la littérature sur ce sujet. Le dernier chapitre sera dédié à une comparaison entre l'approche proposée dans cette thèse et l'approche par modèle moyen généralement utilisée pour ce type de système. Elle sera effectuée en utilisant un microcontrôleur ATSAME70 de Microchip. Ce qui permet de montrer la possibilité de leur implémentation sur une cible de bas coût qui se prête bien pour des applications industrielles. Des critères de comparaison relatifs au régime transitoire

(temps de réponse), au régime permanent (rendement, ondulations de courant,...) ou encore au taux d'utilisation du calculateur permettront de réaliser cette comparaison. Illustrée par des résultats expérimentaux, elle permettra de dégager les avantages et inconvénients de chacune des approches.

# Chapitre 1

## Notions introductives

## Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'un système constitué de  $m \in \mathbb{N}^*$  convertisseurs DC-DC en parallèle alimentant une charge résistive. De nombreuses applications utilisent cette structure comme les Microgrids (voir [Gue+10]) ou encore les alimentations dans le domaine des télécommunications ([MNB02]). Ce système appartient à la classe des systèmes à relais qui représentent une sous classe des systèmes dynamiques hybrides ([DeC+00]; [GST12]). Ces derniers sont des systèmes qui font interagir simultanément des dynamiques continues et des dynamiques discrètes. Pour cette structure, l'objectif principal est d'assurer une régulation robuste de la tension de sortie vers une référence fixe et constante prédéfinie, et ceci malgré les résistances parasites des composants électroniques ou le fait que la valeur de la charge soit le plus souvent inconnue. Nous allons dans cette partie nous intéresser aux travaux exposés dans la littérature sur ce sujet et plus particulièrement à ceux prenant en compte explicitement le caractère hybride du système.

Ce chapitre est divisé en 2 sections :

- Dans la première section, après avoir décrit le fonctionnement du système, une présentation des deux principales approches utilisées pour la synthèse de commande de ce système sera effectuée. Nous indiquerons les avantages et inconvénients de chacune d'elles.
- La section 2 présente quelques notions fondamentales liées aux systèmes à relais. Nous passerons en revue les différentes méthodologies développées dans la littérature pour la stabilisation des systèmes à relais en considérant le cas des points d'équilibre incertains. Ceci nous permettra par la suite de situer nos contributions par rapport à ces travaux.

## 1.1 Modélisation des convertisseurs

### 1.1.1 Présentation et modélisation du système considéré

Les convertisseurs de puissance DC-DC sont des systèmes électriques utilisés pour adapter l'énergie entre une source d'entrée et une sortie. Pilotés par l'intermédiaire de transistors, ils permettent de transformer une tension continue (source) en une autre tension continue d'amplitude différente (voir schéma de principe représenté par la figure 1.1).

Selon la fonction à assurer, il existe plusieurs topologies pour ces systèmes. Ici, nous allons nous intéresser au convertisseur Buck. Également connu sous le nom de dévolteur, le convertisseur Buck est un dispositif qui permet de fournir une tension de sortie continue inférieure ou égale à la tension d'entrée. L'étude se portera sur un système constitué de  $m \in \mathbb{N}^+$  convertisseurs Buck en parallèle alimentant une charge résistive. Pour cela, nous

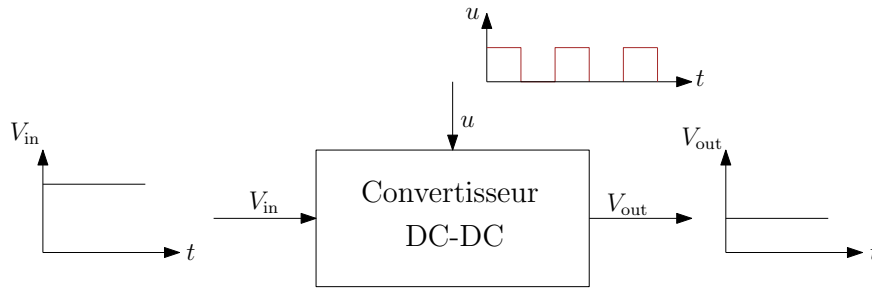


FIGURE 1.1 – Schéma de principe des convertisseurs DC-DC

allons dans un premier temps faire la description du convertisseur Buck seul ( $m = 1$ ) avant de faire la généralisation pour le cas où  $m > 1$ .

### Convertisseur Buck seul

Le schéma électrique du convertisseur Buck est représenté sur la figure 1.2. Il est constitué de quatre principaux composants : un interrupteur commandé  $S$  constitué d'un transistor, une diode  $D$ , une bobine  $L$  et un condensateur de filtrage  $C_0$ . La charge résistive est représentée par  $R$  et  $E$  désigne l'amplitude de la tension d'entrée. Le courant dans la bobine et la tension aux bornes de la charge sont respectivement  $i(t)$  et  $v(t)$ .

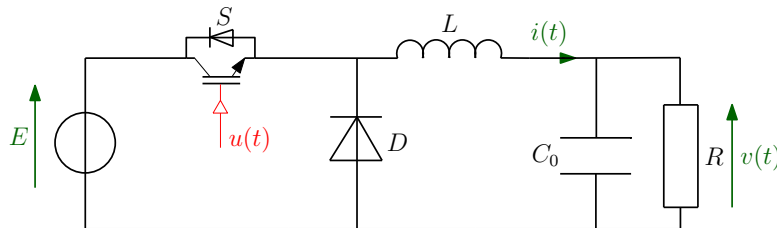


FIGURE 1.2 – Schéma électrique du convertisseur Buck

La variable  $u(t)$  représente la commande de l'interrupteur  $S$  et ne pourra prendre que deux valeurs : 0 ou 1.

- Lorsque  $u(t) = 1$ , le transistor  $S$  est passant et entraîne naturellement le blocage de la diode  $D$ . Durant cette phase, la charge est directement alimentée par la source de tension continue entraînant une augmentation progressive du courant  $i(t)$ , et donc de l'énergie emmagasinée dans la bobine  $L$  ;
- Lorsque  $u(t) = 0$ , le transistor  $S$  est bloqué et la diode  $D$  est passante. Durant cette séquence, la bobine  $L$  va restituer l'énergie emmagasinée lors de la première phase de fonctionnement à la charge, entraînant ainsi une baisse progressive du courant  $i(t)$ . Ici, deux cas de figure peuvent se présenter dépendant de l'inductance de la bobine : si la bobine a emmagasiné suffisamment d'énergie alors on sera en conduction continue, c'est-à-dire que le courant n'aura pas le temps de s'annuler pendant une période de commutation (voir figure 1.3.a) ; à l'inverse on sera en

conduction discontinue lorsque le courant s'annule avant la fin de la période de commutation (voir figure 1.3.b).

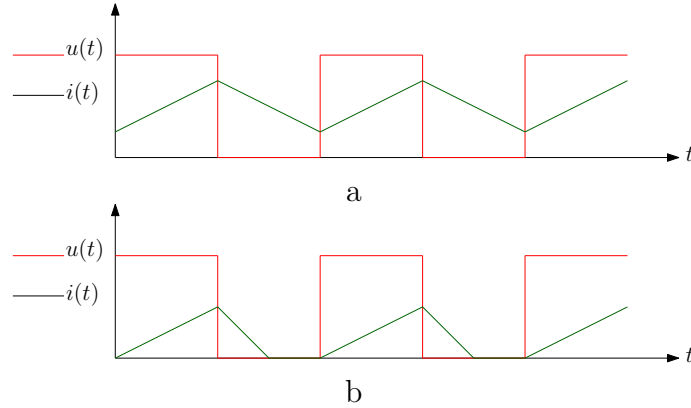


FIGURE 1.3 – Chronogrammes de la commande et du courant pour le cas continu (a) et le cas discontinue (b)

Pour notre étude, nous allons supposer que l'inductance de la bobine est assez grande de sorte à toujours rester en conduction continue.

En suivant la méthodologie proposée dans [Kaz08, Section 2.2.11], le convertisseur Buck peut être représenté comme sur la figure 1.4 avec les paramètres suivants :

- $R_s$  est la résistance du transistor  $S$  à l'état passant ;
- $R_F$  est la résistance de la diode  $D$  à l'état passant ;
- $V_F$  est la valeur de la tension seuil de la diode ;
- $R_C$  est la résistance équivalente série du condensateur  $C$  ;
- $R_L$  est la résistance équivalente série de la bobine  $L$ .

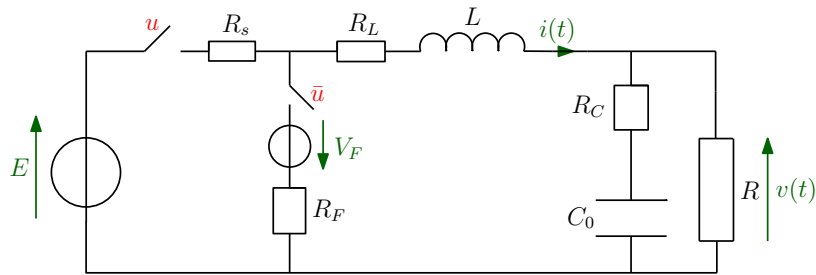


FIGURE 1.4 – Représentation du convertisseur Buck avec les résistances parasites

Dans ce chapitre, nous omettons la dépendance des variables par rapport au temps afin d'alléger l'écriture des équations. Pour chaque position de l'interrupteur  $S$ , il est possible, en utilisant les lois de Kirchoff, de déterminer les équations caractérisant le fonctionnement du système. Elles s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = -v - R_L i + (E - R_s i)u - (V_F + R_F i)(1 - u), & u \in \{0, 1\}, \\ C_0(R + R_C) \frac{dv}{dt} - C_0 R R_C \frac{di}{dt} = R i - v. \end{cases} \quad (1.1)$$

## Convertisseurs en parallèle

À présent, on considère le système constitué d'un nombre  $m$  de ces convertisseurs mis en parallèle et représenté sur la figure 1.5. Ces convertisseurs (qui peuvent être hétérogènes c'est-à-dire que les bobines, diodes et transistors sont différents d'une branche à l'autre) sont connectés sur un bus de tension continue sur lequel est également raccordée une charge résistive  $R$  via le condensateur  $C_0$  et sa résistance équivalente série  $R_C$ . Le  $j$ -ème convertisseur avec  $j \in \mathcal{I}_m$  est alimenté par une source de tension continue d'amplitude  $E_j \in \mathbb{R}_+$  et sa variable de commande est notée  $u_j$ . Il est aussi composé d'une bobine d'inductance  $L_j \in \mathbb{R}_+$  et de sa résistance équivalente série  $R_{L,j}$  dans laquelle circule le courant  $i_j$ , des résistances parasites du transistor  $S_j$  et de la diode  $D_j$  notées respectivement  $R_{s,j}$  et  $R_{F,j}$  et de la tension seuil  $V_{F,j}$  de la diode  $D_j$ . La somme de tous les courants  $\sigma$ , qui alimente la charge continue dont la tension de sortie est représentée par la variable  $v$ , est notée par :

$$\mathbb{R} \ni \sigma := \sum_{j=1}^m i_j. \quad (1.2)$$

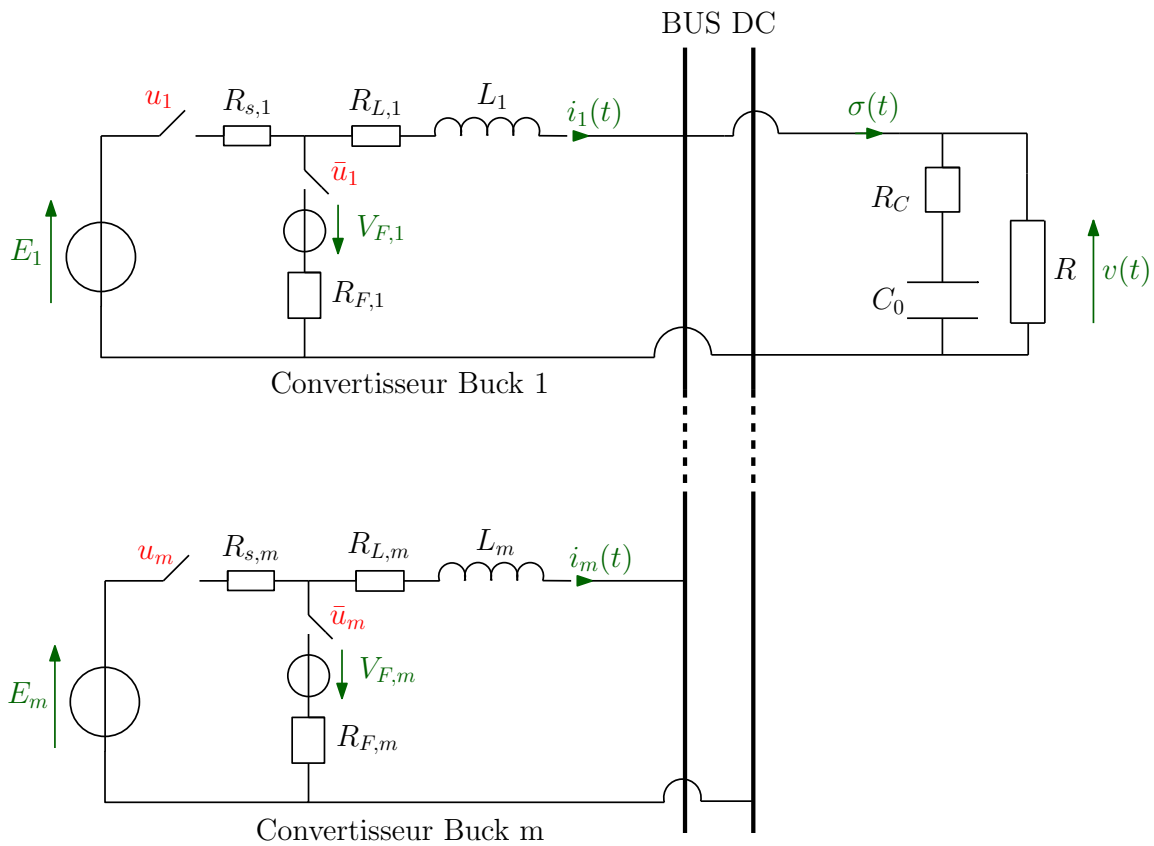


FIGURE 1.5 – Représentation de  $m$  convertisseurs Buck en parallèle avec les résistances parasites

De même que pour un seul convertisseur Buck, il est possible, en utilisant les lois de Kirchoff, de représenter les dynamiques du système. Ces dernières sont, par conséquent,

données par les équations suivantes :

$$\forall j \in \mathcal{I}_m, L_j \frac{di_j}{dt} = -v - R_{L,j} i_j + (E_j - R_{s,j} i_j) u_j - (V_{F,j} + R_{F,j} i_j) (1 - u_j), u_j \in \{0, 1\}, \quad (1.3a)$$

$$C_0(R + R_C) \frac{dv}{dt} - C_0 R R_C \frac{d\sigma}{dt} = R\sigma - v. \quad (1.3b)$$

Notons que pour  $m = 1$ , on retrouve bien les équations données dans (1.1).

## Objectifs de commande

L'objectif principal de la commande pour le système constitué de  $m$  convertisseurs Buck en parallèle est la régulation de la tension de sortie  $v$  vers une référence fixe  $V_{\text{ref}}$  définie telle que :

$$0 < V_{\text{ref}} < \min_{j \in \mathcal{I}_m} E_j. \quad (1.4)$$

Observons que pour le cas où  $m > 1$ , cet objectif fixe la valeur du courant de la charge  $\sigma$  en régime permanent tandis que la distribution du courant entre les convertisseurs reste libre. La stratégie la plus répandue afin de tenir compte de ce degré de liberté est de répartir de manière uniforme les courants dans les convertisseurs ([TV97]). Cette stratégie sera appliquée dans notre étude. En général, la charge  $R$  est un paramètre incertain, c'est pourquoi nous allons nous intéresser au cas où sa valeur est inconnue mais appartient à un ensemble borné connu :

$$R \in [R_{\min}; R_{\max}] \subset \mathbb{R}_{>0}. \quad (1.5)$$

Le problème considéré peut être énoncé comme suit :

**Problème 1.1.1.** Garantir (i) une régulation robuste de la tension de sortie vers une référence  $V_{\text{ref}}$  vérifiant (1.4) et (ii) une distribution uniforme du courant entre les convertisseurs en régime permanent pour toute valeur de charge  $R$  vérifiant (1.5). •

Dans ce cas, le vecteur de sorties contrôlées  $y$  du système et sa référence associée  $y_{\text{ref}}$  s'écrivent :

$$y = [i_1 - i_2 \quad i_2 - i_3 \quad \dots \quad i_{m-1} - i_m \quad v]^T \in \mathbb{R}^m, \quad (1.6a)$$

$$y_{\text{ref}} := [\mathbf{0}_{m-1}^T \quad V_{\text{ref}}]^T \in \mathbb{R}^m. \quad (1.6b)$$

Afin de résoudre le problème 1.1.1, on distingue principalement deux modèles de commande utilisés dans la littérature. Nous allons, à la suite de cette section, exposer le principe de ces deux approches mais aussi indiquer les points positifs et négatifs de chacune d'elles.

## 1.1.2 Modèles de commande

Dans cette partie, nous allons présenter les deux principaux modèles de commande utilisés dans la littérature afin de synthétiser des lois de commande stabilisantes pour les convertisseurs de puissance DC-DC. Dues aux faibles valeurs des résistances parasites que présentent les composants électroniques du convertisseur, ces dernières ( $R_s, R_L, R_F, R_C$ ) sont le plus souvent négligées dans le modèle de commande.

### Modèle à relais

Comme souligné dans l'introduction, l'interaction existante entre les dynamiques continues, telles que les courants et la tension d'une part, et les dynamiques discrètes, en l'occurrence les commandes des interrupteurs, fait que les convertisseurs appartiennent à la classe des systèmes dynamiques hybrides. Le modèle présenté ici permet de prendre en compte explicitement le caractère hybride du système dans la synthèse de commande. En négligeant les résistances parasites  $R_s, R_L, R_F$  et  $R_C$  dans le système d'équations (1.3) et en considérant (1.6), la représentation d'état du système est alors donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (1.7)$$

où

- $x \in \mathbb{R}^n$  avec  $n = m + 1$  est le vecteur d'état qui regroupe les courants dans les  $m$  branches des convertisseurs et la tension de sortie. En notant  $i := [i_1, \dots, i_m]^\top$ , le vecteur  $x$  est défini par :

$$x := \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}; \quad (1.8)$$

- $u \in \mathbb{R}^m$  le vecteur de commande qui regroupe les commandes de tous les convertisseurs. Il est défini par :

$$u := \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Il prend ses valeurs dans l'ensemble  $\mathcal{U}$  défini par :

$$\mathcal{U} := \{0, 1\}^m; \quad (1.10)$$

- $E \in \mathbb{R}^m$  et  $L \in \mathbb{R}^m$  les vecteurs regroupant respectivement les valeurs des sources

de tension et des bobines présentes dans les différents convertisseurs :

$$E := \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_m \end{bmatrix}, L := \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}; \quad (1.11)$$

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice d'état définie par :

$$A := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times m} & -\text{diag}\{L\}^{-1} \mathbf{1}_m \\ \frac{1}{C_0} \mathbf{1}_m^\top & -\frac{1}{RC_0} \end{bmatrix}, \quad (1.12a)$$

où l'opérateur "diag" permet de construire une matrice diagonale à partir des éléments du vecteur en argument ;

- $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est la matrice d'entrée qui s'écrit :

$$B := \begin{bmatrix} \text{diag}\{L\}^{-1} \text{diag}\{E\} \\ \mathbf{0}_m^\top \end{bmatrix}; \quad (1.12b)$$

- $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  est la matrice de sortie définie par :

$$C := \begin{bmatrix} \Gamma^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.12c)$$

où  $m = p$  et  $\Gamma$  s'écrit

$$\Gamma := \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m-1} \\ \mathbf{0}_{m-1}^\top \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m-1}^\top \\ \mathbf{I}_{m-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (m-1)}. \quad (1.12d)$$

## Modèle moyen

Contrairement au modèle à relais, le modèle présenté ici a été mis en œuvre afin de s'affranchir du caractère hybride des convertisseurs. Dans le domaine de l'électronique de puissance, [MC76] est considérée comme une publication majeure s'appuyant sur cette technique. La validité de ce modèle requiert d'avoir une période de commutation de la commande très élevée par rapport aux dynamiques du système.

Dans [Kre+89], les auteurs montrent que le modèle moyen d'un convertisseur Buck seul ( $m = 1$ ) est donné par :

$$\dot{x}_{\text{moy}} = Ax_{\text{moy}} + Bu_{\text{moy}}, \quad (1.13)$$

avec

$$x_{\text{moy}} := \begin{bmatrix} i_{\text{moy}} \\ v_{\text{moy}} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C_0} & -\frac{1}{RC_0} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} E \\ L \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les matrices  $A$  et  $B$  sont obtenues en posant  $m = 1$  dans (1.12) et la commande  $u_{\text{moy}} \in [0, 1]$  est définie comme suit :

$$u_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(\tau) d\tau, \quad (1.14)$$

où  $T$  est une période de commutation constante.

### 1.1.3 Discussion sur l'implémentation de la commande pour les deux approches de modélisation

#### Problématique

Généralement, la synthèse de la commande pour ces deux approches de modélisation se base sur une disponibilité à la mesure de l'état du système, à savoir, pour le cas étudié ici, la disponibilité des courants et de la tension. Cependant, en pratique, il est important de prendre en considération les instants de commutation de la commande lors des mesures de ces grandeurs électriques. En effet, la commutation de la commande entraîne une ouverture brusque de l'interrupteur commandé. Dès lors, on assiste à des phénomènes transitoires entraînant des pics sur le courant dans la bobine. Afin d'illustrer ce dernier point, nous avons appliqué à un convertisseur Buck une commande en boucle ouverte avec une fréquence de commutation constante de 20kHz et une valeur moyenne égale à 0.5. Les valeurs numériques des paramètres du convertisseur sont données comme suit :  $E = 24V$ ,  $L = 1.3\text{mH}$  et  $C_0 = 40\mu\text{F}$ . Les chronogrammes obtenus sont représentés sur la figure 1.6 où l'on remarque bien l'apparition de ces phénomènes transitoires sur le courant aux instants de commutation de la commande. Il est donc nécessaire d'éviter la prise de mesures des variables d'état à ces instants.

#### Cas du modèle moyen

Cette approche fournit une solution pratique à ce problème en faisant appel à la technique de la Modulation à Largeur d'Impulsion (MLI) dont le mode de fonctionnement est illustré sur la figure 1.7.

Elle permet de générer le signal de commande  $u(t)$  de l'interrupteur, obtenu en comparant un signal de référence  $d(t)$ , nommé rapport cyclique, à une porteuse représentée généralement par un signal triangulaire ( $p(t)$ ) avec une période fixe notée  $T_{\text{MLI}}$ . Cette

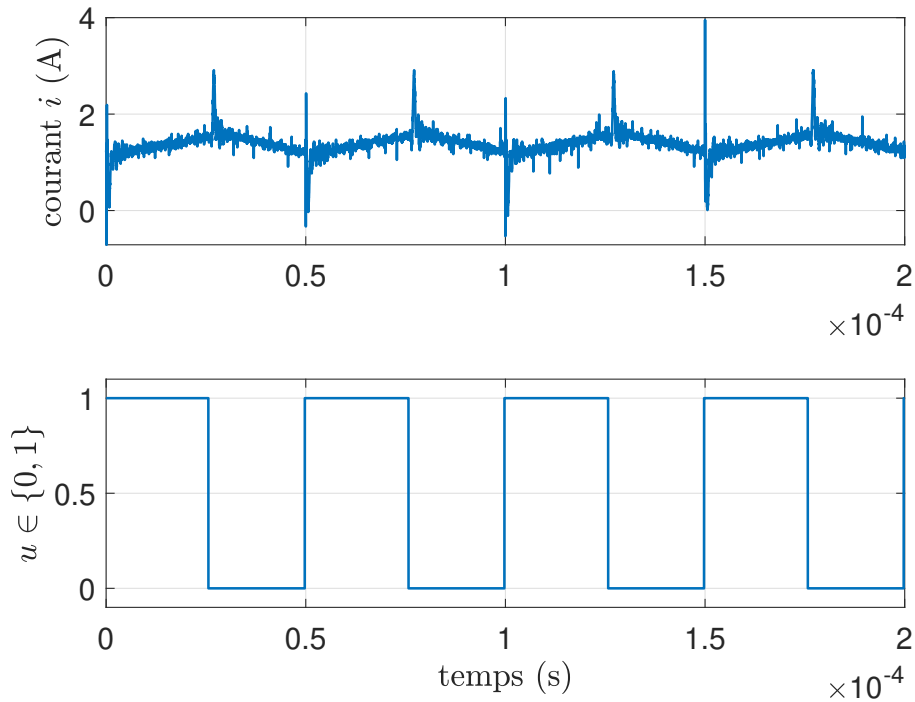


FIGURE 1.6 – Phénomènes transitoires du courant lors des changements d'état de la commande

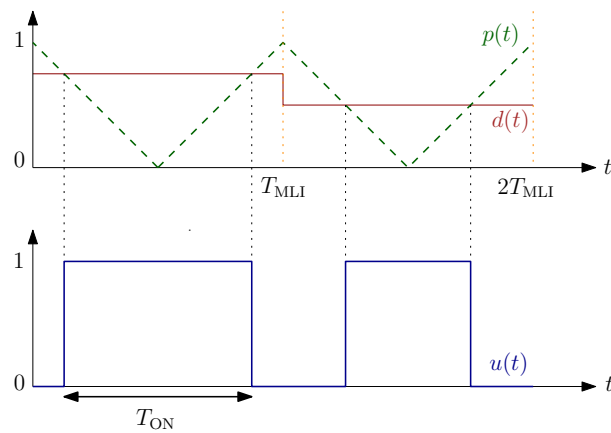


FIGURE 1.7 – Schéma illustratif du fonctionnement de la MLI centrée (le signal  $d(t)$  est quantifié)

période représente la période de commutation de l'interrupteur. En notant  $T_{ON}$  le temps pendant lequel  $u = 1$ , le rapport cyclique  $d$  sur une période est donné par la relation suivante :

$$d = \frac{T_{ON}}{T_{MLI}}. \quad (1.15)$$

Notons que, par définition,  $d \in [0, 1]$ . Il correspond en fait à la variable  $u_{moy}$  définie dans (1.14) en posant  $T = T_{MLI}$ .

Dès lors, en maintenant une fréquence de commutation constante, il est possible d'assurer une synchronisation des mesures par rapport aux instants de commutation de la commande. Cette solution est illustrée par la figure 1.8 où la mesure est effectuée à chaque fois que la porteuse  $p(t)$  passe à 0. Cela permet ainsi d'éviter la prise de mesures lorsque la commande change d'état.

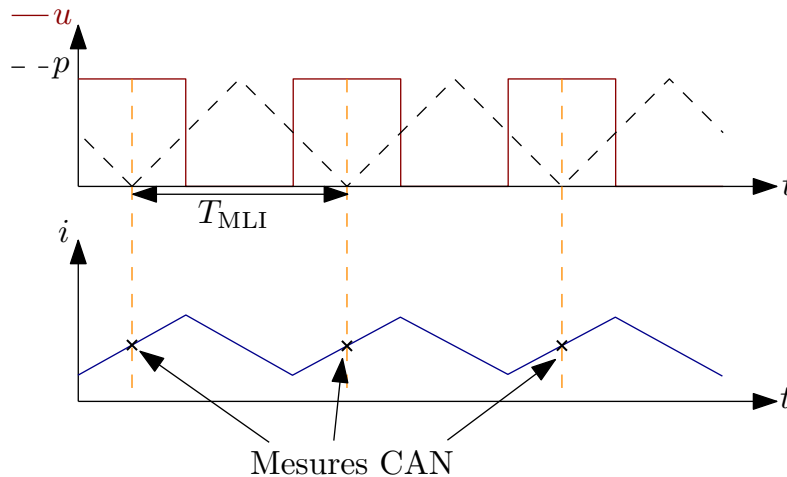


FIGURE 1.8 – Stratégie de prise de mesures pour l'approche de la MLI

Cette technique est directement intégrée dans la plupart des processeurs existants dans le marché : ils disposent intrinsèquement de périphériques d'interfaces comme les générateurs de MLI pour la commande des transistors et de convertisseurs analogique-numérique (CAN) qui sont synchronisés avec les générateurs de la MLI. Ce qui facilite considérablement la mise en œuvre des lois de commande avec cette approche. La période d'échantillonnage du CAN est le plus souvent égale à la période de la MLI. Le choix de cette période dépend des amplitudes des ondulations de courant désirées en régime permanent. En effet ces dernières, pour le cas du convertisseur Buck (sans les résistances parasites), sont données par la relation suivante [Cho13, Chap. 3, p. 84] :

$$\Delta i = \frac{d(1-d)ET_{\text{MLI}}}{L}, \quad (1.16)$$

avec  $d$  donné dans (1.15). Ainsi, pour des paramètres physiques de convertisseur fixés, on remarque que plus la période  $T_{\text{MLI}}$  est petite, plus les ondulations de courant seront petites. Cependant, en pratique, le signal de porteuse  $p(t)$  est souvent généré numériquement, ce qui requiert un processeur très rapide pour assurer la précision des impulsions générées. En effet, l'implémentation de la porteuse dépend en fait de la période de l'horloge du processeur noté  $T_{\text{H}}$ . En guise d'illustration, on représente sur la figure 1.9 les chronogrammes de l'horloge du processeur et du signal numérique de la porteuse associée à une période  $T_{\text{MLI}}$ . Dans ce cas, il est notable que plus  $T_{\text{MLI}}$  est petite et plus le nombre de périodes  $T_{\text{H}}$  nécessaire à son implémentation sera petite. Dès lors, la conversion du rapport cyclique

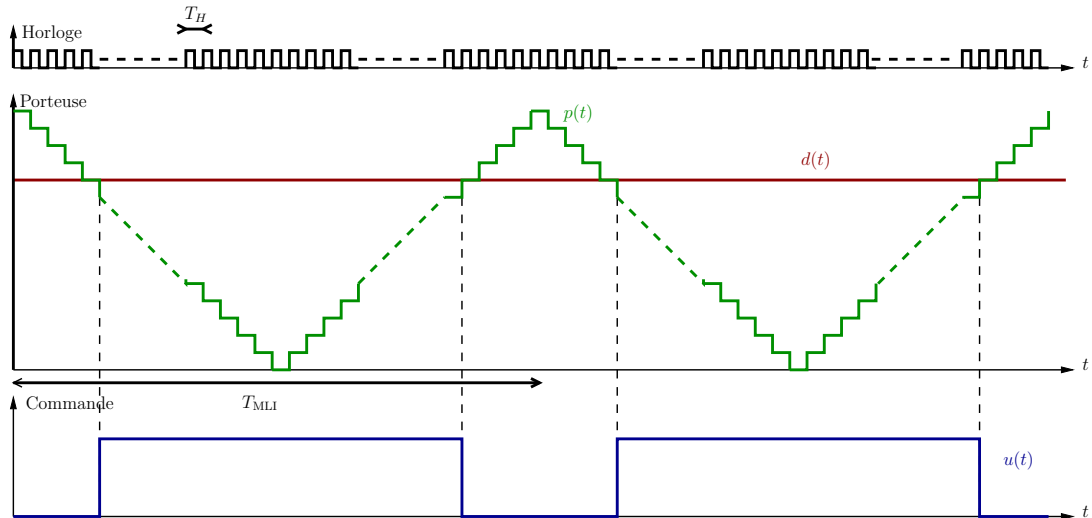


FIGURE 1.9 – Chronogrammes de l'horloge du processeur et du signal numérique de la porteuse de la MLI

en signal en créneaux se fait avec une perte d'informations d'autant plus grande que la période  $T_{MLI}$  est proche de  $T_H$ . Dit autrement, le rapport cyclique  $d$  défini dans (1.15) est quantifié. Il s'agira donc de trouver un compromis entre les ondulations de courants en régime permanent d'une part et la précision de la modulation d'autre part.

Pour un algorithme de commande qui fait varier le rapport cyclique  $d$ , l'idéal serait d'implémenter cet algorithme en synchronisant avec la période  $T_{MLI}$  de sorte à actualiser la commande à chaque période de commutation. Dans le cas où  $T_{MLI}$  est faible, il est possible que la période ne soit pas suffisante pour exécuter l'ensemble de l'algorithme. Dans ce cas, il est possible de choisir une période  $T_s$  plus grande que  $T_{MLI}$  de telle sorte à garantir la relation suivante :

$$T_s = kT_{MLI}, k \in \mathbb{N}^*. \quad (1.17)$$

$T_{MLI}$  est fixée en fonction des ondulations de courant recherchées tout en prenant en compte la période de l'horloge  $T_H$  comme discuté précédemment et le paramètre  $k$  choisi en fonction du temps nécessaire pour le processeur à dérouler l'algorithme de commande.

Un schéma de principe de l'implémentation de la commande est représenté par la figure 1.10.

La figure 1.11 représente un récapitulatif de la discussion menée précédemment : la dynamique la plus rapide est représentée par l'horloge du processeur, suivie par le générateur de MLI et enfin arrive le temps d'actualisation de la commande.

### Cas du modèle à relais

Concernant l'approche à relais, la mise en œuvre pratique des lois de commande présente plus de difficultés. D'une part, parce que les fréquences de commutation de

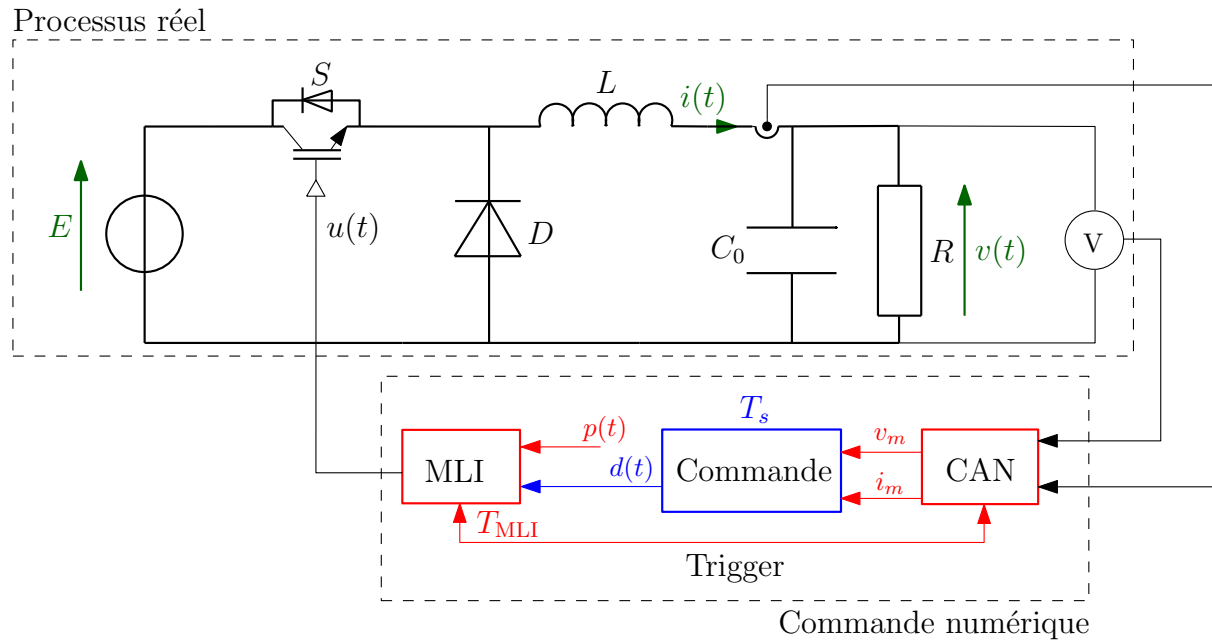


FIGURE 1.10 – Schéma de principe de l'implémentation de la commande pour l'approche MLI

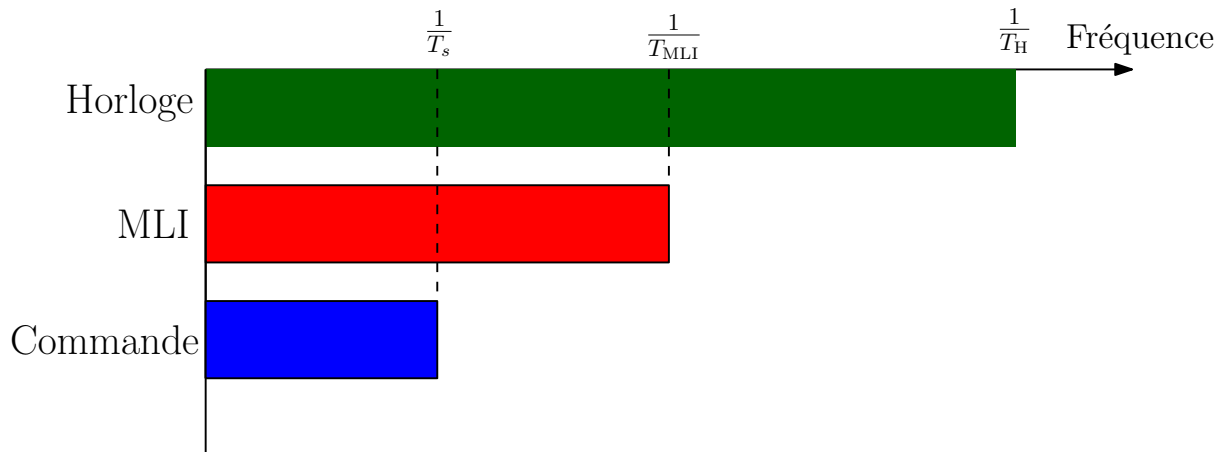


FIGURE 1.11 – Illustration de la paramétrisation de  $T_s$  et de  $T_{MLI}$

la commande sont variables, notamment pour le régime transitoire. Un exemple de chronogrammes de la commande et du courant que l'on peut avoir sur un convertisseur Buck seul est représenté sur la figure 1.12. Dans ce cas, développer une stratégie qui permet d'éviter la prise de mesure lors des instants de commutation n'est pas triviale.

De plus, l'implémentation de la commande requiert une rapidité de calcul assez importante afin d'obtenir de bonnes performances du système. Afin d'illustrer ce dernier point, on représente le schéma de principe de la mise en œuvre de la loi de commande sur la figure 1.13. Contrairement à l'approche MLI où il est possible d'avoir des changements d'état de l'interrupteur pendant la période  $T_{MLI}$ , ici il est impossible, pour la commande, de changer d'état pendant une durée  $T_s$ , car les périphériques d'interfaces (CAN et

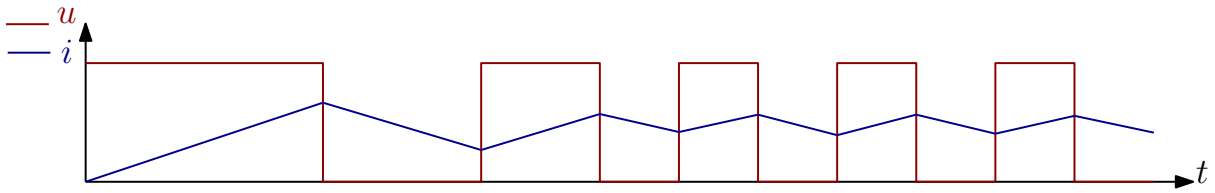


FIGURE 1.12 – Exemple de chronogrammes de la commande et du courant obtenus avec l’approche à relais

CNA) doivent être cadencés à la période du processeur qui est  $T_s$ . Quelles sont alors les conséquences de cette remarque sur les performances du système? Afin de répondre à cette question, nous allons faire une analyse du convertisseur Buck seul en régime permanent en comparant avec l’approche MLI. Pour un point d’équilibre donné, les deux approches donnent une valeur moyenne identique de la commande notée  $d^*$  en régime permanent. Choisissons  $d^* = 0.5$  et traçons les chronogrammes du courant et de la commande avec la même période d’échantillonnage  $T_s$  pour les deux approches. De plus, nous fixons  $k = 2$  dans la relation (1.17) pour l’approche MLI. Les résultats obtenus sont donnés par la figure 1.14. Pour l’approche à relais, le pas de variation minimale pour un changement d’état de la commande étant égal à  $T_s$ , on aura alors besoin de 2 périodes  $T_s$  afin de représenter  $d^* = 0.5$ , là où l’approche MLI pourra le réaliser en une période de temps égale à  $T_{MLI}$ . Par conséquent, pour la même période  $T_s$ , l’approche MLI présente des ondulations de courant qui sont 4 fois inférieures à celles obtenues avec l’approche à relais dû au fait qu’elle présente des commutations de la commande qui sont plus fréquentes.

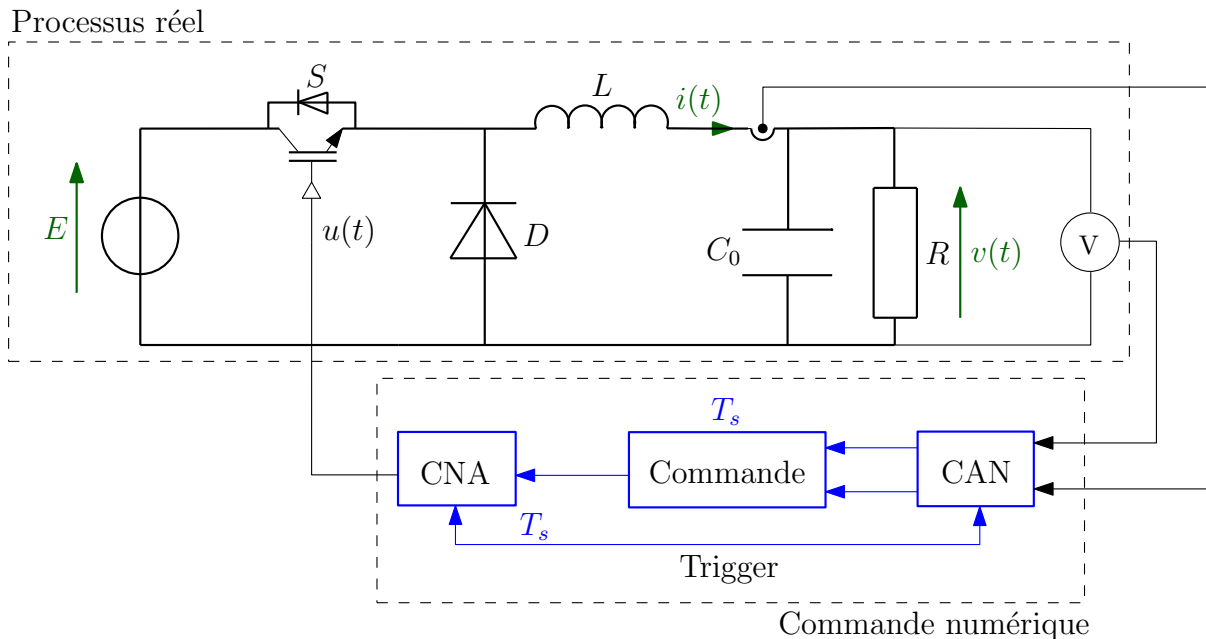


FIGURE 1.13 – Schéma de principe de l’implémentation de la commande pour l’approche à relais

Notons que pour obtenir les mêmes amplitudes de courant dans cet exemple, il faut choisir une période d'échantillonnage  $T_s$  égale à  $T_{\text{MLI}}/2$  pour la commande à relais. De plus, on remarque que plus la valeur de  $d^*$  est proche de 0 ou de 1 et plus la valeur de  $T_s$  à choisir sera petite. Ce qui requiert de disposer de processeurs possédant des fréquences d'horloge très élevées de sorte à pouvoir effectuer des calculs très rapidement. Ces différentes difficultés d'implémentation font que peu de travaux existent dans la littérature sur l'implémentation pratique de la commande à relais.

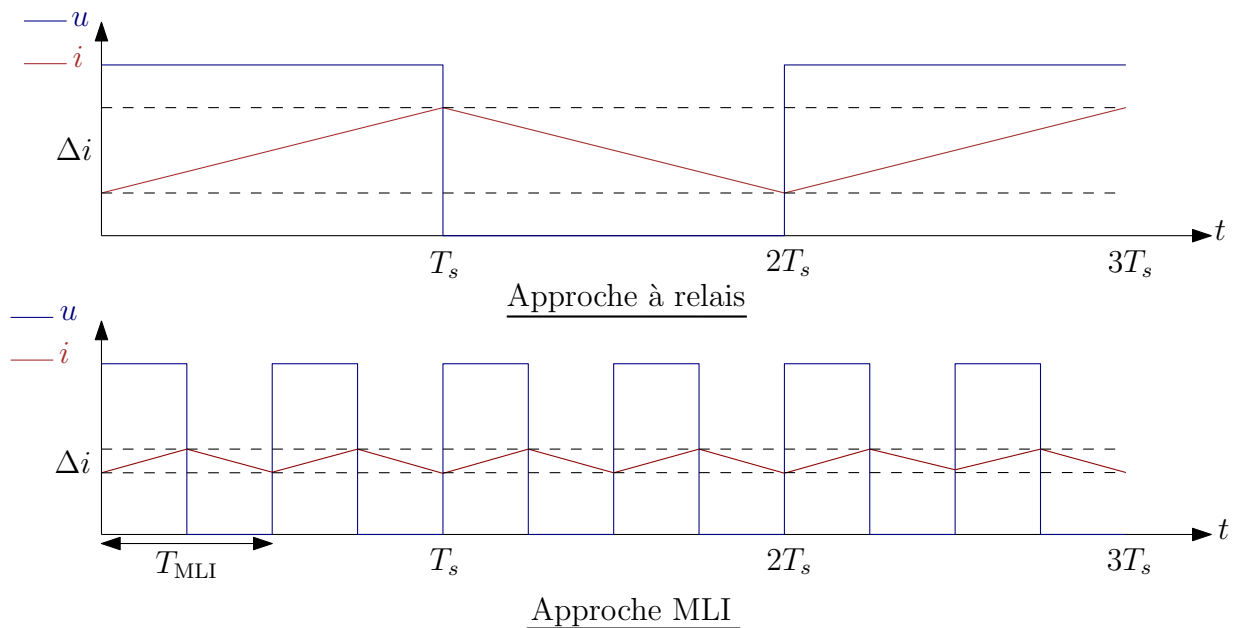


FIGURE 1.14 – Chronogrammes du courant et de la commande pour l'approche à relais et l'approche MLI

### 1.1.4 Avantages et inconvénients des deux approches de modélisation

#### Cas du modèle moyen

Dans la littérature, le modèle moyen est le plus utilisé dans le domaine de l'électronique de puissance. En effet, en maintenant une fréquence de commutation constante des interrupteurs, il facilite la synthèse des lois de commande en considérant que des variables continues (caractère hybride non pris en compte). La variable de commande correspond en fait au rapport cyclique qui sera par la suite transformé en signaux en créneaux grâce à la technique de la MLI afin de pouvoir commander les interrupteurs. La mise en œuvre pratique (dimensionnement de filtres, mesure des grandeurs électriques,...) est également simplifiée.

