



École Doctorale de Physique et des Sciences de la Matière

THÈSE de Doctorat

Discipline : Physique théorique et mathématiques

Contribution à l'ordre dominant de la polarisation hadronique du vide au moment magnétique anomal du muon en QCD sur réseau avec quatre saveurs de quarks à leur masse physique.

écrite et présentée par

Rehan MALAK

dirigée par

Laurent LELLOUCH

soutenance le 12 décembre 2016

devant le jury composé de

Serge Lazzarini (CPT, Aix-Marseille Université)

Laurent Lellouch (CPT, CNRS)

Jaume Carbonell (IPN, CNRS)

Christian Hoelbling (Bergische Univ. Wuppertal)

Sándor Katz (Eotvos Univ. Budapest)

Président du jury

Directeur de thèse

Rapporteur / Examineur

Examineur

Rapporteur

Je remercie Laurent Lellouch pour avoir accepté de diriger cette thèse et supporté mes très très nombreux égarements. Sa patience face à mon approche très peu conventionnelle de la recherche scientifique et sa générosité lors des périodes les plus critiques auront été déterminantes pour mener à bien ce travail.

Je remercie Edouard Audit pour son accueil à la Maison de la Simulation. J'ai bénéficié dans son laboratoire des meilleures conditions de travail possible.

Je remercie Serge Lazzarini pour avoir accepté de présider le jury, Jaume Carbonell et Sándor Katz pour avoir accepté d'être rapporteur et enfin Jaume Carbonell et Christian Hoelbling pour avoir accepté d'examiner cette thèse.

Je remercie Valérie Belle qui a organisé avec beaucoup de professionnalisme mes fréquents aller-retours entre Paris et Marseille.

Je remercie tout le personnel passé et présent de la Maison de la Simulation et en particulier : Julien B., Julien D., Samuel, Pierre, Martial, Matthieu, Maxime, Fabien, Sophie, Florence, Frédéric, Ralitsa, Giorgio, Karen,...

Je remercie toutes les personnes qui contribuent à la sphère du logiciel et de l'internet libre en donnant de leur temps sans compter et dans un esprit de partage. Les résultats de cette thèse ont été obtenus à l'aide des outils qu'ils ont développés.

Je remercie ma mère, mon père et mes deux frères et je salue mes deux nièces et mon neveu. Je remercie ma grand-mère pour s'être tant occupée de moi. Je réalise chaque jour la chance que j'ai eue.

La science m'apportera peut-être des réponses. Les amis et les amies, leur compagnie lors de repas et de discussions interminables, lors de fêtes et de concerts en tous genres, lors de promenades et de voyages, m'apportent du bonheur.

Quand nous sommes mus, non par la peur de voir s'évanouir une illusoire sécurité, mais par une soif de connaître, alors l'erreur, comme la souffrance ou la tristesse, nous traverse sans se figer jamais, et la trace de son passage est une connaissance renouvelée.

Récoltes et Semailles, 5. 2. (2)

Table des matières

Table des matières	iii
Table des figures	vii
Liste des tableaux	x
Introduction	4
1 Le moment magnétique anomal du muon : expérience et modèle standard	5
1.1 Le modèle standard en bref	5
1.1.1 Socle théorique	5
1.1.2 Interactions	6
1.1.3 Fermions	6
1.1.4 Bosons	6
1.1.5 Générations et phénoménologie	7
1.1.6 Quantification et intégrale de chemin	8
1.1.7 Théories effectives et renormalisation	8
1.1.8 Caractère prédictif et précision	8
1.2 Le moment magnétique anomal du muon	9
1.2.1 Le muon	9
1.2.2 Le moment magnétique	9
1.2.3 Le moment magnétique anomal	10
1.2.4 L'argument de Berestetskii	11
1.2.5 Modèle standard et chassé-croisé théorie-expérience	12
1.3 La prédiction du modèle standard	13
1.3.1 Les contributions de l'électrodynamique quantique	13
1.3.2 Les contributions de l'interaction faible	14
1.3.3 Les contributions hadroniques par la phénoménologie et les modèles	15
1.4 Les mesures expérimentales du moment magnétique anomal du muon	19
1.5 Test de précision du modèle standard global	21

2	La chromodynamique quantique sur réseau	25
2.1	La Chromodynamique Quantique	26
2.1.1	Les champs de quarks et de gluons	26
2.1.2	La partie fermionique de l'action de la QCD	27
2.1.3	L'invariance de jauge de l'action fermionique	27
2.1.4	L'action gluonique	28
2.1.5	La symétrie chirale	29
2.1.6	La quantification par intégrale de chemin	31
2.1.7	La liberté asymptotique et le confinement	32
2.2	La Chromodynamique Quantique Sur Réseau	33
2.2.1	La régularisation sur réseau	36
2.2.2	Le doublement des degrés de libertés	38
2.2.3	Les fermions de Wilson	38
2.2.4	Les fermions Staggered	39
2.2.5	L'amélioration de Symanzik	40
2.2.6	Le smearing des champs de jauge	42
2.3	Les simulations numériques	42
2.3.1	Le Monte-Carlo hybride	43
2.3.2	Exemple d'observable : la masse d'un hadron stable au repos	44
2.3.3	La détermination de l'échelle	48
2.3.4	Définir le point physique	50
2.3.5	Les erreurs statistiques	51
2.3.6	AIC et les erreurs systématiques	51
3	La contribution hadronique de polarisation du vide au premier ordre à a_μ via le réseau : méthodes	53
3.1	HVP euclidien et relation à $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$	54
3.1.1	Tenseur de polarisation	54
3.1.2	Partie scalaire du tenseur	55
3.1.3	Facteurs de forme	56
3.1.4	Calcul de $a_\mu^{\text{QED,(2)}}$ et de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$	57
3.1.5	Limites de la méthode	60
3.2	Calcul du tenseur de polarisation du vide sur le réseau	61
3.2.1	Identités de Ward pour le courant discrétisé sur le réseau	61
3.2.2	Conditions périodiques twistées	62
3.2.3	Contractions de Wick connectées et déconnectées	63
3.2.4	Décomposition du tenseur $\Pi_{\mu\nu}$	65
3.2.5	Estimation des contributions déconnectées à la limite d'isospin	66
3.3	La description hybride de $\Pi(Q^2)$	67
3.4	Méthode de la dérivée seconde	71

3.5	Renormalisation additive par ajout d'un 2-moment	73
3.6	Approximation de Padé par les coefficients de Taylor	74
4	Résultats pour la contribution hadronique du vide à a_μ à ordre électromagnétique dominant	79
4.1	Étude des effets de volume fini avec fermions de Wilson	79
4.1.1	Saveur légère	81
4.1.2	Saveur strange	83
4.1.3	Conclusion	84
4.2	Obtention des contributions connectées à $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ avec fermions <i>Staggered</i>	84
4.2.1	Composante du tenseur de polarisation et moments	85
4.2.2	Différentes approches pour la contribution provenant de $Q^2 \leq 0.2 \text{ GeV}^2$ à $a_\mu^{\text{LO-HVP}}$	87
4.2.3	Interpolation au point de masse physique et extrapolation à la limite du continu de Π	88
4.2.4	Contribution pour $Q^2 \geq 0.2 \text{ GeV}^2$ à $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$	89
4.3	Résultats pour les contributions connectées à $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ et discussion	93
4.3.1	Résultats avec erreurs statistiques	93
4.3.2	Résultats avec estimations des erreurs systématiques et discussion	94
	Conclusions et perspectives	101
	Annexes	103
A	Approximations de Padé	103
B	Modèles des fits physiques	104
C	Supercalculateurs et suites logicielles pour la simulation et le post-traitement	106
	Bibliographie	109

Table des figures

1.1	Classement des particules du modèle standard auxquels il faut ajouter les antiparticules.	7
1.2	Diagramme de Feynman <i>tree-level</i> (sans boucle) pour le moment magnétique. Il correspond à la valeur de Dirac $g_\ell = 2$	10
1.3	Diagramme de Feynman correspondant à la plus simple des corrections quantiques au moment magnétique d'un lepton : le terme universel de Schwinger de l'éq. (1.8).	11
1.4	Classe de diagrammes de Feynman participant à l'interaction électromagnétique d'un lepton avec un photon.	11
1.5	Compilation des résultats expérimentaux pour $R_{\text{QCD}}^{\text{data}}(s)$ où $E = \sqrt{s}$ [12].	18
1.6	À gauche, anneau de stockage du CERN, à droite, celui de E821 du BNL (et du futur E989 du Fermilab).	19
1.7	Schéma illustrant la précession de Larmor.	20
1.8	La déviation entre théorie et expérience pour a_μ est-elle due à la QCD non perturbative (diagrammes des deux contributions hadroniques à gauche) ou à de la nouvelle physique (diagramme de droite)?	22
2.1	Illustration du caractère non-abélien de la théorie de jauge QCD : les gluons sont chargés et peuvent ainsi auto-interagir contrairement au cas des photons en QED.	28
2.2	En haut, résultats récents de déterminations de la constante de couplage α_S comparés à la solution de l'équation du groupe de renormalisation à 4 boucles [13]. En bas, comparatif des constantes de couplage des trois interactions électromagnétique (EM), faible (weak) et forte (S) et qui explique pourquoi on utilise à basse énergie des méthodes non-perturbatives en QCD quand on peut se contenter de méthodes perturbatives en QED.	34
2.3	Spectre hadronique limité aux saveurs <i>up</i> , <i>down</i> , <i>strange</i> , <i>charm</i> . Les hadrons correspondants peuvent alors se classer en représentations de SU(4) [13].	35
2.4	Principe de la QCD sur réseau : sur un espace-temps discrétisé de maille a et fini de taille $T \times L$, on définit le champ de jauge sur les arêtes (en orange) et les champs de quarks (en rouge) sur les vertex.	36

2.5	Les 3 premières figures sont les boucles rectangulaires utilisées dans l'action de Luscher-Weisz. À droite, les plaquettes nécessaires aux termes de Sheikholeslami-Wohlert.	41
2.6	Fit du corrélateur par 2 paramètres : masse du pion et du préfacteur.	46
2.7	Fit de la masse effective par 1 paramètre : masse du pion.	47
2.8	Fit du corrélateur par 2 paramètres : masse du kaon et du préfacteur.	47
2.9	Fit de la masse effective par 1 paramètre : masse du kaon.	48
3.1	Noyau et intégrande typique pour le calcul de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$	60
3.2	Vérification de l'identité de Ward pour le courant non-conservé J^ν à la source (bas) et J^μ conservé à la cible (haut). On voit que l'utilisation du courant conservé impose de façon beaucoup plus précise l'identité de Ward.	62
3.3	L'utilisation de conditions <i>twistées</i> permet de couvrir les impulsions habituellement inaccessibles mais elles ne contraignent pas les extrapolations car le bruit statistique devient énorme. Sur ce plot, l'erreur statistique est en fait plus grande que l'axe vertical à gauche.	63
3.4	Contributions Wick-connectées $\Pi_{\mu\nu}^{\text{wc}}$ au tenseur total $\Pi_{\mu\nu}$. Les deux photons appartiennent à la même boucle de quark.	64
3.5	Contributions Wick-déconnectées $\Pi_{\mu\nu}^{\text{wd}}$ au tenseur total $\Pi_{\mu\nu}$. Les deux photons appartiennent à des boucles de quark distinctes.	64
3.6	Modèle pour $Q_{max}^2 \rightarrow a_\mu^{(l),\text{HVP,LO}}[0, Q_{max}^2]$ pour la saveur légère basé sur les données expérimentales	70
3.7	Modèle pour $Q_{max}^2 \rightarrow a_\mu^{(s),\text{HVP,LO}}[0, Q_{max}^2]$ pour la saveur <i>strange</i> basé sur les données expérimentales	70
3.8	$\Pi(0)$ dans le cas <i>light</i> calculé par les moments, comparé au fit par un Padé de la méthode usuelle.	74
3.9	$\Pi(0)$ dans le cas <i>strange</i> calculé par les moments, comparé au fit par un Padé de la méthode usuelle.	75
3.10	$\Pi(0)$ dans le cas <i>charm</i> calculé par les moments, comparé au fit par un Padé de la méthode usuelle.	75
4.1	Effets de volume fini sur la contribution connectée des quarks <i>u</i> et <i>d</i> à la fonction de polarisation du vide $\Pi(Q^2)$. Les différentes couleurs correspondent à $\Pi(Q^2)$ en fonction de Q^2 pour les quatre différents volumes, chacune obtenue avec les trois méthodes décrites dans le texte avec les noms correspondants à ceux de la légende en anglais. Les points sont les résultats obtenus aux différentes impulsions quantifiées des réseaux. Les courbes correspondent à des fits des points à une fonction de Padé [1, 1] avec la valeur de $\Pi(0)$ comme paramètre libre.	81

4.2	Effets de volume fini sur la contribution des quarks u et d à $a_\mu^{\text{LO-HVP}}$ intégrée jusqu'à $Q^2 = 1 \text{ GeV}^2$ dans l'équation (3.41), $a_\mu^{(l),\text{HVP,LO}}[Q^2 \leq 1 \text{ GeV}^2]$, modulo le facteur de constante de renormalisation Z_V . Cette valeur est obtenue à partir des fonctions de fit pour $\Pi(Q^2)$ vs Q^2 décrites dans la figure 4.1. Les différents points correspondent aux quatre volumes et aux méthodes utilisées pour extraire $\Pi(Q^2)$ à partir de la fonction de corrélation du courant électromagnétique. L'axe des ordonnées est donné par la valeur de $1/LM_\pi$ de la simulation correspondante.	82
4.3	Effets de volume fini sur la contribution connectée du quark s à la fonction de polarisation du vide $\Pi(Q^2)$. Les notations et le détail des points et des courbes sont les mêmes que dans la figure 4.1.	83
4.4	Effets de volume fini sur la contribution du quark s intégrée jusqu'à $Q^2 = 1 \text{ GeV}^2$ dans l'équation (3.41), $a_\mu^{(s),\text{HVP,LO}}[Q^2 \leq 1 \text{ GeV}^2]$, modulo le facteur de constante de renormalisation Z_V . Les notations et le détail des points et des courbes sont les mêmes que dans la figure 4.2.	84
4.5	Espace des paramètres exploré dans les simulations avec fermions <i>staggered</i> . Les points indiquent les valeurs de la masse du pion et du kaon "chiral", $M_{K^\chi} = \sqrt{M_K^2 - M_\pi^2}/2$ de chaque simulation. Ces masses, qui sont respectivement reliées à $(m_u + m_d)$ et à m_s , indiquent la proximité des simulations au point de masse physique, montré par une croix. Les simulations sont donc toutes proches du point de masse physique, ce qui permet une interpolation précise des résultats de la simulation à ce point. Les différentes couleurs des points représentent la valeur de la taille de maille de la simulation correspondante.	86
4.6	Comparatif des trois méthodes décrites dans le texte, utilisées pour déterminer la fonction de polarisation $\hat{\Pi}$ dans le cas de la contribution des quarks légers, à partir de la fonction à deux points du courant électromagnétique. Pour la méthode traditionnelle, la valeur de $\Pi(0)$ obtenue dans le fit est soustraite à $\Pi(Q^2)$ pour donner $\hat{\Pi}(Q^2)$	88
4.7	Même comparatif que dans la figure 4.6, mais pour le cas du <i>strange</i>	88
4.8	Même comparatif que dans la figure 4.6, mais pour le cas du <i>charm</i>	89
4.9	Résultats du fit physique des valeurs des coefficients Π_1 et Π_2 pour la saveur légère, obtenues à partir des 13 simulations, selon les trois méthodes décrites dans le texte. Ce qui est montré ici est la dépendance des coefficients sur la maille carrée des réseaux, a^2 . Celle-ci est obtenue en interpolant les résultats des 13 simulations (les points) et des fits (les courbes) au point de masse physique à l'aide des fits eux mêmes.	90
4.10	Extrapolation du continu des coefficients Π_1 et Π_2 pour la saveur <i>strange</i> , obtenue par la même méthode que dans la figure 4.9.	91

4.11	Extrapolation du continu des coefficients Π_1 et Π_2 pour la saveur <i>charm</i> , obtenue par la même méthode que dans la figure 4.9.	92
4.12	Résultats des fits physiques des valeurs de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}(Q^2 \geq 0.2 \text{ GeV}^2)$ pour les saveurs légère, <i>s</i> et <i>c</i> , obtenues à partir des 13 simulations, selon la méthode décrite dans le texte. Ce qui est montré ici est la dépendance de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}(Q^2 \geq 0.2 \text{ GeV}^2)$ sur la maille carrée des réseaux, a^2 . Celle-ci est obtenue en interpolant les résultats des 13 simulations (les points) et des fits (les courbes) au point de masse physique à l'aide des fits eux-mêmes.	94
4.13	Comparaison de notre résultat préliminaire (BMW preliminary) pour $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ de l'équation (4.9) à des déterminations phénoménologiques récentes [65, 66, 67, 64] représentées dans la bande horizontale orange notée <i>Phenomenology</i> ainsi qu'aux deux seuls autres résultats du réseau obtenus avec des simulations $N_f = 2 + 1 + 1$ [68, 69] représentés dans la bande horizontale rouge notée <i>Lattice QCD</i> , décrits dans le texte. La bande verticale verte notée <i>No new physics</i> est obtenue à partir de la mesure expérimentale de a_μ en soustrayant à celle-ci toutes les contributions calculées du modèle standard autre que celle de la polarisation du vide. C'est donc la valeur que devrait prendre $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ si la mesure expérimentale de a_μ ne contient pas de contributions de physique au delà du modèle standard.	97
C.7	Architecture du pipeline d'analyse C++/Python utilisé pour l'analyse des corrélateurs issus du code de simulation DynQCD	108

Liste des tableaux

1.1	Convergence numérique dans le calcul QED des boucles pour la contribution a_μ^{QED} les coefficients C_i issus de [7] se décomposent en A_i qu'on peut trouver dans [88], où i indique le nombre de boucles.	14
1.2	Historique des résultats expérimentaux du CERN et du BNL pour a_μ	21
1.3	Tableau récapitulatif des contributions du modèle standard à a_μ et comparaison du résultat théorique avec la mesure expérimentale.	21

2.1	Paramètres d'une simulation <i>Staggered</i> $2 + 1 + 1$. En plus de la taille du réseau et des masses de quark, on a β qui a été défini en 2.45 et caractérise essentiellement le couplage et dépend donc notamment de l'échelle a (qui par contre n'est pas un paramètre d'entrée en QCD sur réseau). Un exemple de méthode de détermination a posteriori de a en unité physique sera donnée en section 2.3.3	46
3.1	Paramètres de la simulation au réseau le plus fin.	74
4.1	Taille des réseaux et masse du pion dans les simulations avec fermions de Wilson dédiées à l'étude de volume fini. La taille de maille est ici d'environ 0.104 fm.	80
4.2	Paramètres des simulations avec fermions <i>staggered</i> dédiées à l'étude de la fonction de polarisation $\Pi(Q^2)$ et du moment magnétique anomal du muon au point physique.	85
4.3	Contributions des différents saveurs de quarks aux coefficients de Padé Π_1 et Π_2 simultanément interpolées au point de masse physique et extrapolées à la limite du continu. Le tableau compare les valeurs de ces dérivées de $\hat{\Pi}(Q^2)$ en $Q^2 = 0$ obtenues par les trois méthodes détaillées dans le chapitre 4.2.2.	95
4.4	Résultats pour les contributions connectées de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ par saveur de quark et pour les trois différentes méthodes que nous avons utiliser pour déterminer la fonction de polarisation à partir de la fonction à deux points du courant électromagnétique. Les erreurs données dans ce tableau sont statistiques seulement.	98
4.5	Résultats totaux préliminaires, dans la limite d'isospin, pour les coefficients Π_1 et Π_2 avec erreurs statistiques, erreurs systématiques et corrections de volumes finis. Les résultats sont donnés pour les contributions connectées correspondant aux divers saveurs de quark, pour les contributions déconnectées, pour les deux contributions d'isospin et pour la somme des contributions.	99
4.6	Valeurs de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ munies de l'erreur totale (quadratiquement sommée) pour chaque saveur et intervalle d'intégration. Pour l'intervalle $[0, 0.2 \text{ GeV}^2]$, elles correspondent à l'intégration selon l'équation 3.41 avec des fonctions de Padé construites à partir des coefficients Π_1 et Π_2 du tableau 4.5. Sont représentés également les totaux partiels par saveur et les totaux partiels par intervalle d'intégration, ainsi que le total global.	99
B.7	Dépendance des fits physique et d'extrapolations du continu	104

Introduction

Dans le modèle standard de la physique des particules, l'électron, le muon et le tau (et leurs antiparticules) appartiennent à la famille des leptons et partagent à ce titre des propriétés similaires : ce sont des particules élémentaires de spin $1/2$ qui ne couplent directement qu'à l'interaction électromagnétique et faible. Le fait que ces particules chargées électriquement possèdent un moment angulaire intrinsèque implique qu'elles ont un moment magnétique dipolaire, c'est à dire qu'elles se comportent comme un aimant dans un champ magnétique.

Le rôle en physique des moments magnétiques anomaux des leptons

Les moments magnétiques des leptons sont des quantités qui ont accompagné le développement de la physique moderne, depuis la postulation de l'existence du spin de l'électron par Goudsmit et Uhlenbeck [71] suite à l'expérience de Stern-Gerlach [70].

En 1928, le physicien anglais P.A.M. Dirac a proposé une équation qui décrit l'évolution dans le temps de la fonction d'onde d'une particule massive de spin $1/2$. C'est une généralisation de l'équation de physique quantique de Schrödinger au cas relativiste. Comme nous le verrons dans le chapitre 1, l'équation de Dirac prédit de façon précise la constante de proportionnalité qui relie le moment magnétique dipolaire d'une particule de spin $1/2$ à son spin.

Or en 1948, dans une expérience qui fut récompensée par un prix Nobel, P. Kusch et H.M. Foley ont montré que le moment magnétique de l'électron déviait de 1.19 ± 0.05 pour mille de la valeur prédite par Dirac [1]. Cette déviation fut considérée comme une "anomalie", d'où le nom de moment magnétique anomal. La même année, J. Schwinger, lui aussi récompensé par un prix Nobel, montra que cette petite déviation pouvait être comprise comme une correction quantique prédite par l'électrodynamique quantique (QED) [2].

La QED est une généralisation de la théorie de Dirac qui prend en compte les fluctuations quantiques du vide permises par le principe d'incertitude de Heisenberg. Les calculs du moment magnétique anomal de l'électron en QED n'ont eut cesse de s'améliorer depuis, prédisant avec une précision croissante les mesures expérimentales, elles-même de plus en plus précises, si bien que la QED devint l'archétype de la théorie quantique relativiste sur laquelle tout le modèle standard de la physique des particules

moderne est basé.

Aujourd'hui, le moment magnétique de l'électron donne l'une des mesures les plus précises de la constante de structure fine de la QED et celui du muon nous révèle peut-être une physique fondamentale nouvelle. En effet, pour ce dernier, on observe actuellement une déviation entre la prédiction du modèle standard et la mesure expérimentale de ce moment (voir ci-dessous et le chapitre 1). Comme pour l'électron, le rôle important que joue le moment magnétique du muon vient du fait qu'il peut être mesuré très précisément et qu'il l'a été avec une précision croissante depuis sa première mesure en 1957 [3].

À chaque étape dans ce processus de mesure, pour expliquer les résultats expérimentaux, les théoriciens ont dû prendre en compte des fluctuations quantiques du vide de plus en plus petites. Aujourd'hui, pour calculer le moment magnétique du muon, on doit prendre en compte tous les degrés de liberté du vide quantique et donc l'intégralité de la phénoménologie complexe du modèle standard : les interactions électromagnétiques, les interactions faibles, les interactions fortes et le mécanisme de Higgs. Le comparatif théorie vs. expérience lui assure donc un rôle de test de précision du modèle standard global.

Pourquoi le muon et pas l'électron ou le tau ?

Bien que l'électron, le muon et le tau soient tous les trois des leptons, l'intervalle de masse les séparant est très important, ce qui engendre des propriétés très différentes : alors que l'électron est léger et stable, le tau est extrêmement lourd et se désintègre très rapidement. L'engouement des physiciens pour le muon vient du fait que sa masse rend son moment magnétique beaucoup plus sensible que celui de l'électron à des fluctuations quantiques dues à d'hypothétiques états lourds au delà du modèle standard. Parallèlement sa masse bien moins élevée que le tau lui assure une durée de vie suffisamment longue que les physiciens peuvent étudier son comportement dans un champ magnétique avec une grande précision.

Une déviation inexplicée

Une expérience au *Brookhaven National Laboratory* (BNL) a permis à son terme en 2006 d'apporter une mesure à la précision record de 0.54 ppm (partie par million) [84], soit l'une des plus précises de toute la physique. Si la prédiction théorique du modèle standard permet d'arriver à une précision du même ordre de grandeur, il subsiste cependant en 2016 un écart inexplicé de plus de 3 déviations standards. Ce fait contraste singulièrement avec l'exactitude habituelle des prédictions en physique des particules et a engendré beaucoup d'hypothèses sur la nature de la déviation qu'on peut séparer en deux approches :

- l'une, aventureuse, consistant à entrevoir les signes d'une nouvelle physique au delà

du modèle standard en introduisant de nouveaux degrés de liberté qui pourraient expliquer la déviation

- l'autre, conservatrice, souhaitant réexaminer la prédiction du modèle standard en élaborant de nouvelles méthodes plus précises pour confirmer ou infirmer l'existence de la déviation

La Chromodynamique Quantique et sa formulation sur réseau

Il y a peu de chance que d'éventuelles erreurs qui se seraient immiscées dans les calculs historiques ou plus récents des contributions électromagnétiques et faibles au moment magnétique du muon changent fondamentalement les résultats. Celles-ci sont calculées perturbativement et font consensus. En revanche, les contributions liées à la chromodynamique quantique (QCD), dites hadroniques, sont plus problématiques pour au moins trois raisons :

1. les erreurs associées à ces contributions dominent l'erreur de la prédiction du modèle standard pour le moment magnétique du muon (relativement, ces contributions sont aussi les moins précises)
2. nous n'avons pas encore développé de méthodes systématiques de calcul analytique pour décrire les phénomènes non-perturbatifs de l'interaction forte à basse énergie, directement à partir de la QCD ; or une contribution hadronique sous dominante, celle dite de la diffusion lumière-lumière, qu'implique cette interaction, est estimée à l'aide de modèles dont les erreurs systématiques ne sont pas contrôlées
3. la contribution hadronique dominante, celle dite de la polarisation du vide, une autre contribution théorique est actuellement obtenue en réinjectant de nombreuses données expérimentales issues d'expériences distinctes, transformant ainsi un comparatif théorie vs. expérience en un comparatif moins clair théorie+expériences vs. expérience.

On aimerait dans un premier temps régler les points 2 et 3, c'est à dire avoir un calcul *ab-initio*, à partir du seul modèle standard. C'est ce que permet justement la formulation de la chromodynamique quantique sur réseau une fois simulée sur des supercalculateurs. Si la méthode marche, on peut alors s'attaquer au point 1, c'est à dire tenter d'améliorer la précision en faisant progresser les approches théoriques, les méthodes numériques, etc. et en exploitant des supercalculateurs de plus en plus puissants.

Cette thèse

Nous nous intéressons dans cette thèse à l'étude de la contribution la plus problématique pour le moment magnétique anomal du muon : celle de la polarisation hadronique du vide. Dans le chapitre 1, nous faisons une revue rapide du modèle standard, de ce

qu'est le moment magnétique anomal du muon et des différentes contributions à la prédiction théorique de sa valeur et de la situation expérimentale. Nous discutons également des améliorations apportées du côté expérimental pour affiner l'expérience E821 de Brookhaven et qui deviendra bientôt (dès 2017) l'expérience E989 au Fermilab. Dans le chapitre 2, nous présentons deux discrétisations possibles de la chromodynamique quantique sur réseau qui sont utilisées dans les chapitres suivants. Nous expliquons également comment le vide quantique (hadronique) et l'intégrale de chemin sont simulés sur les supercalculateurs. Nous terminons sur les méthodes numériques utilisées pour déterminer les erreurs statistiques et systématiques. Le chapitre 3 explique comment calculer les contributions de la polarisation du vide au moment magnétique anomal du muon en chromodynamique quantique sur réseau. On présente différentes méthodes qui diminuent les erreurs statistiques et systématiques. Toutes sont liées de près ou de loin à l'utilisation astucieuse de la transformée de Fourier discrète, de dérivées de fonctions de corrélations et de fonctions de Padé qui ont de bonnes propriétés mathématiques de régularité et de convergence pour un nombre faible de paramètres. Cela assure le caractère modèle-indépendant recherché tout au long de cette thèse. Le chapitre 4 présente les résultats obtenus : avec la collaboration Budapest-Marseille-Wuppertal, nous avons développé et amélioré continûment notre suite logicielle (simulation et post-traitement) implémentant (notamment) les formulations de QCD sur réseau et les méthodes statistiques du chapitre 2. Par ailleurs, nous avons implémenté au cours de cette thèse les méthodes du chapitre 3 spécifique au moment magnétique anomal du muon. Cela nous permet d'obtenir une estimation *ab-initio* des contributions dominantes à la contribution de polarisation hadronique du vide avec une précision de quelques pourcents.

Plusieurs des méthodes utilisées pour ce travail sont originales. En particulier, l'une des méthodes du chapitre 3 a été présentée à la conférence *Lattice 2014* à *Columbia University*. Par ailleurs, les résultats numériques des corrections de volume-fini du chapitre 4 ont initié des recherches actuellement en cours de la part de plusieurs équipes de physiciens et nos résultats préliminaires pour la contribution de la polarisation du vide au moment magnétique anomal du muon ont été présentés par deux postdoctorants de notre collaboration à la conférence *Lattice 2016* en juillet à Southampton. On évoquera en conclusion les suites possibles à ce travail.

CHAPITRE 1

Le moment magnétique anomal du muon : expérience et modèle standard

Dans cette partie, on rappelle quelques généralités sur le modèle standard des particules. Cela nous permet d'introduire le muon comme lepton de la seconde génération ainsi que les interactions qui participent à la valeur de son moment magnétique. On peut alors introduire l'argument de Berestetskii. Ce dernier est déterminant pour comprendre la dépendance éventuelle du muon en de nouvelles interactions encore inconnues. En étudiant plus dans les détails les sources d'erreurs des prédictions de chaque contribution, on met alors en lumière la singularité des contributions hadroniques. On parle ensuite des mesures expérimentales, du rôle joué par l'interaction faible et de l'astuce de la fréquence magique. On finit par la déviation actuellement observée avec la prédiction théorique globale et les espoirs suscités par la prochaine expérience E989 du Fermilab. Les références pour le formalisme de la théorie quantique des champs sont [4] [5], pour les contributions du modèle standard [6] [7] et pour l'expérience E989 [8]. La référence [9] propose une excellente introduction pédagogique à la théorie qui sous-tend l'étude du moment magnétique anomal du muon.

1.1 LE MODÈLE STANDARD EN BREF

1.1.1 SOCLE THÉORIQUE

Le modèle standard est l'ensemble des théories élaborées dans les années 1960 et 1970 visant à classer les particules selon leurs propriétés mathématiques (statistiques et géométriques) ainsi qu'à décrire les équations de la cinématique et des interactions auxquelles elles sont soumises. Le formalisme mathématique est celui de la théorie quantique des champs (généralement sur espace-temps plat) ainsi que la théorie de jauge (connexions, fibrés principaux avec groupes unitaires simples). Une place très importante est accordée à la notion de symétrie au sens généralisé noetherien (invariant, courant, ...). Les invariants définissent les nombres quantiques des particules (parité, charge électrique, étrangeté ...) qui participent à leur classement. En se basant sur le formalisme

lagrangien de la mécanique classique et le principe de moindre action, allier simultanément la quantification, l'invariance relativiste, l'invariance de jauge et des conditions de renormalisabilité contraignent les équations fortement et impose, entre autre, l'existence d'antiparticules et de particules de parité gauche et droite.

1.1.2 INTERACTIONS

Il y a trois interactions : l'électrodynamique quantique (QED), l'interaction faible (Weak) ¹ et l'interaction forte décrite par la chromodynamique quantique (QCD). La QED et l'interaction faible se comprennent comme plusieurs facettes d'une même théorie dite électro-faible (EW) sur laquelle se greffe le mécanisme de Higgs.

1.1.3 FERMIONS

Les particules de spin $1/2$ obéissent à la statistique de Fermi-Dirac (généralisation du principe d'exclusion de Pauli) car de spin demi-entier et sont appelés fermions. Ils sont eux-mêmes divisés en leptons, c'est à dire sensibles seulement à l'interaction électro-faible et en quarks, c'est à dire sensible à l'interaction électro-faible et à l'interaction forte. On parle de "saveur" des quarks pour les différencier. Pour des raisons de cohérence mathématique, le spin des particules élémentaires est inférieur à 2 et il n'a pas été découvert de particules élémentaires de spin $3/2$.

1.1.4 BOSONS

Les particules de spin entier obéissent à la statistique de Bose-Einstein (possibilité de former des "condensats"). Parmi celles-ci, les particules élémentaires de spin 1 sont les bosons de jauge. Pour la QED basée sur le groupe abélien $U(1)$, le boson est appelé photon, noté γ , et n'a pas de charge (pas d'auto-interaction). Pour l'interaction faible basée sur le groupe $SU(2) \times U(1)$ (qui inclue également la QED), les bosons supplémentaires après brisure spontanée de symétrie sont appelés W^+ , W^- , Z^0 . Pour la QCD basée sur le groupe $SU(3)$, les bosons sont appelés gluons, g . Dans ces deux dernières interactions avec groupe non-abélien, il y a donc possibilité d'auto-interaction. L'unique particule de spin 0 est le boson de Higgs qui couplé à la théorie électro-faible explique comment certaines particules acquièrent une masse et d'autres non. Il auto-interagit également.

¹Seule interaction à différencier parité gauche et parité droite.

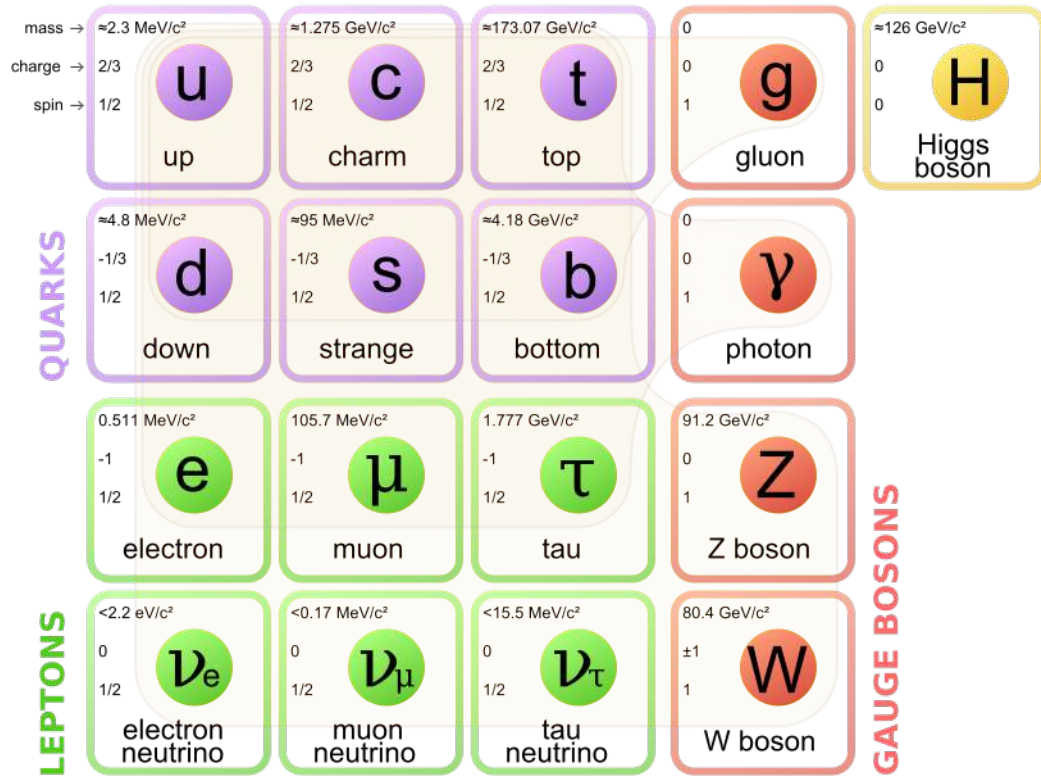


FIG. 1.1 : Classement des particules du modèle standard auxquels il faut ajouter les antiparticules.

1.1.5 GÉNÉRATIONS ET PHÉNOMÉNOLOGIE

Les fermions arrivent en trois générations qui ne se différencient que par leur masse (voir la figure 1.1). La génération I est constituée des particules les plus légères et forme la matière ordinaire. Les générations suivantes II et III sont de plus en plus lourdes et constituées de particules instables aux durées de vie de plus en plus courtes. Chaque génération comporte un doublet de quark et un doublet de leptons ². Les propriétés qualitatives des interactions (liberté asymptotique, confinement et brisure de symétrie chirale de la QCD, pôle de Landau de la QED, ...) et la diversité des particules, en particulier un intervalle de masses très large de $m_{\nu_e} \lesssim 10^{-3} \text{ eV}$ à $m_t \simeq 173 \text{ GeV}$ engendrent une phénoménologie très complexe. Notons pour finir que l'égalité du nombre de générations entre les leptons et les quarks s'explique par les conditions d'annulation des anomalies : les charges des quarks et des leptons sont liées. La violation de la symétrie CP nécessite, quant à elle, une phase dans la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) qui fait le lien entre les états propres de masse et les états propres de saveur des quarks. Or, comme l'ont montré Kobayashi et Maskawa, il faut au moins 3 générations pour qu'une phase émerge [10].

²Doublet de leptons de parité gauche et un singlet de lepton de parité droite

1.1.6 QUANTIFICATION ET INTÉGRALE DE CHEMIN

La quantification peut se faire par le formalisme canonique, c'est à dire partir du formalisme hamiltonien, en remplaçant les champs classiques par des opérateurs quantiques avec relation de commutation et d'anticommutation et opérateurs de création et d'annihilation. Elle peut se faire de manière équivalente via le formalisme lagrangien et l'intégrale de Feynman (ou intégrale de chemin) qui est une "somme" sur tous les états du système, pondérée de façon appropriée. Cela sera traité en détail dans le chapitre 2.

1.1.7 THÉORIES EFFECTIVES ET RENORMALISATION

Le modèle standard n'est pas la théorie fondamentale (si elle existe) expliquant la dynamique de la distribution de masse-énergie dans l'espace-temps :

- Il y a 19 paramètres dans la version sans masses de neutrinos (et donc sans neutrino de parité droite) et au moins 26 autrement
- Il ignore la gravité, n'explique pas la matière noire et une tentative d'explication de l'énergie noire comme énergie du vide quantique ne fonctionne pas ³
- Bien que ce soit une limitation qui a peu d'impact pratique, le modèle standard est "trivial". En effet, si l'on demande qu'il soit applicable à des énergies arbitrairement élevées (en pratique au dessus de l'échelle de Planck), certains de ses couplages (ceux associés aux auto-interactions du Higgs et aux $U(1)$ de l'hypercharge) doivent être nuls.
- Il pose aussi beaucoup de question : pourquoi 3 générations ⁴ ? Pourquoi 3 interactions ? Pourquoi des paramètres sans dimension "non naturels" car situés à des ordres de grandeur $\gg 1$ ou $\ll 1$ (rapport de masse des fermions, non-observation de la violation de la symétrie CP dans les interactions fortes) ? D'où provient l'asymétrie matière-antimatière de l'univers ? ...

1.1.8 CARACTÈRE PRÉDICTIF ET PRÉCISION

La renormalisabilité du modèle standard lui assure cependant un caractère prédictif à la précision chirurgicale. Le moment magnétique anomal des leptons en est un excellent témoin comme on va le voir tout au long de ce chapitre. Le modèle standard a également passé des centaines de tests avec brio, allant de la découverte des bosons de jauge de

³Les 120 ordres de grandeur de différence ont été appelés "la plus mauvaise prédiction jamais faite en physique".

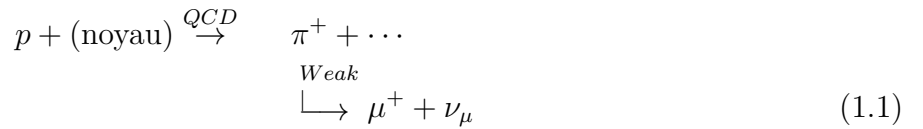
⁴Une extension du modèle standard, le modèle de Pati-Salam fixe le nombre de génération à 3.

l'interaction faible au SPS du CERN dans les années 1980 à la découverte du Higgs en 2012 au LHC, en passant par les tests de précision électrofaibles du LEP au CERN et les usines à mésons B du SLAC et du KEK.

1.2 LE MOMENT MAGNÉTIQUE ANOMAL DU MUON

1.2.1 LE MUON

Le muon, ou plutôt son antiparticule, a été découvert dans les rayons cosmiques par Anderson ⁵ & Neddermeyer en 1935 [72] dans une chambre à brouillard alors qu'ils cherchaient la particule de Yukawa, médiateur des interactions faibles. C'est une copie de masse environ 207 fois plus élevée de l'électron ($m_e = 0.511$ MeV, $m_\mu = 105.658$ MeV) ce qui le rend contrairement au premier instable ($\tau_\mu = 2.197 \times 10^{-6}$ secondes dans le référentiel de repos) en se désintégrant très majoritairement en un électron e^- et deux neutrinos, $\bar{\nu}_e \bar{\nu}_\mu$. La séquence de production de l'anti-muon jusqu'à sa désintégration est similaire dans l'atmosphère et dans les accélérateurs et se résume en :



1.2.2 LE MOMENT MAGNÉTIQUE

En physique classique, une particule dotée d'une charge e , d'une masse m et en notant le moment orbital $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$, possède un moment magnétique :

$$\vec{\mu}_L = \frac{e}{2m} \vec{L} \quad (1.3)$$

et interagit donc avec le champ électromagnétique.

L'observation en spectroscopie optique d'une structure fine dans le champ magnétique inhomogène des atomes [70, 71] a permis aux physiciens de découvrir que l'électron possède un moment cinétique intrinsèque, appelé spin. En remplaçant le moment orbital \vec{L} par le spin :

$$\vec{S} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad (1.4)$$

où les σ_i ($i = 1, 2, 3$) sont les matrices de Pauli, le moment magnétique usuel est alors remplacé par le moment magnétique :

$$\vec{\mu} = g\mu_0 \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad (1.5)$$

⁵Il a également découvert les positrons e^+

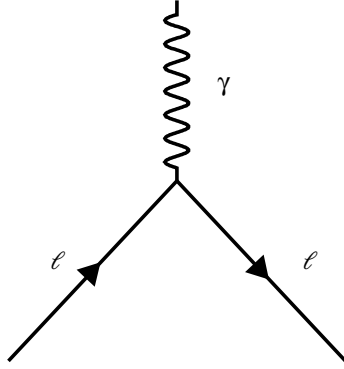


FIG. 1.2 : Diagramme de Feynman *tree-level* (sans boucle) pour le moment magnétique. Il correspond à la valeur de Dirac $g_\ell = 2$.

en notant $\mu_0 = e/2m_e$, pour une particule de spin-1/2, de charge électrique Q en unité de e et de masse m . g est appelé facteur de Landé ou g -facteur.

