



HAL
open science

Etude du procédé de densification par caléfaction de composites C/C, modélisation, optimisation du contrôle et du bilan énergétique

Christian Klein

► **To cite this version:**

Christian Klein. Etude du procédé de densification par caléfaction de composites C/C, modélisation, optimisation du contrôle et du bilan énergétique. Matériaux. Université Bordeaux 1, 2015. Français. NNT: . tel-03615915

HAL Id: tel-03615915

<https://hal.science/tel-03615915>

Submitted on 25 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE
présentée à
l'Université BORDEAUX 1

Etude du procédé de densification par caléfaction de composites C/C, modélisation, optimisation du contrôle et du bilan énergétique

Christian Klein

Soutenance 15 décembre 2015

Encadrement et suivi :		
Sylvie Bonnamy	Directrice de Recherche, CNRS/Université Orléans	Présidente
Frédéric Topin	Maître de Conférences, IUSTI, Polytech Marseille	Rapporteur
Jean-Marc Dedulle	Maître de Conférences, Grenoble-INP Phelma	Rapporteur
Gérard L. Vignoles	Professeur, LCTS, Université Bordeaux	Directeur de thèse
Yves du Terrail Couvat	Ingénieur d'études, SIMAP Grenoble	Directeur de thèse
Cédric Descamps	Ingénieur docteur, Safran-Herakles Bordeaux	Ingénieur Herakles
Pascale Jacquemard	Ingénieur docteur, Safran-MBD Villeurbanne	Ingénieur MBD
Pierre-Yvan Theyry	Ingénieur docteur, Safran-MBD Villeurbanne	Ingénieur MBD

Table des matières

1. Introduction générale	1
2. Bibliographie sur les C/C et leur élaboration	4
2.1. Elaboration des matériaux composites carbone/carbone - généralités	4
2.1.1. Elaboration du renfort	4
2.1.2. Elaboration de la matrice	7
2.2. Présentation des procédés d'infiltration par voie gazeuse	9
2.2.1. Le procédé CVI - généralités	9
2.2.2. Le procédé CVI - diverses variantes	10
2.2.3. Le procédé par caléfaction	12
2.3. Bibliographie sur la modélisation du procédé par caléfaction - sans ébullition et sans couplage électromagnétique direct	18
2.3.1. Modèle 2D complet	20
2.3.2. Modèle 1D simplifié adimensionnel	23
2.4. Objectifs de la thèse	26
3. Bibliographie sur l'ébullition et le transport en milieux poreux et leur modélisation	28
3.1. Capillarité en milieu poreux non saturé	28
3.2. Ecoulement en milieu poreux	31
3.3. Changement d'état en milieu poreux	38
3.4. Applications de l'ébullition en milieu poreux	41
3.5. Modélisation	41
3.5.1. Résumé global de la modélisation d'écoulements en milieux poreux .	41
3.5.2. Conservation d'énergie lors de l'ébullition	43
3.6. Objectifs pour la thèse	45
4. Notions de base sur le chauffage par induction	46
4.1. Introduction générale	46
4.2. L'induction, calcul des courants, chauffage	49
4.3. Considérations du circuit électrique	50
4.4. Objectifs pour la thèse	54
5. Construction du modèle	55
5.1. Electromagnétisme, chauffage par induction	55
5.1.1. Chauffage par induction, équation spatiale du potentiel vecteur . . .	55
5.1.2. Conditions de bord	57
5.1.3. Motivation d'une étude de circuit électrique et présentation du dispositif	58
5.1.4. Equations complémentaires des deux parties de modèle	61
5.1.5. Validation numérique	64
5.1.6. Formulation analytique avec condition limite en bord de charge . . .	70

5.2.	Transport massique diphasique	76
5.2.1.	Conservation de la masse	76
5.2.2.	Formulation des vitesses	77
5.3.	Le transport de la chaleur avec l'ébullition	78
5.3.1.	Point de départ de la modélisation : Modèle d'ébullition de Wang et Beckermann	79
5.3.2.	Reformulation sous forme d'enthalpie volumique	80
5.3.3.	Calcul du taux d'ébullition	86
5.3.4.	Conditions de bord	86
5.3.5.	Implémentation numérique	88
5.3.6.	Formulation analytique du modèle d'ébullition	91
5.3.7.	Validation numérique	95
5.4.	Dépôt et bilan d'espèces	98
5.4.1.	La réaction chimique de craquage	98
5.4.2.	Bilan d'espèces gazeuses	99
5.4.3.	Résumé des formules liées à la réaction chimique du dépôt	104
5.5.	Résumé, grandeurs caractéristiques et découplage	104
5.6.	Traitement du couplage, structure de la simulation entière	110
6.	Etude numérique du procédé pour un cas concret	115
6.1.	Domaine d'études et conditions de bord	115
6.2.	Propriétés des matériaux et fluides	124
6.3.	Etude préliminaire - Cycle à puissance constante	131
6.4.	Validation physique de la simulation par comparaison avec les mesures	134
6.4.1.	Evolution des grandeurs électriques	134
6.4.2.	Evolution de la température	139
6.4.3.	Comparaison de grandeurs globales	147
6.5.	Analyse des résultats, les in-observables	149
6.5.1.	Profils de saturation lors du préchauffage	149
6.5.2.	Porosité à différentes étapes	151
6.5.3.	Largeur et vitesse au cours du temps	153
6.5.4.	Fraction massique de l'espèce X à différentes étapes	158
6.6.	Conclusion	161
7.	Exploitation du modèle	162
7.1.	Etude de sensibilité	162
7.1.1.	Rendement électrique en fonction de l'écartement des spires	162
7.1.2.	D'autres influences étudiés dans des travaux précédents	165
7.2.	Piste d'optimisation de la loi de pilotage : Maximiser la vitesse de front	166
7.2.1.	Existence d'une vitesse maximale	167
7.2.2.	Optimisation de la vitesse à quelques états d'avancement	169
8.	Résumé et perspectives	175

Annexe :

A. Liste des symboles	VIII
B. Liste détaillée des publications nommées pour la mécanique des fluides	XIV
C. Chauffage par induction : Equations de l'électromagnétisme	XV
C.1. Equations de Maxwell	XV
C.2. Lois de comportement, charges et courants libres	XVI
C.3. L'électromagnétisme 3D : Les potentiels vecteur et scalaire complexes	XVIII
C.4. Conditions lors d'une transition de matériau	XXI
C.5. Calculs sur le circuit électromagnétique	XXII
C.6. Calcul de densité de courant dans une spire à tension donnée	XXIII
D. Fichier Maple pour le calcul du potentiel vecteur au bord de la charge	XXV
E. Application de la condition de bord sur A pour deux structures de disque	XXXII
F. The modified enthalpy equation	XLVI
G. Calcul analytique de la taille de zone diphasique en 1D	L
H. Stratégie pour la réalisation d'un calcul monodimensionnel thermique/ébullition sous Maple	LIV
I. Fichier Maple pour la validation numérique du modèle d'ébullition	LVI
J. Adimensionnement des équations de bilan	LXXVIII
J.1. Dépôt	LXXVIII
J.2. Diffusion d'espèce	LXXIX
J.3. Conservation de masse	LXXX
J.4. Conservation d'enthalpie volumique	LXXXIII
J.5. Longueur caractéristique du procédé	LXXXVI
J.6. Chauffage inductif	LXXXVIII
K. Identification de propriétés pour le modèle	XC
K.1. Perméabilités absolues aux gaz	XC
K.1.1. Description du montage	XCI
K.1.2. Résultats	XCII
K.2. Perméabilités relatives et pression capillaire	XCIII
K.2.1. Description du montage	XCIV
K.2.2. Avancement et travail restant	XCVI
K.3. Conductivités électriques	CI
K.3.1. A température ambiante	CII
K.4. Mesures sur le réacteur	CIV
K.4.1. Décrément logarithmique	CIV
K.4.2. Boucle de Rogowski	CVII
K.4.3. Données fournies par l'installation industrielle	CIX
L. Formules liées à l'expérience des perméabilités absolues	CXII

M. Liste des propriétés des matériaux

CXIII

1. Introduction générale

Les matériaux composites sont définis comme des matériaux constitués d'au moins deux phases physico-chimiquement distinctes. Avec une telle composition il est possible d'obtenir des propriétés (par exemple mécaniques) de l'ensemble supérieures à celles des constituants séparés.

On trouve des exemples de tels matériaux à tout niveau de technicité, depuis des matériaux traditionnels et/ou bas de gamme (torchis, asphalte, etc) jusqu'à des matériaux à très forte valeur ajoutée (composites carbone/époxy employés en aéronautique par exemple).

Le concept le plus courant de composite fait appel à une matrice en général polymère, renforcée par des fibres (verre, carbone, Kevlar, etc).

L'inclusion de fibres de carbone permet d'obtenir des propriétés mécaniques très élevées et modifiables à façon, tout en gardant la légèreté de l'ensemble grâce à la basse densité de la matrice (Savage, 1993).

Les composites carbone/carbone permettent l'utilisation aux hautes températures. En effet, les matrices polymères sont décomposées à des températures modérées, et les matrices métalliques sont très denses ; pour y remédier, on emploie une matrice de carbone : un carbone dont la structure diffère un peu de celle des fibres. L'association de ces constituants intrinsèquement fragiles permet paradoxalement d'avoir un comportement non fragile, car la fissuration reste localisée dans le matériau, à cause de la complexité de l'interaction des fibres et de la matrice. Ces matériaux ont donc de bonnes propriétés mécaniques qui ne diminuent pas, et même augmentent, pour une très large gamme de températures (i.e. jusqu'à 2500 à 3000 K (Savage, 1993)). Ce sont les plus anciens matériaux de la famille des composites thermosturcturaux (Savage, 1993). C'est ce caractère ultra-réfractaire combiné avec la faible densité de masse qui en a motivé les premiers développements principalement dans le domaine de la propulsion spatiale (Lacoste et al., 2002) (fig. 1a). Grâce à leurs bonnes propriétés mécaniques et thermiques, les C/C sont d'excellents matériaux de freinage (Gouider, 2004; Francois, 2003) (fig. 1b). Ils ont détrôné les autres solutions technologiques sur le marché du freinage d'avions de taille moyenne à élevée. Ils sont également employés pour les pièces les plus chaudes des propulseurs à poudre (fig. 1a).

À part ces applications dans le domaine aérospatial, les composites carbone/carbone sont également utilisés en Formule 1 (fig. 1b) et pour des outillages de fours à haute température (par exemple le four pour tirage de mono-cristaux de silicium par la méthode Czochralski (fig. 1c).

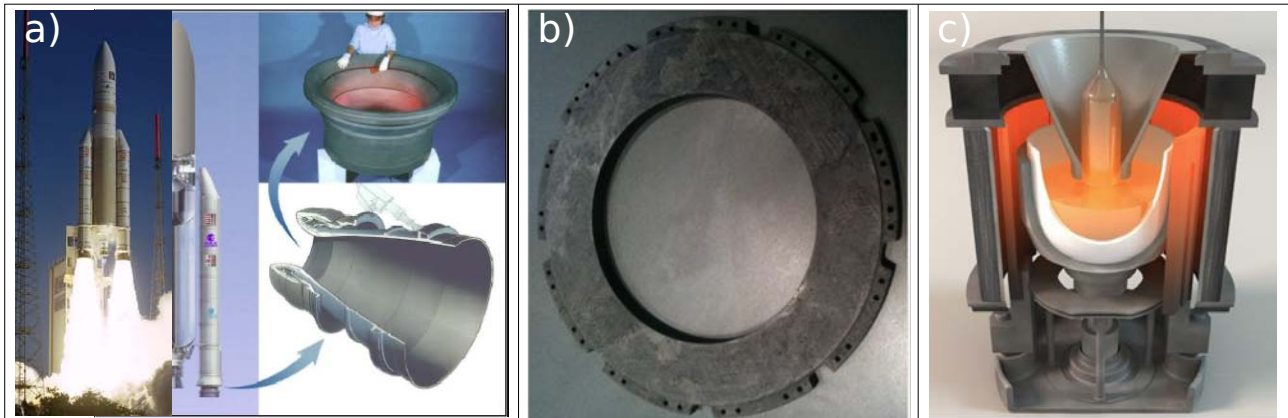


Fig. 1: Applications de composites C/C : a) Tuyère de propulsion spatiale ; b) Photo d'un disque de frein d'avion en composite carbone/carbone après usinage ; c) Four pour tirage de mono-cristaux à haute température

Malgré leur légèreté et leurs bons propriétés mécaniques à haute température, le principal inconvénient des matériaux C/C consiste en leur forte oxydabilité aux températures élevées. On y remédie par des protections anti-oxydation (Bertran, 2013).

Les composites C/C ne sont néanmoins pas encore pleinement exploités à cause de leur élaboration longue et coûteuse. A l'heure actuelle la production au niveau industriel se fait soit par imprégnation avec des brais et pyrolyse, soit par infiltration chimique en voie gazeuse (CVI : chemical vapor infiltration). La première voie nécessite plusieurs cycles d'infiltration et donc une main d'oeuvre coûteuse. Concernant la deuxième voie il est possible de réaliser une densification complète en peu de cycles mais on se retrouve face à des temps d'élaboration très longs d'environ 1 mois.

C'est dans les années 1970 que le CEA met en place le procédé par caléfaction ou « Kalamazoo », qui est une variante de la CVI pour produire des freins d'avions : au lieu d'infiltrer le disque directement avec du gaz, il baigne dans un précurseur liquide (Rovillain et al., 2001). C'est le chauffage du disque qui va porter le précurseur à l'ébullition et apporter le gaz pour la densification. Ainsi le temps d'élaboration peut être réduit à un jour, mais la consommation énergétique pendant ce jour reste comparable à celle de la CVI sur 30 jours. Ce procédé n'est pas encore utilisé à l'échelle industrielle et nécessite encore des éléments de compréhension et d'optimisation afin de pouvoir y arriver. Les premières études du procédé par caléfaction ont été de nature expérimentale jusqu'aux années 2000 (Narcy, 1996; David et al., 1999; Rovillain et al., 2001; Belorgey-Beaugrand, 2000).

La complexité des phénomènes qui entrent en jeu rend la compréhension approfondie du procédé et son optimisation très difficiles. Plusieurs modèles analytiques et numériques ont alors été mis en place. Ces études considèrent que le disque de frein à densifier est entouré par un isolant si bien qu'uniquement du gaz peut pénétrer à l'intérieur (Vignoles et al., 2006). Ceci rapproche l'étude du procédé par caléfaction de celle de la CVI à gradient thermique qui est déjà plus élaborée. Le chauffage du disque se fait dans ces études via un suscepteur. La présente thèse se situe comme une suite de ces travaux numériques avec deux buts : dans un premier temps nous souhaitons modéliser un procédé par caléfaction sans l'isolant autour du disque et sans suscepteur pour le chauffage. Par rapport aux modèles précédents nous introduisons donc l'ébullition en milieu poreux et le chauffage inductif directement sur le disque en densification. Une fois ce modèle établi, nous souhaitons nous en servir pour optimiser le procédé, notamment pour réduire sa consommation énergétique.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le chapitre 2 nous proposons une revue des techniques de fabrication de disques de frein en composite carbone/carbone dont notamment le procédé par caléfaction utilisé lors de cette thèse. Nous présentons également quelques études expérimentales ainsi que les modèles existants pour ce procédé. Nous concluons sur les manques de ces modèles qu'il s'agit d'améliorer dans ce travail.

Les deux chapitres 3 et 4 présentent les phénomènes à intégrer dans la modélisation (ébullition et chauffage inductif sur le disque) ainsi que la bibliographie spécifique sur la modélisation de ceux-ci. Chacun des deux chapitres conclut avec le cahier de charges des modèles qu'il faudra développer dans la suite.

Le développement de ce nouveau modèle est le sujet du chapitre 5. Nous commençons avec une description détaillée de l'ébullition en milieu poreux et de l'induction et nous enchaînons avec une brève présentation du modèle de dépôt que nous reprenons directement des travaux antérieurs. Nous finissons avec une étude des temps caractéristiques de tous les phénomènes physico-chimiques et de leurs interactions et grandeurs caractéristiques, ce qui nous conduit à un schéma de résolution du problème couplé.

Le sixième chapitre de ce mémoire est consacré à l'application du modèle pour un cas précis, celui présent dans l'entreprise de Safran Messier-Bugatti-Dowty à Lyon (MBD). Après avoir récapitulé les domaines d'études avec leurs conditions de bord ainsi que les propriétés des matériaux nous mettons en évidence l'importance d'un bon pilotage du procédé via l'adaptation de puissance pendant son déroulement. Une analyse de la simulation du procédé entier permet de valider le modèle par rapport à l'expérience tout en mettant en avant des points qui restent à améliorer.

Le dernier chapitre traite une étude de sensibilité du procédé par rapport à quelques paramètres et nous présentons une première idée pour son optimisation. Le fondement de celle-ci est l'optimisation de la vitesse de dépôt dont nous expliquerons notamment l'existence d'une valeur maximale.

2. Bibliographie sur les C/C et leur élaboration

Nous nous intéressons aux composites carbone/carbone et aux procédés permettant de les fabriquer. Ce chapitre, divisé en trois parties, propose de faire un état de l'art sur le sujet. Dans un premier temps nous parlons globalement de la fabrication des matériaux composites carbone/carbone. Dans un deuxième temps nous analysons plus en détail les procédés de fabrication par voie gaz et plus particulièrement le procédé de densification par caléfaction, qui est au centre de ce travail. En dernière partie de ce chapitre nous effectuons une brève synthèse de travaux antérieurs de modélisation concernant ce procédé.

La conclusion de ce chapitre nous amènera à énoncer les objectifs globaux de ce travail.

2.1. Elaboration des matériaux composites carbone/carbone - généralités

Les composites C/C contiennent des fibres en carbone, une matrice également en carbone et éventuellement une porosité résiduelle. Malgré cette apparente simplicité, il existe une très large gamme de matériaux, en termes des propriétés comme de prix, car les constituants et les procédés sont très variés, comme nous le verrons par la suite.

Généralement tout processus de fabrication de frein commence avec la fabrication de fibres en carbone qui sont ensuite assemblées en renfort fibreux présentant déjà la forme générale du disque final. Ensuite ce renfort, appelé également préforme, est densifié avec une matrice en pyrocarbone et l'ensemble est usiné pour lui donner la forme définitive. Le produit densifié par du pyrocarbone possède une haute résistance mécanique et une faible usure (durée de vie longue), mais également une mauvaise résistance à l'oxydation et notamment une mauvaise performance de freinage (Gouider, 2004). Un traitement thermique après la densification permet d'obtenir une meilleure performance de freinage et une résistance à l'oxydation améliorée, accompagnées d'une résistance mécanique plus faible (et une usure plus forte) (Gouider, 2004). On choisit donc lors de la phase de traitement thermique un compromis entre les deux jeux de propriétés opposées.

2.1.1. Elaboration du renfort

Le développement du renfort commence avec l'assemblage de fibres qui peuvent être d'origines différentes telles que (Dekeyrel, 2010; Dupupet, 2008)

- o fibres organiques textiles naturelles ex-cellulose : elles possèdent des propriétés mécaniques faibles et sont à usage unique pour la tenue à l'ablation (rentrée atmosphérique)
- o fibres ex-brai (de houille ou de pétrole) : on distingue les fibres isotropes peu onéreuses avec de faibles propriétés et les fibres mésophasiques très conductrices et rigides mais fragiles

- o fibres synthétiques ex-PAN (polyacrylonitrile) : on distingue les fibres à haut module (HM), à module intermédiaire (IM) et à haute résistance (HR), voir tableau de la fig. 2 :

	HR		IM	HM	
	qualité standard	haute performance		qualité standard	haute performance
Contrainte à rupture(MPa)	3000 à 3500	4000 à 4500	4700 à 7200	1800 à 2500	2000 à 4200
Module d'élasticité (GPa)	220 à 240	235 à 250	275 à 300	350 à 500	350 à 500
Allongement à rupture (%)	1,2 à 1,5	1,6 à 1,8	1,4 à 1,6	0,5 à 0,7	0,3 à 0,5
densité (-)	1,75 à 1,8	1,75 à 1,8	1,7 à 1,8	1,8 à 1,95	1,8 à 1,95

Fig. 2: Propriétés des trois types de fibres ex-PAN.

Source : (Lines, 2003)

Parmi ces types de fibres, les ex-PAN représentent 90% du marché; elles sont également utilisées pour les disques de freins de cette thèse. La suite du chapitre est donc axée sur ce type. Leur traitement se fait selon les étapes suivantes (Johnson et al., 1964; Dupupet, 2008; Giraud, 2011)

- 1) On stabilise les fibres par oxydation à l'air à environ $200 - 300^{\circ}C$ pour les rendre infusibles.
- 2) On carbonise à une température entre 700 et $1500^{\circ}C$ sous atmosphère d'azote.
- 3) Les fibres carbonisées peuvent être soumises à un traitement thermique à $2500^{\circ}C$ (graphitisation).
- 4) Finalement les fibres sont soumises à un traitement de surface qui caractérise l'interface fibre/matrice (les zones de contact entre les fibres et le matrice) et donc les propriétés du matériau composite final.

A partir des fibres, il y a de nombreuses structures différentes de renforts qui se distinguent selon leur qualité nécessaire pour l'application et selon leur complexité d'élaboration. On passe de fibres (1D) jusqu'au système 3D comme représenté sur la figure 3. Quelques exemples correspondants sont représentés sur la figure 4. Ces listes ne sont bien entendu pas exhaustives.

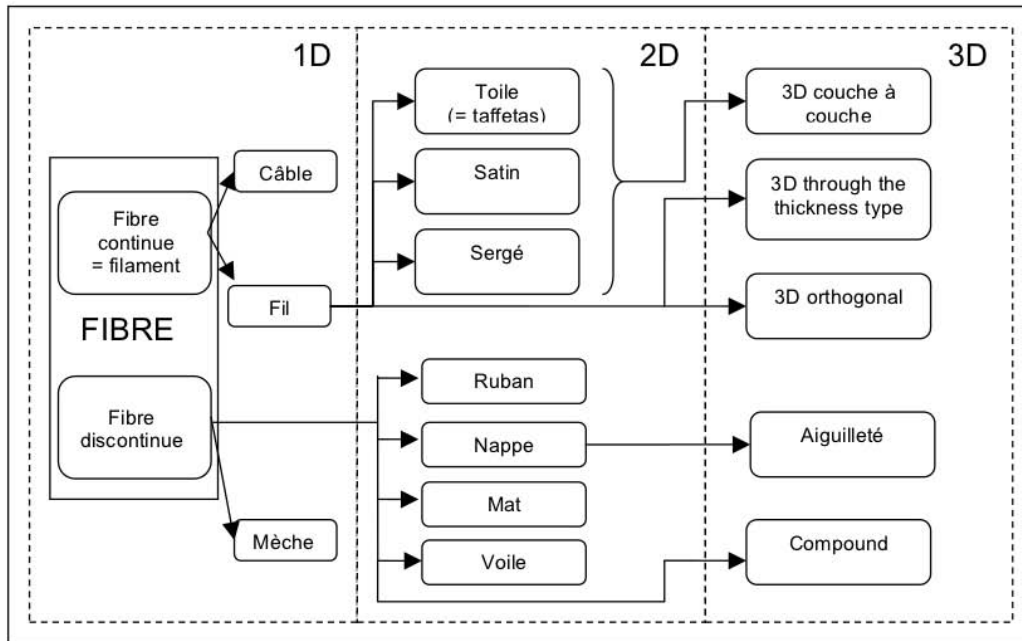


Fig. 3: Quelques structures de renfort du mono-dimensionnel jusqu’au tri-dimensionnel. En bleu nous avons marqué le cheminement choisi par MBD.

Source : (Lines, 2003)

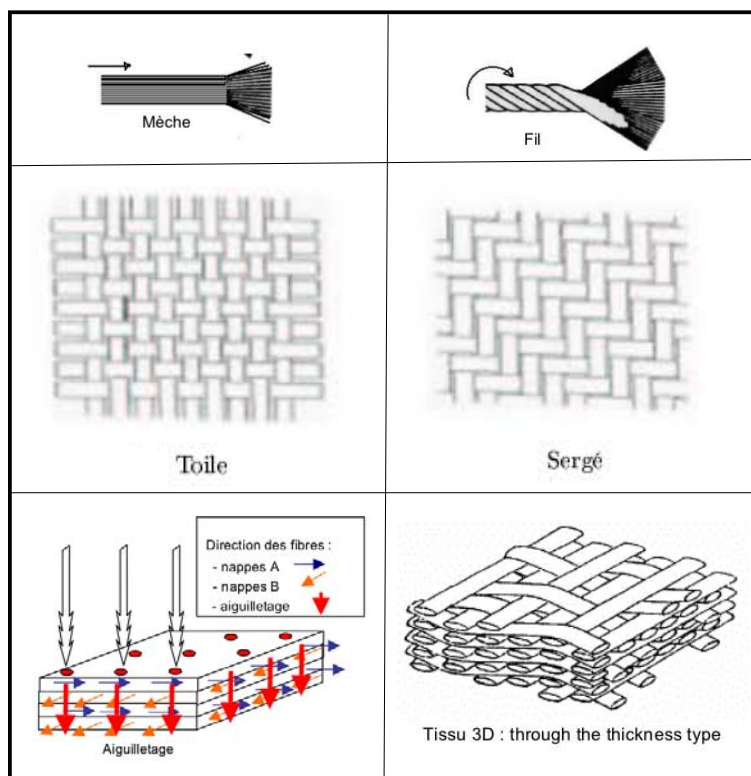


Fig. 4: Quelques exemples de renforts 1D (en haut), 2D (milieu) 3D (en bas). L’aiguilletage présenté en bas à gauche consiste à superposer différentes nappes 2D et à traverser ensuite le système avec des aiguilles.

Ainsi on arrache quelques fibres de chaque nappe qui vont ensuite établir un contact avec la couche de dessus ou dessous pour ainsi maintenir la structure 3D.

Sources : (Lines, 2003; Nadeau, 2004)

Le renfort des freins utilisés pour cette thèse commence avec des fibres continues qui sont tissées en câbles, ensuite en nappes $3 \times 60^\circ$ qui finalement sont aiguilletées.

2.1.2. Elaboration de la matrice

Le renfort se présente déjà sous la même forme que le produit densifié qui va ensuite être traité (découpé, percé, poli,...). On parle de préforme. Elle ne fait qu'environ 5 à 25% de fraction volumique et elle est facilement déformable.

On remplit alors la préforme avec une matrice pour lui donner les propriétés finales. Le matériau de la matrice, qui détermine les propriétés mécaniques, dépend du procédé envisagé et son paramétrage. On distingue essentiellement deux types de structures chimiques qui dérivent du graphite monocristallin (densité de $2.267g/cm^3$; fortement anisotrope dans ses propriétés électriques, thermiques et mécaniques; à la fois dotée de bonnes propriétés de frottement nécessaires pour le freinage et d'une forte fragilité) par la présence de nombreux défauts et imperfections :

1) Les pyrocarbones (Vignoles et al., 2015) :

Il s'agit de structures moins organisées que le graphite.

Lors de la densification par voie gazeuse, les dépôts s'organisent suivant une structure « pyrocarbone ». Un tel dépôt est obtenu à partir d'espèces gazeuses craquée à une température comprise entre $900^{\circ}C$ et $1200^{\circ}C$. Ceci détermine la température de consigne lors du procédé de dépôt par voie gazeuse. Un traitement thermique à $1200 - 3000^{\circ}C$ permet ensuite de graphiter une partie des pyrocarbones dans le disque. On distingue notamment 4 types de pyrocarbones de basse température qui possèdent de graphitabilités différentes. On peut voir sous microscope optique en lumière polarisée lequel des 3 types se retrouve dans le matériel en observant le croix de Malte (fig. 5)

i) Laminaire Lisse : Mauvaise graphitabilité, croix de Malte larges, bien définies et peu contrastées (fig 5a)

ii) Laminaire Rugueux : Bonne graphitabilité, croix de Malte contrastées et irrégulières (fig 5b)

iii) Laminaire Régénéré : Cette structure est liée aux espèces lourdes qui apparaissent aux températures plus basses et restent collées dans la structure fibreuse. Il s'agit d'un dépôt aussi anisotrope que le Laminaire Rugueux mais riche en défauts de structure comme le Laminaire Lisse.

iv) Isotrope : Pas graphitables, pas de croix de Malte (fig 5c)

2) Dépôts "mosaïques" et autres :

Les dépôts mosaïques (fig 5d) sont peu graphitables et donc à éviter. On les rencontre essentiellement lorsque l'on densifie par voie liquide ou bien en voie gazeuse par caléfaction à des températures inférieures à environ $900^{\circ}C$.

Aux températures comprises entre $400^{\circ}C$ et $900^{\circ}C$, un dépôt mosaïque lié aux molécules lourdes peut apparaître. Les composant de ce dépôt sont les HAP (Hydrocarbure Aromatiques Polycycliques). Ils apparaissent notamment dans le procédé de densification par caléfaction. Le dépôt se fait en deux temps : Les molécules condensent dans la structure poreuse vers $400^{\circ}C$; il s'agit de molécules lourdes qui sont en phase liquide à cette température. Dans le deuxième temps, la pyrolyse transforme la phase condensée en dépôts solides mosaïques.

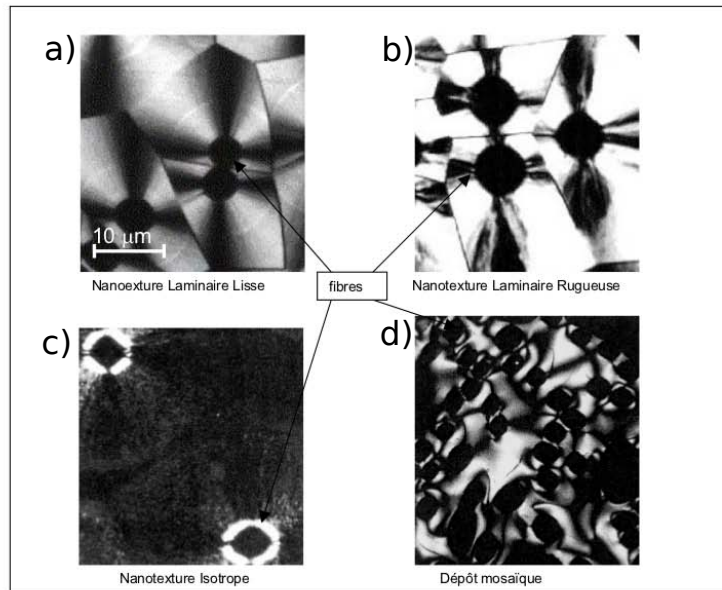


Fig. 5: Etude de la microstructure de la matière déposée autour d'une fibre pour différents types de dépôts :
 a) Pyrocarbone laminaire lisse, croix de Malte larges ; b) Pyrocarbone laminaire rugueux, croix de Malte contrastée ; c) Pyrocarbone isotrope, pas de croix de Malte ; d) Dépôt mosaïque

Source : (Lines, 2003)

Pour effectuer le remplissage par la matrice, on distingue aujourd'hui essentiellement 3 procédés de densification :

- o La voie liquide (Dumont, 2001; Schwartz, 2006; Tong, 2011) :

Elle consiste en deux étapes qui doivent être répétées :

- i) Imprégnation du renfort dans un précurseur liquide (généralement des résines phénoliques ou des brais)
- ii) Pyrolyse sous forte pression : carbonisation du précurseur absorbé dans la préforme

On distingue deux types de voie liquide par rapport au précurseur utilisé : Lorsqu'on utilise de la résine, l'imprégnation se fait facilement et au bout d'un certain nombre de cycles on obtient un matériau homogène. C'est le procédé de densification le moins cher parmi tous mais les pyrocarbones déposés de type « mosaïques » sont non graphitables ce qui donne une qualité médiocre (par exemple un module de Young et une résistance mécanique moins élevés (Schwartz, 2006)). Un matériau de meilleure qualité et graphitable peut être obtenu en utilisant un brai mésophasique comme précurseur (Schwartz, 2006). Ce processus est alors extrêmement coûteux.

L'avantage général de cette voie est qu'il en sort un matériau homogène après le nombre de cycles correspondants. Un premier inconvénient est la nécessité de différents cycles, pour atteindre la densité demandée, qui conduit à un temps d'élaboration long. De plus, les retraits successifs de matrice liés à la transformation de liquide en solide à chaque pyrolyse conduisent à une dégradation des fibres.

- o La voie gazeuse :

Cette voie est plus détaillée dans le chapitre suivant. Elle rassemble différents types généralement appelés CVI (Chemical Vapor Infiltration) qui représentent une forme volumique de la CVD (Chemical Vapor Deposition) :

- i) On fait rentrer un gaz dans la structure fibreuse.
- ii) A haute température le gaz va se craquer en divers molécules.

- iii) Une partie des espèces gazeuses va se déposer (sous forme de pyrocarbone) et densifier le disque. L'autre partie va sortir de la cuve de réaction (les « restes » gazeux, X).

Les avantages et inconvénients dépendent du type précis de CVI et vont être présentés dans la section suivante.

- o La voie mixte :
Elle consiste à alterner successivement des imprégnations en phase liquide et des dépôt en phase vapeur. Son application pour les composites C/C reste très marginale (Nadeau, 2004; Lines, 2003).

Dans notre cas de disques de freins d'avions, après la densification du renfort carbone avec la matrice de carbone, le tout est soumis à un traitement thermique pour graphiter le matériau. Lors de cette étape finale il s'agit de trouver un compromis entre une meilleure rigidité avec de meilleures propriétés tribologiques d'un côté et une fragilité et donc une durée de vie plus courte de l'autre côté.

2.2. Présentation des procédés d'infiltration par voie gazeuse

Nous nous intéressons maintenant plus en détail à la production de composites C/C par voie gazeuse sous ses différentes formes les plus connues.

Nous analysons d'abord la CVI de manière générale ainsi que les phénomènes physico-chimiques nécessaires pour leur description. Nous enchaînons avec une brève revue des différentes variantes de CVI bien établies en industrie. Nous finissons avec le procédé particulier de ce groupe d'infiltration par voie gazeuse, dit procédé par caléfaction, et une bibliographie sur les recherches expérimentales.

2.2.1. Le procédé CVI - généralités

L'infiltration par voie gazeuse (CVI : chemical vapor infiltration) d'un renfort par une matrice permet d'obtenir des produits de meilleure qualité thermo-mécanique que par voie liquide ou par voie mixte.

La première mention de la CVI date de 1962 (Bickerdike et al., 1962). Un brevet a été déposé par Jenkin en 1964.

Bien qu'étant un procédé fort présent en industrie, sa compréhension nécessite une étude sur des phénomènes physico-chimiques fortement couplés qui n'est donc pas simple. Avant de donner un aperçu de l'historique du procédé et de ses diverses variantes nous voulons d'abord introduire les différents phénomènes sur l'exemple de la variante la plus connue, à savoir la CVI isobare-isotherme :

Cette méthode de densification d'une préforme fibreuse par sa matrice se fait par les étapes suivantes :

- 1) La préforme est placée dans une cuve sous pression réduite dans laquelle on fait circuler un précurseur gazeux chaud.
- 2) Ce gaz diffuse à l'intérieur de la préforme puisque naturellement il essaie d'occuper tout l'espace qui lui est mis à disposition.

- 3) A l'intérieur de la préforme, le gaz craque par réaction chimique en diverses espèces gazeuses. Ce craquage se fait d'autant plus que la température est élevée.
- 4) Une partie des espèces gazeuses obtenues par craquage se déposent quand elles entrent en contact avec les parois chaudes des pores. Ainsi le pyrocarbone croît à l'intérieur de la préforme fibreuse. Ce dépôt présente le deuxième type de réaction chimique du procédé de CVI. Il est évident que plus on a du réactif sur place et plus la densification va se faire rapidement.
- 5) Lié à la réaction de craquage du gaz on retrouve également des sous-produits gazeux. L'ensemble de ces sous-produits possède un gradient de concentration qui est très forte à l'endroit de la réaction et faible à l'extérieur de la préforme dans la cuve.
- 6) Ce gradient de concentration est la force motrice d'un flux diffusif qui évacue les sous-produits vers la sortie du réacteur et les remplace par du précurseur. Ces flux diffusifs assurent l'apport de réactif dans la zone gazeuse jusqu'à la fin du procédé.

2.2.2. Le procédé CVI - diverses variantes

Les différentes variantes se distinguent par la manière avec laquelle on régule le flux gazeux et le profil de température qui vont déterminer la position de l'origine de densification. Un résumé détaillé des différentes méthodes est donné dans (Golecki, 1997a). En général 3 types sont appliqués (Narcy, 1996; Belorgey-Beaugrand, 2000; Reuge, 2002). Ils sont schématisés sur la figure 6, puis décrits plus en détail :

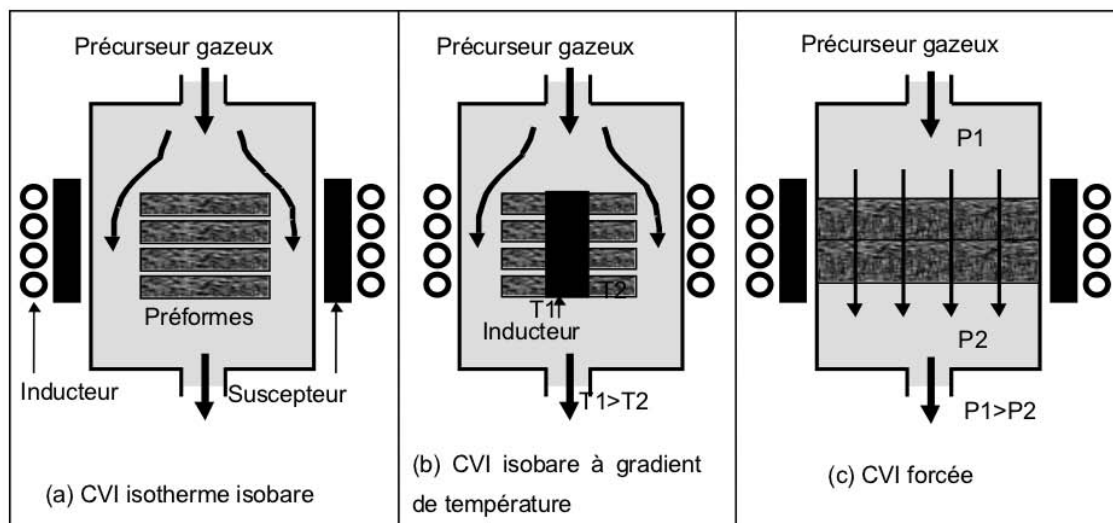


Fig. 6: Les 3 types principaux du procédé d'infiltration par phase vapeur (CVI : Chemical Vapor Infiltration) : a) La CVI isotherme-isobare est la variante la plus facile à mettre en œuvre, elle est la plus présente en milieu industriel; b) La CVI à gradient thermique permet d'avoir un début de densification en milieu de préforme se propageant vers l'extérieur si bien qu'on évite le problème de bouchage des pores extérieurs; c) La CVI forcée oblige tout le gaz précurseur de traverser la préforme et ainsi de réagir. Elle est souvent associée à un gradient thermique.

Source : (Reuge, 2002)

- (a) *CVI isotherme-isobare* : C'est la variante la plus simple : Le gaz est chauffé au bord de l'enceinte. On a donc une température ainsi qu'une pression du gaz quasi-constantes dans la globalité de l'enceinte. L'échange de gaz précurseur/sous-produits se fait par diffusion, qui est un processus lent et nécessite donc de temps de fabrication important d'environ 1 mois (Golecki, 1997a, p. 54). On retrouve souvent le phénomène de

bouchage des pores extérieurs (Golecki, 1997a, p. 54) lié à la température uniforme et à la concentration de précurseur plus forte aux bords de la préforme. Ce bouchage empêche dans la suite le gaz de rentrer dans la préforme. Lorsque ceci arrive, le cycle doit être interrompu pour effectuer une étape d'écrouissage. Le réglage de température (env. 1000°C) et de pression (10 – 100mbar) est très important pour contrôler ce problème.

Ce type de CVI permet de traiter en même temps plusieurs disques de différentes dimensions (Golecki, 1997a, p. 54). Par ailleurs la régulation de température et de pression se fait facilement. Cette souplesse fait de la CVI isotherme-isobare le procédé le plus couramment utilisé en industrie, malgré les temps de traitement longs.

- (b) *CVI isobare à gradient de température* : Un meilleur contrôle de la zone de densification peut être atteint en introduisant un gradient thermique qui s'oppose au gradient de concentration : On chauffe au centre du disque et on refroidit au bord par rayonnement et convection de gaz froid. La vitesse des réactions chimiques augmente de manière exponentielle avec la température et seulement de manière linéaire avec la concentration si bien que le dépôt se fait principalement du côté chaud du disque. On a donc créé un front de densification (Nadeau et al., 2006) localisé au lieu d'avoir de la densification homogène dans la totalité du disque et on évite le problème de bouchage des bords. Un premier point dur de ce procédé consiste donc à trouver une bonne puissance de départ afin de ne pas piéger des porosités au rayon intérieur du disque. Ensuite il s'agit de trouver le bon apport énergétique pour éviter de fortes différences de densité au coeur et au bord des disques. Le deuxième fait qui rend cette variante plus difficile que la CVI isobare isotherme est qu'il faut adapter la puissance de chauffage tout le long du cycle afin de garantir la continuité du déplacement du front de densification (voir chapitre 6.3).

Avec ce procédé on peut réduire le temps de densification d'un mois (CVI isobare isotherme) à quelques jours (Golecki, 1997a, p. 62) (Golecki et al., 1995).

Outre le chauffage par un suscepteur il existe d'autres variantes : le couplage électromagnétique direct sur la préforme (Golecki, 1997a, p. 65-75) (Golecki, 1997b) et le chauffage résistif. Dans le cas où l'on veut densifier plusieurs disques en même temps par un suscepteur, il est nécessaire de développer un inducteur adapté afin d'éviter des différences de densification entre les disques centraux et les disques au bord (Golecki et al., 1996). Pour les autres systèmes de chauffage, un problème similaire se pose lorsqu'on travaille avec plusieurs disques. Le chauffage d'un seul disque par couplage électromagnétique direct va être étudié plus en détail lors de ce travail de thèse.

- (c) *CVI forcée* : (Vaidyaraman et al., 1995a; Vaidyaraman et al., 1995b; Vaidyaraman et al., 1996a; Vaidyaraman et al., 1996b) La deuxième grandeur à maîtriser dans la CVI, en plus de la température, est le flux de précurseur (Golecki, 1997a, p. 80-85) (Golecki, 1997b). Dans les deux techniques présentées ci-dessus l'apport de réactif se fait par diffusion, qui est un processus très lent. Le procédé peut être accéléré lorsque le gaz précurseur est renouvelé plus rapidement par convection. Ceci est réalisé dans la CVI forcée en appliquant une différence de pression entre les deux côtés du disque. Cette méthode peut être couplée avec l'introduction d'un gradient thermique (Golecki, 1997a, p. 85-98).

Le plus grand inconvénient de cette méthode est qu'elle ne peut être appliquée qu'à très peu de types de renforts. Cela est dû au fait qu'un milieu poreux représente une forte résistance à l'écoulement d'un fluide et nécessite donc de fortes différences de pression. De plus, cette résistance augmente avec l'état de densification et notamment

à la fin de densification où plus aucun gaz n'arrive à passer. L'application est restreinte à des renforts axi-symétriques, généralement de hauteur faible, de quelques centimètres (Golecki, 1997a, p. 98).

En plus de ces types principaux de CVI il existe d'autres variantes avec de légères modifications (Golecki, 1997a, à partir de p. 99) où l'on varie par exemple les paramètres d'élaboration lors du cycle. Dans la CVI pulsée par exemple, les étapes « remplissage de la cuve depuis le vide » + « palier de pression » + « évacuation des gaz » sont appliquées séquentiellement ce qui permet de séparer les trois phénomènes typiques de la CVI, à savoir « infiltration de la préforme par le gaz » + « dépôt » + « évacuation des espèces gazeuses après réaction ».

Le procédé par caléfaction (voir également (Golecki, 1997a, p. 74-79), (Golecki, 1997b)) correspond à une CVI à gradient thermique extrême.

2.2.3. Le procédé par caléfaction

Principe

La différence majeure entre le procédé par caléfaction et la CVI classique, notamment celle avec gradient thermique, est que le disque baigne dans un liquide au lieu de se trouver dans du gaz. Quand le disque est chauffé, le liquide se met en ébullition et le gaz remplit de plus en plus le disque. Après cette partie initiale de préchauffage, le disque est donc rempli essentiellement de gaz si bien que tous les phénomènes de transport et de dépôt sont les mêmes que dans la CVI à gradient thermique. Néanmoins, au bord du disque on retrouve du liquide en ébullition qui « fournit » le précurseur pour la réaction et fixe sa température d'entrée égale à la température d'ébullition. Ainsi, dans le disque on a le gradient thermique le plus fort possible physiquement : depuis la température d'ébullition au bord du disque, qui est la plus froide possible pour un gaz, jusqu'à la température de réaction au cœur du disque, qui est la température maximale du procédé. Ce gradient est notamment beaucoup plus fort que celui existant dans la CVI à gradient thermique classique.

C'est aussi cette petite couche d'ébullition autour du disque qui donne à ce procédé le nom anglais « film boiling process » ou encore « Kalamazoo ». L'origine de ce dernier nom n'est pas claire (Gazette, 1978) à l'exception de ses racines amérindiennes. La traduction la plus répandue, « marmite qui bout » fait référence à une légende populaire qui met en scène l'histoire d'un Indien Potawatomi et d'un endroit où une rivière est en ébullition (Rzepczynski). Du fait qu'un gradient thermique plus fort permette d'obtenir des temps de densification plus rapides, et que ce gradient soit maximal dans le procédé par caléfaction, on attribue aussi à ce procédé le nom « fast densification process », « processus de densification rapide ».

Historique

Ce procédé novateur a été mis au point dans les années 1970 au CEA et breveté en 1981 par M. Houdayer, J. Spitz et D. Tran Van (Houdayer et al., 1981). Le brevet a ensuite été étendu aux Etats-Unis en 1984 (Houdayer et al., 1984) ce qui a permis à la société américaine Textron d'exploiter le procédé sous licence à partir de 1988 (Thurston et al., 1995; Carroll et al., 1995; Scaringella et al., 1996) et notamment de montrer qu'il était possible de produire des disques de freins 100 fois plus rapidement que par I-CVI. Par la suite, les études reprises

au CEA ont abouti au dépôt de plusieurs brevets en collaboration avec la SEP (Société Européenne de Propulsion) (David et al., 1993; David and Benazet, 1997b; David and Benazet, 1997a).

Récemment, au début de l'année 2003, Messier-Bugatti (groupe Snecma) a racheté la société Textron et a effectué des études de faisabilité sur l'élaboration industrielle de disques de freins par ce nouveau procédé. Depuis 2006, les premiers travaux expérimentaux apparaissent en Chine traitant la vitesse du dépôt ainsi que sa microstructure pour différentes températures de dépôt contrôlées sur un point (Wang et al., 2006; Deng et al., 2011).

Variantes

Concernant le dispositif de ce procédé il existe différentes versions qui se distinguent notamment par leur méthode de chauffage et par les orientations du disque ce qui fait que la gravité intervient de manière différente. Nous détaillons 3 variantes ci-dessous :

- 1) *Disque troué horizontal avec suscepteur intérieur* : Le CEA (Houdayer et al., 1981) place la préforme de manière horizontale avec un suscepteur dans le rayon intérieur, voir fig. 7. Un système de chauffage inductif est placé autour de la cuve, qui va coupler essentiellement sur le suscepteur. On a donc un flux thermique qui va du rayon intérieur du disque vers le rayon extérieur et qui est opposé au flux du gaz. Ceci mène à un front de densification à sens unique du rayon intérieur vers le rayon extérieur. De plus, une couche isolante de Goretex maintient la zone d'ébullition à l'extérieur du disque et assure de ne retrouver que du gaz à l'intérieur ce qui exclut toute considération d'ébullition dans son étude.
- 2) *Disque plein horizontal* : Deng et al. (Deng et al., 2011), fig. 8, étudient la densification d'un disque sans trou au milieu. Il est placé horizontalement entre deux plaques à température réglée. On se retrouve avec un gradient thermique du bas vers le haut du disque et un gradient de concentration perpendiculaire, de l'extérieur vers le centre du disque. Leurs études montrent qu'il y a un front de densification qui se déplace essentiellement du bas vers le haut et un peu du centre vers l'extérieur. Le gradient thermique influe donc beaucoup plus sur le front que le gradient de concentration de précurseur.
- 3) *Disque troué vertical sans suscepteur* : Ce dispositif développé par Messier-Bugatti-Dowty est étudié dans cette thèse. Il est schématisé dans la figure 9 : Le disque est positionné de manière verticale entre deux inducteurs de forme « pan-cake » qui baignent également dans le précurseur. Le chauffage inductif se fait directement sur le disque sans l'intermédiaire d'un suscepteur (on parle de couplage direct) ce qui conduit à un profil de chauffage homogène pour le cas du disque vierge. Le liquide dans le disque va être porté à ébullition et ensuite être remplacé par du gaz. Vu que le bain de précurseur autour du disque est grand, il sera tout le temps en ébullition mais jamais purement gazeux, ce qui conduit à un refroidissement permanent des faces du disque. La conjonction d'un chauffage volumique et d'un refroidissement au bord mène donc à un gradient thermique du cœur d'une section de disque vers les faces, sens opposé au flux gazeux. Le front de densification a alors une forme elliptique. Une couche d'isolation en Goretex est collée sur les rayons intérieur et extérieur du disque, comme dans le procédé du CEA (fig. 7), mais pas sur les autres faces.

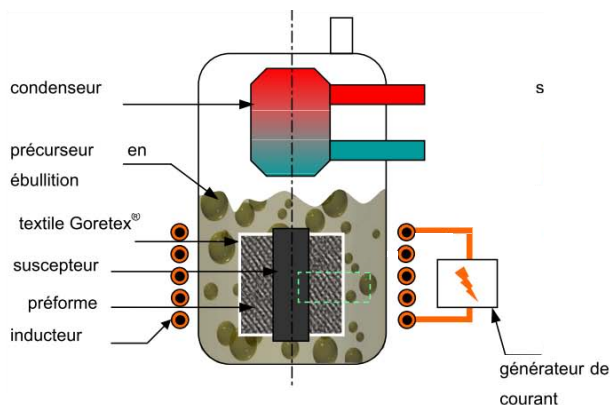


Fig. 7: Schéma du procédé par caléfaction tel qu'il a été mis en place au CEA
Source : (Lines, 2003)

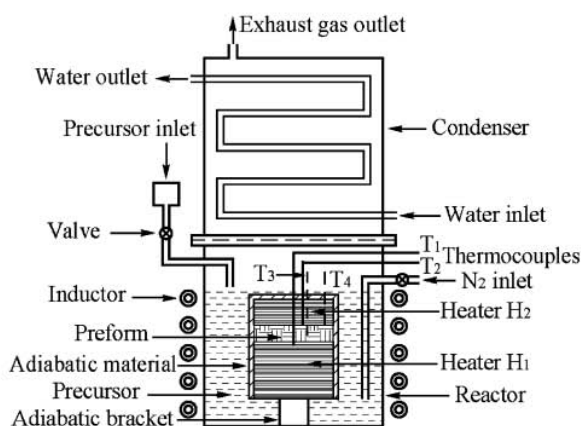


Fig. 8: Dispositif expérimental utilisé par Deng et al. (Deng et al., 2011) : La préforme est un disque entier (sans trou au milieu) qui baigne dans le précurseur xylène (C_8H_{10}) liquide et il est chauffé par deux plaques suscepteurs en contact direct avec la préforme
Source : (Deng et al., 2011)

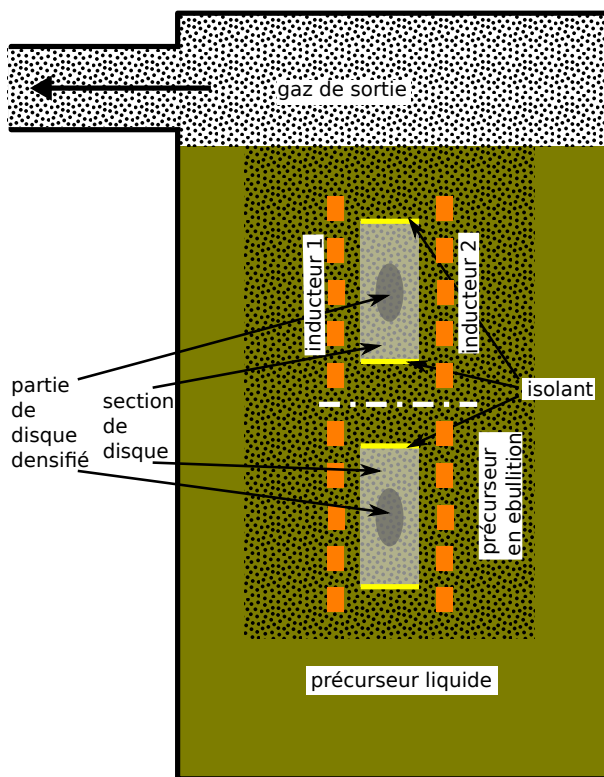


Fig. 9: Schéma du dispositif chez Messier-Bugatti-Dowty qui est étudié dans cette thèse.

Le gradient thermique extrême du procédé par caléfaction mène notamment à des temps de densification très courts.

Un autre avantage de ce procédé est l'absence de la formation de suies qui pourraient abîmer le réacteur et provoquer aussi une densification de mauvaise qualité (structure mosaïque) au bord du disque. La formation de suie nécessite la présence du précurseur gazeux à des températures de $200 - 600^{\circ}C$. Dans le cas de la CVI la cuve entière est concernée, alors que dans le procédé par caléfaction elle est remplie de liquide si bien qu'on ne génère pas de suies.

Le procédé par caléfaction possède néanmoins un inconvénient : On a toujours une région le long du gradient thermique dans le disque qui correspond à cette température de création d'hydrocarbures lourds. Etant à l'intérieur du disque, ces hydrocarbures lourds peuvent se déposer sous forme mosaïque et ainsi créer un matériau de mauvaise qualité à certains endroits. Ce problème est rencontré uniquement dans le cas de la caléfaction et il est particulièrement prononcé vers la fin de densification, au bord du disque (Rovillain, 1999; Belorgey-Beaugrand, 2000).

Etudes réalisées

Les premières études approfondies sur la caléfaction ont été surtout à caractère expérimental. On a étudié l'influence de certains paramètres comme :

- 1) La pression du gaz
- 2) Le type de précurseur
- 3) Le profil de température
- 4) La structure de la préforme

sur

- 1) La cinétique et les mécanismes de réaction
- 2) Le temps de densification
- 3) L'existence et la vitesse d'un front de densification
- 4) La consommation de précurseur et d'énergie (le coût)
- 5) La qualité finale du matériau

Des publications importantes dans ce domaine sont par exemple les thèses de Narcy (Narcy, 1996), de Petit (Petit, 1998), de Rovillain (Rovillain, 1999) et de Belorgey-Beaugrand (Belorgey-Beaugrand, 2000). Voici les principaux résultats :

- La température doit être entre 900°C et 1200°C afin d'obtenir la bonne micro-structure de carbone et une densité finale acceptable (Trinquecoste et al., 1999; Belorgey-Beaugrand, 2000). Au-delà de 1200°C la préforme se détériore et en dessous de 900°C la micro-structure du carbone n'est pas la bonne ce qui conduit à des problèmes de graphitisation lors du traitement thermique final.
- Une pression de précurseur plus élevée mène à une meilleure cinétique ainsi qu'à une meilleure qualité du dépôt (Belorgey-Beaugrand, 2000) : On passe d'une pression de 0.1bar et environ 30 jours d'élaboration en CVI à plus d' 1bar et seulement moins d'un jour en caléfaction (la cinétique du dépôt est directement proportionnelle à la concentration du précurseur). On remarque que ceci n'est pas réalisable en I-CVI puisqu'une pression plus élevée conduit à un bouchage du bord extérieur plus accentué.
- Des études sur différents précurseurs (Narcy, 1996; Rovillain, 1999), tels que le benzène ou le toluène et d'autres ont également été réalisées pour déterminer la cinétique et l'énergie d'activation du dépôt. Dans le cadre de la thèse nous utilisons du cyclohexane, étudié par exemple par Rovillain (Rovillain, 1999). Les mécanismes réactionnels sont très complexes avec beaucoup d'espèces intermédiaires et de radicaux, ce qui rend leur étude difficile. Chaque précurseur apporte une liste propre de risques d'utilisation.
- L'architecture du substrat (diamètre des fibres et des pores, porosité initiale, structure donnée sur la fig. 3) influe sur l'hétérogénéité de la matrice déposée, sur la micro-structure du pyrocarbone déposé ainsi que sur la porosité résiduelle (Narcy, 1996; Belorgey-Beaugrand, 2000).
- L'influence du Goretex a été analysée par Rovillain (Rovillain, 1999), suivi par Beau-grand (Belorgey-Beaugrand, 2000). Cet enveloppement a été utilisé dans le but de diminuer la consommation d'énergie :

- C'est un isolant thermique qui aplatit le gradient thermique dans le disque et diminue ainsi le flux de chaleur perdu au bord. On gagne environ 30% d'énergie.
- Le profil de température aplati combiné à des températures élevées pour le dépôt fait qu'il n'y a du gaz qu'à l'intérieur du disque, la zone d'ébullition étant repoussée entièrement dehors.
- La présence du gaz chaud uniquement à l'intérieur du disque limite la formation de dépôt mosaïque, qui est une structure peu graphitable qui se forme lors d'un dépôt à basse température.
- Les vitesses de densification sont très légèrement améliorées.
- On n'a pas obtenu de meilleur rendement en carbone. Le Goretex permet donc d'économiser de l'énergie, mais pas de précurseur.

En plus de ces travaux de thèse il y a quelques publications plus récentes :

- Rovillain et al. (Rovillain et al., 2001) font des études de densification par caléfaction pour différents précurseurs (cyclohexane C_6H_{12} , Benzène C_6H_6 , Chlorobenzène C_6H_5Cl , Toluène $C_6H_5CH_3$) en utilisant 2 types de réacteur :
 - Un micro-réacteur avec une préforme d'environ $2cm \times 1cm$ permettant de suivre le front de densification directement avec un microscope et d'enregistrer le profil de température avec un pyromètre
 - Un mini-réacteur avec des disques d'un rayon de $2cm$ et d'une hauteur de $6cm$.

Ils démontrent que, pour chaque précurseur, le vitesse de dépôt v_{depot} suit une loi d'Arrhénius avec une pente plus élevée pour le benzène et moins élevée pour le cyclohexane (c'est à dire que l'énergie d'activation est la plus élevée pour le cyclohexane) :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \approx -\sigma_v \cdot v_{depot} \quad (2.1a)$$

$$v_{depot} = k_R \exp\left(-\frac{E_a}{R_g T}\right) \quad (2.1b)$$

$$k_R = \Omega_s \cdot C_{gc} \cdot a_k \quad (2.1c)$$

où $\partial \varepsilon / \partial t$ est le taux de densification, σ_v est la surface interne de la préforme (m^2/m^3), v_{depot} la vitesse du dépôt (m/s), k_R la constante de réaction (m/s), Ω_s le volume molaire (m^3/mol) et $C_{gc} = P_{gc}/R_g/T$ concentration du cyclohexane (mol/m^3). Les auteurs de (Rovillain et al., 2001) déduisent également l'énergie d'activation E_a (J) ainsi que le pré-facteur de la vitesse de dépôt a_k (m/s) à partir de mesures expérimentales. La publication continue avec quelques analyses des matériaux obtenus que nous n'explicitons pas ici.

Finalement, l'analyse du procédé a permis de distinguer 5 zones physico-chimiques et un profil de température typique représentés dans la figure 10.

Pour le procédé par caléfaction utilisé par le CEA (fig. 7) ces zones se répartissent comme sur le schéma fig. 11.

- Delhaès et al. (Delhaès et al., 2005) comparent différents types de procédés de densification (préforme entourée de gaz ; préforme entourée de liquide mais enveloppée par une couche Gore-Tex qui fait que la préforme ne contient que du gaz ; préforme en contact direct avec du liquide/diphase) avec différentes préformes (RVC-2000 :

feutre de fibres de carbone ex-viscose d'une densité apparente de $0.1g/cm^3$ et 95% de porosité; Novoltex : tissu aiguilleté de fibres de carbone ex-PAN 3D avec densité apparente de $0.4g/cm^3$).

Un résultat primordial issu de ce travail est que l'utilisation de l'isolant Goretex permet de considérablement baisser la puissance nécessaire pour garder la température de consigne au rayon intérieur du disque. On a par exemple pour le Novoltex 4420W sans isolant Goretex contre 2330W avec. Cette puissance reste supérieure à celle correspondante au cas en gaz pur (1880W, hormis la puissance pour faire bouillir le liquide en-dessous du disque et de préchauffer le gaz sortant de cette ébullition). La publication contient également une analyse du profil de température au cours de la densification et une caractérisation des produits finaux. On peut déduire de (Delhaès et al., 2005, tableau 3) que l'enveloppe Gore-Tex permet d'obtenir de meilleures densités et microstructures par rapport aux essais avec contact direct entre le liquide et la préforme.

→ Deng et al. (Deng et al., 2011) s'intéressent à la densification d'une préforme sous forme de disque entier en contact avec deux suscepteurs de taille différente en haut et en bas (au lieu d'un suscepteur au centre) qui permettent d'établir un gradient thermique vertical. Le précurseur utilisé est le xylène (C_8H_{10}) et la densification est faite en choisissant une puissance de chauffe telle que la température du thermocouple T_1 (au milieu en bas du disque) soit égale à une température de consigne (soit $900^\circ C$, $1000^\circ C$, $1100^\circ C$, $1200^\circ C$, $1250^\circ C$).

L'un des résultats obtenus dans cette publication, représenté dans la fig. 12, montre que la température de consigne influe fortement sur le temps nécessaire pour obtenir un disque entièrement densifié (plateaux dans la fig. 12a), même si la masse finale (et donc la porosité résiduelle) est proche pour chacun des cas. La figure 12b met également en évidence que pour de basses températures de consigne, la vitesse du front est approximativement constante le long du cycle alors que pour des températures plus élevées le front change de propriétés au cours du temps si on travaille à température T_1 fixée. Un point très important à retenir est que pour des températures très élevées dès le début, on crée une porosité résiduelle forte à l'endroit où débute la densification. Ceci nous mène à l'une des questions clés de la mise en place du procédé de densification par caléfaction, à savoir, de trouver une bonne condition de départ.

→ Une étude d'un dispositif expérimental similaire avec moins d'analyses avait été réalisée auparavant par Wang et al. (Wang et al., 2006).

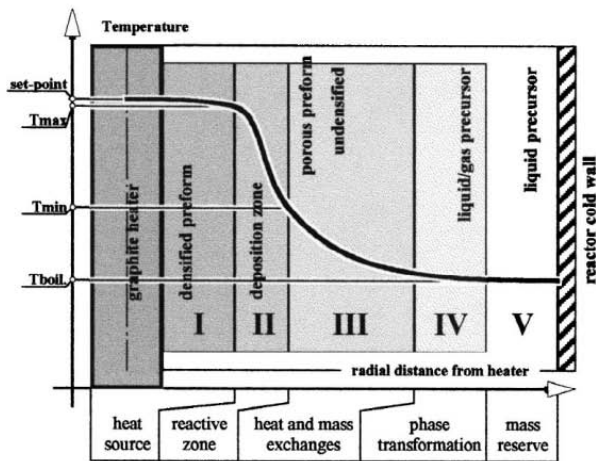


Fig. 10: Les 5 zones typiquement trouvées dans le procédé par caléfaction : I) Préforme densifiée, II) Zone en densification, III) Préforme poreuse non-densifiée et remplie avec du gaz uniquement, IV) Zone en ébullition, V) Précurseur liquide (cette zone n'existe pas toujours pendant le procédé).
Source : (Rovillain et al., 2001)

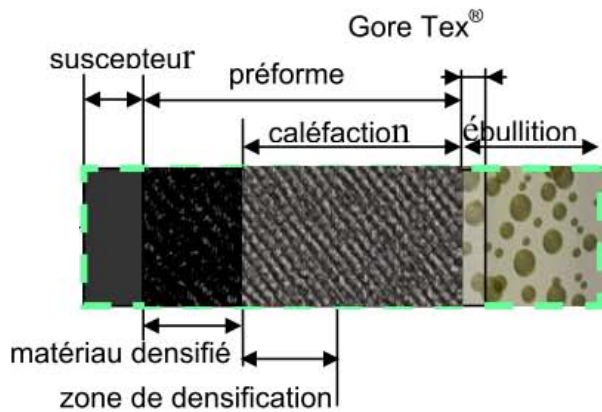


Fig. 11: Schéma des différentes régions physico-chimiques du procédé par caléfaction tel qu'il a été mis en place au CEA
Source : (Lines, 2003)

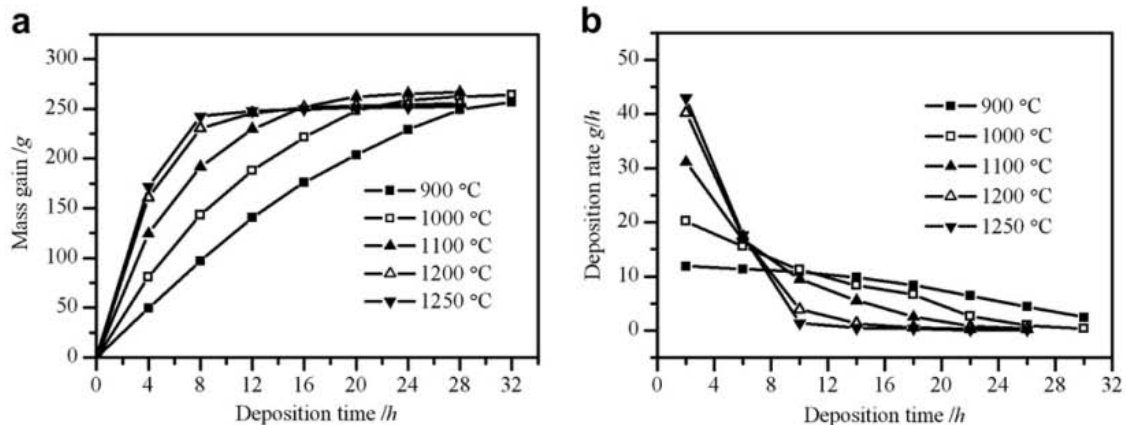


Fig. 12: Etude de la densification d'un disque selon l'expérience de fig. 8 : a) Gain de masse et b) taux de dépôt au cours du temps de densification pour différentes températures de consigne T_1 .

Source : (Deng et al., 2011)

Un bon nombre de ces travaux fait apparaître une série de difficultés. Le procédé est très coûteux sur le plan énergétique ; le contrôle de la nature du pyrocarbone déposé et des gradients de densification est délicat. Qui plus est, on ne dispose pas de moyen satisfaisant pour suivre en temps réel l'avancement du procédé. L'ensemble de ces difficultés a amené les ingénieurs et les chercheurs à se pencher sur une modélisation du procédé.

2.3. Bibliographie sur la modélisation du procédé par caléfaction - sans ébullition et sans couplage électromagnétique direct

Les premières tentatives de modélisation ont été réalisées par les expérimentateurs avec comme premier objectif de caractériser le front d'infiltration.

→ Rovillain (Rovillain, 1999) établit dans un premier temps une estimation de la vitesse du front (m/s) à partir de la loi de vitesse de dépôt (Arrhenius) et d'un gradient thermique. Celle-ci est ensuite reprise par Vignoles et al. (Vignoles et al., 2006) :

$$v_{front} = \frac{2k_R(T)}{E(\varepsilon)} \left\| \vec{\nabla} T \right\| \int_{T_{min}}^{T_{max}} \exp\left(-\frac{E_a}{R_g T}\right) dT \quad (2.2a)$$

$$\approx \frac{2k_{R,0}}{E_0(q/\lambda_T)} \frac{R_g T_{max}^2}{E_a} \exp\left(-\frac{E_a}{R_g T_{max}}\right)$$

$$k_{R,0} = \Omega_s \left(\frac{P_g}{R_g T_{min}} \right) a_k \quad (2.2b)$$

$$E_0 = \frac{4\varepsilon_0}{\sigma_v(\varepsilon_0)} \quad (2.2c)$$

où k_R est le pré-facteur de la constante de réaction (m/s), E la distance entre deux fibres, $\left\| \vec{\nabla} T \right\|$ la norme du gradient thermique local dans le front, E_a l'énergie d'activation de la réaction de craquage, T_{max} la température la plus chaude sur le front de dépôt, T_{min} une température à laquelle la fonction exponentielle devient proche de 0, q le flux de chaleur traversant le front, λ_T la conductivité de chaleur (moyenne), P_g la pression du gaz dans le front, ε_0 la porosité de la préforme vierge et $\sigma_v(\varepsilon_0)$ la surface interne de la préforme.

La vitesse de dépôt est proportionnelle au volume molaire du dépôt, au taux de réaction à température côté chaud du front, au carré de cette température, inversement proportionnelle à l'énergie d'activation, à la porosité initiale et au gradient thermique. Une porosité initiale ou bien un flux de chaleur plus élevés (à T_{max} inchangé) conduisent donc, contrairement à ce qu'on pourrait croire, à une vitesse de front plus lente.

A partir de cette expression de la vitesse du front et du flux de précurseur qui alimente la densification Vignoles et al. (Vignoles et al., 2006) déduisent une expression pour la largeur du front :

$$J_c = \Omega_s^{-1} v_{front} \approx \Omega_s^{-1} \sigma_v v_{depot} l_{front} \quad (2.3a)$$

$$l_{front} = \frac{1}{\sigma_v} \frac{v_{front}}{v_{depot}} = \frac{1}{2\varepsilon_0(q/\lambda_T)} \frac{R_g T_{max}^2}{E_a} \quad (2.3b)$$

avec la vitesse du dépôt v_{depot} définie dans les équations 2.1. On retrouve ainsi la largeur du front principalement les mêmes proportionnalités que dans sa vitesse.

→ Dans un deuxième temps Rovillain cherche à modéliser un front mince par analogie avec la théorie des flammes, notamment en supposant une température constante dans ce front mince. Le modèle contient donc un bilan massique et un bilan d'espèce ainsi qu'une équation de dépôt. Rovillain ne publie pas de résultats de simulation. Par contre, il réalise également une étude stationnaire afin d'obtenir des résultats analytiques concernant le saut de température, de flux d'espèce et de porosité à travers du front. Il en découle également des expressions de vitesse et de taille de front dont il donne les valeurs numériques qui sont du même ordre de grandeur que celles sortant de ses expériences.

→ Beaugrand (Belorgey-Beaugrand, 2000) analyse les différents phénomènes physiques en jeu ainsi que l'établissement au cours du temps des différentes zones dans le procédé

(suscepteur, zone dense, zone en densification, zone poreuse remplie de gaz, zone d'ébullition, zone liquide). Elle considère également de manière détaillée la thermique dans la zone purement gazeuse ainsi que les propriétés des matériaux y intervenant. Son modèle analytique d'ébullition décrit les conservations de masses liquide/gaz séparément, un bilan thermique incluant la convection et la conduction sans source volumique de chaleur, ainsi que la définition de la pression capillaire. Beaugrand s'en sert notamment pour effectuer des calculs de taille des zones liquide/diphase/gaz en fonction de différents paramètres (géométrie du système, matériel de la préforme, conductivité thermique, pression capillaire) dont le plus important s'avère être la conductivité thermique. Elle en conclut que l'ébullition n'occupe qu'une zone mince au bord du disque et que la plupart de celui-ci est rempli uniquement de gaz. A la fin, Beaugrand discute la modélisation du micro-kalamazoo, contenant une seule fibre sous microscope, mais elle ne présente pas de système d'équations complet permettant une simulation.

→ Au LCTS, Leutard a réalisé un travail sur la CVI à gradient thermique qui a ensuite pu servir comme base pour la modélisation du procédé par caléfaction. Pendant son stage (Leutard, 1999) il a développé un modèle traitant la thermique et le transport gazeux. Celui-ci contient un chauffage inductif sur suscepteur, un bilan thermique via convection par gaz, conduction et rayonnement ainsi qu'un bilan massique et l'équation de vitesses de Navier-Stokes.

Leutard (Leutard et al., 2001) y a également rajouté un modèle de densification au cours de temps qui fait varier les propriétés (électromagnétiques, thermiques, ...) en espace et au cours du temps. Une comparaison des résultats numériques avec des expériences montre qu'on arrive à reproduire les principales observations mais qu'il y a des erreurs au niveau quantitatif que les auteurs lient à un manque de connaissance des propriétés des matériaux.

→ Le modèle de Leutard est ensuite appliqué au Kalamazoo par Frédéric Pailler (Pailler, 2000). Il prend en compte le transport de la chaleur, la diffusion d'espèces chimiques gazeuses au milieu poreux ainsi que la réaction chimique globale de dépôt. Pailler a développé un premier modèle unidimensionnel qui a ensuite été implémenté dans un code éléments finis. Celui-ci permettait de suivre l'établissement et la propagation d'un front de densification. Le travail est également validé de manière quantitative à partir d'une comparaison avec des vitesses de front expérimentales.

→ Le modèle de Pailler a été repris encore dans la thèse de Lines (Lines, 2003) et ensuite par Nadeau (Nadeau, 2004) pour une étude analytique du front. Ces deux travaux sont le sujet des sous-chapitres suivants.

Dans la suite de cette bibliographie nous présentons deux modélisations, une bidimensionnelle et l'autre monodimensionnelle, qui ont été réalisées sur le cœur du procédé, à savoir le transport du gaz, la thermique et le dépôt.

2.3.1. Modèle 2D complet

Le modèle 2D transitoire est proposé et validé dans (Lines, 2003; Vignoles et al., 2006). Il est associé au dispositif fig. 7 p. 14 et donne l'évolution temporelle de tous les phénomènes physico-chimiques à partir d'un disque vierge jusqu'à sa densification complète.

Domaine d'études

Il est composé d'une section de disque en contact avec le résistor au côté gauche (rayon intérieur du disque). Les conditions de bord sont donnés sur la fig. 13 :

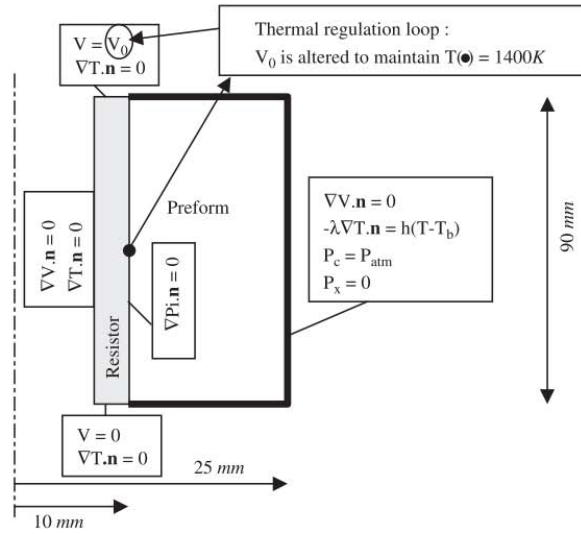


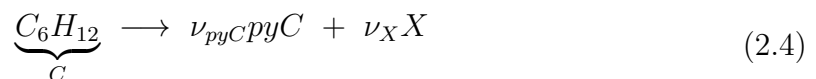
Fig. 13: Domaine d'études et conditions de bord utilisés dans (Vignoles et al., 2006)

Modèle

Le modèle contient :

- Un bilan thermique avec conduction de la chaleur et convection par le gaz. Le flux de chaleur rentre par le rayon intérieur qui est en contact avec un susceptr.
- Les réactions chimiques de craquage et de dépôt (densification). Le taux des réactions chimiques croît avec la température de façon exponentielle (loi d'Arrhenius) et il est proportionnel à la concentration de réactif.

Le précurseur réactif (symbolisé par C) craque d'une part en espèces pyrocarbone (pyC), responsables pour le dépôt, et d'autre part en espèces de « sous-produit gazeux » (X), sortant du four de densification :



Cette réaction de craquage conduit à deux bilans :

- Le bilan de « sous-produits ».
- La variation de la porosité liée au dépôt. En effet, les molécules de pyrocarbone sont supposées se déposer dans le disque directement après leur création et ne possèdent donc pas d'équation de bilan d'espèce supplémentaire.

Résultats

Lines a réussi à apporter une première validation expérimentale de l'approche de modélisation en comparant les champs de densité calculés à des radiographies X de préformes à différents niveaux d'infiltration, voir fig. 14. Il a également reproduit de façon correcte l'histoire thermique d'une préforme.

En plus de la validation du modèle, Lines a réalisé une étude de sensibilité du modèle, une analyse du front ainsi qu'une analyse de performance du procédé par rapport aux pertes énergétiques, dont nous retenons les points suivants :

- Une augmentation de la conductivité thermique conduit de manière anti-proportionnelle à une baisse d'énergie consommée lorsqu'on travaille à gradient thermique fixe.
- La porosité résiduelle du matériau final est définie par la porosité fermée de la loi de surface interne, c'est à dire la porosité à laquelle la valeur de la surface interne devient zéro.
- La diffusion de Knudsen, un mode de transport lié aux chocs des molécules contre les parois des canaux poreux (voir chapitre 3.2), est négligeable dans nos applications où l'on ne travaille pas à pression basse.
- Une augmentation de la diffusivité des gaz (voir chapitre 3.2) conduit à une vitesse de front plus rapide. Ceci s'explique par le fait que le précurseur réactif est apporté dans la zone de dépôt notamment par transport diffusif. Ainsi, lorsque la diffusion d'espèce est plus importante, la réaction chimique est mieux desservie.
- Le front se présente sous forme de tonneau, expérimentalement et numériquement, voir fig. 14.
- Pour une analyse monodimensionnelle du front on peut regarder le taux de densification le long d'un axe horizontal, voir fig. 15. On en déduit que la vitesse et la largeur du front ne sont pas des constantes dans le temps mais diminuent d'un facteur 10 du début à la fin pour la vitesse et d'un facteur 2 pour la taille.
- La chimie de la réaction ainsi que les pertes thermiques sont caractérisées par le gradient thermique le long du disque. Une optimisation du procédé nécessite donc une maîtrise de ce gradient. On se retrouve à devoir choisir un compromis entre deux phénomènes :
 - Lorsqu'on diminue le gradient thermique on consomme moins d'énergie. On a aussi un front plus large ce qui revient d'après Lines et al. à un temps de densification plus court.
 - Une telle diminution rapproche le procédé à celui de la I-CVI avec tous ses inconvénients dont notamment le bouchage des pores extérieurs qui doit être compensé d'une pression de précurseur moins forte ce qui provoque un ralentissement de la densification.

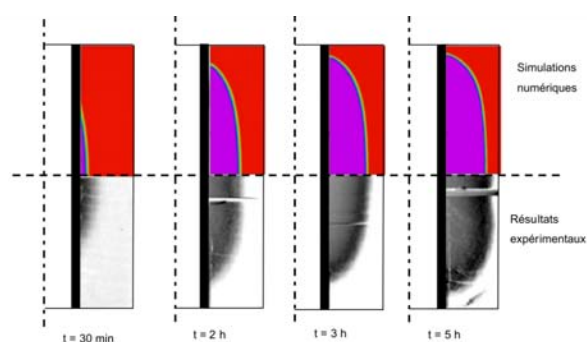


Fig. 14: Profils de porosité à différents temps de densification. En haut : simulation : en bas : expérience. On constate des formes de tonneau et une bonne concordance entre simulation et expérience.

Source : (Lines, 2003)

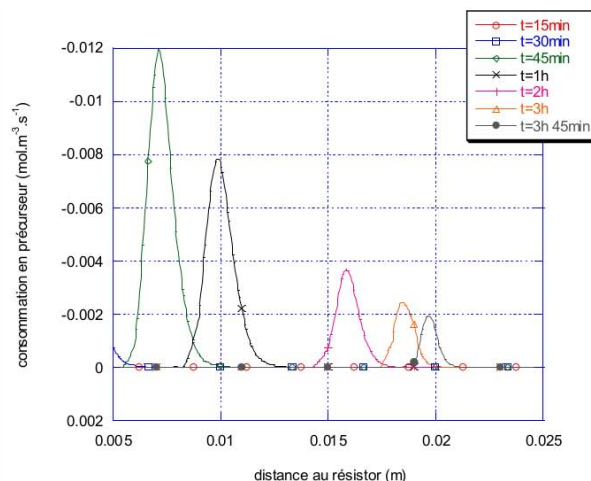


Fig. 15: Avancement de la densification au cours du temps - Consommation en cyclohexane qui est une grandeur proportionnelle au taux de densification

En plus des travaux de thèse de Lines (Lines, 2003), l'article (Vignoles et al., 2006) présente une étude semi-analytique du front pour déterminer une condition d'existence : Un bilan de

flux réactif montre qu'il faut que le flux de cyclohexane, approvisionnant la réaction, soit supérieur au flux de précurseur consommé par cette réaction pour avoir l'existence d'un front. Cette condition mène à l'introduction du module de Thiele qui est une grandeur bien connue dans l'étude des réactions chimiques exprimant la compétition entre la diffusion et la réaction (voir eqn. J.15, p. LXXX). Notamment, ce module doit être inférieur ou égal à un. En termes de flux de chaleur cette même condition lui attribue une valeur minimale (Vignoles et al., 2006) :

$$q_{min} \propto \frac{\lambda_T T_{chaud}^2}{\varepsilon_0 E_a} \sqrt{\frac{\sigma_{v,0} k(T_{chaud})}{D_C}} \quad (2.5)$$

(λ_T : conductivité thermique, T_{chaud} : température au côté chaud du front, ε_0 : Porosité initiale de la préforme, E_a : Energie d'activation de la réaction de craquage, $\sigma_{v,0}$: constante liée à la surface interne du poreux, $k(T)$: taux de réaction, D_C : constante liée à la diffusion du gaz)

2.3.2. Modèle 1D simplifié adimensionnel

Une première étude semi-analytique en 1D du front de densification a été réalisé par Nadeau et al. (Nadeau, 2004; Nadeau et al., 2006). Ensuite, Vignoles et al (Vignoles et al., 2007b) ré-incluent les résultats locaux du front dans un modèle 1D contenant la largeur totale du disque à densifier (zone dense, zone en densification, zone vierge) pour conduire à une approche transitoire 1D.

Domaine d'études

Le dispositif considéré, les conditions de bord et les équations de bilan de départ du modèle 1D sont les mêmes qu'en 2D. Le domaine d'études correspond à une section horizontale du dispositif avec le flux de chaleur et le flux d'espèces imposés d'un côté et la température et la concentration imposées de l'autre côté.

Modèle local du front

Le modèle local du front est construit comme suit :

- i) Ecriture des équations de bilan (les mêmes qu'en 2D) en monodimensionnel et simplification.
- ii) Analyse adimensionnelle. Les grandeurs caractéristiques qui en sortent permettent déjà d'évaluer l'influence de certains paramètres du procédé (Pression, chauffage, géométrie, ...) sur des grandeurs d'intérêt (vitesse du front, sa largeur, ...).
- iii) Recherche des solutions numériques des équations adimensionnelles sous forme d'onde progressive. Cette approche consiste à dire que l'allure d'une grandeur en espace ne dépend pas du temps, dans un repère approprié se déplaçant à une vitesse v . Mathématiquement on peut alors reformuler la variation temporelle d'une grandeur en produit de sa variation en espace fois une vitesse constante (vitesse du front). Par exemple pour la porosité ε on a

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(x) \rightarrow v \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}(x) \quad (2.6)$$

Ainsi formulé, le problème devient une recherche de valeurs propres pour le système d'équations de bilan : La vitesse v n'est pas une grandeur libre et l'existence d'une solution au système d'équations de bilan couplées est liée à certains critères. Ces critères d'existence correspondent à des contraintes sur le dispositif expérimental qu'il faut satisfaire pour avoir l'établissement et la propagation d'un front.

Résultats

On trouve les résultats suivants :

→ Il existe deux types de front représentés sur fig. 16 :

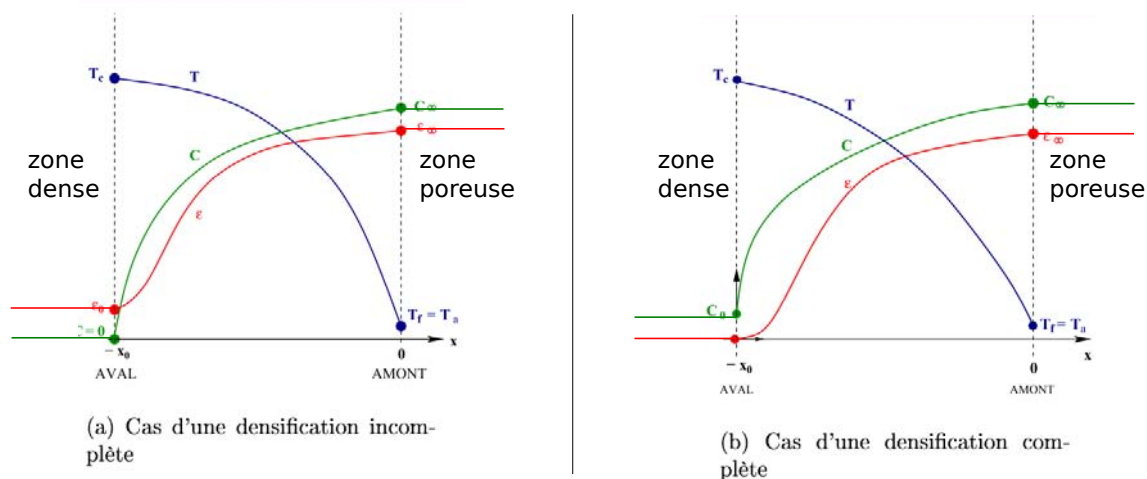


Fig. 16: Schéma des deux types de fronts de densification possibles. (a) Front de déplétion, (b) Front de densification complète. Pour chacun on trace le température T , la concentration de précurseur C et la porosité ε à l'intérieur du front.

Source : (Nadeau, 2004)

Les deux types se distinguent de leurs propriétés au côté aval (côté densifié) :

- Front de déplétion : Tout le cyclohexane réagit dans la zone de densification si bien que du côté aval il n'y en a plus. Dans ce cas la porosité résiduelle est supérieure à la porosité fermée de la surface interne. C'est le cas le plus fréquent lors des applications industrielles.
- Front de densification complète : Il reste du cyclohexane au côté aval. La fin du front est alors caractérisé par le fait que la porosité résiduelle équivaut à la porosité fermée de la surface interne (la porosité pour laquelle la surface interne vaut zéro).

Le côté amont (côté poreux) du front est défini dans les deux cas par une température d'allumage T_a nécessaire pour déclencher la réaction chimique de dépôt

→ Une analyse dimensionnelle (voir aussi annexe J) permet d'introduire premièrement un temps caractéristique du dépôt et deuxièmement une longueur caractéristique. Le temps caractéristique est inversement proportionnel à un taux de réaction qui est défini en fonction de la température au côté chaud du front (T_c sur les figures 16) et de la concentration de cyclohexane au côté froid du front (C_∞ sur les figures 16). La longueur caractéristique choisie est i) proportionnelle au flux de chaleur moyen ($\lambda_T \cdot (T_c - T_a)$), et ii) inversement proportionnelle à l'énergie d'activation et le flux de chaleur. Un flux de chaleur moins élevé à température chaude fixe conduit donc à un front plus large sans affecter le temps caractéristique du dépôt.

- Une résolution analytique approchée des équations adimensionnelles montre que
- L'obtention d'un front de densification complète ou bien d'un front de déplétion dépend d'une compétition entre la loi de surface interne et de la loi de la diffusivité des gaz en fonction de la porosité.
 - La vitesse du front dans le cas de déplétion couramment retrouvé en application industrielle, est i) proportionnelle au taux de réaction intégré sur le front et ii) inversement proportionnelle à la surface interne divisée par le taux de solide $(1 - \varepsilon)$ également intégrée sur le front.
- Les critères d'existence de front mentionnés auparavant peuvent être trouvés lorsqu'on résout le système d'équations adimensionnelles numériquement. La figure 17 met en évidence l'existence d'un flux massique maximal et d'un flux de chaleur minimal pour l'établissement d'un front. Une densification efficace n'est possible que pour une bande mince de combinaison de flux massique et flux de chaleur.

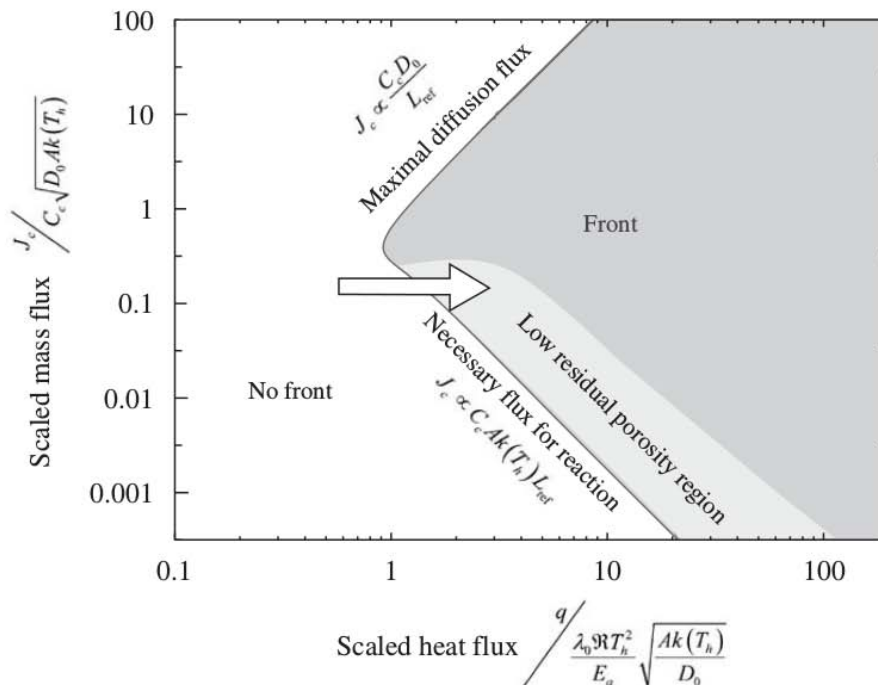


Fig. 17: Critère d'existence de front en fonction du flux de chaleur et du flux de cyclohexane.

Source : (Nadeau et al., 2006)

- Après une résolution numérique on trouve également que pour le cas où un front existe toutes les grandeurs adimensionnelles sont de l'ordre de un. Ceci exprime que les grandeurs de référence de l'adimensionnement sont vraiment significatives.

Modele du front inclu dans le domaine complet

Les résultats de cette étude locale du front sont inclus dans un modèle 1D contenant la largeur totale du disque à densifier (zone dense, zone en densification, zone vierge) (Nadeau et al., 2006). La zone de densification est alors traitée comme un front « à taille donnée » qui introduit des sauts dans les profils de température, de concentration et de porosité d'après les critères trouvés dans l'étude trouvée avant. De plus, on considère que ce front se déplace avec le temps à la vitesse trouvée également auparavant. Cette étude permet de valider les résultats du modèle 1D vis-à-vis d'une expérience.

Finalement, dans (Vignoles et al., 2007b) les auteurs établissent en 2D une équation de propagation du front dont une étude de perturbations permet de connaître les critères de stabilité du front. Ils introduisent des temps et longueurs caractéristiques de propagation des perturbations. Une comparaison du temps de propagation avec le temps caractéristique de dépôt ainsi qu'une comparaison de la longueur de propagation avec la taille de la pièce sont réalisées pour différentes températures de travail. Les auteurs concluent notamment que pour des températures typiques du procédé, inférieures à 1200°C , soit les perturbations se propagent trop lentement par rapport au temps de densification, soit elles sont trop larges et donc presque plates, non observables, sur la largeur de la pièce. Néanmoins, pour des pièces plus grandes elles pourraient jouer un rôle plus important. Il en est de même pour des diamètres de pores plus petits qui introduisent des temps caractéristiques de perturbation plus courts.

2.4. Objectifs de la thèse

A partir des travaux antérieurs, nous résumons les phénomènes physico-chimiques par le schéma de la figure 18 :

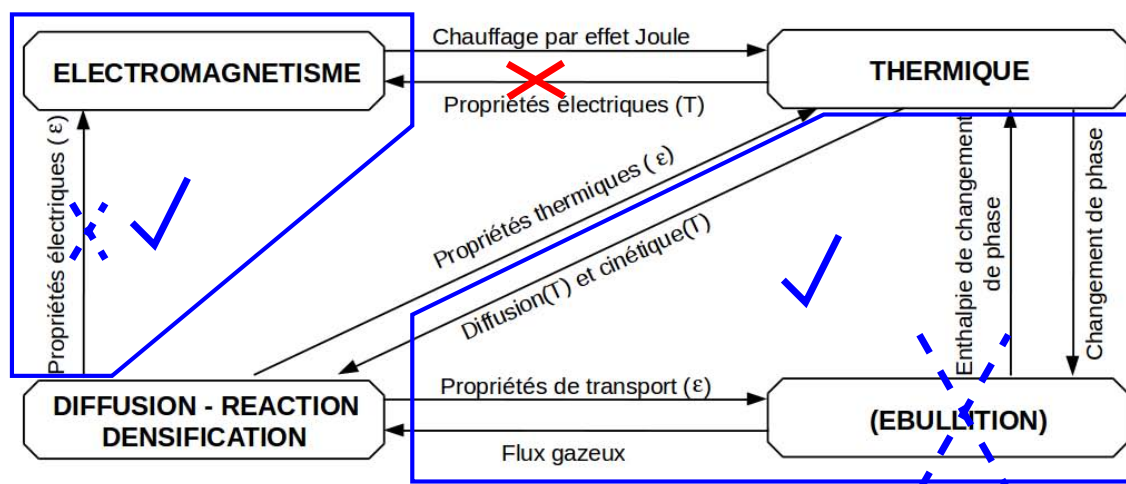


Fig. 18: Schéma des phénomènes physiques et de leurs interactions qui apparaissent dans le modèle de densification par caléfaction. La lettre ε désigne la porosité. Ce schéma est présenté dans (Lines, 2003).

Nous avons barré les parties qui ne sont pas incluses dans les modèles antérieurs de cette thèse.

L'objectif de la présente thèse est d'élargir les modèles présentés auparavant afin de prendre en compte les phénomènes manquants, à savoir :

- Ajouter un modèle pour l'ébullition.
 - Ce modèle rajoutera également
 - Les interactions correspondantes au schéma 18
 - De la convection diphasique pour le transport (case en bas à gauche) ainsi que pour la thermique (case en haut à droite)
- Faire coupler l'électromagnétisme directement sur la préforme
 - Ceci rajoutera la dépendance des propriétés électriques à la porosité.
 - Nous ne considérons néanmoins pas la dépendance des propriétés électriques à la température.

Les travaux antérieurs ont en général peu portés sur le chauffage par induction en tout cas au niveau de la modélisation. Ainsi, le comportement électromagnétique au cours de la densification n'est pas connu. Lines (Lines, 2003) a commencé à aborder ce sujet mais sans réaliser un calcul couplé avec l'infiltration.

Le suivi du procédé *in situ* par l'opérateur n'est pas encore à portée. Dans les travaux antérieurs le procédé de densification a dû être arrêté pour enlever la préforme et la découper afin de connaître l'avancement de la densification.

A l'aide de l'électromagnétisme on peut maintenant proposer une méthode originale de mesure de l'avancement à partir de grandeurs qui sont connues tout au long du procédé entier sans installation d'appareils de mesure supplémentaires. Une telle méthode de suivi non destructif en temps réel a déjà été présentée d'un point de vu expérimental dans (Golecki and Narasimhan, 2001). L'auteur y présente uniquement l'évolution de la tension et du courant dans l'inducteur au cours du temps sans aller en détail sur d'autres propriétés du système et leur analyse.

Quant à l'ébullition, il s'agit d'un ingrédient complètement nouveau de cette thèse, d'ailleurs très délicat à traiter.

Une fois le modèle entier établi nous allons l'exploiter afin d'étudier l'influence de paramètres du procédé, dont la liste est à définir, sur le coût d'une densification, dont notamment la consommation énergétique. Il s'agit de proposer des pistes d'optimisation de celui-ci.

3. Bibliographie sur l'ébullition et le transport en milieux poreux et leur modélisation

Tous les travaux déjà réalisés sur la modélisation du procédé par caléfaction ont fait abstraction de l'ébullition en milieu poreux. Or, il est important de pouvoir quantifier l'impact de ce phénomène ; c'est pourquoi nous nous y intéressons ici.

Nous présentons d'abord un aperçu de la physique de l'ébullition en milieu poreux avant de nous consacrer à l'état de l'art sur sa modélisation. Pour finir, nous exposerons les objectifs propres à ce travail, en termes de modélisation d'ébullition en milieu poreux.

3.1. Capillarité en milieu poreux non saturé

Par milieu poreux on entend tout matériau composé d'une matrice solide et d'espaces vides. Un premier exemple de milieu « poreux granulaire » est un empilement de billes, un deuxième exemple de milieu « poreux consolidé » est une couche géologique de roches calcaires altérées par les eaux souterraines. Dans le cas des composites C/C, la préforme représente un milieu poreux fibreux.

Un tel milieu poreux peut être étudié dans un premier temps à une échelle microscopique où il est vu comme composé de zones solides et de zones vides (les pores) chacune de taille différente. Une section d'un tel système, remplie d'un liquide et d'un gaz, est représentée sur la fig. 19 :

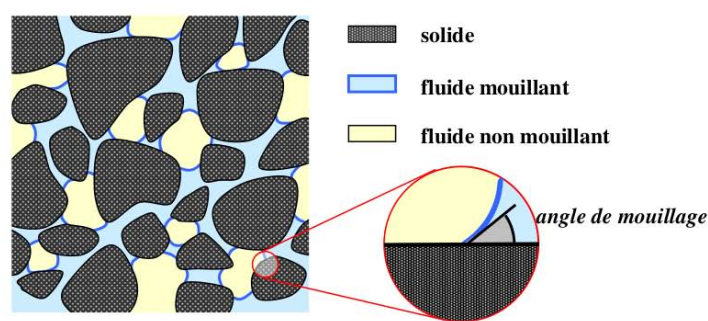


Fig. 19: Exemple de section d'un milieu poreux rempli d'un fluide mouillant (liquide) et d'un fluide non-mouillant (gaz)

On distingue la physique d'un poreux rempli d'un seul fluide (gaz ou liquide), appelé milieu poreux saturé, de celle d'un poreux rempli d'un diphasique tel que représenté sur la fig. 19. C'est notamment le deuxième cas qui nous intéresse dans la suite. Dans un diphasique, on a généralement une phase mouillante qui tente de maximiser son interface avec le solide, et une phase non-mouillante qui essaie de la minimiser. Pour la plupart des fluides composé d'un liquide et d'un gaz, le premier est mouillant et l'autre non-mouillant. Un exemple du

contraire est le mercure qui est non-mouillant, le gaz étant alors mouillant. On se sert de ce fait pour les mesures de porométrie mercure qui permettent de trouver par exemple la surface interne d'un milieu poreux, mais qui ne sera pas décrite plus en détail ici.

On peut regarder un volume test V_t du poreux dont le volume V_l est rempli de liquide. V_l est fonction du profil du milieu poreux. On définit alors le taux de saturation S par rapport au volume $V_p = \varepsilon \cdot V_t$ des pores (vides) :

$$S = \frac{V_l}{V_p} = \frac{V_l}{\varepsilon \cdot V_t} \quad (3.1)$$

Cette grandeur varie entre 0 et 1. Le gaz occupe alors le volume $V_g = (1 - S)V_p$.

Une grandeur physique caractéristique pour le phénomène de mouillage est la tension de surface. A l'intérieur d'un système avec différentes phases, chaque interface entre deux matériaux possède une énergie surfacique σ liée aux interactions inter-moléculaires. Cette énergie de surface est différente pour l'interface solide/liquide (σ_{sl}) que pour l'interface solide/gaz (σ_{sg}). Rajouter l'énergie interfaciale liquide/gaz (σ_{lg}) conduit à trois forces au point triple solide/liquide/gaz qui tentent à minimiser l'énergie totale et établissent l'angle de mouillage θ .

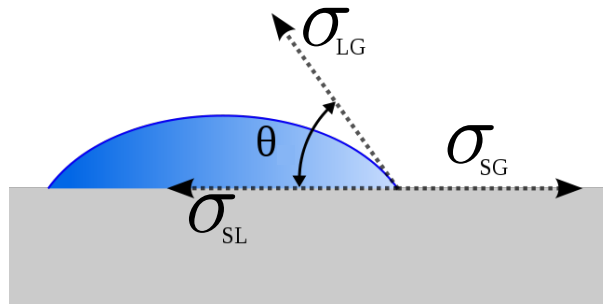


Fig. 20: Point triple d'une interface solide/liquide/gaz avec les 3 tensions de surface σ_{ij} correspondants et la définition de l'angle de contact θ

Cet angle est déterminé par équilibre des forces décrite par la relation de Young-Laplace :

$$\sigma_{sg} - \sigma_{sl} = \sigma_{lg} \cdot \cos \theta \quad (3.2)$$

Toute interface entre un liquide et un gaz dont la courbure est non nulle, apporte également une différence de pression entre le liquide (P_l) et le gaz (P_g). Cette différence de pression est appelée pression de capillarité (P_c). Elle est liée à la tension de surface entre le liquide et le gaz σ_{lg} et le rayon de courbure R_C via la loi de Laplace :

$$P_c = P_g - P_l = \frac{\sigma_{lg}}{R_c} \quad (3.3)$$

Prenons par exemple un capillaire simple cylindrique de diamètre d qui est rempli d'un liquide jusqu'à un certain niveau. Dans ce cas le liquide va former une interface sphérique avec le gaz au-dessus du liquide dont le rayon de courbure vaut $R_c = d/2/\cos \theta$ (voir fig. 21). De manière générale, le rayon de courbure de l'interface liquide/gaz dépend de la géométrie locale des pores.

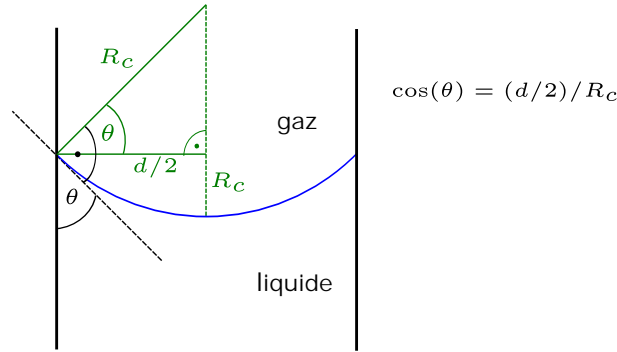


Fig. 21: Détermination du rayon de courbure de l'interface liquide/gaz dans un tube capillaire

Lorsqu'on place un tuyau capillaire dans un fluide initialement à surface plate, cette pression de capillarité entre le liquide et le gaz dans le tuyau conduit à une montée du liquide. Cette montée mène d'un autre côté à une force de gravitation supplémentaire qui augmente avec la hauteur du liquide dans le capillaire. Il y a une hauteur d'équilibre h_{eq} à laquelle la gravité et la force capillaire s'annulent et que le fluide trouve un nouveau état d'équilibre. Elle est décrite par la loi de Jurin :

$$P_c \cdot A = (\rho \cdot Ah_{eq}) \cdot g$$

$$\Rightarrow h_{eq} = \frac{\sigma_{lg}}{R_c \rho g} = \frac{2\sigma_{lg} \cos(\theta)}{d \rho g} \tag{3.4}$$

(A : section du tube capillaire)

En général, un milieu poreux possède des pores à tailles différentes et donc un profil de hauteurs d'équilibres : c'est une zone à taux de liquide décroissant, comme présenté sur fig. 22.

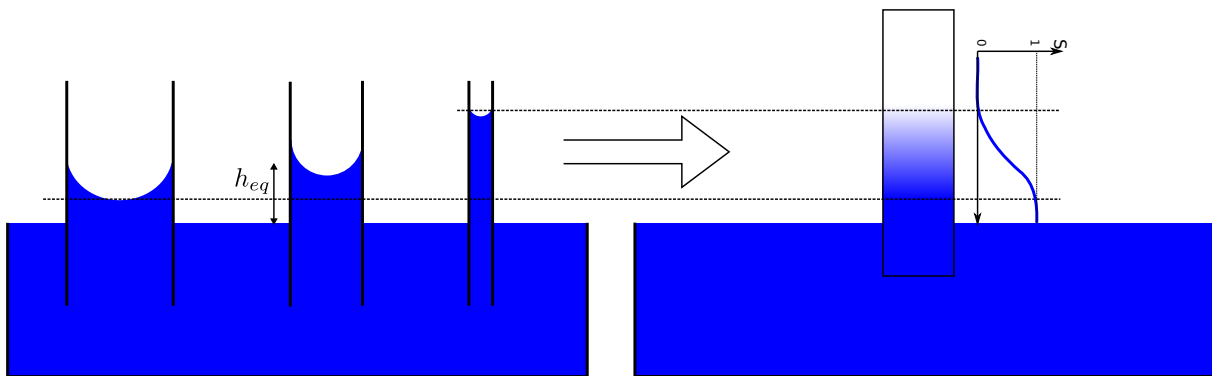


Fig. 22: Gauche : Remplissage de capillaires à différent diamètre dont chacun possède son hauteur d'équilibre. A droite : Un milieu poreux est constitué de pores de différentes tailles ce qui mène à une zone de transition avec taux de remplissage décroissant. Schéma : taux de saturation S le long de la zone de transition

La saturation est donc fonction des différents rayons capillaires qu'on trouve dans le volume test.

Ces rayons de courbure peuvent s'exprimer en fonction de la pression de capillarité selon l'équation 3.3. Expérimentalement on peut caractériser la pression de capillarité en fonction de la saturation en liquide et on obtient des résultats qui rassemblent à la figure 23 :

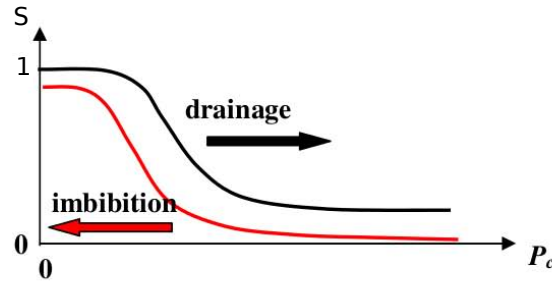


Fig. 23: Pression de capillarité type en fonction de la saturation du liquide. On observe une fonction sous forme de « S », avec hystérésis

La forme exacte dépend du fait que l'on soit en train de remplir ou de vider le milieu poreux avec du liquide. On parle alors d'hystérésis capillaire. Néanmoins, on observe généralement une forme de « S ».

Pour des applications de modélisation, cette pression de capillarité est approximée par une loi appelée « fonction de Leverett » qui est une généralisation de l'équation 3.3 :

$$P_c = \sigma \cdot \frac{2 \cos \theta}{\langle d \rangle} \cdot f(S) \quad (3.5)$$

où $\langle d \rangle$ est un diamètre moyen de pores et $f(S)$ une fonction sans dimension.

Nous avons montré dans cette section comment on peut passer de grandeurs microscopiques et locales (tensions de surface, angle de mouillage) vers des grandeurs homogénéisées et macroscopiques du milieu poreux (saturation, pression capillaire). Pour déterminer les paramètres et notamment la loi de pression capillaire, on peut avoir recours aux expériences. Des exemples d'expériences pour identifier des lois de propriétés de matériaux homogénéisés sont données dans l'annexe K. Outre la méthode expérimentale, il y a aussi des méthodes de prise de moyenne mathématique permettant d'aller d'une description microscopique vers une description macroscopique homogénéisée.

3.2. Écoulement en milieu poreux

Prise de moyenne sur un écoulement de fluide pour un milieu poreux (Stokes → Darcy)

Comme dans la partie précédente nous commençons par des considérations au niveau des canaux des pores et ensuite venir à l'échelle macroscopique. Un écoulement monophasique peut alors être classifié selon notamment 2 critères :

- Concernant la viscosité du fluide, nous allons nous concentrer sur des écoulements newtoniens : la viscosité du fluide peut dépendre de la température et de la pression, mais pas de la vitesse du fluide. Autrement dit, pour un fluide newtonien la vitesse est directement proportionnelle à la force de cisaillement.
- A l'intérieur du fluide il y a des forces inertielles et des forces visqueuses qui agissent (Pozrikidis, 2009). Le rapport entre ces deux influences définit le nombre adimensionnel de Reynolds :

$$Re = \frac{u_0 L_{ref}}{\nu} \quad (3.6)$$

(u_0 : vitesse caractéristique, L_0 : longueur caractéristique de l'écoulement, ν : viscosité cinétique)

Pour des nombres de Reynolds moyens, l'écoulement est dit laminaire, c'est à dire que toutes les lignes de flux sont parallèles. Pour des nombres de Reynolds élevés, c'est à dire quand les forces inertielles dépassent largement les forces visqueuses, l'écoulement devient turbulent, ce qui n'est pas d'intérêt pour cette thèse. Pour le cas contraire, où les forces visqueuses deviennent prépondérantes et le nombre de Reynolds petit, on obtient un écoulement de Stokes.

L'écoulement laminaire dans un pore est décrit par l'équation de Navier-Stokes avec une condition d'adhésion (non-glissement) aux bords :

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \cdot \vec{u}) = -\vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} \vec{u}) + \rho \vec{g} \quad (3.7a)$$

$$\vec{u} = \vec{0} \quad \text{aux parois} \quad (3.7b)$$

Celle-ci se simplifie pour de nombre de Reynolds faibles en équation de Stokes, écrite en stationnaire :

$$0 = -\vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} \vec{u}) + \rho \vec{g} \quad (3.8)$$

C'est le régime qu'on rencontre pour les écoulements en milieux poreux étudiés dans cette thèse : les pores sont petites et les fibres freinent l'écoulement, limitant ainsi les vitesses et les effets inertiels.

Pour simplifier, nous allons utiliser un modèle approché de pores : Un micro-canal cylindrique en direction z avec rayon R et longueur L_z . On applique une différence de pression ΔP entre l'entrée et la sortie. La vitesse ne possède donc qu'une composante z . Par invariance par translation, la chute de pression le long de l'axe z est constante et il en est de même pour la vitesse. Comme le canal est axisymétrique, on trouve que le profil de vitesse le long de l'axe z ne peut dépendre que du rayon :

$$\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = - \left(-\frac{\Delta P}{L_z} + \rho \cdot g_z \right) \quad (3.9)$$

Pour ce cas on peut intégrer deux fois en r la composante z de l'équation de Stokes. Après l'application de la condition de bord de vitesse zéro au bord du canal (non-glissement), on trouve le profil parabolique de Poiseuille du flux :

$$u_z(r) = \underbrace{\left(-\frac{\Delta P}{L_z} + \rho g_z \right)}_{F_{mot}} \cdot \underbrace{\frac{R^2}{4\mu}}_{K/\mu} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (3.10a)$$

Nous remarquons que la vitesse moyenne est proportionnelle aux forces motrices et à une conductivité. Les forces motrices sont la chute de pression le long du canal ainsi que la gravité. La conductivité contient la viscosité μ du fluide ainsi qu'un terme lié au milieu solide qu'on appelle la perméabilité K . Pour un canal cylindrique, cette perméabilité vaut $R^2/4$.

La loi de Darcy est une généralisation de la loi de Poiseuille à des milieux poreux quelconques où l'on remplace la perméabilité analytique par une valeur K_0 :

$$\vec{u} = -\frac{K_0}{\mu} \left\{ \vec{\nabla} P - \rho \vec{g} \right\} \quad \leftrightarrow \quad \vec{\nabla} P - \rho \vec{g} = -\frac{\mu}{K_0} \vec{u} \quad (3.11)$$

Outre par la voie de généralisation intuitive à partir de la loi de Poiseuille, la loi de Darcy peut être obtenue expérimentalement ou théoriquement à l'aide de prise de moyenne de

flux à travers un ensemble de pores (Neuman, 1977). Une troisième méthode alternative à prise de moyenne conduisant à la loi de Darcy consiste à utiliser des simulations microscopiques, appelées « simulations de réseaux poreux ». Dans cette approche, on explicite les différents canaux poreux, qui peuvent être de tailles différentes, et on modélise ainsi le passage d'un fluide à travers d'un milieu poreux (p.ex. (Figus et al., 1999)). Ces simulations ne font intervenir que des propriétés microscopiques. Les flux et les chutes de pression obtenus ainsi permettent, par comparaison avec la loi de Darcy, d'identifier la perméabilité du milieu poreux. Cette méthode de la détermination de la perméabilité, alternative à la mesure, nécessite la connaissance d'un modèle de distribution de pores.

La perméabilité qui apparaît dans la formule de Darcy 3.11 peut être tensorielle si le milieu poreux est anisotrope. Pour des raisons de simplicité de lecture nous gardons néanmoins une écriture scalaire pour le reste de ce chapitre.

Elle dépend de la porosité du milieu poreux, de sa tortuosité vis-à-vis du transport convectif η_v et du diamètre des pores d_p :

$$K_0 = \frac{\varepsilon}{\eta_v} \frac{d_p^2}{32} \quad (3.12)$$

Autour de la loi de Darcy il y a des généralisations pour des études plus complexes :

Lorsque le nombre de Reynolds n'est plus négligeable, la loi de Darcy est remplacée par la relation de Forchheimer qui fait intervenir un terme inertiel :

$$\vec{\nabla} P - \rho \vec{g} = -\frac{\mu}{K_0} \vec{u} - \frac{\rho \|\vec{u}\|}{\beta} \vec{u} \quad (3.13)$$

où β est appelé la passabilité du milieu poreux.

Les paramètres intervenants peuvent être obtenus de manière expérimentale comme nous le faisons pour l'exemple de la perméabilité dans l'annexe K.

Il existe de nombreuses études qui considèrent le couplage entre un milieu libre et un milieu poreux (Guta and Sundar, 2010; Chandesris and Jamet, 2006; d'Hueppe et al., 2011; Jamet and Chandesris, 2009; Chandesris and Jamet, 2009). Dans ce cas il est utile de se servir de l'équation Navier-Stokes-Brinkman qui rajoute un terme du type de Darcy, voire de Forchheimer, à l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \cdot \vec{u}) = -(\vec{\nabla} P - \rho \vec{g}) + \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} \vec{u}) - \frac{\mu}{K_0} \vec{u} \quad (3.14)$$

Dans le milieu libre on choisit une perméabilité très élevée. Ainsi les derniers termes disparaissent en milieu libre alors qu'ils deviennent prépondérants en milieu poreux.

La loi de Darcy est applicable pour des écoulements purement liquides ou purement gazeux. La perméabilité étant une propriété du milieu solide poreux, elle ne dépend pas de la phase du fluide.

Écoulements gazeux : Influence de la pression

Un autre régime d'écoulement est rencontré dans le cas où la densité du gaz devient faible. En effet, dans ce cas, les collisions intermoléculaires, responsables du caractère visqueux du gaz, deviennent rares par rapport aux collisions molécule-paroi.

À pression élevée l'influence de la présence du solide sur l'écoulement est double : Premièrement, le solide prend de la place dans l'espace et restreint ainsi le volume accessible

au gaz. Ceci est pris en compte par l'introduction de la porosité lors du moyennement lié au passage d'une description microscopique vers une description macroscopique. Deuxièmement, la condition de non-glissement du fluide aux bords des pores conduit à un frein de l'écoulement qui est autant plus fort qu'il y a de telles surfaces et dépend donc de la porosité. Dans la loi de Darcy ce frein est pris en compte par la perméabilité du milieu.

A basse pression, le libre parcours moyen des molécules gazeuses devient de plus en plus long et l'influence des chocs molécule-paroi devient alors de plus en plus important par rapport aux chocs intermoléculaires. Ceci est explicité par le nombre adimensionnel de Knudsen Kn :

$$Kn = \frac{d_{libre}}{d_{pore}} \quad (3.15a)$$

$$d_{libre} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \frac{R_g T}{N_A P \cdot d_{mol}^2} \quad (3.15b)$$

où d_{libre} est le libre parcours moyen d'une molécule de gaz, N_A la constante d'Avogadro et d_{mol} le diamètre d'une molécule de gaz. Ce dernier paramètre est dans l'ordre de $d_{mol} = 5 \cdot 10^{-10}$ (Klabunde, 2001, p. 242).

On observe dans ce cas que le solide obtient ainsi un troisième rôle dans son influence sur l'écoulement qui peut s'interpréter comme un phénomène de diffusion : on parle de diffusion de Knudsen. L'expression du flux est donnée par une loi de type « première loi de Fick », mais la diffusivité D_K dépend du diamètre des pores. Cet effet peut être modélisé en rajoutant à l'équation de Darcy un terme dit « de Klinkenberg » :

$$\rho \vec{u} = -\rho \frac{K_0}{\mu} \left(\vec{\nabla} P - \rho \vec{g} \right) - D_K \cdot \frac{M_g}{R_g T} \left(\vec{\nabla} P - \rho \vec{g} \right) \quad (3.16a)$$

$$D_K = \frac{1}{3} \frac{\varepsilon}{\eta_K} \sqrt{\frac{8 \cdot R_g T}{\pi M_g}} \cdot d_p \quad (3.16b)$$

où M_g est la masse molaire du gaz. A chaque type de transport correspond une tortuosité différente, caractéristique du milieu poreux considéré : la tortuosité liée à la diffusion de Knudsen η_K n'est pas la même que celle du transport visqueux η_v que nous avons introduite dans l'expression pour la perméabilité K_0 .

Écoulements gazeux multi-espèces : Diffusion

Un autre mode de transport à prendre en compte pour les écoulements de fluides est la diffusion d'espèces chimiques lorsqu'il y en a plus d'une. Cette diffusion entre espèces, appelée diffusion ordinaire, se rajoute au transport de la masse globale du gaz. C'est un phénomène distinct de la diffusion de Knudsen car lié aux collisions intermoléculaires. Néanmoins la structure globale des équations de flux diffusifs change complètement si l'on se trouve dans le cas d'un gaz non-raréfié (sans Knudsen) ou dans le cas d'un gaz raréfié (avec Knudsen). Pour le premier cas on suppose que la diffusion est proportionnelle à la pression partielle de l'espèce et à un facteur D_0 qui peut dépendre des gaz en question et de la géométrie du domaine (par exemple de la distribution de la taille des pores, des tortuosités). Pour garder le principe que la somme de tous les flux d'espèces forme le flux global du gaz, on pose naturellement que la somme de tous les flux diffusifs est égale à zéro. Pour deux espèces C (précurseur réactif) et X (sous-produits gazeux après craquage) on a :

$$\rho_g \vec{u}_g = \rho_{gx} \vec{u}_{gx} + \rho_{gc} \vec{u}_{gc} = -\frac{K_0 k_{rg}}{\nu_g} \cdot \left[\vec{\nabla} P_g - \rho_g \vec{g} \right] \quad (3.17a)$$

$$\rho_{gi}\vec{u}_{gi} = \frac{\rho_{gi}}{\rho_g}\rho_g\vec{u}_g + \vec{j}_{gi}^D = \frac{X_{gi}M_{gi}}{M_g}\rho_g\vec{u}_g + \vec{j}_{gi}^D \quad i = C, X \quad (3.17b)$$

$$\vec{j}_{gx}^D = -\vec{j}_{gc}^D = -D_{cx}\rho_g\vec{\nabla}\left(\frac{X_{gx}M_{gx}}{M_g}\right) \quad (3.17c)$$

où $\rho_g\vec{u}_g$ est le flux massique du gaz total, ρ_{gi} est la densité partielle de l'espèce i , \vec{u}_{gi} sa vitesse et \vec{j}_{gi}^D un terme de diffusion massique symétrique entre les deux espèces. $X_{gi} = P_{gi}/P_g$ est la fraction molaire de l'espèce i et $M_g = X_{gc}M_{gc} + X_{gx}M_{gx}$ la masse molaire totale du gaz. Tous les flux sont exprimés en $kg/m^2/s$.

Les équations de Stefan-Maxwell 3.18 (Mason and Malinauskas, 1983) sont une généralisation des expressions ci-dessus pour calculer les flux diffusifs. Elles sont valable dans un milieu libre (le solide poreux n'y apparaît pas) et elles mettent en relation les flux molaires diffusifs \vec{j}_i^D entre différentes espèces i et j et les différentes forces motrices à savoir : i) Le gradient des fractions molaires X_i (diffusion ordinaire), ii) le gradient de pression totale P_g (barodiffusion) et iii) Le gradient de température T (thermodiffusion) :

$$-\sum_{j=1}^n \frac{X_j\vec{j}_i^D - X_i\vec{j}_j^D}{\frac{P_g}{R_gT} \cdot D_{ij}} = \vec{\nabla}X_i + (X_i - \omega_i)\vec{\nabla}\ln(P_g) + \sum_{j=1}^n X_iX_ja_{ij}\vec{\nabla}\ln(T) \quad (3.18)$$

Lines (Lines, 2003) montre que dans le cas du procédé de densification par caléfaction ainsi qu'en CVI, la contribution de la thermo-diffusion est négligeable.