Cependant, comme précisé dans les paragraphes précédents, la validité du modèle requiert une période de commutation  $T_{\text{MLI}}$  des interrupteurs très petite face aux dynamiques

du système. Ce qui aura pour conséquence de limiter les performances du contrôleur concernant, par exemple, la dynamique de rejet de perturbation.

De plus, notons que ce modèle présente également une difficulté sur la quantification de la précision de l'approximation de manière générale.

### Cas du modèle à relais

Ce modèle n'est basé sur aucune approximation temporelle et prend en compte de manière explicite le caractère hybride du système. La synthèse de commande permet de fournir directement la commande des interrupteurs c'est-à-dire une succession de valeurs discrètes 0 ou 1 à des fréquences variables dépendant de l'état du système. Cependant, il existe peu de travaux sur sa mise en œuvre pratique dans la littérature. Ceci est dû principalement à deux raisons :

- D'abord, d'un point de vue théorique, la plupart des travaux existant dans la littérature ne prennent pas en compte les incertitudes du modèle dans la synthèse de la commande stabilisante. Ce qui n'est pas représentatif du cas pratique ;
- D'autre part, comme montré dans les paragraphes précédents, la mise en œuvre pratique de la commande est relativement complexe due aux fréquences de commutations variables de la commande (ce qui complique la synchronisation des instants de mesure) et au fait qu'elle requiert une grande rapidité de calcul afin d'obtenir de bonnes performances pour le système.

Étant donné que le problème 1.1.1 est largement étudié dans la littérature en utilisant l'approche MLI (voir par exemple [TD17] ; [HC07] ; [Kre+18] et les références qu'ils contiennent), nous nous intéresserons plus particulièrement à la résolution de ce problème en utilisant le modèle à relais. Dans la suite de ce chapitre, nous allons présenter un état de l'art sur la stabilisation robuste des systèmes à relais afin de bien situer nos contributions sur ce sujet par rapport à la littérature.

## 1.2 Stabilisation des systèmes à relais

Nous avons vu dans la section précédente, que les convertisseurs de puissance DC-DC Buck appartenaient à la classe des systèmes à relais définis comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (1.18)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $y \in \mathbb{R}^p$  représente la sortie contrôlée et  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande qui ne pourra prendre que des valeurs dans l'ensemble discret  $\mathcal{U} := \{u^{[1]}, u^{[2]}, \dots, u^{[N]}\}$  avec  $N$  un entier strictement positif. L'étude de ces systèmes a attiré beaucoup d'attention de la part de la communauté scientifique durant ces dernières

années. En effet, ils peuvent être utilisés pour décrire une large gamme de systèmes physiques [TT+84]; [WLC02]; [Yu06].

D'un point de vue théorique, les systèmes à relais peuvent être perçus comme étant une classe particulière des systèmes dynamiques hybrides [Lib03]; [Sho+07]; [GST09] et particulièrement des systèmes affines à commutation [BS04]; [Dea+10]. Ces derniers sont des systèmes composés d'un entier  $N > 0$  de sous-systèmes et d'une variable discrète qui détermine à chaque instant lequel de ces sous-systèmes est actif [Hee+10]. De manière générale, ils s'écrivent comme suit :

$$\dot{x} = A_j x + b_j, \quad j \in \mathcal{I}_N. \quad (1.19)$$

Le passage de (1.18) à (1.19) se fait de manière triviale en posant :

$$\begin{aligned} A_j &:= A, \\ b_j &:= Bu^{[j]}, \quad j \in \mathcal{I}_N. \end{aligned}$$

Bien que la synthèse de commande pour ce type de système soit largement étudiée dans la littérature, plusieurs problèmes restent toujours sans solution.

Un problème majeur concernant ces systèmes est la recherche de critères de stabilité et particulièrement ceux consacrés à la robustesse vis-à-vis des incertitudes du modèle. Avant d'exposer les travaux existant dans la littérature sur ce sujet, nous allons d'abord rappeler quelques concepts fondamentaux de la théorie de la stabilité.

### 1.2.1 État de l'art sur la stabilisation des systèmes à relais

#### Cas général

Considérons le système à relais défini dans (1.18) et posons  $f(x) = Ax + Bu$ . Notons que ce système est modélisé par une équation différentielle avec un champ de vecteurs discontinu. Il est donc nécessaire d'étendre la notion de solutions dans ce cas (voir [Cor08] pour un tutoriel sur les concepts de solutions et de point d'équilibre). Parmi les formalismes développés dans ce sens, celui de Filippov est bien adapté aux systèmes que nous étudions (voir Annexe A sur le concept des solutions de Filippov). En effet, il permet de prendre en compte plusieurs phénomènes relativement complexes qui peuvent survenir tels que : les modes glissants ou le comportement *Zeno* ([JRÅ99]; [Lib03]; [UGS09]).

Dès lors, on associe à l'équation différentielle (1.18) l'inclusion différentielle suivante :

$$\dot{x} \in \mathcal{F}_f(x), \quad (1.20)$$

avec  $\mathcal{F}_f(x)$  défini comme dans (A.4).

**Définition 1.2.1** ([Cor08]). Le point  $x^*$  est un équilibre de (1.20) si  $\mathbf{0} \in \mathcal{F}_f(x^*)$ .  $\diamond$

Dans la littérature, plusieurs travaux sur la synthèse de commande stabilisante se basent sur l’hypothèse que ce point d’équilibre est parfaitement connu. Un état de l’art assez exhaustif sur ce sujet, concernant les systèmes affines à commutation, peut être trouvé dans [Kad17, Chapitre 1]. La plupart des théories exposées se basent sur l’approche ‘min-switching’ qui consiste à choisir la commande qui minimise la dérivée d’une fonction de Lyapunov  $V$  sélectionnée au préalable. De plus, les conditions conduisant à la stabilité en boucle fermée peuvent principalement être classées en trois catégories :

- Condition 1 : existence d’une combinaison convexe Hurwitz des matrices  $A_j$ , ( $j \in \mathcal{I}_N$ ) des sous-systèmes [BS04] ; [Dea+10] ;
- Condition 2 : existence d’une fonction de Lyapunov quadratique commune à tous les sous-systèmes en boucle ouverte [Dea+10] ; [Yos+13] ; [SGZ15] ;
- Condition 3 : existence d’une commande stabilisante continue [HFF15] ; [HB15] ; [Kad+18a] ; [Kad+18b].

Remarquons que pour les cas des systèmes à relais, qui est l’objet de notre étude, où toutes les matrices d’état des sous-systèmes sont identiques  $A_j = A$ , ( $j \in \mathcal{I}_N$ ), les Condition 1 et Condition 2 sont équivalentes et se résument à supposer que la matrice  $A$  est Hurwitz. De manière générale, la commande stabilisante par retour d’état appliquée au système à relais s’écrit :

$$u(x) = \arg \min_{v \in \mathcal{U}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}(x - x^*)Bv \right\}. \quad (1.21)$$

### Prise en compte des incertitudes

Dans la pratique, la présence de phénomènes non modélisés se traduit par des incertitudes du modèle. Dans le cas général, le point d’équilibre  $x^*$  est inconnu a priori. La commande (1.21) n’est alors pas applicable et ne permet donc pas la régulation robuste de la sortie vers une référence fixée.

La prise en compte des incertitudes est généralement traitée en considérant une approche robuste de régulation de sortie. Ce type d’approche consiste à

- (i) ajouter un modèle interne au système [FW76]. Ce qui aboutit à la construction d’un modèle augmenté ;
- (ii) concevoir un stabilisateur robuste pour le modèle augmenté.

Ici l’approche doit être appliquée dans un contexte hybride. Cependant, rappelons que lorsque le vecteur de référence est constant, le modèle interne correspond à un intégrateur (voir par exemple [Ola+09] pour une application aux convertisseurs de puissance DC-DC avec l’approche MLI). Dans ce cas, l’association du système à son modèle interne mène à un modèle augmenté pour lequel la matrice d’état  $\bar{A}$  possède au moins une valeur propre à zéro introduit par l’action intégrale. Ce qui rend difficile la synthèse de commande

basée sur les Condition 1 et Condition 2. En effet ces dernières partent du principe que la matrice d'état du système en boucle ouverte est Hurwitz.

Dans la littérature, on trouve différentes approches pour réguler la sortie en tenant compte des incertitudes paramétriques. Certaines utilisent une action intégrale et d'autres non. Nous proposons ici de les détailler. Parmi les approches retenues, certaines ont été développées pour le cas spécifique des convertisseurs de puissance, alors que d'autres, sont dédiées aux systèmes affines commutés de manière générale.

**Commande basée sur l'ajout d'un filtre :** afin de contourner la problématique posée par l'ajout d'une action intégrale rendant la matrice d'état  $\bar{A}$  non Hurwitz, les auteurs de [Dea+10] ; [SG20] ont proposé de remplacer le modèle interne (action intégrale) par le filtrage d'une ou de plusieurs variables d'état du système. L'ajout de ce filtre (stable) a pour but de compenser les perturbations qui peuvent survenir sur la (ou les) sortie(s) à contrôler dues par exemple aux incertitudes paramétriques liées au système. Il permet de conserver une matrice d'état Hurwitz. Les approches proposées sont dédiées à des convertisseurs en particulier.

Dans [Dea+10], les auteurs s'intéressent aux convertisseurs DC-DC classiques : Buck, Boost, et Buck-Boost avec comme objectif de garantir une régulation de leur tension de sortie vers une référence fixe. Les preuves de stabilité se basent sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov quadratique :

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^\top P x, \quad P \in \mathbb{S}_+^n. \end{aligned} \tag{1.22}$$

En guise d'illustration, nous allons prendre l'exemple du convertisseur Buck simple ( $m = 1$ ). L'idée, ici, est d'ajouter une nouvelle variable d'état notée  $\hat{i}$  dans la synthèse du correcteur, obtenue en filtrant le courant dans l'inductance. Elle est donc définie comme suit :

$$RC_0 \frac{d\hat{i}}{dt} = -\hat{i} + i.$$

Ceci a pour but d'estimer la valeur du courant  $i$  à l'équilibre. Dans ce cas, le nouveau vecteur d'état devient  $\zeta = [i \ v \ \hat{i}]^\top$  et la représentation d'état du modèle associé s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \bar{A}\zeta + \bar{B}u, \quad u \in \{0, 1\}, \\ y = \bar{C}\zeta, \end{cases} \tag{1.23}$$

avec

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C_0} & -\frac{1}{RC_0} & 0 \\ \frac{1}{RC_0} & 0 & -\frac{1}{RC_0} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [0 \quad 1 \quad 0].$$

En imposant une contrainte linéaire sur la détermination de la matrice  $P$  de (1.22), les auteurs présentent une loi de commande qui dépend uniquement d'une partie du vecteur d'équilibre (ici la tension de référence). On aboutit au théorème suivant :

**Théorème 1.2.1** ([Dea+10]). *Considérons le système (1.23) et  $\zeta^* = [i^* \quad V_{\text{ref}} \quad i^*]^\top$  un équilibre au sens de Fillipov de (1.23) associé à la tension de référence  $V_{\text{ref}}$ . S'il existe une matrice  $P \in \mathbb{S}_+^3$  et une matrice  $W \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$  telles que*

$$\bar{A}^\top P + P \bar{A} + Q \preceq \mathbf{0}, \quad (1.24a)$$

$$JP[\bar{A} \quad \bar{B}u^{[i]}] = W, \quad \forall i \in \mathcal{I}_2, \quad (1.24b)$$

avec  $Q = \bar{C}^\top \bar{C}$ ,  $J = [1 \ 0 \ 1]$ ,  $u^{[1]} = 0$  et  $u^{[2]} = 1$ , alors la loi de commutation

$$u(\zeta) \in \arg \min_{v \in \mathcal{U}} ((i - \hat{i})a + (v - V_{\text{ref}})b) v, \quad (1.25)$$

où  $a = (P\bar{B})_1$  et  $b = (P\bar{B})_3$  rend tout point  $\zeta_e^*$  défini tel que

$$\zeta_e^* = [i^* + \alpha \quad V_{\text{ref}} \quad i^* + \alpha]^\top \quad (1.26)$$

globalement asymptotiquement stable avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . De plus l'inégalité (1.27) est vérifiée pour toute condition initiale  $\zeta_0 \in \mathbb{R}^3$ .

$$\int_0^\infty (v - V_{\text{ref}})^2 < (\zeta_0 - \zeta_e^*)^\top P (\zeta_0 - \zeta_e^*). \quad (1.27)$$

Observons que par définition, au point  $\zeta_e^*$ , l'égalité  $v = V_{\text{ref}}$  est vérifiée (voir (1.26)). Cependant, le stabilisateur proposé ici n'est pas robuste car sa synthèse se base sur une connaissance parfaite des matrices  $A$  et  $B$  du système (voir (1.24)). Ce qui le rend inapplicable en pratique.

Dans [SG20], les auteurs s'intéressent au cas de l'onduleur Boost avec comme objectif d'assurer un bon suivi de trajectoire de la tension de sortie. Comme précédemment, la stratégie repose sur l'ajout d'une nouvelle variable d'état qui est ici obtenue en filtrant la sortie à contrôler. Ceci dans le but de corriger, à chaque instant, le point d'équilibre à atteindre. Dans ce cas, les auteurs parviennent à assurer une convergence asymptotique des trajectoires du système vers un ensemble contenant le point d'équilibre désiré. En

d'autres termes, l'approche proposée ici ne permet pas de garantir une erreur nulle sur le suivi de trajectoire de la tension face aux incertitudes du modèle.

**Commande adaptative :** Une autre approche présentée afin de contourner la problématique de l'ajout du modèle interne au système est basée sur l'utilisation de la commande adaptative. L'idée consiste à ajuster à chaque instant les gains du contrôleur afin d'assurer une régulation robuste du vecteur à contrôler. Cet ajustement repose sur l'estimation en ligne d'un nombre fini de paramètres inconnus ou incertains du système. Ce qui permet d'actualiser en temps réel le point d'équilibre à atteindre.

Une application de cette méthodologie sur le convertisseur DC-DC Boost est présentée dans [HSG17] où l'objectif est de garantir une régulation robuste de la tension de sortie lorsque la charge est inconnue mais appartenant à un ensemble borné et connu. Avec l'estimation en temps réel de la charge, les auteurs parviennent à concevoir une commande stabilisante répondant à cette problématique. La stabilité obtenue ici est locale et sa preuve se base sur la condition 2.

D'autre part, les résultats présentés dans [Ben+19] sont plus généraux que ceux présentés dans l'article précédent car ils sont dédiés aux systèmes appartenant à la classe des systèmes affines à commutation. Dans ce cas, en utilisant la même stratégie, les auteurs parviennent à garantir une stabilité globale. Les preuves de stabilité se basent en particulier sur la condition 1. Cependant pour cette approche, la robustesse n'est assurée que face à un ensemble de paramètres prédéfini par l'utilisateur. Autrement dit, l'approche ne permet pas de prendre en compte des phénomènes non modélisés dans le modèle de commande et qui peuvent survenir en pratique, ce que permet l'approche par modèle interne [Fra77]. Ceci constitue donc un obstacle dans son utilisation en pratique.

**Commande basée sur l'ajout d'une action intégrale** La commande basée sur le filtre ne permet pas d'assurer une précision absolue et la commande adaptative n'est valable que face à un ensemble de paramètres considéré. Dans cette partie, une méthodologie existante et plus générale qui permet d'assurer une erreur statique nulle sur la (ou les) sortie(s) à réguler est présentée.

Au meilleur de notre connaissance, [Ben+18] est le premier article qui propose l'ajout d'une action intégrale afin de prendre en compte les incertitudes paramétriques dans un contexte hybride.

Considérons le système défini dans (1.18). Une nouvelle variable d'état est ajoutée dans la synthèse du correcteur. Celle-ci, notée  $z$ , vérifie  $z = \int (y - y_{\text{ref}})$ . En posant  $\zeta = [x^\top \quad z^\top]^\top$  le modèle augmenté de (1.18) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \bar{A}\zeta + \bar{B}u + h, \\ y = \bar{C}\zeta, \end{cases} \quad (1.28)$$

avec

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0}_{n \times p} \\ C & \mathbf{0}_{p \times p} \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{0}_p \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ y_{\text{ref}} \end{bmatrix}, \bar{C} = [C \quad \mathbf{0}_{p \times p}]. \quad (1.29)$$

Remarquons qu'à cause de l'ajout de l'action intégrale, la matrice d'état  $\bar{A}$  n'est pas Hurwitz (voir (1.29)). Cependant, les auteurs dans [Ben+18] proposent une synthèse d'une loi de commande stabilisante pour le système (1.28) sous la condition que la matrice  $A$  soit Hurwitz cette fois-ci. En notant  $\zeta^*$  un point d'équilibre de Filippov de (1.28), la loi de commande s'écrit

$$u(\zeta) = \arg \min_{v \in \mathcal{U}} (\zeta - \zeta^*)^\top P \bar{B} v. \quad (1.30)$$

Cependant, la synthèse de cette commande ne prend pas en compte de manière explicite les incertitudes du modèle puisque le stabilisateur est conçu sur le modèle nominal. Autrement dit, la robustesse du stabilisateur n'est garantie que localement et non pas régionalement. En supposant que la différence entre les normes des champs du modèle et du procédé réel sont majorées par un certain réel positif  $\delta$ , ils énoncent que, le procédé réel, sous la loi de commande (1.30), admet un équilibre et en ce point l'égalité  $y = y_{\text{ref}}$  est vérifiée ([Ben+18, Proposition 2]). Bien qu'une stabilité globale soit démontrée ici, le domaine de stabilité dans l'espace paramétrique n'est, cependant, pas explicitement défini.

## 1.2.2 Commentaires sur l'état de l'art

Le passage en revue des travaux relatifs à la synthèse des commandes robustes pour des systèmes à relais effectué précédemment permet de mettre en exergue une lacune dans les approches exposées dans la littérature. En effet, à notre connaissance, aucune de ces approches n'est capable de traiter le cas où la matrice d'état est incertaine et non Hurwitz, ce qui est le cas du système présenté dans la section 1 pour  $m > 1$  (voir (1.12a)). Ceci interdit, en outre, la mise en œuvre de la méthodologie de régulation robuste de sortie énoncée précédemment. Notre principal objectif sera dès lors dédié à la résolution de ce problème et sera traité dans le chapitre suivant.

Notons néanmoins qu'il existe d'autres approches alternatives présentes dans la littérature et qui s'intéressent au même problème de stabilisation. En effet, les commandes à relais sont implicitement liés aux commandes par modes glissants largement étudiées dans la littérature [SRSO06]; [UGS09]. Un état de l'art assez exhaustif sur son application aux convertisseurs de puissance DC-DC peut être trouvé dans [TLC08]. Concernant la robustesse par rapport aux incertitudes paramétriques, on peut citer les travaux présentés dans [MNB02] qui s'intéressent au même problème que présenté dans la section précédente (voir le problème 1.1.1). La solution proposée dans cet article se base sur l'utilisation d'une action intégrale comme présentée précédemment. Cependant la principale différence de ces approches par rapport à celles orientées vers les systèmes affines à commutation est le fait que ces dernières présentent une méthode constructive, le plus souvent basée sur les

Inégalités Matricielles linéaires (ou Linear Matrix Inequalities (LMI) en anglais), afin de faire la synthèse des gains du contrôleur. Ce qui constitue un avantage non négligeable de cette approche par rapport à l'approche des modes glissants. C'est la raison pour laquelle nous nous intéresserons plus particulièrement, dans le cadre de cette thèse, aux approches orientées vers les systèmes affines à commutation.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la problématique de commande d'un système composé d'un entier positif  $m$  de convertisseurs DC-DC mis en parallèle et alimentant une même charge résistive dont la valeur est inconnue. Pour ce système, nous avons vu qu'il existait principalement deux méthodes permettant de faire sa modélisation en vue de concevoir une commande stabilisante : la première qui tient compte explicitement de son caractère hybride (systèmes à relais) et la deuxième qui, grâce à la technique de la moyennisation, permet d'obtenir un modèle approximatif composé uniquement de variables continues. Cependant, pour la deuxième, nous avons constaté qu'il était difficile de quantifier les précisions de l'approximation de ce modèle.

Nous nous sommes, dès lors, attardés sur la présentation des différentes conditions et problématiques de stabilisation des systèmes à relais, sujets à la présence d'incertitudes paramétriques. Principalement, les preuves de stabilité présentes dans la littérature se basent sur l'hypothèse selon laquelle la matrice d'état est Hurwitz. Par ailleurs, à notre connaissance, aucune approche n'est capable de traiter le cas où la matrice d'état est incertaine et non Hurwitz. Ce qui est le cas du système considéré ici lorsque  $m > 1$ .

Nous allons nous intéresser dans le chapitre suivant à la résolution de cette problématique. Ce qui nous permettra par la suite d'établir un cadre de comparaison pratique entre cette méthode de synthèse et celle basée sur le modèle continu.



# Chapitre 2

## Stabilisation des systèmes à relais incertains

### Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>1.1 Modélisation des convertisseurs</b> . . . . .	<b>6</b>
1.1.1 Présentation et modélisation du système considéré . . . . .	6
1.1.2 Modèles de commande . . . . .	11
1.1.3 Discussion sur l'implémentation de la commande pour les deux approches de modélisation . . . . .	13
1.1.4 Avantages et inconvénients des deux approches de modélisation	19
<b>1.2 Stabilisation des systèmes à relais</b> . . . . .	<b>20</b>
1.2.1 État de l'art sur la stabilisation des systèmes à relais . . . . .	21
1.2.2 Commentaires sur l'état de l'art . . . . .	26
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>27</b>

---

## Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons cherché à exposer les limites des théories développées dans la littérature concernant la synthèse de commande robuste pour les systèmes affines à commutation incertains en général et en particulier pour les systèmes à relais incertains. À notre connaissance, aucune de ces approches n'est capable de traiter le cas des systèmes qui présentent une matrice d'état en boucle ouverte incertaine et non Hurwitz comme c'est le cas des convertisseurs Buck en parallèle présentés dans le chapitre précédent.

Le présent chapitre s'intéresse à la résolution de cette problématique et présente donc l'une des contributions majeures de cette thèse. La procédure de synthèse présentée dans cette partie se base sur la théorie de Lyapunov, l'introduction d'un contrôleur dynamique et sur l'existence d'une commande continue par retour d'état capable de stabiliser le système sujet à l'étude.

Un résultat général est dans un premier temps proposé pour le cas des systèmes à relais incertains et non linéaires. Une loi de commande à relais stabilisant localement le système vers le point d'équilibre désiré est présentée. Ensuite, ce résultat est appliqué aux systèmes à relais incertains et linéaires. Des conditions suffisantes assurant la stabilité globale ou locale du système en boucle fermée sont fournies. De plus, une méthode constructive basée sur les LMI est présentée. Elle permet de fournir les gains du contrôleur mais également de construire une estimation du domaine d'attraction robuste pour la stabilité locale.

Ce chapitre est divisé en trois sections :

- La première section est dédiée à la formulation du problème que nous souhaitons résoudre ;
- Une fois le problème posé, la deuxième section présentera une solution générale à ce problème basée sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov de type Lur'e ;
- Enfin, dans la troisième section, l'étude sera spécialisée pour le cas des systèmes linéaires associés à des incertitudes appartenant à un ensemble convexe. Pour ce cas, nous sommes capables de fournir une méthode constructive de synthèse des gains de la commande basées sur des LMI afin d'assurer la stabilité du système. Cette section se termine par une présentation d'exemples académiques afin de montrer l'efficacité de notre approche.

## 2.1 Formulation du problème

On considère la classe des systèmes à temps continu avec des commandes à relais modélisés par :

$$\dot{x}(t) = f_\theta^0(x(t)) + B_0 u(t), \quad (2.1a)$$

$$y(t) = h(x(t)), \quad (2.1b)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état du système,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur à contrôler,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur de commande et  $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times m}$  la matrice d'entrée. Cette commande ne pourra prendre que des valeurs dans l'ensemble discret  $\mathcal{U} = \{u^{[1]}, u^{[2]}, \dots, u^{[N]}\} \subset \mathbb{R}^m$ , où  $N$  est un entier strictement positif. L'application  $f_\theta^0$  est paramétrée par le vecteur  $\theta$  qui regroupe toutes les incertitudes du modèle. De plus, on suppose que les applications  $h$  et  $f_\theta^0$  sont localement Lipschitz sur  $\mathbb{R}^n$  et que le vecteur  $\theta$  appartient à un ensemble  $\Theta$  connu.

L'objectif est de concevoir une loi de commutation dépendant de l'état capable de garantir une régulation constante et robuste du vecteur de sortie, i.e. pour tout  $\theta$ , la sortie contrôlée  $y(t)$  doit converger asymptotiquement vers une référence constante  $y_{\text{ref}}$ , tandis que le vecteur  $x(t)$  reste borné à tout moment. Le problème que nous cherchons à résoudre dans ce chapitre peut donc être formulé comme suit :

**Problème 2.1.1.** Considérons le système (2.1), le vecteur  $y_{\text{ref}} \in \mathbb{R}^p$  et les ensembles  $\mathcal{U}$  et  $\Theta$ . L'objectif est de concevoir  $n_z \in \mathbb{N}_{>0}$ ,  $\phi : \mathbb{R}^{n+n_z} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$  et  $\psi : \mathbb{R}^{n+n_z} \rightarrow \mathbb{R}^m$  caractérisant les dynamiques du contrôleur à relais par retour d'état suivant :

$$\dot{z}(t) = \phi(x(t), z(t)), \quad (2.2a)$$

$$u(t) \in \arg \min_{v \in \mathcal{U}} \psi^\top(x(t), z(t))v, \quad (2.2b)$$

tel que, pour tout  $\theta \in \Theta$ , la boucle fermée résultante admet un point d'équilibre  $(x_\theta^*, z_\theta^*)$  asymptotiquement stable pour lequel  $y = y_{\text{ref}}$ . •

Parmi les solutions de ce problème, nous nous intéresserons à celles élargissant le domaine d'attraction de la boucle fermée résultante. Afin de bien poser le problème, nous allons considérer l'hypothèse suivante que nous supposons valide tout au long de ce chapitre :

**Hypothèse 2.1.1.** Pour tout  $\theta \in \Theta$ , le système d'équations suivant avec comme inconnus  $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  admet une solution :

$$f_\theta^0(x) + B_0 u = \mathbf{0}, \quad (2.3a)$$

$$h(x) = y_{\text{ref}}. \quad (2.3b)$$

△

Sous cette hypothèse, il est possible de définir une application  $\theta \mapsto (x_\theta^*, u_\theta^*)$  de  $\Theta$  vers  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , qui lie  $\theta$  à une solution de (2.3). Assurément, cette application n'est pas unique lorsque (2.3) admet plusieurs solutions.

## 2.2 Une solution générale au problème 2.1.1

Dans cette section, un cadre général conduisant à des solutions au problème 2.1.1 est présenté.

### 2.2.1 Action intégrale

Nous allons commencer par une discussion préliminaire en considérant le cas continu pour lequel l'entrée  $u(t)$  peut prendre n'importe quelle valeur dans  $\mathbb{R}^m$ , au lieu d'être contraint à appartenir à  $\mathcal{U}$ .

En suivant le principe du modèle interne, l'erreur induite par les incertitudes paramétriques est généralement éliminée en ajoutant une action intégrale pour le vecteur de sortie  $y$ , dans la synthèse de commande. Dans ce cas, l'état  $z$  du correcteur vérifie  $z = f(y - y_{\text{ref}})$ . En posant  $\zeta := [x^\top \ z^\top]^\top$  le modèle augmenté s'écrit :

$$\dot{\zeta} = \bar{f}_\theta(\zeta) + Bu, \quad (2.4)$$

avec  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{n+p}$  et

$$\bar{f}_\theta \left( \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \right) := \begin{bmatrix} f_\theta^0(x) \\ h(x) - y_{\text{ref}} \end{bmatrix}, B := \begin{bmatrix} B_0 \\ \mathbf{0}_{p \times m} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

### 2.2.2 Obstacle de l'approche proposée dans [Kad+18a] pour le cas incertain

Dans le but de résoudre le problème 2.1.1, nous allons suivre la même stratégie que décrite dans la sous-section précédente : d'abord ajouter une action intégrale continue pour le vecteur de sortie  $y$ , et ensuite synthétiser une loi de commande stabilisante pour le modèle augmenté. Afin de mettre en place cette dernière tâche, une stratégie naïve est de directement adopter la méthodologie exposée dans [Kad+18a] dans le contexte incertain.

En effet, dans ce cas, on aboutit au contrôleur suivant comme candidat pour résoudre le problème 2.1.1 :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= h(x(t)) - y_{\text{ref}}, \\ u(\zeta) &\in \arg \min_{v \in \mathcal{U}} \frac{\partial V_\theta}{\partial \zeta} (\zeta - \zeta^*) B v, \end{aligned}$$

## 2.2. Une solution générale au problème 2.1.1

où  $\zeta^*$  est un équilibre de (2.4), i.e.  $\bar{f}_\theta(\zeta^*) + Bu^* = \mathbf{0}$  pour un certain  $u^*$  et  $V_\theta : \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}$  est une certaine fonction de Lyapunov décroissante le long des trajectoires de la boucle fermée (2.4) avec  $u = \kappa(\zeta)$  où  $\kappa$  est une commande *continue*  $\kappa : \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \text{conv}\{\mathcal{U}\}$ . Cependant, cette commande ne peut être implémentée à cause de sa dépendance par rapport au paramètre *incertain*  $\theta$ , via  $\zeta^*$  et  $V_\theta$ .

Le reste de cette section sera donc dédié à la présentation d'une méthodologie capable de résoudre ce problème.

### 2.2.3 Un équilibre particulier

Pour résoudre le problème exposé dans la sous-section précédente, la première étape consiste à utiliser les degrés de liberté dans la définition de l'état stationnaire de (2.4). En effet, l'équation suivante

$$\bar{f}_\theta(\zeta_K^*) + Bu_K^* = \mathbf{0} \quad (2.6a)$$

est résolue en prenant  $\zeta_K^* = [x_\theta^{*\top} \quad z^{*\top}]^\top$  et  $u_K^* = u_\theta^*$ , pour tout  $z^* \in \mathbb{R}^p$ .<sup>[\*]</sup> Le but de cette sous section est de fournir des conditions pour lesquelles il existe  $(\zeta_K^*, u_K^*)$  solution de (2.6a) et vérifiant également l'équation suivante :

$$K \left( \zeta_K^* - \begin{bmatrix} x_{\theta_n}^* \\ \mathbf{0}_p \end{bmatrix} \right) = \mathbf{0}_m, \quad (2.6b)$$

pour une certaine matrice  $K$  et un certain vecteur  $\theta_n \in \Theta$  à choisir. Il sera montré par la suite que cette égalité particulière est la clé pour arriver à un contrôleur qui ne dépend pas de l'incertitude  $\theta$ .

**Hypothèse 2.2.1.** Il existe un vecteur  $\theta_n \in \Theta$ , un réel  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  et une matrice  $P \in \mathbb{S}_+^{n+p}$  définissant  $K \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$  comme suit

$$K := -\frac{\lambda}{2} B^\top P, \quad (2.7)$$

tels que, pour tout  $\theta \in \Theta$ , il existe  $(\zeta_K^*, u_K^*) \in \mathbb{R}^{n+p} \times \mathbb{R}^m$  vérifiant (2.6).  $\triangle$

Nous allons maintenant présenter une première condition pour laquelle l'hypothèse 2.2.1 est vraie. La validité de cette hypothèse est fortement liée à l'existence d'un équilibre de la version perturbée du système (2.1). Celle-ci est obtenue en ajoutant un vecteur constant  $d_{\theta, \theta_n} \in \mathbb{R}^n$  au niveau de la partie droite de (2.1a). Dans ce contexte, le modèle augmenté (2.4) devient :

$$\dot{\zeta} = \bar{f}_\theta(\zeta) + Bu + \begin{bmatrix} d_{\theta, \theta_n} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

[\*] À noter que d'autres degrés de liberté peuvent provenir de la non unicité des solutions de (2.3).

L'expression de cette perturbation virtuelle sera donnée par la suite. Mais, notons cependant qu'elle dépend du vecteur incertain  $\theta$  et d'un vecteur  $\theta_n \in \Theta$  connu à choisir. Considérons à présent la commande continue  $u = K\zeta$  menant au système en boucle fermée suivant :

$$\dot{\zeta} = \bar{f}_\theta(\zeta) + BK\zeta + \begin{bmatrix} d_{\theta, \theta_n} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

**Lemme 2.2.1.** *Supposons que (i) (2.3) admet une unique solution et (ii) qu'il existe un vecteur  $\theta_n \in \Theta$ , un réel  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  et une matrice  $P \in \mathbb{S}_+^{n+p}$  définissant  $K \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$  comme dans (2.7), tels que, pour tout  $\theta \in \Theta$ , le système en boucle fermée (2.9) avec*

$$d_{\theta, \theta_n} = B_0 \left( u_\theta^* - K \begin{bmatrix} x_{\theta_n}^* \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right), \quad (2.10)$$

admet un équilibre, i.e. qu'il existe  $\zeta_d^* \in \mathbb{R}^{n+p}$  tel que

$$\bar{f}_\theta(\zeta_d^*) + BK\zeta_d^* + \begin{bmatrix} d_{\theta, \theta_n} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

Alors, l'hypothèse 2.2.1 est vraie.

*Démonstration.* À partir de (2.5) et de (2.10), la relation (2.11) peut-être réécrite de manière équivalente comme suit :

$$f_\theta^0(x^*) + B_0 \left( u_\theta^* + K \left( \begin{bmatrix} x^* \\ z^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{\theta_n}^* \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \right) = \mathbf{0}, \\ h(x^*) = y_{\text{ref}},$$

où  $\zeta_d^*$  a été remplacé par  $\begin{bmatrix} x^{*\top} & z^{*\top} \end{bmatrix}^\top$  avec  $z^* \in \mathbb{R}^p$ . Dans ce cas, il suffit d'invoquer l'hypothèse 2.1.1 et l'unicité de la solution de (2.3) afin d'aboutir à (2.6) avec  $(\zeta_K^*, u_K^*) = (\zeta_d^*, u_\theta^*)$ .  $\square$

*Remarque 2.2.1.* Dans le contexte linéaire, il sera montré par la suite que l'hypothèse 2.2.1 est vraie pour tout  $\theta_n \in \Theta$ , si l'application linéaire  $\zeta \mapsto \bar{f}_\theta(\zeta) + BK\zeta + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ y_{\text{ref}} \end{bmatrix}$ , avec  $K$  défini comme dans (2.7), est inversible pour tout  $\theta \in \Theta$ , voir le lemme 2.3.1.  $\lrcorner$

## 2.2.4 Une condition suffisante pour la stabilisation robuste

Considérons un vecteur  $\theta$  quelconque appartenant à  $\Theta$ . Supposons que l'hypothèse 2.2.1 est vraie et définissons le changement de coordonnées suivant :

$$\tilde{\zeta} := \zeta - \zeta_K^*, \quad \tilde{u} := u - u_\theta^*. \quad (2.12)$$

## 2.2. Une solution générale au problème 2.1.1

Au vu de (2.3), il s'en suit que (2.4) avec  $u(t) \in \mathcal{U}$  peut être réécrit comme suit :

$$\dot{\tilde{\zeta}} = f_\theta(\tilde{\zeta}) + B\tilde{u}, \quad (2.13)$$

avec  $\tilde{u}(t) \in \mathcal{U} - u_\theta^*$  et

$$f_\theta(\tilde{\zeta}) := \bar{f}_\theta(\tilde{\zeta} + \zeta_K^*) - \bar{f}_\theta(\zeta_K^*). \quad (2.14)$$

À présent, afin de donner une solution au problème 2.1.1, nous allons supposer qu'il existe une commande continue délivrant des entrées bornées, tel que le système en boucle fermée admette une fonction de Lyapunov de type Lur'e.

**Hypothèse 2.2.2.** L'hypothèse 2.2.1 est vraie pour un certain  $\theta_n \in \Theta$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  et  $P \in \mathbb{S}_+^{n+p}$ . De plus, il existe un vecteur  $c \in \mathbb{R}_{>0}^m$ , un domaine  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$  contenant  $\mathbf{0}$ , une matrice diagonale semi-définie positive  $\Omega \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , un réel  $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$  et une application continue  $\kappa : \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^m$  vérifiant  $\kappa(\mathcal{D}) \subseteq \text{conv}\{\mathcal{U}\} - u_\theta^*$  pour tout  $\theta \in \Theta$ , tels que

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{\zeta}}(\tilde{\zeta}) (f_\theta(\tilde{\zeta}) + B\kappa(\tilde{\zeta})) < 0, \quad (2.15)$$

est vérifiée pour tout  $\tilde{\zeta} \in \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{0}\}$  et pour tout  $\theta \in \Theta$ , où  $V : \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}$  s'écrit

$$V(\tilde{\zeta}) := \gamma \tilde{\zeta}^\top P \tilde{\zeta} - 2 \sum_{k=1}^m \Omega_{k,k} \int_0^{K_k \tilde{\zeta}} \phi_{c_k}(s) ds, \quad (2.16)$$

$K$  est donné par (2.7) et  $\phi_c : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  est la fonction non-linéaire suivante de type zone morte :

$$\phi_c(x) = \text{sat}_c(x) - x. \quad (2.17)$$

△

**Lemme 2.2.2** ([HB98]). *La fonction définie dans (2.16) vérifie l'inégalité suivante :*

$$\gamma \tilde{\zeta}^\top P \tilde{\zeta} \leq V(\tilde{\zeta}) \leq \tilde{\zeta}^\top (\gamma P + K^\top \Omega K) \tilde{\zeta}, \quad (2.18)$$

pour tout  $\tilde{\zeta} \in \mathbb{R}^{n+p}$ .

Considérant cette hypothèse, nous sommes à présent capable de présenter le résultat suivant.

**Théorème 2.2.3.** *Supposons que l'hypothèse 2.2.2 soit vraie. Dans ce cas,  $n_z = p$  et les applications suivantes résolvent le problème 2.1.1 :*

$$\phi(x, z) = h(x) - y_{\text{ref}}, \quad (2.19a)$$

$$\psi^\top(x, z) = \left( \gamma \begin{bmatrix} x - x_{\theta_n}^* \\ z \end{bmatrix}^\top P - \phi_c^\top \left( K \begin{bmatrix} x - x_{\theta_n}^* \\ z \end{bmatrix} \right) \Omega K \right) B. \quad (2.19b)$$

De plus, l'ensemble  $\Phi(\zeta_K^*, r)$  définit comme suit :

$$\Phi(\zeta_K^*, r) := \{\zeta \in \mathbb{R}^{n+p} : V(\zeta - \zeta_K^*) \leq r\}, \quad (2.20)$$

appartient au domaine d'attraction en boucle fermée pour tout réel strictement positif  $r$  tel que l'inclusion suivante est vérifiée :

$$\Phi(\mathbf{0}, r) \subseteq \mathcal{D} \quad (2.21)$$

Par conséquent, pour tout  $r$  vérifiant (2.21), pour tout  $\theta \in \Theta$  et pour tout  $\begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix} \in \Phi(\zeta_K^*, r)$ ,  $\zeta(t)$  converge asymptotiquement vers un point d'équilibre pour lequel  $y(t) = y_{\text{ref}}$ .

*Démonstration.* D'abord, notons qu'à partir du lemme 2.2.2 et du fait que  $P \succ \mathbf{0}$  et  $\gamma > 0$ , on sait que la fonction  $V$  est définie positive.

Ensuite, choisissons arbitrairement  $\theta \in \Theta$ . L'hypothèse 2.2.2 garantit que  $\kappa(\mathcal{D}) \subseteq \text{conv}\{\mathcal{U}\} - u_\theta^*$ . Dès lors, pour tout  $\tilde{\zeta} \in \mathcal{D}$ , il existe  $\rho(\tilde{\zeta}) \in \Lambda_N$  tel que :

$$\kappa(\tilde{\zeta}) = \sum_{i=1}^N \rho_i(\tilde{\zeta}) \tilde{u}^{[i]}, \quad (2.22)$$

où  $\tilde{u}^{[i]} := u^{[i]} - u_\theta^*$ . Gardant à l'esprit que  $\sum_{i=1}^N \rho_i(\tilde{\zeta}) = 1$  et remplaçant (2.22) dans (2.15), il s'en suit que :

$$\sum_{i=1}^N \rho_i(\tilde{\zeta}) \frac{\partial V}{\partial \tilde{\zeta}}(\tilde{\zeta}) (f_\theta(\tilde{\zeta}) + B\tilde{u}^{[i]}) < 0, \forall \tilde{\zeta} \in \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (2.23)$$

Puisque  $\rho_i(\tilde{\zeta}) \geq 0$ , ( $i \in \mathcal{I}_N$ ), il existe au moins un  $i \in \mathcal{I}_N$  tel que :

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{\zeta}}(\tilde{\zeta}) (f_\theta(\tilde{\zeta}) + B\tilde{u}^{[i]}) < 0. \quad (2.24)$$

Soit

$$\zeta_{\theta_n}^* := \begin{bmatrix} x_{\theta_n}^* \\ \mathbf{0}_p \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

À partir de la définition de  $V$  et du fait que (2.6) soit vraie, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tilde{\zeta}}(\tilde{\zeta}) B &= -\frac{4\gamma}{\lambda} (K\tilde{\zeta})^\top - 2\phi_c^\top (K\tilde{\zeta}) \Omega K B, \\ &= -\frac{4\gamma}{\lambda} \left( K(\zeta - \zeta_{\theta_n}^*) + K(\zeta_{\theta_n}^* - \zeta_K^*) \right)^\top - 2\phi_c^\top \left( K(\zeta - \zeta_{\theta_n}^*) + K(\zeta_{\theta_n}^* - \zeta_K^*) \right) \Omega K B, \\ &\stackrel{(2.6)}{=} \frac{-4\gamma}{\lambda} \left( K(\zeta - \zeta_{\theta_n}^*) \right)^\top - 2\phi_c^\top \left( K(\zeta - \zeta_{\theta_n}^*) \right) \Omega K B. \end{aligned}$$

En utilisant cette relation et en remarquant que (2.7) est équivalent à  $(-2/\lambda)K^\top = PB$ ,

## 2.2. Une solution générale au problème 2.1.1

l'inéquation (2.24) s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{\zeta}}(\tilde{\zeta})f_{\theta}(\tilde{\zeta}) + 2\psi^{\top}(x, z)\tilde{u}^{[i]} < 0. \quad (2.27)$$

Par conséquent, les trajectoires de la boucle fermée (2.13) avec la commande vérifiant

$$\tilde{u}(\zeta) \in \arg \min_{v \in (\mathcal{U} - u_{\theta}^*)} \psi^{\top}(x, z)v, \quad (2.28)$$

convergent asymptotiquement vers  $\tilde{\zeta} = \mathbf{0}$ , où  $y = y_{\text{ref}}$ . À présent, observons que la boucle fermée (2.13) avec la commande (2.28) coïncide avec celle associée à (2.1), (2.2) et (2.19), en raison de la linéarité de  $\chi : v \mapsto \psi^{\top}(x, z)v$ . En effet,  $\chi(\tilde{u}(\zeta)) \leq \chi(v)$  est valable pour tout  $v \in \mathcal{U} - u_{\theta}^*$  si et seulement si  $\chi(\tilde{u}(\zeta) + u_{\theta}^*) \leq \chi(w)$  pour tout  $w := v + u_{\theta}^* \in \mathcal{U}$ , de telle sorte que  $u(\zeta) = \tilde{u}(\zeta) + u_{\theta}^* \in \arg \min_{w \in \mathcal{U}} \psi^{\top}(x, z)w$  est vraie.

La preuve se termine en montrant que  $\tilde{\zeta}(t)$  appartient à  $\mathcal{D}$  pour tout  $t \geq 0$ . Puisque  $\{\tilde{\zeta} : V(\tilde{\zeta}) \leq r\} = \Phi(\mathbf{0}, r)$  est positivement invariant, cette inclusion est dès lors valide en imposant  $\tilde{\zeta}(0) \in \Phi(\mathbf{0}, r) \subseteq \mathcal{D}$ , ce qui est équivalent à  $\zeta(0) \in \Phi(\zeta_K^*, r)$  avec  $\Phi(\mathbf{0}, r) \subseteq \mathcal{D}$ .  $\square$

*Remarque 2.2.2* (Sur  $\Phi(\zeta_K^*, r)$ ). L'ensemble  $\Phi(\zeta_K^*, r)$  est une estimation par l'intérieur du domaine d'attraction si  $r$  satisfait (2.21). Puisque  $V$  est continue et que  $\mathcal{D}$  est un ensemble ouvert et contenant l'origine, il s'en suit qu'il est toujours possible de trouver une valeur de  $r$  suffisamment petite vérifiant (2.21).