1.2.3 LE MOMENT MAGNÉTIQUE ANOMAL

La prédiction de l'équation de Dirac donne pour un lepton ℓ le g -facteur $g_\ell = 2$ et est représentée par la figure 1.2. Une expérience à Columbia University a permis de mesurer en 1947 un g -facteur pour l'électron excédant légèrement la valeur de Dirac [76] :

$$a_{\ell=e} = 0.001\,18(3) \quad (1.6)$$

On définit donc le moment magnétique anomal d'un lepton ℓ par :

$$a_\ell = \frac{g_\ell - 2}{2} \quad (1.7)$$

La valeur de Dirac se réécrit donc $a_\ell = 0$. La compréhension théorique de la non nullité de a_ℓ est l'un des grands succès de l'électrodynamique quantique et des techniques de renormalisation de Tomonaga, Schwinger, Feynman en 1948 [74]). Elle a permis à Schwinger de calculer la correction de premier ordre en la constante de structure fine, α , la même année [75] :

$$a_\ell^{\text{QED}(2)} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0.001\,161 \quad (\ell = e, \mu, \tau) \quad (1.8)$$

qui est représentée par le diagramme de Feynman de la figure 1.3 et qui sera recalculé au chapitre 3. Plus généralement, la nature quantique du vide nécessite de connaître l'intégralité des phénomènes physiques participant au courant électromagnétique et représenté par la figure 1.4 pour expliquer la valeur de a_ℓ . On considère donc l'élément de matrice :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \langle \ell^-(p_2) | j_{\text{em}}^\mu(0) | \ell^-(p_1) \rangle \\ &= (-ie) \bar{u}(p_2) \Gamma^\mu(P, q) u(p_1) \end{aligned} \quad (1.9)$$

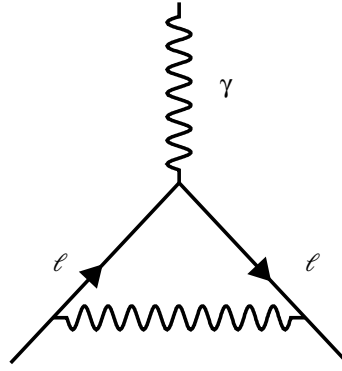


FIG. 1.3 : Diagramme de Feynman correspondant à la plus simple des corrections quantiques au moment magnétique d'un lepton : le terme universel de Schwinger de l'éq. (1.8).

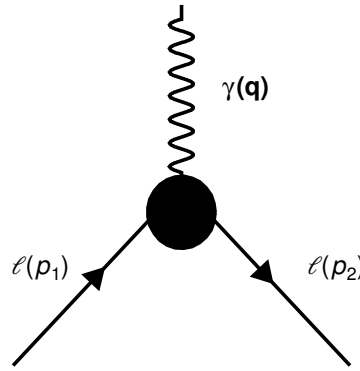


FIG. 1.4 : Classe de diagrammes de Feynman participant à l'interaction électromagnétique d'un lepton avec un photon.

avec $P = p_1 + p_2$, $q = p_2 - p_1$, $u(p_{1,2})$ le spineur de Dirac du lepton et où $\Gamma^\mu(P, q)$ est un tenseur qui dépend des seuls vecteurs disponibles. On montrera au chapitre 3 que \mathcal{M} se décompose de la façon suivante :

$$\mathcal{M} = (-ie)\bar{u}(p_2) \left[\gamma^\mu F_E(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m_\ell} F_M(q^2) \right] u(p_1) \quad (1.10)$$

où l'on a supposé la conservation de la parité, telle qu'elle l'est par les interactions électromagnétiques et fortes et où sont définis les facteurs de forme électrique, $F_E(q^2)$, et magnétique, $F_M(q^2)$, ce dernier vérifiant en $q^2 = 0$:

$$F_M(0) = a_\mu \quad (1.11)$$

Notons que parce-que le moment anomal provient de fluctuations quantiques, au niveau des arbres on a $F_M(0) = 0$ et le moment magnétique est celui donnée par l'équation de Dirac.

1.2.4 L'ARGUMENT DE BERESTETSKII

Ce qui rend le moment magnétique du muon plus intéressant que celui de l'électron, en ce qui concerne la recherche de nouvelle physique fondamentale c'est l'argument de

Berestetskii sur la sensibilité à des énergies plus élevées, c'est à dire des distances plus courtes [73]. Comme le montre l'éq. (1.10), le terme magnétique couple fermions droit et gauche, alors que l'interaction avec le photon préserve l'hélicité. Cela veut dire qu'une contribution au moment magnétique anomal implique un renversement d'hélicité du lepton qui est proportionnel à la masse m_ℓ du lepton, en présence d'interactions qui préservent l'hélicité. Si ces interactions correspondent à l'échange de particules lourdes de masse $M \gg m_\ell$, la mise en pré-facteur du terme $1/2m_\ell$ dans l'éq. (1.10) et le propagateur de la particule échangée impliquent que la contribution de ces particules lourdes, possiblement inconnues, sont proportionnelles à m_ℓ^2/M^2 . Le muon est donc $(m_\mu/m_e)^2 \approx 43000$ fois plus sensible que l'électron à des états lourds. Il est donc beaucoup plus sensible que l'électron à l'interaction électro-faible (EW), à l'interaction forte (QCD), ainsi qu'à une nouvelle physique avec des états encore plus lourds (BSM). Une masse plus lourde et une désintégration pas trop rapide sont les raisons principales qui font du muon une particule privilégiée pour les physiciens : elle est sensible à une éventuelle nouvelle physique et ses propriétés peuvent être mesurées avant qu'elle ne se désintègre (contrairement au tau par exemple).

1.2.5 MODÈLE STANDARD ET CHASSÉ-CROISÉ THÉORIE-EXPÉRIENCE

Depuis la découverte du spin de l'électron dans les années 1920, les physiciens n'ont eu de cesse de mesurer les g -facteurs de particules et en particulier pour le muon, $a_\mu = (g_\mu - 2)/2$, depuis les années 1950. Dans la seconde partie du XXème siècle, l'expérience a inspiré la théorie en aidant à construire le modèle standard en montrant la concordance de plus en plus manifeste entre, d'une part, les prédictions issues de développements à des ordres plus élevés en QED, l'introduction de théories de jauge non abéliennes et, d'autre part, les résultats expérimentaux. Lee et Yang ont compris en 1957 que l'interaction faible viole la symétrie de parité P [77], et donc les muons issus de la désintégration faible des pions selon l'éq. (1.1) sont polarisés longitudinalement [83]. Par ailleurs, la désintégration du muon ainsi produit en électron selon le mode dominant de l'éq. (1.2) indique la direction du spin du muon originel. Un anneau de stockage dans lequel règne un champ magnétique homogène a alors permis au CERN dans les années 1960 [78, 79, 80] de réaliser l'expérience simultanément pour μ^+ et μ^- en testant donc par la même occasion la justesse du théorème CPT à la base de la théorie quantique et relativiste des champs. Il a alors été possible pour la première fois de mesurer a_μ assez précisément pour que les contributions hadroniques doivent être prises en compte. Les résultats actuels de E821 du BNL (et le futur E989 du Fermilab) utilisent la même technique et tout le modèle standard est désormais nécessaire pour interpréter les résultats.

1.3 LA PRÉDICTION DU MODÈLE STANDARD

1.3.1 LES CONTRIBUTIONS DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE QUANTIQUE

Interlude sur l'électron et la constante de structure fine

Nous avons présenté l'argument de Berestetskii dans le paragraphe 1.2.4 : l'électron moins lourd et moins sensible que le muon à d'autres états lourds apparaît moins utile pour détecter de la nouvelle physique. En fait ce constat seul est insuffisant car l'électron est une particule stable et la mesure de son moment magnétique anomal dépasse tous les records de précision grâce à l'expérience d'Harvard [85] :

$$a_e^{\text{EXP}} = 11\,596\,521.807\,3(28) \times 10^{-10} [0.24 \text{ ppb}], \quad (1.12)$$

C'est d'ailleurs la méthode la plus précise pour déterminer la constante de structure fine α dont la connaissance est elle-même nécessaire dans les calculs du moment magnétique du muon. On peut alors extraire en considérant a_e comme une série en α [85] :

$$\alpha^{-1}(a_e^{\text{EXP}}) = 137.035\,999\,157\,0(29)(27)(18)(331)[0.25 \text{ ppb}]. \quad (1.13)$$

où les erreurs sont liées respectivement au calcul à 4 et 5 boucles, à la contribution QCD, à la contribution faible et à a_e^{EXP} .

Notons que l'inversion de la série pour passer de a_e à α est possible de nouveau par un argument de type de Berestetskii : les effets des leptons lourds (muon, tau) en QED, des hadrons, des états du secteur électrofaible et d'une éventuelle nouvelle physique découple en $(m_e/M)^2$. À l'heure actuelle (2016), la prédiction du modèle standard est compatible avec la mesure expérimentale. Rien n'interdit cependant qu'à l'avenir, un protocole expérimental permette une mesure encore plus précise de a_e^{EXP} et fasse de l'électron une particule de choix pour la détection d'une éventuelle nouvelle physique.

Retour au muon

En ce qui concerne le calcul historique à une boucle de Schwinger, la contribution $\frac{\alpha}{2\pi}$ est universelle au sens où elle est valable pour tous leptons chargés.

À partir de 2 boucles, les calculs sont plus compliqués et nécessitent la connaissance des rapports de masses de leptons [89] :

$$m_\mu/m_e = 206.768\,284\,3(52), \quad m_\mu/m_\tau = 0.059\,464\,2(54) \quad (1.14)$$

qui sont issus d'expériences atomiques et brisent l'universalité de telle sorte que $a_e \neq a_\mu \neq a_\tau$.

Les calculs se font actuellement jusqu'à 5 boucles. En considérant les rapports de masse des 3 leptons, on écrit a_μ sous sa forme très générale [88] :

$$a_\mu^{\text{QED}} = A_1 + A_2(m_\mu/m_e) + A_2(m_\mu/m_\tau) + A_3(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau) \quad (1.15)$$

i	C_i	$a_\mu^{(2i)\text{QED}} \times 10^{10}$
1	0.5	11 614 097.321 2(30)
2	0.765 857 425(17)	41 321.762 84(89)
3	24.050 509 96(32)	3 014.190 239(40)
4	130.879 6(63)	38.100 8(19)
5	753.29(1.04)	0.509 38(70)

TAB. 1.1 : Convergence numérique dans le calcul QED des boucles pour la contribution a_μ^{QED} les coefficients C_i issus de [7] se décomposent en A_i qu'on peut trouver dans [88], où i indique le nombre de boucles.

où A_1 est la partie universelle (contenant notamment celle de Schwinger) qui est la même pour tous les leptons. Les autres concernent les boucles de leptons qui diffèrent du lepton extérieur. A_1, A_2, A_3 sont à leur tour décomposés en série de α :

$$\begin{aligned}
A_1 &= A_1^{(2)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + A_1^{(4)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + A_1^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + A_1^{(8)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + \dots \\
A_2 &= A_2^{(4)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + A_2^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + A_2^{(8)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + \dots \\
A_3 &= A_3^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + A_3^{(8)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + \dots
\end{aligned} \tag{1.16}$$

ce qui permet de définir :

$$C_L = \sum_{k=1}^3 A_k^{(2L)} \tag{1.17}$$

et de donner le résultat final suivant sous la forme du tableau 1.1 qui semble confirmer l'intuition selon laquelle la convergence est sous contrôle malgré les diagrammes à n -boucles non calculés. Ils correspondent à 9 diagrammes à 2 boucles calculés analytiquement, 72 diagrammes à 3 boucles calculés analytiquement, 891 diagrammes à 4 boucles calculés numériquement et 12672 diagrammes à 5 boucles calculés numériquement. ⁶

En utilisant les coefficients du tableau 1.1, on obtient :

$$a_\mu^{\text{QED}} = 11\,658\,471.8846(37) \times 10^{-10} \tag{1.18}$$

où l'erreur entre parenthèses est la somme quadratique de l'incertitude sur le terme d'ordre 8, le terme d'ordre 10, $\alpha_{\text{input}}^{-1}$ et enfin celle liée aux rapports de masse.

1.3.2 LES CONTRIBUTIONS DE L'INTERACTION FAIBLE

Les calculs de la contribution électrofaible ont commencé une vingtaine d'années avant que l'expérience soit en mesure de confirmer le calcul. Cela a contribué à justifier la construction d'un nouvel anneau permettant des mesures plus précises que celles

⁶Un exemple de diagramme à 2 boucles est la polarisation leptonique du vide. Un exemple de diagramme à 3 boucles est la diffusion photonique lumière-lumière comme ceux représentés en figure 1.8 en remplaçant le *blob* hadronique (défini en 1.3.3) par une boucle de leptons.

menées au CERN. Les estimations les plus récentes ont été très légèrement modifiées pour prendre en compte la masse du Higgs. Les résultats de E821 à Brookhaven ont confirmé les prédictions et ont conclu que sans la prise en compte de la contribution électrofaible au moment magnétique anomal du muon, la déviation théorie-expérience ne serait pas de 3 sigmas mais de 6 sigmas.

Le résultat à une boucle est [87] :

$$\begin{aligned}
 a_\mu^{(2)\text{EW}} &= \frac{G_F m_\mu^2}{\sqrt{2} 8\pi^2} \left\{ \frac{10}{3} + \frac{1}{3}(1 - 4\sin^2\theta_W)^2 - \frac{5}{3} \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{O}\left(\frac{m_\mu^2}{M_Z^2} \log \frac{M_Z^2}{m_\mu^2}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m_\mu^2}{M_H^2} \int_0^1 dx \frac{2x^2(2-x)}{1-x+\frac{m_\mu^2}{M_H^2}x^2} \right\} \\
 &= 19.482(2) \times 10^{-10}
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

On connaît également le résultat à 2 boucles dont une estimation récente est donnée dans [90]. Le résultat est une contribution négative :

$$a_\mu^{(4)\text{EW}} = -4.12(10) \times 10^{-10} \tag{1.20}$$

La somme des contributions électrofaibles à une et deux boucle :

$$a_\mu^{\text{EW}} = 15.36(10) \times 10^{-10} \tag{1.21}$$

1.3.3 LES CONTRIBUTIONS HADRONIQUES PAR LA PHÉNOMÉNOLOGIE ET LES MODÈLES

L'utilisation d'un traitement perturbatif n'est possible qu'au delà de 2 GeV et hors des seuils de production de particules et des résonances ⁷. Dans ce cas, les calculs consistent à remplacer la boucle de leptons de la contribution de polarisation du vide leptonique par une ou plusieurs boucles de quarks et de permettre à ces quarks d'échanger des gluons, etc. Bien que ce calcul soit compliqué à ordre élevé [11], le vrai challenge se situe dans le domaine non-perturbatif qui fera l'objet des chapitres suivants 2, 3, 4, où du fait d'une grande valeur de la "constante" de couplage $\alpha_s(s)$ aux basses énergies $E = \sqrt{s}$ apparaissent deux phénomènes très importants qui seront traités en détail dans le chapitre suivant 2.1.5 :

- le confinement ;
- la brisure spontanée de symétrie chirale et explicite (masses des quarks non nulles).

⁷Les rappels sur la QCD seront fait au chapitre 2.

Cela a pour conséquence l'émergence d'un spectre constitué d'une multitude d'états hadroniques avec des masses allant de la centaine de MeV pour les pseudo-bosons de Goldstone de cette brisure de symétrie à la dizaine de GeV pour ceux composés de quarks/anti-quarks b et plus pour des baryons constitués de trois b .

La polarisation hadronique du vide par la phénoménologie

Les quarks sont chargés électriquement et contribuent au courant électromagnétique de la façon suivante ⁸ :

$$j_{\text{em}}^{\mu \text{ QCD}} = \frac{2}{3}\bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma^\mu d - \frac{1}{3}\bar{s}\gamma^\mu s + \frac{2}{3}\bar{c}\gamma^\mu c - \frac{1}{3}\bar{b}\gamma^\mu b + \frac{2}{3}\bar{t}\gamma^\mu t \quad (1.22)$$

Ce courant $j_{\text{em}}^{\mu \text{ QCD}}$ est à l'origine de la polarisation hadronique du vide (HVP) et contribue ainsi à ordre α^2 au moment magnétique anomal, a_μ . Cette contribution étant la première de l'interaction forte à a_μ , elle est notée $a_\mu^{\text{QCD,LO}}$, LO signifiant *Leading Order*. Les diagrammes de Feynman qui représentent habituellement les termes des développements perturbatifs sont ici remplacés par des classes de diagramme représenté par un unique diagramme appelé *blob* hadronique que l'on retrouve sur la figure 1.8. En effet, les énergies typique des quarks et gluons dans le *blob* sont de l'ordre de la masse du muon, ce qui est en dessous de l'échelle où la théorie des perturbations peut être appliquée en QCD. Il faut donc pouvoir faire un calcul non perturbatif ou avoir recours à la phénoménologie. L'approche habituelle suit la seconde voie, puisqu'elle combine une relation de dispersion avec des données expérimentales.

La contribution HVP est déterminée par le tenseur de polarisation hadronique du vide :

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle \Omega | T \{ j_{\text{em}}^{\mu \text{ QCD}}(x) j_{\text{em}}^{\nu \text{ QCD}}(0) | \Omega \rangle \quad (1.23)$$

où Ω est le vide de QCD. Ensuite :

- L'invariance de Lorentz et la conservation du courant impliquent la décomposition :

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \Pi(q^2) \quad (1.24)$$

où $\Pi(q^2)$ est un scalaire de Lorentz.

- L'analyticité permet d'écrire :

$$\hat{\Pi}(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(0) = \frac{q^2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s(s - k^2 - i\varepsilon)} \quad (1.25)$$

- L'unitarité et le théorème optique donnent une relation entre la partie imaginaire et les données expérimentales de la section efficace totale e^+e^- en hadrons :

$$\text{Im}\Pi(s) = \frac{s}{4\pi\alpha(s)} \sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) \quad (1.26)$$

⁸Une sommation implicite est faite sur les couleurs, voir le chapitre 2

La combinaison de ces ingrédients permet de dériver une expression dispersive très utile pour $a_\mu^{\text{QCD,LO}}$, en terme du rapport entre la section efficace hadronique et celle de $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ à $s \gg m_\mu^2$ [6] :

$$a_\mu^{\text{QCD,LO}} = \left(\frac{\alpha m_\mu}{3\pi} \right)^2 \int_0^\infty ds \frac{R_{\text{QCD}}^{\text{data}}(s) \hat{K}(s)}{s^2} \quad (1.27)$$

où $\hat{K}(s)$ est une fonction cinématique donnée dans [6] et :

$$R_{\text{QCD}}^{\text{data}}(s) = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) / \frac{4\pi\alpha(s)^2}{3s} \quad (1.28)$$

Un problème qui se pose est que nous n'avons pas de données pour $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$ à des s arbitrairement grands alors que l'intégrale se fait sur toutes les énergies. (Voir la figure 1.5 pour une compilation récente des données.) Heureusement, aux hautes énergies, le rapport R_{QCD} peut être calculé perturbativement. Le calcul de $a_\mu^{\text{QCD,LO}}$ se fait alors en séparant l'intégrale avec une coupure E_{cut}^2 entre la partie non-perturbative calculée avec les données expérimentales et la partie perturbative :

$$a_\mu^{\text{QCD,LO}} = \left(\frac{\alpha m_\mu}{3\pi} \right)^2 \left(\int_{m_{\pi^0}^2}^{E_{\text{cut}}^2} ds \frac{R_{\text{QCD}}^{\text{data}}(s) \hat{K}(s)}{s^2} + \int_{E_{\text{cut}}^2}^\infty ds \frac{R_{\text{QCD}}^{\text{perturbatif}}(s) \hat{K}(s)}{s^2} \right) \quad (1.29)$$

Plus précisément, pour améliorer la précision, l'intervalle est séparé en quatre parties [6] :

- données expérimentales de $R(s)$ jusqu'à $\sqrt{s} = E_{\text{cut}} = 5.2$ GeV
- $R(s)$ calculé perturbativement entre 5.2 et 9.46 GeV
- données expérimentales de $R(s)$ pour la région de résonance du Υ entre 9.46 et 13 GeV
- $R(s)$ calculé perturbativement au dessus de 13 GeV

Le résultat final demande un important travail de compilation des données expérimentales issues de plusieurs expériences (voir figure 1.5). Un calcul récent donne [12] :

$$a_\mu^{\text{QCD,LO}} = 686.99(4.21) \times 10^{-10} \quad (1.30)$$

À l'ordre $O(\alpha^3)$, il y a plusieurs classes de diagrammes de polarisations hadroniques en insérant d'autres polarisations hadroniques ou des corrections de QED et nous n'en parlerons pas ici. Mentionnons simplement les résultats issus de [12] pour illustrer une nouvelle fois qu'aux ordres supérieurs, les contributions diminuent rapidement comme pour celles de QED et de l'interaction faible.

$$a_\mu^{\text{QCD,NLO}} = -9.934(91) \times 10^{-10} \quad (1.31)$$

$$a_\mu^{\text{QCD,NNLO}} = 1.226(12) \times 10^{-10} \quad (1.32)$$

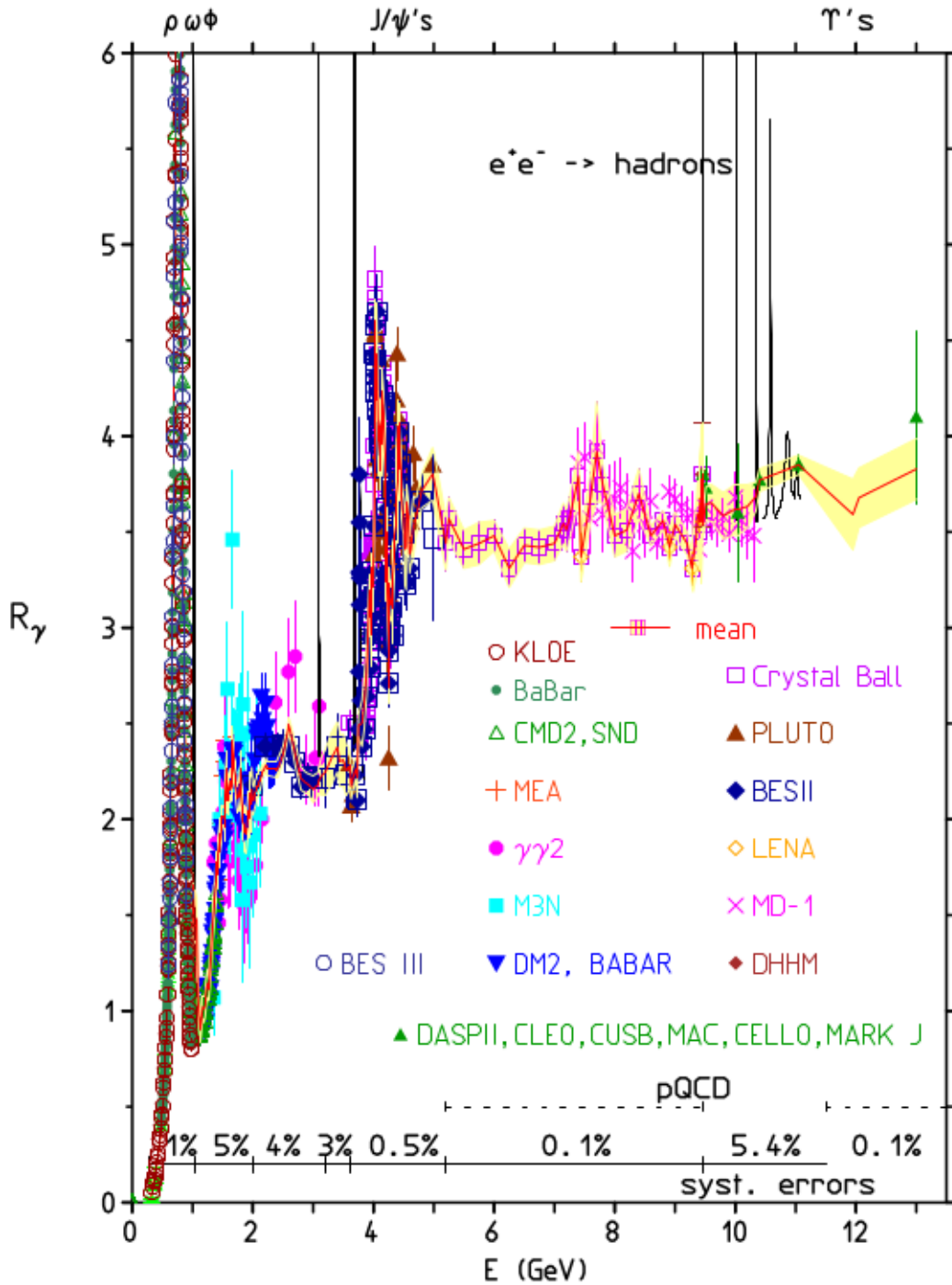


FIG. 1.5 : Compilation des résultats expérimentaux pour $R_{\text{QCD}}^{\text{data}}(s)$ où $E = \sqrt{s}$ [12].

La contribution hadronique de diffusion lumière-lumière

C'est l'autre contribution d'ordre $O(\alpha^3)$. C'est aussi celle qui donne le plus de fil à retordre aux physiciens puisque si elle ne représente pas la contribution avec la plus grande erreur, elle est cependant relativement la plus mal connue. Elle est donnée par le second diagramme de la figure 1.8. De nouveau, les échanges d'états hadroniques comme le π , η et η' nous place complètement en dehors du régime de la QCD perturbative; l'échange dominant étant $\gamma\gamma \rightarrow \pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Par rapport à la contribution de polarisation hadro-

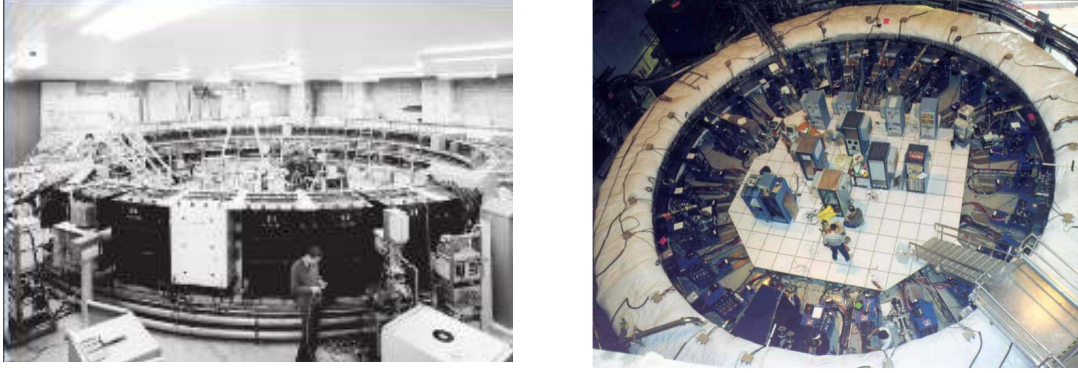


FIG. 1.6 : À gauche, anneau de stockage du CERN, à droite, celui de E821 du BNL (et du futur E989 du Fermilab).

nique du vide, un problème supplémentaire provient du fait que trois des quatre photons sont virtuels et doivent être intégrés sur l'espace des impulsions d'où une impossibilité d'utiliser directement des données expérimentales. Un ensemble de modèles comprenant des extensions de la ChPT et des modèles prenant en compte les résonances permettent cependant de faire des estimations. Les physiciens se sont accordés sur un nombre qui prend en compte ces estimations, appelé le *Glasgow consensus* [86] :

$$a_{\mu}^{\text{QCD,LbL}} = 10.5(2.6) \times 10^{-10} \quad (1.33)$$

1.4 LES MESURES EXPÉRIMENTALES DU MOMENT MAGNÉTIQUE ANOMAL DU MUON

Nous avons vu dans les équations 1.1 et 1.2 comment en reproduisant les phénomènes de collision des rayons cosmiques avec les molécules de la haute atmosphère, on pouvait en laboratoire fabriquer des (anti-) muons polarisés qui se désintègrent en (anti-) électrons dont la direction indique celle du spin du muon originel. Nous allons expliquer maintenant brièvement le principe de la mesure de a_{μ} dans l'expérience E821 du BNL.

E821

En provoquant les collisions d'un faisceau de protons d'une énergie de 24 GeV sur une cible, on produit des pions qui se désintègrent en muons d'impulsions $p_{\mu} = 3.094$ GeV. Ces muons sont alors injectés dans l'anneau de stockage d'un diamètre de 14 mètres où siège un champ magnétique homogène de 1.45 Tesla. Ce dernier modifie la direction du spin de 12' d'arc à chaque tour (voir la figure 1.6). Cette rotation du spin du muon périodique dans un champ magnétique s'appelle la précession de Larmor. Elle est caractérisée par sa fréquence ω_a qu'on peut mesurer. $\omega_a = \omega_s - \omega_c$ est la différence entre la fréquence de précession de spin et la fréquence angulaire cyclotron, différence alors

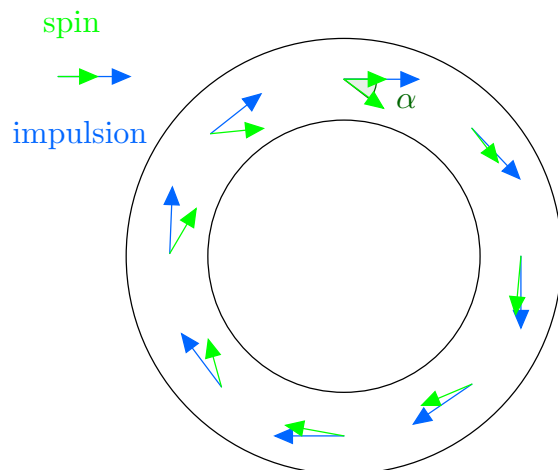


FIG. 1.7 : Schéma illustrant la précession de Larmor.

proportionnelle à a_μ :

$$\omega_c = \frac{eB}{m_\mu \gamma}, \quad \omega_s = \frac{eB}{m_\mu \gamma} + a_\mu \frac{eB}{m_\mu}, \quad \omega_a = a_\mu \frac{eB}{m_\mu} \quad (1.34)$$

avec $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ le facteur de Lorentz et v la vitesse du muon. Le champ électrique permettant de garder en mouvement les muons modifie la fréquence mesurée (simultanément au champ B) [81] :

$$\vec{\omega}_a = \frac{e}{m_\mu} \left(a_\mu \vec{B} - \left[a_\mu - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right] \vec{v} \times \vec{E} \right) \quad (1.35)$$

Un choix judicieux du facteur de Lorentz $\gamma = \sqrt{1 + 1/a_\mu} = 29.3$ permet d'annuler la quantité entre crochet et rend ainsi ω_a mesurée indépendante du champ électrique. Le muon qui a alors pour énergie $E_{\text{magic}} = \gamma m_\mu \simeq 3.098$ GeV, voit par effet relativiste sa durée de vie augmenter de $2.197 \mu\text{s}$ à $64.435 \mu\text{s}$ dans l'anneau où il a le temps de faire plusieurs tours avant sa désintégration. Les électrons qui en résultent sont alignés avec l'axe du spin du muon et sont détectés par l'un des 24 calorimètres répartis autour de l'anneau de stockage. On peut alors montrer que la distribution dans le temps des électrons qui ont une énergie plus grande qu'une énergie E permet de mesurer ω_a avec une grande précision et donc aussi a_μ à condition d'être en capacité de mesurer également le champ magnétique B et de donner en *input* la masse du muon. Le tableau 1.2 montre les progrès réalisés en près de 50 ans. Finalement, l'expérience $g - 2$ du muon au BNL a permis d'obtenir le résultat extraordinairement précis suivant en supposant parfaite la symétrie CPT et corrigé entre 2008 et 2012 après une réévaluation tenant compte du rapport de masse entre muon et électron [84] [89] [13] :

$$a_\mu^{\text{EXP}} = 11\,659\,209.1(5.4)(3.3)[6.3] \times 10^{-10} \quad [0.54 \text{ ppm}] \quad (1.36)$$

où sont données respectivement l'erreur statistique, systématique et totale par somme quadratique. ⁹

⁹La mesure de a_μ est donc 2250 fois moins précise que pour a_e .

Expérience	Année	μ^+/μ^-	$a_\mu \times 10^{10}$ (δa_μ)	Précision [ppm]
CERN I	1961	μ^+	11 450 000(220000)	4300
CERN II	1962-1968	μ^+	11 661 600(3100)	270
CERN III	1974-1976	μ^+	11 659 100(110)	10
CERN III	1975-1976	μ^-	11 659 360(120)	10
BNL	1997	μ^+	11 659 251(150)	13
BNL	1998	μ^+	11 659 191(59)	5
BNL	1999	μ^+	11 659 202(15)	1.3
BNL	2000	μ^+	11 659 204(9)	0.73
BNL	2001	μ^-	11 659 214(9)	0.72
BNL	2008	Moyenne	11 659 208.0(6.3)	0.54
BNL	2012	Correction	11 659 209.1(6.3)	0.54

 TAB. 1.2 : Historique des résultats expérimentaux du CERN et du BNL pour a_μ .

			$a_\mu \cdot 10^{10}$	$\delta a_\mu \cdot 10^{10}$
QCD	QED	1.18	11 658 471.884 6	0.003 7
	EW	1.21	15.36	0.1
	QCD HVP,LO	1.30	686.99	4.21
	QCD HVP,NLO	1.31	-9.934	0.091
	QCD HVP,NNLO	1.32	1.226	0.012
	QCD LbL	1.33	10.5	2.6
Theory			11 659 176.1	5.0
Experiment		1.36	11 659 209.1	6.3
Deviation			33.0	8.0 \Rightarrow 4.1 σ

 TAB. 1.3 : Tableau récapitulatif des contributions du modèle standard à a_μ et comparaison du résultat théorique avec la mesure expérimentale.

1.5 TEST DE PRÉCISION DU MODÈLE STANDARD GLOBAL

On peut désormais compiler en un tableau 1.3 les prédictions des différentes contributions du modèle standard ainsi que la valeur expérimentale et observer une déviation entre la prédiction théorique et la mesure expérimentale et faire plusieurs observations :

- on est en dessous du fameux 5σ de déviation conventionnel de la physique des particules pour contredire l’hypothèse d’une fluctuation statistique ;
- les erreurs liées aux contributions hadroniques contribuent majoritairement à l’erreur de la prédiction théorique, en particulier, l’erreur absolue $\delta a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ est la plus grande et l’erreur relative $\frac{\delta a_\mu^{\text{QCD,LbL}}}{a_\mu^{\text{QCD,LbL}}}$ est la plus grande ;
- les progrès théoriques et expérimentaux ont été, d’une certaine manière, “équilibrés” puisque les erreurs pour les deux résultats ont le même ordre de grandeur. Ce sont cependant les erreurs des données expérimentales sur $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$ réinjectées dans $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ qui limitent la précision théorique.

La situation résumée dans le tableau 1.3 peut donc, à son tour, être résumée dans la figure 1.8 : une nouvelle analyse des contributions des deux contributions hadroniques problématiques pourrait motiver ou pas l'introduction de nouveaux degrés de libertés représentable par une nouvelle classe de diagrammes.

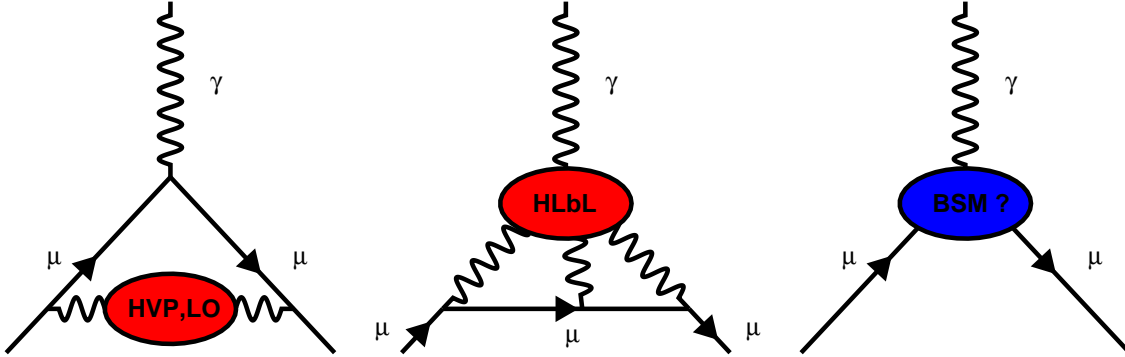


FIG. 1.8 : La déviation entre théorie et expérience pour a_μ est-elle due à la QCD non perturbative (diagrammes des deux contributions hadroniques à gauche) ou à de la nouvelle physique (diagramme de droite)?

E989 et la chromodynamique quantique sur réseau

La future expérience E989 du Fermilab vise à améliorer la précision de la mesure de a_μ de 0.54 à 0.14 [ppm], soit une erreur divisée par 4. Le but étant, en quelques années, à partir de 2017, d'accumuler suffisamment de données pour voir se confirmer la déviation $a_\mu^{\text{THEO}} - a_\mu^{\text{EXP}} > 5\sigma$ ou bien au contraire, de la voir se résorber jusqu'à ce qu'elle devienne statistiquement insignifiante. La stratégie du Fermilab consiste à recycler des infrastructures dont on comprend bien les erreurs systématiques¹⁰ :

- l'anneau de stockage de l'expérience E821 du BNL ainsi que certains instruments de mesure du champ magnétique. Le désassemblage et le déménagement vers le Fermilab ont eu lieu en 2013 ;
- l'infrastructure du Fermilab pour un faisceau d'injection de haute densité de protons rendu possible par l'expérience Nova et qui profite également pour l'expérience Mu2e¹¹. Douze fois par secondes, 10^{12} protons sont lancés sur une cible fixe, les désintégrations successives donnent le faisceau de muon toujours selon les équations 1.1 et 1.2.

Certains autres éléments doivent cependant subir des *upgrades* ou être repensés pour arriver à diminuer certaines erreurs systématiques. Parmi ceux-là, les plus importants sont :

- le système d'injection

¹⁰Et alléger les coûts!

¹¹Expérience de conversion muon à électron.

- l'aimant d'inflexion
- les quadripôles électrostatiques d'accélération
- la majeure partie de toute la chaîne de détection (calorimètre, systèmes informatiques, ...)

Les expérimentateurs souhaitent ainsi multiplier les observations de précession de spin par 20 par rapport à l'ancienne expérience E821 (environ 100 milliards de muons observés) pour arriver à une erreur statistique de 100 parties par milliards (ppb) tout en maintenant un contrôle sur les systématiques à 70 ppb.

Une telle précision n'a d'intérêt que si les prédictions théoriques liées aux contributions hadroniques sont elles-mêmes améliorées et donc en particulier l'étude de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$. À l'heure actuelle, seule la Chromodynamique Quantique sur Réseau (LQCD) (chapitre 2)¹² simulée sur supercalculateurs ainsi que de nouvelles méthodes analytiques et numériques (chapitre 3) peuvent permettre de se passer des données expérimentales $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$ pour fournir un calcul *ab-initio* et ouvrir la voie à une course à la précision. Le but étant à terme d'atteindre une précision au moins aussi précise que celle de la méthode utilisant la phénoménologie :

$$\frac{\delta a_\mu^{\text{HVP,LO}}}{a_\mu^{\text{HVP,LO}}} < 0.5\% \quad (1.37)$$

¹²Pour *Lattice Quantum Chromodynamics*.

La chromodynamique quantique sur réseau

Dans cette partie, on rappelle pour commencer la formulation de la chromodynamique quantique (QCD). Si l'apparente similarité mathématique avec l'électrodynamique quantique fait d'abord penser à une triviale généralisation, elle cache en fait des interactions très complexes liées au caractère non-abélien de la jauge. La phénoménologie exhibe, quant à elle, des propriétés radicalement différentes liées à une constante de couplage qui est une fonction décroissante de l'énergie mise en jeu dans l'interaction. Cela se traduit concrètement par la liberté asymptotique à haute énergie et le confinement des couleurs et l'apparition d'états liés de quarks et d'antiquarks à basse énergie : les hadrons. On étudie alors la symétrie chirale approximative du Lagrangien. La brisure spontanée aide à la compréhension, via le théorème de Goldstone, du rôle particulier du méson π constitués d'un quark et d'un antiquark parmi les plus légers. Pourtant le simple calcul direct de la masse du π en QCD par une méthode analytique est toujours à l'heure actuelle une tâche inaccessible car l'habituel développement perturbatif de la QED en la constante de couplage ne peut plus s'appliquer.

Nous discuterons donc ensuite de la formulation sur réseau de la QCD (LQCD). Elle permet, en substituant un espace continu infini par un espace discrétisé fini, de calculer rigoureusement des intégrales de Feynman et donc directement des observables du régime non-perturbatif. On utilise pour cela des méthodes statistiques et des supercalculateurs massivement parallèles.

La discrétisation amène cependant son lot de difficultés, résumées par le théorème de Nielsen-Ninomiya. Deux solutions possibles seront définies et utilisées dans les chapitres suivants : une conceptuellement simple avec des fermions de Wilson et une moins directe, les fermions *Staggered*, offrant de meilleures propriétés vis à vis de la symétrie chirale et du calcul haute performance. Dans les deux cas, on peut améliorer la qualité des discrétisations en modifiant l'action, c'est ce qu'on appelle les améliorations de Symanzik. Par ailleurs les champs de jauge peuvent être lissés par la procédure de *smearing*.

On finira par les méthodes numériques permettant de simuler le vide quantique hadronique ainsi que celles utilisées dans les codes de post-traitement pour estimer les erreurs statistiques et systématiques. On illustrera les méthodes par un exemple concret, la masse d'un hadron stable au repos et on expliquera les procédures pour passer des unités du réseau aux unités physiques et combiner plusieurs simulations pour extrapoler

une quantité à la limite du continu.

L'ouvrage [14] offre une introduction très claire de nombreux concepts de QCD sur réseau.

2.1 LA CHROMODYNAMIQUE QUANTIQUE

La chromodynamique quantique (QCD) est une théorie élaborée après deux décennies d'interrogations sur la spectroscopie hadronique et dont la formulation définitive date de 1973 [15]. Elle décrit les interactions fortes comme l'ensemble des processus impliquant des échanges de bosons appelés gluons entre particules possédant une charge de couleur : des fermions appelés quarks mais aussi les gluons eux-mêmes d'où la possibilité d'auto-interactions.

Après l'introduction des champs de quarks et de gluons, nous allons définir la théorie via l'action fermionique et bosonique en métrique euclidienne tout en rappelant la propriété d'invariance locale de jauge sous l'action du groupe $SU(3)$.