Pour établir un modèle d'écoulement de mélanges de gaz raréfiés dans un milieu poreux, on se sert de ces équations de diffusion en milieu libre de Stefan-Maxwell. Dans ce type d'écoulement, la diffusion de Knudsen entre les molécules gazeuses et les parois du solide se rajoute à la diffusion ordinaire et à l'écoulement visqueux de Darcy. Deux modèles d'écoulement gazeux en milieu poreux ont été élaborés prenant en compte le transport visqueux, la diffusion ordinaire, et la diffusion de Knudsen :

- o Le « Dusty Gas Model » (DGM) (Mason and Malinauskas, 1983) considère le milieu poreux solide comme une espèce gazeuse a priori soumise à un transport (en milieu libre), mais de masse très lourde et de vitesse zéro : la « poussière ». L'auteur obtient le système suivant pour les flux diffusifs :

$$\sum_{j=1}^n \frac{X_i\vec{j}_j^D - X_j\vec{j}_i^D}{D_{ij}^{eff}} - \frac{\vec{j}_i^D}{D_i^K} = \frac{\vec{\nabla}P_i}{R_gT} \quad (3.19a)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\vec{j}_i^D}{D_i^K} = -\frac{\vec{\nabla}P}{R_gT} \quad (3.19b)$$

Le flux total pour chaque espèce est alors obtenu en rajoutant à chaque flux diffusif le flux convectif sous forme darcéenne. Le schéma correspondant des contributions des flux au flux total est représenté sur la figure 24 en haut.

Le coefficient de diffusion binaire effectif en milieu poreux D_{12}^{eff} correspond au coefficient de diffusion binaire en milieu libre D_{12} multiplié par un coefficient de porosité et de tortuosité binaire η_b (qui est différent de la tortuosité de Knudsen) :

$$D_{12}^{eff} = \frac{\varepsilon}{\eta_b}D_{12} \quad (3.20)$$

De plus, la viscosité pour le transport convectif d'un mélange de gaz diffère de celle d'un gaz pur, et ceci même si la viscosité est la même pour chaque espèce. La formule correspondante est donnée par Wilke et al. (Wilke, 1950) :

$$\mu_m = \sum_{i=1}^n \frac{X_i \mu_{gi}}{\sum_{j=1}^n X_j \zeta_{ij}} \quad (3.21)$$

avec les coefficients

$$\zeta_{ij} = \frac{\left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_j} \cdot \left(\frac{M_{gj}}{M_{gi}} \right)^{0.25} \right)^{0.5} \right]^2}{\left[8 \cdot \left(1 + \frac{M_{gi}}{M_{gj}} \right) \right]^{0.5}} \quad (3.22)$$

où μ_{gi} est la viscosité de l'espèce i .

- o Le « Binary Friction Model » (BFM) (Kerkhof, 1996) comptabilise les forces de friction s'exerçant sur une espèce donnée. Les forces de friction contre la paroi prennent en compte de manière parallèle le mouvement convectif visqueux du gaz et la diffusion de Knudsen. Le schéma correspondant des contributions des flux au flux total est celui de la figure 24 en bas. En introduisant les coefficients de friction binaire (Mitra and Chakraborty, 2012)

$$f_{im} = \left(D_i^K + \frac{K_0}{\mu_i} \cdot P \cdot \sum_{j=1}^N X_j \zeta_{ij} \right)^{-1} \quad (3.23)$$

L'équilibre mécanique requiert la compensation des forces de friction par la chute de pression, soit :

$$\sum_{j=1}^n \frac{X_i \vec{J}_j - X_j \vec{J}_i}{D_{ij}^{eff}} - f_{im} \vec{J}_i = \varepsilon \frac{\vec{\nabla} P_i}{R_g T} \quad (3.24a)$$

$$\sum_{i=1}^n f_{im} \vec{J}_i = -\varepsilon \frac{\vec{\nabla} P}{R_g T} \quad (3.24b)$$

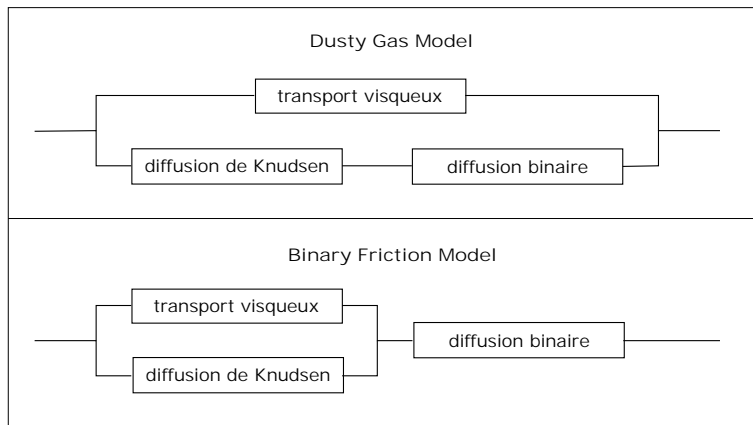


Fig. 24: Schéma de la contribution des différents types de flux au flux total d'une espèce pour le « Dusty Gas Model » (haut) et le « Binary Friction Model » (bas)

Dans les deux modèles, la première des deux formules principales (3.24a, 3.19a) représente un système de N équations pour les espèce $i = 1, \dots, N$. La deuxième formule principale donne une condition supplémentaire qui sort automatiquement lorsqu'on somme le système sur les N espèces. Les deux modèles sont algébriquement équivalents si les flux visqueux sont négligeables par rapport aux flux diffusifs, ce qui l'on constate facilement en posant $\vec{J}_i = \vec{J}_i^D$ et $K_0/\mu \ll D_i^K, D_{12}^{eff} \Rightarrow f_{im} \rightarrow 1/D_i^K$.

Les travaux de modélisation antérieurs (Lines, 2003; Reuge, 2002) ont retenu le DGM. La résolution du système donne les deux flux d'espèces molaires totaux (diffusifs et convectifs) pour les espèces C et X :

$$\vec{J}_{gC}^t = \left[-\frac{X_{gC}D_{gC}^K D_{gX}^K + D_{gC}^K D_{xc}^{eff}}{X_{gC}D_{gX}^K + D_{xc}^{eff} + X_{gX}D_{gC}^K} \frac{1}{R_g T} \vec{\nabla} P_{gC} - \frac{X_{gC}D_{gC}^K D_{gX}^K}{X_{gC}D_{gX}^K + D_{xc}^{eff} + X_{gX}D_{gC}^K} \frac{1}{R_g T} \vec{\nabla} P'_{gX} \right] - \frac{P_{gC}}{R_g T} \frac{K_0}{\mu} \vec{\nabla} P \quad (3.25a)$$

$$\vec{J}_{gX}^t = \left[-\frac{X_{gX}D_{gC}^K D_{gX}^K}{X_{gC}D_{gX}^K + D_{xc}^{eff} + X_{gX}D_{gC}^K} \frac{1}{R_g T} \vec{\nabla} P_{gC} - \frac{X_{gX}D_{gC}^K D_{gX}^K + D_{gX}^K D_{xc}^{eff}}{X_{gC}D_{gX}^K + D_{xc}^{eff} + X_{gX}D_{gC}^K} \frac{1}{R_g T} \vec{\nabla} P'_{gX} \right] - \frac{P_{gC}}{R_g T} \frac{K_0}{\mu} \vec{\nabla} P \quad (3.25b)$$

Nous y retrouvons pour les deux flux massiques une partie diffusive et une partie convective séparées. La partie convective est liée à la chute de pression totale et la perméabilité du milieu poreux. La partie diffusive contient les diffusivités ordinaire et de Knudsen ainsi que les chutes des deux pressions partielles d'espèces. Prendre la somme des deux flux d'espèces ne conduit pas à l'annulation des flux diffusifs.

Prise en compte du caractère diphasique de l'écoulement

Au début de cette section sur les écoulements en milieux poreux, nous avons pu argumenter que l'équation de Darcy 3.11 correspond au régime de notre application pour des flux monophasiques, mono-espèces et non-raréfiés. Dans la partie juste ci-dessus nous avons montré une description d'un écoulement gazeux multi-espèce raréfié qui est important notamment dans les petits pores au coeur partiellement densifié du disque. Au bord du disque, composé de grand pores uniquement, nous trouvons également une zone où le fluide est en ébullition. Nous allons donc devoir utiliser une formulation diphasique pour la loi de Darcy.

En effet, elle peut simplement être généralisée pour deux phases (p) en rajoutant une perméabilité relative qui prend en compte la friction entre les deux phases en sens de la perméabilité absolue pour l'interaction avec le milieu poreux. Sachant que chaque phase est mise en mouvement grâce au gradient de sa propre pression, on pose (Wang and Beckermann, 1993) :

$$\vec{u}_p = -\frac{K_0 k_{rp}}{\mu_p} \left\{ \vec{\nabla} P_p - \rho_p \vec{g} \right\} \quad (3.26)$$

Pour avoir la bonne limite vers le cas saturé (avec une seule phase fluide), on exige que la perméabilité relative varie entre 0 (absence de la phase) et 1 (présence unique de la phase). Les deux mouvements massiques de chaque phase peuvent ensuite être rassemblés en un mouvement de masse totale $\rho_m \vec{u}_m$ et un flux d'interdiffusion \vec{j} des deux phases en utilisant les définitions du tableau 5.4 :

$$\begin{aligned} \rho_m \vec{u}_m &= \rho_l \vec{u}_l + \rho_g \vec{u}_g \\ \vec{u}_m &= -\frac{K_0}{\mu_m} \left[\vec{\nabla} P_m - (\lambda_l \cdot \rho_l + \lambda_g \cdot \rho_g) \vec{g} \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Lorsqu'on connaît le profil de vitesses du mélange et de la saturation en liquide, on peut revenir par calcul algébrique aux vitesses de chaque phase via l'équation 3.28

$$\rho_l \vec{u}_l = \lambda_l \rho_m \vec{u}_m + \vec{j} \quad (3.28a)$$

$$\rho_g \vec{u}_g = \lambda_g \rho_m \vec{u}_m - \vec{j} \quad (3.28b)$$

où les λ_p sont des mobilités et \vec{j} le terme d'interdiffusion massique tel que défini dans le tableau 5.4. Le mouvement de chaque phase dépend donc du mouvement de la masse totale (liquide et gaz) et d'un mouvement relatif.

Pour conclure cette partie sur le transport diphasique en milieu poreux nous revenons sur le « modèle de réseaux poreux » que nous avons déjà mentionné en début de cette section. Figus et al. (Figus et al., 1999) montrent que le modèle continu de Darcy amène toujours à un front d'ébullition unique et « lisse » alors qu'une simulation microscopique du milieu poreux au niveau des pores permet de voir des fronts sous forme de fractales dans le cas de milieux avec des tailles de pores différentes. Ce dernier cas se rapproche plus de la réalité mais demande également une connaissance de la distribution des tailles de pores au sein du matériau et un calcul plus intensif.

3.3. Changement d'état en milieu poreux

Après les études d'un milieu poreux d'un point de vue mécanique ainsi que des types d'écoulement qu'on peut y retrouver, nous allons passer au bilan énergétique.

On peut distinguer deux types de fluides diphasiques :

- Deux phases inertes sans transition entre les deux phases, donc sans échange de masse. Ceci est par exemple le cas pour les couples eau/huile ou eau/air.
- Deux phases avec transition de phase, par exemple eau/vapeur d'eau.

La différence principale est que le premier type ne contient pas de terme de changement de phase dans le bilan énergétique ni de transfert de masse entre les deux phases. C'est le deuxième type qui décrit l'ébullition et qui nous intéresse dans la suite.

Concernant le changement de phase, on peut distinguer entre

- des phénomènes rapides, tel qu'une explosion, qui se passent hors équilibre thermodynamique. Ceux-ci nécessitent de prendre en compte chaque phase séparément avec des termes d'échange entre les phases. Les études de ce type sont plus complexes car elles font intervenir la cinétique des changements d'état.
- des phénomènes assez lents pour que l'on se trouve en équilibre thermodynamique local à l'échelle temporelle et spatiale du procédé étudié. Une caractéristique importante qui simplifie l'étude de ces phénomènes est l'égalité de températures entre les deux phases.

Lors du procédé de caléfaction apparaissent des changements de phase du deuxième type. Pour ces systèmes diphasiques en équilibre thermique local la température de chaque phase (solide, liquide, gaz) est la même à tout moment. Lors de l'ébullition on appelle cette température « température d'ébullition » ou encore « température de saturation ». Elle dépend du fluide et des conditions physico-chimiques de l'environnement dont notamment la pression. Avant de présenter la relation entre la température de saturation et la pression, nous nous consacrons à la loi de Kelvin qui met en rapport la pression du liquide et celle du gaz :

- Nous nous imaginons un système de bain liquide dans lequel on place un tube capillaire, tout le système entouré de gaz, comme présenté sur la figure 25 :

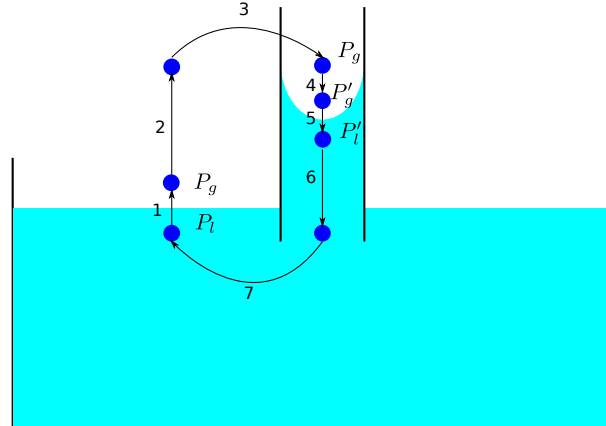


Fig. 25: Système d'un bain fluide avec tube capillaire inséré. La boucle fermée de déplacement d'une molécule permet d'établir la loi de Kelvin

- La montée capillaire se fait jusqu'à l'obtention d'équilibre de pression $P'_g = P'_l$. De même, sur la surface plate, on a $P_g = P_l$.
- Nous regardons maintenant N particules qui parcourent un chemin fermé représenté sur la fig. 25 : « position de départ en liquide » \rightarrow « transition en phase gazeuse (1) » \rightarrow « parcours en gaz (2,3,4) » \rightarrow « transition en phase liquide (5) » \rightarrow « parcours en liquide vers la position de départ (6,7) ». Puisque la valeur d'un potentiel thermodynamique d'un système ne dépend que de son état mais pas de son historique, la somme de tous ces changements sur ce chemin fermé équivaut 0.
- Sur les chemins verticaux (3) et (7) on n'effectue pas de travail, ni sur le chemin (2) puisqu'on suppose que pour la taille considérée du système la pression du gaz est fixe et le travail de gravité sur le gaz négligeable. Le travail pour enlever la molécule du liquide vers le gaz (1) ainsi que celui du chemin inverse (5) se compensent. Il reste donc deux chemins de changement de pression qui doivent s'annuler en somme pour la boucle complète :

- (i) La pression de gaz directement au-dessus de l'interface liquide est modifiée de la pression de capillarité par rapport à la pression dans l'espace libre. Le changement de potentiel thermodynamique de Gibbs lié au chemin (4) est donc pour un gaz parfait

$$P'_g = P_g + P_c \quad (3.29a)$$

$$dG_4 = V_g dP = \frac{NR_g T}{P} dP = NR_g T \ln \left(\frac{P'_g}{P_g} \right) \quad (3.29b)$$

où V_g est le volume des N particules en phase gazeuse qui est fonction de la pression selon la loi des gaz parfaits.

- (ii) Le travail du changement de pression dans le liquide suivant le chemin (6) peut être écrit en utilisant l'expression de la pression de capillarité :

$$dG_6 = V_l \cdot (P_l - P'_l) \quad (3.30)$$

$$P_l = P_g \quad P'_l = P'_g \quad (3.31)$$

$$dG_6 = V_l \cdot (P_g - P'_g) = V_l P_c \quad (3.32)$$

où V_l est le volume des même N particules en phase liquide.

- Vu que la boucle (1) à (7) est fermée, il faut que la somme des changements de potentiels de Gibbs soit zéro et on obtient ainsi la loi de Kelvin :

$$\begin{aligned} 0 &= dG_4 + dG_6 = NR_g T \ln \left(\frac{P'_g}{P_g} \right) - V_l P_c \\ \Rightarrow \ln \left(\frac{P'_g}{P_g} \right) &= \frac{V_m P_c}{R_g T} \end{aligned} \quad (3.33)$$

(N : nombre de moles de liquide/gaz considérés, R_g : constante des gaz parfaits, T : température unique du système, V_l : volume de la masse considérée sous forme liquide, V_m : Volume molaire du liquide, P_c : Pression capillaire)

Nous pouvons effectuer une étude similaire pour les transferts d'énergie (voir (Walter Greiner, 1999)) : La relation de Gibbs-Duhem lie les potentiels thermodynamiques du potentiel chimique μ , le nombre de particules N_i de l'espèce i , l'entropie du système S , la température T , le volume par particule V et la pression P :

$$\sum_i N_i d\mu_i = -S\Delta T + V\Delta P \quad (3.34)$$

Lorsqu'on utilise le fait qu'une transition de phase se fait toujours à potentiel chimique équivalent entre les deux phases, on peut déduire la relation de Clausius-Clapeyron, eqn. 3.35, qui lie la pression de saturation à la température de saturation et qui permet d'établir les diagrammes des phase tels que fig. 26 :

$$\ln \left(\frac{P_{sat}}{P_{sat,ref}} \right) = \frac{L_0}{R_g} \cdot \left(\frac{1}{T_{sat,ref}} - \frac{1}{T_{sat}} \right) \quad (3.35)$$

où la paire $(P_{sat,ref}, T_{sat,ref})$ correspondent à une paire mesurée de pression et de température d'ébullition et L_0 à la chaleur latente de la transition de phase. La loi permet ensuite de calculer la température d'ébullition pour d'autres pressions ou vice versa.

Remarquons que dans le système étudié ici les variations de pression totale sont toujours très faibles, ce qui nous amène à considérer la température de saturation comme une constante.

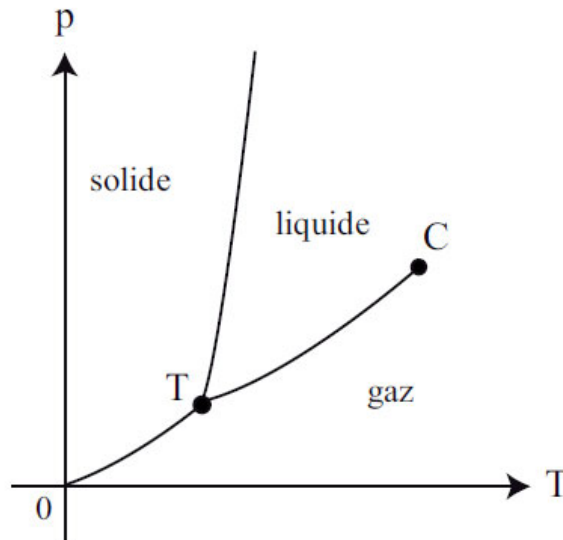


Fig. 26: Diagramme de phase typique d'un matériel, relevant le lien entre la température et la pression à laquelle se font les transitions de phase. Les courbes obéissent la loi de Clausius-Clapeyron dont la forme pour la transition entre liquide et gaz est donné dans 3.35.

Dans la suite du chapitre nous présentons un modèle de mécanique de fluides en milieu poreux qui est basé sur de telles grandeurs globales.

3.4. Applications de l'ébullition en milieu poreux

Bien au-delà du procédé qui fait l'objet de ce travail, l'ébullition en milieu poreux est un sujet qui trouve des applications dans beaucoup d'autres domaines. Par exemple :

- Les systèmes modernes de refroidissement font intervenir l'ébullition en milieu poreux (Byon and Kim, 2012; Madani et al., 2013). Le choix de milieux poreux pour le refroidissement est lié au fait qu'un poreux possède plus de surface en contact avec le fluide qu'un simple canal dont le contact ne se fait qu'au bord de celui-ci. Ceci conduit alors à un échange thermique plus élevé avec le fluide et permet ainsi des systèmes de refroidissement plus compacts. L'ébullition n'est dans ce cas non pas un phénomène voulu puisque le coefficient d'échange de chaleur avec un fluide diphasique est beaucoup inférieur à celui d'un liquide (environ d'un facteur 10), mais plutôt un phénomène qui apparaît obligatoirement dès qu'on évacue beaucoup de chaleur et que le liquide atteint sa température de saturation.
- Le séchage par exemple de plaques solaires (Wengeler, 2001) ou bien le soudage des cartons pour aliments (Sukhareva et al., 2008) va avec une transition de liquide vers du gaz et donc de l'ébullition.
- Le séchage de nourriture pour de fins de conservation (Berk, 2013) ou bien lors de la cuisson dans un four (Ousegui et al., 2010).
- Dans l'étude des phénomènes liés aux réservoirs géothermiques en profondeurs considérables (Hirschberg et al., 2015; Watson, 2013) on retrouve de l'ébullition qui peut alors avoir deux origines :
 - La diminution de la pression que ressent par exemple l'eau quand elle sort des profondeurs à haute pression où elle est sous forme dissoute dans un liquide, vers l'atmosphère où elle est gazeux.
 - L'augmentation de la température que subit l'eau qui est pompée de la surface terrestre vers son intérieur où il fait très chaud.

Nous souhaitons nous appuyer sur les connaissances acquises lors de l'étude de ces différentes applications, afin de contribuer à mieux maîtriser le procédé qui fait l'objet de cette thèse.

3.5. Modélisation

3.5.1. Résumé global de la modélisation d'écoulements en milieux poreux

Lorsqu'on regarde la mécanique des fluides de manière générale, on peut l'organiser selon le type de milieu dans lequel l'écoulement se fait (le cadre solide) et selon la façon de traiter le fluide. Voici une grille générale de formalismes possibles selon les deux types de classements.

- Il y a trois types de milieu (cadre solide) dans lequel le fluide peut passer. Le domaine influe notamment sur le choix de l'équation des vitesses (sans déterminer directement la forme du bilan d'énergie) :

- Un milieu libre comme par exemple un fluide contenu dans des canaux de grande taille. Ce type d'écoulement se trouve dans notre étude entre l'inducteur et le disque à densifier.
Ces écoulements se traitent habituellement avec des équations de Navier-Stokes.
- L'interface entre un milieu libre et un milieu poreux.
L'influence du milieu poreux sur le liquide est caractérisée par un terme de Brinkman supplémentaire dans l'équation de Navier-Stokes.
- Un milieu poreux uniquement.
Le modèle pour les vitesses utilisé dans ces milieux est celui de Darcy avec éventuellement des termes additionnels comme nous l'avons vu précédemment.

C'est notamment le dernier milieu qui va nous intéresser dans la suite. Les publications sur les deux autres types d'écoulements sont données comme compléments et pourraient être d'intérêt lorsqu'on essaiera d'élargir le modèle pour mieux connaître les phénomènes en dehors et au contact avec le disque, et qui pourraient donc influencer l'intérieur du disque à travers les conditions de bord.

→ Le type de fluide et la manière de traiter le multiphasique. Ce choix va influencer le détail de l'utilisation de l'équation de masse, mais il va surtout jouer sur le bilan énergétique que l'on va utiliser :

- Description d'un fluide monophasique.
Dans ce cas la seule grandeur qui définit l'énergie du système est la température du liquide et du solide.
- Description d'un fluide diphasique où l'on considère les deux phases liquide/gaz distinctement.
Ce formalisme permet de considérer une température différente pour chaque phase avec des échanges thermiques entre les unes avec les autres. De plus, il y a des interactions d'impulsion et de masse entre les deux phases. Un tel traitement est obligatoire dans des applications hors équilibre thermique, à savoir des phénomènes rapides telles qu'une explosion. Ce formalisme possède l'inconvénient que nous avons déjà mentionné dans le cadre de la conservation de masse : Il nécessite l'expression de deux types de termes d'échanges : i) un premier échange qui est lié à la transition de phase et qui est simplement proportionnel au taux de changement de phase et à la chaleur latente ; ii) un deuxième type d'échange (conductif) lié au contact entre une zone gazeuse existante et le liquide qui l'entoure. La deuxième contribution est souvent compliquée à exprimer et à maîtriser.
- Description d'un fluide unique contenant le mélange des deux phases.
Une hypothèse standard de ce formalisme est l'équilibre thermodynamique entre les phases qui mène à l'égalité de la température du liquide et du gaz. Les flux massiques du liquide et du gaz sont alors exprimés en un flux du mélange et un flux relatif entre les deux phases.

Un tableau avec quelques publications pour chacune des 6 combinaisons possibles, ainsi que leurs résumés sont donnés dans l'annexe B.

Dans la suite de la thèse nous nous concentrons sur le cas d'un milieu poreux parcouru par un fluide diphasique décrit sous forme de mélange.

3.5.2. Conservation d'énergie lors de l'ébullition

Il est à remarquer que lors de la modélisation des fluides en ébullition en équilibre thermiques, les grandeurs habituellement utilisées (T , S) sont constantes dans certains domaines et variables dans d'autres (voir fig. 27). Un traitement englobant les 3 zones liquide/diphasique/gaz peut donc être délicat à mettre en œuvre.

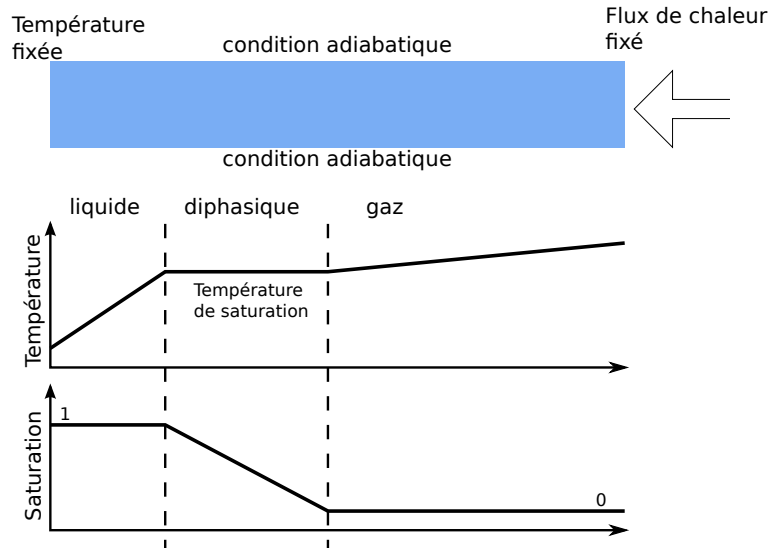


Fig. 27: Etude d'un canal rempli de fluide avec température fixée au côté gauche et flux de chaleur fixé au côté droit (figure en haut). Schéma pour la température (milieu) et la saturation en liquide (bas). Dans les zones monophasiques, la saturation est constante et la température est fonction de l'espace. Dans la zone diphasique c'est le contraire.

Voici les résumés de quelques publications qui traitent un fluide en équilibre thermique :

- Salimi et al. (Salimi et al., 2012) présentent un formalisme de saturation négative : L'équation de la saturation est généralisée afin que la saturation puisse varier au-delà de l'intervalle standard entre 0 et 1. Leurs équations permettent de traiter plusieurs espèces dont chacune peut être liquide ou gazeuse. Néanmoins, ils ne regardent pas la température et il n'y a pas de possibilité de transfert de masse entre les espèces (réactions chimiques), ni de chaleur latente liée au changement de phase.
- Beyhaghi et al (Beyhaghi et al., 2011b) réalisent des calculs et des expériences d'évaporation d'un fluide multi-espèces le long d'un milieu poreux quasi-monodimensionnel. Le milieu est en contact avec un réservoir de liquide en bas et exposé à l'air en haut provoquant ainsi de l'évaporation. Ils donnent les équations de conservation pour chaque espèce dans le fluide et ils développent le terme de perte de masse lié à l'évaporation.
- Bénard et al. (Bénard et al., 2005) utilisent un modèle d'entropie du mélange qui permet d'inclure de manière intrinsèque dans l'équation d'énergie l'équilibre des phases en ébullition à travers la relation de Gibbs. La saturation en liquide est ensuite déduite à chaque itération avec une méthode « fait maison », et la température découle de la valeur de l'entropie.
- Scarpa et al. (Scarpa and Milano, 2002) décrivent un système sans mouvement, si bien qu'ils ne traitent que la température et la saturation en liquide ainsi qu'une diffusion d'espèces puisqu'ils considèrent à la fois de la vapeur d'eau et de l'air. Leurs équations pour les deux premières grandeurs sont

$$\rho_0 \bar{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{T,eff} \frac{\partial T}{\partial z} \right) - L_0 \dot{m} \quad (3.36a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_l}{\rho_0} S \right) = -\dot{m} \quad (3.36b)$$

où ρ_0 est la densité apparente du solide. Le taux de transfert de masse \dot{m} est exprimé par la différence de la densité de vapeur et la valeur correspondant qu'on aurait en équilibre :

$$\dot{m} = \frac{1}{\tau} (\rho_s \phi - \rho_g) \quad (3.37)$$

où ρ_g est la valeur simulée de la densité du gaz, ρ_s est la densité de gaz d'équilibre en saturation qu'on aurait pour une surface plane, ϕ le ratio entre la valeur d'équilibre à l'intérieur du milieu poreux et la valeur pour la surface plane, et τ est une constante de temps qu'il faut identifier par des mesures.

On voit donc que ce modèle n'est pas seulement lié aux propriétés des matériaux et fluides mais qu'il demande également un ajustement par rapport à des mesures.

- Stemmelen et al. (Stemmelen et al., 1999) présentent un calcul analytique pour la taille de la zone diphasique dans un milieu poreux. Il montrent qu'elle est proportionnelle à la chute de pression capillaire le long de la zone diphasique, et inversement proportionnelle au flux de chaleur parcourant cette zone. Les auteurs mettent également en évidence l'existence d'un flux de chaleur minimal afin d'avoir une zone diphasique entièrement confinée dans le milieu étudié, avec une zone liquide d'un côté et une zone asséchée de l'autre.
- Wang et al. (Wang and Beckermann, 1993) basent leur modèle sur l'équilibre thermique entre les phases, et de plus ils supposent que l'on peut négliger les effets de pression sur la température de saturation : La température de saturation est considérée comme une constante dans la région d'ébullition. Ces deux hypothèses leur permettent d'utiliser l'enthalpie du mélange comme variable principale du système.

L'enthalpie d'une phase pure p , écrite dans l'équation 3.38, contient un terme de référence lié par exemple à température de saturation, plus un deuxième lié à la capacité calorifique et à l'écart de température par rapport à la température de référence :

$$h_p = h_{p,sat} + c_p(T) \cdot (T - T_{sat}) \quad (3.38)$$

L'équation de conservation d'enthalpie du système complet est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ (1 - \varepsilon) \rho_s h_s + \varepsilon S \rho_l h_l + \varepsilon (1 - S) \rho_g h_g \} + \vec{\nabla} \cdot \{ \rho_l h_l \vec{u}_l + \rho_g h_g \vec{u}_g \} - \vec{\nabla} \cdot \{ \lambda_{T,eff} \vec{\nabla} T \} = Q \quad (3.39)$$

Le modèle de Wang et al. est également utilisé dans diverses autres publications (Li et al., 2010; Najiari and Nasrallah, 2012).

Nous pouvons valider l'hypothèse que l'effet de la pression sur la température de saturation est négligeable à l'aide de l'application numérique suivante : Pour le cyclohexane ($L_0 = 360 \text{ kJ/mol}$, $T_{sat,ref} = 363 \text{ K}$) une variation de la température de saturation de 1 K correspond à une variation de la pression de 38%. Or, dans l'application du procédé par caléfaction on ne trouve que de très faibles différences de pression (de l'ordre de 0.7% lié à la pression hydrostatique du liquide dans la cuve) et une grande gamme de températures ($80^\circ \text{ C} - 1200^\circ \text{ C}$). L'équation 3.39 sera étudiée plus en détail dans le chapitre 5.3. Pour le moment nous remarquons qu'on y retrouve 4 termes :

- (i) Un terme d'accumulation d'énergie dans la totalité du système solide et fluide et gaz. C'est une fonction de la porosité ε , de la saturation en liquide S et de la température à travers des définitions des différentes enthalpies h_i . Il y a donc 3 types de stockage d'énergie :

- Par changement de porosité à température et saturation liquide constantes
L'accumulation d'énergie est alors liée aux différentes valeurs de capacités calorifiques entre le solide et les fluides (liquide et gaz).
- Par changement de la température (chaleur sensible)
Ceci est possible uniquement dans les régions monophasiques puisque dans la région diphasique la température est fixée à la température de saturation dans ce modèle. Dans ce cas ce sont les valeurs d'enthalpies qui changent.
- Par transition de phase entre le liquide et le gaz (chaleur latente)
Dans ce cas la température est fixée à la température de saturation si bien que l'enthalpie du solide est constante et les enthalpies du liquide et du gaz correspondent à leurs valeurs de saturation. On va voir dans la suite, où l'on traite du terme source \dot{m} , que l'équation de chaleur se lit donc sous la forme 3.40

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \varepsilon(1 - S)\rho_g L_0 \} + \vec{\nabla} \cdot \{ \rho_g \vec{u}_g L_0 \} = Q \quad (3.40)$$

si bien que l'accumulation d'énergie correspond au produit du changement de la saturation en liquide par la chaleur latente.

- (ii) Un terme de flux convectif qui prend la forme classique en monophasique $\rho_p \vec{u}_p h_p$. En diphasique, l'équation 3.40 montre que ce terme correspond à un flux de chaleur latente transporté par le gaz.
- (iii) La conduction de la chaleur avec une conductivité effective entre le liquide et le gaz. Ce terme disparaît en zone diphasique à cause de la température constante.
- (iv) La source de chaleur volumique Q .

3.6. Objectifs pour la thèse

Parmi les modèles et applications énumérées dans la section 3.4, nous retrouvons rarement des simulations qui contiennent, comme dans notre cas, à la fois

- 1) Du liquide à différentes températures
- 2) Du diphasique d'un état purement liquide jusqu'à un état purement gazeux
- 3) Du gaz jusqu'à des températures très élevées
- 4) Des espèces chimiques différenciées

De plus ces modèles ont toujours été utilisés dans des solveurs « ad hoc ». Ceci peut compliquer un couplage multi-physique tel qu'avec le chauffage par induction et le dépôt.

Le premier but principal de cette thèse est donc de développer et d'implémenter un modèle d'ébullition

- qui tourne dans un solveur numérique d'équations commercial ou open-source
- qui gère simultanément les cas du liquide pur, du diphasique et du gaz pur
- qui fonctionne sur une large gamme de températures, notamment du gaz à plus de $1000^\circ C$,
- qui permette facilement un couplage avec le chauffage inductif, le transport d'espèces gazeuses et le dépôt qui fait varier la géométrie interne et les propriétés du domaine
- et le tout en permettant de changer rapidement la géométrie du procédé simulé (p.ex. variation du système inductif, ou changement de disque de frein avec taille différente).

4. Notions de base sur le chauffage par induction

4.1. Introduction générale

Après avoir présenté le fonctionnement général du procédé, les simulations existantes ainsi que la première grande nouveauté dans ce travail, concernant l'ébullition, nous introduisons maintenant brièvement la partie concernant l'électromagnétisme et quelques travaux existants.

Dans un premier temps nous donnons des généralités sur la modélisation de l'induction et démontrons qu'il y a deux grands sous-domaines qui seront détaillés dans la suite : i) l'induction dans le sens propre, la répartition de courants et la source de chaleur attribuée ; ii) la théorie du circuit du générateur qui détermine les conditions de travail et donc les résultats de la première partie également. En conclusion du chapitre nous résumons le cahier de charges pour le modèle électromagnétique développé ensuite dans le chapitre 5.1.

Parmi les livres proposant une introduction à l'électromagnétisme, le chauffage par induction et la théorie des circuits nous nommons ici juste 3 exemples : (Rudnev et al., 2003), (Ganguly, 2014), (Meunier, 2008). Un bon cours sur le sujet a été écrit par R. Ernst (Ernst, 2009) et il y a deux publications succinctes sur le sujet (Develey, 2000a; Develey, 2000b)

Pour commencer, il faut savoir qu'un fil parcouru par un courant I_1 crée un champ magnétique \vec{B} dans l'espace qui obéit à la loi d'Ampère :

$$\vec{B}_1(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I_1 \cdot \vec{e}_\phi \quad (4.1)$$

où r est la distance entre le point de mesure et le fil.

Lorsqu'on approche maintenant un deuxième fil sous forme d'une boucle à se premier fil alimenté, celui-là va sentir ce champ qui va notamment induire une tension obéissant à la loi de Faraday :

$$U_2^i = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}_2 \quad (4.2)$$

où \vec{S}_2 et le vecteur normale à la surface formée par la boucle du deuxième fil et l'intégrale se fait sur sa surface intérieure complète. L'indice i signifie « induit ». Cette tension conduit à un courant I_2 dans la boucle.

Ces considérations d'induction peuvent être généralisées en introduisant l'inductance mutuelle M_{12} qui exprime l'influence du circuit 1 au circuit 2. Sa définition passe par le flux magnétique Φ_{12} du champ B_1 à travers la surface contournée par le circuit 2 :

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= \int_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}_2 = \mu_0 \left[\int_{S_2} \left(\frac{1}{2\pi r} \vec{e}_\phi d\vec{S}_2 \right) \right] \cdot I_1 \\ &= M_{12} I_1 \end{aligned} \quad (4.3a)$$

$$U_2^i = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{12} = -M_{12}\frac{\partial}{\partial t}I_1 \quad (4.3b)$$

L'écriture explicite de $\int \vec{B}_1 d\vec{S}_2 = \mu_0 \left[\int \left(\frac{1}{2\pi r} \vec{e}_\phi d\vec{S}_2 \right) \right] \cdot I_1$ concerne le cas d'un conducteur alimenté rectiligne. La généralisation ($\Phi_{12} = M_{12}I_1$) ainsi que l'équation pour la tension sont néanmoins valables pour différents types et géométries de circuits.

Le nouveau courant induit I_2 va ensuite créer son propre champ \vec{B}_2 qui va se superposer à \vec{B}_1 et ainsi modifier le courant I_1 à son tour. On peut donc écrire de manière similaire

$$U_1^i = -M_{21}\frac{\partial}{\partial t}I_2 \quad (4.4)$$

Notamment on peut montrer que (Ida, 2004)

$$M_{21} = M_{12} = M \quad (4.5)$$

Un inducteur, ou une bobine, est composé de plusieurs spires qui couplent entre elles également. On a donc en plus du couplage avec la charge via l'inductance M , une contribution propre à l'inducteur qu'on prend en compte via une inductance L . Pour une bobine de section S , de diamètre D , de hauteur h , composant N spires et qui est remplie d'air, L peut être approchée par la formule de Nagaoka (Ernst, 2009)

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{h} \cdot \frac{1}{K_{nag}} \quad (4.6a)$$

$$K_{nag} = 1 + 0.44 \cdot \frac{D}{h} \quad (4.6b)$$

K_{nag} s'approche de 1 pour le cas extrême d'une bobine infiniment longue. Les équations ci-dessus forment la base de l'induction.

En plus des phénomènes basiques de l'induction, il est intéressant d'introduire la façon habituelle de traiter de telles problématiques. Lorsqu'on alimente une bobine en tension et que l'on regarde le courant sur un oscilloscope, on constate que l'amplitude du courant est liée à celle de la tension comme nous le connaissons déjà de la loi d'Ohm classique ($U = R \cdot I$). En plus de cette résistance ohmique, le courant est aussi déphasé en temps par rapport à la tension. Ceci est un phénomène qui n'apparaît pas avec les résistances ohmiques classiques. L'effet d'induction (entre les spires) n'est donc pas de caractère ohmique mais possède une composante supplémentaire. Une méthode simple pour étudier un tel circuit consiste à introduire la tension et le courant sous forme complexe (U^* , I^*) avec une amplitude complexe (U_0 , I_0) et une fonction d'oscillation temporelle. On dit alors que les grandeurs mesurées sur un oscilloscope (U_{mes} , I_{mes}) correspondent à leurs parties réelles :

$$U^*(t) = U_0 \cdot \exp(i\omega t) \quad (4.7a)$$

$$U_0 = U_{0,r} + i \cdot 0 = U_{0,a} \cdot \exp(i \cdot 0) \quad (4.7b)$$

$$U_{mes}(t) = \Re(U^*(t)) = U_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (4.7c)$$

$$I^*(t) = I_0 \cdot \exp(i\omega t) \quad (4.7d)$$

$$I_0^* = I_{0,r} + i \cdot I_{0,i} = I_{0,a} \cdot \exp(i\phi) \quad (4.7e)$$

$$I_{mes}(t) = I_{0,a} \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad (4.7f)$$

où $\omega = 2\pi f$ et f est la fréquence de la tension. Nous avons marqué avec $*$ les nombres complexes et les indices r, i, a indiquent réciproquement « partie réelle », « partie imaginaire » et « amplitude du vecteur dans l'espace complexe ».

Nous avons choisi la tension comme référence pour le temps de démarrage de mesure puisque nous alimentons le circuit en tension. Tout le déphasage ϕ est donc porté par le courant qui a une amplitude I_0^* vraiment complexe, contrairement à la tension. Dans la suite nous laissons de côté les indices 0 et $*$ et remplaçons $I_0^* \rightarrow I$. De même nous pouvons éliminer l'exponentielle $\exp(i\omega t)$ puisqu'elle est la même pour tension et courant.

Pour ce formalisme nous réunissons également la résistance ohmique R ainsi que l'inductance L dans une impédance complexe Z :

$$Z_L = R_L + i\omega L \quad (4.8)$$

Avec ces définitions nous pouvons traiter le circuit de la bobine alimentée en tension de la même façon qu'un circuit ohmique. Ainsi nous obtenons directement la relation d'amplitude entre le courant et la tension ainsi que le déphasage :

$$I = \frac{U}{Z} = U \cdot \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (4.9a)$$

$$\frac{\|I\|}{\|U\|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (4.9b)$$

$$\phi = -\text{atan}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \quad (4.9c)$$

Pour l'application classique d'une bobine en cuivre, la partie inductive est très supérieure à la partie résistive, ce qui conduit au déphasage de 90° entre le courant et la tension qu'on observe sur l'oscilloscope.

Lorsque nous choisissons le courant comme référence, nous obtenons de manière similaire

$$\begin{aligned} U^* &= Z^* \cdot I = R \cdot I + i\omega L \cdot I \\ I &\in \mathbb{R} \quad U \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (4.10a)$$

$$\frac{\|U\|}{\|I\|} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (4.10b)$$

$$\phi = \text{atan}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \quad (4.10c)$$

Un autre avantage de ce traitement des problèmes d'induction par des nombres complexes est que toute dérivée temporelle revient à une simple multiplication par $i\omega$. On a notamment pour les tensions induites :

$$U_2^i = -M \frac{\partial}{\partial t} I_1(t) = -M \cdot i\omega \cdot I_1 \quad (4.11)$$

Le travail se divise maintenant en deux parties :

La première consiste à trouver l'état d'équilibre et donc notamment la distribution de courant dans chaque conducteur, alimenté par une tension ou non. Les calculs détaillés montrent une dépendance du résultat avec la fréquence de travail. Nous allons montrer qu'elle ne peut pas être choisie librement et qu'elle dépend intrinsèquement du circuit complet au niveau du générateur. La deuxième étape concerne ainsi l'étude du circuit électrique au niveau global du générateur.

4.2. L'induction, calcul des courants, chauffage

Le but de cette partie est d'avoir une idée globale de la répartition des courants entre les spires d'un inducteur et la charge (le disque) à chauffer. Ce courant va ensuite conduire à la source de chauffage par effet Joule.

Nous considérons d'un cas d'étude avec une bobine alimentée en tension V_1 et une charge sous forme d'un fil court-circuité ($V_2 = 0$). Les équations sont les suivantes :

$$V_1 = Z_1 \cdot I_1 + i\omega M I_2 = R_1 I_1 + i\omega L_1 I_1 + i\omega M I_2 \quad (4.12a)$$

$$V_2 = 0 = Z_2 I_2 + i\omega M I_1 = R_2 I_2 + i\omega L_2 I_2 + i\omega M I_1 \quad (4.12b)$$

On retrouve les principales propriétés d'un système inductif après résolution de la deuxième équation :

$$I_2 = \frac{i\omega M}{R_2 + i\omega L_2} I_1 \quad (4.13)$$

Ceci indique que

- Le courant induit dans la charge est proportionnel à celui dans l'inducteur primaire.
- Plus le couplage est fort, c'est à dire plus M est élevé, et plus le courant induit est fort. Ici ce sont notamment la géométrie et les différents matériaux qui influent.
- Plus l'impédance de la charge est élevée, moins le courant induit est fort. Ceci est lié à la loi de Faraday qui implique que la véritable grandeur induite est la tension.
- Ce dernier point implique notamment que le rapport des courants varie lorsque les propriétés électriques de la charge évoluent. Ceci est le cas pour nos études de densification de freins puisque la partie de disque densifiée est plus conductrice que la partie initiale poreuse.

L'équation 4.12a) donne alors

$$V_1 = \left[\left(R_1 + \frac{M^2 \omega^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} R_2 \right) + i\omega \left(L_1 - \frac{M^2 \omega^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} L_2 \right) \right] \cdot I_1 \quad (4.14a)$$

$$= R_{tot} \cdot I_1 + i\omega L_{tot} \cdot I_1 = Z_{tot} \cdot I_1$$

$$R_{tot} = R_1 + c_{12} R_2 \quad (4.14b)$$

$$L_{tot} = L_1 - c_{12} L_2 \quad (4.14c)$$

$$c_{12} = \frac{M^2 \omega^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} = \frac{M^2 \omega^2}{\|Z_2\|^2} \quad (4.14d)$$

Nous en déduisons les propriétés suivantes :

- La charge peut être « ramenée » au circuit primaire, c'est à dire que la tension V_1 est liée directement au courant I_1 sans apparition de la tension ou du courant de la charge. Cela se traduit par une résistance et une inductance modifiée. Cette propriété est importante lorsque nous allons faire des considérations du circuit au niveau de l'inducteur : Elle permet de prendre en compte l'inducteur et la charge par une seule résistance et une seule inductance effectives.
- Pour ramener la résistance et l'inductance de la charge au circuit primaire, on passe par un coefficient commun qui dépend du couplage M , de la fréquence ω et de l'impédance de la charge $\|Z_2\|$. Ce coefficient possède donc les mêmes propriétés que nous avons énumérées pour le rapport des courants I_2/I_1 (plus l'inductance mutuelle M est grande et plus c_{12} est fort ; plus l'impédance de la charge est élevée et plus ce coefficient est faible ; c_{12} varie au cours de la densification).
- Lorsque le couplage devient plus fort, la résistance totale augmente alors que l'inductance totale diminue.

Même si ces conclusions générales déduites du cas d'étude restent justes, la réalité d'un système de chauffage inductif s'avère plus compliquée : Nous n'avons pas affaire à des filaments infiniment fins, mais à des spires et une charge bien étendues. Les lois d'Ampère et de Faraday que nous avons présentées sous forme moyennée sont donc à remplacer par les équations locales de Maxwell. Ces équations sont résumées dans l'annexe C et sont sujet du chapitre concernant la construction du modèle.

Une telle analyse locale permet notamment d'introduire une densité de courant $j(x)$ qui est ensuite liée au profil de chauffage volumique $Q(x)$ qui crée le lien avec la thermique :

$$Q(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \|j(x)\|^2 \quad (4.15)$$

Il est intéressant de mentionner l'effet de peau. Pour des cas simples 1D (par exemple l'enchaînement disque vierge, entrefer, inducteur, extérieur du système, l'ensemble étant de taille infinie dans les deux directions perpendiculaires à l'axe de l'étude) nous obtenons typiquement des lois exponentielles de décroissance de la densité de courant dans chaque zone depuis son bord jusqu'à son intérieur :

$$j_k(x) = j_{k,0} \cdot \exp\left(-\frac{x - x_k^{bord}}{d_k}\right) \quad (4.16)$$

où x_k est la position du bord de la k^{ieme} zone. On appelle la grandeur d_k l'épaisseur de peau. Elle dépend de la résistivité ρ du matériel, de sa permittivité magnétique absolue μ et de la fréquence de travail :

$$d_k = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu\omega}} \quad (4.17)$$

La puissance de chauffage, étant directement liée à la densité de courant, suit alors également une loi décroissante du bord d'une zone vers son intérieur avec une épaisseur de peau valant la moitié de celle du courant. Cette épaisseur de peau est de l'ordre de quelques millimètres pour le cuivre et de quelques centimètres pour la préforme vierge ce qui fait que le chauffage de la préforme est approximativement homogène sur sa taille entière (de quelques centimètres).

4.3. Considérations du circuit électrique

Nous nous intéressons à l'étude du générateur au niveau global :
On pourrait faire du chauffage par induction avec les éléments décrits auparavant : On

insère la charge à chauffer dans un inducteur, on applique un courant dans l'inducteur, et le chauffage commence. Ceci marchera pour n'importe quelle fréquence de travail. Or, nous avons déjà vu 3 inconvénients à cette pratique :

- 1) La fréquence de travail joue sur le coefficient de couplage entre le courant dans l'inducteur et celui dans la charge, voir eqn. 4.13, ce qui mène à chercher une fréquence optimale.
- 2) Un tel système possède un mauvais déphasage entre le courant et la tension, qui se rapproche de 90° . Nous remarquons que la puissance totale d'un système se divise en une partie active, qui peut servir pour chauffer, et une partie réactive, qui est liée à la magnétisation de la bobine et qui n'a pas d'apport utile au système :

$$\begin{aligned} P_{tot} &= U^* \cdot I = \Re(U) \cdot \Re(I) + \Im(U) \cdot \Re(I) = RI^2 + i\omega LI^2 = UI \cdot \cos(\phi) + UI \cdot \sin(\phi) \\ &= P_{act} + P_{react} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Un déphasage élevé se traduit par une forte puissance réactive que le fournisseur d'électricité doit alors mettre à disposition, et qu'il pénalise sur la facture.

- 3) Pour des applications de chauffage inductif les courants sont souvent forts, dans l'ordre de plusieurs milliers d'ampère. Dans le cas d'un circuit simple composé d'une source de courant en série avec l'inducteur et sa charge, il faut donc que la source fournisse ces intensités. Ceci est un courant très élevé qui passe difficilement dans des fils électriques habituels non refroidis, ce qui implique un inconvénient supplémentaire au niveau du circuit de l'armoire électrique.

Pour lutter contre ces 3 inconvénients le circuit simple est remplacé par un circuit dit oscillant qui inclut un condensateur en parallèle avec l'inducteur et sa charge. Pour illustrer l'avantage de ceci graphiquement, nous présentons les grandeurs électriques en espace complexe, appelé diagramme de Fresnel. Pour expliquer le fonctionnement de cette représentation, nous commençons avec le circuit simple d'une source et d'un inducteur (inductance et résistance) en série dont nous avons vu toutes les expressions auparavant.

Peu importe le circuit utilisé, le but principal est de chauffer la charge, ce qui nécessite un courant donné dans celle-ci et donc dans l'inducteur. Nous prenons alors comme grandeur de base une valeur de courant sur l'inducteur I_{LR} . Ensuite nous établissons toutes les autres grandeurs (tensions et courants) autour de celui-ci :

Pour le cas du circuit simple nous avons le diagramme fig. 28 :

- i) La chute de tension sur la résistance U_R est un vecteur dans le même sens que I_{LR} avec longueur multipliée par R .
- ii) La chute de tension sur la bobine U_L est un vecteur de longueur I_{LR} multipliée par la pulsation et la capacité ωC qui en plus est multipliée par l'unité imaginaire i et donc tourné de 90° à gauche par rapport à I_{LR} .
- iii) La chute de tension totale U_t est la somme vectorielle de ces deux dernières.
- iv) Le courant total I_t est identique au courant passant par la résistance et l'inductance.

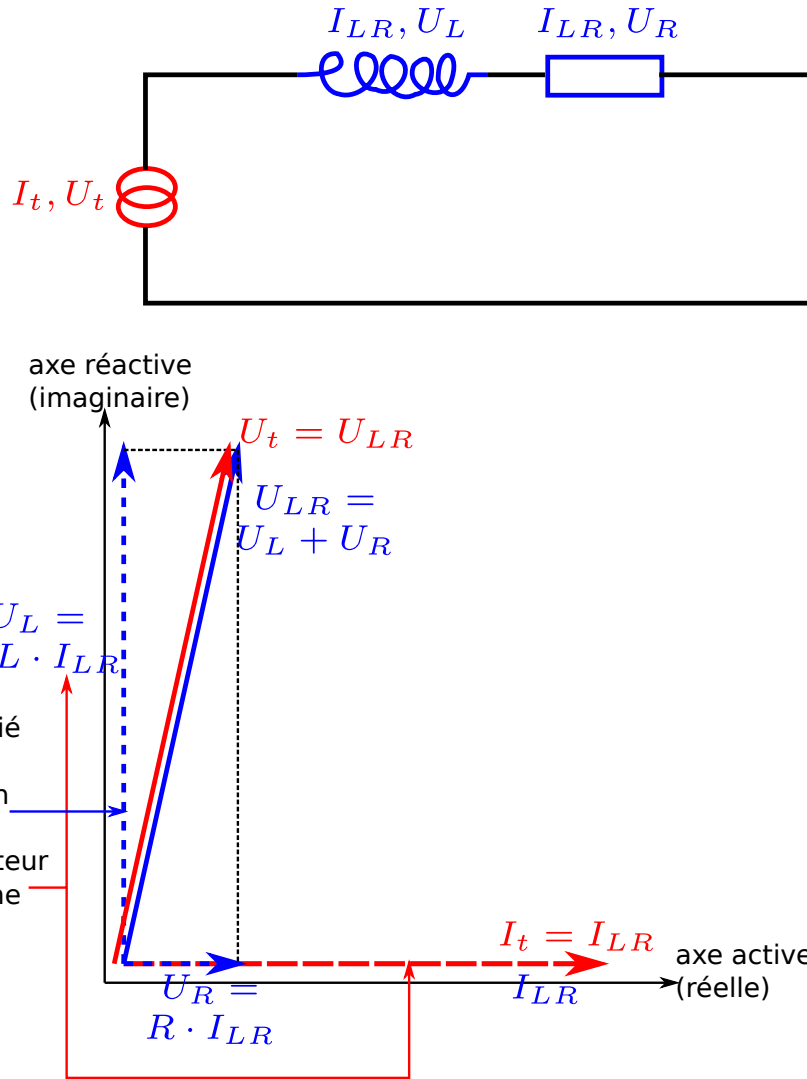


Fig. 28: En haut : Circuit simple d’une source de tension en série avec l’inducteur. En bas : Diagramme de Fresnel correspondant

Nous constatons l’angle de déphasage Φ élevé entre le courant et la tension. La puissance active est ensuite définie par le produit du courant et la composante de la tension projetée sur courant. La puissance réactive est obtenue par le produit du courant et la composante perpendiculaire de la tension totale. La puissance active est beaucoup plus faible que la puissance réactive.

Nous regardons maintenant ce qui se passe lorsqu’on rajoute un condensateur en parallèle de l’inducteur. L’impédance d’un condensateur est donnée par

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \tag{4.19}$$

Le résultat est représenté sur la fig. 29 : Puisque nous gardons comme référence le courant dans l’inducteur I_{LR} , celui-ci ainsi que la chute de tension sur la résistance et l’inductance U_{LR} et donc la tension totale restent inchangés. La chute de tension totale correspond également à la chute de tension sur le condensateur U_C . Nous pouvons alors calculer le courant à travers le condensateur I_C en multipliant la tension totale par ωC et en tournant le vecteur 90° à gauche (multiplication avec i). Nous obtenons le nouveau courant total I_t par la somme des courants I_{RL} (imposé) et I_C .

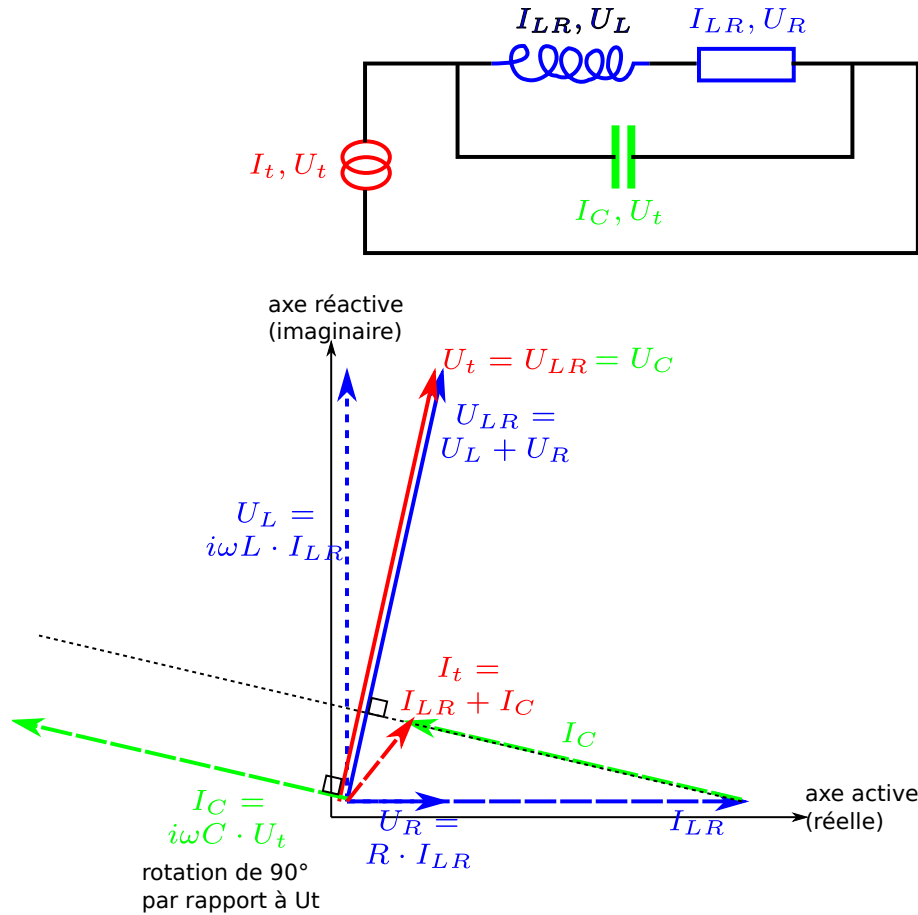


Fig. 29: En haut : Circuit oscillant : Rajout d’une capacité en parallèle de l’inducteur. En bas : Diagramme de Fresnel correspondant

Nous constatons que nous pouvons alors varier l’amplitude du courant total ainsi que le déphasage en choisissant différentes fréquences de travail. Il existe notamment une fréquence pour laquelle le courant et la tension totales sont en phase (donc pas de pénalité par le distributeur d’électricité) et pour laquelle le courant est le plus petit possible également : On a donc une puissance active maximale possible et une puissance réactive nulle. Cette fréquence optimale est appelée la « fréquence de résonance ». Nous pouvons la calculer à partir du fait que le courant et la tension totales sont censées être en phase si bien que l’impédance complète, voire son inverse, n’a pas de facteur de phase et est donc entièrement réelle :

$$\frac{1}{Z_{RLC}} = \frac{1}{Z_{LR}} + \frac{1}{Z_C} = \frac{R - i\omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} + i\omega C \tag{4.20a}$$

$$0 = \Im \left(\frac{1}{Z_{RLC}} \right) \tag{4.20b}$$

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - R^2 \frac{C}{L}} \tag{4.20c}$$

Pour les cas les plus standard de chauffage par induction, la contribution ohmique est très petite devant la contribution inductive du système ($R \ll \omega L$) si bien que la fréquence de résonance se réduit à $\omega_{res} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Pour le cas où l’on travaille à fréquence de résonance, l’impédance du circuit est purement

réelle :

$$Z(\omega = \omega_{res}) = \frac{R}{1 - R^2 \frac{C}{L}} \quad (+i \cdot 0) \quad (4.21)$$

Pour ce cas nous pouvons également calculer le « gain de courant total » en introduisant le facteur de surtension Q_{surt} et obtenons le rapport optimal entre le courant dans la partie d'induction (I_{LR}) et le courant total (I_t) :

$$Q_{surt} = \frac{\omega L}{R} \quad (4.22a)$$

$$\|I_t\|^2 = \|I_{LR}\|^2 - \|I_C\|^2 \quad (4.22b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\|I_t\|}{\|I_{LR}\|} &= \sqrt{1 - \frac{\|Z_{LR}\|^2}{\|Z_C\|^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{R^2}{L^2} + \omega^2\right) \cdot \omega^2 L^2 C^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{R^2}{L^2} + \omega^2\right) \cdot \frac{\omega^2}{\left(\omega^2 + \frac{R^2}{L^2}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + Q_{surt}^2}} \approx \frac{1}{Q_{surt}} \end{aligned} \quad (4.22c)$$

4.4. Objectifs pour la thèse

Nous avons vu que l'application de l'électromagnétisme se fait dans deux niveaux : Le chauffage par induction classique avec conditions de travail (notamment la fréquence de résonance) données, et les considérations du circuit pour faire fonctionner le système dans les bonnes conditions de travail. Les propriétés du système évoluent avec la densification du disque et notamment le suivi de la fréquence de résonance permet expérimentalement de suivre l'avancement du procédé. Nous demandons donc au modèle de satisfaire les critères suivants :

- Prendre en entrée la géométrie du disque ainsi que celles du système inductif. Notamment ces derniers paramètres doivent être facilement réglables puisqu'ils le sont également dans l'expérience sur place et puisqu'ils feront objet d'une optimisation du procédé.
- Travailler avec un pilotage en tension ou en puissance dans le circuit oscillant, sachant que ces valeurs vont évoluer au cours de la densification.
- Traiter à la fois la recherche de la fréquence de résonance (théorie du circuit) et de la répartition spatiale des courants et de la puissance de chauffage.
- Calculer notamment la fréquence de résonance, la résistance et l'inductance du circuit oscillant puisqu'il s'agit de valeurs mesurables expérimentalement qui permettent donc une validation du modèle et un suivi de l'avancement de la densification.

5. Construction du modèle

Nous présentons et nous développons ici un modèle général du procédé par caléfaction. L'électromagnétisme et l'ébullition sont de nouveaux phénomènes pris en compte par rapport aux modélisations antérieures. Nous rajoutons aussi les deux équations de bilan d'espèce et de la réaction chimique de dépôt issues des travaux connus (Lines, 2003; Delhaès et al., 2005) et adaptées pour mieux s'accorder au modèle d'ébullition. Le chapitre conclut sur une analyse dimensionnelle de l'influence des différents phénomènes en jeu et sur la manière de traiter le couplage et de piloter le procédé.

5.1. Electromagnétisme, chauffage par induction

Le premier grand domaine physique au centre du projet de modélisation est celui de l'électromagnétisme. Il servira d'un côté pour le chauffage de la pièce par induction, et de l'autre côté pour le pilotage du procédé et la mesure de l'avancement de la densification. Nous rappelons que les évaluations de la puissance de chauffe, de l'inductance et de la résistance effectives s'obtiennent par la résolution d'un problème d'électromagnétisme détaillé en espace ; par ailleurs l'obtention de la fréquence de résonance nécessite la résolution d'un problème de circuit équivalent incluant les composants auxiliaires. Il y a donc deux types de calculs que nous allons présenter dans la suite :

La première partie est un calcul spatial résolu par éléments finis en supposant un courant total dans les spires ainsi qu'une fréquence de travail imposés. La résolution se fait sur un domaine plus large que le disque seul, à savoir qu'il prend en compte

- le disque partiellement densifié,
- l'entrefer entre le disque et les spires
- les spires,
- « l'extérieur » allant jusqu'à « l'infini »

Il est important de savoir que les propriétés électromagnétiques globales du système varient avec l'état de densification ce qui rend obligatoire une adaptation de la puissance de chauffage tout au long du cycle. Ceci donne lieu au deuxième calcul d'électromagnétisme concernant la fréquence de résonance du système ainsi que l'inductance et la résistance du système global (disque, spires, coffret de condensateurs et tout ce qui se trouve à l'extérieur de la cuve de réaction). Pour finir nous montrons comment calculer les tensions sur chaque spire à partir du calcul détaillé en espace grâce à ce schéma électrique.

5.1.1. Chauffage par induction, équation spatiale du potentiel vecteur

Le fonctionnement de base du chauffage par induction a été expliqué dans l'introduction, chapitre 4, et un résumé des équations principales se trouve dans l'annexe C.

La formulation mathématique de l'électromagnétisme est basée sur les équations de Maxwell.

Celles-ci postulent les relations qui existent entre les courants dans les conducteurs et les champs magnétiques et électriques. Ces équations sont au nombre de quatre, pour quatre champs électromagnétiques : Le champ magnétique \vec{H} , l'induction magnétique \vec{B} , le champ électrique \vec{E} et l'induction électrique \vec{D} . Dans la plupart des matériaux, deux champs sont liés par des lois de comportement linéaires dans chaque domaine : $\vec{D} = \varepsilon_{el}\vec{E}$, $\vec{B} = \mu_{mag}\vec{H}$. Le champ électrique et la densité de courant sont également liés de manière proportionnelle par la conductivité : $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. Nous avons choisi une formulation basée sur les potentiels vecteur \vec{A} et scalaire V . Ainsi, le système d'équations de Maxwell peut être décrit par seulement deux équations 5.1 (voir annexe C) :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{j}) = 0 \quad (5.1a)$$

$$-\frac{1}{\mu}\Delta\vec{A} = (1 + \frac{i\omega\varepsilon}{\sigma}) \cdot \vec{j} \quad (5.1b)$$

Ce système contient l'hypothèse de la jauge de Coulomb, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (voir annexe C). La densité de courant \vec{j} est fonction des deux potentiels selon l'équation 5.2 :

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} = \sigma \left(-i\omega\vec{A} - \vec{\nabla}V \right) + \vec{j}_{ext} \quad (5.2)$$

où \vec{j}_{ext} est un terme lié à la source externe dans les spires. C'est une grandeur spatiale qui varie notamment d'une spire à l'autre et qui vaut zéro en dehors des inducteurs. Son calcul est l'objet de la section 5.1.4.

Nous remarquons que tous les champs électromagnétiques physiques peuvent être retrouvés à partir des deux potentiels et des relations C.15. Néanmoins, nous ne nous servons pas de ces grandeurs dans la suite des travaux.

A partir de la densité de courant nous obtenons la source de chauffage volumique par effet Joule comme suit :

$$Q = \frac{1}{\sigma} \|\vec{j}\|^2 \quad (5.3)$$

Pour les cas axisymétriques le potentiel vecteur V est égal à une constante correspondant à une tension extérieure imposée et la seule grandeur non nulle est la composante angulaire du potentiel vecteur A_ϕ (voir annexe, p. XXI).

Le jeu d'équations à résoudre est alors 5.1 avec la relation 5.2 qui s'écrivent en axisymétrie comme 5.4 :

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial}{\partial r} A_\phi \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_\phi + i\omega\sigma\mu_{mag,0}A_\phi = -\mu_{mag,0} \cdot j_{\phi,ext} \quad (5.4a)$$

$$j_\phi = -i\sigma\omega A_\phi - j_{\phi,ext} = j_{\phi,ind} + \sum_i j_{\phi,ext,i} \cdot \delta_i \quad (5.4b)$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{dans la } i\text{-ème spire} \\ 0 & \text{en dehors} \end{cases} \quad (5.4c)$$

Ici nous avons explicité le fait que chaque spire possède une densité de courant externe différente. Les expressions des $j_{\phi,ext,i}$ seront données dans eqn. 5.12 p. 61.

5.1.2. Conditions de bord

En électromagnétisme, la physique porte sur le champ magnétique ($\vec{B} \propto \vec{H}$), alors que l'équation différentielle est basée sur le potentiel vecteur \vec{A} . Il est alors nécessaire d'écrire les conditions de bord également pour ce potentiel. En axisymétrie le lien entre le champ électromagnétique et le potentiel vecteur est le suivant :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\phi) \right] \cdot \vec{e}_z \quad (5.5)$$

Lorsqu'une iso-valeur est parallèle à l'axe des z , la dérivée de A_ϕ dans ce sens est égal à zéro et le champ magnétique pointe également dans cette direction. Une argumentation similaire découle pour le cas opposé :

$$\text{Isovaleur}(r \cdot A_\phi) \parallel \vec{e}_z \Rightarrow \frac{\partial(r \cdot A_\phi)}{\partial z} = 0 \Rightarrow \vec{B} \parallel \vec{e}_z \Rightarrow \vec{B} \parallel \text{Isovaleur}(A_\phi) \quad (5.6a)$$

$$\text{Isovaleur}(r \cdot A_\phi) \parallel \vec{e}_r \Rightarrow \frac{\partial(r \cdot A_\phi)}{\partial r} = 0 \Rightarrow \vec{B} \parallel \vec{e}_r \Rightarrow \vec{B} \parallel \text{Isovaleur}(r \cdot A_\phi) \quad (5.6b)$$

Nous rappelons que seul la dérivée du potentiel vecteur est physiquement importante, et que sa valeur elle-même ne porte pas d'information.

Quand on regarde les conditions de bord du domaine d'étude qui coïncident avec des axes de symétrie, on peut se retrouver avec deux cas :

→ \vec{B} est perpendiculaire à l'axe de symétrie. On parle alors de flux transverse et la condition de bord associée selon l'analyse ci-dessus est

$$\frac{\partial(r \cdot A_\phi)}{\partial n} = 0 \quad (\text{Isovaleur jusqu'à l'infini}) \quad (5.7)$$

où $\partial/\partial n$ désigne la dérivée suivant la direction normale de l'axe.

Cette condition se présente quand on a un axe de symétrie miroir : Une spire de l'inducteur a en face d'elle, de l'autre côté de l'axe de symétrie, une spire parcourue par un courant dans le même sens.

→ \vec{B} est parallèle à l'axe de symétrie. Selon l'analyse ci-dessus il faut donc que l'isovaleur de A_ϕ suive également cet axe. Sachant que la valeur de A_ϕ même n'a pas d'importance, il est habituel de fixer

$$A_\phi = 0 \quad (5.8)$$

Cette condition est liée au cas où une spire trouve en face d'elle une autre spire parcourue par un courant dans le sens opposé. C'est par exemple le cas pour un axe de rotation du système.

Beaucoup de systèmes électromagnétiques sont des systèmes ouverts, par exemple un inducteur avec sa charge placés dans l'espace sans aucun blindage. La condition à adapter est alors telle qu'à « l'infini » il n'y a plus aucun champ. Physiquement cette condition se met en place automatiquement vu l'équation du système et l'absence de toute source. Mathématiquement et numériquement on a néanmoins besoin de fermer le système avec des conditions de bord. Il est conventionnel de lier les axes de symétrie existants par des arcs de cercle « loin du système à étudier ». La notion de « loin » se trouve en faisant différents

essais à différentes distances jusqu'à ce que l'on constate qu'un éloignement supplémentaire de cet arc artificiel n'influe plus sur les résultats physiques dans le système étudié. La condition appliquée sur cet arc n'a pas d'importance et on trouve dans la littérature les deux possibilités mentionnées ci-dessus, à savoir $A_\phi = 0$ ou $\partial A_\phi / \partial n = 0$. Certains programmes de simulation commerciaux proposent également des « domaines infinis » qui contiennent une transformation mathématique pour ramener la condition de l'infini physique sur ce cercle qui se trouve au bord du domaine. Néanmoins, lorsqu'on accepte un domaine d'études plus grand, on obtient les mêmes résultats qu'avec cette transformation et un domaine plus petit.

Pour illustrer les conditions de bord, nous présentons sur la figure 30 le cas de deux inducteurs mono-spire parallèles :

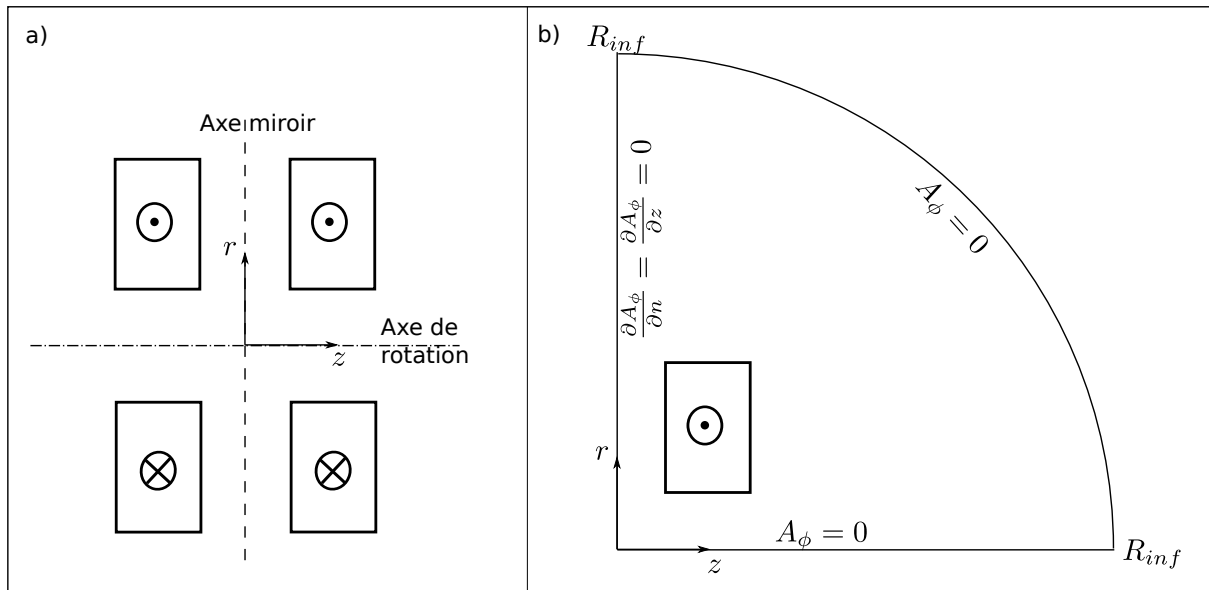


Fig. 30: Exemple de réalisation d'un système physique pour une étude numérique. a) Système physique contenant deux boucles de courant parallèles (une à gauche et une à droite de l'axe de symétrie miroir) b) Transcription pour une étude numérique : L'axe de rotation est remplacée par une condition de bord $A_\phi = 0$ et l'axe de symétrie miroir par $\partial A_\phi / \partial n = 0$. De plus, on rajoute une fermeture du domaine à « l'infini » par un arc de cercle de rayon R_{inf} où l'on impose $A_\phi = 0$

5.1.3. Motivation d'une étude de circuit électrique et présentation du dispositif

Motivation par rapport au modèle

Dans les équations principales de la résolution spatiale, 5.4a) et b), il y a deux paramètres qui interviennent qui ne sont pas des paramètres de matériaux mais qui ne peuvent quand-même pas être choisis librement :

- La fréquence de travail f et la pulsation correspondante $\omega = 2\pi f$:
Nous avons expliqué dans le chapitre 4 qu'il s'agit ici d'une grandeur qui doit être adaptée au système chauffé afin de permettre un bon fonctionnement. Si les propriétés de la charge chauffée évoluent, la fréquence de résonance le fait également.
- La densité de courant externe j_{ext} :
Comme dans le schéma 31b, l'inducteur est représenté par différentes spires qui sont

liées les unes aux autres. Nous allons voir dans la section suivante (5.1.4) qu'en effet la densité de courant s'écrit pour chaque spire et peut être liée à la chute de tension sur cette spire. Chercher la densité de courant externe revient donc à chercher autant de tensions $U_{ext,i}$ qu'il y a de spires.

Ces grandeurs sont déterminées par le circuit électrique complet utilisé comme nous l'expliquerons dans la suite.

Présentation du dispositif électromagnétique

Avant de poursuivre la recherche des valeurs de ces paramètres nous nous intéressons au lien entre i) la personne qui pilote le procédé, ii) l'état du disque partiellement densifié dans la cuve de réaction et iii) ce qui se passe dans le générateur et son circuit associé :

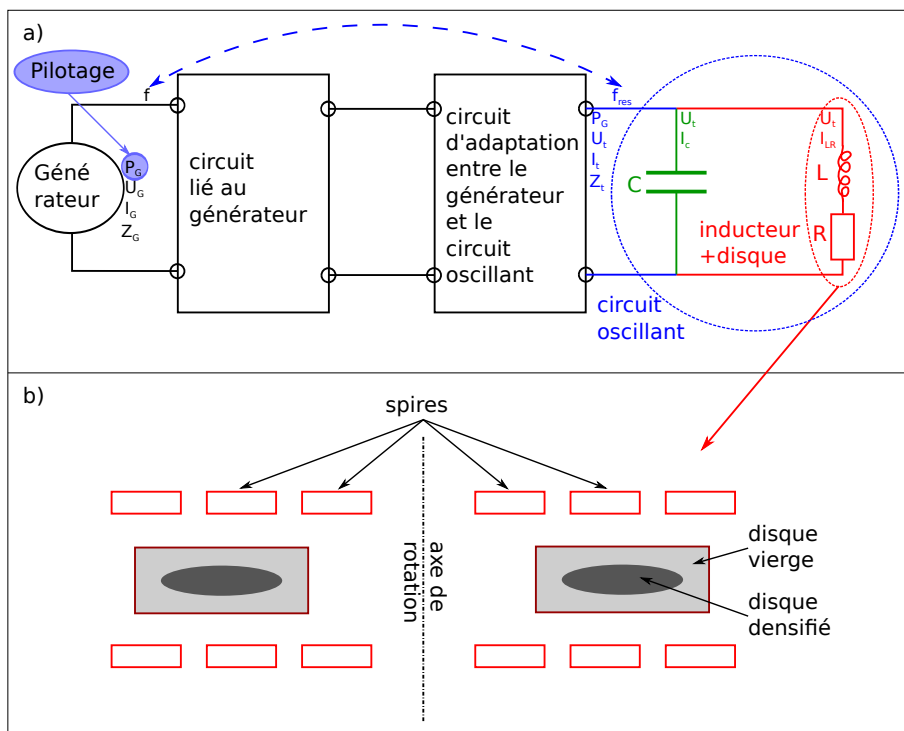


Fig. 31: Vision « extérieure » du four de densification :

Le graphique (a) montre tout le circuit partant du générateur où l'on va imposer la puissance de travail jusqu'au circuit oscillant en bleu qui alimente le chauffage par induction de la pièce. D'un point de vue électrique, l'ensemble de l'inducteur et de la pièce, qui se trouvent dans la cuve, présente un système de résistance et d'inductance marqué en rouge. Il est important de noter que le circuit oscillant ne peut marcher correctement qu'à une fréquence précise de résonance. C'est pour cela qu'il y a un fil de rétroaction (marqué en tireté bleu) entre cette partie et le générateur si bien que le dernier peut constamment adapter la fréquence de travail.

La partie (b) montre le système physique lié à la résistance et à l'inductance du schéma dans (a) : C'est un système axisymétrique contenant deux inducteurs autour d'un disque qui se densifie au cours du temps. Ils sont asservis en courant en parallèle. Pour des raisons d'arrangement sur la page le système est tourné de 90° , l'axe de rotation étant horizontale en réalité.

La personne qui pilote le cycle de densification choisit une puissance de travail pour le générateur. Cette puissance est la même dans les 3 domaines du graphique 31 (générateur,

circuit adaptateur et circuit oscillant) alors que les tensions et courants changent. La partie appelée générateur transforme la tension sortant de la prise électrique en une tension continue et d'une amplitude nécessaire pour avoir la puissance demandée. Derrière le générateur il se trouve un circuit qui permet notamment de stabiliser et de contrôler le signal d'alimentation ainsi que de le transformer à une certaine fréquence f à l'aide d'un onduleur (un système de 4 diodes qui s'ouvrent deux par deux de manière alternée). L'ensemble du générateur et de son circuit produit ainsi un signal de puissance et de fréquence données à l'entrée de la boîte d'adaptation d'impédance.

A la sortie de la boîte d'adaptation d'impédance on trouve un circuit contenant une capacité en parallèle avec l'inducteur et la pièce dans la cuve de réaction. Ces derniers sont représentés par une inductance et une résistance (partie rouge sur fig. 31) (voir chapitre 4).

Le courant total d'un tel circuit oscillant, $I_t = I_C + I_{RL}$, peut généralement être en déphasage avec la tension aux bornes, U_t . Il fonctionne correctement uniquement si l'on minimise la puissance réactive, c'est à dire si le courant total et la tension sont en phase. Ceci nécessite une fréquence de travail précise qui dépend de l'état physique de la charge à chauffer, notamment de sa résistance et inductance, comme nous l'avons expliqué au chapitre 4. Ceci explique la présence d'un fil de rétroaction entre le circuit oscillant et le générateur marqué en pointillé sur la figure 31.

Pour l'instant nous avons parlé de la partie du générateur représentant l'interface de pilotage et la partie du circuit oscillant qui contient la partie essentielle du chauffage de la pièce. Finalement il reste la partie de la fig. 31 appelée « adaptation d'impédance ». Sa fonction est de faire en sorte qu'on puisse utiliser la puissance maximale livrable par le générateur dans le circuit oscillant. En effet, un générateur est caractérisé par une puissance P_n et une tension U_n nominales (maximales). Lorsqu'on connecte le circuit oscillant d'impédance Z_t donnée (partie droite de la figure 31a) directement à la sortie du circuit lié au générateur (indice G , partie gauche de la figure 31a), on se retrouve avec les relations suivantes :

$$U_G = U_t \quad (5.9a)$$

$$I_G = I_t = \frac{U_G}{Z_t} \quad (5.9b)$$

$$P_G = U_G \cdot I_G = \frac{U_G^2}{Z_t} \quad (5.9c)$$

→ Lorsque la valeur de Z_t est petite, les courants peuvent être très forts et provoquer une coupure de sécurité. On est donc limité en tension et en puissance. Ainsi, la puissance maximale délivrée par le générateur peut être inférieure à sa valeur nominale : On n'arrive pas à exploiter le système jusqu'à ses limites.

→ Lorsque Z_t est élevé on pourra monter la tension jusqu'à sa valeur nominale sans avoir des courants trop forts. Néanmoins, la puissance étant également proportionnelle à l'inverse de l'impédance, on risque de nouveau de ne pas pouvoir obtenir sa valeur nominale

Ces deux exemples montrent que l'on exploite le système au mieux lorsque l'atteinte de la tension nominale et de la puissance nominale se font au même moment. Ceci mène à définir une impédance préférée :

$$Z_n = \frac{U_n^2}{P_n} \quad (5.10)$$

or l'impédance du circuit oscillant est une donnée du système qui, de plus, évolue avec la densification. L'astuce consiste d'utiliser un transformateur à la place de la boîte d'adaptation d'impédance. Un tel transformateur contient deux bobines avec un nombre de tours n_1 et n_2 qui sont liées par un coeur de matériel magnétique. Les grandeurs d'entrée (U_G, I_G, \dots) sont liées aux grandeurs de sortie (U_t, I_t, \dots) de manière suivante :

$$k = \frac{n_1}{n_2} \quad (5.11a)$$

$$I_t = k \cdot I_G \quad (5.11b)$$

$$U_t = \frac{1}{k} \cdot U_G \quad (5.11c)$$

$$P_t = U_t \cdot I_t = P_G \quad (5.11d)$$

$$Z_G = \frac{U_G}{I_G} = k^2 \cdot Z_t \quad (5.11e)$$

Pour n'importe quelle valeur d'impédance du circuit oscillant Z_t on peut donc faire en sorte que l'impédance vue par le générateur Z_G soit proche de la valeur optimale $Z_G = Z_n$, en choisissant le bon coefficient de transformateur. Ainsi on peut regarder à quel moment de la densification on a besoin de la puissance maximale, mesurer l'impédance Z_t pour cette configuration-là et choisir un facteur k approprié. Lorsque l'impédance Z_t varie beaucoup au cours de la densification, on risque de trouver des limites même pendant la densification, si bien que différents choix de k doivent être réalisés au cours de la densification. Une adaptation continue de k est exclue par le fait que la configuration du transformateur doit être adaptée de manière manuelle et mécanique ce qui nécessite un arrêt du générateur.

5.1.4. Equations complémentaires des deux parties de modèle

Nous nous consacrons maintenant à la recherche des paramètres inconnus du modèle à savoir la fréquence de résonance et des différentes chutes de tension $U_{ext,i}$ sur les spires. Nous commençons par le calcul des courants externes ainsi que de la résistance et de l'inductance globales du système qui interviennent dans les formules précédentes. Ceci est réalisé pour une fréquence de travail donnée.

Concernant la densité de courant externe dans une spire, elle est liée à une tension qui est constante sur la section de la spire et à une résistance qui varie avec le rayon de la spire : On peut diviser la spire en plusieurs filaments : ceux qui ont un rayon inférieur possèdent alors une longueur plus petite sur un tour complet, ce qui conduit à une résistance plus petite. Cette argumentation mène à l'expression 5.12 couramment utilisée pour la densité de courant d'une spire i (voir l'annexe C, eqn. C.37) :

$$j_{\phi,ext,i}(r) = \frac{\sigma_{cu} U_i}{2\pi r} \quad (5.12)$$

Ainsi nous avons introduit une chute de tension U_i sur la spire i de l'inducteur. r est la distance du point de calcul de j vis-à-vis de l'axe de rotation de l'inducteur. La chute de tension n'est pas la même dans chaque spire, à cause du rayon différent (inducteur sous forme spirale) et des couplages différents avec les autres spires et la pièce. Le système satisfait quand-même deux contraintes :

- i) La chute de tension sur l'ensemble des N spires d'un inducteur (U_i , $i = 1 \dots N$) est égale à la tension extérieure U_t imposée par le circuit extérieur. Pour la N -ième spire, on a :

$$U_N = U_t - \sum_{i=1}^{N-1} U_i \quad (5.13)$$

- ii) Les spires d'un inducteur sont liées les unes aux autres si bien que le courant total, égal au courant induit plus le courant extérieur, doit être le même pour chaque spire. En prenant le courant dans la spire N comme référence et en sachant que toutes les spires ont la même section, nous avons

$$\begin{aligned} I_{tot,i} = I_{ind,i} + I_{ext,i} &= \int_{z_{min}}^{z_{max}} \int_{r_{i,int}}^{r_{i,ext}} (j_{\phi,ind} + j_{\phi,ext}) dr dz \\ &= -i\sigma\omega \int_{z_{min}}^{z_{max}} \int_{r_{i,int}}^{r_{i,ext}} A_{\phi} dr dz + \frac{\sigma_{cu} U_i}{2\pi} \int_{z_{min}}^{z_{max}} \int_{r_{i,int}}^{r_{i,ext}} \frac{1}{r} dr dz \end{aligned} \quad (5.14a)$$

$$\forall i : I_{tot,i} = I_{tot,N} \quad (5.14b)$$

La formule 5.14b) est un système de $N - 1$ équations dont $I_{tot,N}$ est un paramètre. L'équation 5.13 donne le complémentaire manquant d'une équation pour le calcul de $I_{tot,N}$. Sachant que le potentiel vecteur A_{ϕ} est déjà lié à une équation et qu'à travers de la définition 5.14a les $I_{tot,i}$ dépendent uniquement des N tensions U_i , nous avons complété le système d'équations pour le calcul électromagnétique qui consiste donc en

- L'équation 5.4 dont l'inconnue principale est A_{ϕ} mais où la fréquence de résonance ω ainsi que les N valeurs de courants $j_{\phi,ext,i}$ sont également inconnus.
- L'équation 5.19 qui définit la fréquence de résonance à partir des propriétés globales du circuit : la capacité C (connue), la résistance R ainsi que l'inductance L du système inducteur+pièce (pour le moment inconnues)
- Les équation 5.14b et 5.13 pour les N inconnues $j_{\phi,ext}$.

Pour clore le système d'équations pour l'électromagnétisme, il ne manque que le calcul de la résistance et de l'inductance. Ces grandeurs sortent du calcul spatial et sont nécessaires pour l'évaluation de la fréquence de résonance. Nous les obtenons à partir des expressions algébriques suivantes :

→ Les pertes résistives Q_{rh} sur l'inducteur complet et la pièce sont :

$$Q_{rh} = 2 \cdot \int_{\substack{\text{spires} \\ \text{+pièce}}} \left(\frac{1}{\sigma} \|j_{\phi}\|^2 \right) dr dz \quad (5.15)$$

→ Cette perte est liée à la résistance globale du système, composée des inducteurs et la charge, ainsi qu'au courant. On obtient donc la résistance globale :

$$\begin{aligned} Q_{rh} &= \frac{1}{2} R \|2 \cdot I_{tot,N}\|^2 \\ \Rightarrow R &= \frac{2Q_{rh}}{\|2 \cdot I_{tot,N}\|^2} \end{aligned} \quad (5.16)$$

→ L'énergie magnétique stockée dans le système complet W_m

$$W_m = \int_{\substack{\text{domaine} \\ \text{entier}}} \left(\frac{1}{\mu} \|\vec{B}\|^2 \right) r d\phi dr dz \quad (5.17)$$

→ De la même manière que la résistance et les pertes Joule, l'énergie magnétique est liée à l'inductance globale :

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{4}L\|2 I_{tot,N}\|^2 \\ \Rightarrow L &= \frac{4W_m}{\|2I_{tot,N}\|^2} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Le pré-facteur 2 du courant résulte du fait qu'il y a 2 inducteurs en parallèle. Nous rappelons également que toutes les grandeurs du calcul sont complexes, à cause du traitement du temps présenté auparavant.

Une fois les propriétés du système données à partir du calcul local pour une fréquence de travail donnée, nous pouvons calculer la fréquence de résonance du système (voir eqn. 4.20c) :

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\sqrt{1 - R^2\frac{C}{L}} \quad (5.19)$$

Or, la solution de A_ϕ , l'inductance et la résistance dépendent également de la fréquence de travail choisie, si bien que la fréquence de résonance théorique obtenue par l'équation 5.19 est elle-même fonction de la fréquence de travail choisie au départ. La résolution entière du problème électromagnétique se fait donc selon le diagramme 32 :

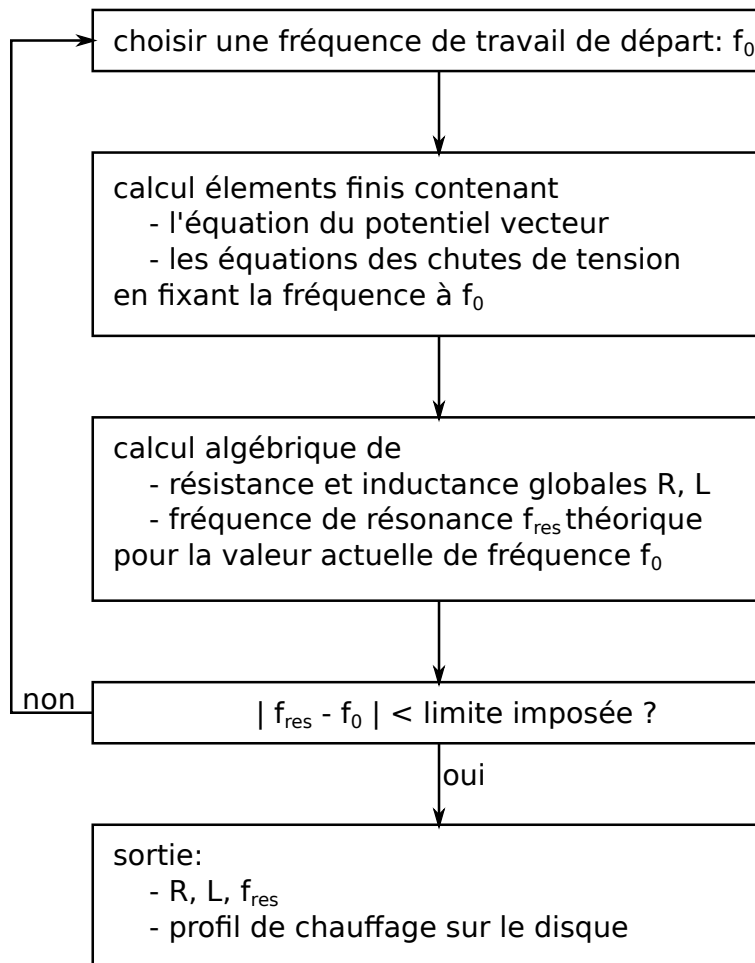


Fig. 32: Schéma de résolution de la partie électromagnétique pour trouver la bonne fréquence de travail.

Cet algorithme est nécessaire puisque les propriétés électriques du disque dépendent de l'état de l'avancement et que tout paramètre, y compris la fréquence de résonance, dépendent de la fréquence utilisée au départ du calcul. La fréquence de résonance est mise à jour via un algorithme de Newton.

5.1.5. Validation numérique

Présentation du cas d'étude

Pour valider le modèle électromagnétique nous le codons dans le logiciel commercial de résolution par éléments finis FlexPDE que nous allons utiliser pour toute la simulation de densification. La validation se fait ensuite par comparaison des résultats avec Comsol, qui est un logiciel bien établi et validé entre autres pour des calculs d'électromagnétisme et d'induction. Pour vérifier à la fois un maximum d'aspects du modèle, nous réalisons directement le cas qui correspond à notre cas d'étude de densification, à savoir un disque à section rectangulaire chauffé par deux inducteurs à 5 spires. Ceci correspond au contenu du rectangle rouge sur la figure 33. Comme nous l'avons expliqué en rapport avec la figure 30, le traitement de l'électromagnétisme demande le rajout d'une boîte « infinie » que nous avons mis en bleu sur la figure 33. Les symétries, à savoir une symétrie de rotation selon l'axe horizontal des x et une symétrie miroir selon l'axe vertical des y , ainsi que les conditions sur la composante angulaire du potentiel vecteur A correspondent également à celles expliquées pour la fig. 30.

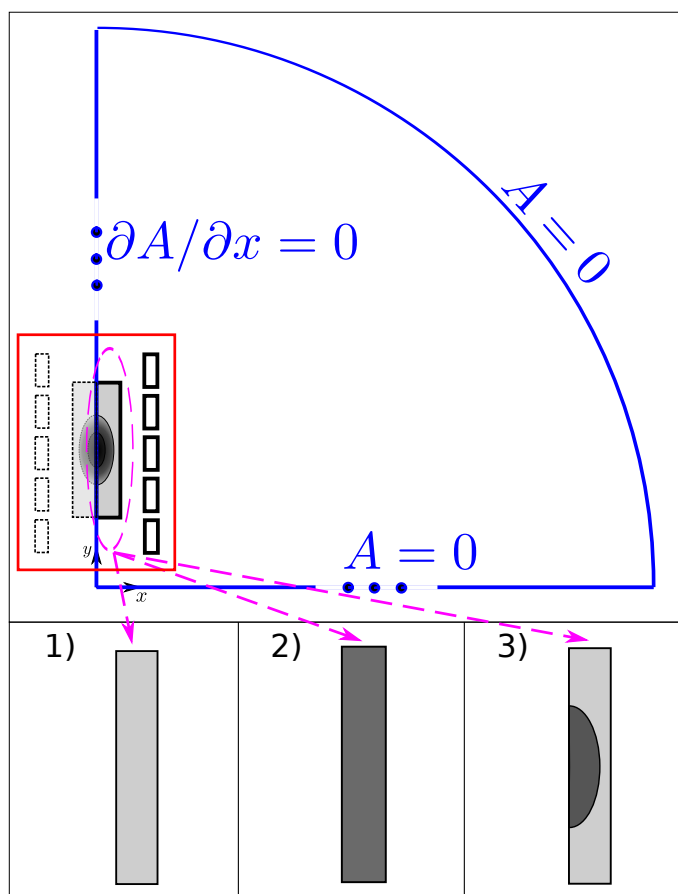


Fig. 33: En haut : Système électromagnétique composé de deux inducteurs à 5 spires et d'une charge à section rectangulaire, entouré en rouge. Le système possède une symétrie axiale selon l'axe x (horizontal). Grâce à sa symétrie miroir le long de l'axe des y (vertical) nous ne modélisons que la moitié droite du système. Nous y rajoutons une boîte « infinie », marquée en bleu, avec les conditions de bord correspondantes du potentiel vecteur A .

En bas : Trois états test du disque pour la validation numérique du code électromagnétique : 1) Disque complètement vierge (conductivité électrique homogène faible), 2) Disque entièrement dense (conductivité électrique homogène plus élevée), 3) Partie elliptique dense entourée d'une partie vierge, avec transition abrupte entre les deux

Dans le cadre de la validation du modèle électromagnétique nous ne regardons que trois cas, qui sont représentés en bas de la figure 33 : Le cas d'un disque complètement vierge (1), d'un disque complètement densifié (2), et un cas simplifié de disque partiellement densifié (3). Dans ce dernier, nous représentons la zone dense par une ellipse au centre du disque avec une interface entre les deux zones qui correspond à une chute abrupte de la conductivité électrique.

Comparaison des résultats sous Comsol et avec FlexPDE

La validation effectuée ici n'inclut pas la recherche automatique de la fréquence de résonance selon le schéma fig. 32, puisqu'elle demande une analyse par un « code extérieur » à la résolution du problème spatial électromagnétique. Nous allons réaliser cette recherche à la main dans un premier temps, ce qui permet notamment d'expliquer le fonctionnement de cette recherche de fréquence de résonance qui va être automatisée plus tard pour le modèle entier de densification.

La validation se fait donc selon les étapes suivantes pour chacun des 3 cas considérés :

- 1) Sous Comsol, nous imposons dans chaque spire un courant intégré de 100A. Ce choix de piloter en courant ne correspond pas à celui que nous faisons pour la modélisation du procédé où nous imposons la tension. Il est lié au fait que nous ne savons pas imposer sous Comsol une tension sur l'inducteur total composé de 5 spires individuelles, sans fixer la tension pour chaque spire (qui est à priori inconnue).

Pour comparer les résultats entre Comsol et la version de la simulation du procédé, nous pourrions néanmoins nous appuyer sur le fait qu'un courant donné dans les spires correspond à un jeu unique de chutes de tensions fixes pour un système physique fixe.

- 2) Le système d'équations d'électromagnétisme est résolu sous Comsol pour différentes fréquences de travail f_{trav} . Les équations en question sont

→ L'équation de la composante angulaire du potentiel vecteur : eqn. 5.4

→ Une équation pour la chute de tension sur chaque spire afin d'avoir le courant intégral imposé : eqns. 5.14a et 5.14b

- 3) Pour chaque fréquence de travail nous affichons

→ La valeur maximale absolue de la partie réelle du potentiel vecteur sur le domaine entier

→ La valeur maximale absolue de la partie imaginaire du potentiel vecteur sur le domaine entier

→ Les parties réelles et imaginaires de la tension sur chacune des 5 spires : $\Re(U_i)$, $\Im(U_i)$ avec $i = 1$ à 5

Nous vérifions également que ces valeurs sont les mêmes pour les deux inducteurs

→ La chute de tension totale, complexe, sur un inducteur

$$U_{tot} = \sum_{i=1}^5 U_i \quad (5.20)$$

→ La puissance active fournie aux inducteurs, donnée par

$$P_{act,RL} = 2 \cdot \Re(U_{tot}) \cdot I \quad (5.21)$$

→ La puissance de chauffage induite dans le disque

$$P_{heat} = \int_{\text{disque}} Q_{heat} \quad (5.22)$$

→ Le rendement d'induction

$$\eta_{induct} = \frac{P_{heat}}{P_{act,RL}} \quad (5.23)$$

→ La résistance et l'inductance du système inducteurs et charge données par les formules 5.16 et 5.18

→ La fréquence de résonance théorique selon l'éqn. 5.19.

Nous remarquons que cette valeur dépend de la résistance et de l'inductance qui varient avec la fréquence de travail. La fréquence de résonance théorique est donc une fonction non-linéaire de la fréquence de travail ($f_{res} = f(R(f_{trav}), L(f_{trav}))$), comme le montre la figure 34.

- 4) Ensuite nous cherchons graphiquement la fréquence de résonance du système : Nous traçons la courbe de résonance théorique en fonction de la fréquence de travail, $f = f_{res}(f_{trav})$, ainsi que la droite $f = f_{trav}$. Le résultat est donné pour l'exemple du cas 3 sur la figure 34. L'intersection des deux courbes correspond à la bonne fréquence de résonance $f_{trav} = f_{res}$.
- 5) Nous notons alors les valeurs d'intérêt nommées ci-dessus (tableaux 5.1 à 5.3) pour cette fréquence de résonance précise.
- 6) Dans le code électromagnétique sous FlexPDE nous imposons cette fréquence de résonance comme fréquence de travail. De même nous imposons la valeur de tension complexe de l'inducteur égale à celle obtenue par Comsol (au lieu d'imposer un courant comme nous l'avons fait avec Comsol).
- 7) Après le calcul sous FlexPDE nous sortons les mêmes grandeurs d'intérêt qu'après le calcul Comsol (pour l'unique fréquence de travail $f_{trav} = f_{res}$) ainsi que la valeur complexe du courant intégré qui était une entrée sous Comsol et une sortie sous FlexPDE.
- 8) Dans un premier temps nous vérifions que la partie réelle du courant sortant du calcul FlexPDE à tension complexe imposée est égale à celle imposée dans Comsol et que sa partie imaginaire est approximativement zéro.
- 9) Parmi les grandeurs d'intérêt sortant du calcul FlexPDE nous avons également les valeurs de résistance et inductance globales. Nous pouvons donc calculer la fréquence de résonance théorique liée à ces valeurs à l'aide de l'équation 5.19. Nous vérifions donc finalement que celle-ci est bien égale à celle calculée par Comsol et donc à la fréquence de travail imposée dans ce calcul FlexPDE. De même, toutes les autres grandeurs d'intérêt sont comparées entre les deux simulations (tableaux 5.1 à 5.3)

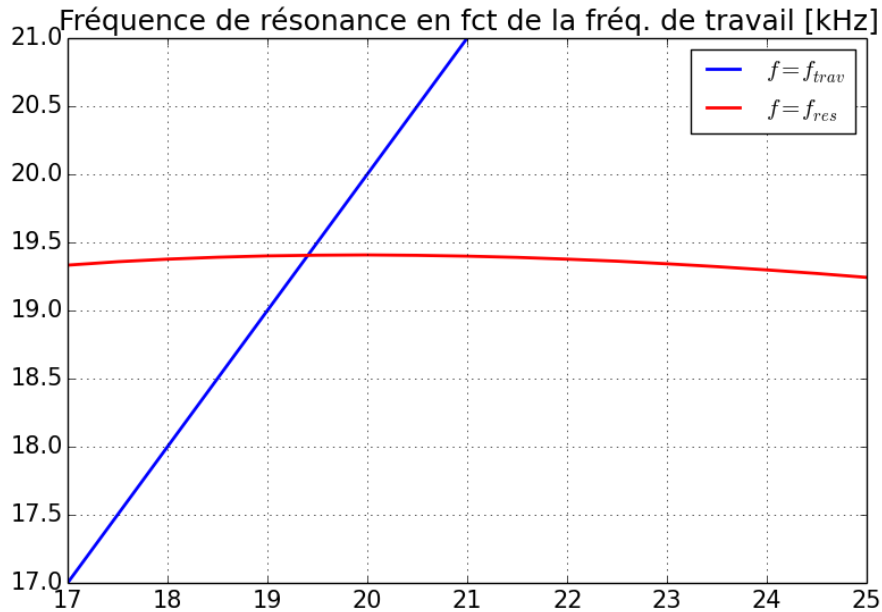


Fig. 34: Détermination graphique de la fréquence de résonance : En rouge c'est la fréquence de résonance théorique en fonction de la fréquence de travail qui fige les valeurs de la résistance et de l'inductance. En bleu nous traçons la fréquence de travail. La fréquence de résonance correspond à l'intersection des deux courbes

Les résultats correspondants pour les trois cas figurant sur la fig. 33 sont donnés dans les tableaux 5.1, 5.2 et 5.3 respectivement. Les valeurs avec étoile correspondent aux valeurs imposées :

Grandeur d'intérêt	Unité	Valeur sous FlexPDE	Valeur sous Comsol
f_{res}	kHz	17.9	17.9
$\max(\text{abs}(\Re(A)))$	$mT.cm$	13.8	14.1
$\max(\text{abs}(\Im(A)))$	$mT.cm$	10.7	10.8
$\Re(U_{tot})$	V	42.59(*)	42.59
$\Im(U_{tot})$	V	74.78(*)	74.78
$\Re(I_{tot})$	A	100.4	100(*)
$\Im(I_{tot})$	A	-0.001	0(*)
$P_{act,RL}$	kW	8.55	8.52
P_{heat}	kW	4.18	4.17
η_{induct}	$\%$	48.9	48.9
R	$m\Omega$	212	213
L	μH	3.32	3.31

TABLE 5.1.: Comparaison des résultats du modèle électromagnétique sous FlexPDE avec Comsol - cas 1 de la fig. 33

Grandeur d'intérêt	Unité	Valeur sous FlexPDE	Valeur sous Comsol
f_{res}	kHz	24.4	24.4
$\max(\text{abs}(\Re(A)))$	$mT.cm$	9.07	9.13
$\max(\text{abs}(\Im(A)))$	$mT.cm$	4.24	4.29
$\Re(U_{tot})$	V	24.13(*)	24.13
$\Im(U_{tot})$	V	63.47(*)	63.47
$\Re(I_{tot})$	A	100.2	100(*)
$\Im(I_{tot})$	A	-0.02	0(*)
$P_{act,RL}$	kW	4.83	4.83
P_{heat}	kW	2.34	2.34
η_{induct}	$\%$	48.5	48.5
R	$m\Omega$	120	121
L	μH	2.07	2.05

TABLE 5.2.: Comparaison des résultats du modèle électromagnétique sous FlexPDE avec Comsol - cas 2 de la fig. 33

Grandeur d'intérêt	Unité	Valeur sous FlexPDE	Valeur sous Comsol
f_{res}	kHz	20.5	20.5
$\max(\text{abs}(\Re(A)))$	$mT.cm$	11.6	11.5
$\max(\text{abs}(\Im(A)))$	$mT.cm$	7.18	6.86
$\Re(U_{tot})$	V	33.43(*)	33.43
$\Im(U_{tot})$	V	70.56(*)	70.56
$\Re(I_{tot})$	A	100.2	100(*)
$\Im(I_{tot})$	A	-0.004	0(*)
$P_{act,RL}$	kW	6.70	6.69
P_{heat}	kW	3.27	3.26
η_{induct}	$\%$	48.8	48.8
R	$m\Omega$	166	167
L	μH	2.70	2.73

TABLE 5.3.: Comparaison des résultats du modèle électromagnétique sous FlexPDE avec Comsol - cas 3 de la fig. 33

Nous constatons que pour tous les cas, les deux modèles donnent des résultats équivalents à moins de 1% d'écart à l'exception de la valeur imaginaire du potentiel vecteur en cas 3 mais qui reste toujours acceptable avec 5% de différence.

Concernant l'évaluation des grandeurs considérées, nous constatons qu'avec l'avancement de la densification et pour un courant donné : la fréquence de résonance augmente, la résistance et l'inductance baissent, la puissance active fournie et la puissance induite dans le disque augmentent en gardant le rendement approximativement constant avec seulement une chute légère.

Pour finir, nous présentons la comparaison du profil de chauffage dans le disque pour les deux modèles, dont nous apercevons également une très bonne concordance :

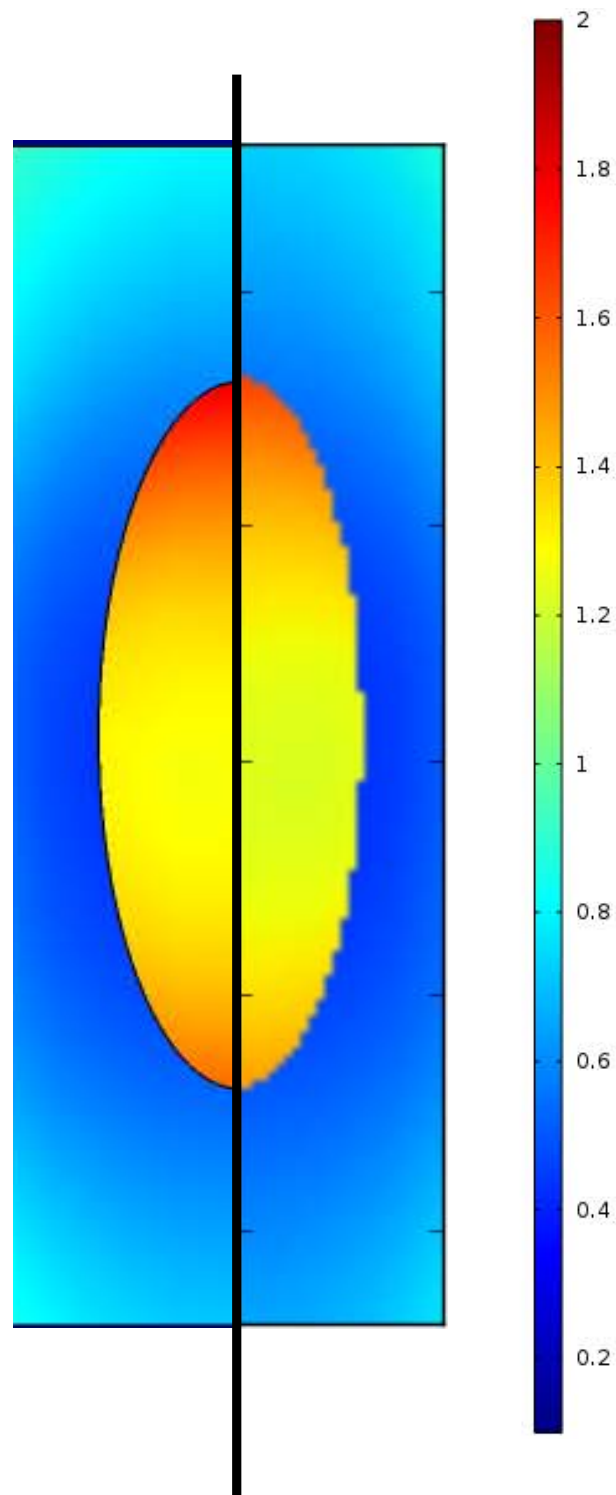


Fig. 35: Profil du chauffage volumique dans le disque. A gauche : Calcul avec Comsol. A droite : Calcul du modèle sous FlexPDE.

Nous remarquons que le chauffage est environ dix fois plus fort dans la zone dense que dans la zone vierge. Ce rapport va être abaissé légèrement lorsque nous regarderons un vrai profil de porosité avec une zone de transition.

5.1.6. Formulation analytique avec condition limite en bord de charge

Pour finir la section sur l'électromagnétisme, nous effectuons un calcul analytique d'estimation du potentiel vecteur au bord du disque. En effet, lors du dimensionnement d'un système de chauffage inductif il peut être intéressant d'avoir rapidement une idée de la chaleur transmise à la charge. Il existe très peu de cas où l'on peut résoudre analytiquement l'équation du potentiel vecteur sur le domaine entier. Même en 1D une telle résolution n'est possible que pour des distributions de conductivité électrique très simples dans la charge. Dans cette partie nous développons une formule de condition de bord pour le potentiel vecteur au bord de la charge pour une étude monodimensionnelle. Le résultat prendra en compte toute la géométrie à l'extérieur de la charge, notamment l'entrefer entre celle-ci et l'inducteur ainsi que la taille de l'inducteur. Ceci permet qu'une étude ultérieure plus détaillée de l'intérieur de la charge ne demande plus de prendre en compte l'espace entre le bord du disque et « l'infini ». Ainsi, l'électromagnétisme et la thermique et éventuellement d'autres considérations physiques dans la charge se font tous sur le même domaine géométrique.

Le domaine étudié dans la suite contient une charge entre deux inducteurs mono-spire parcourus par un courant dans le même sens. Nous permettons au profil de conductivité électrique d'être aléatoire mais symétrique par rapport à son axe de milieu. Nous avons donc une géométrie avec symétrie miroir dont la version simplifiée est représentée sur fig. 36. Il contient la moitié de la charge, l'inducteur séparé d'un entrefer de la charge, et une zone « infinie » :

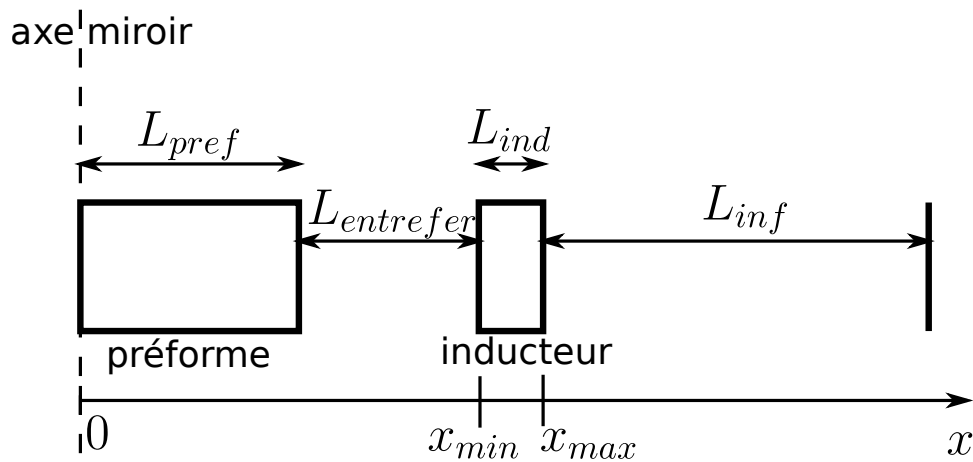


Fig. 36: Domaine d'étude monodimensionnel pour le calcul du potentiel vecteur au bord du disque

Pour dériver le potentiel vecteur au bord de la charge nous nous servons de son équation différentielle en 1D :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A = -i\omega\sigma\mu_0 \cdot A - \mu_0 j_{ext} \quad (5.24a)$$

$$j_{ext} = \begin{cases} \sigma \cdot U & \text{dans l'inducteur} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (5.24b)$$

(où nous rappelons que U et j_{ext} sont des grandeurs complexes)

Nous nous restreignons aux cas où l'on n'a que des matériaux amagnétiques si bien que la

perméabilité magnétique est constante sur le domaine entier et égale à μ_0 . Pour ce cas nous démontrons dans l'annexe C.4 que le potentiel vecteur ainsi que sa dérivée sont continus sur l'espace entier. Nous avons donc deux conditions d'interface entre deux matériaux :

$$A_1(x_{interf}) = A_2(x_{interf}) \quad (5.25a)$$

$$\frac{\partial A_1(x_{interf})}{\partial x} = \frac{\partial A_2(x_{interf})}{\partial x} \quad (5.25b)$$

Les équations ci-dessus contiennent tous les ingrédients pour dériver l'expression recherchée : Dans un premier temps nous calculons les solutions du potentiel vecteur dans chaque domaine du système extérieur à la charge :

- 1 Dans la zone « infinie », remplie d'air, la conductivité électrique vaut zéro et il n'y a pas de source de tension. Nous supposons que cette zone est d'une longueur numérique $L_{inf} \gg 1$ et que le potentiel vecteur vaut zéro pour $x = L_{inf}$:

$$A_{inf} = A_{inf,1} \cdot (x - (x_{max} + L_{inf})) \quad (5.26)$$

où $A_{inf,1}$ est un paramètre inconnu représentant la valeur de A au bord droit de l'inducteur.

- 2 Dans l'entrefer nous obtenons également une loi linéaire avec deux paramètres inconnus :

$$A_{entrefer} = m_{entrefer} \cdot (x - x_{min}) + b_{entrefer} \quad (5.27)$$

- 3 Dans l'inducteur avec conductivité σ_{cu} et alimenté par un courant extérieur, la solution de l'équation différentielle donne une solution exponentielle

$$A_{ind} = C_1 \cdot \exp(-\alpha(x - x_{min})) + C_2 \cdot \exp(\alpha(x - x_{max}) - i\frac{\mu_0\delta^2}{2}j_{ext}) \quad (5.28a)$$

$$\alpha = \frac{1+i}{\delta} \quad (5.28b)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma_{cu}\omega\mu_0}} \quad (5.28c)$$

Nous nous retrouvons maintenant avec des expressions du potentiel vecteur dans les 3 domaines hors du disque (entrefer, spire, zone infini), et au total 5 paramètres ($A_{inf,1}$, $m_{entrefer}$, $b_{entrefer}$, C_1 , C_2). Nous pouvons utiliser les 4 équations de continuité de A et de sa dérivée aux bords gauche et droite de la spire pour éliminer tous les paramètres sauf un dans l'expression de $A_{entrefer}$, par exemple $m_{entrefer}$. Le détail de ce calcul est écrit dans l'annexe D. Dans l'expression

$$A_{entrefer}(x) = m_{entrefer} \cdot (x - x_{min}) + b_{entrefer} \quad (5.29)$$

le paramètre $b_{entrefer}$ est alors connu et fonction du paramètre inconnu $m_{entrefer}$:

$$b_{entrefer} = f(m_{entrefer}) \quad (5.30)$$

Nous démontrons dans la suite que nous pouvons déduire la condition de bord au disque cherchée sous forme de flux :

$$\frac{\partial A}{\partial x}(L_{pref}) = g(A(L_{pref})) \quad (5.31)$$

où g est une fonction et $A(L_{pref})$ est un paramètre qui y intervient comme la température T dans une condition de type $\partial T/\partial x = h \cdot (T - T_{ext})$. Notamment nous avons

$$\frac{\partial A_{charge}}{\partial x}(L_{pref}) = \frac{\partial A_{entrefer}}{\partial x}(L_{pref}) = m_{entrefer} \quad (5.32)$$

$$A(L_{pref}) = m_{entrefer} \cdot L_{entrefer} + b_{entrefer} = m_{entrefer} \cdot L_{entrefer} + f(m_{entrefer}) \quad (5.33)$$

En prenant $A(L_{pref})$ comme un paramètre connu, on déduit facilement l'expression pour le flux cherchée. Le résultat peut être simplifié considérablement en se servant du caractère « infini » de L_{inf} (par rapport à l'épaisseur de peau du cuivre) :

$$\begin{aligned} \frac{L_{inf}}{\delta} &\gg 1 \\ \frac{\delta}{L_{inf}} &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Ainsi nous obtenons la forme suivante de la condition de bord du potentiel vecteur sur le disque :

$$\frac{\partial A}{\partial x}(L_{pref}) = \left(A(L_{pref}) + \frac{i \cdot U}{\omega} \right) \frac{-\alpha \sinh(\alpha L_{ind})}{\alpha L_{entrefer} \cdot \sinh(\alpha L_{ind}) + \cosh(\alpha L_{ind})} \quad (5.35)$$

Cette condition permet de calculer le potentiel vecteur dans le disque tout en prenant en compte la géométrie à l'extérieur du disque mais sans devoir l'expliciter dans le modèle numérique et sans y attribuer beaucoup de noeuds et de temps de calcul. Néanmoins nous remarquons que le résultat n'est applicable que pour des cas mono-dimensionnels ou 2D avec une hauteur suffisamment grande pour avoir un profil de A homogène dans la deuxième direction.

Validation numérique du modèle 1D

Pour valider cette expression de condition de bord sur le disque nous comparons deux calculs :

- Nous résolvons analytiquement l'équation du potentiel vecteur 5.24 à l'intérieur du disque en appliquant la condition de bord développée ci-dessus. Ceci est fait pour deux cas de calculs dans le disque : i) un cas où le disque est entièrement vierge (similaire au cas 1 de la figure 33), ii) un cas où le disque est complètement densifié jusqu'à la moitié de sa largeur et complètement vierge dans l'autre moitié (similaire au cas 3 de la figure 33). Les calculs analytiques détaillés se trouvent dans l'annexe E.
- Pour ces deux cas test nous réalisons également une résolutions numérique sous le logiciel éléments finis FlexPDE. Au lieu de restreindre le calcul sur le disque, nous choisissons un domaine 2D cartésien équivalent à celui de la fig. 36. La condition de bord sur le disque développée ci-dessus n'intervient donc pas dans ce calcul mais uniquement la condition standard $A(x_\infty) = A(x_{max} + L_{ind}) = 0$. Le long des bords horizontaux en haut et en bas nous imposons $\partial A/\partial y = 0$ pour obtenir le caractère mono-dimensionnel du problème.