Dans ce cas, une question essentielle à se poser est la suivante : comment exploiter cette estimation puisqu'elle dépend du vecteur incertain  $\theta$ , via  $\zeta_K^*$ ? L'idée est de s'assurer que la condition initiale  $(x(0), z(0))$  appartient à  $\Phi(\zeta_K^*, r)$ , pour tout  $\theta \in \Theta$  et pour un certain  $\zeta_K^*$  satisfaisant (2.6), c'est-à-dire pour un certain  $\zeta_K^* \in \Psi(K, \theta_n; \theta)$  où

$$\Psi(K, \theta_n; \theta) := \{\zeta_K^* : \exists u_K^* \in \mathbb{R}^m, (2.6)\}. \quad (2.29)$$

Cela peut être assuré via l'ensemble suivant qui est *indépendant* de  $\theta$  :

$$\mathcal{G} := \bigcap_{\theta \in \Theta} \bigcup_{\zeta_K^* \in \Psi(K, \theta_n; \theta)} \Phi(\zeta_K^*, r). \quad (2.30)$$

En effet, par construction, notons que pour tout  $\theta \in \Theta$ , il existe  $\zeta_K^* \in \Psi(K, \theta_n; \theta)$  tel que  $\mathcal{G} \subseteq \Phi(\zeta_K^*, r)$  est vraie. Par conséquent, si la condition initiale  $(x(0), z(0))$  appartient à  $\mathcal{G}$ , alors  $y(t)$  converge vers  $y_{\text{ref}}$ . Cela suggère que l'on peut avoir à adapter la valeur de  $z(0)$  à la condition initiale du système  $x(0)$  afin de garantir que  $(x(0), z(0)) \in \mathcal{G}$ . Ainsi, au lieu d'initialiser l'intégrateur à  $z(0) = \mathbf{0}$ , la valeur de  $z(0)$  devrait plutôt être calculée dans le but d'éloigner  $(x(0), z(0))$  des limites de  $\mathcal{G}$ , de manière à améliorer la robustesse par rapport à  $x_0$ .

Finalement, il est important de noter que l'ensemble  $\Psi(K, \theta_n; \theta)$  (i) n'est pas vide si

l'hypothèse 2.2.1 est vraie et (ii) est un sous-espace affine dans le cas linéaire, qui peut être explicitement calculé (voir la preuve du lemme 2.3.1 qui suit).  $\lrcorner$

## 2.3 Le cas linéaire associé à un polytope convexe

Cette section particularise l'étude faite dans la section précédente via les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 2.3.1.** Les applications  $x \mapsto f_\theta^0(x)$  et  $x \mapsto h(x)$  sont linéaires, i.e. (2.1) peut être réécrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B_0u(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (2.31)$$

avec  $A(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ .  $\triangle$

**Hypothèse 2.3.2.** L'ensemble  $\Theta$  est un polytope convexe connu et l'application  $\theta \mapsto A(\theta)$  est affine, i.e. il existe une matrice  $A_0$  et une application linéaire  $\theta \mapsto A_1(\theta)$  telles que  $A(\theta) = A_0 + A_1(\theta)$  pour tout  $\theta \in \Theta$ .  $\triangle$

Dans ce contexte, des conditions constructives, pour lesquelles l'hypothèse 2.2.2 est vérifiée sont fournies. Cela permettra par la suite de résoudre le problème 2.1.1 en appliquant le théorème 2.2.3.

### 2.3.1 Préliminaires

Observons que sous l'hypothèse 2.3.1, l'équation (2.4) peut être réécrite comme suit :

$$\dot{\zeta} = \bar{A}(\theta)\zeta + Bu + h, \quad (2.32)$$

avec

$$\bar{A}(\theta) := \begin{bmatrix} A(\theta) & \mathbf{0}_{n \times p} \\ C & \mathbf{0}_{p \times p} \end{bmatrix}, h := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ -y_{\text{ref}} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Dans ce cas, (2.13) devient

$$\dot{\tilde{\zeta}} = \bar{A}(\theta)\tilde{\zeta} + B\tilde{u}. \quad (2.34)$$

De plus, si l'hypothèse 2.3.2 est vraie, alors  $\bar{A}(\Theta)$  est un polytope convexe constitué de  $N_s$  sommets  $\bar{A}^{[i]} := \bar{A}(\theta^{[i]})$  où  $\theta^{[i]}$ , ( $i \in \mathcal{I}_{N_s}$ ) sont les sommets de  $\Theta$  :

$$\bar{A}(\Theta) = \text{conv}\{\bar{A}^{[1]}, \dots, \bar{A}^{[N_s]}\}. \quad (2.35)$$

Finalement, définissons la matrice  $P_\Sigma(\theta, s)$  comme suit :

$$P_\Sigma(\theta, s) := \begin{bmatrix} A(\theta) - s\mathbf{I}_n & B_0 \\ C & \mathbf{0}_{p \times m} \end{bmatrix}.$$

### 2.3. Le cas linéaire associé à un polytope convexe

En se concentrant sur le contexte linéaire, le lemme suivant fournit de nouvelles conditions pour lesquelles l'hypothèse 2.2.1 est valable.

**Lemme 2.3.1.** *Supposons que l'hypothèse 2.3.1 est vraie. Soit un réel  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  et une matrice  $P \in \mathbb{S}_+^{n+p}$  définissant  $K \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$  comme dans (2.7). Considérons les deux énoncés suivants :*

*S1 : Il existe un vecteur  $\theta_n \in \Theta$  tel que, pour tout  $\theta \in \Theta$ , le système en boucle fermée (2.9) avec (2.10) admet un équilibre unique, i.e. il existe un unique  $\zeta_d^* \in \mathbb{R}^{n+p}$  tel que (2.11) soit vraie ;*

*S2 : La matrice  $\bar{A}(\theta) + BK$  est inversible pour tout  $\theta \in \Theta$ .*

*Alors, S1 et S2 sont équivalents. De plus, si l'une des deux est vérifiée, alors l'hypothèse 2.2.1 est valable pour tout vecteur  $\theta_n \in \Theta$ .*

*Démonstration.* Soit  $\theta$  un vecteur appartenant à  $\Theta$ . Définissons  $[K_x \ K_z] := K$  avec  $K_x \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

S1 $\Leftrightarrow$ S2 : Sous l'hypothèse 2.3.1, l'équation (2.11) s'écrit :

$$(\bar{A}(\theta) + BK)\zeta_d^* + \begin{bmatrix} d_{\theta, \theta_n} \\ -y_{\text{ref}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.36)$$

Ainsi, de manière triviale on a S1 $\Leftarrow$ S2. De plus, à partir des équations (2.5), (2.10) et (2.33) et en notant  $\zeta_d^* = [x^{*\top} \ z^{*\top}]^\top$ , l'équation (2.36) peut être écrite comme suit :

$$P_\Sigma(\theta; 0) \begin{bmatrix} x^* \\ u_\theta^* + K \begin{bmatrix} x^* - x_{\theta_n}^* \\ z^* \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ y_{\text{ref}} \end{bmatrix},$$

ou, de manière équivalente

$$P_\Sigma(\theta; 0) \left( N \begin{bmatrix} x^* - x_{\theta_n}^* \\ z^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{\theta_n}^* - x_\theta^* \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = \mathbf{0},$$

en utilisant l'hypothèse 2.1.1 et avec

$$N := \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ K_x & K_z \end{bmatrix}.$$

À partir de S1, on en déduit que  $(x^*, z^*)$  est unique. Ce qui implique que  $\text{Ker} \{(P_\Sigma(\theta; 0)N)\} = \{\mathbf{0}\}$ . Puisque, la relation suivante est valable

$$P_\Sigma(\theta; 0)N = \begin{bmatrix} A(\theta) + B_0K_x & B_0K_z \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \bar{A}(\theta) + BK,$$

on a alors  $S1 \Rightarrow S2$ .

$S2 \Rightarrow$  hypothèse 2.2.1 :  $S2$  implique que  $K_z$  est de rang plein, et en retour, que les deux matrices suivantes sont inversibles :

$$M_2 := \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ K_x & \mathbf{0} & K_z \end{bmatrix}, \quad M_3 := \begin{bmatrix} A(\theta) + B_0 K_x & \mathbf{0} & B_0 K_z \\ C & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ K_x & K_z & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

À partir de l'observation que les équations (2.6) peuvent être réécrites comme suit

$$M_1 \begin{bmatrix} \zeta_K^* \\ y_{\text{ref}} \\ u_K^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ y_{\text{ref}} \\ K_x x_{\theta_n}^* \end{bmatrix} \quad \text{avec } M_1 := \begin{bmatrix} A(\theta) & \mathbf{0} & B_0 \\ C & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ K_x & K_z & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

et le fait que  $M_1 M_2 = M_3$ , on en déduit que la matrice  $M_1$  est inversible. Dès lors, il s'en suit que l'hypothèse 2.2.1 est vraie pour tout vecteur  $\theta_n \in \Theta$ .  $\square$

*Remarque 2.3.1* (Sur les hypothèses 2.3.1 et 2.1.1). Si l'hypothèse 2.3.1 est vraie, alors l'hypothèse 2.1.1 s'écrit :  $\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ y_{\text{ref}} \end{bmatrix} \in \text{Im} P_\Sigma(\theta, 0)$  pour tout  $\theta \in \Theta$ . Cette condition est satisfaite si  $\{A(\theta), B_0, C, \mathbf{0}\}$  est inversible à droite et que 0 n'est pas un zéro invariant du système, i.e.  $\text{rang} P_\Sigma(\theta, 0)$  égal à  $n + p$  pour tout  $\theta \in \Theta$ , ce qui correspond à la condition de non-résonance bien connue.  $\lrcorner$

*Remarque 2.3.2* (lemme 2.2.1 vs lemme 2.3.1). Par rapport au lemme 2.2.1, le lemme 2.3.1 repose sur des hypothèses plus souples. En effet, l'existence et l'unicité de la solution de (2.3) est requise par le lemme 2.2.1. En revanche, le lemme 2.3.1 requiert seulement l'existence de solution de (2.3). De plus, notons que le lemme 2.2.1 a seulement besoin de l'existence d'une solution de (2.9), alors que le lemme 2.3.1 a, lui, besoin de son unicité. Cependant, cette hypothèse découle de la stabilisabilité quadratique du système, qui est une supposition nécessaire à faire afin de satisfaire les conditions de synthèse présentées dans cette section, (voir la preuve des propositions à venir). Par conséquent, le lemme 2.3.1 augmente l'applicabilité des résultats constructifs proposés par la suite.  $\lrcorner$

## 2.3.2 Stabilité globale

Définissons l'hyperrectangle suivant :

$$\mathcal{P}(c) := \{u \in \mathbb{R}^m : |u_k| \leq c_k, \forall k \in \mathcal{I}_m\}, \quad (2.37)$$

où  $c \in \mathbb{R}_{>0}^m$ .

**Proposition 2.3.2.** *Supposons que l'hypothèse 2.3.1 et l'hypothèse 2.3.2 soient vraies. Supposons de plus qu'il existe :*

*A1 : un réel  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  et une matrice  $P \in \mathbb{S}_+^{n+p}$  définissant  $K \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$  comme dans (2.7) ;*

### 2.3. Le cas linéaire associé à un polytope convexe

A2 : une matrice diagonale semi-définie positive  $\Omega \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , deux matrices symétriques  $T^+, T^- \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , composées que d'éléments positifs tels que  $T_{j,j}^- = 0$  pour tout  $j \in \mathcal{I}_m$  ;

A3 : un réel  $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$  et un vecteur  $c \in \mathbb{R}_{>0}^m$  ;

tels que les relations suivantes sont satisfaites avec  $\Gamma = TK$  et  $T = T^+ - T^-$  :

$$\mathcal{P}(c) \subseteq \mathcal{V} := \cap_{\theta \in \Theta} (\text{conv}(\mathcal{U}) - u_\theta^*), \quad (2.38)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_m \setminus \{k\}} c_j (T_{k,j}^+ + T_{j,k}^-) \leq c_k T_{k,k}^+, \quad \forall k \in \mathcal{I}_m, \quad (2.39)$$

$$\begin{bmatrix} (\bar{A}^{[i]} + BK)^\top \gamma P + \gamma P (\bar{A}^{[i]} + BK) & \gamma PB - \Gamma^\top - (\bar{A}^{[i]} + BK)^\top K^\top \Omega \\ * & -2T - \Omega KB - (\Omega KB)^\top \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}, \quad \forall i \in \mathcal{I}_{N_s}. \quad (2.40)$$

Alors, l'hypothèse 2.2.2 est vérifiée pour tout vecteur  $\theta_n \in \Theta$ , pour  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{n+p}$  et pour  $\kappa : \tilde{\zeta} \mapsto \text{sat}_c(K\tilde{\zeta})$ . Dans ce cas, (2.19) résout le problème 2.1.1 globalement, i.e. pour tout  $\theta \in \Theta$  et toute condition initiale  $(x(0), z(0)) \in \mathbb{R}^{n+p}$ , le vecteur de sortie  $y(t)$  converge vers  $y_{\text{ref}}$ .

*Démonstration.* La condition (2.40) implique que l'inégalité suivante

$$\begin{bmatrix} (\bar{A}(\theta) + BK)^\top \gamma P + \gamma P (\bar{A}(\theta) + BK) & \gamma PB - \Gamma^\top - (\bar{A}(\theta) + BK)^\top K^\top \Omega \\ * & -2T - \Omega KB - (\Omega KB)^\top \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \quad (2.41)$$

est vérifiée pour tout  $\theta \in \Theta$ . Puisque  $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ , on déduit de l'inégalité précédente que :

$$(\bar{A}(\theta) + BK)^\top P + P(\bar{A}(\theta) + BK) \prec \mathbf{0},$$

et donc que la matrice  $\bar{A}(\theta) + BK$  est Hurwitz pour tout  $\theta \in \Theta$ . Ce qui implique, à partir du lemme 2.3.1, que l'hypothèse 2.2.1 est valable pour tout  $\theta_n \in \Theta$ .

À présent montrons que l'hypothèse 2.2.2 est également vraie. En multipliant la relation (2.41) à gauche par le vecteur  $\begin{bmatrix} \tilde{\zeta} \\ \phi_c(K\tilde{\zeta}) \end{bmatrix}$  et à droite par sa transposée, on a :

$$\begin{aligned} & \tilde{\zeta}^\top \left( (\bar{A}(\theta) + BK)^\top \gamma P + \gamma P (\bar{A}(\theta) + BK) \right) \tilde{\zeta} \\ & + \phi_c(K\tilde{\zeta})^\top \left( \gamma PB - (TK)^\top - (\bar{A}(\theta) + BK)^\top K^\top \Omega \right)^\top \tilde{\zeta} \\ & + \tilde{\zeta}^\top \left( \gamma PB - (TK)^\top - (\bar{A}(\theta) + BK)^\top K^\top \Omega \right) \phi_c(K\tilde{\zeta}) \\ & + \phi_c(K\tilde{\zeta})^\top (-2T - \Omega KB - (\Omega KB)^\top) \phi_c(K\tilde{\zeta}) < 0 \end{aligned}$$

ou de manière équivalente

$$2\gamma\tilde{\zeta}^\top P \left( \bar{A}(\theta)\tilde{\zeta} + BK\tilde{\zeta} \right) + 2\phi_c(K\tilde{\zeta})^\top \left( \gamma B^\top P - TK - \Omega K(\bar{A}(\theta) + BK) \right) \tilde{\zeta} \\ + 2\phi_c(K\tilde{\zeta})^\top (-T - \Omega KB) \phi_c(K\tilde{\zeta}) < 0 \quad (2.42)$$

vraie pour tout  $\tilde{\zeta} \in \mathbb{R}^{n+p} \setminus \{0\}$  et pour tout  $\theta \in \Theta$ .

La relation (2.42) peut-être réécrite comme suit :

$$2\gamma\tilde{\zeta}^\top P \left( \bar{A}(\theta)\tilde{\zeta} + BK\tilde{\zeta} \right) + 2\gamma\tilde{\zeta}^\top PB\phi_c(K\tilde{\zeta}) - 2\phi_c(K\tilde{\zeta})^\top \Omega K \left( \bar{A}(\theta)\tilde{\zeta} + BK\tilde{\zeta} \right) \\ - 2\phi_c(K\tilde{\zeta})^\top \Omega KB\phi_c(K\tilde{\zeta}) - 2\phi_c(K\tilde{\zeta})^\top TK\tilde{\zeta} - 2\phi_c(K\tilde{\zeta})^\top T\phi_c(K\tilde{\zeta}) < 0 \quad (2.43)$$

Posons  $\kappa(\tilde{\zeta}) := K\tilde{\zeta} + \phi_c(K\tilde{\zeta}) = \text{sat}_c(K\tilde{\zeta})$ . On a  $\kappa(\tilde{\zeta}) \in \mathcal{P}(c)$  par définition de  $\mathcal{P}(c)$ . Gardant à l'esprit la définition de  $\mathcal{V}$ , on a  $\kappa(\tilde{\zeta}) \in \text{conv}(\mathcal{U}) - u_\theta^*$  pour tout  $\tilde{\zeta} \in \mathbb{R}^{n+p}$  puisque  $\mathcal{P}(c) \subseteq \mathcal{V} \subseteq \text{conv}(\mathcal{U}) - u_\theta^*$  car le vecteur  $c$  vérifie (2.38).

À présent, en utilisant cette définition dans (2.43), on obtient

$$2\gamma\tilde{\zeta}^\top P \left( \bar{A}(\theta)\tilde{\zeta} + B\kappa(\tilde{\zeta}) \right) - 2\phi_c(K\tilde{\zeta})^\top \Omega K \left( \bar{A}(\theta)\tilde{\zeta} + B\kappa(\tilde{\zeta}) \right) \\ - 2\phi_c(K\tilde{\zeta})^\top T \left( \phi_c(K\tilde{\zeta}) + K\tilde{\zeta} \right) < 0. \quad (2.44)$$

En employant le lemme C.0.1 avec  $e = K\tilde{\zeta}$  ainsi que la proposition C.4, on montre que la relation (2.39) implique que :

$$\phi_c(K\tilde{\zeta})^\top T \left( \phi_c(K\tilde{\zeta}) + K\tilde{\zeta} \right) \leq 0. \quad (2.45)$$

De plus, notons qu'à partir de (2.16), on a

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{\zeta}}(\tilde{\zeta}) = 2\gamma\tilde{\zeta}^\top P - 2\phi_c(K\tilde{\zeta})^\top \Omega K. \quad (2.46)$$

En utilisant cette propriété ainsi que (2.45) et (2.44), on déduit que (2.15) est vérifiée pour  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{n+p}$ . Ainsi l'hypothèse 2.2.2 est alors satisfaite, ce qui met fin à la preuve.  $\square$

**Exemple 2.3.1** (Sur la représentation graphique de  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{P}(c)$ ). Considérons le système défini dans (2.31), dont l'ensemble  $\mathcal{U}$  est défini comme suit :

$$\mathcal{U} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix} \right\}.$$

On pose également que  $\Theta = [1, 2]$  et que le vecteur  $u_\theta^*$  s'écrit, pour tout  $\theta \in \Theta$ , comme

### 2.3. Le cas linéaire associé à un polytope convexe

suit :

$$u_{\theta}^* = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\theta} + 6 \\ 6\theta \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, en utilisant (2.38) et (2.37), les ensembles  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{P}(c)$  sont représentés comme sur la figure 2.1 avec le vecteur  $c = [2 \ 6]^T$ . ■

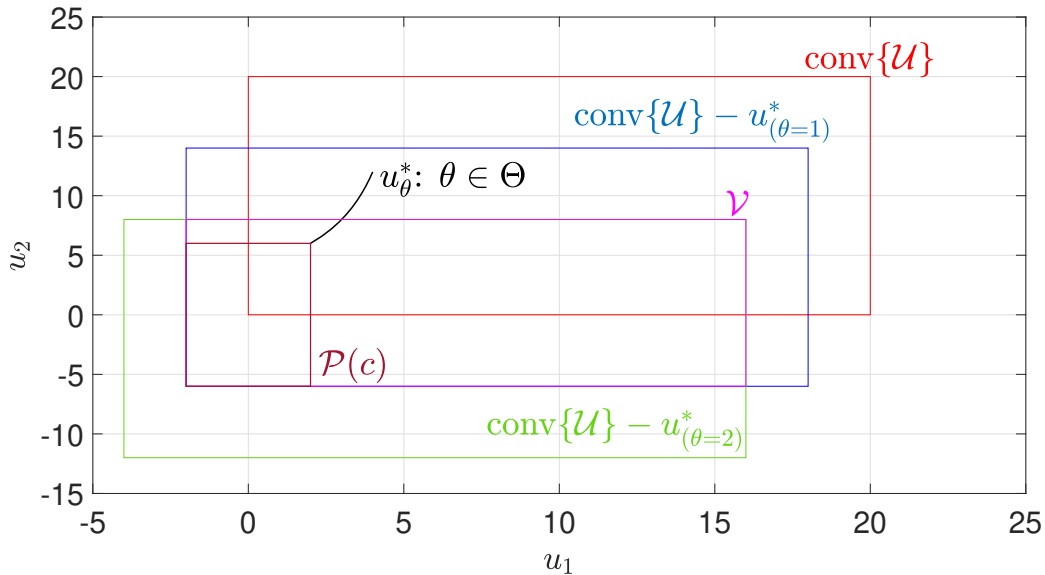


FIGURE 2.1 – Illustration de la construction de  $\mathcal{V}$  et de  $\mathcal{P}(c)$

Notons que, pour que l'hypothèse 2.2.2 soit vraie, on a besoin de trouver une commande continue stabilisante délivrant des valeurs appartenant à  $\text{conv}(\mathcal{U})$ . Rappelons que la stabilisation globale d'un système linéaire  $\dot{x} = Ax + Bu$  sujet à des commandes saturées est possible si et seulement si (i) la paire  $(A, B)$  est stabilisable et (ii) la matrice  $A$  ne possède aucune valeur propre à partie réelle strictement positive [Tar+11, p. 19].

*Remarque 2.3.3.* (Sur la stabilité globale des systèmes à entrées bornées)

- La stabilité globale peut toujours être obtenue si la matrice  $A$  possède des valeurs propres à partie réelle négatives et que celles sur l'axe imaginaire possèdent une multiplicité algébrique égale à celle géométrique ([Tar+11, p. 20]).
- Aucune commande linéaire saturée ne peut garantir une stabilité globale asymptotique pour un système composé de  $n$  intégrateurs purs avec  $n \geq 3$  ([Ful69]).

┘

Puisque l'ajout d'une action intégrale pour les  $p$  sorties dans la synthèse de la commande revient à ajouter  $p$  valeurs propres nulles dans la matrice d'état en boucle ouverte, les valeurs propres de  $\bar{A}(\theta)$ , dont les parties réelles sont strictement positives, ne peuvent provenir que de la matrice  $A(\theta)$ . Par conséquent, pour que la proposition 2.3.2

admette une solution, il est nécessaire qu'aucune valeur propre de  $A(\theta)$  ne possède des parties réelles strictement positives, pour tout  $\theta \in \Theta$ .

Si cette condition n'est pas satisfaite, une stabilisation *locale* peut cependant être obtenue. La sous-section suivante sera dédiée à la présentation de cette solution.

### 2.3.3 Stabilité locale

Nous allons dans cette partie présenter deux approches qui permettent de résoudre le problème 2.1.1 localement mais néanmoins pour n'importe quelle matrice d'état  $A(\theta)$ , i.e. ayant éventuellement des valeurs propres avec une partie réelle strictement positive. De plus, une méthodologie constructive pour le calcul de  $r$  vérifiant (2.21) est fournie. Rappelons que ce réel est lié au volume du bassin d'attraction robuste.

#### Approche quadratique

Cette approche se base sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov quadratique obtenue en posant  $\Omega = \mathbf{0}$  et  $\gamma = 1$  dans la définition (2.16). Dans un premier temps, nous allons faire un petit rappel sur la stabilisabilité quadratique.

**Définition 2.3.1.** [Bar83] Considérons le système défini dans (2.31). La paire  $(A(\theta), B_0)$  est stabilisable quadratiquement via un correcteur linéaire s'il existe  $K$  et  $P \in \mathbb{S}_+^n$  tels que, pour tout  $x_0$  et pour tout  $\theta \in \Theta$ , la fonction  $V : x \mapsto x^\top P x$  est strictement décroissante le long des trajectoires du système  $\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B_0 K x(t)$ ,  $x(0) = x_0$ , c'est-à-dire

$$(A(\theta) + B_0 K)^\top P + P(A(\theta) + B_0 K) \prec \mathbf{0} \quad (2.47)$$

pour tout  $\theta \in \Theta$ . ◇

*Remarque 2.3.4.* La stabilisabilité quadratique d'une paire de matrices  $(A(\theta), B_0)$  donnée n'implique pas la stabilisabilité quadratique via un correcteur linéaire. Un contre-exemple peut être trouvé dans [Pet85] ┘

*Remarque 2.3.5.* La stabilisabilité quadratique de la paire  $(A(\theta), B_0)$  n'implique pas celle de la paire  $(\bar{A}(\theta), B)$ . On trouvera en annexe un exemple permettant d'illustrer cette remarque (voir Annexe B). ┘

**Lemme 2.3.3** ([Boy+94]). *Considérons le système (2.34). Les énoncés suivants sont équivalents :*

1.  $(\bar{A}(\theta), B)$  est stabilisable quadratiquement via un correcteur linéaire.
2. Il existe  $K$ , un réel strictement positif  $\delta$  et une matrice  $P \in \mathbb{S}_+^{n+p}$  tels que :

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{\zeta}}(\tilde{\zeta}) (\bar{A}(\theta)\tilde{\zeta} + BK\tilde{\zeta}) < -2\delta V(\tilde{\zeta}), \forall \tilde{\zeta} \neq \mathbf{0}_{n+p}, \quad (2.48)$$

pour tout  $\theta \in \Theta$ , où  $V$  est défini comme dans (2.16) en imposant  $\Omega = \mathbf{0}$  et  $\gamma = 1$ .

### 2.3. Le cas linéaire associé à un polytope convexe

3. Il existe des réels strictement positifs  $\delta$  et  $\lambda$  et une matrice  $Q \in \mathbb{S}_+^{n+p}$  tels que :

$$\bar{A}_s^{[i]}Q + Q\bar{A}_s^{[i]\top} - \lambda BB^\top \prec -2\delta Q, \quad \forall i \in \mathcal{I}_{N_s} \quad (2.49)$$

De plus, si  $K$  est définie comme suit

$$K := -\frac{\lambda}{2}B^\top Q^{-1}, \quad (2.50)$$

et  $Q$  égal à  $P^{-1}$ , alors (2.48) et (2.49) sont équivalents.

La proposition suivante fournit des conditions pour lesquelles le théorème 2.2.3 peut s'appliquer et donne une solution locale au problème 2.1.1.

**Proposition 2.3.4.** *Supposons que les hypothèses 2.3.1 et 2.3.2 soient satisfaites. Supposons de plus que :*

*A1 :  $u_\theta^* \in \text{Int}\{\text{conv}(\mathcal{U})\}$  pour tout  $\theta \in \Theta$  ;*

*A2 :  $(\bar{A}(\theta), B)$  est stabilisable quadratiquement via un correcteur linéaire pour tout  $\theta \in \Theta$ .*

*Alors, l'hypothèse 2.2.2 est vraie pour tout  $\theta_n \in \Theta$  et pour  $\Omega = \mathbf{0}$ ,  $\gamma = 1$ ,  $P = Q^{-1}$  avec  $Q$  vérifiant (2.49),*

$$\mathcal{D} = \{\tilde{\zeta} \in \mathbb{R}^{n+p} : K\tilde{\zeta} \in \mathcal{V}\} \quad (2.51)$$

*avec  $\mathcal{V}$  défini comme dans (2.38) et  $K$  défini comme dans (2.50) et pour  $\kappa : \tilde{\zeta} \mapsto K\tilde{\zeta}$ . De plus, il existe un réel strictement positif  $r$  vérifiant (2.21).*

*Par conséquent, (2.19) résout le problème 2.1.1 localement et exponentiellement, i.e. pour tout  $\theta \in \Theta$  et pour toute condition initiale  $(x(0), z(0)) \in \Phi(\zeta_K^*, r)$ , la sortie  $y(t)$  converge exponentiellement vers  $y_{\text{ref}}$ .*

*Démonstration.* D'abord notons que A2 associé au lemme 2.3.3 permet d'assurer l'existence d'une matrice  $P \in \mathbb{S}_+^{n+p}$  et de réels positifs  $\lambda$  et  $\delta$  tels que (2.48) est vraie avec  $V$  définie comme dans (2.16) en imposant  $\Omega = \mathbf{0}$  et  $\gamma = 1$  et  $K$  défini comme dans (2.7). Ceci prouve en particulier que la matrice  $\bar{A}(\theta) + BK$  est Hurwitz. Dès lors, en invoquant le lemme 2.3.1 avec l'hypothèse 2.3.1, on garantit que l'hypothèse 2.2.1 est vraie pour tout vecteur  $\theta_n \in \Theta$ .

Gardant à l'esprit la définition de  $\mathcal{V}$  et de  $\mathcal{D}$ , la preuve que l'hypothèse 2.2.2 est également vraie découle trivialement du fait que (i) A1 entraîne que  $\mathbf{0}_m \in \text{Int}\{\mathcal{V}\}$ , qui en retour implique que  $\mathbf{0}_{n+p} \in \mathcal{D}$  et (ii) en remplaçant  $K\tilde{\zeta}$  par  $\kappa(\tilde{\zeta})$  dans (2.48).

À présent montrons qu'il existe un réel strictement positif  $r$  tel que (2.21) est valable. Notons que le fait que  $\mathbf{0}_m \in \text{Int}\{\mathcal{V}\}$  (grâce à A1) prouve en particulier qu'il existe un réel  $\beta > 0$  tel que  $B(\mathbf{0}_m, \beta) \subset \text{Int}\{\mathcal{V}\}$ . L'application  $\kappa : \tilde{\zeta} \mapsto K\tilde{\zeta}$  étant continue, l'image réciproque de l'ouvert  $B(\mathbf{0}_m, \beta)$  pour cette application, c'est-à-dire  $\kappa^{-1}(B(\mathbf{0}_m, \beta)) := \{\tilde{\zeta} : \kappa(\tilde{\zeta}) \in B(\mathbf{0}_m, \beta)\}$ , est également un ouvert. Par définition de  $\mathcal{D}$ , ce

dernier ouvert est inclus dans  $\mathcal{D}$ . De plus, il contient  $\mathbf{0}$  (puisque  $\kappa(\mathbf{0}) = \mathbf{0}_m \in B(\mathbf{0}_m, \beta)$ ) de sorte que quelle que soit  $Q \succ \mathbf{0}$ , il existe  $r > 0$  définissant l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(Q^{-1}, \mathbf{0}, r)$  associée à  $Q$  et centrée en  $\mathbf{0}$  qui est contenue dans  $\kappa^{-1}(B(\mathbf{0}_m, \beta))$ . Par conséquent, on a  $\mathcal{E}(P, \mathbf{0}, r) \subset \kappa^{-1}(B(\mathbf{0}_m, \beta)) \subset \mathcal{D}$  avec  $P = Q^{-1}$ . Cette ellipsoïde n'est rien d'autre que  $\Phi(\mathbf{0}, r)$  avec  $\Omega = \mathbf{0}$  et  $\gamma = 1$ .  $\square$

### Approche Lur'e

Cette approche se base sur la fonction de Lyapunov de type Lur'e. Le résultat est présenté par la proposition suivante.

**Proposition 2.3.5.** *Supposons que les hypothèses 2.3.1 et 2.3.2 soient satisfaites. Supposons de plus qu'il existe :*

A1 : un réel  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  et une matrice  $P \in \mathbb{S}_+^{n+p}$  définissant  $K \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$  comme dans (2.7) ;

A2 : une matrice diagonale semi-définie positive  $\Omega \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , une matrice diagonale définie positive  $T \in \mathbb{S}_+^m$ , une matrice  $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$  et un vecteur  $\tau \in \mathbb{R}_{>0}^m$  ;

A3 : un réel  $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$  et un vecteur  $c \in \mathbb{R}_{>0}^m$  ;

tels que (2.38), (2.40) et

$$\begin{bmatrix} \gamma P & T_{j,j} K_j^\top - \Gamma_j^\top \\ * & \tau_j c_j^2 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \forall j \in \mathcal{I}_m, \quad (2.52)$$

sont vérifiées. Alors, l'hypothèse 2.2.2 est vraie pour tout  $\theta_n \in \Theta$  et pour

$$\mathcal{D} = \{\tilde{\zeta} : (K - T^{-1}\Gamma)\tilde{\zeta} \in \mathcal{P}(c)\}. \quad (2.53)$$

De plus, (2.21) est satisfaite pour

$$r = \left( \max_{j \in \mathcal{I}_m} \left\{ \frac{\tau_j}{T_{j,j}^2} \right\} \right)^{-1}. \quad (2.54)$$

Par conséquent, (2.19) résoud le problème 2.1.1 localement, i.e. pour tout  $\theta \in \Theta$  et pour toute condition initiale  $(x(0), z(0)) \in \Phi(\zeta_K^*, r)$ , la sortie  $y(t)$  converge vers  $y_{\text{ref}}$ .

*Démonstration.* En suivant les mêmes étapes que présentées dans la preuve de la proposition 2.3.2, la faisabilité des LMIs (2.40) garantit que (i) l'hypothèse 2.2.1 est satisfaite et que (ii) la relation suivante

$$\begin{aligned} 2\gamma \tilde{\zeta}^\top P \left( \bar{A}(\theta)\tilde{\zeta} + B\kappa(\tilde{\zeta}) \right) - 2\phi_c(K\tilde{\zeta})^\top \Omega K \left( \bar{A}(\theta)\tilde{\zeta} + B\kappa(\tilde{\zeta}) \right) \\ - 2\phi_c(K\tilde{\zeta})^\top T \left( \phi_c(K\tilde{\zeta}) + G\tilde{\zeta} \right) < 0, \end{aligned} \quad (2.55)$$

est vérifiée pour tout  $\tilde{\zeta} \in \mathbb{R}^{n+p} \setminus \{\mathbf{0}\}$  et pour tout  $\theta \in \Theta$ , avec  $\kappa(\tilde{\zeta}) = \text{sat}_c(K\tilde{\zeta})$  et  $G = T^{-1}\Gamma$ .

### 2.3. Le cas linéaire associé à un polytope convexe

D'autre part, en utilisant le lemme C.0.2 avec  $e_1 = K\tilde{\zeta}$  et  $e_2 = G\tilde{\zeta}$ , associée à la définition de  $\mathcal{P}(c)$  donnée dans (2.37), on montre que

$$\phi_c(K\tilde{\zeta})^\top T (\phi_c(K\tilde{\zeta}) + G\tilde{\zeta}) \leq 0, \quad (2.56)$$

pour tout  $\tilde{\zeta} \in \mathcal{D}$  avec

$$\mathcal{D} := \{\tilde{\zeta} \in \mathbb{R}^{n+p} : |(K_i - G_i)\tilde{\zeta}| \leq c_i, \forall i \in \mathcal{I}_m\}. \quad (2.57)$$

Dès lors, en utilisant la même méthodologie que présentée dans la preuve de la proposition 2.3.2, on déduit alors que l'hypothèse 2.2.2 est satisfaite.

À présent, montrons que  $\Phi(\mathbf{0}, r) \subseteq \mathcal{D}$ . En multipliant (2.52) des deux côtés par  $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_{i,i}^{-1} \end{bmatrix}$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} \gamma P & K_i^\top - G_i^\top \\ K_i - G_i & \frac{\tau_i}{T_{i,i}^2} c_i^2 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \forall i \in \mathcal{I}_m. \quad (2.58)$$

Gardant à l'esprit la définition de  $r$  et utilisant (2.58), on a :

$$\begin{bmatrix} \gamma P & K_i^\top - G_i^\top \\ K_i - G_i & r^{-1} c_i^2 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \forall i \in \mathcal{I}_m,$$

ce qui implique que

$$\tilde{\zeta}^\top (K_i - G_i)^\top (c_i^2)^{-1} (K_i - G_i) \tilde{\zeta} \leq \tilde{\zeta}^\top \gamma r P \tilde{\zeta},$$

pour tout  $\tilde{\zeta} \in \mathbb{R}^{n+p}$  et pour tout  $i \in \mathcal{I}_m$ .

Dès lors, pour tout  $\tilde{\zeta} \in \mathcal{E}(\gamma r P, \mathbf{0}, 1)$ , on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}^\top (K_i - G_i)^\top (c_i^2)^{-1} (K_i - G_i) \tilde{\zeta} &\leq 1, \\ \Leftrightarrow \|(K_i - G_i)\tilde{\zeta}\| &\leq c_i, \end{aligned}$$

pour tout  $i \in \mathcal{I}_m$ . Cela signifie que  $\tilde{\zeta} \in \mathcal{D}$  d'après (2.57). Par conséquent, on en déduit l'inclusion suivante :

$$\mathcal{E}(\gamma r^{-1} P, \mathbf{0}, 1) = \mathcal{E}(\gamma P, \mathbf{0}, r) \subseteq \mathcal{D}. \quad (2.59)$$

D'autre part, en appliquant le lemme 2.2.2, on en déduit également l'inclusion suivante :

$$\mathcal{E}(\gamma P + K^\top \Omega K, \mathbf{0}, r) \subseteq \Phi(\mathbf{0}, r) \subseteq \mathcal{E}(\gamma P, \mathbf{0}, r). \quad (2.60)$$

Dès lors, à partir de (2.59) et de (2.60), on obtient :

$$\Phi(\mathbf{0}, r) \subseteq \mathcal{D},$$

ce qui met fin la preuve.  $\square$

Comme présenté par la proposition 2.3.4, le certificat de stabilisation locale fournie par la proposition 2.3.5 peut aussi être relié aux propriétés structurelles du système en boucle ouverte. Ceci permet de prouver que les conditions associées à la proposition 2.3.5 ne sont pas seulement suffisantes mais également nécessaires afin de garantir l'hypothèse 2.2.2.

**Proposition 2.3.6.** *Supposons que les hypothèses 2.3.1 et 2.3.2 soient vérifiées. Supposons de plus que A1 et A2 de la proposition 2.3.4 soient valables. Alors, il existe  $c \in \mathbb{R}_{>0}^m$  suffisamment petit tel que la relation (2.38) est vraie. Choisissons l'un de ces vecteurs  $c$ . De plus, il existe  $P = Q^{-1}$  avec  $Q$  vérifiant (2.49) pour  $\lambda = 2$  et un certain  $\delta > 0$ . Soit  $K$  défini comme dans (2.7),  $\Omega = \mathbf{0}$ ,  $\Gamma = -\gamma K$  et  $T = \mathbf{I}_m$ . Dans ce cas, l'ensemble  $\mathcal{D}$  défini dans (2.53) est non vide et s'écrit :*

$$\mathcal{D} = \{\tilde{\zeta} : (1 + \gamma)K\tilde{\zeta} \in \mathcal{P}(c)\}.$$

De plus, (2.40) et (2.52) sont valables pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$  et tout  $\tau \in \mathbb{R}^m$  vérifiant :

$$\tau_j > \frac{(1 + \gamma)^2 K_j K_j^\top}{\gamma \lambda_{\min}(P) c_j^2}, \quad (2.61)$$

pour tout  $j \in \mathcal{I}_m$ , où  $\lambda_{\min}(P)$  est la plus petite valeur propre de  $P$ .

*Démonstration.* D'abord, notons que A1 de la proposition 2.3.4 est équivalente à dire que  $\mathbf{0} \in \text{Int}\{\mathcal{V}\}$ , ce qui garantit l'existence d'un vecteur  $c \in \mathbb{R}_{>0}^m$  vérifiant (2.38). De plus, pour tout  $c \in \mathbb{R}_{>0}^m$ ,  $\mathbf{0}$  appartient à  $\mathcal{P}(c)$  et donc à  $\mathcal{D}$  également. Ceci prouve que l'ensemble  $\mathcal{D}$  n'est pas vide.

À présent, choisissons arbitrairement un  $i \in \mathcal{I}_{N_s}$ . D'abord, remarquons que si l'inégalité (2.49) est vraie avec  $(Q, \lambda, \delta) = (Q_0, \lambda_0, \delta_0)$  alors elle est également vraie avec  $(Q, \lambda, \delta) = (Q_0(2/\lambda_0), 2, \delta_0)$ . Si A2 de la proposition 2.3.4 est satisfaite, alors la condition suivante est valable pour  $P = Q^{-1}$ ,  $K$  défini comme dans (2.7), toute matrice  $T \succ \mathbf{0}$  et tout réel  $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$  :

$$\begin{bmatrix} (\bar{A}^{[i]} + BK)^\top \gamma P + \gamma P (\bar{A}^{[i]} + BK) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -2T \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}. \quad (2.62)$$

Notons que cette inégalité n'est rien d'autre que (2.40) avec  $\Gamma = -\gamma K$ ,  $\Omega = \mathbf{0}$  et  $\lambda = 2$ .

Prouvons maintenant que (2.52) est également satisfaite. Sélectionnons arbitraire-

### 2.3. Le cas linéaire associé à un polytope convexe

ment un  $j \in \mathcal{I}_m$ . Notons que (2.61) implique qu'il existe un réel  $\epsilon_j \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que

$$\tau_j = \frac{(1 + \gamma)^2(K_j K_j^\top + \epsilon_j)}{\gamma \lambda_{\min}(P) c_j^2}, \quad (2.63)$$

puisque  $(1 + \gamma)^2 / (\gamma \lambda_{\min}(P) c_j^2)$  est strictement positif. Les inégalités suivantes sont dès lors valables :

$$\begin{aligned} P &\succeq \lambda_{\min}(P) \mathbf{I}_{n+p}, \\ (K_j K_j^\top + \epsilon_j) \mathbf{I}_{n+p} &\succ K_j K_j^\top \mathbf{I}_{n+p} \succeq K_j^\top K_j. \end{aligned}$$

Associées à (2.63), ces inégalités impliquent que :

$$\gamma P \succ \frac{\gamma \lambda_{\min}(P)}{(K_j K_j^\top + \epsilon_j)} K_j^\top K_j \Leftrightarrow \gamma P \succ \frac{(1 + \gamma)^2}{\tau_j c_j^2} K_j^\top K_j.$$

En utilisant le complément de Schur, l'inégalité suivante implique que :

$$\begin{bmatrix} \gamma P & (1 + \gamma) K_j^\top \\ * & \tau_j c_j^2 \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}. \quad (2.64)$$

qui n'est rien d'autre que (2.52) avec une inégalité stricte et pour  $\Gamma = -\gamma K$  et  $T = \mathbf{I}_m$ .  $\square$

### Comparaison approche Lur'e et approche quadratique

Les propositions 2.3.4 et 2.3.5 aboutissent à des expressions distinctes de l'ensemble  $\mathcal{D}$ , voir (2.53) et (2.51). D'une part, la proposition 2.3.5 offre des degrés de liberté supplémentaires, principalement  $T$  et  $\Gamma$ , de telle sorte que  $\mathcal{D}$  calculé comme dans (2.53) devrait être plus grand que celui défini dans (2.51). D'autre part, (2.53) utilise un sous-ensemble  $\mathcal{P}_c$  de  $\mathcal{V}$ , qui suggère que  $\mathcal{D}$  donné dans (2.53) pourrait en fait être plus petit que celui donné dans (2.51).

Le point clé ici est que l'ensemble  $\Phi(\mathbf{0}, r)$  est contraint à être une ellipsoïde dans la proposition 2.3.4, en imposant  $\Omega$  à  $\mathbf{0}$ . Cependant, en autorisant cette matrice à être différente de zéro, la géométrie de  $\Phi(\mathbf{0}, r)$  obtenue via la proposition 2.3.5 peut être plus complexe, de telle sorte qu'il soit donc plus grand. Un exemple illustrant ce fait peut être trouvé dans [Kad+18a] pour le cas des équilibres certains.

#### 2.3.4 Un algorithme constructif utilisant des LMI

Cette sous-section propose des stratégies afin de sélectionner les valeurs numériques des paramètres caractérisant le contrôleur (2.19) pour les différentes approches présentées précédemment.

## Stabilisation globale

Considérons la proposition 2.3.2. Les inégalités matricielles (2.39) et (2.40) dépendent des variables de décision  $P$ ,  $\lambda$ ,  $\Omega$ ,  $T_+$ ,  $T_-$ ,  $\Gamma$ ,  $\gamma$  et  $c$ , de manière bilinéaire, ce qui rend la solution difficile à calculer. Afin de surmonter cette difficulté, la procédure suivante est proposée. Premièrement, choisir un vecteur  $c \in \mathbb{R}_{>0}^m$  tel que (2.38) est vérifiée. Deuxièmement, résoudre (2.49) paramétré par  $\delta$  afin d'obtenir les valeurs numériques de  $P$  et de  $\lambda$ . Troisièmement, calculer  $K$  en utilisant (2.7). Quatrièmement, résoudre (2.39) et (2.40) afin d'obtenir les valeurs numériques des variables restantes qui apparaissent à présent dans ces inégalités de manière linéaire.

## Stabilisation locale

Dans le cas où la stabilité globale ne peut être obtenue, les propositions 2.3.4 et 2.3.5 devront donc être considérées afin de garantir une stabilité locale. Nous allons pour chacune d'elles présenter une procédure de calcul des gains du contrôleur associé.