2.1.1 LES CHAMPS DE QUARKS ET DE GLUONS

Les quarks sont des fermions massifs caractérisés par des champs de spineurs (de Dirac) :

$$\psi^{(f)}(x)_{\alpha,c} , \bar{\psi}^{(f)}(x)_{\alpha,c} \quad (2.1)$$

où x est la position d'espace-temps, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ l'indice de Dirac et $c = 1, 2, 3$ un indice supplémentaire qu'on appelle la couleur. Ce sont donc des vecteurs de 12 coordonnées qui en plus possèdent plusieurs copies appelées saveur $f = 1, 2, \dots, 6$. Ces copies diffèrent par leur masse $m^{(f)}$ et permettent de définir une multitudes de nombres quantiques qui permettent de les classer et dont nous donnerons un exemple plus tard. En plus des quarks, on considère les gluons qui sont des champs de bosons sans masse caractérisés par des champs de vecteurs :

$$A_{\mu}(x)_{c,d} \quad (2.2)$$

où l'on a comme précédemment x la position d'espace-temps, μ l'indice de Lorentz mais aussi en plus deux indices de couleur $c, d = 1, 2, 3$. $A_{\mu}(x)$ est un vecteur de spin 1 (représentation du groupe de Lorentz) si on le considère selon μ mais c'est pour chaque couple (x, μ) une matrice hermitienne de taille $(3, 3)$ et de trace nulle ¹.

¹Mathématiquement un objet de la représentation adjointe du groupe de Lie $SU(3)$ dans son algèbre de Lie $\mathfrak{su}(3)$.

On peut donc maintenant définir la QCD par son action classique non renormalisée. Pour cela, on sépare l'action bosonique décrivant la propagation des gluons de l'action fermionique décrivant la propagation des quarks et leurs interactions avec les gluons.

2.1.2 LA PARTIE FERMIONIQUE DE L'ACTION DE LA QCD

La partie fermionique $\mathcal{S}_F[\psi, \bar{\psi}, A]$ de l'action de la QCD est une fonctionnelle bilinéaire en les champs ψ et $\bar{\psi}$. Elle est donnée d'abord avec la notation matricielle puis en développant chaque coordonnée :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_F[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] &= \sum_{f=1}^{N_f} \int d^4x \bar{\psi}^{(f)}(x) (\gamma_\mu (\partial_\mu + iA_\mu(x)) + m^{(f)}) \psi^{(f)}(x) \\ &= \sum_{f=1}^{N_f} \int d^4x \bar{\psi}^{(f)}(x)_{\alpha,c} ((\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\delta_{c,d} \partial_\mu + iA_\mu(x)_{c,d}) \\ &\quad + m^{(f)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{c,d}) \psi^{(f)}(x)_{\beta,d} \end{aligned} \quad (2.3)$$

On sommerait souvent implicitement sur les saveurs f .

Remarquons que l'interaction du champ de jauge est donc différente pour chaque indice de Lorentz par l'intermédiaire des différentes matrices γ ici considérées dans leur version euclidienne, c'est à dire vérifiant la relation d'anticommution :

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \mathbb{I} \quad (2.4)$$

2.1.3 L'INVARIANCE DE JAUGE DE L'ACTION FERMIONIQUE

La QCD est un cas particulier de théorie de Yang-Mills. Celles-ci généralisent la QED au cas des jauges non abéliennes. On considère donc des "rotations" de l'espace des couleurs $\Omega(x) \in SU(3)$, c'est à dire des matrices :

- unitaires $\Omega(x)^\dagger = \Omega(x)$
- ne modifiant pas le module, c'est à dire $\det[\Omega(x)] = 1$

L'invariance de jauge s'écrit alors pour les champs de fermions :

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \Omega(x)\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\Omega(x)^\dagger \quad (2.5)$$

et elle signifie concrètement pour l'action :

$$\mathcal{S}_F[\psi', \bar{\psi}', A'_\mu] = \mathcal{S}_F[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] \quad (2.6)$$

ce qui nécessite l'existence d'un champ de jauge se transformant selon :

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = \Omega(x)A_\mu(x)\Omega(x)^\dagger + i(\partial_\mu\Omega(x))\Omega(x)^\dagger \quad (2.7)$$

Le résultat est encore hermitien de trace nulle. La partie "de Dirac" de l'action \mathcal{S}_F ou de la densité lagrangienne \mathcal{L}_F est formellement similaire à la QED :

$$\mathcal{S}_F[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = \int d^4x \mathcal{L}_F(\psi, \bar{\psi}, A_\mu) \quad (2.8)$$

$$\mathcal{L}_F(\psi, \bar{\psi}, A_\mu) = \bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu + iA_\mu)\psi = \bar{\psi}D\psi$$

avec D l'opérateur de Dirac qui dépend de la jauge A_μ .

2.1.4 L'ACTION GLUONIQUE

L'action gluonique notée $\mathcal{S}_G[A_\mu]$ est une fonctionnelle du seul champ de jauge A_μ elle-aussi, invariante sous la transformation de jauge :

$$\mathcal{S}_G[A'_\mu] = \mathcal{S}_G[A_\mu] \quad (2.9)$$

Il suffit pour cela de généraliser aux jauges non abéliennes, le tenseur de Maxwell de la QED en considérant :

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + i[A_\mu(x), A_\nu(x)] \quad (2.10)$$

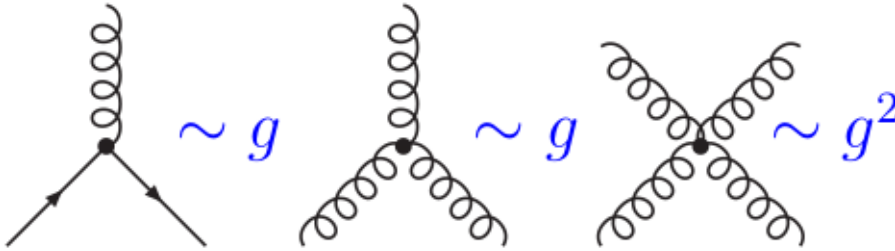


FIG. 2.1 : Illustration du caractère non-abélien de la théorie de jauge QCD : les gluons sont chargés et peuvent ainsi auto-interagir contrairement au cas des photons en QED.

où le dernier terme est le commutateur non nul par définition d'une jauge non abélienne. Il se transforme selon :

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow F'_{\mu\nu}(x) = \Omega(x)F_{\mu\nu}(x)\Omega(x)^\dagger \quad (2.11)$$

et permet donc la définition d'une action invariante de jauge :

$$\mathcal{S}_G = \frac{1}{2g^2} \int d^4x \operatorname{Tr}[F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)] \quad (2.12)$$

expression où g est appelée constante de couplage et où apparaît, contrairement au cas de la QED, une trace sur les couleurs (puisque $F_{\mu\nu}$ est en tenseur coloré, c'est à dire à valeur matricielle) et des termes cubiques et quartiques en A_μ (puisque les commutateurs ne sont pas nuls) correspondant aux auto-interactions des gluons et représentés sur la figure 2.1.

Au final, on a défini l'action de la QCD :

$$\mathcal{S}_{\text{QCD}}[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = \mathcal{S}_G[A_\mu] + \mathcal{S}_F[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] \quad (2.13)$$

2.1.5 LA SYMÉTRIE CHIRALE

Nous verrons dans les paragraphes suivants la propriété de confinement. Avant cela, il est intéressant d'étudier certaines symétries ou symétries approximatives de l'action qui vient d'être définie. Il existe en effet des théorèmes généraux sur les brisures spontanées d'une symétrie à paramètre continu par le vide : elles font apparaître une ou plusieurs particules sans masse appelées bosons de Goldstone. C'est exactement ce cas qui va nous intéresser.

Pour faciliter l'explication, on se limite à une saveur en définissant tout d'abord la transformation suivante sur les champs de fermions appelée rotation chirale :

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha\gamma_5}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{i\alpha\gamma_5} \quad (2.14)$$

où α est un paramètre réel et γ_5 est la matrice chirale définie par :

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \quad (2.15)$$

et vérifiant :

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0, \quad \mu = 0, \dots, 3 \quad (2.16)$$

La densité lagrangienne fermionique est alors invariante par ces rotations si la masse est nulle :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\psi', \bar{\psi}', A_\mu) &= \bar{\psi}'\gamma_\mu(\partial_\mu + iA_\mu)\psi' = \bar{\psi}e^{i\alpha\gamma_5}\gamma_\mu(\partial_\mu + iA_\mu)e^{i\alpha\gamma_5}\psi \\ &= \bar{\psi}e^{i\alpha\gamma_5}e^{-i\alpha\gamma_5}\gamma_\mu(\partial_\mu + iA_\mu)\psi = \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, A) \end{aligned} \quad (2.17)$$

alors que dans le cas d'une masse non nulle, on a :

$$m\bar{\psi}'\psi' = m\bar{\psi}e^{i2\alpha\gamma_5}\psi \quad (2.18)$$

Dans le cas symétrique, l'action fermionique se découple. On peut en effet définir un système complet de projecteurs liés à la symétrie :

$$P_R = \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2}, \quad P_L = \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \quad (2.19)$$

$$P_L + P_R = \mathbb{1}$$

$$P_R^2 = P_R, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R P_L = P_L P_R = 0$$

dont les sous-espaces propres permettent de définir les champs de fermions gauche et droit :

$$\psi_R = P_R \psi, \quad \psi_L = P_L \psi, \quad \bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_L, \quad \bar{\psi}_L = \bar{\psi} P_R \quad (2.20)$$

La densité lagrangienne se découple alors effectivement dans le cas d'une masse nulle :

$$\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, A_\mu) = \bar{\psi}_L D \psi_L + \bar{\psi}_R D \psi_R \quad (2.21)$$

contrairement au cas massif :

$$m \bar{\psi} \psi = m(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R) \quad (2.22)$$

Si l'on considère désormais non plus une mais N_f saveurs et en notant $T_i, i = 1, 2, \dots, N_f^2 - 1$ les générateurs de $SU(N_f)$ ², on définit les rotations “vectorielles” (indiquées “V” ou “L+R” car elles ne mélangent pas les champs gauches et droits) :

$$\psi' = e^{i\alpha T_i} \psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{i\alpha T_i} \quad (2.23)$$

$$\psi' = e^{i\alpha \mathbb{1}} \psi, \quad \bar{\psi}' = e^{-i\alpha \mathbb{1}}$$

et les rotations “axiales” (indiquées “A” ou “L-R” car elles mélangent les champs gauches et droits) :

$$\psi' = e^{i\alpha_5 T_i} \psi, \quad \psi' = e^{i\alpha_5 \mathbb{1}} \psi \quad (2.24)$$

$$\psi' = \psi e^{i\alpha_5 T_i}, \quad \psi' = \psi e^{i\alpha_5 \mathbb{1}}$$

En prenant en compte que la dernière transformation ne laisse pas invariante la mesure dans l'intégrale de chemin donc dans la théorie quantifiée³, on a alors :

- $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V$ symétrie dans le cas non massif $m^{(f)} = 0$
- $SU(N_f)_V \times U(1)_V$ symétrie dans le cas massif dégénéré $m^{(f)} = m$
- $U(1)_V \times \dots \times U(1)_V$ dans le cas général $m^{(f)}$

²par définition, un générateur d'un groupe de Lie est un vecteur de la base de son algèbre de Lie, on a donc $T_i \in \mathfrak{su}(N_f)$

³la non-invariance de la mesure est appelée anomalie axiale [5]

On appelle nombre baryonique la quantité invariante associée à la dernière symétrie.

La brisure de symétrie chirale, d'après le théorème de Goldstone doit donc nous fournir $N_f^2 - 1$ (pseudo)scalaires sans masses. Dans la réalité, les masses quarks u et d sont quasiment nulles $m_u \approx m_d \approx 5$ MeV par rapport à une échelle de QCD typique ≈ 1 GeV et la symétrie chirale est donc une bonne approximation pour $N_f = 2$, appelée symétrie d'isospin.

Par ailleurs la symétrie chirale protège les masses de quark. Dans le cas d'une brisure explicite dure de la symétrie chirale⁴, ces dernières doivent être additivement renormalisées. Avec les fermions de Wilson décrits ci-dessous, ceci provient du mélange entre un opérateur de dimension 5 qui brise la symétrie chirale et le terme de masse [16].

2.1.6 LA QUANTIFICATION PAR INTÉGRALE DE CHEMIN

La mécanique quantique est basée sur la non-commutativité des opérateurs dans un espace de Hilbert. La quantification canonique se fait en appliquant les relations de commutation ou d'anticommutation sur les opérateurs adéquats, selon leurs propriétés statistiques. Si cette technique permet de garder sous contrôle le caractère unitaire des opérateurs et donc la cohérence de la théorie et les interprétations probabilistes, elle est difficile dans le cas d'une théorie de jauge et d'autant plus si elle est non abélienne. On aimerait simplement quantifier la théorie définie par le lagrangien où les symétries sont manifestes.

Une possibilité plus intuitive, inventée par Feynman [17], pour quantifier une théorie lagrangienne consiste en l'utilisation de l'intégrale de chemin. Elle consiste à passer d'un état classique à une superposition d'états quantiques, en assignant à ces derniers, une phase complexe déterminée par l'action en unité de \hbar . Cette phase dépend alors de la "distance" à l'état classique de la théorie. Dans le cas $\hbar \rightarrow 0$, seul l'état classique contribue car les états quantiques sont infiniment supprimés.

Le calcul des fonctions à n points revient alors pour une théorie scalaire à la formule :

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{i\mathcal{S}[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i\mathcal{S}[\phi]}} \quad (2.25)$$

qui intègre sur toutes les configurations classiques simultanément. Sa définition mathématique n'est pas rigoureuse dans le cas continu mais les règles de calculs associées fonctionnent : la formule décrit des opérateurs à gauche de l'égalité (ceux qu'on aurait dans le cas de la quantification canonique) et des champs classiques à droite de l'égalité. C'est donc la quantification par intégrale de chemin qui introduit la noncommutativité pour passer des champs commutatifs aux opérateurs non commutatifs et les deux quantifications sont équivalentes.

⁴Une brisure de symétrie par un terme du lagrangien est dite "douce" si celui-ci correspond à un opérateur de dimension inférieure ou égale à 4 et "dure" pour un opérateur de dimension plus élevée.

Dorénavant, on utilisera systématiquement l’abus de notation habituel consistant à confondre le champs ou produit de champs et l’opérateur de l’espace de Hilbert correspondant. On parlera simplement du calcul d’une observable $\langle O \rangle$.

Appliquée à la QCD, l’intégrale de chemin pour une observable O en espace-temps de Minkowski de signature $(-, +, +, +)$ s’écrit :

$$\langle O \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} O[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] e^{i\mathcal{S}_{\text{QCD}}[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]}}{\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i\mathcal{S}_{\text{QCD}}[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]}} \quad (2.26)$$

Nous donnerons en section 2.2, une définition mathématiquement rigoureuse dans le cas discret euclidien.

Quantifier la théorie comme d’ailleurs toute théorie de Yang-Mills au moyen de l’intégrale de chemin n’est pas mathématiquement bien défini : problème de convergence due au nombre de degrés de liberté infini indénombrable, de détermination de la mesure en présence de variable redondantes (invariance de jauge), etc. Même en mettant de côté la rigueur, les prédictions théoriques d’observables de basse énergie nécessite habituellement l’utilisation de modèles pour palier à l’impossibilité technique de calculer directement une intégrale de Feynman autrement que par un développement perturbatif.

2.1.7 LA LIBERTÉ ASYMPTOTIQUE ET LE CONFINEMENT

Pour donner un sens à la procédure de quantification par intégrale fonctionnelle du paragraphe précédent, on pourra être amené en section 2.2 à discrétiser l’espace-temps par un réseau de taille de maille a qui introduit un *cut-off* ultraviolet (UV). Dans ce cas, un opérateur à étudier sera dit renormalisé en lui faisant prendre en compte les contributions des impulsions au delà du *cut-off* et en l’exprimant comme une fonction de l’échelle a via la “constante” de couplage g introduite en 2.12 et via les autres paramètre nus (champs, masses).

On introduit également un paramètre μ qui a la dimension d’une énergie et choisi pour qu’une observable dépendante de a soit reliée à l’expérience et fixe une condition initiale.

L’indépendance en ce nouveau paramètre μ introduit artificiellement s’exprime sous la forme des équations de Callan-Symanzik. En définissant la fonction :

$$\beta(g) := \mu \frac{dg}{d\mu} \quad (2.27)$$

l’opérateur O associée à l’observable étudiée est solution de :

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) O(\mu, g(\mu)) = 0 \quad (2.28)$$

La solution de l'éq. (2.27) à une boucle en QED est, en notant $e := g$:

$$\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha(\mu_0^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu_0^2)}{3\pi} \ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right)} \quad (2.29)$$

$$\alpha(\mu_0^2) := \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}, \quad (\mu_0 \approx 1\text{MeV})$$

et en supposant que la théorie des perturbations est valable à l'échelle μ . Notons que la constante de structure fine diverge (pôle de Landau) quand le dénominateur s'annule à haute énergie.

On peut montrer qu'en général, dans une théorie de jauge non abélienne, la situation est totalement différente, et que notamment en QCD, en considérant N_f le nombre de saveurs, on trouve une dépendance :

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{\alpha_s(\mu_0^2)}{1 + (11 - \frac{2}{3}N_f) \frac{\alpha_s(\mu_0^2)}{2\pi} \ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right)} \quad (2.30)$$

$$\alpha_s(\mu_0^2) := \frac{g^2}{4\pi}$$

Dans la réalité, on a $N_f = 6 \leq 16$ saveurs et la solution α_s décrit donc une interaction qui décroît avec l'énergie μ et telle que $\alpha_s(\mu^2) \rightarrow 0$. Une compilation de mesures expérimentales reproduisent bien ce comportement sur la figure 2.2. C'est ce qu'on appelle la liberté asymptotique et qui permet d'utiliser, par exemple, la QCD perturbative pour calculer des sections efficaces dans les expériences comme le LHC.

En revanche, à faible énergie, on a une grande valeur de la constante de couplage. Wilson a montré avec la tension de la corde qu'on a un confinement des couleurs et que les quarks ne peuvent être observés de manière isolée. On appelle alors hadrons les états liés de quarks. Les plus connus peuvent être classés en des représentations de SU(3) de saveur ou SU(4) de saveur comme sur la figure 2.3 issu du [13]. Qualitativement, le confinement revient à comprendre la théorie comme un changement des degrés de libertés qui ne sont plus les quarks et les gluons individuellement mais des états liés de ces derniers : les hadrons parmi lesquels on trouve les mésons constitués d'un quark et d'un antiquark ainsi que les baryons constitués de trois quarks ou trois antiquarks. Par exemple la stabilité des noyaux atomiques se comprend alors par des échanges de pions entre baryons. C'est l'interaction de Yukawa qui joue le rôle de théorie effective.

2.2 LA CHROMODYNAMIQUE QUANTIQUE SUR RÉSEAU

La discrétisation de la chromodynamique quantique passe par plusieurs étapes. Certaines sont évidentes alors que d'autres représentent de gros challenges théoriques et algorithmiques. Prenons par exemple une fonction à 2 points définie par l'intégrale de chemin telle que nous l'avons déjà vue dans le cas continu mais écrite cette fois-ci en

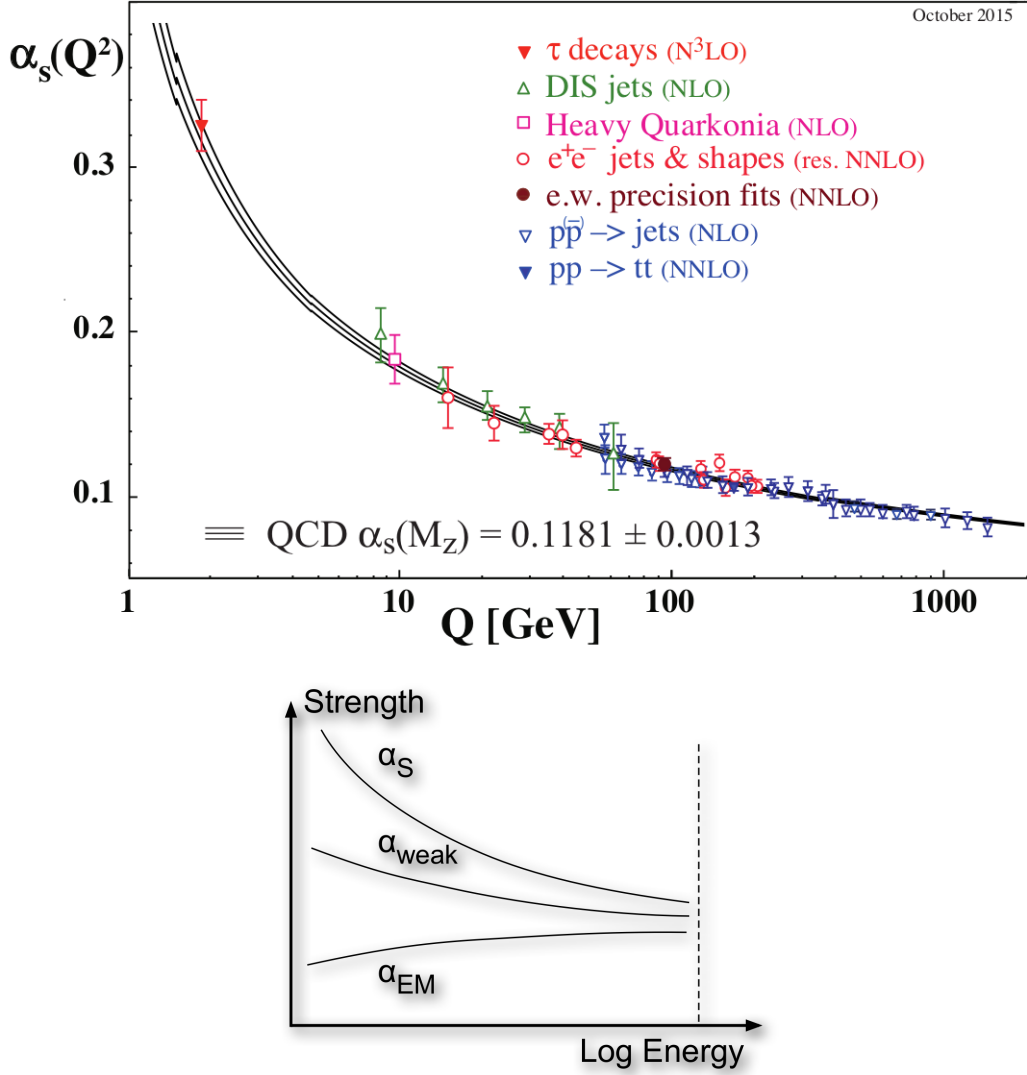


FIG. 2.2 : En haut, résultats récents de déterminations de la constante de couplage α_s comparés à la solution de l'équation du groupe de renormalisation à 4 boucles [13]. En bas, comparatif des constantes de couplage des trois interactions électromagnétique (EM), faible (weak) et forte (S) et qui explique pourquoi on utilise à basse énergie des méthodes non-perturbatives en QCD quand on peut se contenter de méthodes perturbatives en QED.

métrique euclidienne :

$$\langle O_2(t)O_1(0) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}] \mathcal{D}[A_\mu] e^{-\mathcal{S}_F[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] - \mathcal{S}_G[A_\mu]} O_2[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] O_1[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] \quad (2.31)$$

où la fonction de partition est donnée par :

$$Z = \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}] \mathcal{D}[A_\mu] e^{-\mathcal{S}_F[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] - \mathcal{S}_G[A_\mu]} \quad (2.32)$$

L'idée centrale de la LQCD consiste ici à passer d'un espace-temps continu infini à un réseau fini :

$$\Lambda a^4 = T \times L^3 = N_t a \times (N_s a)^3 \quad (2.33)$$

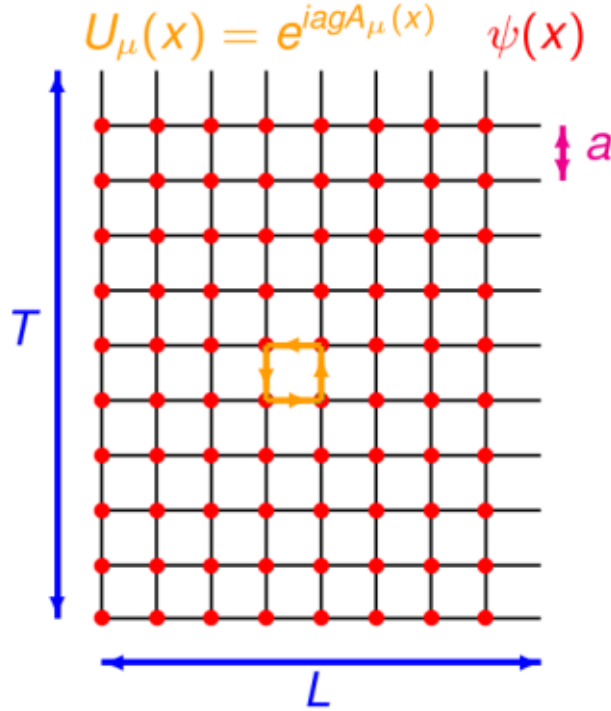


FIG. 2.4 : Principe de la QCD sur réseau : sur un espace-temps discrétisé de maille a et fini de taille $T \times L$, on définit le champ de jauge sur les arêtes (en orange) et les champs de quarks (en rouge) sur les vertex.

$\mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}]$ désigne alors une mesure pour les champs Grassmanniens pour respecter le principe de Pauli, ce qui signifie que ces variables anticommulent. $\mathcal{D}[U]$ désigne la mesure de Haar du groupe $SU(3)$, c'est à dire l'équivalent de la mesure de Lebesgue de la droite réelle mais isométriquement transposée pour les groupes de Lie compacts. L'idée initiale d'une théorie de jauge sur réseau est finalement simple : passer d'une infinité indénombrable à un nombre très grand mais fini de degrés de libertés et en signature euclidienne pour avoir un facteur de Boltzmann (exponentielle décroissante) plutôt qu'un facteur oscillant (exponentielle complexe).

2.2.1 LA RÉGULARISATION SUR RÉSEAU

Les transformations de jauge consistent naturellement à choisir une matrice :

$$\Omega(n) \in SU(3) \quad (2.36)$$

en chaque point du réseau $n \in \Lambda$. Les champs de fermions se transforment de manière tout à fait similaire à l'éq. (2.5) selon :

$$\psi(n) \rightarrow \psi'(n) = \Omega(n)\psi(n) , \quad \bar{\psi}(n) \rightarrow \bar{\psi}'(n) = \bar{\psi}(n)\Omega(n)^\dagger \quad (2.37)$$

Dans le cas continu, le principe des théories de jauge a consisté à introduire des champs de jauge A_μ qui vivaient dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(3)$ pour avoir une invariance de jauge

de l'action. Dans le cas discret, nous introduisons ici des matrices de liens $U_\mu(n)$ dans le groupe de Lie $SU(3)$ pour chaque arête $(n, n + \hat{\mu})$:

$$U_\mu(n) := \exp(iaA_\mu(n)) \quad (2.38)$$

qui sont donc des approximations discrètes des transporteurs de jauge continus :

$$\exp^{i \int_n^{n+\hat{\mu}} A} = U_\mu(n) + \mathcal{O}(a)$$

La donnée de l'ensemble $\{U_\mu(n)\}_{\mu,n}$ qui caractérise le vide quantique hadronique est appelé une configuration de jauge et par abus de notation sera noté simplement U_μ .

Un développement limité en $a \rightarrow 0$ donne :

$$U_\mu(n) := \mathbb{1} + iaA_\mu(n) + \mathcal{O}(a^2) \quad (2.39)$$

La transformation de jauge des matrices de liens :

$$U_\mu(n) \rightarrow U'_\mu(n) = \Omega(n)U_\mu(n)\Omega(n + \hat{\mu})^\dagger \quad (2.40)$$

permettent d'adapter, au cas discret, les dérivées covariantes de l'opérateur de Dirac et donc de définir l'action fermionique discrète (on continue d'omettre volontairement la somme sur les saveurs) :

$$\mathcal{S}_F[\psi, \bar{\psi}, U] = a^4 \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) \left(\sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{U_\mu(n)\psi(n + \hat{\mu}) - U_{-\mu}(n)\psi(n - \hat{\mu})}{2a} + m\psi(n) \right) \quad (2.41)$$

on a alors effectivement une action invariante de jauge :

$$\mathcal{S}_F[\psi, \bar{\psi}, U] = \mathcal{S}_F[\psi', \bar{\psi}', U'] \quad (2.42)$$

La construction de l'action fermionique donne une indication sur les quantités susceptibles d'être invariantes de jauge : une variable de lien $U_\mu(n)$ à laquelle on adjoint des champs de quarks à ses extrémités. Cette procédure peut en fait être généralisée à n'importe quel chemin de variable de lien $P[U] := U_{\mu_0}(n_0)U_{\mu_1}(n_0 + \hat{\mu}_0) \dots U_{\mu_{k-1}}(n_1 - \hat{\mu}_{k-1})$ et donner une quantité invariante de jauge :

$$\bar{\psi}(n_0)P[U]\psi(n_1) \quad (2.43)$$

En bouclant le chemin sur lui-même, et en prenant la trace du produit de liens, on obtient également une quantité invariante de jauge. Pour un carré élémentaire de taille 1, on obtient par définition une plaquette de Wilson $U_{\mu\nu}$ et on définit alors l'action de Wilson par :

$$\mathcal{S}_G[U] = \frac{\beta}{3} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \text{Re tr}[\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(n)] \quad (2.44)$$

où l'on prend :

$$\beta = \frac{6}{g^2} \quad (2.45)$$

On montre alors que les versions discrètes de $\mathcal{S}_F + \mathcal{S}_G$ ont pour limite l'action du continu quand $a \rightarrow 0$.

2.2.2 LE DOUBLEMENT DES DEGRÉS DE LIBERTÉS

On peut réécrire l'action fermionique de manière à donner une expression précise de l'opérateur de Dirac et de son rôle sur les différentes coordonnées d'espace, de Lorentz et de couleur :

$$\mathcal{S}_F[\psi, \bar{\psi}, U] = a^4 \sum_{n, m \in \Lambda} \sum_{a, b, \alpha, \beta} \bar{\psi}(n)_{\alpha, a} D(n|m)_{\alpha, \beta, a, b} \psi(m)_{\beta, b} \quad (2.46)$$

où l'on a :

$$D(n|m)_{\alpha, \beta, a, b} = \sum_{\mu=1}^4 (\gamma_{\mu})_{\alpha\beta} \frac{U_{\mu}(n)_{ab} \delta_{n+\hat{\mu}, m} - U_{-\mu}(n)_{ab} \delta_{n-\hat{\mu}, m}}{2a} + m \delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} \delta_{n, m} \quad (2.47)$$

L'analyse de Fourier permet de calculer dans le cas d'une théorie libre $U_{\mu}(n) = 1$ l'inverse, appelée aussi propagateur, en espace d'impulsion :

$$\tilde{D}(p)^{-1} = \frac{m \mathbb{I} - ia^{-1} \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \sin(p_{\mu} a)}{m^2 + a^{-2} \sum_{\mu} \sin(p_{\mu} a)^2} \quad (2.48)$$

ce qui donne dans le cas d'une théorie sans masse $m = 0$:

$$\tilde{D}(p)^{-1} \Big|_{m=0} = \frac{-ia^{-1} \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \sin(p_{\mu} a)}{a^{-2} \sum_{\mu} \sin(p_{\mu} a)^2} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} p_{\mu}}{p^2} \quad (2.49)$$

On observe alors que le propagateur a un seul pôle dans le continu :

$$p = (0, 0, 0, 0) \quad (2.50)$$

mais aussi 15 (en dimension 4) supplémentaires

$$p = (\pi/a, 0, 0, 0), (0, \pi/a, 0, 0), \dots, (\pi/a, \pi/a, \pi/a, \pi/a) \quad (2.51)$$

appelés doubleurs et qui n'ont pas de réalité physique. Il s'agit d'un artefact lié à la discrétisation en métrique euclidienne.

2.2.3 LES FERMIONS DE WILSON

Wilson a proposé d'ajouter aux doubleurs, et seulement à eux, un terme de masse $\frac{4}{a}$ qui devient infini à la limite du continu $a \rightarrow 0$ et donc découple les doubleurs de la

théorie.

$$\mathcal{S}_F[\psi, \bar{\psi}, U] = \sum_{f=1}^{N_f} a^4 \sum_{n,m \in \Lambda} \bar{\psi}^{(f)}(n) D^{(f)}(n|m) \psi^{(f)}(m) \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} D^{(f)}(n|m)_{\alpha\beta ab} &= (m^{(f)} + \frac{4}{a}) \delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} \delta_{n,m} \\ &- \frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 (\mathbb{1} + \gamma_\mu)_{\alpha\beta} U_\mu(n)_{ab} \delta_{n+\hat{\mu},m} \\ &- \frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 (\mathbb{1} - \gamma_\mu)_{\alpha\beta} U_{-\mu}(n)_{ab} \delta_{n-\hat{\mu},m} \end{aligned} \quad (2.53)$$

C'est une solution simple qui a cependant des inconvénients :

- le terme de masse de Wilson brise la symétrie chirale car la matrice identité n'anticommutent pas avec γ_5 . Les masses n'étant plus protégées, une seconde renormalisation additive des masses nues est nécessaire ; en particulier les masses nues peuvent être négatives. [16]
- une étude du spectre de l'opérateur de Dirac avec le terme de Wilson montre que celui-ci est γ_5 -hermitien et n'empêche pas les modes exceptionnels liés aux configurations de jauge (qui correspondent à des valeurs propres proches de 0 plus petites que m), et le coût d'inversion sur supercalculateur devient prohibitif. La matrice de l'opérateur de Dirac est en effet mal conditionnée, c'est à dire que le rapport de sa plus grande valeur propre sur sa plus petite valeur propre est grand.

Un théorème très général dû à Nielsen et Ninomiya [18] [19] [20] montre qu'on ne peut pas définir simultanément un opérateur de Dirac discret sans doubleurs et permettant de définir une action conservant la symétrie chirale du continu ainsi que d'autres propriétés raisonnables telles que l'ultralocalité. Il existe néanmoins des discrétisations (overlap, domain wall) qui ne sont pas ultralocales et qui possèdent une symétrie chirale de saveurs analogue à celle du continu, mais elles ont un coup calculatoire encore plus important que celle de Wilson.

2.2.4 LES FERMIONS STAGGERED

Une solution intermédiaire est offerte par la discrétisation *Staggered*, dite aussi de Kogut-Susskind [21] qui réduit à 4 au lieu de 16 les doubleurs tout en conservant une symétrie chirale $U(1)$.

On définit pour cela de nouveaux champs qui mélangent les degrés de liberté des indices d'espace-temps $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ avec ceux des spineurs γ_μ :

$$\psi(n) = \gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2} \gamma_3^{n_3} \gamma_4^{n_4} \psi(n)', \quad \bar{\psi}(n) = \bar{\psi}(n)' \gamma_4^{n_4} \gamma_3^{n_3} \gamma_2^{n_2} \gamma_1^{n_1} \quad (2.54)$$

En remarquant qu'au signe près, le changement de variables ci-dessus diagonalise le terme :

$$\bar{\psi}(n)\gamma_3\psi(n \pm \hat{3}) = (-1)^{n_1+n_2}\bar{\psi}(n)'\mathbb{I}\psi(n \pm \hat{3})' \quad (2.55)$$

(avec des relations analogues pour les autres directions de l'espace-temps) et en introduisant les fonctions de signe :

$$\eta_1(n) = 1, \quad \eta_2(n) = (-1)^{n_1}, \quad \eta_3(n) = (-1)^{n_1+n_2+n_4}, \quad \eta_4(n) = (-1)^{n_1+n_2+n_3} \quad (2.56)$$

on peut alors ne garder dans l'action qu'un seul des quatre degrés de liberté de ψ et le noter χ :

$$\mathcal{S}_F[\chi, \bar{\chi}] = a^4 \sum_{n \in \Lambda} \bar{\chi}(n) \left(\sum_{\mu=1}^4 \eta_\mu(x) \frac{U_\mu(n)\chi(n + \hat{\mu}) - U_\mu^\dagger(n - \hat{\mu})\chi(n - \hat{\mu})}{2a} + m\chi(n) \right) \quad (2.57)$$

On a alors une forme de symétrie chirale réduite :

$$\chi(n) \longrightarrow e^{i\alpha\eta_5(n)}\chi(n), \quad \bar{\chi}(n) \longrightarrow \bar{\chi}(n)e^{i\alpha\eta_5(n)} \quad (2.58)$$

où $\eta_5(n) = (-1)^{n_1+n_2+n_3+n_4}$ joue le rôle de la matrice γ_5 dans le cas ordinaire.

C'est une solution peu coûteuse qui a des avantages et des inconvénients :

- l'opérateur est anti-hermitien et η_5 -hermitien et il n'y a pas les problèmes de configurations exceptionnelles comme dans le cas Wilsonien
- la construction des interpolateurs de hadrons n'est plus immédiate puisque les indices de spin et de parité sont mélangés et que les saveurs ne sont plus les saveurs habituelles

Dans notre cas, ça ne posera pas de problème car nous souhaitons calculer une fonction de corrélation simple. Nous avons donc la possibilité avec cette discrétisation d'inverser des matrices, c'est à dire de calculer des propagateurs un ordre de grandeur plus petite et mieux conditionnées. Avec la puissance actuelle des supercalculateurs, cela permet des inversions dans des espaces de paramètres très proche de la réalité physique et donc des extrapolations avec des erreurs systématiques très réduites contrairement au cas Wilsonien.

2.2.5 L'AMÉLIORATION DE SYMANZIK

On a vu dans les deux paragraphes précédents par le théorème de Nielsen-Ninomiya qu'il n'existe essentiellement pas de discrétisation parfaite. C'est un fait connu pour les numériciens qui tentent de jongler entre des intérêts contradictoires. Par exemple l'interprétation simple de la discrétisation de Wilson s'accompagne d'un coût calculatoire

plus grand et d'une renormalisation délicate tandis que le coût calculatoire peu onéreux de la discrétisation *Staggered* s'accompagne d'une interprétation plus difficile pour les saveurs et une construction complexe des interpolateurs de hadrons. Le choix de la discrétisation varie donc en fonction des observables qu'on souhaite calculer. De la même manière, en analyse numérique, il est courant de choisir des schémas de discrétisation qui sont plus précis quand d'autres sont plus stables, quand d'autres encore sont plus rapides à calculer.

Les actions discrétisées précédemment définies peuvent également être améliorées de manière à obtenir par exemple des erreurs en $\mathcal{O}(a^2)$ plutôt qu'en $\mathcal{O}(a)$ un peu à la manière d'une dérivée centrale plutôt qu'une dérivée à gauche ou à droite. Il faut pour cela ajouter des termes à l'action et aux opérateurs qui s'annulent à la limite du continu $a \rightarrow 0$. Une généralisation prenant en compte les corrections radiatives est ici nécessaire et s'appelle le *Symanzik improvement program* [22], [23].

Par exemple pour l'action fermionique avec terme de Wilson, une amélioration en $\mathcal{O}(a)$ peut se faire par l'ajout du terme de *Sheikholeslami-Wohlert* [24]. On définit alors l'action fermionique de *Wilson-clover* :

$$\mathcal{S}_F = a^4 \sum_x \left[\bar{\psi}(x)(D + m)\psi - \frac{ic_{\text{SW}}}{8a} a \sum_{\mu < \nu} \bar{\psi} \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} \psi \right] \quad (2.59)$$

$$\hat{F}_{\mu\nu} := Q_{\mu\nu} - Q_{\nu\mu} \quad (2.60)$$

$$Q_{\mu\nu}(x) := U_{\mu,\nu}(x) + U_{\nu,-\mu}(x) + U_{-\mu,-\nu}(x) + U_{-\nu,\mu}(x) \quad (2.61)$$

La quantité c_{SW} est égale à 1 au niveau des arbres. C'est une quantité définie à l'échelle de la coupure et peut, théoriquement, être calculée en théorie des perturbations. Si elle est calculée à n boucles, l'erreur de discrétisation sur les observables est passée d' $\mathcal{O}(a)$ à $\mathcal{O}(\alpha_s(a)^{n+1}a)$. Pour éliminer toutes les corrections proportionnelles à a et faire en sorte que les premières corrections apparaissent à $\mathcal{O}(a^2)$, il faut calculer c_{SW} non perturbativement comme dans [25]. On prendra ici $c_{\text{SW}} = 1$ qui correspond au cas *on-shell tree-level* et qui, avec notre choix de *smearing* (voir ci-dessous), est proche de la valeur non perturbative.

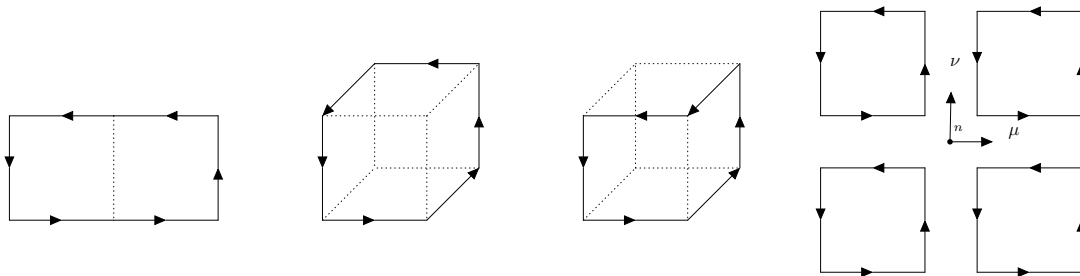


FIG. 2.5 : Les 3 premières figures sont les boucles rectangulaires utilisées dans l'action de Luscher-Weisz. À droite, les plaquettes nécessaires aux termes de Sheikholeslami-Wohlert.

De la même manière, une amélioration en $\mathcal{O}(a^2)$ de l'action gluonique peut se faire par l'ajout d'un terme usant de boucles de Wilson rectangulaires $R_{\mu\nu}$ [25] :

$$\mathcal{S}_G = \frac{2}{g_0^2} \left[\frac{5}{3} \sum_{x,\nu>\mu} \text{Re tr} \left[1 - P_{\mu\nu}(x) \right] - \frac{1}{12} \sum_{x,\nu>\mu} \text{Re tr} (1 - R_{\mu\nu}) \right] \quad (2.62)$$

De nouveau, il s'agit d'une amélioration *on-shell tree-level*. Dans le cas général, des boucles rectangulaires non planes sont nécessaires.

2.2.6 LE SMEARING DES CHAMPS DE JAUGE

Les changements de signes des valeurs propres de l'opérateur de Dirac lors de la génération des configurations de jauge entraînent des instabilités numériques. Une possibilité pour les éviter consiste à lisser ces configurations de jauge en substituant chaque lien par une expression liée à la moyenne de ses voisins. Nous ne nous étendrons pas sur la validité d'une telle procédure qui modifie de fait le comportement à faible distance de la théorie mais qui disparaît à la limite du continu $a \rightarrow 0$. Nous utiliserons le lissage 3HEX [26], [27], [28] pour les configurations générées pour les fermions de Wilson et 4Stout [29] pour les configurations générées pour les fermions *Staggered*.

2.3 LES SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Nous avons vu que la mesure dans l'intégrale de chemin était parfaitement bien définie mathématiquement en tant que produit fini de mesures ordinaires. Le très grand nombre de variables en jeu rend cependant impossible techniquement de calculer ces intégrales avec des méthodes du type somme de Riemann ou sa généralisation avec interpolation par des polynômes de degrés supérieurs. Le facteur de Boltzmann en métrique euclidienne permet cependant d'utiliser une technique Monte-Carlo avec échantillonnage préférentiel qui a le mérite de ne pas être autant dépendante de la taille du réseau.

