HAL
open science

Cubes partiels : complétion, compression, plongement

Manon Philibert

To cite this version:

Manon Philibert. Cubes partiels : complétion, compression, plongement. Mathématique discrète [cs.DM]. Aix-Marseille Universite, 2021. Français. NNT : . tel-03581541

HAL Id: tel-03581541

https://hal.science/tel-03581541v1

Submitted on 19 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Aix*Marseille université
Socialement engagée

NNT/NL : 2021AIXM0403/017ED184

THÈSE DE DOCTORAT

Soutenue à Aix-Marseille Université
le 3 décembre 2021 par

Manon PHILIBERT

Cubes partiels : complétion, compression, plongement

Discipline
Informatique

École doctorale
ED 184 MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Laboratoire/Partenaires de recherche
Laboratoire d'Informatique et Systèmes

Composition du jury

Emeric GIOAN LIRMM/CNRS	Rapporteur
Frédéric MEUNIER ENPC	Rapporteur
Marthe BONAMY LaBRI/CNRS	Examinatrice
Jérémie CHALOPIN LIS/CNRS	Examinateur
Nabil MUSTAFA LIPN	Examinateur
Victor CHEPOI LIS/AMU	Directeur de thèse
Kolja KNAUER UB et LIS/AMU	Directeur de thèse

LIS LABORATOIRE D'INFORMATIQUE & SYSTÈMES

Je soussignée, Manon Philibert, déclare par la présente que le travail présenté dans ce manuscrit est mon propre travail, réalisé sous la direction scientifique de Victor Chepoi et Kolja Knauer, dans le respect des principes d'honnêteté, d'intégrité et de responsabilité inhérents à la mission de recherche. Les travaux de recherche et la rédaction de ce manuscrit ont été réalisés dans le respect à la fois de la charte nationale de déontologie des métiers de la recherche et de la charte d'Aix-Marseille Université relative à la lutte contre le plagiat.

Ce travail n'a pas été précédemment soumis en France ou à l'étranger dans une version identique ou similaire à un organisme examinateur.

Fait à Marseille le 21/09/2021

Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International.

Résumé

Les sous-graphes isométriques d'hypercubes (dit cubes partiels) constituent une classe centrale de la théorie métrique des graphes. Ils englobent des familles de graphes importantes (arbres, graphes médians, graphes de topes de complexes de matroïdes orientés, etc.), provenant de différents domaines de recherche, tels que la géométrie discrète, la combinatoire ou la théorie géométrique des groupes. Nous étudions tout d'abord la structure des cubes partiels de VC-dimension 2. Nous montrons que ces graphes peuvent être obtenus par amalgamations à partir de cycles et de subdivisions entières des graphes complets. Cette décomposition nous permet d'obtenir diverses caractérisations. En particulier, tout cube partiel de VC-dimension 2 peut être complété en cube partiel ample de VC-dimension 2. Nous montrons ensuite que les graphes de topes des matroïdes orientés et des complexes de matroïdes orientés uniformes peuvent aussi être complétés en cubes partiels amples de même VC-dimension. En utilisant un résultat de Moran et Warmuth, nous établissons que ces classes vérifient la conjecture de Floyd et Warmuth, l'une des plus vielles conjectures en théorie de l'apprentissage. C'est-à-dire qu'elles admettent des schémas de compression (étiquetés non propres) de taille leur VC-dimension. Par la suite, nous décrivons un schéma de compression étiqueté propre de taille d pour les complexes de matroïdes orientés de VC-dimension d, généralisant ainsi le résultat de Moran et Warmuth pour les amples. Enfin, nous fournissons une caractérisation par pc-mineurs exclus et par sous-graphes isométriques interdits des cubes partiels plongeables isométriquement dans la grille $\mathbb{Z}^2$ et dans le cylindre $P_n \square C_{2k}$ pour un certain n et $k > 4$.

Mots clés : Cube partiel, VC-dimension, Pc-mineur, Schéma de compression, Famille ample, Plongement isométrique, Complexe de matroïdes orientés

Abstract

Partial cubes (aka isometric subgraphs of hypercubes) are a fundamental class of metric graph theory. They comprise many important graph classes (trees, median graphs, tope graphs of complexes of oriented matroids, etc.), arising from different areas of research such as discrete geometry, combinatorics or geometric group theory. First, we investigate the structure of partial cubes of VC-dimension 2. We show that those graphs can be obtained via amalgams from even cycles and full subdivisions of complete graphs. This decomposition allows us to obtain various characterizations. In particular, any partial cube can be completed to an ample partial cube of VC-dimension 2. Then, we show that the tope graphs of oriented matroids and complexes of uniform oriented matroids can also be completed to ample partial cubes of the same VC-dimension. Using a result of Moran and Warmuth, we establish that those classes satisfy the conjecture of Floyd and Warmuth, one of the oldest open problems in computational machine learning. Particularly, they admit (improper labeled) compression schemes of size their VC-dimension. Next, we describe a proper labeled compression scheme of size d for complexes of oriented matroids of VC-dimension d, generalizing the result of Moran and Warmuth for ample sets. Finally, we give a characterization via excluded pc-minors and via forbidden isometric subgraphs of partial cubes isometrically embedded into the grid $\mathbb{Z}^2$ and the cylinder $P_n \square C_{2k}$ for some n and $k > 4$.

Keywords: Partial cube, VC-dimension, Pc-minor, Compression scheme, Ample sets, Isometric embedding, Complexe of oriented matroids

Remerciements

Je suis intimement convaincue que tout ce que j'ai accompli jusqu'ici n'aurait pas pu se réaliser sans le soutien de nombreuses personnes. Je suis particulièrement heureuse d'être arrivée au bout de cette thèse qui m'a demandé beaucoup de temps et d'énergie. Le travail que j'ai effectué durant ces trois dernières années m'a déjà beaucoup apporté et m'apportera encore dans la suite.

Je tiens tout d'abord à remercier mes deux encadrants de thèse, Victor CHEPOI et Kolja KNAUER, d'avoir accepté d'encadrer ma thèse. Ils ont su me guider et me faire profiter de leur expérience tout au long de ma thèse. Je vous remercie pour vos nombreux conseils et points de vues complémentaires toujours appréciables. Encore merci à Victor de m'avoir accueilli au sein de votre équipe ACRO à Marseille.

Je remercie aussi mes deux rapporteurs Emeric GIOAN et Frédéric MEUNIER pour avoir accepté de relire mon manuscrit et pour leurs rapports précis et détaillés. Je tiens à remercier Marthe BONAMY, Jérémie CHALOPIN et Nabil MUSTAFA pour l'intérêt porté à mes recherches en acceptant de faire parie de mon jury.

Je souhaite aussi remercier Jonathan CHAPPELON, Sylvain DAUDE, Mickaël MONTASSIER, Jorge Luis RAMIREZ ALFONSIN et Nicolas TROTIGNON qui ont su attiser ma curiosité et qui m'ont guidé dans mon parcours d'étudiante. Je souhaite aussi remercier chaleureusement Daniel HIRSCHKOFF, responsable de la première année du Master Informatique à l'ENS de Lyon, qui m'a fait confiance et qui m'a conseillé durant mes deux années de Master. Sans leurs bienveillances et leurs encouragements je ne serai certainement pas là aujourd'hui.

Je remercie les permanents du LIS avec qui j'ai pu discuter de recherche, d'enseignement et bien d'autres choses : Alexis, Arnaud, Basile, Benjamin, Carlos, Frédéric, Jean-Marc, Kévin, Marie-Hélène, Nadia, Sylvain, Yann, ainsi que l'ensemble du personnel administratif du LIS qui m'a toujours aidé avec sourire et bonne humeur dans toutes mes démarches administratives. Je tiens aussi à remercier l'ensemble des non-permanents du LIS : Amélia, Cédric, Damien, Florian, Franck, François, Jeremy, Laurine, Manon, Nathanaël, Pacôme, Raphaël, Théodore, avec qui j'ai passé d'excellents moments.

Je tiens aussi à remercier mes amis et mes proches qui m'ont soutenu depuis le début et davantage lors de ma rédaction de thèse. Plus particulièrement, je remercie Hubert, Janine, Sylvie, Thierry, et Camille et Florence.

Je tiens à remercier toute ma famille. Je commencerai par remercier Maman et Papa qui ont toujours été là pour moi. C'est auprès de vous que j'ai appris à surmonter mes peurs, à me dépasser et à avancer. Je souhaite aussi remercier ma sœur Pauline avec qui j'ai pu partager

de nombreux moments complices et qui a suivi de loin l'avancée de ma thèse. Une grande pensée aussi à mes deux petites sœurs Agathe et Aglaë qui ont su égayer mes week-end de part leur bonne humeur et leur joie.

Enfin, je souhaite remercier du plus profond de mon cœur Sébastien qui contribue chaque jour à mon bonheur. Merci pour ton soutien infaillible ! Merci aussi pour tes bons petits plats et tes randonnées qui m'ont permis de me ressourcer.

Table des matières

Résumé 3

Abstract 4

Remerciements 5

Table des matières 7

Table des figures 10

Introduction 12

1 Rappels de théorie des graphes et de combinatoire 18
- 1.1 Notions de base de théorie des graphes . . . 18
  - 1.1.1 Graphes usuels . . . 19
  - 1.1.2 Opérations sur les graphes . . . 20
  - 1.1.3 Notions de théorie métrique des graphes . . . 22
- 1.2 Notions d'apprentissage automatique . . . 24
  - 1.2.1 Classes de concepts et graphe de 1-inclusion . . . 25
  - 1.2.2 Modèle d'apprentissage PAC et VC-dimension . . . 26
  - 1.2.3 Lemme de Sauer et lemme du Sandwich . . . 27
  - 1.2.4 Schéma de compression . . . 29
- 1.3 Notions de théorie des complexes de matroïdes orientés . . . 30
  - 1.3.1 Matroïdes orientés . . . 31
  - 1.3.2 Complexes de matroïdes orientés . . . 33
  - 1.3.3 Systèmes amples . . . 37

2 Cubes partiels : rappels 38
- 2.1 La relation d'équivalence Θ . . . 38
  - 2.1.1 PC-mineurs . . . 41
  - 2.1.2 Expansions isométriques . . . 45
- 2.2 Graphes médians . . . 46
- 2.3 Cubes partiels amples . . . 48
- 2.4 Graphes de topes des OMs et des COMs . . . 50
- 2.5 État de l'art . . . 52

3 VC-dimension des cubes partiels 54
- 3.1 Résultats . . . 54

3.2 Pulvérisation et fibres dans les cubes partiels . . . 55
3.3 Cubes partiels de VC-dimension bornée . . . 56
3.4 VC-dimension et rang dans les OMs et les COMs . . . 60

4 Cubes partiels bidimensionnels **64**
4.1 Résultats . . . 65
4.2 Hyperplans . . . 66
4.3 Enveloppes portées des cycles de longueur 6 . . . 67
4.3.1 Subdivision entière de K_n . . . 67
4.3.2 Les subdivisions entières de K_n sont portées . . . 70
4.3.3 Enveloppes portées des cycles de longueur 6 . . . 73
4.4 Enveloppes convexes et portées des cycles isométriques longs . . . 74
4.4.1 Enveloppes convexes des cycles isométriques longs . . . 75
4.4.2 Enveloppes portées des cycles isométriques longs . . . 79
4.5 Complétion en cubes partiels amples . . . 82
4.5.1 Complétion canonique en graphes de topes de COMs bidimensionnels. 82
4.5.2 Complétion en cubes partiels amples bidimensionnels . . . 84
4.6 Cellules et carrières . . . 86

5 Complétions amples des OMs et des CUOMs **90**
5.1 Résultats . . . 90
5.2 Complétions amples des OMs . . . 91
5.2.1 Caractérisation des UOMs . . . 92
5.2.2 Complétions des OMs vers UOMs . . . 94
5.2.3 Complétions amples des UOMs . . . 94
5.3 Complétions amples des CUOMs . . . 95
5.3.1 Caractérisation des CUOMs . . . 96
5.3.2 Extensions portées simples d'un cube partiel . . . 97
5.3.3 Projections mutuelles entre les faces des COMs . . . 99
5.3.4 Preuve du théorème 12 . . . 102

6 Schémas de compression étiquetés pour les COMs **104**
6.1 Résultat . . . 104
6.2 État de l'art . . . 105
6.3 Max-pulvérisation . . . 106
6.4 Échantillons réalisables et pleins vus comme sous-graphes convexes . . . 107
6.5 Lemme de distinction . . . 110
6.6 Lemme de localisation . . . 112
6.7 Preuve du théorème 14 . . . 113
6.8 Exemple . . . 115

7 Grilles et cylindres partiels **117**
7.1 Résultats . . . 117
7.2 Grille partielle . . . 119
7.3 Preuve du théorème 15 . . . 121
7.4 Cylindres . . . 121

7.5 Propriétés des cylindres partiels 123
7.6 Cubes partiels de $\mathscr{F}^*(\mathscr{J})$ avec un cycle convexe long 124
7.6.1 Les candidats sont longs 124
7.6.2 Les candidats sont dans l'arène 126
7.6.3 Structure des cubes partiels de $\mathscr{F}^*(\mathscr{J})$ avec un cycle convexe long 130
7.6.4 Plongement 136
7.7 Preuve du théorème 16 137
7.8 Vers une preuve pour les cylindres fins 138

Conclusion **140**

Bibliographie **146**

Index **152**

ANNEXES **156**
A Étude des cas 156

Table des figures

1 Arrangement d'hyperplans de $\mathbb{R}^2$ et son graphe de région 12

1.1 Graphes usuels 20
1.2 Expansion d'un graphe 21
1.3 Produit cartésien, G_i-copie, et fibre 21
1.4 Sous-graphe isométrique, convexe, et porté 23
1.5 Cube partiel 24
1.6 Jeu du rectangle 26
1.7 VC-dimension d'une famille d'ensembles 27
1.8 VC-dimension du jeu du rectangle 28
1.9 Arrangement d'hyperplans central de $\mathbb{R}^m$ et ses vecteurs signés 32
1.10 Arrangement d'hyperplans restreint à un convexe de $\mathbb{R}^m$ et ses vecteurs signés 34
1.11 Schéma des sous-graphes d'un COM 36

2.1 Demi-espaces et frontières dans un cube partiel 39
2.2 Hyperplans d'un cube partiel 40
2.3 Deux pc-mineurs d'un cube partiel 42
2.4 Contraction ne préservant pas la convexité d'un sous-graphe 44
2.5 Expansion isométrique augmentant la VC-dimension 46
2.6 Graphe de topes d'un COM réalisable 50
2.7 Quelques pc-mineurs exclus de $\mathscr{Q}^-$ 51

3.1 VC-dimension du dodécaèdre rhombique 57
3.2 Sous-graphe non-isométrique d'hypercubes ne satisfaisant pas la proposition 12 59

4.1 Le cube partiel bidimensionnel M 64
4.2 Un arbre isométrique virtuel 67
4.3 Plongement standard de SK_n dans Q_n 68
4.4 Preuve du lemme 44 71
4.5 Preuve de la proposition 17 74
4.6 Disque, arrangement de pseudo-lignes, et graphe de régions 75
4.7 Preuve du lemme 48 77
4.8 Le graphe de topes d'un OM contenant Q_3^- comme demi-espace 79
4.9 Preuve de la proposition 19 81
4.10 Complétion cyclique sur un cycle porté 84
4.11 Une complétion ample de M 86

5.1 Le graphe de topes d'un CUOM de VC-dimension 3 90

5.2 Complétion ample d'un prisme 92
5.3 Le graphe de topes d'un CUOM et sa complétion ample 96
5.4 Schéma d'une galerie géodésique 100
5.5 Une complétion ample de l'exemple de la figure 5.1 103

6.1 Treillis des échantillons réalisables d'un COM et intervalles de ses convexes . . 108
6.2 Illustration de l'exemple 3 109
6.3 Exemple du schéma de compression d'un COM 115

7.1 Ensemble des pc-mineurs minimaux de $\mathbb{Z}^2$ 118
7.2 L'ensemble $\mathscr{J}$ 119
7.3 Cycle de type 1 et de type 2 122
7.4 Preuve du lemme 69 123
7.5 Arène, échelle, et échelle partielle 126
7.6 preuve du lemme 74 127
7.7 Preuve du lemme 75 128
7.8 Partition de C en chemins par les fibres de C'. 129
7.9 Un colisée de base P de longueur 7. 130
7.10 Preuve du lemme 77 132
7.11 Preuve de l'affirmation 6 133
7.12 Preuve du lemme 78 135
7.13 L'ensemble $\mathscr{J}^+$ 139
8.1 Pour la conjecture 3 141
8.2 Cube partiel vers cube partiel ample augmentant la VC-dimension 141
8.3 Sous-graphe induit vers cube partiel augmentant la VC-dimension 142
8.4 Famille quelconque vers connexe augmentant la VC-dimension 143
8.5 Deux plongements isométriques de la roue bipartie de taille 6 dans $\mathbb{Z}^3$. 144
8.6 Un cube partiel $G \in \mathscr{F}(K_{1,k})$ tel que G est l'enveloppe convexe de $k+1$ sommets 145

Introduction

Les familles d'ensembles sont des objets fondamentaux des mathématiques discrètes, et plus précisément de la combinatoire. Elles sont aussi très étudiées dans d'autres domaines tels qu'en algorithmique, géométrie discrète, optimisation combinatoire, théorie des graphes, ou encore en apprentissage. Dans ce dernier domaine, ces familles sont appelées *classes de concepts*. La notion de VC-dimension, introduite par VAPNIK et CHERVONENKIS [93] en apprentissage, peut être vue comme la dimension combinatoire d'une famille d'ensembles. Il est parfois utile de voir une famille d'ensembles comme un sous-graphe d'hypercube, appelé *graphe de 1-inclusion* [49, 50]. Une classe fondamentale de ces graphes est constituée des graphes de 1-inclusion préservant les distances de l'hypercube. Ces derniers et leurs sous-classes jouent un rôle important dans la théorie métrique des graphes dans laquelle ils sont appelés *cubes partiels*. Dans cette thèse, nous étudions des classes de cubes partiels de VC-dimension bornée, notamment nous nous intéressons à des questions de mineurs, de complétion et de compression.

Bien que la classe des cubes partiels puisse sembler plutôt restreinte, ils contiennent beaucoup de classes de graphes issues de différents domaines de recherche. Pour donner un exemple intuitif, considérons un arrangement d'hyperplans dans $\mathbb{R}^2$ et son graphe de régions comme illustré dans la figure 1.

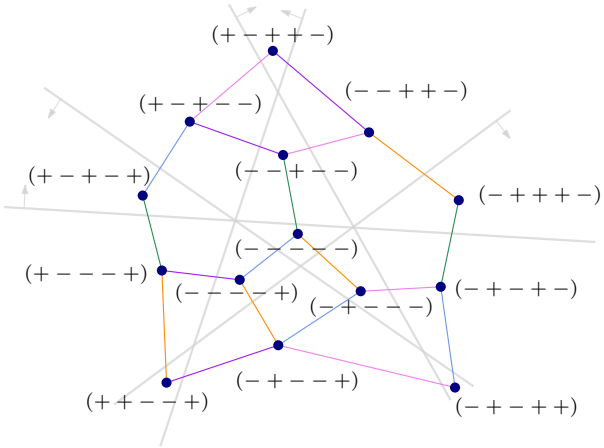


FIGURE 1. – Un arrangement d'hyperplans de $\mathbb{R}^2$ et son graphe de régions.

Alors, chaque région (ou sommet de ce graphe) peut être encodée par un vecteur binaire que nous représentons par un $\{-,+\}$-vecteur. Le vecteur associé à une région correspond alors à sa position par rapport aux hyperplans, chaque hyperplan ayant un côté positif ("+") et un côté négatif ("-"). La distance entre deux sommets est le nombre d'hyperplans séparant

les deux régions. Celle-ci coïncide avec la distance de Hamming entre les $\{-,+\}$-vecteurs correspondant à ces régions. Cette observation est vraie quelle que soit la dimension et est due à DELIGNE [33, Proposition 1.3] dans un papier de 1972.

En toute généralité, les cubes partiels ont été caractérisés à la même période (1973) par DJOKOVIĆ [36] via la convexité de leurs demi-espaces. En particulier, DJOKOVIĆ définit des classes de parallélisme sur les arêtes, dites Θ-*classes*. Deux arêtes appartiennent à la même Θ-classe si leurs extrémités différent sur la même coordonnée. Sachant que les cubes partiels sont des sous-graphes isométriques d'hypercubes, les arêtes d'une classe de parallélisme sont exactement les arêtes correspondant à une dimension de l'hypercube. Sur la figure 1, chaque arête peut être associée à un hyperplan, et nous représentons les Θ-classes du cube partiel par des couleurs différentes. Un demi-espace de $\mathbb{R}^2$ correspond à un des deux côtés d'un hyperplan donné. Le sous-graphe induit par les sommets d'un même côté d'un hyperplan, *i.e.*, qui sont étiquetés par la même valeur sur la coordonnée associée à cet hyperplan, est appelé un *demi-espace* du cube partiel. De plus, pour un hyperplan fixé, nous pouvons considérer le sous-graphe induit par les extrémités de ses arêtes restreint à un des deux demi-espaces de cet hyperplan, et le sous-graphe contenant l'ensemble des cellules qu'il traverse. De tels sous-graphes sont respectivement appelés *hyperplan* et *carrière*. Ces notions de demi-espace, hyperplan, et carrière sont naturellement généralisables à tout cube partiel.

Une caractérisation récursive des cubes partiels via les expansions isométriques a été donnée par CHEPOI [25] et un algorithme de reconnaissance des cubes partiels en temps $O(n^2)$ a été proposé par EPPSTEIN [41]. Les sous-classes des cubes partiels ont, par la suite, été étudiées par de nombreux auteurs et sont présentées de façon approfondie dans l'article de synthèse [9] et dans les livres [35, 47, 75]. Une partie des caractérisations des sous-classes des cubes partiels utilise la notion de pc-mineur, une notion de mineurs adaptée aux cubes partiels. Ceux-ci peuvent être obtenus en contractant les arêtes d'une même Θ-classe ou en considérant un demi-espace. Cet outil fondamental a été introduit et étudié par CHEPOI, KNAUER et MARC [28], mais avait déjà été utilisé de façon implicite dans [24, 26]. Les cubes partiels contiennent de nombreuses classes de graphes importantes. Par exemple, les graphes de topes des matroïdes orientés (une généralisation majeure des graphes de régions des arrangements d'hyperplans) sont des cubes partiels. D'autres classes importantes (avec des application en théorie géométrique des groupes, en apprentissage et en combinatoire) sont les graphes médians et les graphes amples. Finalement, une classe plus générale de cubes partiels est celle des graphes de topes des complexes de matroïdes orientés, une généralisation commune de ces trois classes. Dans cette thèse, nous nous intéressons particulièrement à ces classes de cubes partiels.

Les *cubes partiels amples* correspondent aux graphes de 1-inclusion des familles d'ensembles amples [10, 64]. Une inégalité importante en combinatoire, appelée *lemme du Sandwich*, établit que la taille d'une famille d'ensembles est comprise entre le nombre d'ensembles pulvérisés et le nombre d'ensembles strictement pulvérisés par cette famille. Les familles amples correspondent alors aux familles atteignant la borne supérieure dans le lemme du Sandwich [10, 19, 64, 94]. Cependant, les familles amples ont été introduites dans un contexte géométrique par LAWRENCE [64] lors de ces travaux sur les ensembles convexes intersectant certains orthants de $\mathbb{R}^d$ et évitant les autres. LAWRENCE les appelle

alors *"lopsided"*. Les familles amples ont par la suite été redécouvertes indépendamment par d'autres auteurs où elles ont reçu différents noms. En particulier, BANDELT et al. [10] les ont appelées *"amples"* et ont remarqué l'équivalence avec les familles *"lopsided"*. Disposant de propriétés structurelles très fortes, les cubes partiels amples et leur complexes cubiques ont de nombreuses caractérisations combinatoires, métriques, et géométriques. En particulier, les cubes partiels amples capturent divers objets tels que les *familles maximums* et les *antimatroïdes* [40]. Ils contiennent aussi la classe des *graphes médians* qui est sans doute la classe la plus étudiée en théorie métrique des graphes. Généralisation des arbres et des hypercubes, les graphes médians apparaissent notamment en théorie géométrique des groupes (en tant que 1-squelettes des complexes cubiques CAT(0) [27]) ou en théorie de la concurrence (en tant que domaines des structures d'événements [14]), et possèdent de nombreuses caractérisations [9, 57].

Les familles d'ensembles sont aussi très présentes dans le domaine de la théorie des matroïdes orientés. Ces derniers sont présentés de manière détaillée dans le livre [17]. Les matroïdes orientés ont été introduits par BLAND et LAS VERGNAS [18] et FOLKMAN et LAWRENCE [43] dans les années 1970 pour ajouter la notion d'orientation à l'abstraction des matroïdes. Les matroïdes orientés possèdent une notion de dualité forte et sont caractérisés par de nombreuses axiomatiques. Notamment, un matroïde orienté peut être défini par un ensemble de cocircuits, ou de covecteurs vérifiant plusieurs axiomes. Il peut aussi être déterminé par ses covecteurs maximaux, appelés *topes*, ou par le graphe de 1-inclusion de ses topes, appelé *graphe de topes* [13]. Une sous-classe très importante des matroïdes orientés est celle correspondant aux $\{-,0,+\}$-vecteurs des régions des arrangements d'hyperplans centraux. Les topes et le graphe de topes du matroïde orienté associés à un tel arrangement correspondent respectivement aux régions encodée par un $\{-,+\}$-vecteur, et au graphe de ces régions. Initialement introduit pour étudier ces arrangements, il se trouve que les différentes axiomatiques des matroïdes orientés englobent plus d'objets puisque FOLKMAN et LAWRENCE [43] ont montré une correspondance exacte entre les matroïdes orientés et les arrangements de pseudo-sphères. Les graphes de topes de matroïdes orientés forment une sous-classe riche des cubes partiels [17]. Encore très étudiés de nos jours, ils ont récemment été généralisés par BANDELT, CHEPOI et KNAUER [13]. En effet, les complexes de matroïdes orientés ont été introduits et étudiés par ces auteurs comme une généralisation des matroïdes orientés et des familles d'ensembles amples. Notamment, ils sont définis par une axiomatique très proche de celle des matroïdes orientés. Plus précisément, leur différence réside dans l'assouplissement d'un axiome de symétrie de la définition des matroïdes orientés. Les graphes de topes des complexes de matroïdes orientés peuvent être vus comme des collages particuliers des graphes de topes des matroïdes orientés. De plus, les graphes de topes des complexes de matroïdes orientés sont des cubes partiels [13, 62].

Les familles d'ensembles (en tant que classes des concepts) jouent aussi un rôle très important dans le modèle de VALIANT [91] de l'apprentissage PAC. Le résultat principal de cette théorie est le théorème de VAPNIK et CHERVONENKIS [93] datant de 1972 et liant la complexité de l'apprentissage à la VC-dimension de la classe de concepts. Un autre lien entre l'apprentissage PAC et la VC-dimension est dû à la notion de schéma de compression, introduite par LITTLESTONE et WARMUTH [65] en 1986. De manière informelle, certains problèmes d'ap-

prentissage nécessitent des échantillons de concepts pour apprendre. Lors de la compression, chaque échantillon est compressé en un bien plus petit sous-ensemble. Lors de la reconstruction, ce sous-ensemble permet néanmoins de retrouver un sous-ensemble compatible avec l'échantillon entier (dans les schémas de compression dits *propres*, le sous-ensemble doit être un concept). L'une des plus ancienne conjecture en théorie de l'apprentissage, posée par FLOYD et WARMUTH [42], consiste à déterminer si toute classe de concepts admet un schéma de compression où chaque échantillon est compressé en un sous-ensemble de taille linéaire en sa VC-dimension. MORAN et YEHUDAYOFF [69] ont montré que toute famille d'ensembles de VC-dimension d admet un schéma de compression étiqueté de taille $2^{O(d)}$. De nombreux auteurs se sont penchés sur l'étude des schémas de compression montrant de meilleures bornes dans le cas où nous nous restreignons à certaines familles d'ensembles.

Aussi surprenant que cela puisse paraître, les classes des cubes partiels s'avèrent très intéressantes dans ce contexte et font l'objet de divers travaux. En particulier, MORAN et WARMUTH [68] ont établi que toute famille ample admet un schéma de compression de taille sa VC-dimension. RUBINSTEIN, RUBINSTEIN et BARTLETT [86] ont suggéré une approche pour obtenir des schémas de compression. Celle-ci consiste à étendre des classes de concepts vers des classes de concepts admettant des schémas de compression, sans augmenter la VC-dimension ou en s'autorisant une augmentation linéaire en la VC-dimension. En effet, en utilisant le résultat de MORAN et WARMUTH [68], la conjecture serait résolue si toute famille d'ensembles de VC-dimension d pouvait être étendue à une famille ample de VC-dimension $O(d)$.

Résultats

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la structure et à la caractérisation des classes de cubes partiels admettant un faible nombre de pc-mineurs exclus, aux problèmes de complétions des cubes partiels en cubes partiels amples sans augmenter la VC-dimension, et aux schémas de compression.

Dans le chapitre 3, nous présentons quelques résultats sur la VC-dimension des cubes partiels, utilisés par la suite dans les chapitres 4, 5, et 6. Nous présentons des caractérisations des cubes partiels de VC-dimension donnée par pc-mineurs, par hyperplans, et par expansion isométrique. Nous nous intéressons aussi tout particulièrement à la VC-dimension des graphes de topes des complexes de matroïdes orientés qui à un lien étroit avec la notion de rang de leurs cellules (qui sont toutes des matroïdes orientés).

Les résultats présentés dans le chapitre 4 fournissent des caractérisations de la classe des cubes partiels ne contenant pas le cube 3-dimensionnel Q_3 comme pc-mineur. Cette classe correspond exactement aux cubes partiels de VC-dimension ≤ 2. Dans le chapitre 4, nous montrons que les cubes partiels de VC-dimension ≤ 2 possèdent une structure cellulaire particulière. Celle-ci nous permet ensuite d'obtenir plusieurs caractérisations plus fines par rapport à des sous-graphes particuliers (hyperplans et carrières) et par opération (amalgames et expansions). De plus, nous montrons que ces graphes peuvent être complétés

en cube partiel ample de même VC-dimension. Nous en déduisons qu'ils admettent des schémas de compression de taille leur VC-dimension. L'ensemble des caractérisations des cubes partiels de VC-dimension ≤ 2 sont données dans le théorème 8. Récemment, CHEPOI, KNAUER et MARC [28] ont caractérisé de façon détaillée les cubes partiels n'ayant pas Q_3^- (cube 3-dimensionnel moins un sommet) comme pc-mineur. Bien que la classe qui nous intéresse soit définie par un pc-mineur très proche de Q_3^-, les deux classes sont très différentes.

Dans le chapitre 5, nous nous intéressons à la complétion des cubes partiels en cubes partiels amples. Nous montrons que les graphes de topes des matroïdes orientés et des complexes de matroïdes orientés uniformes peuvent être complétés en cubes partiels amples de même VC-dimension. Du point de vu géométrique, ce résultat peut être vu comme la cubulation du complexe cellulaire associé à un matroïde orienté ou à un complexe de matroïdes orientés uniformes (pour les zonotopes avec des faces cubiques ce type de cubulations à été obtenu par SHEPHARD [90]). Associées au résultat de MORAN et WARMUTH [68], nos résultats de complétion permettent aussi d'obtenir des schémas de compression de taille leur VC-dimension. Comme les cubes partiels de VC-dimension ≤ 2, les graphes de topes des matroïdes orientés et des complexes de matroïdes orientés uniformes vérifient la conjecture de FLOYD et WARMUTH [42]. Cependant, la complétion en cubes partiels amples des graphes de topes des complexes de matroïdes orientés est toujours ouverte.

Dans le chapitre 6, nous montrons que les classes des concepts issues des topes des complexes de matroïdes orientés vérifient la forme forte de la conjecture de compression de FLOYD et WARMUTH [42]. Plus précisément, pour ces classes de concepts, nous décrivons un schéma de compression étiqueté propre de taille leur VC-dimension. Ce schéma de compression généralise le schéma de compression pour les classes amples de MORAN et WARMUTH [68] (mais il est techniquement beaucoup plus complexe).

Dans le chapitre 7, nous donnons les ensembles des pc-mineurs minimaux exclus et des sous-graphe isométriques minimaux interdits pour les cubes partiels plongeables isométriquement dans la grille $\mathbb{Z}^2$ et dans les cylindres larges (produits d'un cycle de longueur paire > 4 par un chemin). Ces caractérisations font suite aux travaux de BANDELT et CHEPOI [7, 8] où ils démontrent un résultat de compacité pour les espaces métriques plongeables dans $\mathbb{R}^2$, et dans $\mathbb{Z}^2$, munis de la métrique ℓ_1.

Structure du document

Cette thèse est composée de sept chapitres. Le premier chapitre permet de présenter les notions de bases et les résultats connus de la théorie des graphes, de l'apprentissage et de la théorie des matroïdes orientés. Le deuxième chapitre est dédié aux cubes partiels et nous présentons de façon détailler les sous-classes des cubes partiels que nous avons évoqué dans l'introduction. Dans le troisième chapitre, nous donnons des caractérisations des cubes partiels de VC-dimension bornée et mettons en lien la notion de VC-dimension et de rang dans les graphes de topes des complexes de matroïdes orientés et ses sous-classes. Le quatrième chapitre se concentre aux cubes partiels de VC-dimension au plus 2. Dans

le cinquième chapitre, nous nous intéressons aux complétions des graphes de topes des matroïdes orientés et des complexes de matroïdes orientés uniformes en cubes partiels amples. Dans le sixième chapitre, nous établissons un schéma de compression étiqueté propre pour les complexes de matroïdes orientés. Le septième chapitre se focalise sur les caractérisations des cubes partiels plongeables isométriquement dans la grille $\mathbb{Z}^2$ et dans les cylindres larges par sous-graphes isométriques minimaux interdits et par pc-mineurs minimaux exclus. Enfin, nous concluons cette thèse par des perspectives.

1. Rappels de théorie des graphes et de combinatoire

Sommaire

1.1 Notions de base de théorie des graphes . . . 18
1.1.1 Graphes usuels . . . 19
1.1.2 Opérations sur les graphes . . . 20
1.1.3 Notions de théorie métrique des graphes . . . 22
1.2 Notions d'apprentissage automatique . . . 24
1.2.1 Classes de concepts et graphe de 1-inclusion . . . 25
1.2.2 Modèle d'apprentissage PAC et VC-dimension . . . 26
1.2.3 Lemme de Sauer et lemme du Sandwich . . . 27
1.2.4 Schéma de compression . . . 29
1.3 Notions de théorie des complexes de matroïdes orientés . . . 30
1.3.1 Matroïdes orientés . . . 31
1.3.2 Complexes de matroïdes orientés . . . 33
1.3.3 Systèmes amples . . . 37

Dans ce chapitre, nous présentons les notions de base et les résultats fondamentaux des trois domaines de recherche liés à nos travaux. Dans la section 1.1, nous commençons par rappeler les notions basiques de la théorie des graphes. Ensuite, dans la section 1.2, nous donnons quelques notions d'apprentissage automatique. Enfin, nous introduisons les matroïdes orientés et les complexes de matroïdes orientés dans la section 1.3.

1.1. Notions de base de théorie des graphes

Un *graphe (simple)* $G = (V, E)$ est constitué de deux ensembles : un ensemble de *sommets* V et un ensemble d'*arêtes* $E \subseteq V \times V$. Le graphe G est dit *non-orienté* si pour tout $u, v \in V, (u, v) \in E \Leftrightarrow (v, u) \in E$. Lorsque pour tout $u \in V$, $(u, u) \notin E$, le graphe G est dit *sans boucle*. Si le nombre de sommets est fini, alors G est dit *fini*, sinon G est dit *infini*. Pour un graphe G donné, son ensemble de sommets est noté $V(G)$ et son ensemble d'arêtes est noté $E(G)$. Dans cette thèse nous nous intéressons principalement à des graphes simples finis, non orientés et sans boucles. Une arête $e = (u, v)$ est généralement notée uv (ou de manière équivalente dans le cas non-orienté vu). Les deux sommets u et v sont appelés les *extrémités* de cette arête. Ces deux extrémités sont dites *incidentes* à e.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Deux sommets u et v sont dits *adjacents* (ou *voisins*) si $(u, v) \in E$. Le *degré* d'un sommet u de G est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet dans G. Autrement dit, le degré de u est exactement le nombre de voisins de u dans G. Deux arêtes distinctes e et f de G sont dites *adjacentes* si elles ont une extrémité en commun.

Un graphe $H = (W, F)$ est un *sous-graphe* de G si $W \subseteq V$ et $F \subseteq E \cap (W \times W)$. Le graphe H est un *sous-graphe induit* de G si pour toute paire u, v de sommets de H, u est adjacent à v dans H si et seulement si u est adjacent à v dans G. Dans ce cas, nous notons $H \subseteq G$ et disons que H est *contenu* dans G. Si $W \subsetneq V$ ou $F \subsetneq E$, alors H est un *sous-graphe propre* de G.

Un *isomorphisme de graphes* est une bijection entre les sommets de deux graphes qui préserve les arêtes. Plus précisément, un isomorphisme entre les graphes $G = (V, E)$ et $H = (W, F)$ est une bijection $\phi : V \to W$ telle que $uv \in E$ si et seulement si $\phi(u)\phi(v) \in F$. Si une telle bijection existe, G et H sont dit *isomorphes* et nous notons $G \simeq H$.

1.1.1. Graphes usuels

Nous rappelons ici la définition et la notation de quelques graphes très classiques. Nous en donnons des exemples dans la figure 1.1.

Si tous les sommets d'un graphe G sont deux-à-deux adjacents, alors G est dit *complet*. Un graphe complet sur n sommets est dénoté K_n. Inversement, un ensemble de sommets deux-à-deux non adjacents est appelé un *stable* (ou *ensemble indépendant*). Un graphe est dit *biparti* si nous pouvons partitionner ses sommets en deux stables A et B, *i.e.*, chaque arête a une extrémité dans A et l'autre dans B. Il est dit *biparti complet*, noté $K_{a,b}$, si $|A| = a$, $|B| = b$, et chaque sommet dans A est adjacent à chaque sommet de B.

Un *chemin*, noté P_n, est un graphe composé de n sommets distincts $\{u_1, \ldots, u_n\}$ dont les arêtes sont $u_1u_2, \ldots, u_{n-1}u_n$. La *longueur* d'un chemin correspond à son nombre d'arêtes. Un chemin P_n (de longueur $n-1$) est souvent noté par sa séquence naturelle de ses sommets : $u_1, \ldots, u_n$. Les sommets u_1 et u_n sont appelés les *extrémités* de P_n. Ce chemin est aussi appelé un *chemin de u_1 à u_n*, ou un *(u_1, u_n)-chemin*. Le graphe composé d'un chemin $P := u_1, \ldots, u_n$ avec $n \geq 3$ et d'une arête u_nu_1 reliant les deux extrémités de P est appelé un *cycle*. Nous dénotons parfois un cycle par la séquence cyclique de ses sommets $(u_1, \ldots, u_n)$. La longueur d'un cycle correspond à son nombre d'arêtes (ou de sommets). Un cycle de longueur n est appelé un *n-cycle* et noté C_n.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *connexe* si $\forall u, v \in V$, il existe un *(u, v)-chemin* dans G allant de u à v. Un sous-graphe connexe maximal de G est appelé une *composante connexe* de G. Un *arbre* est un graphe connexe et sans cycle. Une *feuille* d'un arbre est un sommet de degré 1. Une *forêt* est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre.

Un *hypercube*, noté Q_n, est un graphe composé de 2^n sommets étiquetés par les nombres binaires de taille n, et deux sommets sont adjacents si leurs étiquettes diffèrent sur exactement une coordonnée. Il est parfois appelé *n-cube* ou *cube n-dimensionnel*.

Le graphe obtenu en remplaçant chaque arête de G par un chemin indépendant est appelé

une *subdivision* de G. Nous pouvons observer que tous les sommets qui subdivisent une arête, *i.e.*, qui sont sur un de ces chemins indépendants, sont de degré 2. Nous pouvons voir la subdivision d'un graphe comme le résultat de l'ajout d'un ou plusieurs sommets sur une ou plusieurs arêtes. Une subdivision particulière est la *subdivision entière* (ou *subdivision barycentrique*) qui subdivise exactement une fois toutes les arêtes du graphe. Une telle subdivision donne toujours un graphe biparti. La subdivision entière de K_n, notée SK_n, jouera un rôle important dans la structure cellulaire de la classe de graphes étudiée dans le chapitre 4. En particulier, nous pouvons observer que SK_3 correspond au cycle C_6 de longueur 6. Le graphe SK_n a $n + \binom{n}{2}$ sommets et $n(n-1)$ arêtes. Les n sommets de K_n sont appelés les *sommets originaux* de SK_n et les nouveaux sommets sont appelés les *sommets subdivisions*.

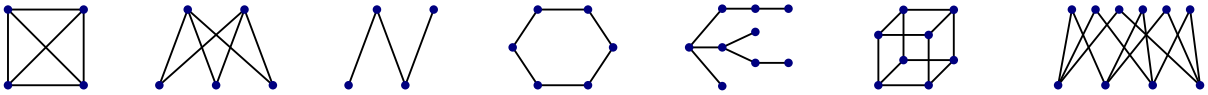


FIGURE 1.1. – (a) K_4 ; (b) $K_{2,3}$; (c) P_3 ; (d) C_6 ; (e) un arbre ; (f) Q_3 ; et (g) SK_4.

1.1.2. Opérations sur les graphes

Dans cette section, nous présentons deux opérations sur les graphes qui seront utilisées dans les chapitres suivants. Ces opérations sont deux façons distinctes d'obtenir des graphes. En premier, nous présentons l'opération d'expansion, puis nous nous intéressons au produit cartésien.

1.1.2.1. Couverture et expansions

Un triplet (G^1, G^0, G^2) est une *couverture* d'un graphe connexe G s'il satisfait les deux conditions suivantes :

1. $V(G) = V(G^1) \cup V(G^2)$ et $E(G) = E(G^1) \cup E(G^2)$;
2. $V(G^1) \cap V(G^2) \neq \emptyset$ et G^0 est le sous-graphe de G induit par $V(G^1) \cap V(G^2)$.

Le graphe G est appelé l'*amalgame* des graphes G^1 et G^2 par rapport à G^0.

L'*expansion* de G par rapport à une couverture (G^1, G^0, G^2) est le graphe $\widetilde{G}$ obtenu à partir de G par la construction suivante :

— chaque sommet x de $V(G^1) \setminus V(G^2)$ est remplacé par un sommet x_1 et chaque sommet x de $V(G^2) \setminus V(G^1)$ est remplacé par un sommet x_2 ;
— chaque sommet x de $V(G^1) \cap V(G^2)$ est remplacé par une arête x_1x_2 ;
— deux sommets x_i et y_i, $i = 1, 2$, sont adjacents si et seulement si x et y sont adjacents dans G^i, $i = 1, 2$.

En d'autres termes, $\widetilde{G}$ est obtenu en prenant une copie de G^1 et une copie de G^2 disjointes et en ajoutant une arête entre chaque paire de sommets identiques, *i.e.*, deux sommets

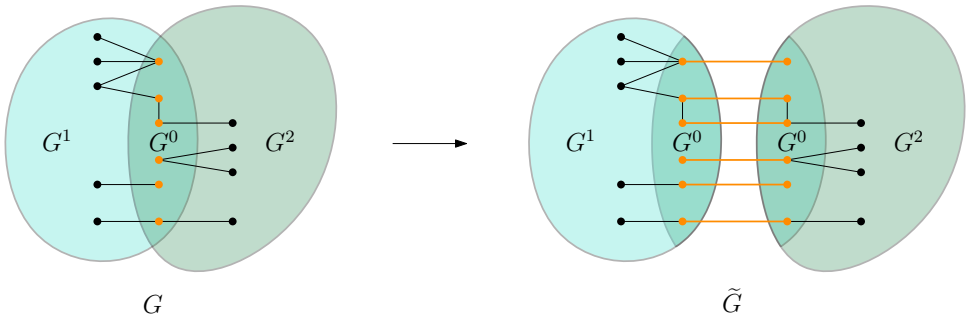


FIGURE 1.2. – Schéma d'une expansion d'un graphe G.

provenant du même sommet de G^0. Nous pouvons remarquer qu'il n'y a aucune arête de $\widetilde{G}$ ayant une extrémité dans $G^1 \setminus G^2$ et l'autre extrémité dans $G^2 \setminus G^1$, voir figure 1.2.

Une expansion d'un graphe G par rapport à (G^1, G^0, G^2) est dite *périphérique* si au moins un des deux sous-graphes G^1 ou G^2 coïncide avec G^0. Autrement dit, $G^1 \subseteq G^2$ ou $G^2 \subseteq G^1$.

1.1.2.2. Produit cartésien

Le *produit cartésien* [47] de m graphes $G_1, \ldots, G_m$ est le graphe $G := G_1 \square \cdots \square G_m$ dont les sommets sont l'ensemble des m-uplets $(v_1, \ldots, v_m)$ avec $v_i \in V(G_i)$ et deux m-uplets $u := (u_1, \ldots, u_m)$ et $v := (v_1, \ldots, v_m)$ sont adjacents dans G si et seulement s'il existe un indice $1 \leq i \leq m$ tel que u_i est adjacent à v_i dans G_i et $u_j = v_j$ pour tout $j \neq i$. Ce produit cartésien est parfois noté $\prod_{i=1}^{m} G_i$. Chaque G_i est appelé un *facteur* de G.

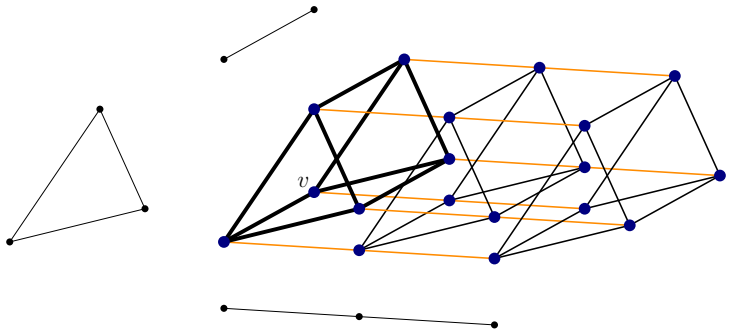


FIGURE 1.3. – Le produit cartésien $K_3 \square P_2 \square K_2$, ses P_2-copies (en orange) et la fibre $\mathrm{Fib}_{P_2}(v)$ (en gras).

Le *m-cube* (ou *hypercube m-dimensionnel*) Q_m est le produit cartésien de m copies de K_2, *i.e.*, $Q_m = K_2 \square \cdots \square K_2$. Plus généralement, les graphes obtenus par produit cartésien de m graphes complets K_q sont appelés *graphes de Hamming* de dimension m sur un univers de taille q. La famille des graphes de Hamming est l'une des plus connues dans les familles de graphes définies par produit cartésien. Nous retrouvons aussi la famille des *prismes* résultant d'un produit cartésien d'un cycle avec une arête. Si le cycle facteur est de longueur paire alors les prismes sont dit *pairs*. Les hypercubes et les prismes pairs sont deux familles de graphes

antipodaux. Un *cylindre* est le produit cartésien d'un cycle par un chemin. De même que les prismes, un cylindre est dit *pair* si son cycle facteur est de longueur paire. Ces derniers feront l'objet d'une étude approfondie dans le chapitre 7.

Soit $G := G_1 \square \cdots \square G_m$. Un *sous-produit* de G est un produit (cartésien) $G'_1 \square \cdots \square G'_m$, où G'_i est un sous-graphe de G_i pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. Un sous-produit est appelé une *couche* de G si l'un des G'_i est un sommet et si pour tout $j \neq i$, $G'_j = G_j$. Étant donné un sommet $u := (u_1, \ldots, u_m)$ de G, la G_i*-copie à travers* u est le sous-graphe G_i^u induit par les sommets de la forme $(u_1, \ldots, u_{i-1}, x_i, u_{i+1}, \ldots, u_m)$ pour tout $x_i \in V(G_i)$. Observons que toute G_i-copie est isomorphe au facteur G_i de G, voir la figure 1.3. De plus, $G_i^u = G_i^v$ si et seulement si pour tout $j \neq i$, $u_j = v_j$.

Lemme 1. *[47] Si $G := G_1 \square G_2 \square \cdots \square G_m$, $u := (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, et $v := (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ deux sommets de G, alors $\mathrm{d}_G(u, v) = \sum_{i=1}^m \mathrm{d}_{G_i}(u_i, v_i)$.*

Considérons une partition de $\{1, \ldots, m\}$ en deux ensembles I et J. Posons $G_J := \prod_{j \in J} G_j$. Pour un sommet $v := (v_1, \ldots, v_m)$ fixé de G, la *fibre* de v par rapport à G_J est définie par $\mathrm{Fib}_{G_J}(v) := \{u \in G : \forall j \in J, u_j = v_j\}$. Si G_J est un facteur de G, disons G_j, alors $\mathrm{Fib}_{G_J}(v)$ correspond au produit cartésien $G_1 \square \ldots \square G_{j-1} \square (\{v\}, \varnothing) \square G_{j+1} \square \ldots \square G_m$. Dans le cas où G est un produit cartésien de deux graphes G_1 et G_2, les fibres des sommets de G par rapport à G_1 sont des G_2-copies de G, et vice-versa.

1.1.3. Notions de théorie métrique des graphes

Considérons un graphe G ainsi que deux sommets u et v de G. La *distance* $\mathrm{d}_G(u, v)$ entre u et v correspond à la longueur d'un plus court (u, v)-chemin dans G. L'*intervalle* $\mathrm{I}_G(u, v)$ entre u et v dans G correspond à l'ensemble $\mathrm{I}_G(u, v) := \{w \in V(G) : \mathrm{d}_G(u, v) = \mathrm{d}_G(u, w) + \mathrm{d}_G(w, v)\}$ de tous les plus courts (u, v)-chemins. En l'absence d'ambiguïté sur le graphe G, nous écrirons respectivement $\mathrm{d}(u, v)$ et $\mathrm{I}(u, v)$ au lieu de $\mathrm{I}_G(u, v)$ et $\mathrm{d}_G(u, v)$.