**Approche quadratique** Rappelons que dans le cas de l'approche quadratique, on a  $\Omega = \mathbf{0}$  et  $\gamma = 1$ . Dans ce cas, le contrôleur (2.19) dépend principalement de la matrice  $P \in \mathbb{S}_+^{n+p}$ . Ici, cette matrice est associée à la condition de la stabilisation quadratique. À partir du lemme 2.3.3,  $P$  peut être calculé via (2.49) pour un taux de décroissance  $\delta$  donné en posant  $P = Q^{-1}$ . De plus, la matrice  $P$ , avec le réel positif  $r$ , caractérisent l'estimation du domaine d'attraction  $\Phi(\mathbf{0}, r)$  inclus dans le bassin d'attraction robuste. Ainsi, le calcul de  $P$  a pour but (i) d'agrandir  $\Phi(\mathbf{0}, r)$  et, dans un second temps, (ii) d'être compatible avec la plus grande valeur possible de  $\delta$ . Ces deux objectifs sont connus pour être concurrents. Pour cette raison, le calcul de  $P$  est structuré sous forme d'un problème d'optimisation où (ii) est considérée comme une contrainte alors que (i) est lié au critère à optimiser. Plus précisément, la taille  $r_B$  d'une boule  $B(\mathbf{0}, r_B) \subset \Phi(\mathbf{0}, r)$  est maximisée pour une valeur de  $\delta$  donnée. Cette stratégie est inspirée de celle développée dans [HFF15], qui se base sur les travaux dans la littérature axés sur les systèmes avec des commandes saturées [HLC02]; [HB98].

Une étape technique vers cet objectif est la réécriture de l'ensemble  $\mathcal{V}$  défini dans (2.38) via  $n_g \in \mathbb{N}$  vecteurs  $g_j \in \mathbb{R}^m$ , ( $j \in \mathcal{I}_{n_g}$ ) :

$$\mathcal{V} = \{v \in \mathbb{R}^m : g_j^\top v \leq 1, (j \in \mathcal{I}_{n_g})\}. \quad (2.65)$$

L'existence de tels vecteurs est assurée sous l'hypothèse que  $\mathbf{0} \in \text{Int}\{\mathcal{V}\}$  (voir [BM08, p. 87]). Cette hypothèse est garantie par l'énoncé A1 de la proposition 2.3.4.

**Proposition 2.3.7.** *Considérons le problème d'optimisation paramétré par les réels positifs  $\delta$  et  $r$  et les vecteurs  $g_j \in \mathbb{R}^m$  suivant :*

$$\min_{Q \in \mathbb{S}_+^{n+p}, \lambda \in \mathbb{R}_{>0}, \rho \in \mathbb{R}_{>0}} \rho \text{ t.q.}$$

$$(2.49), \tag{2.66a}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\lambda}{2} g_j^\top B^\top r \\ * & rQ \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}, (j \in \mathcal{I}_{n_g}), \tag{2.66b}$$

$$\begin{bmatrix} \rho \mathbf{I}_{n+p} & \mathbf{I}_{n+p} \\ * & rQ \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}. \tag{2.66c}$$

Soit  $(Q^*, \lambda^*, \rho^*)$  les valeurs numériques de  $(Q, \lambda, \rho)$  pour lesquelles  $\rho$  est minimisé. Alors,  $P = (Q^*)^{-1}$  est conforme à l'énoncé de la proposition 2.3.4 et  $\delta$  est une borne inférieure du taux de décroissance de la convergence exponentielle à laquelle la proposition 2.3.4 fait référence. De plus, la taille de  $\Phi(\mathbf{0}, r)$  est maximisée dans le sens où  $\Phi(\mathbf{0}, r)$  contient la boule  $B(\mathbf{0}, r_B)$  dont le rayon satisfait  $r_B > 1/\rho^*$ .

*Démonstration.* En vertu du lemme 2.3.3, la condition (2.66a) implique l'existence de  $K$  comme définie dans (2.50) et  $P = Q^{-1}$  tels que (2.48) est vérifiée.

Puisque  $\mathbf{0} \in \text{Int}\{\mathcal{V}\}$ , précisons tout d'abord que  $\{\tilde{\zeta} : K\tilde{\zeta} \in \mathcal{V}\}$  est un ensemble non vide contenant  $\mathbf{0}$ . Gardant à l'esprit la définition de  $K$  et appliquant le lemme du complément du Schur sur la relation (2.66b), on aboutit ensuite à :

$$r < (g_j^\top K P^{-1} K^\top g_j)^{-1}, (j \in \mathcal{I}_{n_g}), \tag{2.67}$$

où les vecteurs  $g_j$  sont définis comme dans (2.65). Rappelons que le minimum de  $\tilde{\zeta}^\top P \tilde{\zeta}$  sur l'hyperplan  $\{\tilde{\zeta} : g_j^\top K \tilde{\zeta} = 1\}$  est égal à  $(g_j^\top K P^{-1} K^\top g_j)^{-1}$  (voir [HB98]). Par conséquent, si  $\tilde{\zeta}^\top P \tilde{\zeta} \leq r$  alors (2.67) prouve que  $g_j^\top K \tilde{\zeta} \neq 1$  pour tout  $j \in \mathcal{I}_{n_g}$ . Dit autrement, l'intersection entre  $\Phi(\mathbf{0}, r) = \{\tilde{\zeta} : \tilde{\zeta}^\top P \tilde{\zeta} \leq r\}$  et l'hyperplan  $\{\tilde{\zeta} : g_j^\top K \tilde{\zeta} = 1\}$  est vide. Plus précisément,  $\tilde{\zeta}^\top P \tilde{\zeta} \leq r$  implique  $g_j^\top K \tilde{\zeta} < 1$ . Ceci prouve que  $\Phi(\mathbf{0}, r) \subset \{\tilde{\zeta} \in \mathbb{R}^{n+p} : K\tilde{\zeta} \in \mathcal{V}\}$ , de sorte que pour tout  $\tilde{\zeta} \in \Phi(\mathbf{0}, r)$  et pour tout  $\theta \in \Theta$  on a  $K\tilde{\zeta} + u_\theta^* \in \text{conv}(\mathcal{U})$ . Comme expliqué dans la preuve du théorème 2.2.3, ceci prouve que  $\Phi(\mathbf{0}, r)$  est inclus dans le bassin d'attraction robuste.

La condition (2.66c) est équivalente (en utilisant le lemme du complément du Schur) à

$$\tilde{\zeta}^\top \frac{Q^{-1}}{r} \tilde{\zeta} < \rho \tilde{\zeta}^\top \tilde{\zeta}, \forall \tilde{\zeta} \neq \mathbf{0},$$

qui garantit que  $B(\mathbf{0}, 1/\rho) \subset \Phi(\mathbf{0}, r)$ . □

*Remarque 2.3.6.* Notons que si les inégalités matricielles (2.66) sont vraies pour un ensemble de paramètres  $(Q, \lambda, \rho) = (Q_0, \lambda_0, \rho_0)$  et pour  $r = r_0$  donné, alors, elles sont aussi vraies pour  $r = 1$  avec  $(Q, \lambda, \rho) = (Q_0 r_0, \lambda_0 r_0, \rho_0)$ . Sans perte de généralité, on peut donc fixer  $r = 1$  dans la proposition 2.3.7. ┘

En somme, pour l'approche quadratique, la procédure à suivre afin de trouver les gains du contrôleur est composée de deux étapes :

- a. Trouver un entier  $n_g \in \mathbb{N}$  et des vecteurs  $g_j \in \mathbb{R}^m$ , ( $j \in \mathcal{I}_{n_g}$ ) vérifiant (2.65) ;
- b. Choisir un réel  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  et résoudre le problème d'optimisation (2.66) avec  $r = 1$  afin de calculer  $P$ .

**Approche Lur'e** Étant basé sur la même fonction de Lyapunov que pour l'approche de la stabilité globale, nous allons dans ce cas utiliser la même procédure que celle décrite pour cette approche en exploitant les degrés de liberté existant dans les deuxième et quatrième étapes afin d'agrandir le bassin d'attraction. Plus précisément, il s'agit de maximiser le volume de  $\Phi(\mathbf{0}, r)$  (voir théorème 2.2.3) en implémentant la deuxième étape en suivant la méthodologie développée pour le cas de l'approche quadratique présentée dans le paragraphe précédent et la quatrième comme dans [Tar+11, p. 134]. Par soucis de clarté, la procédure résultante est donnée comme suit :

1. Choisir un vecteur  $c \in \mathbb{R}_{>0}^m$  tel que (2.38) est vérifiée ;
2. Calculer  $P$  et  $\lambda$  en suivant la méthodologie suivante :
  - a. Trouver un entier  $n_g \in \mathbb{N}$  et des vecteurs  $g_j \in \mathbb{R}^m$ , ( $j \in \mathcal{I}_{n_g}$ ) vérifiant (2.65) ;
  - b. Choisir un réel  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  et résoudre le problème d'optimisation (2.66) avec  $r = 1$  ;
3. Calculer  $K$  en utilisant (2.7) ;
4. Résoudre le problème d'optimisation suivant afin d'obtenir les valeurs numériques de  $\Omega, T, \Gamma, \tau$  et  $\gamma$  :

$$\min_{\Omega \in \mathbb{R}^{m \times m}, T \in \mathbb{S}_+^m, \Gamma \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}, \tau \in \mathbb{R}^m, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}} f(T, \Omega, \tau, \gamma) \text{ t.q. (2.52) et (2.40)}$$

avec :

$$f(T, \Omega, \tau, \gamma) := \beta_1 \text{trace}(\gamma P + K^T \Omega K) + \sum_{i=1}^m (\beta_{2i} \tau_i - \beta_{3i} T_{i,i}), \quad (2.68)$$

où les réels positifs  $\beta_1, \beta_{2i}$  et  $\beta_{3i}$ , ( $i \in \mathcal{I}_m$ ) sont des paramètres de pondération donnés par l'utilisateur.

Deux commentaires peuvent être faits ici. D'abord concernant les deux approches, le paramètre  $\delta$  est lié au taux de décroissance de la fonction de Lyapunov. D'une manière générale, on s'attend à faire la remarque suivante : plus la valeur choisie de  $\delta$  est grande, plus rapide est la convergence de  $V$  vers zero, mais plus petit est le bassin d'attraction. Ensuite, l'étape 4 maximise en fait  $\mathcal{E}(\gamma P + K^T \Omega K, \mathbf{0}, r)$ . Cet ensemble est inclus dans  $\Phi(\mathbf{0}, r)$  (voir (2.18)), et donc cette stratégie agrandit  $\Phi(\mathbf{0}, r)$  de manière indirecte.

### 2.3.5 Exemples illustratifs

Nous allons dans cette sous-section présenter pour chaque approche (globale et locale) un exemple illustrant l'efficacité de la méthodologie exposée précédemment.

### Stabilité globale

Considérons le système décrit par (2.31) avec :

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1], \quad \Theta = [1 \quad 2], \quad \mathcal{U} := \{0, 10\}, \quad y_{\text{ref}} = -4, \quad (2.69)$$

et vérifiant les hypothèses 2.3.1 et 2.3.2. Remarquons que le spectre de la matrice d'état en boucle ouverte  $A(\theta)$  est égal à  $\{\pm i\sqrt{\theta}\}$ . Puisqu'il se trouve sur l'axe imaginaire, les résultats présentés dans la littérature ne peuvent être utilisés afin de résoudre globalement le problème 2.1.1 pour ce système.

Ce système vérifie les hypothèses 2.1.1 et admet un équilibre unique vérifiant  $y = y_{\text{ref}}$ , i.e. (2.3) admet la solution unique suivante :

$$(x_{\theta}^*, u_{\theta}^*) = \left( \begin{bmatrix} 4\theta \\ -4 \end{bmatrix}, 4\theta \right). \quad (2.70)$$

si bien que  $\mathcal{V}$  est égal à  $[-4, 2]$ . Dans ce cas, en choisissant  $c = 2$  dans la définition de  $\mathcal{P}(c)$  dans (2.37), on garantit que la relation (2.38) est vraie.

Appliquons à présent la proposition 2.3.2 en suivant la procédure énoncée dans la sous-section précédente. Le paramètre  $c$  étant déjà choisi, nous choisissons maintenant  $\delta = 0.1$  pour lequel (2.49) admet la solution suivante :

$$Q = \begin{bmatrix} 4.26 & 0.56 & 5.9 \\ 0.56 & 9.038 & -3.28 \\ 5.9 & -3.28 & 11.36 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 12.07,$$

ce qui, via (2.7), aboutit à

$$K = [-7.65 \quad 1.39 \quad 4.37]. \quad (2.71)$$

Ensuite, notons que (2.39) et (2.40) avec  $P = Q^{-1}$  sont résolues pour

$$\gamma = 3.18 \cdot 10^{-9}, \quad T = 2.7 \cdot 10^{-10}, \quad \Omega = 1.9 \cdot 10^{-11}.$$

Ceci prouve que l'hypothèse 2.2.2 est satisfaite avec  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^3$  et pour tout vecteur  $\theta_n \in \Theta$ , si bien que le théorème 2.2.3 s'applique et donne une solution globale au problème 2.1.1.

En guise d'illustration de l'efficacité de notre approche, nous choisissons d'abord  $\theta_n = 1$  de sorte à avoir :

$$\zeta_{\theta_n}^* = [4 \quad -4 \quad 0]^T,$$

et nous fixons la condition initiale à  $x(0) = [0 \quad 6]^T$  et  $z(0) = 0$ . De plus, nous avons

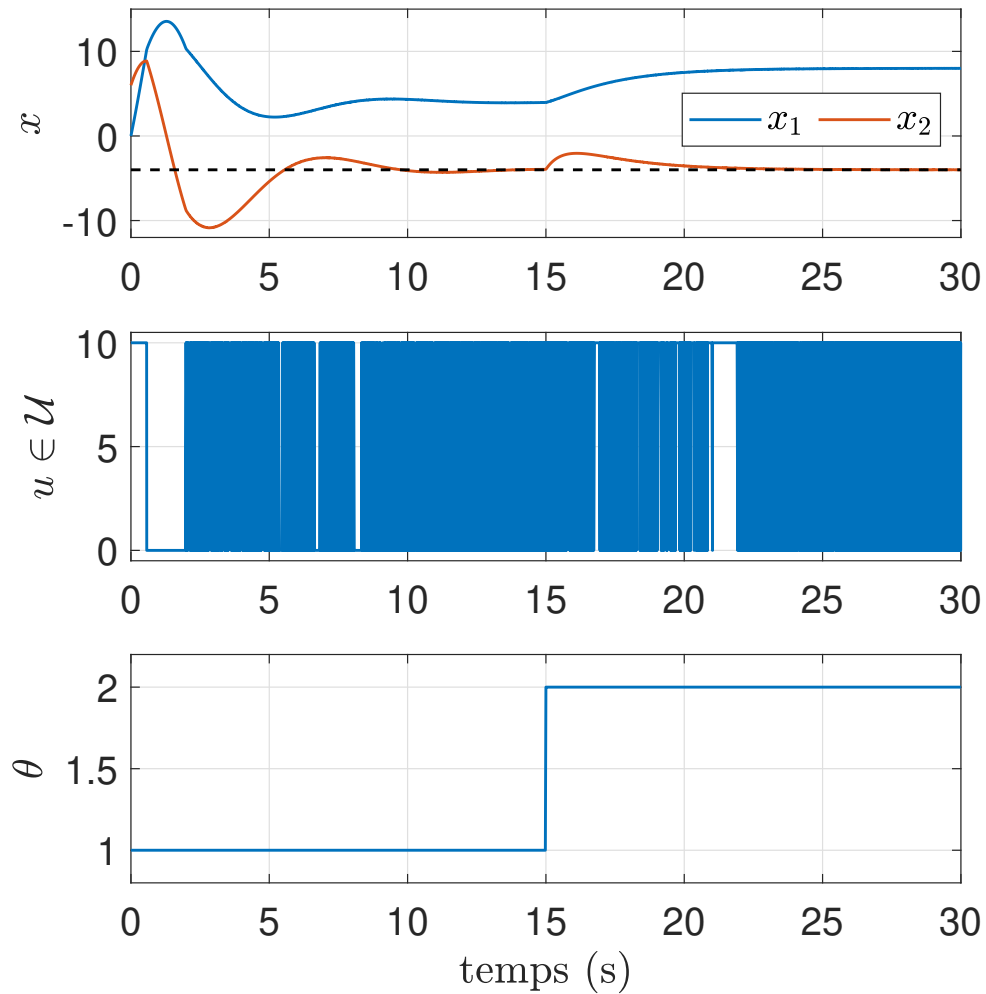


FIGURE 2.2 – Évolution de la variable d'état  $x$ , de la commande  $u$  et du paramètre  $\theta$  pour le système (2.1) associé aux matrices définies dans (2.69)

appliqué un échelon sur la variable  $\theta$  lorsque  $t = 15$  s qui fait passer sa valeur de 1 à 2. Les résultats de simulation sont représentés sur la figure 2.2. Nous pouvons vérifier que l'état d'équilibre souhaité est atteint puisque  $y(t) = x_2(t)$  converge asymptotiquement vers  $y_{\text{ref}} = -4$ , après chacun des deux régimes transitoires.

### Stabilité locale

Considérons le système (2.31) avec :

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\theta \\ \theta & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Theta = [1, 1.1], \quad \mathcal{U} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}, \quad y_{\text{ref}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

et vérifiant les hypothèses 2.3.1 et 2.3.2. Notons que pour les valeurs de  $\theta$  considérées ici, les valeurs propres de la matrice d'état en boucle ouverte  $A(\theta)$  possèdent des parties réelles positives : par exemple, les valeurs propres de  $A(1)$  sont 0.715 et  $0.142 \pm 1.67i$ .

L'équilibre vérifiant  $y = y_{\text{ref}}$  est donné par :

$$(x_{\theta}^*, u_{\theta}^*) = \left( \begin{bmatrix} \frac{2}{\theta} \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{\theta} + 3 \\ 3\theta \end{bmatrix} \right). \quad (2.73)$$

On en déduit que l'hypothèse 2.1.1 est vraie. De plus, on peut aisément vérifier que les hypothèses évoquées dans la proposition 2.3.6 sont toutes valables, de sorte que la proposition 2.3.4 ainsi que la proposition 2.3.5 admettent toutes deux une solution.

Afin d'appliquer chacune de ces propositions, l'expression de l'ensemble  $\mathcal{V}$  défini dans (2.38) est nécessaire. Pour cet exemple, il est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= (\text{conv}\mathcal{U} - u_{\theta=1}^*) \cap (\text{conv}\mathcal{U} - u_{\theta=1.1}^*), \\ &= [-1, 3.8182] \times [-3, 1.7], \end{aligned} \quad (2.74)$$

de sorte que le vecteur  $c$  défini comme suit  $c = [1 \ 1.7]^{\top}$  vérifie la relation (2.38). Les ensembles  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{P}(c)$  sont représentés par la figure 2.3.

*Remarque 2.3.7.* La commande  $u_{\theta}^*$  est représentée sur la figure 2.3 en trait noir. Notons que plus l'ensemble  $\Theta$  sera grand et plus la longueur du trait sera également grande. Néanmoins, cela aura tendance à réduire la taille de l'ensemble  $\mathcal{G}$  défini dans (2.30) et par conséquent à réduire l'applicabilité des résultats constructifs proposés.  $\lrcorner$

D'après la définition de  $\mathcal{V}$  donné dans (2.74), il est aisé de montrer qu'il peut être caractérisé comme dans (2.65) avec  $n_g = 4$  et les vecteurs  $g_j$ , ( $j \in \mathcal{I}_4$ ) définis comme suit :

$$g_1 = [-1 \ 0], \quad g_2 = [1/3.8182 \ 0], \quad g_3 = [0 \ -1/3], \quad g_4 = [0 \ 1/1.7]. \quad (2.75)$$

À présent, nous allons appliquer la procédure proposée dans la sous-section 2.3.4

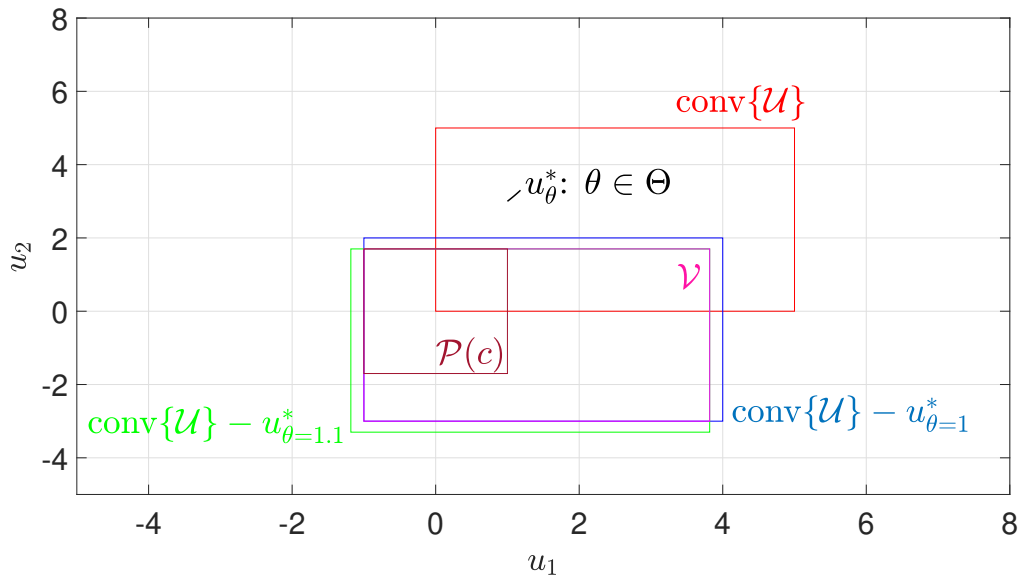


FIGURE 2.3 – Illustration de la construction de  $\mathcal{V}$  et de  $\mathcal{P}(c)$  pour le système défini par (2.72)

pour chacune des approches, pour différentes valeurs de  $\delta$ , ceci dans le but d'évaluer son influence sur le volume des domaines d'attraction.

**Approche quadratique** Ici, la procédure nous suggère de poser  $r = 1$  afin de résoudre le problème d'optimisation (2.66). Dans ce cas, l'estimation du domaine d'attraction est représentée par une ellipsoïde donnée par  $\Phi(\mathbf{0}, 1) = \mathcal{E}(P, \mathbf{0}, 1)$ . Gardant à l'esprit que le volume de cet ensemble est proportionnelle à  $\det(P)^{-1/2}$ , le tableau 2.1 montre les variations du volume de l'ellipsoïde pour différentes valeurs de  $\delta$ .

TABLEAU 2.1 – Solutions numériques obtenues en résolvant (2.66) pour différentes valeurs de  $\delta$

$\delta$	$\det(P)^{-1/2}$	$1/\rho$
0.2	2	0.4166
0.4	0.14	0.0935
0.8	0.0041	0.0136
1	0.0011	0.068

Comme prévu, on observe que l'augmentation du paramètre  $\delta$  conduit à une diminution de la taille du domaine d'attraction. Un compromis doit donc être trouvé entre vitesse de convergence des trajectoires du système et taille du domaine d'attraction.

**Approche Lur'e** Pour cette approche, la géométrie de l'estimation du domaine d'attraction rend complexe la détermination de son volume. Cependant, en utilisant le

### 2.3. Le cas linéaire associé à un polytope convexe

lemme 2.2.2, on va s'intéresser au volume de l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(\gamma P, \mathbf{0}, r) = \mathcal{E}(\gamma r^{-1} P, \mathbf{0}, 1)$  en calculant  $\det(\gamma r^{-1} P)^{-1/2}$ . Nous choisissons les paramètres de pondération suivants pour résoudre le problème d'optimisation 2.68 :  $\beta_1 = 8$ ,  $\beta_{21} = \beta_{22} = 0.1$  et  $\beta_{31} = \beta_{32} = 2$ . En appliquant la procédure présentée dans la sous-section 2.3.4 pour différentes valeurs de  $\delta$ , on aboutit aux résultats consignés dans le tableau 2.2.

TABLEAU 2.2 – Volume de  $\mathcal{E}(\gamma r^{-1} P, \mathbf{0}, 1)$  pour différentes valeurs de  $\delta$

$\delta$	$\det(\gamma r^{-1} P)^{-1/2}$
0.2	2.16
0.4	0.174
0.8	0.0076
1	0.0022

La même observation que celle effectuée pour l'approche quadratique s'applique également ici. En effet, l'augmentation de  $\delta$  entraîne une diminution de l'ellipsoïde  $\mathcal{E}(\gamma P, \mathbf{0}, r)$  et par conséquent, en référence à l'équation (2.16), une diminution de  $\Phi(\mathbf{0}, r)$ .

**Comparaison approche quadratique et approche Lur'e** Supposons qu'on veuille assurer une régulation robuste de la sortie pour la condition initiale  $x(0) = [1.6 \ -0.8 \ 2.9]^\top$  et  $z(0) = [-0.07 \ 0.04]^\top$  et pour  $\theta_n = 1$  de telle sorte que :

$$x_{\theta_n}^* = [2 \ 1 \ 3]^\top.$$

Appliquons d'abord l'approche Lur'e pour cet exemple. Suivant la procédure décrite dans 2.3.4, le vecteur  $c$  et les vecteurs  $g_j$  ont déjà été trouvés. À présent, on choisit  $\delta = 1$  afin de résoudre (2.66) en posant  $r = 1$ . On aboutit aux résultats suivants :

$$P = \begin{bmatrix} 9.2428 & 0.6658 & 8.8615 & -16.8762 & 2.4877 \\ 0.6658 & 9.5754 & 4.9328 & 10.3968 & 10.5088 \\ 8.8615 & 4.9328 & 33.8895 & -43.5599 & 11.2345 \\ -16.8762 & 10.3968 & -43.5599 & 124.3521 & 22.6642 \\ 2.4877 & 10.5088 & 11.2345 & 22.6642 & 37.6005 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 0.658, \quad (2.76)$$

ce qui via (2.7), implique que

$$K = \begin{bmatrix} -3.0402 & -0.2190 & -2.9148 & 5.5510 & -0.8183 \\ -0.2190 & -3.1496 & -1.6225 & -3.4198 & -3.4566 \end{bmatrix}. \quad (2.77)$$

Finalement, en résolvant (2.68) avec les mêmes paramètres de pondération que ceux définis

dans le paragraphe précédent, on obtient les solutions suivantes :

$$\gamma = 1.10^{-5}, \quad r = 2.1.10^{-5}, \quad \Omega = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

Notons que la condition initiale considérée ici appartient à l'ensemble  $\mathcal{G}$  défini dans (2.30) et qui s'écrit ici :

$$\mathcal{G} := \cap_{\theta \in \Theta} \Phi(\zeta_K^*, r),$$

avec la valeur de  $r$  donnée dans (2.78) et  $\zeta_K^*$  obtenu à partir de (2.73) et (2.6b) pour la valeur de  $K$  donnée dans (2.77). En effet, l'équilibre vérifiant  $y = y_{\text{ref}}$  du système étant unique, l'ensemble  $\Psi(K, \theta_n; \theta)$  contient alors un unique élément (voir le lemme 2.3.1).

À présent, appliquons l'approche quadratique. D'abord, notons qu'avec la valeur de  $P$  donnée dans (2.76), la condition initiale considérée ici n'appartient pas à l'ensemble  $\mathcal{G}$  qui s'écrit dans ce cas comme suit :

$$\mathcal{G} := \cap_{\theta \in \Theta} \mathcal{E}(P, \zeta_K^*, 1). \quad (2.79)$$

Il nous faut donc résoudre (2.66) avec une valeur de  $\delta$  plus faible afin d'agrandir le domaine d'attraction.

Nous choisissons dès lors  $\delta = 0.8$ . On obtient dans ce cas les résultats suivants :

$$P = \begin{bmatrix} 6.5346 & 0.3172 & 4.5098 & -9.5150 & 1.1941 \\ 0.3172 & 6.6779 & 2.7294 & 6.3648 & 5.7569 \\ 4.5098 & 2.7294 & 16.3533 & -20.6174 & 4.0949 \\ -9.5150 & 6.3648 & -20.6174 & 61.6989 & 12.3973 \\ 1.1941 & 5.7569 & 4.0949 & 12.3973 & 16.5645 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 0.782, \quad (2.80)$$

ce qui via (2.7), implique que

$$K = \begin{bmatrix} -2.5563 & -0.1241 & -1.7642 & 3.7222 & -0.4671 \\ -0.1241 & -2.6123 & -1.0677 & -2.4898 & -2.2521 \end{bmatrix}. \quad (2.81)$$

Avec ces valeurs, on montre que la condition initiale appartient bien à  $\mathcal{G}$  donné dans (2.79).

Nous pouvons maintenant présenter les résultats de simulation obtenus en appliquant chacune des deux approches sur l'exemple considéré. Ils sont représentés sur la figure 2.4 où nous avons appliqué à  $t = 5\text{s}$ , un échelon sur la valeur de  $\theta$  qui passe de 1 à 1.1. Notons que pour les deux approches, la stabilité est garantie avec une erreur statique nulle sur les sorties contrôlées  $x_2$  et  $x_3$ . En outre, on constate que l'approche Lur'e présente une dynamique légèrement meilleure due à la différence par rapport à la synthèse des gains du contrôleur. Pour l'approche quadratique, cette synthèse dépend du paramètre  $\delta$  qui

### 2.3. Le cas linéaire associé à un polytope convexe

représente le taux de décroissance et pour l'approche Lur'e, elle dépend non seulement de ce paramètre  $\delta$  qui influe sur le taux de décroissance de la fonction de Lyapunov mais également des paramètres de pondération dont le choix influe aussi sur la taille du domaine d'attraction de cette approche.

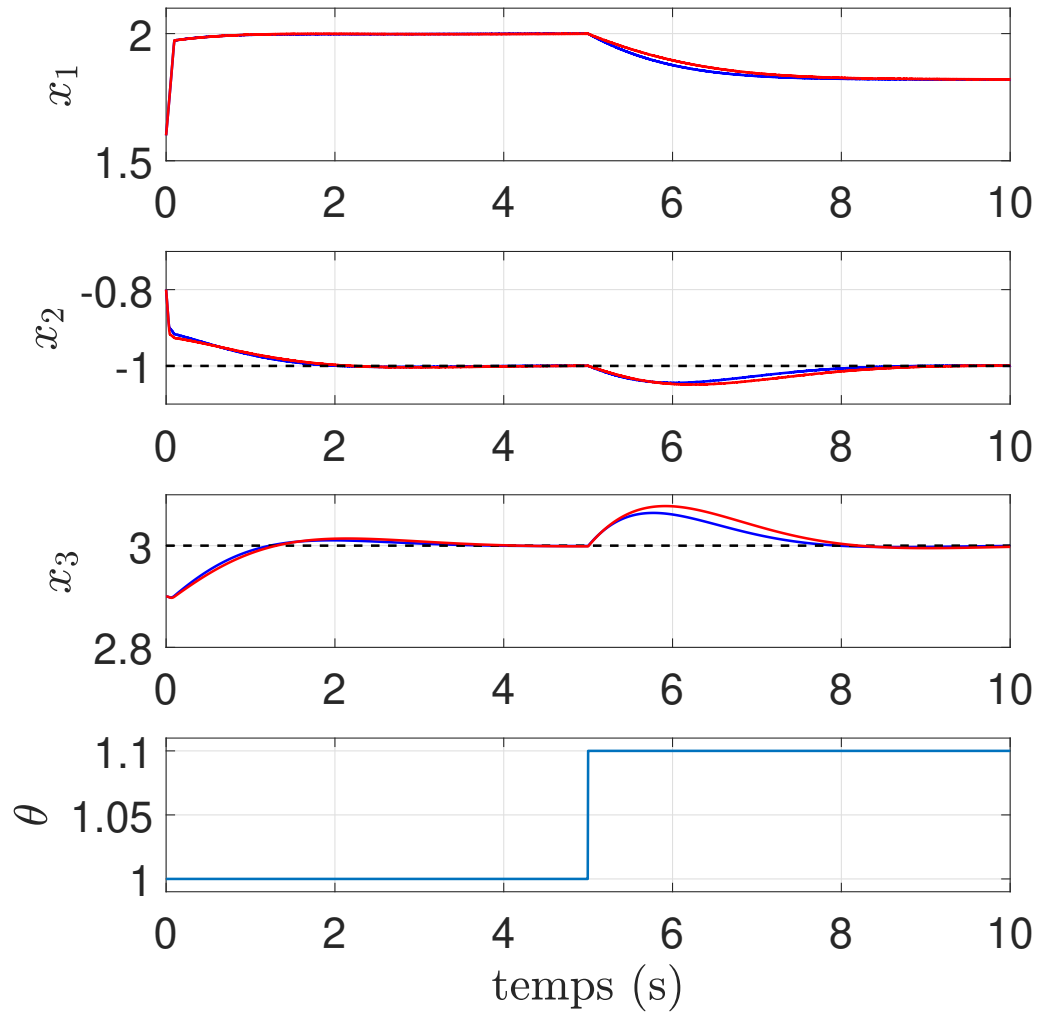


FIGURE 2.4 – Évolution du vecteur d'état  $x$  (en bleu approche Lur'e et en rouge approche quadratique) et du paramètre  $\theta$  pour le système (2.1) associé aux matrices définies dans (2.72)

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la synthèse de commandes robustes pour les systèmes à relais non linéaires et incertains. La procédure de synthèse adoptée se base sur l'ajout d'un contrôleur dynamique et sur l'existence d'une commande continue par retour d'état stabilisante. Des conditions de stabilité suffisantes ont été fournies afin de garantir la stabilisation robuste du système en adoptant une fonction de Lyapunov de type Lur'e.

Nous avons ensuite particularisé l'étude au cas linéaire associé à des incertitudes appartenant à un ensemble convexe. La particularité de la méthodologie présentée ici est le fait qu'elle permette de traiter le cas des systèmes présentant une matrice d'état incertaine et non Hurwitz, ce qui était, jusque là, inexistant dans la littérature. Notre approche permet de garantir

- une stabilité globale lorsque la matrice d'état ne possède pas de valeurs propres à partie réelle strictement positives ;
- une stabilité locale, peu importe la localisation du spectre de la matrice d'état. Une estimation du domaine d'attraction robuste du système en boucle fermée est également fournie. Pour ce cas-ci, nous avons présenté deux méthodes de synthèse dont l'une est basée sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov quadratique afin de fournir les preuves de stabilité et l'autre sur la fonction de Lyapunov de type-Lur'e. La différence entre ces deux approches réside dans le volume de l'estimation du domaine d'attraction robuste du système.

Par la suite, une méthode constructive basée sur les LMI est présentée. Elle permet de fournir directement les gains du contrôleur mais également de calculer l'estimation du domaine d'attraction robuste lorsque la stabilité locale est cherchée.

Finalement, nous avons donné des exemples académiques en guise d'illustration. Les résultats de simulation obtenus permettent de conclure de l'efficacité des stratégies de synthèse proposées dans ce chapitre.

Nous pouvons à présent appliquer cette méthodologie au système composé de convertisseurs buck en parallèle présenté dans le chapitre 1 afin d'assurer la régulation robuste de la tension de sortie. Cette application sera présentée dans le chapitre suivant.

# Chapitre 3

## Application à l'interconnexion de convertisseurs DC-DC en parallèle

### Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>30</b>
<b>2.1 Formulation du problème</b> . . . . .	<b>31</b>
<b>2.2 Une solution générale au problème 2.1.1</b> . . . . .	<b>32</b>
2.2.1 Action intégrale . . . . .	32
2.2.2 Obstacle de l'approche proposée dans [Kad+18a] pour le cas incertain . . . . .	32
2.2.3 Un équilibre particulier . . . . .	33
2.2.4 Une condition suffisante pour la stabilisation robuste . . . . .	34
<b>2.3 Le cas linéaire associé à un polytope convexe</b> . . . . .	<b>38</b>
2.3.1 Préliminaires . . . . .	38
2.3.2 Stabilité globale . . . . .	40
2.3.3 Stabilité locale . . . . .	44
2.3.4 Un algorithme constructif utilisant des LMI . . . . .	49
2.3.5 Exemples illustratifs . . . . .	52
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>60</b>

---

## Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons exposé les résultats théoriques développés dans le cadre de la thèse en vue de commander les systèmes à relais incertains. Cette approche a été développée afin de s'appliquer au système composé de  $m \in \mathbb{N}^+$  convertisseurs Buck en parallèle alimentant une charge résistive dont la valeur est inconnue. Rappelons que sur cette structure, l'objectif principal est de réguler la tension de sortie vers une référence fixée en considérant que la valeur de la charge est inconnue. Notons qu'en régime permanent, cet objectif fixe la valeur du courant par rapport à la valeur de la charge, alors que la manière dont ce courant est distribué entre les différentes branches du convertisseur reste libre. Nous avons dès lors fixé comme deuxième objectif de garantir une répartition uniforme des courants dans les convertisseurs. Nous montrerons que l'approche proposée dans le chapitre 2 permettra d'atteindre ces deux objectifs. Des résultats de simulation, mais également expérimentaux permettront de mettre en évidence l'efficacité de la stratégie.

Le chapitre est divisé en trois sections :

- Dans la première section, il s'agira d'adapter le modèle développé dans le chapitre 1, pour le système composé de  $m \in \mathbb{N}^*$  convertisseurs Buck en parallèle, afin de se ramener à la formulation du chapitre 2. Ceci nous permettra, par la suite, de pouvoir appliquer les méthodes constructives de synthèse développées dans le chapitre 2.
- La section 2 s'intéresse à la synthèse de la commande robuste à relais pour les convertisseurs en parallèle. Nous avons vu au chapitre 2 que cette synthèse se basait sur la résolution de LMI qui dépendent des matrices du système. Cependant, ces dernières sont souvent mal conditionnées pour les convertisseurs. Dans un premier temps, nous présenterons donc une méthode permettant d'éviter ce mauvais conditionnement. Par la suite, nous fournirons une procédure concernant la synthèse et la mise en œuvre de la commande.
- La section 3 sera dédiée à l'application de la procédure sur un système composé de  $m = 3$  convertisseurs Buck hétérogènes dans le sens où les inductances et les transistors sont différents. L'implémentation de la commande se fera avec un FPGA programmable possédant une période d'horloge égale à 10ns. En outre, nous présenterons une stratégie permettant d'éviter la prise des mesures des grandeurs électriques lors des commutations de la commande. Finalement, nous clorons ce chapitre en montrant les résultats expérimentaux obtenus.

### 3.1 Reformulation du système à étudier

Dans cette section, nous allons reconsidérer le système composé de  $m$  convertisseurs Buck en parallèle présenté dans le chapitre 1. On rappelle que pour ce système, les objectifs de commande sont (i) de garantir une régulation robuste de la tension de sortie vers la

### 3.1. Reformulation du système à étudier

référence  $V_{\text{ref}}$  et (ii) d'assurer une répartition uniforme des courants entre les  $m$  branches des convertisseurs. Ici, la robustesse doit être assurée vis-à-vis d'un paramètre incertain représenté par la charge  $R$ . Cependant, afin de garantir l'hypothèse 2.3.2 qui requiert que la matrice d'état du système doive dépendre du paramètre incertain de manière affine, on pose :

$$\theta = \frac{1}{R}.$$

De plus, on considère que ce paramètre appartient à un ensemble  $\Theta$  défini par :

$$\Theta := [1/R_{\text{max}}, 1/R_{\text{min}}], \quad (3.1)$$

où les paramètres  $R_{\text{min}}$  et  $R_{\text{max}}$  sont des réels strictement positifs connus. Par définition, remarquons que cet ensemble est convexe, ce qui permet de garantir la véracité de l'hypothèse 2.3.2.

Comme discuté dans le chapitre 1, les résistances parasites des différents composants électroniques du convertisseur seront négligées dans l'écriture du modèle de commande. Le schéma que nous considérons est alors représenté sur la figure 3.1.

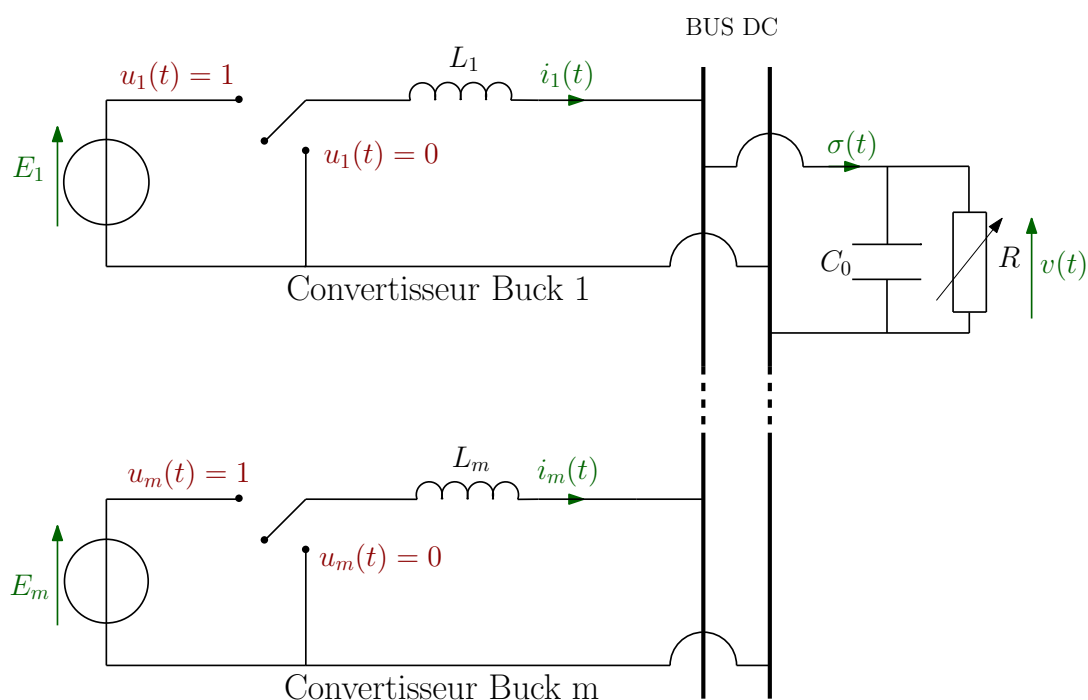


FIGURE 3.1 – Représentation idéale de l'interconnexion de  $m$  convertisseurs Buck

La représentation d'état du système devient dans ce cas :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (3.2)$$

avec

$$A(\theta) := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times m} & -\text{diag}\{L\}^{-1} \mathbf{1}_m \\ \frac{1}{C_0} \mathbf{1}_m^\top & -\frac{\theta}{C_0} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \text{diag}\{L\}^{-1} \text{diag}\{E\} \\ \mathbf{0}_m^\top \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \Gamma^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.3a)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m-1} \\ \mathbf{0}_{m-1}^\top \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m-1}^\top \\ \mathbf{I}_{m-1} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_m \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U} = \{0, 1\}^m. \quad (3.3b)$$

On en déduit donc que ce système vérifie l'hypothèse de la linéarité énoncée dans l'hypothèse 2.3.1. Les méthodes constructives de synthèse développées dans le chapitre 2 peuvent alors être appliquées.

Par ailleurs, en considérant l'expression des matrices définies dans (3.3) et en remarquant que

$$\text{Ker}\{\Gamma^\top\} = \text{span}\mathbf{1}_m, \quad (3.4)$$

on montre que le système admet un unique équilibre vérifiant  $y = y_{\text{ref}}$  et qui est défini comme suit :

$$(x_\theta^*, u_\theta^*) = \left( \begin{bmatrix} \frac{\theta V_{\text{ref}}}{m} \mathbf{1}_m \\ V_{\text{ref}} \end{bmatrix}, V_{\text{ref}} \text{diag}\{E\}^{-1} \mathbf{1}_m \right). \quad (3.5)$$

En outre, comme spécifié dans le chapitre 1, la tension de référence  $V_{\text{ref}}$  est choisie de telle sorte à garantir :

$$0 < V_{\text{ref}} < \min_{j \in \mathcal{I}_m} E_j.$$

Ainsi, à partir de (3.5), il s'en suit que, pour tout  $\theta \in \Theta$ , on a  $u_\theta^* \in \text{Int}\{\text{conv}\{\mathcal{U}\}\}$ . Ce qui n'est rien d'autre que  $A1$  de la proposition 2.3.5 et qui permet de garantir l'existence d'un vecteur  $c \in \mathbb{R}_{>0}^m$  vérifiant (2.38). Rappelons que l'existence d'un tel vecteur est un facteur indispensable afin d'appliquer les méthodes constructives de synthèse présentées dans le chapitre 2.

## 3.2 Synthèse de la commande robuste à relais

Dans cette section, nous allons appliquer la méthodologie proposée dans le chapitre 2 afin de faire la synthèse de la commande à relais robuste. Notons que la matrice d'état du système, défini dans (3.3a), ne possède pas de valeurs propres à partie réelle strictement positive, dès lors les deux approches de stabilité globale et locale (présentées respectivement dans les sous-sections 2.3.2 et 2.3.3) peuvent être appliquées sur ce système. Ceci nous permettra par la suite d'effectuer une comparaison entre elles.

### 3.2.1 Amélioration du conditionnement numérique des matrices

Pour toutes les approches de synthèse présentées dans le chapitre 2, les gains de la loi de commande stabilisante sont obtenues en résolvant des LMI qui dépendent entre autres des matrices du système. Dans cette sous-section, nous portons une attention particulière sur le conditionnement de ces matrices. En effet, dans le cas des convertisseurs Buck, ces dernières sont souvent mal conditionnées à cause des petites valeurs des inductances et de la capacité. Nous proposons, afin d'éviter ce mauvais conditionnement, l'introduction d'un nouveau changement de variables. Il consiste à un changement d'échelle des variables de temps, des états et des entrées.