Supposons que l'on souhaite calculer la valeur $\langle O \rangle$ d'une observable O en QCD sur réseau :

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}] \mathcal{D}[U] e^{-\mathcal{S}_F[\psi, \bar{\psi}, U] - \mathcal{S}_G[U]} O[\psi, \bar{\psi}, U_\mu] \quad (2.63)$$

$$Z = \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}] \mathcal{D}[U] e^{-\mathcal{S}_F[\psi, \bar{\psi}, U] - \mathcal{S}_G[U]} \quad (2.64)$$

En remarquant que la partie fermionique est bilinéaire, que ψ et $\bar{\psi}$ sont grassmanniennes, le théorème de Wick nous donne :

$$\langle O \rangle = \langle O^{\text{Wick}} \rangle_G = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[U] e^{-\mathcal{S}_G[U]} \det(D) O^{\text{Wick}}[D^{-1}(U_\mu), U_\mu] \quad (2.65)$$

où dans $O^{\text{Wick}}[D^{-1}(U_\mu), U_\mu]$, les bilinéaires de champs fermioniques dans $O[\psi, \bar{\psi}, U_\mu]$ sont contractés en propagateurs, eux-même solutions de l'équation de Dirac avec un terme de source ponctuel⁵ et $\det(D)$ est le déterminant, dit fermionique, de l'opérateur de Dirac.

Il reste alors à constater que la fonction :

$$dP = \frac{1}{Z} \mathcal{D}[U] \det(D) e^{-S_G[U]} \quad (2.66)$$

$$Z = \int \mathcal{D}[U] e^{-S_G[U]} \quad (2.67)$$

est une mesure de probabilité et permet donc le calcul statistique :

$$\langle O \rangle = \langle O^{\text{Wick}} \rangle_G = \frac{1}{N} \sum_{U_\mu \in \{U_\mu^{(1)}, \dots, U_\mu^{(N)}\}} O^{\text{Wick}}[D^{-1}(U_\mu), U_\mu] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \quad (2.68)$$

où $\{U_\mu^{(1)}, \dots, U_\mu^{(N)}\}$ est un ensemble de N configurations de jauge tirées au hasard selon la distribution de probabilité dP .

En pratique :

- On génère quelques centaines ou quelques milliers de configurations de jauge par simulation pour un type de discrétisation. Les paramètres nus, les algorithmes, les optimisations sont différents en fermions de Wilson et en fermions *Staggered* par exemple.
- Pour chaque configuration de jauge $U_\mu \in \{U_\mu^{(1)}, \dots, U_\mu^{(N)}\}$, on calcul les propagateurs de quark pour les différentes saveurs et on les assemble ensuite pour construire les observables O^{Wick} souhaitées.

2.3.1 LE MONTE-CARLO HYBRIDE

L'algorithme *Hybrid Monte Carlo* (HMC) [30], [31] est une spécialisation de la technique Monte-Carlo à échantillonnage préférentiel pour les théories de jauge sur réseau. Elle consiste en la génération via les chaînes de Markov ergodiques d'une nouvelle configuration de jauge $U_\mu^{(j+1)}$ à partir d'une précédente $U_\mu^{(j)}$ selon une direction privilégiée par l'action $\mathcal{S}_G[U_\mu]$.

Les détails peuvent être trouvés dans [32]. Nous ne donnons ici qu'une présentation synthétique car la méthode dépend de la discrétisation fermionique et de nombreuses astuces algorithmiques (Hasenbuch *tricks*, Omelyan integrator, Zolotarev Rational HMC pour les masses non dégénérées, ...).

Le HMC se résume principalement en une succession de 2 étapes :

⁵c'est à dire solution S de l'équation l'équation $DS = \delta$. En QCD sur réseau, il arrive cependant qu'on substitue à la source δ ponctuelle une source lisse gaussienne ou d'autres types de sources étendues correspondant à des bilinéaires de champs fermioniques non locaux.

- trajectoire : le calcul d'une nouvelle configuration de jauge $U_\mu^{(j+1)}$ se fait en intégrant numériquement, selon les équations de la dynamique moléculaire, le système (π_μ, U_μ) où π_μ est une matrice aléatoire de $\mathfrak{su}(3)$ suivant une loi de Gauss. L'Hamiltonien est défini par :

$$H(\pi_\mu, U_\mu) = \frac{1}{2} \langle \pi_\mu, \pi_\mu \rangle + S[U_\mu] \quad (2.69)$$

$$S[U_\mu] = \mathcal{S}_G - \ln(\det(D)) \quad (2.70)$$

Le calcul à chaque *update* du déterminant fermionique peut être remplacé par l'utilisation de la représentations en pseudo-fermions (degrés de liberté bosoniques) [33]. Des inversions sont alors nécessaires et requièrent la majorité du temps de calcul. L'intégrateur est symplectique :

$$\frac{d\pi_\mu}{d\tau} = -\frac{\partial S[U_\mu]}{\partial U_\mu} \quad (2.71)$$

$$\frac{dU_\mu}{d\tau} = \pi_\mu U_\mu \quad (2.72)$$

ce qui doit permettre à la trajectoire d'évoluer le long d'une hypersurface d'énergie constante $\Delta H = 0$, préservant l'aire $\mathcal{D}\pi_\mu \mathcal{D}U_\mu$ et garantissant la réversibilité. Le schéma numérique est le *leapfrog*.

- acceptation/rejet : dans les faits, des erreurs numériques dans l'intégration ont pour conséquence de ne pas conserver exactement l'énergie $\Delta H \neq 0$. La nouvelle configuration est acceptée, comme dans l'algorithme Metropolis, avec une probabilité $\min(1, \exp^{-\Delta H})$. En cas de rejet, on recommence une trajectoire en partant de la configuration initiale $U_\mu^{(j)}$.

2.3.2 EXEMPLE D'OBSERVABLE : LA MASSE D'UN HADRON STABLE AU REPOS

Nous allons illustrer tout ce qui a été expliqué jusqu'à présent par le calcul de l'observable la plus simple sur le réseau, à savoir la masse d'un hadron stable sous l'interaction forte au repos. Supposons également que toutes nos configurations de jauge sont déjà disponibles. On montre d'abord comment extraire des quantités en unités du réseau. On expliquera ensuite la méthode de conversion en unité physique.

Pour calculer la masse d'un hadron, par exemple le pion π^\pm , il faut construire un opérateur qui a les nombres quantiques de cette particule. Nous ne mentionnerons pas ici les problèmes liés à la brisure de symétrie de rotation et on appellera simplement O_π l'opérateur pseudoscalaire dans la limite d'isospin :

$$O_\pi(n) = \bar{u}(n)\gamma_5 d(n) = \bar{u}_{\alpha,c}(n)\gamma_{5,\alpha,\beta} d_{\beta,d}(n) \quad (2.73)$$

où u, d sont les champs des quarks u et d . On ne garde que les (tri)impulsions nulles grâce à la transformée de Fourier tout en conservant une variable qu'on associera au

temps et à la dimension T pour un réseau $\Lambda = T \times L^3$ éventuellement asymétrique $L < T$ ⁶ :

$$O_\pi(\vec{p} = 0, t) = \sum_{\vec{x}} O_\pi(\vec{x}, t) \quad (2.74)$$

Ayant défini notre opérateur, on construit alors une fonction à deux points qui crée un π pour le détruire ensuite et qu'on appelle corrélateur :

$$\langle O_\pi(t) O_\pi^\dagger(0) \rangle_F = -\text{Tr}_{\text{sc}} \left[\gamma_5 D_l^{-1}(n \leftarrow 0) \gamma_5 D_l^{-1}(0 \rightarrow n) \right] \quad (2.75)$$

En introduisant la relation de fermeture :

$$\mathbb{I} = \sum_{\text{états } k} |k\rangle \langle k| \quad (2.76)$$

et grâce à notre variable “temporelle”, notre fonction suit une loi de décroissance exponentielle :

$$C(t/a) = \langle O_\pi(t) O_\pi^\dagger(0) \rangle = \sum_k \langle \Omega | O_\pi(0) | k \rangle \langle k | O_\pi^\dagger(0) | \Omega \rangle \exp^{-(t/a)(aE_k)} \quad (2.77)$$

On peut alors ajuster les coefficients aE_k et les préfacteurs associés devant l'exponentielle. Le plus simple est d'ajuster l'état de plus basse énergie, c'est à dire la masse en unité du réseau : aM_π et un seul préfacteur associé qu'on va noter simplement A . On ajuste uniquement les points d'abscisse t/a suffisamment grands pour que les états excités soit exponentiellement supprimés et suffisamment petits pour que le bruit ne recouvre pas le signal. Du fait des propriétés de transformation de l'opérateur sous l'inversion du temps et des conditions au bord dans le temps, on obtient en fait la somme de deux exponentielles décroissantes symétriques par rapport à l'axe $t = T/2$, d'où plutôt la forme de chaîne tombante typique du cosinus hyperbolique.

On peut aussi a priori faire mieux et ajuster avec un seul paramètre si l'on ne souhaite que la masse, aM_π . On définit une masse “effective” :

$$aM_\pi^{\text{eff}}(t/a) := \text{acosh} \left[\frac{C(t/a + 1) + C(t/a - 1)}{2C(t)} \right] \quad (2.78)$$

$$C(t/a) := A \cosh \left[aM_\pi \left(\frac{T}{2a} - \frac{t}{a} \right) \right] + \text{états excités} \quad (2.79)$$

qui, dans la limite $1 \ll t/a \ll T/a$ tends vers la masse aM_π .

Considérons maintenant, pour illustrer la méthode, une simulation *Staggered* de la collaboration Budapest-Marseille-Wuppertal dont les paramètres se trouvent en 2.1. Les quarks du vide quantique hadronique comptent 4 saveurs : deux légères, u et d , dégénérées en masses (collectivement appelées l), l'étrange s et le charm c . On dénote ces simulations par l'appellation $2 + 1 + 1$.

Sur la figure 2.6 est représenté la méthode à deux paramètres et sur la figure 2.7 est représenté la méthode à un paramètre. On y trouve donc :

⁶Pour pouvoir mieux isoler l'état fondamental sans trop augmenter le temps de calcul.

β	T	L	m_l	m_s	m_c
3.2	64	48	0.00205349	0.05729111	0.6788996535

TAB. 2.1 : Paramètres d'une simulation *Staggered 2+1+1*. En plus de la taille du réseau et des masses de quark, on a β qui a été défini en 2.45 et caractérise essentiellement le couplage et dépend donc notamment de l'échelle a (qui par contre n'est pas un paramètre d'entrée en QCD sur réseau). Un exemple de méthode de détermination a posteriori de a en unité physique sera donnée en section 2.3.3

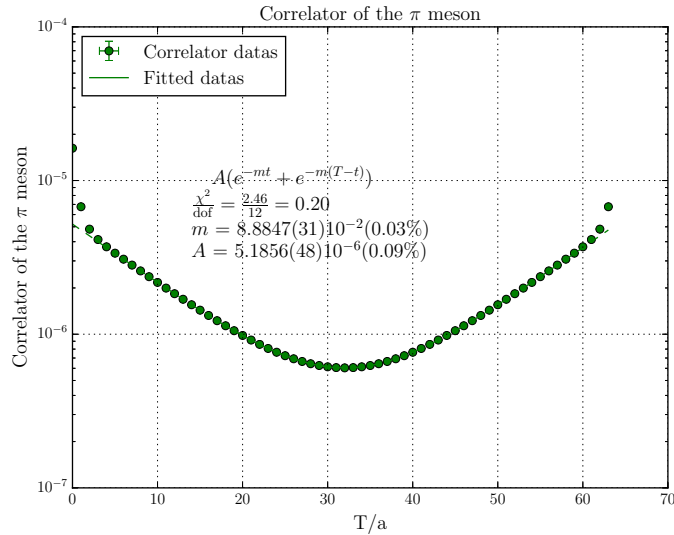


FIG. 2.6 : Fit du corrélateur par 2 paramètres : masse du pion et du préfacteur.

- le corrélateur issu de la simulation ou l'arc-cosinus hyperbolique du rapport de l'éq. (2.79)
- la courbe de notre modèle. Cette dernière est construite en testant des paramètres pour minimiser un χ^2 . Sont donc représentés également :
 - Le rapport χ^2/dof où dof est le nombre de degrés de libertés, c'est à dire le nombre de points fittés auquel on soustrait le nombre de paramètres du modèle. La loi du χ^2 nous dit qu'on doit s'attendre pour un fit correct à un rapport $\chi^2/\text{dof} \approx 1$. Un rapport trop élevé signifie qu'on modélise mal les données, c'est à dire que la courbe ne suit pas les points aux barres d'erreur près. Un rapport trop faible est suspect, il indique généralement des erreurs sur-estimées où des corrélation mal prises en compte.
 - Les paramètres avec des estimations d'erreurs statistiques qui seront expliqués en section 2.3.5

En pratique, les deux méthodes ont montré des résultats statistiquement compatibles. On pourrait les conserver chacune pour un calcul d'erreur systématique ultérieur mais celles-ci sont négligeables en comparaison d'autres erreurs plus significatives qui seront étudiées dans les chapitres suivants.

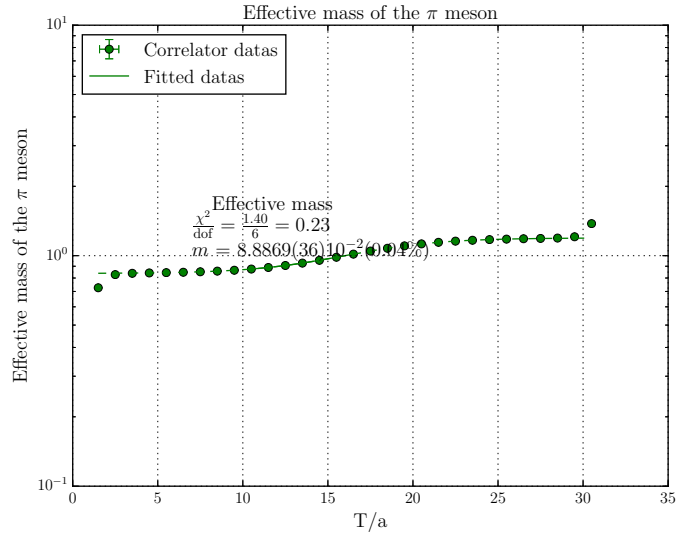


FIG. 2.7 : Fit de la masse effective par 1 paramètre : masse du pion.

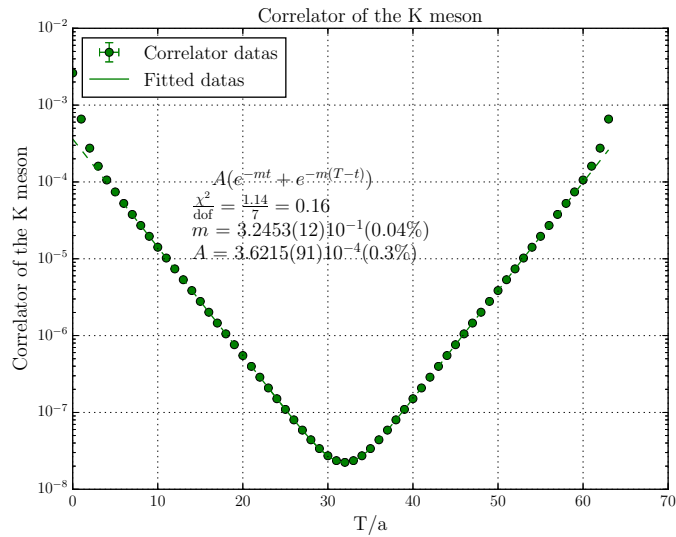


FIG. 2.8 : Fit du corrélateur par 2 paramètres : masse du kaon et du préfacteur.

Bien entendu, s'il l'on veut la masse du kaon, il suffit de construire un interpolateur similaire en remplaçant un des quarks de valence de saveur *light* par la saveur *strange*. Les deux mêmes méthodes sont réappliquées sur les figures 2.8 et 2.9.

Nous avons donc les masses des mésons π et K en unités du réseau et pour le choix de paramètres $(\beta, T, L, m_l, m_s, m_c)$ du tableau 2.1. En reproduisant les mêmes calculs pour des simulations balayant un espace de paramètres $\{\beta\} \times \{T\} \times \{L\} \times \{m_l\} \times \{m_s\} \times \{m_c\}$, on va pouvoir modéliser :

$$M_{\text{hadron}}(\beta, T, L, m_l, m_s, m_c) \quad \text{et} \quad a(\beta, T, L, m_l, m_s, m_c) \quad (2.80)$$

Il faut pour cela utiliser astucieusement les rapports adimensionnés dont on peut déjà

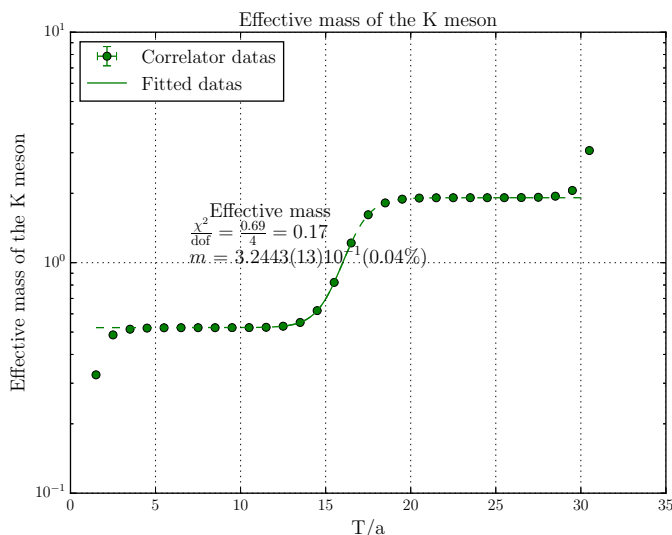


FIG. 2.9 : Fit de la masse effective par 1 paramètre : masse du kaon.

remarquer qu'ils sont dans le bon ordre de grandeur :

$$\frac{aM_\pi}{aM_K} \approx \frac{8.88}{32.4} \approx 0.27 \quad (2.81)$$

$$\frac{M_\pi^{\text{iso,PDG}}}{M_K^{\text{iso,PDG}}} = \frac{134.8}{494.2} \approx 0.27 \quad (2.82)$$

2.3.3 LA DÉTERMINATION DE L'ÉCHELLE

Interlude sur les unités, l'analyse dimensionnelle et l'échelle typique de la QCD

Il est d'usage en physique des particules d'utiliser les unités dérivées de l'électron-volt eV comme on l'a déjà fait au chapitre 1 pour décrire l'impulsion du muon. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler qu'en tant que théorie relativiste et théorie quantique, et en prenant par convention $c = 1$ et $\hbar = 1$, la théorie quantique des champs décrit indifféremment les distances, les masses, les énergies, le temps avec les mêmes unités.⁷ Par ailleurs, contrairement aux unités de Planck qui en ajoutant $G = 1$ insère de la redondance, ces unités ne définissent donc pas elles-mêmes une échelle typique. Pour cette raison, la seule relation utilisée systématiquement qui nous permettra de faire le lien entre distance et énergie est la relation qu'on peut trouver dans [13] :

$$\hbar \cdot c = 1 = 197.326\,978\,8(12) \text{ MeV} \cdot \text{fm} \quad \text{et donc} \quad 1 \text{ fm} \approx 1/(0.2 \text{ GeV}) \quad (2.83)$$

On peut alors même avant de donner une méthode pour calculer l'échelle a avoir en tête

⁷Éventuellement la température si l'on ajoute la constante de Boltzmann $k_B = 1$.

que :

$$\begin{aligned}
M_e &\approx 0.5 \text{ MeV} \\
M_\mu &\approx M_\pi \approx 100 \text{ MeV} \approx 1/(2 \text{ fm}) \\
M_p &\approx M_N \approx 1 \text{ GeV} \approx 1/(0.2 \text{ fm}) \\
r_p &\approx 0.8 \text{ fm} \approx 1/(250 \text{ MeV}) \quad \text{rayon de charge}
\end{aligned} \tag{2.84}$$

On définit ensuite Λ_{QCD} qui est l'énergie typique d'un processus de QCD et telle qu'on soit dans le régime du confinement pour une énergie $\mu \lesssim \Lambda_{\text{QCD}}$ ou bien dans le régime de la liberté asymptotique pour une énergie $\mu \gg \Lambda_{\text{QCD}}$. On peut par exemple définir Λ_{QCD} par la dépendance de la constante de couplage sans dimension en l'énergie μ issue des équations du groupe de renormalisation et qui fait intervenir une divergence logarithmique dans laquelle on a nécessairement une quantité adimensionnée :

$$\alpha_S(\mu) \propto \frac{1}{\beta_0 \ln \frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}}} \Rightarrow \Lambda_{\text{QCD}} \approx 200 \text{ MeV} \tag{2.85}$$

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}N_f \tag{2.86}$$

Retour sur les simulations

Selon le degré de précision que l'on souhaite atteindre dans nos simulations, la méthode de détermination de l'échelle peut varier. Nous utiliserons au cours du chapitre 4 un jeu de simulations avec fermions de Wilson $1+1+1+1$ et un jeu de simulations avec fermions *Staggered* $2+1+1$. Nous allons nous limiter ici à expliquer la détermination de l'échelle pour un jeu simplifié $2+1$ en Wilson. On choisit une modélisation de l'échelle a dans laquelle a est une fonction du seul paramètre β , c'est à dire indépendant de la masse des quarks.

On utilise des rapports de masses d'états hadroniques dont on connaît précisément la mesure expérimentale similaire à l'éq. (2.82) pour paramétrer la dépendance en les masses de quarks. Ces dépendances ne sont que des approximations de Taylor autour du point physique donné par [13]. On utilise donc le fait que la majorité de la masse des hadrons provient de l'interaction forte et très minoritairement de la masse des quarks fournie par le mécanisme de Higgs. Plus précisément M_π^2 est par constitution très dépendant à la masse m_l (par ses quarks de valence et de la mer) et très peu dépendant à m_s (uniquement par ses quarks de la mer). Au contraire, $(M_K^X)^2 := M_K^2 - \frac{M_\pi^2}{2}$ est très dépendant à la masse m_s et l'on peut montrer en *Chiral perturbation theory* (ChPT) que sa dépendance en m_l est encore plus réduite que pour M_K^2 . On fitte alors les triplets de masse $(aM_\pi, aM_K, aM_\Omega)$ extraits comme au paragraphe précédent et pour l'ensemble

des simulations selon la forme fonctionnelle :

$$\begin{aligned}
 aM_\Omega = a(\beta)M_\Omega^{\text{PDG}} \left\{ \right. & 1 \\
 & + p_l \left[\left(\frac{aM_\pi}{a(\beta)M_\Omega^{\text{PDG}}} \right)^2 - \left(\frac{M_\pi^{\text{iso,PDG}}}{M_\Omega^{\text{PDG}}} \right)^2 \right] \\
 & + p_s \left[\left(\frac{aM_{K^*}}{a(\beta)M_\Omega^{\text{PDG}}} \right)^2 - \left(\frac{M_{K^*}^{\text{iso,PDG}}}{M_\Omega^{\text{PDG}}} \right)^2 \right] \left. \right\} \quad (2.87)
 \end{aligned}$$

On peut remarquer qu'on s'est restreint à $p_l(\beta) = p_l$ et $p_s(\beta) = p_s$ ce qui permet de faire des fits combinés, c'est à dire minimiser des sommes de χ^2 avec des paramètres en commun. La méthode nécessite également en troisième input, la masse $M_\Omega^{\text{iso,PDG}}$

La méthode utilisée est adaptée dans le cas de la discrétisation de Wilson car la construction des interpolateurs de hadrons est simple. Dans le cas de la discrétisation *Staggered*, on utilise, pour déterminer l'échelle, le flow de Wilson dont nous ne parlerons pas. Cette méthode est décrite dans [34], [35]. Mentionnons cependant que pour les simulations *Staggered* plus récentes et plus précises du chapitre 4, on a modélisé plus finement $a(\beta, m_l, m_s)$ (avec un rapport $\frac{m_s}{m_c}$ fixé) contrairement au cas Wilson.

2.3.4 DÉFINIR LE POINT PHYSIQUE

Pour définir le point physique, la modélisation est essentiellement similaire sauf qu'on connaît désormais $a(\beta)$ et qu'on fitte des quadruplets $(\frac{aM_\pi}{a(\beta)}, \frac{aM_{K^*}}{a(\beta)}, \frac{aM_{\text{hadron}}}{a(\beta)}, a(\beta))$:

$$\begin{aligned}
 \frac{aM_{\text{hadron}}}{a(\beta)} = M^{\phi, \text{lattice}} \left\{ \right. & 1 \\
 & + p_l \left[\left(\frac{aM_\pi}{a(\beta)} \right)^2 - M_\pi^{\phi 2} \right] \\
 & + p_s \left[\left(\frac{aM_{K^*}}{a(\beta)} \right)^2 - M_{K^*}^{\phi 2} \right] \\
 & + p_a a_\beta^2 \left. \right\} \quad (2.88)
 \end{aligned}$$

Le paramètre fitté $M^{\phi, \text{lattice}}$ est alors la masse du hadron recherché au point physique à la limite du continu car les paramètres se sont réglés simultanément lors de la minimisation du χ^2 de telle sorte que $m_l \rightarrow m_l^\phi$, $m_s \rightarrow m_s^\phi$ et $a \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow \infty$).

Nous explorerons les dépendances de volume fini volontairement omises ici au chapitre 4.

Des résultats complets sur la spectroscopie hadronique utilisant un jeu de simulation $2 + 1$ avec des paramètres proches de la réalité ont été publiés en 2008 permettant par exemple le calcul de la masse du nucléon, limite d'isospin du proton et du neutron, à 3% près [36]. En 2012, l'ajout d'une forme simplifiée de la QED sur réseau dans l'approximation *Quenched* consistant à éliminer le déterminant fermionique de 2.65, ce qui revient

à considérer une théorie sans polarisation du vide, a permis de séparer les contributions de la QCD et les contributions de la QED dans la masse du proton et du neutron [37]. Enfin en 2014, un nouveau jeu de simulation $1+1+1+1$ a permis de calculer précisément la différence de masse du proton et du neutron sans l'approximation *Quenched* [38].

2.3.5 LES ERREURS STATISTIQUES

Blocs de statistiques

L'algorithme Monte-Carlo utilisé pour la génération des configurations de jauge produit des données qui possèdent une certaine corrélation. Pour cette raison, on ne garde qu'une certaine fraction des trajectoires comme configurations de jauge effective (en général 1 configuration pour 10 trajectoires). On utilise le groupage par blocs pour vérifier qu'il ne subsiste pas de corrélations. Cela consiste à vérifier qu'en groupant les données par groupe de taille K , la variance de ces groupes diminue en $\frac{1}{K}$ si les données originales étaient réellement indépendantes.

Erreurs statistiques par rééchantillonnages

Le nombre de configurations de jauge utilisé est généralement trop faible pour espérer calculer un bon estimateur de la variance de la quantité calculée directement. Par ailleurs, il est difficile d'analyser comment les erreurs statistiques se propagent le long d'une chaîne d'analyse comprenant des manipulations algébriques et statistiques. Pour cette raison, il est d'usage d'utiliser en QCD sur réseau des techniques de rééchantillonnage statistique. Nous utiliserons tout au long de cette thèse le *Bootstrap resampling*. Étant donné un ensemble de N configurations, on calcule l'observable $\langle O \rangle$ sur la totalité de ces configurations ce qui nous donne "la valeur moyenne" et aussi $K = 2000$ fois sur un ensemble de N configurations pris au hasard parmi les N initiales et avec répétitions. La distribution des K échantillons donne l'erreur statistique via la déviation standard non biaisée. Un avantage du *Bootstrap resampling* est la possibilité de fitter les échantillons avec une bonne stabilité numérique comme s'il s'agissait de l'ensemble des N données initiales. Remarquons aussi qu'il n'est pas nécessaire de recalculer la matrice de covariance (ou de corrélation) à partir des échantillons, on se contente de la calculer une fois à partir de la valeur centrale.

2.3.6 AIC ET LES ERREURS SYSTÉMATIQUES

Reste les dernières sources d'erreurs correspondant à la somme de tous les choix subjectifs physiquement motivés que nous avons fait depuis le début de l'analyse. On peut citer notamment :

- le choix des intervalles de fit pour les masses de hadrons
- l'exclusion éventuelle de certains points lors du fit physique

En suivant la méthode développée dans [38], on peut utiliser le critère d'Akaike en théorie de l'information (AIC) [39]. À chaque combinaison c de choix subjectifs, on considère un poids :

$$w_c = \exp^{-\frac{1}{2}(AIC_c - AIC_{min})}$$

$$AIC_c = \sum_i \chi^2(\text{choix } i \text{ combinaison } c) + 2(\#\text{param}) \quad (2.89)$$

où $\chi^2(\text{choix } i \text{ combinaison } c)$ est le minimum du χ^2 pour le choix i de la combinaison c et AIC_{min} est le minimum de AIC_c sur les choix de combinaisons c .

On considère pour moyenne finale la moyenne pondérée de la quantité recherchée. L'erreur systématique finale est la racine carrée de la variance pondérée :

$$X = \bar{X} \pm \sigma_X$$

$$\bar{X} = \frac{1}{\sum_c w_c} \sum_c w_c X_c \quad (2.90)$$

$$\sigma_X = \frac{\sum_c w_c}{(\sum_c w_c)^2 - \sum_c w_c^2} \sum_c w_c (X_c - \bar{X})^2$$

La contribution hadronique de polarisation du vide au premier ordre à a_μ par le réseau : méthodes

Dans cette partie, on commence par calculer $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ à partir $\hat{\Pi}(Q^2)$ qui est la partie scalaire renormalisée du tenseur de polarisation hadronique du vide $\Pi_{\mu\nu}(Q)$ dans sa décomposition invariante sous l'action d'une rotation euclidienne. On expliquera pourquoi on peut quasiment insérer directement $\hat{\Pi}$ dans l'intégrale sur les impulsions définissant le terme de Schwinger $a_\mu^{(2)}$ pour calculer $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$. Une analyse du noyau dans l'intégrale nous montre alors que ce sont les impulsions faibles qui contribuent le plus ce qui pose le problème de l'inaccessibilité des impulsions de l'intervalle $[0, \hat{Q}_{\min}]$ et donc des volumes utilisés dans les simulations et limités par le temps de calcul. Par ailleurs, l'obtention de $\hat{\Pi}(0)$ est impossible directement à priori et le signal statistique est moins bon au voisinage de $Q = 0$; tout du moins dans la méthode la plus directe qu'on appellera "méthode traditionnelle". Il est utile, pour cette raison, de séparer l'intervalle d'intégration en deux parties : les "hautes" impulsions où les données sont précises mais contribuent peu et où on peut directement intégrer numériquement et les "basses" impulsions où les données sont moins précises mais contribuent fortement et qui requièrent un traitement spécifique. On appelle ce traitement différencié la représentation hybride.

On détaille ensuite le calcul de $\Pi_{\mu\nu}$ sur réseau à partir des versions discrétisées du courant électromagnétique. Cela nous donne l'occasion de rappeler le rôle des identités de Ward en QED. Conserver explicitement le courant nécessite plus de calculs de propagateurs et peut parfois augmenter le bruit statistique. On différenciera le cas Wilson et le cas *Staggered*.

Puisque nous nous limitons aux calculs des contributions connectées à $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$, nous donnerons ensuite une borne supérieure des contributions déconnectées.

Enfin on étudiera plusieurs méthodes candidates pour contourner les problèmes posés par la "méthode traditionnelle". Alors que toutes partagent le fait d'intégrer numériquement directement les données dans l'intervalle des hautes impulsions, les techniques pour modéliser dans l'intervalle des basses impulsions diffèrent.

3.1 HVP EUCLIDIEN ET RELATION À $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$

3.1.1 TENSEUR DE POLARISATION

Le tenseur de polarisation $\Pi^{\mu\nu}(p)$ intervient naturellement en théorie quantique des champs. Dès qu'on s'intéresse à un champ quantique de spin 1, c'est à dire un champ de vecteur et que l'on souhaite calculer les contributions à la S-matrice, il apparaît dans le propagateur. Par exemple dans le cas d'un champ massif :

$$\Delta_{\mu\nu}(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\Pi_{\mu\nu}(p)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{ip(x-y)} \quad (3.1)$$

avec :

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / m^2 \quad (3.2)$$

où $g^{\mu\nu}$ est la métrique lorentzienne.

Dans le cas des champs de jauge non massif de la QED ou de la QCD :

$$\Delta_{\mu\nu}(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\Pi_{\mu\nu}(p)}{p^2 + i\varepsilon} e^{ip(x-y)} \quad (3.3)$$

avec :

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = g^{\mu\nu} - \frac{1 - \alpha}{\alpha} p^\mu p^\nu / p^2 \quad (3.4)$$

ce qui donne en jauge de Feynman $\alpha = 1$ et en jauge de Landau-Lorentz $\alpha \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{Feynman}}^{\mu\nu}(p) &= g^{\mu\nu} \\ \Pi_{\text{Landau-Lorentz}}^{\mu\nu}(p) &= g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / p^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dans ce dernier cas, $\Pi_{\mu\nu}(0)$ est alors la matrice de projection sur l'hyperplan orthogonal à la direction du temps et $\Pi_{\mu\nu}(p)$ est la matrice de projection sur l'hyperplan orthogonal à p^μ .

Le tenseur de polarisation hadronique du vide sera donc défini comme le corrélateur, c'est à dire la fonction à 2 points, entre un courant électromagnétique en entrée et un courant électromagnétique en sortie, prenant en compte l'ensemble des phénomènes de QCD entre les deux et représenté par le *blob* hadronique de la figure 1.8. Plus précisément, on définit pour chaque courant créé par une saveur de quark f électriquement chargé :

$$\Pi_{(f)}^{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ J_{(f)}^\mu(x) J_{(f)}^\nu(0) \} | 0 \rangle \quad (3.6)$$

où $|0\rangle$ est le vide de QCD. $J_{(f)}^\mu$ est le courant conservé associé à la symétrie par changement de phase sous l'action de $U(1)$ pour la saveur (f) :

$$J_{(f)}^\mu = \bar{f} \gamma^\mu f, \quad \partial_\mu J_{(f)}^\mu = 0 \quad (3.7)$$

Dorénavant, on omettra l'indice (f) ce qui signifiera qu'on a implicitement sommé sur les saveurs que l'on souhaite prendre en compte pour le degré de précision considéré.

La conservation du courant est une condition nécessaire pour construire des interactions $A_\mu J^\mu$ dans l'action invariante de jauge où A_μ est le champ de jauge. La discrétisation du courant sera l'objet de la partie 3.2.1. Dans le cas continu, la conservation du courant implique les identités de Ward [40] [41] :

$$\partial_\mu \Pi^{\mu\nu}(x) = \partial_\nu \Pi^{\mu\nu}(x) = 0 \quad (3.8)$$

ou en représentation de Fourier :

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = q_\nu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0 \quad (3.9)$$

ce qui signifie que la polarisation du vide est nulle avec la quadri-impulsion du photon. C'est une conséquence de l'invariance de jauge de la QED garantissant l'universalité de la constante de renormalisation de la charge, indépendamment des interactions que peuvent avoir les fermions.

3.1.2 PARTIE SCALAIRE DU TENSEUR

Dans l'expression qui donne la contribution de la polarisation du vide à a_μ , c'est cette polarisation du vide pour impulsions euclidiennes Q_μ , telles que $Q^2 = -q^2 \geq 0$, qui intervient. Le tenseur $\Pi_{\mu\nu}(Q)$, en tant que tenseur symétrique de rang 2, peut être décomposé de manière unique en une partie scalaire $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}$ et une partie sans trace $\bar{\Pi}_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(Q) &= \bar{\Pi}_{\mu\nu}(Q) + \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(Q) \\ \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(Q) &= \delta_{\mu\nu} \Pi(Q) \\ \sum_{\mu=0}^3 \bar{\Pi}_{\mu\mu}(Q) &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

En supposant l'invariance par la symétrie de Lorentz, c'est à dire en négligeant les effets de discrétisation liés à la brisure de symétrie par le réseau, on a :

$$\bar{\Pi}_{\mu\nu}(Q) = (Q_\mu Q_\nu - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} Q^2) f(Q^2) \quad (3.11)$$

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(Q) = \delta_{\mu\nu} Q^2 g(Q^2) \quad (3.12)$$

En utilisant la conservation du courant $Q_\mu \Pi_{\mu\nu}(Q) = 0$, on obtient :

$$g(Q^2) = -\frac{4-1}{4} f(Q^2) \quad (3.13)$$

Ce qui permet d'exhiber la structure tensorielle de $\Pi_{\mu\nu}(Q)$:

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) = (Q_\mu Q_\nu - \delta_{\mu\nu} Q^2) \Pi(Q^2). \quad (3.14)$$

Cette décomposition implique $\Pi_{\mu\nu}(Q=0) = 0$ et garantit que le photon reste non massif. On en reparlera lorsqu'on parlera des techniques d'extraction 3.4 3.5 3.6 de la partie scalaire $\Pi(Q^2)$ qui contient l'information utile pour $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ et caractérise le spectre hadronique en métrique euclidienne. Plus précisément, c'est la partie scalaire renormalisée, à laquelle on soustrait la divergence ultraviolette, qui a un lien avec l'expérience :

$$\hat{\Pi}(Q^2) = \Pi(Q^2) - \Pi(0) \quad (3.15)$$

où la soustraction se fait au point de Thomson, $Q^2 = 0$.

3.1.3 FACTEURS DE FORME

Nous allons rappeler comment les corrections quantiques en QED donnent naissance à une fonction vertex définissant ce qu'on appelle les facteurs de forme. On considère pour cela la fonction à 3 points pour un courant $J^\mu(x)$ et les champs $\Psi(y)$ et $\bar{\Psi}(z)$:

$$\int d^4x d^4y d^4z e^{ipx} e^{iky} e^{-ilz} \langle 0 | T \{ J^\mu(x) \Psi(y) \bar{\Psi}(z) \} | 0 \rangle = \quad (3.16)$$

$$iqS'(k)\Gamma^\mu(k,l)S'(l)\delta^4(l-k-p)$$

où q est la charge du fermion, S' est le propagateur fermionique avec interactions de limite libre $(\gamma_\lambda k^\lambda - m + i\varepsilon)^{-1}$ et $\Gamma^\mu(k,l)$ est la fonction de vertex avec interactions de limite libre γ^μ . La conservation du courant permet de montrer que la renormalisation de la charge ne dépend pas de la self-énergie ni des corrections radiatives du vertex mais seulement de la polarisation du vide.

On doit étudier la structure de l'élément de matrice :

$$\langle \bar{\Psi}_{p',\sigma'} | J^\mu(0) | \Psi_{p,\sigma} \rangle = \bar{u}(p',\sigma') \Gamma^\mu(p',p) u(p,\sigma) \quad (3.17)$$

En utilisant :

- la décomposition de Γ^μ sur une base de l'algèbre de Clifford correspondant aux matrices γ^μ choisies
- l'équation de Dirac

on montre que [4] :

$$\bar{u}(p',\sigma') \Gamma^\mu(p',p) u(p,\sigma) = \bar{u}(p',\sigma') \left[\begin{array}{cc} \gamma^\mu & F(k^2) \\ -\frac{i}{2m}(p+p')^\mu & G(k^2) \\ +\frac{(p-p')^\mu}{2m} & H(k^2) \end{array} \right] u(p,\sigma) \quad (3.18)$$

où m est la masse du fermion, F , G et H sont les facteurs de forme, c'est à dire des fonctions (réelles du fait de l'hermiticité de $J^\mu(0)$) ne dépendant que de la quadri-impulsion de transfert $k^2 = (p' - p)^2$. En utilisant :

- l'invariance de Lorentz
- la conservation du courant

on montre que nécessairement $H(k^2) = 0$ et les facteurs de forme restant respectent la condition de normalisation :

$$F(0) + G(0) = 1 \quad (3.19)$$

Enfin pour faire le lien avec le moment magnétique, on procède à un changement de base sur laquelle la fonction de vertex est décomposée et on trouve :

$$\bar{u}(p', \sigma') \Gamma^\mu(p', p) u(p, \sigma) = \frac{-i}{2m} \bar{u}(p', \sigma') \left[\begin{array}{l} (p + p')^\mu (F(k^2) + G(k^2)) \\ -\frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (p' - p)_\nu F(k^2) \end{array} \right] u(p, \sigma) \quad (3.20)$$

Cet élément de matrice général permet de calculer alors le moment magnétique. On prend pour cela l'élément de matrice entre état à une particule de faible impulsion calculé pour un hamiltonien d'interaction $H = -\int A(x)J(x)$ où $A(x)$ est le vecteur potentiel d'un champ extérieur faible et constant dans le temps. On peut ainsi montrer que le g-facteur du chapitre 1 pour une particule de spin 1/2 vérifie :

$$g/2 = F(0) = 1 - G(0) \quad (3.21)$$

et donc en particulier le moment magnétique anomal a_μ est :

$$a_\mu = -G(0) \quad (3.22)$$

Une propriété du facteur de forme $G(k^2 = 0)$ est de n'être ni divergent infrarouge, ni divergent ultraviolet comme il se doit, parce qu' a_μ est une observable physique. On peut donc calculer a_μ à une boucle sans régularisation.

3.1.4 CALCUL DE $a_\mu^{\text{QED},(2)}$ ET DE $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$

Dans cette partie, on rappelle comment calculer le terme historique de Schwinger $a_\mu^{\text{QED},(2)}$ et comment le modifier pour obtenir naturellement $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ à partir du tenseur de polarisation hadronique du vide $\Pi_{\mu\nu}$ calculé en QCD sur réseau (et donc en métrique euclidienne).