Voici la comparaison des résultats sur le disque pour les deux calculs analytique et numérique pour le cas du disque entièrement vierge :

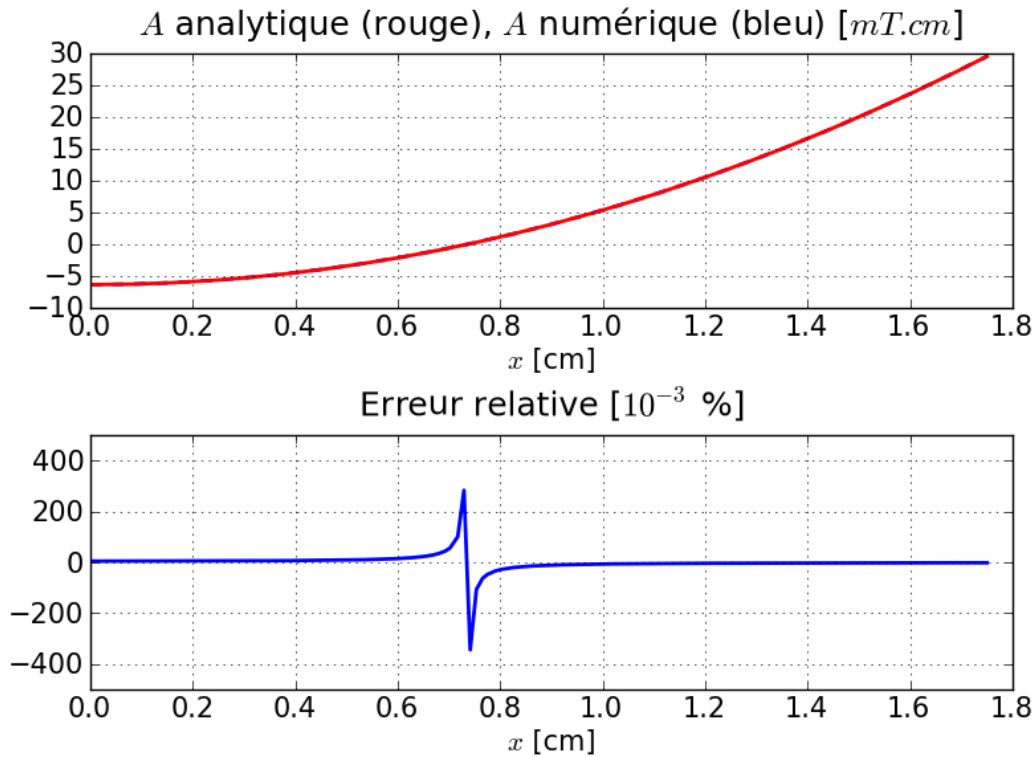


Fig. 37: Validation du modèle d'électromagnétisme 1D - préforme entièrement vierge. Comparaison de résultats numérique (tireté bleu) et analytique (trait rouge) pour la partie réelle du potentiel vecteur

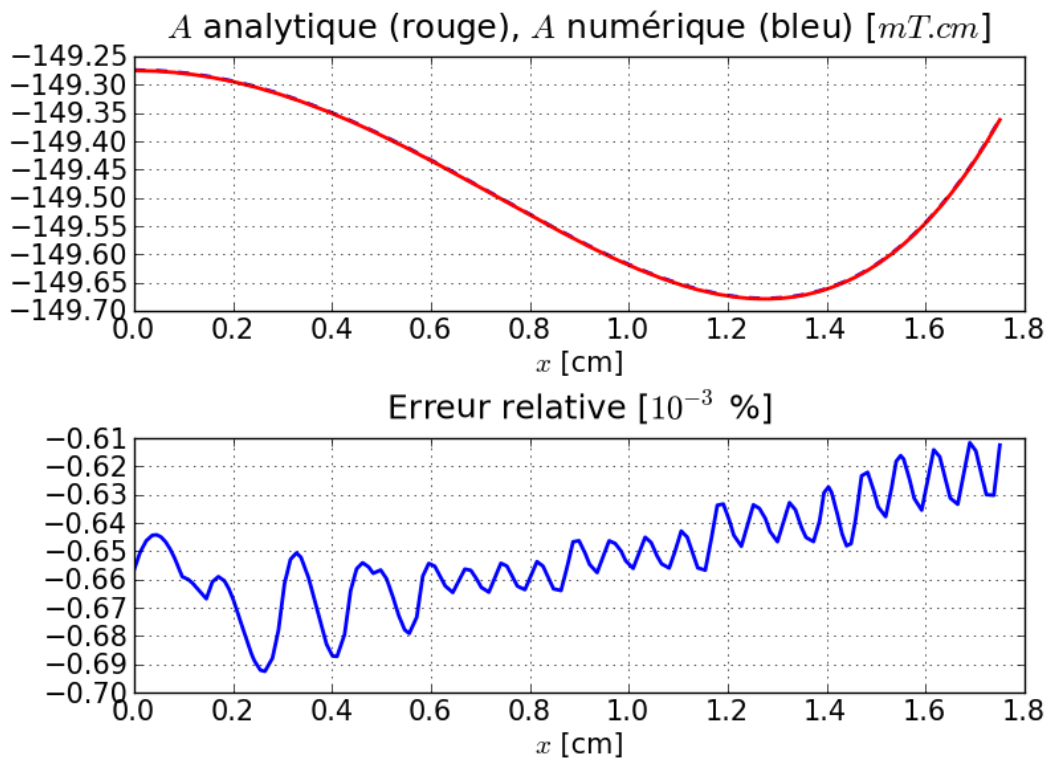


Fig. 38: Validation du modèle d'électromagnétisme 1D - préforme entièrement vierge. Comparaison des résultats numérique (tireté bleu) et analytique (trait rouge) pour la partie imaginaire du potentiel vecteur

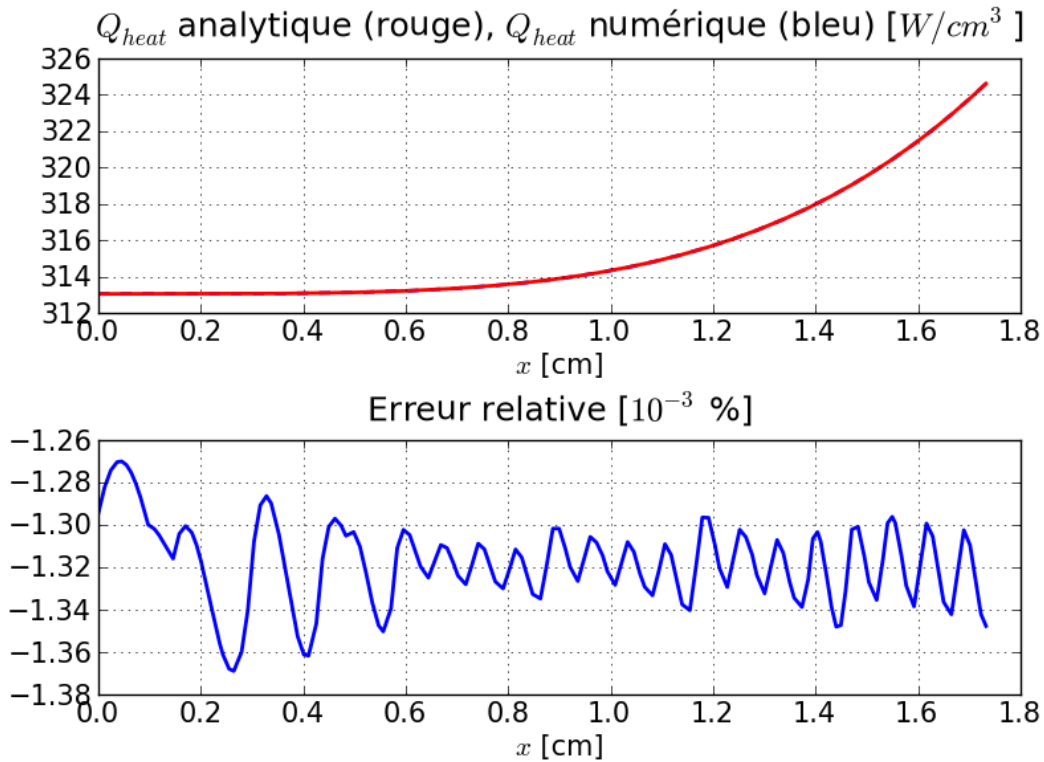


Fig. 39: Validation du modèle d'électromagnétisme 1D - préforme entièrement vierge. Comparaison des résultats numérique (tireté bleu) et analytique (trait rouge) pour le chauffage volumique

Nous avons également évalué les valeurs de A et de sa dérivée au bord du disque analytiquement et numériquement : ils sont équivalents.

Pour le cas du disque semi-densifié avec transition abrupte nous obtenons les résultats suivants qui sont tout de même en très bonne concordance :

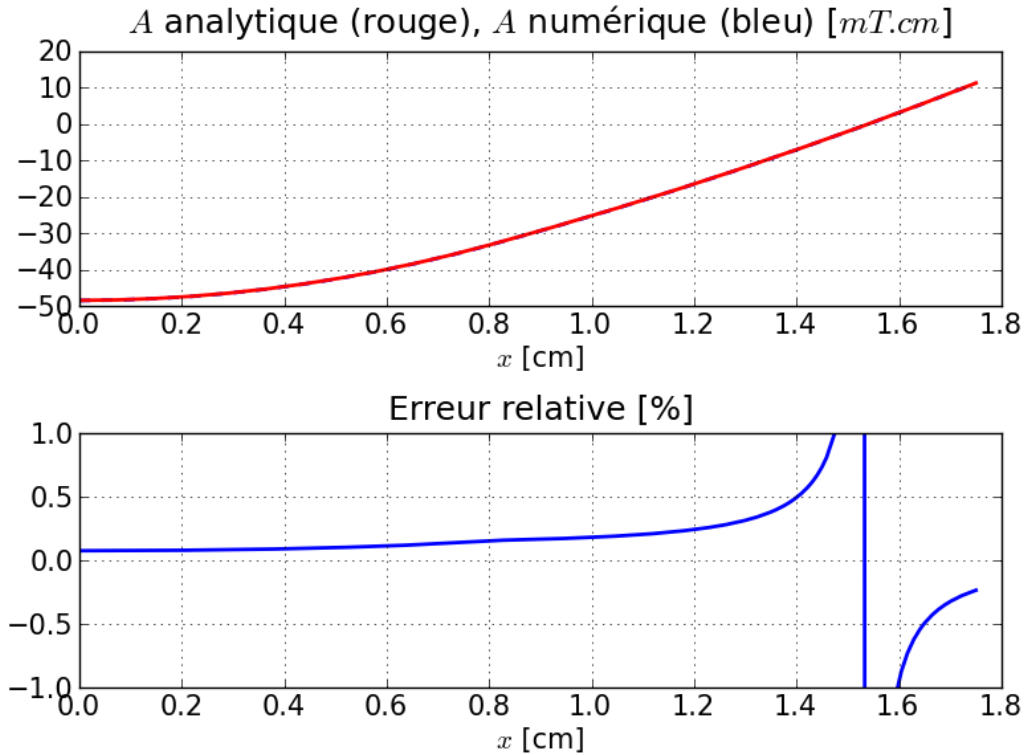


Fig. 40: Validation du modèle d'électromagnétisme 1D - préforme partiellement densifiée avec transition abrupte. Comparaison de résultats numérique (tireté bleu) et analytique (trait rouge) pour la partie réelle du potentiel vecteur

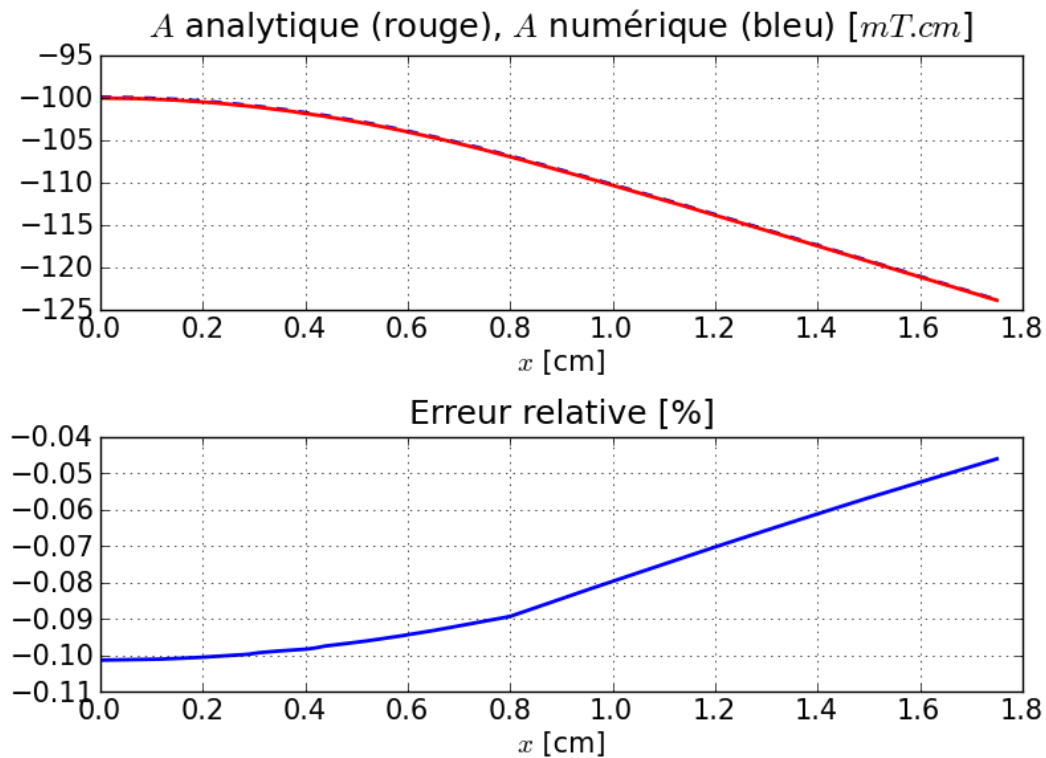


Fig. 41: Validation du modèle d'électromagnétisme 1D - préforme partiellement densifiée avec transition abrupte. Comparaison des résultats numérique (tireté bleu) et analytique (trait rouge) pour la partie imaginaire du potentiel vecteur

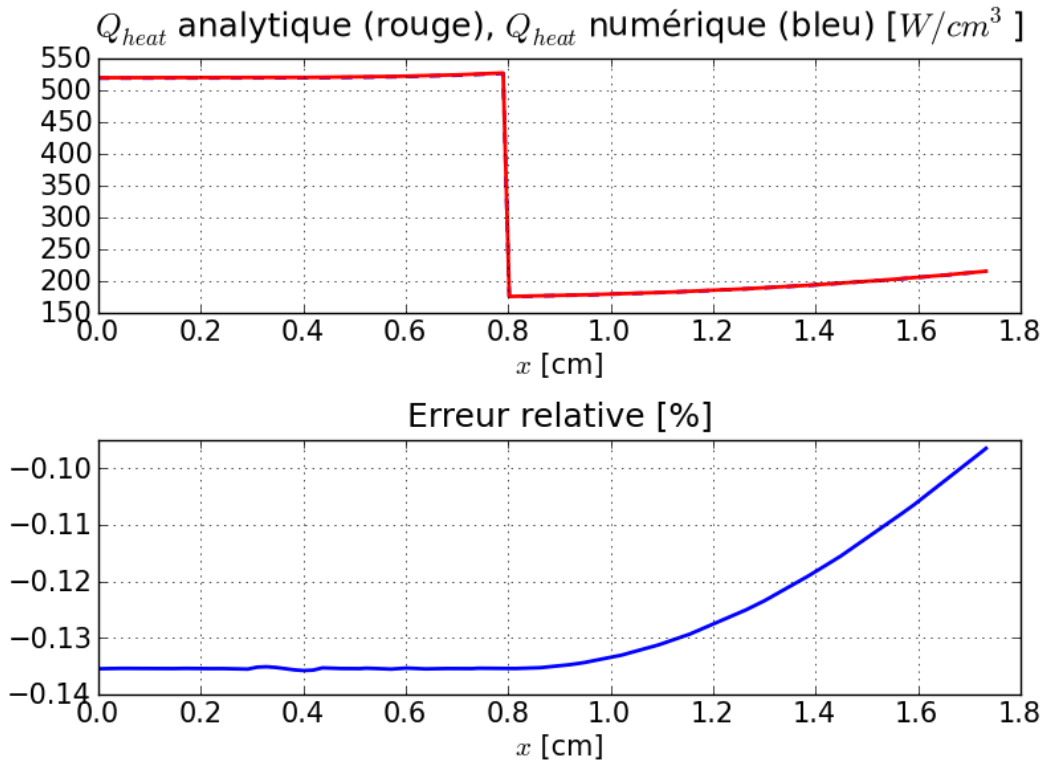


Fig. 42: Validation du modèle d'électromagnétisme 1D - préforme partiellement densifiée avec transition abrupte. Comparaison des résultats numérique (tireté bleu) et analytique (trait rouge) pour le chauffage volumique

Finalement nous avons résolu analytiquement l'équation du potentiel vecteur 5.24 pour le même domaine que nous venons de traiter sous FlexPDE, pour le cas du disque entièrement vierge (voir annexe D) : Au lieu d'utiliser la condition de bord sur le disque nous résolvons l'équation différentielle dans le domaine entier (disque, entrefer, inducteur, zone infinie), appliquons les conditions de continuité aux interfaces des différentes parties, et imposons les conditions de bord $\partial A/\partial x$ sur l'axe de symétrie et $A = 0$ à l'infini. L'expression analytique du potentiel vecteur dans le disque obtenue avec ce calcul portant sur le domaine complet peut alors être comparée avec l'expression du calcul analytique portant uniquement sur le disque avec la condition de bord correspondante (cas des figures ci-dessus). Les deux expressions s'avèrent être strictement égales (voir annexe E).

5.2. Transport massique diphasique

Après l'électromagnétisme nous nous consacrons à la deuxième nouveauté de ce modèle, qui est également le point le plus dur de cette thèse. Le modèle d'ébullition contient trois parties : La conservation de la masse, l'expression des vitesses et la conservation de l'enthalpie. Les deux premières parties sont traitées dans cette section et la dernière partie sera détaillée dans la section suivante.

5.2.1. Conservation de la masse

L'ébullition est un phénomène qui « transforme » la masse de l'état liquide vers l'état gazeux, mais elle ne crée pas de masse et n'en consomme pas non plus. Lorsqu'on considère

un volume donné on peut donc affirmer que « tout changement de masse liquide ($\partial m_l / \partial t$) est lié soit à un flux massique ($\rho_l \vec{u}_l$) sortant par les bords du domaine soit à une transition de phase (\dot{m}) ». Il en est de même pour la phase gazeuse. L'équation mathématique qui exprime ce constat sous forme différentielle est l'équation 5.36 :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \rho_l S) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_l \vec{u}_l) = \dot{m} \quad (5.36a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \rho_g (1 - S)) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_g \vec{u}_g) = -\dot{m} \quad (5.36b)$$

La masse de liquide dans un volume test dépend de la porosité ε et de la saturation en liquide S .

Ces équations possèdent l'inconvénient de contenir un terme de transition de phase \dot{m} qui n'est pas connu a priori. On peut éliminer ce terme en sommant les deux équations, ce qui permet d'arriver de nouveau à un système où l'on regarde le flux de masse totale plutôt que des deux phases séparées. En utilisant les définitions de (Wang and Beckermann, 1993) résumées dans le tableau 5.4, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \rho_m) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{u}_m) = 0 \quad (5.37)$$

Nous remarquons que le terme d'échange a néanmoins été explicité dans certains cas par quelques auteurs (Mihalef et al., 2006; Ye et al., 2001; Scarpa and Milano, 2002). Il est également possible de le déduire du modèle du mélange retenu, ce que nous allons présenter dans la section 5.3.3. Nous gardons dans l'équation 5.37 les avantages

- D'avoir une seule équation au lieu de deux
- De traiter de façon unifiée les zones monophasiques, liquide et gaz, et la zone diphasique.
- D'avoir une équation plus simple à cause de l'absence du terme de transfert de masse, même si celui-ci pourrait être explicité.

L'équation 5.37 est valable lorsqu'on ne regarde que l'ébullition, qui n'est pas liée à une source de masse. Dans le cadre du procédé de caléfaction par contre, on perd une partie de la masse gazeuse lors d'une réaction chimique sous forme d'un dépôt solide venant densifier le milieu poreux. Ceci nous amènera à une modification du bilan de masse de fluide que nous présenterons dans la partie 5.4, p. 98.

5.2.2. Formulation des vitesses

Dans la section 3.2 nous avons présenté différentes formulations pour les vitesses en fonction du type d'écoulement et des forces prépondérantes. Nous retenons pour le modèle final celle pour des écoulement lents, laminaires. La loi de Darcy énonce dans ce cas que la vitesse d'une phase est proportionnelle à une sorte de conductivité, composée de la perméabilité et de la viscosité de la phase, et aux forces motrices, qui sont la chute de pression de la phase correspondante et la gravité. La perméabilité d'une phase se compose à son tour de la perméabilité absolue du milieu poreux, indépendante de la phase, et d'un terme entre 0 et 1 qui est fonction du taux de présence de cette phase :

$$\vec{u}_p = -\frac{K_0 k_{rp}(S)}{\mu_p} \left\{ \vec{\nabla} P_p - \rho_p \vec{g} \right\} \quad (5.38)$$

Pour avoir la bonne limite vers le cas saturé (avec une seule phase fluide), on exige que la perméabilité relative varie entre 0 (absence de la phase) et 1 (présence unique de la phase).

Les deux mouvements massiques de chaque phase peuvent ensuite être rassemblés en un mouvement de masse totale $\rho_m \vec{u}_m$ (Wang and Beckermann, 1993) en utilisant les définitions du tableau 5.4 (voir eqn. 3.27) :

$$\begin{aligned} \rho_m \vec{u}_m &= \rho_l \vec{u}_l + \rho_g \vec{u}_g \\ \vec{u}_m &= -\frac{K_0}{\mu_m} \left[\vec{\nabla} P_m - (\lambda_l \cdot \rho_l + \lambda_g \cdot \rho_g) \vec{g} \right] \end{aligned} \quad (5.39)$$

Lorsqu'on connaît le profil de vitesses du mélange et de la saturation en liquide, on peut revenir par calcul algébrique aux vitesses de chaque phase via les équations (voir eqn. 3.28) :

$$\rho_l \vec{u}_l = \lambda_l \rho_m \vec{u}_m + \vec{j} \quad (5.40a)$$

$$\rho_g \vec{u}_g = \lambda_g \rho_m \vec{u}_m - \vec{j} \quad (5.40b)$$

où apparaît un flux d'interdiffusion des deux phases \vec{j} (Wang and Beckermann, 1993) dont l'expression est précisée dans le tableau 5.4.

Ces relations sont algébriques pour le flux massique du mélange et dépendent de la pression du mélange. L'équation de conservation de masse devient ainsi une équation pour la pression. Ceci n'est pas lié à l'ébullition, mais il s'agit d'un fait courant pour les études d'écoulements darcéens monophasiques également.

5.3. Le transport de la chaleur avec l'ébullition

Nous nous consacrons maintenant à la partie la plus délicate du modèle, à savoir le traitement de transition de phase et du transport de chaleur.

Dans la modélisation du procédé étudiée en bibliographie, les auteurs n'avaient traité que du gaz dans la préforme et la chaleur était apportée par un suscepteur au rayon intérieur. Ce modèle antérieur ne considérait donc le chauffage que comme un flux fixé au bord et diffusant par le gaz et le solide. La convection y était négligée puisque la pression du gaz dans le disque était approximativement constante et ne menait donc à aucun flux massique global du gaz. L'équation de bilan utilisée était alors

$$(\rho c)_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(-\lambda_{T,eff} \vec{\nabla} T \right) = Q \quad (5.41)$$

où $(\rho c)_{eff}$ et $\lambda_{T,eff}$ sont respectivement la capacité calorifique volumique et la conductivité de la chaleur par le solide et le gaz. Il s'agit de fonctions de la porosité et de la température.

Nous allons généraliser ce bilan afin de pouvoir considérer également les écoulements diphasiques et purement liquides au bord de la préforme.

Nous commençons cette section par une brève présentation du modèle thermique d'enthalpie établi par Wang et Beckermann (Wang and Beckermann, 1993). Les trois parties suivantes concernent la reformulation de ce modèle sous forme d'enthalpie volumique, l'expression algébrique du terme source de transition de phase et les conditions de bord généralement possibles. La cinquième partie de cette section évoquera des problèmes de convergence et apportera des solutions. Dans les deux dernières parties nous présenterons des formules semi-analytiques d'un problème d'ébullition simplifié et nous validerons le modèle vis-à-vis de ces calculs.

5.3.1. Point de départ de la modélisation : Modèle d'ébullition de Wang et Beckermann

Le modèle de Wang et al. (Wang and Beckermann, 1993), qui a déjà été introduit brièvement dans le chapitre 3.5.2 p. 44, travaille avec l'enthalpie de trois phases (liquide, gaz, solide) en équilibre thermodynamique :

L'enthalpie d'une phase dépend de la température et d'une valeur de référence au point de saturation :

$$h_p = h_{p,sat} + c_p(T) \cdot (T - T_{sat}) \quad (\rightarrow 3.38)$$

L'équation de conservation d'enthalpie contient un terme d'accumulation, un terme convectif, un terme diffusif ainsi qu'une source volumique :

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ (1 - \varepsilon)\rho_s h_s + \varepsilon S \rho_l h_l + \varepsilon(1 - S)\rho_g h_g \} + \vec{\nabla} \cdot \{ \rho_l h_l \vec{u}_l + \rho_g h_g \vec{u}_g \} - \vec{\nabla} \cdot \{ \lambda_{T,eff} \vec{\nabla} T \} = Q \quad (\rightarrow 3.39)$$

Cette équation contient la totalité des enthalpies par phase liquide, gazeux et solide, mais elle est néanmoins exprimée par rapport à l'enthalpie propre à chaque phase. Une deuxième étape consiste alors à introduire l'enthalpie du mélange fluide (liquide et gaz ensemble) :

$$h_m = \frac{S \cdot \rho_l}{\rho_m} \cdot h_l + \frac{(1 - S) \cdot \rho_g}{\rho_m} \cdot h_g \quad (5.42)$$

et de réécrire l'équation de bilan par rapport à celle-ci.

Cette définition de l'enthalpie du mélange dévoile une propriété très intéressante :

- Dans les domaines monophasiques, S vaut 0 ou 1, si bien que l'enthalpie du mélange équivaut à l'enthalpie de la phase correspondante et ne dépend donc que de la température.
- Dans la zone diphasique nous supposons que la température est égale à la température de saturation si bien que les enthalpies par phase correspondent à leurs valeurs de saturation constantes et que l'enthalpie du mélange dépend uniquement de la saturation.

Ceci fait que nous pouvons utiliser une seule variable pour déterminer à la fois la température et la saturation de liquide respectivement dans les domaines mono- et diphasiques. Les formules correspondantes sont présentées ci-dessous :

$$T = T_{sat} + \begin{cases} \frac{h_m - h_{lsat}}{c_{lsat}} & \text{liquide} \\ 0 & \text{diphasique} \\ \frac{h_m - h_{gsat}}{c_{gsat}} & \text{gaz} \end{cases} \quad (5.43a)$$

$$S = \begin{cases} 1 & \text{liquide} \\ \frac{\rho_m h_m - \rho_{gsat} h_{gsat}}{\rho_l h_{lsat} - \rho_{gsat} h_{gsat}} & \text{diphasique} \\ 0 & \text{gaz} \end{cases} \quad (5.43b)$$

L'équation 3.39 a été réécrite par Wang et Beckermann sous la forme de l'éqn. 5.44 qui fait apparaître l'enthalpie du mélange « liquide plus gaz » au lieu de faire référence aux

enthalpies par phase :

$$\Omega \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m h_m) + \vec{\nabla} \cdot (\gamma_h \rho \vec{u}_m h_m) = \vec{\nabla} \cdot (\Gamma_h \vec{\nabla} h_m) + \vec{\nabla} \cdot \left[\Gamma_h (h_m - h_{gsat}) \vec{\nabla} (\ln(\rho)) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[f(S) \frac{K_0 \Delta \rho \cdot L_0}{\nu_g} \vec{g} \right] + Q \quad (5.44)$$

Symbole	Description	Unité	Formule
ρ_m	Densité du fluide (mélange)	kg/m^3	$S \cdot \rho_l + (1 - S) \cdot \rho_g$
$\rho_m \vec{u}_m$	Flux massique	$kg/m^2/s$	$\rho_l \vec{u}_l + \rho_g \vec{u}_g$
ν_m	Viscosité cinétique	m^2/s	$\left[\frac{k_{rl}}{\nu_l} + \frac{k_{rg}}{\nu_g} \right]^{-1}$
μ_m	Viscosité dynamique	$Pa.s$	$\rho_m \nu_m$
P_g	Pression du gaz	Pa	$P_l + P_c$
$\vec{\nabla} P_m$	Gradient de pression du mélange liquide+gaz	Pa/m	$\lambda_l \vec{\nabla} P_l + \lambda_g \vec{\nabla} P_g$
\vec{j}	Flux massique d'interdiffusion entre le liquide et le gaz	$kg/m^2/s$	$\rho_l \vec{u}_l - \lambda_l \rho_m \vec{u}_m = -\rho_g \vec{u}_g + \lambda_g \rho_m \vec{u}_m$ $= \lambda_v \lambda_l \frac{k}{\nu} \left\{ \vec{\nabla} p_c + (\rho_l - \rho_v) \vec{g} \right\}$
λ_l	Mobilité relative du liquide	1	$\frac{k_{rl}/\nu_l}{k_{rl}/\nu_l + k_{rg}/\nu_v} = \frac{\nu}{\nu_l} k_{rl}$
λ_g	Mobilité relative du gaz	1	$\frac{k_{rg}/\nu_l}{k_{rl}/\nu_l + k_{rg}/\nu_v} = \frac{\nu}{\nu_g} k_{rg} = 1 - \lambda_l$
Ω	Rapport de capacités calorifiques	1	$(1 - \varepsilon) \frac{\rho_s c_s}{\rho} \frac{\partial T}{\partial h_m} + \varepsilon$
Γ_h	Coefficient de diffusion d'enthalpie	$Pa.s$	$\frac{D \cdot \rho_m}{\rho_l} + \lambda_{T,eff} \cdot \frac{\partial T}{\partial h_m}$
γ_h	Coefficient de correction de l'advection en diphasique	1	$\frac{\frac{\rho_l h_{lsat}}{\mu_l} k_{rl} + \frac{\rho_g h_{gsat}}{\mu_g} k_{rg}}{\frac{\rho_l h_{lsat}}{\mu_l} S + \frac{\rho_g h_{gsat}}{\mu_g} (1 - S)}$
$D(S)$	Coefficient de diffusion capillaire	$Pa.s$	$\frac{\mu_m}{\nu_m} \lambda_l \lambda_g \left(-\frac{\partial P_c}{\partial S} \right)$
$f(S)$	Fonction de barrière pour la migration de phase	1	$k_{rg} \lambda_l$
$\Delta \rho$	Différence de densité entre le liquide et le gaz	kg/m^3	$\rho_l - \rho_g$

TABLE 5.4.: Définitions liées au modèle de Wang et Beckermann (Wang and Beckermann, 1993)

5.3.2. Reformulation sous forme d'enthalpie volumique

Au lieu de se servir de l'enthalpie massique du mélange h_m nous allons utiliser une enthalpie volumique modifiée $(\rho h')_m$ comme variable principale du système et ensuite adapter l'équation 3.39 correspondante. Nous obtiendrons des expressions algébriques pour la température et la saturation en liquide qui sont similaires aux équations 5.43, mais nous verrons que ce nouveau choix de variable principale permet d'avoir une meilleure convergence du système.

Présentation et justification du choix de la nouvelle variable d'enthalpie

Dans un premier temps nous introduisons la nouvelle variable principale, l'enthalpie volumique modifiée $(\rho h')_m$ (eqn. 5.45b), et la comparons à l'ancienne qui est l'enthalpie massique (eqn. 5.45a) :

$$h_m = \frac{S\rho_l}{S\rho_l + (1-S)\rho_g} h_l + \frac{(1-S)\rho_g}{S\rho_l + (1-S)\rho_g} h_g \quad (5.45a)$$

$$(\rho h')_m = S\rho_l \tilde{h}_l + (1-S)\rho_{gsat} \tilde{h}_g \quad (5.45b)$$

avec les définitions du tableau 5.5 où nous remarquons que les enthalpies massiques modifiées \tilde{h}_i utilisent des capacités calorifiques à température fixée, et non pas en fonction de la température. Nous maintenons l'hypothèse que l'ébullition se fait à une température de saturation précise et qui ne dépend pas de la pression locale.

Enthalpies massiques	$h_l = h_{lsat} + c_l(T) \cdot (T - T_{sat})$ $h_s = h_{ssat} + c_s(T) \cdot (T - T_{sat})$	$h_g = h_{gsat} + c_g(T) \cdot (T - T_{sat})$ $h_{gsat} = h_{lsat} + L_0$
Enthalpies massiques modifiées	$\tilde{h}_l = h_{lsat} + c_{lsat} \cdot (T - T_{sat})$	$\tilde{h}_g = h_{gsat} + c_{gsat} \cdot (T - T_{sat})$

TABLE 5.5.: Définitions des enthalpies

L'enthalpie volumique modifiée est proportionnelle à la température dans les deux zones monophasiques et proportionnelle à la saturation en liquide dans la zone diphasique alors que l'enthalpie massique possède un tel caractère proportionnel uniquement pour la zone liquide. Sur le graphique 43 nous traçons les deux types d'enthalpie en fonction de la saturation. On voit que la courbe d'enthalpie massique en fonction de la saturation présente un profil asymétrique ; de plus, elle a une pente extrêmement élevée lorsque la saturation s'approche de 0 (gaz pur). Ceci implique que de grandes variations d'enthalpie sont nécessaires pour avoir un petit changement de saturation. Contrairement, en s'approchant de la zone gazeuse, des petites erreurs sur la valeur d'enthalpie entraînent de grandes erreurs sur la saturation en liquide. Ceci conduit à des difficultés de résolution numérique que l'on ne retrouve pas en utilisant l'enthalpie volumique modifiée.

La différence de définition d'enthalpie est bien évidemment rattrapée par une modification de l'équation différentielle correspondante.

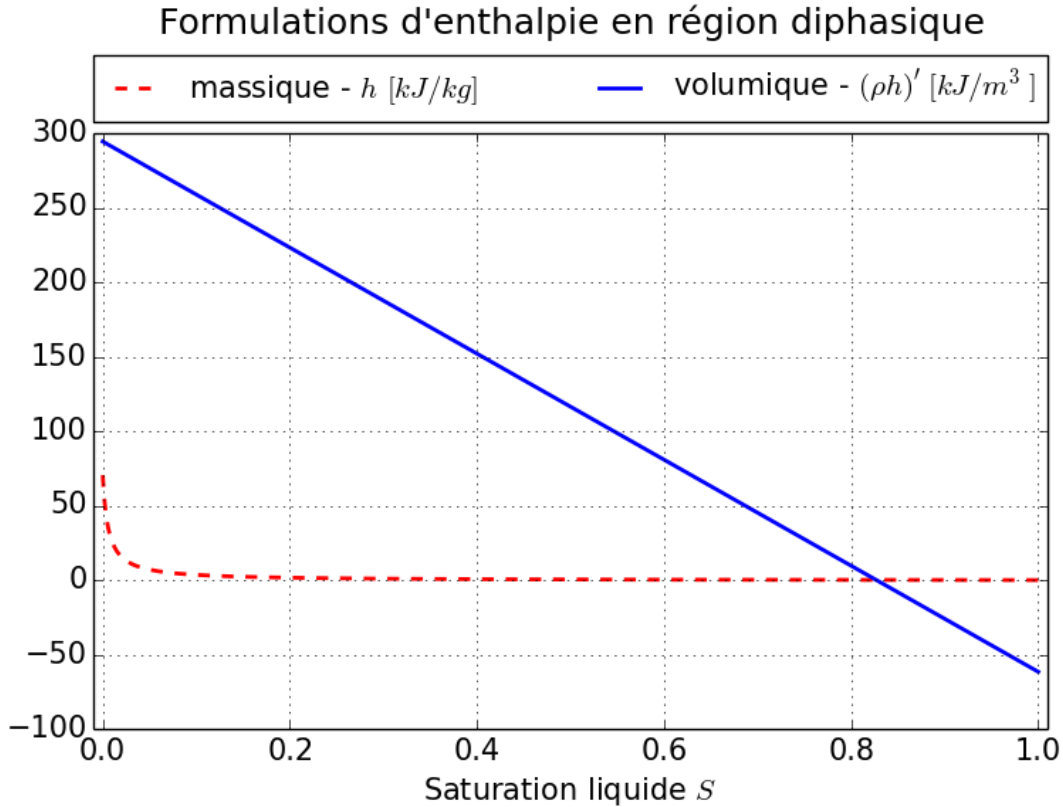


Fig. 43: Comparaison des deux choix possibles de variables principales, l'enthalpie massique (tireté rouge) ou l'enthalpie volumique modifiée (trait bleu), dans la zone diphasique. On voit le caractère linéaire du deuxième choix, alors que l'enthalpie massique (habituellement choisie) possède un profil asymétrique très plat en s'approchant du liquide pur ($S = 1$) et très pentu en s'approchant du gaz pur ($S = 0$).

A partir de la nouvelle variable principale, on obtient la température et la saturation en liquide à l'aide des relations 5.46 :

$$T = T_{sat} + \begin{cases} \frac{(\rho h')_m - \rho_l h_{lsat}}{\rho_l c_{lsat}} & \text{liquide} \\ 0 & \text{diphasique} \\ \frac{(\rho h')_m - \rho_{gsat} h_{gsat}}{\rho_{gsat} c_{gsat}} & \text{gaz} \end{cases} \quad (5.46a)$$

$$S = \begin{cases} 1 & \text{liquide} \\ \frac{(\rho h')_m - \rho_{gsat} h_{gsat}}{\rho_l h_{lsat} - \rho_{gsat} h_{gsat}} & \text{diphasique} \\ 0 & \text{gaz} \end{cases} \quad (5.46b)$$

Une remarque supplémentaire concerne la définition des enthalpies par phase elles-mêmes : Une enthalpie est définie, comme toute énergie, à une constante près. Cette constante, l'enthalpie de saturation du liquide h_{lsat} , est choisie égale à zéro dans les publications que nous avons trouvées. Or, lors de nos études, nous avons constaté qu'une valeur différente pouvait améliorer la convergence du solveur.

Réécriture de l'équation de conservation

Nous adaptons maintenant l'équation différentielle 5.44 afin de porter sur l'enthalpie volumique modifiée $(\rho h')_m$. Ceci est un travail algébrique qui considère les termes transitoire, convectif et conductif séparément et pour chaque région (liquide, gaz ou diphasique). Le calcul est explicité dans l'annexe F, p. XLVI en anglais et le résultat final est l'équation différentielle 5.47, avec les définitions du tableau 5.6 en plus ou en remplaçant celles du tableau 5.4 :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \{ \Omega (\rho h')_m \} + \frac{\partial}{\partial t} \{ (\rho h')_{t,supp} \} \\
 & + \vec{\nabla} \cdot \{ \rho_m \vec{u}_m (\rho h')_m \gamma_{\rho h} \} + \vec{\nabla} \cdot \{ \rho_m \vec{u}_m h_{g,supp} \} \\
 & - \vec{\nabla} \cdot \left\{ \alpha_{\rho h} \vec{\nabla} (\rho h')_m \right\} - \vec{\nabla} \cdot \left\{ \lambda_g \lambda_l \frac{K_0}{\nu_m} L_0 (\rho_l - \rho_{gsat}) \vec{g} \right\} \\
 & = Q
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Symbole	Description	Unité	Formule
Ω	Rapport de capacité calorifique	1	$(1 - \varepsilon) \rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial (\rho h')_m} + \varepsilon$
$(\rho h')_{t,supp}$	Accumulation d'enthalpie par changement de volume solide/fluide	J/m^3	$(1 - \varepsilon) \rho_s h_{ssat} - (1 - \varepsilon) \rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial (\rho h')_m} \cdot \rho_p h_{psat}$
$\gamma_{\rho h}$	Coefficient de correction d'advection diphasique	m^3/kg	$\frac{(\lambda_l h_l + \lambda_g h_g)}{(\rho h')_m} = \frac{\frac{h_{lsat}}{\nu_l} k_{rl} + \frac{h_{gsat}}{\nu_g} k_{rg}}{\frac{\rho_l h_{lsat}}{\nu_m} S + \frac{\rho_g h_{gsat}}{\nu_m} (1 - S)}$
$h_{g,supp}$	Terme convectif lié à la dépendance en T de c_g	J/kg	$h_{gsat} \left(1 - \frac{c_p}{c_{psat}} \right)$
$\alpha_{\rho h}$	Diffusivité d'enthalpie volumique	m^2/s	$\lambda_g \lambda_l \frac{K_0}{\nu_m} L_0 \frac{\partial P_c}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial (\rho h')_m} + \lambda_{T,eff} \frac{1}{(\rho c_p)_p}$
$\frac{\partial T}{\partial (\rho h')_m}$	Inverse de la capacité calorifique volumique	$K.m^3/J$	$ \begin{cases} \frac{1}{\rho_l c_{lsat}} & \text{liquide} \\ 0 & \text{diphasique} \\ \frac{1}{\rho_{gsat} c_{gsat}} & \text{gaz} \end{cases} $
$\frac{\partial S}{\partial (\rho h')_m}$	Inverse de la taille du domaine diphasique en termes de $(\rho h')_m$	m^3/J	$ \begin{cases} 0 & \text{liquide} \\ \frac{1}{\rho_l h_{lsat} - \rho_{gsat} h_{gsat}} & \text{diphasique} \\ 0 & \text{gaz} \end{cases} $

TABLE 5.6.: Définitions liées au modèle d'enthalpie volumique

Ce bilan contient des termes qui apparaissent également dans le bilan d'enthalpie massique, et quelques termes supplémentaires. Dans le premier groupe nous avons :

- Un terme d'accumulation temporelle avec le rapport de capacité calorifique Ω similaire à celui du modèle de Wang et al.

- Un terme convectif avec le coefficient de correction d'advection $\gamma_{\rho h}$ qui se simplifie en $1/\rho_p$ en monophasique
- Un terme diffusif avec la diffusivité $\alpha_{\rho h}$ qui exprime en monophasique la conduction de chaleur sensible et en diphasique la convection de chaleur latente liée au gradient de pression de capillarité entre le liquide et le gaz
- Un terme de convection de chaleur latente lié à la gravité et la différence de densité entre le liquide et le gaz et qui est non nul uniquement en zone diphasique (car en monophasique l'une des deux mobilités réduites λ_l ou λ_g vaut toujours zéro).
- Un terme de source de chaleur Q

Les termes supplémentaires par rapport à l'équation de Wang et al. sont :

- Un terme d'accumulation en temps qui prend en compte notamment la variation de porosité qui apporte un gain d'enthalpie solide et une perte d'enthalpie du fluide relative. Ce terme n'apparaît pas dans l'équation de Wang et al. puisqu'ils ont choisi $h_{ssat} = 0$ (l'enthalpie massique du solide à la température d'ébullition). Pour une phase p (non-diphasique) le deuxième terme de $(\rho h')_{t, supp}$ devient $(1 - \varepsilon)\rho_s c_s \cdot \partial T / \partial (\rho h')_m \cdot \rho_p h_{psat} = (1 - \varepsilon) \cdot (\rho_s c_s) / (\rho_p c_{p, sat}) \cdot \rho_p h_{psat}$.
- Un terme convectif qui propage la différence d'enthalpie entre la variable choisie $((\rho h')_m)$ et l'enthalpie volumique physique.

Pour les trois zones liquide/diphasique/gaz nous avons typiquement pour Ω 1.1, 0.77, 60.3 et pour $\alpha_{\rho h}$ $8.2 \cdot 10^{-6}$, 10^{-3} , $1.4 \cdot 10^{-3}$. Sur la figure 44 nous donnons la dépendance de $\gamma_{\rho h}$ et de $\alpha_{\rho h}$ en fonction de la saturation en liquide pour différentes valeurs de la constante de référence d'enthalpie h_{lsat} . Nous y constatons que $\gamma_{\rho h}$ possède une divergence pour des valeurs $h_{lsat} \neq 0$ et que la courbe de $\alpha_{\rho h}$ est la plus accentuée pour $h_{lsat} = 0$. Ceci semble justifier le choix $h_{lsat} = 0$ fait par la plupart des auteurs, mais nous verrons plus tard que d'autres phénomènes numériques relativisent ce choix.

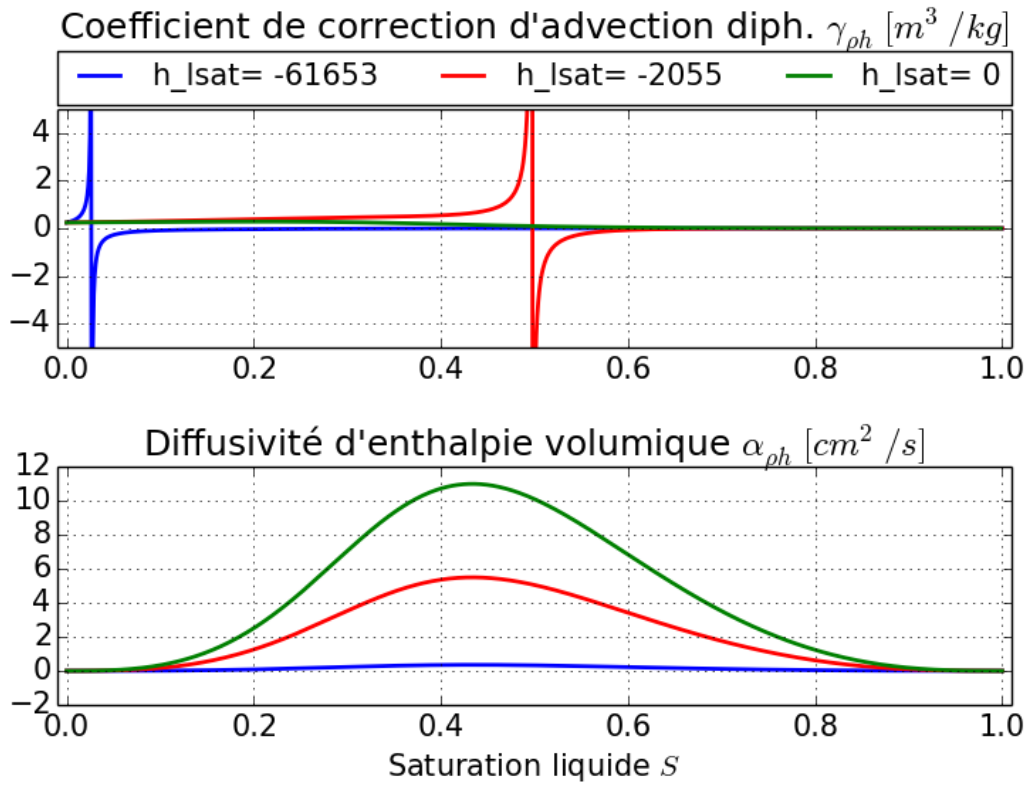


Fig. 44: Paramètres de l'équation d'enthalpie en fonction de la saturation en liquide S pour différentes valeurs de l'enthalpie de saturation du liquide. a) $\gamma_{\rho h}$, b) $\alpha_{\rho h}$

Temps caractéristiques

Une fois le modèle d'ébullition écrit, nous pouvons commencer à l'exploiter en évaluant les temps caractéristiques dans les zones liquide/diphasique/gaz. Pour ceci nous simplifions l'équation d'enthalpie à

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \Omega(\rho h')_m \} - \vec{\nabla} \cdot \{ \alpha_{\rho h} \vec{\nabla}(\rho h')_m \} = Q \quad (5.48)$$

Une solution type de cette équation contient des termes de forme $\alpha_{\rho h}/\Omega \cdot t_0/x_0^2$ où x_0 et t_0 sont une longueur et un temps caractéristique. Pour une longueur caractéristique donnée nous obtenons alors

$$t_0 = x_0^2 \cdot \frac{\Omega}{\alpha_{\rho h}} \quad (5.49)$$

Avec les ordres de grandeurs donnés ci-dessus nous trouvons pour $\Omega/\alpha_{\rho h}$: $1 \cdot 10^5$, 770, $4 \cdot 10^4$ pour respectivement le liquide, le diphasique et le gaz. Sachant que la plupart des phénomènes thermiques sont reliés à $1/t_0$, ceci explique pourquoi il faut beaucoup de temps pour faire bouillir une quantité de liquide par rapport à la chauffer, avec le même apport d'énergie, sous forme liquide ou gazeuse. Lorsqu'on regarde plus en détail la courbe de $\alpha_{\rho h}$, on voit que sa valeur est plus élevée au milieu que pour $S \approx 0$ ou $S \approx 1$; il en va donc de même pour $1/t_0$. Dans les simulations nous trouvons cette caractéristique par un changement rapide de $S = 1$ vers $S < 1$, ensuite une stagnation sur une certaine valeur, avant de repartir rapidement vers $S = 0$.

5.3.3. Calcul du taux d'ébullition

Le terme de transfert massique \dot{m} des équations mono-phasiques 5.36 est différent de zéro uniquement en région diphasique. Dans ce cas la température et les densités massiques sont constantes pour chaque phase et l'équation d'enthalpie 5.47 s'écrit sous forme :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \{ (1 - \varepsilon) \rho_s h_{ssat} + \varepsilon S \rho_l h_{lsat} + \varepsilon (1 - S) \rho_{gsat} h_{gsat} \} \\ & + \vec{\nabla} \cdot \{ \rho_m \vec{u}_m \cdot (\lambda_l h_{lsat} + \lambda_g h_{gsat}) \} - \vec{\nabla} \cdot \{ \vec{j} L_0 \} = Q \end{aligned} \quad (5.50)$$

Nous supposons la porosité constante sur un intervalle de temps suffisamment long et utilisons $h_{gsat} = h_{lsat} + L_0$, $\lambda_l + \lambda_g = 1$ ainsi que la conservation de la masse totale et les définitions de flux massiques (3.28). Ceci conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \varepsilon (1 - S) \rho_g \} + \vec{\nabla} \cdot \{ \rho_g \vec{u}_g \} = Q / L_0 \quad (5.51)$$

Ceci peut être comparé avec l'équation de conservation de masse du gaz 5.36 et nous pouvons en déduire l'expression du terme de source massique \dot{m} :

$$\dot{m} = -Q / L_0 \quad (5.52)$$

Dans la zone diphasique, toute la chaleur volumique introduite dans le système sert donc à la transition de phase. Ceci est justifié puisqu'on suppose que la température dans cette zone est constante et que de manière générale le système peut stocker de l'énergie uniquement sous forme de chaleur sensible (liée à une augmentation de température) ou sous forme de chaleur latente (liée à une vaporisation).

5.3.4. Conditions de bord

Comme toute équation de conservation d'énergie, la formulation en enthalpie volumique requiert des conditions de bords pour sa résolution. Il en existe de divers types parmi lesquels deux sont les plus connus :

- I) Une condition dite de Dirichlet, où l'on impose la valeur de l'enthalpie volumique. Vu qu'il s'agit d'une variable hybride représentant à la fois la saturation en liquide et la température, on fixe selon la valeur de $(\rho h')_{bord}$ choisie

- 1) de se trouver en zone liquide avec une certaine température donnée :

$$(\rho h')_{bord} < \rho_l \cdot h_{lsat} \quad (5.53a)$$

$$T_{bord} = \frac{(\rho h')_{bord} - \rho_l h_{lsat}}{\rho_l c_{l,sat}} \quad (5.53b)$$

- 2) de se trouver en zone diphasique avec une certaine saturation en liquide donnée :

$$\rho_l \cdot h_{lsat} < (\rho h')_{bord} < \rho_{gsat} \cdot h_{gsat} \quad (5.54a)$$

$$S_{bord} = \frac{(\rho h')_{bord} - \rho_{gsat} h_{gsat}}{\rho_l h_{lsat} - \rho_{gsat} h_{gsat}} \quad (5.54b)$$

3) de se trouver en zone gazeuse avec une certaine température donnée :

$$(\rho h')_{bord} > \rho_{gsat} \cdot h_{gsat} \quad (5.55a)$$

$$T_{bord} = \frac{(\rho h')_{bord} - \rho_{gsat} h_{gsat}}{\rho_{gsat} c_{gsat}} \quad (5.55b)$$

II) Une condition dite de Neumann où l'on fixe la valeur du flux de chaleur liée à l'échange thermique avec l'entourage. Selon la phase qui se trouve au bord en question, le flux q_{bord} imposé porte des interprétations différentes. Nous distinguons notamment deux cas :

1) En monophasique, phase p , on a la loi de Fourier de la conduction :

$$\begin{aligned} \vec{q} \cdot \vec{n} &= \alpha_{ph} \vec{\nabla}(\rho h')_m \cdot \vec{n} = \lambda_{T,eff} \cdot \frac{1}{\rho_p c_{psat}} \vec{\nabla}(\rho_{psat} c_{psat} T) \cdot \vec{n} \\ &= \lambda_{T,eff} \vec{\nabla}(T) \cdot \vec{n} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Le flux de bord fixe donc directement le flux de chaleur sensible comme on le connaît dans des problèmes purement monophasiques. Dû au traitement numérique de l'équation différentielle et le choix de nos paramètres, nous ne sommes pas obligés de transformer le flux de chaleur cherché en flux d'enthalpie.

2) En diphasique l'expression du flux de chaleur devient :

$$\begin{aligned} \vec{q} \cdot \vec{n} &= \alpha_{ph} \vec{\nabla}(\rho h')_m \cdot \vec{n} = \lambda_l \lambda_g \frac{K_0}{\nu_m} L_0 \frac{\partial P_c}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial(\rho h')_m} \cdot \vec{\nabla}(\rho h')_m = \lambda_l \lambda_g \frac{K_0}{\nu_m} \vec{\nabla}(P_c) \cdot \vec{n} \\ &= L_0 \cdot \vec{j}_{sans\vec{g}} \cdot \vec{n} \end{aligned} \quad (5.57)$$

où nous appelons $\vec{j}_{sans\vec{g}}$ le flux d'interdiffusion liquide-gaz (voir tableau 5.4) sans son terme gravitaire.

En diphasique, tout échange thermique se fait par le mouvement relatif du gaz par rapport au liquide, qui transporte de la chaleur latente. Nous avons déjà fait ce constat en étudiant le terme source massique. Nous retrouvons le même phénomène dans l'équation de bord ci-dessus : Le flux de chaleur imposé au bord fixe en réalité un flux massique d'interdiffusion (liquide-gaz) afin d'avoir la bonne quantité de chaleur échangée.

Dans un cas monophasique on peut s'imaginer un système fermé par des plaques qui transmettent de la chaleur sans laisser passer de la masse. En diphasique par contre ceci n'est pas possible : Même si on fixe un flux massique total égal à zéro, il faut permettre un passage de liquide et de gaz (séparément) pour avoir un flux de chaleur. Cette contrainte ressort des hypothèses du modèle : i) la température est identique pour le liquide et le gaz en zone diphasique, ii) les deux sont strictement égales à la température d'ébullition en zone diphasique.

En cas monophasique on trouve souvent des conditions sous forme $q_{bord} = h \cdot (T - T_{ext})$ qui pose que le flux de chaleur sortant est lié à la différence de température entre le fluide et son environnement. Lorsqu'on se retrouve avec un cas diphasique, il faut se demander comment trouver un coefficient d'échange en fonction de la saturation $h(S)$ afin d'avoir un flux d'échange $h \cdot (T_{sat} - T_{ext})$ qui interpole bien entre les cas de liquide pur et de gaz pur. Quelques publications expérimentales, par exemple (Madani et al., 2013), constatent que même pour les cas monophasiques le coefficient d'échange est différent pour un état liquide et un état gazeux et qu'il est également fonction de l'écart

de température entre le solide et le fluide. Nous pouvons résumer qu'il est difficile de bien connaître le coefficient d'échange avec toutes ces dépendances sans avoir recours à des expériences détaillées avec les matériaux en question.

5.3.5. Implémentation numérique

Conditions d'interface et paramètres numériques

Le modèle en enthalpie présenté permet de travailler avec du liquide pur, du diphasique et du gaz pur dans le même échantillon. Comme d'autres modèles il converge rapidement et sans problème lorsqu'on se retrouve avec seulement une de ces trois phases. Pour le cas où l'on a présence de trois phases, on a souvent des problèmes de convergence. Dans la suite nous introduisons 4 paramètres numériques qui améliorent considérablement la convergence et pour lesquels l'erreur introduite sur les résultats physiques est également facile à estimer. Puisque les problèmes de convergence sont principalement liés à la transition liquide/diphasique ou diphasique/gaz, nous allons expliciter les équations d'enthalpie et de masse à ces interfaces. Pour l'équation d'enthalpie nous avons conservation du flux de chaleur total ainsi qu'égalité de l'enthalpie monophasique à l'enthalpie de saturation correspondante au point de transition (indice d : diphasique, p : phase liquide/gaz pur) :

$$\vec{q}_d = \vec{q}_p \quad (5.58a)$$

$$(\rho h')_{m,d} = (\rho h')_{m,p} = \rho_{psat} h_{psat} \quad (5.58b)$$

avec

$$\vec{q}_p = \rho_p \vec{u}_p \cdot (\rho h')_m \cdot \frac{1}{\rho_{psat}} - \frac{\lambda_{Tp}}{(\rho c_p)_p} \cdot \vec{\nabla} (\rho h')_{m,p} \quad (5.58c)$$

$$\begin{aligned} \vec{q}_d &= \rho_d \vec{u}_d \cdot (\rho h')_{m,d} \cdot \gamma_{\rho h} - \alpha_{\rho h} \cdot \vec{\nabla} (\rho h')_{m,d} - \lambda_g \lambda_l \frac{K_0}{\nu_m} L_0 (\rho_l - \rho_{gsat}) \vec{g} \\ &= \rho_d \vec{u}_d \cdot (\lambda_l h_{lsat} + \lambda_g h_{gsat}) - \lambda_l \lambda_g \frac{K_0}{\nu_m} L_0 \left[\frac{\partial P_c}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial (\rho h')_m} \vec{\nabla} (\rho h')_{m,d} + (\rho_l - \rho_{gsat}) \vec{g} \right] \end{aligned} \quad (5.58d)$$

Or, dans le terme convectif du flux de chaleur diphasique, λ_p vaut 1 pour la phase monophasique en contact et 0 pour l'autre.

L'équation de conservation de masse entraîne l'égalité des flux massiques à l'interface :

$$\rho_p \vec{u}_p = \rho_d \vec{u}_d \quad (5.59)$$

Ainsi l'équation de conservation du flux de chaleur donne une relation entre les dérivées de l'enthalpie volumique du côté monophasique et du côté diphasique

$$\vec{\nabla} (\rho h')_{m,d} = \frac{\lambda_{Tp}}{(\rho c_p)_p} \frac{1}{\lambda_l \lambda_g \frac{K_0}{\nu_m} L_0 \frac{\partial P_c}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial (\rho h')_m}} \vec{\nabla} (\rho h')_p - \frac{(\rho_l - \rho_{gsat})}{\frac{\partial P_c}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial (\rho h')_m}} \vec{g} \quad (5.60a)$$

$$\text{avec} \quad \frac{\partial S}{\partial (\rho h')_m} = - \frac{1}{\rho_{gsat} h_{gsat} - \rho_l h_{lsat}} \quad (5.60b)$$

Cette relation des dérivées met en évidence le principal problème pour obtenir la convergence à une interface monophasique/diphasique : Analytiquement, l'un des deux λ_p vaut

zéro à l'interphase ce qui fait diverger le premier terme de $\vec{\nabla}(\rho h')_d$. Suivant les définitions du tableau 5.6, le coefficient $\alpha_{\rho h}$ du terme laplacien de $(\rho h')_m$, c'est à dire le terme « diffusif », devient également zéro sous ces conditions. Ces deux phénomènes déstabilisent énormément la résolution numérique. L'espace étant discrétisé, il y a peu de chances de se retrouver avec ces valeurs critiques sur un point de calcul. Or, des codes de résolution modernes proposent souvent un raffinement du maillage aux endroits à forts gradients. Dans le cas présent on tombe sur le cercle vicieux « plus on raffine le maillage et plus le gradient de $(\rho h')_m$ devient encore plus fort et plus le maillage est raffiné et le système déstabilisé ». Ceci mène à la divergence de la résolution au fur et à mesure de son avancement.

Une fois identifiée la source du problème de convergence aux interfaces monophasique/diphase, nous proposons une solution de manière globale en introduisant des paramètres numériques additionnels :

- o Trois valeurs de diffusivités de chaleur additionnelles pour les 3 phases (liquide/diphase/gaz) réciproquement :

La divergence de la dérivée de $(\rho h')$ en diphase au contact avec le monophasique peut être levée en rajoutant une constante $C_{d,p}$ au coefficient de diffusion α :

$$\alpha_{\rho h} \rightarrow \alpha_{\rho h} + C_{d,p} \quad (5.61)$$

Cette constante est différente pour le liquide, le gaz et le diphase. Son effet est double : Non seulement elle écarte la divergence de $(\rho h')_m$ aux bords du diphase, mais en plus elle introduit une stabilisation numérique connue sous le nom de diffusion artificielle : Une diffusivité de chaleur augmentée permet de dissiper plus facilement des excès de chaleur locales, de lisser la solution de $(\rho h')_m$ et de stabiliser la résolution. Ce coefficient doit néanmoins rester inférieur à une valeur de référence de la diffusivité dans chacune des phases liquide/diphase/gaz. Dans le diphase on peut choisir par exemple la valeur maximale de $\alpha_{\rho h}$ quelle que soit la saturation S ($\max_{S \in [0,1]} (\alpha_{\rho h}(S))$)

(voir fig. 44), multipliée par un coefficient très inférieur à 1.

- o Une valeur adaptée pour l'enthalpie de saturation du liquide :

Le facteur qui s'est avéré le plus stabilisant sans introduire aucune erreur physique dans la solution est la valeur de l'enthalpie de saturation du liquide : Etant une référence libre, on peut la choisir comme souhaité. Nous l'écrivons comme un multiple de l'enthalpie du changement de phase :

$$h_{lsat} = -c_2 \cdot L_0 \quad (5.62a)$$

avec

$$c_2 = \delta_{sat} \cdot \frac{\rho_{gsat}}{\rho_l - \rho_{gsat}} \quad (5.62b)$$

ce qui entraîne que le paramètre numérique δ_{sat} utilisé vérifie :

$$\rho_{gsat} h_{gsat} - \rho_l h_{lsat} = \rho_{gsat} L_0 \cdot (1 + \delta_{sat}) \quad (5.62c)$$

Il détermine la « taille » de la zone diphase d'un point de vue numérique, mais sans affecter sa taille de zone physique.

Présentation d'un cas test

Un exemple est donné sur la figure 45a) : Il s’agit d’un canal vertical à section rectangulaire et isolé sur les bords. Un flux massique $(\rho u)_{m0}$ de fluide le parcourt du bas vers le haut. Nous réglons la température d’entrée du fluide et nous imposons un flux de chaleur en haut de la section test. La section test est chauffée par une source homogène Q . Nous cherchons l’état stationnaire du système.

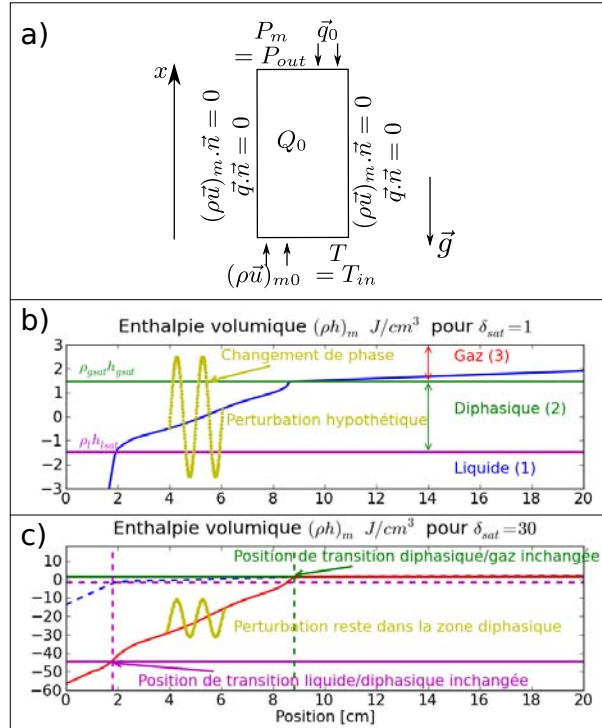


Fig. 45: Résolution d’un cas simple d’écoulement dans un domaine poreux avec ébullition afin de tester le modèle et ses paramètres numériques. a) Géométrie du cas : température liquide fixée d’un côté et flux de chaleur fixé de l’autre côté b) Résultats pour $\delta_{sat} = 1$. Une perturbation (courbe jaune) peut facilement dépasser les limites de changement de phase (liquide/diphasique ou diphasique/gaz) ce qui rend sa résolution difficile. c) Résultats pour $\delta_{sat} = 30$. Une perturbation peut prendre plus d’amplitude avant d’être source à des changements de phase et ainsi à de sévères problèmes de résolution.

Description de la solution type de l’enthalpie volumique

La figure 45b) montre les résultats pour l’enthalpie volumique de ce cas réalisé sous FlexPDE avec $\delta_{sat} = 1$. Nous y retrouvons les 3 zones liquide(1), diphasique(2) et gaz(3) en fonction de $(\rho h')_m$ par rapport à $\rho_l h_{l,sat}$ et $\rho_{gsat} h_{gsat}$. Le profil de l’enthalpie volumique modifiée est linéaire dans les zones monophasiques (1,3) puisque nous travaillons à flux de chaleur imposé et l’enthalpie est proportionnelle à la température comme décrit dans l’établissement du modèle. Dans la zone diphasique nous trouvons un profil en forme de S retourné qui ne possède pas d’asymétrie claire entre le côté liquide et le côté de gaz, contrairement aux résultats que l’on aurait en travaillant avec l’enthalpie massique (voir fig. 43). Nous mettons également en évidence que pour une valeur d’enthalpie volumique donnée, il y a une relation univoque permettant d’identifier la phase correspondante et ensuite pour calculer la température ou bien la saturation en liquide. Pour avoir une telle relation unique, nous devons satisfaire à la contrainte 5.63 sur le choix de l’enthalpie de saturation du liquide qui, physiquement, est une référence libre.

Influence du paramètre numérique δ_{sat}

Dans la figure 45b) la résolution est faite avec $\delta_{sat} = 1$ et dans 45c) avec $\delta_{sat} = 30$. La zone diphasique apparaît plus grande (en termes de $(\rho h')_m$) sans que les résultats physiques (température à l'entrée, température à la sortie, position de l'interface liquide/diphasique, position de l'interface diphasique/gaz) soient affectés.

Plus la valeur de δ_{sat} est élevée et plus la résolution se fait facilement : le fait que les gradients deviennent plus forts est compensé par la stabilisation lors de l'apparition d'oscillations. En effet, supposons qu'une oscillation de $(\rho h')_m$ pour des raisons numériques prenne une amplitude suffisamment forte. Pour des valeurs de δ_{sat} faibles, une telle oscillation peut facilement dépasser les lignes horizontales séparant le diphasique du liquide et du gaz en termes de valeurs de $(\rho h')_m$ si bien qu'elle introduit momentanément non seulement de fausses valeurs mais aussi des « changements d'équations » multiples sur une courte distance physique (voir fig. 45b). Il est donc très difficile pour un solveur numérique de repousser toutes les ondulations en une seule phase et de lisser la courbe. Avec une taille de diphasique plus élevée, les oscillations numériques restent essentiellement contenues dans la zone diphasique et disparaissent donc au bout de quelques itérations (voir fig. 45c).

Puisque la grandeur $\rho_{gsat}h_{gsat} - \rho_l h_{lsat}$ intervient dans différents paramètres physiques du diphasique, il faut la choisir avec soin. Il y a notamment une valeur limite à respecter : Pour que la résolution du système soit possible et l'interprétation des résultats unique, il faut en effet que l'enthalpie volumique varie de manière monotone dans un domaine chauffé d'un côté. Ceci implique que i) la température en monophasique T soit une fonction strictement croissante de $(\rho h')_m$ et ii) la saturation en liquide S soit une fonction strictement décroissante de $(\rho h')_m$. Ce dernier point implique que

$$\frac{\partial S}{\partial (\rho h')_m} < 0 \quad (5.63a)$$

$$\frac{1}{-\rho_{gsat}L_0(1 + \delta_{sat})} \leq 0 \quad (5.63b)$$

$$\text{soit :} \quad \delta_{sat} \geq -1 \quad (5.63c)$$

Dans la plupart des publications on trouve le choix $h_{lsat} = 0$ et donc $\delta_{sat} = -1$. Ceci est un choix qui satisfait le critère et qui simplifie l'écriture des formules. Néanmoins nous montrons qu'il est le moins bon en termes de temps de calcul et de précision. De plus, on peut facilement déduire du fait que la dérivée $\frac{\partial S}{\partial (\rho h')_m} \propto 1/\delta_{sat}$ que : plus δ_{sat} est élevée, moins l'erreur sur $(\rho h')_m$ apporte d'erreur sur S .

5.3.6. Formulation analytique du modèle d'ébullition

Avant de présenter une première application numérique, nous dérivons quelques résultats analytiques pour l'équation d'enthalpie. Pour ceci nous la considérons par phase et appliquons ensuite les conditions d'interface et de bord pour positionner les zones liquide/diphasique/gaz et pour construire les profils de température et de saturation.

Le point de départ est l'équation d'enthalpie volumique 5.47 sous forme stationnaire :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \{(\rho u)_m (\rho h')_m \gamma_{\rho h}\} + \frac{\partial}{\partial x} \{(\rho u)_m h_{g,supp}\} \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \alpha_{\rho h} \frac{\partial}{\partial x} (\rho h')_m \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \lambda_g \lambda_l \frac{K_0}{\nu_m} L_0 (\rho_l - \rho_{gsat}) g \right\} \\ & = Q \end{aligned} \quad (5.64)$$

Pour la conservation de la masse nous considérons un cas sans dépôt chimique, si bien qu'en 1D nous pouvons directement réaliser l'intégration et obtenir :

$$(\rho u)_m = const = (\rho u)_{m0} \quad (5.65)$$

Monophasique

En monophasique, et en négligeant la dépendance de la capacité calorifique du gaz de la température, l'équation d'enthalpie devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\rho_{p,sat}} \cdot (\rho u)_m \cdot (\rho h')_m \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \lambda_{T,eff} \cdot \frac{1}{\rho_{psat} c_{psat}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\rho h')_m \right\} = Q \quad (5.66)$$

Avec la définition de l'enthalpie volumique, le deuxième terme devient le terme de diffusion de chaleur classique, et le premier la convection de la chaleur :

$$\frac{\partial}{\partial x} \{(\rho u)_m \cdot c_p \cdot T\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \lambda_{T,eff} \cdot \frac{\partial}{\partial x} T \right\} = Q \quad (5.67)$$

En supposant une source de chaleur homogène et une température au bord donnée ($T(x=0) = T_{in}$), la solution de cette équation devient :

$$\begin{aligned} T(x) = & \frac{Q}{(\rho u)_{m0} c_{pl}} \cdot \left[\left(L_{pref} - \frac{\lambda_{Tl}}{c_{pl} \cdot (\rho u)_{m0}} \right) \cdot \left(\exp \left(\frac{(\rho u)_{m0} \cdot c_{pl}}{\lambda_{Tl}} x \right) - 1 \right) + x \right] \\ & - \frac{q_0}{(\rho u)_{m0} c_{pl}} \cdot \left(\exp \left(\frac{(\rho u)_{m0} \cdot c_{pl}}{\lambda_{Tl}} x \right) - 1 \right) + T_{in} \cdot \exp \left(\frac{(\rho u)_{m0} \cdot c_{pl}}{\lambda_{Tl}} x \right) \end{aligned} \quad (5.68)$$

Diphasique

Pour le cas diphasique, l'équation d'enthalpie devient

$$\frac{\partial}{\partial x} \{(\rho u)_m \cdot (\lambda_l h_{lsat} + \lambda_g \cdot h_{gsat})\} - \frac{\partial}{\partial x} \{j \cdot L_0\} = Q \quad (5.69)$$

Une résolution analytique de cette équation n'est pas possible. Par contre nous pouvons écrire le développement de la saturation S sous forme intégrale et en déduire notamment la taille de la zone diphasique (voir annexe G et (Stemmelen et al., 1999) pour un cas sans convection et chauffage volumique). Les deux résultats sont l'équation 5.70a, représentant la variation de saturation en espace, et l'équation 5.71, représentant la taille de la zone diphasique obtenue par intégration de la première relation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial S} &= \frac{\frac{\partial P_c}{\partial S}}{\frac{1}{K_0} \left(\frac{\nu_l}{k_{rl}} + \frac{\nu_g}{k_{rg}} \right) \vec{j} - (\rho_l - \rho_g) \vec{g}} \\ &= \frac{\frac{\partial P_c}{\partial S} \cdot \frac{K_0}{\nu_m}}{\left(\frac{1}{\lambda_l} + \frac{1}{\lambda_g} \right) \left(-\lambda_l (\rho u)_{m0} - \frac{q'(S)}{L_0} \right) - \frac{K_0}{\nu_m} \cdot (\rho_l - \rho_g) \vec{g}} \end{aligned} \quad (5.70a)$$

$$q'(S) = \int_{S_{ref}}^S Q(x(S')) \frac{\partial x}{\partial S'} dS' + q_0 \quad (5.70b)$$

$$L_d = \int_{S=0}^{S=1} \frac{\partial x}{\partial S} dS \quad (5.70c)$$

Le terme $\lambda_l \cdot (\rho u)_{m0} \cdot L_0$ correspond au transport convectif de chaleur latente pondéré par la mobilité du liquide. L'intégrale de la source de chaleur Q additionnée au flux q_0 correspond au flux moyen conductif à travers un intervalle dS' .

Nous en déduisons que la taille de la zone diphasique augmente si :

- La pression capillaire $P_c(S)$ devient plus importante, ce qui provoque une surpression plus forte dans le gaz par rapport au liquide
- La perméabilité K_0 du poreux devient plus grande ou bien la viscosité ν_m du mélange devient plus petite
- La chaleur latente est plus élevée si bien qu'on a besoin d'apporter plus de chaleur afin de faire bouillir tout le liquide.
- Le flux de chaleur total traversant la zone diphasique devient moins important. Ce flux se compose en une contribution convective de chaleur latente, un chauffage volumique et le flux de chaleur q_0 entrant dans la zone diphasique.
- L'effet de la gravité diminue : le même dispositif expérimental possède une zone diphasique plus petite en orientation verticale (avec gravité) qu'en orientation horizontale (sans gravité).

Les intégrales se calculent par sommation sur des petits intervalles dS . On peut alors réaliser la sommation sur S' jusqu'à la valeur de S de l'itération précédente. Ceci mène à l'expression numérique suivante :

$$\begin{aligned} L_d &= \sum_{S_i=0}^1 \frac{\partial x}{\partial S} \Big|_i \cdot dS \\ &= \sum_{S_i=0}^1 \frac{\frac{\partial P_c}{\partial S_i}}{\frac{1}{K_0} \left(\frac{\nu_l}{k_{rl}} + \frac{\nu_g}{k_{rg}} \right) \left(-\lambda_l (\rho u)_{m0} - \frac{1}{L_0} \left[\sum_{S'_j=0}^{S_{i-1}} Q(x(S'_j)) \frac{\partial x}{\partial S} \Big|_j \cdot dS' + q_0 \right] \right) - (\rho_l - \rho_g) \vec{g}} \cdot dS \end{aligned} \quad (5.71)$$

Pour chaque itération tous les termes sous les sommes sont alors connus soit par des formules analytiques soit par des résultats d'itérations précédentes. Le calcul peut également être réalisé en allant dans le sens inverse pour S , c'est à dire de $S = 1$ (liquide) jusqu'à $S = 0$ (gaz).

Ce dernier résultat est similaire à celui de (Stemmelen et al., 1999) avec en plus la prise en compte de la convection forcée ainsi que du chauffage volumique. Stemmelen et al. remarquent qu'en fonction du flux de chaleur imposé, il peut y avoir une ou plusieurs valeurs de S pour lesquelles le dénominateur $D(S)$ de l'intégrande ci-dessus devient zéro et conduit donc théoriquement à une taille diphasique infinie. Ils introduisent un flux de chaleur critique comme le flux pour lequel l'équation $D(S) = 0$ possède une seule solution. Pour des flux de chaleur plus faibles il y a en permanence une zone liquide, et pour des valeurs plus fortes une zone asséchée peut apparaître si le dispositif est suffisamment grand. Néanmoins, pour la suite de nos travaux, une telle étude n'est pas d'intérêt majeur puisque nous avons des

flux de chaleur forts.

L'équation 5.71 permet non seulement de connaître la longueur de la zone diphasique mais aussi d'établir le profil de $S(x)$. Pour ceci nous remplaçons la limite supérieure de la somme de 1 à des valeurs $S_n \leq 1$ et trouvons des couples (x_n, S_n) et donc le profil $S(x)$.

En plus de la taille de la zone diphasique, nous obtenons une expression pour la chute de pression du gaz sur la zone diphasique entière (voir l'annexe, eqn. G.17) :

$$\Delta P_d = P_g(S = 1) - P_g(S = 0) = \int_{S=0}^{S=1} \frac{\partial P_g}{\partial S} dS \quad (5.72a)$$

où

$$\frac{\partial P_g}{\partial S} = \frac{\left(-\frac{\nu_m}{K}(\rho u)_{m0} + (\lambda_l \rho_l + \lambda_g \rho_g) \vec{g} \right) \cdot \frac{\partial P_c}{\partial S}}{\frac{1}{K} \left(\frac{\nu_l}{k_{rl}} + \frac{\nu_g}{k_{rg}} \right) \left(-\lambda_l(\rho u)_{m0} - \frac{1}{L_0} j \left[\int_{S_{ref}}^S Q(x(S')) \frac{\partial x}{\partial S'} dS' + q_0 \right] \right) - (\rho_l - \rho_g) \vec{g}} + \lambda_l \frac{\partial P_c}{\partial S} \quad (5.72b)$$

L'intégration sur S entre 0 et S_n tel que $0 \leq S_n \leq 1$ permet de calculer des relations $P_n(S_n)$. En combinaison avec le profil $x(S)$ on trouve ensuite le profil de la pression gazeuse $P(x)$ en zone diphasique.

Interfaces

Nous avons démontré, dans un cas général multidimensionnel avant l'équation 5.60a, qu'il n'y a pas de source ou de puits interfacial d'enthalpie lié à l'ébullition. Nous en concluons donc que le flux de chaleur entrant dans le domaine diphasique est égal à celui sortant du liquide, et que celui qui sort du diphasique est égal à celui entrant dans la zone gazeuse. Nous avons argumenté dans la section 5.3.3 que la totalité de la chaleur introduite par la source volumique est utilisée pour la transformation de liquide en gaz. Le flux de chaleur total (conduction et convection) à la sortie du liquide et celui à l'entrée du gaz diffèrent uniquement par la chaleur latente introduite par la source sur la longueur de la zone diphasique.

Calcul pour le cas test du domaine entier contenant des zones liquide/diphasique/gaz

Nous traitons le cas présenté sur la figure 45 complet analytiquement (température T_{in} et flux massique $(\rho u)_{m0}$ fixés au côté $x = 0$ et flux de chaleur q_0 et pression P_{out} fixés au côté $x = x_{max}$). Pour connaître les profils de température, de saturation et de pression, nous passons par les étapes suivantes :

- 1) Le flux de chaleur total évolue, indépendamment de la phase, selon l'équation

$$q_{tot}(x) = q_0 + Q \cdot (x - x_{max}) \quad (5.73)$$

Il est donc connu partout dès le départ.

- 2) Le profil de température en zone liquide est donné par l'équation 5.68 et l'interface liquide/diphasique $x_{d/l}$ par la condition $T(x_{d/l}) = T_{sat}$
- 3) Le profil de saturation $S(x)$ ainsi que la taille de la zone diphasique peuvent ensuite être trouvés en intégrant numériquement l'équation 5.71. La position de l'interface entre le

diphase et le gaz, $x_{d/g}$, est obtenue en rajoutant la taille de la zone diphasique à la position de l'interface liquide/diphase : $x_{d/g} = x_{l/d} + L_d$

- 4) Dans la zone gazeuse qui suit, le profil de température est de nouveau donné par l'équation 5.68 où l'on remplace principalement x par $(x - x_{d/g})$ et T_{in} par T_{sat} .
- 5) Le profil de pression est linéaire dans les zones monophasiques et peut être obtenu à partir de l'équation 5.72 dans la zone diphasique. Nous n'attacherons pas davantage d'importance à la pression dans la suite de ce travail puisqu'elle est uniquement une grandeur auxiliaire pour obtenir le profil de vitesses en 2D.

Plus de détails sur la réalisation d'un tel calcul sont donnés dans l'annexe H.

5.3.7. Validation numérique

Pour illustrer l'intérêt de l'usage de l'enthalpie volumique modifiée et l'influence des paramètres numériques, nous regardons le cas très simple pseudo-1D présenté sur la figure 45 implémenté dans le code éléments finis FlexPDE. Nous comparons les résultats avec ceux obtenus par calcul semi-analytique afin de valider la résolution.

La réalisation du cas se fait avec du cyclohexane parcourant une préforme vierge de fibres de carbone, et les paramètres de travail sont résumés dans le tableau 5.7. Toutes les propriétés des matériaux sont données dans l'annexe. Nous y faisons la simplification qu'elles sont indépendantes de la température et évaluées à température d'ébullition.

Paramètre de travail	Unité	Valeur
Q_0	W/m^3	25
q_0	kW/m^2	0.5
$(\rho\vec{u})_{m0}$	$mg/m^2/s$	1
T_{in}	K	$T_{sat} - 10$
L_{pref}	cm	20

TABLE 5.7.: Paramètres de travail pour le cas de validation numérique du solveur d'ébullition

Les résultats de la résolution 2D sous FlexPDE sont à comparer avec ceux obtenus par les formules semi-analytiques de la section 5.3.6 (voir annexe. I). Notamment nous nous intéressons aux profils de température et de saturation qui contiennent toute l'information de l'enthalpie :

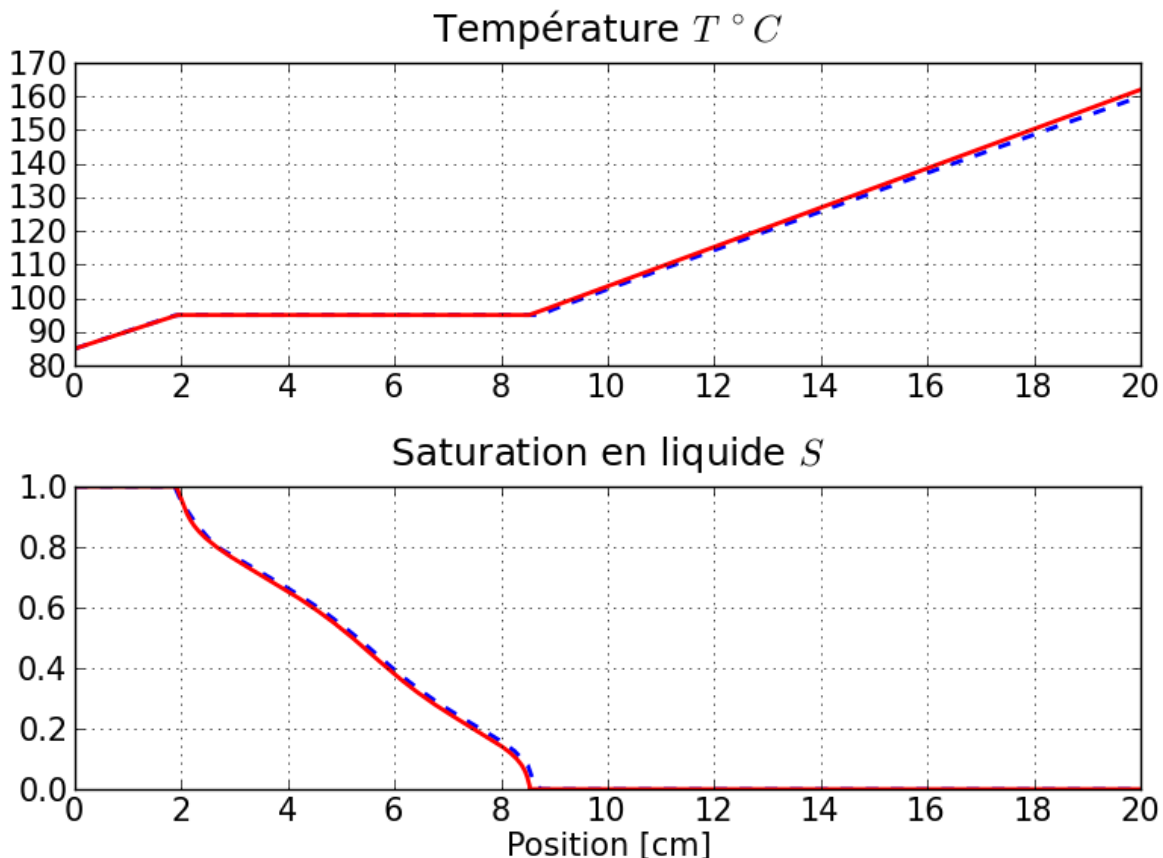


Fig. 46: Comparaison des résultats numérique (tireté bleu) et analytique (trait rouge) pour les profils de température et de saturation en liquide.

Nous constatons que les tailles des 3 zones liquide/diphasique/gaz sont équivalentes entre le numérique et l'analytique. Notamment la taille de la zone diphasique est de 7cm .

Nous remarquons également que dans certains cas une instabilité de la solution apparaît sous forme d'un saut de température à l'interface diphasique/gaz : Au lieu d'être égal à la température d'ébullition et de monter ensuite de manière linéaire, on constate un saut de la température à l'interface en question, et seulement ensuite le profil linéaire. Ce saut est lié à des sauts de gradient d'enthalpie interfaciaux et au changement de propriétés de fluide. Pour l'étude de la stabilité de la solution en fonction des paramètres numériques nous considérons également ce saut d'une amplitude nommée ΔT . Plus sa valeur est petite et plus la solution est bonne.

La température du gaz à la sortie est analytiquement de 435K et numériquement de 434K ce qui correspond à une erreur négligeable. Le profil de saturation possède analytiquement une pente presque infinie aux transitions avec le monophasique. Ceci étant très difficile à réaliser avec des méthodes numériques, le profil simulé est plus aplati à ces endroits ce qui élargit légèrement la taille de la zone diphasique. Or, dans le reste du domaine diphasique nous apercevons un profil identique entre la solution analytique et numérique.

Influence des paramètres numériques

Nous allons maintenant plus loin dans l'analyse du solveur numérique et étudions l'influence des paramètres numériques introduits dans la section 5.3.5. Nous résumons des choix de valeurs possibles dans le tableau 5.8 :

Paramètre	Signification	Gamme de valeurs
C_d	en zone liquide (C_d^l)	0, 100, 1000 cm^2/s
	Diffusivité thermique supplémentaire en zone gazeuse (C_d^g)	10, 100, 1000 cm^2/s
	en zone diphasique (C_d^d)	0.4, 0.04 cm^2/s
δ_{sat}	Paramètre caractéristique pour fixer la taille du diphasique en termes de $\rho_{gsat}h_{gsat} - \rho_l h_{lsat}$	1, 10, 30

TABLE 5.8.: Paramètres numériques du modèle d'ébullition et leurs gammes de valeurs tests

Nous réalisons des simulations avec différentes combinaisons de paramètres. Les simulations sont faites sous forme transitoire à partir d'un état purement liquide jusqu'au temps arbitraire de $5 \cdot 10^5 s$.

Les grandeurs d'intérêt pour la validation sont la taille de la zone diphasique l_2 , la température du gaz à la sortie de la préforme T_{max} , le saut de température à l'interface diphasique/gaz ΔT mentionné dans la partie de validation et le temps nécessité par la simulation t_{sim} .

C_d^l cm^2/s	C_d^g cm^2/s	C_d^d cm^2/s	δ_{sat} 1	l_2 cm	T_{max} K	ΔT K	t_{sim} min
Analytique				7	435	0	-
0	100	0.04	30	7	446	14	6.5
0	100	0.04	10	7	442	10	5
0	100	0.04	1	7	434	0	6.5
0	100	0.4	30	12	404	4	6
0	100	0.4	10	12	406	3	8.5
0	100	0.4	1	10	414	2	25
0	1000	0.04	10	7	436	6	5
0	10	0.04	10	7	438	6	5
100	100	0.04	10	7	440	8	6.5
1000	100	0.04	10	7	444	12	5.5

TABLE 5.9.: Influence des paramètres numériques du modèle d'ébullition sur la résolution du cas tests

Nous y constatons l'évolution suivante :

- Le saut ΔT à l'interface diphasique/gaz est plus petit pour $C_d^d = 0.4$ comparé à $C_d^d = 0.04$: une diffusivité du diphasique plus forte stabilise la résolution du bilan d'enthalpie.
- Néanmoins, la diffusivité artificielle du diphasique plus forte (C_d^d) augmente la taille de la zone diphasique et elle devient fautive. Ceci réduit également la zone sur laquelle le gaz est chauffé avant de sortir si bien que la température de sortie est plus basse.
- Une diminution de δ_{sat} provoque également diminution ce saut de température.
- Une variation de la diffusivité artificielle du gaz, en l'augmentant aussi bien qu'en la diminuant, semble légèrement diminuer le saut de température à l'interface diphasique/gaz et rapprocher de la même quantité la température de sortie à sa valeur analytique. Le fait que deux variations dans le sens opposé mènent au même résultats sont signe de l'instabilité globale du système. Néanmoins les variations correspondantes sont négligeables.

- Une augmentation de la conductivité thermique du liquide à travers d'une diffusion artificielle rend le système plus instable comme on le constate à travers du saut de température interfacial diphasique/gaz plus élevé et au temps de résolution légèrement plus élevé également.
- Les temps de résolution sont tous dans le même ordre de grandeur à l'exception des cas avec diffusivité élevée dans le diphasique où une réduction de δ_{sat} entraîne une augmentation du temps de calcul.
- La largeur de la zone liquide (pas marqué dans le tableau ci-dessus) est identique à $2mm$ dans tous les cas.

Le cas à retenir est celui $C_d^l = 0cm^2/s$, $C_d^g = 100cm^2/s$, $C_d^d = 0.04cm^2/s$, $\delta_{sat} = 1$.

Si cette combinaison est optimale pour le cas test, elle ne marche néanmoins pas pour la simulation du procédé par caléfaction : Nous sommes obligé de stabiliser davantage la zone diphasique et les risques de sauts de température à l'interface diphasique/gaz en choisissant $C_{d,d} = 0.08$. De plus, il y a un risque d'oscillations de la résolution en zone diphasique, ce qui nous oblige de choisir $\delta_{sat} = 30$ pour éviter des « changements d'équations » d'un noeud de calcul au prochain. Ceci met bien en évidence ce que nous avons mentionné au début de cette section : Chaque cas nécessite des études propres pour le stabiliser assez tout en minimisant les erreurs physiques.

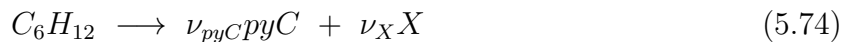
5.4. Dépôt et bilan d'espèces

Après avoir présenté les parties du modèle du procédé par caléfaction qui ont demandé un travail spécifique de mise au point, nous finissons avec la réaction chimique de dépôt et le transport d'espèces. Cette partie du modèle est reprise sans modification majeure des travaux présentées dans le chapitre 2.3.

5.4.1. La réaction chimique de craquage

Le taux de réaction

Le précurseur utilisé est du cyclohexane C_6H_{12} . Au-dessus d'une certaine température il donne lieu à un dépôt de pyrocarbone solide (pyC) et à la production de plusieurs sous-espèces gazeuses, que nous regrouperons en une pseudo-espèce X . La réaction chimique correspondante est



Un bilan stoechiométrique a été réalisé (Belorgey-Beaugrand, 2000) et il a mené à choisir les coefficients suivants :

$$\nu_{pyC} = 1.29 \quad \nu_X = 2.95 \quad X = C_{1.6}H_{4.07} \quad (5.75)$$

Beaugrand a déterminé expérimentalement (Belorgey-Beaugrand, 2000) la cinétique de cette réaction qui suit une loi d'Arrhénius :

$$k_{homo} = \sigma_v \cdot k_{hetero} = \sigma_v \cdot a_k \cdot T^{b_k} \cdot \exp\left(-\frac{E_a}{R_g T}\right) \quad (5.76a)$$

$$a_k = 8.0 \left[\frac{1}{s \cdot K^{b_k}} \right] \quad b_k = 2.02 [-] \quad E_a = 3.05 \cdot 10^5 \left[\frac{J}{mol} \right] \quad (5.76b)$$

où σ_v est la surface interne du poreux en m^2/m^3 (plus il y a de surface exposé au gaz et plus il peut y avoir de dépôt), k_{hetero} la constante cinétique hétérogène (en m/s), k_{homo} la constante cinétique homogène (en $1/s$), E_a l'énergie d'activation, R_g la constante des gaz parfaits et a_k et b_k des paramètres déterminés expérimentalement. Entre [...] nous avons donné les unités des paramètres.

Finalement on peut obtenir le taux de consommation de précurseur R_c (en $mol/m^3/s$) qui s'écrit sous la forme

$$R_c = -\nu_{react,C} k_{homo} C_{gC}^{n_C} \quad (5.77)$$

où C_{gC} est la concentration de cyclohexane en mol/m^3 , $\nu_{react,C}$ le nombre de molécules de cyclohexane consommé par réaction, et n_C est l'ordre de la réaction chimique.

L'équation chimique 5.74 indique qu'une seule molécule de cyclohexane est consommée par réaction ($\nu_{react,C} = 1$) et les publications (Arabike et al., 1981; Korun et al., 1979; Tsant, 1978; Fabuss et al., 1964) trouvent qu'il s'agit d'une réaction d'ordre 1 ($n_C = 1$). Ceci donne le taux de consommation suivant :

$$R_c = -\sigma_v \cdot a_k \cdot T^{b_k} \cdot \exp\left(-\frac{E_a}{R_g T}\right) \cdot C_{gC} \quad (5.78)$$

Variation de la porosité

A partir de ce taux de réaction et de l'équation chimique 5.74a), nous trouvons le nombre de moles de pyC produites par seconde égal à $\nu_{pyC} \cdot R_c$. Sachant que chaque mole de pyC déposée va occuper un volume solide Ω_s , nous obtenons la variation suivante de la porosité :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \nu_{pyC} \cdot \Omega_s \cdot R_c \quad (5.79)$$

Nous remarquons que le côté droit est négatif à cause du signe de R_c si bien qu'on a bien une porosité qui diminue au cours du temps.

5.4.2. Bilan d'espèces gazeuses

La réaction fait apparaître trois espèces chimiques : Le réactif cyclohexane (symbolisé par C), le pyrocarbone produit (symbolisés par pyC) et les espèces qui vont sortir de la cuve de réaction (symbolisés par X). L'espèce pyC est solide et nous supposons qu'elle se dépose directement après sa création si bien qu'elle n'est liée à aucun transport. Pour les deux autres espèces nous établissons un bilan de masse contenant un terme d'accumulation de concentration molaire C_{gC} (C_{gX}), un flux molaire \vec{J}_{gC}^t (\vec{J}_{gX}^t) ainsi qu'un taux de création (de consommation) R_c :

$$\frac{\partial (\varepsilon C_{gC})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{gC}^t = R_c \quad (5.80a)$$

$$\frac{\partial (\varepsilon C_{gX})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{gX}^t = -\nu_X \cdot R_c \quad (5.80b)$$

Dans un milieu poreux rempli d'un gaz on a généralement une superposition de différents flux composant le flux molaire :

- un flux visqueux (convection) qui est lié à la chute de pression du gaz total et qui est dû aux interactions entre particules et aux interactions particules/paroi.
- un flux de diffusion ordinaire dû à l'interaction entre les particules gazeuses différentes

- un flux de diffusion de Knudsen (voir chapitre 3.2) dû au contact des particules avec les murs des pores et qui est non-négligeable uniquement pour des gaz raréfiés.
- une diffusion de surface qui nécessite l'adsorption des molécules gazeuses par les parois internes des pores et qui est négligeable dans les applications traitées ici (Reuge, 2002)

Avant d'étudier plus en détail les expressions des flux, nous introduisons deux grandeurs complémentaires aux concentrations C_{gi} , les fractions molaires X_{gi} et les fractions massiques ω_{gi} de l'espèce gazeuse i :

$$C_{gi} = \frac{P_{gi}}{R_g T} \quad (5.81a)$$

$$X_{gi} = \frac{P_{gi}}{P_g} \quad (5.81b)$$

$$\omega_{gi} = \frac{M_{gi} P_{gi}}{M_g P_g} \quad M_g = X_{gC} M_{gC} + X_{gX} M_{gX} \quad (5.81c)$$

où P_{gi} est la pression partielle de l'espèce gazeuse i , P_g la pression totale du gaz et M_{gi} et M_g les masses molaires respectives.

Dans la partie bibliographique, chapitre 3.2, nous avons présenté deux modèles de flux d'espèces, le « Dusty Gas Model (DGM) » et le « Binary Friction Model (BFM) ». Nous rappelons les deux schémas représentant les différentes contributions au flux total pour les deux modèles :

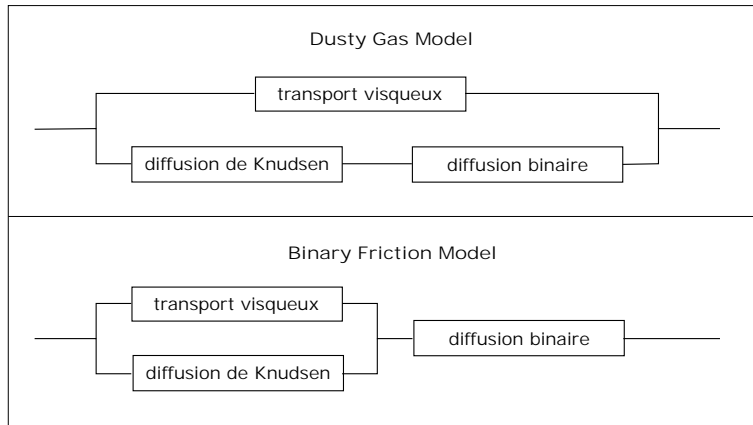


Fig. 47: Schéma de la contribution des différents types de flux au flux total d'une espèce pour le « Dusty Gas Model » (haut) et le « Binary Friction Model » (bas)

Les deux permettent la prise en compte du flux convectif darcéen en plus des flux diffusifs ordinaire et de Knudsen : Le DGM considère un bilan des flux diffusifs (incluant la diffusion ordinaire et la diffusion de Knudsen) et rajoute ensuite un flux convectif de type Darcy pour obtenir le flux d'espèces total. Le BFM par contre traite dès le début un bilan des flux d'espèces totaux et remplace l'apparition de la diffusivité de Knudsen dans le DGM par un coefficient de friction prenant en compte à la fois la diffusivité de Knudsen et un terme lié à la perméabilité du transport Darcéen. Dans la limite où la convection est négligeable par rapport à la diffusion, les deux modèles sont identiques. Également, ils sont identiques dans la limite d'un gaz pur.

Dans les études antérieures, le DGM a été retenu. Or, nous allons voir que ce modèle est en contradiction avec le modèle Darcéen utilisé pour l'ébullition dans les zones à grands pores. L'équation 3.19b) du DGM :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\vec{J}_i^D}{D_i^K} = -\frac{\vec{\nabla} P}{R_g T} \quad (5.82)$$

(D_i^K : diffusivité de Knudsen de l'espèce i , J_i^D : flux diffusif molaire de l'espèce i), entraîne que le gradient de la pression totale du gaz soit nul dans les régions où la diffusion de Knudsen est négligeable ($D_i^K \gg D_{xc}^{eff}$, avec D_{xc}^{eff} étant le coefficient de diffusion ordinaire entre les espèces X et C), donc notamment dans la préforme vierge :

$$\frac{1}{R_g T} \vec{\nabla} P = 0 \quad (5.83)$$

Cette condition persiste malgré avoir rajouté le flux convectif darcéen aux flux diffusifs du DGM pour obtenir les flux totaux. Un gradient de pression imposé égal à zéro conduit automatiquement à un flux darcéen nul. Ainsi, le DGM peut être utilisé uniquement dans les cas où la convection est négligeable vraiment partout par rapport à la diffusion.

Ce problème n'existe pas avec le BFM comme nous allons le voir dans la suite.

Les flux totaux de chaque espèce s'obtiennent de la même manière pour le BFM que ceux du DGM (équations 3.25) en remplaçant D_i^K par $1/f_{im}$ et en enlevant les flux convectifs à la fin des expressions 3.25, puisque le BFM est établi a priori pour les flux totaux :

$$\vec{J}_{gC}^t = - \frac{X_{gC} + D_{xc}^{eff} f_{gX}}{X_{gC} f_{gC} + D_{xc}^{eff} f_{gC} f_{gX} + X_{gX} f_{gX}} \frac{1}{R_g T} \vec{\nabla} P'_{gC} - \frac{X_{gC}}{X_{gC} f_{gC} + D_{xc}^{eff} f_{gC} f_{gX} + X_{gX} f_{gX}} \frac{1}{R_g T} \vec{\nabla} P'_{gX} \quad (5.84a)$$

$$\vec{J}_{gX}^t = - \frac{X_{gX}}{X_{gC} f_{gC} + D_{xc}^{eff} f_{gC} f_{gX} + X_{gX} f_{gX}} \frac{1}{R_g T} \vec{\nabla} P'_{gC} - \frac{X_{gX} + D_{xc}^{eff} f_{gC}}{X_{gC} f_{gC} + D_{xc}^{eff} f_{gC} f_{gX} + X_{gX} f_{gX}} \frac{1}{R_g T} \vec{\nabla} P'_{gX} \quad (5.84b)$$

$$\begin{aligned} f_{gC} &= \left[D_{gC}^K + \frac{K_0 k_{rg}}{\mu_{gC}} \cdot P_g \cdot (X_{gC} + X_{gX} \zeta_{CX}) \right]^{-1} \\ f_{gX} &= \left[D_{gX}^K + \frac{K_0 k_{rg}}{\mu_{gX}} \cdot P_g \cdot (X_{gC} \zeta_{XC} + X_{gX}) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (5.84c)$$

$$\zeta_{CX} = \frac{\left[1 + \left(\frac{M_{gX}}{M_{gC}} \right)^{1/8} \right]^2}{\left[8 \cdot \left(1 + \frac{M_{gC}}{M_{gX}} \right) \right]^{0.5}} \quad \zeta_{XC} = \frac{\left[1 + \left(\frac{M_{gC}}{M_{gX}} \right)^{1/8} \right]^2}{\left[8 \cdot \left(1 + \frac{M_{gX}}{M_{gC}} \right) \right]^{0.5}} \quad (5.84d)$$

Ici nous avons multiplié la perméabilité absolue K_0 par la perméabilité relative du gaz k_{rg} afin de pouvoir prendre en compte la partie en ébullition. De plus nous avons pris en compte l'effet de la gravité en remplaçant la chute de pression comme suit :

$$\vec{\nabla} P_i \longrightarrow \vec{\nabla} P'_i = \vec{\nabla} P_i - \rho_{gi} \vec{g} \quad (5.85a)$$

$$\vec{\nabla} P_g \longrightarrow \vec{\nabla} P'_g = \vec{\nabla} P'_{gC} + \vec{\nabla} P'_{gX} = \vec{\nabla} P_g - \rho_g \vec{g} \quad (5.85b)$$

En effet, la gravité était négligeable dans les études antérieures qui ont considéré du gaz partout. Dans notre modèle l'effet de la gravité devient importante pour deux raison :

- Dans la zone diphasique elle joue un rôle important dans le mouvement relatif du gaz par rapport au liquide.

- En ne considérant que la zone gazeuse, il ne faut tout de même pas oublier qu'il y a du liquide partout dans la cuve autour de la préforme. La différence de pression entre le haut et le bas de la cuve au procédé de caléfaction est alors de deux ordres de grandeur (ρ_l/ρ_g) supérieure à celle du procédé I-CVI. Puisque le liquide de la cuve entoure la préforme, une chute similaire de pression traverse celle-ci, et ceci même en zone purement gazeuse.

Nous rappelons que la viscosité d'un mélange de gaz est différente de celle de chacune des espèces même si la viscosité est la même pour chaque espèce (Wilke, 1950) :

$$\mu_m = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{X_i \mu_{gi}}{n}}{\sum_{j=1}^n X_j \zeta_{ij}} \quad (5.86)$$

Dans la suite, nous nous concentrons sur l'espèce X sachant que des réflexions similaires peuvent être faites pour l'espèce C . Les expressions de flux 5.84b) et 5.84c) peuvent être réécrites comme suit (en utilisant que $X_{gX}/R_g T = C_{gX}/P_g$) :

$$J_{gX}^t = \frac{C_{gX}}{P_g} \cdot \frac{\frac{1}{X_{gX} f_{gX}} \cdot \frac{1}{X_{gC} f_{gC}}}{\frac{1}{X_{gX} f_{gX}} + \frac{D_{xc}^{eff}}{X_{gX} X_{gC}} + \frac{1}{X_{gC} f_{gC}}} \cdot \left[\vec{\nabla} P'_g + D_{xc}^{eff} f_{gC} \frac{1}{X_{gX}} \vec{\nabla} P'_{gX} \right] \quad (5.87a)$$

$$\frac{1}{f_{gC}} = \left[D_{gC}^K \left(\frac{K_0 k_{rg}}{\mu_m} P_g \right)^{-1} + \frac{\mu_m}{\mu_{gC}} (X_{gC} + X_{gX} \zeta_{CX}) \right] \cdot \left(\frac{K_0 k_{rg}}{\mu_m} P_g \right) \quad (5.87b)$$

$$\frac{1}{f_{gX}} = \left[D_{gX}^K \left(\frac{K_0 k_{rg}}{\mu_m} P_g \right)^{-1} + \frac{\mu_m}{\mu_{gX}} (X_{gC} \zeta_{XC} + X_{gX}) \right] \cdot \left(\frac{K_0 k_{rg}}{\mu_m} P_g \right) \quad (5.87c)$$

Ainsi nous obtenons l'expression finale pour le flux molaire de l'espèce X :

$$\begin{aligned} \vec{J}_{gX}^t &= C_{gX} \cdot \left[-K_0 k_{rg} k_{bK} \cdot \frac{1}{\mu_m} \vec{\nabla} P'_g - D_{xc}^{eff} \frac{k_{bK}}{X_{gC} \cdot (\tilde{D}_{gC}^K + \tilde{\mu}_{gC})} \frac{1}{P_{gX}} \vec{\nabla} P'_{gX} \right] \\ &= C_{gX} \cdot \left[k_{bK} \vec{v}_g^{conv} + \vec{v}_{gX}^{diff} \right] \end{aligned} \quad (5.88)$$

où nous avons utilisé la définition 5.38 pour la vitesse du gaz total.

Ici k_{bK} est une sorte de perméabilité relative faisant intervenir le transport ordinaire d'un gaz à deux espèces et l'effet de Knudsen :

$$k_{bK} = \frac{\left(\tilde{D}_{gX}^K + \tilde{\mu}_{gX} \right) \cdot \left(\tilde{D}_{gC}^K + \tilde{\mu}_{gC} \right)}{\left(\tilde{D}_{gX}^K + \tilde{\mu}_{gX} \right) + \tilde{D}_{xc}^{eff} + \left(\tilde{D}_{gC}^K + \tilde{\mu}_{gC} \right)} \quad (5.89a)$$

$$\frac{1}{f_{gi}} = X_{gi} \cdot \left[\tilde{D}_{gi}^K + \tilde{\mu}_{gi} \right] \cdot \left(\frac{K_0 k_{rg}}{\mu_m} P_g \right) \quad (5.89b)$$

$$\tilde{D}_{gX}^K = D_{gX}^K \cdot \left(\frac{K_0 k_{rg}}{\mu_m} P \right)^{-1} \cdot \frac{1}{X_{gX}} \quad \tilde{D}_{gC}^K = D_{gC}^K \cdot \left(\frac{K_0 k_{rg}}{\mu_m} P \right)^{-1} \cdot \frac{1}{X_{gC}} \quad (5.89c)$$

$$\tilde{D}_{xc} = D_{xc}^{eff} \cdot \left(\frac{K_0 k_{rg} P}{\mu_m} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{X_{gX} \cdot X_{gC}} \quad (5.89d)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{gX} &= \frac{\mu_m}{\mu_{gX}} \cdot \left(1 + \frac{X_{gC} \zeta_{XC}}{X_{gX}} \right) & \tilde{\mu}_{gC} &= \frac{\mu_m}{\mu_{gC}} \cdot \left(1 + \frac{X_{gX} \zeta_{CX}}{X_{gC}} \right) \\ \frac{1}{\tilde{\mu}_{gX}} + \frac{1}{\tilde{\mu}_{gC}} &= 1 \end{aligned} \quad (5.89e)$$

$$\mu_m = \frac{X_{gC} \mu_{gC}}{X_{gC} + X_{gX} \zeta_{CX}} + \frac{X_{gX} \mu_{gX}}{X_{gX} + X_{gC} \zeta_{XC}} \quad (5.89f)$$

Nous avons ainsi décomposé le flux en une partie convective et une partie diffusive. La partie diffusive possède sa forme habituelle, à savoir une diffusivité multipliée par le gradient de la pression partielle de l'espèce. La diffusivité contient maintenant également un terme lié au BFM. La partie convective possède la structure darcéenne, à savoir une perméabilité divisée par la viscosité du fluide et multipliée par un gradient de pression. La perméabilité est maintenant composée de trois facteurs : K_0 lié au milieu poreux, k_{rg} qui joue un rôle dans le diphasique et qui vaut strictement 1 dans la zone purement gazeuse, et finalement et nouveau terme adimensionnel k_{bk} lié au mélange des espèces. Dans ce dernier facteur nous trouvons 3 grandeurs adimensionnelles caractéristiques :

→ \tilde{D}_{gX}^K est une mesure de l'influence de la diffusion de Knudsen par rapport au flux darcéen dans la partie convective : Dans les zones avec des pores larges, nous avons $P_g K_0 k_{rg} / \mu_g \gg D_{gC}^K$ et donc $\tilde{D}_{gC}^K \ll 1$, alors que dans les régions à petits pores avec une diffusivité de Knudsen importante, nous avons $\tilde{D}_{gC}^K \gg 1$.

On peut poser que \tilde{D}_{gX}^K est le quotient d'un nombre de Knudsen et d'un nombre de Péclet. En supposant que toutes les masses molaires sont identiques et les tortuosités négligeables, nous obtenons par exemple

$$\tilde{D}_{gx}^K = \tilde{D}_{gC} \frac{X_{gX}}{X_{gC}} = \frac{1}{Pe_c \cdot Kn} \cdot \frac{1}{X_{gX}} \quad (5.90a)$$

et

$$\frac{D_{gX}^K}{D_{xc}} = \frac{D_{gC}^K}{D_{xc}} = \frac{1}{Kn} \quad (5.90b)$$

avec

$$Pe_c = \frac{K_0 k_{rg} P}{\mu_m} \cdot \frac{1}{D_{xc}} \quad (5.90c)$$

→ Les $\tilde{\mu}_{gi}$ représentent la modification de la viscosité d'un mélange par rapport à un gaz mono-espèce. Elles valent strictement 1 dans le cas mono-espèce et varient avec la concentration sinon. Néanmoins une étude avec nos deux espèces a montré que la variation ne dépasse pas les 5%.

→ Le rapport entre le flux diffusif et le flux visqueux est donné par $\|\vec{v}_{gX}^{diff}\| / \|\vec{v}^{conv}\| = [\tilde{D}_{xc} / (\tilde{D}_{gC}^K + \tilde{\mu}_{gC})] \cdot [\|\vec{\nabla} P'_g\| / \|\vec{\nabla} P'_{gX}\|]$. Pour le cas du procédé de densification par caléfaction, la chute de pression partielle d'une espèce est généralement bien supérieure à celle du gaz complet, ce qui favorise la diffusion au détriment à la convection.

Nous revenons maintenant sur le conflit mentionné auparavant, à savoir que le DGM mène dans les grands pores ($D_i^K \gg D_{xc}^{eff}$) automatiquement à une chute de pression totale du gaz égale à zéro et ainsi à une absence de mouvement massique total. Cette contrainte est levée

pour le BFM :

En effet, la condition similaire à l'équation 5.82 pour le DGM est l'équation 3.24b) pour le BFM :

$$\sum_{i=1}^n f_{im} \vec{J}_i = -\varepsilon \frac{\vec{\nabla} P}{R_g T} \quad (5.91)$$

Pour les grands pores, nous n'obtenons pas de nullité du côté gauche de l'équation, mais, comme nous l'avons vu ci-dessus, $1/f_{im} \rightarrow X_{gi} \tilde{\mu}_{gi} (K_0 k_{rg} / \mu_m \cdot P_g)$ et ainsi

$$\left[\frac{J_{gC}^t}{X_{gC} \tilde{\mu}_{gC}} + \frac{J_{gX}^t}{X_{gX} \tilde{\mu}_{gX}} \right] \left(\frac{K_0 k_{rg}}{\mu_m} \cdot P_g \right)^{-1} = -\varepsilon \frac{\vec{\nabla} P}{R_g T} \quad (5.92)$$

soit une « loi de Darcy multi-espèces ».

5.4.3. Résumé des formules liées à la réaction chimique du dépôt

En plus des diverses définitions, l'évolution des espèces chimiques est représentable par un système différentiel à résoudre comprenant deux équations indépendantes.

La première donne l'évolution de la porosité :

$$\boxed{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \nu_{pyC} \cdot \Omega_s \cdot R_c} \quad (5.93)$$

Pour les espèces gazeuses nous ne traitons qu'une seule espèce. Pour le choix de l'espèce il faut prendre en compte qu'il y a une différence entre les deux bilans d'espèces, qui est liée au terme source : L'espèce X ne possède qu'une source liée à la réaction de craquage et, une fois créée, cette espèce persiste toujours en régime gazeux. Le cyclohexane gazeux par contre a un puits lié au même craquage, mais aussi un terme source lié à l'ébullition. Ce dernier est intrinsèque à l'étude d'ébullition et il est donc connu ; mais, afin de simplifier le modèle, nous retenons le bilan de l'espèce X :

$$\boxed{\frac{\partial (\varepsilon C_{gX})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[C_{gX} \cdot \left(\frac{k_{bK}}{\rho_g} \rho_g \vec{u}_g - \frac{D_{xc}^{eff} k_{bK}}{X_{gC} \cdot (\tilde{D}_{gC}^K + \tilde{\mu}_{gC})} \frac{1}{P_{gX}} \vec{\nabla} P'_{gX} \right) \right]} = -\nu_X \cdot R_c} \quad (5.94)$$

avec les définitions 5.89. L'équation possède un terme d'accumulation, un terme convectif et un terme diffusif qui prennent en compte l'effet de Knudsen, ainsi qu'un terme source lié au dépôt.

La présence de la réaction de dépôt vient également altérer l'équation de bilan de masse de fluide total, eqn 5.37. En effet il apparaît maintenant un terme de puits de masse lié au dépôt. En additionnant les équations 5.80 pondérées par leurs masses molaires, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \rho_m) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{u}_m) = (M_{gC} - \nu_x M_{gx}) \cdot R_c} \quad (5.95)$$

5.5. Résumé, grandeurs caractéristiques et découplage

Dans les sections précédentes nous avons approfondi les modèles intervenant dans la description du procédé. Nous allons maintenant dans ce dernier chapitre reprendre le diagramme 18 résumant tous ces modèles et leurs interactions. Ensuite nous donnons quelques

grandeurs caractéristiques qui permettent d'évaluer les compétitions et les couplages, pour en déduire une stratégie générale de résolution.

Les 4 domaines physiques intervenant dans le procédé de densification sont l'électromagnétisme pour fournir le chauffage, la thermique, l'ébullition et l'ensemble diffusion - réaction - densification. Ils sont organisés sur la figure 48. La diffusion et la réaction de dépôt sont le coeur du procédé et se font uniquement en zone gazeuse dans le disque. Le modèle correspondant a été intensivement étudié dans le passé et il a été repris sans modification majeure dans notre cas, mis à part le remplacement du DGM par le BFM. L'électromagnétisme fournit la source de chaleur pour la thermique. La conductivité électrique dépend de la densification locale du disque - ce que nous avons pris en compte - et en principe aussi de la température - ce que nous avons négligé. La dépendance de la conductivité à la densité du matériau n'avait pas d'importance dans la plupart des travaux antérieurs où l'on chauffait via un suscepteur. Une première introduction du chauffage inductif directement sur le disque a été réalisée par Leutard (Leutard et al., 2001) mais sans aller dans le détail concernant l'étude des propriétés globales au niveau du procédé et la recherche de fréquence de résonance. Ceci a été rajouté dans cette thèse. Quant à la thermique, nous disposons maintenant d'un modèle incluant l'ébullition qui se simplifie en celui utilisé dans les études précédentes pour les cas où l'on n'a que du gaz. La thermique et l'ébullition sont donc traitées ensemble par un seul modèle. Il est à noter que l'ébullition introduit également la convection dans les modes de transport de masse/chaleur en plus de la diffusion/conduction, notamment dans la zone diphasique, mais pas seulement.

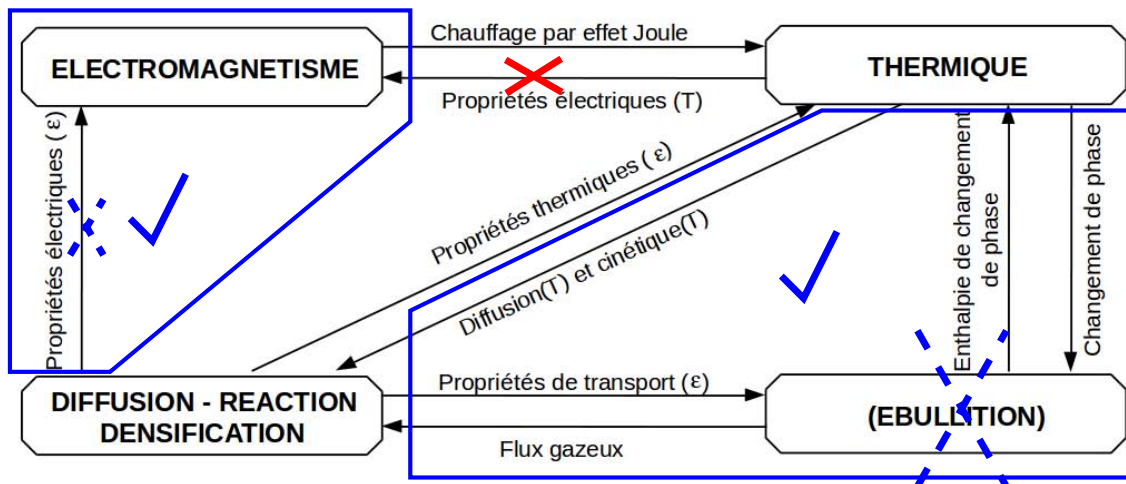


Fig. 48: (Reprise de la figure 18) Schéma des phénomènes physiques et de leurs interactions qui apparaissent dans le modèle de densification par caléfaction. La lettre ε désigne la porosité. Ce schéma est présenté dans (Lines, 2003). Nous avons barré les parties qui ne sont pas incluses dans les modèles antérieurs de cette thèse.

Il serait trop coûteux en temps de calcul de résoudre tous ces modèles en couplage fort : Nous devons réfléchir aux découplages possibles entre les équations ainsi qu'à d'éventuelles simplifications des équations.

Notons que l'électromagnétisme demande un maillage très fin dans les spires de l'inducteur, alors que la thermique, l'ébullition et le dépôt n'y sont pas d'intérêt. Il en va de même pour une zone auxiliaire s'étendant loin du domaine qui est nécessaire pour un calcul en électromagnétisme, mais sans aucun intérêt pour les autres domaines d'études. Le découplage le plus avantageux est donc clairement celui de l'électromagnétisme des autres

phénomènes. De plus, celui-ci se justifie naturellement par les temps caractéristiques : comparé aux autres, l'électromagnétisme est un phénomène instantané. Dès que l'on applique une tension au générateur il faut une fraction de seconde avant que chaque petit volume dans les spires et dans la charge soit parcouru par le courant stable d'équilibre. Ceci est en fort contraste avec les autres phénomènes dont les temps caractéristiques sont dans la dizaine de secondes voire même plusieurs minutes pour le dépôt comme nous allons le montrer ci-dessous. Ainsi, nous pouvons considérer que lors d'une période de temps de traitement de la thermique, de l'ébullition et le dépôt, le chauffage volumique est établi et stable dès le début et reste constant pendant tout le temps. Ce calcul d'électromagnétisme doit être mis à jour au moment où la densification a suffisamment avancé pour que le changement de conductivité électrique associé fasse varier les résultats électromagnétiques (fréquence de résonance, distribution de courants, distribution de la densité de chauffage) de manière appréciable.

Pour donner plus d'informations sur les autres phénomènes, notamment l'importance de termes convectifs, les temps caractéristiques et les longueurs caractéristiques, nous regardons un état typique d'avancement de densification, illustré sur la figure 49 :

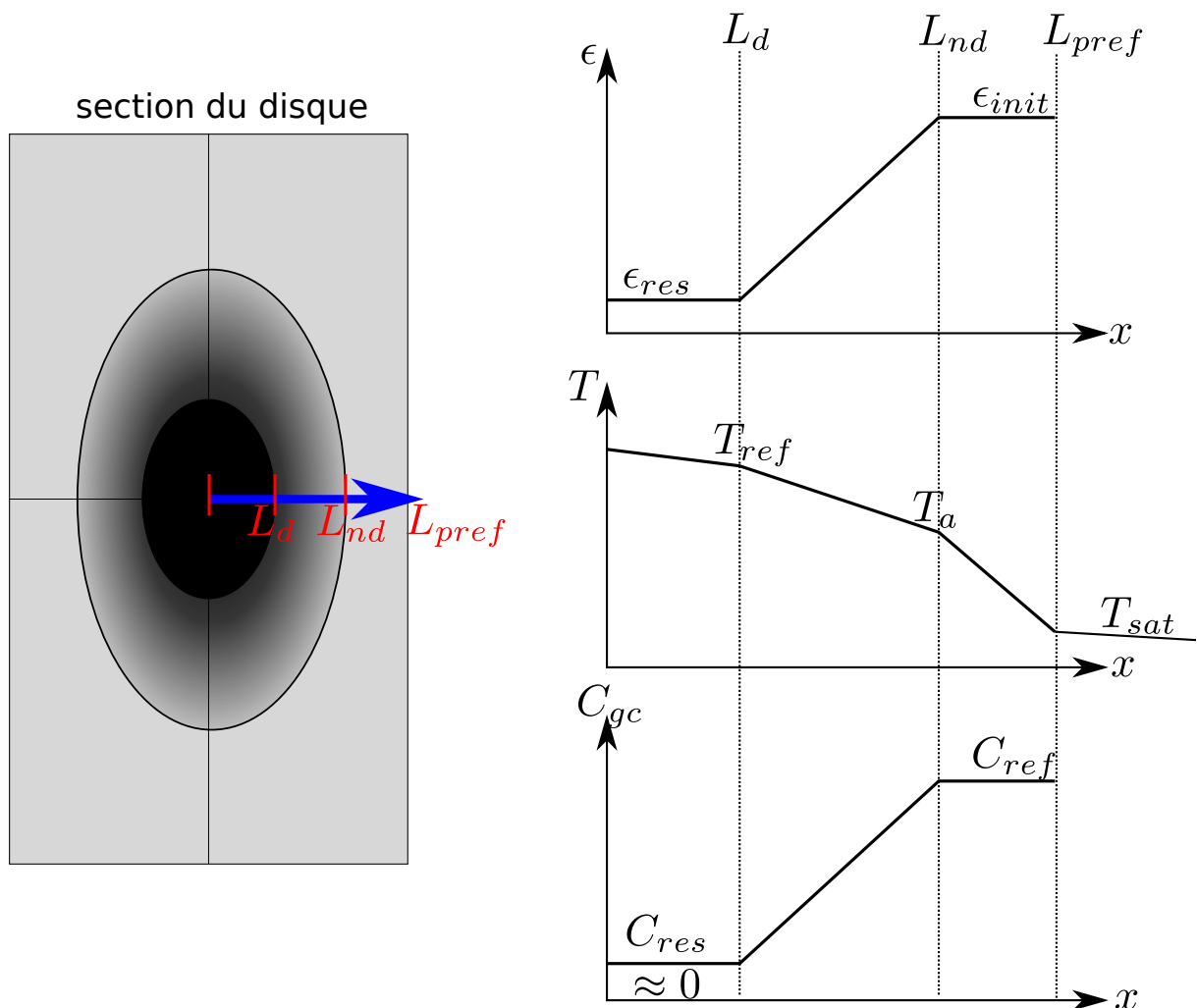


Fig. 49: A gauche : représentation d'une section de disque lors de la densification, avec une zone dense, une zone en densification, et une zone en état vierge ; A droite : Profils de porosité, température et concentration en réactif schématisés. L'ébullition se restreint à une petite zone au bord du disque et à son extérieur. Les points de prise de valeurs caractéristiques pour l'analyse dimensionnelle y sont également marqués.