Ce changement de variables s'inspire de la procédure de normalisation développée dans ([SRSO06, p. 15]) mais qui s'applique uniquement pour le cas d'un *unique* convertisseur. La méthodologie proposée ici est valable pour  $m \in \mathbb{N}^*$  convertisseurs, potentiellement hétérogènes, et est donnée par le lemme suivant :

**Lemme 3.2.1.** *Définissons les matrices suivantes :*

$$T_x^{-1} := \begin{bmatrix} H^{-1} & \mathbf{0}_{n-1} \\ \mathbf{0}_{n-1}^\top & 1 \end{bmatrix}, T_y^{-1} := \begin{bmatrix} F & \mathbf{0}_{m-1} \\ \mathbf{0}_{m-1}^\top & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.6a)$$

$$T_u^{-1} := \begin{bmatrix} \frac{L_{eq}}{L_M} \Gamma^\top \\ L_{eq} \mathbf{1}_m^\top \text{diag}\{L\}^{-1} \end{bmatrix} \text{diag}\{E\}, \quad (3.6b)$$

avec  $\Gamma$  défini comme dans (3.3b) et :

$$H^{-1} := \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_0}} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_M} \Gamma^\top \text{diag}\{L\} \\ \mathbf{1}_m^\top \end{bmatrix}, \quad (3.7a)$$

$$F := \frac{1}{L_m} \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_0}} (\Gamma^\top \text{diag}\{L\} \Gamma) (\Gamma^\top \Gamma)^{-1}, \quad (3.7b)$$

$$\frac{1}{L_{eq}} := \sum_{k \in \mathcal{I}_m} \frac{1}{L_k}, \quad L_M = \max_k L_k. \quad (3.7c)$$

Définissons également le changement de variables via  $x_a = T_x^{-1}x$ ,  $u_a = T_u^{-1}u$ ,  $y_a = T_y^{-1}y$  et  $\tau = \frac{t}{\sqrt{L_{eq}C_0}}$ .

Dans ce cas le système (3.2) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx_a(\tau)}{d\tau} = A_a(\theta)x_a(\tau) + B_a u_a(\tau), \\ y_a(\tau) = C_a x_a(\tau), \end{cases} \quad (3.8)$$

où

$$A_a(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times m} & \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m-1} \\ -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m-1}^\top & 1 \end{bmatrix} & -\frac{\theta}{Q_c} \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0}_m^\top \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$C_a = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m-1} & \frac{-1}{mL_M} \Gamma^\top L & \mathbf{0}_{m-1} \\ \mathbf{0}_{m-1}^\top & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

avec  $Q_c := \sqrt{\frac{C_0}{L_{eq}}}$ . Ici, la commande  $u_a(\tau)$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{U}_a := T_u^{-1}\mathcal{U}$  pour tout  $t$ .

*Démonstration.* À partir de la relation (3.4), on peut montrer que  $H$  s'écrit

$$H = \sqrt{\frac{C_0}{L_{eq}}} \begin{bmatrix} L_M \Gamma (\Gamma^\top \text{diag}\{L\} \Gamma)^{-1} & L_{eq} \text{diag}\{L\}^{-1} \mathbf{1}_m \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

À présent, notons qu'à partir des définitions des matrices (3.7) et (3.10), on a :

$$\mathbf{1}_m^\top H = \sqrt{\frac{C_0}{L_{eq}}} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m-1}^\top & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.11a)$$

$$H^{-1} \text{diag}\{L\}^{-1} \mathbf{1}_m = \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_0}} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m-1} \\ 1/L_{eq} \end{bmatrix}. \quad (3.11b)$$

En utilisant le changement de variables  $x_a = T_x^{-1}x$ , on montre que :

$$T_x^{-1}A(\theta)T_x = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times m} & -H^{-1} \text{diag}\{L\}^{-1} \mathbf{1}_m \\ \frac{1}{C_0} \mathbf{1}_m^\top H & -\frac{\theta}{C_0} \end{bmatrix},$$

$$\stackrel{(3.11)}{=} \sqrt{\frac{1}{L_{eq}C_0}} A_a(\theta),$$

et

$$T_x^{-1}Bu = \begin{bmatrix} H^{-1} \text{diag}\{L\}^{-1} \text{diag}\{E\} \\ \mathbf{0}_m^\top \end{bmatrix} u,$$

$$\stackrel{(3.6)}{=} \sqrt{\frac{1}{L_{eq}C_0}} B_a u_a.$$

Finalement, en utilisant l'expression de  $\tau$  dans (3.6), on aboutit aux matrices  $A_a(\theta)$  et  $B_a$  comme données dans (3.9).

Donnons à présent l'expression de  $C_a$  :

$$C_a = T_y^{-1} C T_x = \begin{bmatrix} F\Gamma^\top H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \stackrel{(3.10)}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m-1} & Z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où

$$Z := \frac{L_{eq}}{L_M} \Gamma^\top \text{diag}\{L\} W \text{diag}\{L\}^{-1} \mathbf{1}_m, \quad (3.12)$$

$$W := \Gamma(\Gamma^\top \Gamma)^{-1} \Gamma^\top.$$

Ainsi, il reste à prouver que :

$$Z = \frac{-1}{mL_M} \Gamma^\top L \quad (3.13)$$

est vraie.

Pour ce faire, remarquons dans un premier temps que :

$$W = \mathbf{I}_m - \frac{1}{m} \mathbf{1}_{m \times m}. \quad (3.14)$$

En effet, en considérant la matrice inversible  $\begin{bmatrix} \Gamma & \mathbf{1}_m \end{bmatrix}$ , on montre que l'égalité suivante est vérifiée :

$$W \begin{bmatrix} \Gamma & \mathbf{1}_m \end{bmatrix} = \left( \mathbf{I}_m - \frac{1}{m} \mathbf{1}_{m \times m} \right) \begin{bmatrix} \Gamma & \mathbf{1}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma & \mathbf{0}_m \end{bmatrix}.$$

Ce qui permet de déduire donc que la relation 3.14 est vraie. Dès lors, en utilisant cette dernière relation et en remarquant que  $L_{eq}^{-1}$  est égal à  $\mathbf{1}_m^\top \text{diag}\{L\}^{-1} \mathbf{1}_m$ , il s'en suit que

$$Z = \frac{1}{L_M} \Gamma^\top (L_{eq} \mathbf{1}_m - \frac{1}{m} \text{diag}\{L\} \mathbf{1}_m),$$

ce qui implique immédiatement (3.13). Remarquons que pour des valeurs numériques identiques d'inductances,  $Z = \mathbf{0}_{m-1}$ . □

Dans le but d'illustrer l'amélioration du conditionnement avec la formulation proposée, la fonction Matlab **cond**, qui calcule le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur singulière d'une matrice, sera utilisée. Plus petit est le résultat de ce rapport, meilleur sera le conditionnement de la matrice. La figure 3.2 représente la variation de ce rapport pour le modèle original et le modèle normalisé pour différentes valeurs de  $m$  et pour les valeurs numériques des paramètres du système consignés dans le tableau 3.1 lorsque  $m > 1$ . Pour le cas où  $m = 1$ , on donne  $E = 20V$  et  $L = 1.3mH$ .

Il est notable que le modèle normalisé présente un meilleur conditionnement et ceci même pour de grandes valeurs de  $m$ . À l'inverse le conditionnement du modèle original se

TABLEAU 3.1 – Valeurs numériques des paramètres du système pour  $m > 1$

Paramètres	Valeurs
$R$	$5 \Omega$
$E_{k+1}, (k = 0, 1, \dots, m - 1)$	$\left(20 + \frac{10k}{m - 1}\right) \text{V}$
$C_0$	$40 \mu\text{F}$
$L_{k+1}, (k = 0, 1, \dots, m - 1)$	$\left(1.3 + \frac{11.7k}{m - 1}\right) \text{mH}$

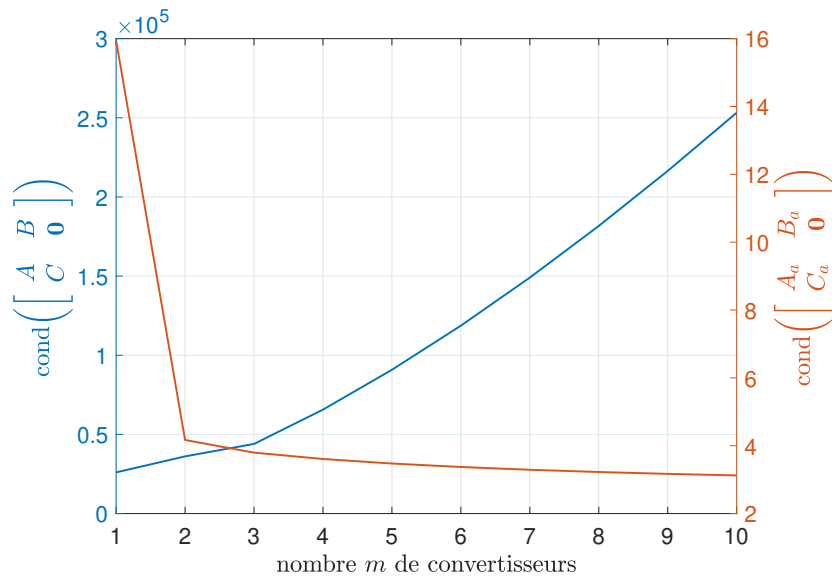


FIGURE 3.2 – Impact du conditionnement numérique par rapport au nombre  $m$  de convertisseurs.

dégrade de plus en plus avec l'augmentation de  $m$ . Ceci montre l'efficacité du changement de variables proposé ici.

### 3.2.2 Procédure de synthèse de la commande

Dans cette partie, nous allons présenter la procédure à suivre afin de synthétiser la commande stabilisante du système considéré.

#### Définition du modèle augmenté normalisé

En suivant la méthodologie proposée dans le chapitre 2 et en utilisant le changement de variables défini dans la sous-section précédente et en particulier le fait que  $C_a = T_y^{-1}CT_x$  soit vérifiée, l'égalité  $y = y_{\text{ref}}$  est alors équivalente à  $C_a x_a = T_y^{-1}y_{\text{ref}}$ . Dans ce cas, l'égalité

$\dot{z}(t) = Cx(t) - y_{\text{ref}}$  pour le modèle (3.2) est équivalente à l'équation suivante :

$$\frac{dz_a(\tau)}{d\tau} = C_a x_a(\tau) - T_y^{-1} y_{\text{ref}} \quad (3.15)$$

pour le modèle normalisé (3.8) avec  $z_a = (1/\sqrt{L_{\text{eq}}C_0})T_y^{-1}z$ .

Le vecteur d'état du modèle augmenté normalisé s'écrit alors

$$\zeta_a := \begin{bmatrix} x_a \\ z_a \end{bmatrix} = T_\zeta^{-1} \zeta, \quad (3.16)$$

avec

$$T_\zeta^{-1} := \begin{bmatrix} T_x^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_y^{-1} \frac{1}{\sqrt{L_{\text{eq}}C_0}} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Dans ce cas, le modèle augmenté normalisé est donné par :

$$\frac{d\zeta_a(\tau)}{d\tau} = \bar{A}_a(\theta)\zeta_a(\tau) + \bar{B}_a u_a(\tau) + h_a,$$

avec

$$\bar{A}_a(\theta) := \begin{bmatrix} A_a(\theta) & \mathbf{0}_{n \times p} \\ C_a & \mathbf{0}_{p \times p} \end{bmatrix}, \bar{B}_a = \begin{bmatrix} B_a \\ \mathbf{0}_{p \times m} \end{bmatrix}, h_a := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ -T_y^{-1} y_{\text{ref}} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

### Synthèse de la commande $u_a$

La prochaine étape consiste à appliquer les approches définies dans le chapitre 2 sur le modèle augmenté normalisé afin de calculer les gains du contrôleur. Rappelons que :

- la commande stabilisante  $u_a(\tau)$  issue de la fonction de Lyapunov de type Lur'e s'écrit :

$$u_a(\tilde{\zeta}_a) \in \arg \min_{v \in \mathcal{U}_a} \left( \gamma \tilde{\zeta}_a^\top P - \phi_{c_a}^\top (K \tilde{\zeta}_a) \Omega K \right) \begin{bmatrix} B_a \\ \mathbf{0}_{p \times p} \end{bmatrix} v, \quad (3.19)$$

avec  $\tilde{\zeta}_a = \zeta_a - T_\zeta^{-1} \left( \begin{bmatrix} x_{\theta_n}^* \\ \mathbf{0}_p \end{bmatrix} \right)^\top$  et  $\theta_n$  un élément de  $\Theta$  à choisir par l'utilisateur ;

- pour l'approche basée sur la fonction de Lyapunov quadratique, il suffit de poser  $\Omega = \mathbf{0}$  et  $\gamma = 1$  dans la relation (3.19) afin d'obtenir l'expression de la commande stabilisante.

### Dé-normalisation

Une fois la loi de commande stabilisante  $u_a$  synthétisée pour le modèle augmenté normalisé, nous allons à présent procéder à la dé-normalisation des gains du contrôleur afin de retrouver les unités physiques et temporelles d'origine. En se basant sur le changement de variables donné par le lemme 3.2.1, la commande dé-normalisée correspondante à (3.19)

est donnée par la relation suivante :

$$u(t) = T_u u_a(t). \quad (3.20)$$

### Implémentation

Finalement, d'après la discussion présentée précédemment, l'implémentation de la commande sera alors effectuée selon le schéma-bloc illustré sur la figure 3.3. Le bloc 'Calcul de la commande' effectue l'opération donnée dans (3.19).

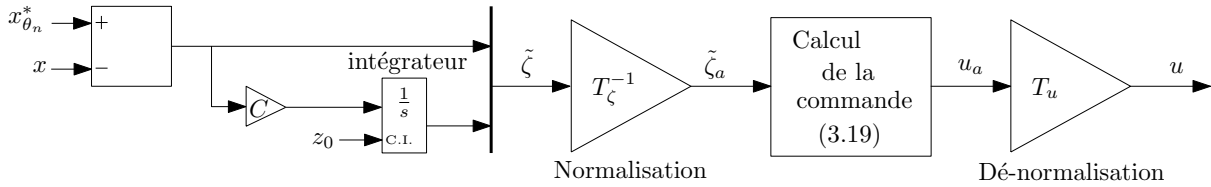


FIGURE 3.3 – Schéma bloc de la mise en œuvre de la commande

## 3.3 Présentation des résultats

Dans cette section, nous allons appliquer la procédure de synthèse présentée dans la section précédente pour le cas où  $m = 3$ . Les valeurs numériques des différents paramètres du système sont consignés dans le tableau 3.2 et nous fixons la tension de référence à

$$V_{\text{ref}} = 12V. \quad (3.21)$$

TABLEAU 3.2 – Valeurs numériques des paramètres du système

Paramètres	Valeurs
$[R_{\min}; R_{\max}]$	$[5, 10] \Omega$
$E_1 = E_2 = E_3$	$24 V$
$C_0$	$40 \mu F$
$L_1 = L_2$	$1.3 mH$
$L_3$	$1.43 mH$

La valeur nominale de la charge est fixée à  $10 \Omega$ , et on souhaite assurer la régulation robuste de la tension pour la condition initiale fixée arbitrairement comme suit :  $i_1(0) = i_2(0) = i_3(0) = 0.24A$ ,  $v(0) = 7.2V$  et  $z(0) = \mathbf{0}_3$ .

Pour cela, nous allons appliquer les approches de synthèse pour la stabilité globale et locale présentées dans le chapitre 2 sur le modèle augmenté normalisé correspondant.

### 3.3.1 Synthèse des gains du contrôleur

#### Approche de stabilité globale

Nous allons suivre les étapes de calcul de gains présentés dans la sous-section 2.3.4 du chapitre 2.

Choix du vecteur normalisé  $c_a$  pour le modèle augmenté normalisé vérifiant (2.38) : À partir de l'équation (3.5) et des valeurs numériques des paramètres physiques du convertisseur consignés dans le tableau 3.2, on note que la commande  $u_\theta^*$  ne dépend pas du paramètre  $\theta$  et est égal à  $0.5 \times \mathbf{1}_3$ . Dans ce cas, l'ensemble  $\mathcal{V}$  est égal à  $[-0.5, 0.5]^3$ . Il peut ainsi être caractérisé comme dans (2.65) avec  $n_g = 6$  et les vecteurs  $g_j$ , ( $j \in \mathcal{I}_6$ ) définis comme suit :

$$g_1 = [2 \ 0 \ 0]^\top, \quad g_2 = -g_1, \quad g_3 = [0 \ 2 \ 0]^\top, \quad g_4 = -g_3, \quad g_5 = [0 \ 0 \ 2]^\top, \quad g_6 = -g_5.$$

Notons que la version normalisée de cet ensemble s'écrit :  $\mathcal{V}_a := \{v \in \mathbb{R}^m : g_{j_a}^\top v \leq 1, (j \in \mathcal{I}_6)\}$  avec  $g_{j_a} := T_u^\top g_j$ , de sorte que le vecteur  $c_a = [1.9 \ 4 \ 4]^\top$  vérifie la relation :

$$\mathcal{P}(c_a) \subset \mathcal{V}_a.$$

Calcul de  $P$ ,  $\lambda$  et de  $K$  : Ces paramètres sont obtenus en résolvant (2.49), paramétré par  $\delta$ . Son influence sur les dynamiques du système sera discutée par la suite. Pour le moment, nous sélectionnons  $\delta = 0.5$  afin de résoudre (2.49). On aboutit aux valeurs de  $P$  et de  $\lambda$  suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} 0.0539 & -0.0015 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0285 & -0.0015 & -0.0000 \\ -0.0015 & 0.0517 & -0.0001 & -0.0009 & -0.0015 & 0.0262 & -0.0004 \\ -0.0000 & -0.0001 & 0.0645 & 0.0457 & -0.0000 & -0.0001 & 0.0516 \\ 0.0000 & -0.0009 & 0.0457 & 0.0906 & 0.0000 & -0.0009 & 0.0678 \\ 0.0285 & -0.0015 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0285 & -0.0015 & -0.0000 \\ -0.0015 & 0.0262 & -0.0001 & -0.0009 & -0.0015 & 0.0262 & -0.0004 \\ -0.0000 & -0.0004 & 0.0516 & 0.0678 & -0.0000 & -0.0004 & 0.0877 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 39.3,$$

ce qui via (2.7) implique que :

$$K = \begin{bmatrix} -1.0593 & 0.0299 & 0.0005 & -0.0002 & -0.5593 & 0.0299 & 0.0005 \\ 0.0299 & -1.0151 & 0.0020 & 0.0178 & 0.0299 & -0.5151 & 0.0088 \\ 0.0005 & 0.0020 & -1.2681 & -0.8977 & 0.0005 & 0.0020 & -1.0147 \end{bmatrix}.$$

Calcul de  $\Omega$  et de  $\gamma$  : Enfin, observons que les LMI (2.39) et (2.40) admettent pour solution :

$$\Omega = 1.10^{-7} \begin{bmatrix} 0.43 & 0 & 0 \\ 0 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0 & 0.27 \end{bmatrix}, \quad \gamma = 1.10^{-6}.$$

Ceci prouve que l'hypothèse 2.2.2 est vérifiée avec  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^7$  et pour tout  $\theta_n \in \Theta$ , de telle sorte que le théorème 2.2.3 s'applique et donne une solution globale pour le modèle normalisé.

Ici, la valeur de  $\theta_n$  choisie est calculée à partir de la valeur nominale de la charge qui est de  $10 \Omega$ . Nous posons donc  $\theta_n = 1/10$  de sorte à avoir

$$x_{\theta_n}^* = [0.4 \quad 0.4 \quad 0.4 \quad 12]^\top,$$

obtenu à partir de (3.5). Nous discuterons également par la suite de son influence sur les dynamiques du système.

### Approche de stabilité locale

Dans ce cas, nous allons utiliser les mêmes vecteurs  $c_a$  et  $g_{j_a}$ , ( $j \in \mathcal{I}_6$ ) définis dans le paragraphe précédent pour le calcul des gains du contrôleur.

Calcul de  $P$ ,  $\lambda$  et de  $K$  : Cette étape est commune aux deux approches liées à la stabilité locale (quadratique et Lur'e). Ici, le choix du paramètre  $\delta$  est effectué de telle sorte à garantir que la condition initiale considérée appartienne au domaine d'attraction robuste. En effet, comme discuté dans le chapitre 2, une valeur trop grande entrainera une diminution de la taille de l'estimation du domaine d'attraction robuste. Ainsi, après avoir effectué quelques tests, nous avons choisi  $\delta = 0.23$  afin de résoudre le problème d'optimisation (2.66). On aboutit aux valeurs de  $P$  et de  $\lambda$  suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} 0.0106 & -0.0003 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0025 & -0.0001 & -0.0000 \\ -0.0003 & 0.0102 & -0.0000 & -0.0001 & -0.0001 & 0.0024 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0080 & 0.0011 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0056 \\ 0.0000 & -0.0001 & 0.0011 & 0.0031 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0014 \\ 0.0025 & -0.0001 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0012 & -0.0001 & -0.0000 \\ -0.0001 & 0.0024 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0001 & 0.0011 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0056 & 0.0014 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0059 \end{bmatrix}, \lambda = 91.35, \quad (3.23a)$$

ce qui via (2.7) implique que :

$$K = \begin{bmatrix} -0.4826 & 0.0114 & 0.0002 & -0.0001 & -0.1162 & 0.0053 & 0.0002 \\ 0.0114 & -0.4658 & 0.0005 & 0.0035 & 0.0053 & -0.1085 & 0.0016 \\ 0.0002 & 0.0005 & -0.3672 & -0.0488 & 0.0001 & 0.0002 & -0.2551 \end{bmatrix}. \quad (3.23b)$$

Calcul de  $\Omega$  et de  $\lambda$  : Le calcul de ces deux variables est nécessaire pour l'application de l'approche Lur'e. Ce calcul est effectué en résolvant le problème d'optimisation (2.68) paramétré par les paramètres de pondération :  $\beta_1$ ,  $\beta_{2i}$  et  $\beta_{3i}$ , ( $i \in \mathcal{I}_3$ ). Là également, des tests ont été effectués avec plusieurs jeux de données. Ces derniers nous ont conduit aux

### 3.3. Présentation des résultats

choix suivants :  $\beta_1 = 10$ ,  $\beta_{2i} = 10$  et  $\beta_{3i} = 1$ . Ce qui, via (2.68), aboutit à :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}, r = 0.01, \gamma = 0.0235. \quad (3.23c)$$

Ceci prouve que l'hypothèse 2.2.2 est vérifiée pour tout  $\theta_n \in \Theta$ , de telle sorte que le théorème 2.2.3 s'applique et donne une solution locale pour le modèle normalisé.

Pour l'approche locale, il nous faut assurer que la condition initiale  $\zeta_0 = [x_0^\top \ z_0^\top]^\top$  appartient au domaine d'attraction robuste du système. Puisque, l'approche de synthèse a été appliquée sur le modèle normalisé, cela revient donc à garantir, en se basant sur la relation (3.16) et sur la remarque 2.2.2, que  $\zeta_0$  doit vérifier la relation suivante :

$$T_\zeta^{-1}\zeta_0 \in \mathcal{G} = \bigcap_{\theta \in \Theta} \cup_{\zeta_{a,K}^* \in \Psi(K, \theta_n; \theta)} \Phi(\zeta_{a,K}^*, r), \quad (3.24)$$

pour un  $\theta_n$  donné avec  $\Phi(\zeta_{a,K}^*, r)$  défini comme dans (2.20),  $r$  donné dans (3.23c) pour l'approche Lur'e et  $r = 1$  pour l'approche quadratique (voir la remarque 2.3.6). Par souci de clarté, on rappelle que l'ensemble  $\Psi(K, \theta_n; \theta)$  s'écrit dans ce cas :

$$\Psi(K, \theta_n; \theta) = \left\{ \zeta_{a,K}^* : \exists u_{a,K}^* \in \mathbb{R}^m, \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_a(\theta)\zeta_{a,K}^* + \bar{B}_a u_{a,K}^* + h_a = \mathbf{0}_{n+p}, \\ K \left( \zeta_{a,K}^* - T_\zeta^{-1} \begin{bmatrix} x_{\theta_n}^* \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = \mathbf{0}_m \end{array} \right. \right\}, \quad (3.25)$$

avec  $K$  donné dans (3.23b). Cependant, rappelons que le système (3.2) admet un unique point d'équilibre vérifiant  $y = y_{\text{ref}}$  et donné par (3.5). Alors, le modèle normalisé associé à ce système (voir (3.8)) admet également un unique équilibre. D'autre part, la détermination de  $K$  permet de garantir que la matrice  $\bar{A}_a(\theta) + \bar{B}_a K$  est Hurwitz donc inversible. Dès lors, en utilisant ces deux dernières remarques, ainsi que le lemme 2.3.1, on en déduit que l'ensemble  $\Psi(K, \theta_n; \theta)$  contient un élément unique. Ainsi, dans ces conditions, la relation (3.24) devient :

$$T_\zeta^{-1}\zeta_0 \in \mathcal{G} = \bigcap_{\theta \in \Theta} \Phi(\zeta_{a,K}^*, r) \Leftrightarrow V(T_\zeta^{-1}\zeta_0 - \zeta_{a,K}^*) \leq r, \forall \theta \in \Theta. \quad (3.26)$$

*Remarque 3.3.1* (Procédure de vérification de la relation (3.26)). Nous allons présenter une procédure permettant, pour une condition initiale donnée, de tester la validité de la relation (3.26).

1. Choisir un vecteur  $\theta_n$  appartenant à  $\Theta$  et calculer le vecteur  $x_{\theta_n}^*$  correspondant. On pourra pour cela utiliser la relation (3.5) ;
2. Calculer  $\zeta_{a,K}^*$  à partir de (3.25) pour différentes valeurs de  $\theta \in \Theta$  ;
3. Calculer les valeurs de  $V(T_\zeta^{-1}\zeta_0 - \zeta_{a,K}^*)$  correspondantes. Un tracé de ces valeurs

en fonction de  $\theta$  permettra un choix plus astucieux des valeurs de  $\theta$  à considérer dans l'étape 2. Ce qui permettra, soit d'invalider (3.26) par la construction d'un contre-exemple, soit d'émettre une conjecture sur sa validité, qui sera relativement fiable puisque qu'il n'y a qu'un unique paramètre :  $\Theta \subset \mathbb{R}$ .

┘

À présent, en utilisant (3.23) et en choisissant  $\theta_n = 1/10$  comme pour le cas de l'approche globale, on montre que la relation (3.26) n'est assurée pour aucune des deux approches. Cependant en modifiant la valeur de  $\theta_n$ , il est possible de résoudre ce problème. Après quelques calculs, nous avons vu qu'en posant  $\theta_n = 1/9$  pour l'approche quadratique et  $\theta_n = 1/5$  pour l'approche Lur'e, la relation (3.26) est alors garantie pour chacune des deux approches.

Nous allons dans la sous-section suivante présenter les résultats de simulation obtenus pour chacune des approches.

### 3.3.2 Résultats de simulation

Les résultats de simulation présentés dans cette section sont obtenus à partir du modèle idéal (3.1). Ces simulations ont pour objectif de valider la synthèse de la loi de commande pour le modèle de commande. La robustesse de la loi de commande sera évaluée expérimentalement dans la section 3.3.3. Les résultats de simulation obtenus pour les approches de stabilité locale et globale sont représentés sur les figures 3.4, 3.5 et 3.6. Nous avons dans un premier temps fixé la valeur initiale de la charge à sa valeur nominale qui est égale à  $10 \Omega$ , puis nous avons appliqué une variation sur sa valeur à  $t = 3$  ms qui fait qu'elle passe à  $5 \Omega$ . Pour les deux valeurs de la charge, on observe que les trois approches parviennent à stabiliser le système vers le point d'équilibre désiré : la tension de sortie converge bien vers sa valeur de référence avec une erreur statique nulle et la distribution uniforme du courant entre les branches du convertisseur est bien assurée.

La figure 3.7 représente la trajectoire de la tension pour les trois approches considérées ici. Nous constatons que (i) l'approche de la stabilité globale présente la meilleure dynamique parmi les trois et (ii) l'approche de la stabilité locale quadratique donne une meilleure dynamique par rapport à celle basée sur la fonction de Lyapunov Lur'e. Nous allons par la suite tenter d'expliquer ces observations.

**Discussion sur le point (i)** Dans un premier temps, rappelons que les gains du contrôleur pour l'approche de stabilité globale sont synthétisés avec une valeur de  $\delta$  plus grande que celle utilisée pour les approches de stabilité locale et que ce paramètre  $\delta$  permet de modifier le taux de décroissance de la fonction de Lyapunov des approches. Évaluons, dès lors l'influence de sa valeur sur les dynamiques des trajectoires du système. Les tests seront effectués en utilisant l'approche de stabilité globale. La figure 3.8 représente

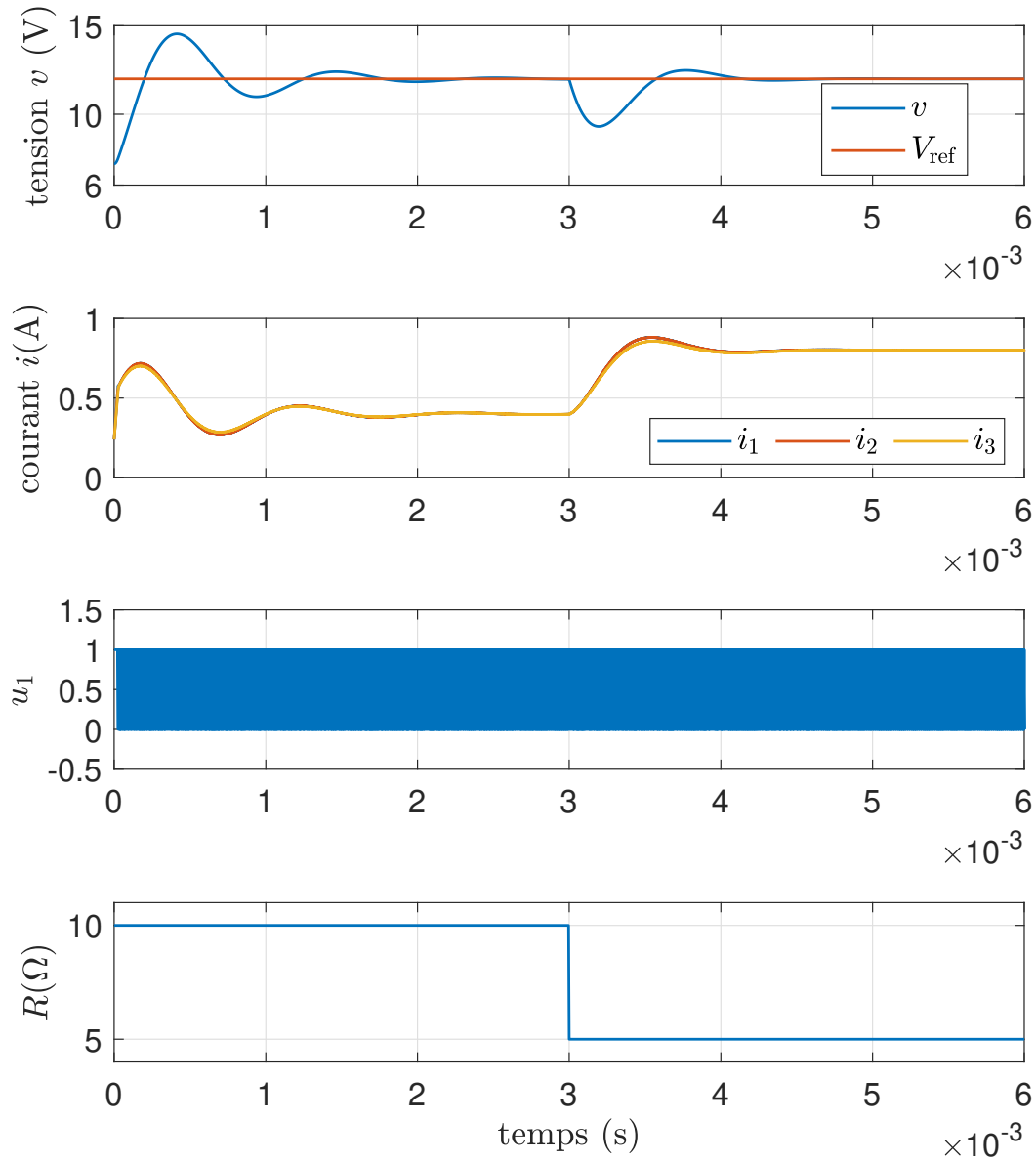


FIGURE 3.4 – Résultats de simulation : graphes de la tension, des courants, de la commande  $u_1$  et de la charge en fonction du temps pour l’approche locale quadratique

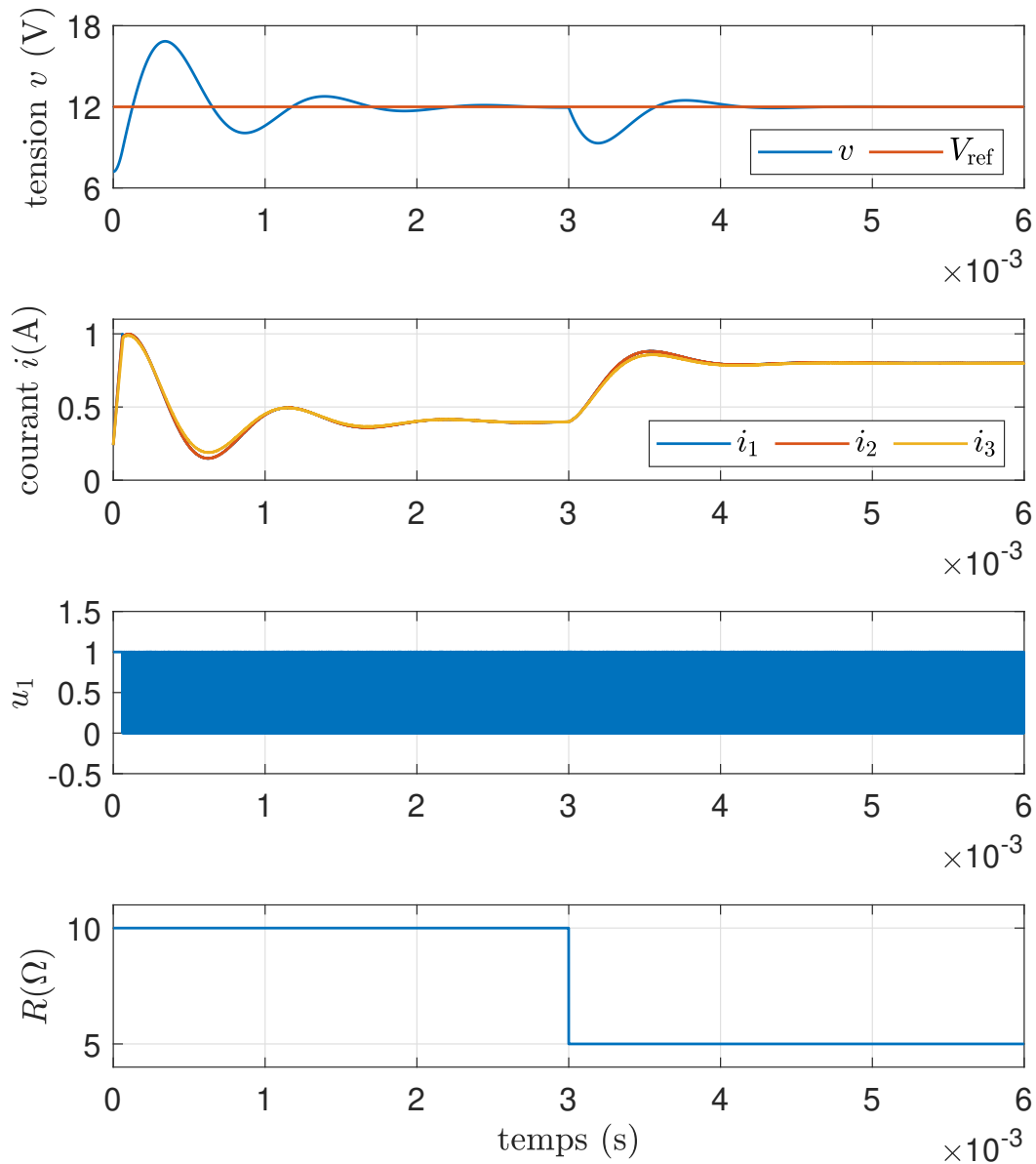


FIGURE 3.5 – Résultats de simulation : graphes de la tension, des courants, de la commande  $u_1$  et de la charge en fonction du temps pour l'approche locale Lur'e

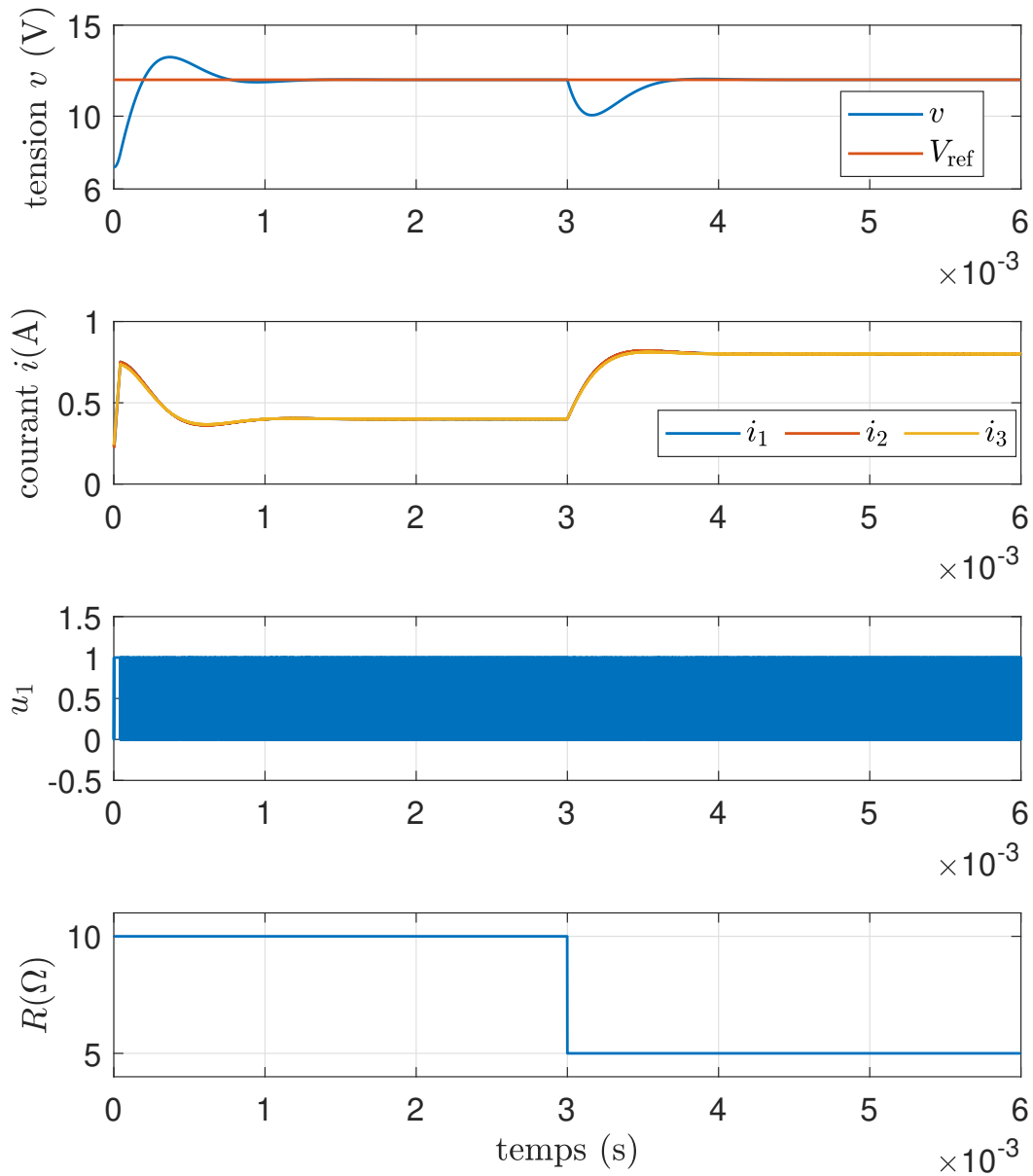


FIGURE 3.6 – Résultats de simulation : graphes de la tension, des courants, de la commande  $u_1$  et de la charge en fonction du temps pour l'approche globale

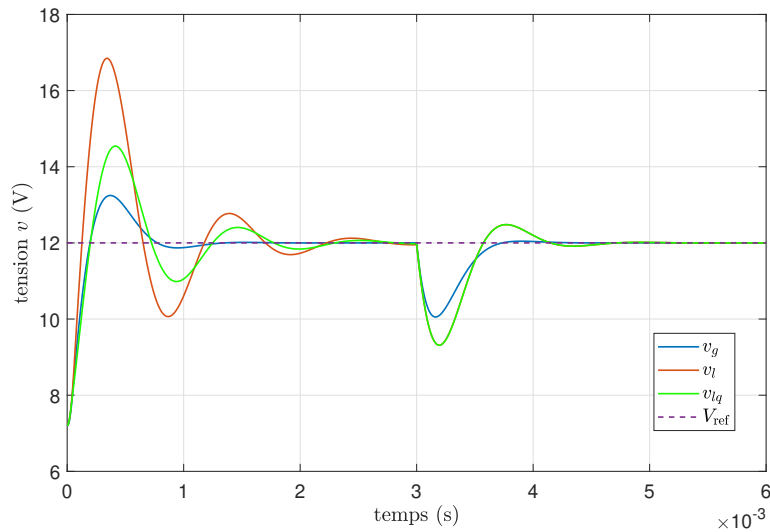


FIGURE 3.7 – Comparaison des graphes en simulation de la tension pour les approches locale et globale :  $v_{lq}$  représente la tension obtenue avec l'approche locale quadratique,  $v_l$  avec l'approche locale Lur'e, et  $v_g$  celle obtenue avec l'approche globale

le graphe de la tension obtenu pour différentes valeurs de  $\delta$  et pour  $\theta_n = 1/10$ . Les

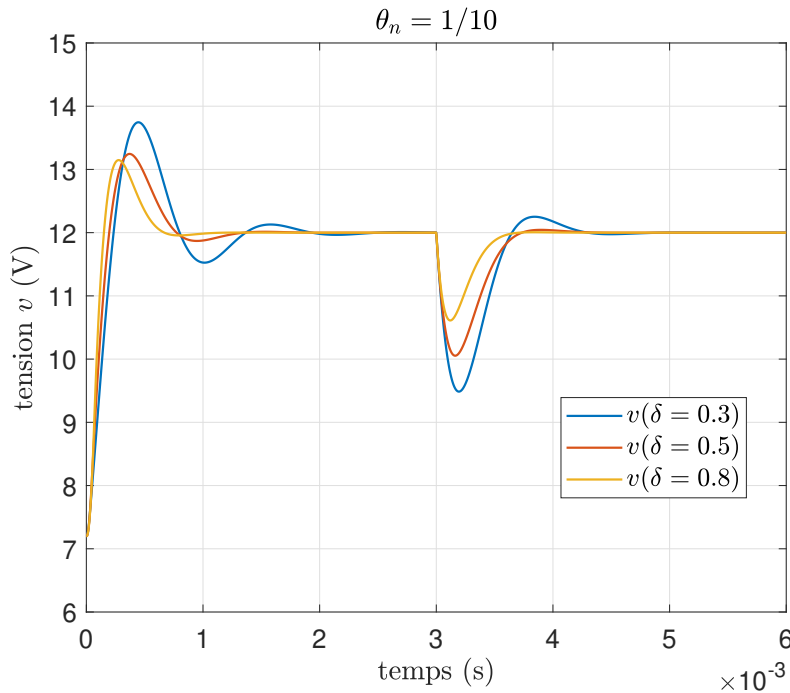


FIGURE 3.8 – Graphe de la tension en fonction du temps pour l'approche de stabilité globale avec différentes valeurs de  $\delta$  et pour  $\theta_n = 1/10$  : à  $t = 3\text{ms}$  la valeur de la charge passe  $10 \Omega$  à  $5 \Omega$

résultats obtenus nous permettent d'émettre une conjecture selon laquelle l'augmentation du paramètre  $\delta$  entraînerait une amélioration de la dynamique. En revanche, nous avons

constaté que le problème d'optimisation n'admettait pas de solution pour des valeurs élevées de  $\delta$ . Ce qui nous permet donc pas de valider cette conjecture de manière globale mais uniquement sur une plage de valeurs de  $\delta$ . Néanmoins, son influence sur la dynamique du système reste indéniable. Ce qui peut expliquer la différence notée sur les résultats obtenus. À noter que l'approche de stabilité globale fournit plus de flexibilité concernant le choix de  $\delta$  car, dans ce cas, on doit juste s'assurer que les inégalités matricielles (2.39) et (2.40) admettent une solution. Alors que pour l'approche de stabilité locale, ce choix doit également tenir compte de la taille de l'estimation du domaine d'attraction recherché.

**Discussion sur le point (ii)** Cette observation semble contre-intuitive dans la mesure où la commande par construction d'une fonction de Lyapunov de Lur'e possède plus de paramètres que son homologue utilisant une fonction quadratique. Nous émettons la conjecture que le choix de  $\theta_n$  a un rôle déterminant dans la supériorité de la seconde sur la première. Plus précisément, le fait que  $\theta_n$  soit proche de  $\theta$  semble ici jouer un rôle plus important que le nombre de degrés de liberté offert par le choix de la fonction de Lyapunov en boucle fermée. Rappelons que nous avons choisi  $\theta_n = 1/9$  pour l'approche quadratique et  $\theta_n = 1/5$  pour l'approche Lur'e pour une valeur réelle de  $\theta = 1/10$ . Ainsi, nous allons choisir la même valeur de  $\theta_n$  pour les deux approches afin de les comparer. En sélectionnant  $\theta_n = 1/5$  pour l'approche quadratique, on montre que la condition (3.26) est vérifiée pour la condition initiale considérée ici, ce qui permet son application. Les résultats de simulation obtenus sont représentés sur la figure 3.9, où on trace le graphe de la tension pour les deux approches de stabilité locale. Nous remarquons, que les dynamiques de tension deviennent, dans ce cas, identiques avec de fortes ondulations de la tension. Ces résultats montrent donc qu'il est convenable de choisir, si possible, une valeur de  $\theta_n$  proche de la valeur réelle afin d'améliorer la dynamique du système en asservissement.