En appliquant les règles de Feynman puis en introduisant les paramètres de Feynman et après réduction avec les règles de calcul sur les spineurs de Dirac et la rotation de Wick, on arrive à :

$$a_\mu^{(2)} = a_\mu^{\text{QED},(2)} = -G^{(2)}(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty dt \frac{2t}{m^4} K\left(\frac{t}{m^2}\right) \quad (3.23)$$

où on a noté :

$$K\left(\frac{t}{m^2}\right) = \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{(x^2 + t/m^2)^3} \quad (3.24)$$

Généralement, le calcul est grandement simplifié en intervertissant les intégrales et en calculant :

$$\int_0^\infty dt \frac{2t}{m^4} \frac{x^2(1-x)}{(x^2 + t/m^2)^3} = 1 - x \quad (3.25)$$

ce qui permet de conclure immédiatement :

$$a_\mu^{(2)} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx (1-x) = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (3.26)$$

Même s'il est possible mais moins agréable de calculer directement :

$$\frac{2t}{m^4} K\left(\frac{t}{m^2}\right) = \frac{1}{m^2} \frac{\sqrt{r}(r+1)\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) - r}{4r(r+1)} \Big|_{r=\frac{t}{m^2}} \quad (3.27)$$

qui donne :

$$a_\mu^{(2)} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty dt \frac{1}{m^2} \frac{\sqrt{r}(r+1)\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) - r}{4r(r+1)} \Big|_{r=\frac{t}{m^2}} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (3.28)$$

Pour calculer $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$, on doit modifier le propagateur du photon quand on applique les règles de Feynman :

$$\frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \rightsquigarrow \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \frac{\hat{\Pi}(k^2)}{k^2} \quad (3.29)$$

En utilisant la même relation de dispersion qui a servi pour le calcul de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ via les données expérimentales $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$:

$$\frac{\hat{\Pi}(k^2)}{k^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dt \frac{1}{t} \frac{1}{t - k^2 - i\epsilon} \text{Im}\Pi(t) \quad (3.30)$$

on comprend que la polarisation hadronique du vide va avoir pour effet de donner une masse fictive au photon telle que pour chaque valeur de t fixé, le photon devient massif de masse $m^2 = t$:

$$\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \frac{1}{t - k^2} \quad (3.31)$$

Ainsi le calcul de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ est naturellement relié à celui de $a_\mu^{(2)}$ modifié que l'on note $a_{\mu,\gamma}^{(2)} \text{ massif}$ et on obtient la représentation spectrale de Bouchiat-Michel [82]¹ :

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = \int_0^\infty dt \frac{1}{t} \frac{1}{\pi} \text{Im}\Pi(t) a_{\mu,\gamma}^{(2)} \text{ massif} \quad (3.32)$$

¹Cet article est écrit à une époque où le lepton muon était encore appelé "méson μ ".

avec :

$$a_{\mu,\gamma}^{(2)} \text{ massif} = \frac{\alpha}{\pi} J(t) \quad (3.33)$$

où l'on a noté :

$$J(t) = \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)t/m^2} \quad (3.34)$$

Ici l'intégration donne sur la branche $0 \leq r = \frac{t}{m^2} < 1$ [42] :

$$J(t) = \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{2} - 4r - 4(1-2r)(\ln(4r) - 2(1-8r+8r^2)) \left(\frac{r}{1-r} \right)^{\frac{1}{2}} \arccos(\sqrt{r}) \right] \Bigg|_{r=\frac{t}{m^2}} \quad (3.35)$$

et sur la branche $r = \frac{t}{m^2} \geq 1$:

$$J(t) = \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{2} (y^2(2-y^2) + (1+y)^2(1+y^2)) \frac{\ln(1+y) - y + \frac{1}{2}y^2}{y^2} + \frac{1+y}{1-y} y^2 \ln y \right] \Bigg|_{y=\frac{1-\sqrt{1-\frac{4}{r}}}{1+\sqrt{1-\frac{4}{r}}}, r=\frac{t}{m^2}} \quad (3.36)$$

ce qui permet déjà d'étudier la région du spectre hadronique contribuant le plus à $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$. Pour le calcul sur réseau, il est plus intéressant d'avoir cette fonction de poids en métrique euclidienne. On va pour cela, comme on a pu le faire pour $a_\mu^{(2)}$, intervertir l'intégrale de dispersion et l'intégrale sur le paramètre de Feynman après avoir effectué la rotation de Wick :

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = \int_0^1 dx (1-x)x^2 \int_0^\infty dt \frac{1}{t} \frac{1}{\pi} \text{Im}\Pi(t) \frac{1}{x^2 + (1-x)t/m^2} \quad (3.37)$$

Il suffit alors de modifier le dénominateur pour pouvoir utiliser la relation de dispersion :

$$\begin{aligned} a_\mu^{\text{HVP,LO}} &= \int_0^1 dx x^2 m^2 \int_0^\infty dt \frac{1}{t} \frac{1}{\pi} \text{Im}\Pi(t) \frac{1}{t - (-m^2 \frac{x^2}{1-x})} \\ &= \int_0^1 dx x^2 m^2 \frac{\hat{\Pi}(-\frac{x^2}{1-x} m^2)}{-\frac{x^2}{1-x} m^2} \\ &= \int_0^1 dx (x-1) \hat{\Pi}\left(-\frac{x^2}{1-x} m^2\right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Le changement de variable $Q^2 = -\frac{x^2}{1-x} m_\mu^2$ dans l'intégrale donne :

$$dx (x-1) = dQ^2 w(Q^2) \quad (3.39)$$

où l'on a noté le noyau :

$$w(Q^2) = \frac{1}{4m_\mu^2} \frac{\left[(r+2) - \sqrt{r(r+4)} \right]^2}{\sqrt{r(r+4)}} \Bigg|_{r=\frac{Q^2}{m_\mu^2}} \quad (3.40)$$

ce qui permet donc d'arriver à l'expression finale :

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_0^\infty dQ^2 w(Q^2) \hat{\Pi}(Q^2) \quad (3.41)$$

L'utilisation de la QCD sur réseau pour le calcul des contributions hadroniques au moment magnétique anomal a commencé en 2003 quand Thomas Blum a redérivé le calcul du noyau $w(Q^2)$ sous la forme équivalente [43] :

$$w(Q^2) = \frac{m_\mu^2 Q^2 Z(Q^2)^3 (1 - Q^2 * Z(Q^2))}{1 + m_\mu^2 Q^2 Z^2} \quad (3.42)$$

où il note :

$$Z(Q^2) = -\frac{Q^2 - \sqrt{Q^4 + 4m_\mu^2 Q^2}}{2m_\mu^2 Q^2} \quad (3.43)$$

Cette méthode est donc une alternative à la méthode habituelle (section 1.3.3) utilisant une relation de dispersion et les données expérimentales de sections efficaces $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$ et permet un calcul *ab-initio* avec la théorie “fondamentale” QCD.

3.1.5 LIMITES DE LA MÉTHODE

Il est important de noter que le noyau $w(Q^2)$ dans l'intégrale :

- diverge quand $Q^2 \rightarrow 0$,
- est une fonction monotone décroissante de Q^2 ,

et qu'une intégrande typique est dominée par la région de faible impulsion $Q^2 \sim m_\mu^2/4 \approx 0.0028 \text{ GeV}^2$. Le noyau et une intégrande typique sont plottés sur la figure .

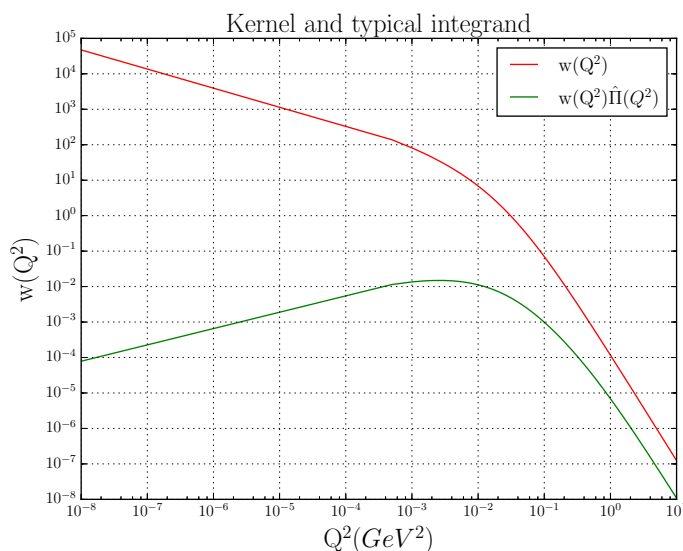


FIG. 3.1 : Noyau et intégrande typique pour le calcul de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$.

Un des problèmes de la QCD sur réseau est que la zone de pic de la courbe d'une intégrande typique était encore récemment complètement inaccessible et même aujourd'hui ne comporte qu'un nombre limité de points, ce qui résulte en des extrapolations

peu précises. La taille des réseau limite, en effet, l'impulsion non nulle minimale comme décrit dans la relation 2.34.

Pour couvrir efficacement la zone de faible impulsion, il faudrait des réseaux correspondant à des tailles physiques de l'ordre de 20 fm, soit plus de 2 fois plus grands que les plus grands réseaux actuels. Le coût d'une simulation allant comme $\Lambda^{\frac{5}{4}}$. Un second problème complique la détermination de $\Pi(Q^2)$: le tenseur cinématique et donc toute la fonction à 2 points s'annule en $Q^2 = 0$ et par conséquent, les erreurs sur la détermination directe de $\Pi(Q^2)$ deviennent grandes dans la région importante $Q^2 \approx 0$. Nous appellerons désormais la méthode historique de ce paragraphe *la méthode traditionnelle*.

3.2 CALCUL DU TENSEUR DE POLARISATION DU VIDE SUR LE RÉSEAU

3.2.1 IDENTITÉS DE WARD POUR LE COURANT DISCRÉTISÉ SUR LE RÉSEAU

Suivant la définition du tenseur de polarisation hadronique 3.6, nous devons donc discrétiser le courant électromagnétique $J_\mu^{(f)}(x) = \bar{f}(x)\gamma_\mu f(x)$.

Dans les simulations de la collaboration Budapest-Marseille-Wuppertal avec fermions discrétisés de Wilson, nous avons implémenté un courant vecteur conservé à l'arrivée :

$$J_{\mu,\text{CVC}}^{(f)}(n) = \frac{1}{2} \left[\bar{f}(n + a\hat{\mu})(\mathbb{1} + \gamma_\mu)U_\mu^\dagger(n)f(n) - \bar{f}(n)(\mathbb{1} - \gamma_\mu)U_\mu(n)f(n + a\hat{\mu}) \right] \quad (3.44)$$

Dans un souci d'économie de temps de calcul, on a pris le courant vecteur discrétisé naïvement à la source, l'utilisation d'un courant conservé à la source aurait - nous le prouverons dans la section suivante - multiplié le nombre de propagateurs à calculer.

$$J_{\nu,\text{LOC}}^{(f)}(m) = \bar{f}(m)\gamma_\nu f(m) \quad (3.45)$$

Ce dernier courant J_ν doit donc être renormalisé multiplicativement par une constante $Z_V(\beta)$ pour chaque valeur du couplage nu β . Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, nous avons utilisé la discrétisation de Wilson que lors d'une étude préliminaire sur les corrections de volume fini et à une masse non physique du π sur réseau donc nous n'avons pas cherché à calculer cette renormalisation.

On peut alors vérifier numériquement si l'identité de Ward est vérifiée. Les résultats se trouvent sur les figures 3.2.

Dans les simulations de la collaboration Budapest-Marseille-Wuppertal avec fermions discrétisés *Staggered*, nous avons implémenté un courant vecteur conservé au départ et à l'arrivée car les inversions sont moins chères à calculer et toutes les simulations sont faites à la masse physique du π sur réseau. Nous n'avons pas observé de bruit statistique artefact de la délocalisation du courant sur plusieurs sites voisins.

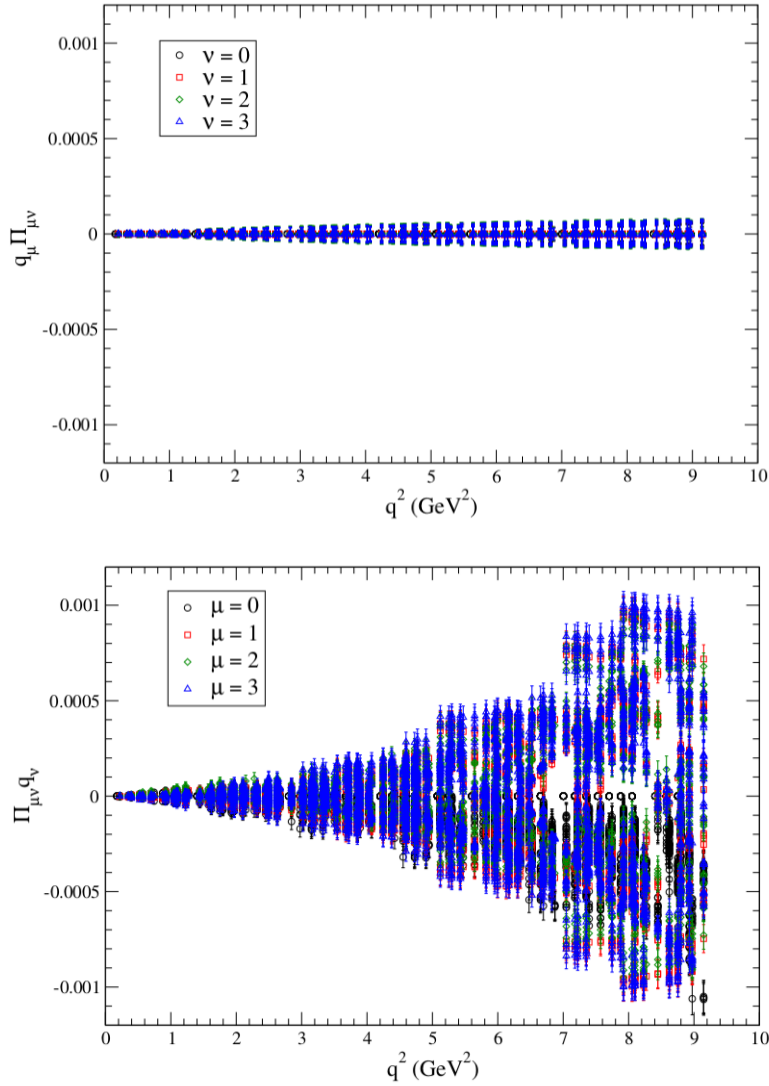


FIG. 3.2 : Vérification de l'identité de Ward pour le courant non-conservé J^ν à la source (bas) et J^μ conservé à la cible (haut). On voit que l'utilisation du courant conservé impose de façon beaucoup plus précise l'identité de Ward.

3.2.2 CONDITIONS PÉRIODIQUES TWISTÉES

Pour essayer de couvrir la région des basses impulsions, la collaboration Budapest-Marseille-Wuppertal a également implémenté suivant [44], [45] des conditions périodiques twistées, c'est à dire, introduire un angle θ_μ^{tw} dans chaque direction du réseau μ pour modifier artificiellement les impulsions :

$$p_\mu = \frac{2\pi n_\mu}{L_\mu} \rightsquigarrow p_\mu = \frac{2\pi n_\mu}{L_\mu} + \frac{2\pi\theta_\mu^{\text{tw}}}{L_\mu} \quad (3.46)$$

en imposant les conditions aux bords :

$$\psi(n + L_\mu \hat{\mu}) = e^{2i\pi\theta_\mu^{\text{tw}}} \psi(n) \quad (3.47)$$

Cela a pour conséquence de modifier les identités de Ward [46] mais permet aussi d'avoir accès à des impulsions très petites, par exemple en prenant $n_\mu = 0$ et un petit angle

$\theta_\mu^{\text{tw}} \approx 0$. Cette méthode a toutefois été abandonnée car le bruit restait très important dans la région $Q^2 \approx 0$. On peut trouver dans [47], le plot 3.3 qui illustre ce résultat.

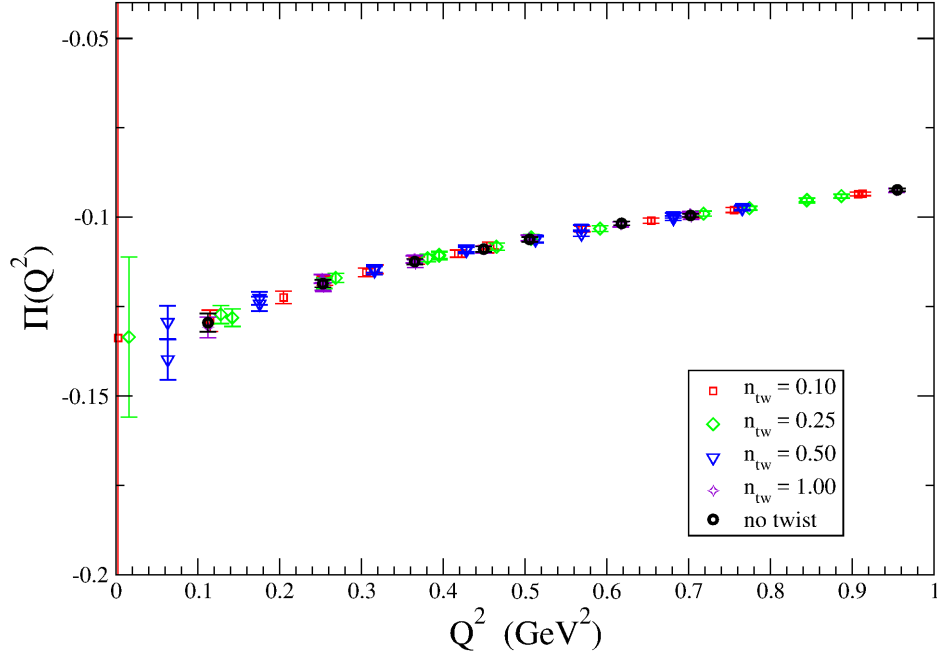


FIG. 3.3 : L'utilisation de conditions *twistées* permet de couvrir les impulsions habituellement inaccessibles mais elles ne contraignent pas les extrapolations car le bruit statistique devient énorme. Sur ce plot, l'erreur statistique est en fait plus grande que l'axe vertical à gauche.

3.2.3 CONTRACTIONS DE WICK CONNECTÉES ET DÉCONNECTÉES

Dans cette section, on notera l'équation de Dirac discrétisée à l'aide de l'opérateur de Wilson défini dans la partie 2.2.3 $D^{(f)}(n|m)_{\alpha\beta ab}$ auquel on a ajouté les termes de l'amélioration de Symanzik de la section 2.2.5 et les champs de jauge $U_\mu(n)$ sont ceux issus du *smearing* décrit dans la partie 2.2.6.

On considère des sources ponctuelles. L'équation de Dirac discrétisée s'écrit :

$$D^{(f)}(m|p)_{\alpha\gamma ac} S^{(f)}(n \leftarrow p)_{\gamma\beta cb} = \delta_{\alpha,\beta} \delta - ab\delta_{mn} \quad (3.48)$$

avec sommation implicite sur tous les indices. Pour n fixé, le propagateur solution requiert donc 12 inversions et donne un vecteur de dimension $12 \times 12 \times \Lambda$, où Λ est le volume du réseau. Ce propagateur connecte le point source de site-spin-couleur (n, β, b) à tous les autres points du réseau de site-spin-couleur (m, α, a) .

Pour illustrer le théorème de Wick, on calcule ici les contractions de Wick sur les courants électromagnétiques discrétisés de la section précédente avec un courant local à

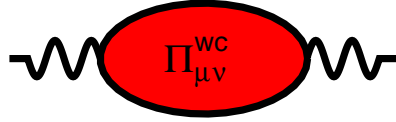


FIG. 3.4 : Contributions Wick-connectées $\Pi_{\mu\nu}^{\text{wc}}$ au tenseur total $\Pi_{\mu\nu}$. Les deux photons appartiennent à la même boucle de quark.

la source $J_{\nu,\text{LOC}}^{(f)}(m)$ ainsi qu'un courant local à la cible $J_{\mu,\text{LOC}}^{(f)}(n)$:

$$\langle J_{\mu,\text{LOC}}^{(f)}(n) J_{\nu,\text{LOC}}^{(f)}(m) \rangle = \text{Tr}_{\text{sc}} \left[\gamma_{\mu} S_{(f)}(n \leftarrow n) \right] \text{Tr}_{\text{sc}} \left[\gamma_{\nu} S_{(f)}(m \leftarrow m) \right] \quad (3.49)$$

$$- \text{Tr}_{\text{sc}} \left[\gamma_{\mu} S_{(f)}(n \leftarrow m) \gamma_{\nu} S_{(f)}(m \leftarrow n) \right] \quad (3.50)$$

où Tr_{sc} désigne la trace sur les indices de couleur et de spin. Ces contractions séparent deux types de contributions. D'une part, les composantes faisant intervenir des propagateurs $S_{(f)}(n \leftarrow m)$ et $S_{(f)}(m \leftarrow n)$. Ils sont appelés propagateurs *one-to-all* et on peut échantillonner leurs valeurs en profitant de la symétrie de translation du réseau pour les calculer en moyennant sur plusieurs sources de site n différents. Ils peuvent être utilisés pour calculer le diagramme des contributions Wick-connectées représentées en figure 3.4. D'autre part, le terme faisant intervenir des propagateurs $S_{(f)}(n \leftarrow n)$ et $S_{(f)}(m \leftarrow m)$ contribue au diagramme des contributions Wick-déconnectées représentées en figure 3.5. Ici, l'utilisation des propagateurs *one-to-all* ne suffit pas, car ceux-ci ne permettent pas de faire les sommes sur les sites nécessaires pour effectuer les transformations de Fourier requises. On les estime en utilisant des sources stochastiques et des techniques sophistiquées de réduction de bruit qu'on n'explicitera pas ici, car ce travail fera partie de la continuation de cette thèse.

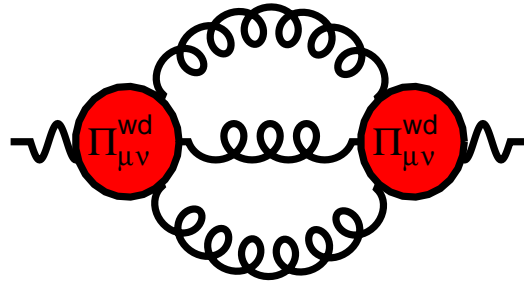


FIG. 3.5 : Contributions Wick-déconnectées $\Pi_{\mu\nu}^{\text{wd}}$ au tenseur total $\Pi_{\mu\nu}$. Les deux photons appartiennent à des boucles de quark distinctes.

Les contractions de Wick, avec désormais un courant électromagnétique conservé à la cible $J_{\mu,\text{CVC}}^{(f)}(n)$, donnent :

$$\langle J_{\mu,\text{CVC}}^{(f)}(n) J_{\nu,\text{LOC}}^{(f)}(m) \rangle = \langle J_{\mu,\text{CVC}}^{(f)}(n) J_{\nu,\text{LOC}}^{(f)}(m) \rangle^{\text{wc}} + \langle J_{\mu,\text{CVC}}^{(f)}(n) J_{\nu,\text{LOC}}^{(f)}(m) \rangle^{\text{wd}} \quad (3.51)$$

où l'on a noté :

$$\begin{aligned} \langle J_{\mu,\text{CVC}}^{(f)}(n) J_{\nu,\text{LOC}}^{(f)}(m) \rangle^{\text{wd}} &= \frac{1}{2} \text{Tr}_{\text{sc}} \left[(\mathbb{I} + \gamma_\mu) U_\mu^\dagger(n) S_{(f)}(n \leftarrow n + a\hat{\mu}) \right] \text{Tr}_{\text{sc}} \left[\gamma_\nu S_{(f)}(m \leftarrow m) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{Tr}_{\text{sc}} \left[(\mathbb{I} - \gamma_\mu) U_\mu(n) S_{(f)}(n + a\hat{\mu} \leftarrow n) \right] \text{Tr}_{\text{sc}} \left[\gamma_\nu S_{(f)}(m \leftarrow m) \right] \\ \langle J_{\mu,\text{CVC}}^{(f)}(n) J_{\nu,\text{LOC}}^{(f)}(m) \rangle^{\text{wc}} &= \frac{1}{2} \text{Tr}_{\text{sc}} \left[(\mathbb{I} - \gamma_\mu) U_\mu S_{(f)}(n + a\hat{\mu} \leftarrow m) \gamma_\nu S_{(f)}(m \leftarrow n) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{Tr}_{\text{sc}} \left[(\mathbb{I} + \gamma_\mu) U_\mu^\dagger(n) S_{(f)}(n \leftarrow m) \gamma_\nu S_{(f)}(m \leftarrow n + a\hat{\mu}) \right] \end{aligned}$$

Si l'on se restreint aux contributions connectées, en remarquant que grâce à la γ_5 -hermité, on a :

$$S_{(f)}(m \leftarrow n) = \gamma_5 S_{(f)}^\dagger(n \leftarrow m) \gamma_5 \quad (3.52)$$

$$S_{(f)}(m \leftarrow n + a\hat{\mu}) = \gamma_5 S_{(f)}^\dagger(n + a\hat{\mu} \leftarrow m) \gamma_5 \quad (3.53)$$

on voit bien que l'introduction du courant conservé $J_{\mu,\text{CVC}}^{(f)}(n)$ à la cible ne nécessite pas de calcul de propagateur autre que le *one-to-all* $S_{(f)}(\dots \leftarrow m)$ à moyenner typiquement sur quelques dizaines, centaines ou milliers de source sur différents sites m selon la saveur et le degré de précision souhaité.

3.2.4 DÉCOMPOSITION DU TENSEUR $\Pi_{\mu\nu}$

Pour l'instant, nous n'avons considéré que le courant électromagnétique pour chaque saveur ou implicitement sommé sur l'ensemble des saveurs. Dans cette section, nous allons étudier plus précisément la structure du courant total pour des simulations avec 4 saveurs : *up* u , *down* d , *strange* s et *charm* c . Le courant électromagnétique hadronique s'écrit alors :

$$J_\mu = \frac{2}{3} J_\mu^{(u)} - \frac{1}{3} J_\mu^{(d)} - \frac{1}{3} J_\mu^{(s)} + \frac{2}{3} J_\mu^{(c)} \quad (3.54)$$

Nous avons déjà calculé le résultat d'une contraction pour une saveur identique dans les parties 3.49 et 3.50. En remarquant que pour deux saveurs distinctes (f) et (f') :

$$\langle J_{\mu,\text{LOC}}^{(f)}(n) J_{\nu,\text{LOC}}^{(f')}(m) \rangle = \text{Tr}_{\text{sc}} \left[\gamma_\mu S_{(f)}(n \leftarrow n) \right] \text{Tr}_{\text{sc}} \left[\gamma_\nu S_{(f')}(m \leftarrow m) \right] \quad (3.55)$$

on peut désormais décomposer la structure en saveur du tenseur de polarisation hadronique $\Pi_{\mu\nu}$:

$$\Pi_{\mu\nu} = \frac{4}{9} \Pi_{\mu\nu}^{(u),\text{wc}} + \frac{1}{9} \Pi_{\mu\nu}^{(d),\text{wc}} + \frac{1}{9} \Pi_{\mu\nu}^{(s),\text{wc}} + \frac{4}{9} \Pi_{\mu\nu}^{(c),\text{wc}} + \frac{1}{9} \Pi_{\mu\nu}^{\text{wd}} \quad (3.56)$$

où l'on a posé (avec une transformation de Fourier implicite du corrélateur de courants) :

$$\Pi_{\mu\nu}^{(f),\text{wc}} = a^4 \langle J_\mu^{(f)} J_\nu^{(f)} \rangle^{\text{wc}} \quad (3.57)$$

et :

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{wd}} = \sum_{(f) \in \{u,d,s,c\}} 9 Q_f^2 \langle J_\mu^{(f)} J_\nu^{(f)} \rangle^{\text{wd}} + \sum_{(f) \neq (f') \in \{u,d,s,c\}} 9 Q_f Q_{f'} \langle J_\mu^{(f)} J_\nu^{(f')} \rangle \quad (3.58)$$

3.2.5 ESTIMATION DES CONTRIBUTIONS DÉCONNECTÉES À LA LIMITE D'ISOSPIN

Dans la limite d'isospin pour laquelle on considère que les masses des quarks *up* et *down* sont identique : $m_u = m_d$, on introduit une saveur légère l dégénérée. On réécrit donc (3.56) sous la forme :

$$\Pi_{\mu\nu} = \frac{5}{9} \Pi_{\mu\nu}^{(l),\text{wc}} + \frac{1}{9} \Pi_{\mu\nu}^{(s),\text{wc}} + \frac{4}{9} \Pi_{\mu\nu}^{(c),\text{wc}} + \frac{1}{9} \Pi_{\mu\nu}^{\text{wd}} \quad (3.59)$$

et l'on peut remarquer que plusieurs contributions déconnectées légères se sont annulées de telle sorte que les contributions l et s , $\frac{1}{9} \Pi_{\mu\nu}^{(l-s),\text{wd}}$, ne soit que la transformée de Fourier de :

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} & \times \text{Tr}_{\text{sc}} \left[\gamma_\mu \{ S_{(l)}(m \leftarrow m) \} - (l \rightarrow s) \} \right] \\ & \times \text{Tr}_{\text{sc}} \left[\gamma_\nu S_{(l-s)} \{ S_{(l)}(n \leftarrow n) \} - (l \rightarrow s) \} (n \leftarrow n) \right] \end{aligned} \quad (3.60)$$

Puisque dans ce travail, nous nous focalisons sur les contributions connectées, nous allons ici donner une estimation des contributions déconnectées $\Pi_{\mu\nu}^{\text{wd}}$ qui est une version améliorée et généralisée d'un argument dû à [48] utilisant la fonction spectrale de la QCD. Un autre argument utilisant de la théorie des perturbations chirale $SU(2)$ est disponible dans [49] et [50] seulement pour les contributions l déconnectées. On décompose le courant électromagnétique de la contribution selon sa composante isovecteur et isosinglet :

$$J_\mu^\gamma = J_\mu^{I=1} + \frac{1}{3} J_\mu^{I=0} \quad (3.61)$$

avec :

$$\begin{aligned} J_\mu^{I=1} &= \frac{1}{2} (\bar{u} \gamma_\mu u - \bar{d} \gamma_\mu d) \\ J_\mu^{I=0} &= \frac{1}{2} (\bar{u} \gamma_\mu u + \bar{d} \gamma_\mu d) - \bar{s} \gamma_\mu s + 2 \bar{c} \gamma_\mu c \end{aligned} \quad (3.62)$$

La décomposition du tenseur se réécrit donc :

$$\Pi_{\mu\nu}^{\gamma\gamma} = \Pi_{\mu\nu}^{I=1} + \frac{1}{9} \Pi_{\mu\nu}^{I=0} \quad (3.63)$$

On a alors des relations :

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{I=1} &= \frac{1}{2} \Pi_{\mu\nu}^{(l),\text{wc}} \\ \Pi_{\mu\nu}^{I=0} &= \frac{1}{2} \Pi_{\mu\nu}^{(l),\text{wc}} + \Pi_{\mu\nu}^{(s),\text{wc}} + 4 \Pi_{\mu\nu}^{(c),\text{wc}} + \Pi_{\mu\nu}^{\text{wd}} \end{aligned} \quad (3.64)$$

et $\Pi_{\mu\nu}$ donné par l'équation 3.56. Si l'on considère pour chaque composante de $\Pi_{\mu\nu}$, les seuils des fonctions spectrales associées $\rho(q)$:

$$\rho(q) = -\text{Im}\hat{\Pi}(Q^2) \quad (3.65)$$

où q est l'impulsion Q après anti-rotation de Wick (de l'espace Euclidien vers l'espace de Minkowski). La relation 3.65 peut être vue comme la relation inverse de la relation de dispersion 1.25. La variable \sqrt{s} sera dorénavant l'énergie dans le centre de masse, on a notamment pour le canal isovecteur :

$$\rho^{I=1}(s) \begin{cases} = 0, & 0 \leq \sqrt{s} < 2m_\pi \\ > 0, & \sqrt{s} \geq 2m_\pi \end{cases} \quad (3.66)$$

mais le canal isosinglet nécessite plus d'énergie :

$$\rho^{I=0}(s) \begin{cases} = 0, & 0 \leq \sqrt{s} < 3m_\pi \\ > 0, & \sqrt{s} \geq 3m_\pi \end{cases} \quad (3.67)$$

Donc la relation 3.65 se traduit :

$$\rho^{\text{wd}}(s) = -\frac{1}{2}\rho^{\text{wc}}(s), \quad \sqrt{s} < 3m_\pi \quad (3.68)$$

et réinjectée dans la relation 3.65, cela donne :

$$\frac{\frac{1}{9}\rho^{\text{wd}}(s)}{\frac{5}{9}\rho^{\text{wc}}(s)} = -\frac{1}{10}, \quad 2m_\pi < \sqrt{s} < 3m_\pi \quad (3.69)$$

En réutilisant la relation de dispersion pour repasser au $\Pi_{\mu\nu}$, et puisque a_μ est dominé par les longues distances (ou petits Q_μ), on a donc une première estimation des contributions déconnectées en fonction des contributions connectées. De plus, l'équation (3.64) indique que $\Pi_{\mu\nu}^{\text{wd}}$ est doublement $SU(3)$ supprimé et la figure 3.5 que cette contribution est supprimée par $1/N_c$ par rapport à la contribution connectée. Donc au total, on obtient un facteur de suppression pour la contribution déconnectée d'environ $1/3/3/3/10 \sim 1/270$ par rapport à la contribution connectée. Cela suggère que la première est bien plus petite en valeur absolue que les -10% de la contribution connectée suggérée par la relation (3.69). Cet argument de comptage naïf est confirmé par l'estimation en QCD sur réseau obtenue dans [51] qui trouve que la contribution déconnectée est environ -1.5% de la contribution connectée (voir la partie 4.3.2).

3.3 LA DESCRIPTION HYBRIDE DE $\Pi(Q^2)$

Dans cette section, nous allons justifier le traitement numérique différencié que nous appliquerons à $\hat{\Pi}(Q^2)$ dans le cas de basses impulsions et dans le cas de hautes impulsions.

Nous avons en effet vu comment la fonction de poids $w(Q^2)$ privilégiait dans le calcul de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ les contributions de $\hat{\Pi}(Q^2)$ pour des faibles impulsions ce qui correspond, par l'analyse de Fourier, aux effets de longue distance. Les effets de volume-fini y sont donc aussi naturellement plus importants. On est confronté à deux problèmes :

- les corrélateurs sur réseau souffrent pour cet intervalle d'un plus mauvais signal et celui-ci est amplifié par la nullité de la fonction cinématique quand on prend le rapport $\Pi(Q^2) = \frac{\Pi_{\mu\nu}(Q)}{Q_\mu Q_\nu - \delta_{\mu\nu} Q^2}$ pour Q_μ tendant vers 0 ;
- le nombre de points est limité dans les basses impulsions $Q^2 \approx 0$.

D'un autre côté, $\hat{\Pi}(Q^2)$ bénéficie d'un très bon signal statistique pour les hautes impulsions mais les valeurs sont biaisées cette fois par les erreurs de discrétisation.

Suivant [52], nous emploierons donc pour le reste de ce travail une stratégie de description hybride de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ qui consiste à séparer l'intervalle d'intégration en deux zones par une impulsion Q_{cut}^2 . On peut notamment montrer qu'on peut atteindre une précision de l'ordre du pour mille par une intégration numérique directe par règle du trapèze dans l'intervalle $[Q_{\text{cut}}^2, Q_{\text{max}}^2]$ GeV² :

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}}[Q_{\text{cut}}^2, Q_{\text{max}}^2] \approx \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \sum_{i=i_{\text{cut}}}^{i_{\text{max}}} (Q_{i+1}^2 - Q_i^2) \frac{(w\hat{\Pi})(Q_{i+1}^2) - (w\hat{\Pi})(Q_i^2)}{2} \quad (3.70)$$

Séparer l'intervalle permet par la même occasion de ne pas permettre aux données des hautes impulsions d'influencer trop fortement la modélisation à basse impulsion, comme pourrait le faire un *fit* global sur un large intervalle d'impulsions. Un autre avantage de la méthode est qu'on se débarrasse des corrélations sur un très grand nombre de points dans la région des haut Q^2 qui engendreraient une instabilité dans les *fit*.²

Le challenge numérique se situe donc dans la région $[0, Q_{\text{cut}}^2]$. On peut d'ores et déjà faire deux commentaires :

- la forme de l'intégrande typique montrée sur la figure 3.1 ne nous permet évidemment pas de faire une intégration numérique trapézoïdale directe car on perdrait toute l'information liée à la zone de pic de l'intégrande ;
- la forme de $\Pi(Q^2)$, dont un exemple est plotté sur la figure 3.8 n'est pas surprenant si on fait l'hypothèse du *Vector dominance model* : aux basses impulsions, il est modélisable par une fonction rationnelle dont les pôles sont les résonances du canal vecteur, c'est à dire principalement l'état du ρ pour la saveur légère ou l'état du ϕ pour la saveur *strange*. On peut alors se convaincre immédiatement que des approximations de Taylor de faibles degrés auraient beaucoup de difficultés à modéliser $\hat{\Pi}(Q^2)$ pour ces saveurs. On verra qu'au contraire, pour la saveur *charm*, une fonction de Taylor est suffisante.

²Dans la région des basses impulsions, les fits seront systématiquement corrélés et ne posent pas de problèmes majeurs car le nombre de points à fitter est petit.

On en arrive donc au problème suivant : on souhaite utiliser une fonctionnelle nécessaire pour compenser la faible densité de données des simulations sur réseau mais qui permet, par ailleurs, de modéliser des fonctions méromorphes le tout sans utiliser de modèle tels que le *Vector Dominance Model* ou la théorie des perturbations chirales. Il suffit pour cela d'utiliser des fonctions de Padé $P[M, N]$ qui ne sont que les équivalents rationnels des approximations de Taylor.³ Un rappel sur ces fonctions est donnée en appendice A. Nous verrons dans les sections suivantes des utilisations différentes de ces fonctionnelles : parfois sous la forme d'approximations et parfois utilisées pour un *fit*, donc d'une minimisation de χ^2 . Mais quelques soient la méthode utilisée, les approximations de Padé $P[M, N]$ d'une fonction f de Stieltjes convergent pour $M \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$ sur le domaine d'analyticité de f au sens où [91] :

$$P[1, 0] \leq P[2, 1] \leq \dots \leq P[N + 1, N] \leq \hat{\Pi}(Q^2) \leq P[N, N] \leq \dots \leq P[2, 2] \leq P[1, 1] \quad (3.71)$$

Or, dans un domaine de Q^2 fini, $\Pi(Q^2)$ est une fonction de Stieltjes, d  à la positivité de la fonction spectrale associée.

Après les considérations analytiques et qualitatives, le problème est de savoir comment choisir selon les attentes de précision numérique espérée sur le réseau :

- les degrés N et $M = N$ ou $M = N + 1$
- l'impulsion de coupure Q_{cut}^2

Pour répondre à cette question, il est donc nécessaire d'utiliser un modèle pour estimer numériquement la fonction $Q_{\text{max}}^2 \rightarrow a_\mu^{\text{HVP,LO}}[0, Q_{\text{max}}^2]$, correspondant à l'intégrale donnée dans l'éq. (3.41) avec la borne supérieure remplacée par Q_{max}^2 , en plus de comprendre quelles sont les erreurs systématiques intrinsèques aux approximations de Padé et comment elles se répercutent sur $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$. C'est exactement la question à laquelle répond [53] et [52] en utilisant un modèle basé sur les données expérimentales (qu'on peut donc voir comme un modèle "exact") de désintégration hadronique du τ couplé à un modèle pour des énergies supérieures à celle de la masse du τ [52]. Un modèle similaire, basé sur les données $e^+e^- \rightarrow$ hadrons de [13] et que nous avons développé, permet d'obtenir les figures 3.6 et 3.7 et montre notamment que :

- pour la saveur légère, 80% de la contribution à $a_\mu^{(l),\text{HVP,LO}}$ provient de la région $[0, 0.1 \text{ GeV}^2]$
- pour la saveur légère, 90% de la contribution à $a_\mu^{(l),\text{HVP,LO}}$ provient de la région $[0, 0.2 \text{ GeV}^2]$

³On peut alors remarquer que le *Vector Dominance Model* n'est qu'une fonction de Padé à laquelle on a fixé certains coefficients à zéro

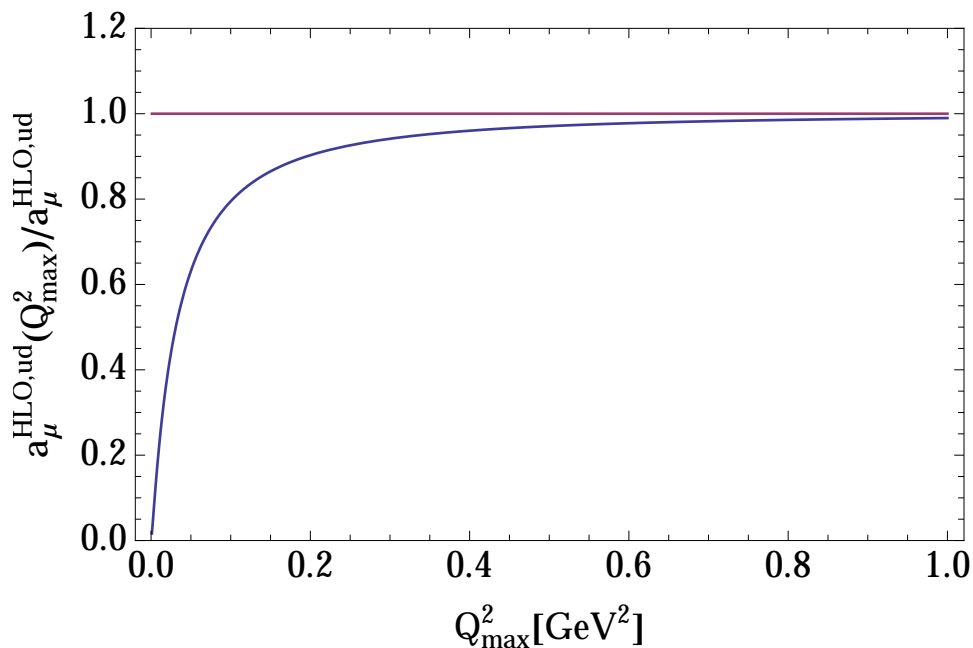


FIG. 3.6 : Modèle pour $Q_{max}^2 \rightarrow a_{\mu}^{(l),\text{HVP,LO}}[0, Q_{max}^2]$ pour la saveur légère basé sur les données expérimentales

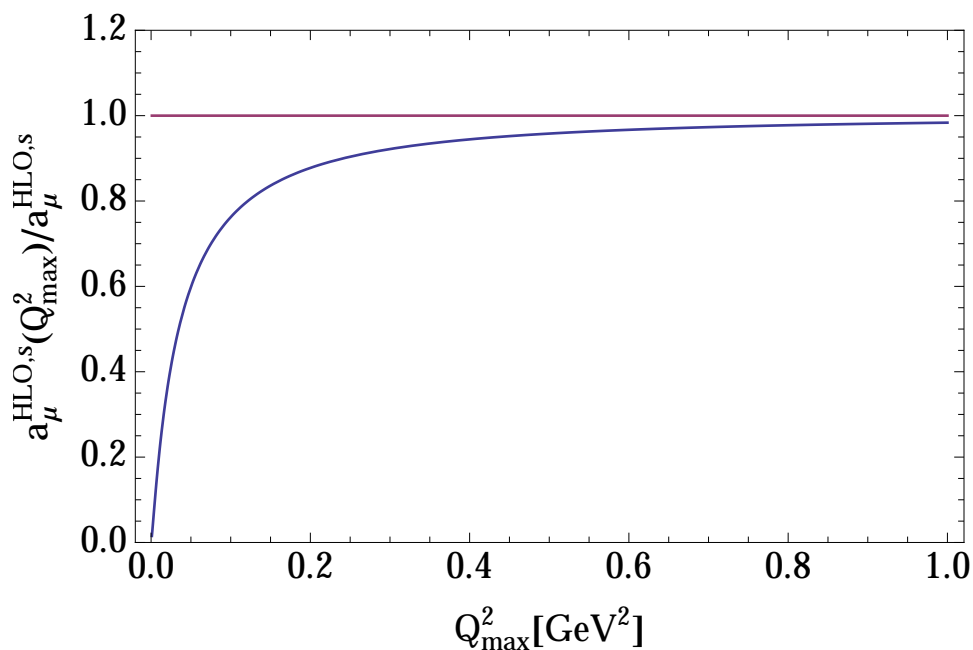


FIG. 3.7 : Modèle pour $Q_{max}^2 \rightarrow a_{\mu}^{(s),\text{HVP,LO}}[0, Q_{max}^2]$ pour la saveur *strange* basé sur les données expérimentales

- pour la saveur *strange*, 80% de la contribution à $a_{\mu}^{(s),\text{HVP,LO}}$ provient de la région $[0, 0.2 \text{ GeV}^2]$

Le modèle permet ensuite de simuler des fausses données du réseau avec une matrice de covariance. On peut alors :

- estimer une erreur systématique en quantifiant la déviation $\hat{\Pi}(Q^2 = 0) \neq 0$ dont une partie est liée à la non-conservation du courant

- étudier la propagation des erreurs de détermination des coefficients de Padé sur $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$, par exemple pour un Padé[1,1], $\Pi(Q^2) - \Pi(0) = \frac{a_1 Q^2}{1+b_1 Q^2}$:

$$\delta_{a_1} a_\mu^{\text{HVP,LO}}[0, Q_{\min}^2] = -4\alpha^2 \int_0^{Q_{\min}^2} dQ^2 f(Q^2) \left(\frac{Q^2}{1+b_1 Q^2} \right) \delta a_1 \quad (3.72)$$

$$\delta_{b_1} a_\mu^{\text{HVP,LO}}[0, Q_{\min}^2] = -4\alpha^2 \int_0^{Q_{\min}^2} dQ^2 f(Q^2) \left(-\frac{a_1 Q^4}{(1+b_1 Q^2)^2} \right) \delta b_1$$

d'où des relations :

$$\frac{\delta_{a_1} a_\mu^{\text{LO,HVP}}[Q_{\min}^2]}{\hat{a}_\mu^{\text{LO,HVP}}} \leftrightarrow \frac{\delta a_1}{a_1} \quad (3.73)$$

$$\frac{\delta_{b_1} a_\mu^{\text{LO,HVP}}[Q_{\min}^2]}{\hat{a}_\mu^{\text{LO,HVP}}} \leftrightarrow \frac{\delta b_1}{b_1}$$

Mis bout à bout le modèle (et donc les valeurs centrales “réelles” des coefficients de Padé) et la simulation de fausses données, on peut alors conclure qu'un Padé[1,1] utilisé pour un intervalle $[0, Q_{\text{cut}}^2]$ avec $Q_{\text{cut}}^2 = 0.2 \text{ GeV}^2$ est suffisant pour une précision sur $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ de 1%. C'est donc déjà suffisamment précis si on prend en compte les erreurs de volume-fini étudiés numériquement au chapitre 4.