Un sous-graphe H (ou son ensemble de sommets $V(H)$) de G est dit *convexe* s'il contient les intervalles de G entre chaque paire de ses sommets : $\forall u, v \in V(H), \mathrm{I}_G(u, v) \subseteq V(H)$. Un sous-graphe H (ou son ensemble de sommets $V(H)$) est dit *porté* (*"gated"* en anglais) dans G si pour tout sommet $u \in V(G)$, il existe un sommet $u' \in V(H)$ tel que $\forall v \in V(H), \mathrm{d}_G(u, v) = \mathrm{d}_G(u, u') + \mathrm{d}_G(u', v)$ [39]. Le sommet u' est appelé la *porte* de u sur H. D'après la définition, nous pouvons remarquer que la porte de u sur H est unique. Nous pouvons aussi établir que les sous-graphes portés sont convexes.

Lemme 2. *Tout sous-graphe porté est convexe.*

Nous regroupons quelques propriétés sur les intersections de sous-graphes ayant des propriétés métriques dans les lemmes 3, 4 et 5.

Lemme 3. *L'intersection de deux sous-graphes convexes est convexe. L'intersection de deux sous-graphes portés est portée.*

Le lemme 3 nous garantit que les sous-graphes convexes et portés sont clos par intersection. Pour tout sous-graphe H de G, il existe un plus petit graphe convexe $\mathrm{conv}(H)$ contenant H. Nous l'appelons l'*enveloppe convexe* de H. De même, pour tout sous-graphe $H \subseteq G$, il existe un plus petit graphe porté $\mathrm{porte}(H)$ contenant H. Ce graphe est appelé l'*enveloppe portée* de H.

Un *antipode* d'un sommet v de G est un sommet $-v$ tel que $G = \mathrm{I}(v, -v)$. En particulier, pour tout sommet $u \in V(G), \mathrm{d}(v, -v) = \mathrm{d}(v, u) + \mathrm{d}(u, -v)$. Un graphe G est *antipodal* si tous les sommets de G ont un antipode. Nous pouvons facilement montrer que l'antipode d'un sommet est unique et que $\mathrm{conv}(v, -v)$ coïncide avec l'intervalle $\mathrm{I}(v, -v)$.

Un sous-graphe $H \subseteq G$ est dit *isométrique* si la distance entre chaque paire de sommets de H est la même dans H que dans dans G, *i.e.*, $\forall u, v \in V(H), \mathrm{d}_H(u, v) = \mathrm{d}_G(u, v)$. Il est facile de voir que la relation d'isométrie est transitive.

Lemme 4. *Si G'' est un sous-graphe isométrique de G', et si G' est un sous-graphe isométrique de G, alors G'' est un sous-graphe isométrique de G.*

Nous avons évoqué dans le lemme 2 que les sous-graphes portés sont convexes. Nous pouvons aussi établir que les sous-graphes convexes sont isométriques et que les sous-graphes isométriques sont eux-mêmes induits, voir la figure 1.4.

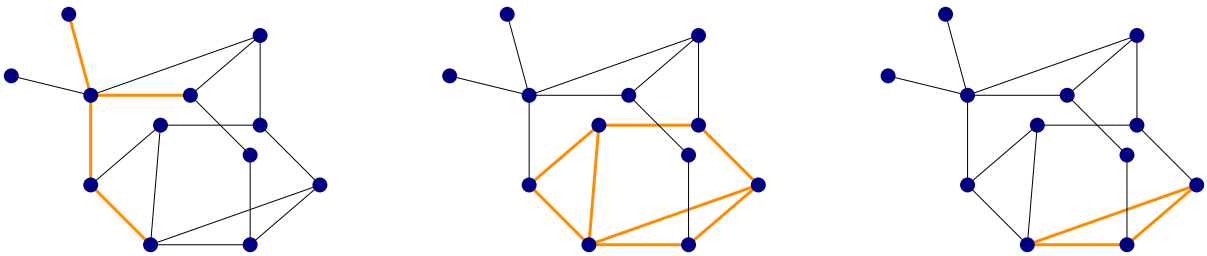


FIGURE 1.4. – De gauche à droite : un sous-graphe isométrique qui n'est pas convexe ; un sous-graphe convexe qui n'est pas porté ; et un sous-graphe porté.

Lemme 5. *L'intersection d'un sous-graphe convexe et d'un sous-graphe isométrique de G est un sous-graphe isométrique de G.*

Soient $G = (V, E)$ et $H = (W, F)$ deux graphes. Une application $\varphi : V \to W$ est un *plongement isométrique* de G dans H si pour toute paire de sommets $u, v \in V$, $\mathrm{d}_H\big(\varphi(u), \varphi(v)\big) = \mathrm{d}_G(u, v)$. En particulier, $\varphi(G)$ est un sous-graphe isométrique de H. Un graphe est appelé un *cube partiel* s'il admet un plongement isométrique dans un hypercube. Autrement dit, les cubes partiels sont les sous-graphes isométriques d'hypercubes. Nous illustrons dans la figure 1.5 deux sous-graphes d'hypercubes dont un cube partiel.

Soit uv une arête d'un graphe G. Posons $W(u, v) := \{x \in V : \mathrm{d}(x, u) < \mathrm{d}(x, v)\}$ l'ensemble des sommets de G qui sont plus proches du sommet u que du sommet v. DJOKOVIĆ [36] a joliment caractérisé les cubes partiels de la manière suivante :

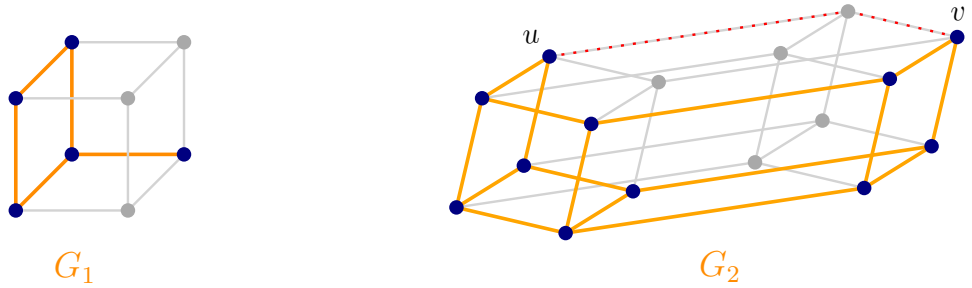


FIGURE 1.5. – Un cube partiel G_1, et G_2 le plus petit sous-graphe d'hypercubes connexe qui n'est pas un cube partiel car pour tout hypercube Q tel que $G_2 \subset Q$, $\mathrm{d}_{G_2}(u,v) = 4 \neq 2 = \mathrm{d}_Q(u,v)$.

Théorème 1. *[36] Un graphe G est un cube partiel si et seulement si G est biparti et pour toute arête uv de G, les ensembles $W(u,v)$ et $W(v,u)$ sont convexes.*

Pour une arête uv d'un cube partiel G, les ensembles (disjoints) $W(u,v)$ et $W(v,u)$ partitionnent les sommets de G et sont appelés les *demi-espaces complémentaires* de G.

Lemme 6. *Les intervalles dans les cubes partiels sont convexes.*

Démonstration. Soit G un cube partiel. Supposons que G soit plongé isométriquement dans l'hypercube Q_m. Soient u et v deux sommets de G. Nous pouvons facilement observer que l'intervalle $\mathrm{I}_{Q_m}(u,v)$ dans Q_m est un hypercube $Q \subseteq Q_m$. Par conséquent, $\mathrm{I}_{Q_m}(u,v)$ est convexe dans Q_m. D'autre part, considérons l'intervalle $\mathrm{I}_G(u,v)$ constitué de l'ensemble des sommets de $G \cap Q$. Supposons par l'absurde que $\mathrm{I}_G(u,v)$ ne soit pas convexe dans G. Alors il existe deux sommets $x, y \in \mathrm{I}_G(u,v)$ et un sommet w sur un plus court (x,y)-chemin de G tels que $w \notin \mathrm{I}_G(u,v)$. Comme Q est convexe et comme $x, y \in V(Q)$, $w \in Q$. De plus, tous les sommets de Q sont sur un plus court (u,v)-chemin de Q_m. Puisque $w \notin \mathrm{I}_G(u,v)$, w n'est pas sur un plus court (u,v)-chemin dans G. Par conséquent, nous obtenons une contraction avec le fait que G est plongé isométriquement dans Q_m. □

1.2. Notions d'apprentissage automatique

Dans les années 1970, Vapnik s'est intéressé à la généralisation de modèles appris à partir d'échantillons de données finis. Ces résultats sont à l'origine de l'apprentissage automatique. Le principe de l'apprentissage automatique (supervisé) est basé sur deux étapes. La première, dite d'*apprentissage*, consiste à apprendre un modèle à partir d'un échantillon de données. La deuxième étape consiste à utiliser ce modèle pour classer des nouvelles données en se basant sur l'analyse de celles passées. De nombreux chercheurs se sont intéressés à cette problématique en développant des méthodes et des algorithmes d'apprentissage automatique. Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes penchés sur un problème qui précède l'étape d'apprentissage, celui de compresser l'échantillon de données d'entrée. Plus

exactement, si nous avons un échantillon pour apprendre, alors nous souhaitons le réduire en un sous-échantillon sans perdre d'informations. Ce problème, toujours d'actualité, a été formalisé sous le nom de schéma de compression.

1.2.1. Classes de concepts et graphe de 1-inclusion

Un *échantillon d'apprentissage* sur un univers U de taille m est un sous-ensemble d'éléments de U étiquetés par "+" ou par "−", *i.e.*, un vecteur dans $\{-1,0,+1\}^U$. À partir d'un échantillon donné, nous souhaitons trouver une application séparant les éléments positifs des éléments négatifs. Intuitivement, une classe de concepts correspond aux hypothèses que nous faisons sur l'application que nous souhaitons apprendre. Par défaut, nous pouvons choisir n'importe quelle application consistante avec notre échantillon, *i.e.*, qui sépare bien les éléments positifs de ceux négatifs. Par exemple, pour distinguer des points dans le plan euclidien, nous pouvons considérer les rectangles, voir la figure 1.8. Un concept correspond à une fonction indicatrice. Ainsi, un concept peut être vu comme une application de U dans $\{0,1\}$. De manière équivalente, il sera souvent plus adapté de considérer les concepts comme des sous-ensembles de U, *i.e.*, des applications de U dans $\{-1,+1\}$. La classe de concepts est donc l'ensemble des fonctions indicatrices des applications auxquelles nous nous restreignons. Autrement dit, une *classe de concepts* $\mathscr{C}$ est un ensemble de sous-ensembles de U, *i.e.*, $\mathscr{C} \subseteq 2^U$. Les éléments de $\mathscr{C}$ sont appelés des *concepts*. L'ensemble U est aussi appelé le *domaine* de $\mathscr{C}$. Dans ce manuscrit, le domaine sera considéré fini.

Nous venons de voir que les classes de concepts sont des familles d'ensembles. La plupart du temps, nous utiliserons donc le langage ensembliste qui s'adapte mieux à la majorité de nos résultats.

Plus tôt, nous avons vu une définition des hypercubes via les produits cartésiens. Nous allons maintenant les définir en terme ensembliste. Un *hypercube m-dimensionnel* $Q_m =: Q(U)$ correspond au graphe dont l'ensemble des sommets est exactement l'ensemble des parties d'un univers U avec m éléments et deux sommets X et Y sont adjacents si et seulement si $|X \Delta Y| = 1$. Une famille d'ensembles $\mathscr{S} \subseteq 2^U$ peut donc être vue comme un sous-ensemble de sommets d'un hypercube $Q(U)$. Le sous-graphe de Q_m induit par $\mathscr{S}$, noté $G(\mathscr{S})$, est généralement appelé le *graphe de 1-inclusion* de $\mathscr{S}$ [49, 50]. Ainsi, deux sommets de $G(\mathscr{S})$ sont reliés si et seulement si leur différence symétrique est un singleton. De manière équivalente, nous pouvons voir un sommet d'hypercube non pas comme un sous-ensemble $X \subseteq U$, mais comme son vecteur caractéristique v tel que pour tout $i \in U$, $v_i = 1$ si $i \in X$, et $v_i = 0$ sinon. Indirectement, cela signifie qu'ils diffèrent sur exactement une coordonnée. Nous pouvons naturellement étiqueter chaque arête de $G(\mathscr{S})$ par la coordonnée sur laquelle ses extrémités diffèrent. Réciproquement, chaque sous-graphe de Q_m est le graphe de 1-inclusion d'une famille d'ensembles de U. Pour un sous-graphe G de Q_m, nous dénotons $\mathrm{C}(G)$ le plus petit cube de Q_m contenant G.

1.2.2. Modèle d'apprentissage PAC et VC-dimension

Le modèle PAC d'apprentissage a été initié par VALIANT [91] en 1984. L'objectif de ce modèle est de mesurer la complexité d'un problème en apprentissage supervisé. Dans ce modèle, nous disposons d'un ensemble d'éléments étiquetés de U tirés selon une distribution $\mathscr{D}$. À partir de cet échantillon d'apprentissage , nous souhaitons apprendre un concept *cible* c d'une classe de concepts $\mathscr{C} \subseteq 2^U$ donnée. Pour ce faire, nous utilisons un algorithme d'apprentissage A renvoyant un concept hypothèse $h \in \mathscr{C}$. L'*erreur* de cet algorithme A, notée $\mathrm{err}(h)$ correspond à la probabilité $\mathbb{P}_{x\in\mathscr{D}}\{c(x) \neq h(x)\}$. La classe de concepts $\mathscr{C}$ est *PAC-apprenable* s'il existe un algorithme d'apprentissage A tel que pour tout concept cible $c \in \mathscr{C}$, pour toute distribution $\mathscr{D}$ sur U, pour tout paramètre d'erreur $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, et pour tout paramètre de confiance $0 < \delta < \frac{1}{2}$, l'algorithme A produit un concept hypothèse h tel que $\mathrm{err}(h) \leq \epsilon$ avec une probabilité d'au moins $(1-\delta)$.

Un exemple classique pour illustrer l'apprentissage PAC est le *jeu du rectangle*, voir la figure 1.6. L'objectif est d'apprendre un rectangle cible R^* axes-parallèles dans le plan euclidien à partir d'un ensemble de points tirés aléatoirement suivant une distribution inconnue. Les points sont alors étiquetés "+" ou "−" s'ils sont respectivement contenus ou pas dans R^*. Le rectangle cible R^* n'est pas connu par l'algorithme d'apprentissage A. L'algorithme A doit alors choisir un rectangle hypothèse axes-parallèles, le plus proche possible de R^*, contenant tous les points étiquetés "+" et ne contenant pas ceux étiquetés "−". Soient $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ et $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$. Il est connu qu'après avoir tiré indépendamment $m \geq \frac{4}{\epsilon}\ln\left(\frac{4}{\delta}\right)$ points, si l'algorithme A renvoie le plus petit rectangle R axes-parallèles contenant les points étiquetés "+", alors avec une probabilité d'au moins $1-\delta$, $\mathrm{err}(R) \leq \epsilon$.

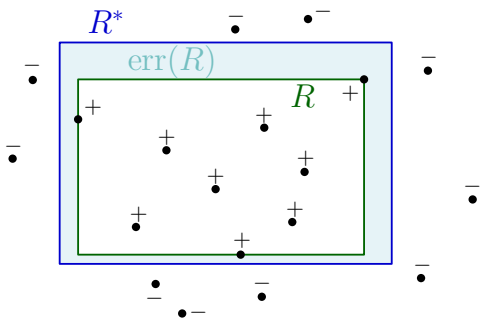


FIGURE 1.6. – Illustration du jeu du rectangle.

Borner la taille de l'échantillon d'apprentissage nécessaire pour apprendre dans le cas du jeu du rectangle n'est pas très dur. Mais le problème devient plus compliqué dans le cas général. Cependant, une borne générale utilisant la notion de VC-dimension existe. Nous allons donc introduire ce paramètre combinatoire important dans le domaine de l'apprentissage automatique. De manière informelle, plus les hypothèses sur l'application à laquelle nous nous sommes restreint sont fortes, plus il va être difficile de séparer les éléments "+" des "−", et donc plus la VC-dimension sera petite.

Soit $\mathscr{S}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble U à m éléments. Pour définir la notion de VC-dimension, nous devons d'abord nous intéresser à la notion de pulvérisation.

Soit Y un sous-ensemble de U. La *trace* de $\mathscr{S}$ sur Y est définie par $\mathscr{S}_{|Y} := \{S \cap Y : S \in \mathscr{S}\}$. L'ensemble Y est *pulvérisé* par $\mathscr{S}$ si $\mathscr{S}_{|Y} = 2^Y$. De manière équivalente, pour tout $Y' \subseteq Y$ il existe $S \in \mathscr{S}$ tel que $S \cap Y = Y'$. La *dimension de Vapnik-Chervonenkis* [93] (*VC-dimension* pour faire court) VC-dim($\mathscr{S}$) de $\mathscr{S}$ est la taille du plus grand sous-ensemble de U pulvérisé par $\mathscr{S}$. Nous pouvons remarquer que la VC-dimension d'une famille d'ensembles est inférieure ou égale à la taille de son plus grand ensemble. Puisque chaque sous-graphe d'hypercube est le graphe de 1-inclusion d'une famille d'ensembles, nous pouvons définir la VC-dimension de G comme la VC-dimension de $\mathscr{S}$, où $G = G(\mathscr{S})$. Dans la figure 1.7, nous présentons trois familles d'ensembles, les ensembles qu'elles pulvérisent et leurs VC-dimension.

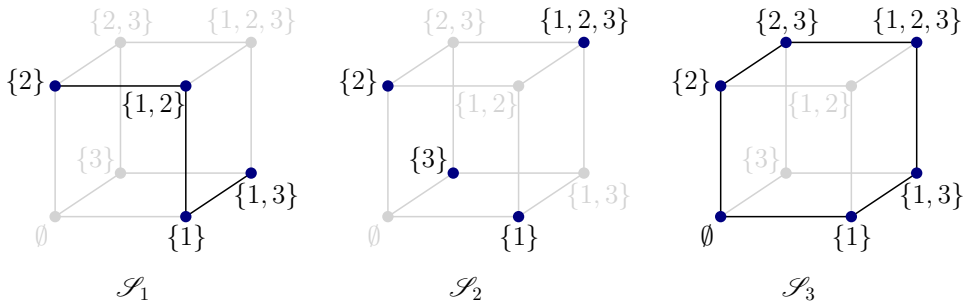


FIGURE 1.7. – Trois familles d'ensembles $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$, et $\mathscr{S}_3$ de VC-dimension respectivement 1, 2, et 2. La famille $\mathscr{S}_1$ pulvérise les ensembles $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}$ et les familles $\mathscr{S}_2$ et $\mathscr{S}_3$ pulvérisent les mêmes ensembles $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}$, et $\{2,3\}$.

Il est connu que nous pouvons pulvériser au plus trois points non colinéaires dans le plan euclidien par une droite et donc que la VC-dimension des droites dans le plan euclidien est de 3. Dans la figure 1.8, nous illustrons le jeu du rectangle et nous montrons que nous pouvons pulvériser au plus quatre points non colinéaires.

Théorème 2. *[93] Soit S un échantillon d'apprentissage de taille m. Alors une classe de concepts $\mathscr{C}$ de VC-dimension d est PAC-apprenable si et seulement si $m \geq O(\frac{1}{\epsilon}\log(\frac{1}{\delta}) + \frac{d}{\epsilon}\log(\frac{1}{\epsilon}))$.*

Ainsi, les classes de concepts qui sont PAC-apprenables sont exactement les classes de VC-dimension bornée.

Nous allons maintenant donner une définition équivalente de pulvérisation en termes de fibres. Soit $Y \subseteq U$, et soit $Y' \subseteq Y$. La *fibre de Y' sur Y*, notée $\mathrm{Fib}_Y(Y')$, correspond à l'ensemble $\{Y' \cup W : W \subseteq U \setminus Y\}$. Un sous-ensemble $Y \subseteq U$ est *pulvérisé* par $\mathscr{S}$ si pour tout $Y' \subseteq Y$, la fibre $\mathrm{Fib}_Y(Y')$ est non vide.

1.2.3. Lemme de Sauer et lemme du Sandwich

Deux inégalités importantes mettent en relation la taille d'une famille d'ensembles $\mathscr{S} \subseteq 2^U$ avec sa VC-dimension. La première, le *lemme de Sauer-Shelah* [88, 89] fournit une borne supérieure serrée sur la taille d'une famille d'ensembles de VC-dimension d.

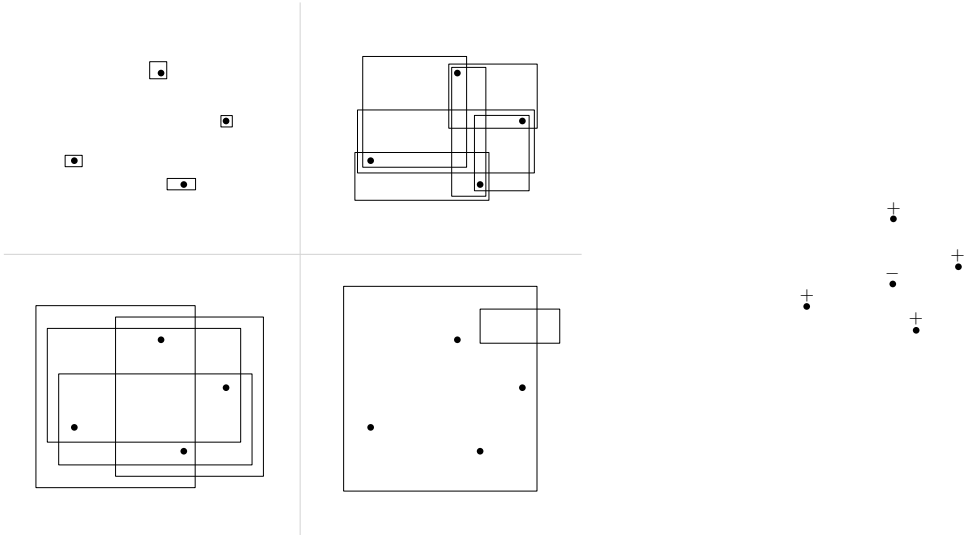


FIGURE 1.8. – Les quatre schémas de gauche montrent que pour n'importe quel étiquetage de quatre points non colinéaires dans le plan euclidien, nous pouvons trouver un rectangle contenant ceux étiquetés "+" mais pas ceux étiquetés "−". Le schéma de droite montre l'existence d'un étiquetage où il n'existe pas un tel rectangle.

Lemme 7. *[88] Pour toute famille d'ensembles $\mathscr{S} \subseteq 2^U$ de VC-dimension d, $|\mathscr{S}| \leq \sum_{i=0}^{d} \binom{|U|}{i}$.*

Les familles d'ensembles pour lesquelles la borne du lemme de Sauer-Shelah est serrée, *i.e.*, $|\mathscr{S}| = \sum_{i=0}^{d} \binom{|U|}{i}$, sont appelées *familles maximums* [42, 44]. Ces familles ont le plus grand cardinal possible pour leur VC-dimension. Autrement dit, pour toute famille $\mathscr{S}$ et pour tout sous-ensemble $X \in 2^U \setminus \mathscr{S}$, VC-dim$(\mathscr{S})$ < VC-dim$(\mathscr{S} \cup X)$.

Avant d'introduire la deuxième inégalité, nous avons besoin d'affiner la notion de pulvérisation. Soit $Y \subseteq U$. Un Y*-cube* de Q_m est le graphe de 1-inclusion d'une famille d'ensembles $\{Y' \cup X : Y' \subseteq Y\}$ pour un sous-ensemble fixé $X \subseteq U \setminus Y$. Si $|Y| = m'$, alors tout Y-cube est un sous-cube m'-dimensionnel de Q_m et Q_m contient $2^{m-m'}$ Y-cubes. Un sous-ensemble Y de U est *fortement pulvérisé* par $\mathscr{S}$ si le graphe de 1-inclusion $G(\mathscr{S})$ contient un Y-cube. Notons $\underline{\mathbf{X}}(\mathscr{S})$ l'ensemble de tous les sous-ensembles fortement pulvérisés par $\mathscr{S}$. Notons $\overline{\mathbf{X}}(\mathscr{S})$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de U pulvérisés par $\mathscr{S}$. Clairement, $\underline{\mathbf{X}}(\mathscr{S}) \subseteq \overline{\mathbf{X}}(\mathscr{S})$. Le résultat qui suit est connu sous le nom de *lemme du Sandwich* [2, 19, 37, 76].

Lemme 8. *Pour toute famille d'ensembles $\mathscr{S}$, $\left|\underline{\mathbf{X}}(\mathscr{S})\right| \leq |\mathscr{S}| \leq \left|\overline{\mathbf{X}}(\mathscr{S})\right|$.*

Cela signifie que le cardinal de $\mathscr{S}$ est compris entre le nombre d'ensembles pulvérisés et le nombre d'ensembles fortement pulvérisés par $\mathscr{S}$. Les familles d'ensembles pour lesquelles la borne supérieure du lemme du Sandwich est serrée, *i.e.*, $|\mathscr{S}| = \left|\overline{\mathbf{X}}(\mathscr{S})\right|$, sont appelées *amples* [10, 19, 64, 94]. Dans la littérature, elles sont parfois appelées *"lopsided"*, *simples*, ou *extrémales*. Si $\mathscr{S} \subseteq 2^U$ est de VC-dimension d, alors $\overline{\mathbf{X}}(\mathscr{S})$ ne contient pas plus que $\sum_{i=0}^{d} \binom{|U|}{i}$ ensembles. Ainsi le lemme du Sandwich raffine celui de Sauer-Shelah. Notons donc que toute

famille maximum est ample mais la réciproque n'est pas vraie. De plus, d'après [10, 19], une famille d'ensembles $\mathscr{S}$ est ample si et seulement si $\left|\underline{\mathbf{X}}(\mathscr{S})\right| = |\mathscr{S}|$. D'autre part, $\left|\underline{\mathbf{X}}(\mathscr{S})\right| = |\mathscr{S}|$ si et seulement si $\left|\overline{\mathbf{X}}(\mathscr{S})\right| = |\mathscr{S}|$. Ainsi, $\mathscr{S}$ est ample si et seulement si chaque ensemble pulvérisé par $\mathscr{S}$ est fortement pulvérisé. Par conséquent, la VC-dimension d'une famille d'ensembles ample est la dimension de son plus grand cube dans son graphe de 1-inclusion. Dans la figure 1.7, la famille d'ensembles $\mathscr{S}_1$ est ample mais $\mathscr{S}_2$ et $\mathscr{S}_3$ ne le sont pas. En effet, ces dernières pulvérise tous les sous-ensembles Y de taille 2 de $\{1,2,3\}$ mais leurs graphes de 1-inclusion ne contiennent aucun carré. Observons aussi que le complémentaire d'une famille $\mathscr{S}$ ample définie par $\mathscr{S}^C := \{U \setminus S : S \in \mathscr{S}\}$ est ample.

Les graphes de 1-inclusion des familles d'ensembles amples sont des cubes partiels [10, 64]. Nous les appelons donc *cubes partiels amples*. Une jolie caractérisation des familles d'ensembles amples a été donnée par LAWRENCE [64]. Elle établit que $\mathscr{S}$ est ample si et seulement si pour tout cube Q de Q_m, si $Q \cap G(\mathscr{S})$ est clos par antipodes, alors soit $Q \cap G(\mathscr{S}) = \varnothing$ soit Q est contenu dans $G(\mathscr{S})$. D'autres caractérisations structurelles et géométriques des cubes partiels amples seront données dans la section 2.3 du chapitre 2.

1.2.4. Schéma de compression

Les schémas de compression (d'échantillons) ont été introduits en 1986 par LITTLESTONE et WARMUTH [65]. LITTLESTONE et WARMUTH [65] montrent en particulier que l'existence d'un schéma de compression est suffisant pour apprendre. Nous reprenons les notations de l'article de CHALOPIN et al. [22] pour définir les schémas de compression.

Soit U un ensemble fini. Soit $\mathscr{C} \subseteq \{-1,+1\}^U$ une classe de concepts, *i.e.*, un ensemble de $\{-1,+1\}$-vecteurs. Considérons les sous-ensembles de $\{-1,0,+1\}^U$ munis de la relation d'ordre $\leq$ où $0 \leq -1$ et $0 \leq +1$. Les *échantillons réalisables* de $\mathscr{C}$ sont les vecteurs signés de l'ensemble $\downarrow \mathscr{C} = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} \{S \in \{-1,0,+1\}^U : S \leq C\}$. Un *schéma de compression étiqueté* de taille k pour une classe de concepts $\mathscr{C} \subseteq \{-1,+1\}^U$ est une paire (α,β) d'applications, où $\alpha : \downarrow \mathscr{C} \to \{-1,0,+1\}^U$ est appelée *fonction de compression* et $\beta : \{-1,0,+1\}^U \to \{-1,+1\}^U$ *fonction de reconstruction*. Les fonction α et β doivent être telles que pour tout échantillon réalisable $S \in \downarrow \mathscr{C}$, nous ayons :

$$\alpha(S) \leq S \leq \beta(\alpha(S)) \text{ et } \left|\underline{\alpha}(S)\right| \leq k,$$

où $\underline{\alpha}(S)$ est le support du vecteur signé $\alpha(S)$. La condition $S \leq \beta(\alpha(S))$ signifie que la restriction de $\beta(\alpha(S))$ sur le support de S coïncide avec l'échantillon de départ S. Un schéma de compression étiqueté est dit *propre* si pour tout $S \in \downarrow \mathscr{C}, \beta(\alpha(S)) \in \mathscr{C}$. Cela signifie que pour toute compression d'un échantillon réalisable, le résultat de la reconstruction est un concept. Une classe de concepts $\mathscr{C}$ est une *complétion (famille d'ensembles)* (ou une *extension*) d'une classe de concepts $\mathscr{C}'$ si tous les concepts de $\mathscr{C}'$ sont dans $\mathscr{C}$, *i.e.*, $\mathscr{C}' \subseteq \mathscr{C}$. La définition d'un schéma de compression étiqueté implique que si $\mathscr{C}$ est une complétion d'une classe de concepts $\mathscr{C}'$ et (α,β) est un schéma de compression étiqueté pour $\mathscr{C}$, alors (α,β) est un schéma de compression étiqueté pour $\mathscr{C}'$. Cependant, (α,β) n'est pas un schéma propre pour $\mathscr{C}'$.

L'une des plus vielles conjectures en théorie de l'apprentissage, posée par Floyd et Warmuth [42], consiste à déterminer si une famille d'ensembles quelconque de VC-dimension d admet un schéma de compression de taille linéaire en d.

Conjecture 1. [42, 65] Toute famille d'ensembles $\mathscr{S}$ de VC-dimension d admet un schéma de compression de taille $O(d)$.

MORAN et YEHUDAYOFF [69] ont montré que toute famille d'ensembles de VC-dimension d admet un schéma de compression étiqueté de taille $2^{O(d)}$. Notons que leurs schémas de compression ne sont pas propres et utilisent des informations supplémentaires. D'autre part, à ce jour, il n'existe pas de tels résultats pour les schémas de compression propres.

MORAN et WARMUTH [68] ont fourni des schémas de compression étiquetés et propres de taille d pour les familles d'ensembles amples de VC-dimension d.

Théorème 3. *[68] Toute famille ample de VC-dimension d admet un schéma de compression étiqueté propre de taille d.*

En utilisant le résultat du théorème 3 de MORAN et WARMUTH, la conjecture 1 serait résolue si nous montrions que toute famille d'ensembles de VC-dimension d peut être complétée à une famille ample de VC-dimension $O(d)$.

KUZMIN et WARMUTH [63] ont introduit un deuxième type de schémas de compression dit *non étiquetés*. Ces derniers sont définis de manière analogue aux schémas de compression étiquetés, à la différence que $\alpha(S)$ est un sous-ensemble (non étiqueté) de taille au plus k du support de S. PÁLVÖLGYI et TARDOS [77] ont récemment exhibé une famille d'ensembles de VC-dimension 2 n'admettant pas de schémas de compression non étiquetés de taille 2. La question de l'existence de schémas de compression non étiquetés pour les familles d'ensembles amples est ouverte. Cependant, CHALOPIN et al. [23] ont montré que les familles maximums admettent des schémas de compression non étiquetés de taille d.

1.3. Notions de théorie des complexes de matroïdes orientés

Nous suivons le livre de BJÖRNER et al. [17] pour les notions de base et les résultats de la théorie des matroïdes orientés. En ce qui concerne les complexes de matroïdes orientés, nous nous référons à l'article de BANDELT, CHEPOI et KNAUER [13]. Enfin, pour les résultats sur les ensembles amples, nous nous basons sur les articles de BANDELT et al. [10], et de LAWRENCE [64].

Soit U un ensemble à m éléments et soit $\mathscr{L}$ un *système de vecteurs signés*, *i.e.*, des vecteurs dans $\{-1,0,+1\}^U$. Les éléments de $\mathscr{L}$ sont appelés des *covecteurs*. Considérons un covecteur X de $\mathscr{L}$. Le *support* de X, noté $\underline{X}$, est l'ensemble des indices pour lesquels les coordonnées

de X sont non nulles. Plus précisément, $\underline{X} := \{e \in U : X_e \neq 0\}$. L'ensemble complémentaire $X^0 := E \setminus \underline{X} = \{e \in U : X_e = 0\}$ est appelé l'*ensemble zéro* de X. Pour un sous-ensemble $A \subseteq U$, on note X_A la restriction de X sur A. Posons $\leq$ l'ordre par coordonnées sur $\{-1, 0, +1\}^U$ avec $0 \leq -1$ et $0 \leq +1$. Pour $X, Y \in \mathscr{L}$, l'ensemble $\mathrm{Sep}(X, Y) := \{e \in U : X_e Y_e = -1\}$, appelé le *séparateur* de X et Y, contient tous les éléments de U sur lesquels X et Y sont opposés. La *composition* de X avec Y est le vecteur signé $X \circ Y$ tel que, pour tout $e \in U$, $(X \circ Y)_e = X_e$ si $X_e \neq 0$ et $(X \circ Y)_e = Y_e$ si $X_e = 0$.

1.3.1. Matroïdes orientés

Co-inventés par BLAND et LAS VERGNAS [18], et par FOLKMAN et LAWRENCE [43], les matroïdes orientés proviennent de différents domaines. En effet, Las Vergnas les a découvert à partir de la théorie des graphes et de la combinatoire, alors que la motivation de Bland résidait sur la programmation linéaire. Folkman et Lawrence, quant à eux, les ont eux étudiés du point de vue des polytopes.

Un *matroïde orienté (covecteurs)* (OM) $\mathscr{M}$ est un système de vecteurs signés $(U, \mathscr{L})$ vérifiant :

(C) (**Composition**) $X \circ Y \in \mathscr{L}$ pour tout $X, Y \in \mathscr{L}$;

(SE) (**Élimination forte**) pour tout $X, Y \in \mathscr{L}$ et pour tout $e \in \mathrm{Sep}(X, Y)$, il existe $Z \in \mathscr{L}$ tel que $Z_e = 0$ et $Z_f = (X \circ Y)_f$ pour tout $f \in U \setminus \mathrm{Sep}(X, Y)$;

(Sym) (**Symétrie**) $-\mathscr{L} := \{-X : X \in \mathscr{L}\} = \mathscr{L}$, *i.e.*, $\mathscr{L}$ est clos par inversion de signe.

Un système de vecteurs signés $(U, \mathscr{L})$ est *simple* si pour tout $e \in U$, $\{X_e : X \in \mathscr{L}\} = \{-1, 0, +1\}$ et pour chaque paire $e \neq f$, il existe $X, Y \in \mathscr{L}$ avec $\{X_e X_f, Y_e Y_f\} = \{+, -\}$. Nous allons seulement considérer les OMs simples sans le préciser explicitement à chaque fois.

Il existe un lien important entre la représentation topologique et la description combinatoire des matroïdes orientés. En effet, les matroïdes orientés ont initialement été inventés pour abstraire des arrangements d'hyperplans centraux. Il s'avère que les axiomes qui les définissent couvrent un espace plus large puisque FOLKMAN et LAWRENCE [43] ont montré qu'il existe une bijection entre les matroïdes orientés et les arrangements de pseudo-sphères. Ainsi, les matroïdes orientés correspondant à des arrangements d'hyperplans centraux forment une sous-classe très importante des matroïdes orientés, la classe des *matroïdes orientés réalisables*. Un arrangement d'hyperplans $\mathscr{A}$ de $\mathbb{R}^m$ est *central* si $\bigcap_{H \in \mathscr{A}} H \neq \varnothing$. À translation près, un arrangement central est un arrangement d'hyperplans passant par l'origine. Les hyperplans d'un tel arrangement partitionnent $\mathbb{R}^m$ en régions ouvertes, et en régions correspondant aux intersections de certains hyperplans. En orientant chacun des hyperplans, nous pouvons associer à chacune de ses régions sa position par rapport aux hyperplans. Autrement dit, chaque région peut être représentée par un $\{-1, 0, +1\}$-vecteur de taille $|\mathscr{A}|$ où chaque coordonnée correspond à un hyperplan H de $\mathscr{A}$ et vaut -1 ou $+1$ si la région est du côté positif ou négatif de H, et 0 si elle est située sur H. Nous donnons un exemple d'un arrangement d'hyperplans central dans la figure 1.9 où nous représentons chacune des régions par son vecteur. L'ensemble de tous les vecteurs signés représentant les différentes régions d'un arrangement d'hyperplans central $\mathscr{A}$ de $\mathbb{R}^m$ correspond à l'ensemble des covecteurs

d'un matroïde orienté réalisable.

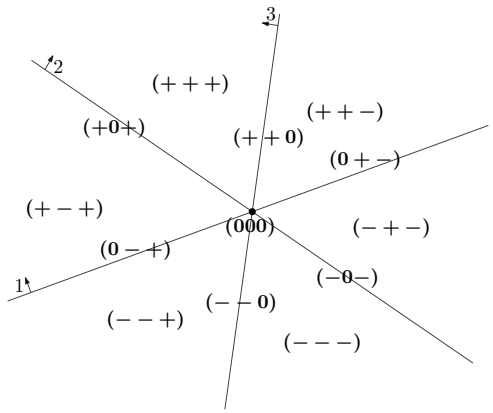


FIGURE 1.9. – Un arrangement d'hyperplans $\mathscr{A}$ central de $\mathbb{R}^m$ avec l'ensemble des covecteurs du matroïde orienté réalisable correspondant.

Nous allons maintenant nous intéresser à une autre axiomatique importante des OMs en termes de cocircuits. Un *treillis* $\mathscr{T}$ est un ensemble partiellement ordonné tel que pour toute paire d'éléments de $\mathscr{T}$, il existe une unique borne supérieure et une unique borne inférieure. Une *chaîne* C d'un treillis $\mathscr{T}$ est un sous-ensemble *totalement ordonné* de $\mathscr{T}$, *i.e.*, pour tout $x, y \in C$, $x \leq y$ ou $y \leq x$. En d'autres termes, les éléments de C sont deux à deux comparables. Un treillis $\mathscr{T}$ est dit *gradué* si toutes les chaînes maximales (par inclusion) sont de même longueur. L'ensemble partiellement ordonné $(\mathscr{L}, \leq)$ d'un OM $\mathscr{M}$ avec un maximum global artificiel $\hat{1}$ forme un treillis gradué $\mathscr{F}_{\text{big}}(\mathscr{L})$ (pour *"big face lattice"*). La longueur d'une chaîne maximale de $\mathscr{F}_{\text{big}}$ moins un est appelée le *rang* de $\mathscr{M}$, noté $\text{rang}(\mathscr{M})$. Les *cocircuits* de $\mathscr{L}$ sont les éléments non nuls minimaux de $\mathscr{F}_{\text{big}}(\mathscr{L})$, aussi appelés *atomes*. La collection des cocircuits est dénotée par $\mathscr{C}^*$.

Un système de vecteurs signés $(U, \mathscr{C}^*)$ est un *matroïde orienté* (OM) $\mathscr{M}$ si $\mathscr{C}^*$ vérifie l'axiome **(Sym)** et les deux axiomes suivants :

(Inc) (**Incomparabilité**) $\underline{X} = \underline{Y}$ implique $X = \pm Y$ pour tout $X, Y \in \mathscr{C}^*$;

(E) (**Élimination**) pour tout $X, Y \in \mathscr{C}^*$ avec $X \neq -Y$ et pour tout $e \in \text{Sep}(X, Y)$, il existe $Z \in \mathscr{C}^*$ tel que $Z_e = 0$ et $Z_f \in \{0, X_f, Y_f\}$ pour tout $f \in U$.

L'ensemble $\mathscr{L}$ des covecteurs peut être dérivé de $\mathscr{C}^*$ en prenant la clôture par composition de $\mathscr{C}^*$. Nous allons maintenant introduire l'opérateur d'orthogonalité afin de définir les matroïdes orientés par leur dual, en termes de vecteurs ou de circuits. Deux vecteurs signés $X, Y \in \{-1, 0, +1\}^U$ sont *orthogonaux*, noté $X \perp Y$, si $\underline{X} \cap \underline{Y} = \varnothing$ ou s'il existe $e, f \in \underline{X} \cap \underline{Y}$ tels que $X_e Y_e = -X_f Y_f$. L'ensemble $\mathscr{V}$ des *vecteurs* et l'ensemble $\mathscr{C}$ des *circuits* d'un matroïde orienté $\mathscr{M}$ peuvent être définis à partir des cocircuits $\mathscr{C}^*$ de $\mathscr{M}$ par le résultat suivant :

Théorème 4. *[17, Theorem 3.4.3 et Proposition 3.7.12] Soit $\mathscr{C}^*$ l'ensemble des cocircuits d'un OM $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$. Alors, l'ensemble des vecteurs $\mathscr{V}$ de $\mathscr{M}$ est composé de tous les vecteurs signés $Y \in \{-1, 0, +1\}^U \setminus \{\mathbf{0}\}$ tels que pour tout $X \in \mathscr{C}^*$, nous ayons $Y \perp X$, et l'ensemble des circuits $\mathscr{C}$ est composé des vecteurs signés minimaux de $\mathscr{V}$.*

Il est connu que les ensembles des circuits et des vecteurs satisfont respectivement les axiomes des cocircuits et des covecteurs. Ce sont donc des OMs. En utilisant l'axiomatique des OMs via les cocircuits, nous pouvons définir les matroïdes orientés uniformes [17] comme suit.

Un *matroïde orienté uniforme* (UOM) de rang r sur un ensemble U de taille m est un OM $\mathscr{M} = (U, \mathscr{C}^*)$ tel que $\mathscr{C}^*$ se compose de deux orientations opposées pour chaque sous-ensemble de U de taille $m - r + 1$.

De plus, l'ensemble des supports non-signés des circuits $\underline{\mathscr{C}} := \{\underline{X} : X \in \mathscr{C}\}$ définissent un matroïde $\underline{\mathscr{M}} = (U, \underline{\mathscr{C}})$ qui est dit *sous-jacent*. Soit $\mathscr{X}$ une famille de sous-ensembles de U. Alors un *matroïde* $\mathscr{M}$ est un système $(U, \mathscr{X})$ vérifiant les trois axiomes suivant :

(NZ) (**Non zéro**) $\varnothing \notin \mathscr{X}$;

(Incl) (**Propriété d'inclusion**) pour tout $C_1, C_2 \in \mathscr{X}$, si $C_1 \subseteq C_2$, alors $C_1 = C_2$;

(PE) (**Propriété d'élimination**) pour tout $C_1, C_2 \in \mathscr{X}$, $C_1 \neq C_2$, et pour tout $e \in C_1 \cap C_2$, il existe $C_3 \in \mathscr{X}$ tel que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$.

Les sous-ensembles de U qui appartiennent à $\mathscr{X}$ sont appelés les *circuits* du matroïde non orienté $\mathscr{M}$. Les circuits d'un matroïde correspondent exactement à ses sous-ensembles dépendant minimaux. Un ensemble est donc appelé *indépendant* si et seulement s'il ne contient pas de circuit. Observons que le rang d'un matroïde orienté est égal au rang de son matroïde non-orienté sous-jacent [17, Theorem 4.1.14]. Autrement dit, le rang correspond à la taille du plus grand ensemble indépendant.

1.3.2. Complexes de matroïdes orientés

Les complexes de matroïdes orientés sont définis de façon similaire aux OMs, en remplaçant l'axiome global **(Sym)** par un axiome local plus faible **(FS)** de symétrie des faces :

Un *complexe de matroïdes orientés* (COM) $\mathscr{M}$ est un système de vecteurs signés $(U, \mathscr{L})$ vérifiant l'axiome **(SE)** et :

(FS) (**Symétrie des faces**) $X \circ -Y \in \mathscr{L}$ pour tout $X, Y \in \mathscr{L}$.

Comme pour les OMs, nous nous restreignions aux COMs simples, *i.e.*, aux COMs définis par des systèmes de vecteurs signés simples. Nous pouvons voir que l'axiome **(FS)** implique l'axiome **(C)**. En effet, pour tout $X, Y \in \mathscr{L}$, $X \circ Y \in \mathscr{L}$ par l'axiome **(FS)**, et $X \circ Y = (X \circ -X) \circ Y = X \circ -(X \circ -Y) \in \mathscr{L}$. Par conséquent, les OMs sont exactement les COMs contenant le vecteur zéro $\mathbf{0}$, voir l'article de BANDELT, CHEPOI et KNAUER [13].

L'affaiblissement de l'axiome **(Sym)** en **(FS)** mène à une structure combinatoire et géométrique riche qui est basée sur celle des OMs tout en étant assez différente. Soit $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ un COM et X un covecteur de $\mathscr{L}$. La *face* de X est définie par $\mathrm{F}(X) := \{X \circ Y : Y \in \mathscr{L}\}$. Nous pouvons observer que l'ensemble des covecteurs de $\mathrm{F}(X)$ correspond à l'ensemble des covecteurs Y de $\mathscr{L}$ tels que $X \leq Y$. Par conséquent, $\mathrm{F}(X) := \{X \circ Y : Y \in \mathscr{L}\} = \{Y \in \mathscr{L} : X \leq Y\} =: \uparrow X$. La face de X est dite *propre* si $\mathrm{F}(X) \neq \mathscr{L}$. Une face propre maximale (par inclusion) est appelée une *facette*.

De manière analogue aux OMs, un COM $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ est *réalisable* si $\mathscr{L}$ est un système de vecteurs signés correspondant aux régions d'un arrangement $\mathscr{A}$ d'hyperplans (orientés) restreint à un ensemble convexe ouvert de $\mathbb{R}^m$.

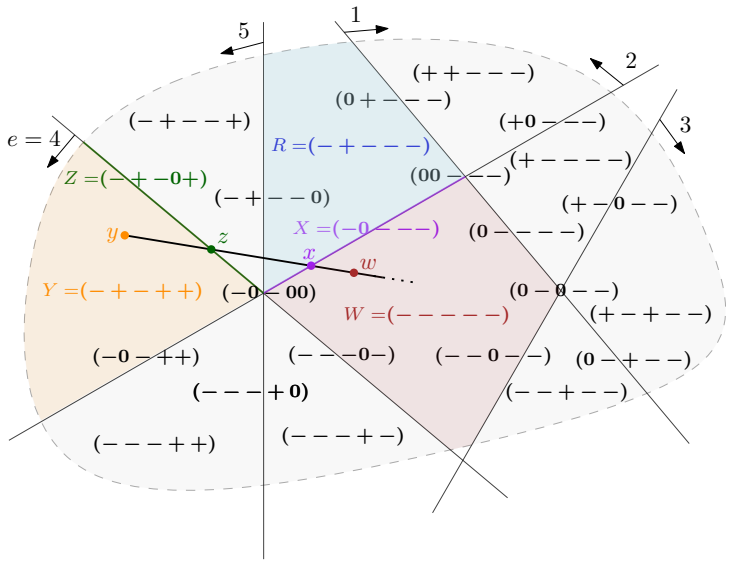


FIGURE 1.10. – Un arrangement d'hyperplans $\mathscr{A}$ restreint à un convexe de $\mathbb{R}^m$ avec l'ensemble des covecteurs du complexe de matroïdes orientés $\mathscr{M}_0$ correspondant.

Nous pouvons expliquer de façon géométrique les différents axiomes dans le cas des COMs réalisables [13]. L'illustration 1.10 peut être utilisée comme appui pour visualiser les explications suivantes. Soient x et y deux points d'un arrangement d'hyperplans $\mathscr{A}$ restreint à un ensemble convexe ouvert de $\mathbb{R}^m$. Notons X et Y les vecteurs associés aux régions contenant respectivement x et y. Pour la composition **(C)**, considérons le segment ouvert $]xy[$ de $\mathbb{R}^m$ reliant x et y. Soit R la région la plus proche de X intersectant $]xy[$. La région R est plus proche (ou à égale distance) de Y que ne l'est X. De plus, si x est contenu sur des hyperplans, alors R est du même côté que Y par rapport à eux. Par conséquent le vecteur associé à la région R correspond exactement au résultat de la composition de X avec Y. Concernant l'élimination forte **(SE)**, s'il existe un hyperplan e séparant les régions de x et y, alors le segment $]xy[$ de $\mathbb{R}^m$ reliant x à y intersecte l'hyperplan e, notons z ce point d'intersection. Soit Z le vecteur associé à la région contenant le point z. Puisque z est sur l'hyperplan e, $Z_e = 0$. De plus, si les régions X et Y sont du même côté par rapport à un hyperplan f, *i.e.*, ont le même signe sur la coordonnée f, alors Z appartient aussi à ce côté. Autrement dit, pour tous les hyperplans ne séparant pas X de Y, ils ne séparent pas non plus R de X ou de Y. Enfin, pour la symétrie des faces **(FS)**, considérons la demi-droite D partant de y et passant par x. Soit W le vecteur associé à la plus proche région contenant n'importe quel point $w \in D$ tel que $w \notin [yx]$. Alors, tous les hyperplans qui passent par x séparent les régions associées à W et à Y, et pour tous les autres hyperplans, X et W sont du même côté. Par conséquent, le vecteur W correspond exactement au résultat de la composition de X avec $-Y$.

Un *complexe de matroïdes orientés uniformes* (CUOM) est un COM dans lequel chaque

facette est un UOM.