*Remarque 3.3.2.* Le fait que les courbes représentées sur la figure 3.9 soient identiques peut s'expliquer en considérant l'expression de la commande donnée par (3.19). En effet, remarquons que lorsque  $\phi_{c_a}(K\tilde{\zeta}_a) = \mathbf{0}$ , c'est-à-dire, par définition de la fonction  $\phi_{c_a}$ , lorsque  $K\tilde{\zeta}_a \in \mathcal{P}(c_a)$ , alors la commande pour les deux approches de stabilité locale sont identiques. Les résultats de simulation obtenus prouvent que cette relation est bien vérifiée tout au long de l'expérience présentée ici. Ce qui permet, ainsi, d'expliquer cette observation. ┘

Finalement, par rapport à ces résultats, nous allons dans la partie pratique, uniquement implémenter l'approche de stabilité locale quadratique et l'approche de stabilité globale.

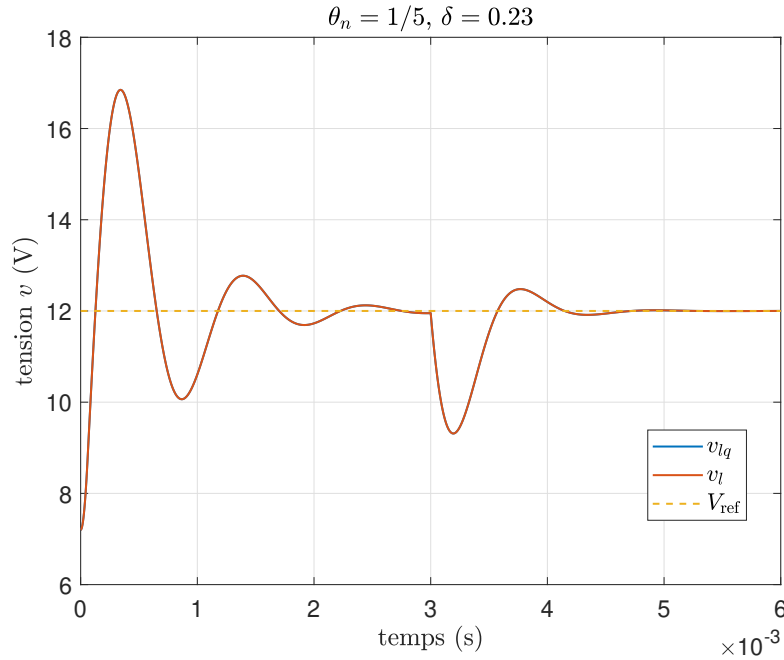


FIGURE 3.9 – Graphe de la tension en fonction du temps pour les approches de stabilité locale quadratique et Lur'e avec  $\delta = 0.23$  et pour  $\theta_n = 1/5$  :  $v_{lq}$  représente la tension obtenue avec l'approche locale quadratique et  $v_l$  avec l'approche locale Lur'e (à  $t = 3\text{ms}$  la valeur de la charge passe  $10\ \Omega$  à  $5\ \Omega$ )

### 3.3.3 Résultats expérimentaux

#### Présentation des équipements

Le banc d'essai utilisé pour les tests expérimentaux est représenté sur la figure 3.10. Il est composé de 3 convertisseurs Buck ( $m = 3$ ) hétérogènes dans le sens où les inductances et les transistors sont différents. Tous les transistors sont des MOSFET dont les références sont : STP315N10F7, STP30NF10 et STP40NF10.

Le banc dispose également d'une MicrolabBox qui est un équipement dSpace permettant un prototypage rapide de la commande. Il est équipé d'un Processeur Temps Réel (PRT) capable de communiquer avec un FPGA programmable par l'utilisateur et aussi avec plusieurs entrées/sorties (analogiques ou numériques). Le temps de conversion des CAN est égal à  $1.10^{-6}\text{s}$ . Le PRT (NXP QorIQ P5020, dual-core 2GHz) fournit une interface homme-machine et délivre les valeurs numériques des consignes au FPGA (Xilinx® Kintex®-7 XC7K325T FPGA) où la loi de commande est mise en œuvre. L'horloge du FPGA a une période de  $T_H = 1.10^{-8}\text{s}$ .

À noter que les mesures de courant sont ici obtenues grâce à des capteurs LEM dont la référence est LA 55-P et les mesures de tension sont effectuées par le biais d'un circuit de mise à l'échelle afin de s'adapter aux plages de tension des entrées analogiques de la MicrolabBox. Comme discuté dans le chapitre 1, pour l'approche à relais, la fréquence des

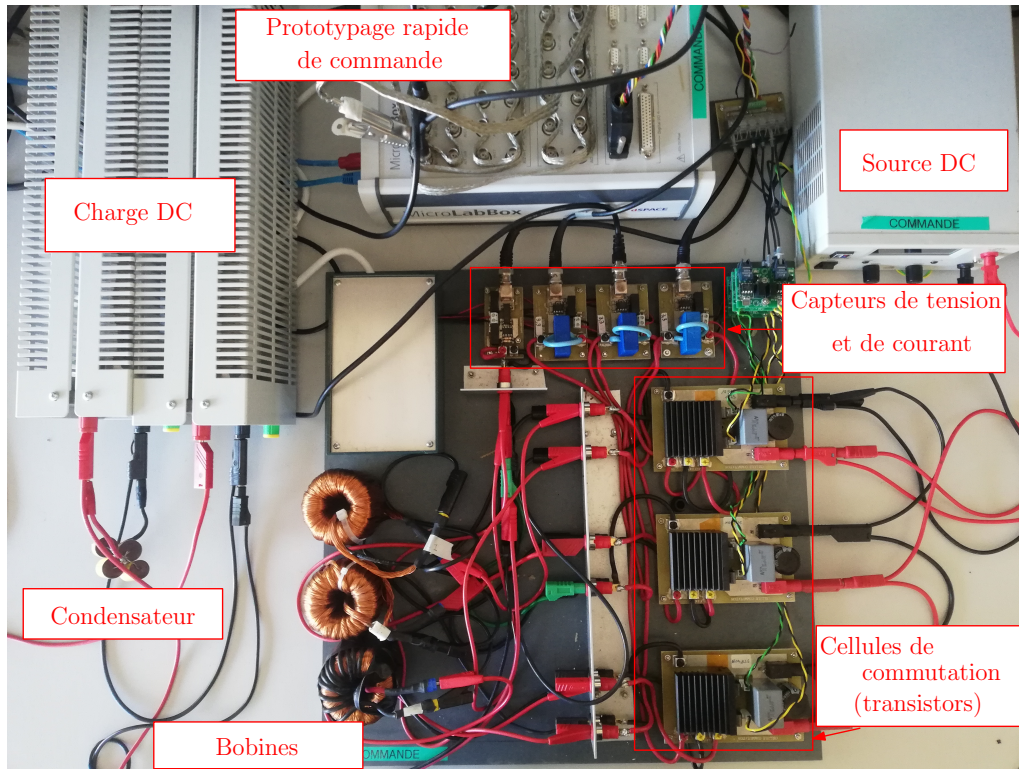


FIGURE 3.10 – Banc d'essai expérimental

mesures est égale à la fréquence d'actualisation de la commande.

#### Procédure de compilation

L'implémentation du FPGA est réalisée à l'aide de l'outil Xilinx System Generator (XSG). Il permet l'utilisation de l'environnement de travail de Matlab/Simulink afin de programmer le FPGA. La figure 3.11 représente la procédure de compilation pour une application donnée ([OM03]; [GGB18]; [Xil]).

Après avoir défini l'algorithme de commande, la prochaine étape consiste en sa mise en œuvre sous forme de schéma bloc sur Simulink. Pour cela XSG dispose de sa propre bibliothèque nommée Xilinx Blockset directement accessible depuis la librairie de Simulink (voir figure 3.12). Près de 130 blocs ([Xil]) sont disponibles dans cette bibliothèque pour aider à la construction de l'algorithme de commande. À noter qu'il existe, parmi ces blocs, des blocs qui permettent l'interfaçage entre les éléments de Simulink et ceux du Xilinx Blockset. Il est alors possible d'effectuer des simulations afin de valider la conception dans un premier temps, avant de passer à son implémentation en temps réel par la suite.

En outre, le schéma bloc nécessite la présence du bloc 'System Generator' (voir bloc rouge sur la figure 3.12). Ce dernier n'est pas connecté au schéma mais permet sa compilation dans le but de générer directement le code VHDL correspondant à l'algorithme de commande, mais également le Bitstream nécessaire à son implémentation dans le FPGA.

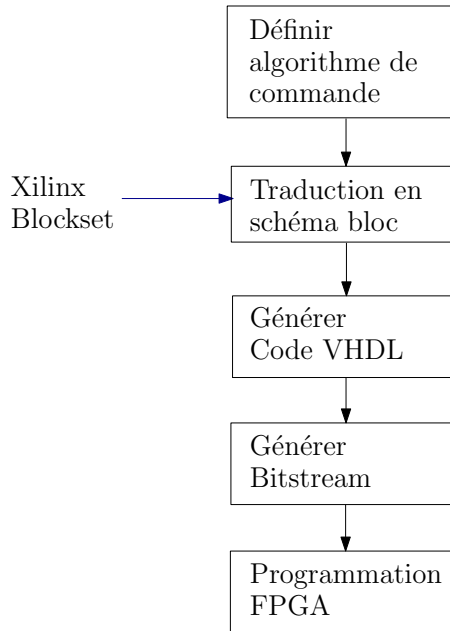


FIGURE 3.11 – Procédure d'implémentation du FPGA avec Xilinx System Generator

Le temps de compilation requis est proportionnel à la complexité de l'algorithme défini.

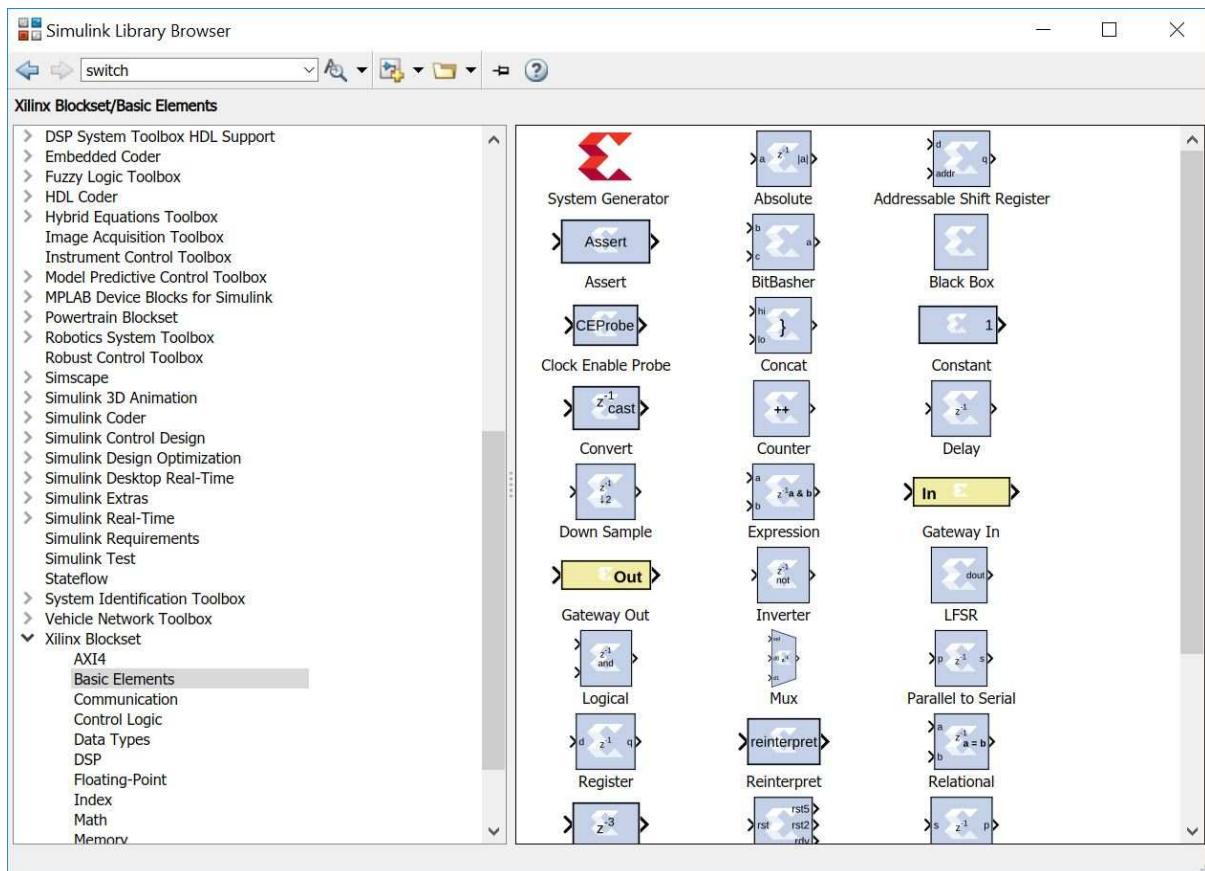


FIGURE 3.12 – Xilinx Blockset

### Synchronisation des mesures des grandeurs électriques

La synthèse de la commande se base sur une disponibilité de l'état du système, à savoir les mesures des courants et de la tension. A l'inverse de la simulation où l'acquisition de ces mesures se fait sans contraintes liées à des phénomènes non modélisés, la partie pratique nécessite de prendre en compte les instants de commutation de la commande. En effet comme expliqué dans le chapitre 1, la commutation de la commande entraîne une ouverture brusque de l'interrupteur commandé. Dès lors on assiste à des phénomènes transitoires entraînant des pics de courant dans la bobine. Il est donc nécessaire de synchroniser les acquisitions des mesures avec les commutations de la commande. Pour cette raison, les échantillons de mesure doivent être décalés de sorte à ce que les mesures soient effectuées entre deux instants de commutation. La solution proposée ici, est de mettre en œuvre un compteur numérique, implémenté avec le pas de l'horloge du FPGA qui est de 10ns (voir figure 3.13), qui permettra d'assurer un intervalle de temps constant entre les instants de commutation et les mesures. Compte tenu du temps de conversion des

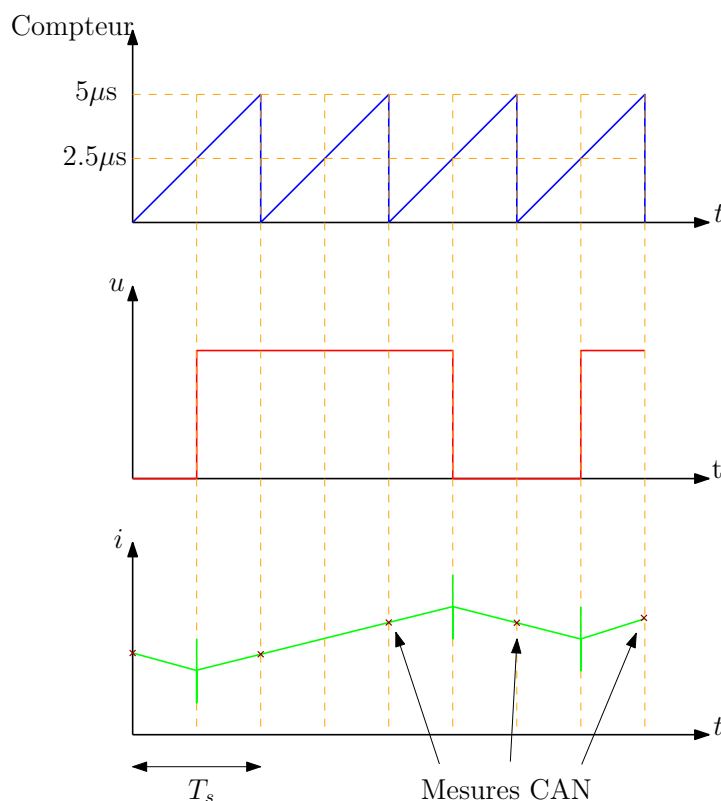


FIGURE 3.13 – Synchronisation des mesures du Convertisseur Analogique-Numérique (CAN)

mesures et du temps de calcul de l'algorithme de commande, nous avons fixé une période pour le compteur égal à  $T_s = 5 \cdot 10^{-6}$ s pour les tests. Dans un premier temps, on utilise le signal issu du compteur afin d'enclencher la prise de mesure des grandeurs électriques. Par la suite, grâce à la période de l'horloge du FPGA égal à 10 ns, ce signal est décalé

de la moitié de  $T_s$  soit  $2.5 \cdot 10^{-6}$ s. Ce signal retardé, servira alors d'enclenchement pour l'actualisation de la commande. À noter que la période du compteur coïncide, ici, avec la période d'actualisation de la commande et celle des mesures des grandeurs électriques.

### Implémentation de la commande

La figure 3.14 montre les différentes étapes de la mise en œuvre de la commande. *Remarque 3.3.3.* Notons que la synthèse de la commande a été effectuée en temps continu alors que son implémentation se fera en temps discret. Cependant, la puissance de calcul de la MicrolabBox utilisée pour implémenter la commande nous permet de pouvoir supposer le fonctionnement du système en continu. D'une part parce qu'elle nous permet de choisir une période d'échantillonnage relativement faible afin d'assurer une bonne précision concernant la discrétisation des dynamiques continues et d'autre part, car elle nous permet d'avoir des fréquences de commutation de la commande très élevées et d'être au plus proche d'un fonctionnement en continu. ┘

Dans un premier temps, les grandeurs électriques, à savoir les courants dans les branches des convertisseurs et la tension de sortie, sont mesurées puis converties en signaux numériques à l'aide de CAN (voir figure 3.14).

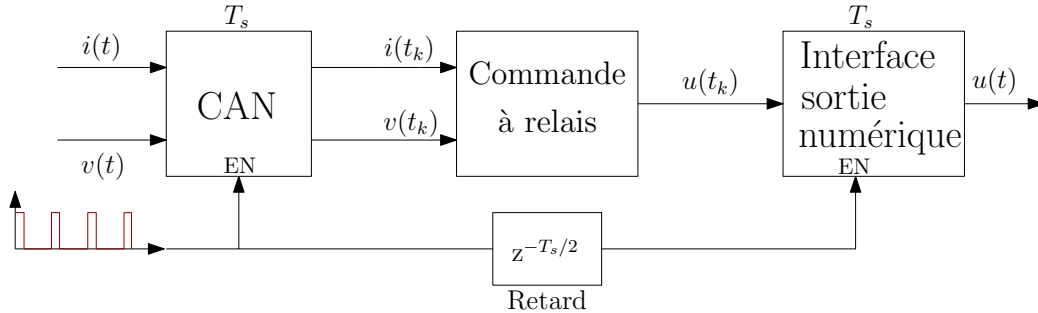


FIGURE 3.14 – Schéma bloc de la mise en œuvre de la loi de commande

Ces signaux seront utilisés afin de calculer la loi de commande en suivant la procédure suivante :

1. Implémenter l'état augmenté  $z(t_{k+1})$  défini tel que  $z(t_{k+1}) = z(t_k) + T_s(y - y_{ref})$  ;
2. Calculer la commande pour le système normalisé :

$$u_a(t_k) \in \arg \min_{v \in \mathcal{U}_a} \left( \gamma T_\zeta^{-1} \begin{bmatrix} x(t_k) - x_{\theta_n}^* \\ z(t_k) \end{bmatrix}^\top P - \phi_{c_a}^\top \left( K T_\zeta^{-1} \begin{bmatrix} x(t_k) - x_{\theta_n}^* \\ z(t_k) \end{bmatrix} \right) \Omega K \right) \begin{bmatrix} B_a \\ \mathbf{0}_{p \times p} \end{bmatrix} v.$$

À noter que pour l'approche locale quadratique, il suffit d'imposer  $\Omega = \mathbf{0}$  et  $\gamma = 1$  dans la relation précédente ;

3. Dé-normaliser les gains de la commande :  $u(t_k) = T_u u_a(t_k)$ .

Une fois ces trois étapes réalisées, la commande  $u(t_k)$  passe par l'interface de sortie numérique afin d'être appliquée au processus réel. Ici, tous les signaux sont échantillonnés à la période  $T_s = t_{k+1} - t_k$  et le bloc "Retard" introduit sur la figure 3.14 permet d'illustrer la méthodologie de synchronisation des mesures présentée précédemment.

Par souci de clarté, la figure 3.15 représente les différentes fréquences mises en jeu dans l'implémentation.

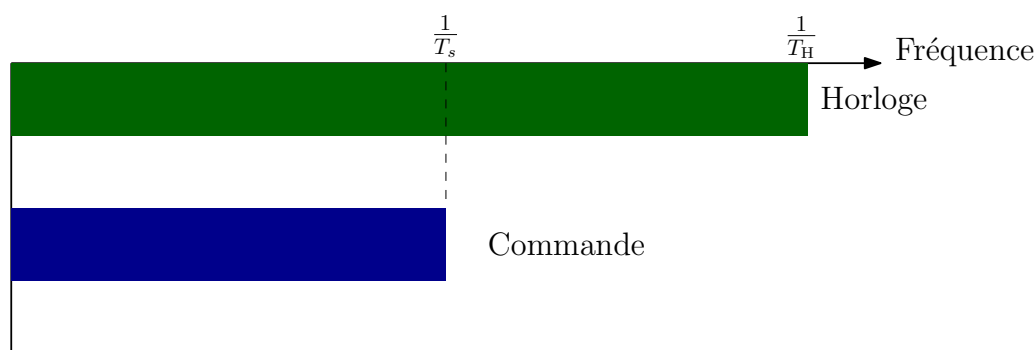


FIGURE 3.15 – Illustration des différentes fréquences mises en jeu dans l'implémentation de la commande

### Comportement du système en boucle fermée

Les résultats expérimentaux obtenus en appliquant les approches de stabilité globale et locale (quadratique) proposées ici sont représentés respectivement par les figures 3.16 et 3.17. De plus on représente sur les figures 3.18 et 3.19 un zoom du signal de commande lors de l'asservissement et la régulation de la tension pour l'approche de stabilité globale. On remarque que ces résultats concordent bien avec ceux obtenus en simulation. Les deux approches parviennent à assurer une régulation robuste de la tension vers sa référence pour les deux valeurs de la charge avec une meilleure dynamique de la tension obtenue pour l'approche globale (comme illustrée sur la figure 3.20). En effet, on remarque un meilleur temps de réponse mais également une chute de tension plus petite lors de l'application de l'échelon de charge pour l'approche de stabilité globale. Comme discuté précédemment, cette différence est liée au calcul des gains du contrôleur pour chaque approche. D'autre part, on remarque que la répartition uniforme des courants entre les différentes branches des convertisseurs est bien garantie. L'objectif de commande est donc assuré malgré la présence des phénomènes non modélisés dans le modèle de commande tels que les résistances parasites par exemple. Ceci prouve bien l'efficacité de notre approche de synthèse de commande en pratique et de la stratégie de prise de mesure présentée précédemment et qui est capable de prendre en compte les fréquences variables de la commande qui se manifestent le plus souvent en régime transitoire (voir figures 3.18 et 3.19).

Notons que, comme pour la plupart des approches de stabilité asymptotique pré-

sentées dans la littérature ([BS04]; [Dea+10]; [Tro+12]; [HFF15]; [Ben+19]), notre méthodologie se base sur l'hypothèse idéale que les fréquences de commutation infinies sont possibles et que tous les composants liés à la mise en œuvre de la commande sont parfaits. Ces hypothèses ne peuvent, cependant, être garanties en pratique. Néanmoins, avec une fréquence de commutation très élevée de la commande en régime permanent, les trajectoires du système sont maintenues très près du point d'équilibre désiré.

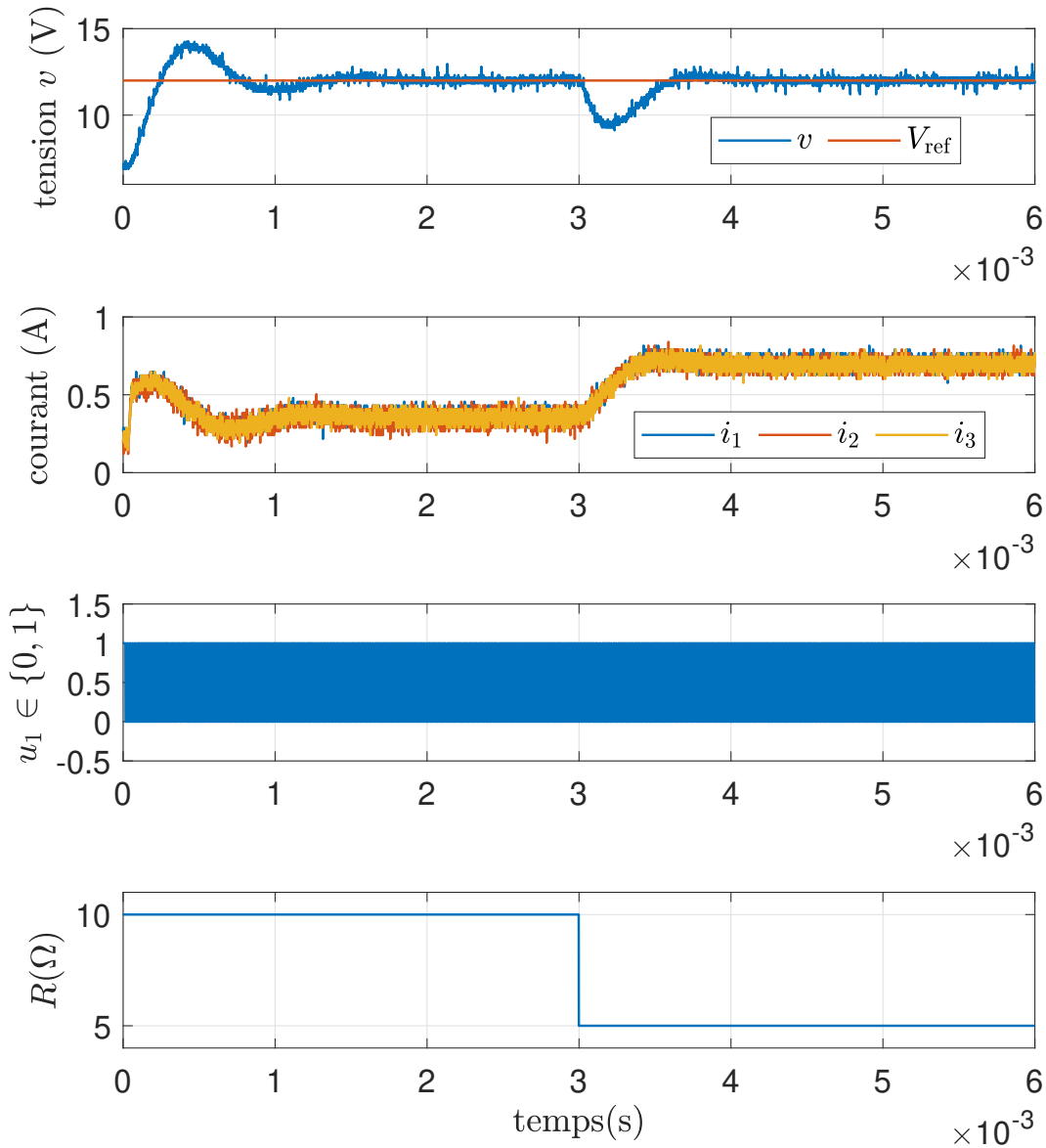


FIGURE 3.16 – Résultats expérimentaux : graphes de la tension, du courant, de la commande et de la charge en fonction du temps pour l'approche locale

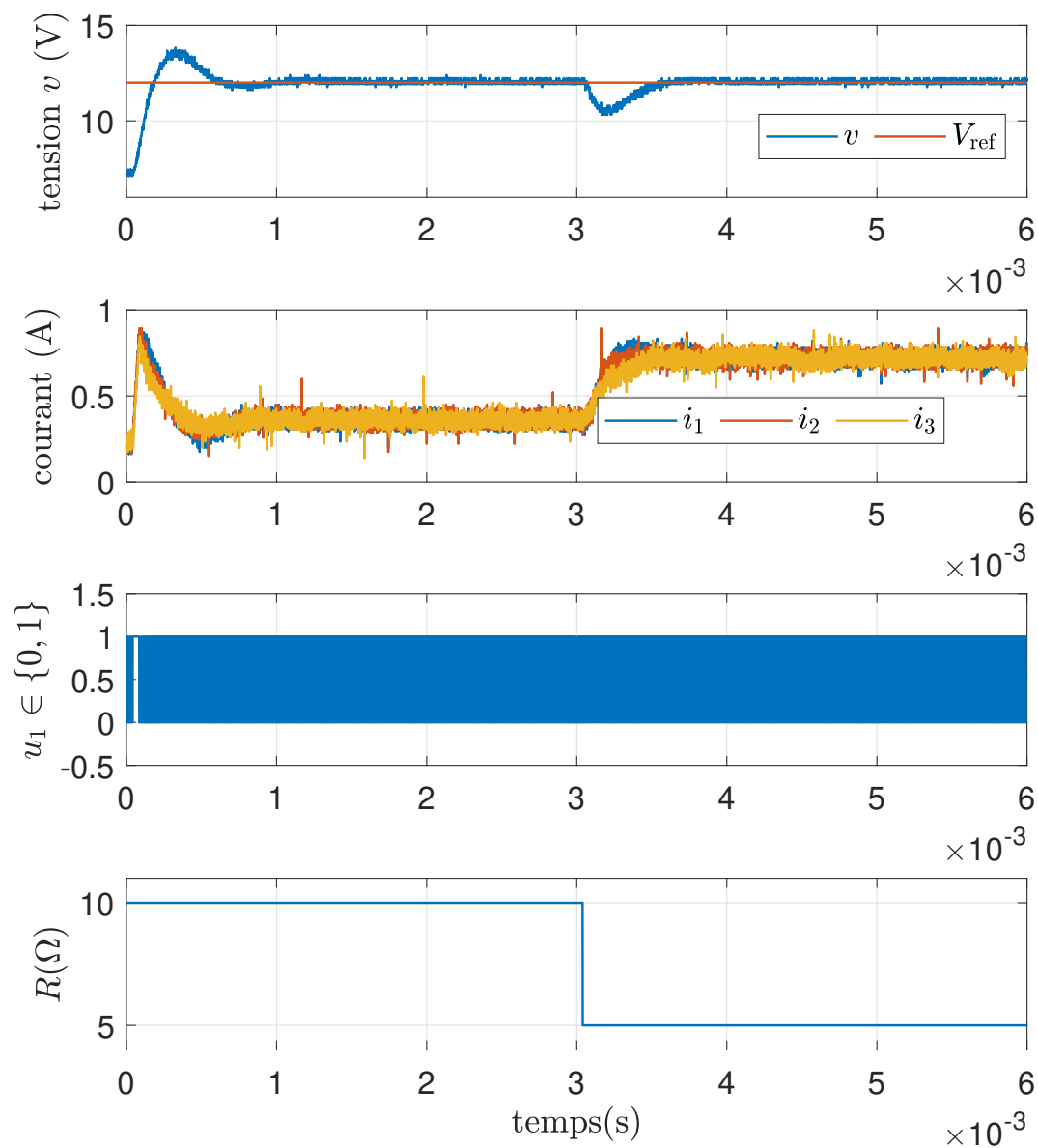


FIGURE 3.17 – Résultats expérimentaux : graphes de la tension, du courant, de la commande et de la charge en fonction du temps pour l'approche globale

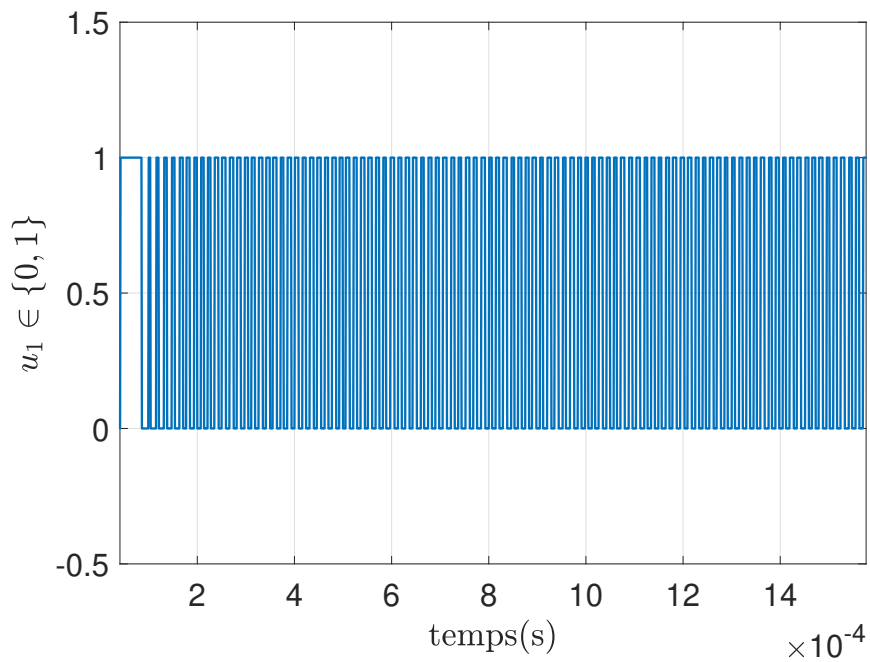


FIGURE 3.18 – Zoom de la commande  $u_1$  pour l'asservissement de la tension en utilisant l'approche de la stabilité globale

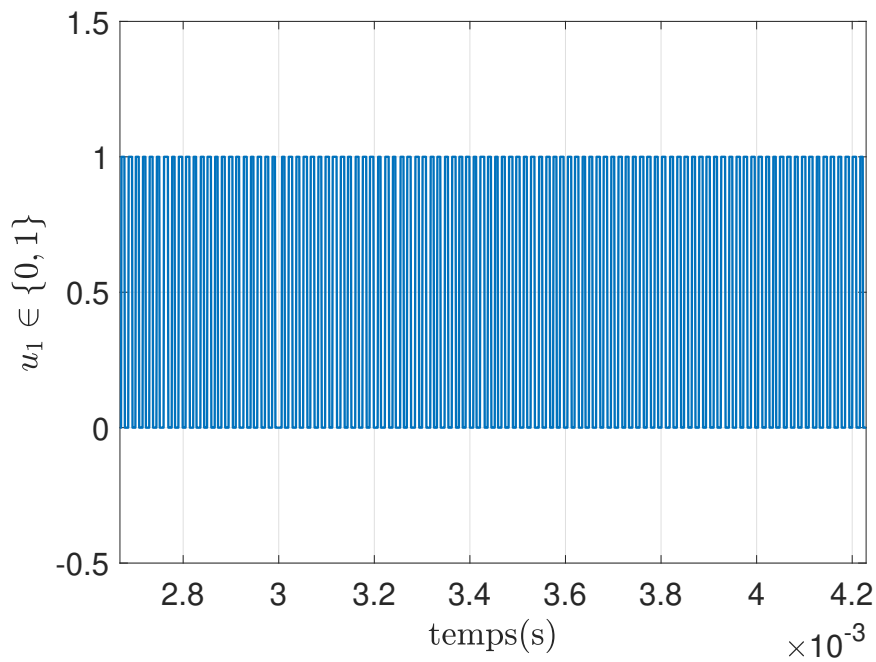


FIGURE 3.19 – Zoom de la commande  $u_1$  après application de l'échelon de charge pour l'approche de la stabilité globale

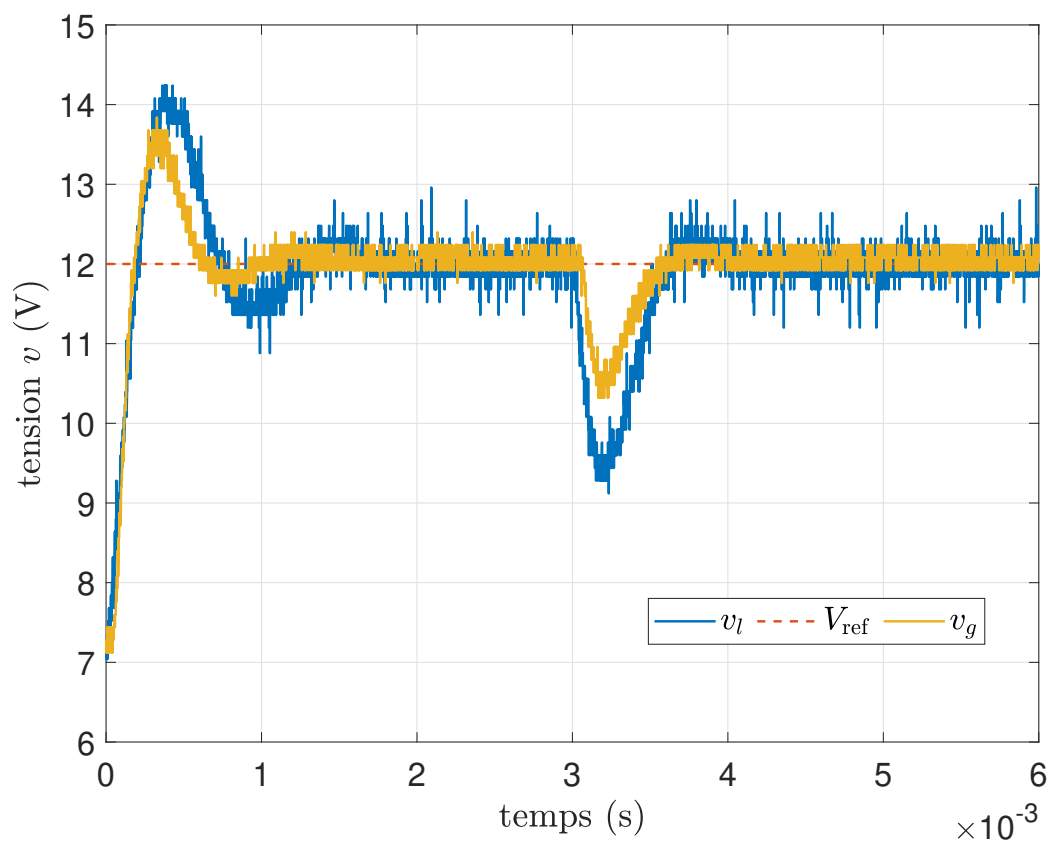


FIGURE 3.20 – Comparaison des graphes expérimentaux de la tension pour les approches locale et globale :  $v_l$  représente la tension obtenue avec l’approche locale et  $v_g$  celle obtenue avec l’approche globale

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de la synthèse de commande robuste à relais pour un système composé de plusieurs convertisseurs Buck en parallèle alimentant une charge résistive. La valeur de cette charge est considérée comme étant inconnue mais appartenant à un ensemble convexe qui est connu. L'objectif de la commande était d'assurer une régulation de la tension de sortie vers une référence fixe et constante mais également de garantir une répartition uniforme des courants entre les branches du convertisseur. Afin d'atteindre ces objectifs, la méthodologie présentée dans le chapitre 2 a été appliquée. Cependant, dans un premier temps, il nous fallait traiter le problème du conditionnement du modèle pour le cas des convertisseurs dus aux faibles valeurs des inductances et de la capacité. La solution proposée repose sur la définition d'un changement de variables qui a permis d'améliorer considérablement le conditionnement numérique du modèle. Ce changement de variables concerne à la fois les variables de temps, d'état et d'entrée. On aboutit dans ce cas à un modèle normalisé sur lequel on a appliqué les approches de synthèse globale et locale présentées dans le chapitre 2, puis nous avons montré la procédure à suivre pour la dé-normalisation afin de retrouver les unités physiques de départ. Les résultats de simulation incluant toutes ces étapes, permettent de montrer l'efficacité de nos approches. En effet, les deux stratégies permettent d'atteindre les objectifs de commande fixés.

Par la suite, nous nous sommes intéressés à la mise en œuvre pratique de la commande à relais sur un système composé de  $m = 3$  convertisseurs Buck hétérogènes dans le sens où les inductances et les transistors sont différents. Pour cela, nous disposons d'une MicrolabBox qui est un équipement dSpace permettant le prototypage rapide de commande grâce notamment à la présence d'un FPGA programmable qui possède un pas d'horloge de 10 ns. Ceci dans le but de représenter au mieux la commande à relais en pratique. Cependant, un problème majeur concernant l'implémentation de la commande à relais est la prise de mesures des grandeurs électriques. En effet, la fréquence de commutation n'étant pas constante, il nous fallait définir une stratégie permettant d'éviter la prise de mesures lorsque la commande change d'état. Ceci a pu être réalisé en fixant une période minimale de commutation pour la commande et en implémentant un compteur qui permet d'assurer un intervalle de temps constant entre les mesures et les instants de commutation.

Finalement, les résultats expérimentaux obtenus en adoptant cette stratégie ont été présentés. Ces derniers concordent bien avec ceux déjà obtenus en simulation. Ce qui permet de conclure une fois de plus sur l'efficacité des méthodologies présentées.

Nous allons, à présent, dans le chapitre suivant faire une comparaison pratique entre la commande à relais et la commande basée sur l'approche MLI.

# Chapitre 4

## Comparaison de l'approche à relais avec une approche basée sur le modèle moyen

### Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>62</b>
<b>3.1 Reformulation du système à étudier</b> . . . . .	<b>62</b>
<b>3.2 Synthèse de la commande robuste à relais</b> . . . . .	<b>64</b>
3.2.1 Amélioration du conditionnement numérique des matrices . . . . .	65
3.2.2 Procédure de synthèse de la commande . . . . .	68
<b>3.3 Présentation des résultats</b> . . . . .	<b>70</b>
3.3.1 Synthèse des gains du contrôleur . . . . .	71
3.3.2 Résultats de simulation . . . . .	74
3.3.3 Résultats expérimentaux . . . . .	80
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>90</b>

---

## Introduction

Le chapitre précédent nous a permis de valider expérimentalement la synthèse de commande robuste à relais proposée dans cette thèse. Cette étude, réalisée sur  $m$  convertisseurs Buck en parallèle, a donné de bons résultats en présence d'incertitudes. Il semble ainsi intéressant de comparer cette méthodologie avec des approches plus classiques de la littérature. En effet, les convertisseurs sont généralement pilotés par des lois de commandes continues, synthétisées à partir d'une modélisation basée sur un modèle moyen (détaillé dans la section 1.1.2). Cette commande continue est convertie en signal tout ou rien en utilisant le principe de la MLI (présenté section 1.1.3). Nous proposons dans cette section de comparer l'approche à relais avec ce type de loi de commande. Cette comparaison a été très peu abordée dans la littérature.

L'étude de cette comparaison sera illustrée pour un unique convertisseur Buck ( $m = 1$ ) alimentant une charge résistive dont la valeur est inconnue mais appartient à un ensemble convexe connu. Considérer un seul convertisseur permet de faciliter la comparaison sans pour autant remettre en cause sa validité. En effet, considérer plusieurs convertisseurs rendrait la comparaison plus complexe. Par exemple la mise en parallèle de convertisseurs peut impacter l'ondulation du courant total dans la charge, notamment en utilisant des stratégies d'entrelacement [CP+11], ce point ne sera pas abordé ici.

Ce chapitre est divisé en deux sections :

- La première section est dédiée à la description du système considéré. Ensuite, la synthèse des lois de commande pour les deux approches sera détaillée. Enfin, un cadre de comparaisons sera proposé. Il repose sur des critères de performance de la réponse du système mais également sur la charge de calcul.
- La seconde section permettra de mettre en exergue les avantages et inconvénients de chacune des approches. Les résultats seront illustrés à partir d'expérimentations réalisées sur le convertisseur Buck.

## 4.1 Synthèse de la commande

### 4.1.1 Système considéré

Le schéma électrique du système considéré pour la comparaison est rappelé sur la figure 4.1, il s'agit d'un convertisseur Buck alimentant une charge résistive.

Pour ce système, l'objectif de commande est d'assurer une régulation de la tension de sortie du convertisseur vers une valeur de référence  $V_{\text{ref}}$  fixée au préalable. Cette régulation doit être garantie en dépit des incertitudes liées à la valeur de la charge. Ici encore, on suppose que la charge est inconnue mais appartient à un ensemble convexe connu. La synthèse de commande est effectuée sans la prise en compte des résistances parasites des

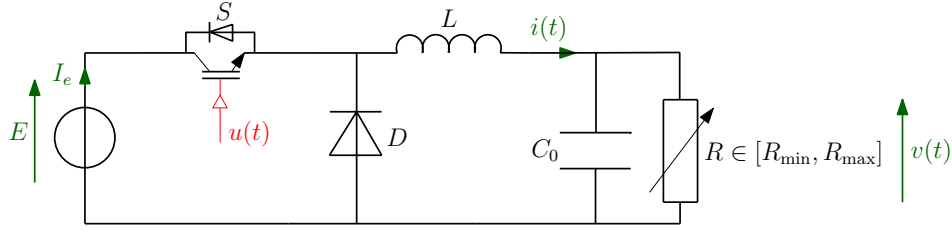


FIGURE 4.1 – Schéma électrique d'un convertisseur Buck

différents composants électroniques. Sous ces hypothèses, le modèle de commande à relais du système, initialement proposé dans (3.2) pour le cas où  $m > 1$ , est rappelé ici en posant  $m = 1$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (4.1)$$

avec

$$x := \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}, \theta := \frac{1}{R}, \Theta := [1/R_{\max}, 1/R_{\min}], A(\theta) := \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C_0} & -\frac{1}{C_0} \end{bmatrix}, B := \begin{bmatrix} E \\ L \\ 0 \end{bmatrix}, C := [0 \quad 1]. \quad (4.2)$$

La commande  $u$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\mathcal{U}$  défini par

$$\mathcal{U} := \{0, 1\}.$$

À noter que les paramètres  $R_{\min}$  et  $R_{\max}$  sont des réels strictement positifs.