L'introduction de valeurs de référence permet ensuite de réaliser une analyse dimensionnelle du système (voir l'annexe J, p. LXXVIII). Tout d'abord nous introduisons une longueur caractéristique l_{ref} et un temps caractéristique t_{ref} permettant d'adimensionner les opérateurs de dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{1}{t_{ref}} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \quad (5.96a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \longrightarrow \frac{1}{l_{ref}} \vec{\nabla} \cdot \quad (5.96b)$$

De même nous exprimons toutes les variables d'état à partir de leurs valeurs de référence :

$$X \rightarrow X_{ref} \cdot \tilde{X} \quad (5.97)$$

quel que soit X . Ainsi toutes les grandeurs avec un tilde (adimensionnées) sont de l'ordre de 1.

Ensuite les termes des équations sont réorganisés afin de permettre d'introduire des rapports typiques sous forme de nombres adimensionnels. Une analyse de ces rapports permettra ensuite de faire ressortir les termes prépondérants. Comme terme de référence nous avons choisi : Pour l'équation de diffusion d'espèces le terme diffusif, pour l'équation de conservation de masse le terme source lié au dépôt et pour l'équation de chaleur le terme diffusif. Les équations résultantes de bilan de masse, mouvement, chaleur et espèces se présentent alors sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tilde{t}} = \tilde{R}_c \quad (5.98a)$$

$$\frac{\tau_{gX}}{t_{ref}} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\varepsilon \tilde{C}_{gX}) + \vec{\nabla} \cdot \left[\tilde{C}_{gX} \tilde{D}_{xc}^{K\mu} \left(Pe_m \tilde{u}_m - \frac{1}{\tilde{P}_g} \vec{\nabla} \tilde{P}'_{gX} \right) \right] = -\nu_X \Phi_0^2 \tilde{R}_c \quad (5.98b)$$

$$\frac{\tau_m}{t_{ref}} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\varepsilon \tilde{\rho}_m) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{u_0}{u_{react}} (\rho \tilde{u})_m \right) = \tilde{R}_c \quad (5.98c)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_{ph}}{t_{ref}} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left\{ \Omega (\rho \tilde{h}')_m + (\rho \tilde{h}')_{t,supp} \right\} + \vec{\nabla} \cdot \left\{ \tilde{\alpha}_{ph} \left[Pe_{th} \cdot \tilde{u}_m \cdot \left((\rho \tilde{h}')_m \tilde{\gamma}_{ph} + \tilde{h}_{gsupp} \right) - \vec{\nabla} (\rho \tilde{h}')_m - \delta_d \cdot \vec{j}_{ph}^d \right] \right\} \\ & = \tilde{Q} \end{aligned} \quad (5.98d)$$

où Pe_m , Pe_{th} et u_0 sont des tenseurs diagonaux avec des valeurs différentes en direction x et y .

Les valeurs de référence de base marquées sur la figure 49 sont données dans le tableau 5.10, quelques grandeurs typiques du modèle du procédé par caléfaction dans le tableau 5.11 et les nombres adimensionnels qui apparaissent dans les équations sont évalués dans le tableau 5.12 :

Variable	Description	Unité	Valeur
T_{ref}	Température de référence, côté chaud	K	1273
ρh_{ref}	Enthalpie volumique de référence	J/cm^3	7.3
T_a	Température d'allumage de la réaction chimique	K	1073
P_{ref}	Pression de travail dans la cuve	Pa	$1.5e + 5$
$X_{c,ref}$	Fraction molaire de cyclohexane du gaz sortant de l'ébullition	%	95
ε_{ref}	Porosité de la préforme	%	77
P_{heat}	Puissance de chauffage réglée à l'armoire	kW	41
η_{emag}	Rendement électromagnétique (mesuré)	%	49
p_d	Valeur test pour le pourcentage de la longueur de disque densifié	%	10
$(\rho h')_{ref}$	Enthalpie volumique du gaz au point chaud	W/cm^3	7.3
$C_{gX,ref}$	Concentration molaire de l'espèce X	mol/l^3	0.7

TABLE 5.10.: Valeurs de références pour l'étude du procédé, schématisées sur fig. 49.

l_{ref}	Longueur de référence, estimation de la taille de la zone en densification	cm	0.9
Variable	Description	Unité	Valeur
$t_{ref} = \tau_\varepsilon$	Temps caractéristique de densification	s	4490
τ_{gx}	Temps caractéristique pour la diffusion de l'espèce X	s	0.1
τ_m	Temps caractéristique pour le transport de masse visqueux	s	3.4
$\tau_{\rho h}$	Temps caractéristique de le thermique dans le gaz	s	0.3
$u_{react} = u_{0,x}$	Vitesse caractéristique du gaz liée à la réaction de dépôt (référence en direction x)	cm/s	0.04
$u_g = u_{0,y}$	Vitesse caractéristique du gaz liée au gradient de pression imposé (référence en direction y)	cm/s	1.6
Re_x	Reynolds : Rapport des forces inertielles et visqueuses	—	0.2
Re_y	Reynolds : Rapport des forces inertielles et visqueuses	—	8.1
$\tilde{R}_c(T_a)$	Consommation au point froid « d'allumage » par rapport au point chaud de référence	%	0.3

TABLE 5.11.: Quelques grandeurs caractéristiques des modèles.

Par rapport aux grandeurs caractéristiques du tableau 5.11, nous faisons les remarques suivantes :

- La largeur du front, correspondant à la longueur de référence, s'étale sur presque toute la largeur du disque de $1.75cm$.
- Le temps le plus long est celui lié au dépôt valant plus d'une heure. Puisque c'est également le dépôt qui est au centre de notre intérêt, le temps de référence a été choisi identique à celui-ci. Les autres temps caractéristiques sont de l'ordre de la seconde.
- Concernant les vitesses, nous avons deux sources : La première étant l'effet de la gravité et la deuxième la consommation liée au dépôt. En direction horizontale x la gravité n'influe pas et la vitesse estimée (de référence) correspond à $u_{react} = 0.07cm/s$. En direction verticale par contre la gravité peut conduire à des vitesses 20 fois plus élevées

ce qui emporte sur la vitesse de réaction et conduit à la vitesse de référence de $u_g = 1.6\text{cm/s}$.

C'est pour cette raison que tous les nombres adimensionnels qui apparaissent dans les équations en rapport avec la convection ont des valeurs différentes selon x et y (tenseurs).

- Le nombre de Reynolds faible selon x permet de valider que nous nous retrouvons bien dans le régime de validité du modèle de Darcy. Néanmoins sa valeur d'environ 10 en direction y met en perspectives de rajouter la correction de Forchheimer au modèle de vitesses actuel de Darcy. Cette perspective va de nouveau être relativisée lorsque nous prenons en compte les couches isolantes, actuellement négligées, au rayon intérieur et extérieur du disque puisqu'ils sont peu perméables et réduisent ainsi les vitesses en sens y .
- Le choix de la température d'allumage T_a à 200°C inférieurs à la température de référence au point chaud mène à une réduction du taux de dépôt de 99.7%. Ceci montre la forte décroissance du taux de dépôt avec la température.
- La longueur de référence ainsi que les vitesses de référence dans les deux sens sont vérifiées par la simulation 2D pendant les premières itérations.

Concernant les différents termes des équations nous pouvons donc établir le tableau suivant et classer les influences des différents phénomènes :

Variable	Description	Valeur
τ_{gX}/t_{ref}	Coefficient du terme transitoire de la diffusion	$2.6 \cdot 10^{-5}$
$Pe_{m,x}$	Péclet massique : Rapport des flux massiques convectif et diffusif, direction x	0.0045
$Pe_{m,y}$	Péclet massique : Rapport des flux massiques convectif et diffusif, direction y	0.22
Φ_0^2	Module de Thiele : Rapport du taux de densification et de la diffusion	0.04
Kn	Knudsen : Rapport entre le libre parcours moyen lié à la diffusion ordinaire et à la diffusion de Knudsen	0.004
τ_m/t_{ref}	Coefficient du terme transitoire de la conservation de masse	$8 \cdot 10^{-4}$
τ_{ph}/t_{ref}	Coefficient du terme transitoire de la thermique	$6 \cdot 10^{-5}$
$Pe_{th,x}$	Péclet thermique : Rapport entre le flux de chaleur convectif et diffusif, direction x	0.02
$Pe_{th,y}$	Péclet thermique : Rapport entre le flux de chaleur convectif et diffusif, direction y	0.43

TABLE 5.12.: Nombres sans dimensions caractérisant les modèles.

L'impact des différents termes des équations se résume alors comme suivant

→ L'équation de dépôt :

Elle ne contient qu'un terme transitoire et un terme de source qui sont tous les deux de l'ordre de l'unité. Les deux termes sont donc non-négligeables.

→ L'équation de diffusion :

Le terme de référence choisi était la partie diffusive qui apparaît donc avec un coefficient de l'unité.

Par rapport à la diffusion le terme transitoire (coefficient τ_{gX}/t_{ref}) est négligeable.

De même le terme source lié au dépôt, caractérisé par le module de Thiele Φ_0^2 , est d'un ordre de grandeur inférieur à la diffusion. Ceci permet également de vérifier que nous nous trouvons dans les bonnes conditions de travail où la diffusion permet de bien approvisionner la réaction.

Néanmoins la convection n'est pas négligeable en direction y , le nombre de Péclet massique étant un quart. Nous remarquons qu'en direction x , la vitesse de référence est 20 fois plus faible, ce qui donne la même tendance au nombre de Péclet correspondant (en oubliant l'anisotropie des diffusivités), et rend la convection négligeable dans cette direction.

→ L'équation de conservation de masse

Nous avons choisi la référence dans le terme source.

Le terme transitoire (coefficient τ_m/t_{ref}) est 3 ordres de grandeurs inférieur et donc négligeable.

Dans la direction x , le terme convectif (caractérisé par $u_{0,x}/$) est du même ordre de grandeur que le terme source. Dans le sens y ($Pe_{m,y}$) le terme convectif est deux ordres de grandeurs supérieur au terme source ($u_0/u_{react} = 229$) si bien que le dépôt n'a pas d'influence sur l'écoulement dans ce sens. Ceci est bien évidemment à distinguer du fait qu'un disque partiellement infiltré va réduire la perméabilité du milieu en direction y également et donc influencer l'écoulement dans les deux sens.

→ Par rapport à la thermique les interprétations sont similaires que pour la diffusion : Le terme de référence choisi était la partie diffusive de chaleur.

Par rapport à la diffusion le terme transitoire (coefficient τ_{ph}/t_{ref}) est négligeable.

Le terme source adimensionnel possède un coefficient de 1 et n'est donc pas négligeable. Néanmoins la convection est négligeable en direction x mais pas en direction y .

5.6. Traitement du couplage, structure de la simulation entière

Nous avons démontré dans la section précédente que l'on peut séparer le modèle en deux grands modules : une partie de transport/thermique/dépôt et une partie électromagnétique qui devient importante uniquement après un certain temps d'évolution de la première partie. A l'intérieur du module de transport/thermique/dépôt, uniquement la densification et la thermique doivent être traitées de manière transitoire- les autres phénomènes étant assez rapides pour être considérés comme quasi-stationnaires.

La suite de cette section est alors consacrée à la question de savoir comment enchaîner ces calculs, à partir de la préforme vierge jusqu'au disque entièrement dense.

Pour simuler un cycle de densification entier, nous avons donc besoin d'un code superviseur qui enchaîne les deux modules physico-chimiques (électromagnétisme et transport/thermique/dépôt) de manière alternative.

Ce code superviseur fait également intervenir le rôle du pilotage du procédé que nous avons mentionné au début du chapitre de l'électromagnétisme, 5.1. Nous allons montrer dans le chapitre 6.3 qu'il faut constamment adapter la puissance électrique du chauffage pour maintenir la densification en route. Une personne qui pilote le procédé de densification a essentiellement deux tâches à effectuer :

- 1) Suivre une observable représentant l'avancement de la densification et à laquelle on demande une certaine variation au cours du temps.

L'observable en question pourrait être la fréquence de résonance du système renvoyée

par le générateur et le développement souhaité une augmentation linéaire en temps avec une pente donnée avec une marche d'erreur.

A la place de cet exemple, d'autres buts peuvent être fixés.

- 2) Adapter un paramètre de régulation sur laquelle le technicien a le contrôle. Ceci se fait dans le but de satisfaire le premier point ci-dessus.

Le paramètre de contrôle dans le réacteur de MBD est la puissance du générateur. Une loi d'adaptation pourrait être d'augmenter la puissance de 10% si la variation temporelle de la fréquence est inférieure à sa limite inférieure, et de diminuer la puissance de 10% si la fréquence est supérieure à sa limite supérieure.

De nouveau on peut s'imaginer d'autres lois d'adaptation et d'autres paramètres de contrôle. Dans le modèle électromagnétique présenté au chapitre 5.1 le paramètre de contrôle est la tension (voir eqn. 5.13).

Nous rappelons que le but de cette section est uniquement de développer un code de simulation qui permet de réaliser une densification entière comme le fait une personne qui se trouve en face de l'expérience. Cette démarche est à distinguer d'une optimisation du procédé où les questions centrales sont par exemple « Comment piloter afin d'avoir une vitesse de front maximale ? » (la vitesse de front n'est pas une observable) ou bien « Y a-t-il des compromis à faire entre une densification rapide et une consommation énergétique plus faible ? ». La réalisation d'un code d'optimisation du procédé suit une démarche plus complexe que celle que nous développons dans cette section.

Nous résumons les principaux ingrédients d'un code qui réalise un cycle de densification complet :

- i) Les éléments pour le pilotage fournis a priori, notamment
 - 1) Une loi cible à satisfaire, liée à la variation temporelle d'une observable
 - 2) Une loi d'adaptation liée au changement d'un paramètre de contrôle si la loi cible n'est plus satisfaite.
- ii) Deux modules physico-chimiques qui s'occupent du coeur de l'avancement du procédé :
 - 1) Un module sur l'électromagnétisme. Il se base sur un profil de porosité dans le disque et une tension actuelle, et il fournit un profil de chauffage volumique dans le disque. Ce module doit être appelé chaque fois que la porosité change « de manière appréciable ».
 - 2) Un module sur le dépôt, la thermique, les flux massiques et la diffusion d'espèces gazeuses. Il se base sur un profil de porosité « initial » et une puissance de chauffage, et il fournit un profil de porosité à un temps de densification plus avancé. Ce module doit être arrêté quand la porosité a changé « de manière appréciable » afin de pouvoir reprendre un calcul d'électromagnétisme, et il doit être redémarré après.
- iii) Un code superviseur qui réunit tous les ingrédients, s'occupe de l'initialisation, veille sur les lois de pilotage et s'arrête quand la densification est finie.

En plus des ingrédients majeurs, nous avons besoin de connaître les propriétés des matériaux (du disque à divers états de densification, du précurseur liquide et gazeux, des paramètres liés à la réaction de densification) et de la géométrie.

L'ensemble de ces informations conduit au schéma 50 :

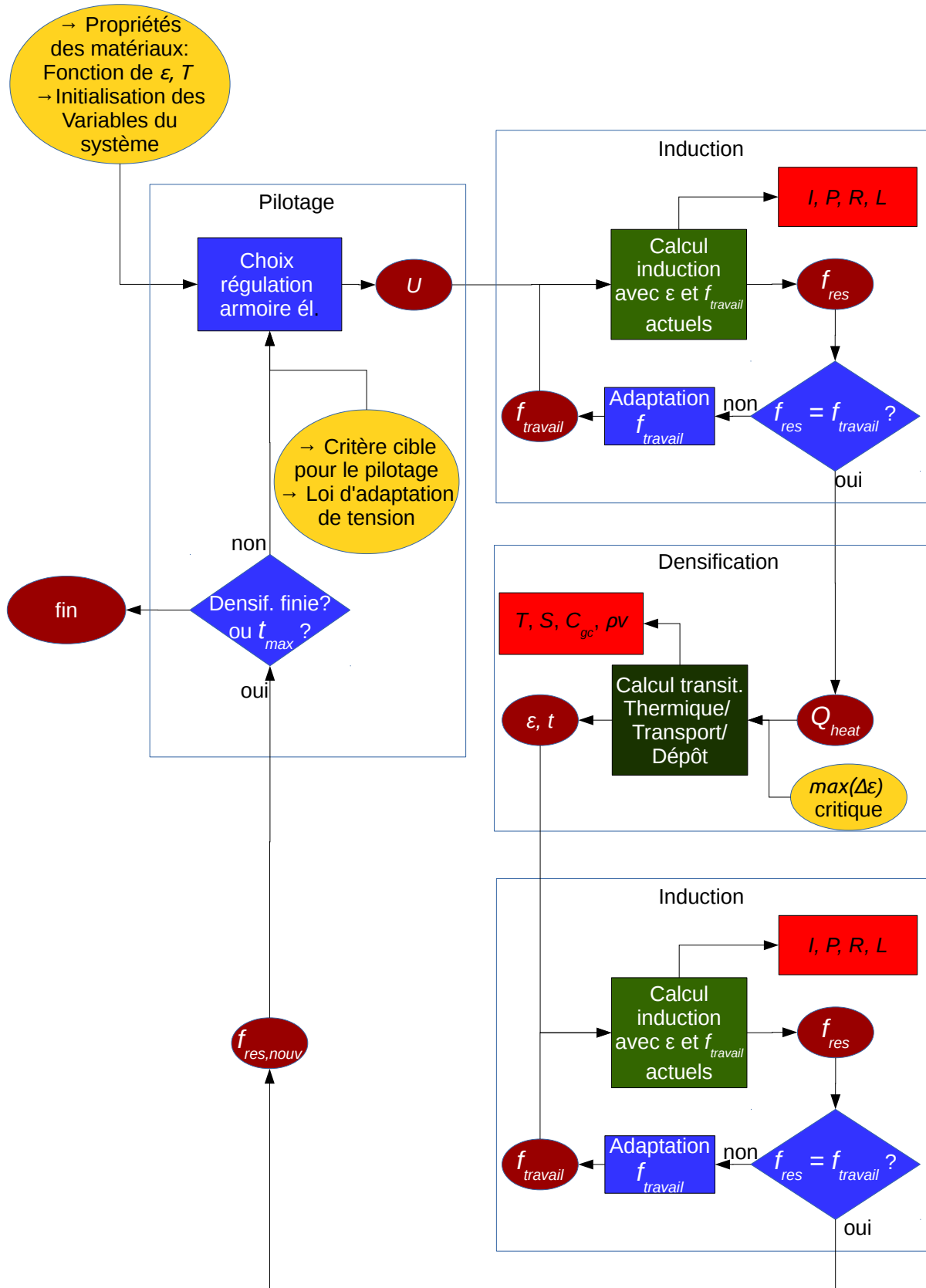


Fig. 50: Schéma d'appels des différents modules de la simulation pour une densification comme à l'expérience. Code couleurs : vert clair et foncé : résolution des modèles par éléments finis ; bleu : tâches du code de pilotage ; jaune : donnée d'entrée par l'ingénieur ; rouge foncé : Sorties utilisées dans la suite de la boucle de calcul ; rouge clair : Sorties supplémentaires pour une analyse post-simulation

- I) Avant chaque cycle il faut fournir les propriétés des matériaux utilisés, l'état de départ du système ainsi que les éléments pour le pilotage à savoir la loi cible et la loi d'adaptation d'un paramètre de contrôle et sa valeur de départ.
- II) Le premier choix de la régulation de l'armoire électrique correspond à cette valeur de départ fournie.
- III) Nous résolvons maintenant les équations électromagnétiques. Nous rappelons qu'il y a un enjeu entre la détermination de la fréquence de résonance liée au circuit électrique, et le calcul par éléments finis chargé de la répartition de la densité de courant et du chauffage volumique. La résolution de la partie de l'induction suit donc une boucle que nous avons présentée sur le schéma fig. 32 et qui nécessite une interaction entre le code superviseur et différents appels du module électromagnétique. Des informations secondaires de ce calcul, qui ne serviront pas directement pour la suite de la boucle mais qui ont un intérêt pour l'analyse du procédé, sont le courant I , la puissance P , la résistance R et l'inductance L . Nous rappelons notamment que la simulation travaille avec une tension fixée alors que l'expérience demande une puissance. Les sorties du calcul d'induction permettent alors de faire le lien entre les deux choix. Le fait que l'on pilote en tension ou en puissance ne change pas les résultats physiques de la résolution tant que la fonction cible du pilotage est la même et que les lois d'adaptation du paramètre de régulation sont équivalentes.
- IV) La sortie du calcul d'induction est la source de chauffage volumique qui est utilisée pour la thermique dans le module suivant. A l'intérieur de ce module éléments finis, tout au début, nous importons les profils des variables principales (porosité, enthalpie volumique, pression du mélange et taux massique en espèce X) de la dernière itération de la boucle de résolution complète. Dans la première itération, ces valeurs correspondent à l'initialisation fournie au départ. Notamment nous gardons en mémoire le profil de porosité à l'entrée de cette itération. Nous rappelons qu'il faut arrêter le calcul de dépôt quand la porosité a changé de manière appréciable pour refaire un calcul d'électromagnétisme. Lors de la résolution transitoire du système couplé de thermique, transport et dépôt, nous comparons donc constamment le profil de porosité actuel à celui d'entrée. Le calcul est arrêté lorsqu'à un endroit quelconque dans le disque, la porosité dépasse une valeur seuil critique donnée comme paramètre extérieur. Nous sortons les profils des variables principales qui serviront de point de départ pour l'appel de ce module dans l'itération suivante. Pour des analyses en post-processing nous sauvegardons également les variables dérivées comme la température T , la saturation en liquide S , la concentration en cyclohexane gazeux C_{gc} et le flux massique diphasique $(\rho u)_m$.
- V) Pour la régulation de la tension nous avons besoin de connaître la variation des propriétés électromagnétiques observables lors de cette itération de densification. Ainsi, après l'arrêt du calcul de dépôt, nous faisons un calcul d'induction avec ce nouveau profil de porosité afin de connaître la nouvelle fréquence de résonance $f_{res,nouv}$. Le profil de chauffage volumique de ce calcul n'est pas d'intérêt car nous n'avons pas encore fait de régulation de tension.
- VI) Le nouveau profil de porosité et la valeur du temps permettent d'arrêter la boucle de densification lorsque celle-ci est complète ou qu'un temps maximal est dépassé. Sinon, la connaissance des propriétés électromagnétiques avant et après cette étape de densification permet de calculer une nouvelle valeur de tension selon le critère cible et la loi d'adaptation du paramètre de contrôle choisis par l'ingénieur.

VII) Avec cette nouvelle valeur de tension, nous pouvons enchaîner avec le calcul d'induction du point 3. Puisque nous connaissons déjà la nouvelle fréquence de résonance, la première itération du code superviseur va directement converger : Il s'agit juste d'une mise à jour du profil de chauffage pour la nouvelle porosité et la nouvelle tension.

L'application sur un cas de densification par caléfaction de ces deux modules et leur résolution couplée, ainsi que la présentation de la géométrie de chaque partie sont le sujet des chapitres 6.

6. Etude numérique du procédé pour un cas concret

Nous avons maintenant introduit les bases du fonctionnement du procédé de densification par caléfaction, les phénomènes physiques y intervenant et leur modélisation, ainsi qu'une stratégie de résolution générale. Nous appliquons maintenant ce solveur pour la résolution d'un cas concret que nous comparons ensuite aux mesures réalisées lors d'un cycle de densification chez MBD. Ce chapitre se divise en 5 sections : Dans les deux premières nous présentons la géométrie du cas étudié, les domaines pour les deux modules (électromagnétisme et thermique/transport/dépôt), les conditions de bord ainsi que les propriétés des matériaux utilisées. La troisième section correspond à une étude où nous tenons la puissance de chauffe constante, ce qui ne correspond pas au déroulement réel de la densification. Ceci nous permettra de faire ressortir l'importance d'une telle adaptation. Dans les deux dernières sections nous présentons les résultats simulés et expérimentaux correspondant à un cas réalisé chez MBD : La section 4 sera consacrée aux grandeurs observables que nous pouvons comparer avec les mesures, et la section 5 aux non-observables qui sont des informations supplémentaires fournies par la simulation.

6.1. Domaine d'études et conditions de bord

Géométrie

Dans l'usine de Messier-Bugatti-Dowty à Lyon, on densifie d'un disque de frein du modèle airbus A320, à l'aide du liquide cyclohexane, chauffé via deux inducteurs de forme « pan-cake » tel que nous l'avons présenté sur fig. 9. Le dispositif est schématisé sur la figure 51 où nous introduisons également les paramètres géométriques dont les valeurs sont rassemblées dans le tableau 6.1.

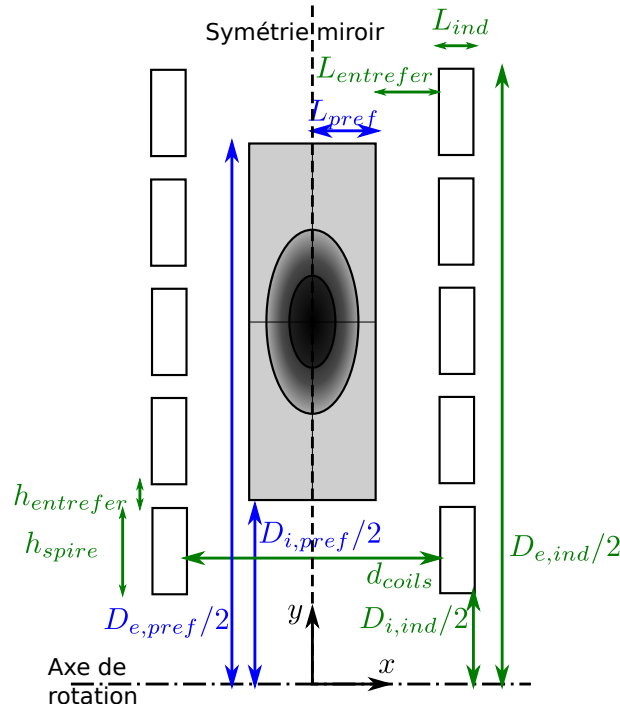


Fig. 51: Schéma de la géométrie du dispositif expérimental à simuler ainsi que ses dimensions. Les valeurs correspondantes sont données dans le tableau 6.1

Symbole	Description	Unité	Valeur
$D_{i,pref}$	Diamètre intérieur de la préforme (sens y)	cm	26.4
$D_{e,pref}$	Diamètre extérieur de la préforme	cm	46.5
L_{pref}	Demi-largeur de la préforme (sens x)	cm	3.5/2
$D_{i,ind}$	Diamètre intérieur d'un inducteur	cm	$2 \cdot 9.004$
$D_{e,ind}$	Diamètre extérieur d'un inducteur	cm	$2 \cdot (D_{i,ind} + 18.65)$
$h_{entrefefer}$	Taille de l'entrefer entre deux spires	cm	0.79
N_{spires}	Nombre de spires pour un inducteur	1	5
h_{spire}	Hauteur d'une spire (sens y)	cm	3.1
L_{ind}	Largeur d'une spire (sens x)	cm	0.8
d_{coils}	Ecartement des deux inducteurs	cm	6

TABLE 6.1.: Paramètres géométriques du dispositif de densification par caléfaction, voir fig. 51.

Pour le dépôt seul l'intérieur du disque est d'intérêt. Il en est de même pour le transport d'espèces et la thermique, pourvu que des conditions de bord appropriées puissent être données. Pour l'électromagnétisme, nous devons également considérer les spires ainsi qu'une « zone infinie » comme nous l'avons évoqué dans le chapitre 5.1. Ceci nous mène à deux domaines d'études différents pour les deux modules (électromagnétisme d'un côté et thermique/transport/dépôt de l'autre). Chaque domaine est limité à gauche ($x = 0$) par un axe de symétrie miroir qui marque la demi-largeur de la section haute du disque. Egalement pour les deux domaines, nous ne considérons que la section haute du disque.

Electromagnétisme

Dans un premier temps nous présentons le domaine de résolution du problème électromagnétique sur la figure 52. Il contient entièrement la moitié droite de la fig. 51, limité à gauche par l'axe de symétrie miroir, en bas par l'axe de rotation, et à droite et en haut par la « boîte infinie ». Les deux inducteurs, de gauche et de droite du disque, sont parcourus par un courant dans le même sens, ce qui conduit à un champ transverse et ainsi aux conditions de bord que nous avons discutées sur fig. 30. Le disque et les 5 sections de spires se trouvent en bas à gauche du domaine. La taille de la « zone infinie » est un multiple arbitraire n de la taille du système réel $D_{e,ind}$. Elle doit être choisie de telle manière que les résultats dans la partie d'intérêt ne varient pas significativement lorsqu'on varie cette taille. Un exemple d'évolution des grandeurs d'intérêt pour le cas test numéro 3 de la figure 33 est donné dans le tableau 6.2. Nous y constatons que la plupart des grandeurs varie de moins d'environ 0.1% lorsque l'on passe de $R_{inf} = 5 \cdot D_{e,ind}$ à $R_{inf} = 6 \cdot D_{e,ind}$. Habituellement on choisit pour la taille de la boîte infinie 5 fois la taille du domaine à étudier ce que nous venons de valider comme bon choix :

$$R_{inf} = n \cdot D_{e,ind} \quad n = 5$$

Grandeur d'intérêt	Unité	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
f_{res}	kHz	19.51	19.43	19.41	19.39	19.39
$\max(\text{abs}(\Re(A)))$	$mT.cm$	12.29	12.32	12.33	12.34	12.34
$\max(\text{abs}(\Im(A)))$	$mT.cm$	8.600	8.666	8.689	8.699	8.704
$\Re(U_{tot})$	V	37.35	37.61	37.70	37.74	37.77
$\Im(U_{tot})$	V	71.01	71.11	71.15	71.16	71.17
$P_{act,RL}$	kW	7.469	7.521	7.540	7.549	7.553
P_{heat}	kW	3.649	3.674	3.682	3.686	3.688
η_{induct}	%	48.85	48.85	48.84	48.83	48.83
R	$m\Omega$	186.7	188.0	188.5	188.7	188.8
L	μH	2.897	2.912	2.918	2.920	2.921
$\max(Q_{heat})$	$10^7 W/m^3$	1.559	1.560	1.570	1.570	1.570

TABLE 6.2.: Comparaison des résultats du modèle électromagnétique FlexDE pour différentes tailles de la boîte infinie, cas 3 de la figure 33

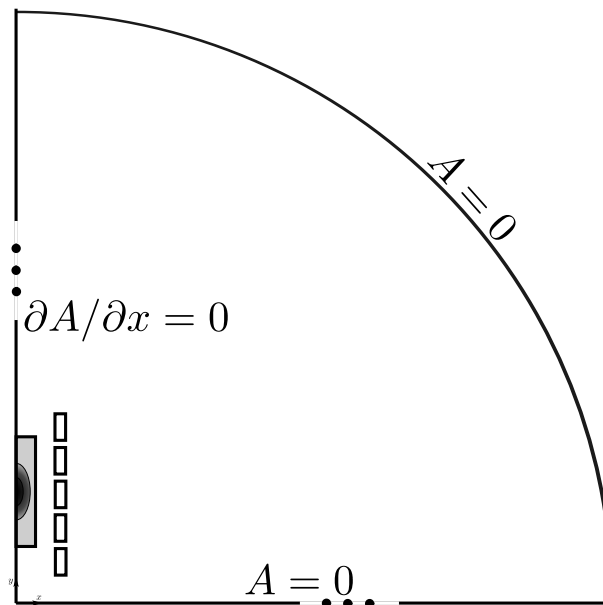


Fig. 52: Domaine d'études et conditions de bord pour le module électromagnétique

Thermique/Transport/Dépôt - Analyse préliminaire des phénomènes et conditions de bord

Concernant la thermique, le transport et le dépôt, le choix du domaine de résolution et des conditions de bord n'est pas si facile : D'un côté le système est axisymétrique, mais de l'autre côté la gravité, qui présente un effet non négligeable pour des écoulements avec un liquide et un gaz 100 fois plus léger, introduit un axe de préférence qui ne peut être pris en compte qu'en système cartésien. Le bon choix serait donc une simulation 3D avec la cuve de réaction. Des mesures ont montré qu'au bord de la cuve le fluide reste liquide presque jusqu'à la fin du cycle de densification. Les conditions de bord seraient donc claires pour ce cas 3D de la cuve entière :

- La thermique serait caractérisée par un échange entre un fluide monophasique liquide dans la cuve avec l'air à l'extérieur,
- La pression serait connue partout au bord par l'effet du poids du liquide
- La fraction massique d'espèce X gazeuse pourrait être choisie égale à zéro.

En effet, il est difficile de bien connaître la condition de bord pour cette grandeur : Physiquement il s'agit d'une espèce gazeuse qui est produite après une réaction de craquage pour la densification, et qui est non-condensable pour le reste de son chemin jusqu'à sa sortie de la cuve, quelle que soit la température du fluide l'entourant. Elle est donc différente du « gaz » que nous considérons dans le cadre de l'ébullition. Pour la traiter correctement, il faudrait lui attribuer une propre équation de diffusion-convection et une propre équation thermique dont chacune est en interaction avec le liquide/diphasique/gaz du cyclohexane. Nous retombons dans le problème que nous avons énoncé lors du choix du modèle d'ébullition : Il est difficile d'exprimer les échanges thermiques et de friction entre ce gaz et son entourage sous différents états physiques (liquide/gaz).

Or si nous restons dans le choix actuel du modèle diphasique, aucun gaz ne peut exister dans la zone liquide. Si nous supposons une quantité non-nulle de l'espèce X à l'interface diphasique/liquide, il faudrait une consommation complète de cette espèce juste à cette interface. Or l'ébullition se fait loin de toute réaction de dépôt sur la gamme de températures, si bien qu'un tel terme ne peut pas exister. Il est donc pratique d'imposer que la fraction massique de l'espèce X vaille zéro à l'interface diphasique/liquide, et que son transport entier se fasse dans la zone gazeuse ou diphasique.

Thermique/Transport/Dépôt - Compétition entre l'axi-symétrie et la gravité

Une simulation 3D n'est cependant pas faisable dans le cadre de cette thèse pour des raisons de coûts de calcul. Il faut donc choisir si l'on met l'accent sur le phénomène 3D en utilisant l'axi-symétrie, où sur l'effet de gravité. Lorsqu'on n'a que du gaz partout dans la cuve, comme en CVI, c'est clairement le premier choix à privilégier, mais lorsqu'on regarde l'entièreté de la cuve remplie de diphasique, c'est le deuxième choix qu'il faut faire. Malheureusement, l'expérience n'aide pas sur ce choix : Des découpes d'un disque partiellement densifié montrent qu'il existe un décentrage du centre du dépôt qui pourrait être lié à l'effet de gravité. On pourrait décider si c'est l'axi-symétrie ou la gravité qui prédomine, en comparant la section haute avec la section basse. Si la gravité est plus importante, les deux sections devaient avoir leur centre de dépôt décentré vers le même côté, le haut ou le bas. Si, par contre, c'est l'axi-symétrie qui l'emporte, un décentrage vers le haut dans la section haute doit aller de

pair avec un décentrage de même ampleur vers le bas de la section basse. Or, les mesures montrent des profils différents, ce qui suggère que les deux phénomènes doivent être pris en compte pour une description exacte.

Thermique/Transport/Dépôt - Choix du domaine

Lorsqu'on se place en situation axisymétrique sans gravité, seule la section haute du disque doit être décrite dans le modèle, comme nous l'avons fait pour le cas de l'électromagnétisme. Lorsqu'on choisit la description cartésienne avec gravité on peut de nouveau choisir entre deux modèles : Soit on ne prend en compte que la section haute du disque, soit on utilise la section haute et la section basse liées par un petit canal qui pourrait correspondre à l'espace entre les deux inducteurs. Cette deuxième méthode apporte les avantages de pouvoir étudier l'influence de la section basse sur la section haute, notamment liée au fait que les deux sections chauffent le fluide dans le diamètre intérieur, et d'avoir des conditions de bord claires, puisqu'on peut prolonger le domaine jusque dans les zones purement liquides en haut et en bas de la cuve. D'autre part, le choix du « grand domaine » nécessite aussi la description de l'écoulement dans le milieu libre entre les deux sections du disque. Nous pourrions alors choisir de maintenir une description darcéenne avec perméabilité élevée et porosité égale à 1, pour étudier le couplage du haut avec le bas au moins de manière qualitative, mais la forte variation des paramètres physiques apporte des problèmes de convergence (notamment la perméabilité et donc la pression capillaire et la taille de la zone diphasique et la conductivité de chaleur et la diffusivité d'espèces).

Ainsi, nous avons choisi de considérer seulement une section de disque telle que représentée sur la figure 55. Sur cette géométrie nous pouvons ensuite effectuer des calcul cartésiens avec gravité ou axisymétriques sans gravité pour étudier leur influence. Nous informons que nous avons également réalisé des calculs avec le « grand domaine », avec les sections haute et basse du disque, mais sans résultat.

Concernant les conditions de bord : (i) tous les flux valent zéro par définition sur l'axe de symétrie miroir ; (ii) sur les autres bords nous ne voulons pas introduire de préférence a priori entre les trois côtés et nous utilisons donc les mêmes conditions sur les trois bords, à savoir

→ Fraction massique de l'espèce X :

Lorsque le disque est entièrement contourné de diphasique, la fraction massique de l'espèce X est nulle pour les raisons énoncées auparavant. S'il y a une couche gazeuse à l'extérieur du disque, on peut choisir, de manière alternative, un flux d'échange du type $\vec{J}_{gx} \cdot \vec{n} = \text{coeff} \cdot (C_{gx} - C_{gx,ext})$, $C_{gx,ext} = 0$.

→ Pression du mélange :

Nous savons que sur le bord du disque, du fluide pousse sur celui-ci. La pression du fluide obéit à l'influence de la gravité qui la fait monter d'une valeur de référence en haut jusqu'à une valeur plus élevée en bas de la cuve. Supposant que cette pression se transmette par le diphasique et le gaz, nous imposons un profil de pression similaire au bord du disque, respectant ce gradient.

→ L'enthalpie volumique :

Nous imposons un flux d'échange de chaleur puisque la température au bord n'est pas connue a priori et elle évolue au cours du temps avec la température du bain liquide. Néanmoins, le choix du coefficient d'échange pose un problème que nous n'avons pas pu clarifier entièrement pendant la thèse. L'échange entre deux gaz, deux liquides, un gaz et un liquide, ou une combinaison faisant intervenir du diphasique n'est pas de la

même nature et il est impossible de bien connaître le coefficient d'échange avec toutes ses dépendances sans avoir recours à des expériences détaillées (voir fin de la section 5.3.4 p. 86).

Nous nous servons alors du fait que la plupart du disque est remplie de gaz pendant tout le cycle sauf les premières minutes de préchauffage (voir résultats dans les sections suivantes). Nous avons réalisé une expérience où nous avons d'abord chauffé le disque jusqu'à température de travail pour la densification, et ensuite nous avons arrêté le chauffage et suivi les thermocouples dans le disque et un thermocouple juste au-dessus du disque. Cette expérience a été réalisée pour différents états de densification correspondants aux différentes couleurs sur les graphiques suivants :

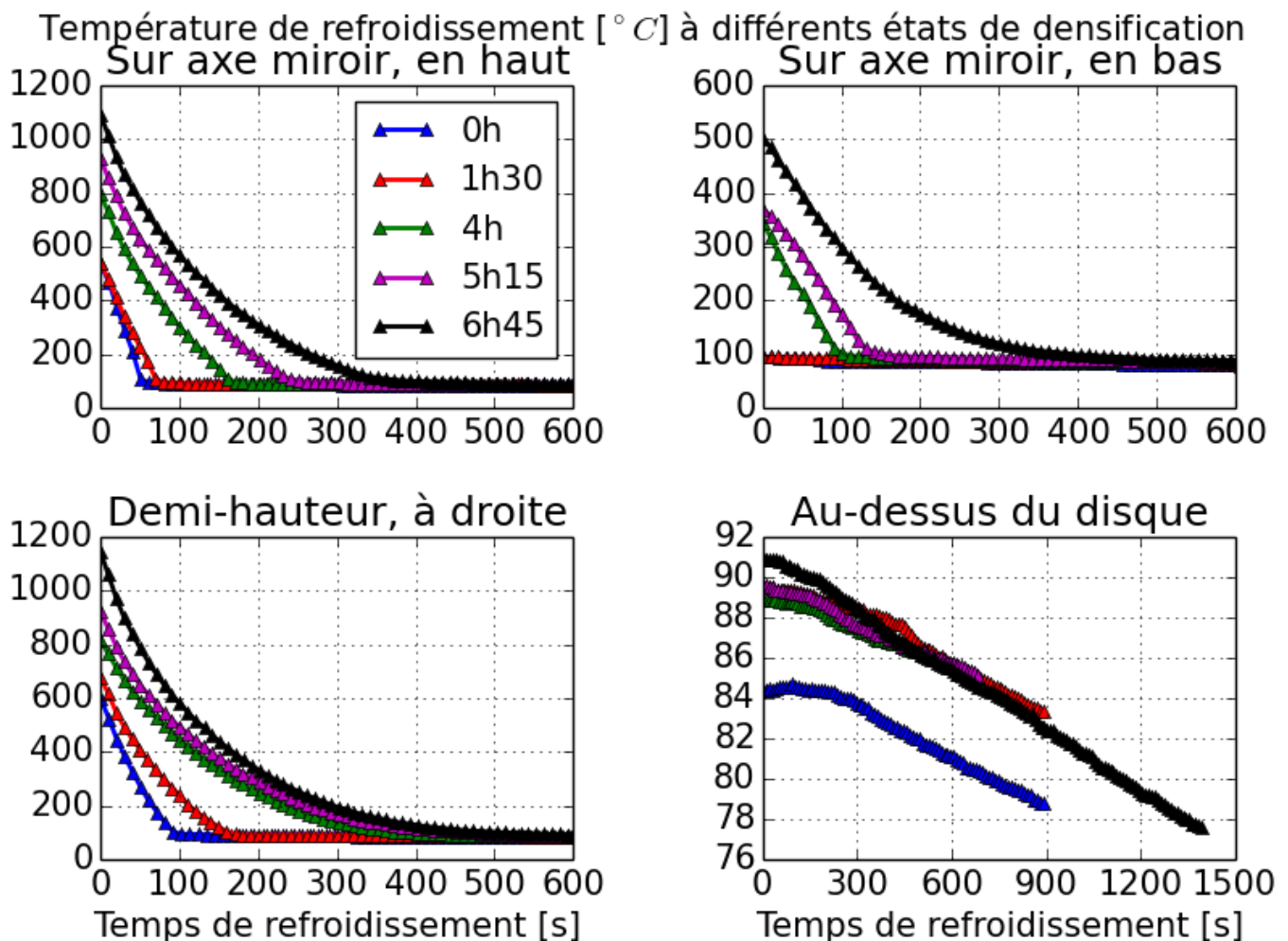


Fig. 53: Essais de refroidissement après différents temps de densification (voir légende de la première figure)

Nous constatons que dans une première phase, toutes les courbes réalisées dans le disque suivent une loi exponentielle décroissante. La température au-dessus du disque augmente d'abord à cause de la chaleur relâchée par le disque et ensuite elle baisse lentement grâce à l'échange avec l'air à l'extérieur de la cuve de réaction. Lorsque nous faisons un zoom sur les températures basses dans le disque (pas montré ici) nous voyons que les variations des températures dans le disque sont toutes égales à celles sur le disque. Celle-ci va rejoindre la température ambiante $T_{amb} \approx 20^{\circ}C$ au bout de plusieurs heures, également sous forme d'une exponentielle. Ces lois exponentielles sont caractéristiques d'un échange de type $h \cdot (T - T_{ext})$. Nous considérons maintenant un système à trois températures : i) Celles au bord du disque notées T_i , ii) Celle au dessus

du disque que nous nommons T_{ext} , iii) La température ambiante hors de la cuve T_{amb} . Nous modélisons les deux écarts $\theta_i = T_i - T_{ext}$ et $\theta_{ext} = T_{ext} - T_{amb}$ avec des lois exponentielles :

$$\theta_i(t) = T_i(t) - T_{ext}(t) = \theta_{i,0} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \quad (6.1a)$$

$$\theta_{ext}(t) = T_{ext}(t) - T_{amb} = \theta_{ext,0} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \quad (6.1b)$$

Nous prenons en compte deux temps caractéristiques différents pour l'échange entre le disque et le fluide dans la cuve, et pour l'échange entre le fluide dans la cuve et l'air ambiante. Lorsque nous mettons en relation les températures T_i avec la constante T_{amb} pour avoir une relation unique, nous obtenons

$$\begin{aligned} \theta_i &= T_i - T_{amb} = \theta_i + \theta_{ext} \\ &= (\theta_{i,0} + \theta_{ext,0}) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \cdot \left[\frac{\theta_{i,0}}{\theta_{i,0} + \theta_{ext,0}} + \frac{\theta_{ext,0}}{\theta_{i,0} + \theta_{ext,0}} \cdot \exp\left(-\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right) \cdot t\right) \right] \\ &\approx \theta_{i,0} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) + \theta_{ext,0} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Dans la dernière approximation nous avons utilisé le fait que le temps caractéristique du refroidissement de la cuve τ_2 est beaucoup plus grand (quelques heures) que celui de l'échange entre le disque et le fluide de la cuve (quelques minutes). Pour trouver le temps caractéristique τ_1 , il suffit de reprendre les courbes de température de la figure 53 en échelle logarithmique :

$$\ln\left(\frac{\theta_i(t)}{\theta_{i,0}}\right) = -\frac{1}{\tau_1} \cdot t \quad (6.3)$$

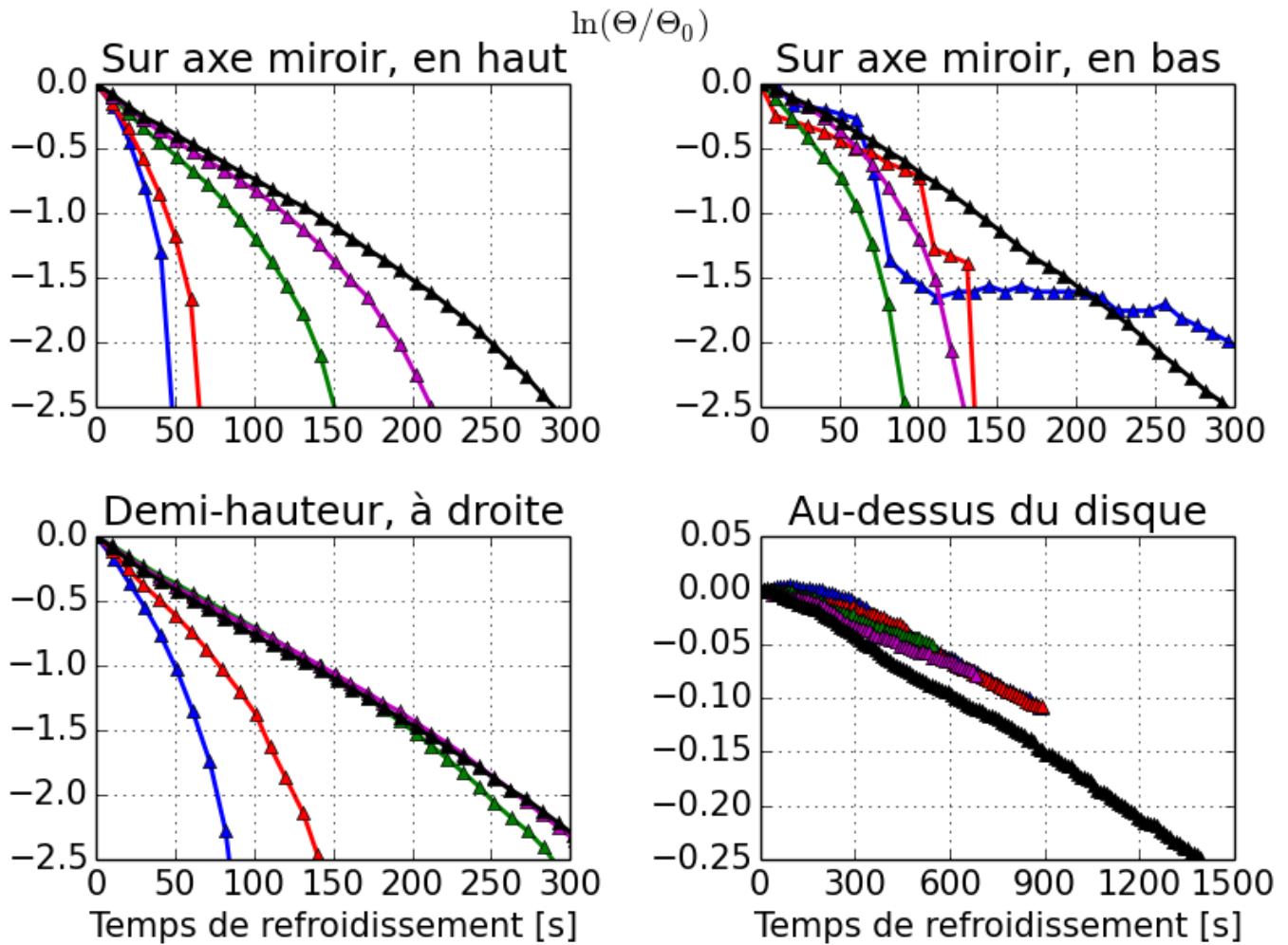


Fig. 54: Essais de refroidissement après différents temps de densification (label des courbes) - logarithme des températures relatives à la température extérieure (température du bain pour les 3 premières courbes, température ambiante estimée pour la courbe en bas à droite)

Les résultats sont présentés sur la figure 54. Nous précisons que seulement les premiers instants peuvent être considérés, lorsque la température du disque est très supérieure à la température d'ébullition. Nous reconnaissons le profil de droite mais avec des pentes différentes pour chaque position de thermocouple et pour chaque avancement de densification. L'évolution avec l'avancement de la densification est liée au fait que le volume du fluide dans le disque devient de plus en plus petit et que le solide contient plus de chaleur à évacuer. Ceci augmente le temps caractéristique, c'est à dire diminue la pente. La différence pour les différentes positions de thermocouples signale que la physique n'est pas simple partout comme nous l'avons supposé pour le modèle : En bas, c'est à dire au rayon intérieur du disque, il y a aussi la chaleur de la section basse du disque qui arrive à influencer la température du bain. Du côté droit, c'est à dire en face de l'inducteur, nous avons l'influence de l'inducteur refroidi et un volume d'échange extérieur plus petit : Ce volume est restreint entre l'inducteur et le disque, et il n'est lié au bain liquide complet dans la cuve uniquement par transport convectif et conductif de la chaleur.

Pour avoir une bonne estimation du coefficient d'échange entre le gaz dans le disque avec le fluide dans la cuve, nous considérons le cas de la préforme vierge et le profil de

température du thermocouple en haut. Nous trouvons :

$$\tau_1 = -\frac{\Delta t}{\Delta \log(\theta/\theta_0)} \approx \frac{41}{1.3} \approx 31.5s \quad (6.4)$$

Pour lier ce temps caractéristique au coefficient d'échange avons besoin de formuler l'équation différentielle qui est à l'origine de la solution présentée ci-dessus :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_p T) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{q}) \quad (6.5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_p T) \cdot V = q \cdot A = -h \cdot (T - T_{ext}) \cdot A \quad (6.5b)$$

où q est le flux de chaleur, ici entre le bord du disque et le fluide extérieur. Dans la deuxième étape nous avons intégré l'équation sur un volume test V dans lequel nous avons supposé la température du disque constante, puis utilisé le théorème de Gauss-Ostrogradsky pour le flux, et introduit la surface d'échange avec l'extérieur A . Nous résolvons l'équation et identifions le temps caractéristique comme suivant :

$$T(t) - T_{ext} = \theta_0 \cdot \exp\left(-\frac{h \cdot A}{\rho c_p \cdot V} \cdot t\right) \quad (6.6a)$$

$$\tau_1 = \frac{\rho c_p \cdot V}{h \cdot A} \quad (6.6b)$$

$$h = \frac{1}{\tau_1} \cdot \rho c_p \cdot \frac{V}{A} \quad (6.6c)$$

Nous utilisons $\rho c_p = \varepsilon_{init} \rho_g c_{pg} + (1 - \varepsilon_{init}) \rho_s c_{ps}$, avec les propriétés des matériaux de l'annexe M et la température de référence comme la moyenne durant l'échange $T_{ref} = (273 + (500 + 100)/2)K = 573K$. Pour le ratio V/A qui représente l'hauteur d'une section test, nous choisissons la semi-largeur du disque $V/A = 3.5cm/2 = 1.75cm$.

Ainsi nous nous obtenons la condition de bord suivante pour la thermique :

$$\vec{q} \cdot \vec{n} \Big|_{bord} = h \cdot (T - T_{ext}) \quad (6.7a)$$

$$\begin{aligned} &\text{avec} \\ &h \approx 300 \end{aligned} \quad (6.7b)$$

Le domaine d'études pour le module de thermique/transport/dépôt et ses conditions de bord sont résumés sur la figure 55, où \vec{n} représente le vecteur normal à la surface orienté vers l'extérieur du domaine :

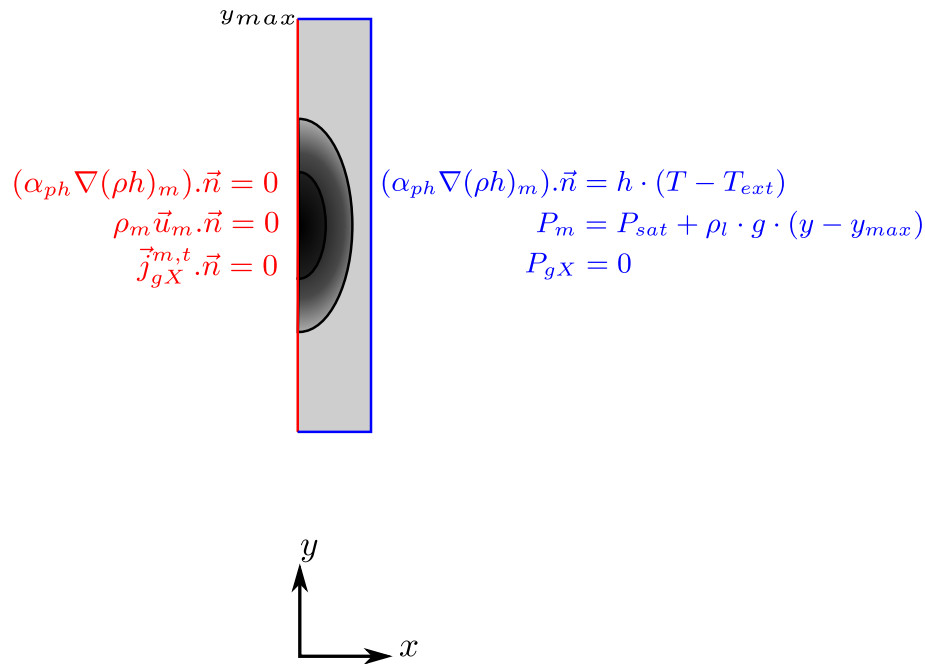


Fig. 55: Domaine d'études et conditions de bord pour le module de la thermique/transport/dépôt

6.2. Propriétés des matériaux et fluides

En plus de la géométrie et des conditions de bord, nous nécessitons des propriétés des matériaux et fluides que nous allons classer dans la suite suivant le modèle dans lequel elles apparaissent.

Propriétés du milieu poreux

Avant de nous consacrer aux paramètres liés aux différents modèles physiques, nous donnons quelques propriétés intrinsèques de la préforme variant avec le dépôt. Nous tirons ces informations de (Vignoles et al., 2006; Belorgey-Beaugrand, 2000) qui ont utilisé un milieu similaire au nôtre :

Symbole	Description	Unité	Valeur
ε_{init}	Porosité de la préforme vierge	1	0.77
ρ_{fibre}	Densité massique de la fibre	kg/m^3	1810
ρ_{pyC}	Densité massique du pyrocarbone déposé	kg/m^3	2180
ρ_{vierge}	Densité apparente de la préforme vierge : mélange fibre+vide	kg/m^3	$\rho_{fibre} \cdot (1 - \varepsilon_{init})$
ρ_s	Densité du solide : mélange de fibres+pyC+vide	kg/m^3	$\rho_{fibre} \cdot (1 - \varepsilon_{init}) + \rho_{pyC} \cdot (\varepsilon_{init} - \varepsilon)$
c_s	Capacité calorifique du solide	$J/kg/K$	$-42.4678 + 2.8516 \cdot T - 0.001 \cdot T^2$
d_p	Diamètre de pores	m	$4 \cdot \tilde{\varepsilon} / (\sigma_v + 100)$
σ_v	Surface interne du milieu poreux	$1/m$	$\frac{4}{d_{f0}} \left[(2 - \varepsilon_{init}) \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_{init}} \right) - \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_{init}} \right)^2 \right]$
d_{f0}	Diamètre de fibre initial	μm	10

TABLE 6.3.: Propriétés physiques du solide en fonction du dépôt (Réf : (Vignoles et al., 2006; Belorgey-Beaugrand, 2000))

La perméabilité absolue est une grandeur tensorielle qui a été étudiée par (Vignoles et al., 2007a) pour des matériaux similaires au nôtre. Nous utilisons donc une loi sous la même forme. En plus, elle renormalisée par rapport à des mesures que nous avons effectuées sur des préformes vierges.

De manière similaire, la loi de conductivité thermique du solide est basée sur la loi donnée par Leutard (Leutard, 1999) et sa dépendance en température est ajustée à des mesures effectuées par MBD sur des disques denses.

Les paramètres d'ajustement correspondantes sont données dans le tableau 6.6.

Symbole	Description	Unité	Valeur
$K_{0x/y}$	Perméabilité absolue du milieu poreux en direction x ou y	m^2	$\frac{\tilde{K}_0}{\tilde{K}_{0,init}} \cdot K_{0x/y,init}$
\tilde{K}_0	Loi de variation de la perméabilité absolue avec la porosité	m^2	$\left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\eta_v} \right) \cdot \frac{d_p^2}{32}$
$\tilde{\varepsilon}$	Porosité modifiée afin de valoir zéro après densification	1	$\varepsilon - \varepsilon_{res,s}$
$\varepsilon_{res,s}$	Porosité résiduelle pré-supposée après densification	1	0.04
$\eta_{v,x/y}$	Facteur de tortuosité du transport visqueux	1	$\frac{\eta_{d,x/y}}{0.95} \cdot \left(1 + \alpha_{d,x/y} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{init}} \right)^2$

$\tilde{\varepsilon}_{init}, \sigma_{v,init}, d_{p,init}, \eta_{v,init}, \tilde{K}_{0,init}$: valeurs correspondantes à $\varepsilon = \varepsilon_{init}$

TABLE 6.4.: Propriétés de transport d'espèces dans le milieu poreux - Perméabilité absolue

La tortuosité de diffusion ordinaire η_d est donnée dans le tableau 6.15.

Symbole	Description	Unité	Valeur
$\lambda_{Ts,x}$	Conductivité de chaleur du solide en direction x	$W/m/K$	$\lambda_{Ts,x,T} \cdot \lambda_{Ts,x,\rho} \cdot 0.61 \cdot \lambda_{Ts,x,\rho 2}$
$\lambda_{Ts,y}$	Conductivité de chaleur du solide en direction y	$W/m/K$	$\lambda_{Ts,y,T} \cdot \lambda_{Ts,y,\rho} \cdot 0.57 \cdot \lambda_{Ts,y,\rho 2}$
$\lambda_{Ts,x,\rho}$	Conductivité de chaleur du solide en direction x - dépendance en porosité	—	$-0.053 + 0.35 \left(\frac{\rho_s}{\rho_{vierge}} \right) + 0.967 \left(\frac{\rho_s}{\rho_{vierge}} \right)^2$
$\lambda_{Ts,y,\rho}$	Conductivité de chaleur du solide en direction y - dépendance en porosité	—	$-0.164 + 0.31 \left(\frac{\rho_s}{\rho_{vierge}} \right) + 0.854 \left(\frac{\rho_s}{\rho_{vierge}} \right)^2$
$\lambda_{Ts,ref}$	Valeur de référence de la conductivité de chaleur du solide	$W/m/K$	1

TABLE 6.5.: Propriétés de transport de chaleur dans le milieux poreux

Symbole	Description	Unité	Valeur
$\lambda_{Ts,x,\rho 2}$		—	$1/12.2/(1 - \varepsilon)$
$\lambda_{Ts,y,\rho 2}$		—	$1/10.0/(1 - \varepsilon)$
$K_{0x,init}$	Perméabilité absolue de la préforme vierge en direction x : perpendiculaire aux plans des nappes	Da	30
$K_{0y,init}$	Perméabilité absolue de la préforme vierge en direction y : Parallèle aux plans des nappes	Da	60

TABLE 6.6.: Propriétés physiques du milieux poreux - Mesures et ajustements aux matériaux utilisées lors de cette thèse

Electromagnétisme

Pour l'électromagnétisme nous avons uniquement besoin de la conductivité du matériel des inducteurs (cuivre) ainsi que du disque à différents états de densification. La conductivité du cuivre est bien connue et donnée par exemple dans (Rudnev et al., 2003, p.101). Concernant la conductivité de la préforme, un dispositif a été mis en place pendant un stage lors de la thèse (voir annexe K.3). Malheureusement le temps n'a suffi que pour réaliser des mesures pour la préforme vierge et le disque entièrement densifié, chaque fois dans les trois directions d'anisotropie du matériel. Vu que nous utilisons un modèle axisymétrique pour l'électromagnétisme, seule la mesure en direction radiale est d'intérêt. Les deux mesures correspondantes ainsi que l'interpolation linéaire utilisée pour prendre en compte la porosité locale sont données dans le tableau 6.7 :

Symbole	Description	Unité	Valeur
$1/\sigma_{cu}$	Résistivité (l'inverse de la conductivité) du matériel dans les inducteurs (cuivre)	$\mu\Omega.mm$	17
σ_{cu}	Conductivité du matériel des inducteurs (cuivre)	S/m	$6 \cdot 10^7$
σ_{nd}	Conductivité du disque sous forme de préforme vierge	S/m	$1/(9000 \cdot 10^{-8})$
σ_d	Conductivité du disque sous forme complètement densifié	S/m	$1/(3000 \cdot 10^{-8})$
σ_{pref}	Conductivité (locale) de la préforme partiellement densifiée	S/m	$\sigma_{nd} \cdot (\varepsilon/\varepsilon_{init}) + \sigma_d \cdot (1 - \varepsilon/\varepsilon_{init})$

TABLE 6.7.: Propriétés électromagnétiques

Transport diphasique, ébullition

Pour le transport diphasique et l'ébullition nous avons besoin de différents types de paramètres : les propriétés des matériaux d'un côté et les paramètres du modèle, dont notamment l'enthalpie de référence, de l'autre. Nous allons les présenter dans cet ordre-là.

Les propriétés des fluides cyclohexane monophasiques ont été étudiées en détail dans des travaux antérieurs, notamment (Vignoles et al., 2006) ainsi que (Belorgey-Beaugrand, 2000). La masse molaire du cyclohexane est donnée sur le NIST Chemistry Webbook et celle de l'espèce X peut être calculée à partir de sa composition donnée dans l'équation 5.75 :

Symbole	Description	Unité	Valeur
ρ_l	Densité massique du liquide	kg/m^3	719
μ_l	Viscosité dynamique du liquide	$Pa.s$	$4.26 \cdot 10^{-4}$
c_l	Capacité calorifique du liquide	$J/kg/K$	1695
λ_{Tl}	Conductivité de la chaleur du liquide	$W/m/K$	0.152

TABLE 6.8.: Propriétés physiques du cyclohexane liquide (Réf : (Belorgey-Beaugrand, 2000, p. 227))

Symbole	Description	Unité	Valeur
ρ_g	Densité du gaz à partir de la loi des gaz parfaits	kg/m^3	$\frac{M_g P_g}{R_g T}$
μ_g	Viscosité dynamique du gaz	$Pa.s$	$(-9.61 + 0.358T - 1.46 \cdot 10^{-4}T^2 + 3.63 \cdot 10^{-8}T^3) \cdot 10^{-7}$
c_g	Capacité calorifique du gaz	$J/kg/K$	$-649.28 + 7.28T - 0.003T^2 + 1.57 \cdot 10^{-7}T^3$
λ_{Tg}	Conductivité de la chaleur du gaz	$W/m/K$	$(1/\lambda_{gl} + 1/\lambda_{gc})^{-1}$
λ_{gl}	Conductivité de la chaleur du gaz - non confiné dans un poreux	$W/m/K$	$-0.02329 + 1.1092 \cdot 10^{-4}T - 2 \cdot 10^{-8}T^2$
λ_{gc}	Conductivité de la chaleur du gaz - contribution de Knudsen	$W/m/K$	$d_p \cdot P_{sat} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{R_{gas}}{M_{cx} \cdot T}}$
M_{cx}	Masse molaire moyennée de cyclohexane et de l'espèce X	g/mol	$\frac{2}{1/M_{gx} + 1/M_{gc}}$
M_{gC}	Masse molaire du cyclohexane	g/mol	84.162
M_{gX}	Masse molaire de l'espèce X	g/mol	23.27

TABLE 6.9.: Propriétés physiques du cyclohexane gaz (Réf : (Vignoles et al., 2006; Belorgey-Beaugrand, 2000))

Pour le traitement du diphasique, certains paramètres comme la pression de saturation, la température de saturation et la chaleur de saturation sont connues pour un point de référence et peuvent être calculés pour la pression de travail dans le réacteur de MBD à l'aide de la relation de Clausius-Clapeyron. Les valeurs de référence correspondantes dans tableau 6.10 sont pris dans la base de données Webbook du NIST (Webbook,), et la valeur de la tension de surface de (Gmbh, ; E.S., 1981).

Symbole	Description	Unité	Valeur
L_0^m	Chaleur latente d'évaporation molaire	kJ/mol	29.97
$P_{sat,ref}$	Pression de saturation - valeur de référence trouvée en bibliographie	Pa	$1.013e + 5$
$T_{sat,ref}$	Température de saturation - valeur de référence trouvée en bibliographie	K	353.9
P_{sat}	Pression de travail chez MBD	Pa	$1.5 \cdot 10^5$
T_{sat}	Température de saturation calculée pour la pression de travail	K	368
L_0	Chaleur latente d'évaporation massique pour la pression de travail	kJ/kg	356.1
σ	Tension de surface entre le liquide et le gaz	J/m^2	$17.99 \cdot 10^{-3}$

TABLE 6.10.: Propriétés physiques du cyclohexane diphasique

Les fonctions des perméabilités relatives du gaz et du liquide ainsi que celle de pression capillaire, qui dépendent toutes de la saturation en liquide, ne sont pas connues pour le cyclohexane et notre préforme utilisée. Nous avons donc essayé dans 2 stages de les mesurer avec les moyens présentés dans l'annexe K.2. Ces mesures n'ont malheureusement pas abouti à des résultats fiables si bien que nous sommes obligés d'utiliser les formules « standard » de (Wang and Beckermann, 1993) :

Symbole	Description	Unité	Valeur
k_{rl}	Perméabilité relative du liquide	1	S^3
k_{rg}	Perméabilité relative du gaz	1	$(1 - S)^3$
P_c	Pression de capillarité	Pa	$P_{c,max} \cdot f_{Lev}(S)$
$f_{Lev}(S)$	Fonction de Leverett	1	$1.417 \cdot (1 - S) - 2.12 \cdot (1 - S)^2 + 1.263 \cdot (1 - S)^3$
$P_{c,max}$	Valeur maximale de la pression de capillarité (à $S = 0$)	Pa	$\sqrt{\frac{\varepsilon}{K_0}} \cdot \sigma$

TABLE 6.11.: Propriétés du diphasique liées au transport (Réf : (Wang and Beckermann, 1993), valeurs standard)

Finalement il nous reste la définition de l'enthalpies de saturation des phases gazeuse et liquide. En plus de relations de base nous utilisons les expressions introduites dans le chapitre 5.3.5. L'ensemble des choix est donné dans le tableau 6.12 :

Symbole	Description	Unité	Valeur
ρ_{gsat}	Densité du gaz à pression et température de saturation	kg/m^3	$\frac{M_{gc} P_{sat}}{R_g T_{sat}}$
h_{gsat}	Enthalpie massique du gaz au point de saturation - définition générale	J/kg	$h_{lsat} + L_0$
h_{lsat}	Enthalpie massique du liquide au point de saturation - valeur de référence libre	J/kg	$-\delta_{sat} \cdot \frac{\rho_{gsat}}{\rho_l - \rho_{gsat}} \cdot L_0$
δ_{sat}	Paramètre intervenant dans le choix de l'enthalpie de référence	1	30

TABLE 6.12.: Enthalpies de saturation

Dépôt et Diffusion d'espèces

Comme nous l'avons mentionné lors de la construction du modèle, le transport multi-espèce gazeux ainsi que le dépôt ont été étudiés intensément dans des travaux antérieurs. Nous pouvons ainsi tirer les propriétés liées au dépôt des publications (Vignoles et al., 2006) ainsi que (Belorgey-Beaugrand, 2000) pour le taux de réaction chimique de dépôt

Symbole	Description	Unité	Valeur
E_a	Energie d'activation pour le dépôt	kJ/mol	305
a_k	Coefficient de la constante cinétique du dépôt	$m/s/K^{bk}$	8
b_k	Paramètre de la constante cinétique du dépôt	1	2.02
Ω_s	Volume molaire au dépôt	m^3/mol	$\frac{M_{gc}}{\rho_{pyC}}$
ν_{pyC}	Coefficients stœchiométriques de pyC après craquage d'une molécule de précurseur	1	1.29
ν_X	Coefficients stœchiométriques de X après craquage d'une molécule de précurseur	1	2.95

TABLE 6.13.: Dépôt (Réf : (Belorgey-Beaugrand, 2000))

La préforme fibreuse utilisée n'est néanmoins pas la même que celle des études antérieures mentionnées. Ceci nous mène à remplacer les paramètres de transport de matière liée au milieu poreux (la diffusivité de Knudsen, la perméabilité absolue et les tortuosités correspondantes) par des lois données dans (Vignoles et al., 2007a) sous forme tensorielle. De même la diffusivité ordinaire devient, contrairement à la publication de (Vignoles et al., 2006), une grandeur tensorielle.

Symbole	Description	Unité	Valeur
$D_{kC,x/y}$	Diffusivité de Knudsen pour l'espèce C	m^2/s	$\frac{\varepsilon}{\eta_{K,x/y}} \cdot D_{kC,ref}$
$D_{kX,x/y}$	Diffusivité de Knudsen pour l'espèce X	m^2/s	$\frac{\varepsilon}{\eta_{K,x/y}} \cdot D_{kX,ref}$
$D_{kC,ref}$	Diffusivité de Knudsen de référence pour l'espèce C	m^2/s	$\frac{1}{3} \cdot l_{libre,K} \cdot v_{th,C}$
$D_{kX,ref}$	Diffusivité de Knudsen de référence pour l'espèce X	m^2/s	$\frac{1}{3} \cdot l_{libre,K} \cdot v_{th,X}$
$l_{libre,b}$	Libre parcours moyen thermique de la diffusion de Knudsen	m	d_p
$v_{th,C}$	Agitation thermique moyenne de l'espèce C liée à la diffusion ordinaire	m/s	$\sqrt{\frac{8R_gT}{\pi M_{gC}}}$
$v_{th,X}$	Agitation thermique moyenne de l'espèce X liée à la diffusion ordinaire	m/s	$\sqrt{\frac{8R_gT}{\pi M_{gX}}}$
$\eta_{K,x/y}$	Facteur de tortuosité de la diffusion de Knudsen	1	$\eta_{K,x/y}^{lim} \cdot \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{init}}{\varepsilon}\right)^{\alpha_{K,x/y}}$
$\eta_{K,x}^{lim}$		1	1.411
$\eta_{K,y}^{lim}$		1	0.817
$\alpha_{K,x}$		1	1.407
$\alpha_{K,y}$		1	0.126

TABLE 6.14.: Propriétés de transport d'espèces dans le milieu poreux - Diffusivité de Knudsen

Le coefficient de diffusion ordinaire entre le cyclohexane gazeux et l'espèce X , D_{xc} est connu sous sa forme donnée dans (Poling et al., 2001, chp. 11-3) :

$$D_{xc} = f_D \cdot \frac{0.00266 \cdot 10^{-4} \cdot T^{1.5}}{P_{bar} \cdot (M_{cx})^{0.5} \cdot \sigma_{cx}^2 \cdot \Omega_D} \quad (6.8a)$$

$$P_{bar} = \frac{P_g}{1.013 \cdot 10^5} \quad (6.8b)$$

$$f_D = 2 \frac{\tilde{\varepsilon}}{\eta_d} \quad (6.8c)$$

Nous réécrivons cette formule de manière algébriquement équivalente afin de suivre une forme plus générale que nous avons également rencontré pour les diffusivités de Knudsen :

Symbole	Description	Unité	Valeur
$D_{xc,x/y}$	Diffusivité ordinaire	m^2/s	$\frac{\varepsilon}{\eta_{b,x/y}} \cdot Dxc_{ref}$
$D_{xc,ref}$	Diffusivité ordinaire de référence	m^2/s	$\frac{1}{3} \cdot l_{libre,b} \cdot v_{th,b}$
$l_{libre,b}$	Libre parcours moyen thermique de la diffusion ordinaire	m	$\frac{k_b T}{P_g \cdot \sigma_{cx}^2 \Omega_D} \cdot \frac{9}{10 \cdot (10^{-10})^2 \cdot \sqrt{2}}$
$v_{th,b}$	Agitation thermique moyenne liée à la diffusion ordinaire	m/s	$\sqrt{\frac{8R_g T}{\pi M_{cx}}}$
σ_{cx}		m	$\frac{\sigma_c + \sigma_x}{2}$
σ_c		m	6.182
σ_x		m	4.163
Ω_D			$\frac{1.06036}{T_g^{0.15610}}$
			$+0.193 \exp(-0.47635T_g)$
			$+1.03587 \exp(-1.52996T_g)$
			$+1.76474 \exp(-3.89411T_g)$
T_g			$\frac{T}{\varepsilon_{cx}}$
ε_{cx}			$\sqrt{\varepsilon_c \cdot \varepsilon_x}$
ε_c			297.1
ε_x			215.7
$\eta_{d,x/y}$	Facteur de tortuosité de diffusion binaire	1	$\eta_{d,x/y}^{lim} \cdot \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{init}}{\varepsilon}\right)^{\alpha_{d,x/y}}$
$\eta_{d,x}^{lim}$		1	1.09
$\eta_{d,y}^{lim}$		1	1.
$\alpha_{d,x}$		1	0.465
$\alpha_{d,y}$		1	0.107

TABLE 6.15.: Propriétés de transport d'espèces dans le milieu poreux - Diffusivité ordinaire

6.3. Etude préliminaire - Cycle à puissance constante

Après avoir traité les aspects purement physico-chimiques des deux modules d'électromagnétisme et de thermique/transport/dépôt, leurs domaines d'études, les conditions de bord et les propriétés des matériaux et fluides, nous mettons l'accent sur un point qui a été très peu considéré pour le moment : L'importance d'un bon pilotage. La présence d'une armoire électrique pour le chauffage et d'un précurseur fournissant du réactif pour le dépôt n'est pas suffisante pour la réussite d'une densification. Il faut aussi une bonne stratégie de pilotage du procédé. Pour mettre ceci en évidence nous considérons un cas où nous ne pilotons rien : Nous allumons l'armoire électrique avec une puissance de $50kW$ et ensuite nous attendons. Sur la figure 56 nous montrons les résultats pour : i) La puissance de chauffage injectée dans le disque, qui est proportionnelle à la puissance de l'armoire et au rendement qui, lui, est susceptible de changer au cours de la densification avec l'impédance du système, ii) La masse totale déposée dans le disque et iii) La porosité moyenne.

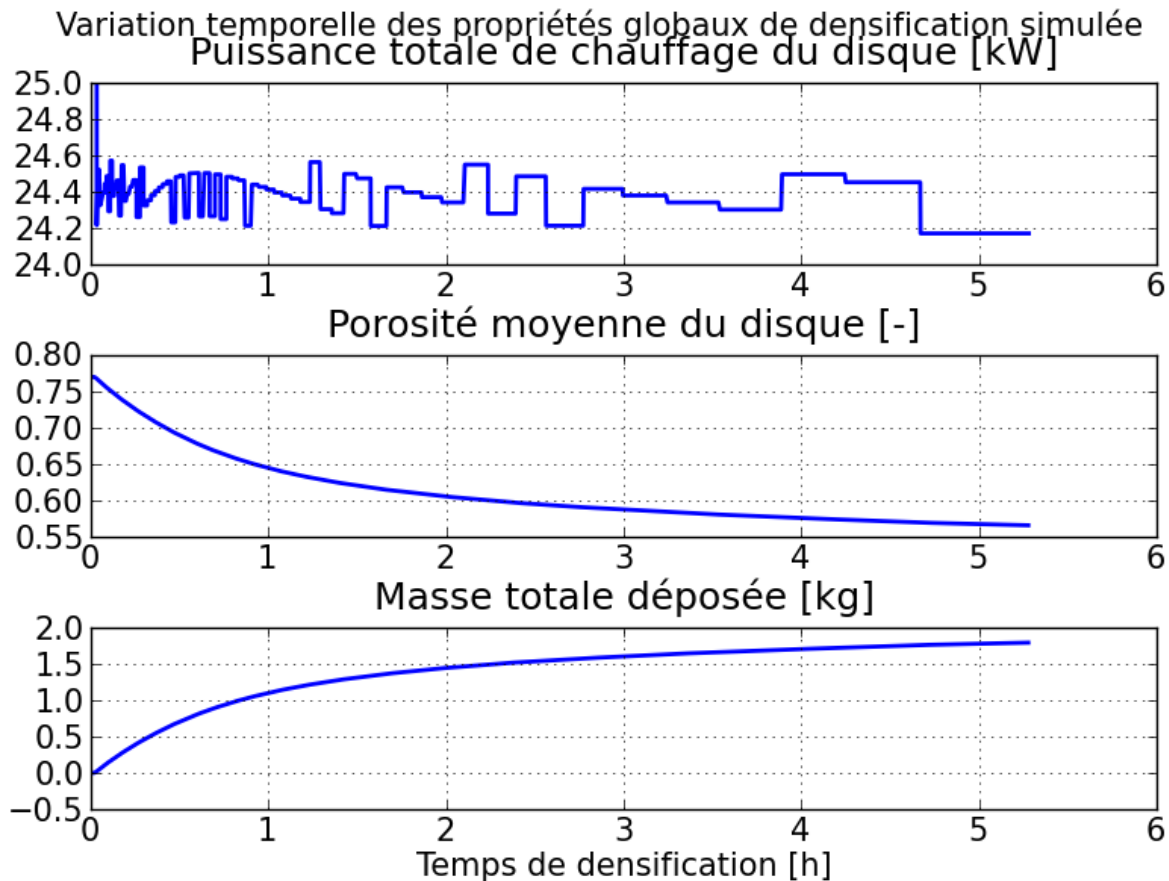


Fig. 56: Puissance de l'armoire non-adaptée au cours du temps (haut) : Résultats de variation de porosité moyenne du disque (milieu) et de dépôt massique (bas)

Nous constatons que la puissance de chauffage totale est à peu près constante ainsi que le rendement. Au départ nous déposons effectivement de la masse et la porosité moyenne diminue. Ceci indique que la puissance choisie n'est pas trop faible. Néanmoins la variation de ces deux grandeurs perd rapidement de la pente, et au bout d'environ 3h de densification nous avons un système qui n'évolue quasiment plus alors que la puissance de chauffage injectée ne perd pas de valeur et qu'il y a toujours suffisamment de précurseur dans la cuve. Nous rappelons que le taux de densification dépend de deux paramètres : i) La température, de manière exponentielle, et ii) La concentration de précurseur gazeux, de manière linéaire. Nous avons pu vérifier que la quantité de précurseur reste suffisante. La cause de l'arrêt de la densification est alors à chercher dans la température. Sur la figure 57, nous traçons l'évolution de la température et le taux de densification à différents moments de la densification.

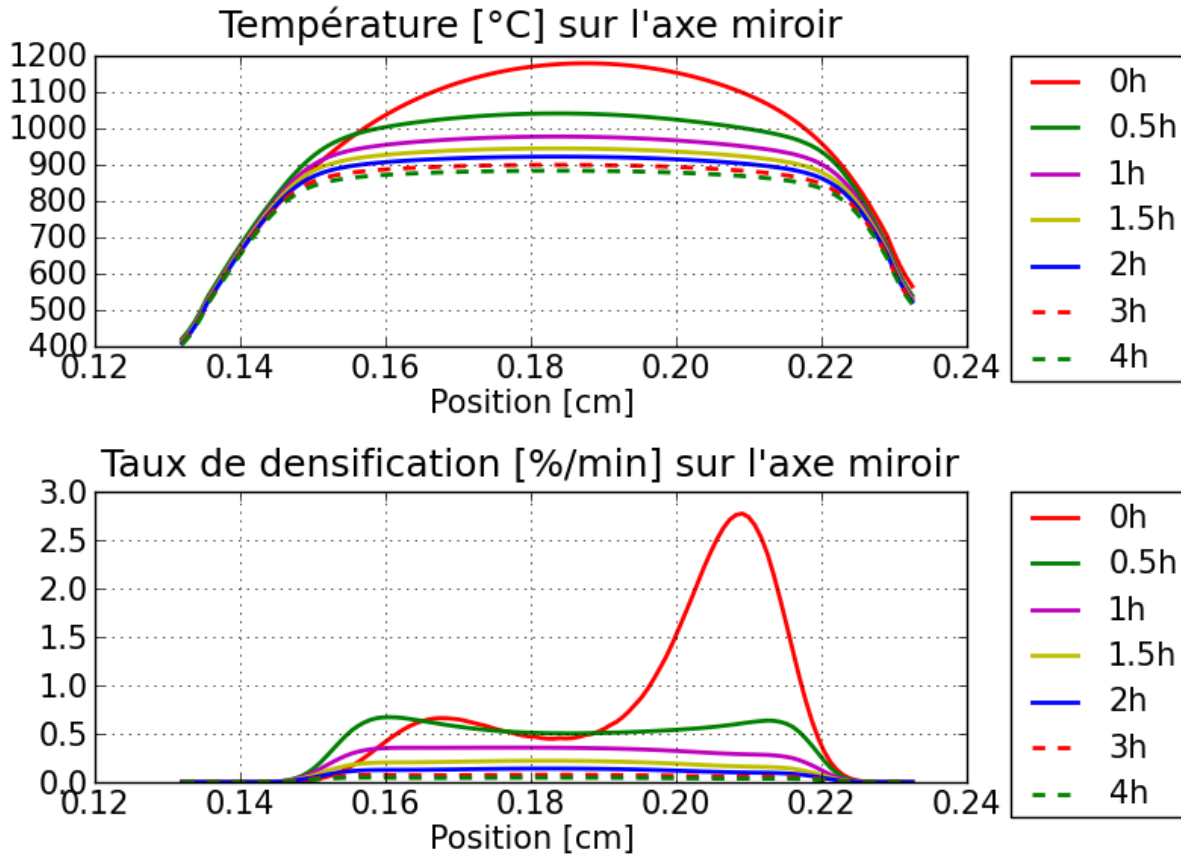


Fig. 57: Puissance de l'armoire non-adaptée au cours du temps : Profils de température (en haut) et taux de dépôt (en bas) selon l'axe miroir à différents temps.

Nous constatons qu'au début la température monte à environ 1200°C dans la région la plus chaude à mi-hauteur du disque. Cette température est suffisante pour entretenir la réaction de craquage et de dépôt. Or, au cours du temps les températures baissent et il est de même pour le taux de réaction : Lorsque la température baisse de 20% en Kelvin, le taux de densification baisse de $1 - (\exp(-Ea/Rg/1173)/\exp(-Ea/Rg/1473)) = 1 - (2.62 \cdot 10^{-14}/1.53 \cdot 10^{-11}) = 99.8\%$ et on ne dépose presque plus rien. Nous remarquons que ce calcul ne prend en compte que la partie thermique du taux de dépôt si bien qu'il diffère légèrement du graphique (57 à droite) qui prend également en compte l'influence de la concentration de précurseur qui varie d'un cas à l'autre à cause de la consommation globalement plus élevée dans le cas plus chaud.

Pour comprendre cette chute de température il faut savoir qu'elle atteint rapidement un état stationnaire après chaque changement de puissance (voir grandeurs caractéristiques, section 5.5). Le bilan d'énergie revient donc à dire que le flux de chaleur sortant du disque est identique à la puissance injectée dans le disque. Comme le montre l'équation suivante, un flux au bord (q_b) constant va de pair avec une température de bord (T_b) constante, à cause de la condition de bord :

$$\begin{aligned} const &= q_b = h \cdot (T_b - T_{ext}) \\ \Rightarrow T_b &= \frac{q_b}{h} + T_{ext} = const \end{aligned} \quad (6.9)$$

Or, à l'intérieur du disque, le profil de température peut changer pour essentiellement deux raisons : Premièrement la zone densifiée attire plus les courants, et ainsi de la puissance de chauffage. que la zone vierge. Ceci redistribue le profil de chauffage dont seulement la valeur intégrale sur le disque est tenue constante. Ainsi, au cours de la densification, il y a de moins

en moins de puissance injectée dans la zone vierge. Ceci revient à baisser la température le long de la transition entre zone vierge et zone sous densification. Deuxièmement, la conductivité de chaleur de la zone dense est plus élevée que celle de la zone vierge ce qui tend à aplatir le profil de température. Cet effet baisse la température dans la zone en densification. Nous avons par contre l'effet de la puissance de chauffage plus forte dans la zone de densification. Il est délicat de prédire de manière analytique l'évolution de la température liée à ces deux effets opposés. La simulation montre que c'est la baisse de température dans toute la zone sous densification qui prédomine.

En conclusion, on comprend qu'une augmentation de puissance au cours de l'opération est nécessaire. Nous allons maintenant le constater dans les parties suivantes.

6.4. Validation physique de la simulation par comparaison avec les mesures

La comparaison entre la simulation et l'expérience contient trois parties : Une première partie sur l'électromagnétisme, une deuxième sur la thermique et le dépôt, et finalement une troisième partie sur des grandeurs globales.

6.4.1. Evolution des grandeurs électriques

Les informations qui sortent de l'armoire électrique tout le long du procédé sont la fréquence du résonance, dont nous fixons la variation temporelle à $0.2Hz/sec$ comme loi de pilotage, la puissance, réglée par le technicien afin de satisfaire la variation de la fréquence de résonance, et la tension sur les inducteurs. Nous obtenons les mêmes quantités par la simulation et les comparons avec l'expérience sur le graphique suivant.

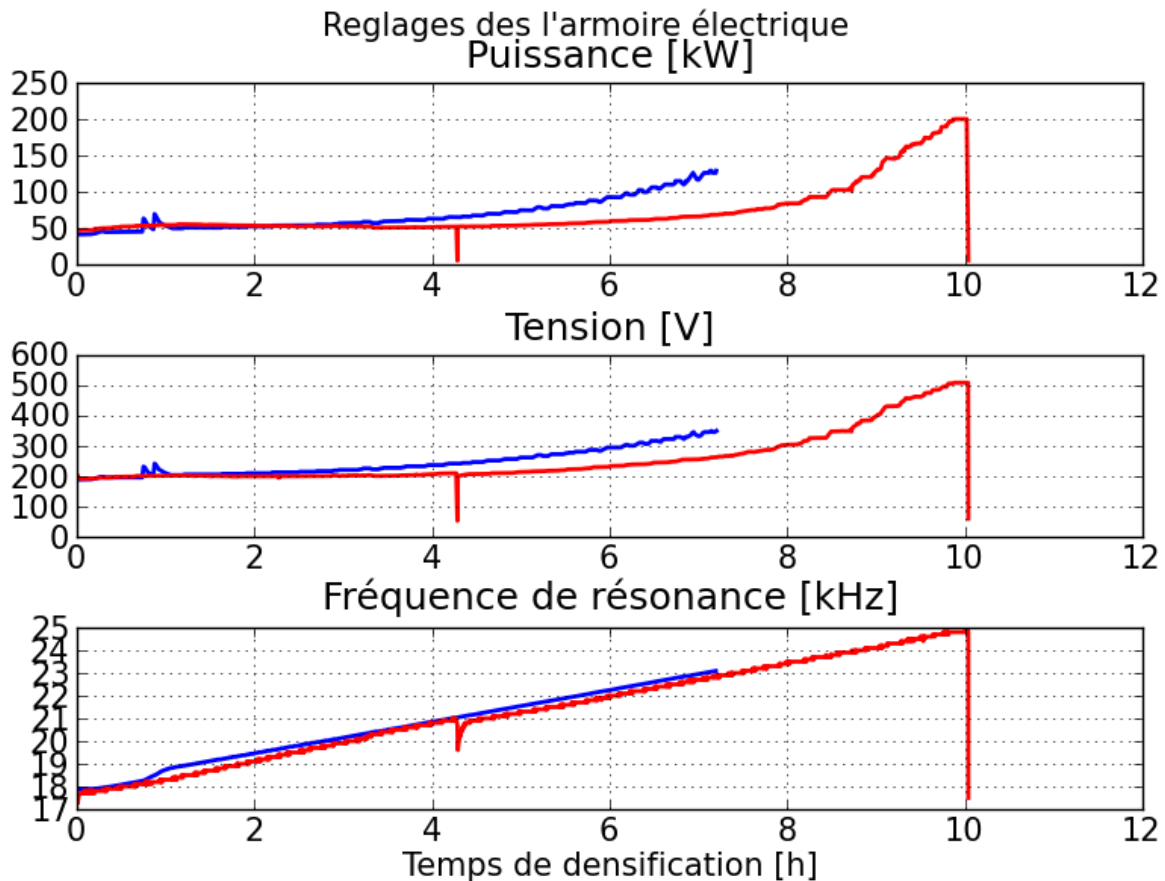


Fig. 58: Comparaison des données de l'armoire électrique au cours d'une densification expérimentale (rouge) et simulée (bleu)

Nous constatons tout d'abord que les variations de la fréquence de résonance sont identiques pour la simulation et la l'expérience. Ceci signifie que le technicien ainsi que la simulation ont bien réussi à suivre la loi cible commune pour la densification. Néanmoins la puissance et la tension nécessaires pour suivre cette loi cible ne sont pas les mêmes pour les deux réalisations. Ceci est un indice que les propriétés électriques du système ne sont pas bien connues en fonction de l'avancement de la densification, ou bien que l'avancement de la densification est mal reproduit.

Nous approfondissons l'étude de l'écart entre les propriétés électriques sortantes de la simulation et celles des mesures. La connaissance de la puissance, de la tension et de la fréquence de résonance mesurées permet de calculer le courant dans les inducteurs ainsi que la résistance et l'inductance globales (voir annexe, équations K.10). Ceux-ci peuvent alors être comparés aux valeurs utilisées dans la simulation au cours du temps (voir chapitre 5.1.4) comme présenté dans le graphique suivant :

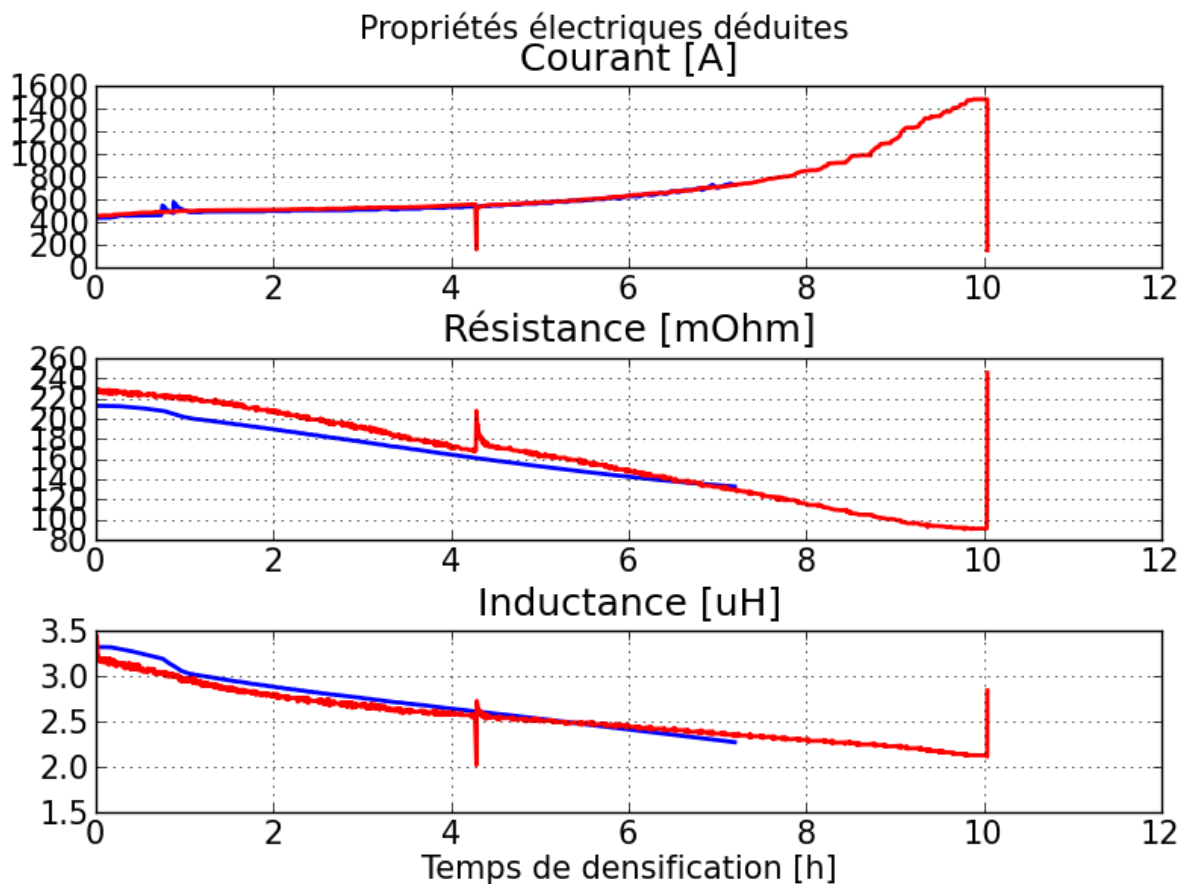


Fig. 59: Comparaison des propriétés électriques déduites du système au cours d'une densification expérimentale (rouge) et simulée (bleu)

La résistance du système est sous-estimée par la simulation au début de densification et sur-estimée à la fin. Concernant l'inductance nous constatons une chute rapide de la valeur expérimentale au tout début du cycle de 3.5 à 3.1 μH . Il s'agit possiblement d'effets thermiques. Sinon la courbe mesurée et la courbe simulée sont très proches avec une légère surestimation de la simulation au début et une légère sous-estimation à la fin. Les valeurs d'inductance et de résistance globale influent directement dans le calcul de la fréquence de résonance (voir eqn. 5.19). En d'autres mots, une même valeur de fréquence de résonance ne correspond pas au même état d'avancement de densification dans l'expérience et dans la simulation. Il est impossible de dire qu'une sur-estimation de la résistance et une sous-estimation de l'inductance correspondent à une fréquence de résonance plus élevée ou plus faible, puisque celle-ci dépend de manière non-linéaire des deux propriétés physiques et donc du rapport des deux sur-/sous-estimations. De même, la corrélation entre la vitesse de dépôt et la variation de la fréquence de résonance peut être établie correctement uniquement si les propriétés électriques du système sont bien connues pour chaque état de densification. Dans le tableau suivant nous réalisons une étude de l'influence des conductivités du cuivre dans l'inducteur (si jamais des impuretés ou des alliages ou d'autres phénomènes la font différer de la valeur de la littérature) et de la préforme pour la préforme vierge et le disque entièrement densifié. Les valeurs de la résistance globale, inductance et fréquence de résonance sortant des simulations est à comparer avec les valeurs déduites des mesures, données dans le même tableau. Les conductivités test sont obtenues des valeurs de la simulation actuelle par un multiplicateur de plus ou moins trente pour cents.

Multiplicateur σ_{ind}	Multiplicateur σ_{pref}	f_{res} kHz	R [m Ω]	L μ H
Préforme vierge				
Mesure		17.4	227	3.3
1	1	17.9	212	3.3
1	0.7	16.7	207	4.1
1	1.3	19.4	199	2.8
0.7	1	17.9	213	3.3
1.3	1	17.9	212	3.3
0.7	0.7	16.7	208	4.1
0.7	1.3	19.3	200	2.8
1.3	0.7	16.7	206	4.1
1.3	1.3	19.4	199	2.8
Disque dense				
Mesure		24.8	91	2.1
1	1	24.4	120	2.1
1	0.7	22.6	153	2.2
1	1.3	25.3	101	2.0
0.7	1	24.3	121	2.1
1.3	1	24.4	120	2.1
0.7	0.7	22.5	154	2.2
0.7	1.3	25.3	102	2.0
1.3	0.7	22.6	153	2.2
1.3	1.3	25.3	101	2.0

TABLE 6.16.: Etude de l'influence de la conductivité du cuivre et de la préforme sur les grandeurs électromagnétiques globales observables

Dans un premier temps nous constatons que toutes les caractéristiques globales semblent presque invariant par rapport à une modification de la conductivité de l'inducteur. En début de densification l'inductance est très sensible à la variation de conductivité du disque, sachant qu'une diminution de la conductivité mène à une augmentation de l'inductance et vice versa. Il est remarquable qu'un changement de la conductivité de la préforme conduit pour les deux cas, une augmentation et une diminution, à une diminution de la résistance globale. Pour comprendre ceci il faut savoir que le coefficient de couplage entre le disque et l'inducteur est fortement non-linéaire si bien que toute prédiction est complexe. Une résistance plus élevée correspond à une fréquence de résonance plus basse. De manière globale, au début du cycle, la moindre variation des propriétés électriques introduit plus un faussement de l'inductance qu'une correction de la résistance simulées par rapport aux mesures. A la fin du cycle, l'inductance semble très stable par rapport à tout changement de propriété alors que la résistance globale est très sensible à la variation de conductivité de la préforme. Pour rapprocher la résistance sortante de la simulation à la valeur mesurée, il faudrait augmenter la résistivité du disque dense de plus de 30%. Ceci conduirait à une légère hausse de la fréquence de résonance qui reste néanmoins négligeable.

Nous remarquons également que la simulation travaille avec un disque parfaitement vertical sans aucune inclinaison et positionné exactement au milieu du disque. Or, dans la réalité, ces deux hypothèses ne sont pas assurés complètement.

Pour compléter l'analyse des données électromagnétiques nous considérons 3 grandeurs qui

sont d'un fort intérêt industriel : La puissance totale consommée lors du cycle (fig. 60 en haut) est une mesure de la facture d'électricité à payer pour chaque cycle. C'est donc l'une des trois fonctions à minimiser, à côté de la consommation en précurseur et du temps de densification (pour augmenter la productivité).

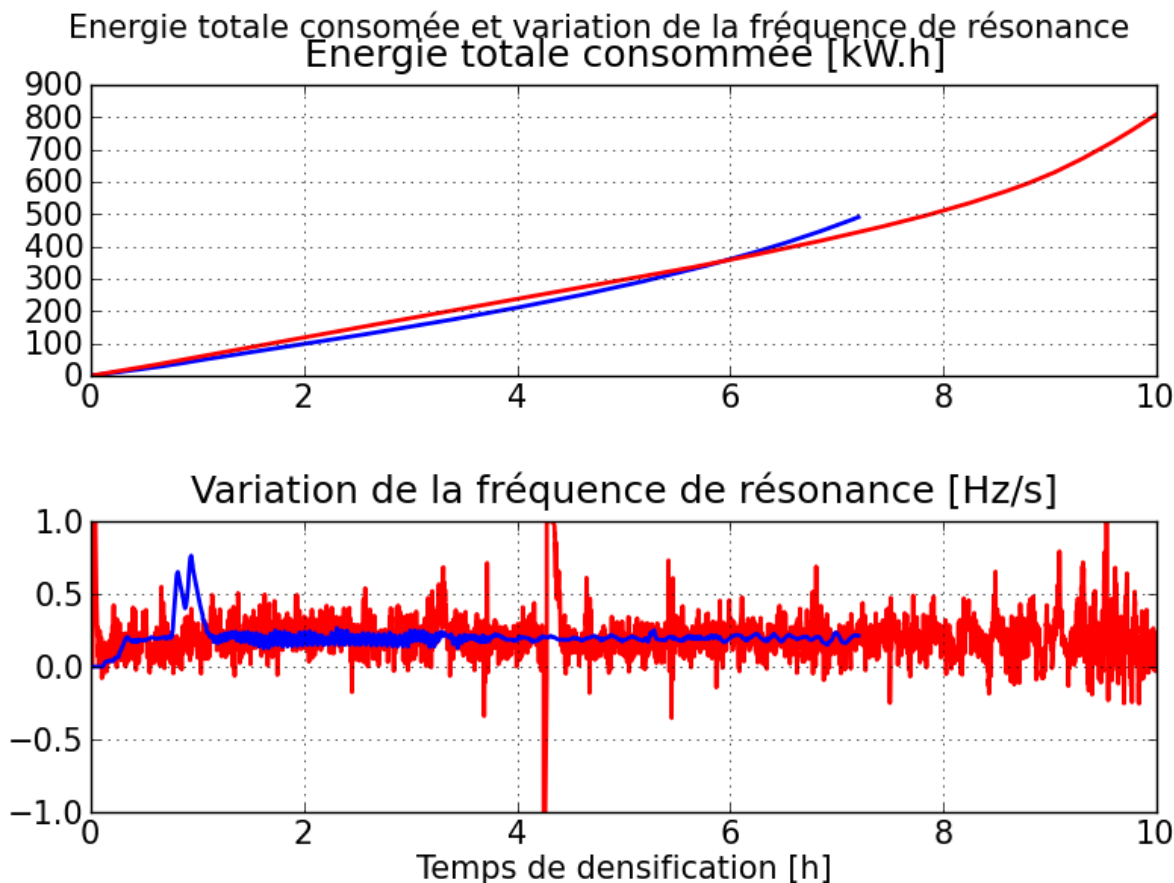


Fig. 60: Comparaison de l'expérience (rouge) et la simulation (bleu) pour : L'énergie totale utilisée lors du cycle (haut), variation temporelle de la fréquence de résonancé, visée à 0.2Hz/s .

L'étude de la variation de la fréquence de résonance (fig. 60 en bas) permet de vérifier plus en détail si la fonction cible pour la densification a été respectée. Nous confirmons notre constatation du début que l'expérience et la simulation y sont parvenues. Le bruit fort dans les données expérimentales est un indice pour l'imprécision des mesures ainsi que l'influence d'un certain nombre de perturbations qui ne sont pas prises en compte dans la simulation. Mais avant tout, ce bruit donne une idée de la difficulté du pilotage du procédé selon la consigne de variation de fréquence de résonance.

Finalement nous revenons sur l'obligation d'adapter la puissance pour maintenir la densification en route. Nous avons montré dans la section 6.3 que lorsque la puissance induite dans le disque reste approximativement la même, la densification s'arrête d'elle même. L'analyse de la puissance électrique nécessaire pour un cycle entier (fig. 58) montre une légère augmentation pendant plus de la moitié du cycle, mais une forte augmentation vers la fin. Ceci indique que vers la fin de cycle il y a un changement important de rendement du chauffage. Sa valeur sortant de la simulation est donnée sur la figure suivante :

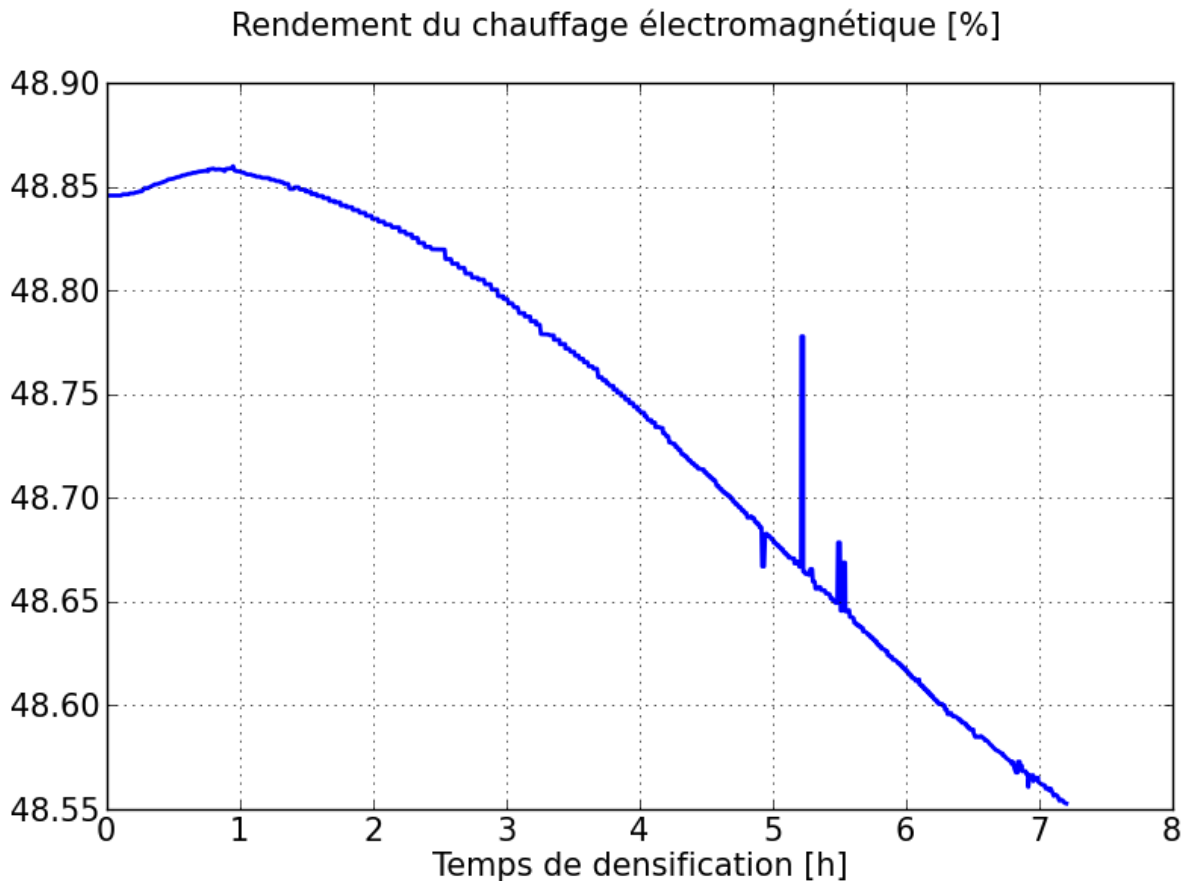


Fig. 61: Résultat de la simulation : Variation du rendement de chauffage au cours de la densification

Nous n'y constatons qu'une baisse négligeable d'environ 1% de la valeur maximale de rendement. L'explication pour l'augmentation de puissance est donc à chercher dans la thermique tout au long du procédé, qui varie à cause de la densification progressive.

6.4.2. Evolution de la température

Pour comparer l'évolution de température entre la simulation et l'expérience, nous avons réalisé des essais avec au total 10 thermocouples le long de l'axe miroir du disque et le long du bord. Leurs positions approximatives ainsi que leurs numéros pour les analyses sont comme suit :

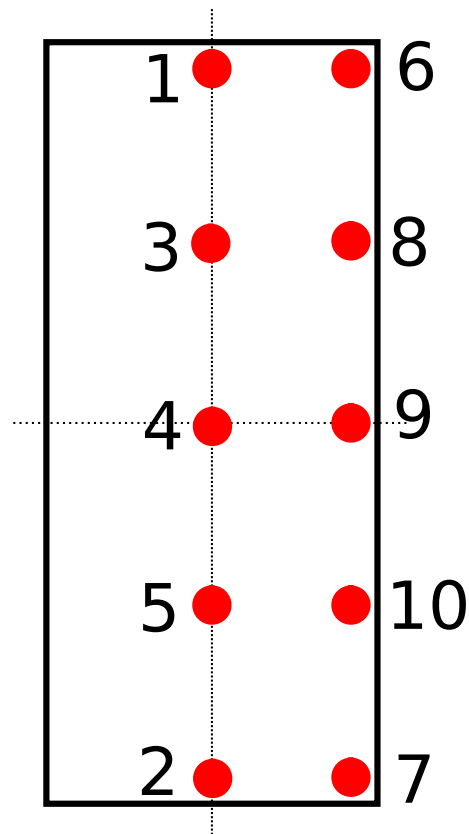


Fig. 62: Positionnement des thermocouples pour la comparaison entre simulation et expérience

Zoom sur l'ébullition

Dans un premier temps nous nous intéressons à l'évolution des température au démarrage d'un cycle de densification. Ceci permet de valider la deuxième grande contribution de cette thèse à la simulation du procédé, à savoir l'ébullition. Les températures des trois thermocouples au milieu de l'axe miroir du disque (3, 4 et 5) sont données sur la figure 63. De nouveau les courbes bleues correspondent aux résultats simulés et les courbes rouges aux mesures :

températures [°C] sur l'axe de symétrie miroir - Intérieur - Zoom sur l'ébullition

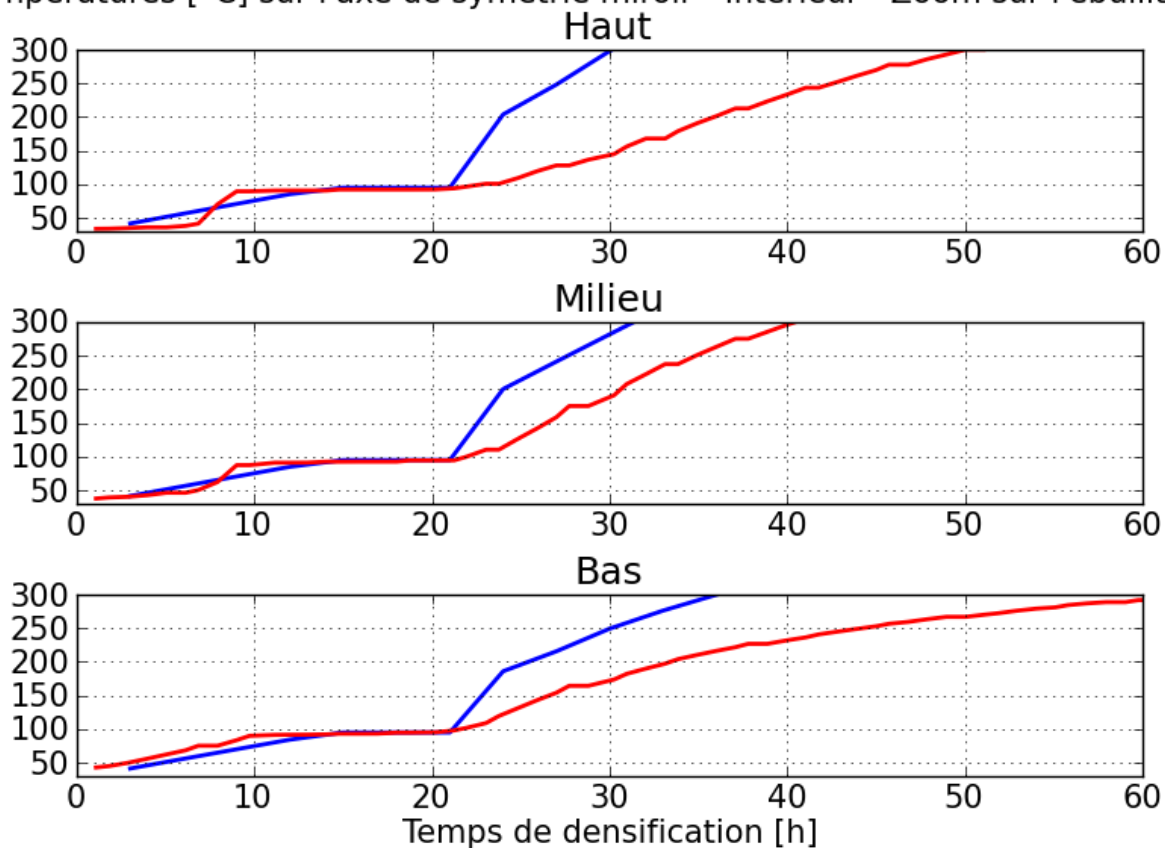


Fig. 63: Comparaison de l'expérience (rouge) et la simulation (bleu) pour : Température des Thermocouples 3 (haut), 4 (milieu) et 5 (bas)

Sur les 3 thermocouples nous comparons la simulation par rapport aux mesures et constatons que : i) Le temps pour porter le liquide à ébullition est plus long, ii) le temps où le thermocouple est à température d'ébullition est plus court et iii) la montée en température du gaz est plus rapide dans la simulation que dans l'expérience. Concernant les deux premières constatations nous rappelons que la condition de bord que nous utilisons a été déduite pour un cas avec du gaz dans le disque et du diphasique autour du disque. En fait, ce coefficient d'échange est différent suivant qu'il n'y a que du liquide ou qu'il y a du diphasique dans le disque. De plus, la puissance induite dans le disque peut différer légèrement entre la simulation et l'expérience. La montée de la température du gaz trop rapide sera discutée dans la suite.

Profils complets

Nous nous consacrons maintenant à l'évolution des trois thermocouples du paragraphe précédent pendant le reste du cycle :

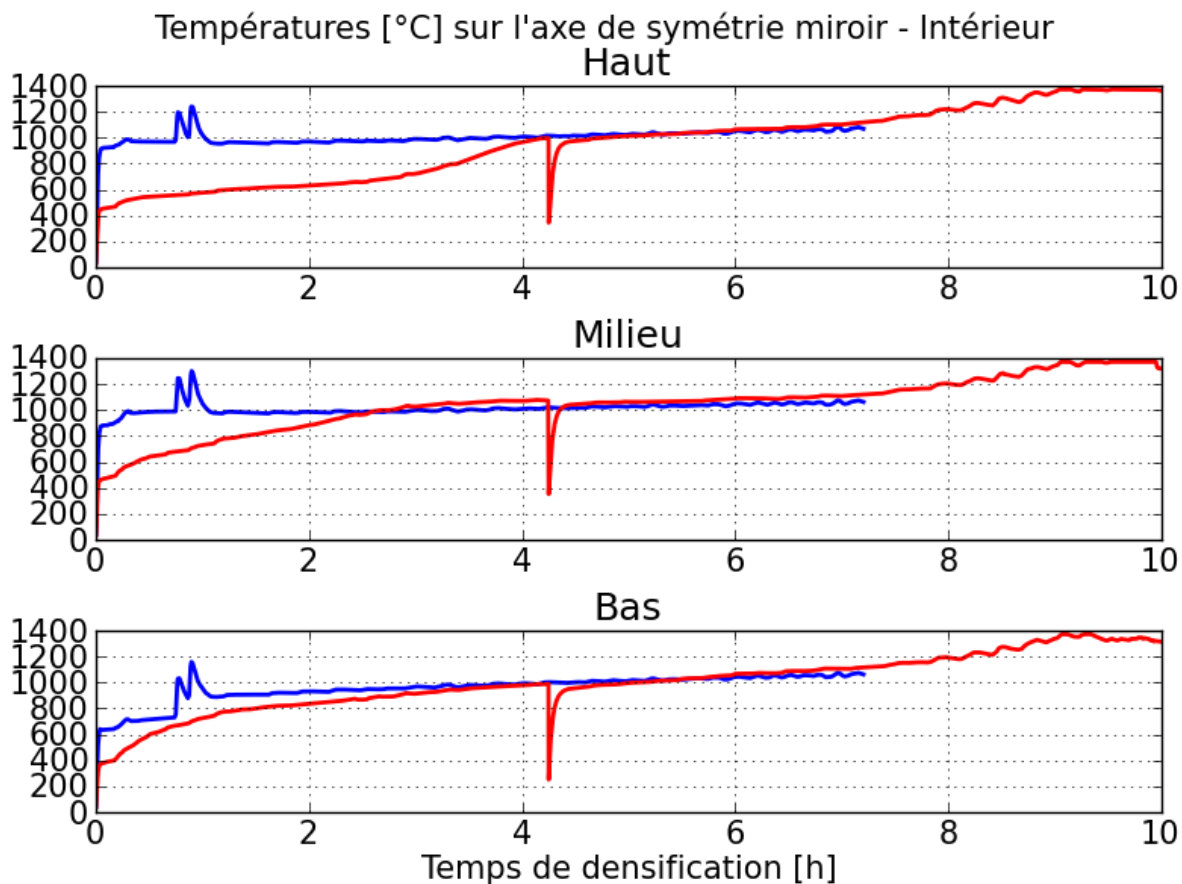


Fig. 64: Comparaison de l'expérience (rouge) et la simulation (bleu) pour : Température des Thermocouples 3 (haut), 4 (milieu) et 5 (bas)

Tous les thermocouples se mettent très rapidement à une température supérieure aux valeurs mesurées correspondantes. Ensuite ils maintiennent leurs valeurs stables jusqu'au moment où la courbe mesurée rejoint la même valeur. La montée plus lente de la température mesurée peut être expliquée par le fait qu'au début la cuve de réaction est remplie de liquide. Ce milieu étant un milieu libre est également sujet à un échange de chaleur global de chaleur élevé par convection et conduction. Durant le début de l'expérience beaucoup d'énergie induite dans le disque est alors évacuée afin de chauffer le liquide. Plus le temps du procédé avance et plus une couche diphasique se crée autour du disque. La saturation de cette couche en contact avec le disque diminue peu à peu. Pour prendre en compte ces phénomènes il faudrait adapter la simulation de manière suivante :

- Au lieu d'utiliser une température extérieure constante, nous devrions introduire une enthalpie volumique qui évolue au cours du temps avec le flux de chaleur sortant du disque. Pour éviter d'introduire tous les problèmes liés à un traitement du milieu libre autour du disque, une première approche peut consister à garder le concept d'une température extérieure globale qui évolue par rapport au flux thermique total sortant du disque.

Une telle approche s'appuie sur le constat que l'échange thermique à l'intérieur de la cuve se fait facilement. Elle demande un effort numérique qui est seulement très faible puisque c'est une valeur simple qui se rajoute à une liste avec autant de valeurs qu'il y a de noeuds et de variables spatiales.

- Le coefficient d'échange h va ensuite dépendre de cette valeur d'enthalpie externe. Ainsi nous prenons en compte qu'un coefficient d'échange réel dépend du milieu avec lequel

l'échange se fait, et de la différence de température. La loi de $h(\rho h_{ext})$ doit ensuite être trouvée en faisant tourner différentes simulations et en essayant de rapprocher les résultats aux mesures.

Cette approche permettrait d'améliorer les résultats du début de simulation tout en gardant la bonne correspondance vers la fin.