Cela prouve l'intuition selon laquelle pour obtenir $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ à une précision donnée, on doit obtenir la pente à l'origine $\Pi'(0)$ à cette précision [54], ce qui correspond donc au coefficient a_1 . Ce constat permet de mieux comprendre le point commun entre les méthodes de détermination de Π que nous allons désormais passer en revue : toutes ces méthodes consistent à améliorer la méthode traditionnelle en contraignant la pente à l'origine. Concrètement, il s'agit de déterminer des dérivées de Π via les dérivées de fonctions de corrélation en espace de Fourier. Ce genre de calcul a par exemple déjà été utilisé en QCD sur réseau pour le calcul des pentes de fonctions d'Isgur-Wise [55] [56] et ont été ensuite étudiées pour le calcul de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ dans [57].

Les méthodes considérées diffèrent cependant par les erreurs systématiques associées, telles celles en lien avec le volume et la maille finie du réseau. Il est toutefois attendu que les erreurs de volume fini seront plus importantes pour les dérivées d'ordres supérieurs qui, en espace de Fourier, accentuent les effets de longues distances.

3.4 MÉTHODE DE LA DÉRIVÉE SECONDE

Dans les sections qui suivent nous utilisons la transformation de Fourier discrète sur réseau périodique. Des rappels sont donnés en annexe ???. Ici nous considérons plus particulièrement les dérivées secondes du tenseur de polarisation, et ce dans toutes les directions (spatiales et temporelle) :

$$\partial_\rho \partial_\sigma \Pi_{\mu\nu}(Q) = -a^4 \sum_x x_\rho x_\sigma \langle J_\mu(x) J_\nu(0) \rangle e^{iQ \cdot x} \quad (3.74)$$

Pour calculer la dérivée seconde quelques soient les indices, rappelons tout d'abord la décomposition du tenseur $\Pi_{\mu\nu}$ en introduisant un nouveau tenseur symétrique $T_{\mu\nu}$:

$$\Pi_{\mu\nu} = \underbrace{(Q_\mu Q_\nu - \delta_{\mu\nu} Q^2)}_{T_{\mu\nu}=T_{\nu\mu}} \Pi(Q^2) \quad (3.75)$$

On calcule les dérivées dans le cas général, on obtient :

$$\partial_\rho \Pi_{\mu\nu} = \left[\partial_\rho T_{\mu\nu} \right] \Pi + \left[2Q_\rho T_{\mu\nu} \right] \partial_{Q^2} \Pi \quad (3.76)$$

$$= \left[Q_\nu \delta_{\mu\rho} + Q_\mu \delta_{\nu\rho} - 2\delta_{\mu\nu} Q_\rho \right] \Pi \quad (3.77)$$

$$+ \left[2Q_\rho (Q_\mu Q_\nu - \delta_{\mu\nu} Q^2) \right] \partial_{Q^2} \Pi$$

$$\partial_\sigma \partial_\rho \Pi_{\mu\nu} = \left[\partial_\sigma \partial_\rho T_{\mu\nu} \right] \Pi + \left[2Q_\sigma \partial_\rho T_{\mu\nu} + 2Q_\rho \partial_\sigma T_{\mu\nu} + 2\delta_{\rho\sigma} T_{\mu\nu} \right] \partial_{Q^2} \Pi + \left[4Q_\rho Q_\sigma T_{\mu\nu} \right] \partial_{Q^2}^2 \Pi$$

$$= \left[\delta_{\sigma\nu} \delta_{\mu\rho} + \delta_{\sigma\mu} \delta_{\nu\rho} - 2\delta_{\mu\nu} \delta_{\sigma\rho} \right] \Pi$$

$$+ 2 \left[Q_\sigma \left(Q_\nu \delta_{\mu\rho} + Q_\mu \delta_{\nu\rho} - 2\delta_{\mu\nu} Q_\rho \right) \right] \quad (3.78)$$

$$+ Q_\rho \left(Q_\nu \delta_{\mu\sigma} + Q_\mu \delta_{\nu\sigma} - 2\delta_{\mu\nu} Q_\sigma \right)$$

$$+ \delta_{\rho\sigma} \left(Q_\mu Q_\nu - \delta_{\mu\nu} Q^2 \right) \partial_{Q^2} \Pi$$

$$+ \left[4Q_\rho Q_\sigma \left(Q_\mu Q_\nu - \delta_{\mu\nu} Q^2 \right) \right] \partial_{Q^2}^2 \Pi$$

où on remarque que $\partial_\tau = 2Q_\tau \partial_{Q^2}$ pour $\tau = \sigma$ ou ρ . On peut alors tester différentes combinaisons d'indices qui nous donnent trois stratégies :

(1) $\sigma = \rho = \mu = \nu$

$$\partial_\mu \partial_\mu \Pi_{\mu\mu} = 2(Q_\mu^2 - Q^2) \partial_{Q^2} \Pi + 4Q_\mu^2 (Q_\mu^2 - Q^2) \partial_{Q^2}^2 \Pi \quad (3.79)$$

Le terme en Π a été supprimé et on peut choisir les impulsions pour isoler celui en $\partial_{Q^2} \Pi$ ce qui offre une stratégie d'extraction de la fonction d'Adler $Q^2 \rightarrow \mathcal{A}(Q^2) = Q^2 \partial_{Q^2} \Pi$:

$$\partial_\mu \partial_\mu \Pi_{\mu\mu} (Q \neq 0, Q_\mu = 0) = -2Q^2 \partial_{Q^2} \Pi = -2\mathcal{A}(Q^2) \quad (3.80)$$

(2) $\sigma = \rho \neq \mu = \nu$

$$\partial_\sigma \partial_\sigma \Pi_{\mu\mu} = -2\Pi + 2 \left[-4Q_\sigma^2 + Q_\mu^2 - Q^2 \right] \partial_{Q^2} \Pi + 4Q_\sigma^2 (Q_\mu^2 - Q^2) \partial_{Q^2}^2 \Pi \quad (3.81)$$

On peut alors obtenir :

$$\Pi(0) = -\frac{1}{2} \partial_\sigma \partial_\sigma \Pi_{\mu\mu} (Q) \Big|_{Q=0} \quad (3.82)$$

$$(3) \quad \sigma = \mu \neq \rho = \nu$$

$$\partial_\mu \partial_\nu \Pi_{\mu\nu} = \Pi + 2(Q_\mu^2 + Q_\nu^2) \partial_{Q^2} \Pi + 4Q_\mu^2 Q_\nu^2 \partial_{Q^2}^2 \Pi \quad (3.83)$$

Il est alors simple de faire disparaître les termes en $\partial_{Q^2} \Pi$ et $\partial_{Q^2}^2 \Pi$ en prenant les impulsions telles que $Q_\mu = Q_\nu = 0$ ce qui donne une stratégie d'extraction de la fonction $Q^2 \rightarrow \Pi(Q^2)$ sans division de $\Pi_{\mu\nu}$ par $T_{\mu\nu}$:

$$\partial_\mu \partial_\nu \Pi_{\mu\nu}(Q, Q_\mu = 0, Q_\nu = 0) = \Pi \quad (3.84)$$

Nous appellerons méthode de la dérivée seconde cette dernière stratégie d'extraction. Elle a des avantages et des inconvénients :

- elle permet d'avoir la fonction scalaire de polarisation Π directement à tous les Q^2 accessibles sur le réseau, y compris $Q^2 = 0$;
- contrairement aux autres méthodes qui vont suivre, elle ne mélange pas Π et ses dérivées donc elle ne mélange pas des erreurs de volume fini distinctes ;
- elle ne nécessite qu'une dérivée d'ordre 2 ;
- d'un point de vue informatique, elle est cependant très contraignante car elle oblige à sortir de la simulation une quantité de données beaucoup plus importante. Il est d'usage en QCD sur réseau de réaliser les transformations de Fourier dans les directions spatiales dans le code de simulation et de laisser une éventuelle transformation de Fourier dans la direction temporelle dans le code d'analyse. Ici, on doit donc calculer le tenseur $\Pi_{\mu\nu}$, trois dérivées spatiales supplémentaires $\partial_\rho \Pi_{\mu\nu}$, et neuf dérivées secondes spatiales supplémentaires $\partial_\sigma \partial_\rho \Pi_{\mu\nu}$.

Pour ces raisons, cette méthode a été employé dans une étude préliminaire des effets de volume fini en discrétisation Wilson (chapitre 4) mais a été abandonné pour une méthode basée sur la stratégie (2) pour les simulations à la masse physique du π en discrétisation *Staggered* en ne gardant que le point en $Q^2 = 0$ que nous étudions maintenant.

3.5 RENORMALISATION ADDITIVE PAR AJOUT D'UN 2-MOMENT

Cette méthode a été proposée dans [58]. Elle se base sur la stratégie (2) restreinte au cas où σ est la direction temporelle tout en l'améliorant substantiellement puisqu'elle propose pour éliminer certaines sources de bruit statistique :

- d'imposer $\Pi_{\mu\nu}(Q = 0) = 0$ configuration par configuration ;
- d'imposer $\text{Im}\Pi_{\mu\nu}(Q) = 0$ en ne gardant tout simplement que la partie réelle lors de la transformation de Fourier.

Au final, le calcul de la fonction scalaire de polarisation du vide s'écrit :

$$\hat{\Pi}(Q^2) = \sum_t \operatorname{Re} \left(\frac{\exp(iQt) - 1}{Q^2} + \frac{1}{2}t^2 \right) \operatorname{Re} \langle J_\mu(t) J_\mu(0) \rangle \quad (3.85)$$

L'avantage de cette méthode est son évidente simplicité. Elle consiste à réaliser une double soustraction $\Pi_{\mu\nu}(Q^2 = 0)$ et $\Pi(Q^2 = 0)$. On peut vérifier immédiatement que les 2-moments donnent une valeur apparemment dans le bon ordre de grandeur en considérant par exemple la simulation dont les paramètres sont donnés dans 3.1 et dont les données de simulation $(Q^2, \Pi(Q^2))$ sont fittées par une fonction de Padé sur les figures 3.8 3.9 et 3.10 pour les trois saveurs : légère, *strange* et *charm*.

a (fm)	T (fm)	L (fm)	M_π (MeV)	M_{K^*} (MeV)	$M_\pi T$	$M_\pi L$
0.064	144a = 9.2	96a = 6.1	$1.32973(76)10^2$	$4.7929(20)10^2$	6.2	4.1

TAB. 3.1 : Paramètres de la simulation au réseau le plus fin.

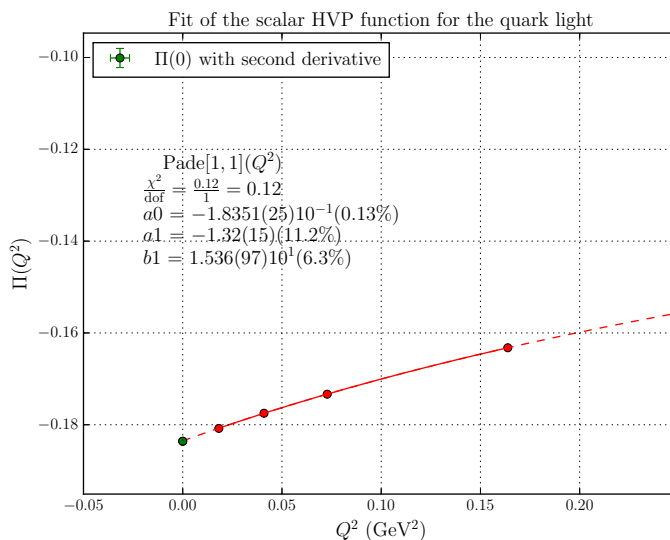


FIG. 3.8 : $\Pi(0)$ dans le cas *light* calculé par les moments, comparé au fit par un Padé de la méthode usuelle.

L'utilisation, pour la saveur *charm* en figure 3.10, d'un simple polynôme, c'est à dire d'un Padé[N,M] pour $M = 0$ est liée à la platitude des données du réseau qui conduit à une instabilité numérique si l'on cherche à introduire un pôle dans la fonctionnelle de *fit*.

3.6 APPROXIMATION DE PADÉ PAR LES COEFFICIENTS DE TAYLOR

Cette méthode consiste à pousser plus loin l'idée d'utiliser les dérivées en espace de Fourier pour approximer la fonction scalaire de polarisation. On considère le développement en série entière de la fonction scalaire de polarisation du vide Π en la variable

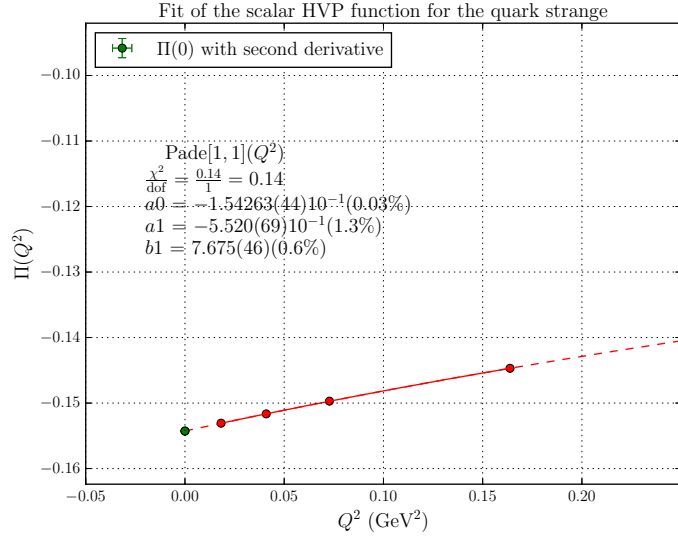


FIG. 3.9 : $\Pi(0)$ dans le cas *strange* calculé par les moments, comparé au fit par un Padé de la méthode usuelle.

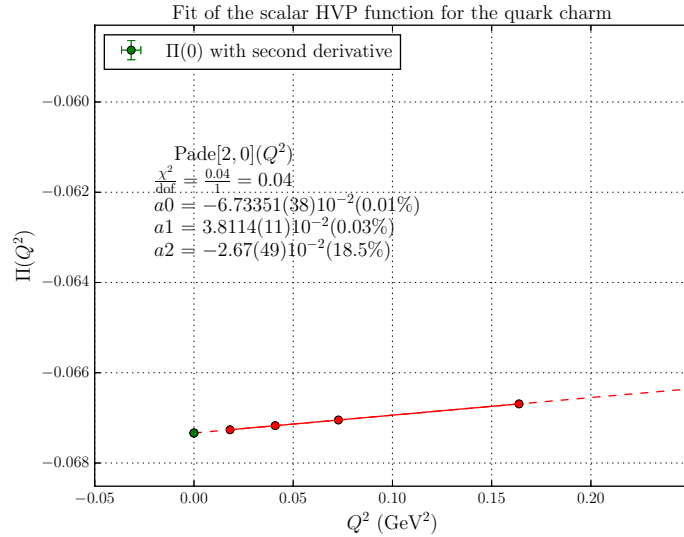


FIG. 3.10 : $\Pi(0)$ dans le cas *charm* calculé par les moments, comparé au fit par un Padé de la méthode usuelle.

$x = Q^2$ en 0 :

$$\Pi(Q^2) = \sum_{i=1}^{\infty} Q^{2i} \Pi_i \quad (3.86)$$

où l'on a défini les coefficients Π_i du développement de Taylor par :

$$\Pi_i = \frac{\partial_{Q^2}^i \Pi \Big|_{Q^2=0}}{i!} \quad (3.87)$$

D'après les résultats évoqués dans la section sur la représentation hybride, on sait que pour la précision souhaitée (de l'ordre du %), nous devons considérer des Padés d'ordre

[1,1] et [2,1] pour des valeurs de Q_{\min}^2 de 0.1 GeV² ou 0.2 GeV². On considère donc :

$$\Pi_{[1,1]}(Q^2) = \frac{\Pi_0 + (\Pi_1 - \frac{\Pi_2\Pi_0}{\Pi_1})Q^2}{1 - \frac{\Pi_2}{\Pi_1}Q^2} \quad (3.88)$$

ce qui signifie une fois renormalisée :

$$\hat{\Pi}_{[1,1]}(Q^2) = \frac{\Pi_1 Q^2}{1 - \frac{\Pi_2}{\Pi_1}Q^2} \quad (3.89)$$

qui nécessite donc le calcul de 2 coefficients. On considère aussi :

$$\Pi_{[2,1]}(Q^2) = \frac{\Pi_0 + (\Pi_1 - \frac{\Pi_3\Pi_0}{\Pi_2})Q^2 + (\Pi_2 - \frac{\Pi_3\Pi_1}{\Pi_2})(Q^2)^2}{1 - \frac{\Pi_3}{\Pi_2}Q^2} \quad (3.90)$$

ce qui donne une fois renormalisé :

$$\hat{\Pi}_{[2,1]}(Q^2) = \frac{\Pi_1 Q^2 + (\Pi_2 - \frac{\Pi_3\Pi_1}{\Pi_2})(Q^2)^2}{1 - \frac{\Pi_3}{\Pi_2}Q^2} \quad (3.91)$$

qui utilise seulement 3 coefficients et offre une très bonne approximation. Pour éliminer certains termes dans la décomposition du tenseur :

$$\Pi_{\mu\nu}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) = (Q_\mu Q_\nu - \delta_{\mu\nu} Q^2) \Pi(Q^2) \quad (3.92)$$

on ne va considérer que $\mu \neq \nu$ et des impulsions Q_ν orthogonales à la direction μ :

$$\Pi_{\mu\mu}(0, \dots, Q_\nu, \dots, 0) = -Q^2 \Pi(Q^2) \text{ avec } Q^2 = Q_\nu^2 \quad (3.93)$$

et ensuite calculer dans le code d'analyse les dérivées itérées en espace de Fourier dans la direction ν en supposant que la transformation a déjà été faite dans les autres directions μ telles que $Q_\mu = 0$:

$$\left. \partial_{Q_\nu}^{2n} \Pi_{\mu\mu}(Q) \right|_{Q=0} = (-1)^n \sum_{x_\nu} x_\nu^{2n} \Pi_{\mu\mu}(Q_0 = 0, \dots, x_\nu, \dots, Q_3 = 0) \quad (3.94)$$

On doit donc trouver la relation entre ces coefficients et les $(\Pi_i)_{1 \leq i \leq 3}$. La formule de Leibniz nous donne :

$$\begin{aligned} \left. \partial_{Q_\nu}^{2n} \Pi_{\mu\mu}(Q) \right|_{Q=0} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \partial_{Q_\nu}^k Q^2 \partial_{Q_\nu}^{2n-k} \Pi(Q^2) \Big|_{Q=0} \\ &= \binom{2n}{2} 2 \partial_{Q_\nu}^{2(n-1)} \Pi(Q^2) \Big|_{Q^2=0} \\ &= 2n(2n-1) \partial_{Q_\nu}^{2(n-1)} \Pi(Q^2) \Big|_{Q^2=0} \end{aligned} \quad (3.95)$$

nous devons trouver une relation entre les $\partial_Q^{2n} \Big|_{Q=0}$ et les $\partial_{Q^2}^n \Big|_{Q^2=0}$. Nous pouvons pour cela utiliser la formule de Faà Di Bruno ainsi que les polynômes de Bell $B_{n,k}$:

$$\partial_Q^n f(g(Q)) = \sum_k^n f^{(k)}(g(x)) B_{n,k}(g^{(1)}(x), g^{(2)}(x), \dots, g^{(n-k+1)}(x)) \quad (3.96)$$

ainsi que la formule de récurrence :

$$B_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k}) x_{k+1} \quad (3.97)$$

avec :

$$B_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n B_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) \quad (3.98)$$

Ici, nous nous limitons en fait au cas très simple $Q^2 = 0$ et nous trouvons donc :

$$\partial_Q^{2n} \Big|_{Q=0} = \frac{(2n)!}{n!} \partial_{Q^2}^n \Big|_{Q^2=0} \quad (3.99)$$

et donc finalement :

$$\Pi_j = \frac{\partial_Q^{2(j+1)} \Pi_{\mu\mu} \Big|_{Q=0}}{(2(j+1))!} \quad (3.100)$$

Ce qui permet notamment de montrer que le calcul d'un :

- Padé[1,1] nécessite le calcul de $\Pi \Big|_{Q^2=0}$, $\partial^1 \Pi \Big|_{Q^2=0}$, $\partial^2 \Pi \Big|_{Q^2=0}$ et donc en particulier d'un 6-moment ;
- Padé[2,1] nécessite en particulier le calcul d'un 8-moment ;
- Padé[2,2] nécessite en particulier le calcul d'un 10-moment.
- ...

Ces ordres qui grandissent accroissent d'autant plus les effets de longues distances et donc les effets de volume fini. Nous allons donc étudier numériquement ces effets.

Il est utile de noter qu'une nouvelle approche très intéressante à la détermination de la contribution de la polarisation hadronique du vide au moment magnétique anomal du muon, qui fait également appel aux dérivées de la fonction de polarisation à $Q^2 = 0$, a été proposée dans [54]. Cette approche trouve son origine dans les propriétés de la transformée de Mellin de la fonction spectrale hadronique et son lien avec la fonction de polarisation dans l'eulidien. En plus des dérivées de la fonction de polarisation, elle fait

appel à des moments inverses de cette fonction. Comme montré dans [54] à l'aide d'un *toy model* basé sur les données $e^+e^- \rightarrow$ hadrons, cette série d'approximations converge très rapidement sur la valeur exacte de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$. En effet, avec les trois premières dérivées et les deux premiers moments, l'approximation donne un résultat qui n'est qu'à 1% de la valeur exacte. Nous n'avons malheureusement pas eu le temps d'implémenter et de tester cette approche dans cette thèse et laissons son application à des travaux futurs.

Résultats pour la contribution hadronique du vide à a_μ à ordre électromagnétique dominant

Dans cette partie, on présente les principaux résultats numériques obtenus au cours de la thèse. On commence par présenter une analyse dédiée aux effets de volume fini à l'aide de quatre simulations avec fermions de Wilson de la collaboration Budapest-Marseille-Wuppertal. Cette analyse n'est cependant pas faite avec des paramètres proches de la réalité : $M_\pi \approx 292$ MeV. La constante de renormalisation du courant électromagnétique non conservé, qui ne joue pas de rôle dans l'estimation relative de ces effets, est ignorée. L'étude permet cependant d'observer de forts effets de volume fini pour certaines façons d'obtenir la fonction de polarisation du vide hadronique et de bien plus petits effets pour d'autres. Ces observations sont fort utiles pour la suite, car valable pour toutes les discrétisations. Cette étude a été présentée à la conférence *Lattice 2014* et est disponible dans [59].

On présente ensuite une analyse physique réalisée avec treize simulations avec $N_f = 2+1+1$ fermions *Staggered* toutes obtenues avec tous les paramètres proches de la réalité : les masses des quarks légers et *strange* sont choisies de telle façon que les masses des mésons π et K reproduisent approximativement leurs valeurs expérimentales dans la limite d'isospin, c'est à dire $M_\pi = 134.8(3)$ MeV et $M_K = 494.2(3)$ MeV [60] ; celle du *charm* telle que $m_c/m_s = 11.85(16)$ [61]. Par ailleurs, la taille physique des réseaux est d'environ 6 fm dans les directions spatiales et jusqu'à plus de 11 fm dans la direction temporelle. De plus, on utilise 6 échelles différentes pour extrapoler à la limite du continu de manière précise. Ces résultats font l'objet de l'article [62].

4.1 ÉTUDE DES EFFETS DE VOLUME FINI AVEC FERMIONS DE WILSON

Ici on considère quatre ensembles avec $N_f = 1+1+1+1$ saveurs de quarks sur lesquels la masse commune des quarks u et d de valence est ajustée pour reproduire la masse du π de la mer (limite d'isospin) et celle du s , pour reproduire celle du pseudoscalaire

T (fm)	L (fm)	m_π (MeV)	$M_\pi T$	$M_\pi L$
48a = 5.0	24a = 2.5	295.2(1.4)	7.5	3.7
64a = 6.7	32a = 3.3	292.6(7)	9.9	4.9
96a = 10.0	48a = 5.0	292.0(6)	14.8	7.4
64a = 6.7	80a = 8.3	292.1(3)	9.9	12.3

TAB. 4.1 : Taille des réseaux et masse du pion dans les simulations avec fermions de Wilson dédiées à l'étude de volume fini. La taille de maille est ici d'environ 0.104 fm.

$\bar{s}\gamma_5 s$ connecté de la mer. La contribution du charme n'est pas étudiée ici car elle ne joue aucun rôle dans les effets de volume fini qui sont fortement supprimés du fait de la masse importante du charme. Les résultats sont obtenus en utilisant l'action de Symanzik améliorée pour les gluons et l'action améliorée de Sheikholeslami-Wohlert du chapitre 2 pour les quarks. Le champs de gluon d'un lien donné est moyenné avec celui des liens voisins à la façon 3HEX avant d'être couplé aux champs de quarks (voir chapitre 2). Le tenseur de polarisation hadronique du vide $\Pi_{\mu\nu}$ est calculé avec un courant vecteur local à la source (indiqué par ν) et un courant vecteur conservé à la cible (indiqué par μ). Pour cette étude, on néglige les composantes déconnectées qui sont supposées petites et qui ne devraient pas modifier fondamentalement le comportement de volume fini.

Les quatre ensembles considérés ici sont ceux de [38] avec $\beta = 3.2$, correspondant à une échelle $a = 0.104$ fm, et avec pour masse de pion $M_\pi \sim 292$ MeV. Les paramètres de masses nues utilisés pour les quarks de valence sont $am_{ud} = -0.077$ et $am_s = -0.050$. Les quatre ensembles diffèrent donc seulement par le volume des réseaux utilisés, avec L allant de 2.5 à 8.3 fm. Les caractéristiques importantes des ensembles sont résumées dans le tableau 4.1.

Trois des quatre simulations ont pour rapport $T/L = 2$ et tous les réseaux sont asymétriques. Le pion est assez léger pour autoriser la désintégration du ρ en deux pions dans la limite de volume infini. Il est important de noter qu'en plus des quarks u et d plus massifs que dans la réalité, la masse du quark s n'est pas finement ajusté non plus à sa valeur physique. On ne doit donc pas s'attendre à ce que la contribution à $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ prenne sa valeur physique. C'est d'autant plus vrai qu'on ignore ici le coefficient de renormalisation multiplicatif fini, Z_V , du courant électromagnétique local.

Dans la suite, on a également subdivisé la méthode usuelle en deux sous-méthodes : on appellera *méthode usuelle avec soustraction* la méthode usuelle pour laquelle on a imposé la condition $\Pi_{\mu\nu}(Q = 0) = 0$ configuration par configuration alors que la méthode usuelle véritable sera appelée *méthode usuelle sans soustraction*.

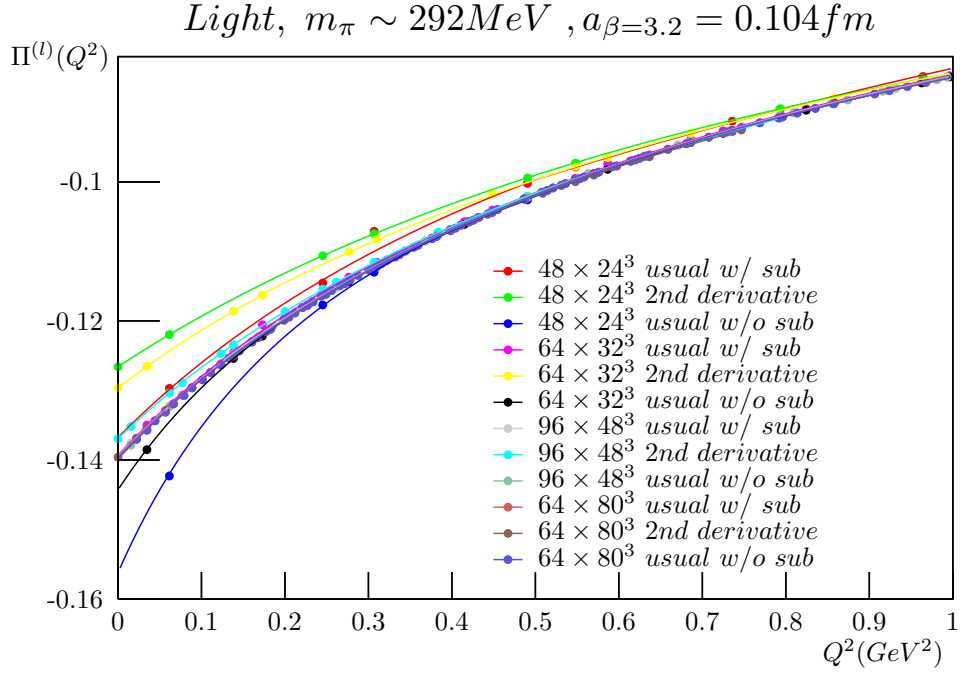


FIG. 4.1 : Effets de volume fini sur la contribution connectée des quarks u et d à la fonction de polarisation du vide $\Pi(Q^2)$. Les différentes couleurs correspondent à $\Pi(Q^2)$ en fonction de Q^2 pour les quatre différents volumes, chacune obtenue avec les trois méthodes décrites dans le texte avec les noms correspondants à ceux de la légende en anglais. Les points sont les résultats obtenus aux différentes impulsions quantifiées des réseaux. Les courbes correspondent à des fits des points à une fonction de Padé [1, 1] avec la valeur de $\Pi(0)$ comme paramètre libre.

4.1.1 SAVEUR LÉGÈRE

Nous commençons par l'étude de la contribution de la saveur légère à $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ qu'on note $a_\mu^{(l),\text{HVP,LO}}$. Dans le graphe de la figure 4.1, on montre $\Pi^{(l)}(Q^2)$ vs. Q^2 pour les quatre différents volumes, obtenus en utilisant la méthode *usuelle* (avec ou sans *soustraction*) et la méthode *dérivée seconde*. Sont montrés aussi les fits par des fonctions de Padé. Alors que pour le plus petit volume, les trois méthodes montrent des résultats qui diffèrent significativement à bas Q^2 , ces différences se réduisent quand le volume augmente, et les trois méthodes donnent des résultats comparables pour le plus grand volume. Cette convergence des méthodes dans la limite des grands volumes est aussi visible sur le graphe de la figure 4.2, où sont plottées en fonction de $1/M_\pi L$ les valeurs de $a_\mu^{(l),\text{HVP,LO}}(Q^2 \leq 1 \text{ GeV}^2)$ correspondantes qui sont obtenues par intégration des fonctions de fit de $\hat{\Pi}^{(l)}(Q^2)$ selon l'équation (3.41), avec pour limite supérieure $Q^2 = 1 \text{ GeV}^2$. Nous avons choisi $M_\pi L$ car c'est une quantité sans dimension et parce que $1/M_\pi$ est la plus grande longueur de corrélation du système. Puisque la dépendance de M_π en L est très faible, la dépendance de la quantité $1/M_\pi L$ montrée ici est équivalente à la dépendance en $1/L$.

De nouveau, alors que les résultats des trois méthodes convergent dans la limite de grand volume, les corrections de volume finis sont importantes pour les plus petits

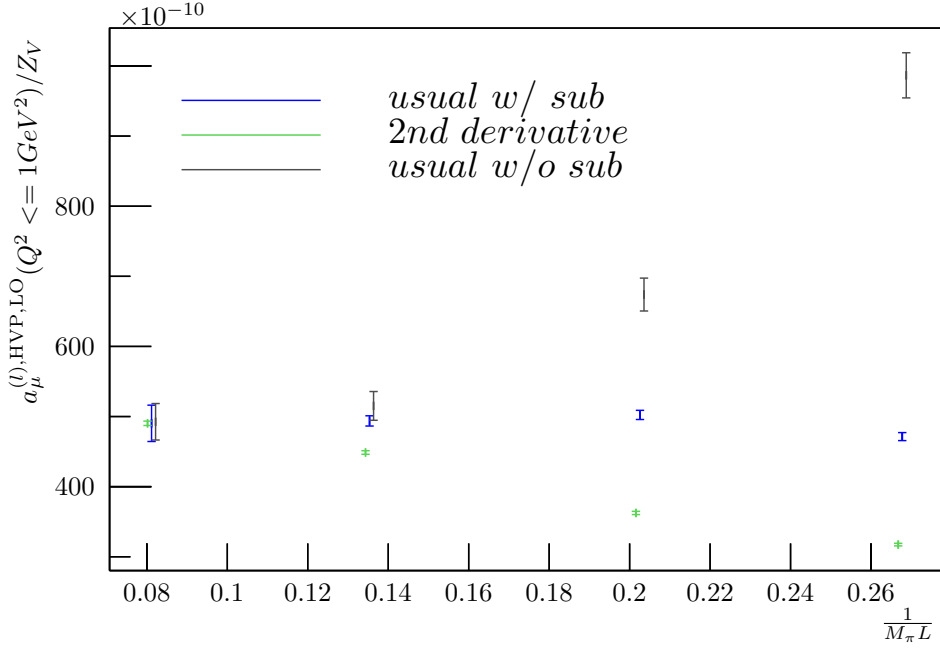


FIG. 4.2 : Effets de volume fini sur la contribution des quarks u et d à $a_\mu^{\text{LO-HVP}}$ intégrée jusqu'à $Q^2 = 1 \text{ GeV}^2$ dans l'équation (3.41), $a_\mu^{(l),\text{HVP,LO}}[Q^2 \leq 1 \text{ GeV}^2]$, modulo le facteur de constante de renormalisation Z_V . Cette valeur est obtenue à partir des fonctions de fit pour $\Pi(Q^2)$ vs Q^2 décrites dans la figure 4.1. Les différents points correspondent aux quatre volumes et aux méthodes utilisées pour extraire $\Pi(Q^2)$ à partir de la fonction de corrélation du courant électromagnétique. L'axe des ordonnées est donné par la valeur de $1/LM_\pi$ de la simulation correspondante.

volumes. Pour le plus petit volume, avec $L = 2.5 \text{ fm}$ où $LM_\pi = 3.7$, les corrections de volume fini sur $a_\mu^{(l),\text{HVP,LO}}(Q^2 \leq 1 \text{ GeV}^2)$ obtenus en utilisant la méthode *seconde dérivée* sont de $\sim 35\%$. Elles sont encore plus grandes pour la *méthode usuelle sans soustraction* : environ 200% . Dans le cas *seconde dérivée*, elles sont réduites en dessous de 10% quand on arrive à $L \gtrsim 5 \text{ fm}$. Seule la *méthode usuelle avec soustraction* donne des résultats avec corrections de volume fini qui restent petits pour tous les volumes considérés.

Une particularité intéressante de la méthode *dérivée seconde* est qu'elle produit des erreurs statistiques nettement plus petites sur $a_\mu^{(l),\text{HVP,LO}}(Q^2 \leq 1 \text{ GeV}^2)$ que la *méthode usuelle sans soustraction*. Cela reste vrai mais à moindre échelle pour la *méthode usuelle avec soustraction*. Dans ce dernier cas, c'est principalement lié au fait que la méthode *dérivée seconde* élimine le bruit $\Pi_{\mu\nu}^{(l)}(0)$, comme le fait la *méthode usuelle avec soustraction*. Cette amélioration statistique comparée à la méthode *usuelle avec soustraction* provient du fait que la méthode *dérivée seconde* permet l'extraction de $\Pi(Q^2 = 0)$. Ce fait contraint les fluctuations statistiques lors du fit de $\Pi(Q^2)$ vs. Q^2 dans l'importante région des bas Q^2 .

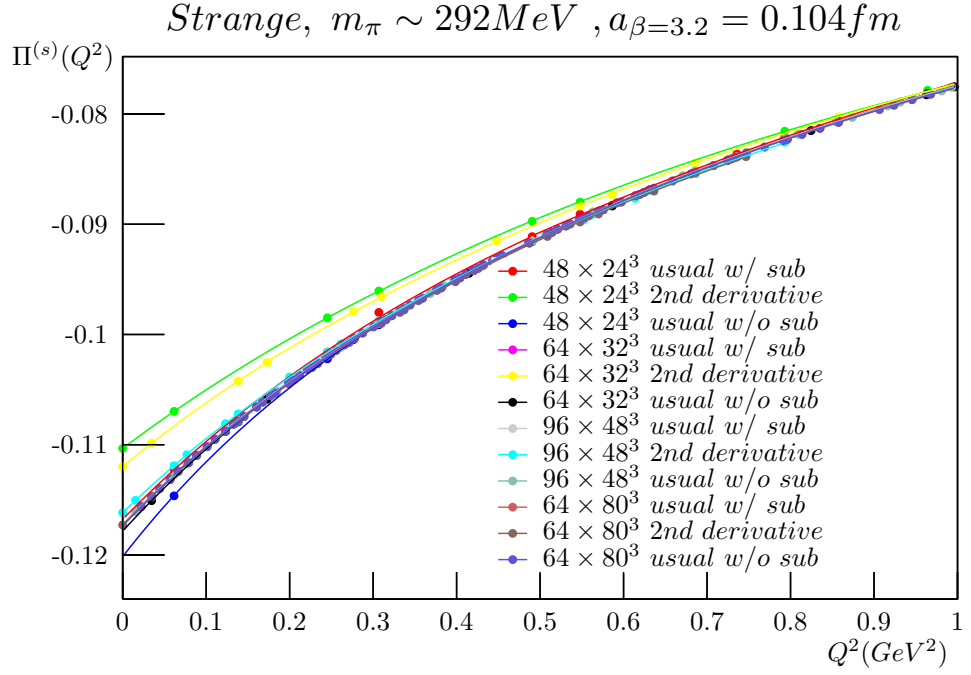


FIG. 4.3 : Effets de volume fini sur la contribution connectée du quark s à la fonction de polarisation du vide $\Pi(Q^2)$. Les notations et le détail des points et des courbes sont les mêmes que dans la figure 4.1.

4.1.2 SAVEUR STRANGE

Nous poursuivons l'étude avec la contribution du quark strange à $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ qu'on note $a_\mu^{(s),\text{HVP,LO}}$ et réitérons la même analyse des volumes finis que pour la contribution de la saveur légère. Les résultats correspondants pour $\Pi^{(s)}(Q^2)$ vs. Q^2 et $a_\mu^{(s),\text{HVP,LO}}(Q^2 \leq 1 \text{ GeV}^2)$ vs. $1/M_\pi L$ sont montrés dans le graphe de la figure 4.4. Pour chaque quantité, nous observons qualitativement les mêmes comportements que pour la contribution de la saveur légère. En particulier, les résultats obtenus pour la méthode *usuelle avec soustraction* ne montre pas de dépendance en volume pour les volumes considérés. D'un autre côté, des effets de volumes finis significatifs sont encore observés pour les deux autres méthodes dans les volumes les plus petits, mais ces derniers disparaissent quand les volumes augmentent. Ils sont cependant plus petits que dans le cas de la contribution légère. Pour la contribution du strange, les corrections de volume fini, dans le plus petit volume avec $L = 2.5 \text{ fm}$ ou $LM_\pi = 3.7$, sont maintenant de $\sim 25\%$ sur $a_\mu^{\text{HVP,LO}}(Q^2 \leq 1 \text{ GeV}^2)$, obtenus avec la méthode *seconde dérivée*, et $\sim 20\%$, avec la méthode *usuelle sans soustraction*. À partir du moment où l'on atteint $L = 5.0 \text{ fm}$ ou $LM_\pi = 7.4$, les effets ne sont plus statistiquement significatifs pour la méthode *usuelle* et en dessous des 5% pour la méthode *dérivée seconde*.