Comme décrit dans (1.13), la représentation d'état du convertisseur Buck en considérant le modèle moyen est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_{\text{moy}} = A(\theta)x_{\text{moy}} + Bu_{\text{moy}}, \\ y_{\text{moy}} = Cx_{\text{moy}}, \end{cases} \quad (4.3)$$

avec

$$x_{\text{moy}} := \begin{bmatrix} i_{\text{moy}} \\ v_{\text{moy}} \end{bmatrix},$$

et  $A(\theta)$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $\theta$  et  $\Theta$  définis comme dans (4.2). La commande  $u_{\text{moy}}$  vérifie la relation suivante :

$$u_{\text{moy}} \in [0, 1].$$

Rappelons qu'il correspond au rapport cyclique  $d$  défini dans l'équation (1.15).

Les paramètres du convertisseur Buck considéré, sont donnés dans le tableau 4.1.

TABLEAU 4.1 – Paramètres du convertisseur Buck

Paramètres	Valeurs
$[R_{\min}, R_{\max}]$	$[5, 10] \Omega$
$E$	$24 V$
$C_0$	$40 \mu F$
$L$	$1.3 mH$

### 4.1.2 Synthèse des lois de commande

Pour l'approche de commande à relais, étant donné que la valeur de la charge est strictement positive, notons que la matrice d'état du système (4.1) ne possède pas de valeurs propres à parties réelles strictement positives, motivant ainsi l'utilisation de l'approche de stabilité globale pour le cas linéaire incertain présentée dans le chapitre 2.

Concernant l'approche utilisant la MLI, elle se base sur la synthèse d'une commande continue  $u_{\text{moy}}$ . La méthode de synthèse la plus classique est de concevoir une commande par retour de sortie type correcteur PID, qui assure une régulation de la tension sans mesurer le courant. Afin de mieux comparer avec la commande à relais développée dans le chapitre 2 qui est fondée sur l'existence d'une commande par retour d'état (voir l'hypothèse 2.2.2), nous adoptons également la commande par retour d'état pour l'approche utilisant la MLI. Par ailleurs, on remarque que le système (4.3) a les mêmes matrices  $A(\theta)$ ,  $B$  et  $C$  que le système (4.1). Il vérifie donc les conditions pour pouvoir utiliser la méthode de synthèse de stabilité globale présentée dans le chapitre 2, à l'exception que la commande obtenue est un retour d'état continu stabilisant  $u_{\text{moy}}$ . En effet, le système modélisé par (4.3) vérifie les hypothèses 2.1.1, 2.3.1 et 2.3.2 et admet un unique équilibre vérifiant  $v = V_{\text{ref}}$  défini par :

$$(x_{\theta}^*, u_{\theta}^*) = \left( \begin{bmatrix} \theta V_{\text{ref}} \\ V_{\text{ref}} \end{bmatrix}, \frac{V_{\text{ref}}}{E} \right). \quad (4.4)$$

Dans ce cas, en résolvant les LMI (2.39) et (2.40) et en utilisant le changement de coordonnées défini dans (2.12) et l'inégalité (2.15), la commande continue pour l'approche basée sur la MLI s'écrit :

$$u_{\text{moy}}(\zeta) = u_{\theta}^* + \kappa(\zeta - \zeta_K^*),$$

avec  $\kappa(\zeta - \zeta_K^*) = \text{sat}_c(K(\zeta - \zeta_K^*))$ . Or puisque la commande  $u_{\theta}^*$  ne dépend pas de  $\theta$  pour l'application considérée (voir (4.4)) et que  $\zeta_K^*$  vérifie la relation (2.6) (voir sous-section 2.2.3

du chapitre 2), alors l'expression de la commande se simplifie comme suit :

$$u_{\text{moy}}(\zeta) = u^* + \kappa \left( \zeta - \begin{bmatrix} x_{\theta_n}^* \\ \mathbf{0}_p \end{bmatrix} \right), \quad (4.5)$$

avec  $\theta_n$  un paramètre à choisir.

Pour faire la synthèse des gains du contrôleur aussi bien pour l'approche de commande à relais ou l'approche utilisant la MLI, nous allons suivre la même procédure que celle développée dans la partie 3.2.2 du chapitre 3.

### Normalisation du modèle :

Cette étape est assurée en appliquant le lemme 3.2.1 au modèle (4.1) et au modèle (4.3).

### Modèle augmenté normalisé :

Il s'agit d'implémenter l'équation (3.15) afin d'obtenir la nouvelle variable d'état du système  $\zeta_a = \begin{bmatrix} x_a^\top & z_a^\top \end{bmatrix}^\top$ .

### Synthèse de la commande $u_a(t)$ et $u_{\text{moy}_a}(t)$ :

Rappelons que la commande  $u_\theta^*$  ne dépend pas de  $\theta$  et est égale à 0.5 en utilisant les paramètres consignés dans le tableau 4.1. Dans ce cas l'ensemble  $\mathcal{V}$  est égal à  $[0.5, 0.5]$ . Il peut ainsi être caractérisé comme dans (2.65) avec  $n_g = 2$  et les vecteurs  $g_j$ , ( $j \in \mathcal{I}_2$ ) définis comme suit :

$$g_1 = 2, \quad g_2 = -2.$$

La version normalisée de cet ensemble s'écrit :  $\mathcal{V}_a := \{v \in \mathbb{R}^m : g_{j_a}^\top v \leq 1, (j \in \mathcal{I}_2)\}$  avec  $g_{j_a} := T_u^\top g_j$ , de sorte que le vecteur  $c_a = 12$  vérifie la relation :

$$\mathcal{P}(c_a) \subset \mathcal{V}_a.$$

*Remarque 4.1.1.* Pour la synthèse, la dynamique du système en boucle fermée dépend du paramètre  $\delta$  à choisir. Dans le cas linéaire à temps invariant, il est connu que ce paramètre représente le taux de décroissance de la fonction de Lyapunov quadratique (voir [Boy+94, p. 66]). Ici, la présence d'incertitudes et la saturation de la commande rend délicat le choix de ce paramètre. Nous avons choisi, pour chaque approche, de fixer le paramètre  $\delta$  de façon empirique afin d'obtenir expérimentalement le meilleur temps de réponse. Les essais ont montré que cela mène à  $\delta = 0.6$  pour l'approche à relais et  $\delta = 0.35$  pour la commande continue utilisant la MLI. ┘

Commande pour l'approche à relais Pour  $\delta = 0.6$  (voir remarque 4.1.1) la synthèse

de la commande issue du problème (2.49) donne les valeurs de  $P$  et  $\lambda$  suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} 0.5445 & 0.8242 & 0.9801 \\ 0.8242 & 1.4880 & 1.6967 \\ 0.9801 & 1.6967 & 2.0654 \end{bmatrix}, \lambda = 31.84,$$

ce qui via (2.7) implique :

$$K = \begin{bmatrix} -8.6698 & -13.1231 & -15.6052 \end{bmatrix}.$$

Enfin, notons que les inégalités matricielles (2.39) et (2.40) admettent pour solution :

$$\Omega = 3.32.10^{-8}, \gamma = 9.62.10^{-6}.$$

Ceci prouve que l'hypothèse 2.2.2 est vérifiée avec  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^3$  et pour tout  $\theta_n \in \Theta$ , de sorte que le théorème 2.2.3 s'applique et donne une solution globale pour le modèle normalisé avec la loi de commande définie comme suit :

$$u_a(\tilde{\zeta}_a) \in \arg \min_{v \in \mathcal{U}_a} \left( \gamma \tilde{\zeta}_a^\top P - \phi_{c_a}^\top (K \tilde{\zeta}_a) \Omega K \right) \begin{bmatrix} B_a \\ \mathbf{0}_{p \times p} \end{bmatrix} v, \quad (4.6)$$

avec

$$\tilde{\zeta}_a = \zeta_a - T_\zeta^{-1} \begin{bmatrix} x_{\theta_n}^* \\ \mathbf{0}_p \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Commande continue pour l'approche basée sur la MLI Pour  $\delta = 0.35$  (voir remarque 4.1.1) la synthèse de la commande issue du problème (2.49) donne les valeurs de  $P$  et  $\lambda$  suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} 0.6194 & 0.6103 & 0.7454 \\ 0.6103 & 0.7865 & 0.8473 \\ 0.7454 & 0.8473 & 1.0517 \end{bmatrix}, \lambda = 20.68,$$

ce qui via (2.7) implique

$$K = \begin{bmatrix} -6.4043 & -6.3107 & -7.7078 \end{bmatrix}.$$

Enfin, notons que les inégalités matricielles (2.39) et (2.40) admettent pour solution :

$$\Omega = 3.28.10^{-9}, \gamma = 1.46.10^{-6}.$$

Ceci prouve également que l'hypothèse 2.2.2 est vérifiée avec  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^3$  et pour tout  $\theta_n \in \Theta$ . La commande continue pour le modèle normalisé s'écrit alors :

$$u_{\text{moy}_a}(\tilde{\zeta}_a) = T_u^{-1} u^* + \kappa(\tilde{\zeta}_a). \quad (4.8)$$

avec  $\tilde{\zeta}_a$  défini dans (4.7).

### Dé-normalisation :

Dans cette étape, il s'agit de dé-normaliser les gains du contrôleur avant son application sur le système en utilisant le lemme 3.2.1.

### Implémentation :

Finalement, pour les deux approches, la mise en œuvre sera effectuée suivant le principe du schéma illustré sur la figure 3.3. On utilisera l'expression (4.6) pour calculer la commande pour l'approche à relais et la relation (4.8) pour l'approche basée sur la MLI. *Remarque 4.1.2.* Pour les deux approches de commande, nous choisirons  $\theta_n = 1/R_n$ , avec  $R_n = 10\Omega$  de sorte à avoir :

$$x_{\theta_n}^* = \begin{bmatrix} V_{\text{ref}} \\ 10 \\ V_{\text{ref}} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

┘

### 4.1.3 Critères de comparaison

Afin de réaliser cette comparaison, il est nécessaire de définir un cadre et des critères de comparaison.

*Mise en évidence des performances en asservissement et en régulation* Les performances en asservissement et en régulation sont mises en évidence à l'aide du scénario représenté sur la figure 4.2.

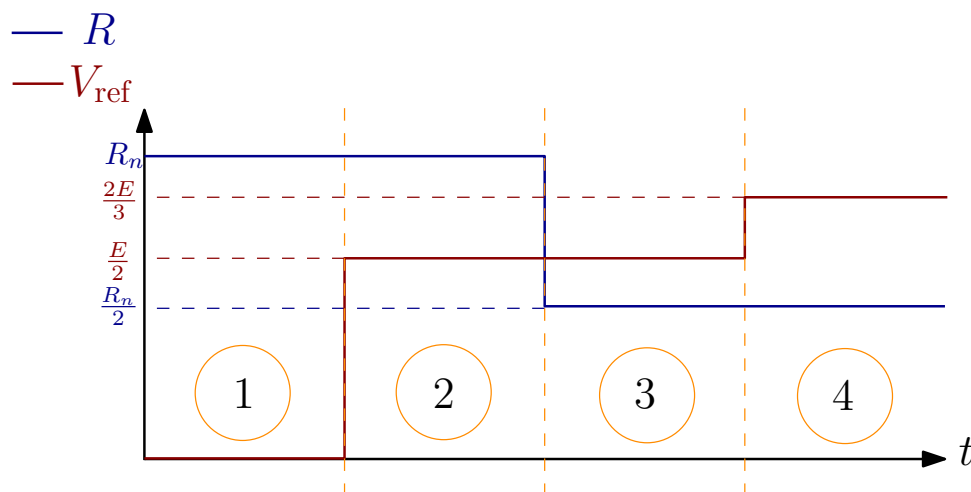


FIGURE 4.2 – Définition de l'expérience de référence.

Ce scénario est décomposé en 4 phases :

- phase 1 : système au repos ;
- phase 2 : asservissement vers une tension de référence  $V_{\text{ref}} = \frac{E}{2}$  pour une charge nominale  $R = R_n$  ;
- phase 3 : régulation pour un changement de charge  $R = \frac{R_n}{2}$  ;
- phase 4 : asservissement vers une tension de référence  $V_{\text{ref}} = \frac{2E}{3}$ .

**Critères de comparaison** Les critères de comparaison dans cette section concernent à la fois les performances de la réponse du convertisseur en régime transitoire et en régime permanent, mais également la charge de calcul du processeur pour chaque commande.

Les critères de performances sont :

- le temps de réponse ( $T_r$ ) : temps au bout duquel la tension atteint 5% de la différence entre sa valeur finale et sa valeur initiale. Ce temps sera calculé après un changement de consigne (asservissement) ou de charge (régulation) (voir figure 4.3) ;
- le taux de dépassement  $D_{\%}$  : caractérise l'amplitude maximale de la première oscillation de tension suite à un échelon de tension de référence :

$$D_{\%} = 100 \frac{v(t_D) - v(\infty)}{v(\infty) - v(0)}, \quad (4.10)$$

où  $t_D$  est l'instant pour lequel le dépassement est maximal,  $v(0)$  est la valeur de la tension avant l'application de l'échelon et  $v(\infty)$  la valeur de la tension en régime permanent après l'application de l'échelon de tension (voir figure 4.3) ;

- la chute de tension ( $\Delta v$ ) : amplitude de la chute de tension après l'application de l'échelon de charge (voir figure 4.3) ;
- erreur statique  $\varepsilon_v(\infty)$  : écart en régime permanent entre la tension de référence  $V_{\text{ref}}$  et la tension moyenne en régime permanent  $v(\infty)$  :

$$\varepsilon_v(\infty) = V_{\text{ref}} - \lim_{t \rightarrow \infty} v(t);$$

- l'ondulation de courant  $\Delta i$  : l'amplitude des ondulations de courant en régime permanent (voir figure 4.4) donnée par :

$$\Delta i = i_{\text{Max}} - i_{\text{Min}};$$

- le rendement  $\eta$  : rapport entre la puissance d'entrée et la puissance de sortie du système en régime permanent :

$$\eta = \frac{P_s}{P_e}. \quad (4.11)$$

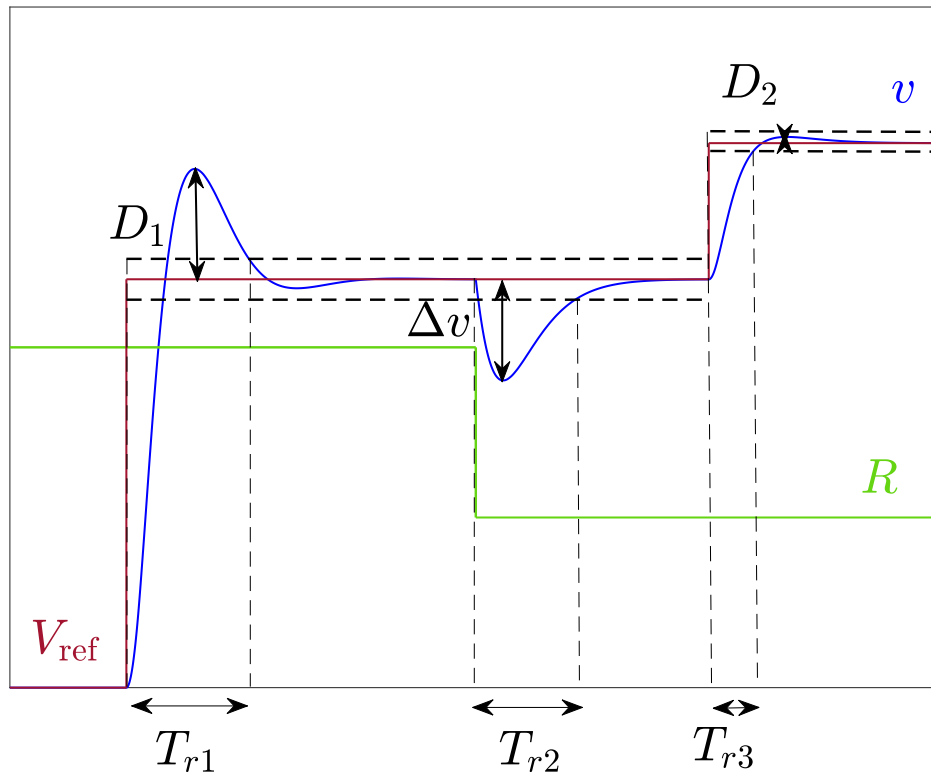


FIGURE 4.3 – Illustration des critères de comparaison :  $T_r$ ,  $D\%$  et  $\Delta v$

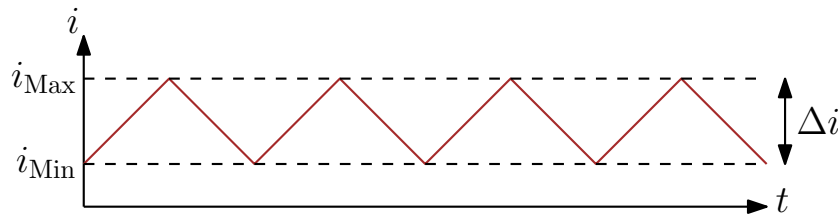


FIGURE 4.4 – Illustration des ondulations de courant en régime permanent

La puissance de sortie  $P_s$  est obtenue par le produit des valeurs numériques de la tension et du courant moyens mesurés dans la résistance  $R$ . La puissance d'entrée  $P_e$  est issue de la tension et du courant aux bornes de la source. Ce rendement tient compte des pertes par conduction (essentiellement dues aux résistances parasites des composants du convertisseur) et des pertes par commutation (induites par le transistor et la diode) dans le convertisseur. Le schéma du convertisseur Buck avec résistances parasites est rappelé par la figure 4.5.

Critère de charge de calcul :

- le temps  $T_c$  : temps nécessaire au calculateur pour calculer la loi de commande ;
- le taux d'utilisation du processeur  $\tau_{\text{CPU}}$  : rapport entre le temps de calcul  $T_c$  et la

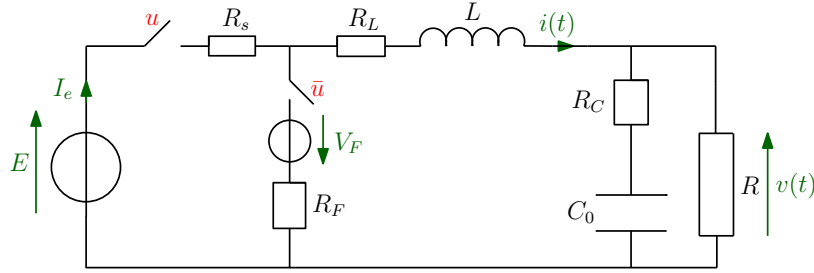


FIGURE 4.5 – Représentation du convertisseur Buck avec les résistances parasites

période d'échantillonnage  $T_s$ .

*Remarque 4.1.3.* De façon analytique, lorsque les résistances parasites sont négligées, pour une MLI de période  $T_{MLI}$ , l'ondulation de courant peut s'exprimer par ([Cho13, Chap. 3, p. 84]) :

$$\Delta i = \frac{u^*(1-u^*)ET_{MLI}}{L}. \quad (4.12)$$

Pour la commande à relais, la fréquence n'étant pas connue, il est difficile d'exprimer analytiquement cette ondulation.  $\lrcorner$

*Remarque 4.1.4.* Comme discuté dans la sous-section 1.1.3 du chapitre 1, le choix du point d'équilibre à atteindre aura un impact important sur l'ondulation de courant pour l'approche à relais. En effet, pour une commande  $u^*$  à l'équilibre à mettre en œuvre, l'approche à relais aura besoin d'au moins une période  $T_s$  pour son implémentation, alors que la MLI aura juste besoin d'une période  $T_{MLI}$  (voir la figure 1.14 de la sous-section 1.1.3). En outre, plus  $u^*$  est proche de 0 ou 1, plus le nombre de périodes  $T_s$  nécessaire à son implémentation sera élevée. Par exemple, réaliser une commande à l'équilibre  $u^* = 1/8$  ou  $u^* = 7/8$  avec l'approche à relais nécessitera une période égale à  $8T_s$ . Sachant que la plus petite période de commutation de la commande pour cette stratégie est égale à  $2T_s$  qui correspond à  $u^* = 0.5$ , on émet donc la conjecture selon laquelle l'amplitude des ondulations de courant sera plus importante dans la phase 4 du scénario présenté (où en théorie  $u^* = 2/3$ , ce qui implique, pour sa réalisation, une période de  $3T_s$  pour la commande) que dans la phase 2 (où en théorie  $u^* = 0.5$ ).  $\lrcorner$

*Remarque 4.1.5.* Ce type de comparaison a été très peu abordé dans la littérature, dû principalement aux problèmes liés à l'implémentation de la commande à relais (comme exposé dans la sous-section 1.1.4). À notre connaissance, [Mar+09] est le seul article présentant une approche similaire. Dans cet article, la comparaison entre quatre différentes stratégies de commande est effectuée sur un convertisseur DC-DC Boost : trois sont basées sur l'approche MLI synthétisées en temps discret et une basée sur la commande à commutations synthétisée en temps continu. Pour cette dernière, les résultats expérimentaux obtenus montrent que la synthèse de commande proposée ne permet pas d'avoir une erreur statique nulle de la tension en cas de variation de la charge. Ce qui représente une première différence par rapport à notre méthodologie. D'autre part, la comparaison

n'a pas été effectuée sur une base commune, c'est-à-dire que les structures de commande varient d'une approche à l'autre (présence ou non d'observateurs par exemple).

Dans notre approche, nous avons choisi la même structure pour les deux méthodologies : commande par retour d'état associée à l'ajout d'une action intégrale afin de prendre en compte les incertitudes paramétriques du modèle.

┘

## 4.2 Présentation des résultats

Sur la base des lois de commande synthétisées et des critères définis dans la section précédente, nous allons, dans cette partie, présenter et analyser les résultats expérimentaux obtenus. Afin d'évaluer expérimentalement tous les critères de comparaison définis dans la sous-section 4.1.3, le système de prototypage rapide Microlabbox de dSpace est apparu peu adapté. En effet, en fonction de la complexité de l'algorithme de commande, la génération de code pour le FPGA est relativement longue (approximativement 45 minutes pour notre cas). Par ailleurs, à notre connaissance, il n'existe pas d'outils mis en place pour le calcul de la charge du contrôleur mis en œuvre sur le FPGA de la MicroLabBox. Nous nous sommes, dès lors, orientés vers une solution de prototypage rapide à destination de microcontrôleurs Microchip. Ceci a également l'avantage de montrer que la stratégie présentée peut également être mise en œuvre sur un microcontrôleur et ne requiert ni un FPGA, ni un système de prototypage rapide dSpace.

### 4.2.1 Présentation des équipements

Les lois de commande synthétisées précédemment sont mis en œuvre expérimentalement sur un microcontrôleur ATSAME70 de Microchip associé à une carte de développement Explorer 16/32 (voir figure 4.6). Il est doté d'un cœur possédant une horloge avec une fréquence de 300 MHz et possède une unité de calcul en virgule flottante. Les périphériques d'interfaces CAN (Convertisseur Analogiques Numériques) sont capables de fournir une mesure toutes les  $0.7 \mu\text{s}$ . Ces mesures peuvent être synchronisées avec les générateurs de MLI, également présents sur le microcontrôleur. Ces derniers seront utilisés afin de transformer le rapport cyclique, issu de la synthèse de commande par modèle moyen, en signal en créneaux pour commander le transistor.

À l'image de la bibliothèque 'Xilinx Blockset' pour FPGA, 'MPLAB Device Blocks for Simulink' permet de générer directement le code Simulink pour le microcontrôleur Microchip. La boîte à outils est représentée sur la figure 4.7. Ces blocs reposent sur les compilateurs MPLAB XC et MPLAB X IDE pour compiler le code généré et programmer la puce à partir de l'interface Simulink. La procédure de génération de code et de programmation de la carte est illustrée sur la figure 4.8. Le temps de programmation est

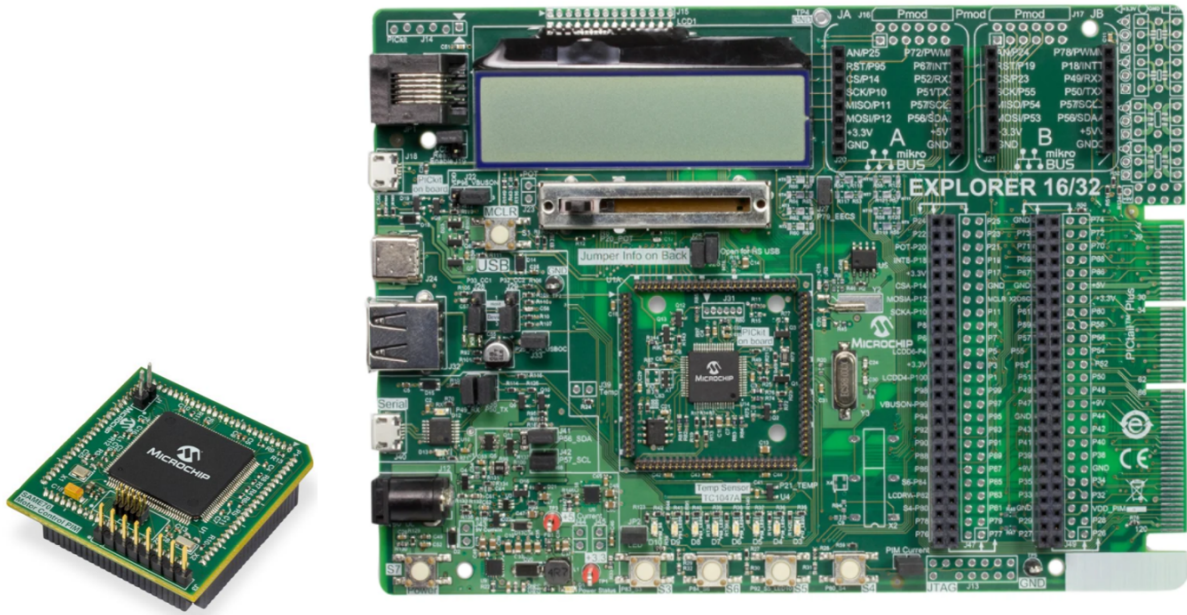


FIGURE 4.6 – Microcontrôleur ATSAME70 (à gauche) et carte Explorer 16/32 (à droite)

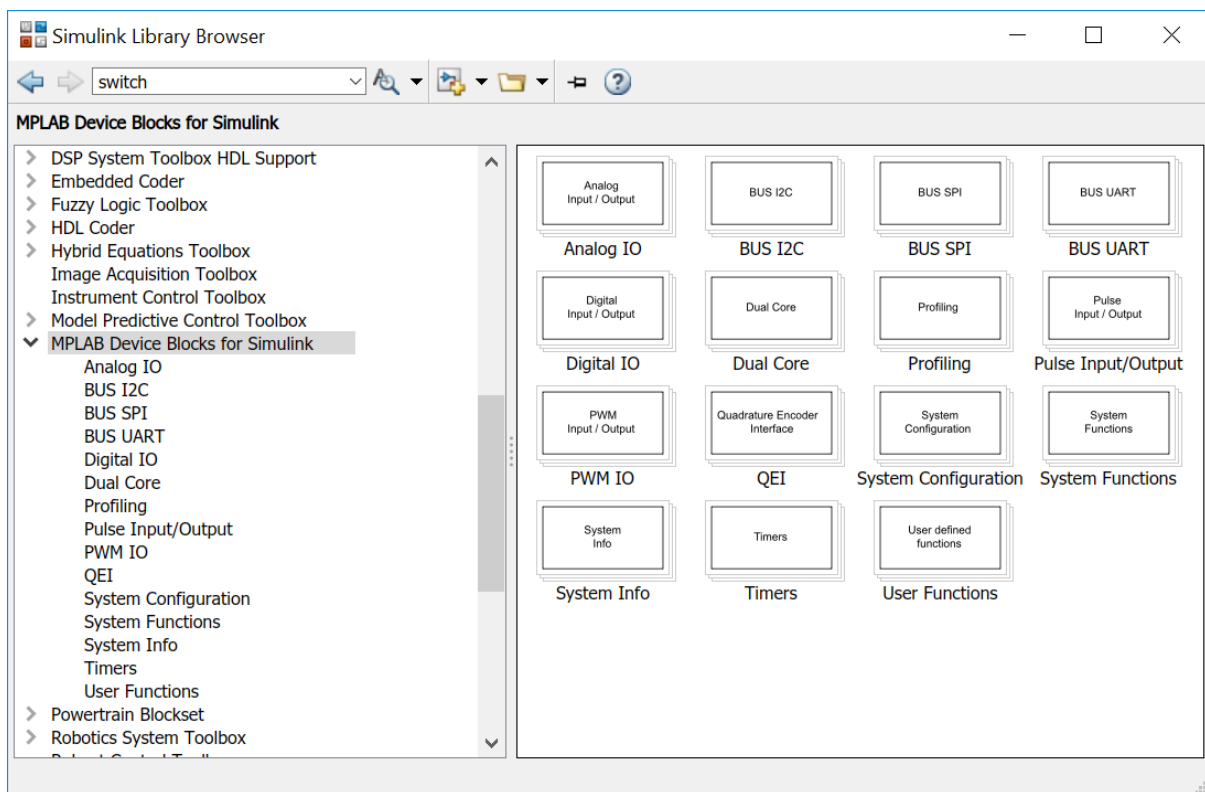


FIGURE 4.7 – ‘MPLAB Device Blocks for Simulink’

approximative de 1 à 2 minutes, à comparer avec les 45 minutes pour le FPGA de la dSpace MicrolabBox.

Enfin, l'outil propose des solutions d'analyse temporelle de l'exécution. Notamment,

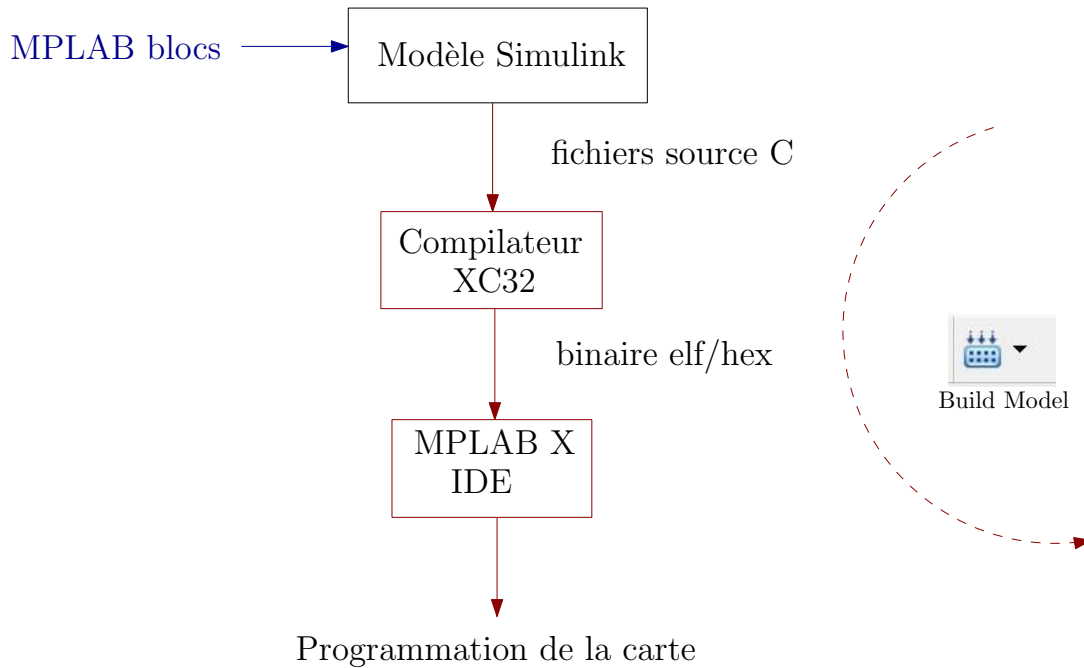


FIGURE 4.8 – Procédure de génération de code et de programmation de la carte

le bloc ‘Task state’ permet de représenter l’exécution d’une tâche à travers une sortie numérique. La sortie passe à l’état haut au début de la tâche et repasse à zéro lorsqu’elle est terminée. Cela nous permettra de quantifier le temps de calcul requis pour chaque approche à l’aide d’un oscilloscope.

Le banc d’essai utilisé dans cette section est le même que celui utilisé dans le chapitre 3, représenté sur la figure 3.10 pour lequel un seul convertisseur est commandé.

## 4.2.2 Résultats expérimentaux

Afin de réaliser la comparaison dont le cadre a été défini dans la section 4.1.3, les deux lois de commande sont examinées pour différentes périodes d’échantillonnage. La commande continue pour l’approche basée sur la MLI est testée pour deux configurations pour lesquelles  $T_s = \{50, 12.5\} \mu s$ . Ici nous faisons le choix d’actualiser la commande à chaque période de commutation en posant  $T_{MLI} = T_s$  (on choisit  $k = 1$  dans la relation (1.17)). À noter que ce choix permet également de respecter la séparation fréquentielle entre la période de la MLI et les dynamiques du système en boucle fermée de sorte à garantir la validité du modèle. Pour l’approche à relais, la commande a été implémentée pour différentes périodes d’échantillonnage  $T_s = \{1.1, 2, 4, 6, 8, 10, 55\} \mu s$  où  $1.1 \mu s$  est la période d’échantillonnage la plus rapide que le contrôleur peut supporter sans surcharge et  $55 \mu s$  est la fréquence d’échantillonnage pour laquelle l’approche à relais a le même taux d’utilisation  $\tau_{CPU}$  que l’approche MLI pour  $T_s = 50 \mu s$ .

Les critères de comparaisons obtenus en suivant le scénario défini sur la figure 4.2

pour toutes les expériences sont reportées dans le tableau 4.2. De plus, les résultats de l'évolution temporelle pour les expériences les plus significatives sont représentés sur les figures 4.9 et 4.10. Pour chaque figure, les évolutions temporelles de la tension  $v$  et sa référence  $V_{\text{ref}}$ , du courant  $i$ , de la commande  $u$  ainsi que de la charge  $R$  sont représentées.

### Analyse des figures 4.9 et 4.10

On observe que globalement toutes les approches implémentées sont capables d'assurer l'asservissement et la régulation de la tension moyenne de sortie en dépit des incertitudes liées à la valeur de la charge et aux phénomènes non pris en compte dans le modèle de commande comme les résistances parasites. Ce qui permet bien de conclure sur l'efficacité des deux approches de synthèse.

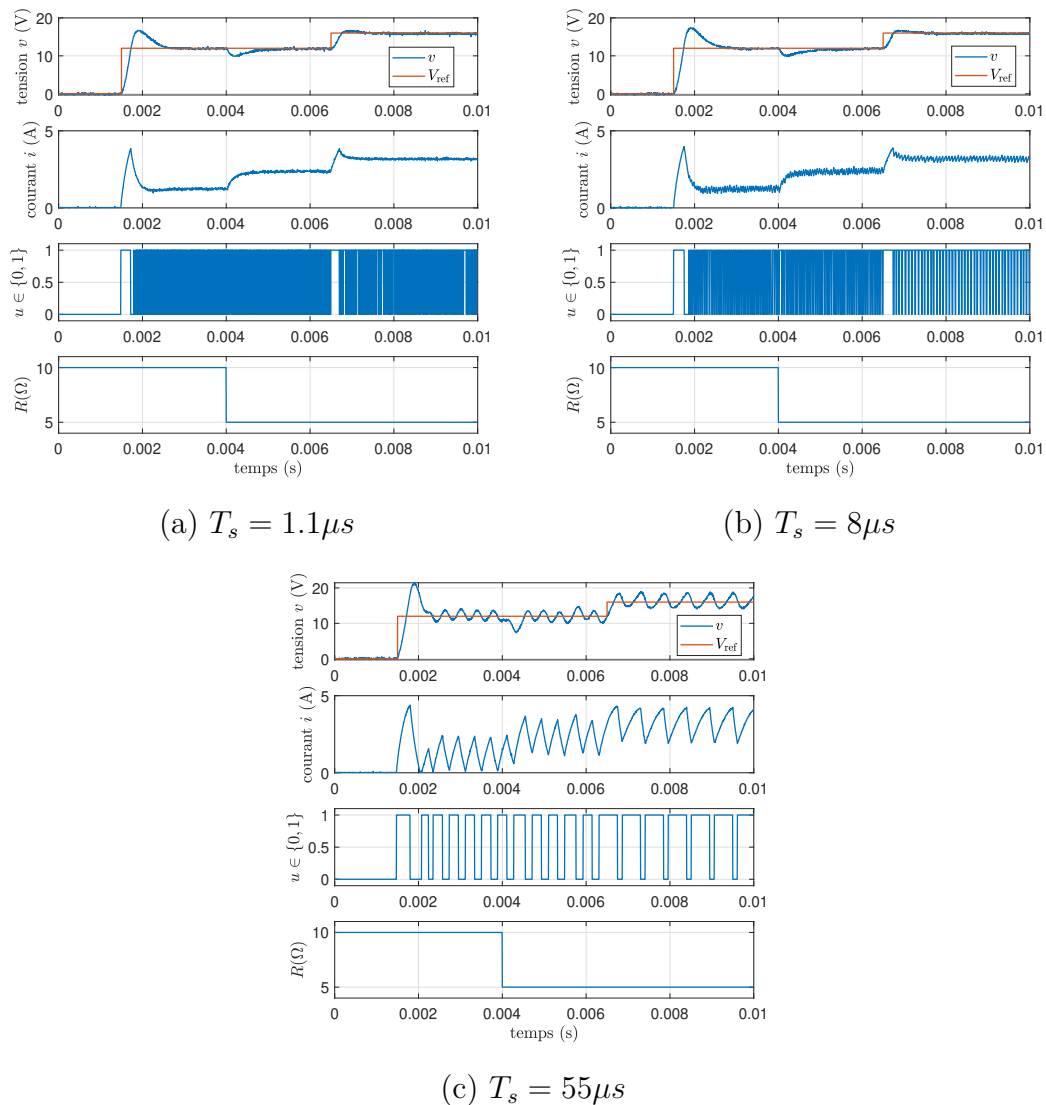


FIGURE 4.9 – Résultats expérimentaux : commande à relais pour  $T_s = \{1.1, 8, 55\} \mu s$

Concernant les approches à relais, les résultats représentés sur la sous-figure 4.9.a

## 4.2. Présentation des résultats

correspondent à l'expérience pour laquelle les fréquences de commutation de la commande sont les plus élevées. Ce qui entraîne de faibles ondulations de courant. En revanche, le taux d'occupation  $T_u$  du microcontrôleur est très élevé et proche de 100% (voir tableau 4.2). La sous-figure 4.9.b montre les résultats obtenus pour l'approche à relais qui possède le meilleur rendement parmi les approches considérées. Une discussion sur cette observation sera présentée par la suite. Enfin, on remarque sur la sous-figure 4.9.c que l'amplitude des ondulations de courant augmente avec la période d'échantillonnage.

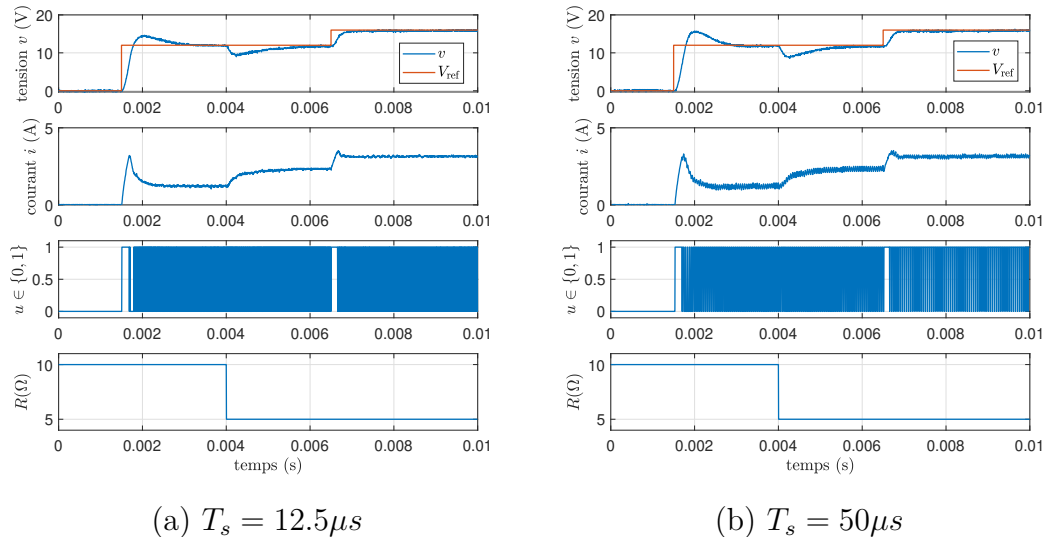


FIGURE 4.10 – Résultats expérimentaux : commande continue basée sur la MLI pour  $T_s = \{12.5, 50\}\mu s$  ( $u$  est la commande discontinue générée par la MLI)

Pour la commande continue basée sur la MLI, les résultats sont représentés sur la figure 4.10 où la commande discontinue générée par la MLI est tracée afin de pouvoir comparer avec la commande à relais. Ici on remarque que la fréquence de la MLI impacte principalement sur l'amplitude des ondulations de courant en régime permanent.

TABLEAU 4.2 – Synthèse des critères de comparaison pour les différentes commandes

Méthode	$T_s$ ( $\mu\text{s}$ )	$T_r$ (ms) 0-12V / 12-16V / 10-5 $\Omega$	$D\%$ 12V/16V	$\Delta v$ (V)	$\epsilon_v(\infty)$	$\Delta i$ (A) 12V / 16V	$\eta$ (%)	$T_c$ ( $\mu\text{s}$ )	$\tau_{\text{CPU}}$ (%)
Relais	1.1	1.065 / 0.6 / 0.88	38.8 / 8	2.1	0.0104	0.065 / 0.07	88.6016	1.0975	99.8
Relais	2	1.065 / 0.6 / 0.88	38.8 / 8	2.1	0.0326	0.134 / 0.138	89.3630	1.0975	54.88
Relais	4	1.065 / 0.6 / 0.88	41.4 / 8	2.1	0.0266	0.201 / 0.25	89.7196	1.0975	27.44
Relais	6	1.065 / 0.6 / 0.88	41.4 / 8	2.1	0.0264	0.268 / 0.301	89.7639	1.0975	18.30
Relais	8	1.065 / 0.6 / 0.88	41.4 / 8	2.1	0.0302	0.335 / 0.358	89.8050	1.0975	13.72
Relais	10	1.075 / 0.6 / 0.89	41.4 / 8	2.23	0.0359	0.432 / 0.469	89.7476	1.0975	10.98
Relais	55	- / - / -	78.3 / -	4.393	0.3450	2.14 / 2.25	87.9855	1.0975	2
MLI <sub>20kHz</sub>	50	1.22 / 0.6 / 1.7	31 / 0	3.03	0.004	0.325 / 0.201	89.7696	1	2
MLI <sub>80kHz</sub>	12.5	1.3 / 0.6 / 1.7	22.1 / 0	2.7	0.0370	0.067 / 0.063	88.7880	1	8

### Analyse des données consignées dans le tableau 4.2

- $T_r$  (temps de réponse) : globalement, la commande à relais (sauf pour  $T_s = 55\mu s$ ) présente un temps de réponse pour l'asservissement et pour la régulation inférieur à celui obtenu avec l'approche MLI. Cela s'explique principalement par l'actualisation de commande plus fréquentes (pour les essais "Relais"). À noter que pour la commande à relais implémentée avec  $T_s = 55\mu s$ , à cause de la période d'échantillonnage relativement élevée, l'ondulation de tension dépasse la zone comprise entre plus ou moins 5% de la référence, définie pour le temps de réponse.
- $D\%$  (dépassement) : pour les deux asservissements de tension, les essais utilisant la MLI présentent un dépassement plus petit que les approches à relais. En outre, de manière générale, on constate que, pour la même approche et avec les mêmes gains du contrôleur, le dépassement a tendance à augmenter avec la période d'échantillonnage.
- $\Delta v$  (chute de tension) : l'amplitude des chutes de tension observée est favorable aux approches à relais sauf pour celle implémentée avec  $T_s = 55\mu s$  qui présente une chute de tension d'environ 4.4 V.
- $\epsilon_v(\infty)$  (erreur statique sur la tension moyenne) : toutes les approches présentent sensiblement une valeur moyenne de la tension égale à la référence fixée. On remarque que, même en négligeant les résistances parasites dans le modèle de commande, l'approche de synthèse reste quand même efficace.
- $\Delta i$  (ondulations de courant) : ce critère dépend majoritairement des fréquences de commutation de la commande. Pour l'approche MLI, on observe une diminution de l'amplitude des ondulations lorsque la tension de référence passe de 12V à 16V. En gardant à l'esprit la définition de  $\Delta i$  (voir équation (4.12)), on note que, en théorie, le maximum des ondulations de courant est obtenu pour  $u^* = 0.5$ . Ceci explique bien les résultats obtenus car pour  $V_{ref} = 12V$ , on a  $u^* = 0.5$  et pour  $V_{ref} = 16V$ , on a  $u^* = 2/3$ . Cependant, pour l'approche à relais, c'est l'inverse qui est noté : une augmentation des ondulations du courant lorsque la tension de référence passe de 12V à 16V. Ce qui permet de valider la conjecture émise précédemment, dans la remarque 4.1.4.
- $\eta$  (rendement) : il est important de noter que l'augmentation de la fréquence de commutation réduit, certes, l'ondulation de courant et donc les pertes par conduction, mais augmente d'autre part les pertes par commutation. On trace sur la figure 4.11, l'évolution du rendement en fonction de la période d'échantillonnage  $T_s$  pour les approches à relais. De plus, on y représente également les rendements pour les deux essais basés sur la MLI considérés ici. Il semble, sur cette figure, qu'il y ait une période d'échantillonnage ( $T_s = 8\mu s$ , résultat temporel représenté figure 4.9.b) pour laquelle le rendement est maximal pour les approches à relais. Ce rendement est, de plus, meilleur que celui obtenu en utilisant la MLI à 20kHz et la MLI à 80kHz.
- $T_c$  (temps de calcul) : on remarque que les temps de calcul sont sensiblement égaux

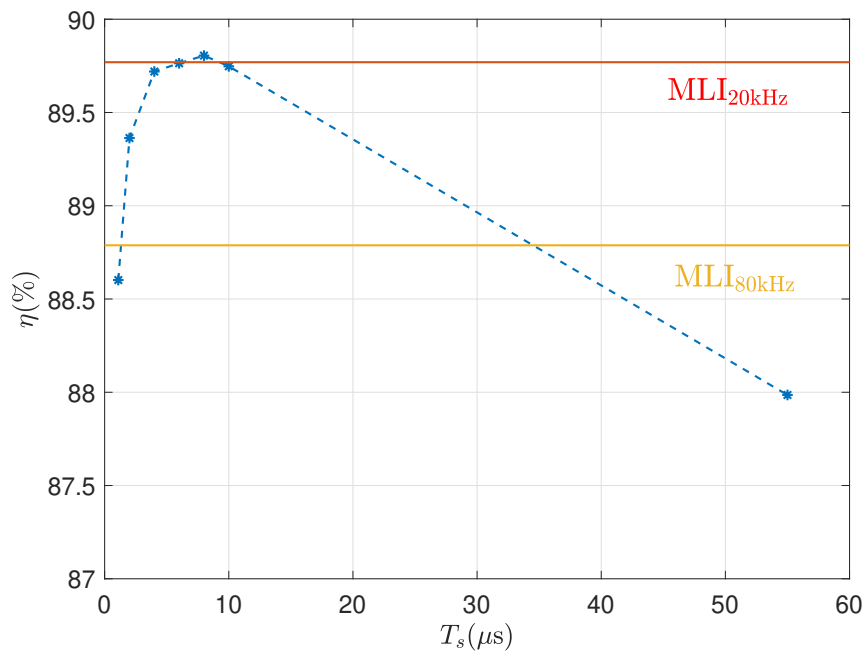


FIGURE 4.11 – Graphe du rendement pour les différentes approches considérées

pour les différentes approches. Notons cependant que pour les approches basées sur la MLI, ce temps ne prend pas en compte la transformation du rapport cyclique en signal en créneaux applicable pour les transistors. En effet, le microcontrôleur dispose de périphériques d'interfaces spécialement dédiés à cette fonction. Ce qui permet de faciliter sa mise en œuvre, mais également de réduire la charge de calcul du processeur.