Soit $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ un COM et soit $A \subseteq U$. Étant donné un vecteur signé $X \in \{-1, 0, +1\}^U$, par $X \setminus A$ (ou par $X_{|U \setminus A}$) nous faisons référence à la *restriction* de X sur $U \setminus A$, *i.e.*, $X \setminus A \in \{-1, 0, +1\}^{U \setminus A}$ avec $(X \setminus A)_e = X_e$ pour tout $e \in U \setminus A$. La *suppression* de A est défini comme $\mathscr{M} \setminus A := (U \setminus A, \mathscr{L} \setminus A)$, où $\mathscr{L} \setminus A := \{X \setminus A : X \in \mathscr{L}\}$. La *contraction* de A est définie par $\mathscr{M} / A := (U \setminus A, \mathscr{L} / A)$, où $\mathscr{L} / A := \{X \setminus A : X \in \mathscr{L} \text{ et } \underline{X} \cap A = \varnothing\}$. Si $\mathscr{M}' = (U', \mathscr{L}')$ est obtenu par suppressions et contractions à partir de $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$, alors nous disons que $\mathscr{M}'$ est un *mineur* de $\mathscr{M}$.

Lemme 9. *[13, Lemma 1] La classe des COMs est close par mineurs.*

Les cocircuits et les covecteurs dans les OMs obtenus par suppression sont décrit de la façon suivante :

Lemme 10. *[17] Soit $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ un OM avec $\mathscr{C}^*$ l'ensemble des cocircuits, $\mathscr{L}$ l'ensemble des covecteurs, et $A \subseteq U$. Alors les cocircuits de $\mathscr{M} \setminus A$ sont $\mathscr{C}^* \setminus A$ et les covecteurs de $\mathscr{M} \setminus A$ sont $\mathscr{L} \setminus A$.*

Pour un COM $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ et un covecteur $X \in \mathscr{L}$, nous considérons $\mathscr{M}(X) := (U \setminus \underline{X}, \mathrm{F}(X) \setminus \underline{X})$, *i.e.*, $\mathscr{M}(X) = \mathscr{M} \setminus \underline{X}$. Attention, dans la littérature, la notation $\mathscr{M}(X)$ désigne habituellement la restriction à X qui correspond au complémentaire de $\mathscr{M}(X)$ défini au-dessus. D'après BANDELT, CHEPOI et KNAUER [13], nous avons :

Lemme 11. *[13] Pour tout covecteur X d'un COM $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}(X)$ est un OM.*

Puisque les OMs sont des COMs, l'ensemble des covecteurs de chaque face d'un OM induit un OM et les facettes correspondent aux faces des cocircuits.

Étant donné un COM $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$, et un élément $e \in U$, l'*hyperplan* $\mathscr{L}_e^0$ de $\mathscr{L}$ défini par rapport à e est l'ensemble $\{X \in \mathscr{L} : X_e = 0\}$. Les *demi-espaces* (ouverts) positifs et négatifs supportés par l'hyperplan $\mathscr{L}_e^0$ sont $\mathscr{L}_e^+ := \{X \in \mathscr{L} : X_e = +1\}$ et $\mathscr{L}_e^- := \{X \in \mathscr{L} : X_e = -1\}$. La *carrière* $N(\mathscr{L}_e^0)$ d'un hyperplan $\mathscr{L}_e^0$ est l'union de toutes les faces $\mathrm{F}(X')$ de $\mathscr{L}$ avec $X' \in \mathscr{L}_e^0$. La carrière $N(\mathscr{L}_e^0)$ moins $\mathscr{L}_e^0$ divise $N(\mathscr{L}_e^0)$ en deux parties : sa partie positive $N^+(\mathscr{L}_e^0) := \mathscr{L}_e^+ \cap N(\mathscr{L}_e^0)$ et sa partie négative $N^-(\mathscr{L}_e^0) := \mathscr{L}_e^- \cap N(\mathscr{L}_e^0)$. Nous appelons *demi-carrières* ces deux parties. Nous pouvons aussi définir les *demi-espaces étendus* positifs et négatifs par $\overline{\mathscr{L}_e^+} := \mathscr{L}_e^+ \cup N(\mathscr{L}_e^0)$ et $\overline{\mathscr{L}_e^-} := \mathscr{L}_e^- \cup N(\mathscr{L}_e^0)$. La figure 1.11 illustre les notions de ce paragraphe.

Proposition 1. *[13, Proposition 6] Dans les COMs, les demi-espaces (étendus ou non), les hyperplans, les carrières, et les demi-carrières sont des COMs. Dans les OMs, les hyperplans et les carrières sont des OMs.*

Une propriété importante des COMs est qu'ils peuvent tous être obtenus par amalgamation à partir de leurs faces maximales, *i.e.*, ils sont des amalgames d'OMs. Nous allons

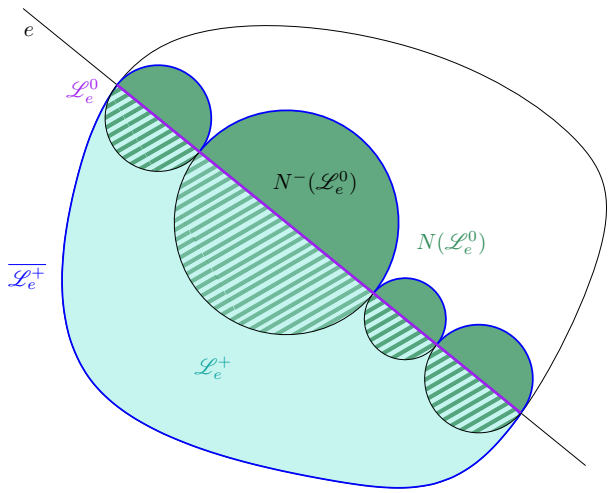


FIGURE 1.11. – Schéma d'un COM $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ avec l'hyperplan $\mathscr{L}_e^0$, le demi-espace positif $\mathscr{L}_e^+$, la carrière $N(\mathscr{L}_e^0)$, la demi-carrière $N^-(\mathscr{L}_e^0)$, et le demi-espace étendu $\overline{\mathscr{L}_e^+}$ définis par rapport à e.

définir formellement cette notion en suivant [13]. Considérons un COM $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ qui n'est pas un OM. En d'autres termes, $\mathscr{M}$ contient au moins deux facettes. Posons $\mathscr{L}' := \mathscr{L}_e^-$ et $\mathscr{L}'' := \overline{\mathscr{L}_e^+}$. D'après la proposition 1, les systèmes de vecteurs signés $(U, \mathscr{L}')$, $(U, \mathscr{L}'')$, et $(U, \mathscr{L}' \cap \mathscr{L}'')$ sont des COMs. BANDELT, CHEPOI et KNAUER [13] ont aussi montré que $\mathscr{L}' \setminus \mathscr{L}'' \neq \varnothing$ et $\mathscr{L}'' \setminus \mathscr{L}' \neq \varnothing$, et que les deux inclusions $\mathscr{L}' \circ \mathscr{L}'' \subseteq \mathscr{L}'$ et $\mathscr{L}'' \circ \mathscr{L}' \subseteq \mathscr{L}''$ sont vérifiées. Ainsi, un système de vecteurs signés $(U, \mathscr{L})$ est un *COM-amalgame* de deux COMs $(U, \mathscr{L}')$ et $(U, \mathscr{L}'')$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\mathscr{L} = \mathscr{L}' \cup \mathscr{L}''$ avec $\mathscr{L}' \setminus \mathscr{L}'', \mathscr{L}'' \setminus \mathscr{L}', \mathscr{L}' \cap \mathscr{L}'' \neq \varnothing$;
2. $(U, \mathscr{L}' \cap \mathscr{L}'')$ est un COM ;
3. $\mathscr{L}' \circ \mathscr{L}'' \subseteq \mathscr{L}'$ et $\mathscr{L}'' \circ \mathscr{L}' \subseteq \mathscr{L}''$;
4. pour $X \in \mathscr{L}' \setminus \mathscr{L}''$ et pour $Y \in \mathscr{L}'' \setminus \mathscr{L}'$ tels que $X^0 = Y^0$, il existe un plus court chemin dans l'hypercube sur $\{-1, +1\}^{U \setminus X^0}$ pour lequel tous ses sommets et les barycentres de ses arêtes appartiennent à $\mathscr{L} \setminus X^0$.

Proposition 2. *[13, Proposition 7 & Corollary 2] Le COM-amalgame de deux COMs $(U, \mathscr{L}')$ et $(U, \mathscr{L}'')$ est un COM $(U, \mathscr{L})$ dans lequel chaque facette est une facette d'au moins un des deux composants. Tout COM qui n'est pas un OM est obtenu via des COM-amalgames successifs à partir de ses facettes.*

D'un point de vue topologique, il est connu que tout arrangement d'hyperplans affines de $\mathbb{R}^{m-1}$ peut être étendu en un arrangement d'hyperplans central de $\mathbb{R}^m$. Ainsi, en considérant un arrangement d'hyperplans affines $\mathscr{A}$, l'ensemble de tous les vecteurs signés représentant les différentes régions de $\mathscr{A}$ correspond à l'ensemble des covecteurs d'un *matroïde orienté affine réalisable*. Plus généralement, une classe particulière des COMs correspondant aux demi-espaces des OMs est appelée *matroïde orienté affine* (AOM) [10, 56].

1.3.3. Systèmes amples

Nous avons vu que les OMs forment une sous-classes des COMs. Dans cette sous-section, nous allons définir de façon axiomatique les systèmes de vecteurs signés amples qui constituent aussi une sous-classe importante des COMs. Pour $\mathscr{L} \subseteq \{-1,0,+1\}^U$, on pose $\uparrow\mathscr{L} := \bigcup_{X\in\mathscr{L}} \left\{Y \in \{-1,0,+1\}^U : X \leq Y\right\}$.

Un *système ample* (AMP) est un COM $\mathscr{M} = (U,\mathscr{L})$ vérifiant l'axiome suivant :
(IC) (**Composition idéale**) $\uparrow\mathscr{L} = \mathscr{L}$.

Rappelons qu'un ensemble X sur un univers U peut être vu comme une application de U dans $\{0,1\}$, ou de manière équivalente de U dans $\{-1,+1\}$. Dans ce dernier cas, $X_e = +1$ si $e \in X$ et $X_e = -1$ sinon. Les systèmes amples sont appelés ainsi car ils sont en bijection avec les familles amples. En effet, l'ensemble des covecteurs maximaux d'un système ample, *i.e.*, l'ensemble de ses $\{-1,+1\}$-vecteurs, forme une famille ample. Les deux résultats suivant pour les systèmes amples sont implicites dans les articles de LAWRENCE [64] et de BANDELT et al. [10].

Lemme 12. *La classe des AMPs est close par mineurs.*

Proposition 3. *Dans les AMPs, les demi-espaces (étendus ou non), les hyperplans, les carrières, et les demi-carrières sont des AMPs.*

Un COM-amalgame de deux AMPs $(U,\mathscr{L}')$ et $(U,\mathscr{L}'')$ tels que $(U,\mathscr{L}'\cap\mathscr{L}'')$ est un AMP est appelé un *AMP-amalgame*. Le résultat qui suit est une conséquence directe de la proposition 2. En effet, ce résultat sur les AMPs n'est pas énoncé dans [13, Proposition 7], cependant il découle de la définition des AMPs qui sont des COMs satisfaisant l'axiome **(IC)**.

Corollaire 1. *Le AMP-amalgame de deux AMPs est un AMP. Tout AMP qui n'est pas un cube est obtenu via des AMP-amalgames successifs à partir de ses faces maximales.*

2. Cubes partiels : rappels

Sommaire

2.1 La relation d'équivalence Θ 38
2.1.1 PC-mineurs 41
2.1.2 Expansions isométriques 45
2.2 Graphes médians 46
2.3 Cubes partiels amples 48
2.4 Graphes de topes des OMs et des COMs 50
2.5 État de l'art 52

Les cubes partiels constituent une classe centrale de la théorie métrique des graphes. Dans le chapitre 1 (théorème 1), nous avons donné la caractérisation des cubes partiels de DJOKOVIĆ [36]. Afin de plonger isométriquement un cube partiel G dans un hypercube, DJOKOVIĆ a aussi introduit une relation binaire sur les arêtes de G que nous présentons dans la section 2.1. Les cubes partiels contiennent de nombreuses classes de graphes. En particulier, les arbres, les graphes médians, les graphes de 1-inclusion des familles amples, ou les graphes de topes des complexes de matroïdes orientés sont des cubes partiels. Ces trois dernières classes font respectivement l'objet des sections 2.2, 2.3, et 2.4. Pour terminer, nous donnons un bref aperçu des différents travaux sur les cubes partiels dans la section 2.5.

2.1. La relation d'équivalence Θ

Rappelons que le théorème 1 garantit qu'un cube partiel est un graphe biparti tel que pour toute arête uv, les ensembles $W(u,v)$ et $W(v,u)$ sont convexes où $W(u,v) := \{x \in V : \mathrm{d}(x,u) < \mathrm{d}(x,v)\}$. Afin d'obtenir un plongement isométrique de G dans un hypercube, DJOKOVIĆ [36] a introduit la relation binaire Θ sur les arêtes de G qui suit : pour toute paire d'arêtes $e := uv$ et $e' := u'v'$, $e\Theta e'$ si et seulement si $u' \in W(u,v)$ et $v' \in W(v,u)$. Sous les conditions du théorème, $e\Theta e'$ si et seulement si $W(u,v) = W(u',v')$ et $W(v,u) = W(v',u')$, *i.e.*, Θ est une relation d'équivalence. Soient $E_1, \ldots, E_m$ les classes d'équivalence de Θ, appelées Θ-*classes*. Les arêtes appartenant à une même Θ-classe sont exactement les arêtes correspondant à une même dimension de l'hypercube. La *dimension isométrique* d'un cube partiel est la dimension du plus petit hypercube dans lequel il est plongé isométriquement. Nous pouvons constater que la dimension isométrique d'un cube partiel est égale à son nombre de Θ-classes. Soit b un sommet arbitraire de G, appelé *sommet de base*. Pour chaque Θ-classe E_i de G, nous considérons une arête uv de E_i dans G. Cette arête nous permet de définir

une paire de demi-espaces complémentaires $\{G_i^-, G_i^+\}$ de G définies par $G_i^- := G(W(u,v))$ et $G_i^+ := G(W(v,u))$. Pour chacune de ces Θ-classes E_i, nous supposons que $b \in G_i^-$. DJOKOVIĆ [36] a montré que le plongement isométrique φ de G dans l'hypercube m-dimensionnel Q_m est obtenu en posant $\varphi(v) := \{i : v \in G_i^+\}$ pour tout sommet $v \in V$. Ainsi, $\varphi(b) = \varnothing$ et pour tout $u, v \in V(G), \mathrm{d}_G(u,v) = \left|\varphi(u)\Delta\varphi(v)\right|$ où Δ est l'opérateur de la différence symétrique.

Remarque 1. Les bipartitions $\{G_i^+, G_i^-\}, i = 1, \ldots, m$, peuvent être définies pour tous les sous-graphes (isométriques ou non) de G dans l'hypercube Q_m. En particulier, si E_i est une Θ-classe de Q_m, alors retirer les arêtes de Q_m en laissant leurs extrémités, divise Q_m en deux hypercubes $(m-1)$-dimensionnel Q' et Q''. De plus, G_i^+ et G_i^- correspondent respectivement à l'intersection de G avec Q' et Q''.

Lemme 13. *[1, 5, 24] Tout sous-graphe convexe d'un cube partiel est l'intersection de demi-espaces.*

Démonstration. Soit H un sous-graphe convexe d'un cube partiel G de Q_m. Cela signifie que l'intersection de G avec le plus petit hypercube $\mathrm{C}(H)$ de Q_m contenant H est H. Comme $\mathrm{C}(H)$ est un sous-cube de Q_m, $\mathrm{C}(H)$ est l'intersection de demi-espaces de Q_m. Nous en concluons que le graphe $G \cap \mathrm{C}(H)$ est l'intersection de ces mêmes demi-espaces dans G. □

Pour une Θ-classe E_i de G, la *frontière* ∂G_i^+ du demi-espace G_i^+ est le graphe induit par les sommets de G_i^+ ayant un voisin dans G_i^-. Nous pouvons définir de façon analogue ∂G_i^-. Remarquons que les deux frontières ∂G_i^+ et ∂G_i^- sont des sous-graphes isomorphes mais pas forcément isométriques. La figure 2.1 illustre une Θ-classe E_i d'un cube partiel G, les demi-espaces G_i^+ et G_i^- et leurs frontières.

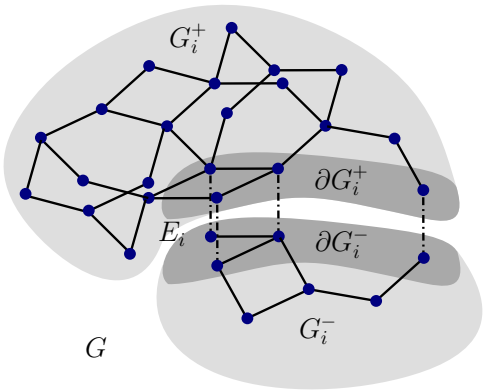


FIGURE 2.1. – Demi-espaces et frontières définis par une Θ-classe E_i d'un cube partiel G.

Soit E_i une Θ-classe fixée de G. L'*hyperplan* H_i par rapport à E_i est le graphe dont les sommets correspondent aux (milieux des) arêtes de E_i et deux sommets sont adjacents dans H_i si et seulement si les arêtes correspondantes appartiennent à un même carré de G. Nous pouvons constater que H_i est isomorphe à ∂G_i^- et ∂G_i^+. Du point de vue de la combinatoire, H_i est le graphe de 1-inclusion de la famille d'ensembles définie par ∂G_i^-.

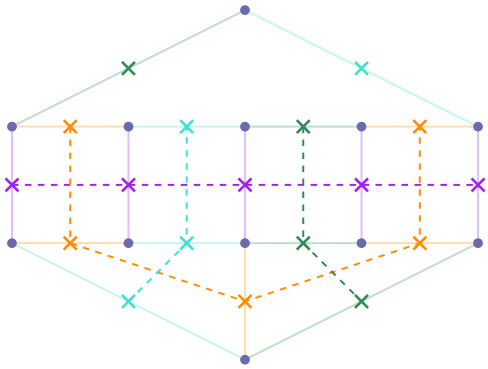


FIGURE 2.2. – L'ensemble des hyperplans d'un cube partiel G dont les sommets sont représentés par des croix et les arêtes en pointillées. Chaque Θ-classe de G est représentée par une couleur différente et son hyperplan correspondant est représenté par la même couleur.

Deux Θ-classes E_i et E_j *se croisent* (ou *s'intersectent*) dans un cube partiel G si les 4 intersections $G_i^- \cap G_j^-, G_i^- \cap G_j^+, G_i^+ \cap G_j^-$, et $G_i^+ \cap G_j^+$ sont non vides. Sinon elles sont dites *parallèles*. Soit H un sous-graphe convexe d'un cube partiel G. Nous disons qu'une Θ-classe E_i de G *croise* (ou *intersecte*) H si H contient une arête de E_i. Si E_i ne croise pas H et qu'il existe une arête uv de E_i avec $u \in H$ et $v \notin H$, alors nous disons que E_i *touche* (*"osculate"* en anglais) H. Sinon, E_i est dite *disjointe* de H. Nous dénotons par $\mathrm{osc}(H)$ l'ensemble de tous les éléments i tels que E_i touche H et par $\mathrm{cross}(H)$ l'ensemble de tous les éléments i tels que E_i croise H.

Lemme 14. *Un (u,v)-chemin P d'un cube partiel G est un plus court chemin si et seulement si toutes les arêtes de P appartiennent à des Θ-classes différentes de G.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe une Θ-classe E_i telle que $|P \cap E_i| \geq 2$. Soient xy et $y'x'$ deux arêtes de $P \cap E_i$ consécutives par rapport à P, *i.e.*, il n'existe pas d'autres arêtes de $P \cap E_i$ entre les arêtes xy et $y'x'$ dans P. Alors x, x' appartiennent au même demi-espace H_i^- ou H_i^+, et y, y' appartiennent au demi-espace complémentaire. Puisque $y, y' \in \mathrm{I}(x, x')$, nous obtenons une contradiction avec le théorème 1. □

Lemme 15. *Soient G un cube partiel et H un sous-graphe porté de G. Soient v un sommet de G et v' sa porte dans H. Alors toutes les arêtes sur les plus courts (v,v')-chemins sont dans des Θ-classes distinctes de celles intersectant H.*

Démonstration. Supposons qu'un (v,v')-chemin P contienne une arête zz' d'une Θ-classe E_i de H. Soit xy une arête de H appartenant à E_i. Comme G est un graphe biparti, supposons que $\mathrm{d}(v',x) < \mathrm{d}(v',y)$. Puisque v' est la porte du sommet v dans H, le chemin R composé de P, d'un plus court (v',x)-chemin de H et de l'arête xy est un plus court (v,y)-chemin de G. Or R contient deux arêtes de E_i, donc d'après le lemme 14, R n'est pas un plus court chemin. □

Lemme 16. *Soit G un cube partiel. Si pour toute Θ-classe E_i, $G \simeq G_i^+ \square K_2$, alors G est un hypercube.*

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que toutes paires de Θ-classes E_i et E_j de G se croisent, *i.e.*, $G_i^+ \cap G_j^+, G_i^- \cap G_j^+, G_i^+ \cap G_j^-, G_i^- \cap G_j^- \neq \emptyset$. En effet, puisque $G \simeq G_i^+ \square K_2$, après la contraction de E_i nous obtenons un graphe isomorphe à G_i^+ et G_i^-, constitué des mêmes Θ-classes que G sauf E_i. Ainsi, toutes les autres Θ-classes E_j croisent à la fois G_i^+ et G_i^-. Nous affirmons que G_i^+ satisfait les hypothèses du lemme 16. Pour chaque sommet dans le demi-espace $G_i^+ \cap G_j^+$ de G_i^+ définit par E_j, son unique voisin par rapport à la factorisation $G \simeq G_j^+ \square K_2$ est dans $G_i^+ \cap G_j^-$ et vice versa. Donc, $G_i^+ \simeq (G_i^+ \cap G_j^+) \square K_2$. En raisonnant de la même manière, nous pouvons montrer la même chose pour G_i^-. Par hypothèse d'induction, G_i^+ et G_j^+ sont des hypercubes. Par conséquent, G est le produit cartésien d'un hypercube avec une arête, donc un hypercube lui-même. $\square$

2.1.1. PC-mineurs

Rappelons que, dans la théorie des graphes, un *mineur* d'un graphe est obtenu en effectuant une ou plusieurs opérations élémentaires qui suivent : suppression d'un sommet isolé, suppression d'une arête, et contraction d'une arête. Il est facile de s'apercevoir que les cubes partiels ne sont pas clos par mineurs. Cependant, il existe une notion de mineur plus appropriée dans les cubes partiels préservant la propriété d'être un cube partiel. Nous l'introduisons dans cette sous-section.

Soit E_i une Θ-classe d'un cube partiel G. Une *restriction élémentaire* (ou *(i-)restriction*), notée $\rho_i(G)$, consiste à restreindre G à l'un de ses deux demi-espaces G_i^+ ou G_i^-. Pour être plus précis, nous les notons parfois respectivement $\rho_i^+(G)$ et $\rho_i^-(G)$. À gauche de la figure 2.3, nous illustrons une restriction du cube partiel G. Plus généralement, une restriction est un sous-graphe de G induit par l'intersection d'un ensemble de demi-espaces (non complémentaires) de G. Une telle intersection est un sous-graphe convexe de G, donc un cube partiel. D'après le lemme 13, comme tout sous-graphe convexe d'un cube partiel G est l'intersection de demi-espaces, l'ensemble des restrictions de G coïncident avec l'ensemble des sous-graphes convexes de G. En effet, pour tout sous-ensemble de sommets S, nous avons que $\mathrm{conv}(S)$ est l'intersection de tous les demi-espaces contenant S. En particulier, la classe des cubes partiels est close par restrictions.

Le graphe $\pi_i(G)$ obtenu à partir de G en contractant l'ensemble des arêtes de E_i est appelé une *contraction élémentaire* (ou *(i-)contraction*) de G. La contraction d'une Θ-classe E_i d'un cube partiel G est donnée dans la figure 2.3. Pour un sommet $v \in V(G)$, nous notons $\pi_i(v)$ l'image de v par la i-contraction. Si uv est une arête de E_i, alors $\pi_i(u) = \pi_i(v)$, sinon $\pi_i(u) \neq \pi_i(v)$. Aussi, nous pouvons appliquer π_i à un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$ en prenant $\pi_i(S) := \{\pi_i(v) : v \in S\}$. D'après CHEPOI [25, Theorem 3], $\pi_i(G)$ est un sous-graphe isométrique de Q_{m-1}. Par conséquent, la classe des cubes partiels est closes par contractions. Notons aussi que les contractions commutent. Autrement dit, pour toutes Θ-classes distinctes E_i et E_j de G, $\pi_i(\pi_j(G)) = \pi_j(\pi_i(G))$. Pour un ensemble A de Θ-classes de G, nous notons $\pi_A(G)$ le

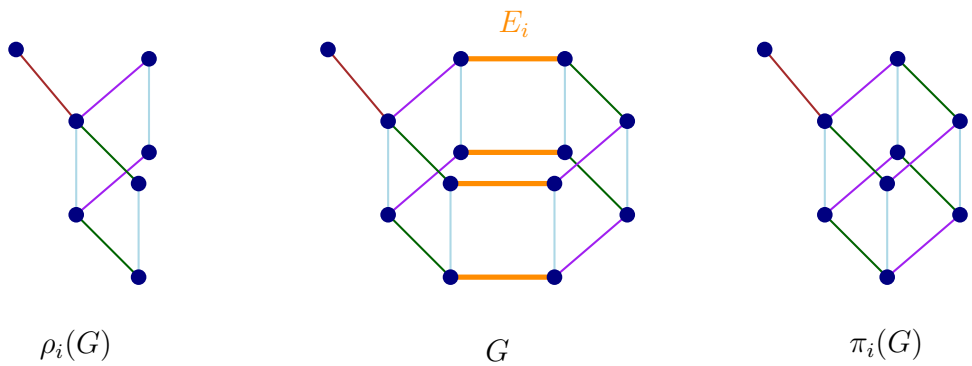


FIGURE 2.3. – Deux pc-mineurs du cube partiel G par rapport à la Θ-classe E_i représentée en orange. À gauche une restriction et à droite une contraction.

sous-graphe isométrique de $Q_{m-|A|}$ obtenu à partir de G en contractant les Θ-classes de A.

Le graphe obtenu à partir d'un cube partiel G par une contraction ou une restriction est un cube partiel appelé *mineur de cubes partiels* (ou *pc-mineur*) de G. Précisons que G est un pc-mineur de lui-même car $\pi_\varnothing(G) = G$ et que nous parlerons de pc-mineur *propre* pour parler d'un pc-mineur G' de G distinct de G. La notion de pc-mineur a été utilisée de façon implicite par CHEPOI [24, 26] lors de la caractérisation des graphes de Pasch et ont été introduits explicitement par CHEPOI, KNAUER et MARC [28].

Lemme 17. *La classe des cubes partiels est close par pc-mineurs.*

De plus, tout sous-ensemble de restrictions et de contractions d'un cube partiel G donne le même cube partiel, indépendamment de l'ordre dans lequel nous les effectuons.

Lemme 18. *[28] Contractions et restrictions commutent dans les cubes partiels.*

Le lemme 17 garantit que les graphes obtenus par pc-mineurs à partir d'un cube partiel sont des cubes partiels. Étant donné un ensemble $\mathscr{X}$ de cubes partiels, nous pouvons considérer la classe $\mathscr{F}(\mathscr{X})$ des cubes partiels n'ayant aucun des cubes partiels de $\mathscr{X}$ comme pc-mineur. KNAUER et MARC [62] ont prouvé que le problème de déterminer si un cube partiel est dans la classe $\mathscr{F}(\mathscr{X})$, où $\mathscr{X}$ est un ensemble fini de cubes partiels, est décidable en temps polynomial. De nombreuses classes de cubes partiels peuvent être caractérisées par un faible nombre de pc-mineurs interdits. Nous retrouvons par exemple $\mathscr{F}(Q_2)$ qui est la classe des arbres, $\mathscr{F}(P_3)$ celle des hypercubes, et $\mathscr{F}(K_2 \square P_3)$ la classe des cubes partiels dont les composantes 2-connexes sont des cycles de longueur paire [66].D'autres obstructions aboutissent à des classes fondamentales de la théorie métrique des graphes. MARC [66, Theorem 4.4.4] a montré que les graphes presque médians correspondent exactement à la famille $\mathscr{F}(C_6)$. CHEPOI, KNAUER et MARC [28] ont caractérisé par pc-mineurs exclus les graphes hypercellulaires, les graphes cellulaires bipartis, et les graphes médians. Ces classes correspondent respectivement aux classes $\mathscr{F}(Q_3^-)$, $\mathscr{F}(Q_3^-, Q_3)$, et $\mathscr{F}(Q_3^-, C_6)$ où Q_3^- est le cube 3-dimensionnel moins un sommet. Les graphes médians sont présentés plus en détail dans

la section 2.2. KNAUER et MARC [62] ont aussi montré que les cubes partiels appartenant à $\mathscr{F}(SK_4, Q_3)$ sont exactement les graphes de topes des COMs de rang 2 et ceux dans $\mathscr{F}(C_6, Q_3)$ sont les graphes de topes des AMPs de VC-dimension 2.

Un des résultats fondamentaux de la théorie des graphes est basé sur la notion de mineurs. Le *théorème des mineurs*, appelé aussi *théorème de Robertson-Seymour*, garantit que toute famille de graphes close par mineurs peut être caractérisée par un ensemble fini de mineurs exclus. Observons que les classes closes par pc-mineurs peuvent avoir un ensemble infini d'obstructions. Effectivement, la classe des cubes partiels planaires [34], ou encore la classe des graphes de topes des COMs que nous verrons dans la section 2.4 ont un ensemble infini d'exclusions.

Soit $\mathscr{Y}$ un ensemble de cubes partiels. Nous pouvons aussi considérer la classe $\mathscr{F}^*(\mathscr{Y})$ des cubes partiels tels que leurs pc-mineurs ne contiennent aucun des cubes partiels de $\mathscr{Y}$ comme sous-graphe isométrique. Supposons qu'un cube partiel G appartienne à la classe $\mathscr{F}^*(\mathscr{Y})$ pour un certain ensemble $\mathscr{Y}$ de cubes partiels. Alors, tous les pc-mineurs exclus de G contiennent un cube partiel de $\mathscr{Y}$ comme sous-graphe isométrique. Nous pouvons vérifier que les pc-mineurs exclus minimaux de G contenant un certain cube partiel $H \in \mathscr{Y}$ ont exactement la même dimension isométrique que H, *i.e.*, ils intersectent les mêmes Θ-classes. Il en découle le résultat suivant :

Lemme 19. *Soit $G \in \mathscr{F}^*(\mathscr{Y})$ et soit $\mathscr{Z}$ l'ensemble des cubes partiels dans $C(H)$ contenant H comme sous-graphe isométrique pour tout $H \in \mathscr{Y}$. Alors $G \in \mathscr{F}(\mathscr{X})$ où l'ensemble $\mathscr{X}$ contient tous les cubes partiels minimaux par pc-mineurs de $\mathscr{Z}$.*

Un cube partiel G est dit *affine* s'il existe un cube partiel antipodal G' tel que G est un demi-espace de G'. KNAUER et MARC [62] ont montré que les classes des cubes partiels affines et des cubes partiels antipodaux sont closes par contractions :

Lemme 20. *[62] Les cubes partiels affines et antipodaux sont clos par contractions.*

Il est essentiel de regarder comment se comportent les sous-graphes métriques dans les cubes partiels quand nous effectuons une contraction ou une restriction. Nous montrons dans le lemme 21 que les sous-graphes isométriques sont préservés par pc-mineurs, puis nous présenterons le résultat de CHEPOI, KNAUER et MARC [28] dans le lemme 22 établissant que les sous-graphes portés sont aussi préservés par pc-mineurs.

Lemme 21. *Soit H un sous-graphe isométrique d'un cube partiel G. Alors tout pc-mineur de H est un sous-graphe isométrique d'un pc-mineur de G.*

Démonstration. Pour démontrer ce lemme, il suffit de montrer ce résultat pour une contraction et une restriction de H. Soit E_i une Θ-classe de H, donc de G. Posons $H' := \pi_i(H)$, $G' := \pi_i(G)$, $H'' := \rho_i(H)$, et $G'' := \rho_i(G)$. Posons aussi $u' := \pi_i(u)$ et $u'' := \rho_i(u)$ pour tout $u \in V(G)$. Remarquons que $H' \subseteq G'$ et $H'' \subseteq G''$. Montrons que H' (resp. H'') est un sous-graphe isométrique de G' (resp. G''). Soient u et v deux sommets de H. Si u et v sont dans le même demi-espace défini par E_i (*i.e.*, $u, v \in V(H_i^+)$ ou $u, v \in V(H_i^-)$), alors $\mathrm{d}_{H'}(u', v') = \mathrm{d}_H(u, v) = \mathrm{d}_G(u, v)$.

Comme $H_i^+ \subseteq G_i^+$ et $H_i^- \subseteq G_i^-$, $\mathrm{d}_{G'}(u', v') = \mathrm{d}_G(u, v)$. De même, si u et v sont séparés par E_i (*i.e.*, $u \in V(H_i^+)$ ou $v \in V(H_i^-)$), alors nous avons $\mathrm{d}_{H'}(u', v') = \mathrm{d}_H(u, v) - 1 = \mathrm{d}_G(u, v) - 1 = \mathrm{d}_{G'}(u', v')$. Il reste donc à montrer que H'' est un sous-graphe isométrique de G''. Puisque H'' est un demi-espace de H, c'est en particulier un sous-graphe convexe de H. Ainsi, pour tout $u'', v'' \in V(H'')$, $\mathrm{d}_{H''}(u'', v'') = \mathrm{d}_H(u, v) = \mathrm{d}_G(u, v)$. Comme G'' est un sous-graphe convexe de G et $H'' \subseteq G''$, pour tout $u'', v'' \in V(H'')$, $\mathrm{d}_{G''}(u'', v'') = \mathrm{d}_G(u, v) = \mathrm{d}_{H''}(u'', v'')$. □

Lemme 22. *[28, Lemma 10] Si H est un sous-graphe porté d'un cube partiel G, alors $\pi_i(H)$ et $\rho_i^+(H)$ sont respectivement des sous-graphes portés de $\pi_i(G)$ et $\rho_i^+(G)$.*

Nous avons vu que les sous-graphes convexes coïncident avec les restrictions. En revanche, il n'est pas toujours vrai qu'en contractant une Θ-classe dans un cube partiel, les sous-graphes convexes soient encore convexes, voir l'exemple de la figure 2.4. Les lemmes 23 et 24 regroupent les conditions nécessaires pour que les sous-graphes convexes soient préservés par contractions.

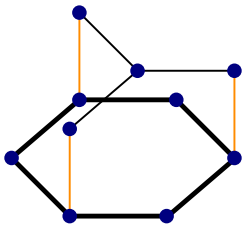


FIGURE 2.4. – La convexité du sous-graphe en gras d'un cube partiel n'est pas préservée lors de la contraction de la Θ-classe orange.

Lemme 23. *Soit H un sous-graphe convexe d'un cube partiel G. Si E_i est une Θ-classe croisant ou disjointe de H, alors $\pi_i(H)$ est un sous-graphe convexe de $\pi_i(G)$. De plus, $\mathrm{osc}(\pi_i(H)) = \mathrm{osc}(H)$, où $\mathrm{osc}(H)$ est considéré dans G et $\mathrm{osc}(\pi_i(H))$ est considéré dans $\pi_i(G)$;*

Démonstration. Soit $H' = \pi_i(H)$. Pour commencer, puisque $i \notin \mathrm{osc}(H)$, le fait que H' est un sous-graphe convexe de $\pi_i(G)$ provient d'un résultat de CHEPOI, KNAUER et MARC [28, Lemma 5]. Ensuite, l'inclusion $\mathrm{osc}(H) \subseteq \mathrm{osc}(H')$ est évidente. S'il existe $j \in \mathrm{osc}(H') \setminus \mathrm{osc}(H)$, alors il existe une arête $\pi_i(u)\pi_i(v)$ de $\pi_i(H)$ appartenant à la Θ-classe E_j avec $\pi_i(u) \in V(H')$ et $\pi_i(v) \notin V(H')$. Ainsi, $\pi_i(u)\pi_i(v)$ vient d'une arête uv de G appartenant à E_j. Comme $j \notin \mathrm{osc}(H)$, les sommets u et v n'appartiennent pas à H. Il en découle qu'il existe une arête uw de E_i avec $w \in V(H)$. Donc E_i touche H, contradiction. □

Lemme 24. *[28, Lemma 7] Soit G un cube partiel et soit E_i une Θ-classe de G. Si S est un sous-ensemble de sommets de G, alors $\pi_i(\mathrm{conv}(S)) \subseteq \mathrm{conv}(\pi_i(S))$. De plus, si E_i croise S, alors $\pi_i(\mathrm{conv}(S)) = \mathrm{conv}(\pi_i(S))$.*

Le lemme suivant provient d'un résultat plus général de CHEPOI, KNAUER et MARC [28, Proposition 1] :

Lemme 25. *Soient G un cube partiel et C un cycle isométrique de G. Si* $\mathrm{conv}(C)$ *n'est pas portée, alors soit il existe une Θ-classe E_i telle que* $\mathrm{conv}(\pi_i(C))$ *n'est pas portée dans $\pi_i(G)$, soit il existe un entier $m \geq 3$ tel que G contient une subdivision entière de K_{m+1} comme sous-graphe isométrique.*

D'autre part, il est connu que les produits cartésiens de cubes partiels sont des cubes partiels. Par simplicité, nous supposons que les Θ-classes des facteurs sont indexées par des entiers distincts. Une Θ-classe E_j d'un produit cartésien Γ est formée par l'ensemble des copies des arêtes de la Θ-classe E_j dans le facteur correspondant. En étudiant les pc-mineurs d'un produit cartésien de cubes partiels, nous obtenons le résultat qui suit :

Lemme 26. *Soit G le produit cartésien de m cubes partiels $G_1, \ldots, G_m$. Tout pc-mineur de G est un produit cartésien de pc-mineurs de ses facteurs.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la contraction, ou la restriction, dans G est un produit cartésien de pc-mineurs de ses facteurs. Soit E_j une Θ-classe de G. Cette Θ-classe appartient à l'un des facteurs de G, disons G_i. Contracter E_j dans G revient à contracter l'ensemble des copies des arêtes de E_j dans G_i. Le cube partiel résultant $\pi_j(G)$ correspond alors exactement au produit cartésien $G_1 \square \cdots \square G_{i-1} \square \pi_j(G_i) \square G_{i+1} \square \cdots \square G_m$. Se restreindre à un demi-espace de G par rapport à E_j revient à garder les sommets de G qui possèdent en i-ème coordonnée un sommet de G_i^+ (respectivement de G_i^-). Par conséquent, $\rho_j(G) = G_1 \square \cdots \square G_{i-1} \square \rho_j(G_i) \square G_{i+1} \square \cdots \square G_m$. $\square$

2.1.2. Expansions isométriques

Dans l'idée de caractériser les graphes médians, MULDER [71] introduit la notion d'expansion convexe. Si G^1 et G^2 sont des sous-graphes convexes de G, alors l'expansion $\widetilde{G}$ de G est dite *convexe*. Une construction similaire a été introduite par CHEPOI [24, 25], dans le but de caractériser les sous-graphes isométriques d'hypercubes. Si G^1 et G^2 sont deux sous-graphes isométriques de G, alors la couverture (G^1, G^0, G^2) de G est dite *isométrique* et l'expansion de G par rapport à cette couverture, notée $\widetilde{G} = \psi(G)$, est appelée *expansion isométrique*. Dans les cubes partiels, l'opération d'expansion isométrique peut être vue comme l'opération inverse de la contraction d'une Θ-classe. À partir d'un cube partiel G et d'une Θ-classe E_i de G, nous pouvons considérer le pc-mineur $\pi_i(G)$ obtenu en contractant la Θ-classe E_i. Alors G peut être obtenu à partir de $\pi_i(G)$ par une expansion isométrique par rapport à $(\pi_i(G_i^+), G^0, \pi_i(G_i^-))$ où $\pi_i(G_i^+)$ et $\pi_i(G_i^-)$ sont les images de la contraction des demi-espaces G_i^+ et G_i^- de G, et G^0 est la contraction des sommets de G incidents aux arêtes de E_i. Le résultat qui suit caractérise les cubes partiels par expansions isométriques :

Proposition 4 ([24, 25])**.** *Un graphe est un cube partiel si et seulement s'il peut être obtenu par une suite d'expansions isométriques à partir de K_1.*

Pour obtenir un cube partiel G à partir de K_1, il est nécessaire de réaliser autant d'expansions isométriques que G a de Θ-classes. Ainsi, le nombre d'expansions isométriques

nécessaires pour obtenir un cube partiel G à partir de K_1 correspond à la dimension isométrique de G. De plus, les expansions isométriques préservent la convexité :

Lemme 27 ([28], Lemme 6)**.** *Si H est un sous-graphe convexe d'un cube partiel G et $\widetilde{G}$ est obtenu à partir de G par une expansion isométrique ψ, alors $\widetilde{H} := \psi(H)$ est un sous-graphe convexe de $\widetilde{G}$.*

Par la proposition 4, nous savons que l'expansion isométrique d'un cube partiel de VC-dimension d est un cube partiel. Cependant, remarquons que la VC-dimension peut croître. Nous donnons un exemple dans la figure 2.5 d'un cube partiel $\widetilde{G}$ obtenu par expansion isométrique à partir d'un cube partiel G de VC-dimension 2 qui est de VC-dimension strictement supérieure à celle de G. Dans les sections qui suivent, nous allons nous intéresser à plusieurs sous-classes des cubes partiels.

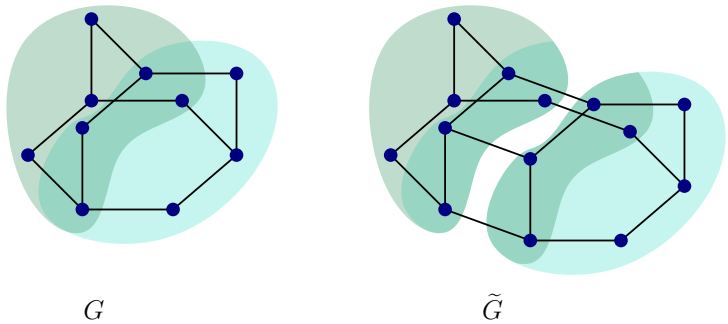


FIGURE 2.5. – Un cube partiel G de VC-dimension 2 et une expansion isométrique $\widetilde{G}$ de G de VC-dimension 3.

pour tout triplet de sommets u, v et w, il existe un unique sommet x appartenant simultanément à un plus court (u, v)-chemin, à un plus court (v, w)-chemin et à un plus court (w, u)-chemin

2.2. Graphes médians

La classe des graphes médians, une sous-classe des cubes partiels, est une généralisation de celle des arbres et de celle des hypercubes. À première vue, ces deux classes de graphes sont très différentes. Pourtant, elles partagent la propriété suivante : pour tout triplet de sommets u, v et w, il existe un unique sommet x appartenant simultanément à un plus court (u, v)-chemin, à un plus court (v, w)-chemin et à un plus court (w, u)-chemin. Les graphes vérifiant cette propriété sont appelés les *graphes médians*. Le sommet x est appelé le *médian* des trois sommets u, v et w.

Ces graphes ont été introduit indépendamment par plusieurs auteurs. AVANN [3] les a nommé "unique ternary distance graphs" dans les années 1960. Quelques temps après, NEBESKY [73] puis MULDER et SCHRIJVER [72] les ont respectivement étudié dans le cadre des

algèbres médianes et des hypergraphes de Helly. C'est finalement en 1978 que MULDER [70] les a regardé uniquement sous l'aspect de la théorie des graphes.

Comme nous venons de le mentionner, les graphes médians apparaissent sous différentes formes dans plusieurs domaines des mathématiques. Par exemple, dans l'article de synthèse « Metric graph theory and geometry : a survey » [9], il existe une correspondance entre les graphes médians et les algèbres médianes, et entre les sous-algèbres Booléennes et les ensembles de solutions des instances de 2-SAT. Basé sur un résultat de GROMOV [46], CHEPOI [27] a montré que les graphes médians sont en bijection avec le 1-squelette des complexes cubiques CAT(0). Nous les retrouvons aussi dans le domaine de la théorie de la concurrence. En effet, BARTHÉLEMY et CONSTANTIN [14] ont montré que les graphes médians sont en bijection avec les diagrammes de Hasse des domaines des structures d'évènements. Ajouté à cela, les graphes médians ont aussi des applications dans d'autres domaines. Nous pouvons par exemple constater qu'ils apparaissent en chimie en nous référant aux articles [60] et [84]. D'un point de vue de la théorie métrique des graphes, la classe des graphes médians admet de nombreuses caractérisations et de jolies propriétés. Nous en regroupons quelques-unes dans le théorème 5. L'ensemble de ces caractérisations peuvent être retrouvées dans l'article de synthèse de BANDELT et CHEPOI [9].

Théorème 5. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G est un graphe médian ;

(ii) [4] G est un rétracté d'un hypercube ;

(iii) [55, 92] si G a au moins deux sommets, alors G est soit un produit cartésien soit un amalgame porté de sous-graphes médians propres ;

(iv) [27] G est le 1-squelette des complexes cubiques CAT(0) ;

(v) [54] Tous les convexes de G sont portés ;

(vi) [71, 70] si G est fini, alors G peut être obtenu à partir de K_1 par une suite d'expansions convexes.

De la caractérisation (iv) découle que les graphes médians vérifient la condition du 3-cube qui suit :

Corollaire 2. *Soit G un graphe médian. Tout triplet de carrés de G s'intersectant deux-à-deux sur une arête et s'intersectant tous les trois sur un sommet est contenu dans un 3-cube de G.*

Lemme 28. *Tout graphe médian peut être obtenu par expansions périphériques successives sur des sous-graphes convexes à partir de K_1.*

Démonstration. Le fait qu'une expansion périphérique d'un graphe médian sur un sous-graphe convexe est médian provient de la caractérisation (vi) du théorème 5. Réciproquement, soit G un graphe médian. D'après la caractérisation (iii) du théorème 5, G est soit un produit cartésien soit un amalgame porté de sous-graphes médians propres. Comme les sous-graphes portés sont convexes dans les graphes médians, par le théorème 5 (v), nous déduisons que G est une expansion périphérique sur un sous-graphe convexe. □

2.3. Cubes partiels amples

Rappelons que les cubes partiels amples sont exactement les graphes de 1-inclusion des familles d'ensembles amples. L'article « Combinatorics of lopsided sets » [10] fournit des caractérisations métriques et récursives des familles d'ensembles amples. Nous en donnons quelques-unes dans le théorème 6. Pour un sous-ensemble $Y \subseteq U$ fixé, deux Y-cubes Q' et Q'' du graphe de 1-inclusion $G(\mathscr{S})$ d'une famille d'ensembles $\mathscr{S}$ sont appelés *cubes parallèles*. Notons $\mathrm{d}(Q', Q'')$ la distance dans $G(\mathscr{S})$ entre les sommets les plus proches de Q' et Q''. Une *galerie de longueur k* entre Q' et Q'' est une suite de Y-cubes $(Q' =: R_0, R_1, \ldots, R_{k-1}, R_k := Q'')$ de $\mathscr{S}$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $R_{i-1} \cup R_i$ est un cube. Une galerie est dite *géodésique* si elle est de longueur $\mathrm{d}(Q', Q'')$.

Théorème 6. *[10] Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G est un cube partiel ample de Q_m ;

(ii) toute paire de cubes parallèles de G peuvent être connectés dans G par une galerie géodésique ;

(iii) G est isométrique, et il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que l'hyperplan H_i et la contraction $\pi_i(G)$ sont amples ;

(iv) G est connexe et les hyperplans de G sont amples.

Une *complétion ample* d'un sous-graphe G de VC-dimension d de Q_m est un cube partiel ample contenant G comme sous-graphe. L'objectif d'une telle complétion est d'obtenir un cube partiel ample de même VC-dimension que G, ou d'une VC-dimension comparable.

Nous formulons maintenant la notion de AMP-amalgame en terme de graphes. Nous disons qu'un graphe G est un *AMP-amalgame* de G_1 et G_2 si $(G_1, G_1 \cap G_2, G_2)$ est une couverture isométrique de G, et G_1, G_2, et $G_0 = G_1 \cap G_2 \neq G_1, G_2$ sont des cubes partiels amples. La principale différence avec la notion de COM-amalgame est que la condition 4 est remplacée par la condition plus faible que G est un cube partiel. La proposition qui suit est un résultat de BANDELT et al. [11] qui n'a jamais été publié. Utilisée dans les preuves de deux résultats principaux du chapitre 5, nous donnons la preuve ci-dessous :

Proposition 5. *[11] Soit G un sous-graphe de l'hypercube Q_m qui est un AMP-amalgame de deux sous-graphes isométriques amples G_1 et G_2 de Q_m. Si G est un sous-graphe isométrique de Q_m, alors G est ample. Tout cube partiel ample peut être obtenu par AMP-amalgame à partir de ses facettes.*

Démonstration. Pour commencer, nous affirmons que tout X-cube Q de G est contenu soit dans G_1 soit dans G_2. Pour montrer cette affirmation, nous raisonnons par induction sur $k := |X|$. Puisque $G_0 = G_1 \cap G_2$ est un séparateur, l'affirmation est vraie quand $k = 1$. Supposons que l'affirmation est vraie pour tout $X' \subset U$ avec $\left|X'\right| < k$ et supposons que le X-cube Q de G contienne deux sommets $s \in V(G_1) \setminus V(G_2)$ et $t \in V(G_2) \setminus V(G_1)$ Par hypothèse d'induction, toutes les facettes de Q contenant s doivent être incluses dans G_1 et toutes les

facettes de Q contenant t doivent être incluses dans G_2. Nous en concluons que tous les sommets de Q sauf s et t (qui doivent être opposés dans Q) appartiennent à G_0. Ce qui est impossible car G_0 est ample.