Nous rajoutons maintenant à l'analyse les deux thermocouples sur l'axe miroir au rayon intérieur et extérieur :

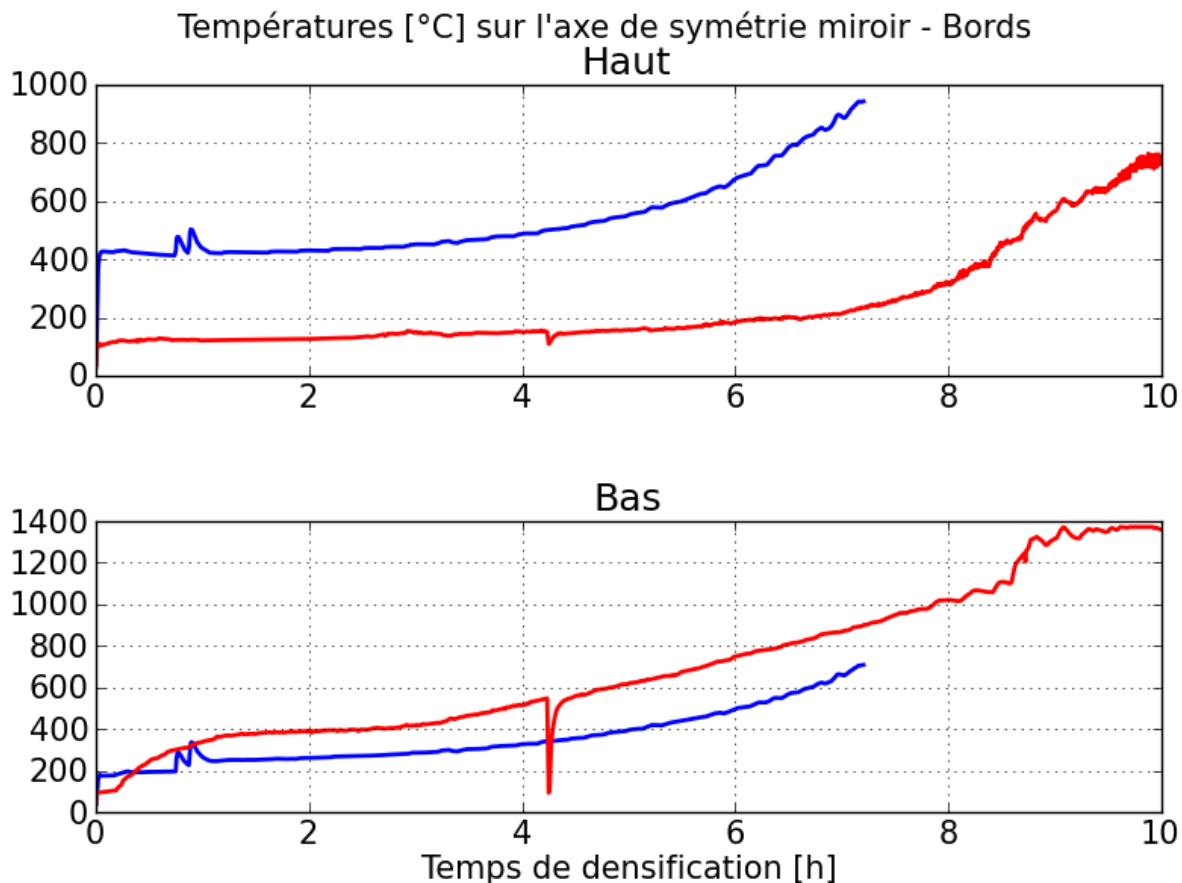


Fig. 65: Comparaison de l'expérience (rouge) et la simulation (bleu) pour : Température des Thermocouples 1 (haut) et 2 (bas)

La montée rapide de la valeur simulée du thermocouple mène aux mêmes conclusions que ci-dessus. Le thermocouple en bas suit un développement complètement différent : Il monte rapidement au début du cycle mais en moins d'une demie-heure de cycle, la température mesurée dépasse la valeur simulée. Ceci est lié au fait que nous simulons une section de disque rectangulaire seule dans l'espace alors que la réalité représente un disque. Le bas du rectangle simulé correspond au rayon intérieur. Le fluide dans la cuve en contact avec ce côté du disque représente un espace confiné qui est en contact avec un flux de chaleur fort, venant du rayon intérieur complet du disque. La valeur d'enthalpie externe est donc différente de celle à utiliser pour le bord en haut, et notamment elle correspond rapidement à un état purement diphasique.

Pour finir nous regardons les 5 thermocouples dans le disque au bord face à l'inducteur :

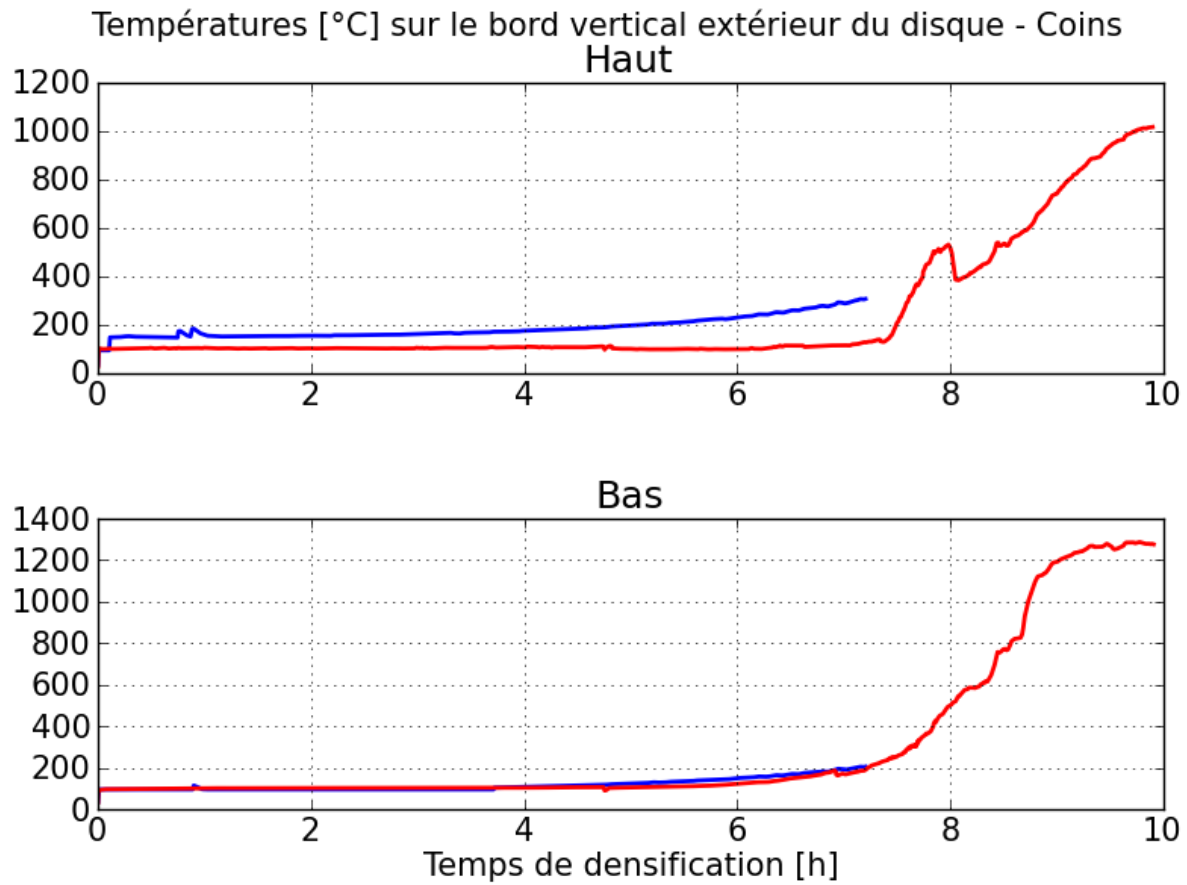


Fig. 66: Comparaison de l'expérience (rouge) et la simulation (bleu) pour : Température des Thermocouples 6 (haut) et 7 (bas)

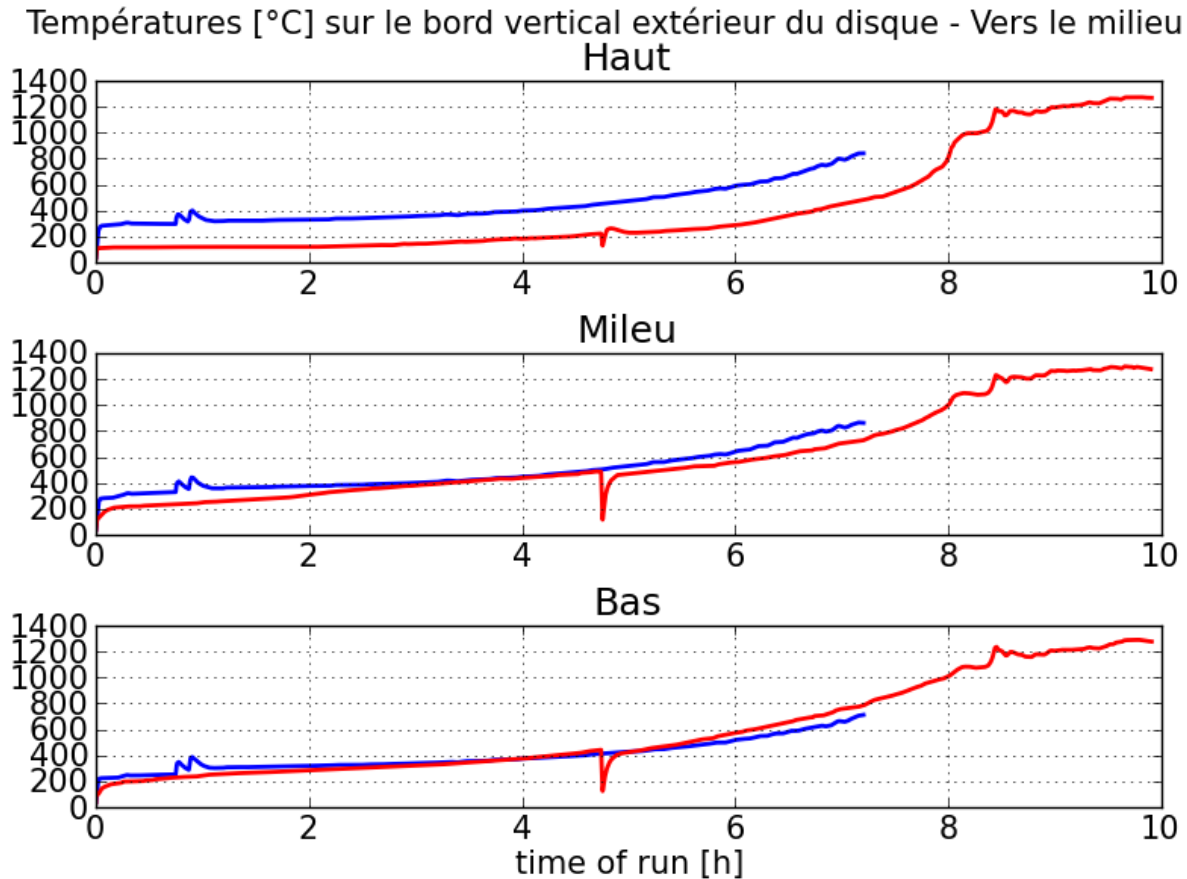


Fig. 67: Comparaison de l'expérience (rouge) et la simulation (bleu) pour : Température des Thermocouples 8 (haut), 9 (milieu) et 10 (bas)

De manière générale nous nous apercevons que les valeurs simulées suivent beaucoup mieux les mesures et ceci du début jusqu'à la fin du cycle. Ceci s'explique par le fait qu'il s'agit d'un entrefer de taille très confinée et parcouru constamment par un flux convectif de gaz qui s'échappe du rayon intérieur du disque pour sortir en haut de la cuve. En plus de recevoir le flux de chaleur du disque, cette région est refroidie par le contact avec l'inducteur qui, lui, est maintenu à température d'environ 20°C par un circuit interne d'eau. Ainsi le fluide dans cette zone se met rapidement en état diphasique et y persiste pendant la plupart du temps de cycle. La fin de cet état stable est caractérisé par ce que l'on appelle la crise d'ébullition : Il y a des parties en contact du disque qui vont quitter l'état diphasique et devenir purement gazeuses. Ceci diminue le coefficient d'échange d'un ordre de grandeur et fait monter la température au bord du disque d'un coup. Cette augmentation brusque est observable dans chaque thermocouple du bord l'un après l'autre : D'abord, au bout de 7h, pour le thermocouple 6 (fig. 66 en haut), ensuite au bout de 8h pour les thermocouples 8, 9, 10 (fig. 67 et 7 (fig. 66 en bas). Cette crise d'ébullition n'est pas représentée par le modèle. Pour cela il faudrait un calcul de la thermique et transport étendue à la cuve.

Profil de température simulés à différentes étapes

Pour donner une vision plus globale des profils de température nous montrons les résultats de simulation au début du cycle, à la fin et à 2 étapes intermédiaires :

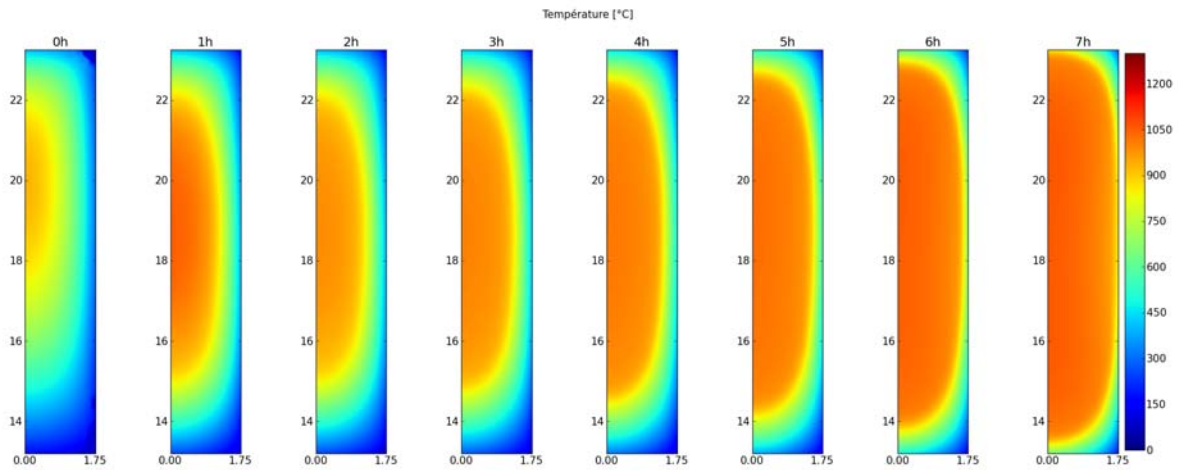


Fig. 68: Profil de température simulé à différents états de densification

Les profils suivant la section verticale sur l'axe miroir (du bord du thermocouple 2 de la figure 62 jusqu'au bord du thermocouple 1) et la section horizontale à mi-hauteur du disque (thermocouple 4 jusqu'au bord du thermocouple 9) sont présentées ci-dessous :

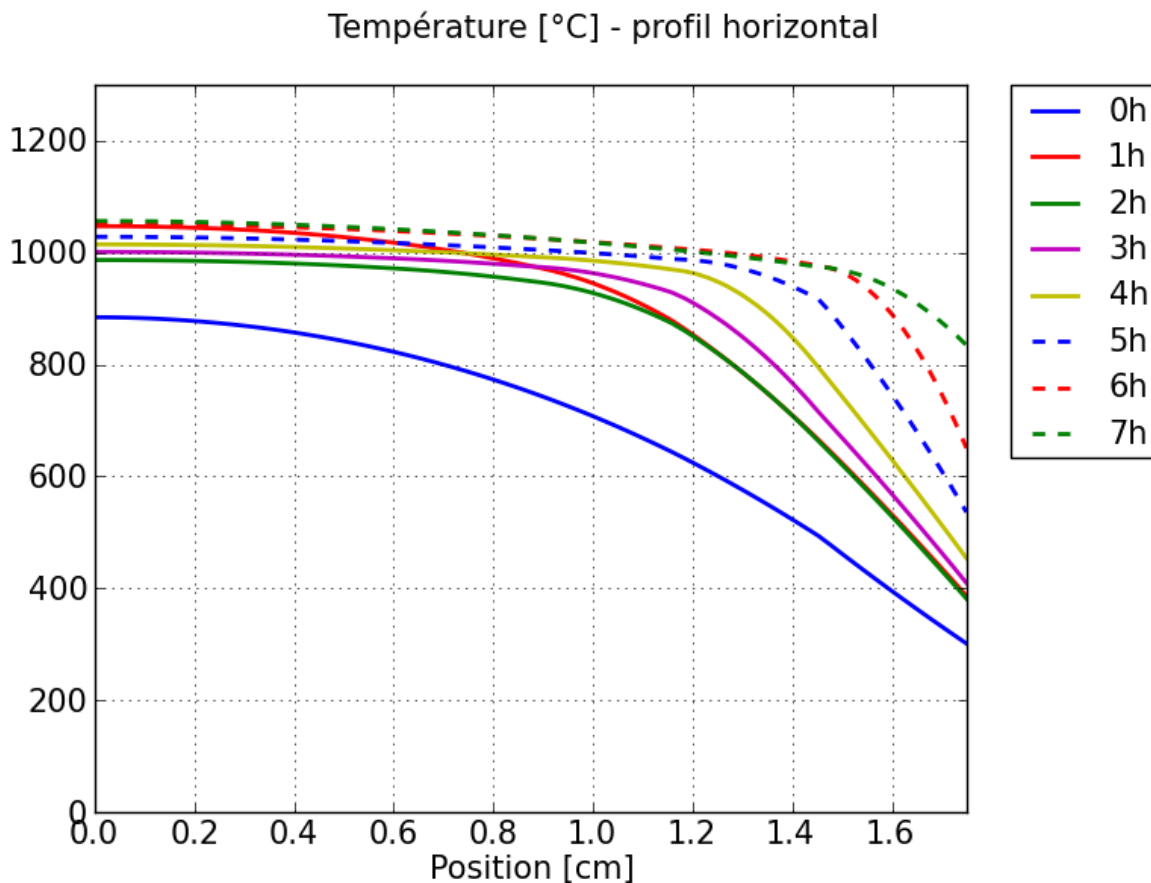


Fig. 69: Profil de température simulé à différents états de densification - section selon x à mi-hauteur (du thermocouple 4 vers le thermocouple 9)

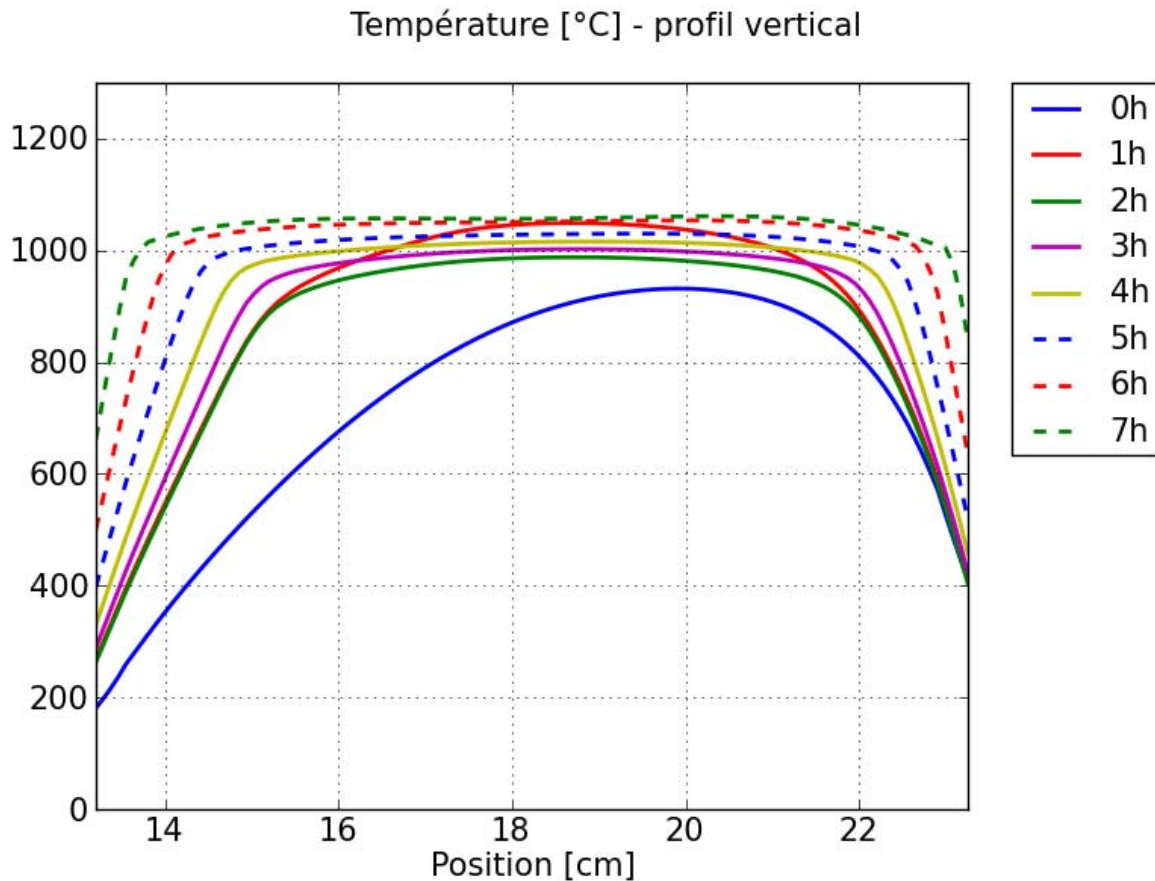


Fig. 70: Profil de température simulé à différents états de densification - section selon y du bas vers le haut (du thermocouple 2 vers le thermocouple 1)

Nous y retenons 4 faits principaux :

- La température globale augmente au cours de la densification afin d'assurer une température dans le front qui tombe dans une gamme aux alentours de 900°C .
- Les températures au bord montent au cours du temps. Celles-ci sont proportionnelles au flux de chaleur sortant du disque qui lui aussi augmente au cours du temps, puisque nous injectons de plus en plus d'énergie.
- Les profils sont sous forme de tonneaux de plus en plus aplatis, avec un gradient de plus en plus fort aux bords.
- Le point le plus chaud est décalé vers le haut par rapport à la mi-hauteur du disque. Ceci s'explique par la convection du gaz. La convection est plus importante dans notre cas que dans la CVI classique puisque, au lieu d'avoir du gaz partout de la cuve et donc une pression à peu près homogène, la pression au bord du disque est imposée par le liquide dans la cuve.

Les 3 premiers points sont très similaires aux résultats de (Vignoles et al., 2006) malgré un pilotage nettement différent du procédé.

6.4.3. Comparaison de grandeurs globales

Pour conclure la comparaison entre la simulation et les mesures nous étudions quelques grandeurs globales. Le graphique suivant montre la puissance induite dans le disque (non

pas celle régulée à l'armoire électrique), la variation de la porosité moyenne et la masse de pyrocarbone déposée au cours du temps :

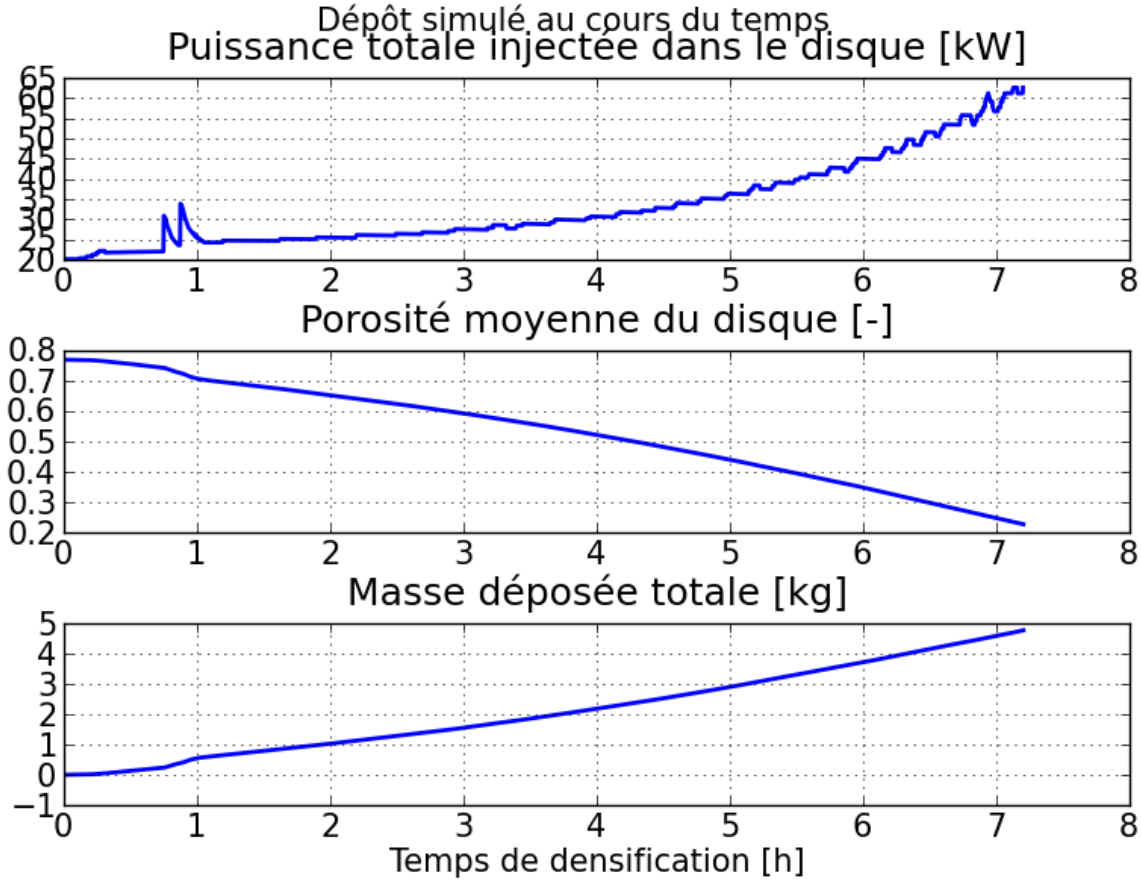


Fig. 71: Résultats de la simulation : En haut : Puissance électrique cumulée, au milieu : Variation de la porosité, en bas : Gain de masse

Dans un premier temps nous remarquons que la puissance injectée suit la même évolution que la puissance dans l'armoire (fig. 58) avec des valeurs environ 50% plus petites. Ceci est directement lié au rendement électromagnétique constant (fig. 61). La porosité moyenne et la masse déposée suivent des courbes de même allure dans le sens opposé. En effet les deux sont directement lié par le calcul de la masse totale du disque :

$$\bar{\varepsilon}(t) = \frac{1}{V} \int \varepsilon(t, \vec{x}) dV \quad (6.10a)$$

$$\begin{aligned} \Delta m(t) &= m(t) - m_0 = \int \{ \rho(t, \vec{x}) - \rho_{vierge} \} dV \\ &= \int \{ [\rho_{fibre} \cdot (1 - \varepsilon_{init}) + \rho_{pyC} \cdot (\varepsilon_{init} - \varepsilon(t))] - \rho_{fibre} \cdot (1 - \varepsilon_{ini}) \} dV \\ &= \rho_{pyC} \cdot V \cdot (\varepsilon_{init} - \bar{\varepsilon}(t)) \end{aligned} \quad (6.10b)$$

En comparant la courbe de prise de masse obtenue par pilotage à variation de fréquence de résonance constante avec celle obtenue par pilotage à puissance constante (voir fig. 56, on constate que ce premier mode de pilotage est bien plus intéressant, puisqu'il permet d'avoir une vitesse de prise de masse constante voire en légère augmentation, au lieu d'avoir une forte diminution.

Ce que nous pouvons comparer avec l'expérience parmi ces résultats c'est la prise masse à la fin du cycle : Chez MBD elle a été mesurée à environ 6.5kg contre 6kg dans la simulation. Lorsque nous prenons en compte que la simulation n'a pas pu finir la densification jusque

dans les coins, nous pouvons conclure que les deux valeurs de prise de masse sont en bonne concordance.

6.5. Analyse des résultats, les in-observables

Pour finir le chapitre d'étude d'un cas concret, nous rajoutons quelques in-observables, c'est à dire des grandeurs qui sont intéressantes pour la compréhension du procédé, mais que l'on ne peut pas observer au cours d'un cycle. Les raisons de l'impossibilité de mesure pendant le cycle peuvent être l'inexistence de moyens de mesure suffisamment simples, sûrs et non-intensifs pour être utilisés en parallèle du procédé. C'est par exemple le cas pour la cartographie de la concentration de l'espèce X dans le disque. Pour la porosité il existe des moyens de mesure, comme par exemple les rayons X (Lines, 2003), mais il serait trop compliqué et trop dangereux de prendre des radiographies du disque en cours de route. Nous rappelons notamment que le précurseur cyclohexane est très combustible si bien qu'aucune installation nécessitant des courants électriques, autre que les inducteurs bien sécurisés n'a le droit de se trouver à proximité de la cuve de réaction quand le procédé est en route. Nous verrons d'abord la saturation lors du préchauffage, ensuite la porosité à différentes étapes de densification, la largeur et la vitesse du front de densification, et finalement la fraction massique de l'espèce X .

Toutes les figures suivantes jusqu'au bout de ce chapitre suivent le même schéma que celui utilisé pour les profils de température ci-dessus.

6.5.1. Profils de saturation lors du préchauffage

L'un des défis majeurs de cette thèse était la prise en compte de l'ébullition. Celle-ci s'est avérée de ne pas avoir une importance forte dans la densification des disques considérés dans cette thèse, puisque tout le liquide et presque tout le diphasique sont chassés du disque au départ du procédé. L'ébullition peut néanmoins redevenir intéressante lorsqu'on veut étudier des disques plus grands ou des disques avec une conductivité thermique différente. L'ébullition peut également devenir importante lorsqu'on considère des empilements de disques pour un procédé plus industrialisé ou bien quand on arrive à trouver un mode de chauffage optimisé qui chauffe plus localement dans la zone de dépôt.

En tout cas il est intéressant de fournir les résultats apportés par ce solveur pour montrer son bon fonctionnement.

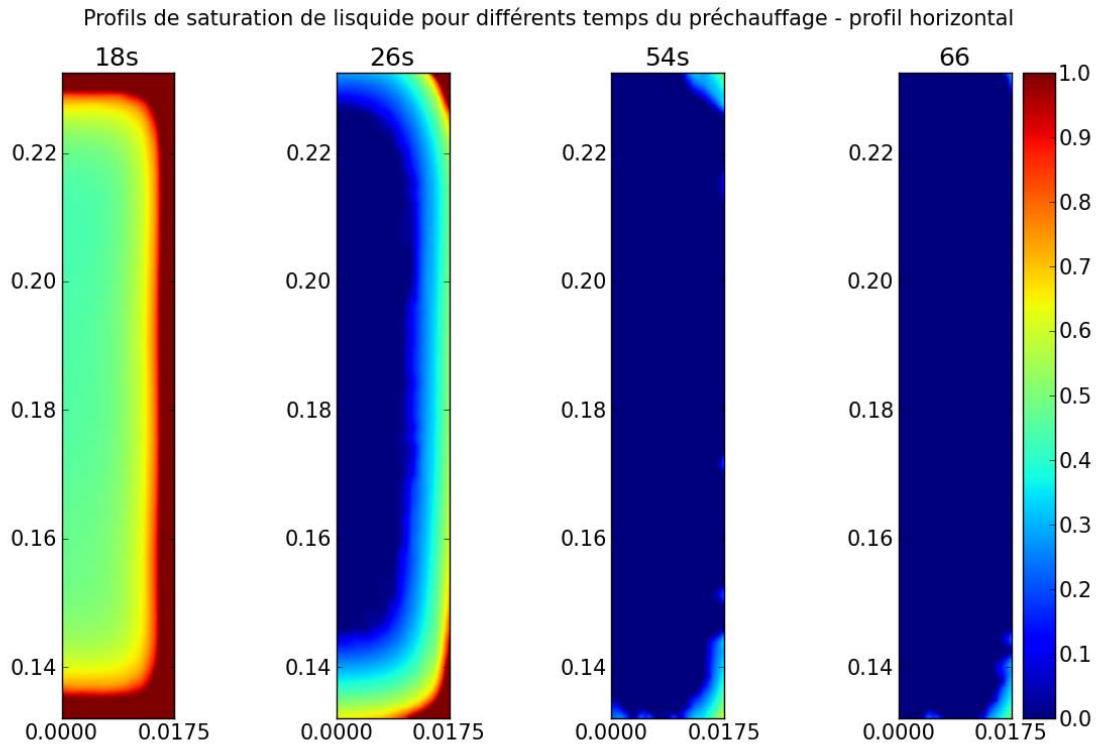


Fig. 72: Champ de saturation simulé à différents moments au chauffage initial

Saturation de liquide - Profil horizontal

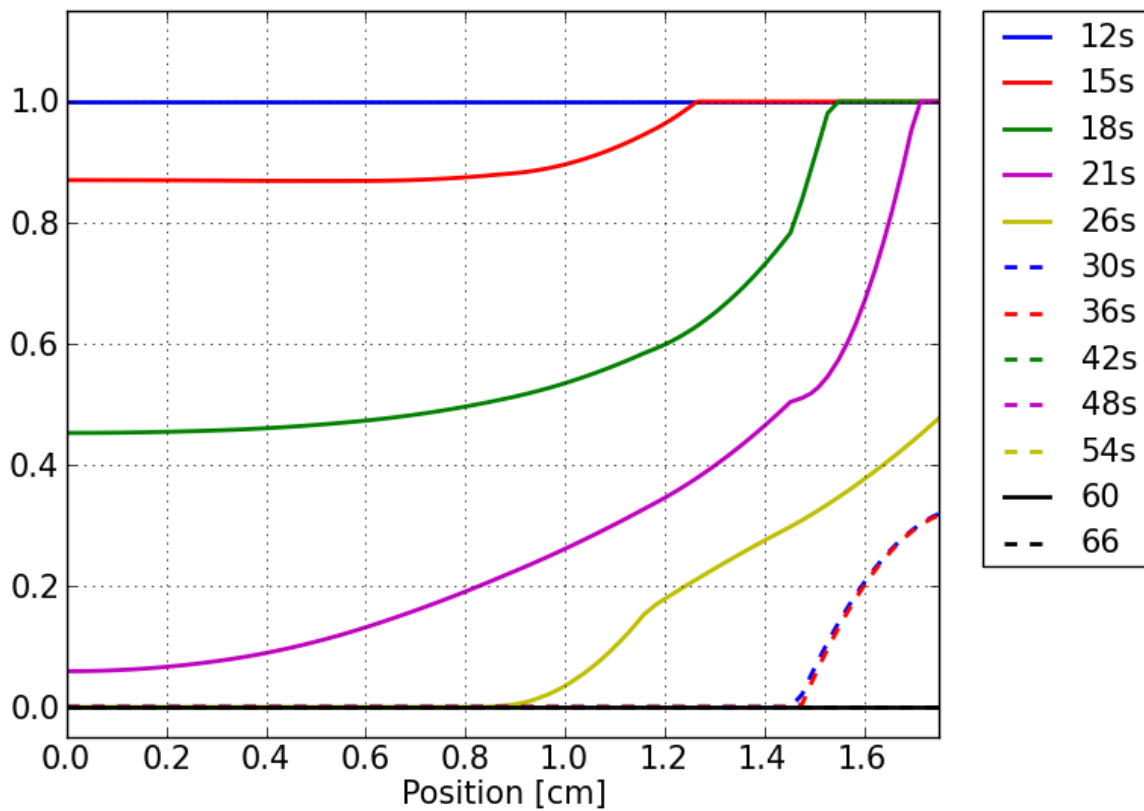


Fig. 73: Profil de saturation simulé à différents moments au chauffage initial - section selon x à mi-hauteur (du thermocouple 4 vers le thermocouple 9)

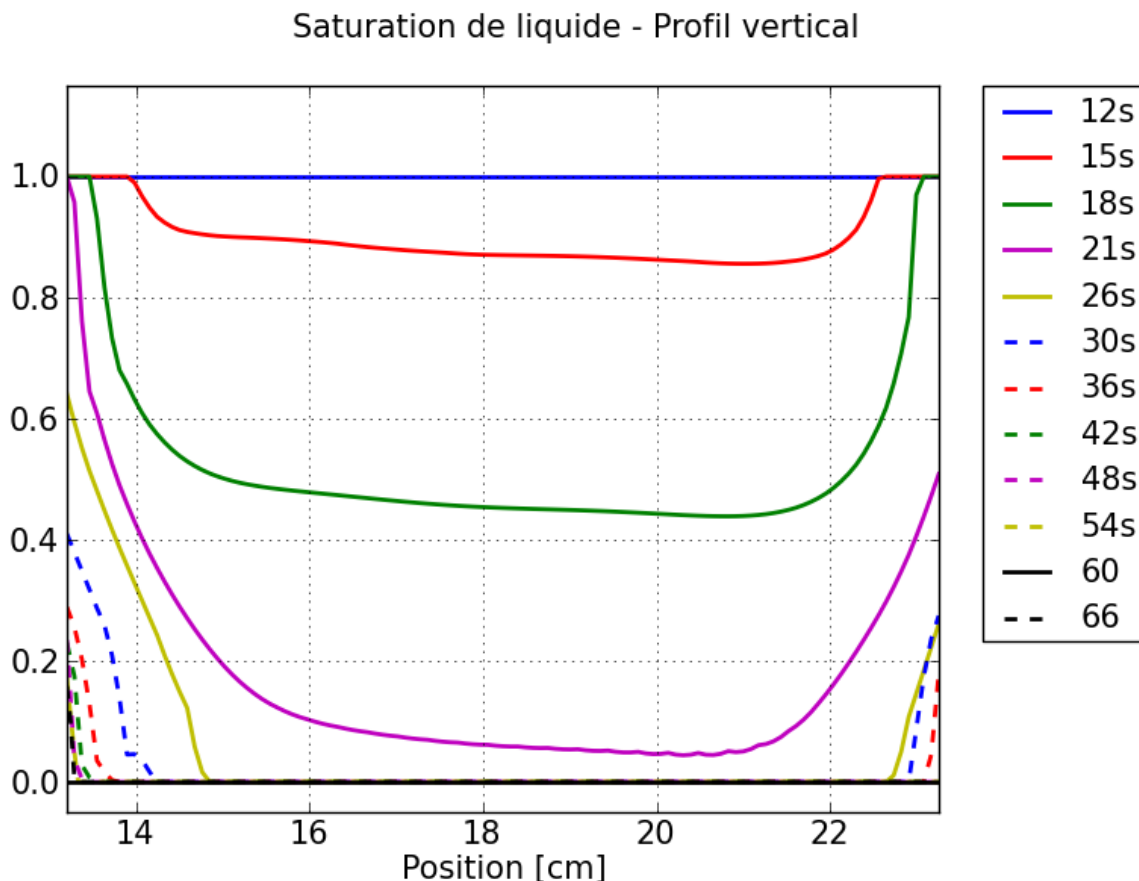


Fig. 74: Profil de saturation simulé à différents moments au chauffage initial - section selon y du bas vers le haut (du thermocouple 2 vers le thermocouple 1)

Nous y observons bien l'établissement d'une zone d'ébullition partant du coeur du disque au bout d'environ 15s avec une diminution rapide de la fraction de liquide et l'apparition d'une zone asséchée au centre du disque. Cette zone gazeuse s'étend ensuite et pousse tout le liquide en dehors de la préforme, d'abord en haut, ensuite sur le côté et finalement en bas, jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'un faible pourcentage dans les coins. L'existence des zones diphasiques dans les coins persiste jusqu'à un état plus avancé de la densification.

6.5.2. Porosité à différentes étapes

L'inobservable qui intéresse sans doute le plus est l'évolution de la porosité :

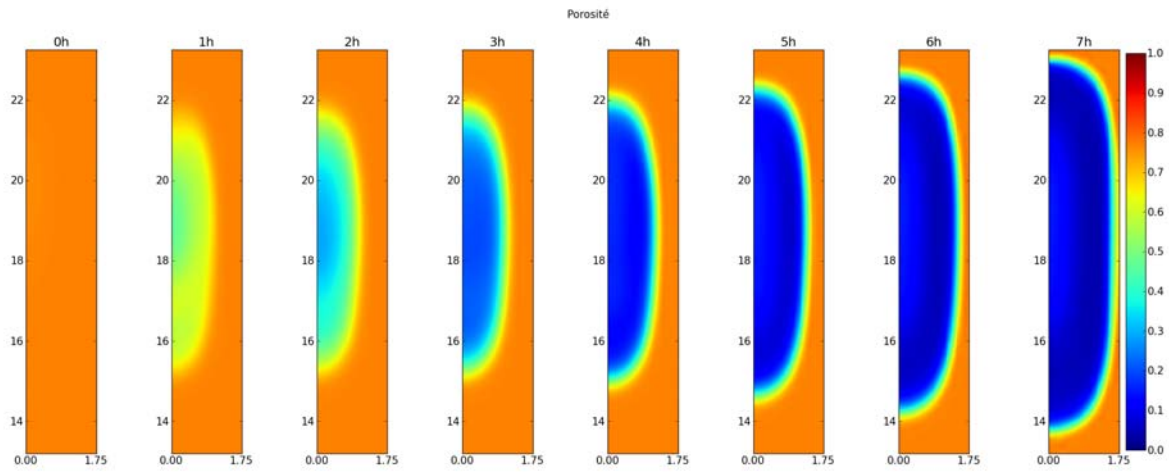


Fig. 75: Champ de porosité simulée à différents états de densification

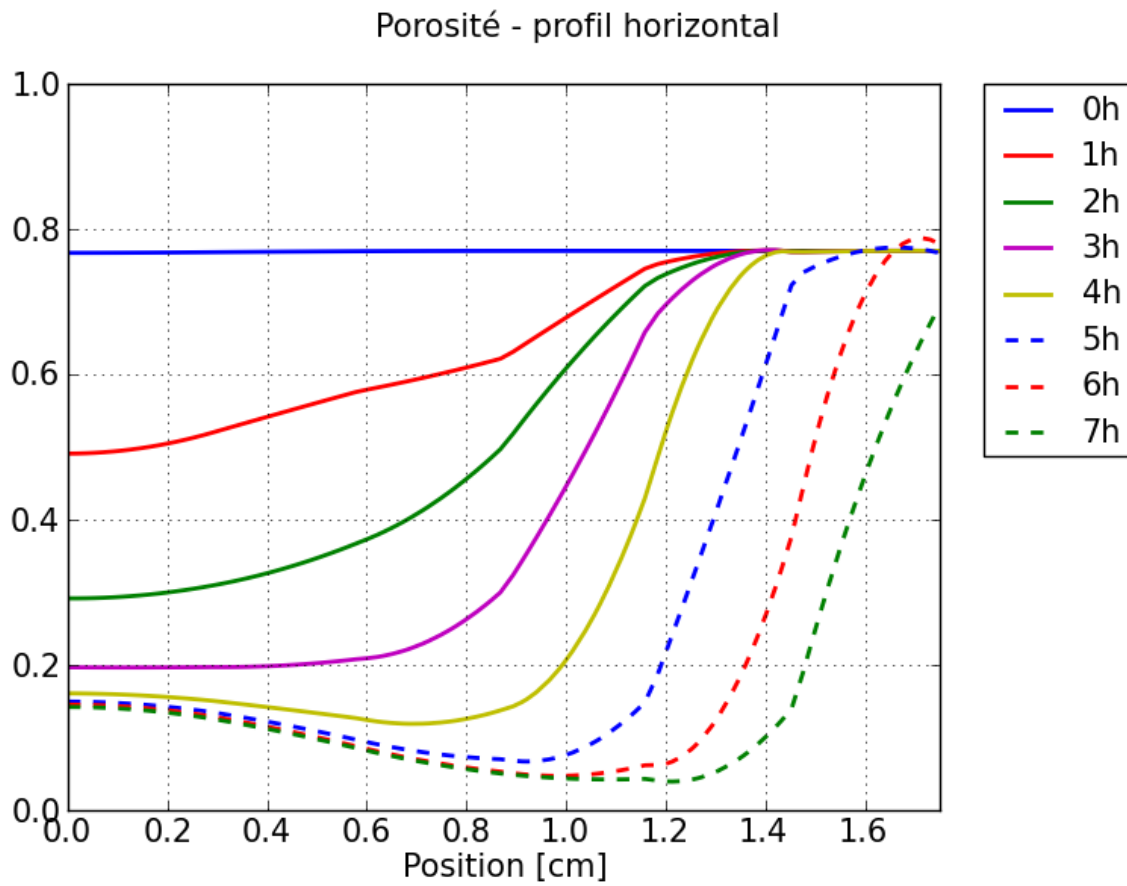


Fig. 76: Profil de porosité simulée à différents états de densification - section selon x à mi-hauteur (du thermocouple 4 vers le thermocouple 9)

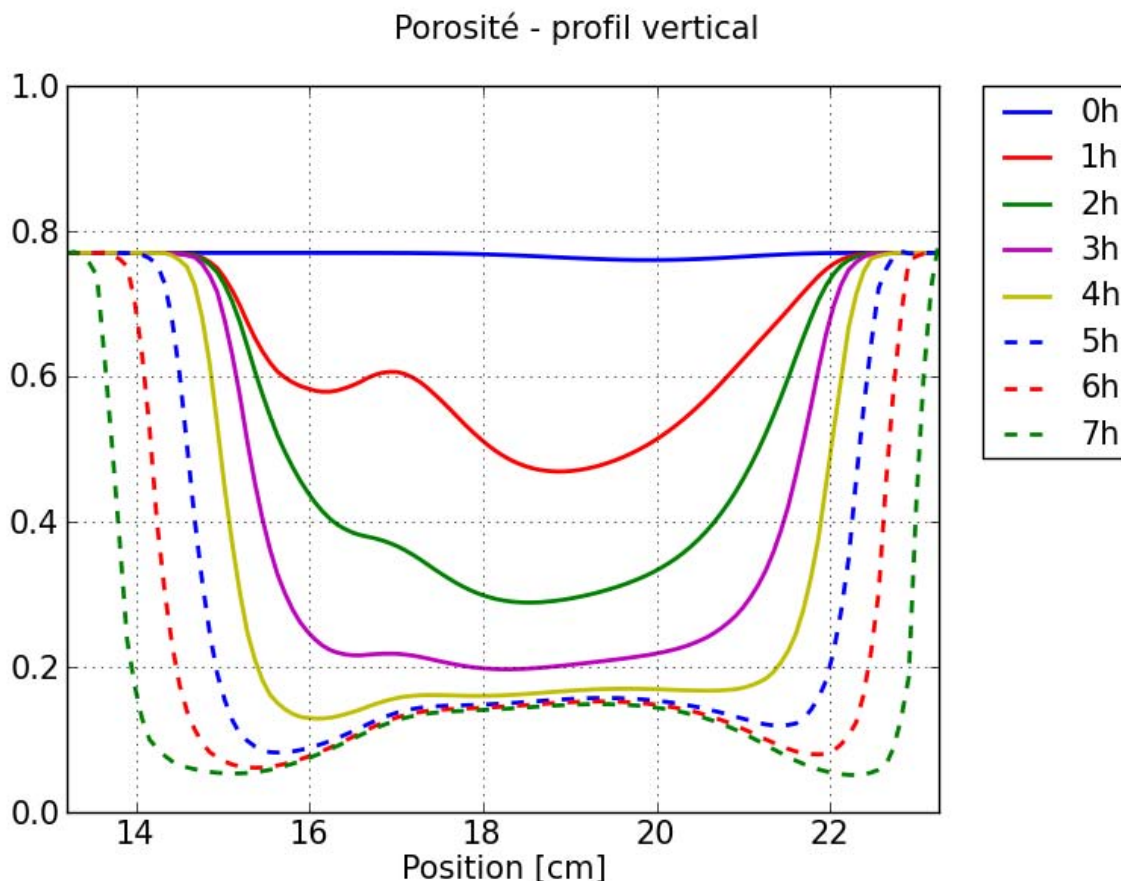


Fig. 77: Profil de porosité simulée à différents états de densification - section selon y du bas vers le haut (du thermocouple 2 vers le thermocouple 1)

La densification commence dans la région la plus chaude au début du procédé. Dans un premier temps c'est le cœur qui se densifie jusqu'à une première porosité seuil. Pendant cette phase la zone en densification s'étale. A la fin de cette phase nous avons un front sous forme d'ellipse aplatie. Dans un deuxième temps le front se propage vers le bord du disque et la densification du cœur continue lentement jusqu'à atteindre la porosité résiduelle finale. Pendant l'avancement du front, celui-ci devient de moins en moins large, c'est à dire que le gradient local de la porosité y augmente. L'ellipse de densification va d'abord toucher les bords verticaux, le disque étant plus mince en direction x , ensuite le haut du disque et finalement le bas. Dans un troisième temps la densification se fait dans les coins du disque. Pour maintenir la densification en route, beaucoup d'énergie est nécessaire. Puisque le disque est déjà dense jusqu'à ses bords, la plupart de cette énergie est dissipée dans le milieu libre entourant le disque. Il y aura donc rapidement une couche de gaz qui va se créer au contact du disque, ce qui réduit d'un coup les échanges thermiques entre celui-ci et son entourage puisque le gaz est très mauvais conducteur de chaleur. Nous arrivons donc à la crise d'ébullition que nous avons déjà mentionnée en rapport avec la figure 67. A ce moment le pilotage de la densification devient particulièrement difficile et dangereux lorsqu'on sur-chauffe le disque.

6.5.3. Largeur et vitesse au cours du temps

Nous détaillons l'étude de l'avancement de la densification et considérons le taux de densification. Celui-ci est sujet d'une optimisation dans le chapitre 7.2.

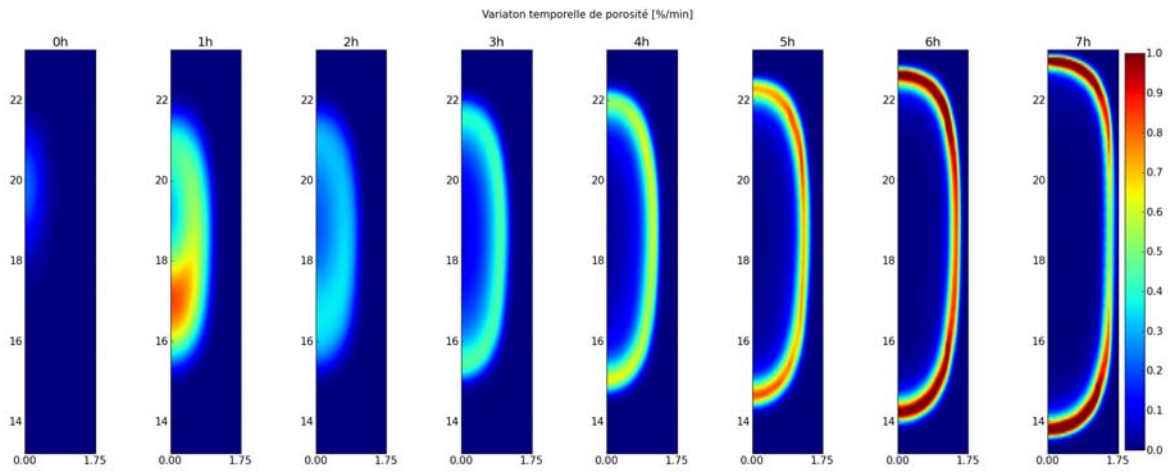


Fig. 78: Profil de la variation temporelle de porosité simulé à différents états de densification

Variation temporelle de porosité [%/min] - profil horizontal

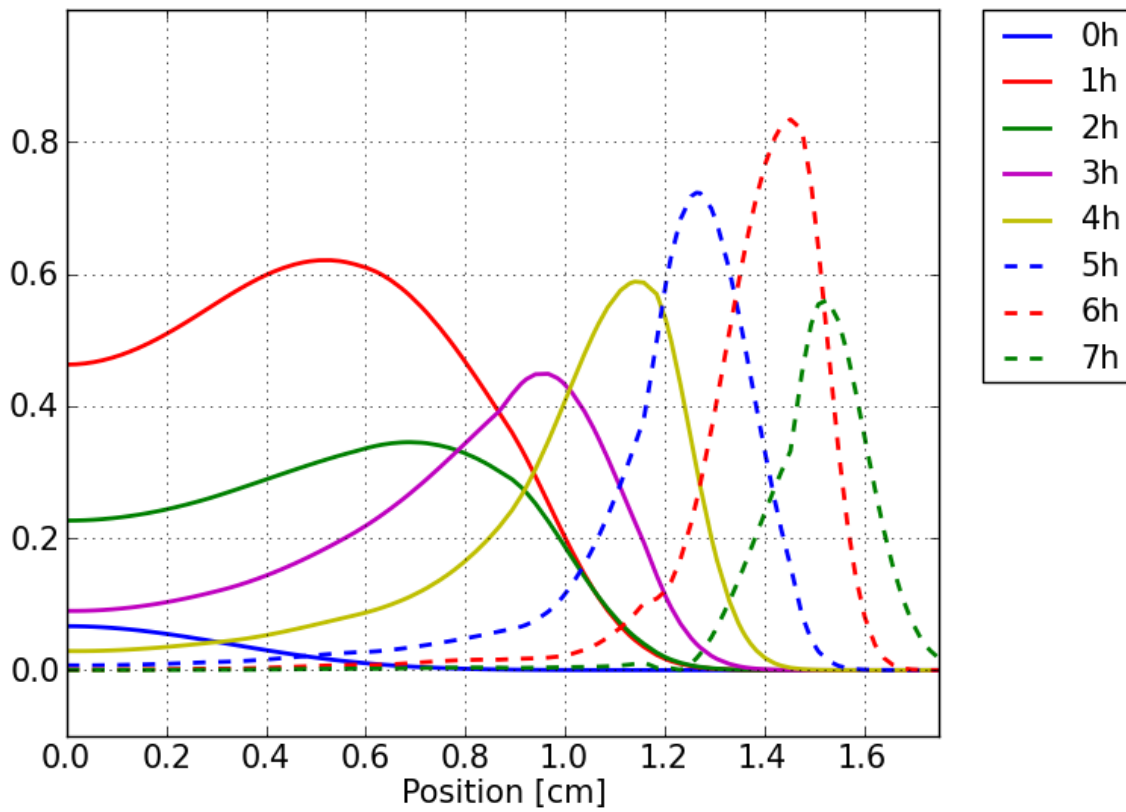


Fig. 79: Profil de la variation temporelle de porosité simulé à différents états de densification - section selon x à mi-hauteur (du thermocouple 4 vers le thermocouple 9)

Variation temporelle de porosité [%/min] - profil vertical

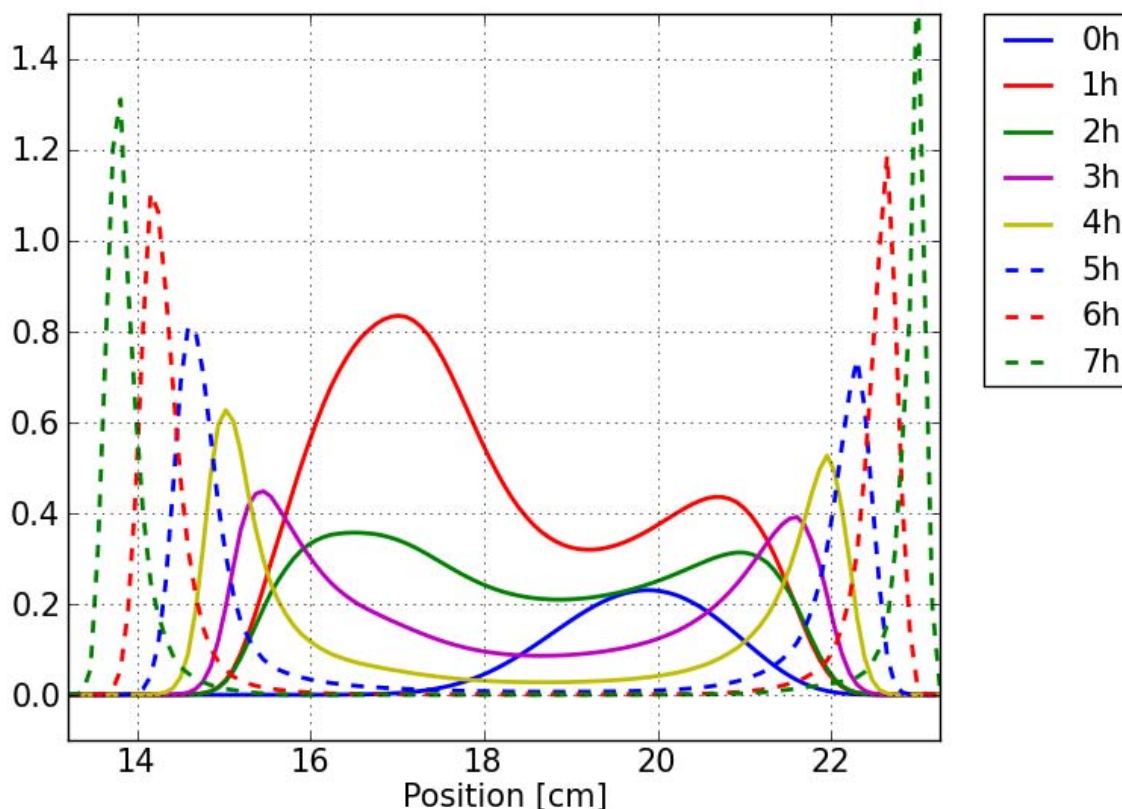


Fig. 80: Profil de la variation temporelle de porosité simulé à différents états de densification - section selon y du bas vers le haut (du thermocouple 2 vers le thermocouple 1)

En plus des informations que nous avons tirées des profils de porosité, le taux de densification permet de trouver facilement la position et la taille du front puisqu'il vaut zéro partout en dehors de cette zone. Il faut savoir que nous avons 2 positions de front en section selon y , une vers le haut et une vers le bas comme on le constate sur les graphiques ci-dessus. En section selon x il est de même mais tout est symétrique par rapport à l'axe centrale. Les positions des fronts, que nous définissons comme les endroits des maxima de variation temporelle de porosité, sont représentées sur le graphique 81 et les vitesses correspondantes sur la figure 82. Les positions sont mesurées par rapport au centre de la section du disque, correspondant au thermocouple 4 de la figure 62. Pendant les premières 3h de cycle, les fronts ne correspondent pas encore à des pics clairs, mais à des courbes mous vers le centre du disque. Pendant ce temps nous définissons la largeur du front comme la distance entre le minimum central de la courbe $\partial\varepsilon/\partial t$ et le point $\partial\varepsilon/\partial t > 0$ vers l'extérieur du disque. L'évolution de la largeur du front est représentée sur la figure 83 :

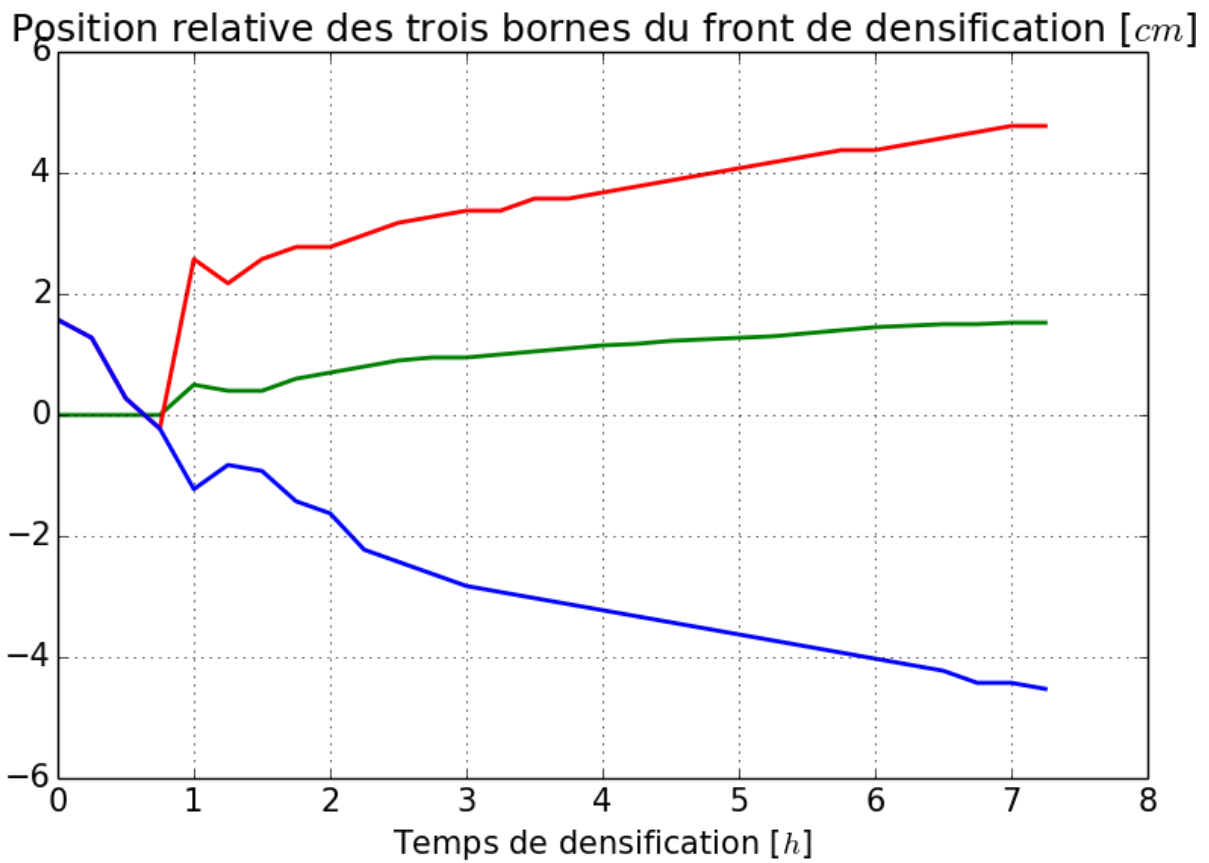


Fig. 81: Position du front de densification en section selon x et selon y : (1) Borne droite selon x à y égale à mi-hauteur du disque, (2) Borne supérieure selon y à $x = 0$, (3) Borne inférieure selon y à $x = 0$

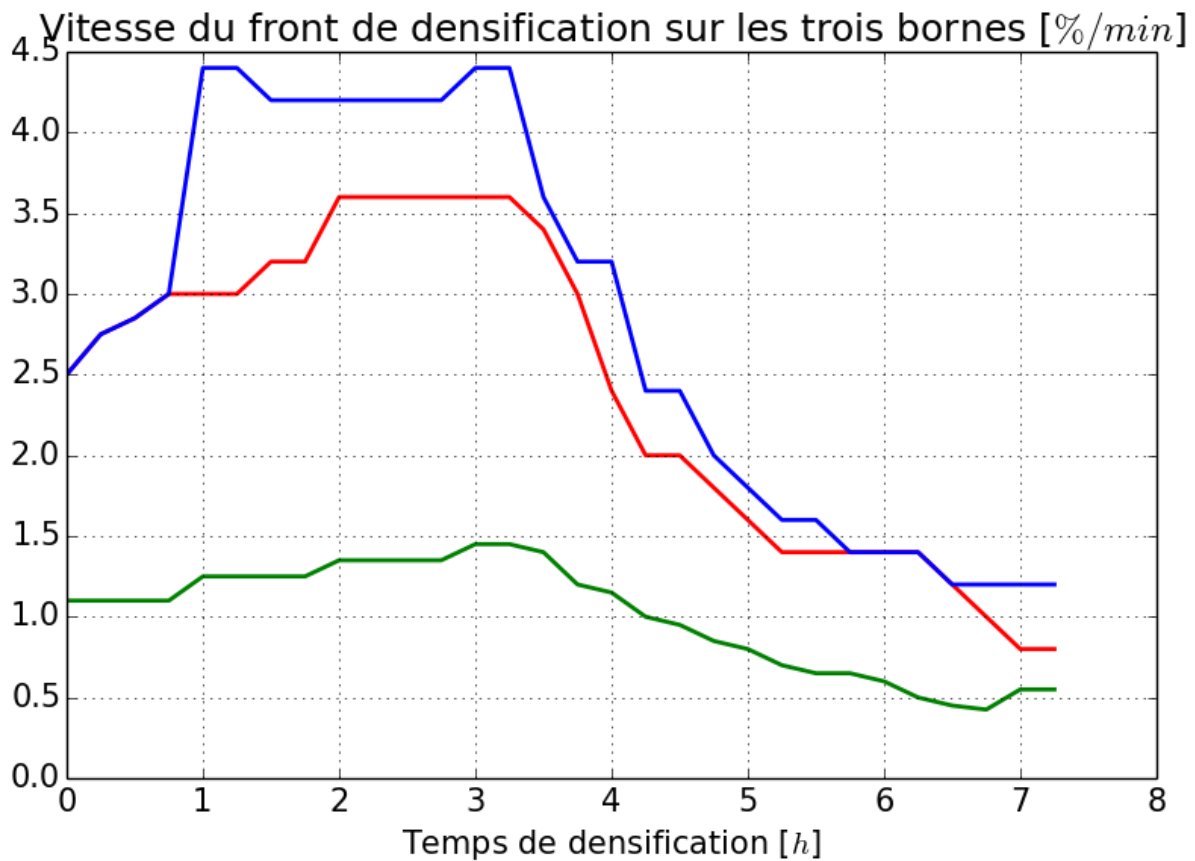


Fig. 82: Vitesse du front de densification en section selon x et selon y : (1) Borne droite selon x à y égale à mi-hauteur du disque, (2) Borne supérieure selon y à $x = 0$, (3) Borne inférieure selon y à $x = 0$

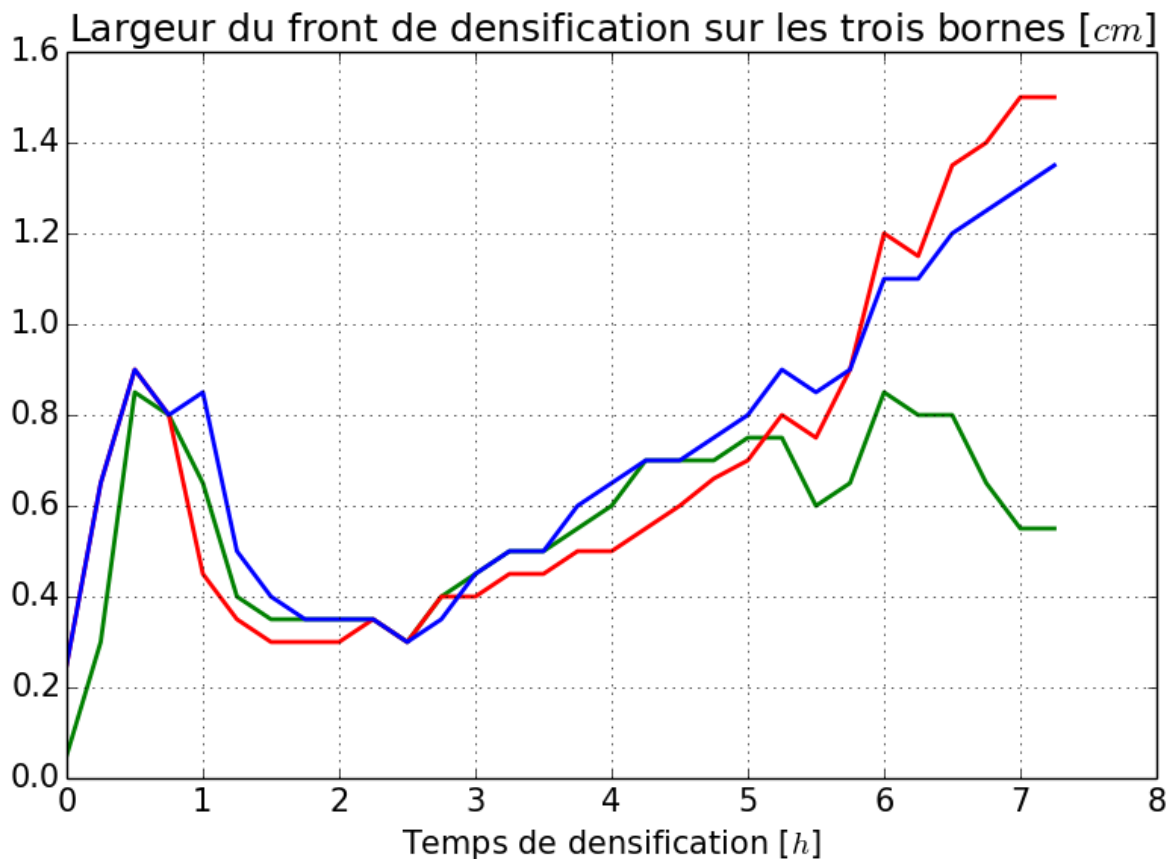


Fig. 83: Largeur du front de densification en section selon x et selon y : (1) Borne droite selon x à y égale à mi-hauteur du disque, (2) Borne supérieure selon y à $x = 0$, (3) Borne inférieure selon y à $x = 0$

Il est intéressant de remarquer que la vitesse de front semble augmenter avec l'avancement de la densification d'un facteur de 3 environ du début jusqu'à la fin du procédé. Notamment sur les courbes le long de l'axe miroir on voit très bien le pic s'amincir et croître. L'amincissement est dû au gradient de température de plus en plus fort.

6.5.4. Fraction massique de l'espèce X à différentes étapes

Les analyses du taux de densification que nous avons apportées pour le moment étaient uniquement basées sur la température qui y influe de manière exponentielle. Dans le cadre de l'optimisation de la vitesse du front nous allons néanmoins constater que la concentration en précurseur joue un rôle tout aussi important pour le bon déroulement de la densification. Nous présentons le profil de fraction massique de l'espèce X , qui vaut 1 moins la fraction massique de précurseur, dans les 3 figures suivantes.

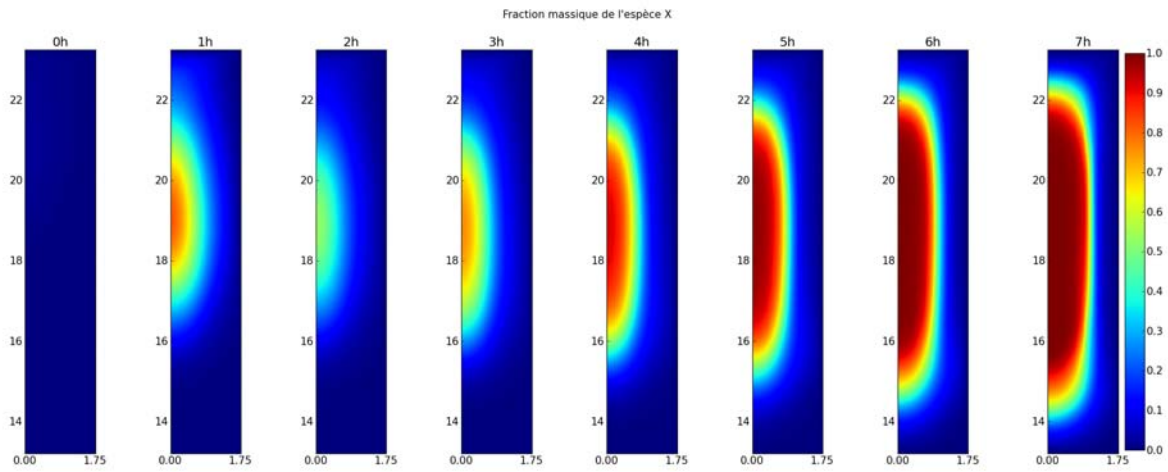


Fig. 84: Profil de fraction massique de l'espèce X simulé à différents états de densification

Fraction massique de l'espèce X - profil horizontal

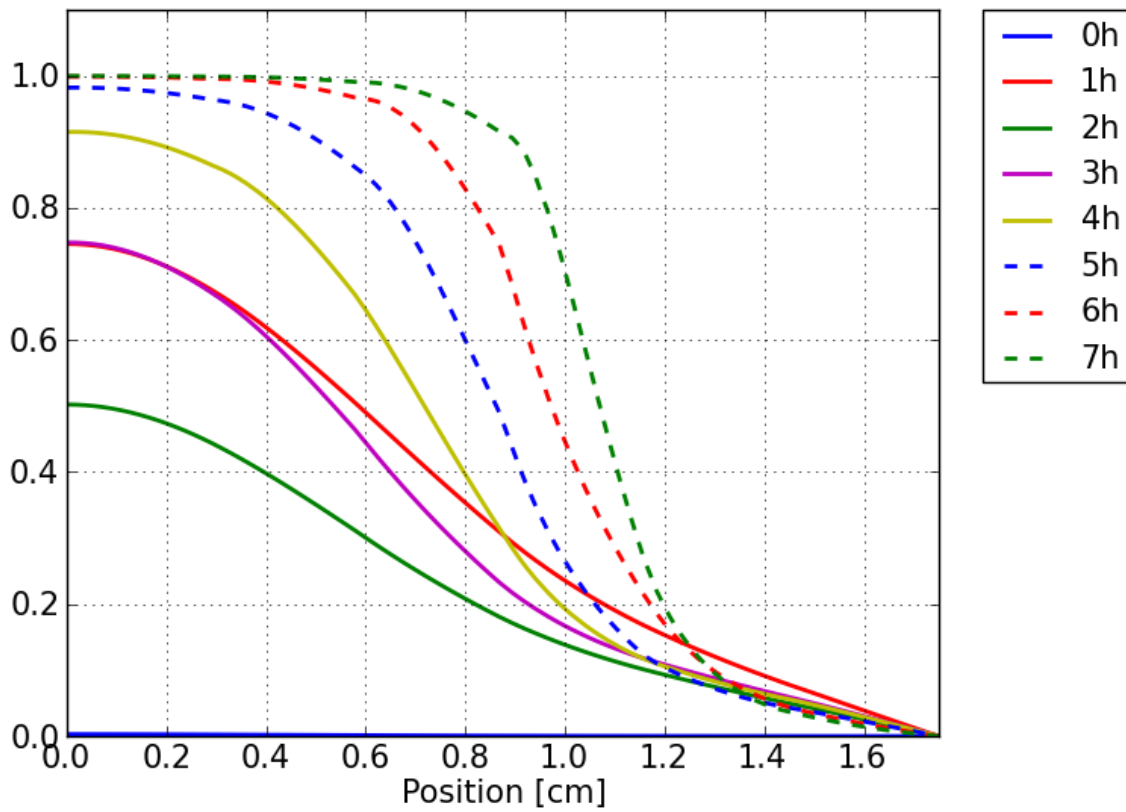


Fig. 85: Profil de fraction massique de l'espèce X simulé à différents états de densification - section selon x à mi-hauteur (du thermocouple 4 vers le thermocouple 9)

fraction massique de l'espèce X pour différents temps de densification - profil

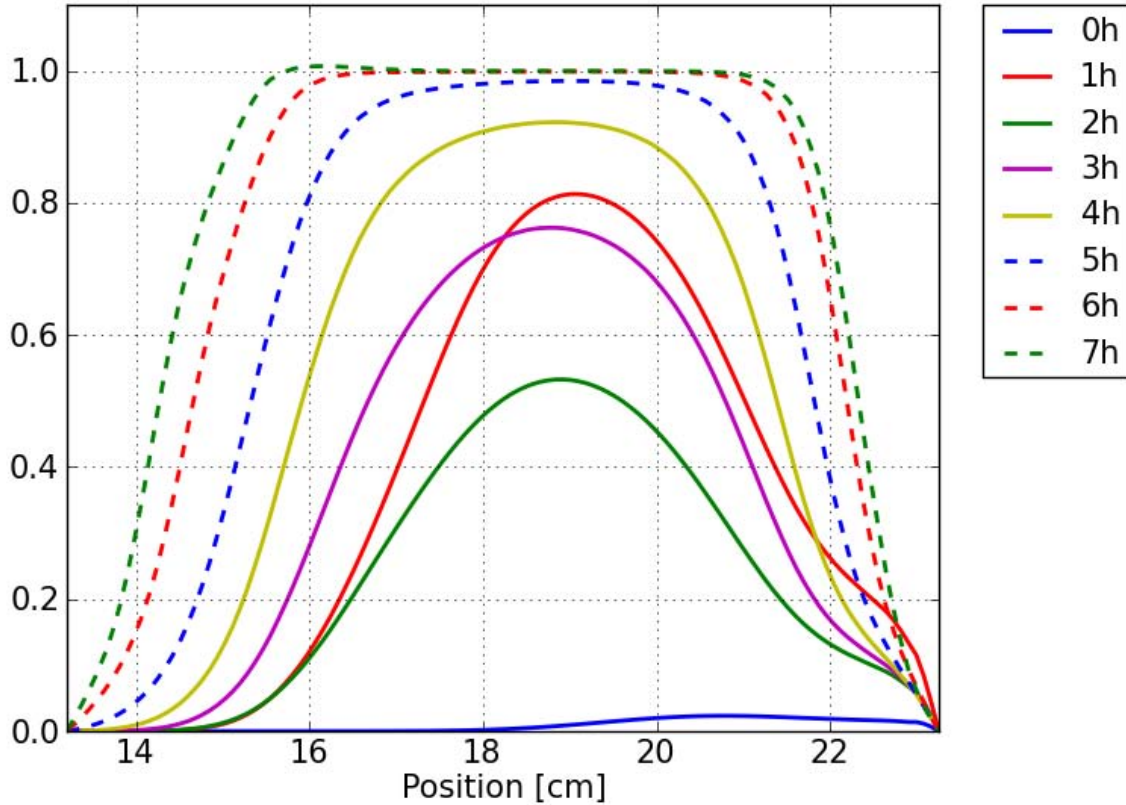


Fig. 86: Profil de de fraction massique de l'espèce X simulé à différents états de densification - section selon y du bas vers le haut (du thermocouple 2 vers le thermocouple 1)

La valeur imposée au bord est égal à zéro. En traversant le front de densification, la fraction massique de l'espèce X augmente. En début de densification, elle n'augmente que peu puisque le taux de dépôt est faible, mais à partir d'un certain avancement, on arrive à un appauvrissement total de précurseur (100% d'espèce X) en aval du front.

D'un côté numérique nous remarquons que la condition d'une fraction massique imposée au bord est très forte et crée de fortes instabilités qui vont d'ailleurs conduire à l'arrêt de la simulation avant la fin de la densification. Physiquement il paraît tout de même pas correct d'imposer une non-existence d'espèce X au bord du disque quand le front est trop proche de celui-ci. Comme pour la thermique, la condition de bord choisie pour cette première simulation est à changer. Il est plus adapté d'utiliser une condition d'échange avec le réservoir dans la cuve à une petite distance hors du disque :

$$-D_{xc} \cdot \vec{\nabla} c_{gX} = \frac{D'_{xc}}{\delta} \cdot (c_{gX} - c_{gX,ext}) \quad (6.11)$$

où D_{xc} est le coefficient de diffusion dans le milieu poreux, D'_{xc} la valeur correspondante dans le milieu libre de la cuve, δ la largeur d'une couche au bord à l'extérieur du disque à travers laquelle nous supposons que l'échange d'espèce se fait, et $c_{gX,ext}$ la concentration de l'espèce X dans le réservoir. C'est alors la valeur de $c_{gX,ext}$ que nous allons choisir égale à zéro, et une distance d'échange d'environ $\delta = 1cm$. Ainsi nous maintenons la concentration au bord égale à zéro pendant la plupart du cycle, comme c'était le cas avant, mais nous sommes plus souples dans sa valeur vers la fin du cycle. La réalisation de cette condition de bord dans n'a pas abouti à une convergence numérique pour le moment. Le calcul s'arrête

lors de la phase de préchauffage avec une avec un pic de concentration d'espèce X . En fait, les valeurs typiques de $D'_{xc} \approx 10^{-5}m^2/s$ et $\delta = 10^{-3}m$ mènent à une condition de bord qui s'approche de $-D_{xc} \cdot \vec{\nabla}c_{gX} = 0$ si bien qu'aucune valeur de référence de concentration est imposée au bord du disque et le problème différentiel est mal posé. Des cas avec un coefficient d'échange plus fort (une longueur d'échange plus courte $\delta \approx 10^{-6}m$) sont en cours.

6.6. Conclusion

Après la mise en équation des phénomènes liés au procédé de densification par caléfaction dans le chapitre précédent, nous avons réussi à appliquer le modèle à l'expérience présente dans l'industrie de MBD : Nous avons discuté les domaines d'études à utiliser pour l'électromagnétisme et pour la partie thermique/transport/dépôt et notamment le problème de trouver pour cette deuxième partie un domaine simple, 2D, représentant néanmoins toute la physique. Une étude bibliographique ainsi que la réalisation de quelques stages nous ont permis d'identifier en grande partie les propriétés des matériaux. Une première simulation à puissance constante a mis en évidence l'importance d'un pilotage pour maintenir l'avancement du procédé. Nous avons ensuite réalisé une analyse détaillée de quelques expériences. Grâce à celle-ci nous avons à la fois expliqué l'ensemble des données et validé les résultats numériques : La partie électromagnétique et la partie thermique/transport/dépôt reproduisent globalement bien les données expérimentales. Nous avons tout de même pu identifier plusieurs pistes d'amélioration, avec quelques adaptations des propriétés électriques et surtout des conditions de bord de la thermique et du transport de l'espèce X . Ces conditions de bord permettront de prendre en compte les simplifications que nous avons introduites en passant d'un disque tri-dimensionnel qui baigne dans un milieu libre de liquide vers un modèle qui ne prend en compte qu'une demi-section du disque en coordonnées cartésiennes. Ces améliorations sont actuellement à l'étude et n'ont pu être validées à temps. Nous attendons que l'introduction de ces conditions plus fines améliore nettement les résultats du modèle.

7. Exploitation du modèle

Ce dernier chapitre est consacré à une exploitation du modèle afin de trouver des pistes d'optimisation du procédé sur la base des résultats obtenus dans le chapitre dernier. Pour des raisons de manque de temps nous allons présenter uniquement des stratégies de calcul qui peuvent mener à une telle optimisation sans les réaliser en détail.

Ce chapitre se divise en deux parties : Dans un premier temps nous nous intéressons à un aspect électromagnétique, à savoir l'influence de l'écartement des inducteurs sur le rendement de chauffage inductif. Dans un deuxième temps nous chercherons à optimiser le taux de dépôt chimique afin de raccourcir les temps de cycle.

7.1. Etude de sensibilité

7.1.1. Rendement électrique en fonction de l'écartement des spires

Deux questions sont à la base de cette étude. Premièrement, nous voulons savoir s'il existe un écartement optimal avec un rendement maximal. Deuxièmement, il est intéressant de savoir si on peut placer les inducteurs à l'extérieur de la cuve de réaction sans perdre de rendement, ce qui simplifierait nettement le montage du procédé, le changement de disques et diminuerait les risques liés à d'éventuels défauts d'isolation sur les inducteurs qui pourraient entraîner une explosion à cause du cyclohexane. Nous réalisons des calculs d'électromagnétisme sur une préforme vierge et sur un disque entièrement densifié. Nous faisons varier l'écartement des inducteurs en nous intéressant notamment au rendement électromagnétique pour le chauffage.

Les résultats de cette étude sont présentés sur la figure suivante avec en rouge le rendement pour le disque fini et en bleu le rendement pour la préforme vierge, en fonction de l'écartement des inducteurs :

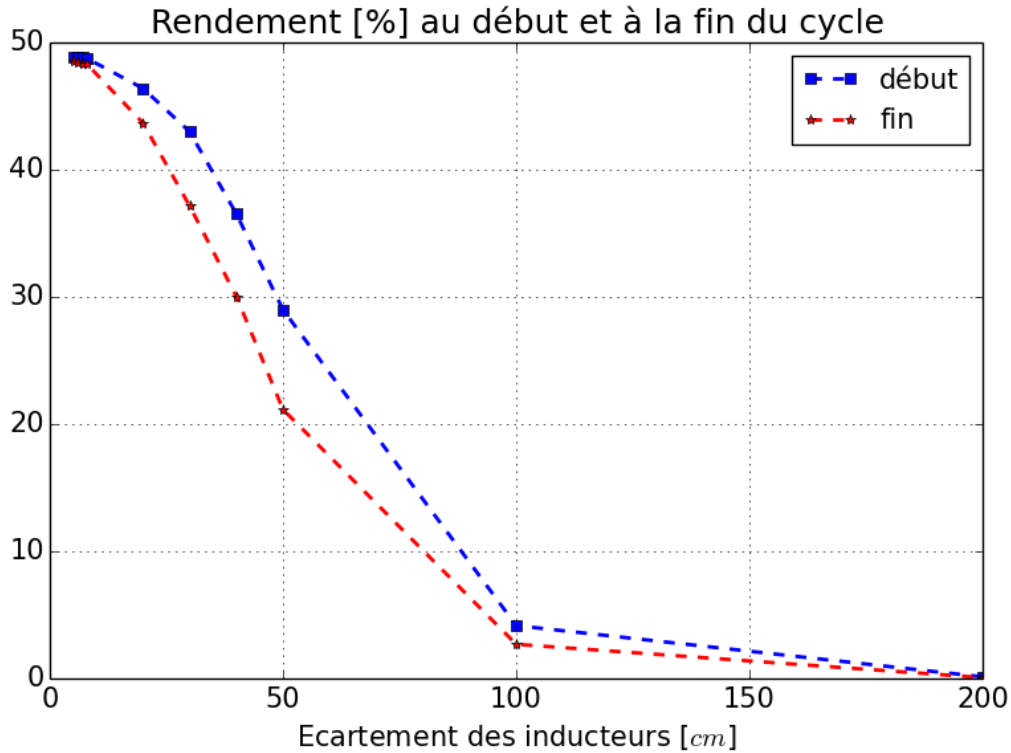


Fig. 87: Rendement électromagnétique au début (préforme entièrement vierge, courbe bleue) et à la fin (préforme entièrement dense, courbe rouge) du cycle pour différents écartements des deux inducteurs

Nous constatons que pour chaque écartement des inducteurs, le rendement ne change pas beaucoup lors du cycle. Pour des écartements allant jusqu'à 20cm celui-ci n'a pas d'influence importante sur le rendement : 46.4% pour 20cm contre 48.9% pour 5cm d'écartement. Néanmoins au-delà de cette valeur, le rendement connaît une chute forte et un placement des inducteurs en dehors de la cuve (avec plus de 1m d'écartement) est déconseillé.

Il est également intéressant de regarder la fréquence de résonance, la résistance et l'inductance au début et en fin de cycle en fonction de l'écartement des inducteurs :

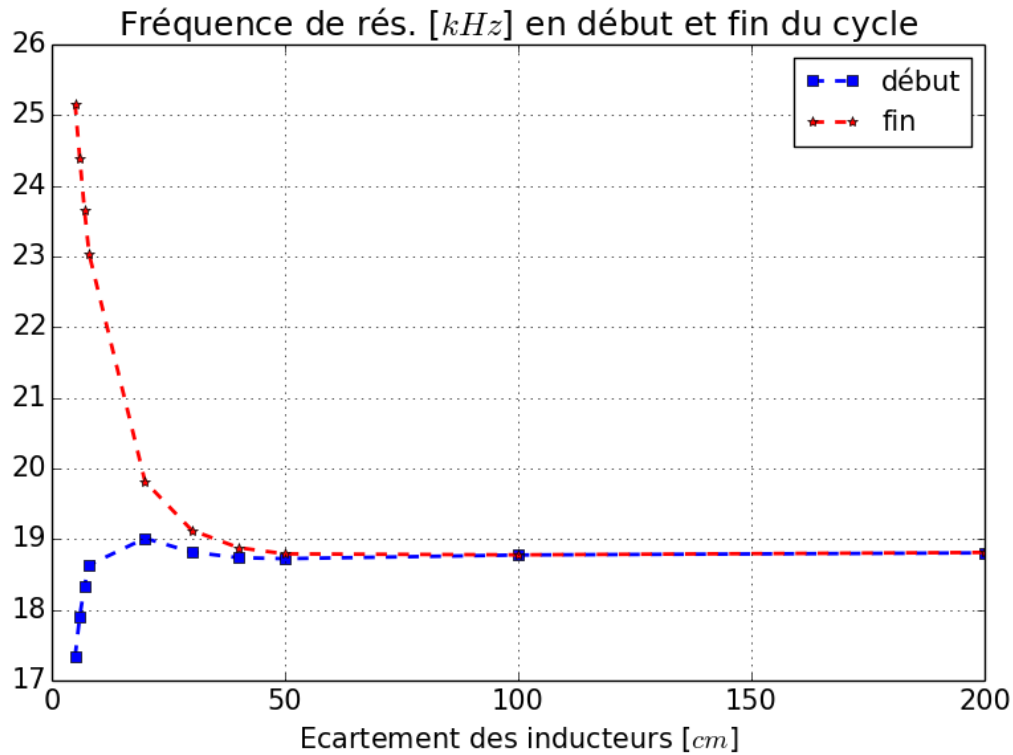


Fig. 88: Fréquence de résonance au début (préforme entièrement vierge, courbe bleue) et à la fin (préforme entièrement dense, courbe rouge) du cycle pour différents écartements des deux inducteurs

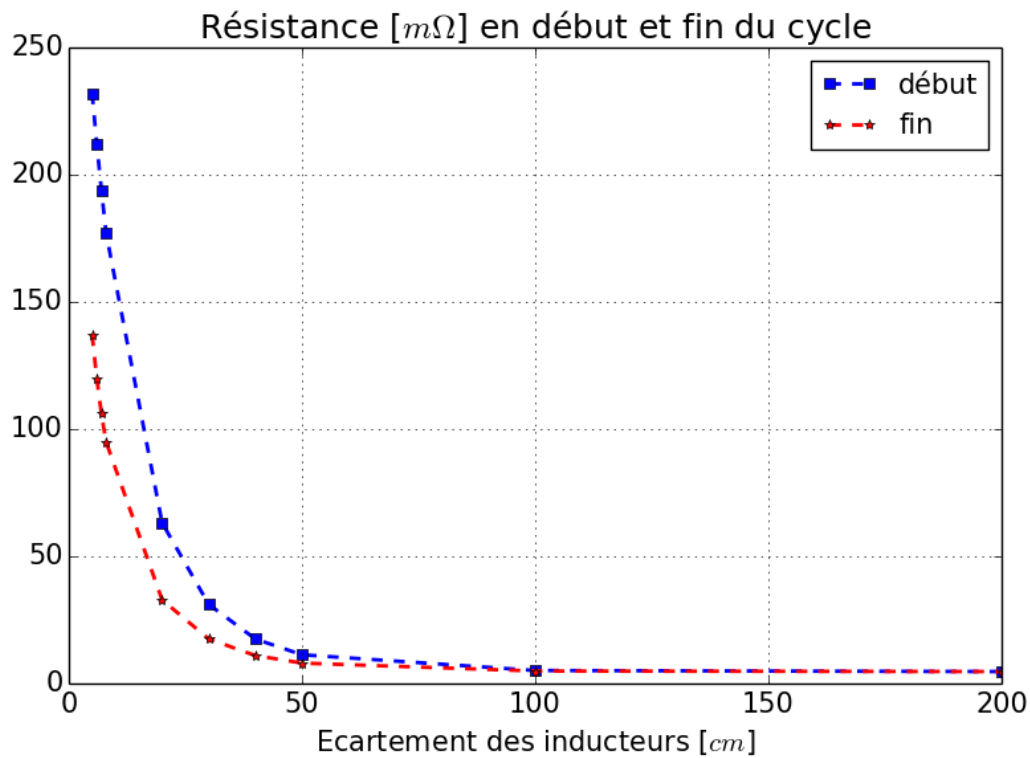


Fig. 89: Résistance au début (préforme entièrement vierge, courbe bleue) et à la fin (préforme entièrement dense, courbe rouge) du cycle pour différents écartements des deux inducteurs

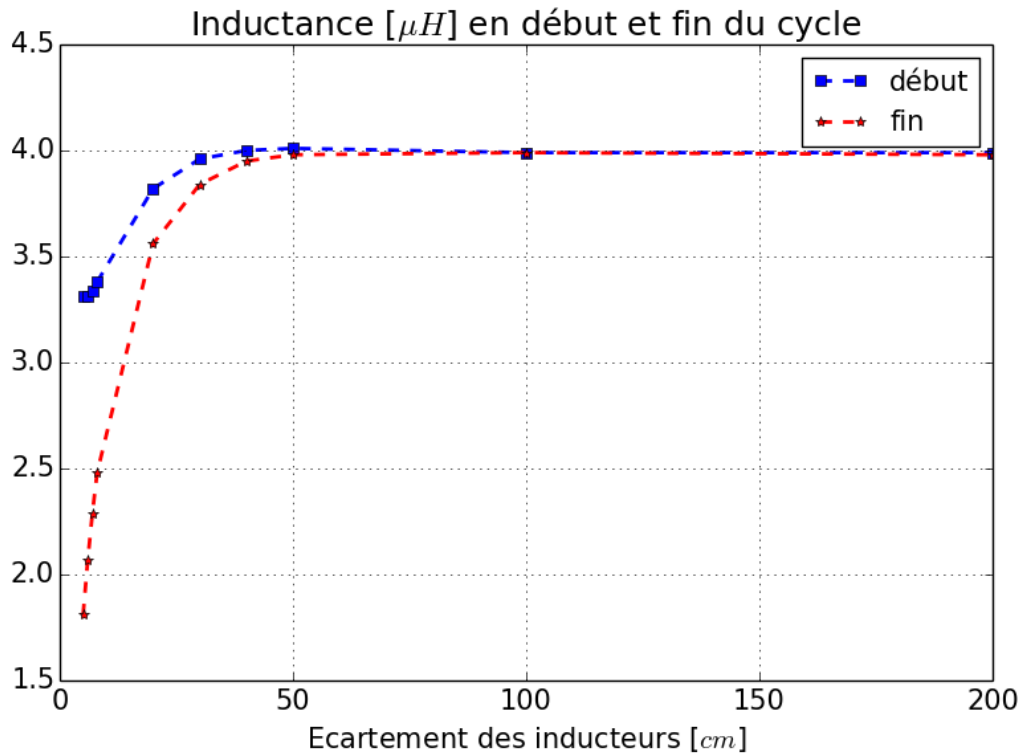


Fig. 90: Inductance au début (préforme entièrement vierge, courbe bleue) et à la fin (préforme entièrement dense, courbe rouge) du cycle pour différents écartements des deux inducteurs

Nous trouvons sur les figures ci-dessus l'explication de la chute du rendement : Plus on écarte les inducteurs et moins le système voit la charge : Toutes les propriétés électriques au début et en fin de cycle se rapprochent, ce qui signifie que la structure du disque (vierge ou dense), voire même sa présence, n'a plus d'importance.

7.1.2. D'autres influences étudiés dans des travaux précédents

D'autres facteurs de sensibilité ont été étudiés dans les travaux précédents et pourraient être envisagées également avec cette simulation plus complète. Nous en trouvons une liste de possibilités dans les travaux antérieurs (Lines, 2003; Belorgey-Beaugrand, 2000; Rovillain, 1999). La nouveauté du travail présent concerne la possibilité d'étudier les pertes d'énergie liées à l'ébullition. Les paramètres qui ont été étudiés sont :

- I) La structure du matériaux fibreux (actuellement $3 \times 60^\circ$) :
 - o La loi de la surface interne, sa variation avec la porosité et la valeur de porosité fermée (qui donne une surface accessible par le gaz nulle). Elle influe sur le taux de dépôt maximal qu'on peut atteindre, au temps de densification, sur la structure du front, sa largeur et la porosité résiduelle minimale du matériau densifié. Expérimentalement cette surface interne est affectée par le type de préforme utilisé, des alternatives à l'aiguilletage de couches à $60 \times 60^\circ$ utilisé actuellement.
 - o Le diamètre des pores en fonction de la porosité. Il est lié à la surface interne et est une caractéristique de l'architecture de la préforme. Il possède une double influence :
 - ii) La perméabilité absolue du milieu poreux qui caractérise, comme les diffusivités, l'apport de précurseur dans la zone de dépôt

- ii) La pression de capillarité en zone diphasique qui détermine le flux relatif entre le gaz et le liquide mais également la taille de la zone diphasique et ainsi le taux de gaz au bord de la préforme et à l'extérieur de celle-ci.
- o Les diffusivités d'espèces plus fortes mènent à un meilleur apport de précurseur et à un taux de densification maximal plus rapide. Ce sont des grandeurs anisotropes qui dépendent également de la structure de la préforme dont notamment l'espacement des fibres.
- o La conductivité de chaleur du matériau qui joue sur les gradients thermiques et ainsi sur les flux de chaleur perdus et à l'énergie nécessaire pour obtenir une bonne température de dépôt. Elle dépend également de la structure de la préforme et des fibres utilisées, y compris les traitements (thermiques) qu'elles ont subi lors de leur production.
- o La conductivité électrique des fibres et du pyrocarbone déposé. Plus la différence entre la conductivité des fibres et du pyrocarbone déposé est grande, plus les propriétés électromagnétiques varient au cours de la densification, dont notamment la fréquence de résonance. Ceci entraîne d'un côté un contrôle plus précis du suivi de la densification, mais nécessite d'un autre côté une plus forte adaptation d'impédance du début jusqu'à la fin du cycle et donc une armoire électrique plus souple. De plus, une conductivité électrique du pyrocarbone très supérieure à celle des fibres permettrait de concentrer le chauffage plus au cœur densifié du disque ce qui mène à des gradients de température plus forts au sein du front et des fronts de dépôt plus minces.

II) Les paramètres de travail globaux :

- o La pression de travail dans la cuve intervient dans deux phénomènes du procédé : Premièrement, elle joue sur le taux de réaction chimique du dépôt, phénomène étudié par (Belorgey-Beaugrand, 2000). Deuxièmement la pression fait varier la température de saturation, modifiant le bilan énergétique. La température d'ébullition influe à son tour sur la chaleur latente, modifiant l'énergie nécessaire pour l'ébullition ainsi que la taille de la zone diphasique.
- o Nature du précurseur : Chaque précurseur a sa propre loi de taux de réaction dont notamment l'énergie d'activation (influençant la température d'allumage et l'augmentation du taux de réaction avec la température) et le coefficient de la vitesse de réaction.

7.2. Piste d'optimisation de la loi de pilotage : Maximiser la vitesse de front

Après avoir constaté qu'un changement de l'écartement des inducteurs par rapport au choix actuel ne peut pas diminuer les pertes du système inductif, nous gardons l'écartement actuel. Nous pouvons alors baser les études suivantes sur les résultats de simulation obtenus dans le chapitre précédent. Nous avons vu auparavant que la vitesse de dépôt augmente exponentiellement avec la température. Une piste d'optimisation qui ne nécessite aucun changement du dispositif (matériaux, précurseur, géométrie) consiste ainsi dans l'amélioration de la stratégie de pilotage. Doit-on chauffer à pleine puissance dès le début ? ou bien augmenter progressivement la puissance ? Nous allons essayer de répondre à cette question. Néanmoins

la stratégie de chauffer à pleine puissance dès le début n'est pas applicable comme nous allons l'expliquer dans la suite.

7.2.1. Existence d'une vitesse maximale

Poursuivant l'idée que le dépôt se fait plus rapidement lorsqu'on chauffe davantage, nous nous plaçons dans le cas d'un disque légèrement densifié au coeur, à $t = t_{min}$, pour faire apparaître l'allure classique du front de dépôt. Dans notre modèle nous enlevons l'équation du dépôt qui fait évoluer la porosité au cours du temps. A partir des résultats du chapitre précédent pour un état d'avancement fixe, nous allons ensuite

- 1) Augmenter la puissance de chauffage du système inductif d'un certain coefficient.
- 2) Laisser évoluer la température jusqu'à l'obtention d'un état stationnaire.
- 3) Calculer le taux de dépôt et la répartition d'espèces que nous aurions pour le profil de porosité et de température présents, sans faire varier la porosité au cours du temps.
- 4) Tracer le profil de température, le taux du dépôt et la répartition d'espèce X « instantanés ».
- 5) Augmenter la puissance encore plus et recommencer au début.

Le profil de porosité considéré pour cette étude ainsi que les profils horizontaux et verticaux pour différentes puissances de chauffage sont donnés dans la figure 91. Le paramètre des courbes est le coefficient avec lequel nous avons multiplié la puissance de chauffage par rapport à celle qui a été choisie automatiquement par le solveur dans le chapitre précédent (selon la stratégie de densification par variation temporelle constante de la fréquence de résonance du système) :

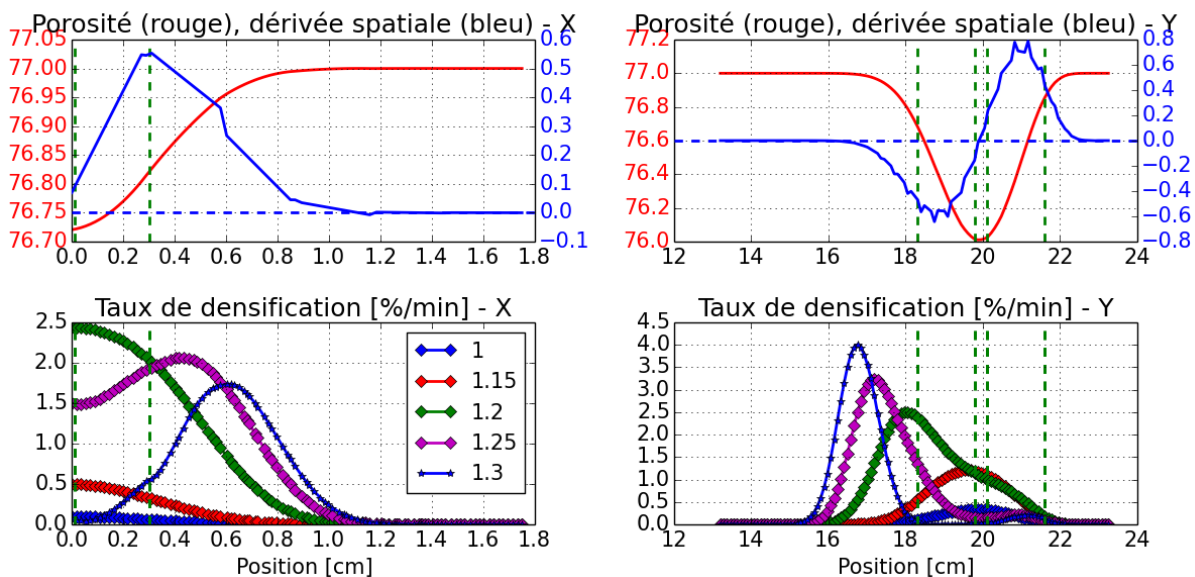


Fig. 91: Profils de taux de densification pour différents multiplicateurs de puissance de chauffage. Etat du disque après $6min$ de densification. La puissance de référence est celle qui a été utilisée dans la boucle présentée dans le chapitre avant. A gauche : tracé vertical sur l'axe miroir ; A droite : tracé horizontal à mi-hauteur du disque, de l'axe miroir vers le bord.

La dérivée spatiale de la porosité (courbe en ligne simple bleue) en direction x monte d'une valeur sur l'axe miroir à gauche jusqu'à une valeur maximale pour retomber ensuite à 0 jusqu'au bord de la préforme. Le front de densification se trouve confiné dans la région où

cette dérivée est différente de zéro. En direction y , cette dérivée possède un minimum négatif et un maximum positif : en effet il y aura une partie du front qui va se propager vers le bas et une partie qui va se propager vers le haut.

Nous constatons que pour une augmentation du chauffage de 15% on augmente le taux de densification de $0.1\%/min$ à $0.5\%/min$ en direction x (soit +400%) et de $0.3\%/min$ à $1.25\%/min$ en direction y (soit +300%). Pour une augmentation du chauffage de 20%, le taux de densification augmente une autre fois de 400% en direction x . En direction y l'augmentation du taux de dépôt est accompagné d'un déplacement du front vers le bas ce qui signifie que nous ne densifions plus assez le coeur de la préforme et piégeons donc une porosité résiduelle dans le produit final. L'effet est encore plus visible pour un chauffage augmenté de 30% : Toute la déposition (le futur front) se trouve en dehors du coeur de la préforme (la zone du front actuel). Les phénomènes d'augmentation de vitesse du dépôt et du déplacement de la position du maximum de front (piégeage du porosité résiduelle) sont résumés sur la figure suivante :

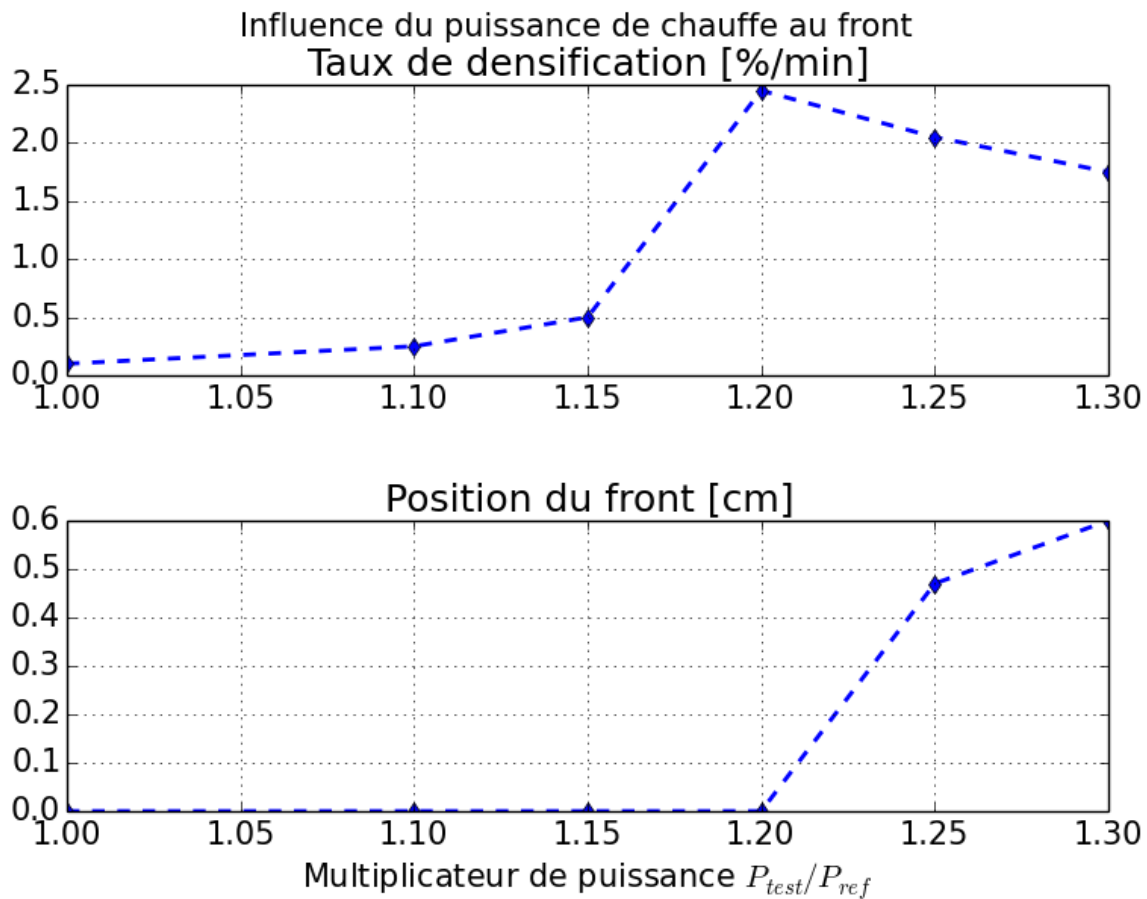


Fig. 92: Vitesse et position du front de densification pour différents multiplicateurs de puissance au début du cycle.

Nous y apercevons clairement le détachement du front au bout d'une augmentation de puissance de 20%. Pour expliquer ce phénomène, nous étudions les deux facteurs influant sur la densification : la température et la fraction massique de précurseur :

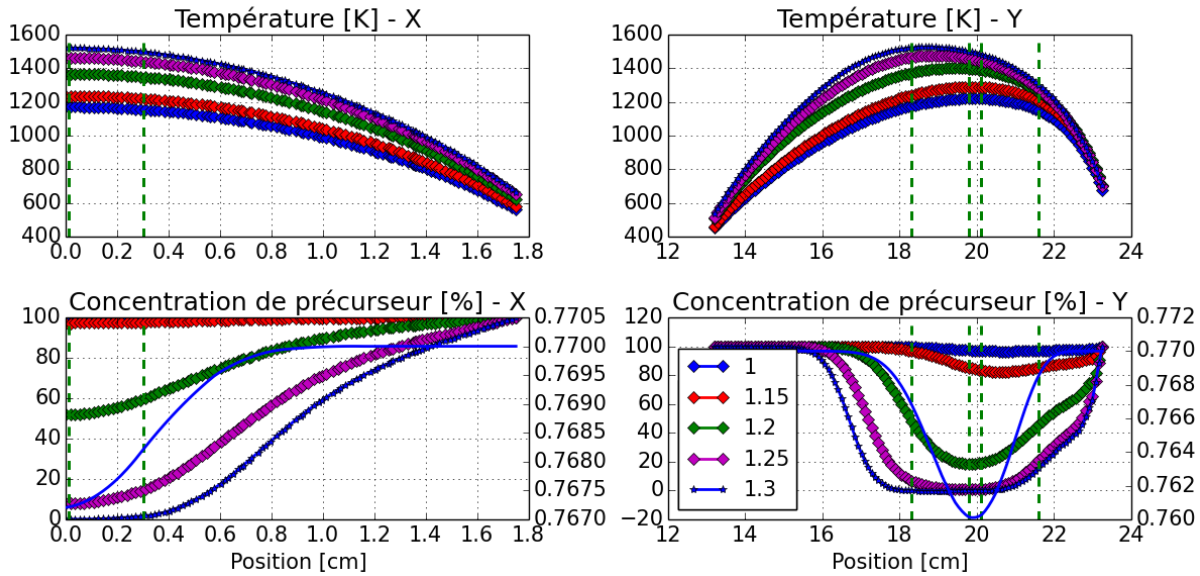


Fig. 93: Profils de température (en haut) et de concentration de précurseur (en bas) correspondants à l'étude de la figure 91

La température monte partout dans la préforme lorsque nous augmentons la puissance de chauffage. Ceci implique que toute la préforme devient plus susceptible d'être suffisamment chaude pour faire craquer le gaz et créer du dépôt. Or, le précurseur est apporté par les bords du disque. Les molécules du précurseur vont donc commencer à se craquer et se déposer d'abord au bord comme en CVI isobare-isotherme. Effectivement, nous constatons que la courbe de fraction massique de précurseur commence à chuter de plus en plus près des bords quand on augmente le chauffage. Pour le cas d'un chauffage augmenté de 60%, on consomme tellement de précurseur au bord de la préforme qu'il ne reste plus rien au coeur pour maintenir la densification.

Nous pouvons ainsi définir la puissance optimale lorsque le maximum du taux de dépôt commence à s'éloigner du maximum de la dérivée spatiale de la porosité et ceci sur l'un des 3 pics (1 en direction x et 2 en direction y). Pour l'exemple ci-dessus on peut donc augmenter la puissance d'un facteur entre +10% et +20%.

Une autre observation par rapport à cette optimisation est que l'augmentation de la puissance ne fait pas seulement accélérer le taux de densification, mais elle amincit également légèrement la taille du front. Ceci se voit par comparaison de la courbe rose avec la courbe bleue sur la fig. 91 et l'effet sera encore plus clair sur les graphiques de la suite. C'est également un effet prévu par l'analyse dimensionnelle de Rovillain et al (Rovillain et al., 2001), puis de Nadeau et al (Nadeau et al., 2006).

7.2.2. Optimisation de la vitesse à quelques états d'avancement

La piste d'optimisation du temps de densification consiste alors à répéter l'étude décrite ci-dessus pour différents états d'avancement. Nous présentons trois exemples de résultat ci-dessous :

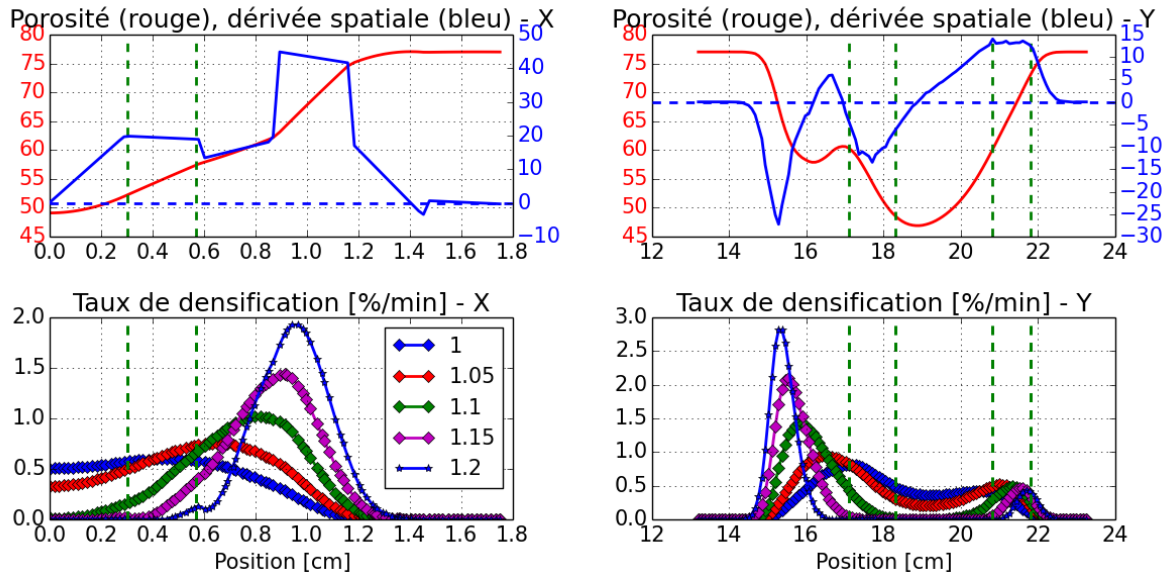


Fig. 94: Profils de taux de densification pour différents multiplicateurs de la puissance de chauffage. Etat du disque après 1h de densification.

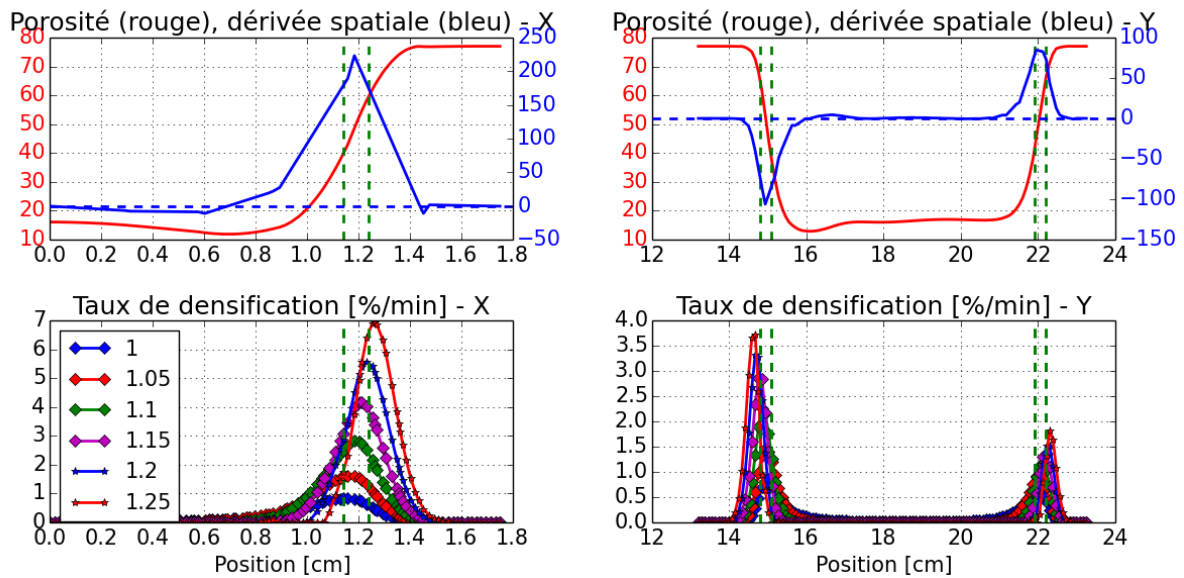


Fig. 95: Profils de taux de densification pour différents multiplicateurs de la puissance de chauffage. Etat du disque après 4h de densification.

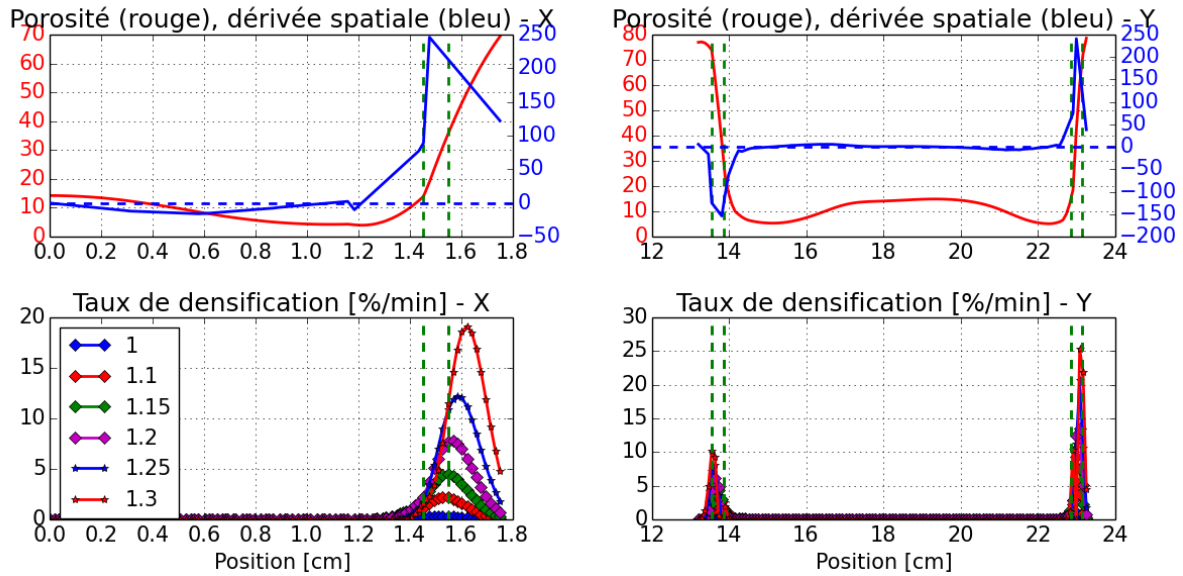


Fig. 96: Profils de taux de densification pour différents multiplicateurs de la puissance de chauffage. Etat du disque après 7h de densification.

Nous remarquons que les résultats au bout d'une heure représentent un double front en direction x et en bas en direction y qui sont plus éloignés du coeur du disque que leurs correspondants. Ces fronts témoignent d'un piégeage de porosités dans la première heure, liées à un mauvais pilotage temporaire. Cet effet disparaît au bout de la 4e heure et le disque se retrouve de nouveau en bon état de densification.

On constate que lorsque l'infiltration est bien avancée (4h, 7h), on peut plus facilement augmenter la puissance sans que le front ne se détache : il y a donc une marge importante d'optimisation.

A partir de ces images et en cherchant à chaque fois le multiplicateur de puissance qui maximise le taux de dépôt sans délocaliser le front, donc sans introduire des porosités résiduelles supplémentaires, nous déduisons les courbes suivantes :

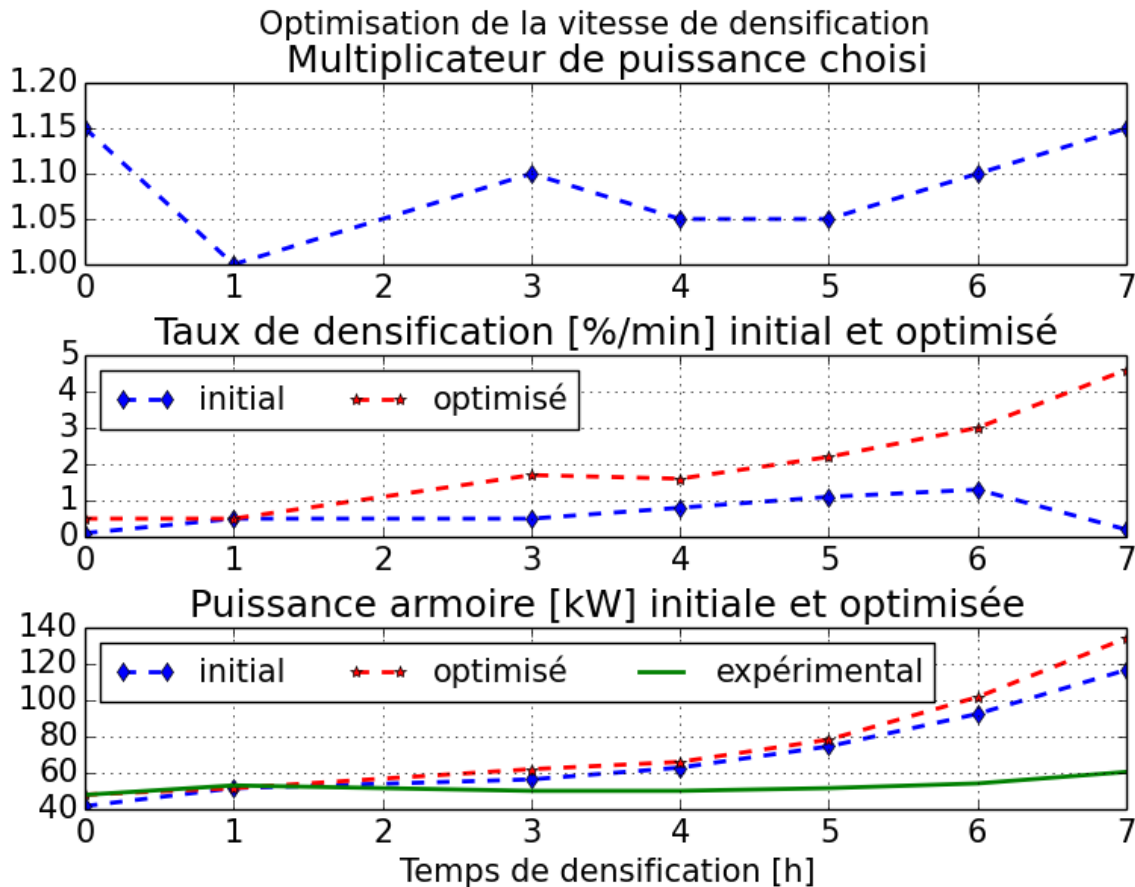


Fig. 97: Optimisation du choix de puissance au cours de la densification vis-à-vis d'un taux de dépôt maximal. En haut : Multiplicateur de puissance choisie pour différentes étapes de la densification. Au milieu : Taux de dépôt qui a été obtenu avec le choix de puissance actuel de la simulation visant $df/dt = const$ (bleu) et taux de dépôt qui peut théoriquement être obtenu en gardant la même porosité finale du matériel (rouge). En bas : Puissances correspondantes

Nous constatons que des augmentations très faibles de la puissance, d'environ 5% seulement pendant la plupart du cycle, permettant de doubler la vitesse de dépôt. En termes d'énergie consommée ceci signifie que nous augmentons la valeur moyenne de la puissance de 5% pendant ici les premières 5h tout en divisant le temps d'intégration par deux, si bien que l'énergie totale est environ divisée par deux. Vers la fin de la densification, cette méthode d'optimisation suggère d'augmenter la puissance encore plus rapidement, plus que 10%, et prévoit plus qu'un doublement de la vitesse de dépôt. Nous remarquons que toute cette optimisation a été réalisée avec la condition que le front de densification reste bien positionné sans introduire des porosités résiduelles supplémentaires à celles du réglage actuel.