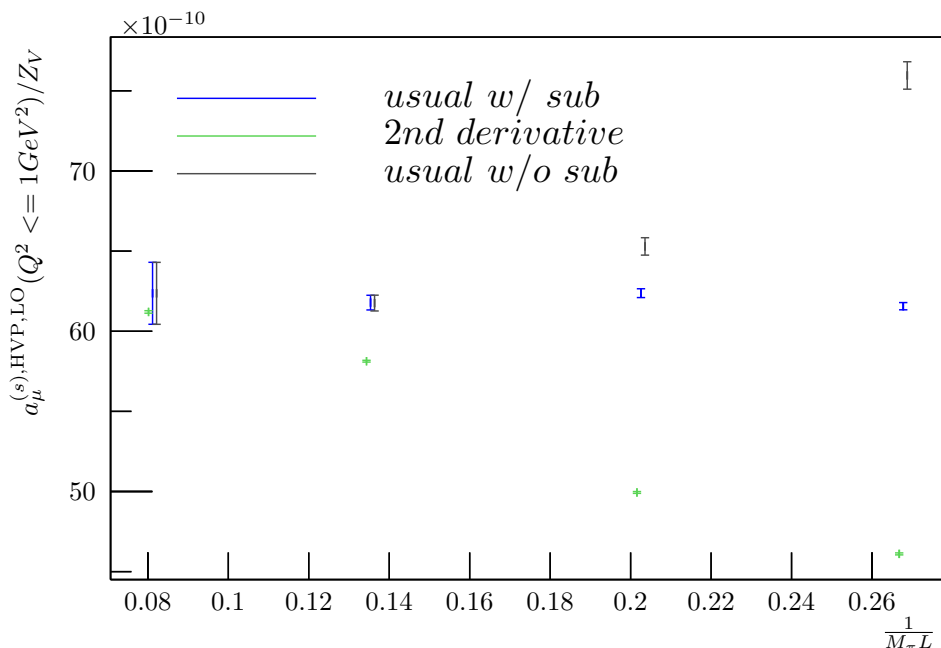


FIG. 4.4 : Effets de volume fini sur la contribution du quark s intégrée jusqu'à $Q^2 = 1 \text{ GeV}^2$ dans l'équation (3.41), $a_\mu^{(s),\text{HVP,LO}}[Q^2 \leq 1 \text{ GeV}^2]$, modulo le facteur de constante de renormalisation Z_V . Les notations et le détail des points et des courbes sont les mêmes que dans la figure 4.2.

4.1.3 CONCLUSION

Cette étude montre qu'il est indispensable de soustraire $\Pi_{\mu\nu}(0)$ pour contrôler les effets de volume fini sur la fonction de polarisation $\Pi(Q^2)$ à petit Q^2 et sur $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$. Si cela est fait, ces effets sont au plus quelques pourcents pour des résultats obtenus sur des réseaux tels que $LM_\pi \geq 4$. Bien que ces conclusions ne sont obtenues qu'avec $M_\pi \simeq 292 \text{ MeV}$, on ne s'attend pas à ce qu'elle changent de façon fondamentale au point physique.

4.2 OBTENTION DES CONTRIBUTIONS CONNECTÉES À $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ AVEC FERMIONS *STAGGERED*

Les simulations dans cette partie ont été générées, entre autre, pour l'étude de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ entre 2014 et 2016 sur les supercalculateurs IBM BlueGene/Q (cf. l'annexe C) les plus puissants d'Europe par la collaboration Budapest-Marseille-Wuppertal. Elles sont toutes réalisées avec quatre saveurs ($N_f = 2 + 1 + 1$) dans la mer : des quarks légers u et d reproduisant une symétrie d'isospin autour du point physique, le *strange* autour du point physique et le *charm* dont la masse est fixée par rapport à celle du s par $m_c/m_s = 11.85(16)$ [61]. Les champs de jauge subissent un smearing 4Stout avant d'être couplés aux champs de quark (voir chapitre 2). Le tenseur de polarisation hadro-

a (fm)	T (fm)	L (fm)	M_π (MeV)	M_{K^*} (MeV)	$M_\pi T$	$M_\pi L$
0.134	64a = 8.6	48a = 6.4	1.30600(20)10 ²	4.68764(50)10 ²	5.7	4.3
0.118	96a = 11.3	56a = 6.6	1.32257(57)10 ²	4.6725(12)10 ²	7.6	4.4
			1.29873(50)10 ²	4.7769(11)10 ²	7.5	4.3
			1.32565(52)10 ²	4.7794(11)10 ²	7.6	4.4
0.111	84a = 9.3	56a = 6.2	1.31731(42)10 ²	4.73684(94)10 ²	6.2	4.1
			1.31920(36)10 ²	4.78964(83)10 ²	6.2	4.2
			1.32673(42)10 ²	4.65663(88)10 ²	6.3	4.2
0.095	96a = 9.1	64a = 6.1	1.34964(62)10 ²	4.9182(14)10 ²	6.2	4.2
			1.31787(44)10 ²	4.76526(89)10 ²	6.1	4.1
			1.31468(45)10 ²	4.6586(11)10 ²	6.1	4.1
0.078	128a = 10.0	80a = 6.2	1.31953(58)10 ²	4.7542(12)10 ²	6.7	4.2
			1.36299(58)10 ²	4.8984(13)10 ²	6.9	4.3
0.064	144a = 9.2	96a = 6.1	1.32973(76)10 ²	4.7929(20)10 ²	6.2	4.1

TAB. 4.2 : Paramètres des simulations avec fermions *staggered* dédiées à l'étude de la fonction de polarisation $\Pi(Q^2)$ et du moment magnétique anomal du muon au point physique.

nique du vide $\Pi_{\mu\nu}$ est calculé avec un courant vecteur conservé à la source (indiqué par ν) et un courant vecteur conservé à la cible (indiqué par μ). Pour cette étude, on néglige pour l'instant les composantes déconnectées que l'on a bornées dans la partie 3.2.3 qui a montré que la contribution était négative et, en valeur absolue, plus petite que 10% des contributions connectées. Les paramètres des 13 simulations sont résumées dans le tableau 4.2.

La figure 4.5 permet de rendre compte de l'espace de paramètres explorés : les simulations se répartissent autour du point physique, elles permettent des interpolations extrêmement précises pour les dépendance au quark *light* et *strange*. La répartition sur les 6 tailles de maille permettent une extrapolation du continu les plus précises possibles avec les moyens techniques actuels.

4.2.1 COMPOSANTE DU TENSEUR DE POLARISATION ET MOMENTS

Pour réduire les problèmes de volume de données rencontrés lors du post-traitement dans l'analyse des volumes finis en discrétisation de Wilson où on gardait pour chaque configuration, la valeur de :

$$\begin{aligned}
 & \Pi_{\mu\nu}(Q_0, Q_1, Q_2, x_3) \\
 & \partial_\rho \Pi_{\mu\nu}(Q_0, Q_1, Q_2, x_3) \\
 & \partial_\sigma \partial_\rho \Pi_{\mu\nu}(Q_0, Q_1, Q_2, x_3)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

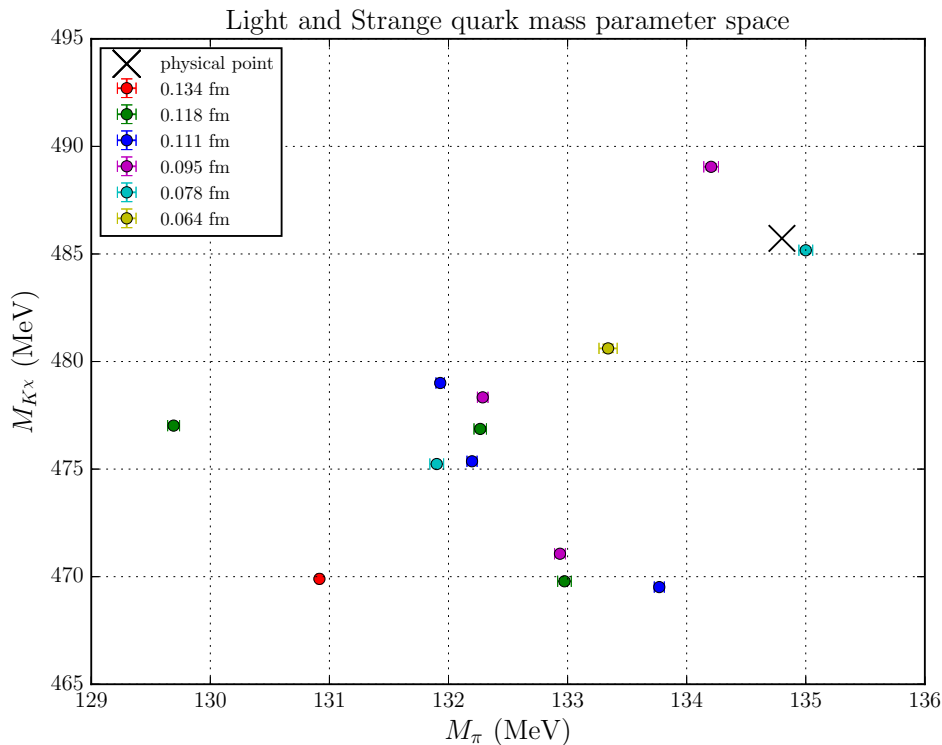


FIG. 4.5 : Espace des paramètres exploré dans les simulations avec fermions *staggered*. Les points indiquent les valeurs de la masse du pion et du kaon “chiral”, $M_{K^x} = \sqrt{M_K^2 - M_\pi^2}/2$ de chaque simulation. Ces masses, qui sont respectivement reliées à $(m_u + m_d)$ et à m_s , indiquent la proximité des simulations au point de masse physique, montré par une croix. Les simulations sont donc toutes proches du point de masse physique, ce qui permet une interpolation précise des résultats de la simulation à ce point. Les différentes couleurs des points représentent la valeur de la taille de maille de la simulation correspondante.

on ne garde ici que les données suivantes pour chaque configuration :

$$\begin{aligned}
& \Pi_{\mu\nu}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) \\
& \quad \Pi_{00}(x_0, 0, 0, 0) \\
& \quad \Pi_{11}(0, x_1, 0, 0) \\
& \quad \Pi_{22}(0, 0, x_2, 0) \\
& \quad \Pi_{33}(0, 0, 0, x_3)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

ce qui donne une grande souplesse pour le calcul de dérivées en espace de Fourier à un ordre arbitrairement grand tout en limitant la taille des fichiers de sorties de simulation.

Pour interpoler les résultats de la simulation au point de masse physique et les extrapoler à la limite du continu, il faut paramétrer les dépendances de ces résultats sur les masses des quarks (ici représentées par les masses des mésons pseudoscalaires les contenant) et sur la taille de maille, a . Un résumé des dépendances activées dans les fits physiques et extrapolations à la limite du continu se trouve dans la table en annexe B.7.

4.2.2 DIFFÉRENTES APPROCHES POUR LA CONTRIBUTION PROVENANT DE

$$Q^2 \leq 0.2 \text{ GeV}^2 \text{ à } a_\mu^{\text{LO-HVP}}$$

Résumons succinctement les méthodes vues au chapitre 3 que nous allons comparer ici :

- méthode traditionnelle avec soustraction, fit par un Padé

$$\Pi(Q^2 > 0) = \sum_{\mu \neq \nu} \sum_x \frac{e^{iQ_\mu x_\mu} - 1}{Q^2} \langle J_\nu(x_\mu) J_\nu(0) \rangle \quad (4.3)$$

- méthode de l'ajout d'un 2-moment, fit par un Padé contraint en $Q^2 = 0$

$$\hat{\Pi}(Q > 0) = \frac{1}{2} \sum_{\mu \neq \nu} \sum_x \left(\frac{e^{iQ_\mu x_\mu} - 1}{Q^2} + \frac{x_\mu^2}{2} \right) \langle J_\nu(x_\mu) J_\nu(0) \rangle \quad (4.4)$$

$$\hat{\Pi}(Q = 0) = 0$$

- méthode des approximations de Padé avec des coefficients correspondant au développement

$$\Pi(Q^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pi_i Q^{2i} \quad (4.5)$$

obtenus à partir des moments :

$$\Pi_i = \frac{(-1)^{i+1}}{(2i+2)!} \sum_{\mu \neq \nu} \sum_x x_\mu^{2(i+1)} \langle J_\nu(x) J_\nu(0) \rangle \quad (4.6)$$

Avant d'étudier l'extrapolation du continu de la fonction $Q^2 \rightarrow \hat{\Pi}(Q^2)$ pour chaque méthode, nous allons vérifier que, simulation par simulation et saveur par saveur, les deux méthodes qui contraignent la valeur de $\hat{\Pi}(0)$ donnent des valeurs qui reproduisent, au moins partiellement, les valeurs de la méthode traditionnelle. Prenons par exemple la simulation sur notre réseau le plus fin. On voit immédiatement sur les figures 4.6 (pour les quarks légers), 4.7 (pour le quark s) et 4.8 (pour le c) que les trois méthodes donnent des résultats qualitativement similaires sur l'intervalle $[0, Q_{\text{cut}}^2]$ avec $Q_{\text{cut}}^2 = 0.2 \text{ GeV}^2$. En particulier, la méthode d'ajout d'un 2-moment ne semble pas introduire de biais par rapport à la méthode traditionnelle. L'approximation de Padé par les coefficients de Taylor, elle aussi, reproduit le même comportement de $\hat{\Pi}(Q^2)$.

On procède désormais aux extrapolations physiques à la limite du continu, coefficient de Padé par coefficient de Padé et saveur par saveur. Nous utilisons pour cela des modèles dont les paramètres sont donnés en annexe B. Puisque nous avons $N = 13$ simulations, chaque extrapolation du continu est un fit avec $N = 13$ points dont les dépendances en masses des quarks sont prises en compte par l'intermédiaire des leurs dépendances en M_π^2 et $M_{K^*}^2$.

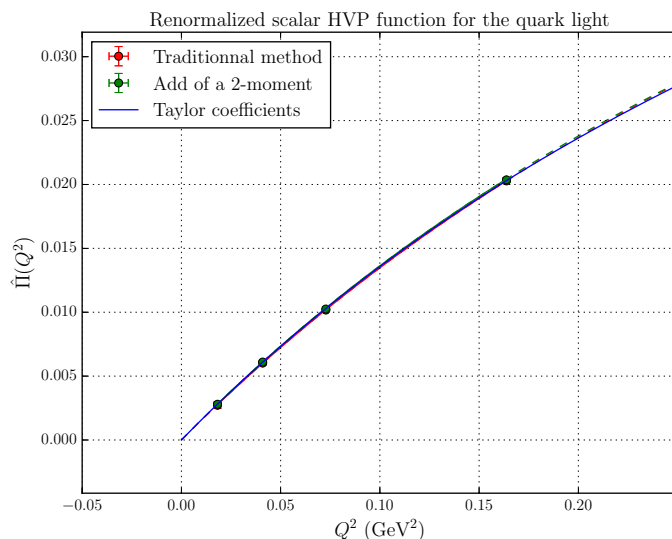


FIG. 4.6 : Comparatif des trois méthodes décrites dans le texte, utilisées pour déterminer la fonction de polarisation $\hat{\Pi}$ dans le cas de la contribution des quarks légers, à partir de la fonction à deux points du courant électromagnétique. Pour la méthode traditionnelle, la valeur de $\Pi(0)$ obtenue dans le fit est soustraite à $\Pi(Q^2)$ pour donner $\hat{\Pi}(Q^2)$.

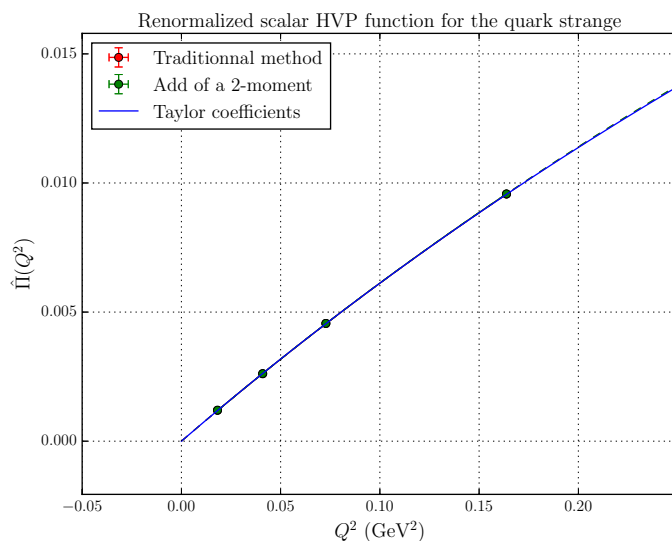
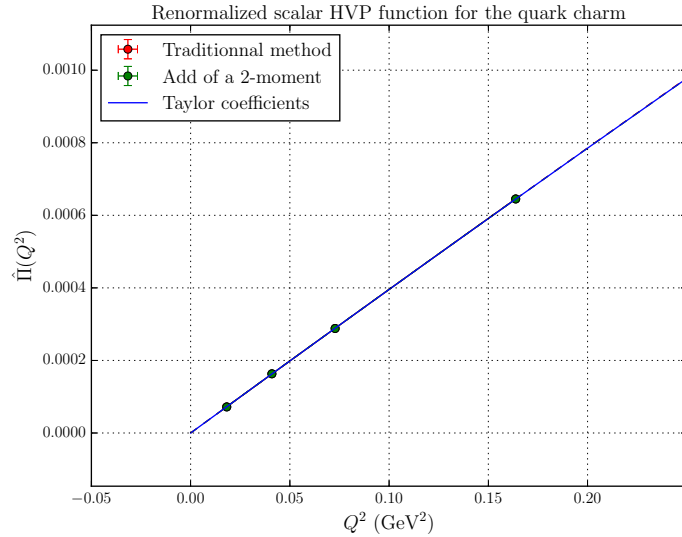


FIG. 4.7 : Même comparatif que dans la figure 4.6, mais pour le cas du *strange*.

4.2.3 INTERPOLATION AU POINT DE MASSE PHYSIQUE ET EXTRAPOLATION À LA LIMITE DU CONTINU DE Π

Sur la figure 4.9, on trouve pour la saveur légère, l'interpolation au point de masse physique et l'extrapolation à la limite du continu pour les dérivées de la fonction de polarisation Π_1 et Π_2 . Comme on pouvait s'y attendre, l'erreur statistique diminue si l'on utilise une méthode contraignant la valeur de $\Pi(0)$. On peut avoir notamment Π_1 avec environ 1% d'erreur statistique. Les trois méthodes donnent des résultats statistiquement compatibles pour les deux coefficients Π_1 et Π_2 comme le montre le tableau 4.3.

Sur la figure 4.10, on trouve pour la saveur *strange*, l'interpolation au point de


 FIG. 4.8 : Même comparatif que dans la figure 4.6, mais pour le cas du *charm*.

masse physique et l'extrapolation à la limite du continu pour les coefficients Π_1 et Π_2 . De nouveau, l'erreur statistique diminue si l'on utilise une méthode contraignant $\Pi(0)$. On peut obtenir Π_1 avec environ 0.1% d'erreur statistique. De plus la méthode des approximations de Padé (ou des moments) se révèle beaucoup plus stable qu'un fit par une fonction de Padé pour déterminer le coefficient Π_2 et pour lequel on observe également un biais. Comme on le verra par la suite, la différence entre les méthodes n'est pas assez importante pour engendrer une différence significative sur $a_\mu^{(s),\text{HVP,LO}}$.

Sur la figure 4.11, on trouve pour la saveur *charm*, l'interpolation au point de masse physique et l'extrapolation à la limite du continu pour les coefficients Π_1 et Π_2 . Comme pour la saveur *strange*, l'erreur statistique diminue si l'on utilise une méthode contraignant $\Pi(0)$ avec la possibilité d'obtenir Π_1 avec environ 0.1% d'erreur statistique mais toujours avec un avantage de stabilité pour la méthode du calcul des moments. Pour les degrés de précision espérés sur $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$, l'impact sur $a_\mu^{(c),\text{HVP,LO}}$ n'aura aucune incidence.

4.2.4 CONTRIBUTION POUR $Q^2 \geq 0.2 \text{ GeV}^2$ À $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$

Dans le cas des hauts Q^2 , un fit corrélé serait difficile à cause des erreurs de discrétisation plus importantes et de la petitesse des erreurs statistiques. Comme on l'a vu dans la section 3.3, on peut intégrer numériquement les résultats par la méthode des trapèzes pour chaque échantillon *bootstrap*.

Les fits physiques de la figure 4.12 se font donc directement sur les contributions à $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ provenant de $Q^2 \geq 0.2 \text{ GeV}^2$, $a_\mu^{\text{HVP,LO}}(Q^2 \geq 0.2 \text{ GeV}^2)$, de chaque simulation en utilisant le même genre de modèles physiques que pour le calcul des coefficients de Padé. De nouveau, ils sont donnés en détail dans l'annexe B.

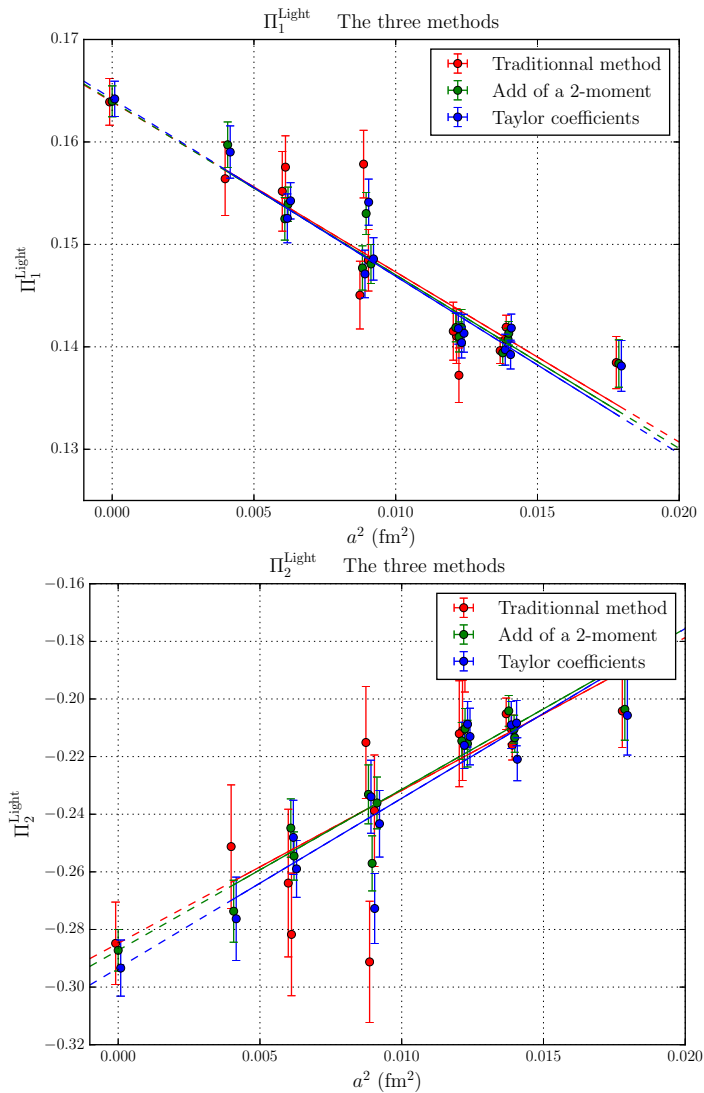


FIG. 4.9 : Résultats du fit physique des valeurs des coefficients Π_1 et Π_2 pour la saveur légère, obtenues à partir des 13 simulations, selon les trois méthodes décrites dans le texte. Ce qui est montré ici est la dépendance des coefficients sur la maille carrée des réseaux, a^2 . Celle-ci est obtenue en interpolant les résultats des 13 simulations (les points) et des fits (les courbes) au point de masse physique à l'aide des fits eux mêmes.

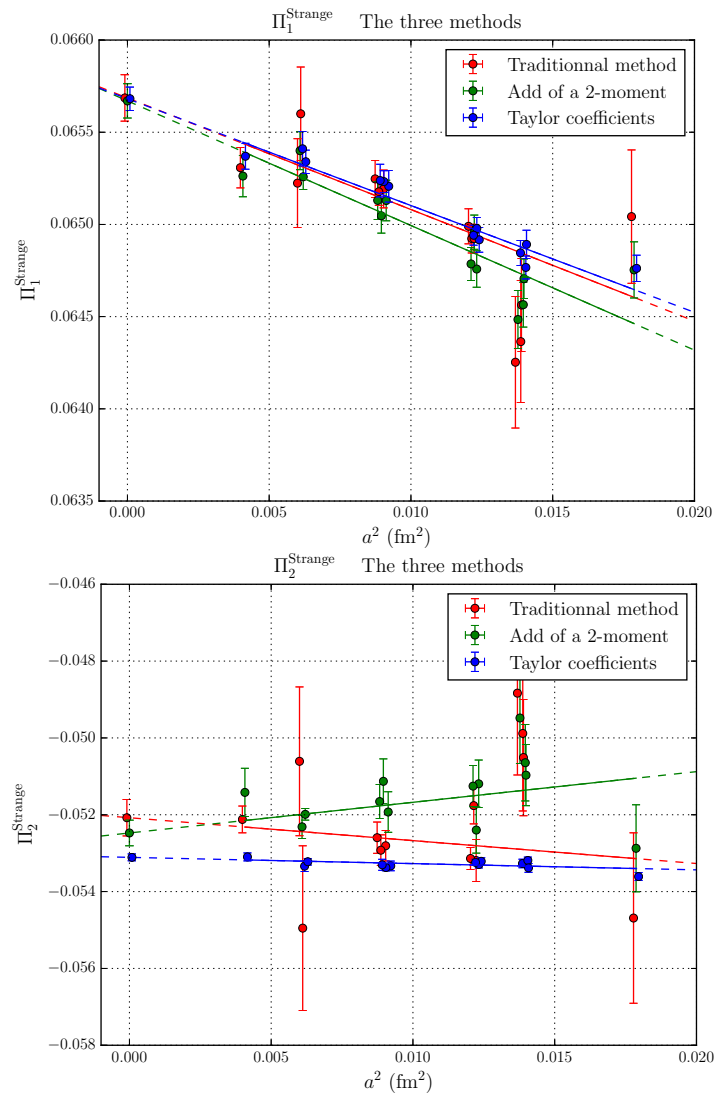


FIG. 4.10 : Extrapolation du continu des coefficients Π_1 et Π_2 pour la saveur *strange*, obtenue par la même méthode que dans la figure 4.9.

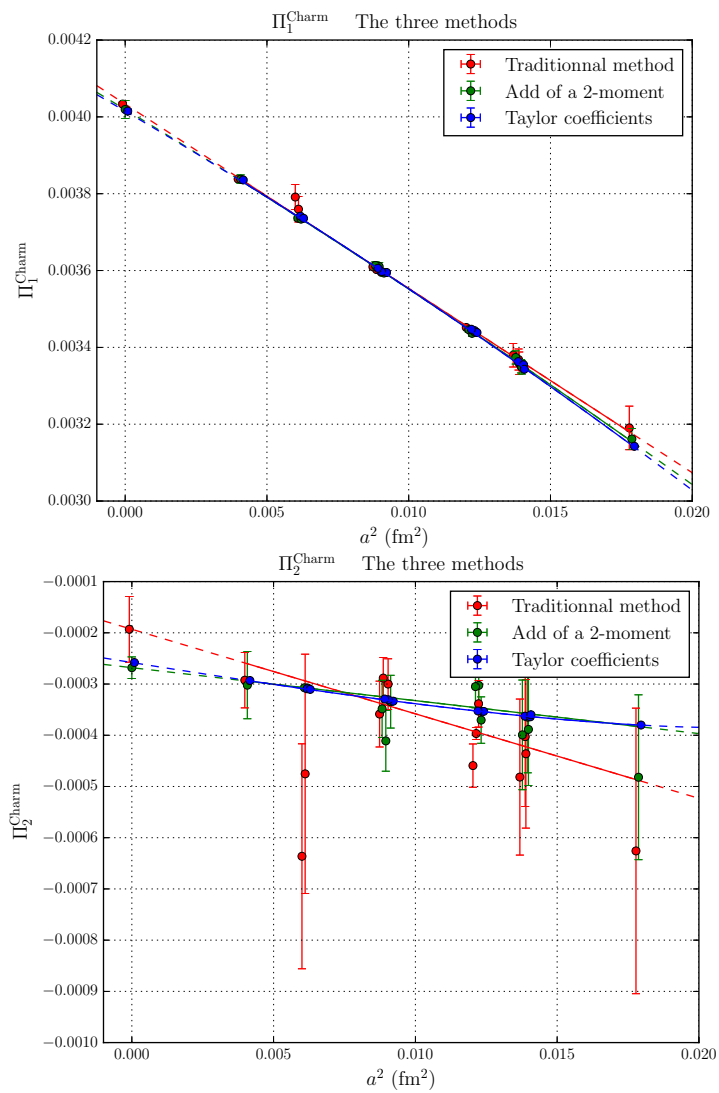
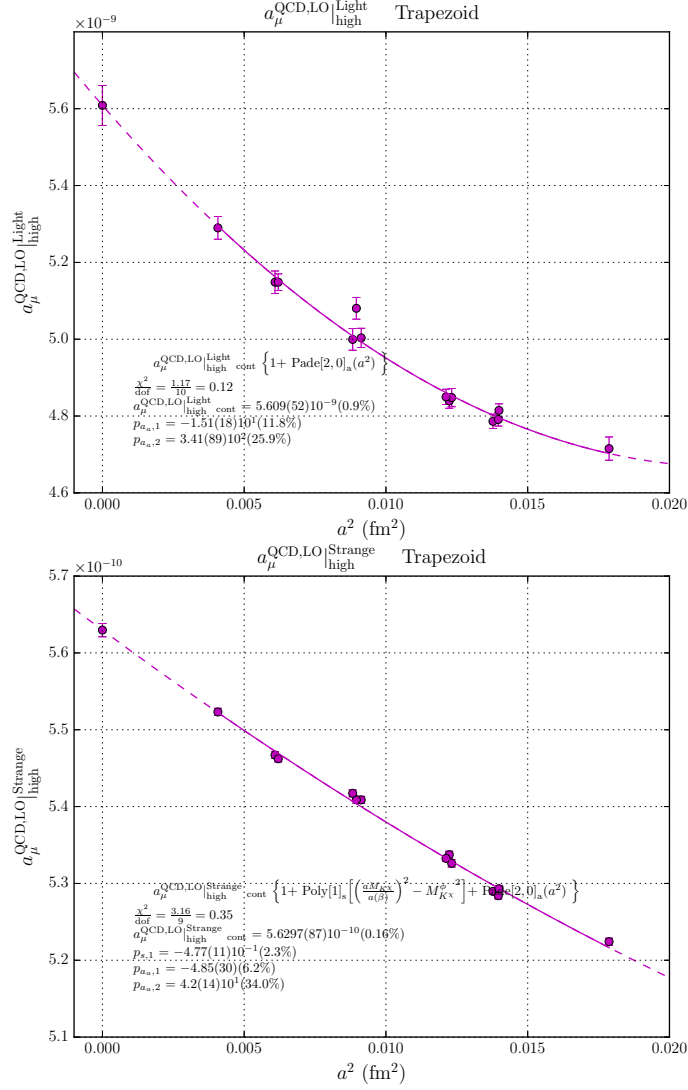


FIG. 4.11 : Extrapolation du continu des coefficients Π_1 et Π_2 pour la saveur *charm*, obtenue par la même méthode que dans la figure 4.9.



4.3 RÉSULTATS POUR LES CONTRIBUTIONS CONNECTÉES À $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ ET DISCUSSION

4.3.1 RÉSULTATS AVEC ERREURS STATISTIQUES

Nous souhaitons préciser que le fait d'utiliser 6 tailles de maille dont la plus fine avec $a = 0.0634$ fm a été d'une grande importance pour obtenir des extrapolations du continu précises. Un résumé des coefficients Π_1 et Π_2 physiques obtenus par extrapolation du continu est donné dans le tableau 4.3.

Après intégration, selon l'équation (3.41), de la fonction de Padé [1, 1] physique modélisant $\hat{\Pi}(Q^2)$ à partir des coefficients Π_1 et Π_2 de $Q^2 = 0$ à 0.2 GeV^2 , et suite à l'ajout des $a_\mu^{\text{HVP,LO}}(Q^2 \geq 0.2 \text{ GeV}^2)$, on obtient nos valeurs pour les diagrammes connectés de la contribution de polarisation hadronique du vide pour chaque saveur : $a_\mu^{(l),\text{HVP,LO}}$, $a_\mu^{(s),\text{HVP,LO}}$ et $a_\mu^{(c),\text{HVP,LO}}$ ainsi que le total donné dans le tableau 4.4. Remarquons que pour l'intervalle des hautes impulsions $Q^2 \geq 0.2 \text{ GeV}^2$, nous avons intégré jusqu'à la

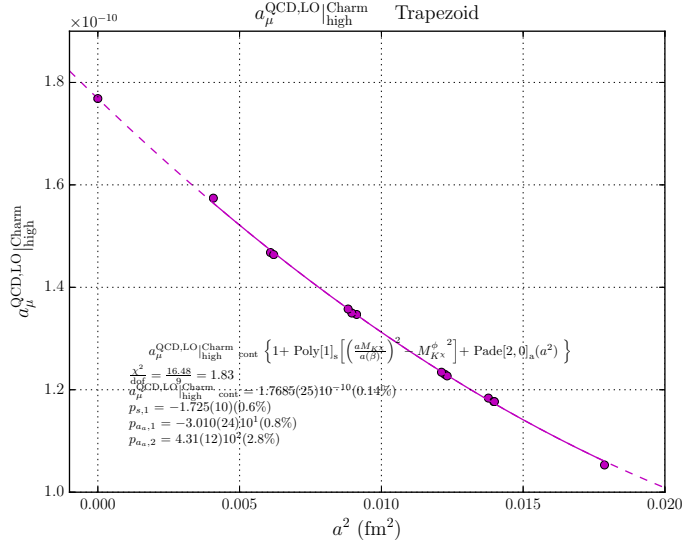


FIG. 4.12 : Résultats des fits physiques des valeurs de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}(Q^2 \geq 0.2 \text{ GeV}^2)$ pour les saveurs légère, s et c , obtenues à partir des 13 simulations, selon la méthode décrite dans le texte. Ce qui est montré ici est la dépendance de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}(Q^2 \geq 0.2 \text{ GeV}^2)$ sur la maille carrée des réseaux, a^2 . Celle-ci est obtenue en interpolant les résultats des 13 simulations (les points) et des fits (les courbes) au point de masse physique à l'aide des fits eux-mêmes.

plus grande impulsion disponible sur le réseau mais noté le résultat comme s'il s'agissait de l'intervalle infini $[0.2 \text{ GeV}^2, \infty]$: la théorie des perturbations montrent en effet qu'au dessus de 2 GeV^2 , la contribution $a_\mu^{\text{HVP,LO}}(Q^2 \geq 2 \text{ GeV}^2)$ est de l'ordre de quelques dixièmes de pourcent de la contribution totale et donc déjà largement recouverte par nos erreurs statistiques et autres erreurs systématiques. Cet abus de langage sur l'intervalle d'intégration est donc justifié pour le degré de précision de cette étude. Des calculs prolongeant la référence [11] sont en cours.

4.3.2 RÉSULTATS AVEC ESTIMATIONS DES ERREURS SYSTÉMATIQUES ET DISCUSSION

Il est donc possible d'obtenir les contributions connectées à $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ avec un peu plus de 1% d'erreur statistique pour la saveur légère, et quelques dixièmes de pourcent d'erreurs statistiques pour les saveurs *strange* et *charm*. Puisque les trois méthodes s'avèrent donner des résultats compatibles, nous ne gardons pour la suite que la méthode la plus stable et la plus directe, c'est à dire la méthode des approximations de Padé.

Dans le paragraphe 2.3.6, nous avons évoqué des sources possibles d'incertitudes systématiques. Celles-ci sont liées aux choix faits pour les fits physiques qui permettent d'interpoler les résultats du calcul sur réseau au point de masses physique et de les extrapoler à la limite du continu. En particulier, il s'agit d'estimer la contribution possible de termes d'ordres plus élevés dans les développements utilisés dans ces fits. Pour cela, nous

Traditionnal		
	Π_1 [GeV ⁻²]	Π_2 [GeV ⁻⁴]
Light	$1.639(23)10^{-1}(1.4\%)$	$-2.85(14)10^{-1}(5.0\%)$
Strange	$6.569(13)10^{-2}(0.2\%)$	$-5.208(47)10^{-2}(0.9\%)$
Charm	$4.0333(47)10^{-3}(0.1\%)$	$-1.93(64)10^{-4}(33.3\%)$

2-moment		
	Π_1 [GeV ⁻²]	Π_2 [GeV ⁻⁴]
Light	$1.640(15)10^{-1}(0.9\%)$	$-2.872(72)10^{-1}(2.5\%)$
Strange	$6.5670(93)10^{-2}(0.1\%)$	$-5.247(33)10^{-2}(0.6\%)$
Charm	$4.019(23)10^{-3}(0.6\%)$	$-2.68(21)10^{-4}(7.9\%)$

Taylor coefficients		
	Π_1 [GeV ⁻²]	Π_2 [GeV ⁻⁴]
Light	$1.642(17)10^{-1}(1.1\%)$	$-2.934(97)10^{-1}(3.3\%)$
Strange	$6.5682(63)10^{-2}(0.1\%)$	$-5.3109(90)10^{-2}(0.2\%)$
Charm	$4.0150(53)10^{-3}(0.1\%)$	$-2.581(13)10^{-4}(0.5\%)$

TAB. 4.3 : Contributions des différents saveurs de quarks aux coefficients de Padé Π_1 et Π_2 simultanément interpolées au point de masse physique et extrapolées à la limite du continu. Le tableau compare les valeurs de ces dérivées de $\hat{\Pi}(Q^2)$ en $Q^2 = 0$ obtenues par les trois méthodes détaillées dans le chapitre 4.2.2.

varions les intervalles de fit sur les masses des quarks, représentées ici par des masses de mésons pseudoscalaires qui contiennent ces quarks, et éliminons les simulations avec les mailles les moins fines. Nous trouvons ainsi que les incertitudes liées à l'extrapolation du continu dominant largement sur celles associées aux petites interpolations au point de masse physique et nous négligerons ces dernière dans la suite.

En pratique nous réitérons deux fois nos extrapolations du continu : une première fois en retirant la simulation au réseau le plus grossier (le β le plus petit) puis une seconde fois en retirant les simulations correspondant aux deux β les plus petits (c'est à dire quatre simulations pour notre jeu de simulations).

Pour finaliser nos résultats il reste à estimer les erreurs systématiques liées aux effets de volume fini. Un calcul basé sur le modèle de théorie des perturbations chirales proposé dans [63] estime ces effets à 2-3%. Il faut aussi prendre en compte les contributions quark-déconnectés qui ont été estimées dans [51] à $-9.6(3.3)(2.3) \cdot 10^{-10}$, c'est à dire à environ -1.5% de notre contribution connectée et petite comme le suggère notre estimation naïve du chapitre 3.2.3.

Afin de pouvoir donner des résultat qui peuvent être considérés comme complets dans la limite d'isospin, nous allons inclure deux petites corrections obtenues par la collaboration Budapest - Marseille - Wuppertal, indépendamment de ce travail de thèse.

Celles-ci résultent :

- d'une étude des erreurs systématiques liées aux effets de volume fini basé sur le même modèle que [63]
- d'un calcul des contributions déconnectées

En mettant tout ensemble, nous pouvons donc donner un résultat complet pour Π_1 et Π_2 dans le tableau 4.5.

Notre valeur de Π_1 est en excellent accord avec la seule valeur phénoménologique publiée, basée sur les données $e^+e^- \rightarrow$ hadrons [64] :

$$\Pi_1^{\text{BMW,preliminary}} = 0.0992(9)(8)(22) \text{ GeV}^{-2} \leftrightarrow \Pi_1^{\text{pheno}} = 0.0990(7) \text{ GeV}^{-4} \quad (4.7)$$

et notre valeur de Π_2 :

$$\Pi_2^{\text{BMW,preliminary}} = -0.180(5)(4)(10) \text{ GeV}^{-2} \leftrightarrow \Pi_2^{\text{pheno}} = -0.2057(16) \text{ GeV}^{-4} \quad (4.8)$$

diffère d'un peu plus de 2 déviations standards du résultat dans [64]. Ce décalage devra être étudié. Il pourrait s'expliquer par des erreurs de volume fini sous-estimées dans nos résultats ; par des contributions qui brisent l'isospin plus importantes que les $\sim 1\%$ naïvement attendus du fait de la taille des paramètres de brisure, $3(m_d - m_u)/M_N \simeq 1\%$ et $\alpha \simeq 1/5$; ou bien par un problème dans les données utilisées par les auteurs de [64] dans la relation de dispersion décrite dans la section 1.3.

Nous sommes désormais en mesure d'intégrer, selon l'équation (3.41) et pour $Q^2 \leq 0.2 \text{ GeV}^2$, la fonction de polarisation donnée par l'approximation de Padé avec les coefficients Π_1 et Π_2 du tableau 4.5, déterminés par les moments de l'équation (4.6), et leurs erreurs associées. Ainsi, nous donnons les résultats de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ pour chaque saveur pour les basses et hautes impulsions ainsi que les totaux partiels et la valeur totale globale dans le tableau 4.6.

Notre résultat préliminaire est donc :

$$a_\mu^{\text{HVP,LO}} = 692(25) \times 10^{-10} \quad (4.9)$$

comparé dans la figure 4.13, aux valeurs phénoménologiques récentes [65, 66, 67, 64] et aux deux seuls autres résultats du réseau obtenus avec des simulations $N_f = 2 + 1 + 1$ [68, 69]. Il est important de noter que les résultats du réseau sont obtenus dans la limite d'isospin, alors que les résultats phénoménologiques incorporent des contributions qui brisent cette symétrie. Comme indiqué plus haut, on s'attend à ce que les corrections correspondantes soient autour du pourcent, mais seul un calcul maîtrisé peut le confirmer.

Les valeurs phénoménologiques sont obtenues à l'aide de relations de dispersions et de données pour la section efficace $e^+e^- \rightarrow$ hadrons et, dans certains cas, le taux $\tau \rightarrow \nu_\tau$ hadrons, comme décrit dans la section 1.3. Les résultats du réseau sont obtenus

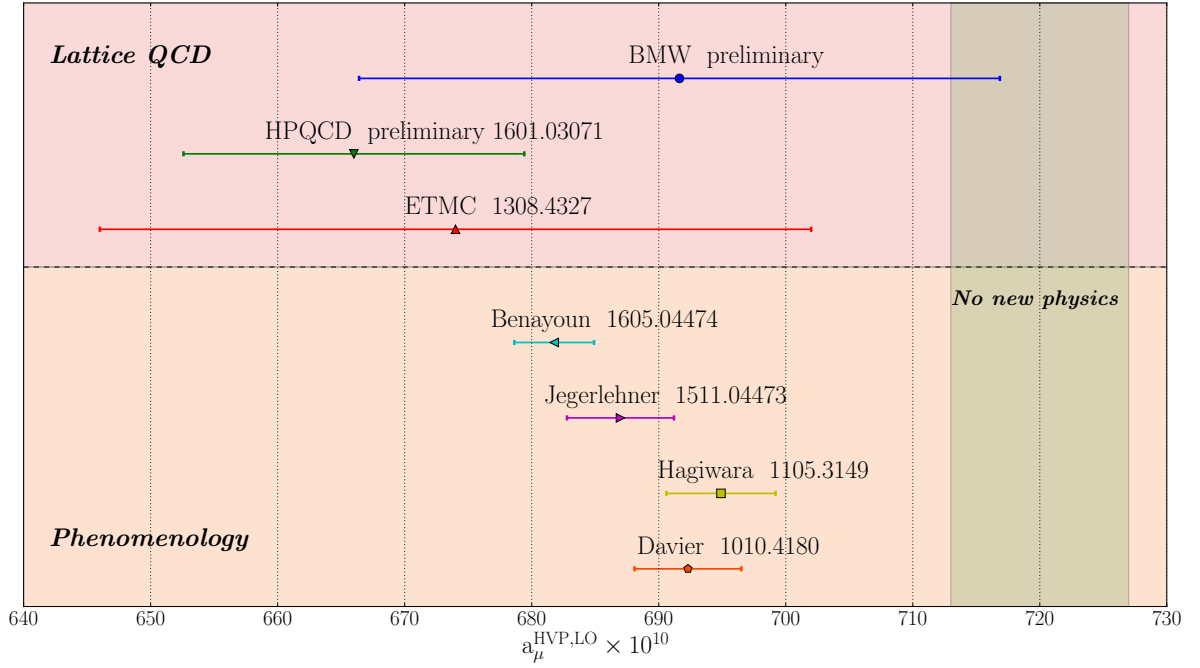


FIG. 4.13 : Comparaison de notre résultat préliminaire (BMW preliminary) pour $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ de l'équation (4.9) à des déterminations phénoménologiques récentes [65, 66, 67, 64] représentées dans la bande horizontale orange notée **Phenomenology** ainsi qu'aux deux seuls autres résultats du réseau obtenus avec des simulations $N_f = 2 + 1 + 1$ [68, 69] représentés dans la bande horizontale rouge notée **Lattice QCD**, décrits dans le texte. La bande verticale verte notée **No new physics** est obtenue à partir de la mesure expérimentale de a_μ en soustrayant à celle-ci toutes les contributions calculées du modèle standard autre que celle de la polarisation du vide. C'est donc la valeur que devrait prendre $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ si la mesure expérimentale de a_μ ne contient pas de contributions de physique au delà du modèle standard.

par extrapolation en masse du pion à partir de simulations avec des quarks u et d dont les masses sont plus grandes que les masses physiques. Le résultat de [68] n'inclue pas les contributions déconnectées ni ne prend en compte les effets de volume fini. Celui de [69] inclue des corrections significatives aux résultats bruts du réseau, obtenues par une modélisation phénoménologique des états à deux pions.