En utilisant le résultat du théorème 6 (ii), nous devons montrer que toute paire de X-cubes Q_1, Q_2 de G peuvent être reliés par une galerie géodésique. Sachant que G_1 et G_2 sont amples, le résultat est vrai lorsque Q_1 et Q_2 appartiennent tous les deux à G_1 ou à G_2. D'après l'affirmation précédente, nous pouvons supposer que $Q_1 \subseteq G_1$ et $Q_2 \subseteq G_2$. Par induction sur $k = |X|$, nous montrons que Q_1 et Q_2 peuvent être reliés par une galerie géodésique contenant un X-cube de G_0. Si $k = 0$, alors Q_1 et Q_2 sont des sommets de G séparé par G_0 et c'est terminé. Soit $k > 0$. Considérons n'importe quel élément $e \in X$ et posons $X' := X \setminus \{e\}$. Soient G^+ et G^- les demi-espaces de G définis par e. Soient Q_1^+, Q_1^- et Q_2^+, Q_2^- les intersections de Q_1 et Q_2 avec les demi-espaces.Par hypothèse d'induction, Q_1^+ et Q_2^+ peuvent être reliés par une galerie géodésique $P(Q_1^+, Q_2^+)$ contenant un X'-cube R^+ dans G_0, et Q_1^- et Q_2^- peuvent être reliés par une galerie géodésique $P(Q_1^-, Q_2^-)$ contenant un X'-cube R^- dans G_0. Par conséquent, $\mathrm{d}(Q_1^+, Q_2^+) = \mathrm{d}(Q_1^+, R^+) + \mathrm{d}(R^+, Q_2^+)$ et $\mathrm{d}(Q_1^-, Q_2^-) = \mathrm{d}(Q_1^-, R^-) + \mathrm{d}(R^-, Q_2^-)$. Comme G^+ et G^- sont des sous-graphes convexes de G, $P(Q_1^+, Q_2^+) \subseteq G^+$ et $P(Q_1^-, Q_2^-) \subseteq G^-$. De plus, G_0 est ample, donc les X'-cubes R^+ et R^- peuvent être reliés dans G_0 par une galerie géodésique. Comme $R^+ \subseteq G^+$ et $R^- \subseteq G^-$, dans cette galerie, nous pouvons trouver deux X'-cubes consécutifs $Q^+ \subseteq G^+$ et $Q^- \subseteq G^-$ tels que $Q = Q^+ \cup Q^-$ est un X-cube de G_0.

Puisque Q_1 et Q sont deux X-cubes de l'ample G_1, ils peuvent être reliés dans G_1 par une galerie géodésique $P(Q_1, Q)$. De façon analogue, Q et Q_2 peuvent être reliés dans G_2 par une galerie géodésique $P(Q, Q_2)$. Nous affirmons que la concaténation de ces deux galeries est une galerie géodésique $P(Q_1, Q_2)$ entre Q_1 et Q_2, *i.e.*, $\mathrm{d}(Q_1, Q_2) = \mathrm{d}(Q_1, Q) + \mathrm{d}(Q, Q_2)$. Comme $\mathrm{d}(Q_1^+, Q_2^+) = \mathrm{d}(Q_1^-, Q_2^-) = \mathrm{d}(Q_1, Q_2)$, il suffit de montrer que $\mathrm{d}(Q_1^+, Q_2^+) = \mathrm{d}(Q_1^+, Q^+) + \mathrm{d}(Q^+, Q_2^+)$ et $\mathrm{d}(Q_1^-, Q_2^-) = \mathrm{d}(Q_1^-, Q^-) + \mathrm{d}(Q^-, Q_2^-)$.

Considérons un sommet pour chacun des cubes $Q_1^+, Q_1^-, Q_2^+, Q_2^-, R^+, R^-$, disons $q_1^+ \in Q_1^+, q_1^- \in Q_1^-, q_2^+ \in Q_2^+, q_2^- \in Q_2^-, r^+ \in R^+, r^- \in R^-$, tels que chaque pair de sommets réalise la distance entre les cubes correspondant. Alors $\mathrm{d}(q_1^+, q_1^-) = \mathrm{d}(q_2^+, q_2^-) = 1$ et $\mathrm{d}(q_1^+, q_2^+) = \mathrm{d}(q_1^+, r^+) + \mathrm{d}(r^+, q_2^+)$ et $\mathrm{d}(q_1^-, q_2^-) = \mathrm{d}(q_1^-, r^-) + \mathrm{d}(r^-, q_2^-)$. Soient q^+ et q^- deux sommets de Q^+ et Q^-, respectivement, appartenant au plus court (r^+, r^-)-chemin. De même, $\mathrm{d}(q^+, q^-) = 1$. Par conséquent, dans G nous avons $r^+, r^- \in \mathrm{I}(q_1^+, q_2^-)$ et $q^+, q^- \in \mathrm{I}(r^+, r^-)$. Comme G est un cube partiel, l'intervalle $I(q_1^+, q_2^-)$ est convexe (lemma 6), donc q^+ et q^- appartiennent à un même plus court chemin entre q_1^+ et q_2^-. En appliquant le même argument, nous déduisons que q^- et q^+ appartiennent à un même plus court chemin entre q_1^- et q_2^+. Ainsi, $\mathrm{d}(q_1^+, q_2^+) = \mathrm{d}(q_1^+, q^+) + \mathrm{d}(q^+, q_2^+)$ et $\mathrm{d}(q_1^-, q_2^-) = \mathrm{d}(q_1^-, q^-) + \mathrm{d}(q^-, q_2^-)$, impliquant que $\mathrm{d}(Q_1^+, Q_2^+) = \mathrm{d}(Q_1^+, Q^+) + \mathrm{d}(Q^+, Q_2^+)$ et $\mathrm{d}(Q_1^-, Q_2^-) = \mathrm{d}(Q_1^-, Q^-) + \mathrm{d}(Q^-, Q_2^-)$. Par conséquent, $\mathrm{d}(Q_1, Q_2) = \mathrm{d}(Q_1, Q) + \mathrm{d}(Q, Q_2)$, *i.e.*, $P(Q_1, Q_2)$ est une galerie géodésique. □

2.4. Graphes de topes des OMs et des COMs

Soit $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ un COM. Les éléments maximaux de $\mathscr{L}$ sont appelés les *topes*. Nous pouvons remarquer que les topes d'un OM $(U, \mathscr{L})$ correspondent exactement aux *coatomes* de $\mathscr{F}_{\text{big}}(\mathscr{L})$, *i.e.*, aux éléments $x \in \mathscr{F}_{\text{big}}(\mathscr{L})$ tels que $x < \hat{1}$ et tels que pour tout $z \in \mathscr{F}_{\text{big}}(\mathscr{L})$, si $x \leq y \leq \hat{1}$, alors $y = x$ ou $y = \hat{1}$. Pour tout COM $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$, l'ensemble $\mathscr{T}$ des topes est l'ensemble des $\{-1, +1\}$-vecteurs de $\mathscr{L}$. L'ensemble $\mathscr{T}$ peut être vu comme une famille de sous-ensembles de U, où pour tout $T \in \mathscr{T}$, un élément e de U appartient à T si $T_e = +$ et n'appartient pas à T sinon. Le *graphe de topes* $G(\mathscr{M})$ d'un COM $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ est le graphe de 1-inclusion de la famille d'ensembles $\mathscr{T}$ des topes de $\mathscr{M}$. En se référant au livre de BJÖRNER et al. [17], il est connu que les graphes de topes des OMs sont des cubes partiels et que l'ensemble des covecteurs d'un OM peut être retrouvé à partir de son graphe de topes (à isomorphisme près). Ces propriétés ont été généralisées aux COMs par BANDELT, CHEPOI et KNAUER [13]. En effet, ils ont montré que tout COM simple est déterminé de manière unique par ses topes et que pour tout système signé de vecteurs $(U, \mathscr{L})$ simple satisfaisant l'axiome d'élimination forte **(SE)**, le graphe de topes de $(U, \mathscr{L})$ est un cube partiel. Ainsi, les graphes de topes des COMs sont des sous-graphes isométriques d'hypercubes. Le *"Topological Representation Theorem of Oriented Matroids"* de FOLKMAN et LAWRENCE [43] caractérise les graphes de topes des OMs comme graphes des régions d'un arrangement de pseudo-sphères dans une sphère S^{d-1}, où d est le rang du OM. Une telle caractérisation pour les COMs est à ce jour une question ouverte. La figure 2.6 illustre le graphe de topes M_0 du COM réalisable $\mathscr{M}_0$ présenté dans la figure 1.10.

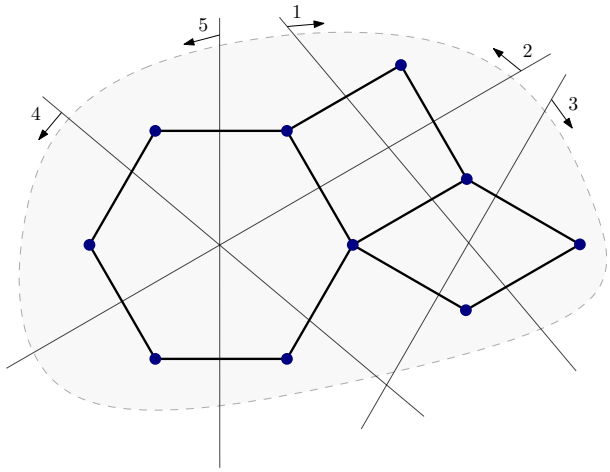


FIGURE 2.6. – Le graphe de topes M_0 du COM réalisable $\mathscr{M}_0$ (voir figure 1.10).

Sachant que les graphes de topes des COMs (et des OMs) sont des cubes partiels, nous pouvons décrire les opérations introduites précédemment sur les vecteurs signés en termes de cubes partiels. Pour un COM $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ et un covecteur $X \in \mathscr{L}$, $[X]$ correspond au sous-graphe de $G(\mathscr{M})$ induit par tous les topes de $\mathrm{F}(X)$. Nous disons que $[X]$ est la *face* de X dans $G(\mathscr{M})$. L'opération de suppression dans un COM se traduit par la contraction dans son graphe de topes :

Lemme 29. *Soit $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ un COM avec son graphe de topes $G = G(\mathscr{M})$ et soit $A \subseteq U$. Alors $\pi_A(G)$ est le graphe de topes de $\mathscr{M} \setminus A$. En particulier, si $X \in \mathscr{L}$, alors le graphe de topes de $\mathscr{M}(X)$ est isomorphe à $[X]$.*

Le lemme 30 suivant est implicite dans [13] et explicite dans [62] :

Lemme 30. *Pour tout covecteur X d'un COM $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$, la face $[X]$ est portée dans $G(\mathscr{M})$. De plus, pour tout tope Y de $\mathscr{L}$, $X \circ Y$ est la porte de Y dans $C(X)$.*

Démonstration. Considérons un tope Y de $\mathscr{L}$, *i.e.*, $Y \in \{-1,+1\}^U \cap \mathscr{L}$. D'après la définition de $X \circ Y$, $X \circ Y \in \{-1,+1\}^U$. Donc $X \circ Y$ est un tope de $\mathscr{L}$. Par la définition de $F(X)$, $X \circ Y$ appartient à $F(X)$ (et donc à $C(X)$). De plus, $(X \circ Y)_e = Y_e$ pour tout $e \in U \setminus \underline{X}$, donc nécessairement $X \circ Y$ est la porte de Y dans $C(X)$. □

Le résultat du lemme 30 implique que le graphe de topes de n'importe quel COM est obtenu par amalgamations des sous-graphes portés de ses faces, qui sont des graphes de topes de OMs.

KNAUER et MARC [62] ont montré une première caractérisation des graphes de topes des COMs via une famille infinie de pc-mineurs exclus. Cette famille est dénotée par $\mathscr{Q}^-$ et définie comme suit. Soient $X_m^{m+1} := Q_m \setminus \{(0,\dots,0,0),(0,\dots,1,0)\}$, $X_m^m = X_m^{m+1} \setminus \{(0,\dots,0,1)\}$, et $X_m^{m-i} = X_m^{m-i+1} \setminus \{e_{im}\}$. Ici e_{im} dénote le vecteur qui contient un 1 en i-ème et m-ième positions et des 0 sur ses autres coordonnées. Pour chaque $m \geq 4$, les cubes partiels $X_m^1, \dots, X_m^{m+1}$ appartiennent à $\mathscr{Q}^-$. La figure 2.7 illustre les membres de $\mathscr{Q}^-$ de dimension isométrique au plus 4. Observons qu'en particulier $X_4^1 = SK_4$.

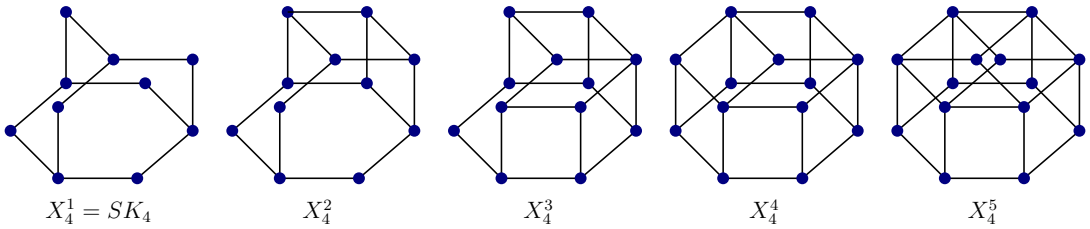


FIGURE 2.7. – Les pc-mineurs exclus de dimension isométrique ≤ 4 pour les graphes de topes des COMs.

KNAUER et MARC [62] fournissent une deuxième caractérisation des graphes de topes des COMs en se basant sur leur structure métrique. Ces deux caractérisations sont données dans le théorème 7 :

Théorème 7. *[62] Pour un graphe G, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G est le graphe de topes d'un COM ;

(ii) G est un cube partiel n'ayant aucun des cubes partiels de $\mathscr{Q}^-$ comme pc-mineur, i.e., $G \in \mathscr{F}(\mathscr{Q}^-)$;

(iii) G est un cube partiel tel que tous les sous-graphes antipodaux sont portés.

Puisque les OMs satisfont l'axiome **(Sym)**, les graphes de topes des OMs sont des cubes partiels antipodaux. Plus précisément, les graphes de topes des OMs sont exactement les cubes partiels antipodaux tels que les sous-graphes antipodaux sont portés. De plus, les graphes de topes des AOMs correspondent aux demi-espaces des graphes de topes des OMs.

Proposition 6. *[62] Le graphe de topes d'un COM est le graphe de topes d'un OM si et seulement s'il est antipodal.*

Comme pour les graphes de topes des COMs, les cubes partiels amples possèdent une caractérisation en termes de pc-mineurs exclus [62]. Nous dénotons par $\mathcal{Q}^{--}$ la famille des cubes partiels $\{Q_m^{--} : m \geq 4\}$, où $Q_m^{--} := Q_m \setminus \{(0,\ldots,0),(1,\ldots,1)\}$.

Proposition 7. *[62] Pour un graphe G, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G est le graphe de topes d'un AMP ;

(ii) G est un cube partiel n'ayant aucun des cubes partiels de $\mathcal{Q}^{--}$ comme pc-mineur, i.e., $G \in \mathcal{F}(\mathcal{Q}^{--})$;

(iii) G est un cube partiel tel que tous les sous-graphes antipodaux sont des hypercubes.

Lemme 31. *[62] Les classes des graphes de topes des COMs et des AMPs sont closes par pc-mineurs. Les classes des graphes de topes des OMs et des AOMs sont closes par contractions.*

Les graphes de topes des COMs (resp. des AMPs) de VC-dimension 2 peuvent être caractérisés par les exclusions suivantes :

Proposition 8. *[62, Corollary 7.5] La classe des graphes de topes des COMs de VC-dimension 2 coïncide avec $\mathcal{F}(Q_3, SK_4)$. La classe des cubes partiels amples de VC-dimension 2 coïncide avec $\mathcal{F}(Q_3, C_6)$.*

Ce dernier résultat se retrouve facilement en combinant la caractérisation par pc-mineurs exclus des cubes partiels de VC-dimension bornée qui est énoncée (lemme 35) et démontrée dans le chapitre 3, et la caractérisation des graphes de topes des COMs (resp. des AMPs) via leur famille $\mathcal{Q}^{-}$ (resp. $\mathcal{Q}^{--}$) de pc-mineurs exclus.

2.5. État de l'art

Les cubes partiels ont, entre autres, été introduit par GRAHAM et POLLAK [45] qui s'intéressaient à des problèmes de routage dans les réseaux téléphoniques. Comme évoqué dans ce chapitre, les cubes partiels regroupent d'importantes classes de graphes de la théorie

métrique des graphes provenant de divers domaines de recherche tels que la théorie géométrique des groupes, la combinatoire ou la géométrie discrète. Ainsi les cubes partiels ont été explorés par de nombreux auteurs, et possèdent de multiples caractérisations. Nous avons déjà mentionné la caractérisation structurelle en utilisant la convexité des demi-espaces de DJOKOVIĆ [36] et la caractérisation récursive via les expansions isométriques de CHEPOI [25].

D'autres classes de graphes intéressantes définies par des propriétés de distance ou de convexité appartiennent aussi à la classe des cubes partiels. Par exemple, nous pouvons citer les graphes bipartis avec une métrique totalement décomposable [6], les graphes de Pasch bipartis [24, 25] et de Peano bipartis [83], les graphes hypercellulaires [28], et les cubes partiels *"netlike"* [78, 79, 80, 81]. Les cubes partiels antipodaux, et plus précisément les graphes de topes des matroïdes orientés, ont aussi été étudiés [48, 82]. Pendant sa thèse, MARC [66] s'est intéressé aux propriétés des cycles convexes dans les cubes partiels et a étudié les cubes partiels préservant les nombreuses symétries de l'hypercube. Dans le but de mieux comprendre la structure des cubes partiels, IMRICH et KLAVŽAR [53] ont introduit les graphes presque médians et les graphes semi-médians, deux généralisations naturelles des graphes médians. Plus récemment, deux autres caractérisations de ces graphes sont données par BREŠAR [20] et KLAVŽAR et SHPECTOROV [58]. D'autre part, EPPSTEIN [41] a étudié la reconnaissance des cubes partiels sur n sommets. Il montre que ces derniers peuvent être reconnus et plongés dans un hypercube en temps $O(n^2)$. Pour une étude plus approfondie, le lecteur pourra se référer à l'article de synthèse [9] et aux livres [35, 47, 75].

3. VC-dimension des cubes partiels

Sommaire

3.1 Résultats 54
3.2 Pulvérisation et fibres dans les cubes partiels 55
3.3 Cubes partiels de VC-dimension bornée 56
3.4 VC-dimension et rang dans les OMs et les COMs 60

Dans le chapitre 2, nous avons vu que les cubes partiels contiennent de nombreuses classes importantes de graphes de la théorie métrique des graphes. Dans ce chapitre, nous présentons des résultats sur la VC-dimension des cubes partiels. Nous nous intéressons aussi tout particulièrement à la VC-dimension des graphes de topes des complexes de matroïdes orientés qui à un étroit lien avec la notion de rang des complexes de matroïdes orientés. Ces résultats sont utilisés dans les chapitres 4, 5, et 6.

3.1. Résultats

Dans ce chapitre, nous caractérisons les cubes partiels de VC-dimension bornée par pc-mineurs exclus. Plus précisément, nous montrons que l'ensemble des cubes partiels de VC-dimension au plus d sont exactement les cubes partiels appartenant à la classe $\mathscr{F}(Q_{d+1})$. Nous montrons que nous pouvons aussi les caractériser via les hyperplans. Cette caractérisation est intéressante puisqu'elle borne la VC-dimension d'un cube partiel G à partir de la VC-dimension des sous-graphes isomorphes aux frontières des Θ-classes de G. Ensuite, nous donnons une caractérisation des cubes partiels de VC-dimension bornée via les expansions isométriques. Cette caractérisation donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une expansion isométrique sur un cube partiel n'augmente pas sa VC-dimension.

Proposition 9. *Pour un cube partiel $G = (V, E)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G est un cube partiel de VC-dimension au plus d ;

(ii) G est un cube partiel n'ayant pas Q_{d+1} comme pc-mineur, i.e., $G \in \mathscr{F}(Q_{d+1})$;

(iii) les hyperplans de G sont de VC-dimension au plus $d-1$;

(iv) G peut être obtenu à partir du graphe K_1 via une suite $\{(G_i^1, G_i^0, G_i^2) : i = 1, \ldots, m\}$ d'expansions isométriques, où chaque G_i^0, $i = 1, \ldots, m$, est de VC-dimension au plus $d-1$.

D'autre part, nous mettons en relation la notion de rang et de VC-dimension dans les complexes de matroïdes orientés. La *VC-dimension* VC-dim($\mathscr{M}$) d'un COM $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ est la VC-dimension de son graphe de topes $G(\mathscr{M})$. Lorsque $G(\mathscr{M})$ pulvérise un ensemble $D \subseteq U$, nous disons simplement que $\mathscr{M}$ pulvérise D. La *VC-dimension* VC-dim(X) d'un covecteur $X \in \mathscr{L}$ de $\mathscr{M}$ est définie comme la VC-dimension du OM $\mathscr{M}(X)$, *i.e.*, la VC-dimension du graphe $[X]$. Plus précisément, pour les matroïdes orientés, le rang coïncide avec la VC-dimension. De plus, nous montrons que tous les ensembles pulvérisés par un OM $\mathscr{M}$ sont exactement les ensembles indépendants du matroïde sous-jacent $\underline{\mathscr{M}}$.

Proposition 10. *Soit $\mathscr{M}$ un OM, alors*

(i) VC-dim($\mathscr{M}$) = rang($\mathscr{M}$) *;*

(ii) un sous-ensemble $D \subseteq U$ est pulvérisé par $\mathscr{M}$ si et seulement si D est indépendant dans le matroïde sous-jacent $\underline{\mathscr{M}}$.

En ce qui concerne les complexes de matroïdes orientés, nous avons évoqué dans la section 2.4 que tous les graphes de topes des COMs peuvent être obtenus par amalgamation de graphes de topes d'OMs. Dans ce chapitre, nous montrons que que la VC-dimension d'un COM est égal à la plus grande VC-dimension du graphe de topes d'une de ses faces.

Proposition 11. *Soit $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ un COM, alors* VC-dim($\mathscr{M}$) = $\max\{\text{VC-dim}(\mathscr{M}(X)) : X \in \mathscr{L}\}$.

Tout d'abord, dans la section 3.2, nous définissons la pulvérisation et les fibres dans les cubes partiels. Ensuite, dans la section 3.3, nous démontrons les différentes caractérisations des cubes partiels de VC-dimension bornée qui sont énoncées dans la proposition 9. Dans la section 3.4, nous montrons, avec la proposition 14, la proposition 10(i) ainsi que le résultat de la proposition 11. Enfin, dans le lemme 38, nous prouvons la proposition 10(ii).

3.2. Pulvérisation et fibres dans les cubes partiels

Soit G un cube partiel dans $Q_m = Q(U)$. Supposons que G pulvérise le sous-ensemble Y de U. Pour un sommet v_A de $Q(Y)$ (correspondant au sous-ensemble A de Y), nous considérons $\text{pr}(v_A)$ l'ensemble des sommets de l'hypercube Q_m qui sont projetés sur v_A dans $Q(Y)$. Autrement dit, $\text{pr}(v_A)$ contient tous les sommets v_B de $Q(U)$ correspondant aux sous-ensembles B de U tels que $B \cap Y = A$. Par conséquent, le graphe induit par $\text{pr}(v_A)$ est un sous-cube de dimension $m - |Y|$ de Q_m. La *fibre de A par rapport à Y dans G* est définie par $\text{Fib}_Y(A) := G \cap \text{pr}(v_A)$. Comme $\text{pr}(v_A)$ est un sous-graphe convexe de Q_m et que G est un sous-graphe isométrique de Q_m, d'après le lemme 5, nous obtenons que la fibre $\text{Fib}_Y(A)$ de G est un sous-graphe isométrique de Q_m. D'après la définition, il est facile de voir que les fibres partitionnent les sommets de G. La définition de pulvérisation peut être reformulée de la façon suivante :

Lemme 32. *Un sous-ensemble Y de U est pulvérisé par un sous-graphe isométrique G de $Q(U)$ si et seulement si pour tout $Y' \subseteq Y$, la fibre $\mathrm{Fib}_Y(Y')$ est un sous-graphe isométrique non vide de G.*

Le lemme qui suit établit une propriété de séparation intéressante dans les sous-graphes isométriques d'hypercubes :

Lemme 33. *Si (G^1, G^0, G^2) est une couverture isométrique d'un sous-graphe isométrique G de $Q_m = Q(U)$, et G^1 et G^2 pulvérisent le même ensemble Y de U, alors G^0 pulvérise aussi Y.*

Démonstration. Pour montrer que G^0 pulvérise Y, il suffit de montrer que pour tout sommet v_A de $Q(Y)$, $G^0 \cap \mathrm{pr}(v_A)$ est non-vide. Comme G^1 et G^2 pulvérise tous les deux $Q(Y)$, $G^1 \cap \mathrm{pr}(v_A)$ et $G^2 \cap \mathrm{pr}(v_A)$ sont des sous-graphes non-vides de G. Considérons n'importe quels sommets $x \in V(G^1 \cap \mathrm{pr}(v_A))$ et $y \in V(G^2 \cap \mathrm{pr}(v_A))$. Alors x et y sont des sommets de $\mathrm{Fib}_Y(A)$. Comme d'après le lemme 32, $\mathrm{Fib}_Y(A)$ est un sous-graphe isométrique de Q_m, il existe un plus court (x, y)-chemin P de Q_m appartenant à $\mathrm{Fib}_Y(A)$. Sachant que (G^1, G^0, G^2) est une couverture isométrique de G, P contient un sommet z de G^0. Par conséquent, $z \in V(G^0 \cap \mathrm{pr}(v_A))$, ce qui conclut cette preuve. □

Pour un sous-graphe porté H d'un cube partiel G, tous les sommets de G ont un plus court chemin vers un unique sommet de H, leur porte. Ainsi, la fibre d'un sommet $v \in V(H)$ par rapport à H peut être définie de façon équivalente par $\mathrm{Fib}_H(v) := \{u \in V(G) : \mathrm{porte}_H(u) = v\}$.

Lemme 34. *Soit G un cube partiel et soit H un sous-graphe porté de G. Si $D \subseteq \mathrm{cross}(H)$ est pulvérisé par G, alors D est pulvérisé par H.*

Démonstration. Considérons n'importe quelle Θ-classe E_i avec $i \in D$. Soit v un sommet arbitraire de G. Si v appartient au demi-espace G_i^- de G, alors la porte v' de v dans H appartient aussi à G_i^-. En effet, puisque E_i croise H, il existe un sommet $w \in G_i^- \cap H$. Alors $v' \in I(v, w) \subseteq G_i^-$ par convexité de G_i^- et car v' est la porte de v dans H. De façon analogue, si $v \in G_i^+$, alors $v' \in G_i^+$. Sachant que G pulvérise D, pour tout $X \subseteq D$, il existe un sommet v_B de G tel que $B \cap D = X$. Cela signifie que pour tout $i \in D$, le sommet v_B appartient au demi-espace G_i^+ si $i \in B$ et au demi-espace G_i^- sinon. Sachant que pour tout $i \in D$, la porte v'_B de v_B dans H appartient aux mêmes demi-espaces que v_B, la restriction à D de l'ensemble correspondant à v'_B coïncide avec X. Nous concluons que H pulvérise aussi D. □

3.3. Cubes partiels de VC-dimension bornée

Commençons par reformuler la VC-dimension des cubes partiels en termes de pc-mineurs :

Lemme 35. *Un cube partiel G appartient à $\mathscr{F}(Q_{d+1})$ si et seulement si G est de VC-dimension $\leq d$.*

Démonstration. Soit G un cube partiel. Considérons $\mathscr{S} \subseteq 2^U$ la famille d'ensembles telle que $G = G(\mathscr{S})$. Supposons que $G \in \mathscr{F}(Q_{d+1})$. Supposons aussi par l'absurde que VC-dim$(\mathscr{S}) > d$. Alors il existe un sous-ensemble $S \subseteq U$ de taille $d+1$ tel que S est pulvérisé par $\mathscr{S}$. Le pc-mineur G' obtenu à partir de G en contractant les Θ-classes de $U \setminus S$ est un cube de dimension $d+1$, contradiction.

Réciproquement, supposons par l'absurde que $G \notin \mathscr{F}(Q_{d+1})$. Ainsi, G a un pc-mineur Q_{d+1}. Notons C et R respectivement les ensembles des Θ-classes qui ont été contractées et restreintes dans G pour obtenir Q_{d+1}. Posons $Y := U \setminus (C \cup R)$. Le cube Q_{d+1} peut être vu comme le graphe de 1-inclusion $G(2^Y)$ avec $|Y| = d+1$. Donc, pour tout $Y' \subseteq Y$, $Y' \in V(Q_{d+1})$. Puisque Q_{d+1} est un pc-mineur de G, pour tout $Y' \subseteq Y$, il existe un sommet $v \in V(G)$ tel que $v = Y' \cup Z$ avec $Z \subseteq C \cup R$. Nous en déduisons que $\mathscr{S}$ pulvérise l'ensemble Y qui est de taille $d+1$, contradiction. □

Dans la figure 3.1, nous représentons le plongement isométrique du dodécaèdre rhombique D dans l'hypercube Q_4. Puisque D est un sous-graphe propre de Q_4, nous avons VC-dim$(D) < 4$. D'autre part, la contraction de n'importe quelle Θ-classe donne un 3-cube Q_3. Nous illustrons la contraction de la Θ-classe E_i, représentée par des arêtes obliques, dans D. Pour une meilleure lisibilité, les sommets fusionnés lors de la contraction sont représentés en noir. Par conséquent, Q_3 est un pc-mineur de D, ce qui permet de déduire que VC-dim$(D) = 3$.

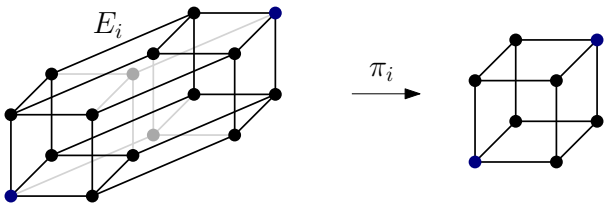


FIGURE 3.1. – Le dodécaèdre rhombique D isométriquement plongé dans Q_4 et son pc-mineur $\pi_i(D)$ après la contraction de la Θ-classe E_i représentée par les arêtes obliques.

Lemme 36. *Soit G un sous-graphe convexe propre d'un cube partiel antipodal $H \in \mathscr{F}(Q_{d+1})$, alors $G \in \mathscr{F}(Q_d)$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $G \notin \mathscr{F}(Q_d)$. Alors G admet Q_d comme pc-mineur. D'après le lemme 13, les sous-graphes convexes de H sont des intersections de demi-espaces, donc il existe une Θ-classe E_i de H telle que G est contenu dans un des demi-espaces définis par E_i, disons H_i^+. Nous savons par hypothèse que H est antipodal, donc il contient un sous-graphe $-G \subseteq H_i^-$ induit par les antipodes des sommets de G et isomorphe à G. Il en découle que G et $-G$ sont disjoints car ils appartiennent à des demi-espaces complémentaires. Comme G admet Q_d en tant que pc-mineur, $-G$ aussi, et ces deux pc-mineurs sont obtenus en contractant le même ensemble I de Θ-classes de H. Observons que $E_i \notin I$. En contractant les Θ-classes de I et toutes les Θ-classes qui ne croisent pas les pc-mineurs Q_d, sauf E_i, nous obtenons un graphe H'. Ce graphe est antipodal car d'après le

lemme 20, l'antipodalité est préservée par contractions. De plus, H' est constitué de deux copies de Q_d séparées par E_i. Considérons n'importe quel sommet v dans H'. Il existe un chemin allant de v jusqu'à son antipode $-v$ qui passe d'abord par toutes les Θ-classes de l'hypercube Q_d contenant v, puis par la Θ-classe E_i pour finalement atteindre le sommet $-v$. Autrement dit, $-v$ est adjacent à E_i et par conséquent chaque sommet de H' est adjacent à E_i. Ainsi, $H' = Q_{d+1}$ est un pc-mineur de H, ce qui contredit notre hypothèse sur H. □

La proposition suivante caractérise les cubes partiels de VC-dimension au plus d, *i.e.*, les graphes appartenant à la classe $\mathscr{F}(Q_{d+1})$, via les hyperplans.

Proposition 12. *Un cube partiel G est de VC-dimension $\leq d$ si et seulement si chaque hyperplan H_i de G est de VC-dimension $\leq d-1$.*

Démonstration. Soit $G \in \mathscr{F}(Q_{d+1})$. Supposons par l'absurde qu'il existe un hyperplan H_i d'une Θ-classe E_i de G de VC-dimension d. Alors les frontières ∂G_i^- et ∂G_i^+, qui sont isomorphes à H_i, sont aussi de VC-dimension d et leur union $\partial G_i^- \cup \partial G_i^+$ est de VC-dimension $d+1$. Par conséquent, G est de VC-dimension $\geq d+1$, contradiction. Pour démontrer l'implication inverse, nous considérons l'ensemble $\mathscr{H}_{d-1}$ des cubes partiels dans lesquels les hyperplans sont de VC-dimension au plus $d-1$. Nous affirmons que $\mathscr{H}_{d-1}$ est clos par pc-mineurs. Tout d'abord, $\mathscr{H}_{d-1}$ est clos par restrictions parce que les hyperplans H_i' de tout sous-graphe convexe G' de $G \in \mathscr{H}_{d-1}$ sont des sous-graphes des hyperplans correspondant H_i de G. Il reste donc à montrer que $\mathscr{H}_{d-1}$ est clos par contractions. Soit $G \in \mathscr{H}_{d-1}$ et soient E_i et E_j deux Θ-classes différentes de G. D'après le lemme 17, $\pi_j(G)$ est un cube partiel. Pour montrer qu'il appartient à $\mathscr{H}_{d-1}$, il suffit de montrer que $\pi_j(\partial G_i^-) = \partial \pi_j(G)_i^-$. Effectivement, ceci signifierait que la j-contraction de l'hyperplan défini par E_i dans G coïncide avec l'hyperplan défini par E_i dans $\pi_j(G)$. Par conséquent, la VC-dimension de chaque hyperplan de $\pi_j(G)$ serait d'au plus $d-1$.

Soit $v \in \pi_j(\partial G_i^-)$. Alors v est l'image de l'arête $v'v''$ de l'hypercube Q_m telle qu'au moins un des sommets v' ou v'', disons v', appartienne à ∂G_i^-. Donc le i-voisin u' de v' dans Q_m appartient à ∂G_i^+. Soient u'' le voisin commun à u' et v'' dans Q_m et u l'image de l'arête $u'u''$ par la j-contraction. Comme $u' \in \partial G_i^+$, la i-arête uv appartient à $\pi_j(G)$, d'où $v \in \partial \pi_j(G)_i^-$ et $u \in \partial \pi_j(G)_i^+$. Nous avons donc montré l'inclusion $\pi_j(\partial G_i^-) \subseteq \partial \pi_j(G)_i^-$. Pour démontrer l'inclusion inverse, considérons un sommet $v \in \partial \pi_j(G)_i^-$. Alors le i-voisin u de v dans Q_m appartient à $\partial \pi_j(G)_i^+$. Comme dans le cas précédent, soient v l'image de la j-arête $v'v''$ de l'hypercube Q_m, et u' et u'' les i-voisins de v' et v'' dans Q_m. Alors u est l'image de la j-arête $u'u''$. Comme les sommets u et v appartiennent à $\pi_j(G)$, au moins un des deux sommets des paires $\{u', u''\}$ et $\{v', v''\}$ appartient à G. Si l'une des deux arêtes $u'v'$ ou $u''v''$ de Q_m est une arête de G, alors $u \in \pi_j(\partial G_i^+)$ et $v \in \pi_j(\partial G_i^-)$ et c'est terminé. Supposons donc que u' et v'' sont des sommets de G. Comme G est un sous-graphe isométrique de Q_m et que $\mathrm{d}(u', v'') = 2$, un de leur voisin commun, v' ou u'', appartient aussi à G. Donc G contient l'arête $u'v'$ ou $u''v''$, ce qui termine la preuve de la deuxième inclusion $\partial \pi_j(G)_i^- \subseteq \pi_j(\partial G_i^-)$. Ainsi, nous venons de démontrer que $\mathscr{H}_{d-1}$ est clos par pc-mineurs. Puisque Q_{d+1} n'appartient pas à $\mathscr{H}_{d-1}$, si G appartient à $\mathscr{H}_{d-1}$, alors G ne contient pas Q_{d+1} comme pc-mineur, *i.e.*, $G \in \mathscr{F}(Q_{d+1})$. □

Dans la proposition 12, il est essentiel que G soit un cube partiel. Par exemple, considérons la famille d'ensembles $\mathscr{S}$ composée de tous les sous-ensembles de taille paire d'un ensemble à m éléments. Alors le graphe de 1-inclusion $G(\mathscr{S})$ de $\mathscr{S}$ est un stable. Donc tous les hyperplans de $G(\mathscr{S})$ sont vides. Pour autant la VC-dimension de $G(\mathscr{S})$ varie en fonction de m et peut être arbitrairement grande. Dans la figure 3.2, nous présentons l'exemple ci-dessus avec $m = 4$.

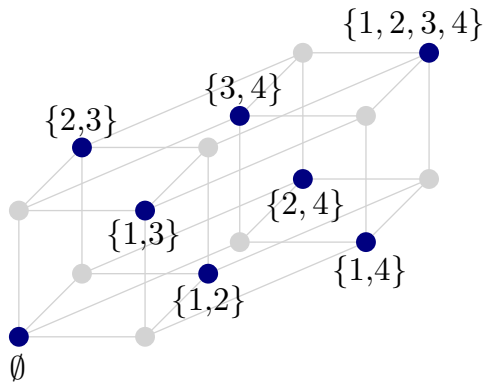


FIGURE 3.2. – Une famille d'ensembles $\mathscr{S} = \{\varnothing, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ de VC-dimension 3 car l'ensemble $\{1,2,3\}$ est pulvérisé en orange par $\mathscr{S}$ et son graphe de 1-inclusion $G(\mathscr{S})$ ne satisfaisant pas la proposition 12.

Contrairement aux cubes partiels, les classes $\mathscr{F}(Q_{d+1})$ ne sont pas closes par expansions isométriques. En effet, dans la sous-section 2.1.2, nous avons évoqué que l'opération d'expansion isométrique préserve l'isométricité mais que la VC-dimension peut augmenter. La proposition 13 fournit une caractérisation des expansions isométriques qui préservent la classe $\mathscr{F}(Q_{d+1})$.

Proposition 13. *Soit $\widetilde{G}$ obtenu à partir d'un cube partiel G de VC-dimension $\leq d$ par une expansion isométrique par rapport à (G^1, G^0, G^2). Alors $\widetilde{G}$ est un cube partiel de VC-dimension $\leq d$ si et seulement si G^0 est de VC-dimension $\leq d-1$.*

Démonstration. Soit $G \in \mathscr{F}(Q_{d+1})$. Considérons l'expansion isométrique $\widetilde{G}$ de G par rapport à (G^1, G^0, G^2). Le fait que $\widetilde{G}$ soit un cube partiel vient du résultat de la proposition 4. Il existe une unique Θ-classe E_{m+1} de $\widetilde{G}$ qui n'existe pas dans G. Les demi-espaces $\widetilde{G}^-_{m+1}$ et $\widetilde{G}^+_{m+1}$ de $\widetilde{G}$ sont respectivement isomorphes à G^1 et G^2, et leurs frontières $\partial\widetilde{G}^-_{m+1}$ et $\partial\widetilde{G}^+_{m+1}$ sont isomorphes à G^0. Sachant que les frontières $\partial\widetilde{G}^-_{m+1}$ et $\partial\widetilde{G}^+_{m+1}$, donc G^0, sont isomorphes à l'hyperplan défini par E_{m+1}, en utilisant la proposition 12, si $\widetilde{G} \in \mathscr{F}(Q_{d+1})$, alors G^0 est nécessairement de VC-dimension $\leq d-1$. Réciproquement, soit G^0 de VC-dimension $\leq d-1$. Supposons par l'absurde que $\widetilde{G}$ est de VC-dimension $d+1$. Comme G est de VC-dimension d, tout ensemble Y' de taille $d+1$ pulvérisé par $\widetilde{G}$ contient l'élément $m+1$. Soit $Y = Y' \setminus \{m+1\}$. Alors les demi-espaces $\widetilde{G}^-_{m+1}$ et $\widetilde{G}^+_{m+1}$ de $\widetilde{G}$ pulvérisent l'ensemble Y. Sachant que $\widetilde{G}^-_{m+1}$ et $\widetilde{G}^+_{m+1}$ sont respectivement isomorphes à G^1 et G^2, les deux sous-graphes G^1 et G^2 de G pulvérisent Y. Par le lemme 33, le sous-graphe G^0 de G pulvérise aussi Y. Comme $|Y| = d$, nous obtenons une contradiction avec notre hypothèse sur la VC-dimension de G^0. □

3.4. VC-dimension et rang dans les OMs et les COMs

Une notion centrale dans les OMs et les COMs est celle du rang. Cette notion est fortement liée à la notion de VC-dimension de leur graphe de topes.

Lemme 37. *Soit G le graphe de topes d'un COM. Si l'hypercube Q_d est un pc-mineur de G, alors il existe un sous-graphe antipodal H de G qui admet Q_d comme pc-mineur.*

Démonstration. Par KNAUER et MARC [62, Lemma 6.2], si H est un sous-graphe antipodal d'un graphe de tope G d'un COM et $\widetilde{G}$ est une expansion isométrique de G, alors l'expansion $\widetilde{H}$ de H dans $\widetilde{G}$ est soit antipodale, soit périphérique. Cette dernière implique que $\widetilde{H}$ contient H comme sous-graphe convexe. Dans les deux cas, $\widetilde{G}$ contient un sous-graphe antipodal qui admet H comme pc-mineur. Comme Q_d est antipodal, en considérant la suite d'expansions isométriques à partir de $Q_d =: G_0, \ldots, G_k := G$, chaque graphe intermédiaire contient un sous-graphe antipodal ayant Q_d comme pc-mineur. □

La VC-dimension des OMs, COMs, et de leurs covecteurs peut être formulée de la façon suivante :

Proposition 14. *Soit $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ un OM, alors* $\text{VC-dim}(\mathscr{M}) = \text{rang}(\mathscr{M})$. *De plus, si X est un cocircuit de $\mathscr{M}$, alors* $\text{VC-dim}(X) + 1 = \text{VC-dim}(\mathscr{M})$. *Soit $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ un COM, alors* $\text{VC-dim}(\mathscr{M}) = \max\{\text{VC-dim}(\mathscr{M}(X)) : X \in \mathscr{L}\}$. *Soit $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ un AMP, alors* $\text{VC-dim}(\mathscr{M})$ *est la dimension du plus grand cube de $G(\mathscr{M})$.*

Démonstration. Soit $G := G(\mathscr{M})$ le graphe de topes d'un OM $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$. Nous devons montrer que $\text{VC-dim}(G) = \text{rang}(\mathscr{M})$. Si $G = Q_m$, alors $\mathscr{L} = \{-1, 0, +1\}^m$ est de rang m et l'égalité tient. Donc, considérons que G n'est pas un cube. Pour commencer, nous montrons l'inégalité $\text{VC-dim}(G) \leq \text{rang}(\mathscr{M})$. Puisque G n'est pas un cube, il contient une Θ-classe E_i dont la contraction ne diminue pas la VC-dimension. Si nous posons $G' := \pi_i(G)$ et $\mathscr{L}' := \mathscr{L} \setminus \{i\}$, alors $\text{VC-dim}(G') = \text{VC-dim}(G)$ et G' est le graphe de topes de'un OM $\mathscr{M}'$ (lemme 31). Comme $\text{rang}(\mathscr{M}') \leq \text{rang}(\mathscr{M})$, par hypothèse d'induction, $\text{VC-dim}(G) = \text{VC-dim}(G') \leq \text{rang}(\mathscr{M}') \leq \text{rang}(\mathscr{M})$.

Pour montrer l'inégalité $\text{rang}(\mathscr{M}) \leq \text{VC-dim}(G)$, nous contractons arbitrairement une Θ-classe E_i et posons $G' = \pi_i(G)$ et $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \setminus \{i\}$. De même, par le lemme 31, G' est le graphe de tope d'un OM $\mathscr{M}'$. De plus, nous avons $\mathscr{M}' = \mathscr{M} \setminus \{i\}$. Par hypothèse d'induction, $\text{rang}(\mathscr{M}') \leq \text{VC-dim}(G') \leq \text{VC-dim}(G)$. Donc, si $\text{rang}(\mathscr{M}') = \text{rang}(\mathscr{M})$ ou $\text{VC-dim}(G') = \text{VC-dim}(G) - 1$, alors nous avons terminé. Supposons donc que pour toute Θ-classe E_i, nous avons $\text{rang}(\mathscr{M}') = \text{rang}(\mathscr{M}) - 1$ et $\text{VC-dim}(G') = \text{VC-dim}(G)$. Si une Θ-classe E_i de G croise les graphes de topes $[X]$ des faces $\mathrm{F}(X)$ de tous les cocircuits $X \in \mathscr{C}^*$, alors $\mathscr{M}$ n'est pas simple. Par conséquent, pour tout cocircuit $X \in \mathscr{C}^*$ il existe une Θ-classe E_i qui ne croise pas $[X]$. Cependant, puisque la contraction de E_i décrémente le rang de 1, nous concluons que le OM résultant coïncide avec $[X]$. Effectivement, après la contraction le rang de $[X]$ est inchangé. Si X était encore un cocircuit, le rang global ne diminuerait pas. Par conséquent, G' est le

graphe de topes de $\mathrm{F}(X)$. Donc, G et $G_i^+ := [X]$ sont des cubes partiels antipodaux. De plus, G_i^+ est un sous-graphe porté de G car c'est une face de G. Comme G est antipodal, $G_i^- \simeq G_i^+$ est aussi antipodal. Puisque nous sommes dans un COM, G_i^- est aussi un sous-graphe porté de G par [62]. Comme toutes les Θ-classes de G_i^+ et G_i^- coïncident, le chemin allant d'un sommet quelconque de G_i^+ vers sa porte dans G_i^- consiste en une arête de E_i, et vice versa. Donc, $G \simeq G_i^+ \square K_2$. En utilisant le lemme 16, nous obtenons que G doit être un cube, ce qui contredit notre hypothèse.

Soit X un cocircuit d'un OM $\mathscr{M}$. Nous venons de montrer que VC-dim$(\mathscr{M})$ = rang$(\mathscr{M})$, *i.e.*, la longueur d'une chaîne maximale dans le treillis gradué $\mathscr{F}_{\text{big}}(\mathscr{M})$. Par définition, nous avons que VC-dim(X) = VC-dim$(\mathscr{M}(X))$. Du fait que les circuits de $\mathscr{M}$ sont exactement les atomes de $\mathscr{F}_{\text{big}}(\mathscr{M})$, nous en déduisons que rang$(\mathscr{M}(X))$ = rang$(\mathscr{M}) - 1$. Puisque rang$(\mathscr{M})$ = VC-dim$(\mathscr{M})$, nous déduisons que pour tout cocircuit X de $\mathscr{M}$, VC-dim(X) = VC-dim$(\mathscr{M}) - 1$.

Le fait que la VC-dimension du graphe de topes d'un COM est atteinte par une face est démontré dans le lemme 37. Ceci implique aussi le résultat pour les AMPs. Pour les AMPs, cela provient aussi de l'égalité $\underline{\mathbf{X}}(G) = \overline{\mathbf{X}}(G)$. L'égalité pour les OMs est énoncée par Knauer et Marc [62] où ils font référence à da Silva [32]. □

Le lemme suivant montre que les ensembles indépendants du matroïde sous-jacent $\underline{\mathscr{M}}$ sont exactement les ensembles pulvérisés par un OM $\mathscr{M}$, *i.e.*, les ensembles ne contenant pas les supports des circuits de $\mathscr{M}$.

Lemme 38. *Soit $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ un OM et soit D un sous-ensemble de U. Alors D est pulvérisé par $\mathscr{M}$ si et seulement si D est indépendant dans le matroïde sous-jacent $\underline{\mathscr{M}}$.*

Démonstration. Supposons que D n'est pas pulvérisé par $\mathscr{M}$. Nous affirmons qu'il existe un circuit Y de $\mathscr{M}$ dont le support est contenu dans D. Soit $|D| = d + 1$. Nous raisonnons par induction sur $|D| + |U|$. Posons $\mathscr{M}' := \mathscr{M} \setminus (U \setminus D)$. Puisque $G(\mathscr{M})$ ne pulvérise pas D et que $G(\mathscr{M}')$ est un pc-mineur de $G(\mathscr{M})$, $G(\mathscr{M}')$ ne pulvérise pas non plus D. Par conséquent, si D est un sous-ensemble propre de U, alors par hypothèse d'induction, il existe un circuit Y' de $\mathscr{M}'$ avec $\underline{Y'} \subseteq D$. Considérons le vecteur signé $Y \in \{-1, 0, +1\}^U$ défini par $Y_e = Y'_e$ si $e \in D$ et $Y_e = 0$ si $e \in U \setminus D$. D'après le lemme 10, pour tout cocircuit X de $\mathscr{M}$, $X' := X \setminus (U \setminus D)$ est un cocircuit de $\mathscr{M}'$. Comme $X' \perp Y'$, nous concluons que $X \perp Y$. D'après le théorème 4, Y est un vecteur de $\mathscr{M}$, *i.e.*, $Y \in \mathscr{V}$. Donc, il existe un circuit dont le support est contenu dans celui de Y et donc dans D, ce qui termine ce cas. Donc, nous pouvons supposer que $U = D$.

Si D contient un sous-ensemble propre D' qui n'est pas pulvérisé par $\mathscr{M}$,alors nous pouvons appliquer l'hypothèse d'induction et trouver un circuit Y avec $\underline{Y} \subseteq D' \subset D$, et c'est terminé. Donc, supposons que tous les sous-ensembles propres de D sont pulvérisés par $\mathscr{M}$. Puisque $U = D$, nous avons que VC-dim$(\mathscr{M}) = |D| - 1 = d$. Par la proposition 14, VC-dim$(X) = d - 1$ pour tout cocircuit X de $\mathscr{M}$.