Au début du cycle, entre 0h et 1h, l'optimisation mène à une augmentation de 15% de la puissance et ensuite au maintien de la même puissance que celle qui est utilisée actuellement en simulation. Par rapport à ceci nous remarquons que la simulation commence actuellement avec une puissance d'environ 20% inférieure à la puissance expérimentale et met environ 1h avant de s'approcher de celle-ci. L'optimisation de la puissance correspond alors en ce début de cycle à un rapprochement de la simulation à l'expérience. Or, vu le réglage actuel de la simulation, ceci va automatiquement conduire à une variation temporelle de la fréquence de résonance simulée supérieure à la valeur de consigne. L'optimisation au début du cycle peut donc tout simplement être une correction d'un mauvais calcul de fréquence de résonance. De même nous constatons qu'à la fin du cycle la puissance simulée est déjà beaucoup supérieure

à sa valeur expérimentale et l'optimisation propose d'y rajouter encore une fois 15%. Il est également à mettre en question si une variation de 5% de puissance pendant la partie moyenne du cycle est significative par rapport au pilotage du procédé.

Cette section de thèse correspond donc plus à un descriptif de méthode d'optimisation qu'une optimisation fiable. Pour avoir celle-ci il faut en premier temps arriver à mieux reproduire les données expérimentales.

Pour finir, nous notons qu'une simulation optimisée consisterait à utiliser les puissances trouvées au cours de l'avancement de densification. Il y a néanmoins un aspect à ne pas négliger : en variant la vitesse de densification, le temps de densification n'est plus un repère pour le choix de la puissance. Au lieu de tabuler le choix de puissance en fonction du temps, il faut donc l'écrire par rapport à un paramètre plus intrinsèque à l'avancement de densification. Au cours de ce travail, la fréquence de résonance s'est avérée comme bon moyen de mesure de l'avancement de la densification. Le lien entre la fréquence de résonance avec le temps de densification de la simulation actuelle était présenté sur la figure 58. Nous nous en servons pour proposer une courbe de puissance à choisir au cours de la densification, telle que celle de la figure 97 en bas, mais cette fois-ci liée à une variable intrinsèque à l'avancement :

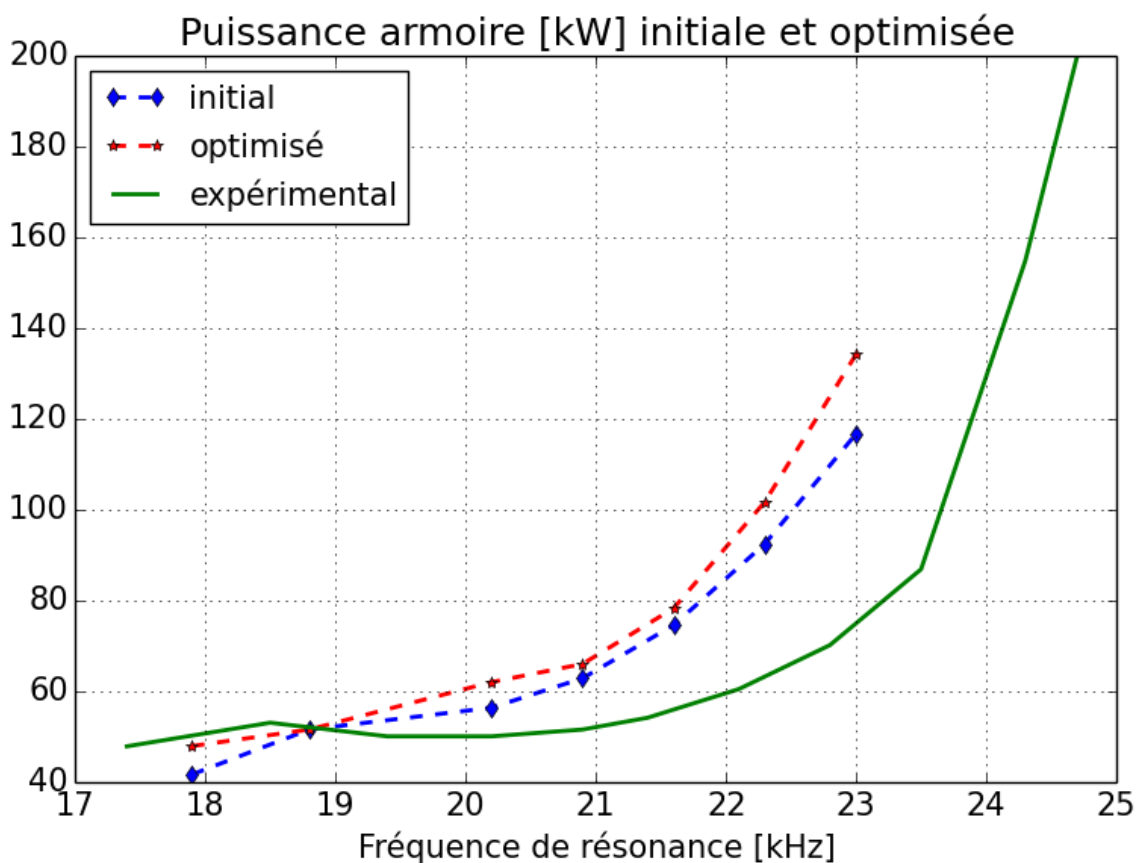


Fig. 98: Puissance de l'armoire au cours de la densification liée non pas au temps de densification mais à la fréquence de résonance qui est une mesure intrinsèque de l'avancement du dépôt. En bleu : Choix de la simulation actuel, visant une variation temporelle constante de la fréquence de résonance. Rouge : Courbe optimisée visant à réduire le temps de densification.

Nous remarquons que le grand écart entre la simulation et l'expérience pour la puissance en fonction de la fréquence de résonance contient toutes les erreurs du modèle, à savoir un mauvais calcul de la fréquence de résonance en fin du cycle et les erreurs du calcul thermique

(déterminant le dépôt).

La simulation correspondante, où nous imposons la puissance en fonction de la fréquence de résonance, n'a pas pu être réalisée à temps pendant cette thèse. De même, il faut refaire l'étude d'optimisation après une première simulation optimisée puisque nous avons vu que le changement de la puissance amincit le front si bien que le disque risque de densifier différemment.

Pour conclure nous constatons que malgré les différences entre nos calculs et l'expérience, nous pouvons dégager quelques tendances d'optimisation. Il semble intéressant de modifier ainsi la programmation : augmenter la puissance en début de cycle au-delà de la consigne de maintenir constante la variation temporelle de la fréquence de résonance, suivre ensuite cette consigne-là, puis augmenter de nouveau en fin de cycle.

8. Résumé et perspectives

Résumé

Le présent travail de thèse a été réalisé dans le cadre de l'étude d'un procédé industriel de densification de préformes de feutre graphit destinées aux freins d'avions. Il s'agit d'un procédé où, contrairement à la méthode la plus répandue de CVI (chemical vapor infiltration) isotherme-isobare, le préforme poreuse initialement vierge baigne dans un précurseur liquide. C'est en chauffant le disque par induction que le précurseur se met à bouillir, si bien que la préforme se remplit de gaz tout en restant en contact avec du diphasique au bord, voire légèrement à son intérieur. Le gaz au coeur de la préforme subit une réaction de craquage au-dessus d'une certaine température et se décompose en certaines espèces qui vont d'une part se déposer aux bords des pores sous forme de pyrocarbone solide et d'autre part vont sortir de la cuve de réaction. Ce dépôt va densifier le disque sous forme d'un front qui se propage du coeur vers le bord du disque. Ainsi, les propriétés thermiques et électriques du disque changent au cours de la densification, rendant nécessaire un pilotage dynamique du procédé.

Une multitude d'études dans le passé ont porté sur les phénomènes liés au gaz, à savoir le transport gazeux, la diffusion des espèces et la réaction de craquage et de dépôt. Les premiers travaux, de nature expérimentale, ont notamment permis de déterminer la cinétique de la réaction, l'influence de la pression de travail et du profil de température ainsi que de la structure du substrat solide et du précurseur utilisé. Dans la suite, des sujets plus théoriques ont visé à reproduire les observations et à expliquer l'établissement et la propagation du front ainsi que ses conditions d'existence. Néanmoins, seule la phase gazeuse du précurseur a été prise en compte et le chauffage se faisait habituellement via un suscepteur placé contre disque.

Dans un premier temps du travail présent nous avons levé ces deux restrictions. A partir des simulations existantes sur le transport gazeux et le dépôt il s'agissait de généraliser le modèle afin de pouvoir prendre en compte la présence du liquide et du diphasique en plus du gaz, les mouvements massiques des deux phases et la thermique de changement de phase. De plus nous avons développé une modification du modèle de chauffage qui ne recourt pas à un suscepteur mais qui agit directement sur le disque par induction. Dans un deuxième temps du travail nous nous sommes servis de cette simulation. Nous avons validé les observables via l'expérience, comme les profils de température et la fréquence de résonance, ensuite nous avons étudié les inobservables, comme le front de densification, la concentration en réactif et la répartition de la puissance de chauffage, et finalement nous avons réalisé des études de sensibilité et de prospectio des pistes d'optimisation du procédé.

Concernant le développement d'un modèle de chauffage inductif portant directement sur la préforme, nous avons montré qu'il s'agissait d'une modélisation à deux niveaux : Un premier niveau spatial qui considère ce qui se passe dans la cuve de réaction, à savoir la répartition des courants dans le disque et dans l'inducteur, le couplage entre ces deux entités, et le

calcul de la puissance de chauffage, de la résistance et de l'inductance du système formé par le disque et l'inducteur. Un deuxième niveau de modèle vise ensuite le système plus global incluant le générateur, les condensateurs, la recherche de la fréquence de résonance et d'une puissance adaptée afin de maintenir la vitesse de densification. Deux principaux résultats ont été obtenus avec ce modèle : Premièrement nous avons pu montrer que la fréquence de résonance est une fonction monotone de l'avancement de la densification et représente donc une bonne grandeur observable pour suivre l'état d'avancement de manière non-destructive et continue. Deuxièmement, il a été mis en évidence que l'évolution des propriétés électriques du disque lors de la densification mène à la nécessité d'augmenter la puissance pour maintenir la vitesse de densification. En effet la puissance de chauffage choisie est directement liée au profil de température dans le disque et à la vitesse de dépôt. L'évolution de la composition du disque lors de la densification, influant notamment sur sa résistivité, mène à une redistribution spatiale du profil de densité chauffage induite au cours de la densification. Les grandes lignes de la compréhension et de l'optimisation du procédé peuvent alors être déduites en étudiant simplement la partie électromagnétique du modèle. Le solveur 2D d'électromagnétisme a pu être validé pour trois cas simplifiés en comparant les résultats avec ceux de Comsol[®] qui est choisi comme logiciel de référence en électromagnétisme.

Pour un modèle simplifié d'étude de front monodimensionnel nous avons formulé une condition sur le bord à l'extérieur du disque qui prend en compte le courant imposé dans l'inducteur ainsi que les paramètres géométriques comme la taille de l'inducteur et l'entrefer entre le disque et l'inducteur. Néanmoins une solution analytique du champ électromagnétique dans le front de densification pour une forme quelconque (1D) de celui-ci n'est pas possible. Une étude du front nécessite donc une résolution numérique de l'équation d'électromagnétisme couplée de manière faible aux équations de transport, d'énergie et de dépôt comme dans le cas du modèle 2D. Cette étude n'a pas été fini à terme pendant ce travail.

Dans la suite nous avons développé un modèle d'ébullition qui puisse se rajouter aux modèles existants de thermique, transport gazeux et dépôt. Parmi les différents modèles trouvés dans la bibliographie concernant les écoulements multi-phasiques nous avons choisi celui présenté par Wang et al. La description des deux phases liquide et gaz sous forme d'un mélange permet de réduire le nombre d'équations par rapport à une formulation eulérienne par phase et également de ne pas tenir compte de termes d'échanges interfaciaux massiques et thermiques, qui sont mal connus. L'expression de Darcy pour le flux massique est bien définie dans les zones uniquement liquide, uniquement gazeuse et diphasique alors qu'une formulation eulérienne rencontre des problèmes dans les zones où l'une des deux phases n'est pas du tout présente. L'utilisation d'une enthalpie de mélange comme variable principale d'énergie, au lieu de la paire composée par la température et la saturation en liquide, permet d'avoir une seule équation dans les trois zones liquide/diphasique/gaz qui tend vers l'équation de température en monophasique et l'équation de conservation de masse liquide en diphasique. On n'est donc pas obligé d'avoir une équation en fonction de la phase dans laquelle on se trouve, et la transition de phase est prise en compte intrinsèquement dans le système. Néanmoins, nous avons pu montrer que la formulation de Wang et al. rencontre des problèmes de convergence lorsqu'on traite un système avec à la fois du liquide pur, du diphasique, et du gaz jusqu'à haute température. Les sources d'erreur se trouvent à l'interface de transition diphasique/gaz où l'enthalpie est sujette à un gradient trop fort. Nous avons pu résoudre ces problèmes en proposant une formulation en enthalpie volumique modifiée, au lieu de l'enthalpie massique classique, et en introduisant quelques paramètres numériques. La réalisation de ce modèle dans un code éléments finis commercial a pu être

validée vis-à-vis d'un calcul analytique.

Pour une étude monodimensionnelle du front de densification nous avons séparé le calcul de transport et d'enthalpie en deux parties : Dans un premier temps nous avons montré une formulation semi-analytique qui permet de calculer la taille de la zone diphasique à partir d'une valeur d'enthalpie au bord donnée. Dans un deuxième temps, la connaissance de cette taille de zone diphasique permet de réduire la zone du calcul de la thermique, du transport gazeux et du dépôt. La résolution de l'équation de température dans cette zone monophasique (de taille connue) est facilement possible, et la nouvelle condition de bord à l'interface entre le gaz et le diphasique consiste à imposer la température de saturation. A première vue il paraît inhabituel d'imposer une saturation de liquide au bord extérieur du disque. Or, nous avons montré que pour un flux de chaleur total sortant du disque imposé, l'utilisation d'une condition d'échange thermique, par rapport à une valeur d'enthalpie dans l'entourage, revient automatiquement à imposer une telle valeur de saturation.

La dernière partie du modèle du procédé traite de la diffusion d'espèces et du dépôt. Elle a été développée essentiellement des travaux antérieurs avec une seule exception : Il fallait trouver une expression des flux d'espèces qui soit à la fois juste dans les petits pores, incluant la diffusion de Knudsen, et qui tende aussi vers une description darcéenne dans les grands pores où se fait l'ébullition. De plus nous avons exigé pour ce travail, contrairement aux études antérieures, que le modèle soit valide avec de la convection non-négligeable. Ceci nous a poussé à remplacer les expressions du « Dusty Gas Model », choisi dans les travaux antérieurs, par le « Binary Friction Model » qui satisfait les deux conditions nommées.

Une étude des grandeurs et de temps caractéristiques nous a permis de mettre en place une stratégie pour résoudre le système couplé entre l'électromagnétisme, la thermique avec l'ébullition, le transport et le dépôt. Cette stratégie consistait à séparer le calcul électromagnétique des 3 autres phénomènes physiques, ce qui a également été motivé par le fait que la résolution de l'électromagnétisme se faisait sur un domaine géométrique plus conséquent que le reste. La thermique, le transport et le dépôt ont alors été couplés de manière forte dans un premier module, lui-même couplé de manière faible au module électromagnétique via un programme superviseur qui suit également l'avancement de la densification et pilote la puissance.

Nous avons pu appliquer cette chaîne de calcul au cas du pilote de densification installé chez Safran Messier-Bugatti-Dowty. Une comparaison entre les résultats de simulation et les mesures montre une bonne concordance, notamment sur l'évolution des propriétés électromagnétiques, comme la fréquence de résonance et le choix de la puissance, et sur les grandeurs globales comme le temps de densification et la prise de masse. Pendant l'analyse des inobservables nous avons trouvé des profils de porosité ayant une forme de tonneau comme dans les travaux antérieurs.

En dernière étape nous avons réalisé une étude de sensibilité du procédé par rapport à l'écartement des inducteurs, notamment en évaluant le rendement. Nous avons trouvé qu'il n'y avait pas d'écartement optimal pour un rendement maximal, mais qu'il y avait une distance critique à partir de laquelle le champ n'a plus d'effet sur le disque. Une deuxième étude a visé l'optimisation de la vitesse du dépôt. Nous avons démontré qu'un choix d'une valeur trop élevée de la puissance de chauffage conduit à un détachement du front de densification, ce qui provoque des porosités résiduelles importantes. La recherche d'un pilotage de

puissance qui donne une vitesse maximale de dépôt, tout en gardant l'avancement correct du front nous a montré qu'au début du cycle il fallait chauffer doucement, comme nous le faisons déjà en ce moment, alors qu'au milieu de cycle nous pourrions accélérer la vitesse du front sans perte de qualité du produit final.

Perspectives

Le travail effectué permet de donner un bon nombre de perspectives concernant le modèle d'un côté et son exploitation de l'autre côté. Les propositions d'études ultérieures concernent notamment la thermique et le transport :

Tout d'abord il est primordial de choisir des conditions de bord moins fortes sur la concentration des sous-produits gazeux, à savoir imposer un flux d'échange au lieu d'une concentration strictement nulle au bord du disque. Une asymétrie entre les températures mesurées sur différents points au bord du disque nous amène à introduire différentes températures extérieures notamment en haut et en bas de la section du disque, et à adapter ainsi les conditions de bord thermiques.

Concernant le transport massique nous avons calculé un nombre de Reynolds en direction parallèle aux nappes qui suggère de rajouter la correction de Forchheimer au modèle actuel de Darcy pour les vitesses. Ceci est une perspective qui reste à réviser pour la raison suivante :

Dans le procédé chez MBD le disque est enveloppé dans une couche d'isolant au rayon intérieur et au rayon extérieur. Sachant que l'axe radial est également l'axe d'anisotropie le plus conductrice de chaleur et le plus perméable par le fluide, le rajout d'une telle couche diminuerait considérablement les pertes thermiques. De même, les vitesses en direction parallèles aux nappes, qui étaient élevées auparavant dû à l'effet de la gravité, sont sensibles d'être fortement réduits. Cette réduction peut écarter la nécessité du changement du modèle de vitesses et en même temps réduire l'influence de la convection sur les écoulements, notamment l'apport de réactif pour le dépôt. Une convection moins forte mène souvent à une meilleure convergence également. Lors de la thèse nous avons développé une version du modèle qui prend en compte ces deux couches d'isolant, mais ses propriétés physiques restent à être déterminées. Le changement abrupt de la perméabilité et de la conductivité thermique à l'interface entre le disque et l'isolant conduit à des problèmes de résolution numérique notamment concernant le transport convectif. Il faut donc re-stabiliser le modèle pour obtenir des résultats fiables.

Concernant le modèle électromagnétique nous avons évoqué qu'une augmentation de la résistivité du disque dense permettrait de mieux approcher les propriétés électriques simulées aux mesures vers la fin du cycle. Ce changement influencerait également sur la répartition de la puissance de chauffage dans le disque partiellement densifié et aux puissances électriques nécessaires.

Lors du choix de la géométrie du modèle thermique nous avons évoqué le fait que des résultats fiables nécessitent un calcul 3D ce qui est très coûteux en termes de calcul. L'alternative de considérer un système axisymétrique ne permet pas de prendre en compte la gravité qui joue néanmoins un rôle non-négligeable. Nous avons alors choisi de ne traiter qu'une section verticale du disque. L'étude de profils expérimentaux montre que la température en bas de la section haute est plus chaude que la température en haut de la section haute ; or, ceci n'est pas reproduit par la simulation. Nous avons expliqué ce phénomène par le fait que l'espace à l'intérieur du rayon intérieur du disque est chauffé partout autour par le disque et qu'il

est peu couplé au bain refroidissant dans la cuve. Un modèle amélioré pourrait contenir non seulement la section haute du disque mais aussi la section basse et le canal représenté par l'espace confiné entre le disque et l'inducteur. Un tel choix de domaine d'études permettrait aussi de mieux maîtriser les conditions de bord puisqu'elles se retrouveraient entièrement dans le domaine libre et non pas à une interface libre/poreux. D'un autre côté, même si on choisit de traiter le milieu libre avec un modèle simplifié de type Darcéen, les changements de plusieurs ordres de grandeurs des paramètres entre le milieu libre et le milieu poreux (conductivité de chaleur, perméabilité, pression capillaire et donc la taille caractéristique de la zone d'ébullition et les gradients correspondants, une influence de la convection prépondérante dans le milieu libre) rendent la résolution numérique difficile.

Une telle inclusion de la cuve dans le domaine de calcul permettrait de rajouter des phénomènes potentiellement intéressants qui ne peuvent pas être pris en compte dans le modèle actuel. Un exemple est lié à l'ébullition et donc la création de gaz cyclohexane dans la cuve. La plupart du cyclohexane gazeux produit dans le disque peut être amené à craquer et à contribuer au dépôt, alors que celui produit dans la cuve s'en va et il est récupéré par des condenseurs. Lorsqu'on veut optimiser non seulement les pertes d'énergie mais aussi celles de précurseur, l'ébullition hors du disque est un facteur important. L'étude de l'énergie perdue deviendrait également plus fiable si on rajoutait une partie de la cuve autour du disque dans le modèle.

Une dernière étude d'un plus grand intérêt est celle d'un passage à l'échelle industrielle, notamment la possibilité de traiter plusieurs disques en même temps. Le modèle électromagnétique contient déjà toutes les briques nécessaires, mais il est fort probable que les champs vont être altérés de manière significative, ce qui nécessite une adaptation des inducteurs afin de pouvoir assurer une densification homogène de tous les disques simultanément. Concernant le modèle de transport diphasique il est dans ce cas impératif d'avoir inclus préalablement le milieu contournant le disque. Une raison principale à ceci est l'optimisation de l'écart entre les disques (milieu libre) qui doit être assez petit pour ne pas perdre de place et assez grand pour assurer la bonne circulation des fluides et l'apport de précurseur, et pour éviter des zones trop chaudes entre les disques qui favoriseraient la densification des disques placés au centre par rapport à ceux situés au bord de la pile. Un espacement trop petit et la surchauffe inter-disque peuvent également conduire à un dépôt entre les disques. Cela empêcherait ensuite la densification à l'intérieur des disques (qui seraient bouchés au bord) avec un risque de provoquer un collage des disques les uns aux autres.

Bibliographie

- Arabike, D., Susu, A., and Ogunye, A. (1981). Mechanics and mathematical modeling of the thermal decomposition of cyclohexane. *Thermochim. Acta*, 51(113-127).
- Balabel, A. (2012). Numerical modeling of turbulence-induced interfacial instability in two-phase flow with moving interface. *Applied Mathematical Modelling*, 36(3593-3611).
- Belorgey-Beaugrand, S. (2000). *Etude du procédé de densification rapide par caléfaction pour l'élaboration de composites carbone-carbone*. PhD thesis, Université d'Orléans.
- Berk, Z. (2013). *Food Process Engineering and Technology*, volume 1. Food Science and Technology, International Series, 1 edition. ISBN : 978-0-12-415923-5.
- Bertran, X. (2013). *Comportement en milieu oxydant d'un composite carbone/carbone pour applications structurales entre 150 et 400°C dans l'aéronautique civile*. PhD thesis, Université Bordeaux 1.
- Beyhaghi, S., M.Pillai, K., Qadah, D. T., and Dietz, M. L. (2011a). Evaporation and transport of non-dilute, multi-component liquid mixtures in porous wicks : Simulation and experimental validation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54(5216-5230).
- Beyhaghi, S., Pillai, K. M., Qadah, D. T., and Dietz, M. L. (2011b). Evaporation and transport of non-dilute multicomponent liquid mixtures in porous wicks : Simulation and experimental validation. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 54(5216-5230).
- Bickerdike, R., Brown, A., Huges, G., and H.Ranson (1962). Proceedings of the fifth Conf. on Carbon, Pergamon Press, New York, 575-582.
- Byon, C. and Kim, S. J. (2012). Effects of geometrical parameters on the boiling limit of bi-porous wicks. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55(7884-7891).
- Bénard, J., Eymard, R., Nicolas, X., and Chavant, C. (2005). Boiling in porous media : Model and simulations. *Transp. Porous Med.*, 60(1-31).
- Carroll, T., D.F. Connors, J., Suplinskas, R., and Thurston, G. (14/03/1995). US patent number 5 397 595.
- Chandesris, M. and Jamet, D. (2009). Jump conditions and surface-excess quantities at a fluid/porous interface : A multi-scale approach. *Transp Porous Med*, 78(419-438).
- Chanesris, M. and Jamet, D. (2006). Boundary conditions at a planar fluid-porous interface for a poiseuille flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49(2137-2150).
- David, P. and Benazet, J. (13/03/1997a). Procédé de densification d'une structure poreuse avec circulation de précurseur et dispositif associé. brevet francais numéro 97 02987.
- David, P. and Benazet, J. (13/03/1997b). Procédé de densification d'une structure poreuse faisant intervenir un précurseur original et dispositif associé. brevet francais numéro 97 02986.
- David, P., Benazet, J., and Narcy, B. (26/10/1993). Procédé de densification d'une structure poreuse par du nitrure de bore. brevet francais numéro 93 14182.
- David, P., Benazet, J., and Ravel, F. (1999). Rapid deposition of carbon and ceramic matrices by film boiling technique. *Advanced structural fiber composites*, 5(135-140).

- Dekeyrel, A. (2010). *Mise au point d'un procédé d'élaboration rapide de composites Carbone/Carbone haute densité*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1.
- Delhaès, P., Trinquecoste, M., Lines, J.-F., Cosculluela, A., Goyhénèche, J.-M., and Couzy, M. (2005). Chemical vapor infiltration of c/c composites : Fast densification processes and matrix characterizations. *Carbon*, 43(681-691).
- Deng, H., Li, K., Li, H., Zhang, L., and Cao, W. (2011). Densification behavior and microstructure of carbon/carbon composites prepared by chemical vapor infiltration from xylene at temperatures between 900 and 1250°C. *Carbon*, 49(2561-2570).
- Develey, G. (2000a). Chauffage par induction électromagnétique : principes. Techniques des l'ingénieur D5 935.
- Develey, G. (2000b). Chauffage par induction électromagnétique : technologie. Techniques des l'ingénieur D5 936.
- d'Hueppe, A., Chandesarir, M., Jamet, D., and Goyeau, B. (2011). Boundary conditions at a fluid-porous interface for a convective heat transfer problem : Analyses of the jump relations. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54(3683-3693).
- Dumont, M. (2001). *Composites carbone/carbone 3D densifiés par imprégnation/carbonisation de brai mésophasique*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1.
- Dupupet, G. (2008). Fibres de carbone. Techniques de l'ingénieur AM5234.
- Ernst, R. (2009). Notions sur les aspects électriques des systèmes à induction monophasés. Polycopies de cours, document interne.
- E.S., K. (1981). Density and surface tension of 83 organic liquids. *Journal of Chemical Engineering Data*, 26(323-332).
- Evans, K. J., Knoll, D., and Pernice, M. (2006). Development of a 2-d algorithm to simulate convection and phase transition efficiently. *Journal of Computational Physics*, 219(404-417).
- Fabuss, B., Kafesjian, R., and Smith, J. (1964). Thermal decomposition rates of saturated cyclic hydrocarbons. *Chem. Processes Des.*, 3(248-254).
- Faigle, B. (2009). *Two-phase flow modeling in porous media with kinetic interface mass transfer processes in fractures*. PhD thesis, University of Stuttgart.
- Figus, C., Bray, Y. L., Bories, S., and Prat, M. (1999). Heat and mass transfer with phase change in a porous structure partially heated : continuum model and pore network simulations. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42(2557-2569).
- Francois, M. (2003). *Matériaux composites c/c pour le freinage aéronautique : éléments de compréhension des régimes de frottement et d'usure haut et bas*. PhD thesis, Ecole centrale de Lyon.
- Ganguly, P. K. (2014). *Introduction to electrical engineering*, volume 1. Eastern Economy Edition, 1 edition. ISBN : 978-81-203-4809-7.
- Gazette, K. (16 July 1978). The meaning of the name kalamazoo. p.6.
- Giraud, I. (2011). *Elaboration d'ensimages thermoplastiques thermostables : Influence sur le comportement mécanique des composites PEEK/Fibres de carbone*. PhD thesis, Université de Toulouse.
- Gmbh, D. Surface tension of cyclohexane. http://www.ddbst.com/en/EED/PCP/SFT_C50.php.

- Golecki, I. (1997a). Rapid vapor-phase densification of refractory composites. *Materials Science and Engineering*, 20(37-124).
- Golecki, I. (1997b). Recent advances in rapid vapor-phase densification of high-temperature fiber-matrix composites. *Proceedings of the 21th Annual Conference on Composites, Advanced Ceramics, Materials, and Structures –B*, 18(721-730).
- Golecki, I., Morris, R., Narasimhan, D., and Clements, N. (1995). Rapid densification of carbon-carbon by thermal-gradient chemical vapor infiltration. *Proceedings of the 19th Annual Conference on Composites, Advanced Ceramics, Materials, and Structures –A*, (315-323).
- Golecki, I., Morris, R., Narasimhan, D., and Clements, N. (1996). Carbon-carbon composites inductively-heated and rapidly densified by thermal-gradient chemical vapor infiltration : Density distributions and densification mechanisms. *Advanced synthesis and processing of composites and advanced ceramics II*, 79(135-142).
- Golecki, I. and Narasimhan, D. (2001). Novel real-time method for measuring the densification rate of carbon-carbon fiber-matrix composites and other articles. *25th Annual Conference on Composites, Advanced Ceramics, Materials, and Structures : A*, 22(103-114).
- Gouider, M. (2004). *Tibologie des composites carbone/carbone : Echelles et contributions relatives de la mécanique et de la physico-chimie*. PhD thesis, Ecole doctorale des sciences pour l'ingénieur de Lyon : MEGA.
- Guta, L. and Sundar, S. (2010). Navier-stokes-brinkman system for interaction of viscous waves with a submerged porous structure. *Tamkang Journal of mathematics*, 41(217-243).
- Hirschberg, S., Wiemer, S., and Burgherr, P. (2015). *Energy from the earth - Deep geothermal as a resource for the future ?*, volume 1. vdf, 1 edition. ISBN : 978-3-7281-3655-8.
- Houdayer, M., Spitz, J., and Van, D. T. (18/09/1984). US patent number 4 472 454.
- Houdayer, M., Spitz, J., and Van, D. T. (26/11/1981). Procédé de densification d'une préforme poreuse. brevet français numéro 81 22163.
- Hung, T.-C., Dhir, V. K., Pei, B.-S., Chen, Y.-S., and Tsai, F. P. (2013). The development of a three-dimensional transient cfd model for predicting cooling ability of spent fuel pools. *Applied Thermal Engineering*, 50(496-504).
- Ida, N. (2004). *Engineering electronics*, volume 1. Springer, 1 edition. ISBN : 0-387-20156-4.
- Jamet, D. and Chandesris, M. (2009). On the intrinsic nature of jump coefficients at the interface between a porous medium and a free fluid region. *International Journal of heat and Mass Transfer*, 52(289-300).
- Johnson, W., Phillips, L., and Watt, W. (24 avril 1964). The production of carbon fibres. National Research Development Corporation : England, GB110791.
- Kerkhof, P. (1996). A modified maxwell-stefan model for transport through inert membranes : the binary friction model. *Journal of Chemical Engineering*, 64(319-343).
- Klabunde, K. J. (2001). *Nanoscale materials in chemistry*, volume 1. John Wiley and Sons, 1 edition. ISBN : 0-471-38395-3.
- Kolev, N. I. (2011). *Multiphase Flow Dynamics - Fundamentals*, volume 1. Springer, 4 edition.

- Korun, N., Magaril, R., Plyusnina, R., and Semukhina, G. (1979). Influence of hydrogen and hex-1-ene on the thermal decomposition of cyclohexane. *Russ. J. Phys. Chem.*, 53(631-634).
- Lacoste, M., Lacombe, A., Joyez, P., Ellis, R., Lee, J., and Payne, F. (2002). Carbon/carbon extendible nozzles. *Acta Astronautica*, 50(357-367).
- Lee, W. and Son, G. (2011). Numerical simulation of boiling enhancement on a microstructured surface. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 38(168-173).
- Leutard, D. (1999). Modélisation du chauffage inductif sur un four de cvi. Master's thesis, Université Bordeaux 1.
- Leutard, D., Vignoles, G. L., Lamouroux, F., and Bernard, B. (2001). Monitoring density and temperature in c/c composite s processing by cvi with induction heating. *Journal of Materials Synthesis and Processing*, 9(259-273).
- Li, H., Leong, K., Jin, L., and Chai, J. (2010). Transient two-phase flow and heat transfer with localized heating in porous media. *International Journal of Thermal Sciences*, 49(1115-1127).
- Lines, J.-F. (2003). *Modélisation du procédé de densification rapide de composites C/C par caléfaction*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1.
- Liu, W., Shen, S., and Riffat, S. (2002). Heat transfer and phase change of liquid in an inclined enclosure packed with unsaturated porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(5209-5219).
- Madani, B., Tadrist, L., and Topin, F. (2013). Experimetal analysis of upward flow boiling heat transfer in a channel provided with copper metallic foam. *Applied Thermal Engineering*, 52(336-244).
- Manninen, M. and Taivassalo, V. (1996). On the mixture model for multiphase flow. *VTT Publications*, 288.
- Mason, E. and Malinauskas, P. (1983). *Gas transport in porous media : The dusty-gas model*, volume 17. Ed. Elsevier, 1 edition.
- Mbaye, M. and Bilgen, E. (2006). Natural convection in composite systems with phase change materials. *Heat Mass Transfer*, 42(636-644).
- Meunier, G. (2008). *The finite element method for electromagnetic modeling*, volume 1. Wiley, 1 edition. ISBN : 978-1-84821-030-1.
- Mihalef, V., Unlusu, B., Metaxas, D., Sussman, M., and Hussaini, M. (2006). Physics-based boiling simulation. *Symposium on Computer Animation*.
- Mitra, S. K. and Chakraborty, S. (2012). *Microfluids and Nanofluids Handbook : Chemistry, Physics and Life Science Principles*, volume 1. CRC Press, Taylor and Francis Group, 1 edition. ISBN : 978-1-4398-1677-6.
- Moradkhani, H., Sorooshian, S., Gupta, H. V., and Houser, P. R. (2005). Dual state-parameter estimation of hydrological models using ensemble kalman filter. *Advances in Water Resources*, 28(135-147).
- Nadeau, N. (2004). *Modélisation mathématique et numérique d'un front de densification lors de l'élaboration d'un matériau composite C/C par CVI*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1.
- Nadeau, N., Vignoles, G. L., and claude Michel Brauner (2006). Analytical and numerical study of the densification of carbon/carbon composites by a film-boiling chemical vapor infiltration process. *Chemical Engineering Science*, 61(7509-7527).

- Najjari, M. and Nasrallah, S. B. (2012). Etude numérique de l'ébullition en convection mixte dans une couche poreuse verticale. *International Journal of Thermal Sciences*, 41(913-925).
- Narcy, B. (1996). *Développement d'un procédé nouveau de densification rapide pour l'élaboration de matériaux composites à matrice carbone et céramique*. PhD thesis, Université de Lyon 1.
- Neuman, S. (1977). Theoretical derivation of darcy's law. *Acta Mechanica*, 25(153-170).
- Ousegui, A., Moresoli, C., Dostie, M., and Marcos, B. (2010). Porous multiphase approach for baking process - explicit formulation of evaporation rate. *Journal of Food Engineering*, 100(535-544).
- Pailler, F. (2000). Modélisation monodimensionnelle d'un procédé de densification de composites carbone/carbone.
- Petit, F. (1998). *Ebullition en milieu poreux et renoyage d'un lit de débris de réacteur nucléaire*. PhD thesis, ENSAM, Bordeaux.
- Poling, B., Prausnitz, J., and O'Connell, J. (2001). *The properties of gases and liquids*, volume 1. McGraw-Hill, 5 edition. DOI : 10.1036/0070116822.
- Pozrikidis, C. (2009). *Fluid Dynamics - Theory, Computation and Numerical Simulation*, volume 1. Springer, 2 edition. ISBN 978-0-387-95869-9.
- Pruess, K. (1997). On vaporizing water flow in hot sub-vertical rock fractures. *Transport in Porous Media*, 28(335-372).
- Reuge, N. (2002). *Modélisation globale de l'infiltration chimique en phase vapeur (CVI) et étude de la chimie du dépôt de pyrocarbone en CVD/CVI*. PhD thesis, Université de Bordeaux I.
- Rovillain, D. (1999). *Procédé de densification rapide et caractérisation de composites carbone/carbone*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1.
- Rovillain, D., M. Trinqucoste, Bruneton, E., Derré, A., David, P., and Delhaès, P. (2001). Film boiling chemical vapor infiltration. an experimental study on carbon/carbon composites. *Carbon*, 39(1355-1365).
- Rudnev, V., Loveless, D., Cook, R., and Black, M. (2003). *Handbook of Induction Heating*, volume 1. Marcel Dekker, 1 edition. ISBN : 0-8247-0848-2.
- Salimi, H., Wolf, K.-H., and Bruining, J. (2012). Negative saturation approach for non-isothermal compositional two-phase flow simulation. *Transp. Porous Med.*, 91(391-422).
- Saranghi, R., Bhattacharya, A., and Prasher, R. (2009). Numerical modelling of boiling heat transfer in microchannels. *Applied Thermal Engineering*, 29(300-309).
- Savage, G. (1993). *Carbon-carbon composites*, volume 1. Chapman and Hall, 1 edition. ISBN 0-412-36150-7.
- Scaringella, D., D.F. Connors, J., and Thurston, G. (20/08/1996). US patent number 5 547 717.
- Scarpa, F. and Milano, G. (2002). The role of adsorption and phase change phenomena in the thermophysical characterization of moist porous materials. *International Journal of Thermophysics*, 23(1033-1046).
- Schwartz, M. (2006). *New materials, processes and methods, technology*, volume 1. Taylor and Francis, 10 edition. ISBN 0-8493-2053-4.

- Stemmelen, D., pascal Dominiak, and Moyne, C. (1999). Ebullition en milieu poreux : analyse expérimentale de la stabilité du front zone liquide-zone diphasique. *Int. J. Therm. Sci.*, 38(572-584).
- Sukhareva, L., Legonkova, O., and Yakovlev, V. (2008). *Polymers for packaging and containers in food industry*, volume 1. CRC Press Taylor and Francis Group, 1 edition. ISBN : 978-9-00-418820-4.
- Thurston, G., Suplinskas, R., Carroll, T., D.F. Connors, J., Scaringella, D., and Krutenat, R. (14/02/1995). US patent number 5 389 152.
- Tong, X. C. (2011). *Advanced Materials for thermal management of electronic Packaging*, volume 1. Springer, 1 edition. ISBN 978-1-4419-7758-8.
- Trinquecoste, M., Bruneton, E., Derré, A., David, P., and Delhaès, P. (1999). Bench reactor for fast densification processing of carbon/carbon composite materials. *Carbon '99, 24th biennial Conference on Carbon*, (408-409).
- Tsant, W. (1978). Thermal stability of cyclohexane and 1-hexene. *Int. J. Chem. Kin.*, 10(1119-1138).
- Vaidyaraman, S., Lackey, W. J., Agrawal, P. K., and Freeman, G. B. (1995a). Forced-flow -thermal gradient chemical vapor infiltration (fcvi) for fabrication of carbon/carbon. *Carbon*, 33(9) :1211–1215.
- Vaidyaraman, S., Lackey, W. J., Agrawal, P. K., and Miller, M. A. (1996a). Carbon/carbon composites processing by forced-flow-thermal gradient chemical vapor infiltration using propylene. *Carbon*, 34(3) :347–362.
- Vaidyaraman, S., Lackey, W. J., Agrawal, P. K., and Starr, T. L. (1996b). 1-D model for forced-flow -thermal gradient chemical vapor infiltration process for carbon/carbon composites. *Carbon*, 34(9) :1123–1133.
- Vaidyaraman, S., Lackey, W. J., Freeman, G. B., Agrawal, P. K., and Langman, M. D. (1995b). Fabrication of carbon-carbon composites by forced flow-thermal gradient chemical vapor infiltration. *J. Mater. Res.*, 10(6) :1469–1477.
- Vignoles, G., Weisbecker, P., Leyssale, J.-M., Jouannigot, S., and Chollon, G. (2015). Carbones pyrolytiques ou pyrocarbones. *Technique de l'Ingénieur NM 3150*.
- Vignoles, G. L., Coindreau, O., Ahmadi, A., and Bernard, D. (2007a). Assessment of geometrical and transport properties of a fibrous c/c composite preform as digitized by x-ray computerized micro-tomography. part ii : Heat and gas transport properties. *J. Mater. Res.*, 22(1537-1550).
- Vignoles, G. L., Ducloux, R., and Gaillard, S. (2007b). Analytical stability of the densification front in carbon-or ceramic-matrix composites processing by tg-cvi. *Chemical Engineering Science*, 62(6081-6089).
- Vignoles, G. L., Goyhénèche, J.-M., Sébastien, P., Puiggali, J.-R., Lines, J.-F., Lachaud, J., Delhaès, P., and Trinquecoste, M. (2006). The film-boiling densification process for c/c composite fabrication : From local scale to overall optimization. *Chemical Engineering Science*, 61(5636-5653).
- Walter Greiner, Ludwig Neise, H. S. (1999). *Thermodynamique et mécanique statistique*. Springer.
- Wang, C.-Y. and Beckermann, C. (1993). A two-phase mixture model of liquid-gas flow and heat transfer in capillary porous media - i. formulation. *Int. Journal Mass Transfer*, 36(2747-2758).

- Wang, J., Quian, J., Qiao, G., and Jin, Z. (2006). Improvement of film boiling chemical vapor infiltration process for fabrication of large size c/c composites. *Materials letters*, 60(1269-1272).
- Watson, A. (2013). *Geothermal engineering - Fundamentals and applications*, volume 1. Springer, 1 edition. ISBN : 978-1-4614-8568-1.
- Webbook, N. C. Cyclohexane. <http://webbook.nist.gov/cgi/cbook.cgi?Name=cyclohexane&Units=SI>.
- Wengeler, L. (2001). *Nanoscale materials in chemistry*, volume 1. John Wiley and Sons, 1 edition. ISBN : 0-471-38395-3.
- Wilke, C. (1950). A viscosity equation for gas mixtures. *Journal of chemical physics*, 18(4) :517–519.
- Yang, D., Pan, J., Wu, Y., Chen, T., and Zhou, C. Q. (2011). Numerical simulation of flow boiling for organic fluid with high saturation temperature in vertical porous coated tube. *Internation Journal of Heat and Fluid Flow*, 32(818-825).
- Ye, T., Shyy, E., and Chung, J. N. (2001). A fixed-grid, sharp-interface method for bubble dynamics and phase change. *Journal of Computational Physics*, 174(781-815).
- Zhang, Y., Li, H., and Yang, D. (2012). Simultaneous estimation of relative permeability and capillary pressure using ensemble-based history matching techniques. *Transp Porous Med*, 94(259-276).

A. Liste des symboles

symbole	description	unité
Transport massique		
σ_{ij}	Tension de surface entre les phase (solide/liquide/gaz) i et j	J/m^2
σ	Tension de surface entre le liquide et le gaz	J/m^2
P_c	Pression de capillarité	$Pa = kg/m/s^2$
R_c	Rayon de courbure de l'interface liquide/gaz	m
ρ	Densité massique	kg/m^3
\vec{u}	Vitesse	m/s
$\rho\vec{u}$	Flux massique	$kg/m^2/s$
P	Pression du fluide	Pa
μ	Viscosité dynamique	$Pa \cdot s = kg/m/s$
$\nu = \mu/\rho$	Viscosité cinétique	m^2/s
\vec{g}	Accélération gravitationnelle	m/s^2
K_0	Perméabilité absolue du milieu poreux	$Da = 10^{-12}m^2$
k_{rp}	Perméabilité relative de la phase p (liquide/gaz)	1
λ_p	Mobilité relative de la phase p	1
\vec{j}	Flux massique d'interdiffusion entre le liquide et le gaz	$kg/m^2/s$
R_g	Constante des gaz parfaits	$8.314J/mol/K = Nm/mol/K$
Energie, Enthalpie, Thermique, Transition de phase		
S	Saturation (volumique) en liquide	1
G	Potentiel thermodynamique de Gibbs	J
T	Température	K
L_0	Chaleur latente d'évaporation	J/kg
C_p	Capacité calorifique de la phase p	$J/kg/K$
λ_{Tp}	Conductivité de la chaleur de la phase p	$W/m/K$
$\lambda_{T,eff}$	Conductivité de la chaleur solide+fluide (liquide+gaz)	$W/m/K$
\dot{m}	Taux de transition de masse liquide \rightarrow gaz	$kg/m^3/s$
h	Enthalpie massique	J/kg
h_{psat}	Enthalpie massique de saturation de la phase p	J/kg
T_{sat}	Température de saturation (d'ébullition)	K
Q	Chauffage volumique	$W/m^3 = kg/m/s^3$
Modèle thermique incluant l'ébullition		
Ω	Rapport de capacité calorifique	1

symbole	description	unité
γ_h	Coefficient de correction de l'advection en diphasique	1
Γ_h	Coefficient de diffusion d'enthalpie	$Pa.s = kg/m/s$
$D(S)$	Coefficient de diffusion capillaire	$Pa.s$
$f(S)$	Fonction de barrière pour la migration de phase	1
$\Delta\rho$	Différence de densité entre le liquide et le gaz	kg/m^3
$(\rho h')_m$	Enthalpie volumique du mélange liquide+gaz	J/m^3
\tilde{h}	Enthalpie massique avec capacité thermique $C(T = T_{sat})$	J/kg
$(\rho h')_{t,supp}$	Accumulation d'enthalpie volumique lié au changement du volume solide/fluide	J/m^3
$\gamma_{\rho h}$	Coefficient de correction d'advection diphasique	m^3/kg
$h_{g,supp}$	Terme convectif lié à la dépendance en T de C_g	J/kg
$\alpha_{\rho h}$	Diffusivité d'enthalpie volumique	m^2/s

Dépôt

ε	Porosité	1
$\nu_{pyC/X}$	Coefficients stœchiométriques de pyC/X après craquage d'une molécule de précurseur cyclohexane	1
k_{homo}	Constante cinétique de réaction de craquage homogène	$1/s$
k_{hetero}	Constante cinétique de réaction de craquage hétérogène	m/s
σ_v	Surface interne du milieu poreux, fonction de la porosité	$m^2/m^3 = 1/m$
a_k	Coefficient de la constante cinétique du dépôt	$m/s/K^{b_k}$
b_k	Paramètre de la constante cinétique du dépôt	1
E_a	Energie d'activation pour le dépôt	J/mol
R_c	Taux de consommation de cyclohexane liée au craquage	$mol/m^3/s$
Ω_s	Volume molaire au dépôt	m^3/mol

Diffusion d'espèces

C_{gC}	Concentration molaire de cyclohexane gazeux	mol/m^3
C_{gX}	Concentration molaire de l'espèce X gazeuse	mol/m^3
P_{gi}	Pression partielle de l'espèce i gazeuse	Pa
$\vec{J}_{gi}^{m,t}$	Flux molaire total de l'espèce i gazeuse	$mol/m^2/s$
\vec{j}_{gi}^D	Flux massique diffusif de l'espèce i gazeuse	$kg/m^2/s$
M_{gC}	Masse molaire du cyclohexane	kg/mol
M_{gX}	Masse molaire de l'espèce X	kg/mol

symbole	description	unité
D_{cx}	Coefficient de diffusion ordinaire entre le cyclohexane gazeux et l'espèce X	m^2/s
X_{gi}	Fraction molaire de l'espèce i gazeuse (P_{gi}/P_g)	1
ω_{gi}	Fraction massique de l'espèce i gazeuse ($(M_{gi}P_{gi})/(M_gP_g)$)	1

Electromagnétisme - Chauffage inductif

\vec{j}	Densité de courant (complexe ou réelle) totale	A/m^2
\vec{j}_{ind}	Densité de courant (complexe ou réelle) induite	A/m^2
\vec{B}	Induction magnétique	$T = Vs/m^2 = kg/A/s^2$
\vec{H}	Champ magnétique	$H = A/m^2$
\vec{E}	Champ électrique	V/m
\vec{D}	Induction électrique	As/m^2
μ_{mag}	Perméabilité magnétique d'un matériau (= $\mu_{mag,0}\mu_r$)	$4\pi \cdot 10^{-7} H/m$
$\mu_{mag,0}$	Perméabilité magnétique du vide	$H = Vs/A = m^2kg/s^2/A^2$ $4\pi \cdot 10^{-7} H/m$
μ_r	Perméabilité relative (du matériau)	1
ε_{el}	Permittivité électrique d'un matériau (= $\varepsilon_{el,0}\varepsilon_r$)	$8.854 \cdot 10^{-12} F/m$
$\varepsilon_{el,0}$	Permittivité électrique du vide	$F = As/V = s^4A^2/m^2/kg$ $8.854 \cdot 10^{-12} F/m$
ε_r	Permittivité relative (du matériau m)	1
σ	Conductivité électrique (fonction de la densité)	$S/m = A/Vm = A^2s^3/kg/m^3$
ω	Fréquence du courant (= $2\pi f$)	$1/s$
f	Fréquence du courant	$1/s$
i	Unité imaginaire	
V	Potentiel scalaire (complexe)	V
\vec{A}	Potentiel vecteur (complexe)	$T \cdot m = Vs/m = kgm/A/s^2$
A, A_ϕ	Composante angulaire ϕ du potentiel vecteur (complexe)	$T \cdot m = Vs/m = kgm/A/s^2$

Electromagnétisme - Etude du circuit

L	Inductance du système	$H = Vs/A = kgm^2/s^2/A^2$
C	Capacité électrique du système	$F = As/V = s^4A^2/m^2/kg$
R	Résistance du système	$\Omega = m^2kg/s^3/A^2$
Z	Impédance complexe du système	Ω
I	Courant (= $\int \vec{j} d\vec{A}$)	A
U	Tension	V
P	Puissance	W
k	Rapport de spires d'un transformateur	1
Q_{rh}	Pertes résistives (comme Q) dans l'inducteur et la pièce	W/m^3

symbole	description	unité
W_m	Energie magnétique stockée dans le système complet	W

Indices

	Transport, Thermique, Dépôt
l	liquide
g	gaz
m	mélange liquide+gaz
s	solide
gc	précurseur (cyclohexane) gazeux
gx	espèce X sortant de la réaction de craquage
pyC	pyrocarbone sortant de la réaction de craquage, phase solide
sat	au point d'ébullition (à T_{sat})
$pref$	dans la préforme (partiellement densifiée)
	Electromagnétisme
ext	lié au terme de source externe
ind	induit
G	au niveau du générateur
t	au niveau du circuit oscillant complet (C+LR)
C	au niveau des condensateurs
LR	au niveau de l'inducteur (et ses amenées) et le disque
res	au point de résonance
n	nominal
N	Nombre de spires d'un inducteur (indice : dernière spire)
tot	sur une spire, somme des influences source externe + induction

Nombre adimensionnelles

Re	Reynolds : rapport forces inertielles/visqueuses
------	--

Paramètres liés au modèle monodimensionnel

$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$	Taux de dépôt	$1/s$
Δt	Pas de temps pour l'itération actuelle	s
$(\Delta \varepsilon)_{cons}$	Valeur de consigne pour la variation maximale de porosité sur le disque entier pour une itération de calcul	1
cu	indice dans l'électromagnétisme : propriété liée au cuivre, c'est à dire dans l'inducteur	
A_R, A_I	Composante ϕ du potentiel vecteur, parties réelle et imaginaire	$T \cdot m = Vs/m = kgm/A/s^2$
A_{ext}	Valeur complexe de A au bord du disque, fonction du courant dans l'inducteur	$T \cdot m = kgm/A/s^2$

symbole	description	unité
j_{pref}	Composante ϕ de la densité de courant, complexe	A/m^2
α	Inverse de l'épaisseur de peau en complexe	$1/m$
I_{tot}	Courant imposé dans les spires	A

Géométrie

$D_{i,pref}$	Diamètre intérieur de la préforme	m
$D_{e,pref}$	Diamètre extérieur de la préforme	m
L_{pref}	Longueur (perpendiculaire au diamètre) de la préforme	m
$D_{i,ind}$	Diamètre intérieur d'un inducteur	m
$D_{e,ind}$	Diamètre extérieur d'un inducteur	m
$h_{entrefefer}$	Entrefer entre deux spires d'un inducteur	m
N_{spires}	Nombre de spires d'un inducteur	1
h_{spire}	Hauteur (en direction du diamètre) d'une spire	m
L_{spire}	Longueur (perpendiculaire au diamètre) d'une spire	m
d_{coil}	Ecartement des 2 spires de l'inducteur complet	m
R_{inf}	Rayon de la boite infinie (circle)	m
	Modele 1D	
L_{ind}	Largeur d'une spire de l'inducteur selon x	m
L_{disc}	Largeur du disque complet selon x	m
h_{spire}	Hauteur d'une spire perpendiculaire à x	m
d_{coils}	Ecartement des coils	m
$L_{entrefefer}$	Espace entre un inducteur et le disque	m

Propriétés physiques du milieux poreux

ρ_{fibre}	Densité massique de la fibre	kg/m^3
ρ_{pyC}	Densité massique du pyrocarbone déposé	kg/m^3
ρ_s	Densité du solide : mélange de fibres+pyC+vide	kg/m^3
ε_{init}	Porosité de la préforme vierge	1
$K_{0d,init}$	Perméabilité absolue de la préforme vierge en direction d	m^2
d_{f0}	Diamètre de fibre initial	m
$\varepsilon_{res,s}$	Porosité résiduelle pré-supposée après densification	1
$\tilde{\varepsilon}$	Porosité modifiée afin de valoir zéro après densification	1
d_p	Diamètre de pores	m
η_v	Facteur de tortuosité du transport visqueux	1
η_{di}	Facteur de tortuosité du transport diffusif	1
\tilde{K}_0	Loi de variation de la perméabilité absolue avec la porosité	m^2

symbole	description	unité
ρ_{vierge}	Densité apparente de la préforme vierge : mélange fibre+vide	kg/m^3
$\lambda_{Ts,d,T}$	Conductivité de chaleur du solide en direction d - dépendance en température	
$\lambda_{Ts,d,\rho}$	Conductivité de chaleur du solide en direction d - dépendance en porosité	
$\lambda_{Ts,d}$	Conductivité de chaleur du solide en direction d	$W/m/K$
$\lambda_{Ts,ref}$	Valeur de référence de la conductivité de chaleur du solide	$W/m/K$

Propriétés électromagnétiques

σ_{cu}	Conductivité du matériel dans les inducteurs (cuivre)	$S/m = 1/\Omega/m$
σ_{nd}	Conductivité du disque sous forme de préforme vierge	S/m
σ_d	Conductivité du disque sous forme complètement densifié	S/m
σ_{pref}	Conductivité (locale) de la préforme partiellement densifiée	S/m

B. Liste détaillée des publications nommées pour la mécanique des fluides

Voici le tableau des principaux travaux trouvés en mécanique des solides organisé selon la description du chapitre 3.5.1. Il est suivi d'une brève description de chacun des travaux.

	Monophase	2 phases séparées	Mélange
Espace libre		(Ye et al., 2001), (Sarangi et al., 2009), (Yang et al., 2011)	(Mihalef et al., 2006), (Mbaye and Bilgen, 2006), (Balabel, 2012) Enthalpie : (Evans et al., 2006), (Hung et al., 2013) Autres : (Manninen and Taivassalo, 1996)
Interface libre/-poreux	Autres : (Guta and Sundar, 2010)	S et T : (Liu et al., 2002)	(Lee and Son, 2011)
Milieu poreux	Autres : (Beyhaghi et al., 2011b)	S et T : (Figus et al., 1999) Autres : (Faigle, 2009)	S et T : (Bénard et al., 2005), (Scarpa and Milano, 2002) Enthalpie : (Wang and Beckermann, 1993; Li et al., 2010; Najjari and Nasrallah, 2012) Entropie : Selon Kolev (Kolev, 2011) ceci est la formulation la plus robuste Autres : (Pruess, 1997), (Salimi et al., 2012)

TABLE B.1.: Résumé des modèles

C. Chauffage par induction : Equations de l'électromagnétisme

C.1. Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell relient l'induction magnétique \vec{B} , le champ magnétique \vec{H} , l'induction électrique \vec{D} et le champ électrique \vec{E} à l'aide des charges libres ρ_f et des courants libres \vec{j}_f :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad (\text{C.1a})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (\text{C.1b})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{C.1c})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_f + \dot{\vec{D}} \quad (\text{C.1d})$$

En plus des équations de Maxwell on a des lois de comportement (voir sous-chapitre suivant) :

$$\vec{D} = \varepsilon_{el} \vec{E} \quad (\text{C.2a})$$

$$\vec{B} = \mu_{mag} \vec{H} \quad (\text{C.2b})$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{C.2c})$$

En effet, les équations de Maxwell héritent de théorèmes connus en électromagnétisme avant celui-ci. Ces théorèmes d'origine peuvent être obtenues en intégrant C.1a et C.1c sur un volume et en intégrant C.1b et C.1d sur une surface. Après application du théorème de

Gauss-Ostrogradsky ou du théorème de Stokes, on trouve

$$\int_{\partial V} \vec{D} d\vec{S} = Q_f$$

Il s'agit du théorème de Gauss.
En faisant l'intégrale sur une sphère de rayon R :

(C.3a)

$$\bar{D} = \frac{1}{S} \int_{\partial V} \vec{D} d\vec{S} = \frac{Q_f}{4\pi R^2}$$

$$\int_{\partial S} \vec{E} d\vec{r} = - \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

Avec la définition de la tension U et du flux Φ :

$$U = -\dot{\Phi}$$

Il s'agit du théorème de Faraday.

(C.3b)

$$\int_{\partial B} \vec{D} d\vec{S} = 0$$

Il s'agit du théorème de Thomson.

(C.3c)

$$\int_{\partial S} \vec{H} d\vec{r} = - \int_S \vec{J}_f d\vec{S}$$

Il s'agit du théorème d'Ampère.
En faisant l'intégrale sur un cercle perpendiculaire à un fil :

(C.3d)

$$H = \frac{I_f}{2\pi R}$$

En utilisant les deux dernières équations ensemble avec les lois de comportement, on trouve la loi d'induction :

$$U = L \cdot \dot{I}_f$$
(C.4a)

ou encore :

$$\Phi = L \cdot I_f$$
(C.4b)

où L est une constante appelée l'inductance.

Une loi supplémentaire bien connue est celle de Biot-Savart permettant d'obtenir directement la valeur du champ magnétique à un endroit donné par intégration sur la densité de courant (Ida, 2004) :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint_C \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$
(C.5)

C.2. Lois de comportement, charges et courants libres

Un système possède, de manière générale, deux types de charges : Les charges libres ρ_f et les charges liées ρ_b par exemple aux atomes. Un champ électrique peut déplacer les charges libres sur de grandes distances mais les charges liées peuvent se déplacer seulement un peu en respect de l'atome et créer ainsi des dipôles.

Il est maintenant intéressant de connaître les relations entre \vec{D} et \vec{E} en tenant compte de ces deux types de charges. Pour ainsi faire, on se place dans le cas de l'électrostatique :

$$\rho_t = \rho_f + \rho_b$$
(C.6a)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f$$
(C.6b)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (\text{C.6c})$$

En introduisant un champ de polarisation P (qui est définie par l'équation correspondante dans la démarche suivante), on obtient

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_t - \rho_b \quad (\text{C.7a})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} + \rho_b = \rho_t \quad (\text{C.7b})$$

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (\text{def. polarisation}) \quad (\text{C.7c})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{D} - \vec{P}) = \rho_t \quad (\text{C.7d})$$

Souvent, la polarisation (c'est à dire le déplacement des charges liées à cause du champ) est proportionnelle au champ \vec{E} , et on a

$$\vec{P} = \varepsilon_{el,0} \Xi_e \vec{E} \quad (\text{C.8a})$$

$$\vec{D} = \varepsilon_{el,0} \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{C.8b})$$

$$\vec{D} = \varepsilon_{el,0} (1 + \Xi_e) \vec{E} \quad (\text{C.8c})$$

$$\vec{D} = \varepsilon_{el,0} \varepsilon_{el,r} \vec{E} \quad (\text{C.8d})$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_{el,0} \vec{E}) = \rho_t \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_t}{\varepsilon_{el,0}} \quad (\text{C.8e})$$

L'induction électrique est donc régnée par les charges libres (qu'on introduit nous-mêmes dans le système et qu'on contrôle) alors que le champ magnétique dépend de toutes les charges du système. Les deux grandeurs sont liés par la polarisation P du matériel qui s'adapte au champ total \vec{E} .

Pour $\varepsilon_{el,r} = \text{const}$ on a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\varepsilon_{el,0} \varepsilon_{el,r}} \quad (\text{C.9a})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_t}{\varepsilon_{el,0}} \quad (\text{C.9b})$$

$$\Rightarrow \rho_t = \frac{\rho_f}{\varepsilon_{el,r}} \quad (\text{C.9c})$$

On peut faire un raisonnement similaire pour l'induction magnétique et le champ magnétique en décomposant le courant :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_f + \dot{\vec{D}} \quad (\text{C.10a})$$

$$\vec{j}_t = \vec{j}_f + \vec{j}_M + \vec{j}_P \quad (\text{C.10b})$$

\vec{j}_M : courants d'aimantation de charges liées

\vec{j}_P : courants résultant de la polarisation

$$\vec{j}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (\text{def. champ d'aimantation}) \quad (\text{C.10c})$$

$$\vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (\text{C.10d})$$

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \Xi_m \vec{H} \\ \mu_r &= 1 + \Xi_m\end{aligned}\quad (\text{C.10e})$$

Avec ceci on trouve

$$\frac{1}{\mu_{mag,0}} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j}_t + \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} \quad (\text{C.11})$$

C.3. L'électromagnétisme 3D : Les potentiels vecteur et scalaire complexes

Le but de ce chapitre c'est de réduire le système de 4 équations de Maxwell transitoires en introduisant un potentiel vecteur \vec{A} complexe et un potentiel scalaire complexe V . L'hypothèse du régime quasi stationnaire qu'on va faire suppose que le temps caractéristique ($t = 1/f$ du courant) est beaucoup plus petite que le temps caractéristique de tous les autres phénomènes qu'on traite (ce qui est largement le cas pour les fréquences élevées qu'on utilise).

L'équation C.1c est résolue en introduisant un vecteur \vec{A} tel que

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}} \quad (\text{C.12})$$

On se place dans le régime quasi stationnaire en disant que tous les champs C (vectoriels ou scalaires) oscillent avec la même fréquence ω :

$$C = C_0 \cdot \exp(i\omega t) = (C_{0,r} + i \cdot C_{0,i}) \cdot (\cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)) \quad (\text{C.13})$$

où C_0 est une valeur complexe qui dépend de l'endroit du domaine mais pas du temps. Pour simplicité on ne va pas écrire l'indice 0 dans la suite, sachant que toutes les champs qui apparaissent dans les équations suivantes sont les champs 0.

Introduisant ceci dans C.1b conduit a

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{C.14a})$$

$$\vec{E} = -i\omega \vec{A} - \vec{\nabla} V \quad (\text{C.14b})$$

On a donc "intégré" deux des quatre équations de Maxwell avec ces définitions pour \vec{B} et \vec{E} et en passant au nombres complexes au régime quasi stationnaire. Ainsi nous retrouvons les champs physiques à partir des potentiels selon les formules suivantes :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{C.15a})$$

$$\vec{E} = -i\omega \vec{A} - \vec{\nabla} V \quad (\text{C.15b})$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_{mag,0}} \vec{B} \quad (\text{C.15c})$$

$$\vec{D} = \varepsilon_{el,0} \vec{E} \quad (\text{C.15d})$$

$$\vec{j}_f = \sigma \vec{E} = \sigma \left(-i\omega \vec{A} - \vec{\nabla} V \right) \quad (\text{C.15e})$$

$$Q = \frac{1}{\sigma} \|\vec{j}\|^2 \quad (\text{C.15f})$$

Le "vrai" système à résoudre consiste donc dans les équations C.1a et C.1d. On impose

$$\rho_f = 0 \quad (\text{C.16})$$

et on utilise les lois de comportement C.2 pour trouver

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\varepsilon_{el,0} \varepsilon_{el,r} \left(-i\omega \vec{A} - \vec{\nabla} V \right) \right] = 0 \quad (\text{C.17a})$$

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\mu_{mag,0} \mu_{mag,r}} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right] = \vec{j}_f + i\omega \varepsilon_{el,0} \varepsilon_{el,r} \left(-i\omega \vec{A} - \vec{\nabla} V \right) \quad (\text{C.17b})$$

$$\vec{j}_f = \sigma \vec{E} = \sigma \left(-i\omega \vec{A} - \vec{\nabla} V \right) = -i\omega \sigma \vec{A} - \sigma \vec{\nabla} V = \vec{j}_{ind} - \vec{j}_{ext} \quad (\text{C.17c})$$

où l'on voit que le courant se décompose en une partie induite ($-i\omega \sigma \vec{A}$) et une partie liée à la source de tension externe (\vec{j}_{ext})

Alternativement on peut utiliser les formes en B et E dérivées dans le dernier sous-chapitre au lieu des deux premières équation ci-dessus, et on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_t}{\varepsilon_{el,0}} \\ -i\omega \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \Delta V &= \frac{\rho_t}{\varepsilon_{el,0}} \end{aligned} \quad (\text{C.18a})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_{mag,0} \cdot \left(\vec{j}_t + \varepsilon_{el,0} \dot{\vec{E}} \right) \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \mu_{mag,0} \cdot \left(\vec{j}_t + \omega^2 \varepsilon_{el,0} \vec{A} - i\omega \varepsilon_{el,0} \vec{\nabla} V \right) \end{aligned} \quad (\text{C.18b})$$

$$\begin{aligned} \vec{j}_t &= \vec{j}_f + \vec{j}_M + \vec{j}_P = \vec{j}_f + \vec{\nabla} \times \left((\mu_{mag,r} - 1) \cdot \vec{H} \right) + \varepsilon_{el,0} (\varepsilon_{el,r} - 1) \dot{\vec{E}} \\ \vec{j}_t &= \vec{j}_f + \vec{\nabla} \times \left(\frac{\mu_{mag,r} - 1}{\mu_{mag,0} \mu_{mag,r}} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) + \varepsilon_{el,0} \left[(\varepsilon_{el,r} - 1) \left(\omega^2 \vec{A} - i\omega \vec{\nabla} V \right) \right] \\ \vec{j}_f &= \sigma \vec{E} = \sigma \left(-i\omega \vec{A} - \vec{\nabla} V \right) = \vec{j}_{ind} - \vec{j}_{ext} \end{aligned} \quad (\text{C.18c})$$

La première équation peut être utilisée pour calculer V , la deuxième pour \vec{A} et la troisième est une simple définition du courant. On y voit notamment que si la perméabilité et permittivité relatives sont égaux à 1, alors la densité de courant libre équivaut la densité de courant totale. Il est de même pour les charges libres ρ_f et les charges totales ρ_t .

A ce moment il est important de savoir que les potentiels (vecteur ou scalaire) sont des grandeurs auxiliaires sans interprétation physique directe. Les véritables grandeurs à considérer sont les 4 champs \vec{B} , \vec{H} , \vec{E} , \vec{D} . On remarque que les valeurs de ces 4 champs calculées à

partir de leurs définitions avec les potentiels ne changent pas lorsqu'on introduit une variable scalaire Ξ et qu'on redéfinit

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \quad (\text{C.19a})$$

$$V' = V - i\omega\chi \quad (\text{C.19b})$$

$$\Rightarrow \vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \quad (\text{C.19c})$$

$$\Rightarrow \vec{E}' = -i\omega\vec{A}' - \vec{\nabla}V' = -i\omega\vec{A} - i\omega\vec{\nabla}\chi - \vec{\nabla}(V - i\omega\chi) = -i\omega\vec{A} - \vec{\nabla}V = \vec{E} \quad (\text{C.19d})$$

On dit donc que les potentiels ne sont pas définis de manière unique. Pour les rendre unique, une "équation" supplémentaire doit être donnée. On appelle celle-ci une équation de jauge, dont les plus connues sont soit celle de Coulomb, soit celle de Lorentz.

La jauge de Lorentz impose

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon_{el}\mu_{mag}i\omega V = 0 \quad (\text{C.20})$$

ce qui conduit aux deux équations

$$\omega^2\varepsilon_{el}\mu_{mag}V + \Delta V = -\frac{\rho_t}{\varepsilon_{el,0}} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}V + \Delta V = -\frac{\rho_t}{\varepsilon_{el,0}} \quad (\text{C.21a})$$

$$\omega^2\varepsilon_{el}\mu_{mag}\vec{A} + \Delta\vec{A} = -\vec{j}_t \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} + \Delta\vec{A} = -\vec{j}_t \quad (\text{C.21b})$$

On a utilisé la définition de la vitesse de la lumière dans le matériel

$$\mu_{mag}\varepsilon_{el} = \frac{1}{c^2} \quad (\text{C.22})$$

et pour la relation de \vec{A} on s'est servi de la loi mathématique

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} = -\Delta\vec{v} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (\text{C.23})$$

Sous la jauge de Lorentz, les deux potentiels obéissent alors à l'équation d'onde. Pour un matériel amagnétique $\mu_{mag,r} = \varepsilon_{el,r} = 1$ et sans charges libres, le terme source dans l'équation de V disparaît et celui de l'équation de \vec{A} devient $\vec{j}_t = \vec{j}_f = \vec{j}_{ind} + \vec{j}_{ext}$

En utilisant la jauge de Coulomb (au lieu de celle de Lorentz)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{C.24})$$

et en posant toujours ε_{el} et μ_{mag} constant, les équations C.18 deviennent :

$$\Delta V = -\frac{\rho_t}{\varepsilon_{el,0}} \quad (\text{C.25a})$$

$$-\Delta\vec{A} = \mu_{mag,0} \cdot \left[\vec{j}_t + i\omega\varepsilon_{el,0} \left(-i\omega\vec{A} - \vec{\nabla}V \right) \right] = \mu_{mag,0} \cdot \left[\vec{j} + \frac{i\omega\varepsilon_{el,0}}{\sigma} \vec{j}_f \right] \quad (\text{C.25b})$$

$$\vec{j}_f = \sigma \left(-i\omega\vec{A} - \vec{\nabla}V \right) = \vec{j}_t - \vec{j}_P - \vec{j}_M \quad (\text{C.25c})$$

L'équation du potentiel scalaire est donc beaucoup plus simple que celle avec la jauge de Lorentz. Pour un système amagnétique et sans charges libres, le système simplifie encore à

$$\vec{\nabla}V = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.26a})$$

$$-\Delta\vec{A} = \mu_{mag,0} \cdot \left(1 + \frac{i\omega\varepsilon_{el,0}}{\sigma}\right) \cdot \vec{j}_f \quad (\text{C.26b})$$

$$\vec{j}_f = \sigma \left(-i\omega\vec{A} - \vec{\nabla}V\right) \quad (\text{C.26c})$$

Dans la plupart des applications, le terme en $\omega\varepsilon_{el,0}/\sigma$ est négligeable. Les valeurs U_i peuvent être des tensions extérieures imposées si bien que $\sigma\vec{\nabla}V$ représente une densité de courant externe.

Sous l'hypothèse d'un système axisymétrique où la tension est imposée par une source externe on obtient une simple équation pour le potentiel vecteur sur le domaine entier et un courant composé d'une partie externe et d'une partie induite :

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial}{\partial r} A_\phi \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_\phi + i\omega\sigma\mu_{mag,0}A_\phi = -\mu_{mag,0}\sigma \cdot U_{ext} \quad (\text{C.27a})$$

$$j_\phi = -i\sigma\omega\vec{A} - \sigma U_{ext} = j_{\phi,ind} + j_{\phi,ext} \quad (\text{C.27b})$$

C.4. Conditions lors d'une transition de matériau

Pour la résolution des équations de Maxwell on a deux possibilités : Soit on les résout sur tout le domaine avec les paramètres qui varient d'un matériau à l'autre, soit on les résout pour chaque région de matériel séparément. Dans le premier cas on est obligé de résoudre les équations de potentiel C.18, avec l'une de jagues présentées appliquée en plus. Dans le deuxième cas, on peut utiliser l'une des deux équations C.21 ou C.25, mais à chaque transition entre deux matériaux il faut ajouter des conditions de saut/continuité qui dérivent des équations Maxwell :

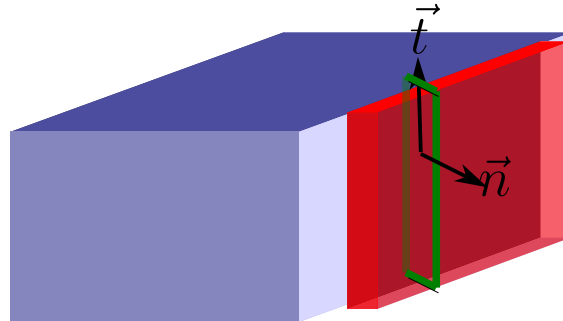


Fig. 99: Intégration des équations Maxwell pour obtenir les conditions lors d'une transition de matériau. Le cube soit en matériau m_1 et son environnement en matériau m_2 . On utilise la surface rouge d'un cube (à moitié dans m_1 et à moitié dans m_2) pour l'intégration des équations pour \vec{D} et \vec{B} et le bord vert d'un rectangle (à moitié dans m_1 et à moitié dans m_2) pour les deux autres grandeurs. Les tailles perpendiculaires à la surface considéré du grand cube sont infiniment petit.

En intégrant les équations de Maxwell C.1 sur le volume/la surface rouge ou bien le rectangle/le chemin vert de fig. 99, on trouve

$$\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) \cdot \vec{n} = Q_{interface} \quad (\text{C.28a})$$

$$\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) \cdot \vec{t} = 0 \quad (\text{C.28b})$$

$$\left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{C.28c})$$

$$\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) \cdot \vec{t} = I_{surf,rect.vert} \quad (\text{C.28d})$$

où $Q_{interface} = \rho_{interface} \cdot A$ est la charge sur la surface droite du grand cube et $I_{surf,rect.vert}$ le courant qui passe à travers du rectangle vert de la même surface.

Ces équations doivent ensuite être réécrites pour les potentiels \vec{A} et V avec la jauge utilisée.

Pour un cas axisymétrique, avec deux matériaux amagnétiques ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) et la jauge de Coulomb nous trouvons notamment

$$\begin{aligned} & \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) \cdot \vec{t} = 0 \\ \Rightarrow & \left[(-i\omega\vec{A}_1) - (-i\omega\vec{A}_2)\right] \cdot \vec{t} = 0 \\ \Rightarrow & A_{\phi,1} = A_{\phi,2} \end{aligned} \quad (\text{C.29a})$$

$$\begin{aligned} & \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right) \cdot \vec{n} = 0 \\ \Rightarrow & \left[\left(\vec{\nabla} \times A_1\right) - \left(\vec{\nabla} \times A_2\right)\right] \cdot \vec{n} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial A_{\phi,1}}{\partial n} = \frac{\partial A_{\phi,2}}{\partial n} \end{aligned} \quad (\text{C.29b})$$

C.5. Calculs sur le circuit électromagnétique

En travaillant avec des nombres complexes introduites avant, on a

$$\begin{aligned} U_t &= U_{t0} \exp(i\omega t) \\ I_t &= I_{t0} \exp(i\omega t + \phi) = I_{t0} \exp(i\omega t) \exp(\phi) \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Ceci conduit à la définition d'une puissance active et une puissance réactive comme suivant :

$$P_t = U_t \cdot I_t^* = U_{t0} I_{t0} \cos(\phi) + i \cdot U_{t0} I_{t0} \sin(\phi) = P_{t,a} + i \cdot P_{t,r} \quad (\text{C.31})$$

On dit qu'un circuit est en résonance et marche correctement uniquement si le courant et la tension sont en phase, c'est à dire que la puissance réactive est égale à zéro.

Plus de détails sur les calculs de circuits oscillatoires peuvent être trouvés dans la littérature classique de circuits oscillants. Ici on remarque juste que pour le calcul complexe il y a des relations entre tension et courant qui est similaire à celle d'un circuit avec une simple

résistance, mais en remplaçant la résistance par une grandeur complexe appelée l'impédance Z : $U = Z \cdot I$. Dans notre circuit on a notamment

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \quad (\text{C.32a})$$

$$Z_{RL} = R + i\omega L \quad (\text{C.32b})$$

$$Z_t = \left(\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_{RL}} \right)^{-1} = \frac{R + i \cdot (-R^2\omega C + \omega L - \omega^3 L^2 C)}{(\omega^2 LC)^2 + (R\omega C)^2} \quad (\text{C.32c})$$

$$\tan \phi = \frac{\Im Z}{\Re Z} = \frac{-R^2\omega C + \omega L - \omega^3 L^2 C}{R} \quad (\text{C.32d})$$

Le circuit oscillant fonctionne correctement si la tension et le courant totales sont en phase, c'est à dire que la phase $\phi = 0$. Sachant qu'on travaille a courant alternatif $\omega \neq 0$ on trouve

$$\boxed{\omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - R^2 \frac{C}{L}}} \quad (\text{C.33})$$

On peut réinjecter cette fréquence dans le calcul de l'impédance pour trouver l'impédance du circuit oscillant complet qui devient réel :

$$Z(\omega = \omega_{res}) = \frac{R}{1 - R^2 \frac{C}{L}} \quad (\text{C.34})$$

C.6. Calcul de densité de courant dans une spire à tension donnée

On considère une spire de rayon intérieur r_{int} , rayon extérieur r_{max} et étendue en direction z $z_{max} - z_{min}$. Contrairement à un fil, cette spire possède une section non-négligeable si bien qu'un électron passant le long du rayon intérieur et un autre passant le long du rayon extérieur vivent la même chute de tension V mais une résistance différente due à la différence de longueur de chemin. On veut maintenant donner une expression pour la résistance et encore pour la densité de courant en fonction du rayon.

Pour ceci on divise la spire en plusieurs plaques i qui ont tous la même étendu en z : $z_{max} - z_{min}$ mais de différent rayon intérieur $r_{int,i}$ et hauteur infinitésimale dr ($r_{int,i} \approx r_{ext,i} \approx r_i$). Pour chacune de ces plaques on peut alors calculer le courant I_i à partir de la loi d'Ohm classique en utilisant la résistance R_i de cette plaque :

$$I_i = \frac{U}{R_i} \quad (\text{C.35a})$$

$$R_i = \frac{1}{\sigma} \frac{dl}{dA} = \frac{1}{\sigma} \frac{2\pi r_i}{dr dz} \quad (\text{C.35b})$$

$$\Rightarrow I_i = \frac{\sigma U}{2\pi r_i} dA \quad (\text{C.35c})$$

La densité de courant j_i de la plaque est alors

$$j_i = \frac{I_i}{dA} = \frac{V}{R_i dA} = \frac{\sigma U}{2\pi r_i} \quad (\text{C.36})$$

ou écrit de manière différente

$$j(r) = \frac{\sigma U}{2\pi r} \quad (\text{C.37})$$

La spire totale correspond au circuit parallèle de toutes les plaques i si bien qu'on obtient le courant total

$$I_{tot} = \sum_i \frac{\sigma U}{2\pi r_i} dr dz = \sum_i \frac{\sigma U}{2\pi r_{int} + i \cdot dr} dr dz = \int \frac{\sigma U}{2\pi r} dr dz \quad (\text{C.38})$$

Ceci conduit à la relation bien connue

$$I_{tot} = \int j dA \quad (\text{C.39})$$

et valide donc notre expression pour la densité de courant j .

Avec les présentes relations on obtient également la valeur du courant et de la résistance d'une spire :

$$I_{tot} = \frac{\sigma U}{2\pi} \ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{int}}\right) (z_{max} - z_{min}) \quad (\text{C.40a})$$

$$R = \frac{U}{I_{tot}} = \frac{2\pi}{\sigma} \frac{1}{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{int}}\right) (z_{max} - z_{min})} \quad (\text{C.40b})$$

et encore une fois on obtient des relations bien connues.

D. Fichier Maple pour le calcul du potentiel vecteur au bord de la charge

restart;

Expression du potentiel vecteur A et de sa dérivée paramétrés pour chaque région

$eqn_diff := -diff(diff(A(x), x), x) = -I \cdot \omega \cdot \sigma \cdot mu_0 \cdot A(x) + mu_0 \cdot j_ext;$

$$-\left(\frac{d^2}{dx^2} A(x)\right) = -I \omega \sigma mu_0 A(x) + mu_0 j_ext \quad (1)$$

$sol_inf := unapply(eval(eval(A(x), dsolve(eval(eqn_diff, \{\sigma = 0, j_ext = 0\}))), \{C1 = C1_inf, C2 = C2_inf\}), x);$

$$x \rightarrow x C1_inf + C2_inf \quad (2)$$

$sol_induct0 := eval(A(x), dsolve(eval(eqn_diff, \{\sigma = \sigma_cu\})));$

$$-\sin\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} I\right) \sqrt{2} \sqrt{\omega} \sqrt{\sigma_cu} \sqrt{mu_0} x\right) C2 + \cos\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} I\right) \sqrt{2} \sqrt{\omega} \sqrt{\sigma_cu} \sqrt{mu_0} x\right) C1 - \frac{I j_ext}{\omega \sigma_cu} \quad (3)$$

$sol_induct := unapply\left(\text{subs}\left(\left\{\left(-\frac{1}{2} I C2 + \frac{1}{2} C1\right) = C1_induct, \left(\frac{1}{2} I C2 + \frac{1}{2} C1\right) = C2_induct, \text{sqrt}(\sigma_cu) = \frac{\text{sqrt}(2) \cdot \alpha_cu}{(1 + I) \cdot \text{sqrt}(\omega) \cdot \text{sqrt}(mu_0)}, j_ext = \frac{j_ext p \cdot \omega \cdot \sigma_cu}{I}\right\}, \text{collect}(\text{simplify}(\text{convert}(sol_induct0, \text{exp}), \text{size}), \text{exp})\right), x);$

$$x \rightarrow C1_induct e^{-\alpha_cux} + C2_induct e^{\alpha_cux} - j_ext p \quad (4)$$

$sol_entref := unapply(eval(eval(A(x), dsolve(eval(eqn_diff, \{\sigma = 0, j_ext = 0\}))), \{C1 = C1_entref, C2 = C2_entref\}), x);$

$$x \rightarrow x C1_entref + C2_entref \quad (5)$$

$sol_pref0 := eval(A(x), dsolve(eval(eqn_diff, \{\sigma = \sigma_pref, j_ext = 0\})));$

$$-C1 \sin\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} I\right) \sqrt{2} \sqrt{\omega} \sqrt{\sigma_pref} \sqrt{mu_0} x\right) + C2 \cos\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} I\right) \sqrt{2} \sqrt{\omega} \sqrt{\sigma_pref} \sqrt{mu_0} x\right) \quad (6)$$

$sol_pref := unapply\left(\text{subs}\left(\left\{\left(-\frac{1}{2} I C1 + \frac{1}{2} C2\right) = C1_pref, \left(\frac{1}{2} I C1 + \frac{1}{2} C2\right) = C2_pref, \text{sqrt}(\sigma_pref) = \frac{\text{sqrt}(2) \cdot \alpha_pref}{(1 + I) \cdot \text{sqrt}(\omega) \cdot \text{sqrt}(mu_0)}\right\}, \text{collect}(\text{simplify}(\text{convert}(sol_pref0, \text{exp}), \text{size}), \text{exp})\right), x);$

$$x \rightarrow C1_pref e^{-\alpha_prefx} + C2_pref e^{\alpha_prefx} \quad (7)$$

$sol_inf_diff := unapply(diff(sol_inf(x), x), x);$

$$x \rightarrow C1_inf \quad (8)$$

$$sol_induct_diff := unapply(diff(sol_induct(x), x), x);$$

$$x \rightarrow -C1_induct \alpha_cu e^{-\alpha_cux} + C2_induct \alpha_cu e^{\alpha_cux} \quad (9)$$

$$sol_entref_diff := unapply(diff(sol_entref(x), x), x);$$

$$x \rightarrow C1_entref \quad (10)$$

$$sol_pref_diff := unapply(diff(sol_pref(x), x), x);$$

$$x \rightarrow -C1_pref \alpha_pref e^{-\alpha_prefx} + C2_pref \alpha_pref e^{\alpha_prefx} \quad (11)$$

Calcul des paramètres par conditions de bord - expression de A(x) dans la préforme

$$sol_coeffs := simplify(solve(\{sol_induct(L_pref + L_entref + L_ind) = sol_inf(L_pref + L_entref + L_ind), sol_induct_diff(L_pref + L_entref + L_ind) = sol_inf_diff(L_pref + L_entref + L_ind), sol_induct(L_pref + L_entref) = sol_entref(L_pref + L_entref), sol_induct_diff(L_pref + L_entref) = sol_entref_diff(L_pref + L_entref), sol_pref(L_pref) = sol_entref(L_pref), sol_pref_diff(L_pref) = sol_entref_diff(L_pref), sol_inf(L_inf) = 0, sol_pref_diff(0) = 0\}, \{C1_inf, C2_inf, C1_induct, C2_induct, C1_entref, C2_entref, C1_pref, C2_pref\}), size) :$$

$$sol_pref2 := unapply(simplify(eval(sol_pref(x), sol_coeffs), size), x);$$

$$x \rightarrow - \left((e^{-\alpha_prefx} + e^{\alpha_prefx}) \left(e^{\alpha_cu(L_pref + L_entref)} (1 + (L_ind - L_inf + L_pref + L_entref) \alpha_cu) e^{-\alpha_cu(L_pref + L_entref + L_ind)} - \left((-1 + (L_ind - L_inf + L_pref + L_entref) \alpha_cu) e^{\alpha_cu(L_pref + L_entref + L_ind)} + 2 e^{\alpha_cu(L_pref + L_entref)} \right) e^{-\alpha_cu(L_pref + L_entref)} \right) \alpha_cu j_extp \right) / \left(e^{\alpha_cu(L_pref + L_entref)} (1 + (L_ind - L_inf + L_pref + L_entref) \alpha_cu) \left((-\alpha_cu L_entref \alpha_pref + \alpha_cu + \alpha_pref) e^{-\alpha_pref L_pref} + e^{\alpha_pref L_pref} (\alpha_cu L_entref \alpha_pref + \alpha_cu - \alpha_pref) \right) e^{-\alpha_cu(L_pref + L_entref + L_ind)} - \left(-1 + (L_ind - L_inf + L_pref + L_entref) \alpha_cu \right) \left((-\alpha_cu L_entref \alpha_pref + \alpha_cu - \alpha_pref) e^{-\alpha_pref L_pref} + e^{\alpha_pref L_pref} (\alpha_cu L_entref \alpha_pref + \alpha_cu + \alpha_pref) \right) e^{-\alpha_cu(L_pref + L_entref)} e^{\alpha_cu(L_pref + L_entref + L_ind)} \right) \quad (12)$$

Simplifications de A(x) par rapport au domaine infini

$$sol_pref3 := simplify(eval(sol_pref2(x), L_inf = L_infp + L_pref + L_entref + L_ind), size);$$

$$- \left((e^{-\alpha_prefx} + e^{\alpha_prefx}) \left(e^{\alpha_cu(L_pref + L_entref)} (L_infp \alpha_cu - 1) e^{-\alpha_cu(L_pref + L_entref + L_ind)} - e^{-\alpha_cu(L_pref + L_entref)} \left((L_infp \alpha_cu + 1) e^{\alpha_cu(L_pref + L_entref + L_ind)} - 2 e^{\alpha_cu(L_pref + L_entref)} \right) \right) \alpha_cu j_extp \right) / \left((L_infp \alpha_cu - 1) \left((-\alpha_cu L_entref \alpha_pref \right. \right. \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha_{cu} + \alpha_{pref}) e^{-\alpha_{pref}L_{pref}} + e^{\alpha_{pref}L_{pref}} (\alpha_{cu} L_{entref} \alpha_{pref} + \alpha_{cu} - \alpha_{pref}) \\
& e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} \\
& - e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} \left((-\alpha_{cu} L_{entref} \alpha_{pref} + \alpha_{cu} \right. \\
& \left. - \alpha_{pref}) e^{-\alpha_{pref}L_{pref}} + e^{\alpha_{pref}L_{pref}} (\alpha_{cu} L_{entref} \alpha_{pref} + \alpha_{cu} + \alpha_{pref}) \right) \\
& (L_{infpr} \alpha_{cu} + 1)
\end{aligned}$$

$sol_pref_simpl1 := collect(subs(\{(L_{infpr} \alpha_{cu} - 1) = L_{infpr}, (L_{infpr} \alpha_{cu} + 1) = L_{infpr}\}, sol_pref3), j_extp);$

$$\begin{aligned}
& - \left((e^{-\alpha_{pref}x} + e^{\alpha_{pref}x}) (e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} L_{infpr} e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} \right. \\
& \left. - e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} (L_{infpr} e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} - 2 e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})}) \right) \\
& \alpha_{cu} j_extp) / \left(L_{infpr} \left((-\alpha_{cu} L_{entref} \alpha_{pref} + \alpha_{cu} + \alpha_{pref}) e^{-\alpha_{pref}L_{pref}} \right. \right. \\
& \left. \left. + e^{\alpha_{pref}L_{pref}} (\alpha_{cu} L_{entref} \alpha_{pref} + \alpha_{cu} - \alpha_{pref}) \right) \right) \\
& e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} \\
& - e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} \left((-\alpha_{cu} L_{entref} \alpha_{pref} + \alpha_{cu} \right. \\
& \left. - \alpha_{pref}) e^{-\alpha_{pref}L_{pref}} + e^{\alpha_{pref}L_{pref}} (\alpha_{cu} L_{entref} \alpha_{pref} + \alpha_{cu} + \alpha_{pref}) \right) L_{infpr}
\end{aligned} \tag{14}$$

$sol_pref_simpl2 := simplify\left(simplify\left(coeftayl\left(series\left(eval\left(sol_pref_simpl1, L_{infpr} = \frac{1}{L_{infpr_inv}}\right), L_{infpr_inv} = 0, 1\right), L_{infpr_inv} = 0, 0\right), exp\right), size\right);$

$$\begin{aligned}
& - \left((e^{-\alpha_{pref}x} + e^{\alpha_{pref}x}) (-e^{-\alpha_{cu}L_{ind}} + e^{\alpha_{cu}L_{ind}}) \alpha_{cu} j_extp) / \left(\left((\alpha_{cu} L_{entref} \alpha_{pref} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \alpha_{cu} - \alpha_{pref}) e^{-\alpha_{pref}L_{pref}} - e^{\alpha_{pref}L_{pref}} (\alpha_{cu} L_{entref} \alpha_{pref} + \alpha_{cu} - \alpha_{pref}) \right) \right. \\
& \left. e^{-\alpha_{cu}L_{ind}} + \left((-\alpha_{cu} L_{entref} \alpha_{pref} + \alpha_{cu} - \alpha_{pref}) e^{-\alpha_{pref}L_{pref}} \right. \right. \\
& \left. \left. + e^{\alpha_{pref}L_{pref}} (\alpha_{cu} L_{entref} \alpha_{pref} + \alpha_{cu} + \alpha_{pref}) \right) e^{\alpha_{cu}L_{ind}} \right)
\end{aligned} \tag{15}$$

Application numérique de la valeur de A simplifiée au bord du disque

$sol_bord_simpl2 := simplify(eval(sol_pref_simpl2, x = L_{pref}), size);$

$$\begin{aligned}
& - \left((e^{-\alpha_{pref}L_{pref}} + e^{\alpha_{pref}L_{pref}}) (-e^{-\alpha_{cu}L_{ind}} + e^{\alpha_{cu}L_{ind}}) \alpha_{cu} j_extp) / \right. \\
& \left(\left((\alpha_{cu} L_{entref} \alpha_{pref} - \alpha_{cu} - \alpha_{pref}) e^{-\alpha_{cu}L_{ind}} - e^{\alpha_{cu}L_{ind}} (\alpha_{cu} L_{entref} \alpha_{pref} \right. \right. \\
& \left. \left. - \alpha_{cu} + \alpha_{pref}) \right) e^{-\alpha_{pref}L_{pref}} + \left((-\alpha_{cu} L_{entref} \alpha_{pref} - \alpha_{cu} + \alpha_{pref}) e^{-\alpha_{cu}L_{ind}} \right. \right. \\
& \left. \left. + e^{\alpha_{cu}L_{ind}} (\alpha_{cu} L_{entref} \alpha_{pref} + \alpha_{cu} + \alpha_{pref}) \right) e^{\alpha_{pref}L_{pref}} \right)
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
& evals_defs := \left\{ \alpha_{cu} = \frac{\sqrt{\sigma_{cu}} \cdot (1 + I) \cdot \sqrt{\omega} \cdot \sqrt{\mu_0}}{\sqrt{2}}, \alpha_{pref} \right. \\
& \left. = \frac{\sqrt{\sigma_{pref}} \cdot (1 + I) \cdot \sqrt{\omega} \cdot \sqrt{\mu_0}}{\sqrt{2}}, j_extp = \frac{\sigma_{cu} \cdot (U_{Re} + I \cdot U_{Im}) \cdot I}{\omega \cdot \sigma_{cu}}, L_{entref} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{ecart_induct} - L_pref \Big\} : \\
\text{evals_num} &:= \left\{ \mu_0 = 4 \cdot \text{Pi} \cdot 1\text{e}-7, \sigma_cu = 6\text{e}+7, \sigma_pref = \frac{1}{(9000\text{e}-8)}, \omega = 2 \cdot \text{Pi} \cdot 17880, L_ind \right. \\
&= 8\text{e}-3, L_pref = \frac{3.5\text{e}-2}{2}, \text{ecart_induct} = 3\text{e}-2, U_Re = 166.71, U_Im = 91.99 \Big\} : \\
A_bord_num &:= \text{evalf}(\text{eval}(\text{eval}(\text{sol_bord_simpl2}, \text{evals_defs}), \text{evals_num})); \\
&0.0002955154556 - 0.001493618856 I
\end{aligned} \tag{17}$$

Exclusion de la solution paramétrée dans le disque - calcul des paramètres dont 1 restant inconnu

$$\begin{aligned}
\text{sol_coeffs_pourCB} &:= \text{simplify}(\text{solve}(\{ \text{sol_induct}(L_pref + L_entref + L_ind) = \text{sol_inf}(L_pref \\
&+ L_entref + L_ind), \text{sol_induct_diff}(L_pref + L_entref + L_ind) = \text{sol_inf_diff}(L_pref \\
&+ L_entref + L_ind), \text{sol_induct}(L_pref + L_entref) = \text{sol_entref}(L_pref + L_entref), \\
&\text{sol_induct_diff}(L_pref + L_entref) = \text{sol_entref_diff}(L_pref + L_entref), \text{sol_inf}(L_inf) = 0 \}, \\
&\{ C1_inf, C2_inf, C1_induct, C2_induct, C2_entref \}), \text{size}) : \\
\text{sol_entref2} &:= \text{unapply}(\text{simplify}(\text{eval}(\text{sol_entref}(x), \text{sol_coeffs_pourCB}), \text{size}), x); \\
x \rightarrow &\left(\left((x - L_pref - L_entref) C1_entref - j_extp \right) \alpha_cu + C1_entref \right) \left(1 + (L_ind - L_inf \right. \tag{18} \\
&+ L_pref + L_entref) \alpha_cu \Big) e^{\alpha_cu(L_pref + L_entref)} e^{-\alpha_cu(L_pref + L_entref + L_ind)} \\
&- e^{-\alpha_cu(L_pref + L_entref)} \left(\left((x - L_pref - L_entref) C1_entref - j_extp \right) \alpha_cu \right. \\
&- C1_entref \Big) \left(-1 + (L_ind - L_inf + L_pref \right. \\
&+ L_entref) \alpha_cu \Big) e^{\alpha_cu(L_pref + L_entref + L_ind)} - 2 j_extp e^{\alpha_cu(L_pref + L_entref)} \alpha_cu \Big) \Big/ \\
&\left(\left(e^{\alpha_cu(L_pref + L_entref)} \left(1 + (L_ind - L_inf + L_pref \right. \right. \right. \\
&+ L_entref) \alpha_cu \Big) e^{-\alpha_cu(L_pref + L_entref + L_ind)} - e^{\alpha_cu(L_pref + L_entref + L_ind)} \left(-1 \right. \\
&+ (L_ind - L_inf + L_pref + L_entref) \alpha_cu \Big) e^{-\alpha_cu(L_pref + L_entref)} \Big) \alpha_cu \Big)
\end{aligned}$$

Expression entre la valeur de A et de sa dérivée au bord du disque, simplifications par rapport au domaine infini

$$\begin{aligned}
\text{sol_Diff_bord1} &:= \text{rhs}(\text{solve}(\{ \text{sol_entref2}(L_pref) = A_bord, \text{sol_entref_diff}(L_pref) \\
&= \text{Diff_A_bord} \}, \{ \text{Diff_A_bord}, C1_entref \}) [1]); \\
&- \left(\alpha_cu \left(-A_bord \alpha_cu e^{\alpha_cu(L_pref + L_entref + L_ind)} e^{-\alpha_cu(L_pref + L_entref)} L_entref \right. \tag{19} \\
&+ e^{\alpha_cu(L_pref + L_entref)} e^{-\alpha_cu(L_pref + L_entref + L_ind)} L_ind j_extp \alpha_cu \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} L_{pref} \alpha_{cu} \\
& - e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} \\
& + e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
sol_Diff_bord2 := & simplify(eval(sol_Diff_bord1, L_inf=L_infpr + L_pref + L_entref + L_ind), size); \\
- (& (e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} (L_{infpr} \alpha_{cu} - 1) (A_{bord} + j_{extp}) e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} \\
& - e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} ((L_{infpr} \alpha_{cu} + 1) (A_{bord} \\
& + j_{extp}) e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} - 2 j_{extp} e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})})) \alpha_{cu}) / \\
& (e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} (\alpha_{cu} L_{entref} - 1) (L_{infpr} \alpha_{cu} - 1) e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} \\
& - e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} (\alpha_{cu} L_{entref} + 1) (L_{infpr} \alpha_{cu} \\
& + 1))
\end{aligned} \tag{20}$$

$$sol_Diff_bord_simpl1 := collect(subs({(L_{infpr} \alpha_{cu} - 1) = L_{infpr}, (L_{infpr} \alpha_{cu} + 1) = L_{infpr}}, sol_Diff_bord2), j_{extp});$$

$$\begin{aligned}
- (& (e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} L_{infpr} e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} \\
& - e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} (L_{infpr} e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} - 2 e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})})) \\
& \alpha_{cu} j_{extp}) / (e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} (\alpha_{cu} L_{entref} \\
& - 1) L_{infpr} e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} \\
& - e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} (\alpha_{cu} L_{entref} + 1) L_{infpr}) \\
& - ((e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} L_{infpr} A_{bord} e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} - e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} L_{infpr} A_{bord} \\
& - 1) L_{infpr} e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} \\
& - e^{\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref} + L_{ind})} e^{-\alpha_{cu}(L_{pref} + L_{entref})} (\alpha_{cu} L_{entref} + 1) L_{infpr})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
sol_Diff_bord_simpl2 := & simplify(simplify(coeftayl(series(eval(sol_Diff_bord_simpl1, L_{infpr} \\
& = \frac{1}{L_{infpr_inv}}), L_{infpr_inv}=0, 1), L_{infpr_inv}=0, 0), exp), size); \\
& \frac{(-e^{-\alpha_{cu}L_{ind}} + e^{\alpha_{cu}L_{ind}}) \alpha_{cu} (A_{bord} + j_{extp})}{\alpha_{cu} L_{entref} e^{\alpha_{cu}L_{ind}} - \alpha_{cu} L_{entref} e^{-\alpha_{cu}L_{ind}} + e^{\alpha_{cu}L_{ind}} + e^{-\alpha_{cu}L_{ind}}}
\end{aligned} \tag{22}$$

Application numérique de la dérivée, utilisant la valeur de A au bord du disque calculée auparavant

$$\begin{aligned}
evalf(eval(eval(sol_Diff_bord_simpl2, evals_defs), {evals_num[], A_{bord}=A_{bord_num}))); \\
0.04103747539 + 0.001542523489 I
\end{aligned} \tag{23}$$

E. Application de la condition de bord sur A pour deux structures de disque

restart;

Diff_anal_inner := 0;

0

(1)

$$\text{Diff_anal_outer} := - \frac{(-e^{-\alpha_{cu}L_{ind}} + e^{\alpha_{cu}L_{ind}}) \alpha_{cu} (Val_A_outer + j_extp)}{\alpha_{cu} L_{entref} e^{\alpha_{cu}L_{ind}} - \alpha_{cu} L_{entref} e^{-\alpha_{cu}L_{ind}} + e^{\alpha_{cu}L_{ind}} + e^{-\alpha_{cu}L_{ind}}};$$

$$- \frac{(-e^{-\alpha_{cu}L_{ind}} + e^{\alpha_{cu}L_{ind}}) \alpha_{cu} (Val_A_outer + j_extp)}{\alpha_{cu} L_{entref} e^{\alpha_{cu}L_{ind}} - \alpha_{cu} L_{entref} e^{-\alpha_{cu}L_{ind}} + e^{\alpha_{cu}L_{ind}} + e^{-\alpha_{cu}L_{ind}}}$$

(2)

eqn_diff := -diff(diff(A(x), x), x) = -I·ω·σ(x)·mu_0·A(x);

$$- \left(\frac{d^2}{dx^2} A(x) \right) = -I \omega \sigma(x) \mu_0 A(x)$$

(3)

sol_general_uniform := unapply(subs(⎧ sqrt(σ_unif) = $\frac{\text{sqrt}(2) \cdot \alpha_{pref}}{(1 + I) \cdot \text{sqrt}(\omega) \cdot \text{sqrt}(\mu_0)}$, -I·_C1 + _C2 = _C1, I·_C1 + _C2 = _C2 ⎫, simplify(convert(rhs(dsolve(eval(eqn_diff, σ(x) = σ_unif))), exp), size)), x);

$$x \rightarrow \frac{1}{2} _C1 e^{-\alpha_{pref}x} + \frac{1}{2} e^{\alpha_{pref}x} _C2$$

(5)

diff_general_uniform := unapply(diff(sol_general_uniform(x), x), x);

$$x \rightarrow -\frac{1}{2} _C1 \alpha_{pref} e^{-\alpha_{pref}x} + \frac{1}{2} \alpha_{pref} e^{\alpha_{pref}x} _C2$$

(6)

evals_defs := ⎧ α_cu = $\frac{\text{sqrt}(\sigma_{cu}) \cdot (1 + I) \cdot \text{sqrt}(\omega) \cdot \text{sqrt}(\mu_0)}{\text{sqrt}(2)}$, α_pref = $\frac{\text{sqrt}(\sigma_{pref}) \cdot (1 + I) \cdot \text{sqrt}(\omega) \cdot \text{sqrt}(\mu_0)}{\text{sqrt}(2)}$, α_vierge = $\frac{\text{sqrt}(\sigma_{vierge}) \cdot (1 + I) \cdot \text{sqrt}(\omega) \cdot \text{sqrt}(\mu_0)}{\text{sqrt}(2)}$, α_dense = $\frac{\text{sqrt}(\sigma_{dense}) \cdot (1 + I) \cdot \text{sqrt}(\omega) \cdot \text{sqrt}(\mu_0)}{\text{sqrt}(2)}$, j_extp = $\frac{\sigma_{cu} \cdot (U_{Re} + I \cdot U_{Im}) \cdot I}{\omega \cdot \sigma_{cu}}$, L_entref = ecart_induct - L_pref ⎫ :

evals_num := ⎧ mu_0 = 4·Pi·1e-7, σ_cu = 6e+7, σ_pref = $\frac{1}{(9000e-8)}$, σ_vierge = $\frac{1}{(9000e-8)}$, σ_dense = $\frac{1}{(3000e-8)}$, ω = 2·Pi·17880, L_ind = 8e-3, L_pref = $\frac{3.5e-2}{2}$, L_dense = 0.8e-2, ecart_induct = 3e-2, U_Re = 166.71, U_Im = 91.99 ⎫ :

Cas uniforme

*coeffs_uniform := simplify(solve({diff_general_uniform(0) = Diff_anal_inner,
diff_general_uniform(L_pref) = eval(Diff_anal_outer, Val_A_outer
= sol_general_uniform(L_pref)) }, {_C1, _C2}), size);*

$$\left\{ \begin{aligned} _C1 = & - \left(2 j_extp \alpha_cu \left(-e^{-\alpha_cuL_ind} + e^{\alpha_cuL_ind} \right) \right) / \left(\left(\alpha_cu L_entref \alpha_pref - \alpha_cu \right. \right. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \left. - \alpha_pref \right) e^{-\alpha_prefL_pref} - e^{\alpha_prefL_pref} \left(\alpha_cu L_entref \alpha_pref + \alpha_cu - \alpha_pref \right) \\ & e^{-\alpha_cuL_ind} + e^{\alpha_cuL_ind} \left(-\alpha_cu L_entref \alpha_pref + \alpha_cu - \alpha_pref \right) e^{-\alpha_prefL_pref} \\ & + e^{\alpha_prefL_pref} \left(\alpha_cu L_entref \alpha_pref + \alpha_cu + \alpha_pref \right) \right), _C2 = - \left(2 j_extp \alpha_cu \left(\right. \right. \\ & \left. - e^{-\alpha_cuL_ind} + e^{\alpha_cuL_ind} \right) \right) / \left(\left(\alpha_cu L_entref \alpha_pref - \alpha_cu - \alpha_pref \right) e^{-\alpha_prefL_pref} \right. \\ & \left. - e^{\alpha_prefL_pref} \left(\alpha_cu L_entref \alpha_pref + \alpha_cu - \alpha_pref \right) e^{-\alpha_cuL_ind} + e^{\alpha_cuL_ind} \left(\right. \right. \\ & \left. \left. - \alpha_cu L_entref \alpha_pref + \alpha_cu - \alpha_pref \right) e^{-\alpha_prefL_pref} + e^{\alpha_prefL_pref} \left(\alpha_cu L_entref \alpha_pref \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha_cu + \alpha_pref \right) \right) \end{aligned}$$

sol_cas_uniform := unapply(eval(sol_general_uniform(x), coeffs_uniform), x);

$$x \rightarrow - \left(j_extp \alpha_cu \left(-e^{-\alpha_cuL_ind} + e^{\alpha_cuL_ind} \right) e^{-\alpha_prefx} \right) / \left(\left(\alpha_cu L_entref \alpha_pref - \alpha_cu \right. \right. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \left. - \alpha_pref \right) e^{-\alpha_prefL_pref} - e^{\alpha_prefL_pref} \left(\alpha_cu L_entref \alpha_pref + \alpha_cu - \alpha_pref \right) \\ & e^{-\alpha_cuL_ind} + e^{\alpha_cuL_ind} \left(-\alpha_cu L_entref \alpha_pref + \alpha_cu - \alpha_pref \right) e^{-\alpha_prefL_pref} \\ & + e^{\alpha_prefL_pref} \left(\alpha_cu L_entref \alpha_pref + \alpha_cu + \alpha_pref \right) \right) - \left(e^{\alpha_prefx} j_extp \alpha_cu \left(\right. \right. \\ & \left. - e^{-\alpha_cuL_ind} + e^{\alpha_cuL_ind} \right) \right) / \left(\left(\alpha_cu L_entref \alpha_pref - \alpha_cu - \alpha_pref \right) e^{-\alpha_prefL_pref} \right. \\ & \left. - e^{\alpha_prefL_pref} \left(\alpha_cu L_entref \alpha_pref + \alpha_cu - \alpha_pref \right) e^{-\alpha_cuL_ind} + e^{\alpha_cuL_ind} \left(\right. \right. \\ & \left. \left. - \alpha_cu L_entref \alpha_pref + \alpha_cu - \alpha_pref \right) e^{-\alpha_prefL_pref} + e^{\alpha_prefL_pref} \left(\alpha_cu L_entref \alpha_pref \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha_cu + \alpha_pref \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sol_cas_uniform_parcalculcomplet := & - \left(\left(e^{-\alpha_prefx} + e^{\alpha_prefx} \right) \left(-e^{-\alpha_cuL_ind} \right. \right. \\ & \left. + e^{\alpha_cuL_ind} \right) \alpha_cu j_extp \right) / \left(\left(\alpha_cu L_entref \alpha_pref - \alpha_cu - \alpha_pref \right) e^{-\alpha_prefL_pref} \right. \\ & \left. - e^{\alpha_prefL_pref} \left(\alpha_cu L_entref \alpha_pref + \alpha_cu - \alpha_pref \right) e^{-\alpha_cuL_ind} + \left(-\alpha_cu L_entref \alpha_pref \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha_cu - \alpha_pref \right) e^{-\alpha_prefL_pref} + e^{\alpha_prefL_pref} \left(\alpha_cu L_entref \alpha_pref + \alpha_cu + \alpha_pref \right) \right) \\ & e^{\alpha_cuL_ind} \end{aligned}$$

simplify(sol_cas_uniform(x) - sol_cas_uniform_parcalculcomplet, size);

0

(9)

sol_cas_uniform_num := unapply(evalf(eval(eval(sol_cas_uniform(x), evals_defs), evals_num)), x);

$$x \rightarrow \left(-0.00003170630108 - 0.0007463744228 I \right) e^{(-28.00543809 - 28.00543809 I) x} + \left(\quad (10) \right.$$

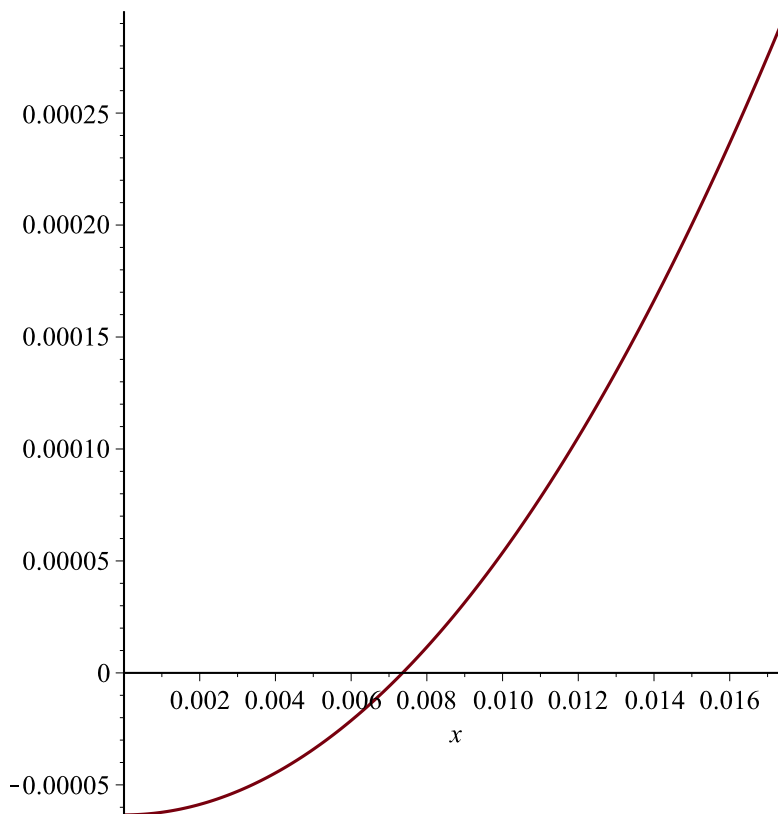
$$\left. -0.00003170630108 - 0.0007463744228 I \right) e^{(28.00543809 + 28.00543809 I) x}$$

$$\begin{aligned}
& sol_cas_uniform_num_Re := unapply(simplify(convert(Re(sol_cas_uniform_num(x)), trig), size), x) \\
& \quad \text{assuming } x :: \text{positive}; \\
& x \rightarrow -0.00006341260216 \cos(28.00543809 x) \cosh(28.00543809 x) \\
& \quad + 0.001492748846 \sin(28.00543809 x) \sinh(28.00543809 x)
\end{aligned} \tag{11}$$

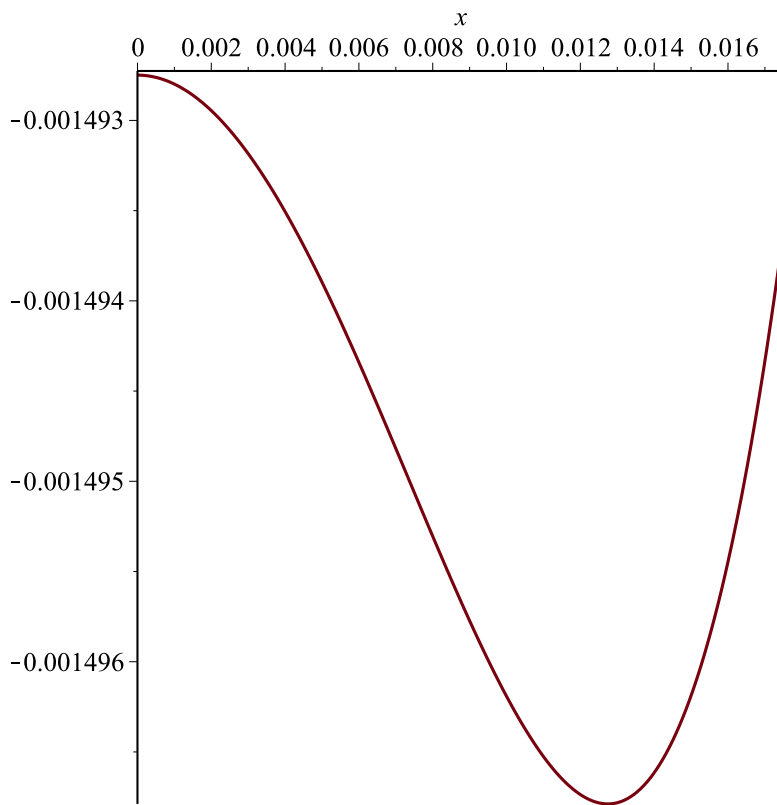
$$\begin{aligned}
& sol_cas_uniform_num_Im := unapply(simplify(convert(Im(sol_cas_uniform_num(x)), trig), size), x) \\
& \quad \text{assuming } x :: \text{positive}; \\
& x \rightarrow -0.00006341260216 \sin(28.00543809 x) \sinh(28.00543809 x) \\
& \quad - 0.001492748846 \cos(28.00543809 x) \cosh(28.00543809 x)
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
& Q_cas_uniform_num := unapply(simplify(evalf(eval(\sigma_pref \cdot \omega^2 \cdot (sol_cas_uniform_num_Re(x)^2 \\
& \quad + sol_cas_uniform_num_Im(x)^2), evals_num))), size), x); \\
& x \rightarrow 3.130464333 \cdot 10^8 \cos(28.00543809 x)^2 \cosh(28.00543809 x)^2 \\
& \quad + 3.130464333 \cdot 10^8 \sin(28.00543809 x)^2 \sinh(28.00543809 x)^2
\end{aligned} \tag{13}$$

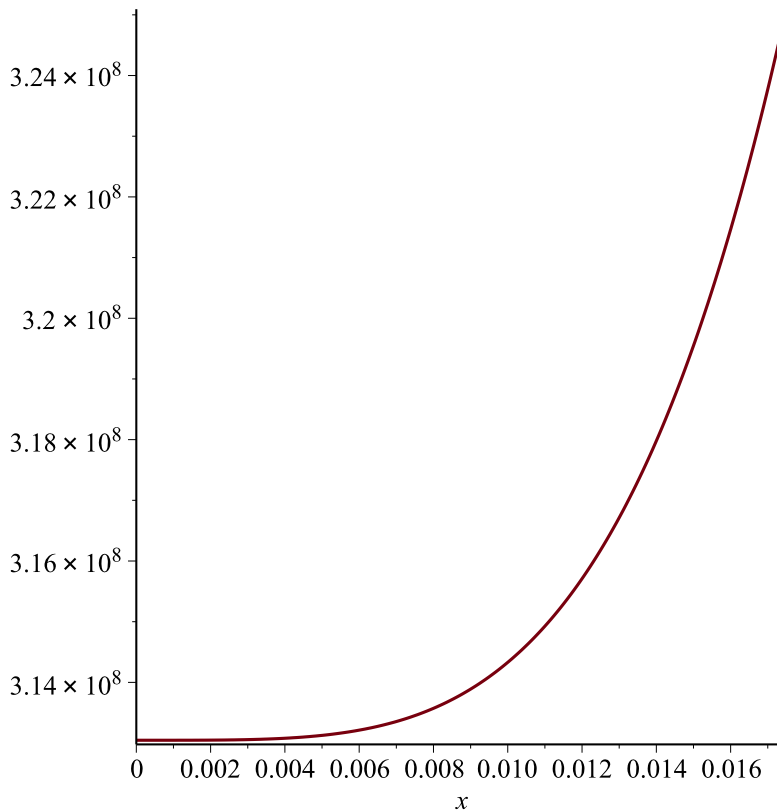
plot(sol_cas_uniform_num_Re(x), x=0..1.75e-2);



plot(sol_cas_uniform_num_Im(x), x=0..1.75e-2);



```
plot(Q_cas_uniform_num(x), x=0 ..1.75e-2);
```



Cas de front abrupte

$sol_abrupt_dense1 := unapply(eval(convert(sol_general_uniform(x), exp), \{_C1 = C1_dense, _C2 = C2_dense, \alpha_pref = \alpha_dense\}), x);$

$$x \rightarrow \frac{1}{2} C1_dense e^{-\alpha_dense x} + \frac{1}{2} e^{\alpha_dense x} C2_dense \quad (14)$$

$diff_abrupt_dense1 := unapply(diff(sol_abrupt_dense1(x), x), x);$

$$x \rightarrow -\frac{1}{2} C1_dense \alpha_dense e^{-\alpha_dense x} + \frac{1}{2} \alpha_dense e^{\alpha_dense x} C2_dense \quad (15)$$

$sol_abrupt_vierge1 := unapply(eval(convert(sol_general_uniform(x), exp), \{_C1 = C1_vierge, _C2 = C2_vierge, \alpha_pref = \alpha_vierge\}), x);$

$$x \rightarrow \frac{1}{2} C1_vierge e^{-\alpha_vierge x} + \frac{1}{2} e^{\alpha_vierge x} C2_vierge \quad (16)$$