Bien que les incertitudes sur nos résultats sont encore trop grandes pour confirmer ou infirmer le désaccord que donnent les estimations phénoménologiques avec la mesure de a_μ , nos calculs ne suggèrent aucun désaccord entre cette mesure et le modèle standard. De façon plus générale, nos simulations valident la QCD sur réseau comme approche pertinente pour un calcul précis de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ à l'ordre de quelques pourcents et ouvre la voie pour des simulations futures à l'ordre de quelques dixièmes de pourcent.

Method	In range $[0, 0.2\text{GeV}^2]$, Π_i simu by simu			Charm	Total by method
	Light	Strange			
Traditionnal 2-moment Taylor coefficients	$578.0(68)10^{-10}(1.2\%)$	$47.968(89)10^{-10}(0.2\%)$	$12.144(15)10^{-10}(0.1\%)$	$638.1(68)10^{-10}(1.1\%)$	
	$577.9(48)10^{-10}(0.8\%)$	$47.945(63)10^{-10}(0.1\%)$	$12.093(70)10^{-10}(0.6\%)$	$637.9(48)10^{-10}(0.7\%)$	
	$578.0(53)10^{-10}(0.9\%)$	$47.935(45)10^{-10}(0.1\%)$	$12.080(16)10^{-10}(0.1\%)$	$638.0(53)10^{-10}(0.8\%)$	
Trapezoid	In range $[0.2, \infty \text{ GeV}^2]$, a_μ simu by simu				
	$56.09(52)10^{-10}(0.9\%)$	$5.6297(87)10^{-10}(0.2\%)$	$1.7685(25)10^{-10}(0.1\%)$	$63.49(52)10^{-10}(0.8\%)$	
Total by flavor,					
Traditionnal + Trapezoid 2-moment + Trapezoid Taylor coefficients + Trapezoid	$634.1(69)10^{-10}(1.1\%)$	$53.598(91)10^{-10}(0.2\%)$	$13.913(16)10^{-10}(0.1\%)$	$701.6(69)10^{-10}(1.0\%)$	
	$634.0(49)10^{-10}(0.8\%)$	$53.574(66)10^{-10}(0.1\%)$	$13.861(71)10^{-10}(0.5\%)$	$701.4(49)10^{-10}(0.7\%)$	
	$634.1(54)10^{-10}(0.9\%)$	$53.565(49)10^{-10}(0.1\%)$	$13.849(16)10^{-10}(0.1\%)$	$701.5(55)10^{-10}(0.8\%)$	

TAB. 4.4 : Résultats pour les contributions connectées de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ par saveur de quark et pour les trois différentes méthodes que nous avons utiliser pour déterminer la fonction de polarisation à partir de la fonction à deux points du courant électromagnétique. Les erreurs données dans ce tableau sont statistiques seulement.

	Π_1 [GeV ⁻²]	Π_2 [GeV ⁻⁴]
Light	1.642(17)(17)10 ⁻¹	-2.934(97)(82)10 ⁻¹
Strange	6.5682(63)(22)10 ⁻²	-5.3109(90)(24)10 ⁻²
Charm	4.0150(53)(121)10 ⁻³	-2.581(13)(23)10 ⁻⁴
Disconnected	-1.50(20)(10)10 ⁻²	4.60(100)(40)10 ⁻²
Light FV corr.	0.0011(45)	-3.2(21)10 ⁻²
Light + FV corr.	1.653(17)(17)(45)10 ⁻¹	-3.254(97)(82)(210)10 ⁻¹
I=0	1.654(24)(14)10 ⁻²	-1.720(124)(64)10 ⁻²
I=1	8.210(86)(83)10 ⁻²	-1.467(49)(41)10 ⁻¹
total	9.864(90)(84)10 ⁻²	-1.639(50)(41)10 ⁻¹
I=1 FV corr.	= (light FV corr.)/2	
total + I=1 FV corr.	9.919(90)(84)(225)10 ⁻²	-1.799(50)(41)(105)10 ⁻¹

TAB. 4.5 : Résultats totaux préliminaires, dans la limite d'isospin, pour les coefficients Π_1 et Π_2 avec erreurs statistiques, erreurs systématiques et corrections de volumes finis. Les résultats sont donnés pour les contributions connectées correspondant aux diverses saveurs de quark, pour les contributions déconnectées, pour les deux contributions d'isospin et pour la somme des contributions.

	[0, 0.2 GeV ²]	[0.2, ∞ GeV ²]	Total flavor
Light	578(22)10 ⁻¹⁰	56.09(91)10 ⁻¹⁰	634(23)10 ⁻¹⁰
Strange	47.935(54)10 ⁻¹⁰	5.630(10)10 ⁻¹⁰	53.565(64)10 ⁻¹⁰
Charm	12.080(41)10 ⁻¹⁰	1.7685(26)10 ⁻¹⁰	13.849(43)10 ⁻¹⁰
Disconnected	-10.1(19)10 ⁻¹⁰	-	-10.1(19)10 ⁻¹⁰
Total range	628(24)10 ⁻¹⁰	63.49(93)10 ⁻¹⁰	692(25)10 ⁻¹⁰ (3.6%)

TAB. 4.6 : Valeurs de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ munies de l'erreur totale (quadratiquement sommée) pour chaque saveur et intervalle d'intégration. Pour l'intervalle [0, 0.2 GeV²], elles correspondent à l'intégration selon l'équation 3.41 avec des fonctions de Padé construites à partir des coefficient Π_1 et Π_2 du tableau 4.5. Sont représentés également les totaux partiels par saveur et les totaux partiels par intervalle d'intégration, ainsi que le total global.

Conclusions et perspectives

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés aux contributions de la polarisation hadronique du vide au moment magnétique anomal du muon $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ calculé avec la théorie discrétisée des interactions fortes, la QCD sur réseau et simulée sur les supercalculateurs massivement parallèles les plus puissants du moment (cf. Annexe C). Ce sujet est plus que jamais d'actualité du fait de la déviation actuellement observée entre la mesure expérimentale a_μ^{EXP} de l'expérience E821 du *Brookhaven National Laboratory* et la prédiction théorique a_μ^{SM} du modèle standard. Alors qu'habituellement, la prédiction théorique incorpore dans le calcul de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ les données expérimentales $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$ via une relation de dispersion, la QCD sur réseau permet de calculer directement cette contribution dans le régime non-perturbatif de la QCD.

Nous avons pour cela, à partir des configurations de jauge de la collaboration Budapest-Marseille-Wuppertal et de l'implémentation des fermions discrétisés de Wilson et *Staggered* du code DynQCD, calculé le tenseur $\Pi_{\mu\nu}(Q)$ de polarisation hadronique du vide. Nous avons également développé et comparé des méthodes analytiques d'extraction de la fonction de polarisation scalaire $\Pi(Q^2)$ pour des valeurs d'impulsions Q^2 euclidiennes du photon. Ces méthodes font toute usage de dérivées de fonctions de corrélation via la transformée de Fourier discrète sur réseaux avec conditions aux bords périodiques et utilisent les approximations de Padé comme moyen de modéliser la fonction sur l'important intervalle des basses impulsions.

Après une étude numérique préliminaire comprenant 4 simulations dédiées aux effets de volume fini qui a montré l'importance d'imposer la condition $\Pi_{\mu\nu}(0) = 0$, nous avons calculé avec 13 simulations et 6 échelles a s'étendant de la plus grossière à la plus fine de 0.134 fm à 0.064 fm, toutes avec des paramètres réalistes reproduisant la masse physique du pion, du kaon et du quark charmé, les contributions à $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ pour quatre saveurs de quark correspondant au *strange*, au *charm* et aux quarks *up* et *down* dans la limite d'isospin. Cela nous a permis de réaliser une interpolation physique des dépendances sur les masses des quarks ainsi qu'une extrapolation à la limite du continu avec de faibles erreurs statistiques. Toute l'analyse numérique a été du chapitre 4 a été réalisé à l'aide du pipeline décrit en Annexe C.

Malgré l'apparente simplicité du calcul de $\Pi(0)$, l'efficacité des différentes méthodes pour réduire les erreurs statistiques et systématiques diffère. Le calcul des moments dans l'approximation de Padé par les coefficients de Taylor s'est avéré la plus simple des méthodes puisqu'elle permet de se dispenser de tout *fit*. Au final, il est donc désormais possible d'obtenir les contributions connectées à $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ avec environ 1% d'erreur statistique et des erreurs systématiques d'environ 3%. Celles-ci doivent être mieux comprises avant de pouvoir donner un résultat final avec toutes les erreurs systématiques contrôlées.

PERSPECTIVES

Une étude systématique des effets de volume fini, à l'aide de simulations effectuées dans divers volumes directement à la masse physique du pion, est en cours.

Une fois ce travail réalisé, il sera alors naturel d'envisager d'effectuer le calcul complet de $a_\mu^{\text{HVP,LO}}$ incluant les effets de la QED et de la différence de masse des quarks u et d pour dépasser l'approximation d'isospin. Une étude des volumes finis dans ce contexte sera d'autant plus importante du fait de la longue portée des interactions électromagnétiques.

Sur le plan du calcul haute performance, pour obtenir une précision de l'ordre de quelques dixièmes de pourcent, il sera nécessaire de développer des nouvelles méthodes pour réduire le bruit statistique et peut-être nécessaire de considérer de nouvelles architectures telles que l'association récente entre les processeurs CPU IBM Power et coprocesseurs graphiques GPU NVidia reliés par les connexions nvlinc censées réduire les temps de communication. Néanmoins, obtenir des codes de simulation supportant les mêmes passages à l'échelle (cf. Annexe C) que pour l'IBM BlueGene/Q constituera un challenge algorithmique important et difficile.

Dans tous les cas, la QCD sur réseau se révèle être une technique pertinente pour accompagner les futures mesures du moment magnétique anomal du muon qui émaneront de la nouvelle expérience E989 du Fermilab et qui commencera au printemps 2017.

Annexes

A APPROXIMATIONS DE PADÉ

La référence pour les approximations de Padé est [91]. Considérons le développement en série entière d'une fonction f analytique :

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \quad (\text{A.1})$$

Par définition, une approximation de Padé d'ordre (L, M) est la fonction rationnelle quotient d'un polynôme de degré L et d'un polynôme unitaire de degré M :

$$f_{[L,M]}(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_L z^L}{1 + b_1 z + \cdots + b_M z^M} \quad (\text{A.2})$$

où les b_i sont définis par :

$$\begin{pmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \cdots & c_L \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_{L+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_L & c_{L+1} & \cdots & c_{L+M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ \cdots \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{L+1} \\ c_{L+2} \\ \cdots \\ c_{L+M} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

et les a_i par :

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_1 &= c_1 + b_1 c_0 \\ &\cdots \\ a_L &= c_L + \sum_{i=1}^{\min(L,M)} b_i c_{L-i} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Dans ce cas, la fraction rationnelle vérifie la propriété d'approximation :

$$f(z) = f_{[L,M]}(z) + O(z^{L+M+1}) \quad (\text{A.5})$$

qui la caractérise parmi les fractions rationnelles du même ordre et dénominateur polynomial unitaire.

B MODÈLES DES FITS PHYSIQUES

Dans le tableau ci-dessous, on peut trouver un tableau explicitant les dépendances activées dans les fits physiques et extrapolations du continu. Pour les dépendances en masse des quarks, le paramètre `deg_ud` désigne le degré du polynôme de Taylor utilisé pour la saveur légère et pour lequel la variable est $M_\pi - M_\pi^{\text{PDG,iso}}$, différence de masse du pion sur le réseau et du pion physique dans la limite d'isospin, donné par [13]. Le paramètre `deg_s`, pour la saveur *strange*, correspond de manière similaire au degré du polynôme de Taylor développé en la variable $M_{K^\chi} - M_{K^\chi}^{\text{PDG,iso}}$ où K^χ est la quantité choisie pour sa dépendance forte en la masse du quark *strange* et définie et utilisée lors de la détermination de l'échelle en 2.3.3. Enfin, la dépendance en l'échelle est modélisée par un Padé en la variable a^2 de type Padé[`deg_a_num,deg_a_den`] tel que défini en A.2. Les dépendances en les volumes ont été désactivées lors des fits physiques et extrapolations du continu : `deg_l = 0`.

Flavor	Physical quantity	Method	deg_ud	deg_s	deg_a_num	deg_a_den	deg_l
In range $[0, 0.2 \text{ GeV}^2]$, Π_i simu by simu							
Light	Π_1	Traditionnal	0	0	1	0	0
		2-moment	0	0	1	0	0
		Taylor coefficients	1	0	1	0	0
	Π_2	Traditionnal	0	0	1	0	0
		2-moment	0	0	1	0	0
		Taylor coefficients	1	0	1	0	0
Strange	Π_1	Traditionnal	0	1	1	0	0
		2-moment	0	1	1	0	0
		Taylor coefficients	0	1	1	0	0
	Π_2	Traditionnal	0	1	1	0	0
		2-moment	0	1	1	0	0
		Taylor coefficients	0	1	1	0	0
Charm	Π_1	Traditionnal	1	1	1	0	0
		2-moment	1	1	2	0	0
		Taylor coefficients	1	1	2	0	0
	Π_2	Traditionnal	0	0	1	0	0
		2-moment	0	1	1	0	0
		Taylor coefficients	1	1	2	1	0
In range $[0.2, \infty \text{ GeV}^2]$, a_μ simu by simu							
Light	a_μ	Trapezoid	0	1	1	1	0
Strange	a_μ	Trapezoid	0	1	2	1	0
Charm	a_μ	Trapezoid	1	1	2	1	0

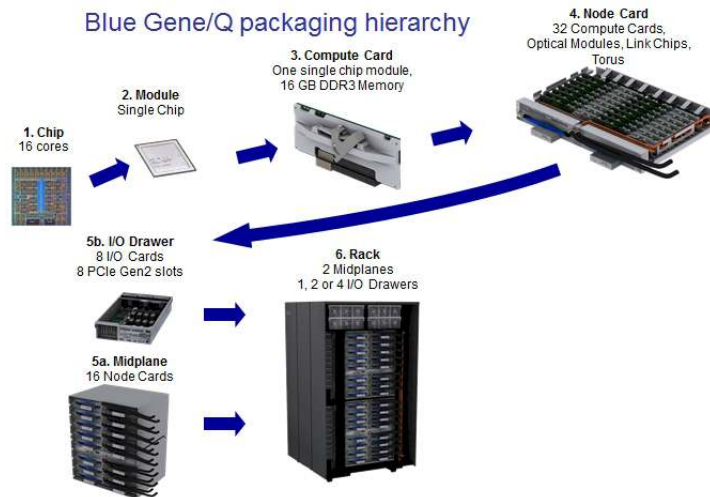
TAB. B.7 : Dépendance des fits physique et d'extrapolations du continu

Prenons par exemple le cas de Π_2 pour lequel les paramètres `deg_ud = deg_s = deg_a_den = 1` et `deg_a_num = 2`, on a donc finalement un fit à 6 paramètres ($\Pi_2^{\phi, \text{lattice}}, p_l, p_s, p_{a_1}, p_{a_2}, p_{b_1}$) sur la donnée des quadruplets $(aM_\pi, aM_K, a(\beta), \Pi_2^{\text{lattice}})$ de chaque simulation et suivant la modélisation suivante :

$$\begin{aligned}
\Pi_2^{\text{lattice}} = \Pi_2^{\phi, \text{lattice}} \left\{ \right. & 1 \\
& + p_l \left[\left(\frac{aM_\pi}{a_\beta} \right)^2 - M_\pi^{\phi 2} \right] \\
& + p_s \left[\left(\frac{aM_{K^\chi}}{a_\beta} \right)^2 - M_{K^\chi}^{\phi 2} \right] \\
& \left. + \frac{p_{a_1} a_\beta^2 + p_{a_2} a_\beta^4}{1 + p_{b_1} a_\beta^2} \right\} \tag{B.1}
\end{aligned}$$

C SUPERCALCULATEURS ET SUITES LOGICIELLES POUR LA SIMULATION ET LE POST-TRAITEMENT

Le *hardware* composant un cluster IBM BlueGene/Q est structuré hiérarchiquement. Un nœud de calcul contient une puce de 16 cœurs et 16 Go de mémoire RAM DDR3. Un *rack* contient 1024 nœuds de calcul, soit 16384 cœurs et 16 To de mémoire :

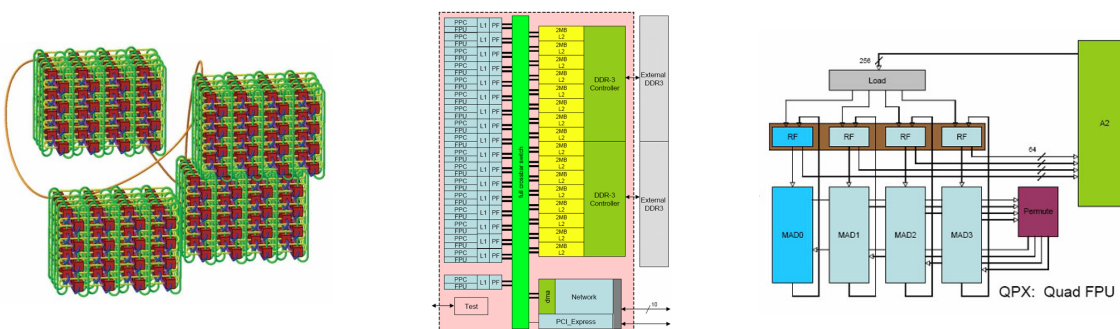


Les centres de calcul européens les plus importants disposent de plusieurs racks. On a utilisé généralement 32 nœuds (1024 cœurs) pour un test rapide et 512 ou 1024 nœuds pour une simulation réelle (8192 ou 16384 cœurs) :

NOM	INSTITUT	#RACKS	#CPU's	Peak Tflop/s
Turing	IDRIS	6	98304	1254
Juqueen	FZJ	28	458752	5900
Fermi	Cineca	10	163840	2090

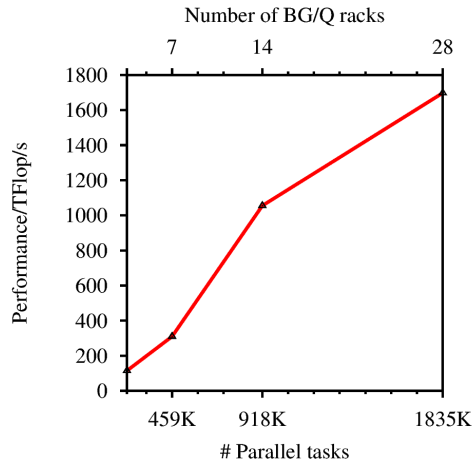


L'ensemble des processeurs constitue un réseau dont la topologie est celle d'un tore 5D et chaque nœud du réseau dispose d'un contrôleur réseau lui-même programmable. Chaque cœur possède des registres de calculs vectoriels appelés QPX de 4 x 64 bits :



En tirant parti des trois niveaux de parallélisation disponibles (processus MPI et IBM SPI, pthread POSIX, vectorisation IBM QPX), la suite logicielle DynQCD, écrite

en langage C99 étendu par les fonctions intrinsèques IBM, atteint un *strong scaling*¹ calculatoire fixé en quasiment parfait :



Nous avons développé au cours de cette thèse un pipeline d'analyse [C.7](#) pour calculer $a_{\mu}^{\text{HVP,LO}}$ à partir des corrélateurs calculés par DynQCD. Il permet de calculer rapidement l'erreur statistique et systématique (ensemble des analyses du chapitre [4](#) en environ 30 minutes sur un ordinateur portable), par les méthodes définies en [2.3.5](#) et [2.3.6](#). Il utilise notamment la librairie expérimentale Boost SIMD, disponible sur <https://github.com/NumScale/boost.simd>, et candidate pour une introduction dans la norme C++17 du langage C++.

Les calculs de χ^2 et de pseudo-inverses de matrices de corrélations sont réalisés via la librairie C++ Eigen 3. La routine pour les calculs d'intégrales adaptatives singulières est un wrapper C++ ROOT de la librairie GNU/GSL. Les modèles et les résultats des fits sont sérialisés via la librairie C++ Boost Serialization. L'interactivité se fait via des modules Python via Boost Python. Ces derniers sont utilisables dans des feuilles de calcul IPython/Jupyter et permet de bénéficier de l'écosystème scientifique Python (Scipy, Numpy, Matplotlib, ...).

¹comportement d'une solution (programme + machine) lors de l'augmentation du nombre de processeurs pour un problème calculatoire de taille fixée

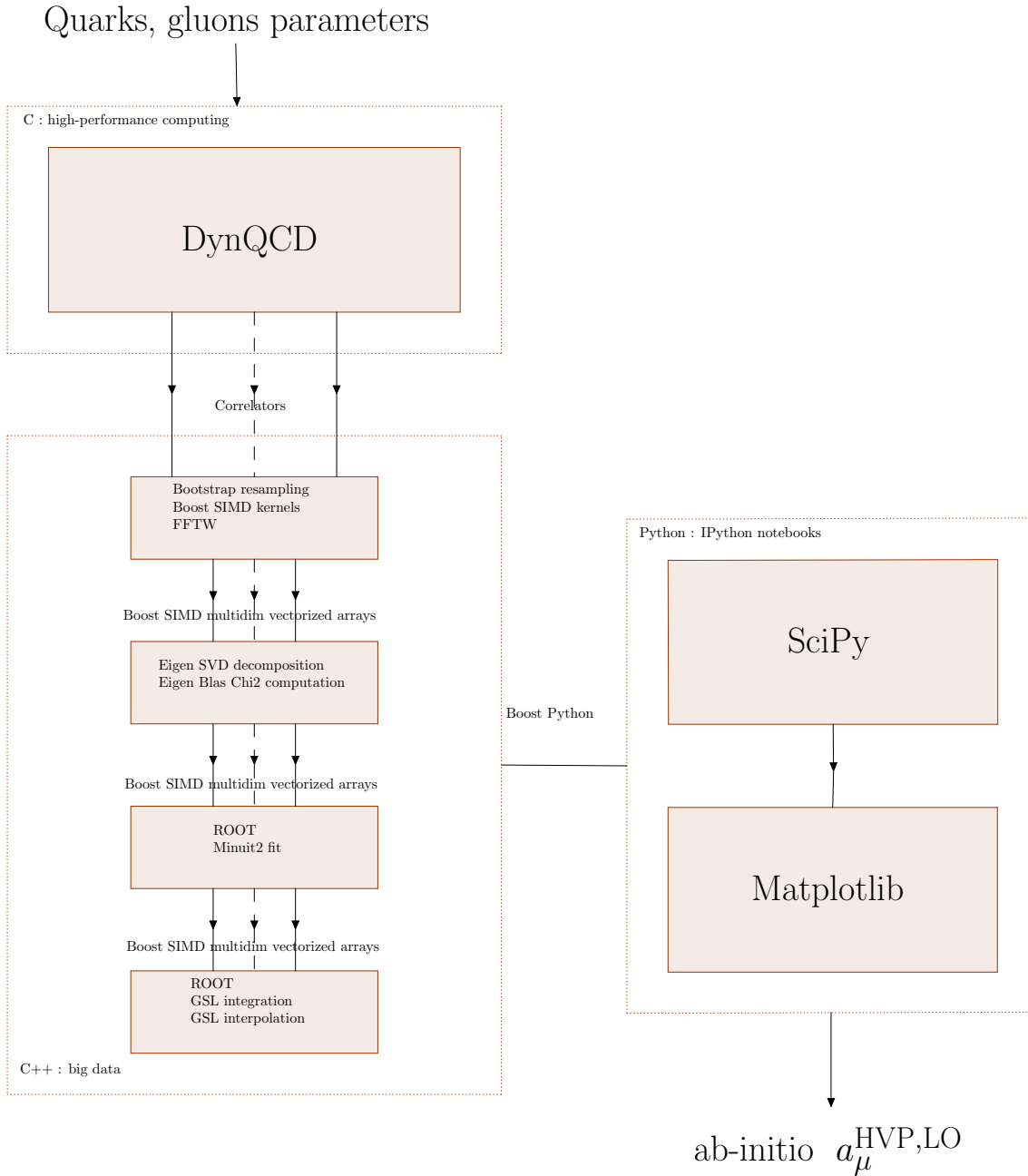


FIG. C.7 : Architecture du pipeline d'analyse C++/Python utilisé pour l'analyse des corrélateurs issus du code de simulation DynQCD

Bibliographie

- [1] H. M. Foley and P. Kusch, *Phys. Rev.* **73** (1948) 412–412.
- [2] J. S. Schwinger, *Phys. Rev.* **73** (1948) 416–417.
- [3] R. L. Garwin, L. M. Lederman, and M. Weinrich, *Phys. Rev.* **105** (1957) 1415–1417.
- [4] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*. No. vol. 1 in The Quantum Theory of Fields 3 Volume Hardback Set. Cambridge University Press, 1995.
- [5] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*. No. vol. 2 in The Quantum Theory of Fields 3 Volume Hardback Set. Cambridge University Press, 1995.
- [6] F. Jegerlehner and A. Nyffeler, *Phys. Rept.* **477** (2009) 1–110, [[arXiv:0902.3360](#)].
- [7] M. Knecht, *Nucl. Part. Phys. Proc.* **258-259** (2015) 235–240, [[arXiv:1412.1228](#)].
- [8] **Muon g-2** Collaboration, J. Grange *et. al.*, [arXiv:1501.0685](#).
- [9] M. Knecht, *Lect. Notes Phys.* **629** (2004) 37–84, [[hep-ph/0307239](#)].
- [10] M. Kobayashi and T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973) 652–657.
- [11] K. G. Chetyrkin, J. H. Kuhn, and M. Steinhauser, *Nucl. Phys.* **B482** (1996) 213–240, [[hep-ph/9606230](#)].
- [12] F. Jegerlehner, *EPJ Web Conf.* **118** (2016) 01016, [[arXiv:1511.0447](#)].
- [13] **Particle Data Group** Collaboration, K. A. Olive *et. al.*, *Chin. Phys.* **C38** (2014) 090001.
- [14] C. Gattringer and C. Lang, *Quantum Chromodynamics on the Lattice : An Introductory Presentation*. Lecture Notes in Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [15] D. J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30** (Jun, 1973) 1343–1346.
- [16] M. Bochiçchio, L. Maiani, G. Martinelli, G. C. Rossi, and M. Testa, *Nucl. Phys.* **B262** (1985) 331.

- [17] R. P. Feynman, *The principle of least action in quantum mechanics*. PhD thesis, Princeton U., 1942.
- [18] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, *Physics Letters B* **105** (Oct., 1981) 219–223.
- [19] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, *Nuclear Physics B* **185** (July, 1981) 20–40.
- [20] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, *Nuclear Physics B* **193** (Dec., 1981) 173–194.
- [21] J. B. Kogut and L. Susskind, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 395–408.
- [22] K. Symanzik, *Nucl. Phys.* **B226** (1983) 187–204.
- [23] K. Symanzik, *Nucl. Phys.* **B226** (1983) 205–227.
- [24] B. Sheikholeslami and R. Wohlert, *Nucl. Phys.* **B259** (1985) 572.
- [25] M. Luscher and P. Weisz, *Commun. Math. Phys.* **97** (1985) 59. [Erratum : *Commun. Math. Phys.* 98,433(1985)].
- [26] S. Durr, Z. Fodor, C. Hoelbling, S. D. Katz, S. Krieg, T. Kurth, L. Lellouch, T. Lippert, K. K. Szabo, and G. Vulvert, *JHEP* **08** (2011) 148, [[arXiv:1011.2711](https://arxiv.org/abs/1011.2711)].
- [27] S. Capitani, S. Durr, and C. Hoelbling, *JHEP* **11** (2006) 028, [[hep-lat/0607006](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0607006)].
- [28] S. Durr, Z. Fodor, C. Hoelbling, and T. Kurth, *JHEP* **04** (2007) 055, [[hep-lat/0612021](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0612021)].
- [29] C. Morningstar and M. J. Peardon, *Phys. Rev.* **D69** (2004) 054501, [[hep-lat/0311018](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0311018)].
- [30] D. J. E. Callaway and A. Rahman, *Phys. Rev.* **D28** (1983) 1506.
- [31] S. Duane, A. D. Kennedy, B. J. Pendleton, and D. Roweth, *Phys. Lett.* **B195** (1987) 216–222.
- [32] M. Luscher, *Computational Strategies in Lattice QCD*, in *Modern perspectives in lattice QCD : Quantum field theory and high performance computing. Proceedings, International School, 93rd Session, Les Houches, France, August 3-28, 2009*, pp. 331–399, 2010. [arXiv:1002.4232](https://arxiv.org/abs/1002.4232).
- [33] D. H. Weingarten and D. N. Petcher, *Phys. Lett.* **B99** (1981) 333–338.
- [34] M. Lüscher, *JHEP* **08** (2010) 071, [[arXiv:1006.4518](https://arxiv.org/abs/1006.4518)]. [Erratum : *JHEP* 03,092(2014)].
- [35] S. Borsanyi *et. al.*, *JHEP* **09** (2012) 010, [[arXiv:1203.4469](https://arxiv.org/abs/1203.4469)].

-
- [36] S. Durr *et. al.*, *Science* **322** (2008) 1224–1227, [[arXiv:0906.3599](#)].
- [37] **Budapest-Marseille-Wuppertal** Collaboration, S. Borsanyi *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013), no. 25 252001, [[arXiv:1306.2287](#)].
- [38] S. Borsanyi *et. al.*, *Science* **347** (2015) 1452–1455, [[arXiv:1406.4088](#)].
- [39] H. Akaike, *IEEE Transactions on Automatic Control* **19** (Dec., 1974) 716–723.
- [40] J. C. Ward, *Phys. Rev.* **78** (1950) 182.
- [41] Y. Takahashi, *Nuovo Cim.* **6** (1957) 371.
- [42] S. J. Brodsky and E. De Rafael, *Phys. Rev.* **168** (1968) 1620–1622.
- [43] T. Blum, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 052001, [[hep-lat/0212018](#)].
- [44] C. T. Sachrajda and G. Villadoro, *Phys. Lett.* **B609** (2005) 73–85, [[hep-lat/0411033](#)].
- [45] G. M. de Divitiis, R. Petronzio, and N. Tantalo, *Phys. Lett.* **B595** (2004) 408–413, [[hep-lat/0405002](#)].
- [46] C. Aubin, T. Blum, M. Golterman, and S. Peris, *Phys. Rev.* **D88** (2013), no. 7 074505, [[arXiv:1307.4701](#)].
- [47] E. B. Gregory, Z. Fodor, C. Hoelbling, S. Krieg, L. Lellouch, R. Malak, C. McNeile, and K. Szabo, *PoS LATTICE2013* (2014) 302, [[arXiv:1311.4446](#)].
- [48] A. Francis, B. Jaeger, H. B. Meyer, and H. Wittig, *Phys. Rev.* **D88** (2013) 054502, [[arXiv:1306.2532](#)].
- [49] A. Jüttner and M. Della Morte, *PoS LAT2009* (2009) 143, [[arXiv:0910.3755](#)].
- [50] M. Della Morte and A. Jüttner, *JHEP* **11** (2010) 154, [[arXiv:1009.3783](#)].
- [51] T. Blum, P. A. Boyle, T. Izubuchi, L. Jin, A. Jüttner, C. Lehner, K. Maltman, M. Marinkovic, A. Portelli, and M. Spraggs, [[arXiv:1512.0905](#)].
- [52] M. Golterman, K. Maltman, and S. Peris, *Nucl. Part. Phys. Proc.* **273-275** (2016) 1650–1656, [[arXiv:1410.8405](#)].
- [53] M. Golterman, K. Maltman, and S. Peris, *Phys. Rev.* **D88** (2013), no. 11 114508, [[arXiv:1309.2153](#)].
- [54] E. de Rafael, *Phys. Lett.* **B736** (2014) 522–525, [[arXiv:1406.4671](#)].
- [55] U. Aglietti, G. Martinelli, and C. T. Sachrajda, *Phys. Lett.* **B324** (1994) 85–88, [[hep-lat/9401004](#)].

- [56] **UKQCD** Collaboration, L. Lellouch, J. Nieves, C. T. Sachrajda, N. Stella, H. Wittig, G. Martinelli, and D. G. Richards, *Nucl. Phys.* **B444** (1995) 401–424, [[hep-lat/9410013](#)].
- [57] **HPQCD** Collaboration, B. Chakraborty, C. T. H. Davies, G. C. Donald, R. J. Dowdall, J. Koponen, G. P. Lepage, and T. Teubner, *Phys. Rev.* **D89** (2014), no. 11 114501, [[arXiv:1403.1778](#)].
- [58] C. Lehner and T. Izubuchi, *PoS LATTICE2014* (2015) 164, [[arXiv:1503.0439](#)].
- [59] **Budapest-Marseille-Wuppertal** Collaboration, R. Malak, Z. Fodor, C. Hoelbling, L. Lellouch, A. Sastre, and K. Szabo, *PoS LATTICE2014* (2015) 161, [[arXiv:1502.0217](#)].
- [60] S. Aoki *et. al.*, [arXiv:1607.0029](#).
- [61] C. T. H. Davies, C. McNeile, K. Y. Wong, E. Follana, R. Horgan, K. Hornbostel, G. P. Lepage, J. Shigemitsu, and H. Trottier, *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010) 132003, [[arXiv:0910.3102](#)].
- [62] S. Borsanyi, Z. Fodor, T. Kawanai, S. Krieg, L. Lellouch, R. Malak, K. Miura, K. K. Szabo, C. Torrero, and B. Toth, [arXiv:1612.0236](#).
- [63] C. Aubin, T. Blum, P. Chau, M. Golterman, S. Peris, and C. Tu, *Phys. Rev.* **D93** (Dec., 2015) 054508, [[arXiv:1512.0755](#)].
- [64] M. Benayoun, P. David, L. DelBuono, and F. Jegerlehner, [arXiv:1605.0447](#).
- [65] M. Davier, A. Hoecker, B. Malaescu, and Z. Zhang, *Eur. Phys. J.* **C71** (2011) 1515, [[arXiv:1010.4180](#)]. [Erratum : *Eur. Phys. J.*C72,1874(2012)].
- [66] F. Jegerlehner and R. Szafron, *Eur. Phys. J.* **C71** (2011) 1632, [[arXiv:1101.2872](#)].
- [67] K. Hagiwara, R. Liao, A. D. Martin, D. Nomura, and T. Teubner, [arXiv:1105.3149](#).
- [68] **ETM** Collaboration, F. Burger *et. al.*, *JHEP* **1402** (2014) 099, [[arXiv:1308.4327](#)].
- [69] B. Chakraborty, C. T. H. Davies, P. G. de Oliveira, J. Koponen, and G. P. Lepage, [arXiv:1601.0307](#).
- [70] W. Gerlach, O. Stern, *Zeits. Physik* **8** (1924) 110
- [71] G. E. Uhlenbeck, S. Goudsmit, *Naturwissenschaften* **13** (1925) 953; *Nature* **117** (1926) 264 S. Goudsmit, G. E. Uhlenbeck, *Z. Phys.* **35** (1926) 618.

-
- [72] C. D. Anderson, S. H. Neddermeyer, Phys. Rev. **50** (1936) 263 ;
S. H. Neddermeyer, C. D. Anderson, Phys. Rev. **51** (1937) 884
- [73] V. B. Berestetskii, O. N. Krokhin, A. X. Klebnikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **30** (1956)
788 [Sov. Phys. JETP **3** (1956) 761]; W. S. Cowland, Nucl. Phys. B **8** (1958) 397
- [74] S. Tomonaga, Riken Iho, Progr. Theor. Phys. **1** (1946) 27; J. Schwinger, Phys.
Rev. **74** (1948) 1439; R. P. Feynman, Phys. Rev. **76** (1949) 749; F. Dyson, Phys.
Rev. **75** (1949) 486, *ibid.* 1736
- [75] J. S. Schwinger, Phys. Rev. **73** (1948) 416
- [76] P. Kusch, H. M. Foley, Phys. Rev. **73** (1948) 421; Phys. Rev. **74** (1948) 250
- [77] T. D. Lee, C. N. Yang, Phys. Rev. **104** (1956) 254
- [78] F. J. M. Farley, J. Bailey, R. C. A. Brown, M. Giesch, H. Jöstlein,
S. van der Meer, E. Picasso, M. Tannenbaum, Nuovo Cimento **45** (1966) 281
- [79] J. Bailey et al., Phys. Lett. B **28** (1968) 287
- [80] J. Bailey, W. Bartl, G. von Bochmann, R. C. A. Brown, F. J. M. Farley,
M. Giesch, H. Jöstlein, S. van der Meer, E. Picasso, R. W. Williams, Nuovo
Cimento A **9** (1972) 369
- [81] V. Bargmann, L. Michel, V. A. Telegdi, Phys. Rev. Lett. **2** (1959) 435
- [82] C. Bouchiat, L. Michel, J. Phys. Radium **22** (1961) 121
- [83] F. Scheck, Leptons, Hadrons and Nuclei, North Holland, Amsterdam (1983)
- [84] G. W. Bennett et al. [Muon g-2 Collaboration], Phys. Rev. D **73** (2006) 072003
- [85] D. Hanneke, S. Fogwell, G. Gabrielse, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 120801
- [86] J. Prades, E. de Rafael, A. Vainshtein, arXiv :0901.0306 [hep-ph]
- [87] R. Jackiw, S. Weinberg, Phys. Rev. D **5** (1972) 2396; I. Bars, M. Yoshimura,
Phys. Rev. D **6** (1972) 374; G. Altarelli, N. Cabibbo, L. Maiani, Phys. Lett. B **40**
(1972) 415; W. A. Bardeen, R. Gastmans, B. Lautrup, Nucl. Phys. B **46** (1972)
319; K. Fujikawa, B. W. Lee, A. I. Sanda, Phys. Rev. D **6** (1972) 2923
- [88] T. Aoyama et al., Phys. Rev. Lett. **109**, 111808 (2012).
- [89] P. J. Mohr et al., Rev. Mod. Phys. **84**, 1527 (2012).
- [90] C. Gnendinger et al., Phys. Rev. D **88**, 053005 (2013).
- [91] G.A. Baker, P. Graves-Morris, "Pade Approximants", Addison Wesley, 1981.

Leading-order hadronic vacuum polarization contribution to the anomalous magnetic moment of the muon in lattice QCD with four flavors of quarks at their physical masses.

Abstract. The anomalous magnetic moments of leptons have played an important role in the development of the Standard Model of particle physics. Today, that of the muon is measured very precisely and will be so with even higher precision in an experiment that will begin in 2017. To the extent that the theoretical prediction can be made with comparable uncertainties, a rigorous test of the Standard Model will be possible. Here we study the limiting factor in this prediction, the leading-order hadronic vacuum polarization contribution (HVP-LO). We compute this contribution numerically with a discretized version of the theory of the strong interaction: lattice Quantum Chromodynamics. High-performance computing allows to solve the theory in its highly nonlinear regime, which is the one most relevant here. The simulation algorithms and the methods used to obtain the HVP, as well as the associated statistical and systematic uncertainties, are described. These methods are then applied to simulations performed with the Budapest-Marseille-Wuppertal collaboration. First they are implemented in a dedicated study of finite-volume effects. The most robust methods are then used to compute the HVP with simulations which include $N_f=2+1+1$ flavors of quarks. These are performed directly at the physical values of the u, d, s and c quark masses, with six lattice spacings and in large volumes of 6 fm^3 . They allow us to compute the HVP-LO contribution to the anomalous magnetic moment of the muon with controlled errors of around 3%.

Keywords. Anomalous magnetic moment of the muon. Precision tests of the Standard Model. Lattice quantum chromodynamics. Particle physics. Quantum field theory. High-performance computing.

Contribution à l'ordre dominant de la polarisation hadronique du vide au moment magnétique anomal du muon en QCD sur réseau avec quatre saveurs de quarks à leur masse physique.

Résumé. Les moments magnétiques anomaux des leptons ont joué un rôle important dans le développement du modèle standard de la physique des particules. Aujourd'hui, celui du muon est mesuré très précisément et le sera avec une précision encore plus grande par une expérience qui débutera en 2017. Dans la mesure où la prédiction théorique pourra être faite avec des incertitudes comparables, un test rigoureux du modèle standard sera possible. Nous étudions ici le facteur limitant de cette prédiction, la contribution de la polarisation hadronique du vide à l'ordre dominant (HVP-LO). Nous calculons cette contribution numériquement à l'aide d'une version discrétisée de la théorie de l'interaction forte, la chromodynamique quantique sur réseau. Le calcul haute-performance permet de résoudre la théorie dans son régime hautement non-linéaire qui est le plus pertinent ici. Les algorithmes de simulation et les méthodes utilisées pour obtenir la polarisation hadronique, ainsi que les incertitudes associées, sont décrits. Ces méthodes sont ensuite appliquées à des simulations réalisées avec la collaboration Budapest-Marseille-Wuppertal. Dans un premier temps, elles sont implémentées dans une étude dédiée des effets de volume fini. Les méthodes les plus robustes sont ensuite utilisées pour calculer la polarisation hadronique avec des simulations qui comprennent $N_f=2+1+1$ saveurs de quarks. Celles-ci sont réalisées directement à la valeur physique des masses de quarks u, d, s et c, avec six tailles de maille et dans de gros volumes de 6 fm^3 . Elles nous permettent de calculer la contribution HVP-LO au moment magnétique anomal du muon avec des erreurs contrôlées d'environ 3%.

Mots-clés. Moment magnétique anomal du muon. Tests de précision du modèle standard. Chromodynamique quantique sur réseau. Physique des particules. Théorie quantique des champs. Calcul haute performance.