Si $\mathscr{M}$ contient un cocircuit X tel que $\mathscr{M}(X)$ ne pulvérise pas l'ensemble $X^0 \cap D$, alors en appliquant l'hypothèse d'induction sur $\mathscr{M}(X)$, nous avons un circuit Y' de $\mathscr{M}(X)$ avec $\underline{Y'} \subseteq X^0 \cap D$. Donc en étendant Y' à Y comme dans le cas précédent, nous obtenons un

circuit Y de $\mathscr{M}$ dont le support est contenu dans D. Supposons donc que pour tout cocircuit X de $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}(X)$ pulvérise l'ensemble $X^0 \cap D$. Sachant que VC-dim$(X) = d-1$ et $U = D$, nous déduisons que $\left|X^0 \cap D\right| = d-1$. Par conséquent, le support $\underline{X}$ de chaque cocircuit X est composé de deux éléments.

Sachant que D n'est pas pulvérisé par $\mathscr{M}$, il existe un vecteur signé $Y' \in \{-1,+1\}^D$ tel que pour tout tope T de $\mathscr{M}$, la restriction de T à D est différente de Y'. Par symétrie, $-Y'$ ne pulvérise pas $\mathscr{M}$. Considérons le vecteur signé $Y \in \{-1,0,+1\}^U$ défini par $Y_e = Y'_e$ si $e \in D$ et $Y_e = 0$ si $e \in U \setminus D$. Alors $Y, -Y \notin \mathscr{L}$. Nous affirmons que Y est un vecteur de $\mathscr{M}$, *i.e.*, $Y \in \mathscr{V}$. D'après le théorème 4, nous devons montrer que $Y \perp X$ pour tout cocircuit X de $\mathscr{M}$. Nous affirmons que $X_f Y_f = -X_{f'} Y_{f'}$, où $\underline{X} = \{f, f'\}$. En effet, comme Y et $-Y$ n'appartiennent pas à F(X), Sep$(Y,-Y) = D$, et $X^0 = D \setminus \{f, f'\}$, nous devons avoir $X_f \neq Y_f, X_{f'} \neq -Y_{f'}$ ou $X_{f'} \neq Y_{f'}, X_f \neq -Y_f$. Dans le premier cas, nous obtenons $X_f Y_f = -1, X_{f'} Y_{f'} = +1$ et dans le second cas, nous obtenons $X_f Y_f = +1, X_{f'} Y_{f'} = -1$. Nous en déduisons que $Y \in \mathscr{V}$. Comme $Y_e = 0$ si $e \in U \setminus D$, nous avons $\underline{Y} \subseteq D$. Or, nous avons aussi que $\underline{Y}$ contient le support d'un circuit de $\mathscr{M}$, donc D est un ensemble dépendant de $\underline{\mathscr{M}}$. Par conséquent, D est pulvérisé par $\mathscr{M}$.

Réciproquement, considérons un ensemble D de taille d pulvérisé par $\mathscr{M}$, et supposons par l'absurde que D contienne un circuit de $\underline{\mathscr{M}}$. Sachant que tous les sous-ensembles de D sont aussi pulvérisés par $\mathscr{M}$, nous pouvons supposer sans perte de généralité que pour tout $e \in D$, $D \setminus \{e\}$ est un ensemble indépendant de $\underline{\mathscr{M}}$, *i.e.*, que D est un circuit de $\underline{\mathscr{M}}$. Pour passer de $\mathscr{M}$ à $\mathscr{M}' = \mathscr{M} \setminus (U \setminus D)$, nous pouvons aussi supposer que $U = D$, *i.e.*, que VC-dim$(\mathscr{M}) = d$. Comme $\mathscr{M}$ pulvérise l'ensemble $D = U$, tout vecteur signé de $\{-1,+1\}^D$ est un tope de $\mathscr{M}$. Considérons les deux circuits signés Y et $-Y$ de support D. Il est évident que ce sont des topes de $\mathscr{M}$. Considérons aussi un cocircuit X de $\mathscr{M}$ tel que $-Y \in$ F(X) et $Y \notin$ F(X) (un tel X existe car $\mathscr{M}$ est un OM simple). D'après la proposition 14, VC-dim$(X) = d-1$, donc D contient un élément f tel que X pulvérise $D \setminus \{f\}$. Il en découle que $D \setminus \{f\} \subseteq X^0$. Par conséquent, Y et X ne sont pas orthogonaux, ce qui contredit le théorème 4. Cela montre que chaque ensemble D pulvérisé par $\mathscr{M}$ est un ensemble indépendant de $\underline{\mathscr{M}}$. □

Le lemme 39 montre que la VC-dimension des OMs peut être définie localement à chaque tope T, en pulvérisant des sous-ensembles de osc$((\{T\}, \varnothing))$ que nous noterons osc(T). Il peut aussi être vu comme un genre de dual analogue au lemme 38 précédent.

Lemme 39. *Soit $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ un OM de rang d et $G = G(\mathscr{M})$ son graphe de topes. Pour tout tope T de $\mathscr{M}$,* osc(T) *contient un sous-ensemble D de taille d pulvérisé par $\mathscr{M}$.*

Démonstration. Nous raisonnons par induction sur la taille de U. Si osc$(T) = U$, alors c'est terminé. Supposons donc qu'il existe $e \notin$ osc(T). Considérons le graphe de topes $G' = \pi_e(G)$ du matroïde orienté $\mathscr{M}' = \mathscr{M} \setminus e$. Posons $T' = \pi_e(T)$. Par le lemme 23, osc(T') = osc(T). Si rang$(\mathscr{M}') = d$, par hypothèse d'induction, l'ensemble osc(T') contient un sous-ensemble D de taille d pulvérisé par G'. Puisque G' est un pc-mineur de G, $D \subset$ osc(T) est aussi pulvérisé par G, ce qui termine ce cas.

Donc, supposons que $\mathrm{rang}(\mathscr{M}') < \mathrm{rang}(\mathscr{M})$. Si la Θ-classe E_e de G croise les sous-graphes $[X]$ de tous les cocircuits $X \in \mathscr{L}$, alors $\mathscr{M}$ n'est pas simple. Par conséquent, il existe un cocircuit $X \in \mathscr{L}$ dont la face $[X]$ n'est pas croisée par E_e. Cependant, comme le rang diminue de 1 quand nous contractons E_e, le OM résultant $\mathscr{M}'$ coïncide avec $[X]$. En effet, après contraction le rang de $\mathrm{F}(X)$ reste le même. Ainsi, si X est un cocircuit, alors le rang global ne devrait pas diminué. Par conséquent, G' est le graphe de topes de $\mathscr{M}(X)$. Comme G est un cube partiel antipodal et $G_e^+ = [X]$, nous avons $G_e^- \simeq G_e^+$. Ceci montre que $G \simeq G_e^+ \square K_2 \simeq G' \square K_2$. Il en découle que E_e touche $(\{T\}, \varnothing)$ dans G, contrairement à notre hypothèse $e \notin \mathrm{osc}(T)$. $\square$

Dans le chapitre 1, nous avons évoqué un lien entre la représentation topologique et la description combinatoire des matroïdes orientés. Dans un OM réalisable, nous avons vu que les topes correspondent aux régions de dimension maximale d'un arrangement d'hyperplans central. D'un point de vue géométrique, nous pouvons voir de manière informelle le lemme 39 comme suit. Si un tope T d'un OM réalisable $\mathscr{M}$ correspond à une région de dimension d, alors parmi les hyperplans qui définissent cette région, il y en a d qui sont indépendants. Autrement dit, $\mathrm{osc}(T)$ contient un indépendant de taille d dans $G(\mathscr{M})$.

4. Cubes partiels bidimensionnels

Sommaire

4.1 Résultats 65
4.2 Hyperplans 66
4.3 Enveloppes portées des cycles de longueur 6 67
4.3.1 Subdivision entière de K_n 67
4.3.2 Les subdivisions entières de K_n sont portées 70
4.3.3 Enveloppes portées des cycles de longueur 6 73
4.4 Enveloppes convexes et portées des cycles isométriques longs 74
4.4.1 Enveloppes convexes des cycles isométriques longs 75
4.4.2 Enveloppes portées des cycles isométriques longs 79
4.5 Complétion en cubes partiels amples 82
4.5.1 Complétion canonique en graphes de topes de COMs bidimensionnels. 82
4.5.2 Complétion en cubes partiels amples bidimensionnels 84
4.6 Cellules et carrières 86

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la structure des cubes partiels de VC-dimension au plus 2. Nous les appelons les cubes partiels *bidimensionnels*. Les résultats de ce chapitre sont publiés dans [29].

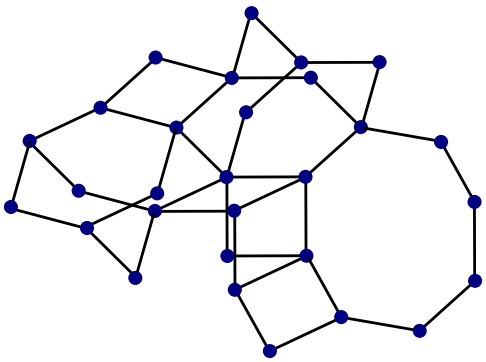


FIGURE 4.1. – Le cube partiel bidimensionnel M.

4.1. Résultats

Comme vu dans le lemme 35, les cubes partiels bidimensionnels définissent la classe de graphes $\mathscr{F}(Q_3)$. Ce sont donc les cubes partiels sans pc-mineur Q_3. Dans le chapitre 2, nous avons vu qu'il existait de nombreuses classes importantes, comme les graphes médians ou les graphes hypercellulaires, caractérisées par un faible nombre de pc-mineurs exclus. Ces deux classes ont aussi une jolie structure cellulaire. En effet, les graphes médians et les graphes hypercellulaires s'obtiennent respectivement par des amalgames portés d'hypercubes [9], et de produits cartésiens d'arêtes et de cycles pairs [28]. Nous montrons dans ce chapitre que les cubes partiels bidimensionnels admettent aussi une structure cellulaire. Plus précisément, nous montrons qu'ils peuvent être obtenus par amalgamations à partir de deux types de cellules combinatoires : les cycles et les subdivisions entières de graphes complets. Cette décomposition nous permet aussi d'obtenir d'autres caractérisations des cubes partiels bidimensionnels. En particulier, nous montrons que les cubes partiels bidimensionnels peuvent être étendus en cubes partiels amples de même VC-dimension. Cette caractérisation est intéressante car, en l'associant au résultat du théorème 3 de MORAN et WARMUTH [68], elle permet d'obtenir que les cubes partiels bidimensionnels vérifient la conjecture 1 de FLOYD et WARMUTH [42].

Théorème 8. *Pour un cube partiel $G = (V, E)$ les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G est un cube partiel bidimensionnel ;

(ii) les carrières $N(E_i)$ de toutes les Θ-classes de G, définies par rapport au complexe cellulaire $\mathbf{C}(G)$, sont des cubes partiels bidimensionnels ;

(iii) les hyperplans de G sont des arbres virtuels isométriques ;

(iv) G peut être obtenu à partir du graphe K_1 via une suite $\{(G_i^1, G_i^0, G_i^2) : i = 1, \ldots, m\}$ d'expansions isométriques, où chaque G_i^0, $i = 1, \ldots, m$, est de VC-dimension ≤ 1 ;

(v) G peut être obtenu par $2d$-amalgamation à partir de cycles pairs et de subdivisions entières de graphes complets ;

(vi) G peut être étendu en un cube partiel ample bidimensionnel.

De plus, tout cube partiel bidimensionnel G satisfait la condition suivante :

(vii) l'enveloppe portée de chaque cycle isométrique de G est un disque ou une subdivision entière de graphe complet.

Observons que si dans un cube partiel G, l'enveloppe convexe de chaque cycle isométrique est dans la classe $\mathscr{F}(Q_3)$, alors il n'est pas vrai que $G \in \mathscr{F}(Q_3)$. Nous pouvons le voir sur l'exemple du cube partiel X_2^4 de la figure 2.7. Cependant nous conjecturons que la condition (vii) du théorème 8 est équivalente aux conditions (i) à (vi) :

Conjecture 2. Tout cube partiel G dans lequel les enveloppes portées des cycles isométriques sont des disques ou des subdivisions entières de graphes complets est bidimensionnel.

Tout d'abord, la caractérisation (iv) du théorème 8 découle directement d'un résultat plus général. En effet, dans le chapitre 3, nous démontrons dans la proposition 13 que tout cube partiel $\widetilde{G}$, obtenu à partir de $G \in \mathscr{F}(Q_{d+1})$ par une expansion isométrique par rapport à (G^1, G^0, G^2), appartient à $\mathscr{F}(Q_{d+1})$ si et seulement si G^0 est de VC-dimension $\leq d-1$. D'après la proposition 4, comme tout cube partiel peut être obtenu par une suite d'expansions isométriques à partir de K_1, nous obtenons la caractérisation (iv). Dans la section 4.2, nous montrerons la caractérisation (iii) qui se base sur un résultat plus général. Nous verrons que le résultat de la proposition 12, donné et démontré dans le chapitre 3, peut être affiné dans le cas bidimensionnel. Ensuite, les sections 4.3 et 4.4 seront consacrées à l'étude de la structure cellulaire des cubes partiels bidimensionnels. Nous montrerons aussi la condition (vii) du théorème 8. Puis, dans la section 4.5, nous nous intéresserons à la complétion de ces graphes en cubes partiels amples sans augmenter la VC-dimension, montrant la caractérisation (vi). Enfin dans la section 4.6, nous montrerons les caractérisations (ii) et (v) du théorème 8.

4.2. Hyperplans

Dans le chapitre 3, nous avons montré dans la proposition 12 qu'un cube partiel G appartient à $\mathscr{F}(Q_{d+1})$ si et seulement si chaque hyperplan H_i de G est de VC-dimension $\leq d-1$. Cette caractérisation des cubes partiels de VC-dimension d via les hyperplans nous permet d'obtenir le corollaire suivant dans le cas des cubes partiels de VC-dimension 2 :

Corollaire 3. *Un cube partiel G appartient à $\mathscr{F}(Q_3)$ si et seulement si chaque hyperplan H_i de G a VC-dimension ≤ 1.*

D'après le corollaire 3, les hyperplans des graphes de la classe $\mathscr{F}(Q_3)$ sont de VC-dimension au plus 1. Cependant, ce ne sont pas toujours des cubes partiels : tout graphe de 1-inclusion de VC-dimension 1 peut se retrouver en tant qu'hyperplan d'un graphe de $\mathscr{F}(Q_3)$. Il est donc intéressant de regarder la structure métrique des graphes de 1-inclusion de VC-dimension 1. Pour cela, nous introduisons la notion suivante : un graphe de 1-inclusion G est un *arbre isométrique virtuel* s'il existe un arbre isométrique T dans Q_m contenant G comme sous-graphe induit. Clairement, chaque arbre isométrique virtuel est une forêt dans laquelle chaque composante connexe est un sous-arbre isométrique de Q_m.

Proposition 15. *Un sous-graphe induit G dans Q_m est de VC-dimension ≤ 1 si et seulement si G est un arbre isométrique virtuel de Q_m.*

Démonstration. Tout arbre isométrique dans Q_m est de VC-dimension ≤ 1, donc tout arbre isométrique virtuel est aussi de VC-dimension ≤ 1. Réciproquement, soit G un sous-graphe induit de Q_m de VC-dimension ≤ 1. Alors G ne pulvérise pas d'ensemble de taille ≥ 2. Autrement dit, aucune paire de Θ-classes de Q_m s'intersectent dans G. Par un résultat connu de BUNEMAN [21] sur l'ensemble des sommets de G (voir aussi le résultat de DRESS et al. [38, Subsection 3.2]), nous pouvons définir un arbre pondéré T_0 avec le même ensemble

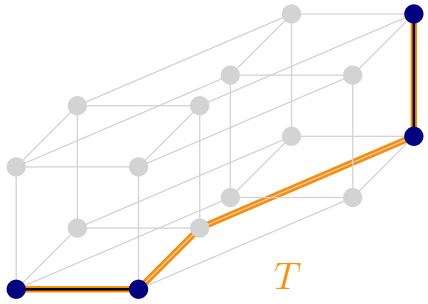


FIGURE 4.2. – Un arbre isométrique virtuel, constitué de deux composantes connexes en noir, contenu dans un arbre isométrique T en orange dans Q_4.

de sommets que G et tel que les bipartitions $\{G_i^-, G_i^+\}$ sont en bijection avec les *coupes* de T_0, *i.e.*, les bipartitions obtenues en retirant les arêtes de T_0. La longueur de chaque arête de T_0 correspond au nombre de Θ-classes de Q_m définissant la même bipartition de G. La distance $\mathrm{d}_{T_0}(u, v)$ entre deux sommets de T_0 est égale au nombre de classes de parallélisme de Q_m séparant les sommets de T_0. Nous pouvons transformer T_0 en un arbre T plongé isométriquement dans Q_m de la manière suivante : si l'arête uv de T_0 est de longueur $k > 1$, alors nous remplaçons cette arête par n'importe quel plus court (u, v)-chemin $P(u, v)$ de Q_m. Ainsi, nous pouvons voir que T est un arbre isométrique de Q_m, donc G est un arbre isométrique virtuel. □

4.3. Enveloppes portées des cycles de longueur 6

Dans cette section, nous allons montrer que l'enveloppe portée de n'importe quel cycle C de longueur 6 dans les cubes partiels bidimensionnels est soit C, soit Q_3^-, soit une subdivision entière de graphe complet maximale.

4.3.1. Subdivision entière de K_n

Nous rappelons qu'une subdivision entière de K_n, notée SK_n, est obtenu en subdivisant exactement une fois chaque arête de K_n. Les sommets de K_n sont appelés les sommets originaux et les autres sont appelés sommets subdivisions de SK_n. De plus, nous avons vu que $SK_3 = C_6$. Chaque SK_n peut être isométriquement plongé dans l'hypercube Q_n de dimension n de telle façon que chaque sommet original u_i est encodé par l'ensemble à 1 élément $\{i\}$ et chaque sommet $u_{i,j}$ subdivisant l'arête ij de K_n est encodé par l'ensemble à 2 éléments $\{i, j\}$. Ce plongement de SK_n est dit *standard*. Si nous ajoutons à SK_n le sommet $v_\varnothing$ de Q_n qui correspond à l'ensemble vide $\varnothing$, nous obtenons un cube partiel SK_n^*. Comme ces deux graphes sont encodés par des sous-ensembles de taille ≤ 2, ils sont de VC-dimension 2. Par conséquent, nous obtenons le lemme suivant :

Lemme 40. *Pour tout n, SK_n et SK_n^* sont des cubes partiels bidimensionnels.*

Dans la figure 4.3(a) et (b), nous illustrons respectivement les plongements standards de SK_3 dans Q_3 et de SK_4 dans Q_4. Les sommets originaux et subdivisions sont respectivement représentés par des carrés et des cercles. Dans la figure 4.3(c), nous présentons la complétion SK_4^* de SK_4 où nous ajoutons le sommet par des arêtes en pointillées.

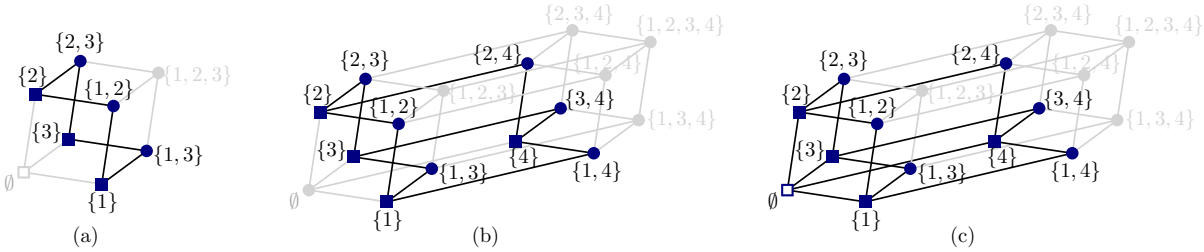


FIGURE 4.3. – (a) Le plongement standard de SK_3 dans Q_3 ; (b) Le plongement standard de SK_4 dans Q_4 ; (c) La complétion de SK_4 en SK_4^*.

Lemme 41. *Soit $H = SK_n$ avec $n \geq 4$ un sous-graphe isométrique d'un cube partiel G. Alors G admet un plongement isométrique dans un hypercube tel que H est plongé de façon standard.*

Démonstration. Choisissons n'importe quel sommet original de H comme point de base b de G et considérons le plongement isométrique standard φ de G dans Q_m. Alors $\varphi(b) = \varnothing$. Dans H le sommet b est adjacent à $n-1 \geq 3$ sommets subdivisions de H. Ainsi, pour chacun de ces sommets $v_i, i = 1, \ldots, n-1$, nous pouvons supposer que $\varphi(v_i) = \{i\}$. Chaque v_i est adjacent dans H à un sommet original $u_i \neq b$. Puisque H contient au moins trois de ces sommets originaux et qu'ils sont deux à deux à distance 2, nous pouvons vérifier que l'étiquette $\varphi(u_i)$ est constituée de i et d'un élément commun à tous ces sommets, disons n. Enfin, l'étiquette de tout sommet subdivision $u_{i,j}$ adjacent aux sommets originaux u_i et u_j est $\{i, j, n\}$. Considérons maintenant un plongement isométrique φ' de G défini en fixant $\varphi'(v) = \varphi(v)\Delta\{n\}$ pour tout sommet v de G. Alors φ' fournit un plongement standard de H : $\varphi'(b) = \{n\}$, $\varphi'(u_i) = \{i\}$ pour tout sommet original u_i, et $\varphi'(v_i) = \{i, n\}$ pour tout sommet subdivision v_i adjacent à b et $\varphi'(u_{i,j}) = \{i, j\}$ pour tout autre sommet subdivision $u_{i,j}$. □

Par le lemme 41, quand une subdivision $H = SK_n$ d'un graphe $G \in \mathscr{F}(Q_3)$ est fixée, nous supposons que G est plongé isométriquement dans un hypercube tel que H est plongé de façon standard. Nous allons maintenant décrire les expansions isométriques de SK_n qui donnent des cubes partiels bidimensionnels.

Lemme 42. *Soit $\widetilde{G}$ obtenu à partir de $G := SK_n$ avec $n \geq 4$ par expansion isométrique par rapport à (G^1, G^0, G^2). Alors $\widetilde{G} \in \mathscr{F}(Q_3)$ si et seulement si c'est une expansion périphérique et G^0 est un arbre isométrique de G.*

Démonstration. Le fait que l'expansion isométrique d'un SK_n telle que G^0 est un arbre isométrique appartienne à $\mathscr{F}(Q_3)$ découle de la proposition 13 et du lemme 40. Réciproquement, supposons que $\widetilde{G}$ appartienne à $\mathscr{F}(Q_3)$. Par la proposition 13, G^0 est de VC-dimension ≤ 1.

Aussi, en utilisant le résultat de la proposition 15, nous obtenons que G^0 est un arbre virtuel. De plus, comme G^1 et G^2 sont des sous-graphes isométriques (d'un SK_n), G^0 est un arbre isométrique. Il reste donc à montrer que $\widetilde{G}$ est une expansion périphérique, ce qui revient à montrer que G^1 ou G^2 coïncide avec G^0. Nous distinguons deux cas.

Cas 1. Supposons que G^0 contienne deux sommets originaux u_i et u_j. Puisque u_i et u_j appartiennent à G^1 et G^2, deux sous-graphes isométriques de G, leur unique voisin commun $u_{i,j}$ doit aussi appartenir à G^1 et G^2, donc à G^0. Si un autre sommet original u_k appartient à G^0, alors les quatre sommets $u_{i,j}, u_i, u_j$ et u_k de G^0 pulvérisent l'ensemble $\{i, j\}$, contrairement à notre hypothèse selon laquelle G^0 est de VC-dimension ≤ 1. Ceci implique que tous les sommets originaux, sauf u_i et u_j, appartiennent soit à $G^1 \setminus G^2$ soit à $G^2 \setminus G^1$. S'il existe deux sommets originaux u_k et u_ℓ tels que $u_k \in G^1 \setminus G^2$ et $u_\ell \in G^2 \setminus G^1$, alors leur unique voisin commun $u_{k,\ell}$ appartient nécessairement à G^0. Mais dans ce cas, les quatre sommets $u_{i,j}, u_i, u_j$ et $u_{k,\ell}$ de G^0 pulvérisent l'ensemble $\{i, j\}$. Ainsi, nous pouvons supposer que tous les sommets originaux u_k, à l'exception de u_i et u_j, appartiennent à $G^1 \setminus G^2$. De façon similaire, puisque G^1 est un sous-graphe isométrique de G, on peut montrer que tout sommet $u_{k,\ell}$ avec $\{k, \ell\} \neq \{i, j\}$ appartient également à $G^1 \setminus G^2$. De plus, comme G^1 est un sous-graphe isométrique de G, pour tout $k \neq i, j$, les sommets $u_{i,k}, u_{j,k}$ appartiennent à G^1. Donc $G^1 = G$ et $G^0 = G^2$.

Cas 2. Supposons que G^0 contienne au plus un sommet original. Soient A^1 l'ensemble des sommets originaux appartenant à $G^1 \setminus G^2$ et A^2 l'ensemble des sommets originaux appartenant à $G^2 \setminus G^1$. Supposons que $\left|A^1\right| \geq 2$ et $\left|A^2\right| \geq 2$, disons $u_1, u_2 \in A^1$ et $u_3, u_4 \in A^2$. Alors les sommets $u_{1,3}, u_{1,4}, u_{2,3}$ et $u_{2,4}$ doivent appartenir à G^0. Puisque ces quatre sommets pulvérisent l'ensemble $\{1, 3\}$, nous obtenons une contradiction avec la VC-dimension de G^0. Par conséquent, un des ensembles A^1 ou A^2 contient au plus un sommet. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que A^1 contienne au moins $n-2$ sommets originaux $u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}$. Si G^1 contient tous les sommets originaux, par isométricité, chaque sommet subdivision $u_{i,j}$ appartient aussi à G_1. Il en découle que $G^1 = G$, ce qui termine ce sous-cas. Ensuite, supposons que le sommet original u_n n'appartienne pas à A^1. Comme G^0 contient au plus un sommet original, un des sommets u_{n-1} ou u_n, disons u_n, doit appartenir à A^2 (*i.e.*, à $G^2 \setminus G^1$). Cela implique que tous les sommets $u_{i,n}$ avec $i = 1, \ldots, n-2$ appartiennent à G^0. Comme $n \geq 4$, u_n est l'unique voisin commun des sommets $u_{i,n}$ et $u_{j,n}$ avec $i \neq j$ et $1 \leq i, j \leq n-2$, et G^1 est un sous-graphe isométrique de G, nécessairement u_n doit être un sommet de G^1, ce qui contredit notre hypothèse que $u_n \in A^2$ et conclut la preuve de ce lemme. □

Corollaire 4. *Soit $G \in \mathscr{F}(Q_3)$. Si G contient SK_n avec $n \geq 4$ comme pc-mineur, alors G contient SK_n comme sous-graphe convexe.*

Démonstration. Supposons par contradiction que G' est le plus petit graphe dans $\mathscr{F}(Q_3)$ contenant SK_n en tant que pc-mineur mais pas comme sous-graphe convexe. Cela signifie que tout graphe G obtenu par contraction d'une θ-classe de G' qui n'intersecte pas le pc-mineur SK_n, contient aussi ce SK_n en pc-mineur. Puisque $G \in \mathscr{F}(Q_3)$, par choix de minimalité de G', G contient SK_n comme sous-graphe convexe, que nous dénotons H. Nous savons que

G' est obtenu à partir de G par expansion isométrique. D'après le lemme 27, $H' = \psi(H)$ est un sous-graphe convexe de G'. De plus, puisque $G' \in \mathscr{F}(Q_3)$, par le lemme 42, cette expansion isométrique restreinte à $H = SK_n$ est une expansion périphérique. Donc l'image de H par cette expansion est un sous-graphe convexe H' de G' qui contient une copie de SK_n comme sous-graphe convexe, et par conséquent G' contient une copie convexe de SK_n. □

Rappelons que Q_3^- est le cube 3-dimensionnel moins un sommet. Le lemme suivant nous garantit que l'enveloppe convexe d'un cycle de longueur 6 dans un cube partiel bidimensionnel est soit lui-même, soit Q_3^- :

Lemme 43. *Soit $C = SK_3$ un cycle isométrique de longueur 6 dans $G \in \mathscr{F}(Q_3)$, alors soit C est convexe, soit son enveloppe convexe est Q_3^-.*

Démonstration. L'enveloppe convexe de C dans Q_m est un 3-cube Q et $\mathrm{conv}(C) = Q \cap V(G)$. Puisque $G \in \mathscr{F}(Q_3)$, Q n'est pas contenu dans G. Par conséquent, soit $\mathrm{conv}(C) = C$ soit $\mathrm{conv}(C) = Q_3^-$. □

4.3.2. Les subdivisions entières de K_n sont portées

Dans cette sous-section, notre objectif est de montrer que les subdivisions entières de K_n maximales et convexes d'un cube partiel $G \in \mathscr{F}(Q_3)$ sont portées.

Lemme 44. *Soit $H = SK_n$ avec $n \geq 4$ un sous-graphe isométrique de $G \in \mathscr{F}(Q_3)$. Alors soit H est inclus dans un SK_n^* dans G, soit H est un sous-graphe convexe de G.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $H = SK_n$ ne soit ni convexe ni inclus dans un SK_n^* dans G. En particulier, il existe deux sommets $x, y \in V(H)$ et un sommet $v \in V(G) \setminus V(H)$ tels que $v \in \mathrm{I}(x, y)$. Observons que x et y ne peuvent pas être deux sommets originaux. En effet, si $x = u_i$ et $y = u_j$, alors les sommets x et y ont deux voisins communs dans Q_m : le sommet subdivision $u_{i,j}$ et $v_\varnothing$. Or $u_{i,j} \in V(H)$ et nous savons que dans Q_m, $v_\varnothing$ est adjacent à tous les sommets originaux de H, donc il ne peut pas appartenir à G car $H = SK_n$ n'est pas inclus dans un SK_n^*. Nous pouvons donc supposer sans perte de généralité que le sommet x est un sommet subdivision, disons $x = u_{i,j}$. Nous distinguons plusieurs cas en fonction de la distance $\mathrm{d}(x, y)$. Avant cela observons que $\mathrm{d}(x, y) > 4$ n'existe pas.

Cas 1. $\mathrm{d}(x, y) = 2$

Alors y est un sommet subdivision de la forme $y = u_{i,k}$ avec $k \neq i, j$, et les sommets x et y appartiennent à un même cycle isométrique C de longueur 6 dans H. Puisque v est dans l'intervalle entre x et y, il appartient à $\mathrm{conv}(C)$ et d'après le lemme 43, nous déduisons que v est adjacent au troisième sommet subdivision $z = u_{j,k}$ de C. D'où $v = \{i, j, k\}$. Comme $n \geq 4$, il existe $\ell \neq i, j, k$ tel que $\{\ell\}$ est un sommet original de H et $\{i, \ell\}, \{j, \ell\}$, et $\{k, \ell\}$ sont des sommets subdivisions de H. La contraction par rapport à ℓ amène à un pc-mineur interdit Q_3.

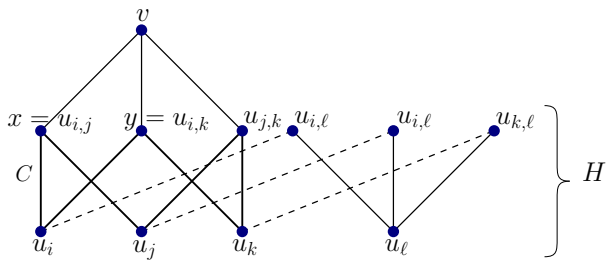


FIGURE 4.4. – Illustration du cas 1 de la preuve du lemme 44.

Cas 2. $\mathrm{d}(x, y) = 3$

Alors y est un sommet original de la forme $y = u_k$ avec $k \neq i, j$. Ici encore les sommets x et y appartiennent à un même cycle isométrique C de longueur 6 dans H. D'après le lemme 43, puisque v appartient à $\mathrm{conv}(C)$, il est soit adjacent à u_i, u_k et u_k, soit adjacent à $u_{i,j}, u_{i,k}$ et $u_{j,k}$, et nous nous retrouvons dans le cas 1.

Cas 3. $\mathrm{d}(x, y) = 4$

Alors y est un sommet subdivision de la forme $y = u_{k,\ell}$ avec $k, \ell \neq i, j$. En vue des cas précédents, nous pouvons supposer que v est adjacent à x ou à y, disons que v est adjacent à x. Soit Q l'enveloppe convexe de $\{x, y\}$ dans Q_m. Alors Q est un 4-cube et $x = \{i, j\}$ possède 4 voisins dans Q : $\{i\}, \{j\}, \{i, j, k\}$ et $\{i, j, \ell\}$. Les sommets $\{i\}$ et $\{j\}$ sont des sommets originaux de H. Par conséquent, supposons que v est un des deux sommets $\{i, j, k\}$ ou $\{i, j, \ell\}$, disons $v = \{i, j, k\}$. Mais alors v est adjacent à $\{j, k\}$, un sommet subdivision de H, ce qui nous ramène dans les conditions du cas 1. Donc H est un sous-graphe convexe de G, contradiction. □

Lemme 45. *Soit $H = SK_n$ avec $n \geq 4$ un sous-graphe convexe de $G \in \mathscr{F}(Q_3)$ tel que H n'est pas inclus dans une plus grande subdivision entière de graphe complet dans G. Alors, les voisins dans G du sommet $v_\varnothing$ de Q_m sont exactement les sommets originaux $u_1, \ldots u_n$ de H.*

Démonstration. Puisque H est convexe, le sommet $v_\varnothing$ de Q_m n'est pas un sommet de G. Soient $u_i = \{i\}, i = 1, \ldots, n$, les sommets originaux de H. Supposons que dans Q_m le sommet $v_\varnothing$ est adjacent à un sommet u de G qui n'est pas contenu dans H, disons $u = \{n+1\}$. Sachant que chaque sommet u_i a deux voisins communs avec u dans Q_m, $v_\varnothing$ et $u_{i,n+1} = \{i, n+1\}$, et que G est un sous-graphe isométrique de Q_m, chaque sommet $u_{i,n+1}$ est nécessairement un sommet de G. Par conséquent, les sommets de H avec les sommets $u, u_{1,n+1}, \ldots, u_{n,n+1}$ définissent un sous-graphe isométrique $H' = SK_{n+1}$ de Q_m. Puisque $v_\varnothing$ n'appartient pas à G, en appliquant le lemme 44, nous obtenons que H' est convexe. Ceci contredit notre hypothèse sur H qui n'est pas inclus dans une subdivision entière de graphe complet plus grande de G. Nous en concluons que les voisins dans G du sommet $v_\varnothing$ de Q_m sont exactement les sommets $u_1, \ldots, u_n$ de H. □

Proposition 16. *Soit $H = SK_n$ avec $n \geq 4$ un sous-graphe convexe de $G \in \mathscr{F}(Q_3)$ tel que H n'est pas inclus dans une plus grande subdivision entière de graphe complet de G, alors H est un sous-graphe porté de G.*

Démonstration. Soit $G \in \mathscr{F}(Q_3)$ un sous-graphe isométrique de Q_m dans lequel le plongement de H est standard. Soit Q l'enveloppe convexe de H dans Q_m. Q est un cube de dimension n et un sous-graphe porté de Q_m. Soient v un sommet de G et v_0 la porte de v dans Q. Pour montrer que H est porté, il suffit de montrer que v_0 est un sommet de H. Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $v_0 \notin V(H)$. Parmi les sommets de G qui n'ont pas de porte dans H, choisissons un sommet v minimisant la distance $\mathrm{d}(v, v_0)$. Supposons que v est encodé par l'ensemble A. Alors sa porte v_0 dans Q_m est encodé par l'ensemble $A_0 := A \cap \{1, \ldots, n\}$. Si $|A_0| = 1$ (resp. 2), alors A_0 encode un sommet original (resp. subdivision) de H, ce qui contredit notre choix de v. Il reste à traiter les cas où $A_0 = \varnothing$ et $|A_0| > 2$.

Pour commencer, supposons que $A_0 = \varnothing$, *i.e.*, $v_0 = v_\varnothing$. En utilisant le lemme 45, nous obtenons que $v_\varnothing$ est exactement adjacent aux sommets originaux de H. Ainsi tous les sommets originaux de H sont à distance $k = \mathrm{d}(v, v_\varnothing) + 1 \geq 3$ de v. Par choix de minimalité de v, il résulte que $\mathrm{I}(v, u_i) \cap \mathrm{I}(v, u_j) = \{v\}$ pour toute paire de sommets originaux u_i et $u_j, i \neq j$. En effet, si $\mathrm{I}(v, u_i) \cap \mathrm{I}(v, u_j) \neq \{v\}$ et w est un voisin de v dans $\mathrm{I}(v, u_i) \cap \mathrm{I}(v, u_j)$, alors $\mathrm{d}(w, u_i) = \mathrm{d}(w, u_j) = k - 1$. Donc la porte w_0 de w dans Q est à distance d'au plus $k-2$ de w, ce qui nous donne $\mathrm{d}(v, w_0) = k - 1$. Ceci n'est possible que si $w_0 = v_0$. Par conséquent, en remplaçant v par w nous obtiendrons un sommet de G dont la porte $w_0 = v_0$ dans Q n'appartient pas à H et pour lequel $\mathrm{d}(w, w_0) < \mathrm{d}(v, v_0)$, ce qui contredit la minimalité de v. Ainsi $\mathrm{I}(v, u_i) \cap \mathrm{I}(v, u_j) = \{v\}$. Posons $A = \{n+1, \ldots, n+k-1\}$.

— Si $k = 3$, alors v est encodé par $A = \{n+1, n+2\}$. Une conséquence du lemme 45 est que tous les plus courts chemins allant de $u_i = \{i\}$ à v dans G sont de la forme $(\{i\}, \{i, \ell\}, \{\ell\}, \{n+1, n+2\})$ où $\ell \in \{n+1, n+2\}$. Sachant que nous avons au moins quatre sommets originaux, au moins deux de ces plus courts chemins dans G vont passer par le même voisin $\{n+1\}$ ou $\{n+2\}$ de v, ce qui contredit le fait que pour tout u_i et u_j avec $i \neq j$, $\mathrm{I}(v, u_i) \cap \mathrm{I}(v, u_j) = \{v\}$.

— Si $k \geq 4$, considérons $G' = \pi_{n+1}(G)$ et $H' = \pi_{n+1}(H)$, les images respectives de G et H après la contraction des arêtes de Q_m correspondant à la coordonnée $n+1$. Alors G' est un sous-graphe isométrique de l'hypercube Q_{m-1} et H' est une subdivision entière isomorphe à SK_n et plongée isométriquement dans G'. Soit v', $v'_\varnothing$, et u'_i avec $i = 1, \ldots, n$, les images respectives des sommets $v, v_\varnothing$, et u_i de G. Alors $u'_1, \ldots, u'_n$ sont les sommets originaux de H'. Nous pouvons aussi remarquer que v' est à distance $k-1$ de tous les sommets originaux de H' et à distance $k-2$ de $v'_\varnothing$. Donc dans G' le sommet v' n'a pas de porte dans H'. De par les hypothèses de minimalité de v et H, soit H' n'est pas convexe dans G', soit H' est contenu dans une plus grande subdivision entière d'un graphe complet de G'. Si H' n'est pas convexe dans G', d'après le lemme 44, $v'_\varnothing$ est un sommet de G'. Puisque $v_\varnothing$ n'est pas un sommet de G, cela est possible uniquement si l'ensemble $\{n+1\}$ correspond à un sommet de G. Mais nous avons montré dans le lemme 45 que les seuls voisins de $v_\varnothing$ dans G sont les sommets originaux de H. Cette contradiction montre que H' est un convexe. Supposons donc que H' est contenu dans une subdivision entière d'un graphe complet plus grande $H'' = SK_{n+1}$ de G'. Dénotons par $u'_\ell = \{\ell\}$ le sommet original de H'' qui est différent des sommets $u'_i, i = 1, \ldots, n$, *i.e.*, $\ell \notin \{1, \ldots, n\}$. Comme u'_ℓ est un sommet de G' et que dans Q_m l'ensemble $\{\ell\}$ ne correspond pas à un sommet de G, l'ensemble $\{n+1, \ell\}$ est nécessairement un sommet de G dans Q_m. Par conséquent, nous sommes dans les mêmes conditions que dans

le sous-cas précédent pour lequel nous venons de montrer que ce n'est pas possible. Ceci conclut l'analyse du cas où $A_0 = \varnothing$.

Supposons maintenant que$|A_0| \geq 3$. Posons $A_0 = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Les sommets u_1, u_2 et u_3 sont des sommets originaux et $u_{\{1,2\}}, u_{\{1,3\}}$ et $u_{\{2,3\}}$ sont des sommets subdivisions de H. Puisque $H = SK_n$ avec $n \geq 4$, H contient aussi un sommet original u_ℓ avec $\ell \geq 4$, disons $\ell = 4$. Dans ce cas, les ensembles correspondant aux sommets $u_1, u_2, u_3, u_4, u_{1,2}, u_{1,3}, u_{2,3}$, et v de G pulvérisent l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, ce qui contredit notre hypothèse sur $G \in \mathscr{F}(Q_3)$ et conclut le cas $|A_0| \geq 3$.

Pour conclure, pour tout sommet v de G, la porte v_0 de v dans Q appartient à H. Ceci montre que H est un sous-graphe porté de G et termine la preuve de la proposition. □

4.3.3. Enveloppes portées des cycles de longueur 6

Observons que les cycles induits de longueur 6 sont des cycles isométriques dans les cubes partiels. Le but de cette sous-section est de démontrer le résultat suivant :

Proposition 17. *Soit C un cycle induit (donc isométrique) de longueur 6 dans $G \in \mathscr{F}(Q_3)$. Alors l'enveloppe portée* porte(C) *de C est C, Q_3^-, ou une subdivision entière de graphe complet.*

Démonstration. Tout d'abord, si C est inclus dans une subdivision entière d'un graphe complet maximale $H = SK_n$ avec $n \geq 4$, alors H est porté par la proposition 16. De plus, nous pouvons vérifier que tous les sommets de $H \setminus C$ sont contenu dans l'enveloppe portée de C, d'où porte$(C) = H$. Supposons maintenant que C est contenu dans aucune subdivision entière de graphe complet SK_n avec $n \geq 4$. Le lemme 43 nous garantit que $S := \mathrm{conv}(C)$ est soit égal à C soit à Q_3^-. Dans ce cas, nous affirmons que S est porté et donc que porte$(C) = \mathrm{conv}(C)$. Supposons que G est le plus petit cube partiel bidimensionnel pour lequel ce n'est pas vrai. Soit v un sommet de G qui n'a pas de porte dans S, le plus proche possible de S, où $\mathrm{d}_G(v, S) = \min\{\mathrm{d}_G(v, z) : z \in S\}$ est la distance entre v et S. Étant donnée une Θ-classe E_i de G, notons $G' := \pi_i(G)$, $S' := \pi_i(S)$, $C' := \pi_i(C)$, et $u' := \pi_i(u)$ pour tout sommet u de G. Puisque tout sous-graphe convexe de G est l'intersection de demi-espaces d'après le lemme 13, si toutes les Θ-classes de G croissent S, alors S coïncide avec G, ce qui contredit notre choix de G. Donc G contient au moins une Θ-classe qui ne croise pas S.

Premièrement, supposons qu'il existe une Θ-classe E_i de G qui ne croise pas S telle que S' est convexe dans G'. Puisque $G' \in \mathscr{F}(Q_3)$, par le lemme 43, soit le cycle C' de longueur 6 est convexe soit son enveloppe convexe dans G' est Q_3^-. Nous pouvons remarquer que la distance dans G' entre v' et n'importe quel sommet de S' est soit égale à la distance dans G entre v et le sommet correspondant de S si E_i ne sépare pas v de S, soit diminué de un par rapport à la distance correspondante dans G si v et S appartiennent aux demi-espaces complémentaires définis par E_i. Il en découle que S' n'est pas porté dans G'. Plus précisément le sommet v' n'a pas de porte dans S'. Donc, si $S' = Q_3^-$, alors en contractant toutes les Θ-classes de G' séparant S' de v', nous obtiendrons Q_3 comme pc-mineur, contredisant notre hypothèse sur G et G' qui appartiennent à $\mathscr{F}(Q_3)$. Cela implique que $S' = C'$ et donc que $S = C$. De plus par

l'hypothèse de minimalité de G, le cycle C' de longueur 6 est contenu dans une subdivision entière d'un graphe complet maximale $H' = SK_n$ de G'. En appliquant la proposition 16, nous obtenons que H' est un sous-graphe porté de G'. Soit w' la porte de v' dans H' (il peut arriver que $w' = v'$). Puisque $S' = C'$ et que v' n'a pas de porte dans S', nécessairement w' n'est pas un sommet de C'. De même, w' n'est pas adjacent à un sommet de C'. Le graphe G est obtenu à partir de G' par une expansion isométrique ψ_i (réciproque de π_i). Par le lemme 42, ψ_i restreinte à H' est une expansion périphérique sur un arbre isométrique de H'. Par le corollaire 4, G contient un sous-graphe isométrique isomorphe à H'. Par le choix de E_i, C ne croise pas E_i, ce qui implique que dans G le cycle convexe C est contenu dans une subdivision entière de K_n, ce qui contredit notre hypothèse sur le choix de C.

Deuxièmement, supposons que pour toutes les Θ-classes E_i de G qui ne croisent pas S, S' n'est pas convexe dans G'. D'après le lemme 43, puisque C' est un cycle isométrique de longueur 6 dans G', $G' \in \mathscr{F}(Q_3)$, et C' n'est pas convexe dans G', nous concluons que l'enveloppe convexe de C' dans G' est Q_3^-, et ce Q_3^- est différent de S'. D'où $S' = C'$ et $S = C$. Ceci implique qu'il existe un sommet z' de G' adjacent à trois sommets z'_1, z'_2, et z'_3 de C'. Soient z_1, z_2, et z_3 les pré-images respectives dans C des sommets z'_1, z'_2, et z'_3. Soient aussi y et z les deux pré-images dans l'hypercube Q_m du sommet z'. Supposons que y soit adjacent à z_1, z_2, et z_3 dans Q_m. Comme C' est l'image d'un cycle convexe de longueur 6 de G, y n'est pas un sommet de G alors que z est un sommet de G. Comme G est un sous-graphe isométrique de Q_m, G contient un sommet w_1 adjacent à z et z_1, un sommet w_2 adjacent à z et z_2, et un sommet w_3 adjacent à z et z_3.

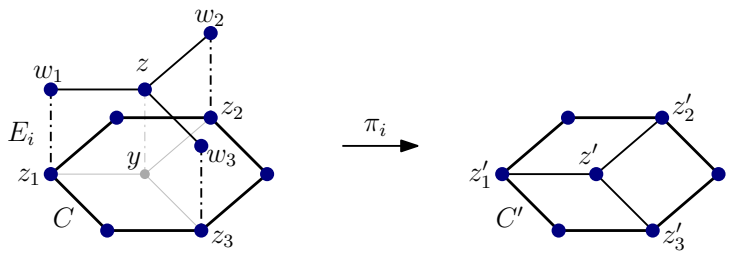


FIGURE 4.5. – Illustration des notations du deuxième cas de la preuve de la proposition 17.

Par conséquent, les sommets de C avec les sommets z, w_1, w_2, et w_3 définissent une subdivision entière SK_4 de K_4, ce qui contredit notre hypothèse que C n'est pas contenu dans une telle subdivision. Nous avons donc montrer que l'enveloppe convexe de C est portée. □

4.4. Enveloppes convexes et portées des cycles isométriques longs

Précédemment nous avons décrit la structure des enveloppes portée des cycles de longueur 6 dans les cubes partiels bidimensionnels. Nous allons maintenant donner une description des enveloppes convexes et portées des cycles isométriques *longs*, *i.e.*, des cycles isométriques de longueur ≥ 8. Nous montrons que les enveloppes convexes de ces cycles

sont des *disques, i.e.*, des graphes de régions dans un arrangement de pseudo-lignes. Ensuite, nous montrons que de tels disques sont portés. En particulier, les cycles longs convexes dans les cubes partiels bidimensionnels sont portés.

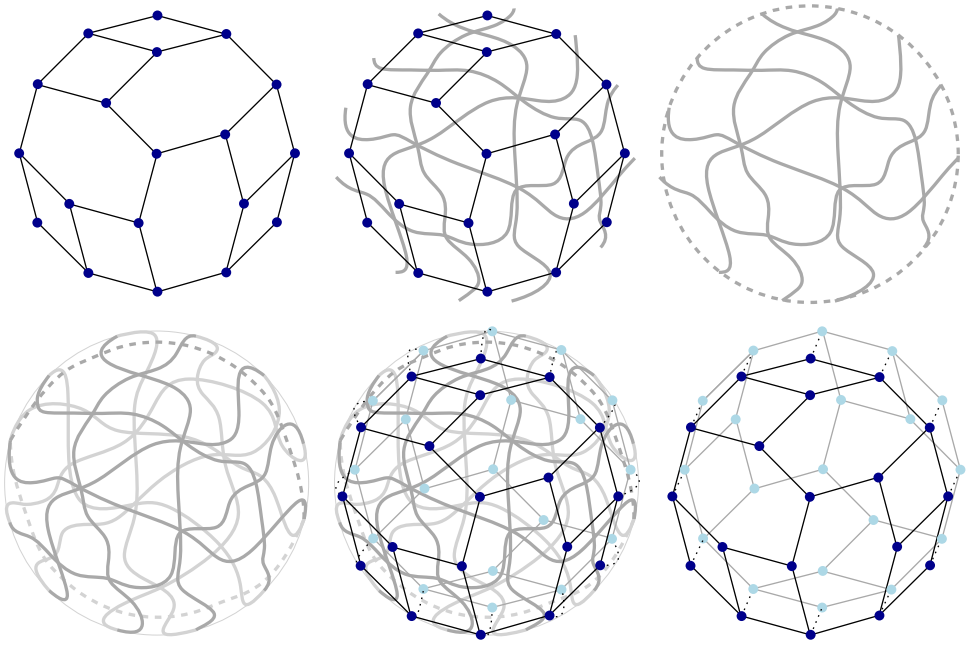


FIGURE 4.6. – D'en haut à gauche à en bas à droite : un disque G ; un arrangement de pseudo-lignes U dont G est le graphe de régions ; l'arrangement U auquel nous avons rajouté une ligne ℓ_∞ ; un arrangement de pseudo-cercles U' obtenu à partir de $U \cup \{\ell_\infty\}$ par une copie d'une symétrie centrale ; l'arrangement U' avec son graphe de régions G' ; le graphe de topes G' d'un OM contenant G comme demi-espace.