$diff_abrupt_vierge1 := unapply(diff(sol_abrupt_vierge1(x), x), x);$

$$x \rightarrow -\frac{1}{2} C1_vierge \alpha_vierge e^{-\alpha_vierge x} + \frac{1}{2} \alpha_vierge e^{\alpha_vierge x} C2_vierge \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
& coeffs_abrupt := simplify(solve(\{diff_abrupt_dense1(0) = Diff_anal_inner, \\
& \quad sol_abrupt_dense1(L_dense) = sol_abrupt_vierge1(L_dense), diff_abrupt_dense1(L_dense) \\
& \quad = diff_abrupt_vierge1(L_dense), diff_abrupt_vierge1(L_pref) = eval(Diff_anal_outer, \\
& \quad Val_A_outer = sol_abrupt_vierge1(L_pref)\}), \{C1_dense, C2_dense, C1_vierge, C2_vierge\}), \\
& \quad size) :
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
& sol_abrupt_dense2 := unapply(simplify(eval(sol_abrupt_dense1(x), coeffs_abrupt), size), x); \\
& x \rightarrow - \left(2 e^{\alpha_vierge L_dense} e^{-\alpha_vierge L_dense} \alpha_vierge j_extp \alpha_cu \left(-e^{-\alpha_cu L_ind} \right. \right.
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
& \left. + e^{\alpha_cu L_ind} \right) \left(e^{-\alpha_dense x} + e^{\alpha_dense x} \right) \Big/ \left(\left(\left(-\alpha_cu L_entref \alpha_vierge - \alpha_cu \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \alpha_vierge \right) e^{-\alpha_cu L_ind} + e^{\alpha_cu L_ind} \left(\alpha_cu L_entref \alpha_vierge + \alpha_cu + \alpha_vierge \right) \right) \\
& e^{\alpha_vierge L_pref} \left(\left(-\alpha_dense + \alpha_vierge \right) e^{-\alpha_dense L_dense} + e^{\alpha_dense L_dense} \left(\alpha_dense \right. \right. \\
& \left. \left. + \alpha_vierge \right) \right) e^{-\alpha_vierge L_dense} + e^{\alpha_vierge L_dense} e^{-\alpha_vierge L_pref} \left(\left(-\alpha_cu L_entref \alpha_vierge \right. \right. \\
& \left. \left. + \alpha_cu + \alpha_vierge \right) e^{-\alpha_cu L_ind} + e^{\alpha_cu L_ind} \left(\alpha_cu L_entref \alpha_vierge - \alpha_cu + \alpha_vierge \right) \right) \\
& \left(\left(-\alpha_dense - \alpha_vierge \right) e^{-\alpha_dense L_dense} + e^{\alpha_dense L_dense} \left(\alpha_dense - \alpha_vierge \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& sol_abrupt_vierge2 := unapply(simplify(eval(sol_abrupt_vierge1(x), coeffs_abrupt), size), x); \\
& x \rightarrow - \left(j_extp \left(-e^{-\alpha_cu L_ind} + e^{\alpha_cu L_ind} \right) \alpha_cu \left(\left(\left(-\alpha_dense + \alpha_vierge \right) e^{-\alpha_dense L_dense} \right. \right. \right.
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
& \left. + e^{\alpha_dense L_dense} \left(\alpha_dense + \alpha_vierge \right) \right) e^{\alpha_vierge x} e^{-\alpha_vierge L_dense} \\
& - e^{\alpha_vierge L_dense} e^{-\alpha_vierge x} \left(\left(-\alpha_dense - \alpha_vierge \right) e^{-\alpha_dense L_dense} \right. \\
& \left. + e^{\alpha_dense L_dense} \left(\alpha_dense - \alpha_vierge \right) \right) \Big/ \left(\left(\left(-\alpha_cu L_entref \alpha_vierge - \alpha_cu \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \alpha_vierge \right) e^{-\alpha_cu L_ind} + e^{\alpha_cu L_ind} \left(\alpha_cu L_entref \alpha_vierge + \alpha_cu + \alpha_vierge \right) \right) \\
& e^{\alpha_vierge L_pref} \left(\left(-\alpha_dense + \alpha_vierge \right) e^{-\alpha_dense L_dense} + e^{\alpha_dense L_dense} \left(\alpha_dense \right. \right. \\
& \left. \left. + \alpha_vierge \right) \right) e^{-\alpha_vierge L_dense} + e^{\alpha_vierge L_dense} e^{-\alpha_vierge L_pref} \left(\left(-\alpha_cu L_entref \alpha_vierge \right. \right. \\
& \left. \left. + \alpha_cu + \alpha_vierge \right) e^{-\alpha_cu L_ind} + e^{\alpha_cu L_ind} \left(\alpha_cu L_entref \alpha_vierge - \alpha_cu + \alpha_vierge \right) \right) \\
& \left(\left(-\alpha_dense - \alpha_vierge \right) e^{-\alpha_dense L_dense} + e^{\alpha_dense L_dense} \left(\alpha_dense - \alpha_vierge \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& val_A_bound := subs(\{-\alpha_dense + \alpha_vierge = \alpha_diff, \alpha_dense - \alpha_vierge = \alpha_diff, \alpha_dense \\
& \quad + \alpha_vierge = \alpha_sum, \alpha_dense \cdot L_dense = L_densep, \alpha_vierge \cdot L_vierge = L_viergep, \alpha_cu \cdot L_ind \\
& \quad = L_indp\}, simplify(simplify(eval(sol_abrupt_vierge2(L_pref), L_pref = L_dense + L_vierge), \\
& \quad exp), size));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\left(-e^{-L_indp} + e^{L_indp} \right) \alpha_cu j_extp \left(\left(\alpha_sum e^{-L_densep} - e^{L_densep} \alpha_diff \right) e^{-L_viergep} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\alpha_diff e^{-L_densep} + e^{L_densep} \alpha_sum \right) e^{L_viergep} \right) \Big/ \left(\left(\left(-\alpha_cu L_entref \alpha_vierge - \alpha_cu \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \alpha_vierge \right) e^{-L_indp} + e^{L_indp} \left(\alpha_cu L_entref \alpha_vierge + \alpha_cu + \alpha_vierge \right) \right) \\
& \left(\alpha_diff e^{-L_densep} + e^{L_densep} \alpha_sum \right) e^{L_viergep} + \left(\left(-\alpha_cu L_entref \alpha_vierge + \alpha_cu \right. \right. \\
& \left. \left. + \alpha_vierge \right) e^{-L_indp} + e^{L_indp} \left(\alpha_cu L_entref \alpha_vierge - \alpha_cu + \alpha_vierge \right) \right) \left(\left(-\alpha_dense \right. \right. \\
& \left. \left. - \alpha_vierge \right) e^{-L_densep} + e^{L_densep} \alpha_diff \right) e^{-L_viergep}
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
& simplify(\text{collect}(val_A_bound, \{\alpha_diff, \alpha_sum\}), exp); \\
& - \left(\left(-e^{-L_indp} + e^{L_indp} \right) \alpha_cu j_extp \left(\left(e^{-L_densep - L_viergep} + e^{L_densep + L_viergep} \right) \alpha_sum \right. \right.
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
& + (e^{-L_densep + L_viergep} - e^{L_densep - L_viergep}) \alpha_diff) / (((-\alpha_cu L_entref \alpha_vierge \\
& - \alpha_cu + \alpha_vierge) e^{-L_indp} + e^{L_indp} (\alpha_cu L_entref \alpha_vierge + \alpha_cu + \alpha_vierge)) \\
& \alpha_sum e^{L_densep + L_viergep} + (((-\alpha_cu L_entref \alpha_vierge - \alpha_cu + \alpha_vierge) e^{-L_indp} \\
& + e^{L_indp} (\alpha_cu L_entref \alpha_vierge + \alpha_cu + \alpha_vierge)) e^{-L_densep + L_viergep} + ((\\
& - \alpha_cu L_entref \alpha_vierge + \alpha_cu + \alpha_vierge) e^{-L_indp} + e^{L_indp} (\alpha_cu L_entref \alpha_vierge \\
& - \alpha_cu + \alpha_vierge)) e^{L_densep - L_viergep}) \alpha_diff + (((-\alpha_cu L_entref \alpha_vierge + \alpha_cu \\
& + \alpha_vierge) e^{-L_indp} + e^{L_indp} (\alpha_cu L_entref \alpha_vierge - \alpha_cu + \alpha_vierge)) (-\alpha_dense \\
& - \alpha_vierge) e^{-L_densep - L_viergep})
\end{aligned}$$

$$sol_abrupt_dense_num := unapply(evalf(eval(eval(sol_abrupt_dense2(x), evals_defs), evals_num)), x);$$

$$x \rightarrow (-0.0002424222923 - 0.0005000833765 I) (e^{(-48.50684166 - 48.50684166 I) x} + e^{(48.50684166 + 48.50684166 I) x}) \quad (23)$$

$$sol_abrupt_dense_num_Re := unapply(simplify(convert(Re(sol_abrupt_dense_num(x)), trig), size), x) assuming x :: positive;$$

$$x \rightarrow -0.0004848445846 \cos(48.50684166 x) \cosh(48.50684166 x) + 0.001000166753 \sin(48.50684166 x) \sinh(48.50684166 x) \quad (24)$$

$$sol_abrupt_dense_num_Im := unapply(simplify(convert(Im(sol_abrupt_dense_num(x)), trig), size), x) assuming x :: positive;$$

$$x \rightarrow -0.0004848445846 \sin(48.50684166 x) \sinh(48.50684166 x) - 0.001000166753 \cos(48.50684166 x) \cosh(48.50684166 x) \quad (25)$$

$$Q_abrupt_dense_num := unapply(simplify(evalf(eval(\sigma_dense \cdot \omega^2 \cdot (sol_abrupt_dense_num_Re(x)^2 + sol_abrupt_dense_num_Im(x)^2), evals_num))), size), x);$$

$$x \rightarrow 5.197372593 10^8 \cos(48.50684166 x)^2 \cosh(48.50684166 x)^2 + 5.197372593 10^8 \sin(48.50684166 x)^2 \sinh(48.50684166 x)^2 \quad (26)$$

$$sol_abrupt_vierge_num := unapply(evalf(eval(eval(sol_abrupt_vierge2(x), evals_defs), evals_num)), x);$$

$$x \rightarrow (-0.000006628227588 - 0.000002300098671 I) ((58.73480073 + 100.9475790 I) e^{(28.00543809 + 28.00543809 I) x} + (65.44950883 + 0.7926322928 I) e^{(-28.00543809 - 28.00543809 I) x}) \quad (27)$$

$$sol_abrupt_vierge_num_Re := unapply(simplify(convert(Re(sol_abrupt_vierge_num(x)), trig), size), x) assuming x :: positive;$$

$$x \rightarrow (-0.0005891093418 \cos(28.00543809 x) + 0.0006484052897 \sin(28.00543809 x)) \cosh(28.00543809 x) + (0.0002748728732 \cos(28.00543809 x) + 0.0009599934407 \sin(28.00543809 x)) \sinh(28.00543809 x) \quad (28)$$

$$sol_abrupt_vierge_num_Im := unapply(simplify(convert(Im(sol_abrupt_vierge_num(x)), trig), size), x) assuming x :: positive;$$

$$x \rightarrow (0.0002748728732 \sin(28.00543809 x) - 0.0009599934407 \cos(28.00543809 x)) \cosh(28.00543809 x) + (-0.0005891093418 \sin(28.00543809 x) - 0.0006484052897 \cos(28.00543809 x)) \sinh(28.00543809 x) \quad (29)$$

$\sinh(28.00543809 x)$

$Q_abrupt_vierge_num := unapply(simplify(eval(eval(\sigma_vierge \cdot \omega^2 \cdot (sol_abrupt_vierge_num_Re(x)^2 + sol_abrupt_vierge_num_Im(x)^2), evals_num)), size), x);$

$x \rightarrow (1.779056358 \cdot 10^8 \cos(28.00543809 x)^2 - 1.811419922 \cdot 10^8 \cos(28.00543809 x) \sin(28.00543809 x) + 6.955372196 \cdot 10^7 \sin(28.00543809 x)^2 \cosh(28.00543809 x)^2 + (1.291649146 \cdot 10^8 \sin(28.00543809 x)^2 + 1.291649146 \cdot 10^8 \cos(28.00543809 x)^2) \sinh(28.00543809 x) \cosh(28.00543809 x) + (6.955372196 \cdot 10^7 \cos(28.00543809 x)^2 + 1.811419922 \cdot 10^8 \cos(28.00543809 x) \sin(28.00543809 x) + 1.779056358 \cdot 10^8 \sin(28.00543809 x)^2) \sinh(28.00543809 x)^2$ **(30)**

$sol_abrupt_num_Re := eval(piecewise(x < L_dense, sol_abrupt_dense_num_Re(x), sol_abrupt_vierge_num_Re(x)), evals_num);$

$\left\{ \begin{array}{l} -0.0004848445846 \cos(48.50684166 x) \cosh(48.50684166 x) + 0 \\ (-0.0005891093418 \cos(28.00543809 x) + 0.0006484052897 \sin(28.00543809 x)) \cosh(28.00543809 x) + 0 \end{array} \right.$

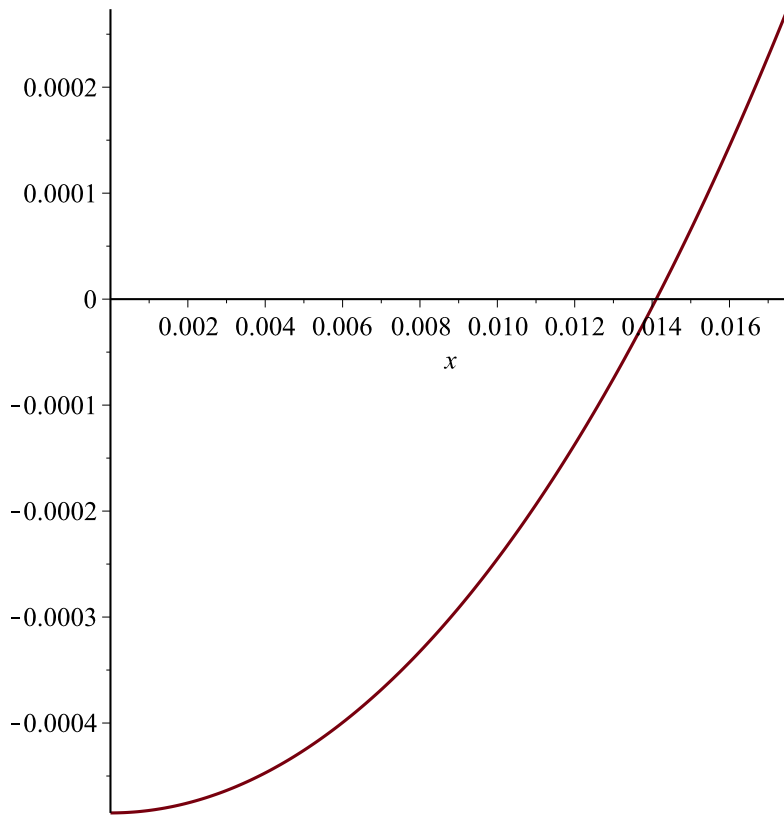
$sol_abrupt_num_Im := eval(piecewise(x < L_dense, sol_abrupt_dense_num_Im(x), sol_abrupt_vierge_num_Im(x)), evals_num);$

$\left\{ \begin{array}{l} -0.0004848445846 \sin(48.50684166 x) \sinh(48.50684166 x) - 0 \\ (0.0002748728732 \sin(28.00543809 x) - 0.0009599934407 \cos(28.00543809 x)) \cosh(28.00543809 x) + (-0.0002748728732 \cos(28.00543809 x) + 0.0009599934407 \sin(28.00543809 x)) \sinh(28.00543809 x) \end{array} \right.$

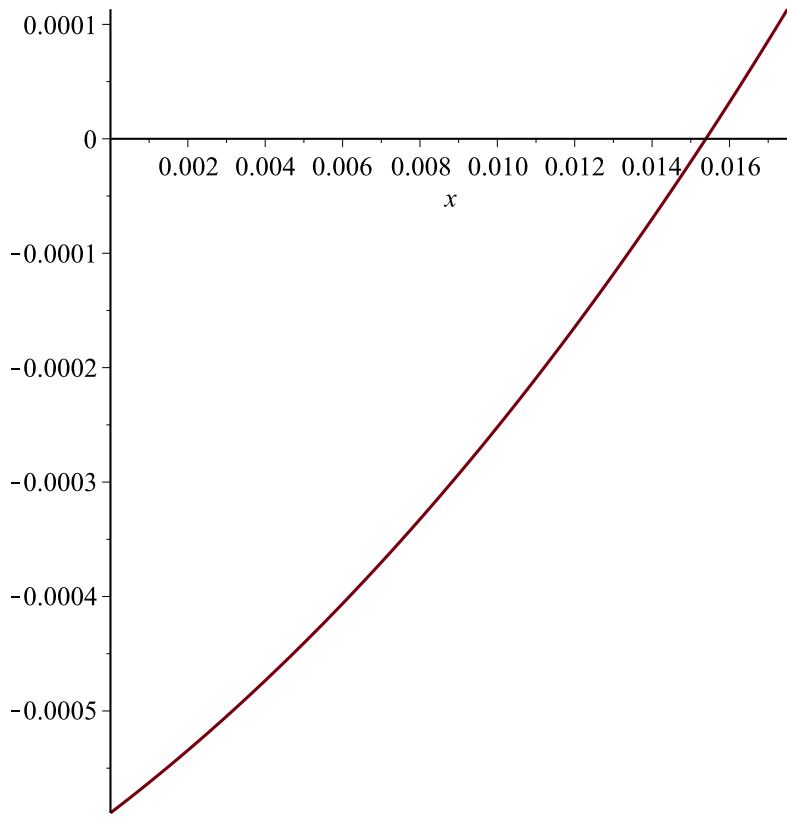
$Q_abrupt_num := eval(piecewise(x < L_dense, Q_abrupt_dense_num(x), Q_abrupt_vierge_num(x)), evals_num);$

$\left\{ \begin{array}{l} (1.779056358 \cdot 10^8 \cos(28.00543809 x)^2 - 1.811419922 \cdot 10^8 \cos(28.00543809 x) \sin(28.00543809 x) + 6.955372196 \cdot 10^7 \sin(28.00543809 x)^2 \cosh(28.00543809 x)^2 + (1.291649146 \cdot 10^8 \sin(28.00543809 x)^2 + 1.291649146 \cdot 10^8 \cos(28.00543809 x)^2) \sinh(28.00543809 x) \cosh(28.00543809 x) + (6.955372196 \cdot 10^7 \cos(28.00543809 x)^2 + 1.811419922 \cdot 10^8 \cos(28.00543809 x) \sin(28.00543809 x) + 1.779056358 \cdot 10^8 \sin(28.00543809 x)^2) \sinh(28.00543809 x)^2 \end{array} \right.$

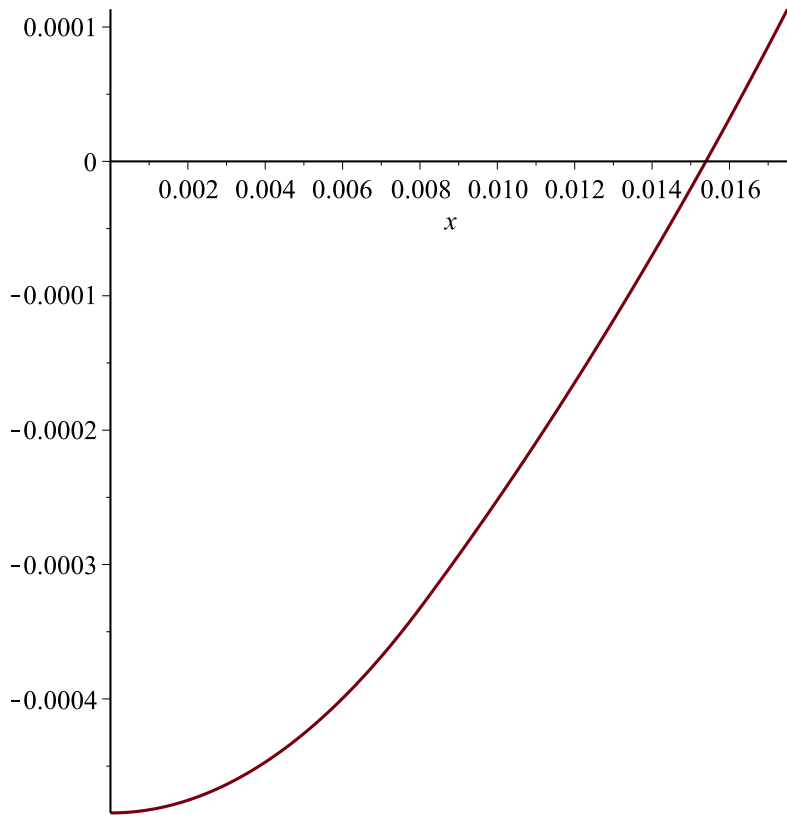
$plot(sol_abrupt_dense_num_Re(x), x=0..1.75e-2);$



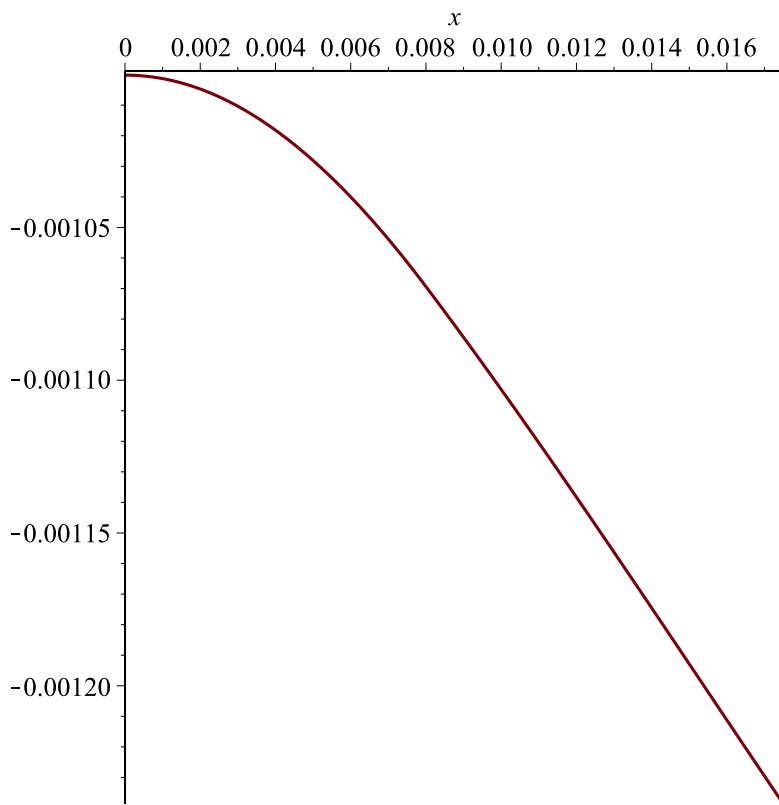
`plot(sol_abrupt_vierge_num_Re(x), x=0 ..1.75e-2);`



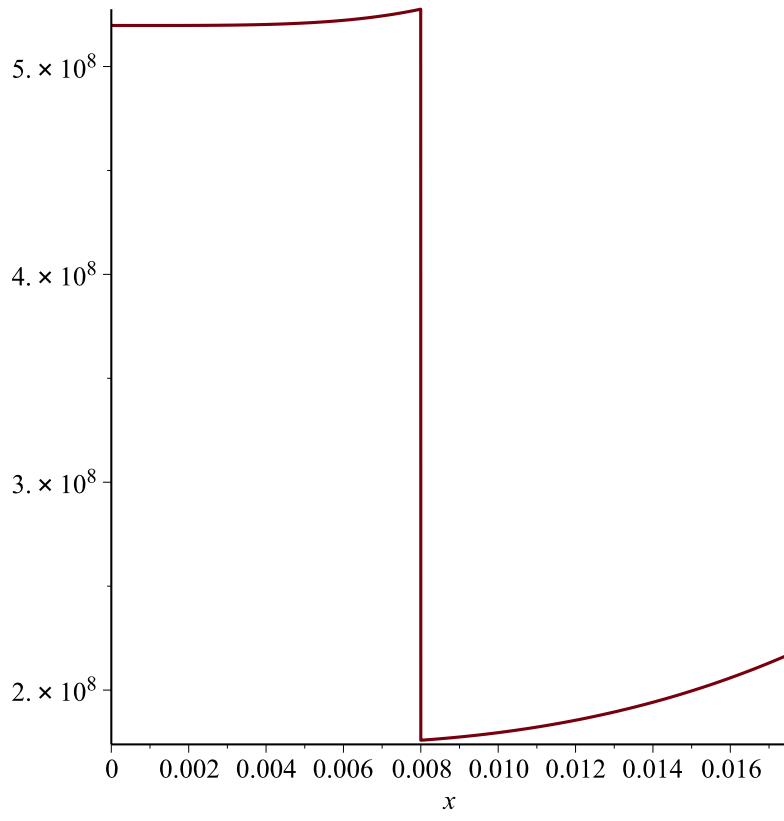
`plot(sol_abrupt_num_Re(x), x=0 ..1.75e-2);`



`plot(sol_abrupt_num_Im(x), x=0..1.75e-2);`



```
plot(Q_abrupt_num(x), x=0 ..1.75e-2);
```



F. The modified enthalpy equation

To obtain the mixture enthalpy equation we start from equation 3.39 and use the phase-wise velocities as in eqn. 3.28 :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \{ (1 - \varepsilon) \rho_s h_s + \varepsilon S \rho_l h_l + \varepsilon (1 - S) \rho_g h_g \} \\
& + \vec{\nabla} \cdot \{ \rho_m \vec{u}_m (\lambda_l h_l + \lambda_g h_g) \} \\
& + \vec{\nabla} \cdot \{ \vec{j} (h_l - h_g) \} - \vec{\nabla} \cdot \{ \lambda_{T,eff} \vec{\nabla} T \} \\
& = Q
\end{aligned} \tag{F.1}$$

with

$$\lambda_{T,eff}(\varepsilon, T) = \lambda_{Ts}(\varepsilon, T) + \lambda_{Tl}(\varepsilon, T) + \lambda_{Tg}(\varepsilon, T) \tag{F.2}$$

First we want to consider the time derivative term separately in the mono-phase and two-phase regions. It can be rewritten using the phase-wise mass enthalpies defined in table 5.5 : For the gas case we have

$$\begin{aligned}
& (1 - \varepsilon) \rho_s h_s + \varepsilon \rho_g h_g \\
& = (1 - \varepsilon) \left\{ \rho_s h_{ssat} + \frac{\rho_s c_s}{\rho_{gsat} c_{gsat}} ((\rho h')_m - \rho_{gsat} h_{gsat}) \right\} \\
& + \varepsilon \left\{ \rho_g h_{gsat} + \frac{\rho_g c_g}{\rho_{gsat} c_{gsat}} ((\rho h')_m - \rho_{gsat} h_{gsat}) \right\} \\
& = (1 - \varepsilon) \rho_s h_{ssat} + \varepsilon \rho_g h_{gsat} + \left[(1 - \varepsilon) \frac{\rho_s c_s}{\rho_{gsat} c_{gsat}} + \varepsilon \frac{\rho_g c_g}{\rho_{gsat} c_{gsat}} \right] \cdot ((\rho h')_m - \rho_{gsat} h_{gsat}) \\
& = (1 - \varepsilon) \rho_s h_{ssat} + \varepsilon \rho_g h_{gsat} - \Omega_g \rho_{gsat} h_{gsat} + \Omega_g (\rho h')_m \\
& = (1 - \varepsilon) \rho_s h_{ssat} - (\Omega_g - \varepsilon \frac{\rho_g}{\rho_{gsat}}) \rho_{gsat} h_{gsat} + \Omega_g (\rho h')_m
\end{aligned} \tag{F.3a}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_g & = (1 - \varepsilon) \frac{\rho_s c_s}{\rho_{gsat} c_{gsat}} + \varepsilon \frac{\rho_g c_g}{\rho_{gsat} c_{gsat}} \\
& \approx (1 - \varepsilon) \frac{\rho_s c_s}{\rho_{gsat} c_{gsat}} + \varepsilon \frac{\rho_g}{\rho_{gsat}}
\end{aligned} \tag{F.3b}$$

A similar calculation can be done in the liquid region where one can simplify furthermore $\rho_l = \rho_{lsat}$. In the two-phase region one gets

$$\begin{aligned}
& (1 - \varepsilon) \rho_s h_{ssat} + \varepsilon (1 - S) \rho_{gsat} h_{gsat} + \varepsilon S \rho_{lsat} h_{lsat} \\
& = (1 - \varepsilon) \rho_s h_{ssat} + \Omega_d (\rho h')_m
\end{aligned} \tag{F.4a}$$

$$\Omega_d = \varepsilon \tag{F.4b}$$

So, summarizing the transient term in all phases leads to

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \{ (1 - \varepsilon) \rho_s h_s + \varepsilon S \rho_l h_l + \varepsilon (1 - S) \rho_g h_g \} \\
& = \frac{\partial}{\partial t} \{ \Omega (\rho h')_m \} + \frac{\partial}{\partial t} \{ (\rho h')_{t,supp} \}
\end{aligned} \tag{F.5a}$$

$$\Omega \approx \begin{cases} (1 - \varepsilon) \frac{\rho_s c_s}{\rho_l c_{l\text{sat}}} + \varepsilon & \text{liquid} \\ \varepsilon & \text{two-phase} \\ (1 - \varepsilon) \frac{\rho_s c_s}{\rho_{g\text{sat}} c_{g\text{sat}}} + \varepsilon \frac{\rho_g}{\rho_{g\text{sat}}} & \text{gas} \end{cases} \quad (\text{F.5b})$$

$$(\rho h')_{t,\text{supp}} = (1 - \varepsilon) \rho_s h_{s\text{sat}} - (1 - \varepsilon) \begin{cases} \frac{\rho_s c_s}{\rho_l c_{l\text{sat}}} \rho_l h_{l\text{sat}} & \text{liquid} \\ 0 & \text{two-phase} \\ \frac{\rho_s c_s}{\rho_{g\text{sat}} c_{g\text{sat}}} \rho_{g\text{sat}} h_{g\text{sat}} & \text{gas} \end{cases} \quad (\text{F.5c})$$

Typical values of Ω are 0.96, 0.75, 756 for the liquid, two-phase and gas respectively. We want to simplify eqn F.1 a bit more and use the fact that $\vec{j} \neq 0$ only in the two-phase region where $h_g - h_l = L_0$. We also define

$$\gamma_{\rho h} = \frac{\lambda_l h_l + \lambda_g h_g}{(\rho h')_m} = \frac{\lambda_l h_l + \lambda_g h_g}{S \rho_l h_l + (1 - S) \rho_g h_g} \quad (\text{F.6})$$

So, eqn. F.1 becomes

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \{ \Omega (\rho h')_m \} + \frac{\partial}{\partial t} \{ (\rho h')_{t,\text{supp}} \} \\ & + \vec{\nabla} \cdot \{ \rho_m \vec{u}_m (\rho h')_m \gamma_{\rho h} \} \\ & - \vec{\nabla} \cdot \{ \vec{j} L_0 \} - \vec{\nabla} \cdot \{ \lambda_{T,\text{eff}} \vec{\nabla} T \} \\ & = Q \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

The expression for $\gamma_{\rho h}$ can be simplified to avoid the mono-phase enthalpies inside the mixture model definitions. To do so, we remark that in a mono-phase region p one has the convective term equal to

$$\begin{aligned} \rho_m \vec{u}_m (\lambda_l h_l + \lambda_g h_g) &= \rho_m \vec{u}_m h_p \\ &= \rho_m \vec{u}_m [h_{p\text{sat}} + c_p (T - T_{\text{sat}})] \\ &= \rho_m \vec{u}_m \left[h_{p\text{sat}} + c_p \frac{(\rho h')_m - \rho_{p\text{sat}} h_{p\text{sat}}}{\rho_{p\text{sat}} c_{p\text{sat}}} \right] \\ &= \rho_m \vec{u}_m [(\rho h')_m \gamma_{\rho h,p} + h_{v,\text{supp}}] \end{aligned} \quad (\text{F.8a})$$

$$\gamma_{\rho h} = \frac{1}{\rho_p} \quad (\text{F.8b})$$

$$h_{g,\text{supp}} = h_{g\text{sat}} \left(1 - \frac{c_p}{c_{p\text{sat}}} \right) \quad (\text{F.8c})$$

The term $h_{g,\text{supp}}$ actually is different from zero only in the gas-phase where it is "turned on" smoothly starting from the saturation point.

A definition of $\gamma_{\rho h}$ which corresponds to F.6 in the two-phase region and which tends to eqn F.8b in the mono-phase regions is given by eqn.F.9 :

$$\gamma_{\rho h} = \frac{\lambda_l h_{l\text{sat}} + \lambda_g h_{g\text{sat}}}{S \rho_l h_{l\text{sat}} + (1 - S) \rho_{g\text{sat}} h_{g\text{sat}}} \quad (\text{F.9})$$

On fig 100a we show its development for different values of chosen reference liquid saturation enthalpy : For $h_{l\text{sat}} = 0$ one has a smooth transition between a strong influence of convection

in the gas region towards a smaller influence in the liquid region. For $h_{l\text{sat}} < 0$ instead, one introduce a divergence of the convection term and even a change of sign. The position of the divergence in terms of liquid saturation moves towards $S = 0$ when the norm of $h_{l\text{sat}}$ increases.

Finally, the "conductive" term has to be treated : It contains the term of conduction of sensible heat in the mono-phase regions ($\lambda_{T,eff} \vec{\nabla} T$) and the latent heat transport in the two-phase region ($\vec{j} L_0$). The inter-diffusion \vec{j} was defined in table 5.4 as a function of capillary pressure P_c and so of liquid saturation S and so of $(\rho h')_m$. In the mono-phase regions, temperature is a function of $(\rho h')_m$. So we can write

$$\begin{aligned} \vec{j} L_0 + \lambda_{T,eff} \vec{\nabla} T &= \lambda_g \lambda_l \frac{K_0}{\nu_m} L_0 \vec{\nabla} P_c + \lambda_{T,eff} \vec{\nabla} T \\ &+ \lambda_g \lambda_l \frac{K_0}{\nu_m} L_0 (\rho_l - \rho_{gsat}) \vec{g} \end{aligned} \quad (\text{F.10a})$$

$$\lambda_g \lambda_l \frac{K_0}{\nu_m} \vec{\nabla} P_c = \lambda_g \lambda_l \frac{K_0}{\nu_m} \frac{\partial P_c}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial (\rho h')_m} \vec{\nabla} (\rho h')_m \quad (\text{F.10b})$$

$$\lambda_{T,eff} \vec{\nabla} T = \lambda_{T,eff} \frac{1}{(\rho c_p)_{p,sat}} \vec{\nabla} (\rho h')_m \quad (\text{F.10c})$$

$$\begin{aligned} \vec{j} L_0 + \lambda_{T,eff} \vec{\nabla} T &= \alpha_{ph} \vec{\nabla} (\rho h')_m + \lambda_g \lambda_l \frac{K_0}{\nu_m} L_0 (\rho_l - \rho_{gsat}) \vec{g} \end{aligned} \quad (\text{F.10d})$$

$$\alpha_{ph} = \lambda_g \lambda_l \frac{K_0}{\nu_m} L_0 \frac{\partial P_c}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial (\rho h')_m} + \lambda_{T,eff} \frac{1}{(\rho c_p)_p} \quad (\text{F.10e})$$

So, we find a diffusivity of volume enthalpy with one term for the two-phase region and one term of each of the mono-phase regions. Furthermore, there is an additional convection term of latent heat due to gravity. The development of α_{ph} in the two-phase region is shown in fig. 100b, again for 3 values of chosen $h_{l\text{sat}}$. One has a high-amplitude function for $h_{l\text{sat}} = 0$ and decreasing amplitudes for liquid saturation enthalpies with higher amplitude. Typical values of α_{ph} in the liquid/two-phase/gas region are $2.37 \cdot 10^{-6}$, 10^{-2} and $8.39 \cdot 10^{-3}$. This gives the two-phase region its character of thermal insulator and so brings problems in numerical convergence.

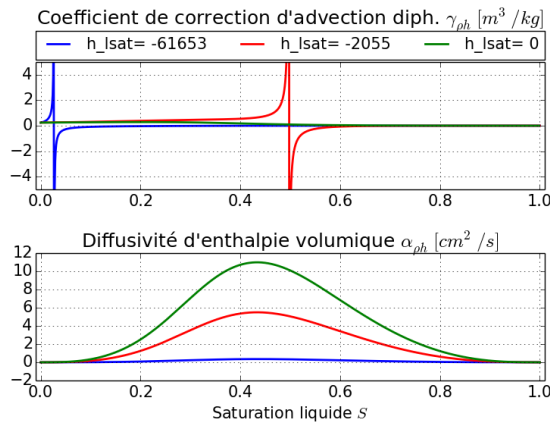


Fig. 100: Parameters of the enthalpy equation as a function of different liquid saturation S for different values of liquid enthalpy in the two-phase region. a) γ_{ph} , b) α_{ph}

After those rearrangements, the modified enthalpy equation, starting from eqn. 5.4 and rewritten for volume enthalpy as defined in eqn. 5.45b, reads :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \{ \Omega(\rho h')_m \} + \frac{\partial}{\partial t} \{ (\rho h')_{t,supp} \} \\
& + \vec{\nabla} \cdot \{ \rho_m \vec{u}_m (\rho h')_m \gamma_{\rho h} \} + \vec{\nabla} \cdot \{ \rho_m \vec{u}_m h_{g,supp} \} \\
& - \vec{\nabla} \cdot \{ \alpha_{\rho h} \vec{\nabla} (\rho h')_m \} - \vec{\nabla} \cdot \left\{ \lambda_g \lambda_l \frac{K_0}{V_m} L_0 (\rho_l - \rho_{gsat}) \vec{g} \right\} \\
& = Q
\end{aligned} \tag{F.11}$$

With this formulation we want to look for typical timescales during a heating process :

If one neglects all convective terms and additional terms with the index "supp", one obtains the standard heat equation for volume enthalpy instead of temperature :

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \Omega(\rho h')_m \} - \vec{\nabla} \cdot \{ \alpha_{\rho h} \vec{\nabla} (\rho h')_m \} = Q \tag{F.12}$$

A typical solution of this equation contains terms of the form $\alpha_{\rho h} / \Omega \cdot t_0 / x_0^2$ where t_0 and x_0 are typical timescales and length of the system. For a given characteristic length, one so can compare the typical timescale for the evolution of each region, the liquid, the two-phase and the gas : $t_0 = \Omega / \alpha_{\rho h} \cdot x_0^2$. With the orders of magnitude given before, $\Omega / \alpha_{\rho h}$ is around $4 \cdot 10^5$, 75 and $9 \cdot 10^4$ for the liquid, two-phase and gas zones respectively. Knowing that most thermal processes depend on $1/t_0$, this demonstrates that it takes quite a lot of time to make evaporate the whole system compared to heating up its liquid or gaseous phase. Looking in detail at the curve of $\alpha_{\rho h}$ in the two-phase region, its value is higher in the middle which gives a lower value of t_0 , such that boiling is faster in its beginning ($S \approx 1$) and its end ($S \approx 0$) than in the time in between.

G. Calcul analytique de la taille de zone diphasique en 1D

Comme mentionné dans le chapitre 5.3.3, l'équation d'enthalpie volumique, eqn. 5.47, s'écrit comme suivant en zone diphasique stationnaire :

$$\vec{\nabla} \cdot \{(\rho\vec{u})_m \cdot (\lambda_l h_{lsat} + \lambda_g h_{gsat})\} - \vec{\nabla} \cdot \{jL_0\} = Q \quad (G.1)$$

Cette équation est liée aux définitions des paramètres des tableaux 5.6, 5.4 et 5.5 ainsi qu'aux relations des flux massiques 3.28.

L'ébullition est complétée par l'équation de conservation de masse du mélange liquide et gaz :

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{u})_m = 0 \quad (G.2)$$

Concernant l'équation d'enthalpie, nous utilisons $h_{gsat} = h_{lsat} - L_0$ et $\lambda_l + \lambda_g = 1$:

$$\vec{\nabla} \cdot \{(\rho\vec{u})_m \cdot (h_{gsat} - \lambda_l L_0)\} - \vec{\nabla} \cdot \{jL_0\} = Q \quad (G.3)$$

Ensuite nous utilisons la conservation de masse ainsi que le fait que h_{gsat} est une constante :

$$\vec{\nabla} \cdot ((\rho\vec{u})_m h_{gsat}) = 0 \quad (G.4)$$

Ceci mène à l'équation d'enthalpie volumique suivante :

$$-\vec{\nabla} \cdot \{(\rho\vec{u})_m \cdot \lambda_l + jL_0\} \cdot L_0 = Q \quad (G.5)$$

Dans la suite nous nous plaçons dans un cas mono-dimensionnel.

L'intégration de l'équation de masse indique le flux massique total est constant dans tous les domaines (liquide, liquide+gaz, gaz) :

$$(\rho\vec{u})_m = (\rho\vec{u})_{m0} \quad (G.6)$$

où $(\rho\vec{u})_{m0}$ est un flux lié à une condition de bord.

Taille de la zone diphasique

L'intégration de l'équation d'enthalpie mène à :

$$\begin{aligned} -\lambda_l(\rho u)_m - j &= \frac{1}{L_0} \left[\int_{x_{ref}}^x q dx + q_0 \right] \\ \Rightarrow j &= -\lambda_l(\rho u)_{m0} - \frac{1}{L_0} \left[\int_{x_{ref}}^x Q dx + q_0 \right] \end{aligned} \quad (G.7)$$

où q_0 est un flux de chaleur imposé sur un bord.

Hors du contexte de l'équation du bilan d'enthalpie intégré, nous utilisons les définitions de j , λ_l et λ_g du tableau 5.4 pour obtenir une expression de $\frac{\partial}{\partial x} P_c$:

$$j = \lambda_g \lambda_l \frac{K_0}{\nu_m} \left[\frac{\partial}{\partial x} P_c + (\rho_l - \rho_g) \cdot \right] \quad (\text{G.8a})$$

$$\frac{\lambda_l \lambda_g}{\nu_m} = \nu_m \frac{k_{rl}}{\nu_l} \cdot \frac{k_{rg}}{\nu_g} = \frac{k_{rl} k_{rg}}{\frac{\nu_l \nu_g}{\frac{k_{rl}}{\nu_l} + \frac{k_{rg}}{\nu_g}}} = \left(\frac{\nu_l}{k_{rl}} + \frac{\nu_g}{k_{rg}} \right)^{-1} \quad (\text{G.8b})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} P_c = \frac{1}{K_0} \left(\frac{\nu_l}{k_{rl}} + \frac{\nu_g}{k_{rg}} \right) \cdot j - (\rho_l - \rho_g) \cdot g \quad (\text{G.8c})$$

Finalement, nous pouvons utiliser une "transformation de variables" entre S et x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} P_c &= \frac{\partial P_c}{\partial S} \vec{\nabla} S \\ \Rightarrow \vec{\nabla} S &= \frac{\frac{\partial}{\partial x} P_c}{\frac{\partial P_c}{\partial S}} = \frac{\left(\frac{\nu_l}{k_{rl}} + \frac{\nu_g}{k_{rg}} \right) \vec{j} - (\rho_l - \rho_g) \vec{g}}{\frac{\partial P_c}{\partial S}} \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

et utiliser l'expression de j sortant du bilan d'enthalpie afin d'obtenir

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial S} &= \frac{\frac{\partial P_c}{\partial S}}{\frac{1}{K} \left(\frac{\nu_l}{k_{rl}} + \frac{\nu_g}{k_{rg}} \right) \vec{j} - (\rho_l - \rho_g) \vec{g}} \\ &= \frac{\frac{\partial P_c}{\partial S}}{\frac{1}{K} \left(\frac{\nu_l}{k_{rl}} + \frac{\nu_g}{k_{rg}} \right) \left(-\lambda_l (\rho u)_{m0} - \frac{1}{L_0} \left[\int_{S_{ref}}^S Q(x(S')) \frac{\partial x}{\partial S'} dS' + q_0 \right] \right) - (\rho_l - \rho_g) \vec{g}} \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

Cette équation peut être intégrée sur la zone diphasique afin d'obtenir sa longueur :

$$\begin{aligned} L_{2phase} &= x(S=1) - x(S=0) = \int_{S=0}^{S=1} \frac{\partial x}{\partial S} dS \\ &= \int_{S=0}^{S=1} \frac{\frac{\partial P_c}{\partial S}}{\frac{1}{K} \left(\frac{\nu_l}{k_{rl}} + \frac{\nu_g}{k_{rg}} \right) \left(-\lambda_l (\rho u)_{m0} - \frac{1}{L_0} \left[\int_{S_{ref}}^S Q(x(S')) \frac{\partial x}{\partial S'} dS' + q_0 \right] \right) - (\rho_l - \rho_g) \vec{g}} dS \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

Nous mettons un accent sur les différentes intégrations sur la source de chaleur Q : Pour chaque pas de l'intégral extérieur sur S , $Q(x(S'))$ doit être intégré de S_{ref} (qui peut être choisi égal à zéro) jusqu'à la valeur actuelle de S . L'ensemble des deux termes en q_0 et en intégrale de Q correspondent au flux de chaleur moyen sur l'intervalle d'intégration. Vu qu'il s'agit d'une intégration numérique par sommation, nous pouvons obliger des pas d'intégration petits et

arrêter l'intégration pour la valeur de S' de l'itération précédente jusqu'où on connaît toutes les valeurs de $x(S')$ ainsi que celles de $\partial(x)/\partial(S')$.

Nous remarquons que S doit être une fonction monotone de x pour pouvoir réaliser la transformation de variable ci-dessus. Ceci est le cas pour des applications où l'on chauffe d'un bord du domaine et refroidi de l'autre.

Chute de pression sur la zone diphasique

Avant de pouvoir réaliser des calculs nous mentionnons qu'il y a deux pressions différentes, celle du liquide et celle du gaz. Au bord liquide du diphasique, les deux pressions sont identiques. Au bord gazeux la pression liquide est inférieure à la pression du gaz avec un écartement égal à la valeur maximale de la pression de capillarité. Dans la suite nous allons dériver la chute de pression du gaz le long de la zone diphasique.

Nous prenons la définition du flux massique gazeux d'un côté à partir du flux de mélange et du flux d'interdiffusion \vec{j}

$$\rho_g \vec{u}_g = \lambda_g \rho_m \vec{u}_m - \vec{j} \quad (\text{G.12})$$

et de l'autre côté à partir de la chute de pression du gaz :

$$\vec{u}_g = -\frac{K k_{rg}}{\mu_g} (\vec{\nabla} P_g - \rho_g \vec{g}) = -\frac{K k_{rg}}{\rho_g \nu_g} (\vec{\nabla} P_g - \rho_g \vec{g}) = -\frac{K \lambda_g}{\rho_g \nu_m} (\vec{\nabla} P_g - \rho_g \vec{g}) \quad (\text{G.13})$$

Cette deuxième relation peut être résolu par rapport à la chute de pression du gaz :

$$\vec{\nabla} P_g = -\frac{\rho_g \vec{u}_g \nu_m}{K \lambda_g} + \rho_g \vec{g} \quad (\text{G.14})$$

Nous remplaçons maintenant le flux massique gazeux par son expression contenant le flux du mélange et d'interdiffusion, et nous simplifions :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} P_g &= -\frac{\nu_m}{K} \left(\rho_m \vec{u}_m - \frac{j}{\lambda_g} \right) + \rho_g \cdot g \\ &= -\frac{\nu_m}{K} \left(j_{m0} - \frac{\lambda_l K}{\nu_m} \left[\frac{\partial}{\partial x} P_c + (\rho_l - \rho_g) \cdot g \right] \right) + \rho_g \cdot g \\ &= -\frac{\nu_m}{K} \cdot j_{m0} + \lambda_l \left(\frac{\partial}{\partial x} P_c + (\rho_l - \rho_g) \cdot g \right) + \rho_g \cdot g \\ &= -\frac{\nu_m}{K} a_u + \lambda_l \frac{\partial}{\partial x} P_c + (\lambda_l \rho_l + \lambda_g \rho_g) \cdot g \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} P_g = -\frac{\nu_m}{K} j_{m0} + \lambda_l \frac{\partial P_c}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} + (\lambda_l \rho_l + \lambda_g \rho_g) \cdot g \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

Les paramètres intervenant du côté droit de la dernière relation sont connus en fonction de la saturation en liquide et non pas en fonction de l'espace. Il n'est donc pas possible d'intégrer Cette équation directement. Nous résolvons le problème en passant par une transformation de variable qui fait intervenir S comme dérivée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_g}{\partial S} &= \frac{\frac{\partial P_g}{\partial x}}{\frac{\partial S}{\partial x}} = \frac{\partial P_g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} \\ &= \left[-\frac{\nu_m}{K} j_{m0} + (\lambda_l \rho_l + \lambda_g \rho_g) \vec{g} \right] \cdot \frac{\partial x}{\partial S} + \lambda_l \cdot \frac{\partial P_c}{\partial S} \end{aligned} \quad (\text{G.16})$$

Pour $\partial(x)/\partial(S)$ nous pouvons utiliser l'expression que nous avons démontrée pour le calcul de la taille diphasique et nous obtenons finalement :

$$\frac{\partial P_g}{\partial S} = \left[-\frac{\nu_m}{K} j_{m0} + (\lambda_l \rho_l + \lambda_g \rho_g) \vec{g} \right] \cdot \left[\frac{\frac{\partial P_c}{\partial S}}{\frac{1}{K} \left(\frac{\nu_l}{k_{rl}} + \frac{\nu_g}{k_{rg}} \right) \left(-\lambda_l j_{m0} - \frac{1}{L_0} \left[\int_{S_{ref}}^S Q(x(S')) \frac{\partial x}{\partial S'} dS' + q_0 \right] \right) - (\rho_l - \rho_g) \vec{g}} \right] + \lambda_l \frac{\partial P_c}{\partial S} \quad (G.17)$$

Comme pour la taille de la zone diphasique, cette expression peut être intégrée entre $S = 0$ et $S = 1$ afin d'obtenir la chute de pression du gaz.

D'après l'argumentation donnée au début du paragraphe, la chute de pression du liquide correspond à la chute de pression du gaz diminuée de la valeur de la pression capillaire $P_c(S = 0)$.

H. Stratégie pour la réalisation d'un calcul monodimensionnel thermique/ébullition sous Maple

Pour la validation numérique du modèle d'ébullition nous supposons un domaine 1D chauffé par une source $Q = \text{const}$, où l'on impose au côté $x = 0$ un flux massique $(\rho u)_{m0}$ ainsi qu'une température T_{in} et au côté $x = L_{pref}$ un flux de chaleur q_0 (voir aussi fig. En plus des équations 5.67 et 5.70a nous nous servons aussi du bilan de flux de chaleur total qui est satisfait sur l'ensemble du domaine :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} q_{tot} &= Q \\ \Rightarrow q_{tot}(x) &= q_{tot,ref} + Q \cdot (x - x_{ref}) \end{aligned} \quad (\text{H.1})$$

Nous simplifions les propriétés des matériaux et posons qu'elles sont indépendantes de la température et évaluées à température de saturation.

Le calcul analytique est réalisé avec Maple dont le code source est représenté dans l'annexe I et suit la stratégie suivante :

I) Calcul en zone liquide (en bas) :

- 1) Connaissant le flux de chaleur total imposé à la sortie du canal ainsi que le chauffage volumique, on peut déduire le flux de chaleur à l'entrée du canal :

$$q_{in} = q_0 - Q \cdot L_{pref} \quad (\text{H.2})$$

- 2) Ainsi une première intégration de l'équation de chaleur monophasique est évidente, et la solution de l'équation résultante d'ordre un avec la condition de bord $T(x = 0) = T_{in}$ mène à :

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{Q}{(\rho u)_{m0} c_{pl}} \cdot \left[\left(L_{pref} - \frac{\lambda_{Tl}}{c_{pl} \cdot (\rho u)_{m0}} \right) \cdot \left(\exp \left(\frac{(\rho u)_{m0} \cdot c_{pl} \cdot x}{\lambda_{Tl}} \right) - 1 \right) + x \right] \\ &\quad - \frac{q_0}{(\rho u)_{m0} c_{pl}} \cdot \left(\exp \left(\frac{(\rho u)_{m0} \cdot c_{pl} \cdot x}{\lambda_{Tl}} \right) - 1 \right) + T_{in} \cdot \exp \left(\frac{(\rho u)_{m0} \cdot c_{pl} \cdot x}{\lambda_{Tl}} \right) \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

- 3) La position de l'interface liquide/diphase $x_{2/l}$ est donnée par la définition

$$T(x_{2/l}) = T_{sat} \quad (\text{H.4})$$

Le résultat ainsi que des approximations pour des flux massiques faibles sont explicités dans l'annexe.

- 4) La saturation en liquide est $S = 1$ et l'enthalpie volumique

$$(\rho h')_m = \rho_l \cdot (h_{lsat} + c_{pl} \cdot (T - T_{sat})) \quad (\text{H.5})$$

II) Calcul en zone diphasique (au milieu) :

- 1) De manière similaire que pour le liquide nous calculons le flux de chaleur entrant en zone diphasique par l'interface avec le liquide :

$$q_{2/l} = q_0 - Q \cdot (L_{pref} - x_{2/l}) \quad (\text{H.6})$$

- 2) L'intégrale eqn. 5.70a permet d'établir le profil de saturation via des tableaux $x_i \leftrightarrow S_i$. Pour le calcul nous utilisons un pas $dS = const$ et ensuite :

$$S_i = 1 - (i - 1) * dS \quad (\text{H.7a})$$

$$x_0 = x_{2/l} \quad (\text{H.7b})$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)_i = \frac{\frac{\partial P_c}{\partial S}(S_i)}{\frac{1}{K} \left(\frac{\nu_l}{k_{rl}(S_i)} + \frac{\nu_g}{k_{rg}(S_i)} \right) \left(-\lambda_l(S_i)(\rho u)_{m0} - \frac{1}{L_0} [Q \cdot (x_{i-1} - x_0) + q_0] \right) - (\rho_l - \rho_g) \vec{g}} \quad (\text{H.7c})$$

$$x_i = x_{i-1} + \left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)_i \cdot dS \quad (\text{H.7d})$$

- 3) La position de l'interface diphasique/gaz sortent de la dernière valeur du tableau des x_i .
- 4) La température est constante $T = T_{sat}$ et l'enthalpie volumique

$$(\rho h')_m = \rho_{gsat} h_{gsat} + S \cdot (\rho_l h_{lsat} - \rho_{gsat} h_{gsat}) \quad (\text{H.8})$$

III) Calcul en zone gazeuse (en haut)

- 1) Le profil analytique de la température en zone gazeuse est similaire à celui de la zone gazeuse :

$$T(x) = \frac{Q}{(\rho u)_{m0} c_{pg}} \cdot \left[\left(L_{pref} - \frac{\lambda_{Tg}}{c_{pg} \cdot (\rho u)_{m0}} \right) \cdot \left(\exp \left(\frac{(\rho u)_{m0} \cdot c_{pg}}{\lambda_{Tg}} (x - x_{2/g}) \right) - 1 \right) + x - x_{2/g} \exp \left(\frac{(\rho u)_{m0} \cdot c_{pg}}{\lambda_{Tg}} (x - x_{2/g}) \right) \right] - \frac{q_0}{(\rho u)_{m0} c_{pg}} \cdot \left(\exp \left(\frac{(\rho u)_{m0} \cdot c_{pg}}{\lambda_{Tg}} (x - x_{2/g}) \right) - 1 \right) + T_{sat} \cdot \exp \left(\frac{(\rho u)_{m0} \cdot c_{pg}}{\lambda_{Tg}} (x - x_{2/g}) \right) \quad (\text{H.9})$$

- 2) La température maximale du domaine se trouve à la sortie :

$$T_{max} = T(L_{pref}) \quad (\text{H.10})$$

Le résultat ainsi que des approximations pour des flux massiques faibles sont explicités dans l'annexe.

- 3) La saturation en liquide est $S = 0$ et l'enthalpie volumique

$$(\rho h')_m = \rho_{gsat} \cdot (h_{gsat} + c_{pg} \cdot (T - T_{sat})) \quad (\text{H.11})$$

IV) Application numérique

I. Fichier Maple pour la validation numérique du modèle d'ébullition

restart;

Zone liquide

Solution du profil de temperature avec convection et conduction de la chaleur:

Donnees: flux massique $\rho_0 = \text{const}$ sur preforme, source chaleur vol $Q = \text{const}$ sur preforme, temperature $T(x=0) = T_{in}$, flux de chaleur $q(x=L_{pref}) = q_0$

$eqn_1 := \rho_0 \cdot C_{pl} \cdot T_l(x) - \lambda_{Tl} \cdot \text{diff}(T_l(x), x) = q_{in} + Q \cdot x;$

$$\rho_0 C_{pl} T_l(x) - \lambda_{Tl} \left(\frac{d}{dx} T_l(x) \right) = Qx + q_{in} \quad (1)$$

$sol_Tl_1 := \text{unapply}(\text{rhs}(\text{dsolve}(eqn_1)), x);$

$$x \rightarrow \frac{Qx}{\rho_0 C_{pl}} + \frac{q_{in}}{C_{pl} \rho_0} + \frac{Q \lambda_{Tl}}{C_{pl}^2 \rho_0^2} + e^{\frac{\rho_0 C_{pl} x}{\lambda_{Tl}}} _C1 \quad (2)$$

$sol_Tl_C1 := \text{solve}(sol_Tl_1(0) = T_{in}, _C1);$

$$_C1 = \frac{-C_{pl}^2 T_{in} \rho_0^2 + C_{pl} q_{in} \rho_0 + Q \lambda_{Tl}}{C_{pl}^2 \rho_0^2} \quad (3)$$

$sol_Tl_2 := \text{unapply}(\text{eval}(sol_Tl_1(x), \{ _C1 = sol_Tl_C1 \}), x);$

$$x \rightarrow \frac{Qx}{\rho_0 C_{pl}} + \frac{q_{in}}{C_{pl} \rho_0} + \frac{Q \lambda_{Tl}}{C_{pl}^2 \rho_0^2} + e^{\frac{\rho_0 C_{pl} x}{\lambda_{Tl}}} \frac{(-C_{pl}^2 T_{in} \rho_0^2 + C_{pl} q_{in} \rho_0 + Q \lambda_{Tl})}{C_{pl}^2 \rho_0^2} \quad (4)$$

Flux de chaleur a l'entree de la section test resulte de la connaissance du flux total (diffusif et convectif) a la sortie de la section et un bilan global thermique sur la section, dont le seul terme source est Q (l'equation $\text{div}(q_{tot}) = Q$ est valable dans chaque zone liquide/diphasique/gaz, meme si la composition de q_{tot} varie)

$q_{in} := q_0 - Q \cdot L_{pref};$

$$_q_{in} = -Q L_{pref} + q_0 \quad (5)$$

$\#sol_Tl := \text{unapply}(\text{collect}(\text{simplify}(\text{eval}(sol_Tl_2(x), \{Q = Qp_l \cdot \rho_0 \cdot C_{pl}, q_{in} = q_{inp_l} \cdot C_{pl} \cdot \rho_0, \lambda_{Tl} = \lambda_{Tlp} \cdot C_{pl} \cdot \rho_0\})), \text{size}), \{Qp_l, q_{inp_l}, T_{in}\}), x);$

$sol_Tl := \text{unapply}(\text{collect}(\text{expand}(sol_Tl_2(x)), \{Q, q_0\}), x);$

$$x \rightarrow \left(-\frac{L_{pref}}{\rho_0 C_{pl}} + \frac{\lambda_{Tl}}{C_{pl}^2 \rho_0^2} + \frac{x}{\rho_0 C_{pl}} + \frac{e^{\frac{\rho_0 C_{pl} x}{\lambda_{Tl}}} L_{pref}}{C_{pl} \rho_0} - \frac{e^{\frac{\rho_0 C_{pl} x}{\lambda_{Tl}}} \lambda_{Tl}}{C_{pl}^2 \rho_0^2} \right) Q + \left(\frac{1}{\rho_0 C_{pl}} - \frac{e^{\frac{\rho_0 C_{pl} x}{\lambda_{Tl}}}}{C_{pl} \rho_0} \right) q_0 + e^{\frac{\rho_0 C_{pl} x}{\lambda_{Tl}}} T_{in} \quad (6)$$

Position de l'interface liquide/diphasique

$x_{diph_liq_expr_1} := \text{simplify}(\text{solve}(sol_Tl(x_{diph_liq}) = T_{sat}, x_{diph_liq}), \text{size});$

$$\frac{1}{Q C_{pl} \rho_0} \left(-\text{LambertW} \left(\frac{1}{Q \lambda_{Tl}} \left((T_{in} C_{pl}^2 \rho_0^2 + C_{pl} (Q L_{pref} - q_0) \rho_0 \right) \right) \right) \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
& -Q \lambda_{Tl}) e^{\left(\frac{T_{sat} C_{pl}^2 rhou_0^2 + C_{pl} (QL_{pref} - q_0) rhou_0 - Q \lambda_{Tl}}{Q \lambda_{Tl}} \right)} \Big) Q \lambda_{Tl} \\
& + T_{sat} C_{pl}^2 rhou_0^2 + C_{pl} (QL_{pref} - q_0) rhou_0 - Q \lambda_{Tl} \Big)
\end{aligned}$$

$x_{diph_liq_expr} := \text{simplify}(\text{series}(x_{diph_liq_expr_1}, rhou_0=0, 4), \text{size})$ assuming $Q :: \text{positive}$, $q_0 :: \text{negative}$, $\lambda_{Tl} :: \text{positive}$, $C_{pl} :: \text{positive}$, $L_{pref} :: \text{positive}$, $rhou_0 :: \text{positive}$, $T_{sat} :: \text{positive}$, $T_{in} :: \text{positive}$;

$$\begin{aligned}
& \frac{QL_{pref} - q_0 - \sqrt{Q^2 L_{pref}^2 + ((2 T_{in} - 2 T_{sat}) \lambda_{Tl} - 2 q_0 L_{pref}) Q + q_0^2}}{Q} \tag{8} \\
& + \frac{1}{3} \left((-Q^3 L_{pref}^3 \right. \\
& + L_{pref} \left(\left(\sqrt{Q^2 L_{pref}^2 - 2 Q q_0 L_{pref} + 2 Q T_{in} \lambda_{Tl} - 2 Q T_{sat} \lambda_{Tl} + q_0^2} \right. \right. \\
& + 3 q_0) L_{pref} - 3 \lambda_{Tl} T_{in}) Q^2 + \left(\right. \\
& - q_0 \left(2 \sqrt{Q^2 L_{pref}^2 - 2 Q q_0 L_{pref} + 2 Q T_{in} \lambda_{Tl} - 2 Q T_{sat} \lambda_{Tl} + q_0^2} \right. \\
& + 3 q_0) L_{pref} + \lambda_{Tl} (3 q_0 T_{in} \\
& + \left. \left. \sqrt{Q^2 L_{pref}^2 - 2 Q q_0 L_{pref} + 2 Q T_{in} \lambda_{Tl} - 2 Q T_{sat} \lambda_{Tl} + q_0^2} (2 T_{in} \right. \right. \\
& + T_{sat}) \left. \left. \right) \right) Q \\
& + q_0^2 \left(\sqrt{Q^2 L_{pref}^2 - 2 Q q_0 L_{pref} + 2 Q T_{in} \lambda_{Tl} - 2 Q T_{sat} \lambda_{Tl} + q_0^2} \right. \\
& + q_0) \left. \right) C_{pl} \Big) / \\
& \left(\sqrt{Q^2 L_{pref}^2 + ((2 T_{in} - 2 T_{sat}) \lambda_{Tl} - 2 q_0 L_{pref}) Q + q_0^2} Q^2 \lambda_{Tl} \right) rhou_0 \\
& + \frac{2}{9} \left(\left(-\frac{11}{16} (Q^2 L_{pref}^2 + ((2 T_{in} - 2 T_{sat}) \lambda_{Tl} - 2 q_0 L_{pref}) Q + q_0^2) \right)^7 \right. \\
& ^{1/2} + \left(-\frac{5}{16} Q^6 L_{pref}^6 + \frac{15}{8} \left((-T_{in} - \frac{3}{5} T_{sat}) \lambda_{Tl} + q_0 L_{pref} \right) L_{pref}^4 Q^5 \right. \\
& - \frac{75}{16} L_{pref}^2 \left(\frac{12}{25} (T_{in} + 3 T_{sat}) (T_{in} - T_{sat}) \lambda_{Tl}^2 - \frac{8}{5} q_0 L_{pref} \left(T_{in} \right. \right. \\
& + \frac{3}{5} T_{sat}) \lambda_{Tl} + L_{pref}^2 q_0^2) \left. \left. \right) Q^4 + \left(-9 (T_{in} - T_{sat}) T_{sat} \left(T_{in} \right. \right. \right. \\
& - \frac{1}{2} T_{sat}) \lambda_{Tl}^3 + \frac{9}{2} q_0 L_{pref} (T_{in} + 3 T_{sat}) (T_{in} - T_{sat}) \lambda_{Tl}^2 \\
& - \frac{45}{4} q_0^2 L_{pref}^2 \left(T_{in} + \frac{3}{5} T_{sat}) \lambda_{Tl} + \frac{25}{4} L_{pref}^3 q_0^3) \left. \left. \right) Q^3 \right. \\
& - \frac{75}{16} q_0^2 \left(\frac{12}{25} (T_{in} + 3 T_{sat}) (T_{in} - T_{sat}) \lambda_{Tl}^2 - \frac{8}{5} q_0 L_{pref} \left(T_{in} \right. \right. \\
& + \frac{3}{5} T_{sat}) \lambda_{Tl} + L_{pref}^2 q_0^2) \left. \left. \right) Q^2 + \frac{15}{8} q_0^4 \left(\left(-T_{in} - \frac{3}{5} T_{sat} \right) \lambda_{Tl} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q_0 L_{pref} \Big) Q - \frac{5}{16} q_0^6 \Big) \\
& \sqrt{Q^2 L_{pref}^2 + ((2 T_{in} - 2 T_{sat}) \lambda_{Tl} - 2 q_0 L_{pref}) Q + q_0^2} + (Q^2 L_{pref}^2 \\
& + ((2 T_{in} - 2 T_{sat}) \lambda_{Tl} - 2 q_0 L_{pref}) Q + q_0^2)^2 (QL_{pref} - q_0) (Q^2 L_{pref}^2 \\
& + (-2 q_0 L_{pref} + 3 T_{in} \lambda_{Tl}) Q + q_0^2) C_{pl}^2 \Big) / \left(\lambda_{Tl}^2 Q^3 (Q^2 L_{pref}^2 \right. \\
& \left. + ((2 T_{in} - 2 T_{sat}) \lambda_{Tl} - 2 q_0 L_{pref}) Q + q_0^2)^2 \right) rhou_0^2 + O(rhou_0^3) \\
x_{diph_liq_expr_rhou10} := & \text{simplify} \left(\frac{\text{coeff}(x_{diph_liq_expr}, rhou_0, 1)}{\text{coeff}(x_{diph_liq_expr}, rhou_0, 0)}, \text{size} \right); \\
-\frac{1}{3} \left(C_{pl} \left(\left(-Q^2 L_{pref}^2 + \left(2 q_0 L_{pref} - 2 \left(T_{in} + \frac{1}{2} T_{sat} \right) \lambda_{Tl} \right) Q \right. \right. \right. & \quad (9) \\
& \left. \left. - q_0^2 \right) \sqrt{Q^2 L_{pref}^2 + ((2 T_{in} - 2 T_{sat}) \lambda_{Tl} - 2 q_0 L_{pref}) Q + q_0^2} \right. \\
& \left. \left. + (QL_{pref} - q_0) (Q^2 L_{pref}^2 + (-2 q_0 L_{pref} + 3 T_{in} \lambda_{Tl}) Q + q_0^2) \right) \right) / \\
& \left(\sqrt{Q^2 L_{pref}^2 - 2 Q q_0 L_{pref} + q_0^2 + 2 Q \lambda_{Tl} (T_{in} - T_{sat})} Q \lambda_{Tl} (QL_{pref} \right. \\
& \left. - q_0 - \sqrt{Q^2 L_{pref}^2 - 2 Q q_0 L_{pref} + q_0^2 + 2 Q \lambda_{Tl} (T_{in} - T_{sat})} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{diph_liq_expr_rhou21} := & \text{simplify} \left(\frac{\text{coeff}(x_{diph_liq_expr}, rhou_0, 2)}{\text{coeff}(x_{diph_liq_expr}, rhou_0, 1)}, \text{size} \right); \\
\frac{2}{3} \left(\left(-\frac{11}{16} (Q^2 L_{pref}^2 + ((2 T_{in} - 2 T_{sat}) \lambda_{Tl} - 2 q_0 L_{pref}) Q + q_0^2) \right)^{7/2} + \left(\right. & \quad (10) \\
& -\frac{5}{16} Q^6 L_{pref}^6 + \frac{15}{8} \left(\left(-T_{in} - \frac{3}{5} T_{sat} \right) \lambda_{Tl} + q_0 L_{pref} \right) L_{pref}^4 Q^5 \\
& -\frac{75}{16} L_{pref}^2 \left(\frac{12}{25} (T_{in} + 3 T_{sat}) (T_{in} - T_{sat}) \lambda_{Tl}^2 - \frac{8}{5} q_0 L_{pref} \left(T_{in} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{5} T_{sat} \right) \lambda_{Tl} + L_{pref}^2 q_0^2 \right) Q^4 + \left(-9 (T_{in} - T_{sat}) T_{sat} \left(T_{in} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} T_{sat} \right) \lambda_{Tl}^3 + \frac{9}{2} q_0 L_{pref} (T_{in} + 3 T_{sat}) (T_{in} - T_{sat}) \lambda_{Tl}^2 \right. \\
& \left. - \frac{45}{4} q_0^2 L_{pref}^2 \left(T_{in} + \frac{3}{5} T_{sat} \right) \lambda_{Tl} + \frac{25}{4} L_{pref}^3 q_0^3 \right) Q^3 \\
& -\frac{75}{16} q_0^2 \left(\frac{12}{25} (T_{in} + 3 T_{sat}) (T_{in} - T_{sat}) \lambda_{Tl}^2 - \frac{8}{5} q_0 L_{pref} \left(T_{in} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{5} T_{sat} \right) \lambda_{Tl} + L_{pref}^2 q_0^2 \right) Q^2 + \frac{15}{8} q_0^4 \left(\left(-T_{in} - \frac{3}{5} T_{sat} \right) \lambda_{Tl} \right. \\
& \left. \left. + q_0 L_{pref} \right) Q - \frac{5}{16} q_0^6 \Big) \\
& \sqrt{Q^2 L_{pref}^2 + ((2 T_{in} - 2 T_{sat}) \lambda_{Tl} - 2 q_0 L_{pref}) Q + q_0^2} + (Q^2 L_{pref}^2 \\
& + ((2 T_{in} - 2 T_{sat}) \lambda_{Tl} - 2 q_0 L_{pref}) Q + q_0^2)^2 (QL_{pref} - q_0) (Q^2 L_{pref}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-2 q_0 L_{pref} + 3 T_{in} \lambda_{Tl}) Q + q_0^2) C_{pl} \Big/ (\lambda_{Tl} Q (Q^2 L_{pref}^2 \\
& + ((2 T_{in} - 2 T_{sat}) \lambda_{Tl} - 2 q_0 L_{pref}) Q + q_0^2)^{3/2} (-Q^3 L_{pref}^3 \\
& + L_{pref} (\sqrt{Q^2 L_{pref}^2 - 2 Q q_0 L_{pref} + 2 Q T_{in} \lambda_{Tl} - 2 Q T_{sat} \lambda_{Tl} + q_0^2} \\
& + 3 q_0) L_{pref} - 3 \lambda_{Tl} T_{in}) Q^2 + (\\
& -q_0 (2 \sqrt{Q^2 L_{pref}^2 - 2 Q q_0 L_{pref} + 2 Q T_{in} \lambda_{Tl} - 2 Q T_{sat} \lambda_{Tl} + q_0^2} \\
& + 3 q_0) L_{pref} + \lambda_{Tl} (3 q_0 T_{in} \\
& + \sqrt{Q^2 L_{pref}^2 - 2 Q q_0 L_{pref} + 2 Q T_{in} \lambda_{Tl} - 2 Q T_{sat} \lambda_{Tl} + q_0^2} (2 T_{in} \\
& + T_{sat})) Q \\
& + q_0^2 (\sqrt{Q^2 L_{pref}^2 - 2 Q q_0 L_{pref} + 2 Q T_{in} \lambda_{Tl} - 2 Q T_{sat} \lambda_{Tl} + q_0^2} \\
& + q_0)) \\
\#simplify \left(eval \left(x_{diph_liq_expr0}, \left\{ Q_{p_l} = \frac{Q}{\rho_{l0} \cdot C_{pl}}, q_{inp_l} = \frac{q_{in}}{C_{pl} \cdot \rho_{l0}}, \lambda_{Tlp} \right. \right. \right. \\
= \left. \left. \left. \frac{\lambda_{Tl}}{C_{pl} \cdot \rho_{l0}} \right\}, size \right) \right)
\end{aligned}$$

Zone diphasique

Expression analytique de dx/dS

$$\begin{aligned}
\#dxdS := unapply \left((diff(Pc(S), S)) \Big/ \left(\left(\frac{1}{K_0} \cdot \left(\frac{v_l}{k_{rl}(S)} + \frac{v_g}{k_{rg}(S)} \right) \right) \cdot \left(-\lambda_l(S) \cdot \rho_{l0} - \frac{1}{L_0} \right. \right. \right. \\
\cdot (Q \cdot l_{diph_p} + q_{diph_l}) - (\rho_l - \rho_{gsat}) \cdot g \Big), S \Big); \\
dxdS := unapply \left((diff(Pc(S), S)) \Big/ \left(\frac{1}{\left(\frac{K_0}{\left(\frac{v_l}{k_{rl}(S)} + \frac{v_g}{k_{rg}(S)} \right) + artdiff_2_add} \right)} \cdot \left(-\lambda_l(S) \right. \right. \right. \\
\cdot \rho_{l0} - \frac{1}{L_0} \cdot (Q \cdot l_{diph_p} + q_{diph_l}) - (\rho_l - \rho_{gsat}) \cdot g \Big), S \Big);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S \rightarrow \frac{\frac{d}{dS} Pc(S)}{-\lambda_l(S) \rho_{l0} - \frac{Q l_{diph_p} + q_{diph_l}}{L_0} - (\rho_l - \rho_{gsat}) g} \\
\frac{K_0}{\frac{v_l}{k_{rl}(S)} + \frac{v_g}{k_{rg}(S)} + artdiff_2_add}
\end{aligned} \tag{11}$$

$$q_diph_l_expr := q_0 - Q \cdot (L_pref - x_diph_liq);$$

$$q_0 - Q \cdot (L_pref - x_diph_liq) \quad (12)$$

Fonction pour écrire les listes avec les valeurs de x et de S correspondants dans le diphasique
write_xS := **proc**(*x_start*, *dxdS_func*, *dS*, *S_max*, *S_min*);

$$Nb_S := \frac{(S_min - S_max)}{dS};$$

$$l_diph_tot := 0;$$

$$xs := [x_start];$$

$$Ss := [S_max];$$

$$Ts := [T_sat];$$

$$rho_hs := [rho_h_lsat];$$

$$DPcDS := [eval(diff(Pc(S), S), S = S_max)];$$

$$nunu := \left[\left(\frac{v_l}{k_rl(S_max)} + \frac{v_g}{k_rg(S_max)} \right) \right];$$

$$lambdarho := [-\lambda_l(S_max) \cdot rho_h_0];$$

$$LQq := \left[-\frac{1}{L_0} \cdot (Q \cdot l_diph_tot + q_diph_l) \right];$$

$$res_dxdS := [eval(dxdS_func(this_S), l_diph_p = l_diph_tot)];$$

for *i* **from** 1 **to** *Nb_S* **do**

$$this_S := Ss[-1];$$

$$this_x := xs[-1];$$

$$this_dxdS := eval(dxdS_func(this_S), l_diph_p = l_diph_tot);$$

$$this_dx := this_dxdS \cdot dS;$$

$$l_diph_tot := l_diph_tot + this_dx;$$

$$xs := [xs[], this_x + this_dx];$$

$$Ss := [Ss[], this_S + dS];$$

$$Ts := [Ts[], T_sat];$$

$$rho_hs := [rho_hs[], rho_h_gsat + (this_S + dS) \cdot (rho_h_lsat - rho_h_gsat)];$$

$$DPcDS := [DPcDS[], eval(diff(Pc(S), S), S = this_S)];$$

$$nunu := \left[nu_nu[], \left(\frac{v_l}{k_rl(this_S)} + \frac{v_g}{k_rg(this_S)} \right) \right];$$

$$lambdarho := [lambdarho[], -\lambda_l(this_S) \cdot rho_h_0];$$

$$LQq := \left[LQq[], -\frac{1}{L_0} \cdot (Q \cdot l_diph_tot + q_diph_l) \right];$$

$$res_dxdS := [res_dxdS[], this_dxdS];$$

end do;

return [*l_diph_tot*, *xs*, *Ss*, *Ts*, *rho_h*, *DPcDS*, *nunu*, *lambdarho*, *LQq*, *res_dxdS*];

end proc;

Zone gazeuse

Solution du profil de temperature avec convection et conduction de la chaleur:

Donnees: flux massique $\rho_{h0} = \text{const}$ sur preforme, source chaleur vol $Q = \text{const}$ sur preforme, temperature $T(x=x_{diph_gaz}) = T_{sat}$, flux de chaleur $q(x=L_{pref}) = q_0$

$$eqn_g := \rho_{h0} \cdot C_{pg} \cdot T_g(x) - \lambda_{Tg} \cdot diff(T_g(x), x) = q_0 - Q \cdot (L_{pref} - x);$$

$$\rho_{h0} C_{pg} T_g(x) - \lambda_{Tg} \left(\frac{d}{dx} T_g(x) \right) = q_0 - Q (L_{pref} - x)$$

(14)

$sol_Tg_1 := unapply(rhs(dsolve(eqn_g)), x);$

$$x \rightarrow \frac{Qx}{\rho_0 C_{pg}} - \frac{QL_{pref}}{C_{pg} \rho_0} + \frac{q_0}{C_{pg} \rho_0} + \frac{Q \lambda_{Tg}}{C_{pg}^2 \rho_0^2} + e^{\frac{\rho_0 C_{pg} x}{\lambda_{Tg}}} _C1 \quad (15)$$

$sol_Tg_C1 := solve(sol_Tg_1(x_diph_gaz) = T_sat, _C1);$

$$\frac{1}{e^{\frac{\rho_0 C_{pg} x_diph_gaz}{\lambda_{Tg}}} C_{pg}^2 \rho_0^2} (C_{pg}^2 T_sat \rho_0^2 + Q C_{pg} L_{pref} \rho_0 - Q C_{pg} \rho_0 x_diph_gaz - q_0 C_{pg} \rho_0 - Q \lambda_{Tg}) \quad (16)$$

$sol_Tg_2 := unapply(eval(sol_Tg_1(x), \{ _C1 = sol_Tg_C1 \}), x);$

$$x \rightarrow \frac{Qx}{\rho_0 C_{pg}} - \frac{QL_{pref}}{C_{pg} \rho_0} + \frac{q_0}{C_{pg} \rho_0} + \frac{Q \lambda_{Tg}}{C_{pg}^2 \rho_0^2} + \frac{1}{e^{\frac{\rho_0 C_{pg} x_diph_gaz}{\lambda_{Tg}}} C_{pg}^2 \rho_0^2} \left(e^{\frac{\rho_0 C_{pg} x}{\lambda_{Tg}}} (C_{pg}^2 T_sat \rho_0^2 + Q C_{pg} L_{pref} \rho_0 - Q C_{pg} \rho_0 x_diph_gaz - q_0 C_{pg} \rho_0 - Q \lambda_{Tg}) \right) \quad (18)$$

$\#sol_Tg := unapply(collect(simplify(simplify(eval(sol_Tg_2(x), \{Q = Qp_g \cdot \rho_0 \cdot C_{pg}, q_0 = q_0p_g \cdot C_{pg} \cdot \rho_0, \lambda_{Tg} = \lambda_{Tgp} \cdot C_{pg} \cdot \rho_0\}), exp), size), \{Qp_g, q_0p_g, T_sat\}), x);$
 $sol_Tg := unapply(simplify(collect(expand(sol_Tg_2(x)), \{Q, q_0\}), exp), x);$

$$x \rightarrow \left(-\frac{L_{pref}}{C_{pg} \rho_0} + \frac{x}{\rho_0 C_{pg}} + \frac{L_{pref} e^{\frac{\rho_0 C_{pg} (x-x_diph_gaz)}{\lambda_{Tg}}}}{C_{pg} \rho_0} - \frac{x_diph_gaz e^{\frac{\rho_0 C_{pg} (x-x_diph_gaz)}{\lambda_{Tg}}}}{\rho_0 C_{pg}} + \frac{\lambda_{Tg}}{C_{pg}^2 \rho_0^2} - \frac{\lambda_{Tg} e^{\frac{\rho_0 C_{pg} (x-x_diph_gaz)}{\lambda_{Tg}}}}{C_{pg}^2 \rho_0^2} \right) Q + \left(\frac{1}{\rho_0 C_{pg}} - \frac{e^{\frac{\rho_0 C_{pg} (x-x_diph_gaz)}{\lambda_{Tg}}}}{\rho_0 C_{pg}} \right) q_0 + T_sat e^{\frac{\rho_0 C_{pg} (x-x_diph_gaz)}{\lambda_{Tg}}} \quad (19)$$

Temperature maximale au point de la sortie du flux:

$T_max_1 := sol_Tg(L_{pref});$

$$\left(\frac{L_{pref} e^{\frac{\rho_0 C_{pg} (L_{pref}-x_diph_gaz)}{\lambda_{Tg}}}}{C_{pg} \rho_0} - \frac{x_diph_gaz e^{\frac{\rho_0 C_{pg} (L_{pref}-x_diph_gaz)}{\lambda_{Tg}}}}{\rho_0 C_{pg}} + \frac{\lambda_{Tg}}{C_{pg}^2 \rho_0^2} - \frac{\lambda_{Tg} e^{\frac{\rho_0 C_{pg} (L_{pref}-x_diph_gaz)}{\lambda_{Tg}}}}{C_{pg}^2 \rho_0^2} \right) Q + \left(\frac{1}{\rho_0 C_{pg}} - \frac{e^{\frac{\rho_0 C_{pg} (L_{pref}-x_diph_gaz)}{\lambda_{Tg}}}}{\rho_0 C_{pg}} \right) q_0 + T_sat e^{\frac{\rho_0 C_{pg} (L_{pref}-x_diph_gaz)}{\lambda_{Tg}}} \quad (20)$$

$$- \frac{e}{\frac{\frac{\text{rhou}_0 C_{pg} (L_{pref} - x_{diph_gaz})}{\lambda_{Tg}}}{\text{rhou}_0 C_{pg}}} \left. \right) q_0 + T_{sat} e \frac{\text{rhou}_0 C_{pg} (L_{pref} - x_{diph_gaz})}{\lambda_{Tg}}$$

$T_{max} := \text{simplify}(\text{series}(T_{max_1}, \text{rhou}_0=0, 5), \text{size});$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_{Tg}} (Qx_{diph_gaz}^2 + (-2QL_{pref} + 2q_0)x_{diph_gaz} + QL_{pref}^2 - 2q_0L_{pref} \\ & + 2T_{sat}\lambda_{Tg}) + \frac{1}{6} \frac{1}{\lambda_{Tg}^2} (C_{pg}(L_{pref} - x_{diph_gaz})(2QL_{pref}^2 \\ & - 4QL_{pref}x_{diph_gaz} + 2Qx_{diph_gaz}^2 - 3q_0L_{pref} + 3q_0x_{diph_gaz} \\ & + 6T_{sat}\lambda_{Tg})) \text{rhou}_0 + \frac{1}{24} \frac{1}{\lambda_{Tg}^3} (C_{pg}^2(L_{pref} - x_{diph_gaz})^2(3QL_{pref}^2 \\ & - 6QL_{pref}x_{diph_gaz} + 3Qx_{diph_gaz}^2 - 4q_0L_{pref} + 4q_0x_{diph_gaz} \\ & + 12T_{sat}\lambda_{Tg})) \text{rhou}_0^2 + O(\text{rhou}_0^3) \end{aligned} \quad (21)$$

$T_{max_rhou10} := \text{simplify}\left(\frac{\text{coeff}(T_{max}, \text{rhou}_0, 1)}{\text{coeff}(T_{max}, \text{rhou}_0, 0)}, \text{size}\right);$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \left((L_{pref} - x_{diph_gaz}) \left(Qx_{diph_gaz}^2 + \left(\frac{3}{2} q_0 - 2QL_{pref} \right) x_{diph_gaz} \right. \right. \\ & \left. \left. + QL_{pref}^2 + 3T_{sat}\lambda_{Tg} - \frac{3}{2} q_0L_{pref} \right) C_{pg} \right) / \left(\lambda_{Tg} (Qx_{diph_gaz}^2 + \right. \\ & \left. - 2QL_{pref} + 2q_0)x_{diph_gaz} + QL_{pref}^2 - 2q_0L_{pref} + 2T_{sat}\lambda_{Tg} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

$T_{max_rhou21} := \text{simplify}\left(\frac{\text{coeff}(T_{max}, \text{rhou}_0, 2)}{\text{coeff}(T_{max}, \text{rhou}_0, 1)}, \text{size}\right);$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{8} \left(\left(Qx_{diph_gaz}^2 + \left(\frac{4}{3} q_0 - 2QL_{pref} \right) x_{diph_gaz} + QL_{pref}^2 + 4T_{sat}\lambda_{Tg} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{4}{3} q_0L_{pref} \right) (L_{pref} - x_{diph_gaz}) C_{pg} \right) / \left(\lambda_{Tg} \left(Qx_{diph_gaz}^2 + \left(\frac{3}{2} q_0 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - 2QL_{pref} \right) x_{diph_gaz} + QL_{pref}^2 + 3T_{sat}\lambda_{Tg} - \frac{3}{2} q_0L_{pref} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Position de l'interface diphasique/gaz

$x_{diph_gaz_expr} := x_{diph_liq} + l_{diph};$

$$x_{diph_liq} + l_{diph} \quad (24)$$

Proprietes des materiaux pour l'application numérique

$T_{sat} := 368;$

$$368 \quad (25)$$

$\epsilon := 0.77;$

$$0.77 \quad (26)$$

$C_{ps} := -42.4678 + 2.8516 \cdot T_{sat} - 0.001 \cdot T_{sat}^2;$

$$871.4970 \quad (27)$$

$$\lambda_{Ts} := \frac{(-((T_{sat} - 273 - 900)^2) \cdot 0.000004 + 16) \cdot 1.264 \cdot 0.61}{12.2 \cdot (1 - \epsilon)};$$

$$3.684257739 \quad (28)$$

$$C_{pl_seul} := 1695;$$

$$1695 \quad (29)$$

$$C_{pl} := (1 - \epsilon) \cdot C_{ps} + \epsilon \cdot C_{pl_seul};$$

$$1505.594310 \quad (30)$$

$$\lambda_{Tl_seul} := 0.152;$$

$$0.152 \quad (31)$$

$$\lambda_{Tl} := (1 - \epsilon) \cdot \lambda_{Ts} + \epsilon \cdot \lambda_{Tl_seul};$$

$$0.9644192800 \quad (32)$$

$$C_{pg_seul} := -649.28 + 7.28 \cdot T_{sat} - 0.003 \cdot T_{sat}^2 + 1.57e-7 \cdot T_{sat}^3;$$

$$1631.312257 \quad (33)$$

$$C_{pg} := (1 - \epsilon) \cdot C_{ps} + \epsilon \cdot C_{pg_seul};$$

$$1456.554748 \quad (34)$$

$$\lambda_{Tg_seul} := -0.02329 + 1.1092e-4 \cdot T_{sat} - 2e-8 \cdot T_{sat}^2;$$

$$0.01482008 \quad (35)$$

$$\lambda_{Tg} := (1 - \epsilon) \cdot \lambda_{Ts} + \epsilon \cdot \lambda_{Tg_seul};$$

$$0.8587907416 \quad (36)$$

$$K_0 := 30e-12;$$

$$3.0 \cdot 10^{-11} \quad (37)$$

$$\sigma_{pc} := 13.99e-3;$$

$$0.01399 \quad (38)$$

$$Levrett := unapply(1.417 \cdot (1 - S) - 2.12 \cdot (1 - S)^2 + 1.263 \cdot (1 - S)^3, S);$$

$$S \rightarrow 1.417 - 1.417 S - 2.12 (1 - S)^2 + 1.263 (1 - S)^3 \quad (39)$$

$$Pc_{max} := \text{sqrt}\left(\frac{\epsilon}{K_0}\right) \cdot \sigma_{pc};$$

$$2241.312689 \quad (40)$$

$$Pc := unapply(Pc_{max} \cdot Levrett(S), S);$$

$$S \rightarrow 3175.940080 - 3175.940080 S - 4751.582901 (1 - S)^2 + 2830.777926 (1 - S)^3 \quad (41)$$

$$v_l := \frac{4.26e-4}{\rho_l};$$

$$\frac{0.000426}{\rho_l} \quad (43)$$

$$v_g := \frac{(-9.61 + 0.358 \cdot T_{sat} - 1.46e-4 \cdot T_{sat}^2 + 3.63e-8 \cdot T_{sat}^3) \cdot 1e-7}{\rho_{gsat}};$$

$$\frac{0.00001041711440}{\rho_{gsat}} \quad (44)$$

$$\rho_{gsat}$$

$$k_{rl} := unapply(S^3, S);$$

$$S \rightarrow S^3 \quad (45)$$

$$k_{rg} := \text{unapply}((1 - S)^3, S);$$

$$S \rightarrow (1 - S)^3 \quad (46)$$

$$\lambda_l := \text{unapply} \left(\frac{\frac{k_{rl}(S)}{v_l}}{\frac{k_{rl}(S)}{v_l} + \frac{k_{rg}(S)}{v_g}}, S \right);$$

$$S \rightarrow \frac{2347.417840 S^3 \rho_l}{2347.417840 S^3 \rho_l + 95995.87387 (1 - S)^3 \rho_{gsat}} \quad (47)$$

$$L_0 := 356.1e+3$$

$$3.561 \cdot 10^5 \quad (48)$$

$$P_{sat} := 1.5e+5;$$

$$1.5 \cdot 10^5 \quad (49)$$

$$\rho_l := 719;$$

$$719 \quad (50)$$

$$M_{gc} := 84.162e-3;$$

$$0.084162 \quad (51)$$

$$Rg := 8.315;$$

$$8.315 \quad (52)$$

$$\rho_{gsat} := \frac{M_{gc} \cdot P_{sat}}{Rg \cdot T_{sat}}$$

$$4.125696098 \quad (53)$$

$$\delta_{sat} := 30;$$

$$30 \quad (54)$$

$$\text{rhoh}_{lsat} := -\rho_l \cdot L_0 \cdot \delta_{sat} \cdot \frac{\rho_{gsat}}{\rho_l - \rho_{gsat}};$$

$$-4.432917680 \cdot 10^7 \quad (55)$$

$$\text{rhoh}_{gsat} := \text{rhoh}_{lsat} + \rho_{gsat} \cdot L_0 \cdot (1 + \delta_{sat});$$

$$1.21479498 \cdot 10^6 \quad (56)$$

Parametres de pilotage

$$g_{val} := -9.81;$$

$$-9.81 \quad (57)$$

$$L_{pref_val} := 20e-2;$$

$$0.20 \quad (58)$$

$$\text{rhoh}_0_{val} := 1e-6;$$

$$0.000001 \quad (59)$$

$$T_{in_val} := T_{sat} - 10;$$

$$358 \quad (60)$$

$$q_0_{val} := -5e+2;$$

$$-500. \quad (61)$$

$$Q_val := 2.5e+1; \quad 25. \quad (62)$$

$$artdiff_2_add_val := 1e-8; \quad 1. 10^{-8} \quad (63)$$

$$evals := \{g = g_val, L_pref = L_pref_val, rhou_0 = rhou_0_val, T_in = T_in_val, q_0 = q_0_val, Q = Q_val, artdiff_2_add = artdiff_2_add_val\};$$

$$\{Q = 25., g = -9.81, q_0 = -500., L_pref = 0.20, T_in = 358, rhou_0 = 0.000001, artdiff_2_add = 1. 10^{-8}\} \quad (64)$$

Evaluation numerique

Liquide:

$$evals_l := \left\{ Qp_l = \frac{Q}{rhou_0 \cdot C_pl}, q_inp_l = \frac{q_in}{C_pl \cdot rhou_0}, \lambda_Tlp = \frac{\lambda_Tl}{C_pl \cdot rhou_0} \right\};$$

$$q_in_val := eval(q_in, evals); \quad -505.00 \quad (65)$$

$$x_diph_liq_val := eval(eval(x_diph_liq_expr, evals_l), evals); \quad 0.01908576910 \quad (66)$$

$$rhoh_lin := rhoh_lsat + \rho_l \cdot C_pl \cdot (T_in_val - T_sat); \quad -5.515439989 \cdot 10^7 \quad (67)$$

Est ce que la convection est raiment negligee dans le calcul de x_diph_liq ? => Calcul des correctsion relatives dordre 1 et 2

$$eval(x_diph_liq_expr_rhou10 \cdot rhou_0_val, evals); \quad -0.001083261949 \quad (68)$$

$$eval(x_diph_liq_expr_rhou21 \cdot rhou_0_val, evals); \quad -0.001083727136 \quad (69)$$

$$x_diph_liq_val := eval(eval(x_diph_liq_expr_1, evals_l), evals); \quad 0.01908189996 \quad (70)$$

$$\frac{rhoh_lin - rhoh_lsat}{rhoh_gsat - rhoh_lsat}; \quad -0.2376872870 \quad (71)$$

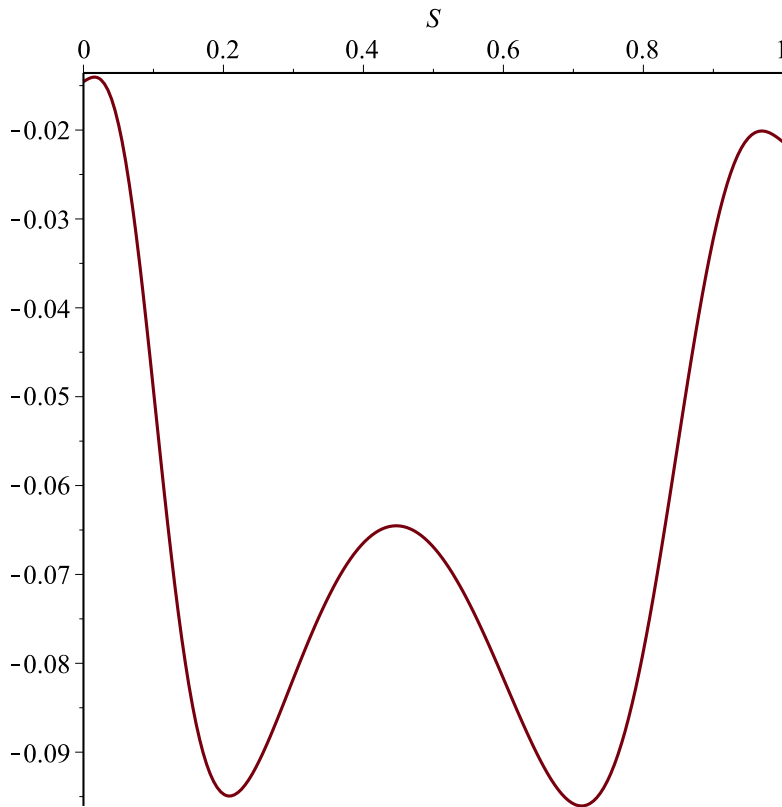
$$\frac{x_diph_liq_val}{L_pref_val}; \quad 0.09540949980 \quad (72)$$

Diphastique

$$q_diph_l_val := eval(eval(q_diph_l_expr, \{evals_l[], x_diph_liq = x_diph_liq_val\}), evals); \quad -504.5229525 \quad (73)$$

$$dxdS_val := unapply(eval(dxdS(S), \{evals[], q_diph_l = q_diph_l_val\}), S) :$$

$$plot(eval(dxdS_val(S), l_diph_p = 0), S = 0 .. 1);$$



$xS_diph := write_xS(x_diph_liq_val, dx dS_val, -0.01, 1 - 1e-4, 1e-4) :$
 $l_diph_val := xS_diph[1];$

$$0.06627853797 \quad (74)$$

$x_diph := xS_diph[2] :$
 $S_diph := xS_diph[3] :$
 $T_diph := xS_diph[4] :$
 $rhoh_diph := xS_diph[5] :$
 $\frac{l_diph_val}{x_diph_liq_val};$

$$3.473372049 \quad (75)$$

$\frac{l_diph_val}{L_pref_val};$

$$0.3313926898 \quad (76)$$

Gaz

$evals_g := \left\{ Qp_g = \frac{Q}{rhoh_0 \cdot C_pg}, q_0p_g = \frac{q_0}{C_pg \cdot rhoh_0}, \lambda_Tgp = \frac{\lambda_Tg}{C_pg \cdot rhoh_0} \right\};$
 $x_diph_gaz_val := eval(x_diph_gaz_expr, \{x_diph_liq = x_diph_liq_val, l_diph = l_diph_val\});$

$$0.08536043793 \quad (77)$$

$T_max_val := eval(eval(T_max, \{evals_g[], x_diph_gaz = x_diph_gaz_val\}), evals);$

$$T_{max_val} - T_{sat};$$

$$435.0141218 \quad (78)$$

$$67.0141218 \quad (80)$$

Est ce que la convection est raiment negligeeable dans le calcul de T_max ? => Calcul des correctsion relatives dordre 1 et 2

$$eval(T_{max_rhoul0} \cdot rhoul_0, \{evals[], x_{diph_gaz} = x_{diph_gaz_val}\});$$

$$0.0001794874226 \quad (81)$$

$$eval(T_{max_rhoul1} \cdot rhoul_0, \{evals[], x_{diph_gaz} = x_{diph_gaz_val}\});$$

$$0.00009451612955 \quad (82)$$

$$T_{max_val} := eval(eval(T_{max_1}, \{evals_g[], x_{diph_gaz} = x_{diph_gaz_val}\}), evals);$$

$$435.0104091 \quad (83)$$

$$rhoh_{max} := rhoh_{gsat} + \rho_{gsat} \cdot C_{pg} \cdot (T_{max_val} - T_{sat});$$

$$1.617480782 \cdot 10^6 \quad (84)$$

$$\frac{rhoh_{max} - rhoh_{gsat}}{rhoh_{gsat} - rhoh_{lsat}};$$

$$0.008841692682 \quad (85)$$

$$\frac{(L_{pref_val} - x_{diph_gaz_val})}{L_{pref_val}};$$

$$0.5731978105 \quad (86)$$

Comme condition de bord pour le calcul nous avons donné le flux de chaleur total= convectif + conductif

Connaissant maintenant la température du gaz a la sortie de la section, nous pouvons revenir vers les deux flux separees:

$$flux_{convectif_0} := rhoul_0_val \cdot C_{pg} \cdot T_{max_val};$$

$$0.6336164768 \quad (87)$$

$$flux_{conduct_0} := q_{0_val} - flux_{convectif_0};$$

$$-500.6336165 \quad (88)$$

Les valeurs correspondants a l'entree sont:

$$flux_{convectif_in} := rhoul_0_val \cdot C_{pl} \cdot T_{in_val};$$

$$0.5390027630 \quad (89)$$

$$flux_{conduct_in} := q_{in_val} - flux_{convectif_in};$$

$$-505.5390028 \quad (90)$$

Plots

$$Nb_points := 100;$$

$$100 \quad (91)$$

$$dx_l := \frac{x_{diph_liq_val}}{Nb_points - 1};$$

$$0.0001927464642 \quad (92)$$

$$dx_g := \frac{(L_{pref_val} - x_{diph_gaz_val})}{Nb_points - 1};$$

$$0.001157975375 \quad (93)$$

$$x_liq := []; \quad [] \quad (94)$$

$$x_gaz := []; \quad [] \quad (95)$$

$$T_liq := []; \quad [] \quad (96)$$

$$T_gaz := []; \quad [] \quad (97)$$

$$S_liq := []; \quad [] \quad (98)$$

$$S_gaz := []; \quad [] \quad (99)$$

$$rhoh_liq := []; \quad [] \quad (100)$$

$$rhoh_gaz := []; \quad [] \quad (101)$$

for i **from** 0 **to** $Nb_points - 1$ **do**

$$x_liq := [x_liq[], i \cdot dx_l];$$

$$x_gaz := [x_gaz[], x_diph_gaz_val + i \cdot dx_g];$$

$$T_liq := [T_liq[], eval(sol_Tl(i \cdot dx_l), evals)];$$

$$T_gaz := [T_gaz[], eval(sol_Tg(x_diph_gaz_val + i \cdot dx_g), \{evals[], x_diph_gaz = x_diph_gaz_val\})];$$

$$S_liq := [S_liq[], 1];$$

$$S_gaz := [S_gaz[], 0];$$

$$rhoh_liq := [rhoh_liq[], rhoh_lsat + \rho_l \cdot C_pl \cdot (T_liq[i + 1] - T_sat)];$$

$$rhoh_gaz := [rhoh_gaz[], rhoh_gsat + \rho_gsat \cdot C_pg \cdot (T_gaz[i + 1] - T_sat)];$$

end do:

$$rhoh_lsat + \rho_l \cdot C_pl \cdot (T_liq[Nb_points] - T_sat)$$

$$-4.433051393 \cdot 10^7 \quad (102)$$

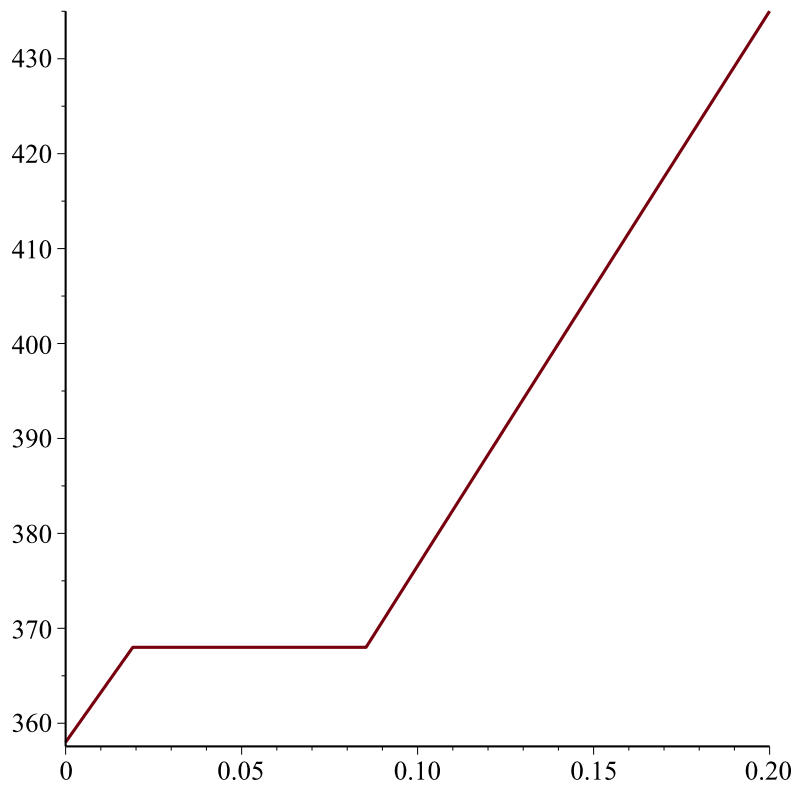
$$all_x := [x_liq[], x_diph[], x_gaz[]]:$$

$$all_T := [T_liq[], T_diph[], T_gaz[]]:$$

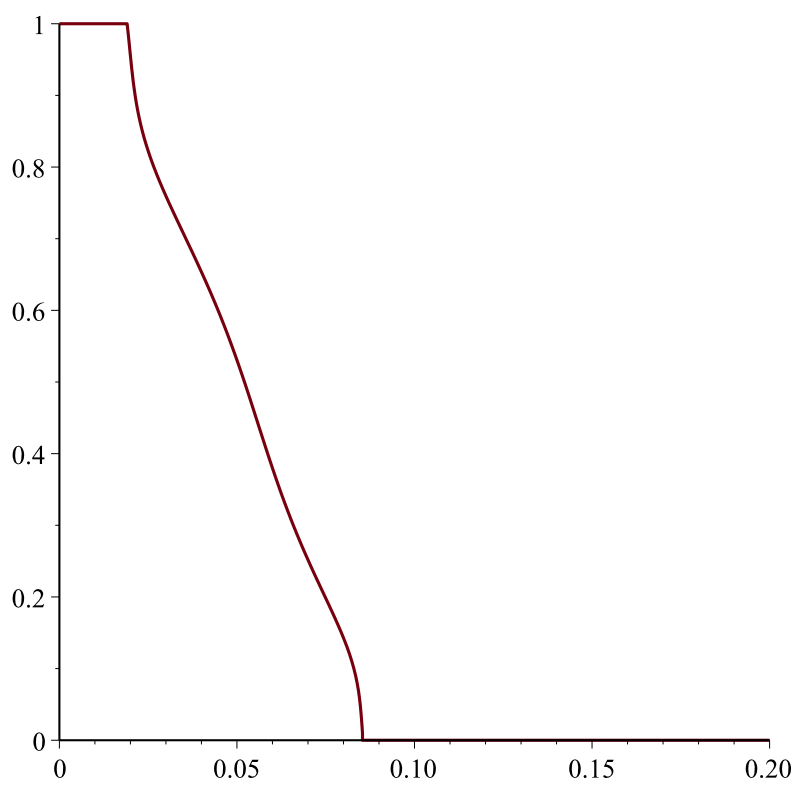
$$all_S := [S_liq[], S_diph[], S_gaz[]]:$$

$$all_rhoh := [rhoh_liq[], rhoh_diph[], rhoh_gaz[]]:$$

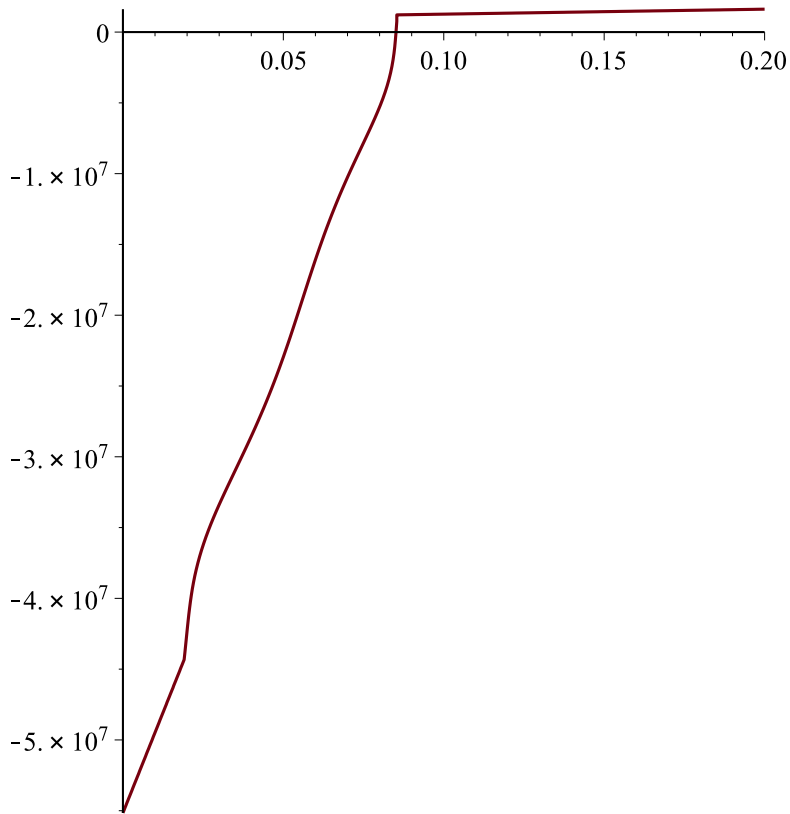
$$plot(all_x, all_T);$$



`plot(all_x, all_S);`



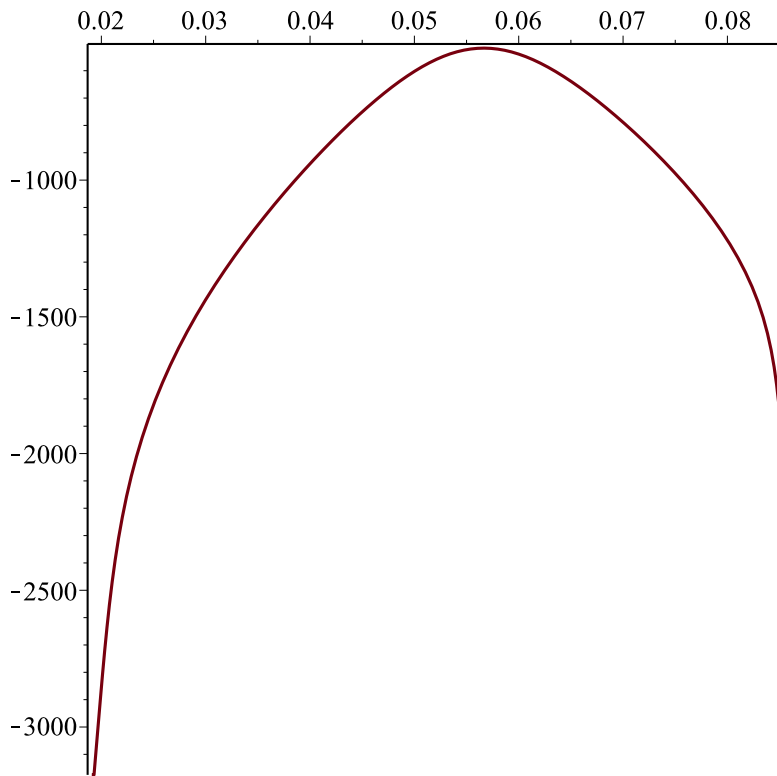
`plot(all_x, all_rhoh);`



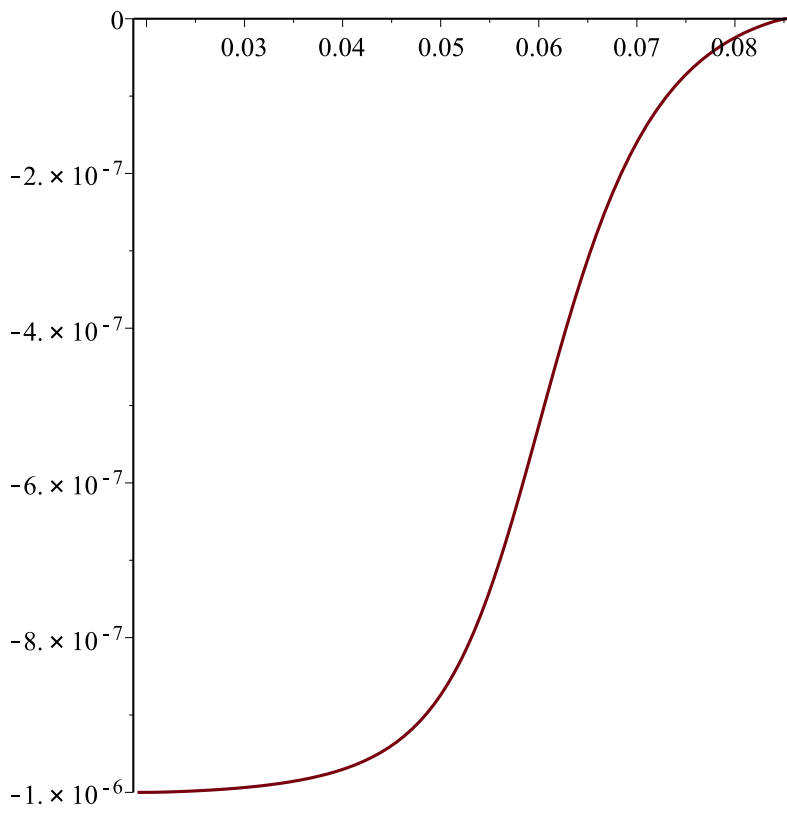
```

#l_diph_tot, xs,Ss,Ts,rhoS,DPcDS,nunu,lambdarho,LQq,res_dxdS]
diph_DPcDS := xS_diph[6]:
diph_nunu := xS_diph[7]:
diph_lambdarho := eval(xS_diph[8], evals):
diph_LQq := eval(xS_diph[9], {evals[ ], q_diph_l=q_diph_l_val}):
diph_dxdS := xS_diph[10]:
#x_diph;
#diph_DPcDS;
plot(x_diph, diph_DPcDS);

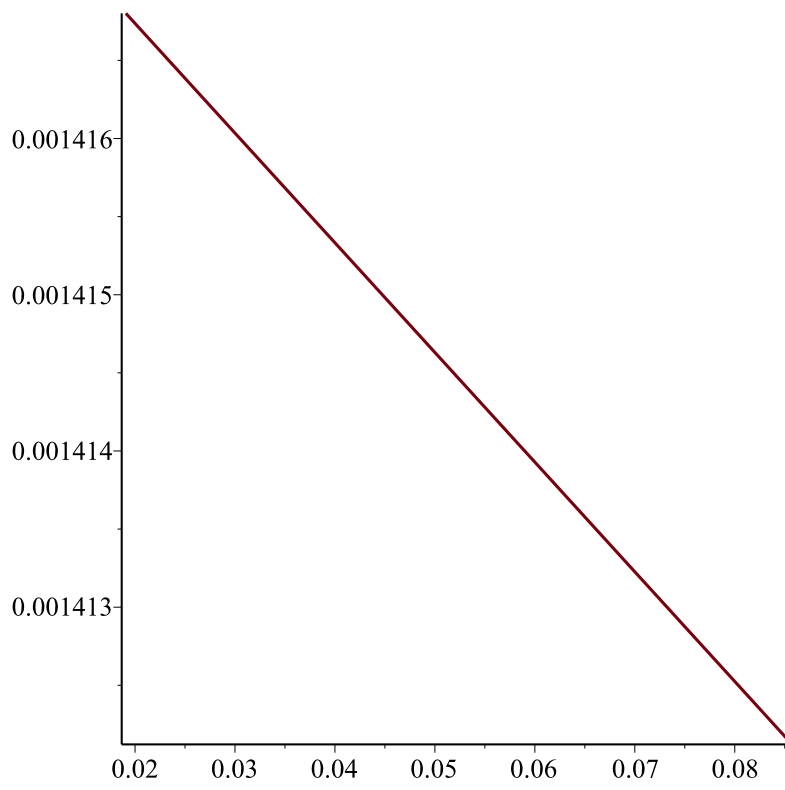
```



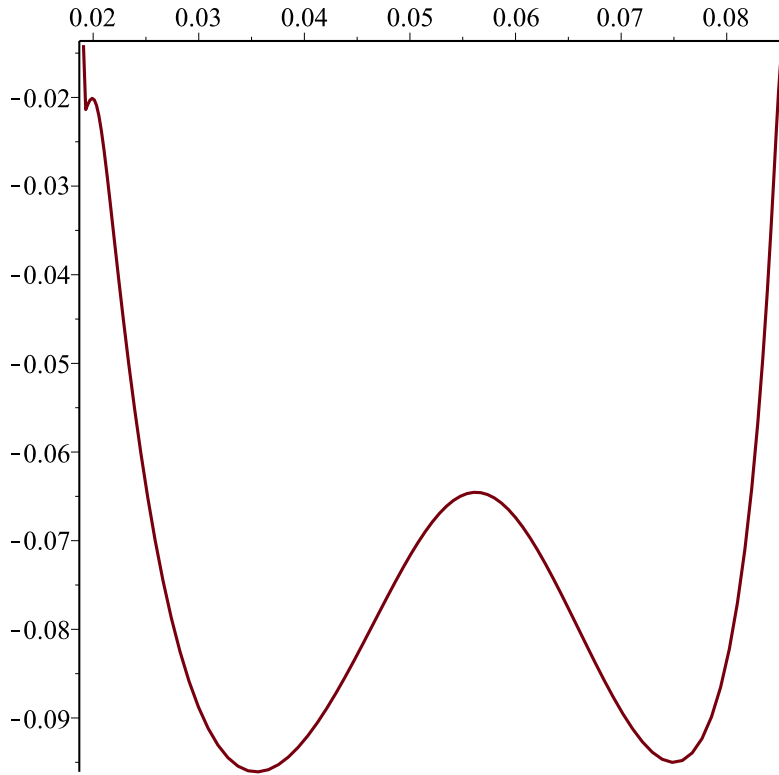
```
plot(x_diph[100..900], diph_nunu[100..900]);  
Error, invalid subscript selector  
plot(x_diph, diph_lambdarho);
```



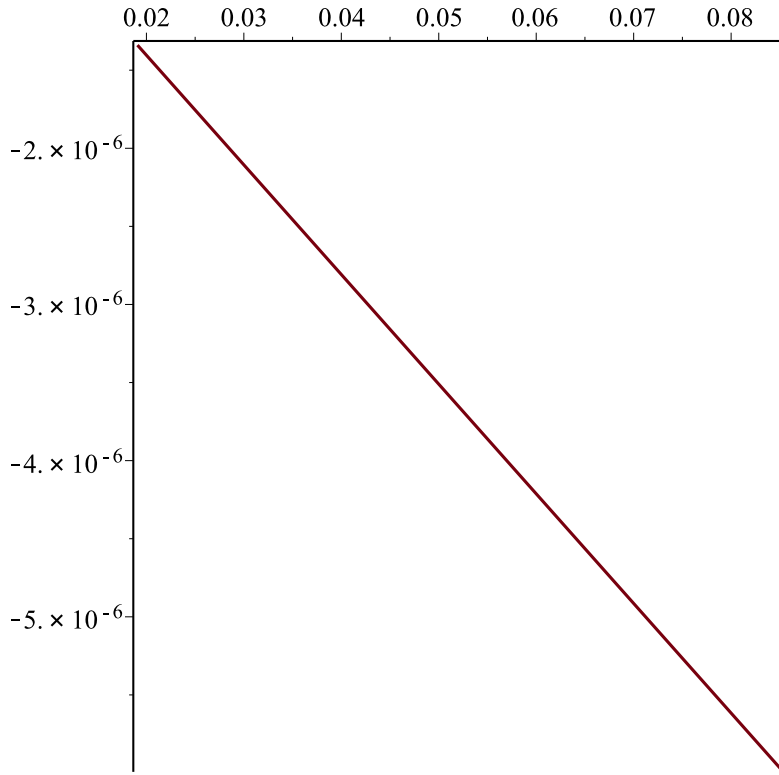
plot(x_diph, diph_LQq);



`plot(x_diph, diph_dxdS);`



$plot(x_diph, -\frac{1}{L_0} \cdot Q_val \cdot x_diph);$



$$\frac{q_0 \text{ val.}}{L_0},$$

-0.001404099972

(103)

J. Adimensionnement des équations de bilan

J.1. Dépôt

Nous rappelons l'équation de dépôt 5.93

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \nu_{pyC} \cdot \Omega_s \cdot R_c \quad (\text{J.1})$$

avec le taux de consommation de cyclohexane défini dans 5.78

$$R_c = -\sigma_v \cdot a_k \cdot T^{b_k} \cdot \exp\left(-\frac{E_a}{R_g T}\right) \cdot C_{gc} \quad (\text{J.2})$$

Adimensionnement

Nous réécrivons l'équation de la porosité en introduisant un temps de référence t_{ref} , un taux de consommation de cyclohexane de référence $R_{c,ref}$ ainsi que les valeurs adimensionnelles correspondantes à ces deux grandeurs :

$$\frac{1}{t_{ref}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \nu_{pyC} \cdot \Omega_s \cdot R_{c,ref} \cdot \tilde{R}_c \quad (\text{J.3})$$

Grandeurs caractéristiques

Nous allons maintenant nous consacrer sur le taux de réaction. Nous introduisons une température de référence T_{ref} , une concentration en cyclohexane C_{ref} , une surface interne $\sigma_{v,ref}$, ainsi que l'énergie d'activation adimensionnelle ainsi que sa valeur de référence :

$$\gamma = \frac{E_a}{R_g T} \quad (\text{J.4a})$$

$$\gamma_{ref} = \frac{E_a}{R_g T_{ref}} \quad (\text{J.4b})$$

Ainsi on obtient pour la consommation

$$\begin{aligned} R_c &= \left[\sigma_{v,ref} \cdot a_k \cdot T_{ref}^{b_k} \cdot \exp(-\gamma_{ref}) \cdot C_{ref} \right] \cdot \left[-\tilde{\sigma}_v \cdot \tilde{T}^{b_k} \cdot \exp(-(\gamma - \gamma_{ref})) \cdot \tilde{C}_{gc} \right] \\ &= R_{c,ref} \cdot \tilde{R}_c \end{aligned} \quad (\text{J.5})$$

Nous introduisons le temps caractéristique du dépôt,

$$\tau_\varepsilon = (\nu_{pyC} \cdot \Omega_s \cdot R_{c,ref})^{-1} = \left(\nu_{pyC} \cdot \Omega_s \cdot \sigma_{v,ref} \cdot a_k \cdot T_{ref}^{b_k} \exp(-\gamma_{ref}) \cdot C_{ref} \right)^{-1} \quad (\text{J.6})$$

et le temps caractéristique du système t_{ref} ($t = t_{ref} \tilde{t}$), que nous définissons plus tard,

Equation adimensionnelle finale

Finalement, l'équation de la porosité s'écrit sous forme adimensionnelle

$$\frac{\tau_\varepsilon}{t_{ref}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tilde{t}} = \tilde{R}_c \quad (\text{J.7})$$

J.2. Diffusion d'espèce

L'équation de diffusion de l'espèce X est donnée dans 5.94 :

$$\frac{\partial (\varepsilon C_{gX})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[C_{gX} \cdot \left(k_{bK} \frac{\rho_g \vec{u}_g}{\rho_g} - \frac{D_{xc}^{eff} k_{bK}}{X_{gC} (\tilde{D}_{gC}^K + \tilde{\mu}_{gC})} \frac{1}{P_{gX}} \vec{\nabla} P'_{gX} \right) \right] = -\nu_X \cdot R_c \quad (\text{J.8})$$

avec les définitions 5.89.

Nous introduisons une diffusivité qui prend également en compte l'influence de Knudsen (\tilde{D}_{gC}^K) et de la viscosité du mélange ($\tilde{\mu}_{gC}$) :

$$D_{xc}^{K\mu} = \frac{D_{xc}^{eff} k_{bK}}{X_{gC} X_{gX} (\tilde{D}_{gC}^K + \tilde{\mu}_{gC})} = \frac{\tilde{D}_{xc}}{(\tilde{D}_{gC}^K + \tilde{\mu}_{gC})} \cdot \left(\frac{K_0 k_{rg} k_{bK}}{\mu_m} P_g \right) \quad (\text{J.9})$$

Le coefficient de perméabilité k_{bK} liée à la diffusivité de Knudsen et à la viscosité du mélange de deux gaz se rajoute ici à la perméabilité K_0 du milieu poreux et à la perméabilité k_{rg} liée au mélange liquide/gaz (pur).