- $\tau_{CPU}$  (taux d'utilisation du calculateur) : du fait que la plupart des commandes à relais sont implémentées avec une période d'échantillonnage plus faible que les approches MLI, ces dernières présentent donc un taux d'utilisation plus faible. Une discussion sera menée par la suite concernant ce critère.

À présent, afin d'avoir une vision globale des résultats présentés dans le tableau 4.2 et dans le but de faciliter leur interprétation, les données sont représentées sous forme de diagramme en étoile sur la figure 4.12. Ces données sont normalisées afin d'obtenir des valeurs comprises entre 0 et 100 où 100 représente la meilleure performance parmi les approches considérées ici et 0 représente la moins bonne.  $T_{r1}$ ,  $T_{r3}$  et  $T_{r2}$  représentent respectivement les temps de réponse pour l'asservissement de tension à 12V, à 16V et le rejet de perturbations après application de l'échelon de charge.  $\Delta i_1$  et  $\Delta i_2$  sont respectivement l'amplitude des ondulations de courant pour  $V_{ref} = 12V$  et pour  $V_{ref} = 16V$ . Enfin  $D_1$  et  $D_2$  représentent respectivement les dépassements pour l'asservissement de tension à 12V et à 16V. À noter que nous n'avons pas représenté l'approche à relais implémentée avec  $T_s = 55\mu s$  car comme montré sur le tableau 4.2, il était impossible de

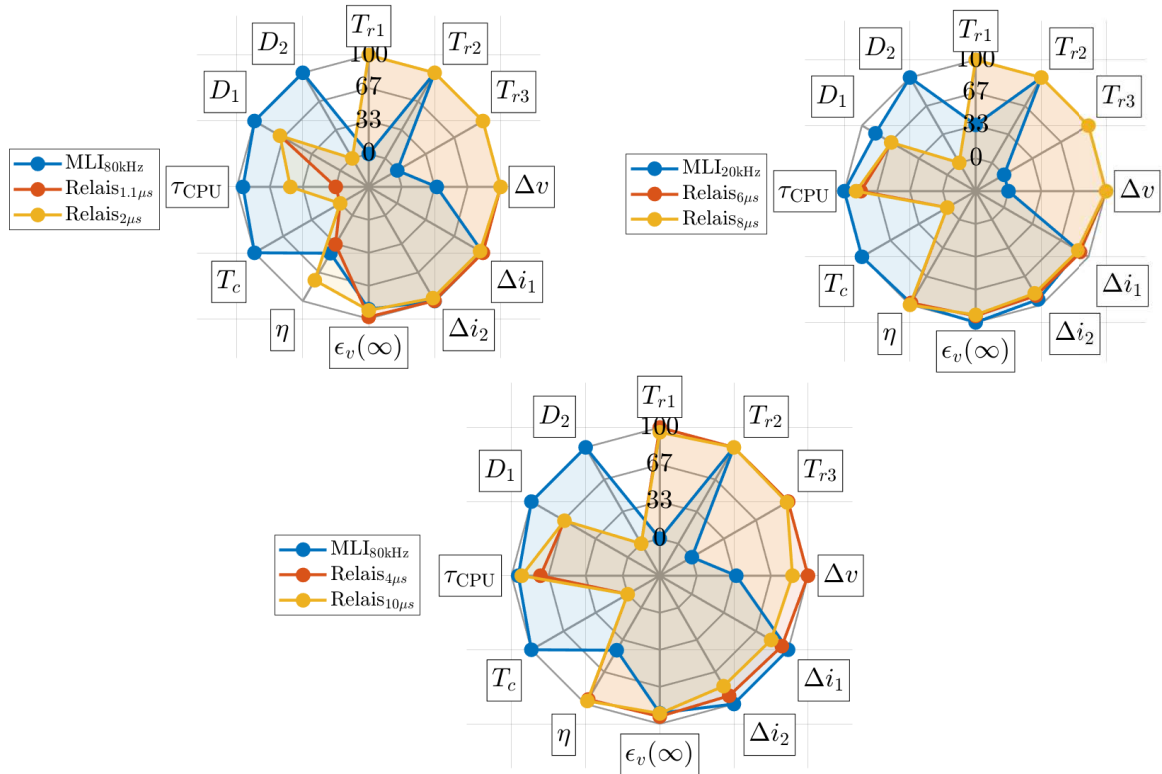


FIGURE 4.12 – Diagramme en étoile des résultats consignés sur le tableau 4.2

quantifier certains critères.

On remarque qu'avec des ondulations de courant sensiblement égales (par exemple les essais "Relais" à  $T_s = 1.1\mu s$  et "MLI" à 80kHz ou encore les essais "Relais" à  $T_s = 8\mu s$  et "MLI" à 20kHz), les deux approches présentent, sensiblement, les mêmes valeurs de rendement, mais avec une charge de calcul du processeur plus grande pour les essais "Relais" (par exemple  $\tau_{CPU} = 99.8\%$  pour l'essai "Relais" à  $T_s = 1.1\mu s$  et  $\tau_{CPU} = 8\%$  pour l'essai "MLI" à 80kHz). Néanmoins, ces dernières présentent de meilleurs résultats concernant la plupart des critères de comparaison relatifs au régime transitoire (temps de réponse et amplitude de la chute de tension).

Maintenant, remarquons qu'à taux d'utilisation du calculateur sensiblement égal, le paramètre déterminant à prendre en compte est la période d'échantillonnage utilisée pour la mise en œuvre des commandes. Par exemple, l'essai "MLI" à 20kHz et l'essai "Relais" à  $T_s = 55\mu s$  possèdent les mêmes taux d'utilisation du calculateur, cependant la deuxième présente des performances médiocres comparées à la première car la valeur de  $T_s$  est relativement grande. Prenons, à présent, le cas où la période d'échantillonnage choisie est plus appropriée pour l'implémentation de la commande à relais, c'est le cas de l'essai "Relais" à  $T_s = 10\mu s$  et l'essai "MLI" à 80kHz, où les taux d'utilisation sont assez

proches. On observe que les critères relatifs au régime transitoire, sauf le dépassement, sont meilleurs pour la première alors que ceux relatifs au régime permanent, sauf le rendement (à cause des commutations élevées de la commande), sont meilleurs pour la deuxième. Ces résultats nous permettent d'émettre la conjecture selon laquelle, avec une période d'échantillonnage faible et à taux d'utilisation du calculateur égal, l'approche à relais obtiendra un meilleur rendement par rapport à l'approche MLI. En effet, cette dernière présentera des commutations de la commande plus fréquentes qui auront tendance à augmenter les pertes par commutation du convertisseur.

Finalement, ces résultats montrent que l'approche à relais présente de bonnes performances dès lors que le pas d'échantillonnage choisi pour sa mise en œuvre est assez faible. En outre, elle semble être plus réactive que les approches MLI car elle présente des temps de réponse plus faibles. Cependant, le prix à payer est une consommation du calculateur importante.

Le choix d'une approche par rapport à une autre dépend donc en grande partie du calculateur dont nous disposons pour l'implémentation.

## Conclusion

Dans ce chapitre, une comparaison entre les approches de commande à relais et de commande continue basée sur l'utilisation de la MLI a été présentée. C'est un sujet qui est très peu abordé dans la littérature. L'application considérée pour cette comparaison est un convertisseur Buck alimentant une charge résistive dont la valeur est inconnue. Pour chacune de ces approches, la synthèse de commande a été effectuée en utilisant l'approche de stabilité globale présentée dans le chapitre 2. Elle permet de concevoir les contrôleurs en se basant sur la même fonction de Lyapunov et en résolvant les mêmes LMI.

Les critères de comparaison choisis concernaient principalement la robustesse face aux incertitudes liées à la valeur de la charge, la dynamique du système en régime transitoire, le taux d'utilisation du calculateur entre autres. Les résultats obtenus montrent que :

- l'approche à relais requiert une période d'échantillonnage faible afin d'obtenir de bonnes performances ;
- l'approche à relais, pour des périodes d'échantillonnage faibles, semble être plus réactive que les approches basées sur la MLI ;
- l'approche MLI paraît plus efficace à faible taux d'utilisation du processeur ;
- pour des fréquences d'échantillonnage faibles et à charge de calcul égale, l'approche MLI semble présenter un moins bon rendement que celle à relais à cause de ses commutations plus fréquentes.

En conclusion, l'approche à relais, implémentée sur le microcontrôleur, présente de bons résultats, mais le prix à payer est un taux d'utilisation important du processeur.

# Conclusion générale

## Synthèse

Les travaux présentés dans cette thèse ont été dédiés à la synthèse et à la mise en œuvre de lois de commande pour les systèmes à relais en prenant en compte des incertitudes qui peuvent exister dans le système. L'application considérée pour cela est un système constitué de  $m \in \mathbb{N}^*$  convertisseurs Buck en parallèle alimentant une charge résistive dont la valeur est inconnue. C'est une structure qui se retrouve dans plusieurs applications telles que les Microgrids ou encore les alimentations basse tension/fort courant.

Afin d'atteindre cet objectif, nous avons, dans un premier temps, effectué un état de l'art sur la stabilisation robuste des systèmes à relais afin de situer nos contributions par rapport à la littérature. Cette étude nous a permis de mettre en lumière le fait que, à notre connaissance, aucune approche présente dans la littérature n'est capable de traiter les systèmes à relais composés de matrices d'état en boucle ouverte non Hurwitz et incertaine. Ce qui est le cas de l'application considérée dans ce mémoire. Ceci interdit également la mise en œuvre d'un régulateur par modèle interne.

L'une des contributions majeures de cette thèse concerne la résolution de cette problématique. La procédure de synthèse adoptée se base sur l'ajout d'un contrôleur dynamique représenté par une action intégrale et sur l'existence d'une commande continue par retour d'état stabilisante. Nous avons, dans un premier temps, présenté un résultat général concernant la stabilisation locale pour le cas des systèmes à relais incertains et non linéaires. Les conditions conduisant à la stabilité en boucle fermée fournies se basent sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov de type Lur'e. Par la suite, ce résultat a été particularisé pour le cas des systèmes linéaires incertains où nous avons présenté deux approches de synthèse dépendant des valeurs propres de la matrice d'état en boucle ouverte : une approche de stabilité globale lorsque les parties réelles des valeurs propres sont négatives et une stabilité locale peu importe la localisation du spectre de la matrice d'état. De plus, nous avons fourni, pour chacune d'elles, une méthode constructive, basée sur des LMI, afin d'une part de calculer les gains du contrôleur et d'autre part de pouvoir calculer une estimation du domaine d'attraction robuste lorsque la stabilité locale est cherchée.

La stabilisation robuste des systèmes à relais incertains étant traitée, une autre contribution de cette thèse est la mise en œuvre expérimentale de la méthodologie proposée. Nous avons considéré pour cela, un système constitué de  $m = 3$  convertisseurs Buck en parallèle hétérogènes dans le sens où les inductances et les transistors de chaque branche sont différents. L'objectif principal de la commande pour ce système est d'assurer une régulation de la tension de sortie vers une référence constante en dépit des incertitudes liées à la valeur de la charge. Cet objectif impose, en régime permanent, une valeur au courant de la charge alors que la manière dont ce courant est distribué entre les différentes branches du convertisseur reste libre. C'est pourquoi nous avons fixé comme deuxième objectif de commande de garantir une répartition uniforme des courants dans les convertisseurs. Puisque la stratégie de synthèse proposée dans ce mémoire se base sur l'utilisation des LMI qui dépendent des matrices du système, une attention particulière a, dès lors, été portée sur le conditionnement de ces matrices. En effet, dans le cas des convertisseurs Buck, ces dernières sont souvent mal conditionnées à cause des petites valeurs des inductances et de la capacité. Nous avons, afin de résoudre ce problème, introduit un nouveau changement de variables qui a permis d'améliorer considérablement le conditionnement numérique des matrices. Par la suite, une discussion a été menée sur la mise en œuvre pratique de la commande à relais, notamment sur le développement d'une stratégie permettant d'éviter la prise de mesures des grandeurs électriques lors des instants de commutation de la commande à cause des phénomènes transitoires induits par ces commutations. Cette stratégie, avec l'algorithme de la commande, ont été implémentés à l'aide d'un système de prototypage rapide dSpace (MicrolabBox) disposant d'un FPGA programmable. Ce qui nous a permis de générer des fréquences de commutation très élevées et d'être au plus proche d'un fonctionnement en continu. Enfin, les résultats expérimentaux obtenus nous ont permis de prouver l'efficacité de notre approche expérimentalement.

Finalement, une dernière contribution réside dans la présentation d'une comparaison pratique entre les approches de commande à relais et celles basées sur la technique MLI, très peu abordée dans la littérature. L'application considérée pour cela est un convertisseur Buck alimentant une charge résistive dont la valeur est inconnue. Les deux approches ont été implémentées en utilisant un microcontrôleur ATSAME70 de Microchip. L'utilisation des microcontrôleurs présente un avantage économique, puisqu'ils coûtent beaucoup moins cher qu'un prototypage rapide dSpace. Cependant, leurs ressources sont très limitées, ce qui augmente la difficulté d'implémentation. Pour la comparaison, nous avons étudié le comportement du système en asservissement et en régulation pour chacune des approches en considérant plusieurs critères tels que le temps de réponse, le rendement du système, ou encore la charge de calcul du processeur. Les résultats obtenus nous ont permis de mettre en évidence que l'implémentation de la commande à relais requiert une période d'échantillonnage faible afin d'obtenir de bonnes performances du système en boucle fermée. Dans ce cas, les dynamiques du système sont meilleures par rapport à la technique de la MLI. En revanche, le taux d'utilisation du microcontrôleur est assez important.

---

Nous en déduisons que le choix de l’une ou l’autre approche, pour une application donnée, dépend fortement de la puissance de calcul dédiée à l’implémentation de la commande.

## Perspectives

Les résultats présentés dans le cadre de cette thèse ont permis d’ouvrir à de nombreuses perspectives. Nous allons en présenter quelques unes.

**Commande par retour de sortie** Dans cette thèse, nous avons traité le problème de stabilisation par retour d’état. Cependant, en pratique, il est possible que les variables d’état ne soient pas disponibles à la mesure. L’extension de ces résultats dans le cas des lois de commande de type retour de sortie peut, dès lors, être considérée. Ce dernier point est actuellement en cours d’étude, et nous avons obtenu des résultats de simulation probants.

**Estimation du domaine d’attraction avec la fonction de Lyapunov Lur’e** En référence à la discussion menée dans le chapitre 2 sur la comparaison entre l’approche quadratique et l’approche Lur’e (voir sous-section 2.3.3), il serait intéressant de développer une stratégie de synthèse en considérant directement l’ensemble  $\mathcal{V}$  (défini dans 2.38) plutôt que l’hyperrectangle  $\mathcal{P}(c) \subseteq \mathcal{V}$  (défini dans 2.37) dans la définition de  $\mathcal{D}$  pour l’approche Lur’e, ceci dans le but d’agrandir le domaine d’attraction robuste du système.

**Extension de l’approche pour une classe de systèmes plus générale** La stratégie de synthèse de commande robuste présentée dans cette thèse s’applique uniquement pour le cas des systèmes à relais dont la matrice d’état est incertaine. Il serait alors intéressant d’essayer de généraliser cette approche pour le cas où la matrice d’entrée  $B$  est également sujette à des incertitudes. En outre, un deuxième point qui pourrait être considéré est son extension pour le cas des systèmes affines à commutation où les matrices d’état ne sont pas forcément identiques.

**Limitation des commutations de la commande en régime permanent** Les conditions de stabilité asymptotique présentées dans le chapitre 2 se basent sur l’hypothèse que les fréquences de commutation de la commande peuvent être infinies. Ce qui, en pratique, n’est naturellement pas possible. On pourrait donc envisager une adaptation de cette approche en étudiant, par exemple, les systèmes à temps discrets ([Gov+14]; [DG16]) ou encore en utilisant les approches de commande événementielle (“event-triggered control” en anglais [HJT12]).

# Publications de l'auteur

## Conférences nationales et internationales

Aboubacar Ndoye, Romain Delpoux, Laurentiu Hetel, Alexandre Kruszewski, Jean-François Trégouët, and Xuefang Lin-Shi, “Robust relay control for buck converters : experimental application,” in *2019 58th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 8124-8129, 2019.

Aboubacar Ndoye, Romain Delpoux, Jean-François Trégouët, and Xuefang Lin-Shi, “Commande robuste à relais de convertisseurs Buck en parallèle,” France, Novembre 2020, Journées nationales MACS.

## Revue internationale soumise

Aboubacar Ndoye, Romain Delpoux, Jean-François Trégouët, and Xuefang Lin-Shi, “Switching control design for LTI system with uncertain equilibrium : Application to parallel interconnection of DC/DC converters,” in *Automatica* (en seconde révision).

# Annexe A

## Notions de solutions de Phillipov

Considérons le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(x). \tag{A.1}$$

Lorsque la fonction  $f$  est continue alors l'existence d'une solution classique (fonction continument différentiable) est assurée par le théorème de Peano ([CL55, Chap.1, p.6]). Cependant, ce dernier montre des limites quant à leur application lorsque le champ de vecteurs est discontinu.

**Exemple A.1** ([Cor08]). Considérons le système suivant :

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \tag{A.2}$$

qui est discontinu en 0. Supposons qu'il existe une solution classique de l'équation différentielle c'est-à-dire une fonction continument différentiable  $x : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfait (A.2) avec  $x(0) = 0$ . Ainsi, on a  $\dot{x}(0) = f(0) = 1$ , ce qui implique pour tout  $t$  suffisamment petit  $x(t) > 0$  or dans ce cas  $\dot{x}(0^+) = -1$ . Par conséquent,  $t \mapsto \dot{x}(t)$  vaut 1 en 0 et -1 en  $0^+$ . Elle est alors discontinue et donc aucune solution classique issue de 0 n'existe pour ce système. ■

Il est donc nécessaire d'étendre la notion de solutions dans le cas où le champ de vecteur est discontinu. Cependant selon le problème et l'objectif, différentes notions de solutions peuvent être utilisées. Une synthèse de différents concepts de solutions est donnée dans [Háj79] ; [Cer99] ; [Cor08]. Parmi ces différents formalismes présentés, celui de Phillipov ([Fil13]) semble bien convenir aux convertisseurs de puissance DC-DC. En effet, il permet de prendre en compte certains phénomènes qui peuvent survenir dans le fonctionnement de ces systèmes tels que : les modes glissants ou le comportement *Zeno* ([JRÅ99] ; [Lib03] ; [UGS09]).

Ce formalisme se base sur l'utilisation des inclusions différentielles ([BR06]) et d'applications multivaluées. Notons par  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble défini tel que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) := \{S : S \subset \mathbb{R}^n\}. \quad (\text{A.3})$$

L'application multivaluée considérée ici, est donnée par la définition suivante [Cor08] :

**Définition A.1.** Pour une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , on définit l'application multi-valuée de Filippov  $\mathcal{F}_f$  telle que :

$$\mathcal{F}_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad (\text{A.4a})$$

$$x \mapsto \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu(S)=0} \overline{\text{conv}} \{f(\eta) : \eta \in B(x, \delta) \setminus S\}, \quad (\text{A.4b})$$

où  $\mu$  représente la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ .  $\diamond$

**Exemple A.2** (Exemple avec la fonction signe). Considérons l'équation différentielle (A.1) avec  $f$  définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ x_0 & \text{si } x = 0, (x_0 \in \mathbb{R}), \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Examinons à quoi correspond l'application  $\mathcal{F}_f$  dans ce cas. Ici, l'ensemble  $B(x, \delta)$  correspond à  $]x - \delta, x + \delta[$ .

- Plaçons nous d'abord sur un point  $x > 0$ . La définition de  $\mathcal{F}_f$  dans (A.4) nous invite à considérer  $f(]x - \delta, x + \delta[ \setminus S)$ , où  $S$  est un ensemble de mesure nulle. Ici, il existe  $\delta_0 = x > 0$  tel que : quel que soit  $0 < \delta \leq \delta_0$  et  $S$  de mesure nulle, on a

$$]x - \delta, x + \delta[ \setminus S \subset ]0, +\infty[, \quad (\text{A.6})$$

et donc,

$$f(\eta) = 1, \forall \eta \in ]x - \delta, x + \delta[ \setminus S, \quad (\text{A.7})$$

ou encore

$$f(]x - \delta, x + \delta[ \setminus S) = \{1\}. \quad (\text{A.8})$$

Puisque  $\overline{\text{conv}}\{1\} = \{1\}$ , on a :

$$\mathcal{F}_f(x) = \{1\}, \text{ si } x > 0. \quad (\text{A.9})$$

- Idem lorsqu'on se place sur un point tel que  $x < 0$ , on aboutit à :

$$\mathcal{F}_f(x) = \{-1\}, \text{ si } x < 0. \quad (\text{A.10})$$

- À présent on se place sur le point  $x = 0$ . Sur toute boule centrée en 0, la fonction

---

prend trois valeurs. Pour tout  $\delta > 0$ , on a donc :

$$\begin{aligned} f([\!-\delta, \delta]) &= \{-1, x_0, 1\}, \\ f([\!-\delta, \delta] \setminus \{0\}) &= \{-1, 1\}, \end{aligned}$$

si bien que

$$\overline{\text{conv}}f([\!-\delta, \delta]) \cap \overline{\text{conv}}f([\!-\delta, \delta] \setminus \{0\}) = [\min\{-1, x_0\}, \max\{1, x_0\}] \cap [-1, 1] = [-1, 1]. \quad (\text{A.11})$$

Plus généralement, on a

$$[-1, 1] \subseteq \overline{\text{conv}}f([\!-\delta, \delta] \setminus S),$$

quel que soit  $S$  de mesure nulle, et quel que soit  $x_0$  et  $\delta > 0$ . Par conséquent,

$$\mathcal{F}_f(0) = [-1, 1]. \quad (\text{A.12})$$

■

**Définition A.2** ([Cor08]). Une fonction  $\Phi : [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est absolument continue s'il existe une fonction intégrable (au sens de Lebesgue)  $\kappa : [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

$$\Phi(t) - \Phi(t_a) = \int_{t_a}^t \kappa(s) ds, \forall t \in [t_a, t_b].$$

◇

Pour un champ de vecteurs  $f$  discontinu et localement born e, une solution de Filippov est définie comme suit [Fil13] :

**Définition A.3.** Une solution de Filippov est une fonction absolument continue  $\Phi : [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que l'inclusion différentielle  $\dot{\Phi}(t) \in \mathcal{F}_f(\Phi(t))$  est vérifiée pour presque tout  $t \in [t_a, t_b] \subset [0, \infty[$ , avec  $\mathcal{F}_f$  défini par (A.4). ◇

**Définition A.4.** On dit que  $\mathcal{F}_f$  remplit les *conditions basiques* si elle est semi-continue supérieurement, fermée, convexe et bornée. ◇

L'existence d'au moins une solution pour une condition initiale donnée est garantie si  $\mathcal{F}_f$  remplit les *conditions basiques* [Fil13, p. 77].

Pour terminer sur cette annexe, on rappelle le résultat suivant issu de [BR06, Chap.1, p.7] que l'on présente sous forme de proposition :

**Proposition A.1.** Si  $(t, x) \mapsto f(t, x)$  est localement bornée et Lebesgue mesurable par rapport à  $(t, x)$  sur  $[0, \infty[ \times \mathbb{R}^n$ , alors  $\mathcal{F}_f$  satisfait les conditions basiques définies précédemment.

# Annexe B

## Exemple illustrant la remarque 2.3.5

Dans cette annexe, nous donnons un exemple de système stabilisable quadratiquement via un correcteur linéaire mais dont le modèle augmenté ne possède pas cette propriété.

Considérons la paire  $(A(\theta), B_0)$  dont les matrices sont définies comme suit :

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} -6.1 \\ 12.2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Le vecteur de paramètres incertains est défini tel que  $\theta = [\theta_1 \ \theta_2]^\top$  avec

$$\theta_1 \in \Theta_1 := [-11, 11], \theta_2 \in \Theta_2 := [-9, 10].$$

Supposons que la matrice de sortie  $C$  s'écrive comme suit :

$$C = [0 \ 1].$$

Dans ce cas, les matrices du modèle augmenté sont données à l'image de (2.5) par :

$$\bar{A}(\theta) = \begin{bmatrix} A(\theta) & \mathbf{0}_2 \\ C & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Partant de ces expressions, il est possible de trouver un correcteur linéaire de gain  $K$  qui stabilise quadratiquement le système défini par les matrices (B.1). Cette matrice  $K$  et la matrice  $P$  correspondante sont données par :

$$K = [9.2 \ -0.4], P = \begin{bmatrix} 1.03 & 0.12 \\ 0.12 & 0.077 \end{bmatrix}.$$

Cependant, le problème n'admet pas de solution pour le système défini par les ma-

---

trices (B.2).

# Annexe C

## Quelques propriétés de la fonction $\phi_c$ définie dans (2.17)

Dans cette annexe, nous présentons quelques propriétés liées à la fonction  $\phi_c$  définie dans (2.17) et qui seront utilisés dans les développements du chapitre 2.

**Lemme C.0.1** ([Tar+11, p. 128]). *Pour tout vecteur  $e \in \mathbb{R}^m$ ,  $\phi_c(e)$  défini dans (2.17) vérifie la relation suivante :*

$$\phi_c(e)^\top T(\phi_c(e) + e) \leq 0 \quad (\text{C.1})$$

pour toute matrice  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  telle que

$$c_k T_{k,k} \geq \sum_{k \neq j, j=1}^m c_j |T_{k,j}|, \quad \forall k \in \mathcal{I}_m. \quad (\text{C.2})$$

**Lemme C.0.2** ([Tar+11, p. 43]). *Considérons  $e_1 \in \mathbb{R}^m$  et  $e_2 \in \mathbb{R}^m$ . Si  $(e_1 - e_2) \in \mathcal{P}(c)$  avec  $\mathcal{P}(c)$  définis comme dans (2.37), alors*

$$\phi_c(e_1)^\top T(\phi_c(e_1) + e_2) \leq 0 \quad (\text{C.3})$$

pour toute matrice diagonale définie positive  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

**Lemme C.0.3** ([Tar+11, p. 41]). *Pour tout vecteur  $e \in \mathbb{R}^m$ ,  $\phi_c(e)$  défini dans (2.17) satisfait*

$$\phi_c(e)^\top T(\phi_c(e) + e) \leq 0 \quad (\text{C.4})$$

pour toute matrice diagonale définie positive  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

**Proposition C.4.** *Soit un vecteur  $c \in \mathbb{R}_{>0}^m$ . Pour une matrice symétrique  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , la condition (C.2) est vérifiée si et seulement s'il existe des matrices symétriques  $T^+$ ,  $T^- \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , avec  $T = T^+ - T^-$ ,  $T_{k,j}^+ = T_{j,k}^+ \geq 0$ ,  $T_{k,j}^- = T_{j,k}^- \geq 0$  et  $T_{k,k}^- = 0$  pour tout*

---

$(j, k) \in \mathcal{I}_m \times \mathcal{I}_m$  et vérifiant :

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_m \setminus \{k\}} c_j (T_{k,j}^+ + T_{j,k}^-) \leq c_k T_{k,k}^+, \quad \forall k \in \mathcal{I}_m.$$

Cette proposition est basée sur les résultats présentés dans [\[D'A+01\]](#).

# Bibliographie

- [BR06] Andrea Bacciotti et Lionel Rosier. *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer Science & Business Media, (2006).
- [Bar83] B. Ross Barmish. “Stabilization of uncertain systems via linear control”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* (1983), p. 848-850.
- [Ben+18] Gaetan Beneux, Daniele Astolfi, Pierre Riedinger, Jamal Daafouz et Louis Grimaud. “Integral action for uncertain switched affine systems with application to DC/DC converters”. In : *2018 European Control Conference (ECC)*. IEEE. (2018), p. 795-800.
- [Ben+19] Gaëtan Beneux, Pierre Riedinger, Jamal Daafouz et Louis Grimaud. “Adaptive stabilization of switched affine systems with unknown equilibrium points : Application to power converters”. In : *Automatica* (2019), p. 82-91.
- [BM08] Franco Blanchini et Stefano Miani. *Set-theoretic methods in control*. Springer, (2008).
- [BS04] Paolo Bolzern et William Spinelli. “Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point”. In : *Proceedings of the 2004 American Control Conference*. IEEE. (2004), p. 3890-3895.
- [Boy+94] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron et Venkataramanan Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Siam, (1994).
- [Cer99] Francesca Maria Ceragioli. “Discontinuous ordinary differential equations and stabilization”. In : *Doctor Dissertation : Universita degli Studi di Firenze* (1999).
- [Cho13] Byungcho Choi. *Pulsewidth modulated DC-to-DC power conversion : circuits, dynamics, and control designs*. John Wiley & Sons, 2013.
- [CP+11] Angel Cid-Pastor, Roberto Giral, Javier Calvente, Vadim I Utkin et Luis Martinez-Salamero. “Interleaved converters based on sliding-mode control in a ring configuration”. In : *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers* (2011), p. 2566-2577.
- [CL55] Earl A Coddington et Norman Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. Tata McGraw-Hill Education, (1955).

- [Cor08] Jorge Cortes. “Discontinuous dynamical systems”. In : *IEEE Control systems magazine* (2008), p. 36-73.
- [D’A+01] Fernando J D’Amato, Mario A Rotea, AV Megretski et UT Jönsson. “New results for analysis of systems with repeated nonlinearities”. In : *Automatica* ((2001)), p. 739-747.
- [DG16] Grace S Deaecto et José C Geromel. “Stability analysis and control design of discrete-time switched affine systems”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* (2016), p. 4058-4065.
- [Dea+10] Grace S Deaecto, José C Geromel, Felipe S Garcia et José A Pomilio. “Switched affine systems control design with application to DC–DC converters”. In : *IET control theory & applications* (2010), p. 1201-1210.
- [DeC+00] Raymond A DeCarlo, Michael S Branicky, Stefan Pettersson et Bengt Lenartson. “Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems”. In : *Proceedings of the IEEE* (2000), p. 1069-1082.
- [Fil13] Aleksej Fedorovič Filippov. *Differential equations with discontinuous righthand sides : control systems*. Springer Science & Business Media, (2013).
- [Fra77] Bruce A Francis. “The linear multivariable regulator problem”. In : *SIAM Journal on Control and Optimization* (1977), p. 486-505.
- [FW76] Bruce A Francis et Walter Murray Wonham. “The internal model principle of control theory”. In : *Automatica* (1976), p. 457-465.
- [Ful69] Anthony Thomas Fuller. “In-the-large stability of relay and saturating control systems with linear controllers”. In : *International Journal of Control* (1969), p. 457-480.
- [GST09] Rafal Goebel, Ricardo G Sanfelice et Andrew R Teel. “Hybrid dynamical systems”. In : *IEEE Control Systems Magazine* (2009), p. 28-93.
- [GST12] R Goedel, Ricardo G Sanfelice et Andrew R Teel. *Hybrid dynamical systems : modeling stability, and robustness*. (2012).
- [Gov+14] Srinath Govindaswamy, Laurentiu Hetel, Andrey Polyakov et Thierry Floquet. “On relay control for discrete time systems using linear matrix inequalities”. In : *2014 European Control Conference (ECC)*. IEEE. (2014), p. 2225-2230.
- [Gue+10] Josep M Guerrero, Juan C Vasquez, José Matas, Luis García De Vicuña et Miguel Castilla. “Hierarchical control of droop-controlled AC and DC microgrids—A general approach toward standardization”. In : *IEEE Transactions on industrial electronics* (2010), p. 158-172.
- [GGB18] Deepesh Prakash Guragain, Pramod Ghimire et Kapil Budhathoki. “Implementation of FPGA Based Image Processing Algorithm Using Xilinx System Generator”. In : *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)* (2018), p. 2395-0056.

- 
- [HSG17] Sabrina Hadjeras, C Albea Sanchez et Germain Garcia. “Hybrid adaptive control of the boost converter”. In : *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE. (2017), p. 5720-5725.
- [Háj79] Otomar Hájek. “Discontinuous differential equations, I”. In : *Journal of Differential Equations* (1979), p. 149-170.
- [HJT12] Wilhelmus PMH Heemels, Karl Henrik Johansson et Paulo Tabuada. “An introduction to event-triggered and self-triggered control”. In : *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE. (2012), p. 3270-3285.
- [Hee+10] WPMH Heemels, B De Schutter, J Lunze et M Lazar. “Stability analysis and controller synthesis for hybrid dynamical systems”. In : *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (2010), p. 4937-4960.
- [HB15] Laurentiu Hetel et Emmanuel Bernuau. “Local stabilization of switched affine systems”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* (2015), p. 1158-1163.
- [HFF15] Laurentiu Hetel, Emilia Fridman et Thierry Floquet. “Variable structure control with generalized relays : A simple convex optimization approach”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* (2015), p. 497-502.
- [HB98] Haitham Hindi et Stephen Boyd. “Analysis of linear systems with saturation using convex optimization”. In : *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 98CH36171)*. IEEE. (1998), p. 903-908.
- [HLC02] Tingshu Hu, Zongli Lin et Ben M Chen. “Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation”. In : *Systems & control letters* (2002), p. 97-112.
- [HC07] Yuehui Huang et K Tse Chi. “Circuit theoretic classification of parallel connected DC–DC converters”. In : *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers* (2007), p. 1099-1108.
- [JRÅ99] Karl Henrik Johansson, Anders Rantzer et Karl Johan Åström. “Fast switches in relay feedback systems”. In : *Automatica* (1999), p. 539-552.
- [Kad17] Zohra Kader. “Commande et observation des systèmes affines à commutations”. Thèse de doct. Lille 1, (2017).
- [Kad+18a] Zohra Kader, Christophe Fiter, Laurentiu Hetel et Lotfi Belkoura. “Stabilization by a relay control using non-quadratic Lyapunov functions”. In : *Automatica* (2018), p. 353-366.
- [Kad+18b] Zohra Kader, Christophe Fiter, Laurentiu Hetel et Lotfi Belkoura. “Stabilization of switched affine systems with disturbed state-dependent switching laws”. In : *International Journal of Robust and Nonlinear Control* ((2018)), p. 582-595.
- [KSV91] John G Kassakian, Martin F Schlecht et George C Verghese. *Principles of power electronics*. Addison-Wesley Reading, MA, (1991).

- [Kaz08] Marian K Kazimierczuk. *Pulse-width modulated DC-DC power converters*. Wiley Online Library, (2008).
- [Kre+89] Philip T Krein, Joseph Bentsman, Richard M Bass et BC Lesieutre. “On the use of averaging for the analysis of power electronic systems”. In : *20th annual ieee power electronics specialists conference*. IEEE. (1989), p. 463-467.
- [Kre+18] Jérémie Kreiss, Jean-François Trégouët, Romain Delpoux, Jean-Yves Gauthier et Xuefang Lin-Shi. “A geometric point of view on parallel interconnection of buck converters”. In : *2018 European Control Conference (ECC)*. IEEE. (2018), p. 70-75.
- [KV20] Nikhil Kumar et Mummadi Veerachary. “Stability region based robust controller design for high-gain boost DC-DC converter”. In : *IEEE Transactions on Industrial Electronics* (2020), p. 2246-2256.
- [Lib03] Daniel Liberzon. *Switching in systems and control*. Springer Science & Business Media, (2003).
- [Mar+09] Sébastien Mariéthoz, Stefan Almér, Mihai Bâja, Andrea Giovanni Beccuti, Diego Patino, Andreas Wernrud, Jean Buisson, Hervé Cormerais, Tobias Geyer, Hisaya Fujioka et al. “Comparison of hybrid control techniques for buck and boost DC-DC converters”. In : *IEEE transactions on control systems technology* (2009), p. 1126-1145.
- [MNB02] Sudip K Mazumder, Ali H Nayfeh et A Borojevic. “Robust control of parallel DC-DC buck converters by combining integral-variable-structure and multiple-sliding-surface control schemes”. In : *IEEE Transactions on Power Electronics* (2002), p. 428-437.
- [MC76] Richard D Middlebrook et Slobodan Cuk. “A general unified approach to modelling switching-converter power stages”. In : *1976 IEEE Power Electronics Specialists Conference*. IEEE. (1976), p. 18-34.
- [Ola+09] Carlos Olalla, Ramon Leyva, Abdelali El Aroudi et Isabelle Queinnec. “Robust LQR control for PWM converters : An LMI approach”. In : *IEEE Transactions on industrial electronics* (2009), p. 2548-2558.
- [OM03] Matthew Ownby et Wagdy H Mahmoud. “A design methodology for implementing DSP with Xilinx® System Generator for Matlab”. In : *Proceedings of the 35th Southeastern Symposium on System Theory, 2003*. IEEE. (2003), p. 404-408.
- [Pet85] Ian Petersen. “Quadratic stabilizability of uncertain linear systems : existence of a nonlinear stabilizing control does not imply existence of a linear stabilizing control”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* (1985), p. 291-293.
- [Roc+20] Erick Melo Rocha, Walter Barra, Kevin E Lucas, Renan LP Medeiros et David Alejandro Vaca-Benavides. “Design and Experimental Assessment of

- 
- a Robust Voltage Control for DC-DC Converters Considering Components Parametric Uncertainties”. In : *IEEE Access* (2020), p. 109217-109231.
- [SG20] Carolina Albea Sanchez et Germain Garcia. “Robust hybrid control law for a boost inverter”. In : *Control Engineering Practice* (2020), p. 104492.
- [SGZ15] Carolina Albea Sanchez, Germain Garcia et Luca Zaccarian. “Hybrid dynamic modeling and control of switched affine systems : application to DC-DC converters”. In : *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE. (2015), p. 2264-2269.
- [Sho+07] Robert Shorten, Fabian Wirth, Oliver Mason, Kai Wulff et Christopher King. “Stability criteria for switched and hybrid systems”. In : *SIAM review* (2007), p. 545-592.
- [SRSO06] Hebertt J Sira-Ramirez et Ramón Silva-Ortigoza. *Control design techniques in power electronics devices*. Springer Science & Business Media, (2006).
- [Sum+17] Sharmila Sumsurooah, Milijana Odavic, Serhiy Bozhko et Dushan Boroyevich. “Robust stability analysis of a dc/dc buck converter under multiple parametric uncertainties”. In : *IEEE Transactions on Power Electronics* (2017), p. 5426-5441.
- [TLC08] Siew-Chong Tan, Yuk-Ming Lai et K Tse Chi. “General design issues of sliding-mode controllers in DC–DC converters”. In : *IEEE Transactions on Industrial Electronics* (2008), p. 1160-1174.
- [Tar+11] Sophie Tarbouriech, Germain Garcia, João Manoel Gomes da Silva Jr et Isabelle Queinnec. *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. Springer Science & Business Media, (2011).
- [TV97] V Joseph Thottuvelil et George C Verghese. “Analysis and control design of paralleled DC/DC converters with current sharing”. In : *Proceedings of APEC 97-Applied Power Electronics Conference*. IEEE. (1997), p. 638-646.
- [TD19] Jean-François Tréguët et Romain Delpoux. “New framework for parallel interconnection of buck converters : Application to optimal current-sharing with constraints and unknown load”. In : *Control Engineering Practice* (2019), p. 59-75.
- [TD17] Jean-François Tréguët et Romain Delpoux. “Parallel interconnection of buck converters revisited”. In : *IFAC-PapersOnLine* (2017), p. 15792-15797.
- [Tro+12] Alexandre Trofino, César C Scharlau, Tiago JM Dezuo et Mauricio C de Oliveira. “Switching rule design for affine switched systems with  $\mathcal{H}_\infty$  performance”. In : *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE. (2012), p. 1923-1928.
- [TT+84] Iakov Zalmanovich Tsytkin, Yakov Z Tsytkin et al. *Relay control systems*. CUP Archive, (1984).
- [UGS09] Vadim Utkin, Jürgen Guldner et Jingxin Shi. *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. CRC press, (2009).

- [Xil] “Vivado Design Suite User Guide : Model-Based DSP Design Using System Generator (v2019.2)”. In : (2019).
- [WLC02] Qing-Guo Wang, Tong H Lee et Lin Chong. *Relay feedback : analysis, identification and control*. Springer Science & Business Media, (2002).
- [Yos+13] Victor Leonardo Yoshimura, Edvaldo Assunção, Emerson Ravazzi Pires Da Silva, Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira et Edson Italo Mainardi Júnior. “Observer-based control design for switched affine systems and applications to DC–DC converters”. In : *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* (2013), p. 535-543.
- [Yu06] Cheng-Ching Yu. *Autotuning of PID controllers : A relay feedback approach*. Springer Science & Business Media, (2006).



## FOLIO ADMINISTRATIF

### THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON OPEREE AU SEIN DE L'INSA LYON

NOM : NDOYE

DATE de SOUTENANCE : 07/12/2021

Prénoms : Aboubacar

TITRE : Contribution à la commande robuste de systèmes à relais et sa mise en œuvre expérimentale : Application aux convertisseurs de puissance DC-DC

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2021LYSEI085

Ecole doctorale : EEA (ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE et AUTOMATIQUE)

Spécialité : Automatique

RESUME : Le travail présenté dans cette thèse comporte deux volets. Le premier est orienté sur la synthèse des lois de commande stabilisantes pour les systèmes à relais en prenant en compte les incertitudes du modèle. Dans la littérature, la plupart des résultats présentés sont dédiés à la stabilisation de ces systèmes en considérant le modèle comme parfaitement connu. Par conséquent, ces résultats ne sont pas exploitables en pratique où les incertitudes peuvent exister. Nous nous sommes dès lors intéressés à cette problématique. La synthèse de commande proposée se base sur la théorie de Lyapunov, l'introduction d'un contrôleur dynamique et sur l'existence d'une commande continue par retour d'état stabilisante. De plus, sous certaines conditions, une méthode constructive de synthèse de gains du contrôleur, basée sur les inégalités matricielles linéaires (Linear Matrix Inequalities (LMI) en anglais), est fournie. Le deuxième volet de cette thèse porte sur la mise en œuvre expérimentale de la loi de commande à relais avec une application sur l'interconnexion de convertisseurs DC-DC en parallèle. Nous porterons une attention particulière sur la prise de mesures des grandeurs électriques malgré les fréquences variables de la commande. La validation expérimentale de notre approche est effectuée en utilisant une MicrolabBox qui est un équipement dSpace permettant le prototypage rapide de code VHDL sur FPGA. Finalement, une comparaison avec l'approche classique basée sur la technique de la Modulation à Largeur d'Impulsion (MLI) est présentée afin de bien mettre en évidence les avantages et inconvénients de chacune d'elles.

MOTS-CLÉS : Commande robuste, systèmes à relais, convertisseurs DC-DC en parallèle, LMI

Laboratoire (s) de recherche : Laboratoire Ampère – UMR CNRS 5005 – INSA Lyon

Directeur de thèse : LIN-SHI Xuefang

Président de jury :

Composition du jury :

Rapporteurs :

JUNGERS Marc, GODOY Emmanuel

Examinatrice :

TARBOURIECH Sophie

Directrice de thèse :

LIN-SHI Xuefang

Co-encadrants de thèse :

DELPOUX Romain, TRÉGOUËT Jean-François