4.4.1. Enveloppes convexes des cycles isométriques longs

Un cube partiel bidimensionnel D est un *pseudo-disque* s'il contient un cycle isométrique C tel que $\mathrm{conv}(C) = D$. Le cycle C est appelé la *bordure* de D et est dénoté par ∂D. Si D est l'enveloppe convexe d'un cycle isométrique C de G, alors nous disons que D est un pseudo-disque de G. En admettant que les graphes complets K_1 et K_2 sont des pseudo-disques, nous obtenons le résultat suivant :

Lemme 46. *La classe des pseudo-disques est close par contractions.*

L'objectif principal de cette sous-section est de montrer le résultat suivant :

Proposition 18. *Un graphe $D \in \mathscr{F}(Q_3)$ est un pseudo-disque si et seulement si D est un disque. En particulier, l'enveloppe convexe* $\mathrm{conv}(C)$ *d'un cycle isométrique C d'un graphe $G \in \mathscr{F}(Q_3)$ est le graphe de topes d'un AOM de rang* 2.

La preuve de la proposition 18 suivra assez facilement des quatre lemmes auxiliaires 47 – 50 qui suivent. Le premier lemme auxiliaire établit que les disques de VC-dimension 2 sont des pseudo-disques :

Lemme 47. *Si $D \in \mathscr{F}(Q_3)$ est un disque, alors D est l'enveloppe convexe d'un cycle isométrique C de D.*

Démonstration. Nous savons que D est le graphe de régions d'un arrangement $\mathscr{A}$ de pseudo-lignes. Le cycle C est obtenu en traversant les régions non bornées de cet arrangement en ordre circulaire, *i.e.*, $C = \partial D$. Ce cycle C est isométrique dans D car les régions correspondant à n'importe quelle paire de sommets opposés v et $-v$ de C sont séparées par toutes les pseudo-lignes de $\mathscr{A}$, donc $\mathrm{d}_D(v,-v) = |\mathscr{A}|$. De plus, $\mathrm{conv}(C) = D$ parce que pour tout autre sommet u de D, chaque pseudo-ligne $\ell \in \mathscr{A}$ sépare exactement une des régions correspondant à v et $-v$ de la région correspondant à u, d'où $\mathrm{d}_D(v,u) + \mathrm{d}_D(u,-v) = \mathrm{d}_D(v,-v)$. □

À partir de maintenant nous cherchons à montrer que chaque pseudo-disque est un disque. Soit D un pseudo-disque de bordure C. Soit $A_D := \{v \in D : v \text{ a un antipode}\}$. Comme précédemment, pour une Θ-classe E_i de D, nous dénotons les demi-espaces complémentaires de D définis par E_i par D_i^+ et D_i^-.

Lemme 48. *Si D est un pseudo-disque de bordure C, alors $A_D = C$.*

Démonstration. L'inclusion $C \subseteq A_D$ est évidente car C est un cycle isométrique tel que $\mathrm{conv}(C) = D$. Pour montrer l'inclusion inverse $A_D \subseteq C$, supposons par l'absurde que v et $-v$ sont des sommets antipodaux de D n'appartenant pas à C. Sachant que $D = \mathrm{conv}(C)$, toutes les Θ-classes de D croisent C. Nous pouvons donc contracter des Θ-classes jusqu'à que v soit adjacent à un sommet $u \in C$ car le lemme 24 nous garantit que leurs contractions mènent à un disque. Nous dénotons E_i la Θ-classe de l'arête uv. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $u \in D_i^+$ et $v \in D_i^-$. De plus, la Θ-classe E_i croise aussi C. Soient xy et zw deux arêtes opposées de C appartenant à E_i telles que $x, z \in D_i^+$ et $y, w \in D_i^-$. Soient P et Q deux plus courts chemins dans D_i^- connectant v avec respectivement y et w. Comme la longueur totale de P et Q est égale à la longueur du plus court chemin de C allant de x à z en passant par u, les chemins P et Q s'intersectent exactement en v. Étendre respectivement P et Q dans $D_i^- \cap C$ jusqu'à $-u$ produit deux plus courts chemins P' et Q' qui intersectent toutes les Θ-classes sauf E_i. Par conséquent, ces deux chemins peuvent être étendus en un plus court chemin allant de v à $-v$ en ajoutant l'arête $-u-v$ de E_i. De même, il existe des plus courts chemins P'' et Q'' allant du sommet $-v \in D_i^+$ aux sommets $x, z \in C \cap D_i^+$ s'intersectant exactement en $-v$. Soient E_j une Θ-classe touchant P et E_k une Θ-classe touchant Q. Nous affirmons que l'ensemble $S := \{u, v, x, y, z, w, -u, -v\}$ de sommets de D pulvérise $\{i, j, k\}$, *i.e.*, qu'en contractant toutes les Θ-classes sauf E_i, E_j, et E_k nous obtenons un pc-mineur interdit Q_3. En effet, E_i sépare S en deux ensembles $\{u, x, -v, z\}$ et $\{v, y, -u, w\}$, E_j en $\{x, y, -v, -u\}$ et $\{u, v, z, w\}$, et E_k en $\{u, v, x, y\}$ et $\{-v, -u, z, w\}$. Cette contradiction montre que $A_D \subseteq C$, d'où $A_D = C$.

□

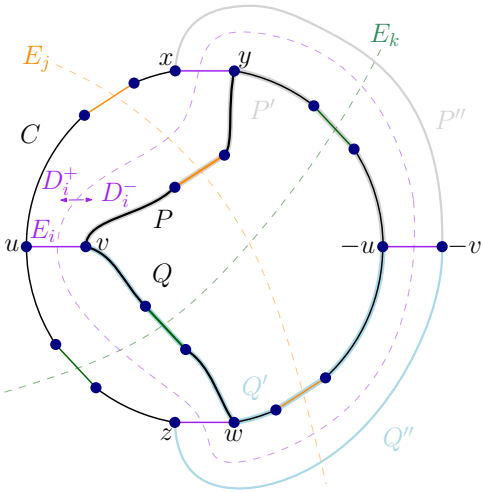


FIGURE 4.7. – Illustration de la preuve du lemme 48.

Lemme 49. *Soit D un pseudo-disque de bordure C, alors D est un cube partiel affine. De plus, il existe un cube partiel antipodal $D' \in \mathscr{F}(Q_4)$ contenant D comme demi-espace.*

Démonstration. Pour commencer, montrons que D est affine. En utilisant la caractérisation des cubes partiels affines donnée par KNAUER et MARC [62, Proposition 2.16], il suffit de montrer que pour tous les sommets u, v de D, nous pouvons trouver $w, -w \in A_D$ tels que les Θ-classes de D qui croisent l'intervalle $\mathrm{I}(w, u)$ sont disjointes de celles qui croisent $\mathrm{I}(v, -w)$. D'après le lemme 48 cela est équivalent à trouver une telle paire de sommets $w, -w$ dans C. Soient $u, v \in D$, et I l'ensemble des Θ-classes croissant $\mathrm{I}(u, v)$. Sans perte de généralité, supposons que $u \in D_i^+$ (et donc $v \in D_i^-$) pour tout $i \in I$. Nous affirmons que $(\bigcap_{i \in I} D_i^+) \cap C \neq \emptyset$. Ainsi, tous les sommets de cette intersection peuvent jouer le rôle de w.

Pour $i \in I$, posons $C_i^+ = C \cap D_i^+$ et $C_i^- = C \cap D_i^-$; C_i^+ et C_i^- sont deux plus courts chemins disjoints de C couvrant tous les sommets de C. En regardant C comme un cercle, C_i^+ et C_i^- sont des arcs disjoints de ce cercle. Supposons par l'absurde que $\bigcap_{i \in I} C_i^+ = \bigcap_{i \in I} D_i^+ \cap C = \emptyset$. Par la propriété d'Helly pour les arcs de cercles, il existe trois classes $i, j, k \in I$ telles que les chemins C_i^+, C_j^+, et C_k^+ s'intersectent deux à deux, forment une couverture des sommets et des arêtes du cercle C, et ont une intersection vide. Nous en déduisons que C est coupé en 6 chemins non vide : $C_i^+ \cap C_j^+ \cap C_k^-$, $C_i^+ \cap C_j^- \cap C_k^-$, $C_i^+ \cap C_j^- \cap C_k^+$, $C_i^- \cap C_j^- \cap C_k^+$, $C_i^- \cap C_j^+ \cap C_k^+$, et $C_i^- \cap C_j^+ \cap C_k^-$. Rappelons que $u \in D_i^+ \cap D_j^+ \cap D_k^+$ et $v \in D_i^- \cap D_j^- \cap D_k^-$. Dans ce cas, les six chemins partitionnant C avec u et v pulvérisent l'ensemble $\{i, j, k\}$, *i.e.*, qu'en contractant toutes les Θ-classes sauf E_i, E_j et E_k, nous obtenons un pc-mineur interdit Q_3. Par conséquent, D est un cube partiel affine, *i.e.*, D est un demi-espace d'un cube partiel antipodal G, disons $D = G_i^+$ pour une Θ-classe E_i.

Supposons que G peut être contracté en Q_4. Si E_i est une coordonnée de Q_4 (la classe E_i n'est pas contractée), alors D peut être contracté en Q_3 car $D = G_i^+$. Ceci contredit notre hypothèse sur D qui est un pseudo-disque donc appartient à la classe $\mathscr{F}(Q_3)$. Nous en concluons que la Θ-classe E_i est contractée. Nous savons d'après le lemme 18 que les contractions

commutent. Nous pouvons donc supposer sans perte de généralité que la Θ-classe E_i a été contractée en dernier. Soit G' le cube partiel obtenu à l'étape juste avant la contraction des arêtes appartenant à E_i. Soit D' le sous-graphe isométrique de G' qui est l'image de D par les contractions appliquées à G. Par le lemme 46, être un pseudo-disque est préservé par contractions. Donc D' est un pseudo-disque. De plus, D' est l'un des demi-espaces de G' défini par la classe E_i. De même, comme l'antipodalité est préservée par contractions d'après le lemme 20, G' est un cube partiel antipodal tel que $\pi_i(G') = Q_4$. Cela implique que G' a été obtenu à partir de $H := Q_4$ par une expansion isométrique antipodale (H^1, H^0, H^2). Observons qu'un des sous-graphes isométriques H^1 ou H^2 du 4-cube H coïncide avec le pseudo-disque $D'' := \pi_i(D')$, disons $H_1 = D''$. Puisque H est antipodal, par un résultat de KNAUER et MARC [62, Lemma 2.14], H_0 est clos par antipodes dans Q_4 et $-(H_1 \setminus H_0) = H_2 \setminus H_0$. Comme H_0 est contenu dans un sous-graphe isométrique $H_1 = D''$ de H, H_0 est aussi clos par antipodes dans D''. Par le lemme 48 nous obtenons que $H_0 = A_{D''} = \partial D''$. Par conséquent, H_0 est un cycle isométrique de $H = Q_4$ qui sépare Q_4 en deux ensemble de sommets. Cependant, aucun cycle isométrique de Q_4 sépare le graphe. Contradiction. □

Si $D \notin \mathscr{F}(Q_3)$ est l'enveloppe convexe d'un cycle isométrique, alors D n'est pas nécessairement affine.D'autre part, $SK_4 \in \mathscr{F}(Q_3)$ est affine mais n'est pas un pseudo-disque. Introduisons donc le lemme suivant :

Lemme 50. *Soit D un pseudo-disque de bordure C, alors D est un disque, i.e., le graphe de régions d'un arrangement de pseudo-lignes.*

Démonstration. Par le lemme 49, nous savons que D est le demi-espace d'un cube partiel antipodal G. Supposons par l'absurde que G n'est pas le graphe de topes d'un OM. KNAUER et MARC [62] ont montré que dans ce cas G admet un pc-mineur X appartenant à la famille $\mathscr{Q}^-$ (comme définie dans la section 2.4). En observant que les membres de cette classe ne sont pas antipodaux, il est nécessaire d'effectuer des contractions et des restrictions sur G pour obtenir X. Nous effectuons d'abord toutes les contractions I pour obtenir un pseudo-disque $D' := \pi_I(D) \in \mathscr{F}(Q_3)$ qui est un demi-espace d'un graphe antipodal $G' := \pi_I(G)$. La deuxième partie du lemme 49 nous garantit que $G' \in \mathscr{F}(Q_4)$. Maintenant, puisque G' contient X comme sous-graphe convexe propre, d'après le lemme 36 nous obtenons que $X \in \mathscr{F}(Q_3)$. Puisque SK_4 est le seul membre de la famille $\mathscr{Q}^-$ contenant SK_4 comme sous-graphe convexe, par la proposition 8, nous déduisons que $X = SK_4$. Supposons par minimalité que toute nouvelle contraction détruit toutes les copies de X présent dans D'. Nous distinguons deux cas.

Premièrement, supposons qu'il existe une copie de X qui est un sous-graphe convexe de D'. Soit $n \geq 4$ maximal tel qu'il existe un convexe $H = SK_n$ dans D' qui est une extension d'une copie convexe de X. Par la proposition 16, H est porté. Si $H \neq D'$, il existe une Θ-classe E_i dans D' qui ne croise pas H. En contractant E_i, par le lemme 22 nous obtenons une subdivision entière d'un graphe complet portée $\pi_i(H) = SK_n$ contrairement à notre hypothèse de minimalité de D'. Donc $D' = H = SK_n$ et il est facile de voir qu'aucun $SK_n, n \geq 4$ est un pseudo-disque, contradiction.

Deuxièmement, supposons qu'aucune copie de X est un sous-graphe convexe de D'.

Sachant que G' contient X comme sous-graphe convexe, D' est un demi-espace de G' (disons $D' = (G')_i^+$) défini par la Θ-classe E_i, et G' est un cube partiel antipodal, nous en déduisons que E_i croisent toutes les copies convexes H de $X = SK_4$. Alors E_i partitionne H en un cycle C de longueur 6 et un $K_{1,3}$ tel que toutes les arêtes entre ces deux graphes appartiennent à E_i. Puisque G' est antipodal, il existe une application "d'antipodalité" qui envoie les sommets de $(G')_i^+$ sur les sommets de $(G')_i^-$ et vice-versa. Dans D', il y a donc une copie de $K_{1,3}$ et une de $C = C_6$, et ces deux copies appartiennent à la bordure $\partial(G')_i^+$. Cette application préserve aussi les arêtes. Ainsi, elle envoie les arêtes de E_i sur les arêtes de E_i et les sommets de $(G')_i^+ \setminus \partial(G')_i^+$ sur les sommets de $(G')_i^- \setminus \partial(G')_i^-$. Par conséquent, tous les sommets de $\partial(G')_i^-$ ont un antipode dans le pseudo-disque $D' = (G')_i^+$ et leurs antipodes appartiennent à $\partial(G')_i^+$. En utilisant le lemme 48, nous obtenons que $\partial(G')_i^+ \subset A_{D'} = \partial D'$. Nous concluons que le cycle isométrique $\partial D'$ contient une copie isométrique de C_6, d'où $\partial D' = C_6$. Comme $\partial D'$ contient aussi les feuilles d'un $K_{1,3}$, nous en déduisons que le pseudo-disque D' coïncide avec Q_3^-. Cependant, le seul cube partiel antipodal contenant Q_3^- comme demi-espace est représenté dans la Figure 4.8 et c'est le graphe de topes d'un OM, ce qui nous conduit à une contradiction.

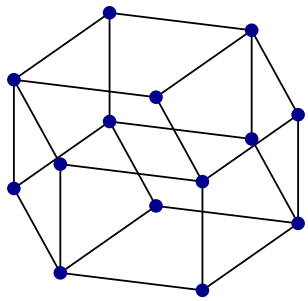


FIGURE 4.8. – Le graphe de topes d'un OM contenant Q_3^- comme demi-espace.

□

Nous pouvons constater que le lemme 50 généralise le résultat du lemme 43. Avec le lemme 47, il en résulte que les pseudo-disques sont des disques, *i.e.*, des graphes de topes d'AOMs de rang au plus 2. Cela prouve la proposition 18.

4.4.2. Enveloppes portées des cycles isométriques longs

D'après la proposition 18, les disques et les pseudo-disques correspondent au même objet, donc à partir de maintenant nous utiliseront uniquement le terme "disque" pour les deux. Nous continuons en montrant que dans les cubes partiels bidimensionnels, tous les disques admettant une bordure de longueur > 6 sont portés.

Proposition 19. *Soit D un sous-graphe de $G \in \mathscr{F}(Q_3)$ tel que D est un disque avec $|\partial D| > 6$, alors D est un sous-graphe porté de G. En particulier, les cycles longs convexes de G sont portés.*

Démonstration. Soit G un cube partiel bidimensionnel minimal dans lequel l'affirmation n'est pas vérifiée. Soit D un sous-graphe non porté de G tel que D est un disque dont la bordure $C := \partial D$ est un cycle long isométrique. Soit v un sommet de G qui n'a pas de porte dans D, le plus proche possible de D, *i.e.*, $\mathrm{d}_G(v, D) = \min\{\mathrm{d}_G(v, z) : z \in D\}$. Nous utilisons quelques notations qui proviennent de la preuve de CHEPOI, KNAUER et MARC [28, Proposition 1]. Soient $P_v := \{x \in D : \mathrm{d}_G(v, x) = \mathrm{d}_G(v, D)\}$ la projection métrique de v dans D, et $R_v := \{x \in D : \mathrm{I}(v, x) \cap D = \{x\}\}$ l'empreinte de v dans D. Puisque v n'a pas de porte dans D, R_v contient au moins deux sommets. Évidemment, $P_v \subseteq R_v$ et les sommets de R_v sont deux à deux non adjacents. Nous notons les sommets de P_v par $x_1, \ldots, x_k$. Pour tout $x_i \in P_v$, soit v_i un voisin de v sur un plus court (v, x_i)-chemin. Par notre hypothèse de minimalité de v, chaque v_i a une porte dans D. Par définition de P_v, x_i est la porte de v_i dans D. Il en découle que les sommets $v_1, \ldots, v_k$ sont deux à deux distincts. De plus, comme x_i est la porte de v_i dans D, pour toute paire de sommets distincts $x_i, x_j \in P_v$, nous avons $\mathrm{d}_G(v_i, x_i) + \mathrm{d}_G(x_i, x_j) = \mathrm{d}_G(v_i, x_j) \leq 2 + \mathrm{d}_G(v_j, x_j)$. Sachant que $\mathrm{d}_G(x_i, v_i) = \mathrm{d}_G(x_j, v_j)$, nécessairement $\mathrm{d}_G(x_i, x_j) = 2$.

Nous affirmons que tout triplet de sommets distincts $x_j, x_k, x_\ell \in P_v$ n'ont pas de voisin commun. En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe un sommet x adjacent à x_j, x_k et x_ℓ. Alors, x appartient à D par convexité de D et $x_j, x_k, x_\ell \in \mathrm{I}(x, v)$ car $x_j, x_k, x_\ell \in P_v$. Soient E_j la Θ-classe correspondant à l'arête $v_j v$ et C_k le cycle de G défini par un plus court (v, x_j)-chemin P passant par v_j, le chemin de longueur 2 (x_j, x, x_k), et un plus court (x_k, v)-chemin Q passant par v_k. Alors E_j contient une autre arête de C_k. Nécessairement cela ne peut pas être une arête de P. Comme v est le plus proche sommet de D sans porte, cette arête n'est pas non plus une arête de Q. Puisque $x_j \in \mathrm{I}(x, v)$ et que l'arête $v_j v$ est sur un plus court (x, v)-chemin passant par x_j, cette arête n'est pas $x x_j$. Donc la deuxième arête de E_j dans C_k est $x x_k$. Nous en déduisons que v et x_k appartiennent au même demi-espace défini par E_j, disons G_j^+, et v_j et x appartiennent tous les deux au demi-espace complémentaire G_j^-. En définissant de manière analogue un cycle C_ℓ, nous pouvons montrer que l'arête $x x_\ell$ appartient aussi à E_j, d'où les sommets x_k et x_ℓ appartiennent au même demi-espace G_j^+. Puisque $x \in \mathrm{I}(x_k, x_\ell)$ et $x \in G_j^-$, nous obtenons une contradiction avec la convexité de G_j^+. Par conséquent, si $x_j, x_k, x_\ell \in P_v$, alors $\mathrm{conv}(x_j, x_k, x_\ell)$ est un cycle isométrique de longueur 6 dans D. En particulier, chacun des intervalles $\mathrm{I}(x_j, x_k)$,$\mathrm{I}(x_k, x_\ell)$, et $\mathrm{I}(x_j, x_\ell)$ consiste en un seul plus court chemin.

Ensuite nous montrons que $|P_v| \leq 3$. Par un raisonnement par l'absurde, supposons que $|P_v| \geq 4$ et considérons les sommets $x_1, x_2, x_3, x_4 \in P_v$. Soit H le sous-graphe de D induit par l'union des intervalles $\mathrm{I}(x_j, x_k)$, avec $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Puisque ces intervalles sont des chemins de longueur 2 s'intersectant uniquement en leurs extrémités communes, H est isomorphe à SK_4 avec x_1, x_2, x_3, et x_4 comme sommets originaux. Puisque D est un cube partiel bidimensionnel, nous pouvons directement vérifier que H est un sous-graphe isométrique de D. En observant que les intervalles $\mathrm{I}(x_j, x_k)$ sont des chemins d'intérieurs disjoints, $H = SK_4$ ne peut pas être étendu à SK_4^*. Par le lemme 44, $H = SK_4$ est un sous-graphe convexe de D. Puisque D est le graphe de topes d'un AOM de rang 2 et donc le graphe de topes d'un COM de rang 2, par la proposition 8, D ne contient pas de SK_4 comme pc-mineur. Cette contradiction montre que $|P_v| \leq 3$.

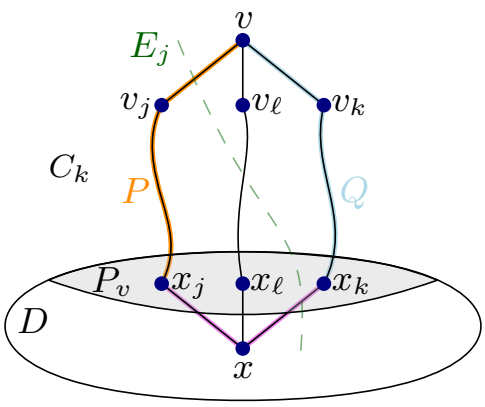


FIGURE 4.9. – Illustration de la preuve de la proposition 19.

Soit $S := \mathrm{conv}(P_v)$. Puisque $|P_v| \leq 3$ et $\mathrm{d}_G(x_j, x_k) = 2$ pour toute paire de sommets x_j, x_k de P_v, il existe au plus trois Θ-classes croisant S. Puisque la longueur du cycle isométrique C est d'au moins 8, il existe une Θ-classe E_i qui croise C (et D) mais pas S. Nous affirmons que v et les sommets de P_v appartiennent au même demi-espace défini par E_i. En effet, si E_i sépare v de S, alors pour tout j, tous les plus courts (v_j, x_j)-chemins possède une arête de E_i. Nous obtenons une contradiction avec le fait que x_j est la porte de v_j dans D. Par conséquent, v et l'ensemble S appartiennent au même demi-espace défini par E_i. Considérons les graphes $G' := \pi_i(G)$, $D' := \pi_i(D)$ et le cycle $C' := \pi_i(C)$. D'après le lemme 23, D' est un disque de bordure C' (et donc le graphe de topes d'un AOM) dans le cube partiel bidimensionnel G'. Observons que la distance dans G' entre v' et les sommets x'_j de P_v est identique à la distance entre v et x_j dans G et que la distance entre v' et les images des sommets de $R_v \setminus P_v$ peut éventuellement diminuer de 1. Il en découle que D' n'est pas porté. Par l'hypothèse de minimalité de G, c'est seulement possible si C' est un cycle de longueur 6. Dans ce cas, par la proposition 17, nous concluons que D' est contenu dans une subdivision entière d'un graphe complet maximale $H' = SK_n$, qui est un sous-graphe porté de G'. Le graphe G est obtenu à partir de G' par une expansion isométrique ψ_i (inverse de π_i). D'après le lemme 42, ψ_i, restreinte à H', est une expansion périphérique sur un arbre isométrique de H'. Ainsi, dans G le graphe de topes de l'AOM convexe D est contenu dans une subdivision entière de K_n. Cela contredit notre hypothèse sur D qui est l'enveloppe convexe d'un cycle isométrique C de longueur ≥ 8. □

En résumé, les propositions 17, 18, et 19, nous permettent d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 9. *Soient G un cube partiel bidimensionnel et C un cycle isométrique de G. Si $C = C_6$, alors l'enveloppe portée de C est soit C, soit Q_3^-, soit une subdivision entière de graphe complet maximale. Si C est long, alors* $\mathrm{conv}(C)$ *est un disque porté.*

Corollaire 5. *Les subdivisions entières de graphes complets, et les disques convexes tels que leurs frontières sont des cycles longs (en particulier les cycles convexes longs) sont des sous-graphes portés dans les cubes partiels bidimensionnels.*

4.5. Complétion en cubes partiels amples

Nous montrons ici que tous les cubes partiels G de VC-dimension au plus 2 peuvent être complétés en cubes partiels amples $G^{\top}$ de VC-dimension au plus 2. Cette complétion est réalisée en deux étapes. Dans un premier temps, nous étendons canoniquement G à un cube partiel $G^{\urcorner} \in \mathscr{F}(Q_3)$ ne contenant pas de subdivisions entières convexes de graphes complets. Par la proposition 8, le graphe résultant $G^{\urcorner}$ est le graphe de topes d'un COM de rang 2. Ses cellules sont les cycles portés de G et les cycles de longueur 4 créés lors de l'extension des subdivisions entières de graphes complets. Dans un second temps, nous transformons $G^{\urcorner}$ en un cube partiel ample $G^{\top} := (G^{\urcorner})^{\ulcorner} \in \mathscr{F}(Q_3)$ en complétant chaque cycle porté C de longueur ≥ 6 de G (et de $G^{\urcorner}$) par un remplissage planaire avec des carrés. Nous obtenons alors le résultat qui suit :

Théorème 10. *Tout cube partiel bidimensionnel G peut être étendu en cube partiel bidimensionnel ample.*

4.5.1. Complétion canonique en graphes de topes de COMs bidimensionnels.

L'*opération de* 1*-extension* sur un cube partiel $G \in \mathscr{F}(Q_3)$ de Q_m consiste à prendre une subdivision entière d'un graphe complet maximale par inclusion et convexe $H = SK_n$ de G telle que H est plongé de façon standard dans Q_m et d'ajouter le sommet $v_{\varnothing}$ à G. Le sous-graphe G' de Q_m résultant est appelé *graphe de* 1*-extension.*

Lemme 51. *Si G' est un graphe de 1-extension de $G \in \mathscr{F}(Q_3)$ et qu'il est obtenu par rapport à une subdivision entière d'un graphe complet maximale par inclusion et convexe $H = SK_n$ de G, alors $G' \in \mathscr{F}(Q_3)$ et G est un sous-graphe isométrique de G'. De plus, toute subdivision entière convexe SK_r de K_r avec $r \geq 3$ de G' est une subdivision entière de K_r convexe de G, et chaque cycle convexe de longueur ≥ 6 de G' est un cycle convexe de G.*

Démonstration. Soit G un sous-graphe isométrique de Q_m. Pour montrer que G' est un sous-graphe isométrique de Q_m, il suffit de montrer que tous les sommets v de G peuvent être reliés dans G' à $v_{\varnothing}$ par un plus court chemin. Par la proposition 16, H est un sous-graphe porté de G et la porte v_0 de v dans $Q = \mathrm{conv}(H)$ appartient à H. Ainsi, si v est encodé par l'ensemble A et v_0 est encodé par l'ensemble $A_0 = A \cap \{1, \ldots, n\}$, alors soit $A_0 = \{i\}$ est un sommet original u_i, soit $A_0 = \{i, j\}$ est un sommet subdivision $u_{i,j}$. Dans le premier cas, cela signifie que $\mathrm{d}(v, v_0) = \mathrm{d}(v, u_i) = |A| - 1$, et dans le second cas, cela signifie que $\mathrm{d}(v, v_0) = \mathrm{d}(v, u_{i,j}) = |A| - 2$. Sachant que $\mathrm{d}(v, v_{\varnothing}) = |A|$, nous obtenons un plus court $(v, v_{\varnothing})$-chemin dans G' qui va d'abord de v à v_0, puis de v_0 à $v_{\varnothing}$ en passant par une arête dans le premier cas ou par un chemin de longueur 2 dans le second cas de H. Cela établit que G' est un sous-graphe isométrique de Q_m. Comme deux voisins quelconques de $v_{\varnothing}$ dans H sont à distance 2 dans G et comme $v_{\varnothing}$ est uniquement adjacent aux sommets originaux de H dans G d'après le lemme 45, nous concluons que G est un sous-graphe isométrique de G'.

Nous allons maintenant montrer que G' appartient à $\mathscr{F}(Q_3)$. Supposons par l'absurde que les ensembles correspondant à un ensemble S composé de 8 sommets de G' pulvérisent l'ensemble $\{i, j, k\}$. Puisque $G \in \mathscr{F}(Q_3)$, l'un des sommets de S est le sommet $v_\varnothing$. Plus précisément, $v_\varnothing$ est le sommet dont la trace sur $\{i, j, k\}$ est $\varnothing$. Donc les ensembles correspondant aux 7 sommets restants de S contiennent au moins un des éléments i, j, k. Puisque $H = SK_n$ avec $n \geq 4$, il existe nécessairement un sommet original u_ℓ dans H avec $\ell \notin \{i, j, k\}$. Clairement, u_ℓ n'est pas dans S. Comme la trace de $\{\ell\}$ sur $\{i, j, k\}$ est égale à $\varnothing$, remplacer dans S le sommet $v_\varnothing$ par u_ℓ nous donne un ensemble à 8 sommets de G pulvérisant encore l'ensemble $\{i, j, k\}$, ce qui contredit notre hypothèse sur $G \in \mathscr{F}(Q_3)$.

Il reste à montrer que toute subdivision entière convexe de graphe complet de G' est une subdivision entière convexe de graphe complet de G. Supposons par l'absurde que $H' = SK_r$, avec $r \geq 3$, est une subdivision entière de K_r convexe de G' contenant le sommet $v_\varnothing$. D'après le lemme 45, dans G', $v_\varnothing$ est exactement adjacent aux sommets originaux de H. Ainsi, si $v_\varnothing$ est un sommet original de H', alors au moins deux sommets originaux de H sont des sommets subdivisions de H', et si $v_\varnothing$ est un sommet subdivision de H', alors les deux sommets originaux de H' adjacents à $v_\varnothing$ sont des sommets originaux de H. Dans les deux cas, nous dénotons ces deux sommets originaux de H par $x = u_i$ et $y = u_j$. Comme H' est convexe et $u_{i,j}$ est adjacent à u_i et à u_j, $u_{i,j}$ est un sommet de H'. Mais alors H' contient un cycle de longueur 4 ($x = u_i, v_\varnothing, y = u_j, u_{i,j}$), ce qui est impossible dans une subdivision entière convexe de graphe complet. De manière similaire, en utilisant le lemme 45, nous pouvons montrer que tout cycle convexe de longueur ≥ 6 de G' est un cycle convexe de G. □

Supposons que nous effectuions l'opération de 1-extension à toutes les subdivisions entières de graphes complets portées et à tous les cubes partiels intermédiaires. Par le lemme 51, tous ces sous-graphes isométriques de Q_m sont de VC-dimension au plus 2, et toutes leurs subdivisions entières convexes de graphes complets sont des subdivisions entières convexes de graphes complets de G. Après un nombre fini d'étapes de 1-extensions (par le lemme de Sauer-Shelah-Perles, après au plus $\binom{m}{\leq 2}$ 1-extensions), nous obtenons un sous-graphe isométrique $G^\urcorner$ de Q_m tel que $G^\urcorner \in \mathscr{F}(Q_3)$, G est un sous-graphe isométrique de $G^\urcorner$, et toutes les subdivisions entières maximales SK_n de K_n dans $G^\urcorner$ sont contenues dans SK_n^*. Nous appelons $G^\urcorner$ la 1-*complétion canonique* de G. Nous résumons ce résultat dans la proposition suivante :

Proposition 20. *Soit $G \in \mathscr{F}(Q_3)$ un sous-graphe isométrique de l'hypercube Q_m. Après au plus $\binom{m}{\leq 2}$ étapes de 1-extensions, G peut être canoniquement complété en graphe de topes d'un COM $G^\urcorner$ de VC-dimension au plus 2, et G est un sous-graphe isométrique de $G^\urcorner$.*

Démonstration. Par la deuxième partie de la proposition 8, pour montrer que $G^\urcorner$ est le graphe de topes d'un COM bidimensionnel, nous devons montrer que $G^\urcorner$ appartient à $\mathscr{F}(Q_3, SK_4) = \mathscr{F}(Q_3) \cap \mathscr{F}(SK_4)$. Le fait que $G^\urcorner$ appartienne à $\mathscr{F}(Q_3)$ vient du lemme 51. Supposons que $G^\urcorner$ contient SK_4 comme pc-mineur. Par le corollaire 4, $G^\urcorner$ contient un sous-graphe convexe H isomorphe à SK_4. Alors H peut s'étendre dans $G^\urcorner$ à un SK_n maximal par inclusion, que nous dénotons H'. Comme $G^\urcorner \in \mathscr{F}(Q_3)$ et que H ne s'étend pas à SK_4^*, H' ne s'étend pas à SK_n^* non plus. Par le lemme 44 et la proposition 16 appliqués à $G^\urcorner$, nous concluons que H' est

un sous-graphe convexe et donc porté de $G^{\urcorner}$. En appliquant la deuxième partie du lemme 51 (dans le sens inverse) à toutes les paires de graphes apparaissant dans la construction transformant G en $G^{\urcorner}$, nous déduisons que H' est une subdivision entière convexe d'un graphe complet et donc portée de G. Mais ceci est impossible car toutes les subdivisions entières SK_n maximales de $G^{\urcorner}$ sont contenues dans SK_n^*. Cela montre que $G^{\urcorner}$ appartient à $\mathscr{F}(SK_4)$. Donc $G^{\urcorner}$ est le graphe de topes d'un COM bidimensionnel. Le fait que G soit plongé isométriquement dans $G^{\urcorner}$ provient des lemmes 4 et 51. □

4.5.2. Complétion en cubes partiels amples bidimensionnels

Soient $G \in \mathscr{F}(Q_3)$, C un cycle porté de G, et E_j une Θ-classe croisant C. Posons $C := (v_1, v_2, \ldots, v_{2k})$, où les arêtes $v_{2k}v_1$ et $v_k v_{k+1}$ sont dans E_j. Le graphe G_{C,E_j} est défini en ajoutant un chemin sur les sommets $v_{2k} = v'_1, \ldots, v'_k = v_{k+1}$ et des arêtes $v_i v'_i$ pour tout $2 \le i \le k-1$. Soit $C' = (v'_1, \ldots, v'_k, v_{k+2}, \ldots, v_{2k-1})$ (c.f. figure 4.10(a)). Ensuite, nous appliquons récursivement la même construction sur le cycle C' et nous appelons le graphe résultat la *complétion cyclique* de G *sur un cycle porté* C ; voir Figure 4.10(b) pour une illustration. La proposition 21 établit les propriétés basiques de cette construction. En particulier elle montre que la complétion cyclique sur un cycle porté est bien définie.

FIGURE 4.10. – (a) G_{C,E_j} obtenu en ajoutant les sommets blancs au graphe G avec un cycle porté $C = (v_1, v_2, \ldots, v_8)$; (b) Une complétion cyclique de G sur le cycle C.

Proposition 21. *Soient G un cube partiel, C un cycle porté de G, et E_j une Θ-classe croisant C.*

(i) G_{C,E_j} est un cube partiel et G est un sous-graphe isométrique de G_{C,E_j} ;

(ii) $C' = (v'_1, \ldots, v'_k, v_{k+2}, \ldots, v_{2k-1})$ est un cycle porté;

(iii) Si G appartient à $\mathscr{F}(Q_3)$, alors G_{C,E_j} aussi;

(iv) Si G ne contient pas de SK_n convexe, alors G_{C,E_j} non plus.

Démonstration. Pour montrer (i), remarquons que les Θ-classes de G s'étendent dans G_{C,E_j} de manière naturelle, *i.e.*, les arêtes de la forme $v_i v'_i$ pour tout $2 \le i \le k-1$ appartiennent à E_j et pour tout $1 \le i \le k-1$ l'arête $v'_i v'_{i+1}$ appartient à la Θ-classe de l'arête $v_i v_{i+1}$. Clairement,

parmi les anciens sommets, les distances n'ont pas changé et les nouveaux sommets forment un chemin isométrique. Si $w \in C$ et si $u \in C'$ est un nouveau sommet, alors il est facile de voir qu'il existe un plus court chemin qui utilise chaque Θ-classe au plus une fois. En effet, comme w est à distance au plus 1 de C', il a une porte dans C'. En d'autres termes, ce chemin utilise seulement E_j. Finalement, considérons v un ancien sommet de $G \setminus C$, w sa porte dans C, et $u \in G_{C,E_j} \setminus G$. Soit P un chemin allant de v à u qui est la concaténation d'un plus court (v,w)-chemin P_1 et d'un plus court (w,u)-chemin P_2. Comme C est porté et comme toutes les Θ-classes qui croisent P_2 croisent aussi C, les Θ-classes de G qui croisent P_1 et les Θ-classes qui croisent P_2 sont distinctes. Étant donné que P_1 et P_2 sont des plus courts chemins, les Θ-classes dans chacun de ces chemins sont deux à deux différentes. Par conséquent, P est un plus court (v,u)-chemin et donc G_{C,E_j} est un cube partiel. Donc G est un sous-graphe isométrique de G_{C,E_j} par construction.

Pour monter (ii), considérons un sommet v de $G \setminus C'$. Si $v \in G \setminus C$, notons w sa porte dans C. Ainsi il existe un plus court (v,w)-chemin qui ne croise pas les Θ-classes de C. Supposons que $w \notin C'$, sinon nous avons terminé. Alors il existe un sommet w' tel que l'arête ww' appartienne à E_j. Comme E_j croise C mais pas C', w' est la porte de v dans C'. Si $v \in C \setminus C'$, en utilisant l'argument précédent, il existe une arête vv' appartenant à E_j et nous concluons que v' est la porte de v dans C'.

Pour montrer (iii), supposons par l'absurde que G_{C,E_j} admet un Q_3 comme pc-mineur. Alors il existe une suite s de restrictions ρ_s et de contractions π_s telle que $s(G) = Q_3$. Rappelons que les restrictions et les contractions commutent dans les cubes partiels, voir lemme le 18. Ainsi, nous obtenons un graphe $G' = \pi_s(G)$ qui contient un Q_3 convexe. Ce pc-mineur Q_3 peut être obtenu par contractions. Clairement, E_j fait partie des classes qui ne sont pas contractées parce que $\pi_j(G_{C,E_j}) = \pi_j(G)$. Par ailleurs, s'il y a qu'une seule autre Θ-classe de C qui n'est pas contractée dans G_{C,E_j}, alors la contraction identifiera tous les nouveaux sommets avec leurs images (contraction) dans les anciens sommets, et là encore par hypothèse $G \in \mathscr{F}(Q_3)$, nous obtenons une contradiction. Donc, les trois Θ-classes qui constituent la copie de Q_3 sont E_j et deux autres classes disons E'_j et E''_j de C. Donc, le cycle C augmenté produit un Q_3^- dans la contraction de G_{C,E_j}, mais le dernier sommet du Q_3 provient d'une partie de G. En d'autres termes, il y a un sommet $v \in G$, tel que tous les plus courts chemins allant de v à C croisent E_j, E'_j, ou E''_j. Ceci contredit le fait que C était porté, ce qui nous permet de déduire que $G_{C,E_j} \in \mathscr{F}(Q_3)$.

Pour montrer (iv), supposons par l'absurde que G_{C,E_j} contienne un SK_n convexe. Comme SK_n ne contient ni cycles de longueur 4 ni sommets de degré 1, les restrictions conduisant à SK_n doivent soit inclure E_j, soit la Θ-classe de l'arête v_1v_2, soit celle de $v_{2k-1}v_{2k}$. La seule façon ici d'obtenir un graphe qui n'est pas un sous-graphe convexe de G est de se restreindre au côté de E_j qui contient les nouveaux sommets. Mais le graphe résultant ne peut pas utiliser les nouveaux sommets dans une copie convexe de SK_n car ils forment un chemin composé de sommets de degré 2, ce qui n'existe pas dans un SK_n. Donc G_{C,E_j} ne contient pas de SK_n convexe. □

Les propositions 20 et 21 permettent de prouver le théorème 10. En appliquant la proposition 20 à un graphe $G \in \mathscr{F}(Q_3)$, nous obtenons le graphe de topes d'un COM $G^{\urcorner}$ bidi-

mensionnel, *i.e.*, le graphe $G^{\urcorner} \in \mathscr{F}(Q_3, SK_4)$. Ensuite, nous pouvons récursivement appliquer des complétions cycliques sur les cycles portés du graphe $G^{\urcorner}$ et des graphes résultant de $G^{\urcorner}$. D'après la proposition 21 (iii) et (iv), tous les graphes intermédiaires sont des graphes de topes de COM bidimensionnels. Ceci explique pourquoi nous pouvons appeler récursivement la construction par complétion cyclique cycle par cycle. Puisque cette construction n'augmente pas la VC-dimension, par le lemme de Sauer-Shelah, après un nombre fini d'étapes, nous obtenons un graphe $(G^{\urcorner})^{\ulcorner} \in \mathscr{F}(Q_3, SK_4)$ dans lequel tous les cycles convexes sont portés (par les propositions 17 et 19) et sont de longueur 4. Par conséquent, $(G^{\urcorner})^{\ulcorner} \in \mathscr{F}(C_6)$. Nous en concluons que $(G^{\urcorner})^{\ulcorner} \in \mathscr{F}(Q_3, C_6)$, et par la proposition 8, que le graphe final $G^{\top} = (G^{\urcorner})^{\ulcorner}$ est un cube partiel ample bidimensionnel. Ceci complète la preuve du théorème 10. Pour une illustration, voir Figure 4.11.

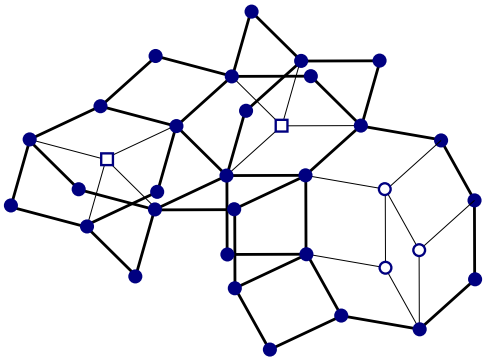


FIGURE 4.11. – Une complétion ample $M^{\top}$ du cube partiel bidimensionnel M.

Remarque 2. Nous pouvons généraliser la construction dans la proposition 21 en remplaçant un cycle porté C par un graphe de topes d'un *AOM* porté qui est l'enveloppe convexe de C, tel que tous ces cycles convexes sont portés. D'une certaine façon, cette construction prend l'ensemble de toutes les extensions possibles du graphe G.

4.6. Cellules et carrières

Cette section utilise des concepts et des techniques développées pour les graphes de topes des COMs et les graphes hypercellulaires par BANDELT, CHEPOI et KNAUER [13] et CHEPOI, KNAUER et MARC [28]. Soit $\mathscr{C}(G)$ l'ensemble de tous les cycles convexes d'un cube partiel G et soit $\mathbf{C}(G)$ le complexe cellulaire bidimensionnel où les 2-cellules sont obtenues en remplaçant chaque cycle convexe C de longueur $2j$ de G par un polygone régulier euclidien $[C]$ avec $2j$ côtés. Il a été montré par KLAVŽAR et SHPECTOROV [59] que l'ensemble $\mathscr{C}(G)$ de cycles convexes de n'importe quel cube partiel G forme une base de cycles. Ce résultat a été étendu par CHEPOI, KNAUER et MARC [28, Lemma 13] où il a été montré que le complexe cellulaire bidimensionnel $\mathbf{C}(G)$ de tout cube partiel G est simplement connexe. Rappelons qu'un complexe cellulaire $\mathbf{X}$ est *simplement connexe* s'il est connexe et si chaque application continue de la sphère 1-dimensionnel S^1 à $\mathbf{X}$ peut être étendue à une application continue du disque topologique D^2 de bordure S^1 à $\mathbf{X}$.

Soit G un cube partiel. Pour une Θ-classe E_i de G, nous dénotons par $N(E_i)$ la *carrière* de E_i dans $\mathbf{C}(G)$, *i.e.*, le sous-graphe de G induit par l'union de toutes les cellules de $\mathbf{C}(G)$ qui croisent E_i. La carrière $N(E_i)$ de G se divise en deux *demi-carrières* : sa partie positive $N^+(E_i) := N(E_i) \cap G_i^+$ et sa partie négative $N^-(E_i) := N(E_i) \cap G_i^-$. Enfin, nous appelons $G_i^+ \cup N^-(E_i)$ et $G_i^- \cup N^+(E_i)$ les *demi-espaces étendus* de E_i. Par le théorème 1, les demi-espaces de G sont des sous-graphes convexes et sont donc plongé isométriquement dans G. Cependant, ce n'est pas toujours vrai pour les carrières, demi-carrières et les demi-espaces étendues des cubes partiels. Néanmoins, c'est le cas dans les cubes partiels bidimensionnels :

Proposition 22. *Soient $G \in \mathscr{F}(Q_3)$ et E_i une Θ-classe de G. Alors la carrière $N(E_i)$, les demi-carrières $N^+(E_i), N^-(E_i)$, et les demi-espaces $G_i^+ \cup N^-(E_i), G_i^- \cup N^+(E_i)$ sont des sous-graphes isométriques de G, et appartiennent donc à $\mathscr{F}(Q_3)$.*

Démonstration. Comme la classe $\mathscr{F}(Q_3)$ est close par sous-graphes isométriques, il suffit de montrer que chacun des sous-graphes mentionnés est un sous-graphe isométrique de G. L'affirmation suivante réduit l'isométricité des carrières et des demi-espaces étendus à l'isométricité des demi-carrières :

Affirmation 1. Les carrières et les demi-espaces étendus d'un cube partiel G sont des sous-graphe isométrique de G si et seulement si les demi-carrières sont des sous-graphes isométriques de G.

Démonstration. Une direction est impliquée par l'égalité $N^+(E_i) := N(E_i) \cap G_i^+$ et le fait général du lemme 5. Réciproquement, supposons que $N^+(E_i)$ et $N^-(E_i)$ sont des sous-graphes isométriques de G. Montrons que la carrière $N(E_i)$ est isométrique. Considérons deux sommets $u, v \in N(E_i)$. Si u et v appartiennent à la même demi-carrière, disons $N^+(E_i)$, alors ils sont reliés dans $N^+(E_i)$ par un plus court chemin et c'est terminé. Maintenant, considérons que $u \in N^+(E_i)$ et $v \in N^-(E_i)$. Soit P un plus court (u, v)-chemin de G. Alors P contient forcément une arête $u'v'$ avec $u' \in \partial G_i^+ \subseteq N^+(E_i)$ et $v' \in \partial G_i^- \subseteq N^-(E_i)$. Alors u, u' peuvent être reliés dans $N^+(E_i)$ par un plus court chemin P' et v, v' peuvent être reliés dans $N^-(E_i)$ par un plus court chemin P''. Le chemin P', suivi de l'arête $u'v'$, et du chemin P'' est un plus court (u, v)-chemin contenu dans $N(E_i)$. Nous pouvons montrer par une preuve similaire que $G_i^+ \cup N^-(E_i)$ et $G_i^- \cup N^+(E_i)$ sont des sous-graphes isométriques de G. □

D'après l'affirmation 1, il suffit de montrer que les demi-carrières $N^+(E_i)$ et $N^-(E_i)$ d'un cube partiel bidimensionnel G sont des sous-graphes isométrique de G. Par la proposition 20, G est un sous-graphe isométrique de $G^\neg$, son extension canonique en graphe de topes d'un COM. De plus, par construction de $G^\neg$, la carrière $N(E_i)$ et ses demi-carrières $N^+(E_i)$ et $N^-(E_i)$ sont des sous-graphes de la carrière $N^\neg(E_i)$ et de ses demi-carrières $N^{\neg+}(E_i), N^{\neg-}(E_i)$ dans le graphe $G^\neg$. D'après BANDELT, CHEPOI et KNAUER [13, Proposition 6], les carrières des graphes de topes des COMs et leurs moitiés sont aussi des graphes de topes des COMs. Par conséquent, $N^+(E_i)^\neg$ et $N^-(E_i)^\neg$ sont des sous-graphes isométriques de $G^\neg$. Sachant que le graphe $G^\neg$ est obtenu à partir de G via une suite de 1-extensions, il est facile de voir que tout plus court chemin $P \subset N^+(E_i)^\neg$ entre deux sommets de $N^+(E_i)$ peut être remplacé par un

chemin P' de même longueur appartenant entièrement à $N^+(E_i)$. Par conséquent $N^+(E_i)$ est un sous-graphe isométrique d'un cube partiel $N^+(E_i)^\urcorner$, donc la demi-carrière $N^+(E_i)$ est aussi un sous-graphe isométrique de G. □

Un cube partiel $G = (V, E)$ est un *2d-amalgame* de cubes partiels bidimensionnels $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, tous les deux plongés isométriquement dans l'hypercube Q_m, si ces trois conditions sont vérifiées :

(1) $V = V_1 \cup V_2, E = E_1 \cup E_2$ et $V_2 \setminus V_1, V_1 \setminus V_2, V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$;

(2) le sous-graphe G_{12} de Q_m induit par $V_1 \cap V_2$ est un cube partiel bidimensionnel et chaque subdivision entière d'un graphe complet maximale SK_n de G_{12} est maximale dans G;

(3) G est un cube partiel.

Nous montrons maintenant que les cubes partiels bidimensionnels peuvent être caractérisés via des $2d$-amalgamations. Pour cela, nous utilisons le résultat du lemme 37 qui a été montré dans la section 3.4. Ce dernier établit que si Q_d est un pc-mineur du graphe de topes d'un COM, alors Q_d est un pc-mineur d'un de ses sous-graphes antipodaux.