Adimensionnement

Nous nous plaçons dans la région de gaz pur puisque c'est là que la diffusion est le plus d'intérêt vis à vis au dépôt. Dans ce cas, la densité du gaz ρ_g est équivalente à la densité du mélange (liquide/gaz) ρ_m et le flux massique du gaz $\rho_g \vec{u}_g$ est équivalent au flux massique du mélange $(\rho \vec{u})_m$. Nous décomposons la densité du gaz en une valeur de référence ρ_{ref} et une valeur adimensionnelle et procédons de manière identique pour la vitesse :

$$(\rho \vec{u})_m = \rho_{ref} \cdot u_0 \cdot (\tilde{\rho} \vec{u})_m \quad (\text{J.10})$$

La valeur de référence pour la vitesse u_0 sera donnée dans la section suivante. Après l'adimensionnement de l'espace

$$x = l_{ref} \tilde{x} \quad y = l_{ref} \tilde{y} \quad (\text{J.11a})$$

$$\vec{\nabla} \cdot = \frac{1}{l_{ref}} \tilde{\nabla} \cdot \quad (\text{J.11b})$$

et avec les définitions de la section précédente nous pouvons écrire

$$\frac{1}{t_{ref}} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\varepsilon \tilde{C}_{gX}) + \tilde{\nabla} \cdot \left[\tilde{C}_{gX} \frac{D_{xc}^{K\mu}}{l_{ref}^2} \left(\frac{u_0 l_{ref}}{D_{xc}^{K\mu}} k_{bK} \frac{(\tilde{\rho} \vec{u})_m}{\rho_m} - \frac{1}{P_g} \tilde{\nabla} P'_{gX} \right) \right] = -\nu_X \frac{R_{c,ref}}{C_{ref}} \tilde{R}_c \quad (\text{J.12})$$

Grandeurs caractéristiques

Il est important de savoir que la diffusivité $D_{xc}^{K\mu}$ n'est pas une constante mais elle dépend par exemple de la porosité. Elle ne peut donc pas être sortie de l'opérateur divergence. Nous introduisons une valeur de référence $D_{xc,ref}^{K\mu}$ pour une porosité de référence, une température de référence et une composition d'espèces de référence :

$$D_{xc}^{K\mu} = D_{xc,ref}^{K\mu} \tilde{D}_{xc,ref}^{K\mu} \quad (J.13)$$

Nous introduisons le nombre de Péclet massique qui met en rapport les flux caractéristiques convectifs et diffusifs (prenant en compte l'effet de Knudsen et de la viscosité de mélange). Plus sa valeur est grande et plus la convection joue un rôle important :

$$Pe_m = \frac{u_0 k_{bK} l_{ref}}{D_{cx}^{K\mu}} \quad (J.14)$$

De nouveau le coefficient de perméabilité k_{bK} modifie la vitesse de référence u_0 qui sera développé dans la section suivante pour un gaz pur (sans mélange d'espèces).

Nous nous servons également du module de Thiele Φ_0 qui met en compétition le taux densification $k = R_c/C_{gc}/\sigma_v$ et la diffusion

$$\Phi_0^2 = \frac{l_{ref}^2 \sigma_v k(T)}{D_{cx}^{K\mu}} = \frac{l_{ref}^2 R_c}{C_{gc} D_{cx}^{K\mu}} \quad (J.15a)$$

$$\Phi_0^2 = \frac{l_{ref}^2 R_{c,ref}}{C_{ref} D_{cx,ref}^{K\mu}} \quad (J.15b)$$

Pour des valeurs grandes devant 1 la densification est trop rapide par rapport à l'alimentation de réactif via la diffusion ce qui mène à un matériau final de mauvaise qualité. Pour des valeurs très inférieures à un, on pourrait avoir un taux de réaction plus élevé pour la même diffusion, et on perd donc du temps avec la configuration actuelle.

Nous posons le temps caractéristique de la diffusion égal à

$$\tau_{gX} = \frac{l_{ref}^2}{D_{xc,ref}^{K\mu}} \quad (J.16)$$

Equation adimensionnelle finale

Ainsi nous obtenons la formulation suivante de l'équation de diffusion :

$$\frac{\tau_{gX}}{t_{ref}} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \tilde{C}_{gX}) + \tilde{\nabla} \cdot \left[\tilde{C}_{gX} \tilde{D}_{xc}^{K\mu} \left(Pe_m \frac{(\tilde{\rho} \tilde{u})_m}{\tilde{\rho}_m} - \frac{1}{P_g} \tilde{\nabla} P'_{gX} \right) \right] = -\nu_X \Phi_0^2 \tilde{R}_c \quad (J.17)$$

Une application numérique de l'analyse dimensionnelle révèle que la diffusion d'espèce, le transport de chaleur et la convection se font tous approximativement dans le même ordre de grandeur de temps typiques, qui sont tous petits devant

J.3. Conservation de masse

Nous rappelons l'équation de conservation du mélange liquide+gaz avec terme source lié à la réaction, eqn. 5.95 :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \rho_m) + \tilde{\nabla} \cdot (\rho_m \tilde{u}_m) = (M_{gc} - \nu_X M_{gx}) \cdot R_c \quad (J.18)$$

Décomposition du flux massique, grandeurs caractéristiques

Nous estimons le flux massique en introduisant une chute de pression caractéristique ΔP_{ref} sur une longueur caractéristique l_{ref} :

$$(\rho \vec{u})_m = \frac{K_0}{\nu_m} \left[\vec{\nabla} P_m - (\lambda_l \rho_l + \lambda_g \rho_g) \cdot \vec{g} \right] = \rho_m \cdot \frac{K_0}{\mu_m} \cdot \frac{\Delta P_{ref}}{l_{ref}} \cdot \left[\frac{1}{\Delta P_{ref}} \tilde{\nabla} P_m - \frac{l_{ref} \cdot \rho_m}{\Delta P_{ref}} \cdot \vec{g} \cdot \frac{\lambda_l \rho_l + \lambda_g \rho_g}{\rho_m} \right] \quad (J.19)$$

Nous posons une expression pour la vitesse caractéristique

$$u_0 = \frac{K_0}{\mu_m} \cdot \frac{\Delta P_{ref}}{l_{ref}} \quad (J.20)$$

et gardons la chute de pression caractéristique ΔP_{ref} sur la longueur caractéristique l_{ref} ouverte pour le moment.

Ceci nous mène à

$$(\rho \vec{u})_m = \rho_m \cdot u_0 \cdot \left[\frac{1}{\Delta P_{ref}} \tilde{\nabla} P_m - \frac{l_{ref} \cdot \rho_m}{\Delta P_{ref}} \cdot \vec{g} \cdot \frac{\lambda_l \rho_l + \lambda_g \rho_g}{\rho_m} \right] \quad (J.21)$$

Nous constatons que le terme en [...] est adimensionnel.

Pour reformuler le terme de gravité nous utilisons le nombre de Darcy, exprimant la perméabilité adimensionnée, le nombre de Galilei, mettant en relation la force de gravité avec la force visqueuse, et le nombre de Richardson, exprimant l'énergie potentielle en termes d'énergie cinétique :

$$Da = \frac{K_0}{l_{ref}^2} \quad (J.22a)$$

$$Ga = \frac{g l_{ref}^3}{\nu_m^2} \cdot \frac{\lambda_l \rho_l + \lambda_g \rho_g}{\rho_m} \quad (J.22b)$$

$$Ri = \frac{g l_{ref}}{u_0^2} \cdot \frac{\lambda_l \rho_l + \lambda_g \rho_g}{\rho_m} = \frac{Ga}{Re^2} \quad (J.22c)$$

Ceci mène à

$$\frac{\rho_m l_{ref}}{\Delta P_{ref}} \cdot g \cdot \frac{\lambda_l \rho_l + \lambda_g \rho_g}{\rho_m} = \frac{\rho_m K_0}{\mu_m u_0} \cdot Ri \cdot \frac{u_0^2}{l_{ref}} = Da \cdot Ri \cdot \frac{u_0 l_{ref}}{\nu_m} = Da \cdot Ri \cdot Re \quad (J.23)$$

Re est le nombre de Reynolds que l'on retrouve habituellement dans l'analyse de problèmes convectifs. Il exprime le rapport entre les forces inertielles et les forces visqueuses du fluide et qui est à priori une grandeur locale, non-constante :

$$Re = \frac{u_0 l_{ref}}{\nu_m} = \frac{\rho_m K_0 \Delta P_{ref}}{\mu_m^2 l_{ref}^2} \quad (J.24)$$

Nous posons pour le flux massique :

$$(\rho \vec{u})_m = \rho_{ref} \cdot u_0 \cdot (\tilde{\rho} \vec{u})_m \quad (J.25a)$$

avec :

$$(\tilde{\rho} \vec{u})_m = \tilde{\rho}_m \left[\frac{1}{\Delta P_m} \tilde{\nabla} P_m - Re \cdot Ri \cdot Da \cdot \vec{e}_g \right] \quad (J.25b)$$

$$\tilde{\rho}_m = \frac{\rho_m}{\rho_{ref}} \quad (J.25c)$$

où \vec{e}_g est le vecteur d'unité dans le sens de la force de gravité.

Equation adimensionnelle finale

Avec les définitions ci-dessus nous obtenons l'équation de conservation de masse adimensionnelle suivante

$$\frac{1}{t_{ref}} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\varepsilon \tilde{\rho}_m) + \tilde{\nabla} \cdot \left(\frac{u_0}{l_{ref}} (\tilde{\rho} \tilde{u})_m \right) = \frac{(M_{gc} - \nu_X M_{gx}) R_{c,ref} l_{ref}}{\rho_{ref}} \cdot \tilde{R}_c \quad (J.26)$$

Nous définissons le temps caractéristique de la conservation de masse comme

$$\tau_m = \frac{\rho_{ref}}{(M_{gc} - \nu_X M_{gx}) R_{c,ref} l_{ref}} \quad (J.27)$$

et choisissons une vitesse de dépôt de référence

$$u_{react} = \frac{l_{ref}}{\tau_m} = \frac{(M_{gc} - \nu_X M_{gx}) R_{c,ref} l_{ref}}{\rho_{ref}} = const \quad (J.28)$$

ce qui mène à l'équation de conservation adimensionnelle finale

$$\frac{\tau_m}{t_{ref}} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\varepsilon \tilde{\rho}_m) + \tilde{\nabla} \cdot \left(\frac{u_0}{u_{react}} \tilde{\rho} \tilde{u} \right)_m = \tilde{R}_c \quad (J.29)$$

Vitesse de référence

La définition générale de la vitesse de référence $u_0 = (K_0/\mu_m) \cdot (\Delta P_{ref}/l_{ref})$ est non-déterminée à cause de l'inconnue ΔP_m . Nous avons maintenant deux choix possibles pour définir la vitesse de référence et ainsi ΔP_m : Soit nous regardons le système dans le sens de la gravité, soit dans le sens inverse. Dans le deuxième cas, la vitesse de référence serait uniquement déterminée par la vitesse de réaction. Dans le premier cas par contre, nous pouvons également choisir l'effet de la gravité pour déterminer la vitesse de référence. Puisque nous avons parlé dans la thèse plusieurs fois du fait que le disque est entouré de liquide qui impose un gradient de pression fort, nous préférons chiffrer cet effet maintenant. La chute de pression caractéristique le long de la longueur caractéristique ΔP_{ref} est obtenue à partir de la chute de pression sur la préforme complète ΔP_{tot} imposée par le liquide à l'extérieur :

$$\Delta P_{tot} = \rho l g \cdot \left(\frac{D_{e,pref}}{2} - D_{i,pref} \right) \quad (J.30a)$$

$$\Delta P_{ref} = \Delta P_{tot} \cdot \frac{l_{ref}}{\frac{D_{e,pref}}{2} - D_{i,pref}} = \rho l g \cdot l_{ref} \quad (J.30b)$$

Ainsi nous avons pour la vitesse de référence

$$u_0 = \frac{K_0}{\nu_m} \rho l g \quad (J.31)$$

Néanmoins, nous nous intéressons aussi à l'autre direction et introduisons donc en plus les nombres adimensionnels liés à la vitesse en direction x :

$$Pe_{m,x} = Pe_m \cdot \frac{u_{react}}{u_0} \quad (J.32a)$$

$$Re_x = Re \cdot \frac{u_{react}}{u_0} \quad (J.32b)$$

J.4. Conservation d'enthalpie volumique

L'adimensionnement de l'équation de conservation d'enthalpie va être présenté dans les étapes suivantes :

- i) Rappel de l'équation de conservation en question
- ii) Définition d'une enthalpie volumique de référence
- iii) Reformulation des termes de transport
- iv) Temps caractéristique
- v) Equation adimensionnelle finale

Rappel de l'équation de conservation en question

Nous démarrons de l'équation de la conservation d'enthalpie 5.47 développée dans le chapitre 5.3 :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \{ \Omega(\rho h')_m \} + \frac{\partial}{\partial t} \{ (\rho h')_{t,supp} \} \\
 & + \vec{\nabla} \cdot \{ (\rho \vec{u})_m (\rho h')_m \gamma_{\rho h} \} + \vec{\nabla} \cdot \{ (\rho \vec{u})_m h_{g,supp} \} \\
 & - \vec{\nabla} \cdot \{ \alpha_{\rho h} \vec{\nabla}(\rho h')_m \} - \vec{\nabla} \cdot \left\{ \lambda_g \lambda_l \frac{K_0}{V_m} L_0 (\rho_l - \rho_{gsat}) \vec{g} \right\} \\
 & = Q
 \end{aligned} \tag{J.33}$$

Il est à noter que ce modèle a été mis en place pour traiter l'ébullition, et notamment la définition de l'enthalpie fait référence à la température d'ébullition. D'un autre côté, l'analyse du procédé vise le dépôt qui se fait dans une zone asséchée de température différente, plus élevée T_{ref} . Dans l'analyse nous allons donc distinguer le point d'ébullition, qui apparaît de manière intrinsèque dans l'équation de bilan, du point de dépôt, qui représente notre véritable point de référence.

Nous rappelons la définition de l'enthalpie volumique :

$$(\rho h')_m = \begin{cases} \rho_l h_{lsat} + \rho_l c_l (T - T_{sat}) & \text{liquide} \\ \rho_{gsat} h_{gsat} + S \cdot (\rho_l h_{lsat} - \rho_{gsat} h_{gsat}) & \text{diphase} \\ \rho_{gsat} h_{gsat} + \rho_{gsat} c_{gsat} \cdot (T - T_{sat}) & \text{gaz} \end{cases} \tag{J.34}$$

Nous écrivons la valeur libre d'enthalpie de référence, h_{lsat} , comme multiple de la chaleur latente d'ébullition :

$$h_{lsat} = -c_2 \cdot L_0 \tag{J.35a}$$

$$\Rightarrow \rho_{gsat} h_{gsat} - \rho_l h_{lsat} = \rho_{gsat} L_0 \cdot \left(1 + c_2 \frac{\rho_l - \rho_{gsat}}{\rho_{gsat}} \right) = \rho_{gsat} L_0 \cdot (1 + \delta_{sat}) \tag{J.35b}$$

$$c_2 = \delta_{sat} \cdot \frac{\rho_{gsat}}{\rho_l - \rho_{gsat}} \tag{J.35c}$$

Après quelques transformations algébriques nous trouvons

$$(\rho h')_m = \begin{cases} \rho_l L_0 \cdot \left[-c_2 + \frac{c_l \cdot (T - T_{sat})}{L_0} \right] & \text{liquide} \\ \rho_{gsat} L_0 \left[(1 - c_2) - S \cdot \left(1 + c_2 \cdot \frac{\rho_l - \rho_{gsat}}{\rho_{gsat}} \right) \right] & \text{diphase (J.36)} \\ \rho_{gsat} L_0 \left[(1 - c_2) + \frac{c_{gsat} (T - T_{sat})}{L_0} \right] & \text{gaz} \end{cases}$$

Définition d'une enthalpie volumique de référence

Nous introduisons le rapport d'expansion de densités au point d'ébullition ainsi que le nombre de Jakob représentant le ratio entre la chaleur sensible du gaz et la chaleur latente d'ébullition :

$$\Lambda = \frac{\rho_l}{\rho_{gsat}} \quad (\text{J.37})$$

$$Ja = \frac{c_{gsat} (T - T_{sat})}{L_0} \quad (\text{J.38})$$

A partir d'ici on s'intéresse au point de référence qui est le point le plus chaud sur le front :

$$T_{ref} = T_{chaud,front} \quad (\text{J.39a})$$

$$(\rho h')_{ref} = \rho_{gsat} \cdot [h_{gsat} + c_{gsat} \cdot (T_{ref} - T_{sat})] = \rho_{gsat} \cdot L_0 \cdot [(1 - c_2) + Ja_{ref}] \quad (\text{J.39b})$$

$$Ja_{ref} = \frac{c_{gsat} (T_{ref} - T_{sat})}{L_0} \quad (\text{J.39c})$$

Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned} (\rho h')_m &= (\rho h')_{ref} \cdot \frac{1}{(1 - c_2) + Ja_{ref}} \cdot \begin{cases} \frac{\rho_l}{\rho_{gsat}} \cdot \left(-c_2 + \frac{c_l}{c_{gsat}} \cdot Ja \right) & \text{liquide} \\ (1 - c_2) - S \cdot (1 + c_2(\Lambda - 1)) & \text{diphasique} \\ (1 - c_2) + Ja & \text{gaz} \end{cases} \\ &= (\rho h')_{ref} (\tilde{\rho h'})_m \end{aligned} \quad (\text{J.40})$$

Reformulation des termes de transport

Nous reprenons les termes de transport, à savoir :

$$\vec{j}_{\rho h}^{tot} = (\rho \vec{u})_m \cdot ((\rho h')_m \gamma_{\rho h} + h_{gsupp}) - \alpha_{\rho h} \vec{\nabla} (\rho h')_m - \lambda_g \lambda_l \frac{K_0}{\nu_m} L_0 (\rho_l - \rho_{gsat}) \vec{g} \quad (\text{J.41})$$

Nous factorisons $\alpha_{\rho h}$ et introduisons les nombres adimensionnels définis auparavant

$$\begin{aligned} \vec{j}_{\rho h}^{tot} &= \frac{\alpha_{\rho h}}{l_{ref}} (\rho h')_{ref} \\ &\cdot \left[\rho_{ref} \frac{u_0 l_{ref}}{\alpha_{\rho h}} \cdot (\tilde{\rho \vec{u}})_m \cdot \left((\tilde{\rho h'})_m \gamma_{\rho h} + \frac{h_{gsupp}}{(\rho h')_{ref}} \right) - \vec{\nabla} (\tilde{\rho h'})_m - \frac{l_{ref}}{\alpha_{\rho h} (\rho h')_{ref}} \lambda_g \lambda_l \frac{K_0}{\nu_m} L_0 (\rho_l - \rho_{gsat}) \vec{g} \right] \end{aligned} \quad (\text{J.42})$$

Nous y apercevons directement le nombre de Péclet qui met en rapport le transport de chaleur convectif et diffusif :

$$Pe_{th} = \frac{u_0 l_{ref}}{\alpha_{\rho h}} = \frac{(M_{gc} - \nu_X M_{gx}) R_{c,ref} l_{ref}^2}{\rho_{ref} \alpha_{\rho h}} \quad (\text{J.43})$$

Le dernier terme de $\vec{j}_{\rho h}^{tot}$ peut être réécrit en introduisant le facteur de phase

$$\delta_d = \begin{cases} 1 & \text{diphasique} \\ 0 & \text{monophasique} \end{cases} \quad (\text{J.44})$$

et en rappelant que

$$\alpha_{\rho h} = \underbrace{\frac{\lambda_{Tp}}{\rho c_p}}_{0 \text{ en diphasique}} + \underbrace{\lambda_g \lambda_l \frac{K_0}{\nu_m} L_0 \frac{\partial P_c}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial(\rho h')}}_{0 \text{ en monophasique}} = \frac{\lambda_{Tp}}{\rho c_p} - \lambda_g \lambda_l \frac{K_0}{\nu_m} L_0 \frac{\partial P_c}{\partial S} \frac{1}{\rho_{gsat} L_0 (1 + c_2(\Lambda - 1))} \quad (\text{J.45})$$

Nos reformulons l'expression de pression capillaire en introduisant le nombre capillaire, mettant en relation les forces visqueuses et la tension de surface :

$$Ca = \frac{\mu_m u_0}{\sigma} \quad (\text{J.46a})$$

$$P_c = \tilde{P}_c \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{K_0}} \cdot \sigma = \tilde{P}_c \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{Da} \cdot Ca} \cdot \frac{\rho_m \nu_m u_0}{l_{ref}} = \tilde{P}_c \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot \frac{Re}{\sqrt{Da} \cdot Ca} \cdot \rho_m \cdot \frac{\nu_m^2}{l_{ref}^2} \quad (\text{J.46b})$$

Ainsi le dernier terme de $\vec{j}_{\rho h}^{tot}$ devient

$$\begin{aligned} \frac{l_{ref}}{\alpha_{\rho h}(\rho h')_{ref}} \lambda_g \lambda_l \frac{K_0}{\nu_m} L_0 (\rho_l - \rho_{gsat}) \vec{g} &= \delta_d \cdot \left(\frac{\partial \tilde{P}_c}{\partial S} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\sqrt{Da} \cdot Ca \cdot Ga}{Re} \cdot \frac{1 + c_2(\Lambda - 1)}{1 - c_2 + Ja_{ref}} \frac{\rho_l - \rho_{gsat}}{\lambda_l \rho_l + \lambda_g \rho_g} \\ &= \delta_d \cdot \left(\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{P}_c}{\partial S} \right)^{-1} \sqrt{Da} Ca Ri Re \cdot \frac{1 + c_2(\Lambda - 1)}{1 - c_2 + Ja_{ref}} \frac{\Lambda - 1}{1 + \lambda_l(\Lambda - 1)} \\ &= \delta_d \cdot \vec{j}_{\rho h}^d \end{aligned} \quad (\text{J.47})$$

Finalement nous introduisons les grandeurs adimensionnelles suivantes

$$\tilde{\gamma}_{\rho h} = \rho_{ref} \gamma_{\rho h} \quad (\text{J.48a})$$

$$\tilde{h}_{gsupp} = \frac{\rho_{ref} h_{gsupp}}{(\rho h')_{ref}} \quad (\text{J.48b})$$

et obtenons :

$$\vec{j}_{\rho h}^{tot} = \frac{\alpha_{\rho h}}{l_{ref}} (\rho h')_{ref} \cdot \left[Pe_{th} \cdot \left((\rho \tilde{h}')_m \tilde{\gamma}_{\rho h} + \tilde{h}_{gsupp} \right) - \tilde{\nabla}(\rho \tilde{h}')_m - \delta_d \cdot \vec{j}_{\rho h}^d \right] \quad (\text{J.49})$$

Temps caractéristique

Comme pour l'équation de diffusion d'espèces nous introduisons une valeur de référence constante pour la diffusivité thermique $\alpha_{\rho h, ref}$ et définissons le temps caractéristique pour la thermique comme

$$\tau_{\rho h} = \frac{l_{ref}^2}{\alpha_{\rho h, ref}} \quad (\text{J.50})$$

Equation adimensionnelle finale

Finalement l'équation de chaleur devient sous sa forme adimensionnelle, après division par $(\rho h')_{ref}$ et multiplication par $\tau_{\rho h}$:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\rho h}}{t_{ref}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Omega(\rho \tilde{h}')_m + (\rho \tilde{h}')_{t, supp} \right\} + \tilde{\nabla} \cdot \left\{ \tilde{\alpha}_{\rho h} \left[Pe_{th} \cdot (\rho \tilde{u})_m \cdot \left((\rho \tilde{h}')_m \tilde{\gamma}_{\rho h} + \tilde{h}_{gsupp} \right) - \tilde{\nabla}(\rho \tilde{h}')_m - \delta_d \cdot \vec{j}_{\rho h}^d \right] \right\} \\ = \tilde{Q} \end{aligned} \quad (\text{J.51})$$

avec

$$\tilde{\alpha}_{\rho h} = \frac{\alpha_{\rho h}}{\alpha_{\rho h,ref}} \quad (\text{J.52a})$$

$$\tilde{Q} = Q \cdot \left(\frac{(\rho h')_{ref}}{\tau_{\rho h}} \right)^{-1} \quad (\text{J.52b})$$

J.5. Longueur caractéristique du procédé

A partir de l'équation de thermique nous pouvons maintenant donner une expression pour la longueur de référence : La zone de dépôt en tant qu'elle est caractérisé d'un côté par la zone dense où l'on a la température $T = T_{ref}$, et de l'autre côté via une température « d'allumage » en-dessous de laquelle le taux de réaction devient négligeable. On peut donc trouver une longueur caractéristique du système, correspondant à la longueur de la zone de dépôt, en approximant la taille de la zone avec température $T_a < T < T_{ref}$.

Pour estimer la longueur de cette zone nous utilisons l'équation de la chaleur en zone monophasique gazeuse sous forme stationnaire. Pour simplifier nous négligeons la dépendance de température des paramètres et les évaluons au point de référence si bien que tous les grandeurs adimensionnées valent 1 :

$$\tilde{\nabla} \cdot [Pe_{th} \cdot (\rho \tilde{h}')_m - \tilde{\nabla}(\rho \tilde{h}')_m] = \tilde{Q} \quad (\text{J.53})$$

Comme en équation non-adimensionnelle, le terme en divergence contient le flux de chaleur total, convectif et conductif. Nous effectuons l'intégration entre l'interface zone dense/zone en densification \tilde{x}_d et une position \tilde{x} . Nous introduisons également \tilde{q}_d comme étant le flux de chaleur total adimensionné venant de la zone dense. L'équation de chaleur devient alors

$$Pe_{th}(\tilde{x}) \cdot (\rho \tilde{h}')_m(\tilde{x}) - \tilde{\nabla}(\rho \tilde{h}')_m(\tilde{x}) - \tilde{q}_d = \tilde{Q} \cdot (\tilde{x} - \tilde{x}_d) \quad (\text{J.54})$$

Nous remarquons que le nombre de Péclet est fonction de la vitesse du gaz et la diffusivité calorifique qui varient le long de la zone en densification.

Nous effectuons une deuxième intégration avec les mêmes limites qu'auparavant :

$$\int_{\tilde{x}_d}^{\tilde{x}} Pe_{th}(\tilde{x}') (\rho \tilde{h}')_m d\tilde{x}' - (\rho \tilde{h}')_m(\tilde{x}) + (\rho \tilde{h}')_m(\tilde{x}_d) - \tilde{q}_d \cdot (\tilde{x} - \tilde{x}_d) = \tilde{Q} \cdot \left(\frac{\tilde{x}^2 - \tilde{x}_d^2}{2} - \tilde{x}_d \tilde{x} + \tilde{x}_d^2 \right) \quad (\text{J.55})$$

Pour prendre en compte la zone entière sous densification, la limite supérieure de l'intégrale se situe à $x = x_d + l_{ref}$ et donc sous forme adimensionnelle $\tilde{x} = \tilde{x}_d + 1$.

Aux deux limites nous satisfont par définition

$$(\rho h')_m(x_d) = (\rho h')_{ref} \quad (\text{J.56a})$$

$$(\rho h')_m(x_d + l_{ref}) = (\rho h')_a \quad (\text{J.56b})$$

et donc

$$(\rho \tilde{h}')_m(x_d) = 1 \quad (\text{J.57a})$$

$$(\rho \tilde{h}')_m(x_d + l_{ref}) = (\rho \tilde{h}')_a = \frac{(\rho h')_a}{(\rho h')_{ref}} \quad (\text{J.57b})$$

Concernant l'intégrale contenant le nombre de Péclet nous introduisons la valeur moyenne

$$\int_{\tilde{x}_d}^{\tilde{x}_d+1} Pe_{th}(\tilde{x}')(\tilde{\rho}h')_m d\tilde{x}' = \frac{(M_{gc} - \nu_X M_{gx})R_{c,ref}l_{ref}^2}{\rho_{ref}\alpha_{\rho h,ref}} \int_{\tilde{x}_d}^{\tilde{x}_d+1} \frac{(\tilde{\rho}h')_m}{\tilde{\alpha}_{\rho h}} d\tilde{x}' = \bar{P}e'_{th} \frac{l_{ref}^2}{\alpha_{\rho h,ref}} \quad (J.58)$$

L'intégrale contient deux fonctions de l'ordre d'un qui décroissent chacune en allant du côté chaud vers le côté froid ($(\tilde{\rho}h')$ d'environ un facteur deux et $\tilde{\alpha}_{\rho h}$ jusqu'à un facteur dix).

Ainsi l'équation de chaleur intégrée deux fois en espace adimensionnel devient :

$$\bar{P}e'_{th} \frac{l_{ref}^2}{\alpha_{\rho h,ref}} - (\tilde{\rho}h')_a + 1 - \tilde{q}_d = \tilde{Q} \cdot \left(\frac{1 + 2\tilde{x}_d}{2} - \tilde{x}_d \right) = \frac{1}{2}\tilde{Q} \quad (J.59)$$

Pour faire apparaître la longueur de référence nous repassons en espace réel, à savoir

$$\tilde{Q} = Q \cdot \left(\frac{(\rho h')_{ref}}{\tau_{\rho h}} \right)^{-1} = Q \cdot \frac{l_{ref}^2}{(\rho h')_{ref}\alpha_{\rho h,ref}} \quad (J.60a)$$

$$\tilde{q} = q \cdot \left(\frac{(\rho h')_{ref}}{\tau_{\rho h}} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{l_{ref}} = q \cdot \frac{l_{ref}}{(\rho h')_{ref}\alpha_{\rho h,ref}} \quad (J.60b)$$

Ainsi, l'équation de chaleur intégrée donne

$$\bar{P}e'_{th} \frac{l_{ref}^2}{\alpha_{\rho h,ref}} - \frac{(\rho h')_a}{(\rho h')_{ref}} + 1 - q \cdot \frac{l_{ref}}{(\rho h')_{ref}\alpha_{\rho h,ref}} = \frac{1}{2}Q \cdot \frac{l_{ref}^2}{(\rho h')_{ref}\alpha_{\rho h,ref}} \quad (J.61)$$

où encore

$$\alpha_{\rho h,ref} [(\rho h')_{ref} - (\rho h')_a] = l_{ref} \cdot \left[q + \left(\frac{Q}{2} - \bar{P}e'_{th} \cdot (\rho h')_{ref} \right) \cdot l_{ref} \right] \quad (J.62)$$

Nous remarquons que sans source de chaleur volumique $Q = 0$ et sans convection $Pe_{th} = 0$ nous obtenons une expression pour la longueur de référence qui est similaire à celle de Nadeau et al. (Nadeau et al., 2006) :

$$l_{ref} = \frac{\alpha_{\rho h,ref} [(\rho h')_{ref} - (\rho h')_a]}{q} = \frac{\lambda_{Tg}(T_{ref} - T_a)}{q} \quad (J.63)$$

Plus précisément, dans l'expression de (Nadeau et al., 2006) la température d'allumage est choisie égale à zéro et l'inverse de l'énergie d'activation adimensionnelle γ y apparaît à cause d'un choix différent pour la variable représentant la température. Nous remarquons néanmoins que Nadeau et al. déduisent la longueur directement de l'adimensionnement des équations et non pas d'une résolution explicite de l'équation de la chaleur.

Lorsque nous prenons en compte le chauffage volumique et le transport visqueux, l'expression pour la longueur de référence devient automatiquement plus complexe. Nous introduisons une source de chauffage volumique efficace, c'est à dire la chaleur apportée par la source réduite par la chaleur emporté par la convection du gaz :

$$\frac{Q'}{2} = \frac{Q}{2} - \bar{P}e'_{th} \cdot (\rho h')_{ref} \quad (J.64)$$

et obtenons

$$\begin{aligned} l_{ref} &= \sqrt{\left(\frac{q}{Q'} \right)^2 + \frac{2\alpha_{\rho h,ref} [(\rho h')_{ref} - (\rho h')_a]}{Q'}} - \frac{q}{Q'} \\ &= \sqrt{\left(\frac{q}{Q'} \right)^2 + \frac{2\lambda_{Tg,ref}(T_{ref} - T_a)}{Q'}} - \frac{q}{Q'} \end{aligned} \quad (J.65)$$

J.6. Chauffage inductif

Il n'est pas du tout habituel de traiter l'électromagnétisme sous forme adimensionnelle. Nous allons par contre chercher une valeur de référence pour le chauffage volumique qui apparaît dans l'équation d'enthalpie. Cette valeur va être exprimée en fonction d'un potentiel vecteur de référence A que nous choisissons égal à son expression analytique trouvé dans le calcul mono-dimensionnel du chapitre 5.1.6, voire l'annexe D. Cette expression contient notamment le courant dans l'inducteur ainsi que la géométrie du système :

$$A_{bord} = -\frac{I_{tot}}{h_{spire}} \cdot \frac{\mu_0}{\alpha} \cdot \left[\alpha \cdot L_{entrefeer} + \frac{\exp(\alpha L_{ind}) - 1}{\exp(\alpha L_{ind}) + 1} \right] \quad (J.66a)$$

$$\Re(A_{bord}) = -\frac{I_{tot}}{h_{spire}} \cdot \mu_0 \cdot \left(L_{entrefeer} + \frac{2 \sin(L_{ind}/\delta) \cdot \exp(L_{ind}/\delta) + \exp(2L_{ind}/\delta) - 1}{1 + \exp(2L_{ind}/\delta) + 2 \exp(L_{ind}/\delta) \cos(L_{ind}/\delta)} \cdot \frac{\delta}{2} \right) \quad (J.66b)$$

$$\Im(A_{bord}) = -\frac{I_{tot}}{h_{spire}} \cdot \mu_0 \cdot \frac{-2 \sin(L_{ind}/\delta) \cdot \exp(L_{ind}/\delta) + \exp(2L_{ind}/\delta) - 1}{1 + \exp(2L_{ind}/\delta) + 2 \exp(L_{ind}/\delta) \cos(L_{ind}/\delta)} \cdot \frac{\delta}{2} \quad (J.66c)$$

$$\alpha_{cu} = \frac{1+i}{\delta_{cu}} \quad (J.66d)$$

$$\delta_{cu} = \sqrt{\frac{2}{\sigma_{cu} \omega \mu_0}} \quad (J.66e)$$

La valeur de chauffage volumique de référence est choisie comme sa valeur au bord de la préforme vierge également et peut être obtenue facilement à partir de la densité de courant :

$$j_{bord} = -i \cdot \omega \cdot \sigma_{pref} \cdot A_{bord} \quad (J.67a)$$

$$Q_{ref} = \frac{1}{\sigma_{pref}} |j_{bord}|^2 = \omega^2 \cdot \sigma_{pref} \cdot |A_{bord}|^2 \quad (J.67b)$$

Lorsque nous regardons maintenant un système avec une zone dense, suivie d'une zone de transition avec une conductivité moyenne, et ensuite une zone vierge, nous pouvons montrer que dans la zone dense la valeur de référence du potentiel vecteur est un multiple de celui au bord du disque. Le rapport dépend de la largeur de chacune des zones (densifiée, en densification, vierge) ainsi que de leurs conductivités électriques. Le calcul est démontré sous forme d'une fiche Maple dans l'annexe.

$$A_d = \gamma_{d,nd} \cdot A_{bord} \quad (J.68a)$$

$$j_d = -i \cdot \omega \cdot \sigma_d \cdot A_d = j_{bord} \cdot \gamma_{d,nd} \cdot \frac{\sigma_d}{\sigma_{pref}} \quad (J.68b)$$

$$\begin{aligned} Q_d &= \frac{1}{\sigma_d} |j_d|^2 = \frac{1}{\sigma_d} \cdot |\gamma_{d,nd}|^2 \cdot \left(\frac{\sigma_d}{\sigma_{pref}} \right)^2 \cdot |j_{bord}|^2 \\ &= \frac{\sigma_{pref}}{\sigma_d} \cdot |\gamma_{d,nd}|^2 \cdot \left(\frac{\sigma_d}{\sigma_{pref}} \right)^2 \cdot Q_{ref} \\ &= |\gamma_{d,nd}|^2 \cdot \frac{\sigma_d}{\sigma_{pref}} \cdot Q_{ref} \\ &= \gamma_{Qd,nd} \cdot Q_{ref} \end{aligned} \quad (J.68c)$$

Ou nous rappelons que les différents coefficient γ sont des fonctions de l'avancement de la densification ainsi que de différents conductivités électriques. Finalement nous estimons le

flux de chaleur sortant de la zone dense vers la zone en densification comme le chauffage volumique multiplié par la longueur de pénétration de la zone dense :

$$q_c = Q_d \cdot \delta_d = \gamma_{Q_d,nd} \cdot \delta_d \cdot Q_{ref} \quad (\text{J.69})$$

K. Identification de propriétés pour le modèle

Après avoir vu la problématique industrielle du procédé de densification par caléfaction ainsi que le modèle entier qui a été développé pour cette thèse, il s'agit maintenant de trouver les paramètres des matériaux liés aux différentes formules. La plupart des propriétés sont connus soit à partir de thèse antérieures soit à partir de mesures effectués par l'industriel lui-même. Une liste complète des lois utilisées dans les simulations est donnée dans l'annexe M. Nous mettons dans ce chapitre l'accent sur quelques méthodes de mesures qui ont été développés ou au moins appliqués par des stagiaires ou le thésard lui-même. Il s'agit notamment aux propriétés liées aux deux nouveautés de la thèse, à savoir l'ébullition et l'électromagnétisme en couplage direct sur la pièce en densification :

I) Transport et ébullition en milieu poreux :

Nous rappelons que le flux massique de chaque phase liquide/gaz obéit à la loi de Darcy eqn. 5.38 qui constate : Le fluide est mis en mouvement par un gradient de pression et par effet de gravitation, et il connaît une résistance liée à la viscosité et la perméabilité. C'est cette perméabilité qui va nous intéresser dans la première partie de ce chapitre et qui se décompose en deux parties :

- 1) Une perméabilité absolue qui est la même pour le liquide et pour le gaz et qui est liée à la résistance du matériel solide poreux contre le mouvement du fluide diphasique complet.
- 1) Une perméabilité relative qui obéit à des lois différentes pour le liquide et le gaz étant fonction de la saturation en liquide et qui exprime l'influence du mouvement d'une phase sur celui de l'autre phase.

II) Electromagnétisme - conductivité :

Cette grandeur dépend de l'avancement de densification du disque de manière que la préforme vierge conduit l'électricité très mal et la pièce dense la conduit très bien.

III) Electromagnétisme - Pilotage et suivi de la densification :

Dans cette dernière partie du chapitre il ne s'agit pas de mesures de propriétés des matériaux mais plutôt d'une présentation de mesures qu'on peut utiliser sur le réacteur complet (la partie coffret de capacités, inducteur et pièce). Ainsi on mesure des propriétés globales pour différents stades de densification ou bien on pourra suivre l'avancement de densification.

K.1. Perméabilités absolues aux gaz

Cette propriété dépend de l'avancement de la densification puisque des pores grandes (au début de la densification) laissent passer un fluide plus simplement que de pores minces (partiellement densifiées). Même si la perméabilité absolue intervient aussi dans la zone d'ébullition au bord de la préforme vierge, elle jouera un rôle important notamment dans la

zone asséchée à savoir la zone à gaz « froid » et la zone en densification.

La propriété décrit la résistance du milieu poreux vis-à-vis d'un fluide et sa valeur est la même pour la phase liquide ou bien la phase gazeuse. On pourrait donc envisager les deux états physique pour une réalisation de mesure. Néanmoins le choix a été fait d'utiliser du gaz puisqu'il abîmera moins le milieu poreux lors de son passage et puisqu'il ne nécessite pas des temps de séchage longue après chaque essais. En plus un fluide met plus de temps pour complètement envahir le milieu qui initialement était rempli d'air ce qui compliquerait la procédure de mesure.

La valeur de perméabilité peut de manière générale dépendre de la substance chimique qui traverse le milieu poreux. Le cyclohexane étant un produit dangereux et disponible sous forme gazeuse uniquement à partir de 80°C (ce qui nécessiterait un préchauffage), nous avons choisis de réaliser les mesures avec de l'azote. Ceci nous donnera un bon ordre de grandeur de la perméabilité dans l'erreur de la mesure, et permettra de voir sa dépendance de la densité.

L'appareil de mesure a commencé d'être développé déjà pendant plusieurs stages avant cette thèse. Lors de cette thèse, l'appareil a pu être finalisé et nous avons développé les outils d'analyse des résultats si bien que le montage et les résultats vont être présentés dans la suite.

K.1.1. Description du montage

Des photos de l'appareil de mesure de perméabilité absolue sont présentés sur la fig. 102. Il est schématisé sur la figure 101 :

On possède d'une entrée de gaz d'azote qui ensuite va traverser le milieu grâce à une sous-pression établie de l'autre côté avec une pompe de vide. En parallèle avec l'échantillon se trouve un appareil de mesure de chute de pression dont on mentionne qu'il n'y a (presque) pas de flux massique qui le traverse. Le flux massique d'azote est imposé par un programme Labview entre deux limites avec un pas donné par l'expérimentateur. Il est de même pour la pression de sortie dont la rampe est parcourue pour chaque valeur de débit imposé. La chute de pression sur l'échantillon est réalisée pour chaque couple de débit et pression. On remarque que chaque changement de soit le débit soit de la pression aboutit à un couplage entre les deux qui est réalisé par des mesures des valeurs imposées. Une mesure de chute de pression est effectuée uniquement quand les valeurs mesurées de débit/pression varient sur un certain intervalle de temps de moins d'un intervalle de confiance autour de la valeur imposée.

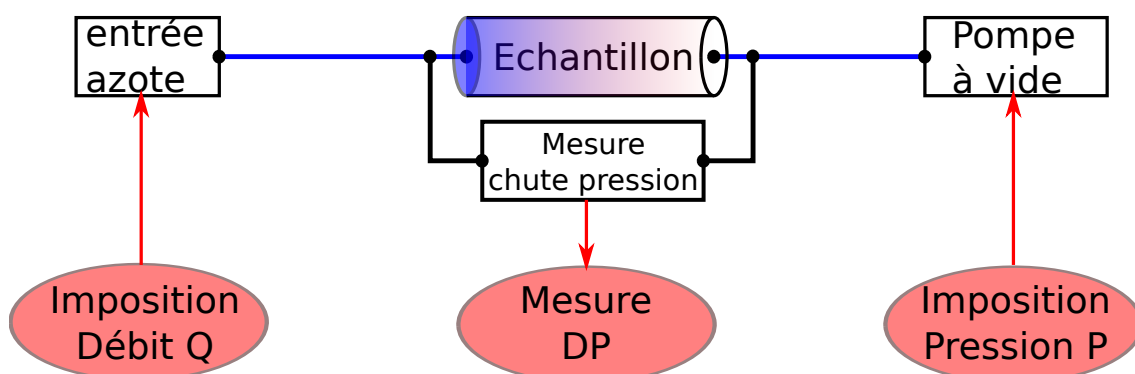


Fig. 101: Schéma pour la mesure de perméabilité absolue du milieu poreux avec du gaz. En haut on voit le dispositif expérimental et en bas l'interaction avec un programme de pilotage Labview.



Fig. 102: Photos de l'appareil de mesure de perméabilité absolue du milieu poreux.

K.1.2. Résultats

Après la réalisation d'une campagne de mesures nous obtenons alors des triplets de valeurs $(Q, \Delta P, P_s)$ où Q est le débit de gaz, ΔP la chute de pression sur l'échantillon et P_s la pression à la sortie de l'échantillon. Cette dernière est obtenue après correction de la pression imposée à la pompe avec un calcul analytique de la chute de pression sur le tuyau entre l'échantillon et la pompe.

Lorsqu'on travaille à basse pression, il y a deux flux qui se superposent dans l'échantillon poreux : un flux visqueux Darcéen lié à la chute de pression, et un flux de Knudsen lié à l'interaction entre les particules du gaz raréfié et les parois internes du milieu poreux. Nous démontrons dans l'annexe L, eqn. L.6, que le flux total est donné par

$$Q = \left[\frac{K_0}{\mu} \left(P_s + \frac{\Delta P}{2} \right) + D_K \right] \cdot \frac{A}{L} \cdot \frac{M_g}{R_g T} \cdot \Delta P \quad (\text{K.1})$$

(μ : Viscosité du gaz utilisé ; A/L : la section/longueur de l'échantillon utilisée)

Cette relation peut être écrite sous une simple loi linéaire en combinaison les données brutes $(Q, \Delta P, P_s)$:

$$\frac{Q}{\Delta P} = \left[\frac{K_0}{\mu} \left(P_s + \frac{\Delta P}{2} \right) + D_K \right] \cdot \frac{A}{L} \cdot \frac{M_g}{R_g T} \quad (\text{K.2a})$$

$$y = \frac{Q}{\Delta P} \quad (\text{K.2b})$$

$$x = \left(P_s + \frac{\Delta P}{2} \right) \quad (\text{K.2c})$$

$$a = \frac{A}{L} \cdot \frac{M_g}{R_g T} \cdot \frac{k}{\mu} \quad (\text{K.2d})$$

$$b = \frac{A}{L} \cdot \frac{M_g}{R_g T} \cdot D_K \quad (\text{K.2e})$$

$$y = a \cdot x + b \quad (\text{K.2f})$$

Ainsi on peut réaliser une interpolation linéaire des données comme le montre l'exemple de la figure 103 :

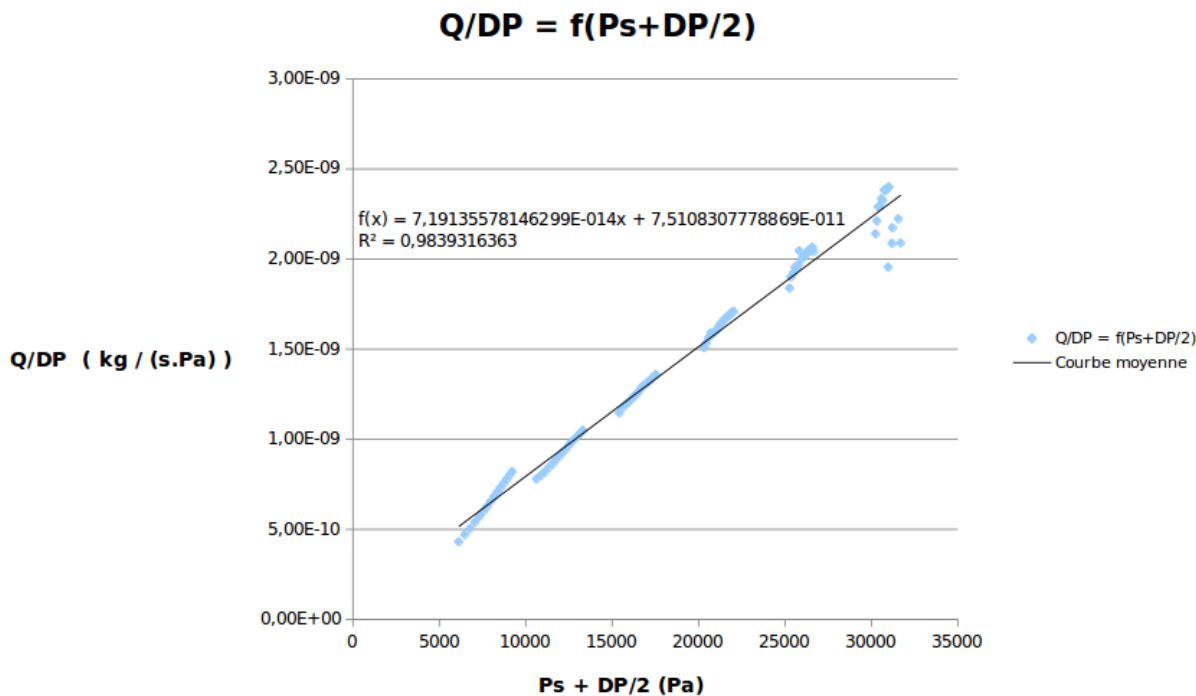


Fig. 103: Exemple d'un jeu de mesures pour la perméabilité absolue d'un échantillon, représenté de manière astucieuse afin de pouvoir interpoler et déduire les propriétés recherchées

Nous remarquons que pour des pressions élevées on se retrouve face à un nuage de points diffus qui est lié d'un côté à l'imprécision de la mesure et de l'autre côté à des couplages entre la régulation de pression et de débit qui rendent difficile d'obtenir un régime permanent et stable. Pour des pressions basses on obtient de belles droites mais avec une pente qui varie avec la pression et qui se distingue de la droite globale. Ce phénomène peut s'expliquer par ce que la diffusivité de Knudsen dépend de la pression.

Finalement, la perméabilité K_0 et la diffusivité de Knudsen D_K sont déduites des paramètres d'interpolation de la droite globale :

$$K_0 = \frac{L}{A} \cdot \frac{R_g T}{M_g} \cdot \mu \cdot a \quad (\text{K.3a})$$

$$D_K = \frac{L}{A} \cdot \frac{R_g T}{M_g} \cdot b \quad (\text{K.3b})$$

K.2. Perméabilités relatives et pression capillaire

Cette grandeur exprime la résistance de l'écoulement gazeux contre l'écoulement du liquide et vice versa. Elle est d'intérêt uniquement dans la zone d'ébullition à savoir donc pour la partie au bord de la pièce qui est vierge (à porosité initiale).

La plupart des publications qu'on trouve sur des mesure d'écoulement diphasiques concerne deux substances complètement différentes telles que l'eau et l'huile. Nous n'avons pas réussi de trouver un montage pour mesurer les propriétés d'un écoulement contenant un liquide et son propre gaz voir même plus généralement d'un liquide et d'un gaz. Contrairement aux

fluides de deux liquides, l'utilisation d'un liquide et d'un gaz rend plus difficile de connaître les conditions d'entrée : On ne peut pas simplement mélanger en avance un certain taux de liquide avec un certain taux de gaz et faire rentrer ce mélange dans le milieu poreux, puisque une phase risque d'y rentrer plus facilement, l'autre restant bloquée à l'entrée. Un deuxième problème résulte du fait qu'un liquide et un gaz ont des densités tellement différentes que le liquide risque de repousser complètement le gaz afin de pouvoir utiliser les canaux les plus larges dans le milieu poreux.

La méthode de mesure de perméabilité relative a connu son début au laboratoire LCTS avec deux stages pendant cette thèse. Ainsi nous pourrions présenter dans la suite uniquement l'état actuel de l'appareil, la méthode d'analyse prévue ainsi que le travail qui reste à faire.

K.2.1. Description du montage

La mesure de perméabilité relative et de pression capillaire apporte 3 problèmes supplémentaires par rapport à la mesure de perméabilité absolue :

- 1) Au lieu d'un paramètre (la perméabilité absolue), on en a 3 (perméabilités relative du liquide/gaz et pression capillaire) qui en plus dépendent de la saturation en liquide (locale). Chacun de ces paramètres ne peut pas être déduit de manière directe à partir de mesures globales puisqu'il s'agit d'une interaction complexe et locale entre le liquide et le gaz.
- 2) On ne peut pas « prédéfinir » le rapport liquide/gaz qui entre dans le milieu poreux. Il faut donc produire le gaz à partir du liquide directement dans le milieu poreux par ébullition et ensuite mesurer le rapport liquide/gaz.
- 3) Il est dur, pour le dispositif présenté dans la suite même impossible, d'obtenir une répartition homogène dans le milieu poreux : Il s'agit d'une composition locale qui entraîne donc des perméabilités relatives ainsi qu'une pression capillaire locale et ainsi une physique locale liée à son environnement.

Ces points nécessitent ainsi non seulement un montage d'un appareil de mesure (de grandeurs globales et locales) mais aussi un couplage avec une simulation de ce dispositif qui contient des lois de perméabilités relatives et de pression capillaire paramétrés. C'est ensuite une comparaison et une adaptation entre la mesure et la simulation qui va permettre de déduire les bonnes lois des grandeurs d'intérêt. Une réalisation possible pour résoudre ces problèmes est représentée sur la figure 104.

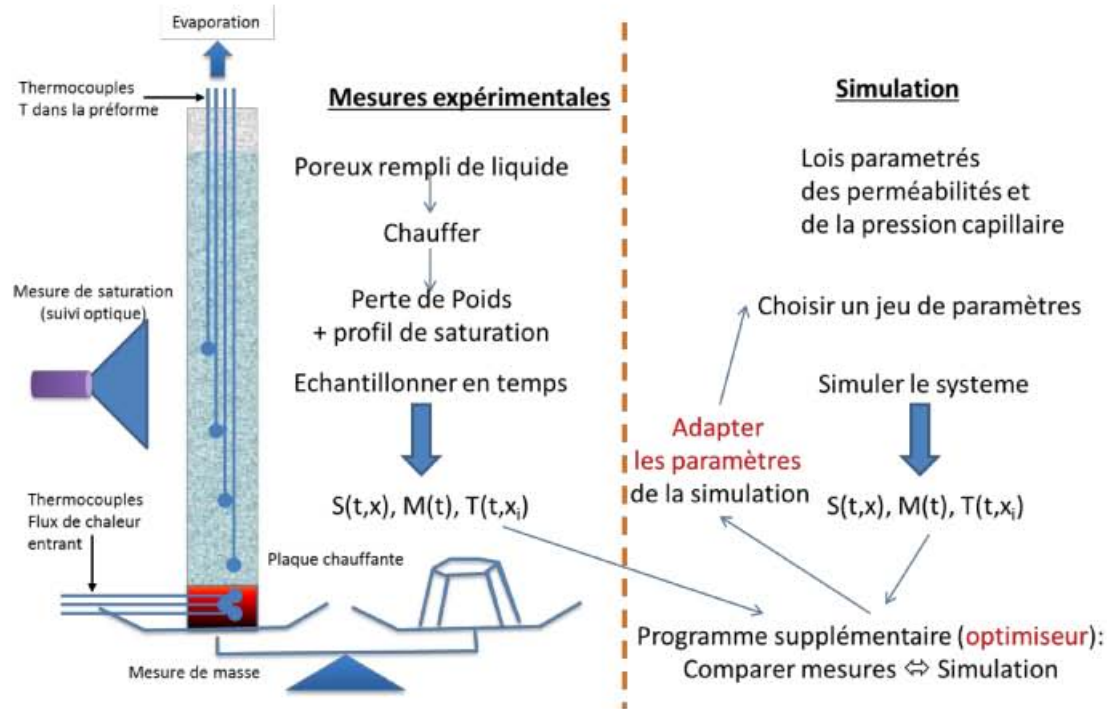


Fig. 104: Mise en place pour la mesure de perméabilité relative du liquide et du gaz en milieu poreux. La détermination contient une partie expérimentale représenté en (a) et deux parties numériques représenté en (b) (une qui simule le dispositif expérimental et une, écrite en bas, qui déduit les paramètres d'intérêt par comparaison/adaptation entre la simulation et l'expérience).

On y voit l'expérience sur (a) et le numérique sur (b), contenant en bas la partie d'adaptation de paramètres.

Pour l'expérience, nous remplissons le milieu poreux complètement avec un liquide coloré et nous le plaçons dans un cylindre de double-parois en verre qui servira comme isolateur thermique. Le liquide utilisé pour la phase de développement de l'appareil est de l'eau pour des raisons de sécurité et pour la facilité de l'avoir à disposition. Le problème qu'il faut créer le gaz directement à l'intérieur du milieu poreux est résolu en mettant le liquide en ébullition par un élément chauffant résistif qui est poussé par le bas du tube directement en contact avec le milieu poreux. Cet élément chauffant est isolé en bas thermiquement afin que toute chaleur parte dans le milieu poreux. Il contient également 3 thermocouple pour calculer ce flux. Le liquide va ainsi être chauffé et commencer en bas à bouillir. Le gaz va sentir une surpression à cause de sa densité 10 fois plus faible et partir vers le haut de la préforme. La surpression nécessite qu'on maintient la préforme en place ce qui est réalisé par les thermocouples qui servent à vérifier l'hypothèse du modèle que l'ébullition se fait pour une température unique. Le gradient de contenu de gaz dans la préforme (au début de l'ébullition : du gaz en bas, liquide en haut, gradient entre les deux) est suivi par une caméra à l'aide de l'intensité du colorant qui n'est présent que dans le liquide. Une fois que le front d'ébullition arrive en haut de la préforme, le gaz va sortir de celle-ci et de l'expérience entière ce qui résulte en une perte de masse qu'on mesure également.

Ainsi nous mesurons la masse globale et la température et saturation en liquide locales. Or, toutes ces mesures ne permettent pas de déduire les perméabilités relatives et la pression de capillarité de manière directe comme c'était le cas pour la perméabilité absolue. Pour cela nous avons besoin d'une simulation numérique du même dispositif expérimental qui prend des lois de perméabilité relatives et de pression de capillarité en entrée qui est capable de produire

les mêmes sorties que l'expérience. Des lois classiques sont donnée dans les équations K.4 :

$$P_c = P_{c1} \cdot (1 - S) + P_{c2} \cdot (1 - S)^2 + P_{c3} \cdot (1 - S)^3 \quad (\text{K.4a})$$

$$k_{rl} = S^{e_l} \quad (\text{K.4b})$$

$$k_{rg} = (1 - S)^{e_g} \quad (\text{K.4c})$$

On retrouve ici 5 paramètres. Sachant que la saturation en liquide ne peut pas être mesuré de manière très précise il faut trouver un moyen de déduire 5 paramètres essentiellement à partir d'une grandeur mesurée qui est la perte de masse (la température étant juste la température de saturation pour chacun des thermocouples). L'astuce qu'on trouve dans les publications sur des mesures diphasiques type eau+huile et qu'on va aussi utiliser ici c'est le temps : Tout le processus de transport diphasique et donc tout le processus d'évaporation et de perte de masse est lié à l'interaction entre le liquide et le gaz dans l'échantillon complet. La mesure de la perte de masse au cours du temps permet donc de trouver une sorte d'interaction moyennée sur la préforme qui varie au cours du temps car le profil de saturation liquide change du début de l'expérience (du liquide partout) jusqu'à la fin (du gaz partout) sans cesse. D'un autre côté nous avons donc de nouveau besoin d'une simulation du dispositif expérimental afin de pouvoir calculer l'évolution globale en fonction des lois locales. De même, la déduction des paramètres devient plus compliqué :

- On commence avec un jeux initial des paramètres P_{ci}, e_i .
- On fait tourner la simulation jusqu'au premier pas de temps t_1 où l'on a des mesures disponibles.
- Le code adaptateur doit maintenant varier le jeux de paramètres jusqu'à ce que la simulation donne la même perte de masse que l'expérience. Puisqu'on a 5 paramètres contre une seule mesure, le jeux de paramètres possible n'est pas unique.
- Une fois un jeux trouvé, il faut faire tourner la simulation du temps t_1 à t_2 où l'on a la deuxième valeur de perte de masse.
- De nouveau il faut adapter le jeux de paramètre. Cette adaptation peut se faire du pas de temps t_1 à t_2 .
- Néanmoins, il faut ensuite redémarrer la simulation depuis le début pour vérifier que la perte de masse à t_1 est toujours la bonne.
- Ainsi on itère jusqu'à la fin de l'expérience. On va constater que lors des premiers pas de temps il y a de grandes variations des différents paramètres mais que vers la fin celles-ci diminuent de plus en plus si bien qu'on peut dire que l'algorithme a convergé vers un jeux de paramètres correspondant à la réalité.

Des exemples typiques ainsi que des détails sur l'algorithme inverse peuvent être trouvés dans (Moradkhani et al., 2005; Zhang et al., 2012).

K.2.2. Avancement et travail restant

Contrairement aux autres mesures nécessaires pour la thèse, la détermination des perméabilités relatives et de pression capillaire se trouve encore dans sa phase de début. Avant de pouvoir extraire des résultats, il reste encore du travail sur l'ensemble des 3 parties du dispositif (l'expérience, sa simulation, le code pour l'adaptation des paramètres) dont nous donnons l'avancement dans la suite

Programme d'adaptation de paramètres

Pour cette partie uniquement la bibliographie a été réalisée mais il n'existe encore aucun code.

Dispositif expérimental

La mise en place de l'expérience a été réalisé par les deux stagiaires Léo Carnus et Jérémy Décock au LCTS à Bordeaux. La totalité du dispositif de la figure 104a) est assemblé et un code LabView est développé qui pilote le tout, à savoir :

- i) Mesure du flux de chaleur sortant de l'élément chauffant vers la préforme et régulation de ce flux en ajustant la puissance
- ii) Mesure de la basse (à l'aide d'une balance communiquant avec l'ordinateur)
- iii) Mesure du profil de température (4 thermocouples qui sont également enregistrés par LabView)
- iv) Prise de vue du profil de saturation en liquide par une photo en intervalle régulier (webcam, colorant dans l'eau)

En suivant le protocole de mesures on peut obtenir par exemple les résultats suivants qui sont présentés dans le rapport de Jérémy Décock (rapport interne au LCTS) :

- 1) La mesure des températures dans l'élément chauffant, fig. 105 montre qu'au bout d'environ 5 minutes on arrive à établir un flux de chaleur stable. Cette durée d'établissement est également liée à l'interaction avec le liquide et le milieu poreux dont les températures changent beaucoup au début de l'essai. Néanmoins on voit que le gradient de température entre les trois thermocouples équidistantes n'est pas linéaire comme on le suppose pour le calcul du flux thermique.
- 2) L'évolution de la température dans le solide, représenté sur fig. 106, permet de soutenir l'hypothèse du modèle que l'ébullition se fait pour une température précise. On constate tout de même que cette température est supérieur aux $100^{\circ}C$ connus pour l'eau, ce que l'on peut éventuellement lier à la surpression qui apparaît lors de la transformation du liquide en gaz de densité plus faible.
- 3) La perte de masse selon fig. 107 commence dès que le front d'ébullition atteint le haut de la préforme et suit ensuite une loi linéaire.
- 4) La photo fig. 108 prise par la caméra mérite un peu plus d'attention et sera détaillée dans la suite.

Cette photo (fig. 108) montre tout d'abord que l'expérience fonctionne globalement, à savoir qu'il y a de la vapeur gaz ainsi que des bulles qui sortent du milieu poreux et qu'on voit bien du contraste dans le colorant. Tout de même, cette photo montre les principaux problèmes qui restent à régler pour avoir une mesure fiable

- 1) Il faut réviser le calcul du flux de chaleur entrant dans la préforme. Pour le moment on assume que les trois thermocouples de l'élément chauffant sont proches, si bien que la courbe de température est linéaire en fonction de l'espace et qu'on peut calculer le flux à l'aide de sa pente. Or, nous avons montré que ceci n'est pas vrai.
- 2) Il y a beaucoup de bulles de gaz qui s'échappent au bord entre la préforme et le cylindre isolant au lieu de passer par le milieu poreux. C'est un fait qui met à défaut toute la mesure. Nous attendons déjà une amélioration en utilisant les préformes découpées par jet d'eau et en rajoutant une couche de graisse de rodage.

- 3) Nous ne sommes pas capable de réaliser une expérience d'évaporation complète dès lors qu'on utilise du colorant dans l'eau : Le colorant se dégrade à cette température d'ébullition. En plus la puissance nécessaire pour déclencher une perte de masse n'est plus la même avec colorant que pour de l'eau uniquement. Il faut donc trouver le point de fonctionnement qui mène à une perte de masse avec colorant et qui fait avancer et finir l'expérience plus rapidement que la dégradation du colorant.
- 4) Plusieurs photos par la webcam prise en suite montrent des réflexions et des contrastes différentes si bien qu'il faut ajouter un code de traitement d'image qui permet de prendre une moyenne glissante sur différentes photos.

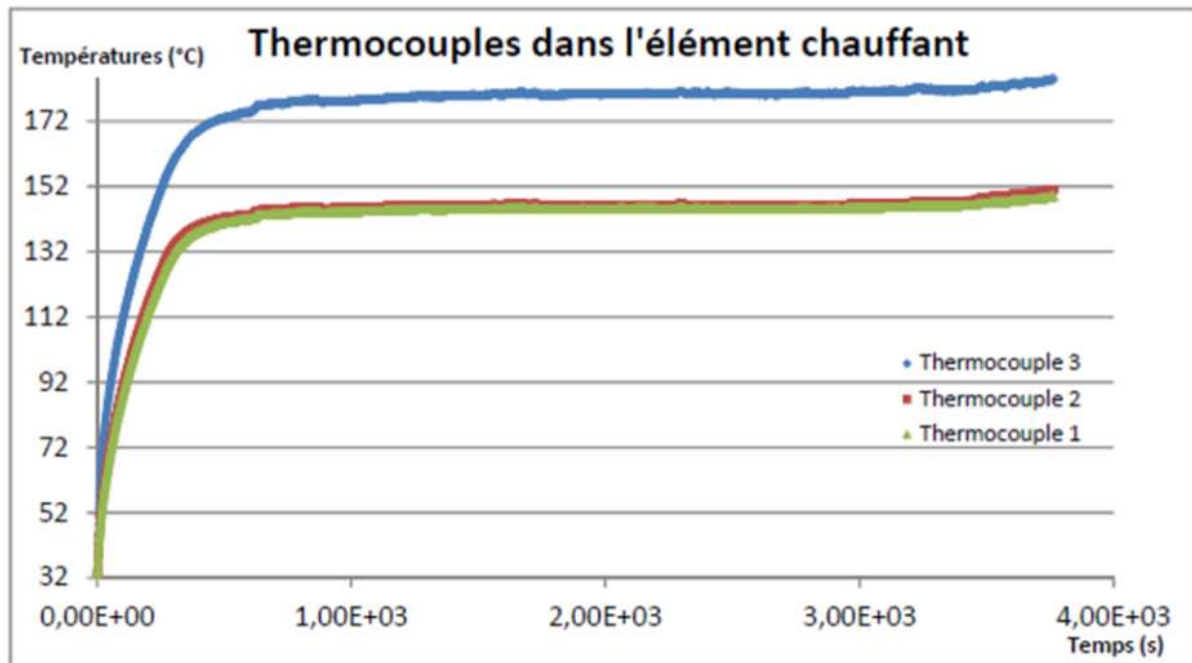


Fig. 105: Profil de température dans l'élément chauffant lors d'un essai d'ébullition

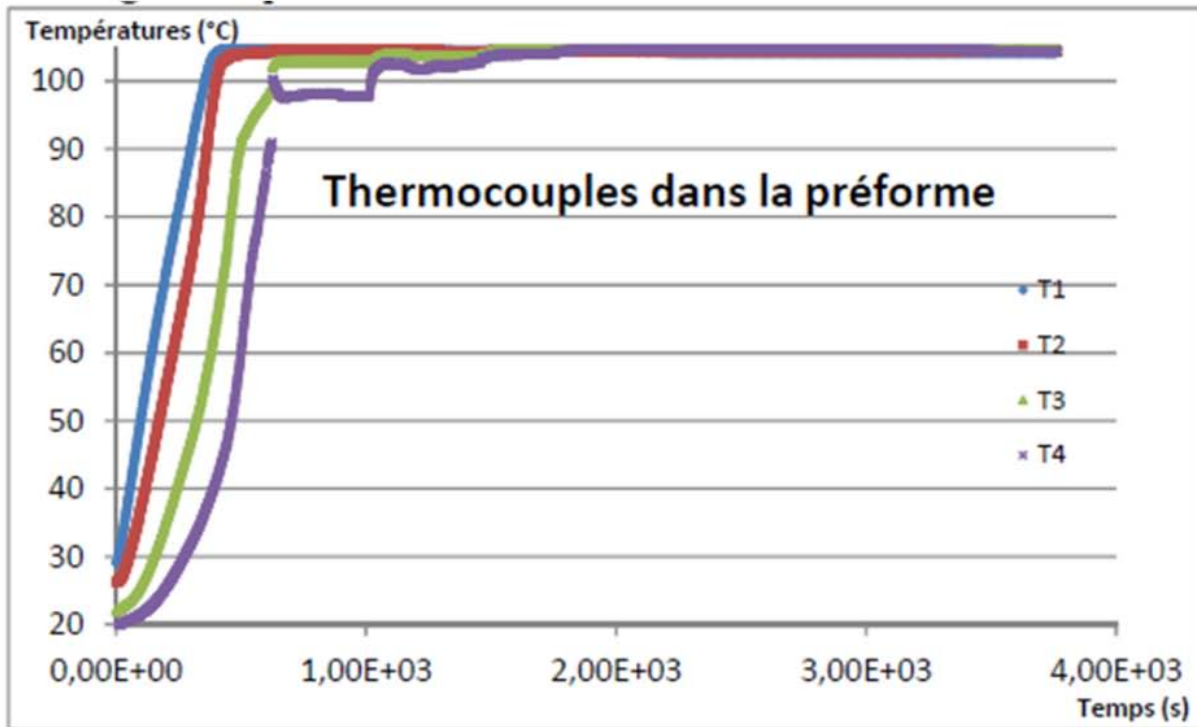


Fig. 106: Profil de température dans le milieu poreux

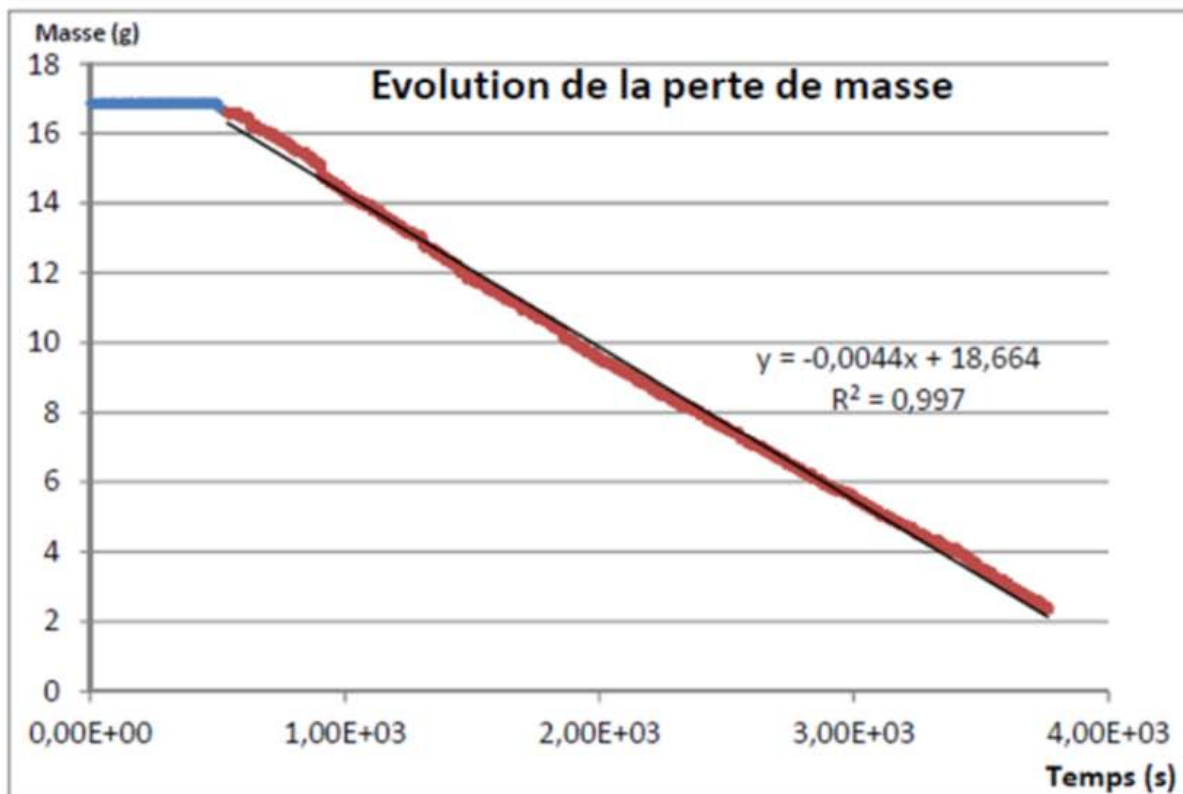


Fig. 107: Evolution de la masse au cours d'un essai d'ébullition, perte de masse linéaire

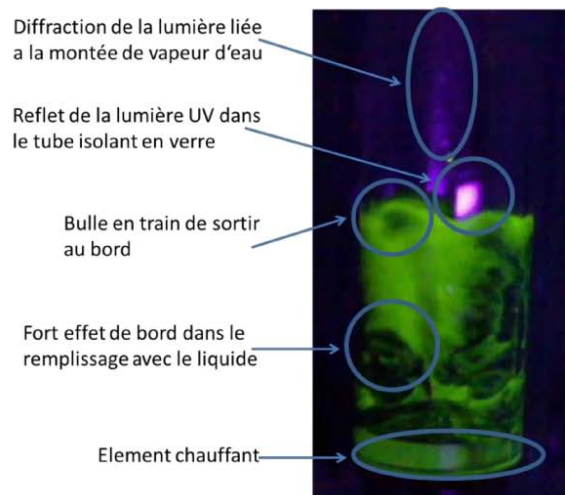


Fig. 108: Photo prise la webcam à un moment donné lors de l'évaporation

Simulation de l'expérience

En première vue, le modèle d'ébullition présenté pour la thèse est applicable également pour cette expérience et il est de même pour son solveur éléments finis. Le dispositif expérimental est entouré d'un cylindre de double paroi qui empêche toute perte de masse par le bord et qui limite également les flux de chaleur sortants. Si l'expérience serait parfaite, on se retrouverait d'un système monodimensionnel le long de l'axe centrale du cylindre. Cette hypothèse permet de simplifier le modèle énormément et notamment de déduire des lois semi-analytiques pour la taille des zones purement gazeux/diphase/purement liquide lorsqu'on impose un flux de chaleur en bas et un flux d'échange thermique en haut. Les formules correspondantes seront présentés dans l'annexe L et ont conduit à un code MAPLE de dimensionnement rapide du banc d'essais. Ce code a été utilisé par les stagiaires et leur a permis entre autre de comprendre les bases de l'ébullition et l'influence des différents paramètres de l'équation K.4.

Malgré le bon fonctionnement des deux solveurs, ils se sont avérés comme étant insuffisants : Le déroulement de l'expérience complète se fait en 3 étapes qu'on représente sur la figure 109 :

- 1) Au début le milieu poreux est supposé d'être rempli avec du liquide jusqu'à un certain niveau (l'argument de la suite tient également s'il est entièrement rempli)
- 2) Lors du chauffage du liquide ce volume ne change pas de manière considérable. Par contre, dès qu'on atteint la température de saturation en bas de la préforme (temps t_1 sur le graphique), on commence à créer des bulles de gaz. Celles-là ont besoin de plus volume que le liquide d'une même masse à cause de la densité qui est environ 10 fois plus petite. Ainsi l'ébullition crée une surpression qui va ensuite repousser le liquide vers le haut. La partie fluide complète prend maintenant plus de place que sa limite de départ. Ainsi, une simulation qui représente bien l'expérience ne peut pas s'arrêter à la limite du liquide au début, mais doit également contenir la zone initialement remplie d'air et prise par le liquide repoussé, voir même par le diphasique ensuite.
- 3) Le temps t_2 du graphique correspondant à un temps encore plus avancé montre qu'à partir d'un certain moment le fluide diphasique va même dépasser la limite du milieu poreux. Ceci peut être prouvé par un simple calcul : La masse m du fluide est conservée

lors de l'ébullition. La densité du gaz est environ 10 fois plus petite que celle du liquide ($\rho_g \approx \rho_l/10$) si bien qu'il nécessite environ 10 fois de volume ($V_g = m/\rho_g \approx 10 \cdot m/\rho_l = 10 \cdot \rho_l$). Si on veut que l'expérience complète se passe à l'intérieur du milieu poreux, il faut qu'on ne le remplisse pas plus d'un dixième de son volume, donc par exemple pour une taille de poreux de 5cm, pas plus que 5mm de liquide au début. Ceci est très peu.

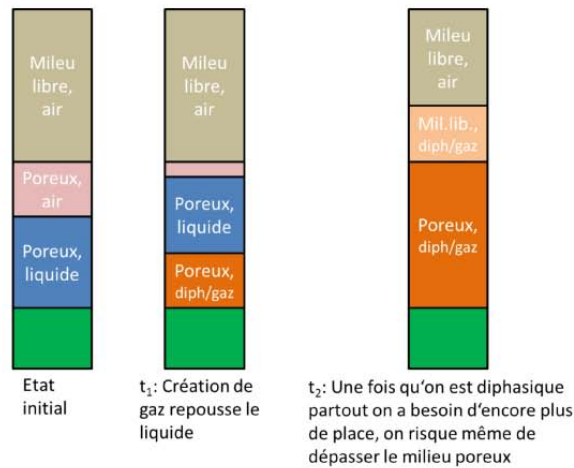


Fig. 109: Etapes de l'expérience d'ébullition du début à la fin :

Il faut donc que la simulation de l'expérience sache traiter non seulement de l'eau liquide et gazeux mais aussi une troisième phase qui est l'air, et ceci dans le milieu poreux et aussi au moins de manière approximative dans la région au-dessus de la pièce poreuse. En plus de cela, on constate que le cylindre de double parois en verre devient chaud pendant l'expérience (on peut le toucher à peine). Ceci signifie qu'on a une perte de flux de chaleur non-négligeable au bord du domaine d'études qui doit être pris en compte par la simulation 2D axisymétrique et qui enlève aussi la possibilité d'un calcul fiable en 1D.

Le deuxième constat ne mène qu'à un simple changement de condition de bord du calcul qui nécessite uniquement une mesure approximative du coefficient d'échange thermique à travers du tube double parois. Le premier problème évoqué ci-dessus par contre fait qu'on n'a pas seulement besoin d'un solveur diphasique mais même triphasique dont la troisième phase n'existe que sous forme gazeuse à n'importe quelle température. Cette adaptation de la simulation reste à faire.

K.3. Conductivités électriques

Le deuxième grand sujet de la thèse à côté du transport diphasique est le couplage électromagnétique directe entre la pièce en densification et l'inducteur. Comme remarqué dans la partie 5.1, tout le fonctionnement du processus, la fréquence de résonance, la résistance et inductance ainsi que la puissance de chauffage nécessaire pour maintenir la densification, dépendent de l'état de densification de la pièce qui joue sur sa résistance : Une préforme vierge possède une résistance très élevée alors que celle d'un disque densifié est trois fois plus faible. Entre les deux états extrêmes, toute propriété électromagnétique dépend du profil de porosité en détail. Le but de ce chapitre est alors de présenter une méthode de mesure de résistivité pour des échantillons à différents états de densification (homogène sur la taille de l'échantillon).

Il y a deux types de mesures à réaliser, un premier qui mesure la conductivité en fonction

de la densité simplement à température ambiante et un deuxième qui va plus loin pour des températures élevées. Puisqu'on veut aller à des températures très élevées (environ 1000°C), le deuxième type de mesures nécessite une mise en place beaucoup plus élaborée que la mesure à température ambiante avec seulement un système de chauffage de l'échantillon. Dans la suite de ce chapitre nous présentons uniquement les mesures à température ambiante puisque l'autre type est en développement mais n'a pas encore donné de résultats.

K.3.1. A température ambiante

Les mesures de résistivité des préformes en carbone partiellement densifiés à température ambiante ont été réalisées par un le stagiaire Paul Besombes au laboratoire Simap/EPM à Grenoble.

C'est la méthode voltampérique à 4 pointes représentée sur la fig. 110 qui est utilisée : On injecte un courant dans la pièce à l'aide deux pointes extérieures. Ensuite, la chute de tension V_m est mesurée sur une longueur L_m avec deux pointes différentes. Cette méthode diffère de la méthode plus facile à deux pointes où l'on mesure la chute de tension en parallèle de la source de courant et en se servant des mêmes pointes (sur le graphique 110 le voltmètre serait branché au même endroit que la flèche marquée L_i). L'avantage de la méthode à quatre points est qu'il n'y a pas de courant qui passe dans la branche de mesure de tension, si bien que la résistance de contact des pointes ne joue pas sur les mesures.

Pour avoir une idée de l'homogénéité de l'échantillon, la mesure de tension va se faire sur différents longueurs et différents endroits le long de l'échantillon. Pour assurer qu'on utilise toujours les mêmes positions de mesure, une plaque avec trous correspondant aux points de mesures à été fabriquée et elle est mise au-dessus de l'échantillon durant chaque série d'expériences. La photo du dispositif est donnée sur la figure 111.

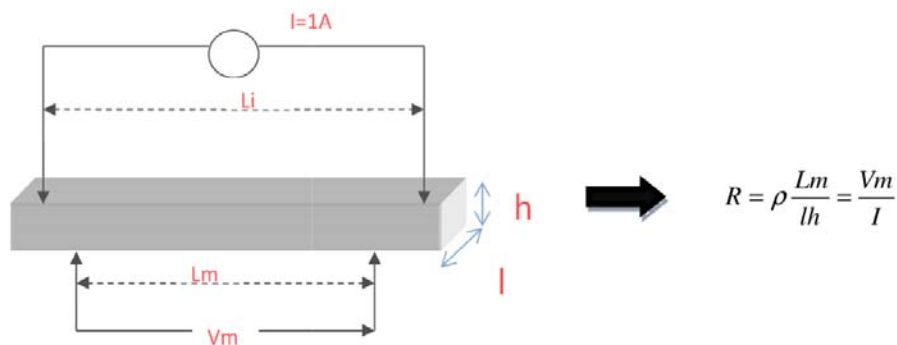


Fig. 110: Mesure de la résistivité via la méthode à quatre points

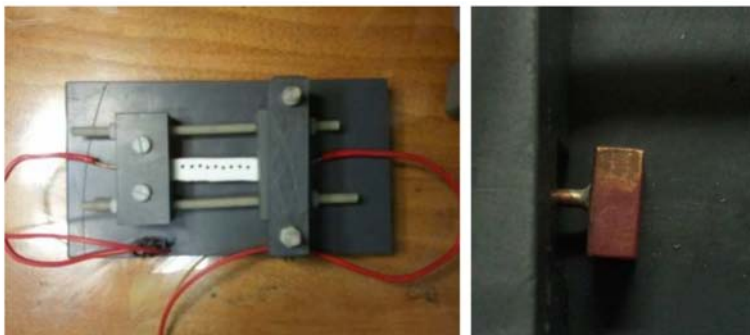


Fig. 111: Photo de l'appareillage de mesure de résistivité à froid, réalisé par le stagiaire Paul Besombes. A gauche : Vue globale avec les fils d'amenée de courant par le côté et une plaque de trous pour le positionnement de la mesure de tension au dessus de l'échantillon. A droite : Amenée de courant soute au côté du dispositif.

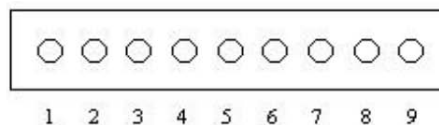


Fig. 112: Plaque à trous pour le positionnement des points de mesure de tension - numérotation des trous

Trois séries de mesures ont été réalisées sur chaque échantillon qui sont présentées à l'aide des numéros de trous dans la plaque, fig. 112 :

- 1) Une pointe est immobilisée sur le trou percé « 1 » et l'autre pointe se décale successivement du « 2 » au « 9 » (8 tensions) correspondant à des longueurs variables de 5 à 40mm.
- 2) Les deux pointes se déplacent en respectant une distance L fixe.
Exemple pour $L = 5mm$: première tension entre « 1 » et « 2 », seconde tension entre « 2 » et « 3 », et ainsi de suite (8 tensions).
Exemple pour $L = 10mm$: première tension entre « 1 » et « 3 », seconde tension entre « 3 » et « 5 », et ainsi de suite (4 tensions).
- 3) Mesure avec position centrée et distance variable : Positions « 4 » et « 6 », ensuite « 3 » et « 7 », « 2 » et « 8 », et finalement « 1 » et « 9 » (4 tensions)

Les échantillons mis à disposition possèdent différents densités (porosités) et sont chacun étudié dans les trois sens (voir fig. 113)

- Radial r du disque de frein
- Angulaire ϕ
- Orthogonal z

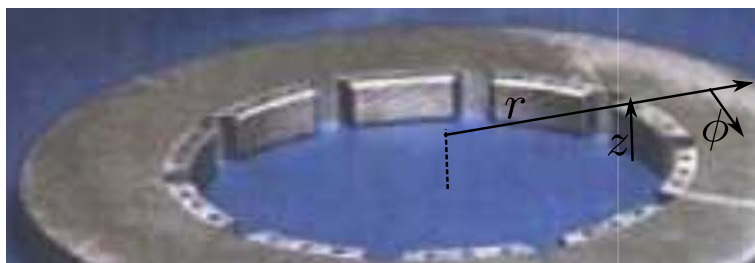


Fig. 113: Définition des 3 directions selon lesquelles le disque a été échantillonné pour les mesures

Les résultats détaillés sont présentés dans le rapport de stage correspondant. Des mesures ont été réalisées dans les trois sens sur une préforme vierge ainsi qu'un échantillon complètement densifié. Les résultats sont données dans le tableau K.1 :

On remarque que dans le plan d'une nappe la conductivité est environ la même dans les deux

	sens r	sens ϕ	sens z
vierge	9000	8500	45000
dense	3000	2500	10000

TABLE K.1.: Résultats du stage sur la mesure de résistivité électrique en $\mu\Omega.cm$

sens r et ϕ alors qu'elle est 5 fois plus grande dans le sens perpendiculaire. Pour expliquer ceci on rappelle qu'une nappe est constituée de fibres orientées dans un sens $+60^\circ$ et la nappe à côté à -60° . Lorsqu'on regarde l'ensemble des nappes on n'a donc pas de direction préférée en sens r ou ϕ mais entre les deux, ce qui apporte une résistance similaire aux deux directions. Dans le sens z le seul contact entre les nappes se fait par les petits fils produites lors de l'aiguilletage, qui conduisent moins bien le courant électrique.

K.4. Mesures sur le réacteur

Les mesures présentées auparavant déterminent des grandeurs locales en fonction de la porosité, qui peuvent ensuite être utilisées dans la simulation du procédé. Ce chapitre maintenant concerne les mesures de grandeurs telles que la résistance et l'inductance globales et la fréquence de résonance qui ont été introduites sur la figure 31, page 59. Ces paramètres permettent d'un côté de suivre le procédé de densification en cours et de l'autre côté de valider la simulation. La suite de ce chapitre se divise en trois parties :

- i) Mesure des grandeurs R, L, f_{res} en arrêt de densification via le « décrétement logarithmique ».
- ii) Des mesures complémentaires sur l'électromagnétisme à l'aide de la « boucle de Rogowski ». Cette mise en place fonctionne avec l'alimentation du circuit oscillant par l'armoire électrique, ce qui permet un suivi des grandeurs tout au long du cycle de densification.
- iii) Les grandeurs directement fournies en retour de l'installation industrielle lors de la densification. Il s'agit ici de données électromagnétiques, affichées par l'armoire électrique, mais aussi celles liées à la thermique.

K.4.1. Décrétement logarithmique

Une méthode souvent utilisée par les techniciens pour mesurer les propriétés électriques d'un circuit oscillant sans source externe de courant est celle du décrétement logarithmique. Elle est facile à mettre en place par un simple branchement de deux fils et ne demande pas d'alimentation du circuit oscillant pour l'armoire électrique, mais nécessite plutôt que celui-ci est débranché lors de la mesure. Ceci enlève d'un côté les risques liés au travail à haute tension fournie par l'armoire, et de l'autre côté on est sûr de mesurer uniquement les propriétés du circuit oscillant sans parasites venant du reste de l'installation. Le désavantage est néanmoins que chaque mesure demande un arrêt et un découplage de l'armoire électrique de la partie centrale de densification. Ceci arrête momentanément la densification et rend cette méthode donc impossible comme moyen de suivi de la densification.

Le branchement du décrétement logarithmique se fait à la place de l'armoire électrique de la figure 31. L'appareil lui-même consiste en une source de tension et un moyen de mesure de tension dans le temps. Le schéma de la mesure ainsi qu'un résultat typique sont présentés sur la fig. 114 :

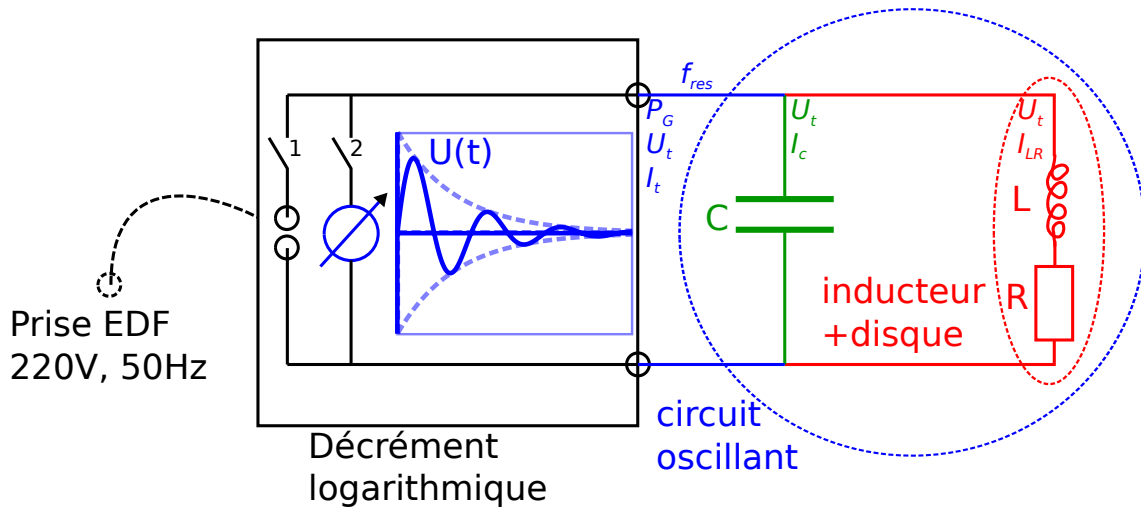


Fig. 114: Branchement et fonctionnement du décrément logarithmique. A l'intérieur de l'appareil se trouvent 1) Une source de tension permettant de charger la capacité du circuit oscillant initialement, 2) Un moyen de mesure de la tension en temps lors déchargement

La mesure des grandeurs globales de la résistance R , l'inductance L et la fréquence de résonance f_{res} se fait dans quatre étapes :

- 1) On ferme l'interrupteur (1) et on ouvre l'interrupteur (2). Ensuite on applique une tension de source U_0 qui va charger le condensateur du circuit oscillant.
- 2) On ouvre l'interrupteur (1) et on ferme l'interrupteur (2). Le circuit oscillant va maintenant se décharger et agir comme source de tension alternative avec intensité décroissante. L'équation caractéristique d'un tel circuit est donnée par K.5a et sa solution générale par K.5b avec les paramètres K.5c :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t) + \frac{R}{L} \frac{\partial}{\partial t} U(t) + \frac{1}{LC} U(t) = 0 \quad (\text{K.5a})$$

$$U(t) = U_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cdot \cos(2\pi f_{res} \cdot t) \quad (\text{K.5b})$$

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (\text{K.5c})$$

$$\tau = 2\frac{L}{R}$$

On remarque que le calcul des paramètres codé dans le décrément est conçu pour des applications plus standard que la notre, où l'on a une résistance telle que $R\frac{C}{L} \ll 1$. Ceci conduit à un calcul de la fréquence de résonance plus simple que celui présenté dans la formule 5.19.

- 3) Sur la courbe mesure, un programme d'analyse graphique va déterminer les zéros dans le temps ainsi que les valeurs d'amplitude au cours du temps. Les zéros en temps permettent de calculer la fréquence de résonance f_{res} du système. Les valeurs extrêmes de tension au cours du temps sont approchées par une loi exponentielle en temps qui permet alors de déterminer le temps caractéristique τ .
- 4) La capacité C est une valeur qu'on doit entrer dans l'interface du décrément logarithmique si bien qu'elle est connue a priori. Ils restent donc les deux inconnues L et R qui peuvent être déterminées maintenant à partir des deux formule de K.5c puisqu'on a déduit τ et f_{res} dans l'étape précédente.

Il est évident que cette méthode marche autant mieux qu'on arrive d'enregistrer des oscillations. Une mesure typique de notre application est donné dans fig. 115. Nous constatons que pour le système sans disque entre les inducteurs on a un ensemble de i) fréquence d'oscillation et de ii) temps caractéristique de décroissance de l'amplitude qui fait qu'on obtient une bonne caractérisation. Or, pour le système avec disque vierge, on ne peut enregistrer que très peu d'oscillations avant la disparition du signal à cause de la décroissance forte. Le décrétement logarithmique n'est donc pas adapté pour des mesures fiables sur notre système, et entre différentes mesures on peut avoir des variations de 50% sur la résistante et l'inductance.

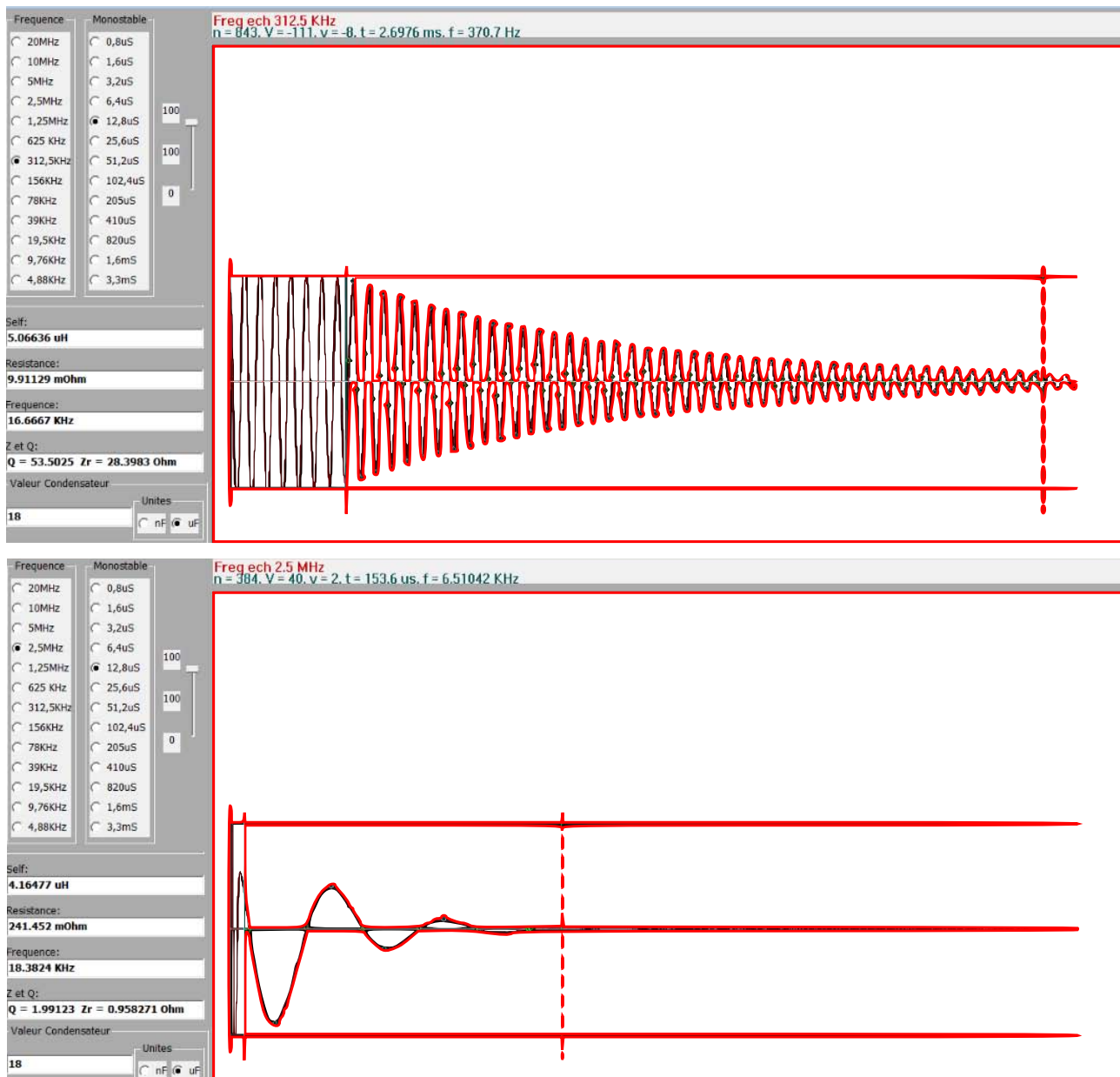


Fig. 115: Mesure typique avec le décrétement logarithmique sur le système industriel de chauffage inductif. En haut : sans disque entre les inducteurs. Nous constatons une décroissance faible par rapport à la fréquence de résonance ce qui permet une mesure de bonne qualité. En bas : Mesure avec un disque vierge entre les inducteurs. La décroissance de l'amplitude est très forte par rapport à la fréquence des oscillations ce qui rend difficile l'identification du temps caractéristique de la décroissance.

Néanmoins, la facilité de mise en place et l'absence de risque liées à des tensions élevés nous à conduit à utiliser le décrétement pour une première campagne de mesures où il s'agissait d'avoir une idée de l'ordre de grandeur de R , L et f_{res} au début et en fin de cycle.

K.4.2. Boucle de Rogowski

L'inconvénient principal du décrétement logarithmique est qu'on ne peut pas l'utiliser en suivi du procédé. Ainsi, chaque arrêt et débranchement de l'armoire électrique et branchement du décrétement logarithmique prend du temps pendant lequel le système refroidi si bien qu'on n'arrive pas à avoir de mesures à température de travail.

Une autre méthode consiste donc à mesurer sur un oscilloscope la tension et le courant qui passent par l'inducteur (correspondant à U_t et I_{LR} sur le schéma électrique 31). Ensuite on pourra en déduire les grandeurs globales à partir des considérations du circuit suivantes :

→ Le courant et la tension oscillent à la même fréquence correspondant à la fréquence de résonance f_{res} . Cette fréquence peut directement être lue sur l'oscilloscope.

→ L'impédance complexe de la branche inducteur+ pièce est donnée par

$$Z = R + i\omega L \quad (\text{K.6})$$

(avec $\omega = 2\pi f_{res}$)

La tension et le courant (complexes) sont donc différents en amplitude et en phase selon la loi

$$U(t) = U_0 \cdot \exp(i\omega t) \quad (\text{K.7a})$$

$$I(t) = \frac{U(t)}{Z} = \frac{U_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot (R - i\omega L) \cdot \exp(i\omega t) = \frac{U_0}{\|Z\|} \cdot \exp(i(\omega t - \phi)) \quad (\text{K.7b})$$

$$\begin{aligned} \|Z\| &= \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{U_0}{I_0} \\ \phi &= \text{atan} \left(\frac{\Im(Z^*)}{\Re(Z^*)} \right) = \text{atan} \left(-\frac{\omega L}{R} \right) \end{aligned} \quad (\text{K.7c})$$

où l'on rappelle que les valeurs de tension et de courant mesurées correspondent aux parties réelles des grandeurs complexes.

→ En mesurant sur l'oscilloscope le rapport d'amplitude entre le courant et la tension ainsi que leur déphasage, on peut donc déduire les valeurs de résistance R et inductance L à partir des deux équations K.7c :

$$R = \frac{U_0}{I_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}} \quad (\text{K.8a})$$

$$L = \frac{U_0}{I_0} \frac{1}{\omega} \frac{-\tan \phi}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}} \quad (\text{K.8b})$$

Le dispositif expérimental complet pour mesurer la tension et le courant dans l'inducteur est représenté sur la figure 116.

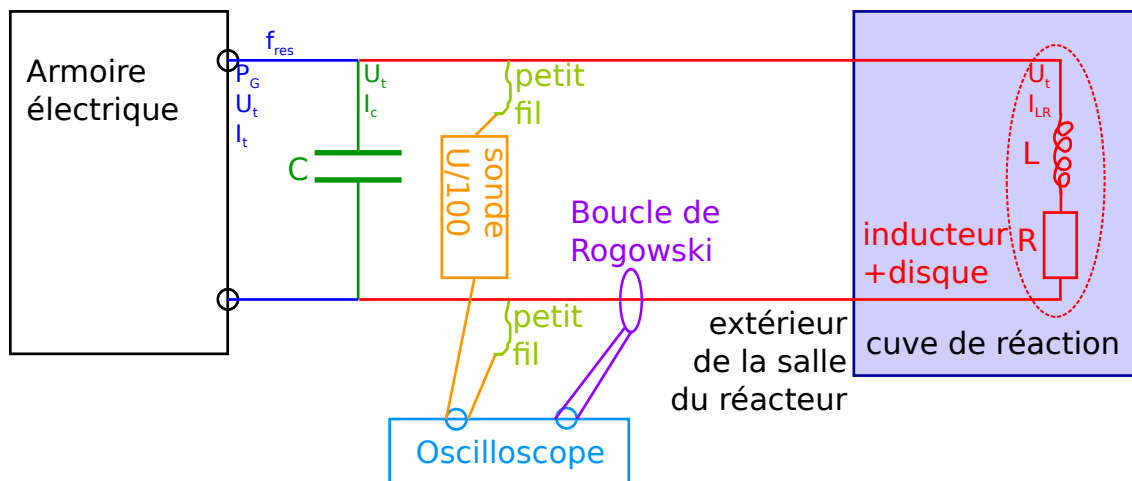


Fig. 116: Dispositif de mesure de tension et de courant instantanés lors de cycle de densification. La tension est mesurée par méthode standard en parallèle de l'inducteur, avec une sonde et par le biais de deux fils pour des raisons de sécurité. La mesure du courant se fait par un dispositif appelé sonde de Rogowski.

Pour mesurer la tension il suffit de brancher des pointes en parallèle à l'entrée et à la sortie des amenées de courant vers l'inducteur : Normalement aucun courant de forte intensité (et donc dangereux pour l'oscilloscope) circule lors d'une telle mesure. Néanmoins deux mesures de sécurité doivent être prises :

- Les pointes ne sont pas connectés directement aux amenées de courant, mais par l'intermédiaire de petits fils. Sans ceci, les courants forts qui circulent dans les amenées risquent de fondre les pointes à la surface de contact et donc de les détruire.
- Les tensions du système inductif sont très élevées également. Nous introduisons donc une sonde entre les amenées de courant et de l'oscilloscope qui divise la tension par 100.

Avec cette mise en place simple nous arrivons déjà à suivre la courbe de la tension au cours du temps sur l'oscilloscope.

Pour la mesure du courant, un dispositif plus astucieux doit être trouvé : Normalement, une mesure de courant se fait en série avec le système principal. Néanmoins, on n'a pas de possibilité de couper les amenées de courant pour insérer un appareil de mesure, et en plus les courants sont trop élevés pour traverser directement un tel appareil. Pour la mesure du courant nous nous servons alors d'une « sonde de Rogowski » dont le schéma de fonctionnement est représenté sur fig. 117 :

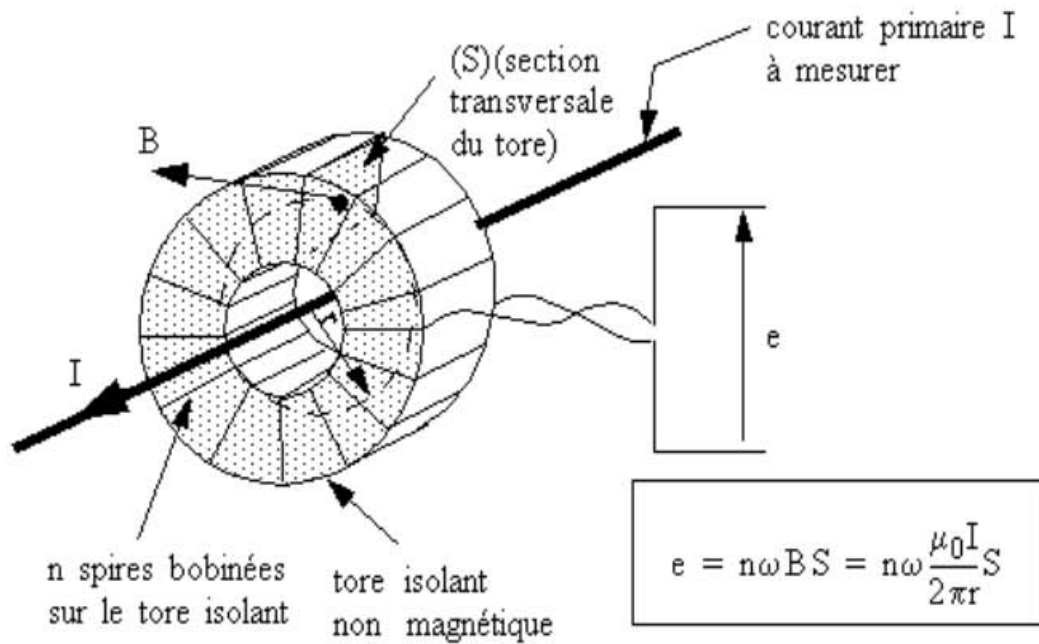


Fig. 117: Schéma de fonctionnement de la boucle de Rogowski pour la mesure d'un courant élevé par dispositif extérieur au circuit principal.

Le principe de mesure d'un courant élevé I circulant dans une amenée rectiligne est le même que celui du chauffage par induction : On pose un support bobiné d'un fil autour d'une amenée de courant. Ce support est fait de manière afin de facilement pouvoir l'ouvrir à un endroit pour la mise en place. Quand le courant à mesurer I est allumé, son champ va induire un courant dans le fil conducteur autour du support. Lié à ce courant on peut donc mesurer une chute de tension e . Comme indiqué dans le graphique 117, cette tension dépend de divers paramètres géométriques du dispositif connus, et elle est proportionnelle au courant I . Tout comme pour le chauffage par induction, le courant induit dans le fil oscille de la même fréquence que le courant dans l'amenée. On a donc un signal dans le temps.

Un exemple de calculs qui rassemble les données par boucle de Rogowski et celles fournies par l'armoire électrique (voir chapitre suivant) est donné à la fin de ce chapitre.

K.4.3. Données fournies par l'installation industrielle

Toutes les expériences présentés dans les deux derniers sous chapitres nécessitent la mise en place de dispositifs supplémentaires à celles présentes chez l'industriel. Ils permettent soit d'obtenir des grandeurs et des informations propres au système et non exploitées normalement en industrie (la résistance globale et l'inductance), soit d'avoir une résolution en temps à courte échelle (quelques oscillations d'un courant de $20kHz$ correspond à une centaine de micro-secondes).

En plus de ces études détaillées il est important de savoir que l'installation industrielle renvoie également des grandeurs moyennes pour des temps plus classiques, à savoir à la seconde. Ainsi, un suivi du cycle est possible sans dispositif supplémentaire. Parmi ces grandeurs nous trouvons des propriétés électriques telles que

- La puissance efficace, qui est la grandeur de pilotage. Efficace signifie un moyennement en temps. Pour une fonction sinusoïdale, la valeur efficace correspond à l'amplitude divisée par la racine de deux.
- La fréquence de résonance
- La tension efficace.

En plus des grandeurs électriques, nous avons accès à une multitude de grandeurs telles que

- La température à divers endroit dans la cuve
- La pression dans la cuve
- Des températures supplémentaires lorsqu'on insère des thermocouples par exemple dans la pièce
- Le débit d'eau ainsi que sa température d'entrée et de sortie et pour le circuit refroidissant les inducteurs. Cette valeur peut donner une idée de la puissance joule dans les inducteurs lorsqu'on n'a pas de cyclohexane dans la cuve (qui lui aussi refroidit alors les inducteurs)

Ces informations serviront notamment pour une validation du solveur thermique et transport.

Revenant sur l'électromagnétisme, nous remarquons que toutes les grandeurs qu'on peut tirer avec les autres moyens de mesures peuvent également être trouvées avec le retour de l'armoire : Nous démarrons à partir des équations basiques du circuit K.9 :

$$U(t) = U_0 \exp(i\omega t) \quad (\text{K.9a})$$

$$I(t) = \frac{U(t)}{Z} = \frac{U_0}{Z_0} \cdot \exp(i(\omega t - \phi)) = I_0 \cdot \exp(i(\omega t - \phi)) \quad (\text{K.9b})$$

$$P_0 = U(t) \cdot \bar{I}^*(t) = U_0 I_0 \exp(i\phi) \quad (\text{K.9c})$$

$$Z = R + i\omega L = \frac{U(t)}{I(t)} \quad (\text{K.9d})$$

$$\tan(\phi) = \frac{\omega L}{R} \quad (\text{K.9e})$$

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{U_0}{I_0} \\ R &= Z_0 \cos(\phi) \\ \omega L &= Z_0 \sin(\phi) \end{aligned} \quad (\text{K.9f})$$

On rappelle que toutes les mesures correspondent aux valeurs efficaces (moyennés dans le temps) des parties réelles de leurs définitions complexes. Ainsi, on trouve pour un système en résonance ($\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - R^2 \frac{C}{L}}$, $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$) les grandeurs globales à partir des équations K.10 :

$$\begin{aligned} \tan(\phi) &= \frac{\omega L}{R} = \frac{\omega C U_m^2}{P_m} \\ \cos(\phi) &= \cos\left(\text{atan}\left(\frac{\omega C U_m^2}{P_m}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 C^2 U_m^4}{P_m^2}}} = \frac{\frac{P_m}{U_m}}{\sqrt{\frac{P_m^2}{U_m^2} + \omega^2 C^2 U_m^4}} \end{aligned} \quad (\text{K.10a})$$

$$I_m = \frac{P_m}{U_m \cos(\phi)} = \sqrt{\frac{P_m^2}{U_m^2} + \omega^2 C^2 U_m^2} \quad (\text{K.10b})$$

$$R = \frac{P_m^2}{I_m^2} = \frac{P_m}{\frac{P_m^2}{U_m^2} + \omega^2 C^2 U_m^2} \quad (\text{K.10c})$$

$$Z_0 = \frac{R}{\cos(\phi)} = \frac{U}{\sqrt{\frac{P_m^2}{U_m^2} + \omega^2 C^2 U_m^2}} \quad (\text{K.10d})$$

$$L = Z_0^2 C = \frac{C U_m^2}{\frac{P_m^2}{U_m^2} + \omega^2 C^2 U_m^2} \quad (\text{K.10e})$$

L. Formules liées à l'expérience des perméabilités absolues

Nous considérons un canal poreux parcouru par un fluide à basse pression. Dans ce cas, le flux massique total j_t est composé d'un flux visqueux Darcéen j_D lié à la chute de pression, et d'un flux de Knudsen j_K lié à l'interaction entre les particules du gaz raréfié et les parois internes du milieu poreux. Nous considérons ce système en mono-dimensionnel le long de l'axe du canal poreux qui coïncide avec la direction de chute de pression :

$$j_t = j_D + j_K = -\frac{K_0}{\mu} \rho(P) \frac{\partial P}{\partial x} - M_g D_K \frac{\partial C}{\partial x}(P) \quad (\text{L.1})$$

où k est la perméabilité absolue du milieu poreux et D_K le coefficient de diffusion de Knudsen. Nous utilisons la définition de la concentration et la loi des gaz parfaits

$$C(P) = \frac{\rho(P)}{M_g} \quad (\text{L.2a})$$

$$\rho(P) = \frac{M_g P}{R_g T} \quad (\text{L.2b})$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}(P) = \frac{1}{R_g T} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{L.2c})$$

Ainsi nous obtenons pour la densité de flux massique

$$j_t = - \left[\frac{K_0}{\mu} \frac{M_g P}{R_g T} + M_g D_K \frac{1}{R_g T} \right] \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{L.3})$$

Nous substituons la dérivée (locale) de la pression par une moyenne globale

$$\frac{\partial P}{\partial x} \rightarrow -\frac{\Delta P}{L} \quad (\text{L.4})$$

(ΔP : chute de pression sur le canal ; L : longueur du canal ; signe $-$ puisque la pression de sortie est inférieure à la pression d'entrée)

et remplaçons de même la pression locale par sa moyenne

$$P \rightarrow \bar{P} = \frac{P_{entree} + P_{sortie}}{2} = \frac{P_{sortie} - \Delta P + P_{sortie}}{2} = P_{sortie} + \frac{\Delta P}{2} \quad (\text{L.5})$$

Pour obtenir le flux massique total parcourant la section A du canal, nous intégrons la densité de courant par la surface ce qui revient à une simple multiplication puisque la densité est indépendante de l'endroit sur la surface :

$$\begin{aligned} Q &= \left[\frac{K_0}{\mu} \frac{M_g}{R_g T} \left(P_s + \frac{\Delta P}{2} \right) + D_K \frac{M_g}{R_g T} \right] \cdot \frac{\Delta P}{L} \cdot A \\ &= \left[\frac{K_0}{\mu} \left(P_s + \frac{\Delta P}{2} \right) + D_K \right] \cdot \frac{A}{L} \cdot \frac{M_g}{R_g T} \cdot \Delta P \end{aligned} \quad (\text{L.6})$$

M. Liste des propriétés des matériaux

symbole	unité	expression	Référence
Géométrie (Réf : Données internes MBD)			
$D_{i,pref}$	cm	26.4	
$D_{e,pref}$	cm	46.5	
L_{pref}	cm	3.5/2	
$D_{i,ind}$	cm	$2 \cdot 9.004$	
$D_{e,ind}$	cm	$2 \cdot (D_{i,ind} + 18.65)$	
$h_{entrefer}$	cm	0.79	
N_{spires}	1	5	
h_{spire}	cm	3.1	
L_{ind}	cm	0.8	
d_{coils}	cm	6	
R_{inf}	cm	$5 \cdot D_{e,ind}$	arbitraire
Constantes physiques			
R_g	J/mol/K	8.314	
$\mu_{mag,0}$	H/m	$4\pi \cdot 10^{-7}$	
$\varepsilon_{el,0}$	F/m	$8.854 \cdot 10^{-12}$	
Propriétés électromagnétiques			
$1/\sigma_{cu}$	$\mu\Omega.mm$	17	(Rudnev et al., 2003, p.101)
σ_{cu}	S/m	$6 \cdot 10^7$	
σ_{nd}	S/m	$1/(9000 \cdot 10^{-8})$	Mesures stage lors de la thèse
σ_d	S/m	$1/(3000 \cdot 10^{-8})$	Mesures stage lors de la thèse
σ_{pref}	S/m	$\sigma_{nd} \cdot (\varepsilon/\varepsilon_{init}) + \sigma_d \cdot (1 - \varepsilon/\varepsilon_{init})$	-
Enthalpies de référence			
ρ_{gsat}	kg/m ³	$\frac{M_{gc} P_{sat}}{R_g T_{sat}}$	Loi gaz parfaits
h_{gsat}	J/kg	$h_{lsat} + L_0$	relation générale
h_{lsat}	J/kg	$-\delta_{sat} \cdot \frac{\rho_{gsat}}{\rho_l - \rho_{gsat}} \cdot L_0$	référence libre
δ_{sat}	1	30	choix libre
Propriétés physiques du cyclohexane diphasique (Réf : http://webbook.nist.gov/cgi/cbook.cgi?Name=cyclohexane&Units=SI)			
L_0^m	kJ/mol	29.97	
$P_{sat,ref}$	Pa	$1.013e + 5$	
$T_{sat,ref}$	K	353.9	
P_{sat}	Pa	$1.5 \cdot 10^5$	Pression de travail chez MBD
T_{sat}	K	368	Clausius-Clapeyron, validé MBD
L_0	kJ/kg	356.1	L_0^m/M_g

symbole	unité	expression	Référence
σ	J/m^2	$17.99 \cdot 10^{-3}$	http://www.ddbst.com/en/EED/PCP/SFT_C50.php , (E.S., 1981)

Propriétés du diphasique général (Réf : (Wang and Beckermann, 1993), valeurs standards)

k_{rl}	1	S^3	
k_{rg}	1	$(1 - S)^3$	
P_c	Pa	$P_{c,max} \cdot f_{Lev}(S)$	
$f_{Lev}(S)$	1	$1.417 \cdot (1 - S) - 2.12 \cdot (1 - S)^2 + 1.263 \cdot (1 - S)^3$	
$P_{c,max}$	Pa	$\sqrt{\frac{\varepsilon}{K_0}} \cdot \sigma$	

Propriétés physiques du cyclohexane liquide (Réf : (Belorgey-Beaugrand, 2000, p. 227))

ρ_l	kg/m^3	719	
μ_l	$Pa \cdot s$	$4.26 \cdot 10^{-4}$	
λ_{Tl}	$W/m/K$	0.152	
c_l	$J/kg/K$	1695	chemistry webbook

Propriétés physiques du cyclohexane gaz (Réf : (Vignoles et al., 2006))

μ_g	$Pa \cdot s$	$(-9.61 + 0.358T - 1.46 \cdot 10^{-4}T^2 + 3.63 \cdot 10^{-8}T^3) \cdot 10^{-7}$	
c_g	$J/kg/K$	$-649.28 + 7.28 \cdot T - 0.003 \cdot T^2 + 1.57 \cdot 10^{-7}T^3$	
λ_{Tg}	$W/m/K$	$(1/\lambda_{gl} + 1/\lambda_{gc})^{-1}$	
λ_{gl}	$W/m/K$	$-0.02329 + 1.1092 \cdot 10^{-4} \cdot T - 2 \cdot 10^{-8} \cdot T^2$	
λ_{gc}	$W/m/K$	$d_p \cdot P_{sat} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{R_{gas}}{M_{cx} \cdot T}}$	
M_{gc}	g/mol	84.162	http://webbook.nist.gov/cgi/cbook.cgi?Name=cyclohexane&Units=SI
M_{gX}	g/mol	23.27	Calcul via la composition en C et H

Diffusion d'espèces (Réf : (Vignoles et al., 2006), (Poling et al., 2001, chp. 11-3))

D_{cx}	m^2/s	$\frac{0.00266 \cdot 10^{-4} \cdot T^{1.5}}{P_{bar} \cdot (M_{cx})^{0.5} \cdot \sigma_{cx}^2 \cdot \Omega_D}$	
P_{bar}	bar	$\frac{P_g}{1.013 \cdot 10^5}$	-
M_{cx}	g/mol	$\frac{1}{1/M_{gx} + 1/M_{gc}}$	
σ_{cx}	m	$\frac{\sigma_c + \sigma_x}{2}$	
σ_c	m	6.182	(Poling et al., 2001, B.2) cyclohexane
σ_x	m	4.163	code de Vignoles
Ω_D		$\frac{1.06036}{T_g^{0.15610}} + 0.193 \cdot \exp(-0.47635 \cdot T_g) + 1.03587 \cdot \exp(-1.52996 \cdot T_g) + 1.76474 \cdot \exp(-3.89411 \cdot T_g)$	
T_g		$\frac{T}{\varepsilon_{cx}}$	
ε_{cx}		$\sqrt{\varepsilon_c \cdot \varepsilon_x}$	code de Vignoles
ε_c		297.1	(Poling et al., 2001, B.2) cyclohexane
ε_x		215.7	code Vignoles

symbole	unité	expression	Référence
f_D		$2 \frac{\tilde{\varepsilon}}{\eta_d}$	code Vignoles

Dépôt (Réf : (Vignoles et al., 2006) et références dedans, (Belorgey-Beaugrand, 2000))

E_a	kJ/mol	305	
a_k	$m/s/K^{bk}$	8	
b_k	1	2.02	
Ω_s	m^3/mol	$\frac{M_{gc}}{\rho_{pyC}}$	-
ν_{pyC}	1	1.29	
ν_X	1	2.95	

Propriétés physiques du milieu poreux - Travaux antérieurs sur des matériaux similaires (Réf : (Vignoles et al., 2006), (Leutard, 1999))

ρ_{pyC}	kg/m^3	2180	
ρ_s	kg/m^3	$\rho_{fibre} \cdot (1 - \varepsilon_{init}) + \rho_{pyC} \cdot (\varepsilon_{init} - \varepsilon)$	
ρ_{vierge}	kg/m^3	$\rho_{fibre} \cdot (1 - \varepsilon_{init})$	
c_s	$J/kg/K$	$-42.4678 + 2.8516 \cdot T - 0.001 \cdot T^2$	(c_f dans (Vignoles et al., 2006))
$K_{0x/y}$	m^2	$\tilde{K}_0 / \tilde{K}_{0,init} \cdot K_{0x/y,init}$	
\tilde{K}_0	m^2	$(\tilde{\varepsilon} / \eta_v) \cdot d_p^2 / 32$	
$\tilde{\varepsilon}$	1	$\varepsilon - \varepsilon_{res,s}$	
$\varepsilon_{res,s}$	1	0.04	
η_v	1	$2.76 \tilde{\varepsilon}^{-0.66} \cdot [\ln(\varepsilon)]^2$	
d_p	m	$4 \cdot \tilde{\varepsilon} / (\sigma_v + 100)$	rajout numérique : $\sigma_v + 100$
σ_v	$1/m$	$4/d_{f0} \cdot [(2 - \varepsilon_{init}) \cdot (\tilde{\varepsilon} / \varepsilon_{init}) - (\tilde{\varepsilon} / \varepsilon_{init})^2]$	
d_{f0}	μm	10	
$\tilde{\varepsilon}_{init}, \sigma_{v,init}, d_{p,init}, \eta_{v,init}, \tilde{K}_{0,init}$: valeurs correspondantes à $\varepsilon = \varepsilon_{init}$			
η_d	1	$\tilde{\varepsilon}^{-0.66}$	
$\lambda_{Ts,x}$	$W/m/K$	$\lambda_{Ts,x,T} \cdot \lambda_{Ts,x,\rho} \cdot 0.61 \cdot \lambda_{Ts,x,\rho 2}$	rajout facteur $\lambda_{Ts,x,\rho 2}$
$\lambda_{Ts,y}$	$W/m/K$	$\lambda_{Ts,y,T} \cdot \lambda_{Ts,y,\rho} \cdot 0.57 \cdot \lambda_{Ts,y,\rho 2}$	rajout facteur $\lambda_{Ts,y,\rho 2}$
$\lambda_{Ts,x,\rho}$	-	$-0.053 + 0.35 \left(\frac{\rho_s}{\rho_{vierge}} \right) + 0.967 \left(\frac{\rho_s}{\rho_{vierge}} \right)^2$	
$\lambda_{Ts,y,\rho}$	-	$-0.164 + 0.31 \left(\frac{\rho_s}{\rho_{vierge}} \right) + 0.854 \left(\frac{\rho_s}{\rho_{vierge}} \right)^2$	
$\lambda_{Ts,ref}$	$W/m/K$	1	

Propriétés physiques du milieu poreux - Mesures et ajustements aux matériaux utilisés lors de cette thèse

ε_{init}	1	0.77	
ρ_{fibre}	kg/m^3	1810	
$\lambda_{Ts,x,T}$	-	$-((T - 273 - 900)^2) \cdot 0.000004 + 16$	
$\lambda_{Ts,y,T}$	-	$-((T - 273 - 850)^2) \cdot 0.000011 + 35$	
$\lambda_{Ts,x,\rho 2}$	-	$1/12.2/(1 - \varepsilon)$	
$\lambda_{Ts,y,\rho 2}$	-	$1/10.0/(1 - \varepsilon)$	
$K_{0x,init}$	Da	30	
$K_{0y,init}$	Da	60	