Proposition 23. *Les cubes partiels bidimensionnels sont obtenus via des $2d$-amalgamations successives à partir de leurs cycles portés et de leurs subdivisions entières de graphes complets portées. Réciproquement, la $2d$-amalgamation de cubes partiels bidimensionnels $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ de Q_m est un cube partiel bidimensionnel de Q_m dans lequel chaque cycle porté ou subdivision entière de graphe complet portée appartient à G_1 ou G_2.*

Démonstration. Soit $G = (V, E)$ un cube partiel bidimensionnel qui n'est pas une unique cellule. Nous pouvons supposer que G est 2-connexe, sinon nous pouvons faire une amalgamation sur un point d'articulation (un sommet dont la suppression augmente le nombre de composante connexes). Nous affirmons que G contient deux cellules portées s'intersectant sur une arête. Sachant que, d'après le lemme 3, l'intersection de deux sous-graphes portés est portée et sachant que chaque cellule ne contient aucun sous-graphe porté propre sauf les sommets et les arêtes, l'intersection de deux cellules de G est soit vide, soit un sommet, soit une arête. Si ce dernier cas n'arrive jamais, comme tous les cycles convexes de G sont contenus dans une unique cellule, tous les cycles de G contenant des arêtes de plusieurs cellules (un tel cycle existe car G est 2-connexe) ne peuvent pas être écrits comme une somme modulo 2 de cycles convexes. Ceci contredit le résultat de Klavžar et Shpectorov [59] affirmant que l'ensemble des cycles convexes d'un cube partiel G constitue une base de cycles. Considérons deux cellules portées C_1 et C_2 s'intersectant sur une arête e. Soit E_i une Θ-classe croisant C_1 qui ne contient pas e. Comme C_2 est porté, il est contenu dans un des demi-espaces G_i^+ ou G_i^-, disons $C_2 \subseteq G_i^+$. Remarquons aussi que C_2 n'est pas contenu dans la carrière $N(E_i)$. Posons $G_1 := G_i^- \cup N^+(E_i)$ et $G_2 := G_i^+$. D'après la proposition 22, G_1, G_2, et $G_1 \cap G_2 = N^+(E_i)$ sont des cubes partiels bidimensionnels, donc G est le $2d$-amalgame de G_1 et G_2. Réciproquement, supposons qu'un cube partiel G est le $2d$-amalgame de cubes partiels bidimensionnels G_1 et G_2. Considérons les complétions canoniques en graphes de topes de COM $G_1{}^\urcorner$ et $G_2{}^\urcorner$ de G_1 et G_2, qui sont dans Q_3 d'après le lemme 51. Alors $G_1{}^\urcorner \cap G_2{}^\urcorner$ coïncide avec $G_{12}{}^\urcorner$. Par conséquent, d'après Bandelt, Chepoi et Knauer [13, Proposition 7] cela

fournit un graphes de topes de COM G', qui est un COM-amalgame de $G_1^{\urcorner}$ et $G_2^{\urcorner}$ sur $G_{12}^{\urcorner}$ ne créant pas de nouveaux sous-graphes antipodaux. En utilisant le lemme 37, nous déduisons que $G' \in \mathscr{F}(Q_3)$. Comme le graphe G est plongé isométriquement dans G', $G \in \mathscr{F}(Q_3)$, ce qui conclut la preuve. □

Le complexe cellulaire 2-dimensionnel $\mathbf{C}(G)$ d'un cube partiel G est simplement connexe mais non contractile même si G est bidimensionnel. Cependant, pour un cube partiel bidimensionnel G, nous pouvons corriger ça en considérant le *complexe cellulaire* ayant des cycles portés et des subdivisions entières de graphes complets portées de G comme cellules. En revanche, les subdivisions entières de graphes complets n'étant pas directement représentables par des cellules euclidiennes, ce complexe n'a pas de signification géométrique directe. Une possibilité est de remplacer chaque subdivision entière de graphes complets portée SK_n par un simplexe régulier euclidien avec des côtés de longueur 2 et chaque cycle porté par un polygone régulier euclidien. Désignons le *complexe polyédrique* résultant par $\mathbf{X}(G)$. Observons que deux cellules de $\mathbf{X}(G)$ peuvent s'intersecter sur une arête d'une cellule polygonale ou sur une demi-arête d'un simplexe. À chaque cube partiel bidimensionnel G nous associons un complexe polyédrique $\mathbf{X}(G)$ qui peut avoir des cellules de dimensions arbitraires. De façon alternative, nous pouvons associer à G le complexe cellulaire $\mathbf{C}(G^{\urcorner})$ de la complétion canonique en graphe de topes de COM $G^{\urcorner}$ de G. Rappelons que dans $\mathbf{C}(G^{\urcorner})$, chaque cycle porté de G est remplacé par un polygone régulier euclidien et chaque subdivision entière de graphe complet portée SK_n de G est étendue dans $G^{\urcorner}$ en SK_n^* et ceci correspond à un bouquet de carrés dans $\mathbf{C}(G^{\urcorner})$. Donc $\mathbf{C}(G^{\urcorner})$ est un complexe cellulaire 2-dimensionnel. Comme nous allons voir ci-dessous, si $G \in \mathscr{F}(Q_3)$, alors les deux complexes $\mathbf{X}(G)$ et $\mathbf{C}(G^{\urcorner})$ sont contractiles, ce qui est une propriété plus forte que la connexité simple.

Corollaire 6. *Soit $G \in \mathscr{F}(Q_3)$, alors les complexes $\mathbf{X}(G)$ et $\mathbf{C}(G^{\urcorner})$ sont contractiles.*

Démonstration. Le fait que $\mathbf{C}(G^{\urcorner})$ est contractile vient du fait que $G^{\urcorner}$ est le graphe de topes d'un COM bidimensionnel (proposition 20) et que les complexes cellulaires des graphes de topes des COMs sont contractile (Proposition 15 de [13]). La preuve que $\mathbf{X}(G)$ est contractile utilise les mêmes arguments que la preuve de [13, Proposition 15]. Nous prouvons donc la contractibilité de $\mathbf{X}(G)$ par induction sur le nombre de cellules maximales de $\mathbf{X}(G)$ en utilisant le lemme de collage de BJÖRNER [16, Lemma 10.3] et la proposition 22. Par le lemme de collage, si $\mathbf{X}$ est un complexe cellulaire qui est l'union de deux complexes cellulaires contractiles $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$ tels que leur intersection $\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2$ est contractile, alors $\mathbf{X}$ est contractile. Si $\mathbf{X}(G)$ est composé d'une seule cellule maximale, alors cette cellule est soit un polygone, soit un simplexe. Elle est donc contractile. Si $\mathbf{X}(G)$ contient au moins deux cellules, alors par la première partie de la proposition 23 G est un $2d$-amalgame de deux cubes partiels bidimensionnels G_1 et G_2 sur un cube partiel bidimensionnel G_{12}. Par l'hypothèse d'induction, les complexes $\mathbf{X}(G_1)$, $\mathbf{X}(G_1)$, et $\mathbf{X}(G_{12}) = \mathbf{X}(G_1) \cap \mathbf{X}(G_2)$ sont contractiles, donc $\mathbf{X}(G)$ est contractile par le lemme de collage. □

5. Complétions amples des OMs et des CUOMs

Sommaire

5.1 Résultats 90
5.2 Complétions amples des OMs 91
5.2.1 Caractérisation des UOMs 92
5.2.2 Complétions des OMs vers UOMs 94
5.2.3 Complétions amples des UOMs 94
5.3 Complétions amples des CUOMs 95
5.3.1 Caractérisation des CUOMs 96
5.3.2 Extensions portées simples d'un cube partiel 97
5.3.3 Projections mutuelles entre les faces des COMs 99
5.3.4 Preuve du théorème 12 102

Dans ce chapitre, nous montrons que les graphes de topes des OMs et des CUOMs peuvent être complétés en cubes partiels amples sans augmenter la VC-dimension. L'ensemble des résultats que nous montrons dans ce chapitre sont dans le papier [31].

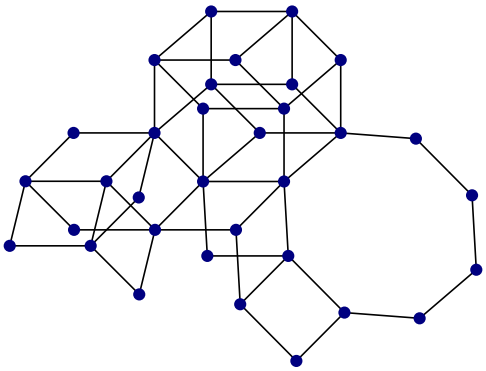


FIGURE 5.1. – Le graphe de topes d'un CUOM de VC-dimension 3.

5.1. Résultats

Nous venons de voir, dans le chapitre 4, que les cubes partiels bidimensionnels peuvent être étendus en cubes partiels amples sans augmenter leur VC-dimension. Cette extension

réalisée en deux étapes, complète d'abord les cubes partiels bidimensionnel en graphes de topes de COMs de VC-dimension 2 avant de les compléter en cubes partiels amples de même VC-dimension. Pour poursuivre, nous nous sommes naturellement intéressés à la complétion ample de cette classe intermédiaire que sont les COMs. La question de cette complétion constitue déjà un problème ouvert intéressant et difficile. Nous montrons ici l'existence de telles complétions amples pour les graphes de topes des matroïdes orientées et des complexes de matroïdes orientées uniformes, deux sous-familles des COMs.

Théorème 11. *Soit $\mathcal{M}$ un matroïde orienté de rang d, et soit G son graphe de topes qui est donc de VC-dimension d. Alors G peut être complété en cube partiel ample de VC-dimension d.*

Théorème 12. *Soit $\mathcal{M}$ un complexe de matroïdes orientés uniformes de rang d, et soit G son graphe de topes qui est donc de VC-dimension d. Alors G peut être complété en cube partiel ample de VC-dimension d.*

D'après le théorème 3, puisque toute famille ample de VC-dimension d admet un schéma de compression étiqueté propre de taille d, à partir des théorèmes 11 et 12, nous déduisons que les classes de concepts définies par les topes d'un OM ou d'un CUOM de VC-dimension d satisfont la conjecture 1 de Floyd et Warmuth :

Corollaire 7. *Les classes de concepts définies par les topes d'un OM ou d'un CUOM de VC-dimension d admettent des schémas de compression étiquetés non propres de taille d.*

Ce chapitre est composé de deux sections. La première section 5.2 se focalise sur la complétion ample des graphes de topes des OMs. Dans cette optique, nous utilisons un résultat de la théorie des matroïdes orientés établissant que tout OM peut être complété en un UOM de même rang. Par conséquent, le graphe de topes de tout OM peut être complété en graphe de topes d'un UOM de même VC-dimension. Puis, nous complétons récursivement le graphe de topes d'un UOM en un cube partiel ample sans augmenter la VC-dimension. Dans la section 5.3, nous montrons que les graphes de topes des CUOMs peuvent être complétés en cubes partiels amples sans augmenter la VC-dimension. Pour ce faire, nous complétons indépendamment les faces maximales, puis nous montrons que leur union est ample et que la VC-dimension n'a pas augmentée.

5.2. Complétions amples des OMs

Dans cette section, nous étudions la complétion ample des OMs. Nous illustrons les deux étapes de cette complétion dans la figure 5.2.

Exemple 1. Le prisme $\Pi = C_6 \square P_2$, illustré en 5.2(a), est le graphe de topes d'un OM et c'est un sous-graphe isométrique propre de Q_4. La contraction de n'importe quelle Θ-classe de Π, sauf celle verticale, donne un Q_3, donc VC-dim$(\Pi) = 3$. Le dodécaèdre rhombique D de

la figure 5.2(b) est une complétion de Π vers le graphe de topes d'un UOM qui préserve la VC-dimension. Dans la figure 5.2(c) nous représentons la complétion ample de D (et donc de Π) obtenue en suivant la construction de la preuve du lemme 57. Tout d'abord, la Θ-classe contenant les arêtes verticales de D est contractée pour obtenir un 3-cube Q_3. Ensuite, une complétion ample de D est obtenue en effectuant une expansion ample de Q_3 sur un Q_3^- (Q_3 moins un sommet).

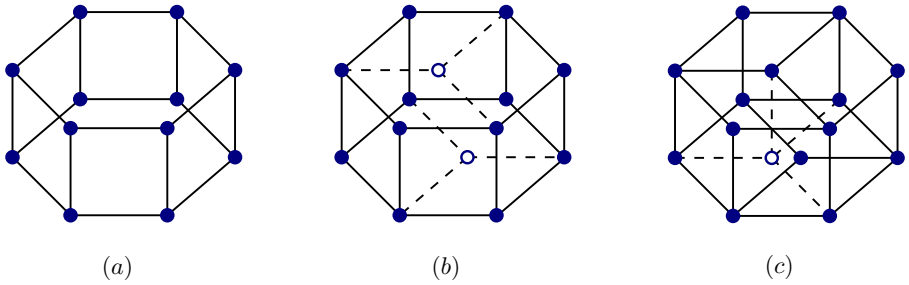


FIGURE 5.2. – (a) Le prisme Π ; (b) Une complétion D de Π vers le graphe de topes d'un UOM ; (c) La complétion ample de D et Π.

5.2.1. Caractérisation des UOMs

Dans leur Proposition 2.2.4, BJÖRNER et al. [17] énoncent que les types combinatoires de zonotopes cubiques sont en bijection avec les matroïdes uniformes réalisables (à réorientation près). Une façon d'étendre ceci à l'ensemble des UOMs est dû à LAWRENCE [64], (voir aussi l'Exercise 3.28 de BJÖRNER et al. [17]). Cette généralisation a été énoncée en terme de graphes de topes par KNAUER et MARC [61] comme suit. Les graphes de topes des UOMs correspondent aux cubes partiels antipodaux dans lesquels tous les sous-graphes antipodaux propres sont des cubes. Nous formulons ce résultat dans le lemme suivant :

Lemme 52. *Soit G le graphe de topes d'un OM $\mathscr{M}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G est le graphe de topes d'un UOM ;

(ii) toutes les faces propres, i.e., tous les sous-graphes antipodaux propres, de G sont des hypercubes ;

(iii) tous les demi-espaces et, de manière équivalente, toutes les demi-carrières, de G sont des cubes partiels amples.

Démonstration. (i)⇒(ii) : D'après la définition d'un UOM de rang r, les cocircuits $\mathscr{C}^*$ sont exactement les orientations des ensembles de support de taille $m-r+1$. Comme dans un OM l'ensemble $\mathscr{L}$ peut être obtenu à partir de $\mathscr{C}^*$ en prenant toutes les compositions possibles, nous savons que $\mathscr{L}$ est composé de tous les vecteurs signés possibles $Y \in \{+,-,0\}^U$ avec $X \leq Y$ pour certains $X \in \mathscr{C}^*$. En d'autres termes, dans un UOM, nous avons $\mathscr{L} = \uparrow\mathscr{C}^* = \uparrow(\mathscr{L} \setminus \{\mathbf{0}\})$. En particulier, pour chaque face $\mathrm{F}(Y)$, $Y \neq \{\mathbf{0}\}$ de $\mathscr{L}$, tout covecteur Z tel que $Y \leq Z$ est dans $\mathscr{L}$. Par conséquent, la face $[Y]$ induit par les topes de $\mathrm{F}(Y)$ est un hypercube.

(ii)⇒(iii) : Comme tout OM est un COM, d'après BANDELT, CHEPOI et KNAUER [13], tous les demi-espaces et toutes les demi-carrières de G sont des COMs. Comme les faces de ces demi-espaces (respectivement demi-carrières) sont des cubes, ces COMs vérifient l'axiome de composition idéale **(IC)** et sont donc amples.

(iii)⇒(ii) : Supposons que certaines faces propres $[X]$ de G ne soient pas des cubes. Alors il existe une Θ-classe E_i telle que $[X]$ est contenu dans un des demi-espaces G_i^- ou G_i^+, disons $[X] \subseteq G_i^+$. Dans ce cas, $[X]$ est une face de G_i^+. Donc G_i^+ ne satisfait pas l'axiome **(IC)** et n'est, par conséquent, pas ample. Ceci contredit que tous les demi-espaces de G sont amples.

(ii)&(iii)⇒ (i) : Soit G le graphe de topes d'un OM $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ de rang r tel que chaque face propre est un hypercube et tous les demi-espaces sont AMPs. Rappelons que dans un demi-espace du graphe de topes d'un OM les sous-graphes antipodaux maximaux ont la même VC-dimension. De plus, comme la VC-dimension d'un hypercube correspond à sa dimension, tous les cocircuits X de $\mathscr{L}$ ont la même taille de support. Puisque G est antipodal, en utilisant le lemme 36, nous obtenons que $\text{VC-dim}(G) = \text{VC-dim}([X]) + 1$. Donc, tous les cocircuits ont un support de taille $m - r + 1$. Nous en déduisons que chaque ensemble de taille $m - r + 1$ est le support d'un cocircuit, sinon il doit être en relation avec un certain cocircuit X, ce qui contredit alors la propriété de la taille du support. □

Corollaire 8. *Si G est le graphe de topes d'un UOM,* $\text{VC-dim}(G) = d$*, et G' est un sous-graphe convexe propre de G, alors G' est ample et* $\text{VC-dim}(G') \leq d - 1$.

Démonstration. D'après le lemme 52, tout demi-espace H de G est ample. En utilisant la proposition 6 et le lemme 36, nous obtenons que $\text{VC-dim}(H) \leq d - 1$. Ceci conclut cette preuve car tout sous-graphe convexe propre de G est l'intersection de demi-espaces. □

Le lemme qui suit est un résultat connu dans la théorie des matroïdes orientés. Nous présentons une preuve de ce résultat qui nous permettra en même temps d'illustrer différentes notions qui ont été abordées jusqu'ici.

Lemme 53. *La classe des graphes de topes des UOMs est close par contractions.*

Démonstration. Soit G le graphe de topes d'un UOM, et soit E_i une Θ-classe de G. D'après le lemme 52, pour montrer que $G' = \pi_i(G)$ est le graphe de topes d'un UOM, nous devons montrer que tous les demi-espaces de G' sont des cubes partiels amples. Considérons une Θ-classe $E_j \neq E_i$ de G. Puisque $E_j \neq E_i$, il existe une Θ-classe correspondante dans G'. Sachant que G est le graphe de topes d'un UOM, par le lemme 52, les demi-espaces de G sont des cubes partiels amples. En particulier G_j^+ est ample. De plus, nous avons vu dans le lemme 31 que les cubes partiels amples sont clos par contractions, donc $\pi_i(G_j^+)$ est ample. En utilisant le fait que les demi-espaces peuvent être vus comme des restrictions, et que les contractions et les restrictions commutent dans les cubes partiels, nous obtenons que $\pi_i(G_j^+) = (\pi_i(G))_j^+ = (G')_j^+$ est ample. Pour conclure, les demi-espaces de G' sont amples. □

Lemme 54. *Soit $\widetilde{G}$ un cube partiel obtenu à partir du graphe de topes G d'un UOM par une expansion isométrique par rapport à (G^1, G^0, G^2), telle que $G^1 = -G^2$, G^0 est un sous-graphe isométrique de G, et G^0 est le graphe de topes d'un UOM. Alors $\widetilde{G}$ est le graphe de topes d'un UOM. De plus, si* VC-dim$(G) = d$ *et* VC-dim$(G^0) \leq d-1$, *alors* VC-dim$(\widetilde{G}) \leq d$.

Démonstration. Puisque $G^1 = -G^2$, KNAUER et MARC [62, Lemma 2.14] ont montré que le graphe $\widetilde{G}$ est antipodal. D'après le lemme 52, pour montrer que $\widetilde{G}$ est le graphe de topes d'un UOM, nous allons montrer que tous les sous-graphes antipodaux de $\widetilde{G}$ sont des cubes. Soit $\widetilde{A}$ un sous-graphe antipodal de $\widetilde{G}$ et soit E_i l'unique Θ-classe de $\widetilde{G}$ qui n'est pas dans G. Autrement dit, $\pi_i(\widetilde{G}) = G$. Tout d'abord, si $\widetilde{A}$ n'utilise pas la Θ-classe E_i, alors $\pi_i(\widetilde{A}) = \widetilde{A}$ est un sous-graphe de $\pi_i(\widetilde{G}) = G$. Donc $\widetilde{A}$ est un sous-graphe antipodal de G. Comme G est le graphe de topes d'un UOM, le lemme 52 nous garantit que $\widetilde{A}$ est un cube. Maintenant, supposons que $\widetilde{A}$ utilise la Θ-classe E_i. Le lemme 20 nous assure que $A = \pi_i(\widetilde{A})$ est un sous-graphe antipodal de G. Puisque G est le graphe de topes d'un UOM, en utilisant le lemme 52, nous déduisons que A est un cube Q_k dans G. En outre, $\widetilde{A}$ peut être vu comme une expansion isométrique (A^1, A^0, A^2) de $A = Q_k$ avec $A^1 = -A^2$. De plus, A^0 est un sous-graphe convexe de G^0 clos par antipodes parce que G^0 est un sous-graphe isométrique de G. Donc A^0 est un sous-graphe antipodal de G^0. Finalement, comme $\widetilde{A}$ est un sous-graphe propre de G, A^0 est un sous-graphe propre de G^0. Donc A^0 est un cube car G^0 est le graphe de topes d'un UOM. Par la définition d'expansion isométrique, $G^0 \cap Q_k = Q_k$ et $\widetilde{A} = Q_{k+1}$ est un cube. L'affirmation sur la VC-dimension provient simplement du lemme 36. □

5.2.2. Complétions des OMs vers UOMs

Nous utilisons ici des résultats de la théorie des matroïdes orientés pour démontrer le résultat suivant :

Lemme 55. *Le graphe de topes G de tout OM peut être complété en graphe de topes d'un UOM de même VC-dimension.*

Démonstration. D'après la définition 7.7.6 et la proposition 7.7.5 de BJÖRNER et al. [17], il existe une *"weak map"* allant du graphe de topes G_1 d'un OM vers le graphe de topes G_2 d'un OM. De plus, si G_2 est un sous-graphe de G_1, alors ce sont des sous-graphes isométriques du même hypercube, et ils ont la même dimension isométrique. Il s'en suit que G_2 est un sous-graphe isométrique de G_1. Maintenant nous pouvons utiliser le corollaire 7.7.9 de BJÖRNER et al. [17] qui énonce que tout graphe de topes G_2 d'un OM est l'image d'une *"weak map"* du graphe de topes G_1 d'un UOM de même rang, *i.e.*, de même VC-dimension. □

5.2.3. Complétions amples des UOMs

Dans cette sous-section, nous nous intéressons à la complétion ample des graphes de topes des UOMs. Pour cela, nous commençons par démontrer un résultat sur les expansions

isométriques périphériques réalisées à partir de cubes partiels amples sur des sous-graphes amples.

Lemme 56. *Une expansion isométrique périphérique $\widetilde{G}$ d'un cube partiel ample G par rapport à un sous-graphe ample H est ample.*

Démonstration. Clairement, $\widetilde{H} := H \square K_2$ est ample. Alors $\widetilde{G}$ est un AMP-amalgame de G et $\widetilde{H}$ sur H. Puisque $\widetilde{G}$ est un cube partiel car il résulte d'une expansion isométrique sur G, en appliquant la proposition 5, nous obtenons que $\widetilde{G}$ is ample. □

Le résultat suivant est prouvé par induction sur la dimension isométrique de G, *i.e.*, sur le nombre de Θ-classes de G.

Lemme 57. *Si G est le graphe de topes d'un UOM de rang d, alors G peut être complété dans $C(G)$ en un cube partiel ample* $\mathrm{amp}(G)$ *de VC-dimension d.*

Démonstration. Soit E_i une Θ-classe arbitraire de G. Soient G_i^+ et G_i^- les deux demi-espaces définis par E_i. D'après le lemme 52, G_i^+ et G_i^- sont des cubes partiels amples. Considérons $G' = \pi_i(G)$ le cube partiel obtenu en contractant les arêtes de E_i. Sachant que la classe des UOMs est close par contractions par le lemme 53, G' est le graphe de topes d'un UOM. Puisque $\pi_i(G_i^+)$ et $\pi_i(G_i^-)$ sont respectivement isomorphes à G_i^+ et G_i^-, ces sous-graphes de G' sont aussi des cubes partiels amples. Par le corollaire 8, les sous-graphes convexes G_i^+ et G_i^-, et donc $\pi_i(G_i^+)$ et $\pi_i(G_i^-)$, sont de VC-dimension au plus $d-1$.

Par hypothèse d'induction, G' admet une complétion ample $\mathrm{amp}(G')$ contenue dans $\mathrm{C}(G')$ de VC-dimension d. Définissons $\mathrm{amp}(G)$ comme l'expansion périphérique de $\mathrm{amp}(G')$ sur le cube partiel ample $\pi_i(G_i^+)$. Le lemme 56 nous garantit que $\mathrm{amp}(G)$ est ample. Observons aussi que $\mathrm{amp}(G)$ est contenu dans $\mathrm{C}(G)$ (l'hypercube original). Il reste à montrer que $\mathrm{amp}(G)$ est de VC-dimension d. Étant donné que $\mathrm{amp}(G)$ est obtenu à partir de $\mathrm{amp}(G')$ par une expansion isométrique périphérique par rapport à $\pi_i(G_i^+)$ de VC-dimension $\leq d-1$, d'après la proposition 13, $\mathrm{amp}(G)$ est de VC-dimension d. □

Ce lemme conclut la preuve du théorème 11.

5.3. Complétions amples des CUOMs

Rappelons qu'un COM G est un complexe de matroïdes orientés uniformes (CUOM) si toutes les facettes de G sont des UOMs. Le but de cette section est de montrer le théorème 12 qui établit que tout graphe de topes d'un CUOM peut être complété en cube partiel ample de même VC-dimension.

Remarque 3. Dans le graphe de topes d'un COM de VC-dimension 2, les faces correspondent aux sommets, aux arêtes, et aux cycles pairs. Par conséquent, les COMs bidimensionnels sont des CUOMs et le théorème 12 généralise la complétion ample des COMs bidimensionnels présentée dans la sous-section 4.5.2.

L'idée de la preuve du théorème 12 est de compléter de manière indépendante les facettes de G en AMPs en utilisant la complétion récursive des graphes de topes des UOMs, puis en montrant que leur union est ample et de VC-dimension d. Pour cela nous devons montrer qu'il est possible de réaliser la complétion face par face, que chaque graphe intermédiaire est un CUOM, et que la VC-dimension n'a pas augmenté. La raison pour laquelle ce type de complétion face par face fonctionne pour les CUOMs réside dans le fait que deux facettes quelconques de G sont des UOMs, et donc que leur intersection est un cube. Par conséquent, les complétions réalisées indépendamment sur les facettes de G concordent sur leurs intersections.

Exemple 2. La figure 5.3 présente la complétion ample du graphe de topes d'un CUOM avec deux D-facettes et une Q_3-facette. Il est obtenu en complétant les deux dodécaèdres rhombiques en UOMs en procédant comme illustré dans la figure 5.2 (b) et (c).

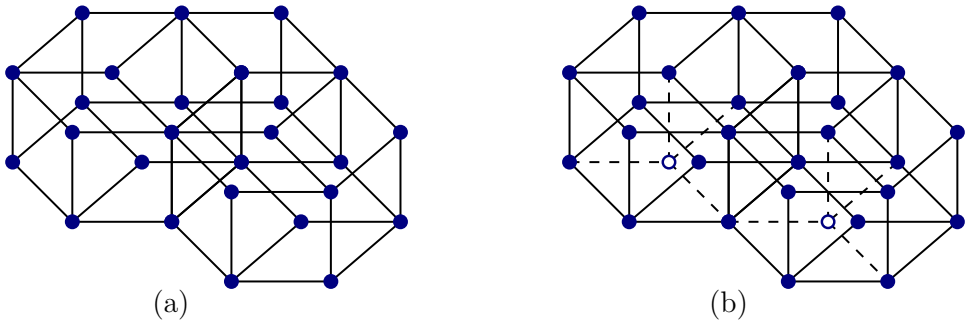


FIGURE 5.3. – (a) Le graphe de topes d'un CUOM ; (b) Sa complétion ample.

5.3.1. Caractérisation des CUOMs

Nous présentons ici une caractérisation des CUOMs qui généralise celle des UOMs.

Proposition 24. *Soit G le graphe de topes d'un COM $\mathcal{M}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G est le graphe de topes d'un CUOM ;

(ii) toutes les faces non maximales de G sont des hypercubes ;

(iii) toutes les demi-carrières de G sont des cubes partiels amples.

Démonstration. (i)⇒(ii) : Cette implication provient des définitions des UOMs et des CUOMs.

(ii)⇒(iii) : La proposition 1 nous donne que les demi-carrières $N_i^+(G)$ et $N_i^-(G)$ du graphe de topes d'un COM G sont des graphes de topes de COMs. D'après la définition des demi-carrières, chaque face $[Y]$ d'une demi-carrière, disons $N_i^+(G)$, est strictement contenue dans une facette $[X]$ de la carrière $N_i(G)$. Alors $[X]$ est une facette de G. Donc $[X]$ est le graphe de topes d'un UOM et $[Y]$ est un cube. Le graphe de topes d'un COM dans lequel toutes les faces sont des cubes est ample car il satisfait l'axiome **(IC)**. Ceci montre que toutes les demi-carrières de G sont amples.

(iii)⇒(i) : Supposons que $\mathscr{M}$ ne soit pas un CUOM. Cela signifie que son graphe de topes G contient une facette $[X]$ qui n'est pas le graphe de topes d'un UOM. D'après le lemme 52(iii), $[X]$ possède une demi-carrière qui n'est pas ample, disons $N_i^+([X])$ définie par la Θ-classe E_i' de $[X]$. Cette Θ-classe E_i' peut être étendue en une Θ-classe E_i dans G et $N_i^+([X])$ est contenu dans la demi-carrière $N_i^+(G)$ de G. Puisque $N_i^+([X])$ n'est pas ample, $N_i^+(G)$ non plus. □

5.3.2. Extensions portées simples d'un cube partiel

Nous avons vu dans le chapitre 2 que toutes les faces du graphe de topes G d'un COM sont des sous-graphes portés de G. De plus, comme mentionné au dessus, nous souhaitons compléter une à une les faces de G. Dans cette sous-section, nous montrons un résultat général sur la complétion partielle d'un cube partiel G par rapport à un sous-graphe porté de G. Supposons que G est plongé isométriquement dans l'hypercube Q_m, et rappelons que $\mathrm{C}(G)$ est le plus petit cube de Q_m contenant G.

Proposition 25. *Soient G un cube partiel et H un sous-graphe porté de G. Soit H' un sous-graphe isométrique de Q_m tel que $H \subseteq H' \subseteq \mathrm{C}(H)$ et soit G' le sous-graphe de Q_m induit par les sommets $V(G) \cup V(H')$. Alors les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) *G' est un sous-graphe isométrique de Q_m ;*

(ii) *H' est un sous-graphe porté de G' et pour tout sommet v, ses portes dans H et dans H' coïncident ;*

(iii) $\text{VC-dim}(G') = \max\{\text{VC-dim}(G), \text{VC-dim}(H')\}$.

En particulier, si $\text{VC-dim}(H') \leq \text{VC-dim}(G)$, *alors* $\text{VC-dim}(G') = \text{VC-dim}(G)$.

Démonstration. Comme H est porté c'est, par le lemme 2, un sous-graphe convexe de G. Nous devons donc avoir $\mathrm{C}(H) \cap V(G) = V(H)$. Premièrement, nous montrons que G' est un sous-graphe isométrique de Q_m. Puisque G et H' sont deux sous-graphes isométriques de Q_m, il suffit de montrer que tout sommet $v \in V(G) \setminus V(H)$ et tout sommet $u \in V(H') \setminus V(H)$ peuvent être connectés dans G' par un plus court chemin de Q_m. Considérons la porte v' de v dans H. Soit P un plus court (v, v')-chemin arbitraire de G. Sachant que v' est la porte de v dans H, par le lemme 15 P n'utilise pas d'arêtes appartenant à une Θ-classe de H. À partir de la définition de $\mathrm{C}(H)$, les Θ-classes de H et $\mathrm{C}(H)$ coïncident. Puisque H' est un sous-graphe isométrique de $\mathrm{C}(H)$, $v' \in V(H)$, et $u \in V(H')$, tous les plus courts (v', u)-chemins S de G' passent uniquement par des arêtes des Θ-classes appartenant à $\mathrm{C}(H)$, et donc à H. Ceci implique que la concaténation de P et S est un (v, u)-chemin R de G' dont toutes les

Θ-classes sont deux à deux distinctes. Par le lemme 14, R est un plus court chemin de Q_m, établissant que G' est un sous-graphe isométrique de Q_m. De plus, la porte de v dans H' est aussi v', parce qu'à partir de v' (la porte de v dans H) nous pouvons atteindre tous les sommets de H' utilisant uniquement les Θ-classes appartenant à H. Nous concluons que les portes de H' coïncident avec celles de H, ce qui prouve les deux premières conditions de la proposition.

Avant de montrer la troisième condition, nous montrons l'affirmation qui suit :

Affirmation 2. Tous les plus court chemins de G' allant d'un sommet $v \in V(G) \setminus V(H)$ à un sommet $z \in V(H') \setminus V(H)$ traverse $V(H)$.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe un plus court (v,z)-chemin T dans G' qui n'intersecte pas $V(H)$. Comme $v \in V(G) \setminus V(H)$, $z \in V(H') \setminus V(H)$, et $V(T) \subset (V(G) \cup V(H')) \setminus V(H)$, le chemin T contient une arête xy avec $x \in V(G) \setminus V(H)$ et $y \in V(H') \setminus V(H)$. Nous avons montré au dessus que pour tout sommet de G, sa porte dans H coïncide avec sa porte dans H'. Puisque les sommets $x \in V(G) \setminus V(H)$ et $y \in V(H')$ sont adjacents, y doit être la porte de x dans H'. Par conséquent, y est la porte de x dans H, contredisant notre hypothèse $y \notin V(H)$. □

Nous pouvons maintenant montrer la troisième condition. Pour cela nous raisonnons par l'absurde en supposant que $d := \text{VC-dim}(G') > \max\{\text{VC-dim}(G), \text{VC-dim}(H')\}$. Ainsi G' pulvérise le d-cube $Q_d := Q(X)$ pour un sous-ensemble $X \subseteq U$ avec $|X| = d$. D'après le lemme 32, chaque fibre $\text{Fib}_X(X')$ dans G' est non vide. Soit $\psi : V(G') \to V(Q_d)$, l'application "de pulvérisation", reliant chaque X-fibre $\text{Fib}_X(X')$ de G' au sous-ensemble X' de X. Comme $d > \max\{\text{VC-dim}(G), \text{VC-dim}(H')\}$, ni G ni H' ne pulvérise Q_d. Nous déduisons que l'application ψ restreinte à $V(G)$ et à $V(H')$ n'est plus une "pulvérisation". Par le lemme 32, il existe deux sous-ensembles Y et Z de X tels que les fibres respectives $\text{Fib}_X(Y)$ et $\text{Fib}_X(Z)$ de G et H' sont vides. D'autre part, les fibres $\text{Fib}_X(Y)$ et $\text{Fib}_X(Z)$ dans G' sont non vides.

En utilisant l'affirmation 2, tous les plus courts chemins allant de $V(G) \setminus V(H)$ à $V(H') \setminus V(H)$ passent par $V(H)$. Et comme $V(H) \subseteq V(H') \cap V(G)$, nous obtenons que tous les sommets de la fibre $\text{Fib}_X(Y)$ de G' sont contenus dans $V(H') \setminus V(G)$. En dénotant par X-*arêtes* les arêtes de Q_m qui sont indicées par un élément de X, il en découle que chaque X-arête de G' avec une extrémité dans la fibre $\text{Fib}_X(Y)$ de G' doit avoir l'autre extrémité dans H'. Sachant que H' a les mêmes Θ-classes que H, chaque X-arête est définie par une Θ-classe de H. Rappelons que dans un cube Q_k, chaque sommet est incident à k arêtes appartenant aux k Θ-classes qui le définissent. Ainsi, la fibre $\text{Fib}_X(Y)$ de G' doit être incidente à tous les Θ-classes des X-arêtes.

En appliquant de nouveau l'affirmation 2, nous concluons que chaque fibre $\text{Fib}_X(Z)$ dans G' est contenue dans $V(G') \setminus V(H')$. Considérons un sommet arbitraire v de la fibre $\text{Fib}_X(Z)$ de G', et notons v' sa porte dans H (et dans H'). Comme $v \in V(G') \setminus V(H')$, nécessairement $v' \neq v$. Soit P un plus court (v, v')-chemin de G'. Puisque v et v' appartiennent à des fibres différentes de G', P doit contenir une X-arête xy. Toute X-arête est définie par une Θ-classe de H (et

H'), donc par le lemme 15, nous obtenons une contradiction avec la deuxième condition où v' est la porte de v dans H et H'. Ceci montre que $d = \max\{\text{VC-dim}(G), \text{VC-dim}(H')\}$. □

Cependant nous pouvons remarquer que si G' est obtenu à partir d'un cube partiel G via une extension simple par rapport à un sous-graphe porté H, comme dans le lemme 15, certains sous-graphes portés de G peuvent ne plus être portés dans G'. Dans la sous-section suivante nous montrons que ce phénomène n'arrive pas dans les graphes de topes des CUOMs.

5.3.3. Projections mutuelles entre les faces des COMs

Dans cette sous-section, nous adaptons aux faces des COMs un résultat de DRESS et SCHARLAU [39] concernant les projections métriques mutuelles entre des ensembles portés. Cela nous permet entre autres de montrer que les projections mutuelles de deux faces maximales d'un CUOM coïncident avec les projections mutuelles des plus petits cubes les contenant.

Rappelons que la distance $\mathrm{d}_G(A,B)$ entre deux ensembles de sommets A et B de G est $\min\{\mathrm{d}(a,b) : a \in A, b \in B\}$. La *projection métrique* $\mathrm{pr}_B(A)$ de B sur A est l'ensemble de tous les sommets $a \in A$ réalisant la distance $\mathrm{d}(A,B)$ entre A et B, *i.e.*, $\mathrm{pr}_B(A) = \{a \in A : \mathrm{d}(a,B) = \mathrm{d}(A,B)\}$.

Théorème 13. *[39, Theorem] Soient A et B deux sous-graphes portés d'un graphe G. Alors $\mathrm{pr}_A(B)$ et $\mathrm{pr}_B(A)$ induisent deux sous-graphes portés isomorphes de G tels que pour tout sommet $a' \in \mathrm{pr}_B(A)$ si $b' = \mathrm{pr}_{a'}(B)$, alors $\mathrm{d}(a',b') = \mathrm{d}(\mathrm{pr}_A(B), \mathrm{pr}_B(A)) = \mathrm{d}(A,B)$, $\mathrm{pr}_{b'}(A) = a'$, et l'application $a' \mapsto b'$ définit un isomorphisme entre $\mathrm{pr}_A(B)$ et $\mathrm{pr}_B(A)$.*

Soient $X, Y \in \mathscr{L}$ deux covecteurs d'un COM $\mathscr{M}$. Nous dénotons par $\mathrm{pr}_{[X]}([Y])$ la projection métrique de $[X]$ sur $[Y]$ dans le graphe de topes G de $\mathscr{M}$ et par $\mathrm{pr}_{\mathrm{C}(X)}(\mathrm{C}(Y))$ la projection métrique du cube $\mathrm{C}(X)$ sur le cube $\mathrm{C}(Y)$ dans l'hypercube $Q(U)$. D'après le Lemme 30, les faces $[X]$ (où $X \in \mathscr{L}$) sont portées dans G et tous les cubes $\mathrm{C}(X)$ sont portés dans $Q(U)$. En appliquant le Théorème 13, nous concluons que $\mathrm{pr}_{[X]}([Y])$ et $\mathrm{pr}_{[Y]}([X])$, ainsi que $\mathrm{pr}_{\mathrm{C}(X)}(\mathrm{C}(Y))$ et $\mathrm{pr}_{\mathrm{C}(Y)}(\mathrm{C}(X))$, sont isomorphes. De plus, ces isomorphismes associent les paires de sommets réalisant les distances entre $\mathrm{pr}_{[X]}([Y])$ et $\mathrm{pr}_{[Y]}([X])$ et entre $\mathrm{pr}_{\mathrm{C}(X)}(\mathrm{C}(Y))$ et $\mathrm{pr}_{\mathrm{C}(Y)}(\mathrm{C}(X))$. On dit que deux faces $\mathrm{F}(X)$ et $\mathrm{F}(Y)$ de $\mathscr{M}$ sont *parallèles* si $\mathrm{pr}_{[X]}([Y]) = [Y]$ et $\mathrm{pr}_{[Y]}([X]) = [X]$. Une *galerie* entre deux faces parallèles $\mathrm{F}(X)$ et $\mathrm{F}(Y)$ de $\mathscr{M}$ est une suite de faces $(\mathrm{F}(X) = \mathrm{F}(X_0), \mathrm{F}(X_1), \ldots, \mathrm{F}(X_{k-1}), \mathrm{F}(X_k) = \mathrm{F}(Y))$ telle que les faces sont deux-à-deux parallèles et deux faces consécutives $\mathrm{F}(X_{i-1})$ et $\mathrm{F}(X_i)$ sont des facettes d'une même face de $\mathscr{M}$. Une *galerie géodésique* entre $\mathrm{F}(X)$ et $\mathrm{F}(Y)$ est une galerie de longueur $\mathrm{d}([X],[Y]) = |\mathrm{Sep}(X,Y)|$, voir la figure 5.4. Deux faces parallèles $\mathrm{F}(X)$ et $\mathrm{F}(Y)$ sont *adjacentes* si $|\mathrm{Sep}(X,Y)| = 1$, *i.e.*, $\mathrm{F}(X)$ et $\mathrm{F}(Y)$ sont des facettes opposées d'une face de $\mathscr{M}$.

La plupart des résultats qui suivent sont vrais pour tous les COMs. Par conséquent, nous spécifions dans les affirmations quand il est nécessaire d'être CUOMs. Nous utilisons simultanément les notations de covecteurs et de graphes de topes.

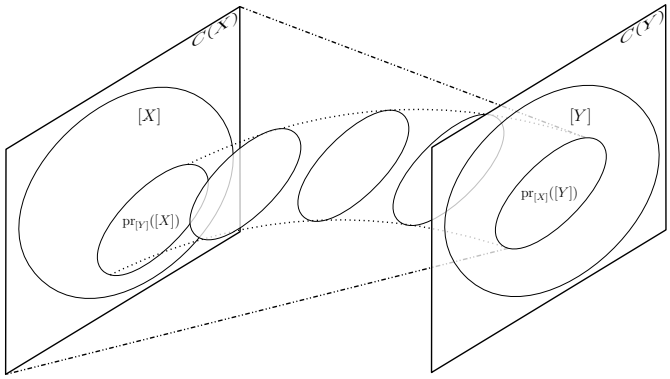


FIGURE 5.4. – Deux faces $[X]$ et $[Y]$, leurs projections mutuelles $\mathrm{pr}_{[X]}([Y])$ et $\mathrm{pr}_{[Y]}([X])$, et une galerie géodésique les reliant. Plus spécifiquement, dans le cas des CUOMs, nous avons schématisé la projection $\mathrm{pr}_{\mathrm{C}(X)}(\mathrm{C}(Y))$ égale à $\mathrm{pr}_{[X]}([Y])$.

Proposition 26. *Pour tous covecteurs X, Y d'un COM $\mathcal{M}$, les propriétés suivantes sont vraies :*

(i) $\mathrm{d}([X],[Y]) = \mathrm{d}(C(X), C(Y)) = \left|\mathrm{Sep}(X,Y)\right|$ *;*

(ii) $\mathrm{pr}_{[X]}([Y]) \subseteq \mathrm{pr}_{C(X)}(C(Y))$ *et* $\mathrm{pr}_{[Y]}([X]) \subseteq \mathrm{pr}_{C(Y)}(C(X))$ *;*

(iii) $\mathrm{pr}_{[Y]}([X]) = [X \circ Y]$ *et* $\mathrm{pr}_{[X]}([Y]) = [Y \circ X]$ *;*

(iv) $F(X)$ *et* $F(Y)$ *sont parallèles si et seulement si* $\underline{X} = \underline{Y}$ *(autrement dit, si* $X^0 = Y^0$*);*

(v) $F(X \circ Y)$ *et* $F(Y \circ X)$ *sont des faces parallèles de* $\mathcal{M}$ *;*

(vi) toutes paires de faces parallèles $F(X)$ *et* $F(Y)$ *peuvent être connectées dans* $\mathcal{M}$ *par une galerie géodésique;*

(vii) si $F(X)$ *est une facette de* $\mathcal{M}$*, alors* $\mathrm{pr}_{[Y]}([X])$ *est une face propre de* $[X]$ *;*

(viii) si $\mathcal{M}$ *est un CUOM, et* $F(X)$ *et* $F(Y)$ *sont des facettes, alors* $\mathrm{pr}_{[Y]}([X])$ *et* $\mathrm{pr}_{[X]}([Y])$ *sont des cubes;*

(ix) si $\mathcal{M}$ *est un CUOM, et* $F(X)$ *et* $F(Y)$ *sont des facettes, alors* $\mathrm{pr}_{[X]}([Y]) = \mathrm{pr}_{C(X)}(C(Y))$ *et* $\mathrm{pr}_{[Y]}([X]) = \mathrm{pr}_{C(Y)}(C(X))$.

Démonstration. (i) : À partir de la définition de $\mathrm{C}(X)$ et $\mathrm{C}(Y)$, $[X]$ et $\mathrm{C}(X)$ ont les mêmes Θ-classes et $[Y]$ et $\mathrm{C}(Y)$ ont les mêmes Θ-classes. Donc l'ensemble des Θ-classes séparant les faces $[X]$ et $[Y]$ est le même que l'ensemble des Θ-classes séparant les cubes $\mathrm{C}(X)$ et $\mathrm{C}(Y)$ et coïncide avec $\mathrm{Sep}(X,Y)$. Par conséquent, $\mathrm{d}([X],[Y]) = \mathrm{d}(\mathrm{C}(X),\mathrm{C}(Y)) = \left|\mathrm{Sep}(X,Y)\right|$.

(ii) : $\mathrm{pr}_{[X]}([Y]) \subseteq \mathrm{pr}_{\mathrm{C}(X)}(\mathrm{C}(Y))$ et $\mathrm{pr}_{[Y]}([X]) \subseteq \mathrm{pr}_{\mathrm{C}(Y)}(\mathrm{C}(X))$ suit de l'affirmation (i).

(iii) : Observons que pour toute paire de covecteurs X et Y, $\underline{X \circ Y} = \underline{Y \circ X}$ et $\mathrm{Sep}(X,Y) = \mathrm{Sep}(X \circ Y, Y \circ X)$. Sachant que $\mathrm{d}([X \circ Y],[Y \circ X]) = \left|\mathrm{Sep}(X \circ Y, Y \circ X)\right|$ et $\mathrm{Sep}(X \circ Y, Y \circ X) = \mathrm{Sep}(X,Y)$, par l'affirmation (i), nous obtenons que $\mathrm{d}([X],[Y]) = \mathrm{d}([X \circ Y],[Y \circ X])$, donc $[X \circ Y] \subseteq \mathrm{pr}_{[Y]}([X])$ et $[Y \circ X] \subseteq \mathrm{pr}_{[X]}([Y])$. Pour montrer l'inclusion inverse, supposons par l'absurde qu'il existe un tope $Z \in \mathrm{pr}_{[Y]}([X]) \setminus [X \circ Y]$. Puisque $\mathrm{pr}_{[Y]}([X])$ est porté, nous pouvons supposer que Z est adjacent à un tope Z' de $[X \circ Y]$. Soit e l'élément (une Θ-classe) pour lequel Z et Z' diffère, disons $Z_e = +1$ et $Z'_e = -1$. Comme $X \leq Z$ et $X \leq Z'$, nous avons

$X_e = 0$. Si $Y_e = 0$, ceci impliquerait que $(X \circ Y)_e = 0$, donc Z devrait appartenir à $[X \circ Y]$, ce qui contredit notre choix de Z. Ainsi, $Y_e = -1$. Il en découle que $\mathrm{d}(Z, Y') \geq \left|\mathrm{Sep}(X, Y)\right| + 1$ pour tout tope $Y' \in [Y]$. En effet, $Y'_e = -1$ et $Y'_f = -Z_f$ pour tout $f \in \mathrm{Sep}(X, Y)$. Cette contradiction montre que $\mathrm{pr}_{[Y]}([X]) = [X \circ Y]$ et $\mathrm{pr}_{[X]}([Y]) = [Y \circ X]$.

(iv) : Compte tenu de l'affirmation (iii), nous pouvons reformuler la définition de faces parallèles comme suit : $\mathrm{F}(X)$ et $\mathrm{F}(Y)$ sont parallèles si et seulement si $\mathrm{F}(X) = \mathrm{F}(X \circ Y)$ et $\mathrm{F}(Y) = \mathrm{F}(Y \circ X)$, *i.e.*, si et seulement si $X = X \circ Y$ et $Y = Y \circ X$. Alors nous pouvons facilement voir que $X = X \circ Y$ et $Y = Y \circ X$ tient si et seulement si $\underline{X} = \underline{Y}$ tient.

(v) : Cette propriété découle des points (iii) et (iv) précédents.

(vi) : Soient $\mathrm{F}(X)$ et $\mathrm{F}(Y)$ deux faces parallèles. D'après le point (iv), $\underline{X} = \underline{Y}$. Nous raisonnons par induction sur $k := \left|\mathrm{Sep}(X, Y)\right|$. Soit $B := \underline{X} = \underline{Y}$. Posons $A := U \setminus B$ et considérons le COM $(B, \mathscr{M} \setminus A)$. Alors $X' := X \setminus A$ et $Y' := Y \setminus A$ sont des topes de $\mathscr{M} \setminus A$. Nous pouvons remarquer aussi que les distances entre X' et Y' et entre X et Y sont égales à k. Comme le graphe de topes $G(\mathscr{M} \setminus A)$ du COM $\mathscr{M} \setminus A$ est un sous-graphe isométrique du cube $\{-1, +1\}^B$, X' et Y' peuvent être reliés dans $G(\mathscr{M} \setminus A)$ par un plus court chemin de $\{-1, +1\}^B$, *i.e.*, par un chemin de longueur k. Soit Z' le voisin de X' sur ce chemin. Alors il existe $e \in \mathrm{Sep}(X, Y) = \mathrm{Sep}(X', Y')$ tel que $\mathrm{Sep}(X', Z') = \{e\}$ et $\mathrm{Sep}(Z', Y') = \mathrm{Sep}(X, Y) \setminus \{e\}$. Par définition de $\mathscr{M} \setminus A$, il existe un covecteur $Z \in \mathscr{L}$ tel que $(Z \setminus A)_f = Z'_f$ pour tout $f \in B$. Ainsi, Z contient B dans son support. De plus, puisque $\underline{X} = \underline{Y} = B$, $\mathrm{Sep}(X, Z) = \{e\}$ et $\mathrm{Sep}(Z, Y) = \mathrm{Sep}(X, Y) \setminus \{e\}$. En particulier, $Z_f = X_f \neq 0$ pour tout $f \in B \setminus \{e\}$. En appliquant l'axiome **(SE)** à X, Z et $e \in \mathrm{Sep}(X, Z)$, nous allons trouver $X' \in \mathscr{L}$ tel que $X'_e = 0$ et $X'_f = (X \circ Z)_f$ pour tout $f \in U \setminus \mathrm{Sep}(X, Z)$. Étant donné que $\underline{X} = \underline{Y}$ et $\mathrm{Sep}(X, Z) = \{e\}$, nous concluons que $X'_f = X_f$ pour tout $f \in U \setminus \{e\}$. Par conséquent, $X' \leq X$, *i.e.*, $\mathrm{F}(X)$ est une face de $\mathrm{F}(X')$. Comme $\mathrm{Sep}(X, Z) = \{e\}$, $\mathrm{F}(X)$ est une facette de $\mathrm{F}(X')$. En utilisant l'axiome **(FS)**, nous avons $X'' := X' \circ (-X) \in \mathscr{L}$. Nous pouvons observer que $\mathrm{F}(X'')$ est une facette de $\mathrm{F}(X')$ symétrique à $\mathrm{F}(X)$, *i.e.*, $\mathrm{F}(X)$ et $\mathrm{F}(X'')$ sont des faces parallèles adjacentes. Observons aussi que $\underline{X}'' = \underline{X} = \underline{Y}$. De plus, comme $X''_e = -X_e$, nous avons aussi $\mathrm{Sep}(X'', Y) = \mathrm{Sep}(X, Y) \setminus \{e\}$. Par hypothèse d'induction, les faces parallèles $\mathrm{F}(X'')$ et $\mathrm{F}(Y)$ peuvent être reliées dans $\mathscr{M}$ par une galerie géodésique. En ajoutant à cette galerie la face $\mathrm{F}(X')$, nous obtenons une galerie géodésique reliant $\mathrm{F}(X)$ et $\mathrm{F}(Y)$.

(vii) : Cette propriété suit de l'affirmation (vi).

(viii) : Par l'affirmation (vii) et la proposition 24, $\mathrm{pr}_{[Y]}([X])$ est une face propre de $[X]$ qui est un cube.

(ix) : D'après l'affirmation (viii), $\mathrm{pr}_{[Y]}([X])$ est un cube. De plus, par l'affirmation (iii), $\mathrm{pr}_{[Y]}([X]) = [X \circ Y]$. D'après le point (ii) ce cube $[X \circ Y]$ est contenu dans le cube $\mathrm{pr}_{\mathrm{C}(Y)}(\mathrm{C}(X))$. Supposons par l'absurde que cette inclusion soit propre. Soit e un élément (une Θ-classe) du support de $\mathrm{pr}_{\mathrm{C}(Y)}(\mathrm{C}(X))$ n'appartenant pas au support de $[X \circ Y]$. Supposons, sans perte de généralité, que $Z_e = +1$ pour tout $Z \in [X \circ Y]$. En d'autres termes, tous les topes Z de $[X \circ Y]$ appartiennent au demi-espace G_e^+ de G. À partir de la définition des cubes $\mathrm{C}(X)$ et $\mathrm{C}(Y)$, nous concluons que le demi-espace G_e^- de G doit contenir un tope X' de $[X]$ et un tope Y' de $[Y]$. Ainsi, d'après la définition des portes mutuelles, nous devons avoir un plus court chemin dans G de X' à Y' passant par un tope de $\mathrm{pr}_{[Y]}([X])$ et un tope de $\mathrm{pr}_{[X]}([Y])$. Mais c'est

impossible car X' et Y' appartiennent à G_e^- alors que tous les topes de $\mathrm{pr}_{[Y]}([X]) = [X \circ Y]$ sont contenus dans G_e^+ et, par le lemme 13, les demi-espaces G_e^- et G_e^+ sont convexes car $G(\mathscr{M})$ est un cube partiel. □

5.3.4. Preuve du théorème 12

Soient $\mathscr{M}$ un CUOM et G son graphe de topes. Soient $\mathrm{F}(X_1),\dots,\mathrm{F}(X_n)$ les facettes de $\mathscr{M}$. Par définition, chaque $\mathrm{F}(X_i)$ est un UOM. Dénotons par F_i le graphe de topes de $\mathrm{F}(X_i)$. Considérons $\mathrm{amp}(\mathrm{F}_i)$ la complétion ample de F_i obtenue en utilisant le lemme 57. Ainsi, $\mathrm{amp}(\mathrm{F}_i)$ est inclus dans $\mathrm{C}(\mathrm{F}_i)$. Considérons $G_i^* = \mathrm{amp}(\mathrm{F}_1) \cup \dots \cup \mathrm{amp}(\mathrm{F}_i) \cup \mathrm{F}_{i+1} \cup \dots \cup \mathrm{F}_n$, autrement dit, G_i^* est obtenu à partir de G en remplaçant les i premières faces $\mathrm{F}_1,\dots,\mathrm{F}_i$ par leurs complétions amples $\mathrm{amp}(\mathrm{F}_1),\dots,\mathrm{amp}(\mathrm{F}_i)$. Finalement, nous pouvons poser $G^* := G_n^*$. Nous allons montrer que G^* est ample. Pour cela nous utilisons les résultats d'amalgamation des COMs et des AMP, et la proposition 25 sur les complétions d'ensembles portés dans les cubes partiels. La proposition 25 assure que chaque complétion partielle G_i^* est un cube partiel et que sa VC-dimension n'augmente pas. Ainsi, le graphe final G^* est un cube partiel de VC-dimension d.

Pour appliquer la proposition 25 à chaque G_i^*, nous avons besoin que chaque face qui n'a pas encore été complétée $\mathrm{F}_{i+1},\dots,\mathrm{F}_n$ de G reste portée dans les complétions partielles $G_1^*,\dots,G_i^*$. L'affirmation (ix) de la proposition 26, nous garantit qu'indépendamment de l'ordre dans lequel les faces F_i et F_j sont complétées (F_i avant F_j, ou F_j avant F_i), les projections mutuelles de F_i et F_j coïncident initialement avec celles des cubes $\mathrm{C}(\mathrm{F}_i)$ et $\mathrm{C}(\mathrm{F}_j)$. De plus, la porte de tout sommet $Z \in \mathrm{amp}(\mathrm{F}_i)$ dans F_j (ou de tout sommet $Z \in \mathrm{amp}(\mathrm{F}_j)$ dans F_i) de chaque complétion partielle va coïncider avec la porte de Z dans le cube $\mathrm{C}(\mathrm{F}_j)$ (respectivement avec la porte de Z dans le cube $\mathrm{C}(\mathrm{F}_i)$). Par conséquent, chaque graphe partiellement complété G_i^* est un cube partiel et toutes les faces restantes $\mathrm{F}_{i+1},\dots,\mathrm{F}_n$ sont portées dans G_i^*. Donc nous pouvons appliquer la proposition 25 au cube partiel G_i^* et aux faces restantes $\mathrm{F}_{i+1},\dots,\mathrm{F}_n$.

Nous allons maintenant montrer que toute arête uv de G^* est contenue dans certaines complétions $\mathrm{amp}(\mathrm{F}_i)$ d'une facette F_i de G. Supposons que $u \in \mathrm{amp}(\mathrm{F}_i)$ et $v \in \mathrm{amp}(\mathrm{F}_j)$. Par construction, $\mathrm{amp}(\mathrm{F}_i) \subseteq \mathrm{C}(\mathrm{F}_i)$ et $\mathrm{amp}(\mathrm{F}_j) \subseteq \mathrm{C}(\mathrm{F}_j)$. Donc, si u et v sont adjacents, nécessairement un de ces sommets, disons v, appartient à $\mathrm{C}(\mathrm{F}_i) \cap \mathrm{C}(\mathrm{F}_j)$. Puisque G est le graphe de topes d'un CUOM, $\mathrm{C}(\mathrm{F}_i) \cap \mathrm{C}(\mathrm{F}_j)$ est une face (cube) propre de F_i et de F_j. Par conséquent, $u \in \mathrm{amp}(\mathrm{F}_i)$ et $v \in \mathrm{F}_i$, et nous avons terminé.

Pour montrer que G^* est ample, nous procédons par induction sur le nombre de faces de G. Nous utiliserons aussi les procédures d'amalgamations pour les COMs et les AMPs, voir les propositions 2 et 5. Si G est constitué d'une seule face maximale, alors par le lemme 57 nous avons fini. Sinon, d'après la proposition 2, $\mathscr{M}$ est un COM-amalgame de deux COMs $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}''$, avec leur graphe de topes respectif G' et G'', tel que :

1. chaque facette de G est une facette de G' ou de G'' ;
2. leur intersection $G_0 = G' \cap G''$ est le graphe de topes du COM $\mathscr{M}' \cap \mathscr{M}''$.

Ceci implique que G', G'', et G_0 sont des graphes de topes de CUOMs : chaque facette de chacun d'entre eux est soit une facette de G, et donc le graphe de topes d'un CUOM, soit une face propre de G, et donc un cube. Ces premières facettes sont appelées les *facettes originales* et les secondes sont appelées *facettes cubes*.

Soit $(G')^*$ l'union de toutes les facettes cubes de G' et des complétions amples $\mathrm{amp}(\mathrm{F}_i)$ de toutes les facettes originales F_i du graphe de topes G' du CUOM $\mathscr{M}'$. Clairement, $(G')^*$ est obtenu par la méthode de complétion décrite ci-dessus et appliquée aux facettes de G'. De façon analogue, nous définissons respectivement les complétions $(G'')^*$ et $(G_0)^*$ de G'' et G_0. Comme G', G'', et G_0 sont des graphes de topes de CUOMs ayant moins de sommets que G, par hypothèse d'induction, $(G')^*, (G'')^*$, et $(G_0)^*$ sont des complétions amples de G', G'', et G_0. De plus, étant donné que chaque facette de G est une facette d'un des deux graphes G' ou G'', par construction et par ce qui a été démontré ci-dessus, l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes du cube partiel G^* correspondent respectivement à l'union des ensembles des sommets et à l'union des ensembles des arêtes des cubes partiels amples $(G')^*$ et $(G'')^*$. Par conséquent, $((G')^*, (G_0)^*, (G'')^*)$ est une couverture isométrique de G^*, *i.e.*, G^* est un AMP-amalgame de $(G')^*$ et $(G'')^*$. D'après la proposition 5, G^* est ample. Ceci conclut la preuve du théorème 12. □

Dans la figure 5.5, nous illustrons une complétion ample du graphe de topes d'un CUOM (présenté dans la figure 5.1), obtenue comme dans la preuve du théorème 12.

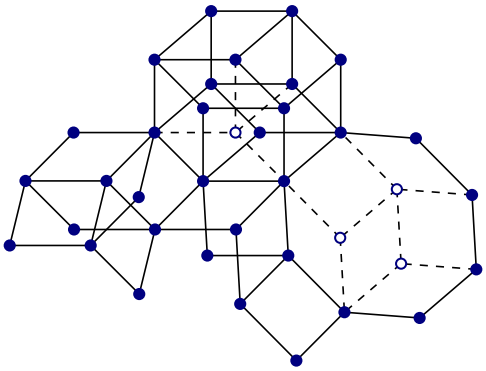


FIGURE 5.5. – Une complétion ample du graphe de topes illustré dans la figure 5.1.

6. Schémas de compression étiquetés pour les COMs

Sommaire

6.1 Résultat 104
6.2 État de l'art 105
6.3 Max-pulvérisation 106
6.4 Échantillons réalisables et pleins vus comme sous-graphes convexes 107
6.5 Lemme de distinction 110
6.6 Lemme de localisation 112
6.7 Preuve du théorème 14 113
6.8 Exemple 115

Dans ce chapitre, nous présentons des schémas de compression étiquetés propres de taille d pour les COMs de VC-dimension d. L'ensemble des résultats de ce chapitre sont dans le papier [30].

6.1. Résultat

Dans le chapitre 5, nous avons montré que les graphes de topes des OMs et des CUOMs, deux sous-classes des graphes de topes des COMs, peuvent être étendues en cubes partiels amples sans augmenter la VC-dimension. En associant ces complétions au théorème 3, nous obtenons que les graphes de topes des OMs et des CUOMs admettent des schémas de compression étiquetés non propres en la taille de leur VC-dimension. Ils vérifient donc la conjecture 1. L'existence de la complétion ample des graphes de topes des COMs est toujours ouverte. Pour approcher la conjecture 1 de FLOYD et WARMUTH [42], nous suivons une stratégie différente où nous décrivons directement un schéma de compression étiqueté propre de taille d pour les COMs de VC-dimension d. Nous pouvons souligner que les schémas de compression précédents, obtenus par complétion, ne sont pas propres. Ici, les schémas de compression que nous donnons pour les COMs sont propres, ce qui est une propriété plus forte.

Théorème 14. *L'ensemble $\mathcal{T}$ des topes d'un complexe des matroïdes orientés $\mathcal{M} = (U, \mathcal{L})$ de VC-dimension d admet un schéma de compression étiqueté propre de taille d.*

Ce schéma de compression étiqueté pour les COMs généralise celui pour les amples (théorème 3) de MORAN et WARMUTH [68]. La fonction de compression, que nous donnons, est assez similaire à celle utilisée par MORAN et WARMUTH [68]. En revanche, la fonction de décompression est beaucoup plus technique. Notre approche utilise à la fois la structure cellulaire des COMs via la théorie des matroïdes orientés, et le lien avec la théorie métrique des graphes en regardant les graphes de topes des COMs comme cubes partiels.

La preuve du théorème 14 est basée sur deux lemmes, le *lemme de distinction* et le *lemme de localisation*, et sur les résultats sur la VC-dimension de la section 3.4. Dans la section 6.2, nous donnons quelques résultats sur les schémas de compression avant d'introduire la notion de max-pulvérisation dans la section 6.3. Puis, dans la section 6.4, nous donnons une correspondance entre les échantillons réalisables et les sous-graphes convexes des cubes partiels. Ensuite, nous présentons respectivement dans les sections 6.5 et 6.6 le lemme de distinction et le lemme de localisation. Enfin, notre schéma de compression pour les COMs est décrit dans la section 6.7 et illustré dans la section 6.8.

6.2. État de l'art

Rappelons que les schémas de compression ont été introduits en 1986 par LITTLESTONE et WARMUTH [65] et que MORAN et YEHUDAYOFF [69] ont montré que toute classes de concepts de VC-dimension d admet un schéma de compression étiqueté de taille $2^{O(d)}$. De nombreux auteurs se sont penchés sur l'étude des schémas de compression, étiquetés ou non étiquetés, montrant de meilleures bornes dans le cas où nous nous restreignons à certaines classes. BEN-DAVID et LITMAN [15] ont montré un résultat de compacité qui restreint l'existence de schémas de compression (étiquetés ou non étiquetés) pour des classes arbitraires à des classes finies. Ils ont aussi obtenu des schémas de compression pour certaines classes en les plongeant dans des classes pour lesquelles les schémas de compression sont connus. Récemment, PÁLVÖLGYI et TARDOS [77] ont exhibé une classe de concepts de VC-dimension 2 n'admettant pas de schémas de compression non étiquetés de taille 2. HELMBOLD, SLOAN et WARMUTH [51] ont construit des schémas de compression non étiquetés de taille d pour les classes de concepts closes par intersection de VC-dimension d. Ils compressent chaque échantillon en un ensemble générateur minimal et majorent la taille de cet ensemble par la VC-dimension. Les schémas de compression développés dans [22] pour les boules dans certaines classes de concepts sont propres et utilisent de l'information supplémentaire. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, MORAN et WARMUTH [68] ont fourni des schémas de compression étiquetés de taille d pour les classes amples de VC-dimension d. BEN-DAVID et LITMAN [15], KUZMIN et WARMUTH [63] et RUBINSTEIN et RUBINSTEIN [85], ont donné des schémas de compression non étiquetés pour les classes maximums. Ces schémas comportaient des erreurs qui ont récemment été corrigées par CHALOPIN et al. [23] où ils montrent que les classes maximums de VC-dimension d admettent des schémas de compression non étiquetés de taille d. CHALOPIN et al. [23] ont aussi établi que les classes amples admettent des schémas de compression non étiquetés si et seulement s'il existe des *orientations uniques par puits* de leurs graphes de 1-inclusion. Cependant la question de

l'existence de telles orientations est ouverte.

6.3. Max-pulvérisation

Un covecteur $X \in \mathscr{L}$ d'un COM $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ *max-pulvérise* un ensemble $D \subseteq U$ si $[X]$ pulvérise D mais ne pulvérise aucun sur-ensemble de D. Nous disons aussi que $X \in \mathscr{L}$ *min-pulvérise* un ensemble D si $[X]$ pulvérise D et pour tout covecteur $X' > X$, $[X']$ ne pulvérise pas D.

Lemme 58. *Soit $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ un COM. Soient $X, Y \in \mathscr{L}$ et soit $D \subset U$ un ensemble. Alors :*

(i) si $[X]$ et $[Y]$ pulvérisent D, alors les projections $[X \circ Y]$ et $[Y \circ X]$ pulvérisent aussi D ;

(ii) si $[X]$ max-pulvérise D et $[Y]$ pulvérise D, alors $[X \circ Y] = [X]$ et $\uparrow X$ n'est pas une facette de $\mathscr{M}$;

(iii) si $[X]$ et $[Y]$ pulvérise D, alors il existe deux covecteurs $X' \geq X$ et $Y' \geq Y$ tels que $[X']$ et $[Y']$ max-pulvérisent D, et $\uparrow X'$ et $\uparrow Y'$ sont parallèles.

Démonstration. **Propriété (i) :** Puisque $[X]$ et $[Y]$ pulvérisent D, pour tout vecteur signé $Z \in \{-1, +1\}^D$, nous pouvons trouver deux topes $T' \in [X]$ et $T'' \in [Y]$, tels que $T'_{|D} = Z = T''_{|D}$. Comme $X < T'$ et $Y < T''$, à partir de $T'_{|D} = Z = T''_{|D}$, nous concluons que $(X \circ Y)_{|D} < Z$, et nous pouvons trouver un tope T dans $[X \circ Y]$ tel que sa restriction sur D coïncide avec Z. Ceci prouve que $[X \circ Y]$ pulvérise D, ce qui termine la preuve de la propriété (i).

Propriété (ii) : Si $[X]$ max-pulvérise D, alors VC-dim$(X) = |D| =: d$. D'après la propriété (i), $[X \circ Y]$ pulvérise aussi D. Si $\uparrow(X \circ Y)$ est une face propre de $\uparrow X$, alors nous obtenons une contradiction avec la proposition 14. Donc $\uparrow(X \circ Y) = \uparrow X$, ce qui implique que $X = X \circ Y$. Ceci termine la première affirmation. Par la proposition 26 (iv) et (vi), les faces $\uparrow X$ et $\uparrow(Y \circ X)$ sont parallèles et par conséquent sont reliées par une galerie géodésique $(\uparrow X = \uparrow X_0, \uparrow X_1, \ldots, \uparrow X_k = \uparrow(Y \circ X))$. Ainsi, $\uparrow X$ et $\uparrow X_1$ sont des facettes d'une même face de $\mathscr{L}$, donc $\uparrow X$ n'est pas une facette de $\mathscr{M}$, ce qui conclue la preuve de la propriété (ii).

Propriété (iii) : Soit $d = |D|$. Nous pouvons supposer que X et Y min-pulvérisent l'ensemble D. En effet, si D est pulvérisé par une face propre $\uparrow X'$ de $\uparrow X$, alors nous pouvons remplacer la paire X, Y par la paire X', Y telle que $[X']$ et $[Y]$ pulvérisent encore D. Nous pouvons donc supposer qu'aucune face propre de $\uparrow X$ et de $\uparrow Y$ ne pulvérise D. Comme d'après la propriété (i), D est pulvérisé par $[X \circ Y]$ et $[Y \circ X]$, nous concluons que $X = X \circ Y$ et $Y = Y \circ X$, et que les faces $\uparrow X$ et $\uparrow Y$ sont parallèles. Il reste à montrer que $[X]$ et $[Y]$ max-pulvérisent D. Supposons par l'absurde que $[X]$ pulvérise un ensemble plus grand $D' := D \cup \{e\}$. Considérons l'OM $\mathscr{M}' = \uparrow X \setminus (U \setminus D')$. Puisque $[X]$ pulvérise D', $\mathscr{M}'$ pulvérise aussi D'. De plus, $\mathscr{M}'$ max-pulvérise D', *i.e.*, VC-dim$(\mathscr{M}') = d + 1$. Sachant que $\mathscr{M}'$ est un OM simple, $\mathscr{M}'$ contient deux topes adjacents T'_1 et T'_2 tels que Sep$(T'_1, T'_2) = \{e\}$ et nous pouvons trouver un cocircuit X'' de $\mathscr{M}'$ tel que $T'_1 \in [X'']$ et $T'_2 \notin [X'']$. En appliquant la proposition 14 à $\mathscr{M}'$, nous obtenons que X'' est de VC-dimension d. Par conséquent, X'' doit pulvérisé l'ensemble D. D'après le lemme 10, il existe un cocircuit X' de $\uparrow X$ tel que $X'' = X' \setminus (U \setminus D')$. Comme X'' pulvérise D,

X' pulvérise aussi D. Comme $X < X'$, nous obtenons une contradiction avec notre hypothèse que X min-pulvérise D. □

6.4. Échantillons réalisables et pleins vus comme sous-graphes convexes

Nous établissons une correspondance entre les échantillons réalisables et les sous-graphes convexes dans les cubes partiels. Dans cette sous-section, $\mathscr{L} \subseteq \{-1,0,+1\}^U$ est un système de vecteurs signés dont l'ensemble des topes $\mathscr{T}$ induit un sous-graphe isométrique G de l'hypercube $Q(U)$. Rappelons que $\downarrow \mathscr{L} = \bigcup_{X \in \mathscr{L}} \{S \in \{-1,0,+1\}^U : S \leq X\}$ est appelé l'*ensemble des échantillons réalisables* de $\mathscr{L}$. Observons que $\downarrow \mathscr{L}$ contient tous les vecteurs signés qui sont inférieurs à ceux de $\mathscr{L}$. Comme pour tout $X \in \mathscr{L}$ il existe $T \in \mathscr{T}$ tel que $X \leq T$, nous avons $\downarrow \mathscr{L} = \downarrow \mathscr{T}$, voir la figure 6.1 pour une illustration.

Étant donné un échantillon réalisable $S \in \downarrow \mathscr{L}$, considérons $\uparrow S = \{X \in \mathscr{L} : S \leq X\}$, *i.e.*, l'ensemble de tous les covecteurs appartenant à $\mathscr{L}$ qui sont plus grand que S. Considérons aussi le sous-graphe $[S]$ de G induit par tous les topes $T \in \mathscr{L}$ de $\uparrow S$. Pour les OMs, l'ensemble $\uparrow S$ est dénommé *supertope* [52]. Pour les COMs, $\uparrow S$ est appelé la *fibre* de S et il est connu que les fibres des COMs sont des COMs [13]. Puisque pour tout $S \in \downarrow \mathscr{L}$ il existe un tope T tel que $S \leq T$, $[S]$ est non vide. De plus, $[S]$ est exactement l'intersection des demi-espaces de G de la forme G_e^+ si $S_e = +1$ et G_e^- si $S_e = -1$. Ainsi, pour tout $S \in \downarrow \mathscr{L}$, $[S]$ est un sous-graphe convexe non vide de G. Si $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ est un COM et $S \in \mathscr{L}$, alors $\uparrow S$ est exactement la face de S et $[S]$ est un sous-graphe porté de G d'après le lemme 30. En résumé, nous obtenons le résultat suivant :

Lemme 59. *Si $S \in \downarrow \mathscr{L}$, alors $[S]$ est un sous-graphe convexe non vide de G. Si $\mathscr{L}$ est un COM, alors $[S]$ est porté.*

D'autre part, tout sous-graphe convexe H d'un cube partiel G est l'intersection de tous les demi-espaces de G contenant H [1, 5, 24]. Cependant, H peut être représenté par différentes intersections de demi-espaces. Toute représentation de H comme une intersection de demi-espaces de G donne lieu à un échantillon réalisable S, où $S_e = +1$ (resp. $S_e = -1$) si G_e^+ (resp. G_e^-) participe à la représentation et $S_e = 0$ sinon. De plus, observons que les Θ-classes touchant H sont dans toutes les représentations de H et que les Θ-classes croisant H ne sont dans aucune représentation de H. Ceci donne lieu à deux représentations canoniques de H, une utilisant uniquement les demi-espaces des Θ-classes qui touchent H et une utilisant tous les demi-espaces contenant H. Nous définissons les échantillons réalisables correspondant $S_\perp = S_\perp(H)$ et $S^\top = S^\top(H)$ de la manière suivante :

$$(S_\perp)_e = \begin{cases} -1 & \text{si } e \in \operatorname{osc}(H) \text{ et } H \subseteq G_e^-, \\ +1 & \text{si } e \in \operatorname{osc}(H) \text{ et } H \subseteq G_e^+, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (S^\top)_e = \begin{cases} -1 & \text{si } H \subseteq G_e^-, \\ +1 & \text{si } H \subseteq G_e^+, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que $(S^\top)^0 = \mathrm{cross}(H)$ et $(S_\perp)^0 = U \setminus \mathrm{osc}(H)$, *i.e.*, $(S_\perp)^0$ est composé de tous les éléments e tels que la Θ-classe E_e croise ou est disjointe de H. D'un autre côté, si S est un échantillon provenant d'une représentation de H comme intersection de demi-espaces, alors $S_\perp \leq S \leq S^\top$. De plus, tout échantillon S appartenant à l'intervalle $I(H) := [S_\perp, S^\top]$ provient d'une représentation de H, *i.e.*, nous avons $[S] = [S_\perp] = [S^\top] = H$. Par conséquent, pour tout sous-graphe convexe H de G, l'ensemble de tous les échantillons $S \in \downarrow \mathscr{L}$ tels que $[S] = H$ est un intervalle $I(H) = [S_\perp, S^\top]$ de $(\downarrow \mathscr{L}, \leq)$. Remarquons que les intervalles $I(H)$ partitionnent $\downarrow \mathscr{L}$. Pour résumé, nous obtenons le résultat suivant :

Lemme 60. *Pour tout sous-graphe convexe H de G, l'ensemble de tous les échantillons $S \in \downarrow \mathscr{L}$ tels que $[S] = H$ est un intervalle $I(H) = [S_\perp, S^\top]$ de $(\downarrow \mathscr{L}, \leq)$. De plus, les intervalles $I(H)$ définissent une partition de $\downarrow \mathscr{L}$.*

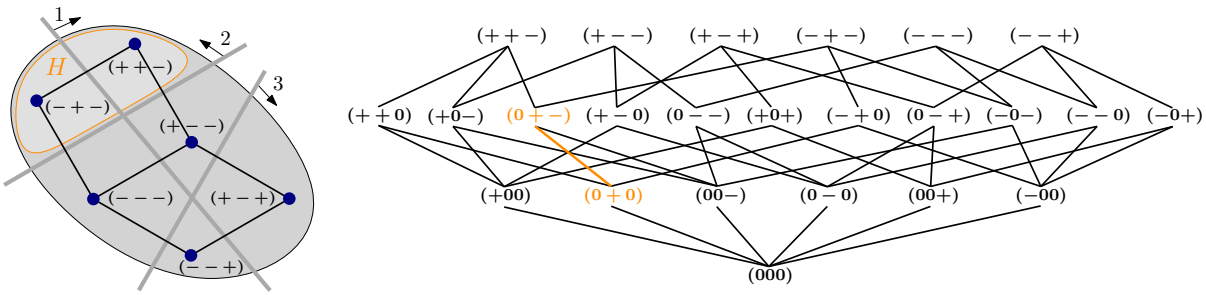


FIGURE 6.1. – Gauche : le graphe de topes M_0' du COM $\mathscr{M}_0'$ (obtenu par restriction de $\mathscr{M}_0$ à $\{1,2,3\}$, voir les figures 1.10 et 2.6) et un sous-graphe convexe H of M_0'. Droite : les échantillons réalisables de $\mathscr{M}_0'$ et l'intervalle $I(H)$ en orange.

Par la suite, nous utiliserons les propriétés suivantes de $I(H)$ et de $[S]$. Le lemme 61 découle des définitions de $I(H)$ et de $[S]$:

Lemme 61. *Si $S, S' \in \downarrow \mathscr{L}$ et $S \leq S'$, alors $[S'] \subseteq [S]$.*

Lemme 62. *Si $X \in \mathscr{L}, S \in \downarrow \mathscr{L}$ tel que $\mathrm{Sep}(X, S) = \varnothing$ et $\widehat{S} = X \circ S$, alors $[\widehat{S}] = [X] \cap [S]$.*

Démonstration. Comme $\widehat{S} = X \circ S$, nous avons $X \leq \widehat{S}$. En utilisant le lemme 61, nous obtenons que $[\widehat{S}] \subseteq [X]$. Montrons que $[\widehat{S}] \subseteq [S]$. Supposons par l'absurde qu'il existe un tope T de $\mathscr{L}$ tel que $T \in [\widehat{S}] \setminus [S]$. Alors $\widehat{S} < T$ et il existe un élément $e \in U$ tel que $T_e \neq S_e \neq 0$. Puisque $\widehat{S} = X \circ S$, nous obtenons que $X_e = T_e$, ce qui contredit notre hypothèse que $\mathrm{Sep}(X, S) = \varnothing$. Ceci prouve que $[\widehat{S}] \subseteq [X] \cap [S]$.

Pour montrer l'inclusion inverse $[X] \cap [S] \subseteq [\widehat{S}]$, considérons n'importe quel tope T de $\mathscr{L}$ appartenant à $[X] \cap [S]$. Alors, $X < T$ et $S < T$. Supposons par l'absurde que $T \notin [\widehat{S}]$, *i.e.*, $\widehat{S} \not< T$. Il existe donc $e \in U$ tel que $\widehat{S}_e \neq 0$ et $\widehat{S}_e \neq T_e$, disons $\widehat{S}_e = -1$ et $T_e = +1$. Sachant que $\widehat{S} = X \circ S$, l'égalité $\widehat{S}_e = -1$ implique que soit $X_e = -1$, soit $X_e = 0$ et $S_e = -1$. Comme $T_e = +1$, dans le premier cas, nous obtenons une contradiction avec $X < T$ et dans le second cas, nous obtenons une contradiction avec $S < T$. Par conséquent, $[X] \cap [S] \subseteq [\widehat{S}]$ et termine la preuve. $\square$

Considérons maintenant que VC-dim$(G) = d$. Nous disons qu'un échantillon $S \in \downarrow \mathscr{L}$ est *plein* (*"full"* en anglais) si le pc-mineur $G' = \pi_{S^0}(G)$ (obtenu à partir de G en contractant les Θ-classes de S^0) est de VC-dimension d. Dénotons par $\downarrow \mathscr{L}_f$ l'ensemble de tous les échantillons pleins de $\mathscr{L}$. Observons que tous les topes de $\mathscr{L}$ sont des échantillons pleins car leurs ensembles zéro est vide. Nous appelons un sous-graphe convexe H de G *plein* si $S_\perp(H)$ est plein. L'image de H dans G' est un sommet v_H qui est de degré $|\mathrm{osc}(H)|$. Si $D \subset \mathrm{osc}(v_H) = \mathrm{osc}(H)$ de taille d est pulvérisé par G', comme G' est un pc-mineur de G, D est aussi pulvérisé par G. Par conséquent, un ensemble convexe H de G est plein si et seulement si G pulvérise un sous-ensemble D de $\mathrm{osc}(H)$ de taille $d = \text{VC-dim}(G)$.

Exemple 3. Cependant, si H est un sous-graphe convexe plein d'un COM, tous les échantillons dans $I(H) = [S_\perp, S^\top]$ ne sont pas forcément pleins. Considérons le COM défini par l'ensemble de topes $\{(-,-,-),(+,-,-),(+,+,-),(+,-,+),(+,+,+)\}$ dont le graphe de topes est illustré dans la figure 6.2.

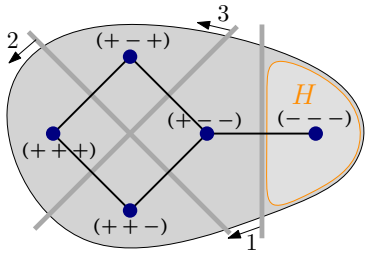


FIGURE 6.2. – Le graphe de topes G correspondant au COM défini dans l'exemple 3.

Posons l'ensemble convexe $H = \{(-,-,-)\}$ composé d'un seul sommet. Alors $\mathrm{osc}(H) = \{1\}$ et donc H n'est pas plein. Maintenant, intéressons nous à l'échantillon réalisable $S = (0,-,-)$. Nous pouvons facilement voir que S appartient à $I(H)$ et que $S^0 = \{1\}$. Puisque $\pi_1(G)$ est un carré, S est un échantillon plein.

Nous montrons maintenant que le problème ci-dessus n'arrive pas dans les OMs.

Lemme 63. *Pour un OM $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$, $S \in \downarrow \mathscr{L}$ est plein si et seulement si $[S]$ est plein.*

Démonstration. Tout d'abord, comme dans les OMs le rang et la VC-dimension sont égales, remarquons qu'un échantillon S est plein si et seulement si $\mathrm{rang}(\mathscr{M} \setminus S^0) = d$.

Supposons que le sous-graphe convexe H est plein. Alors l'échantillon $S_\perp := S_\perp(H)$ est plein. Puisque $\underline{S_\perp} = \mathrm{osc}(H) \subseteq \underline{S}$ pour tout $S \in I(H) = [S_\perp, S^\top]$, nous avons $S^0 \subset (S_\perp)^0$, donc $\mathrm{rang}(\mathscr{M} \setminus S^0) \geq \mathrm{rang}(\mathscr{M} \setminus (S_\perp)^0) = d = \mathrm{rang}(\mathscr{M})$. Par conséquent, $\mathrm{rang}(\mathscr{M} \setminus S^0) = d$, *i.e.*, S est un échantillon plein.

Réciproquement, soit S un échantillon plein. Nous affirmons que $H = [S]$ est un sous-graphe convexe plein. Considérons $\mathscr{M}' = \mathscr{M} \setminus \mathrm{cross}(H)$ et considérons $G' = \pi_{\mathrm{cross}(H)}(G)$ son graphe de topes. Puisque $\mathrm{cross}(H) \subseteq S^0$ et que S est plein, $\mathrm{rang}(\mathscr{M}') = d$ et donc VC-dim$(G') = d$. L'image de H dans G' est un sommet v_H. D'après le lemme 23, $\mathrm{osc}(v_H) = \mathrm{osc}(H)$. En

utilisant le lemme 39, $\mathrm{osc}(v_H)$ contient un sous-ensemble de taille d pulvérisé par $\mathscr{M}'$, donc H est plein. □

6.5. Lemme de distinction

Dans cette sous-section, $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ est un OM de rang d. Le lemme de distinction, une version plus forte que le lemme 39, permet de distinguer les échantillons pleins de $\mathscr{M}$ uniquement par leurs restrictions aux sous-ensembles de taille d. Le lemme de distinction montre l'existence d'une fonction $f_{\mathscr{M}}$ assignant un tel sous-ensemble à chaque échantillon plein. Ce lemme est utilisé dans la section 6.7 par le compresseur et le reconstructeur.

Lemme 64. *Soit $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ un OM de VC-dimension d. Alors il existe une fonction $f_{\mathscr{M}} : \downarrow \mathscr{L}_f \to \binom{U}{d}$ telle que pour tout $S, S' \in \downarrow \mathscr{L}_f$:*

(i) si $e \in f_{\mathscr{M}}(S)$, alors $e \in \mathrm{osc}([S])$;

(ii) $f_{\mathscr{M}}(S)$ est pulvérisé par $\mathscr{M}$;

(iii) si $e \notin \mathrm{osc}([S])$, alors $f_{\mathscr{M}}(S) = f_{\mathscr{M}\setminus e}(S \setminus e)$;

(iv) si $S_{|f_{\mathscr{M}}(S)} = S'_{|f_{\mathscr{M}}(S')}$, alors $[S] = [S']$.

Démonstration. Soit $G := G(\mathscr{M})$ le graphe de topes de $\mathscr{M}$. Nous raisonnons par induction sur d. Si $d = 1$, alors $U = \{e\}$ et le graphe de tope G est une arête reliant les deux topes $T_1 = (-1)$ et $T_2 = (+1)$. Donc T_1 et T_2 sont les seuls échantillons pleins de $\mathscr{M}$ (l'unique autre échantillon (0) n'est pas plein). En définissant $f_{\mathscr{M}}(T_1) = f_{\mathscr{M}}(T_2) = \{e\}$, nous obtenons une fonction satisfaisant les conditions (i)-(iv).

Affirmation 3. Si S est un échantillon plein et $e \in \mathrm{osc}([S])$, alors il existe un cocircuit X de $\mathscr{M}$ tel que $e \in \underline{X}$ et $X \leq S$. De plus, $S \setminus \underline{X}$ est un échantillon plein de $\mathscr{M}(X)$.

Démonstration. Puisque S est un échantillon plein, le OM $\mathscr{M}' = \mathscr{M} \setminus S^0$ est de VC-dimension d et donc rang d. De plus, $[S \setminus S^0]$ est un tope T de $\mathscr{M}'$. D'après le lemme 23, comme $e \in \mathrm{osc}([S]) = \mathrm{osc}([T])$, T est incident à une arête de E_e. Ainsi, il existe un autre tope T' de $\mathscr{M}'$ tel que $\mathrm{Sep}(T, T') = \{e\}$. Considérons X' un cocircuit de $\mathscr{M}'$ tel que sa face $\uparrow X'$ contienne T mais pas T'. Ce cocircuit X' existe, sinon tous les cocircuits Y' de $\mathscr{M}'$ auraient $Y'_e = 0$. Or, $\mathscr{M}'$ est simple car $\mathscr{M}$ l'est. Maintenant, en utilisant la proposition 14, comme $\mathscr{M}'$ est de VC-dimension d, $\mathscr{M}'(X') \simeq \uparrow X'$ est de VC-dimension $d-1$. Donc il existe un covecteur X de $\mathscr{M}$ tel que $X' = X \setminus S^0$ et $\text{VC-dim}(X) = d-1$. Si X n'est pas un cocircuit, alors $\uparrow X$ est une face propre de $\uparrow Y$ pour un cocircuit Y de $\mathscr{M}$. Puisque la VC-dimension de n'importe quelle face propre est strictement plus petite que la VC-dimension de la face elle-même, et puisque $\mathscr{M}$ est de rang d, nous obtenons une contradiction. Donc X est un cocircuit de $\mathscr{M}$. En particulier, $e \in \underline{X}$ et $X \leq S$.

Il reste donc à montrer que $S \setminus \underline{X}$ est un échantillon plein de $\mathscr{M}(X)$, *i.e.*, la VC-dimension de $(\uparrow X \setminus \underline{X}) \setminus S^0$ est $d-1$. Observons que d'après le lemme 10, $X \setminus S^0 \in \mathscr{C}^*(\mathscr{M} \setminus S^0)$. Puisque S

est plein, la VC-dimension de $\mathcal{M} \setminus S^0$ est d. Par conséquent, d'après la proposition 14, la VC-dimension de $\mathcal{M}(X \setminus S^0)$ est $d-1$. Or, tous les vecteurs signés dans $\uparrow X$ ont les mêmes valeurs que X sur son support $\underline{X}$, donc nous avons $\mathcal{M}(X \setminus S^0) \simeq (\uparrow X \setminus \underline{X}) \setminus S^0$. Ainsi, VC-dim$((\uparrow X \setminus \underline{X}) \setminus S^0) =$ VC-dim$(\mathcal{M}(X \setminus S^0)) =$ VC-dim$(\mathcal{M}) - 1 = d - 1$. □

Supposons maintenant que $d \geq 2$. Nous fixons un ordre linéaire sur $U = \{1, \dots, m\}$. Pour un échantillon plein S, nous définissons la fonction $f_{\mathcal{M}}$ récursivement par $f_{\mathcal{M}}(S) = \{e_S, f_{\mathcal{M}(X)}(S \setminus \underline{X})\}$, où e_S est le plus petit élément de U tel que E_{e_S} touche le convexe $[S]$ et X est un cocircuit arbitraire de $\mathcal{M}$ tel que $e_S \in \underline{X}$ et $X \leq S$. D'après l'affirmation 3, X existe et d'après le lemme 61, nous avons $[S] \subseteq [X]$. Montrons que $f_{\mathcal{M}}$ satisfait les conditions (i) à (iv) du lemme 64. D'après l'affirmation 3, $S \setminus \underline{X}$ est un échantillon plein de $\mathcal{M}(X)$ sur lequel nous pouvons appliquer l'hypothèse d'induction.

Condition (i) : Si $e \in f_{\mathcal{M}}(S)$, alors soit $e = e_S$ soit $e \in f_{\mathcal{M}(X)}(S \setminus \underline{X})$. Dans le premier cas, E_e touche $[S]$ par choix de e_S, donc $e_S \in \text{osc}([S])$. Dans le second cas, par hypothèse d'induction, E_e touche $[S \setminus \underline{X}]$ dans le graphe de topes de $\mathcal{M}(X)$. Comme le graphe de topes de $\mathcal{M}(X)$ est isomorphe à $[X]$, E_e croise $[X]$ et donc $e \notin \underline{X}$. De plus, puisque $X \leq S$, d'après le lemme 61, $[S] \subseteq [X]$. Donc $[S \setminus \underline{X}]$ est isomorphe à $[S]$. Par conséquent, E_e touche $[S]$ dans G.

Condition (ii) : Supposons que $f_{\mathcal{M}}(S) = \{e_S, f_{\mathcal{M}(X)}(S \setminus \underline{X})\}$ ne soit pas pulvérisée par $\mathcal{M}$. Posons $D' = f_{\mathcal{M}(X)}(S \setminus \underline{X})$. Par hypothèse d'induction, D' est pulvérisé par $\mathcal{M}(X)$. Par conséquent, d'après le lemme 38, il existe un circuit Y de $\mathcal{M}$ tel que $\underline{Y} \subseteq \{e_S\} \cup D'$ et $e_S \in \underline{Y}$. D'un autre côté, nous avons $D' \subseteq X^0$ et $e_S \in \underline{X}$. Donc $\left|\underline{Y} \cap \underline{X}\right| = 1$. Comme X est un cocircuit et Y est un circuit, nous obtenons une contradiction avec le théorème 4 sur l'orthogonalité des circuits et des cocircuits dans les OMs.

Condition (iii) : Soit $e \notin \text{osc}([S])$. Alors $e \notin \text{osc}([S \setminus \underline{X}])$ dans $[X \setminus \underline{X}]$. Il en découle que $e \notin f_{\mathcal{M}}(S)$. De plus, d'après le lemme 23, contracter une Θ-classe qui ne touche pas $[S]$ ne peut pas donner une nouvelle Θ-classe qui touche $[S]$. Ainsi, d'après la définition de $f_{\mathcal{M}}$ et en utilisant l'hypothèse d'induction, nous avons $f_{\mathcal{M}}(S) = \{e_S, f_{\mathcal{M}(X)}(S \setminus \underline{X})\} = \{e_S, f_{\uparrow X \setminus (\underline{X} \cup \{e\})}(S \setminus (\underline{X} \cup \{e\}))\} = f_{\mathcal{M} \setminus e}(S \setminus e)$.

Condition (iv) : Soient S et S' deux échantillons pleins tels que $S_{|f_{\mathcal{M}}(S)} = S'_{|f_{\mathcal{M}}(S')}$. En particulier, $f_{\mathcal{M}}(S) = \{e_S, f_{\mathcal{M}(X)}(S \setminus \underline{X})\} = \{e_{S'}, f_{\mathcal{M}(X')}(S' \setminus \underline{X'})\} = f_{\mathcal{M}}(S')$. Par minimalité sur le choix des éléments e_S et $e_{S'}$, nous concluons qu'ils sont tous les deux respectivement les plus petits éléments des ensembles $f_{\mathcal{M}}(S)$ et $f_{\mathcal{M}}(S')$, d'où $e_S = e_{S'} =: e$. Cela signifie que $f_{\mathcal{M}(X)}(S \setminus \underline{X}) = f_{\mathcal{M}(X')}(S' \setminus \underline{X'}) =: D'$ et que pour les cocircuits X et X', les deux faces $\uparrow X \simeq \mathcal{M}(X)$ et $\uparrow X' \simeq \mathcal{M}(X')$ pulvérisent le même ensemble $D' \subseteq U$. Par le lemme 58, nous obtenons que $X = X'$ ou $X = -X'$. En effet, supposons que $X \neq X'$. Comme X et X' max-pulvérisent D', d'après le lemme 58(ii) $X = X \circ X'$ et $X' = X' \circ X$. D'après le lemme 58(iii) il existe une galerie géodésique entre $\uparrow X$ et $\uparrow X'$. Puisque X et X' sont des cocircuits de $\mathcal{M}$, $\uparrow X$ et $\uparrow X'$ sont des facettes de $\mathcal{M}$. Nous en déduisons que les faces $\uparrow X$ et $\uparrow X'$ doivent être consécutives dans la galerie et la face les contenant en tant que facettes doit coïncider avec $\mathcal{M}$. Donc, nous avons $X = -X'$.

Par ailleurs, $X = -X'$ ne peut pas arriver. En effet, comme $e \in \underline{X} \cap \underline{X'}$, nous avons $e \in$

$\mathrm{Sep}(X, X')$. De plus, comme $S \geq X$ et $S' \geq X'$, nous obtenons $S_e = -S'_e$. Cela contredit l'hypothèse $S_{|f_{\mathcal{M}}(S)} = S'_{|f_{\mathcal{M}}(S')}$. Par conséquent, $X = X'$. Donc $S, S' \geq X$ et d'après le lemme 61, nous avons $[S] \subseteq [X]$ et $[S'] \subseteq [X]$. D'après l'hypothèse d'induction, nous obtenons que $[S \setminus \underline{X}] = [S' \setminus \underline{X}]$ dans $[X]$. Cela signifie que $[S] \cap [X] = [S'] \cap [X]$, mais comme $[S] \subseteq [X]$ et $[S'] \subseteq [X]$, nous concluons que $[S] = [S']$. □

6.6. Lemme de localisation

L'objectif du *lemme de localisation* est d'indiquer pour tout échantillon réalisable S d'un COM $\mathcal{M}$ l'ensemble des covecteurs potentiels X tels que les faces $\uparrow X$ contiennent des topes T de $\mathcal{M}$ qui pourront être utilisés par le reconstructeur.

Soit $\mathcal{M} = (U, \mathcal{L})$ un COM de VC-dimension d et soit $S \in \downarrow\mathcal{L}$ un échantillon de $\mathcal{M}$. Considérons le tope $S' = S \setminus S^0$ du COM $\mathcal{M}' := \mathcal{M} \setminus S^0$ et considérons X' un covecteur minimal de $\mathcal{M}'$ par rapport à l'ordre des vecteurs signés tel que $S' \geq X'$. Observons que si $\mathcal{M}'$ est un OM, alors $X' = \mathbf{0}$ et $\uparrow X' = \mathcal{M}'$. Par la proposition 14, le OM $\mathcal{M}'(X') \simeq \uparrow X'$ est de VC-dimension $\leq d$. Posons

$$\mathcal{H}_{S,X'} := \{X \in \mathcal{L} : X \setminus S^0 = X' \text{ et } \mathcal{M}(X) \text{ a la même VC-dimension que } \mathcal{M}'(X')\}.$$

Soit $D \subseteq U \setminus S^0$ un ensemble de taille $d' = \text{VC-dim}(X')$ pulvérisé par l'OM $\mathcal{M}'(X')$. Posons aussi

$$\mathcal{H}_D := \{X \in \mathcal{L} : \mathcal{M}(X) \text{ max-pulvérise } D\}.$$

Lemme 65. *Soit $S \in \downarrow\mathcal{L}$ et soit X' un covecteur minimal de $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \setminus S^0$ tel que $S \setminus S^0 = S' \geq X'$. Si $D \subseteq U$ est pulvérisé par $\mathcal{M}'(X') = \uparrow X'$, alors $\emptyset \neq \mathcal{H}_{S,X'} = \mathcal{H}_D$.*

Démonstration. D'après le lemme 10, il existe un covecteur $X \in \mathcal{L}$ tel que $X \setminus S^0 = X'$. De plus, si $\mathcal{M}'(X') = \uparrow X'$ pulvérise D, alors $\mathcal{M}(X)$ pulvérise aussi D car le graphe de topes de $\mathcal{M}'(X')$ est un pc-mineur du graphe de topes de $\mathcal{M}(X)$. Supposons que $\mathcal{M}(X)$ pulvérise un sur-ensemble de D. Alors il y a un covecteur $Y \geq X$ de $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M}(Y)$ pulvérise D. Ainsi, $Y \setminus S^0 \geq X \setminus S^0 = X'$, mais $\mathcal{M}'(Y \setminus S^0)$ et $\mathcal{M}'(X')$ ont la même VC-dimension, donc par la proposition 14, $Y \setminus S^0 = X'$. Par conséquent, $Y \in \mathcal{H}_{S,X'}$. En particulier, nous avons montré que tout élément de $\mathcal{H}_{S,X'}$ pulvérise D et $|D|$ est sa VC-dimension. Donc tout élément de $\mathcal{H}_{S,X'}$ max-pulvérise D. Nous concluons que $\mathcal{H}_{S,X'} \subseteq \mathcal{H}_D$.

Il reste à montrer l'inclusion inverse $\mathcal{H}_D \subseteq \mathcal{H}_{S,X'}$. Considérons $Y \in \mathcal{H}_D \setminus \mathcal{H}_{S,X'}$. Posons $Y' = Y \setminus S^0$. Par hypothèse, nous avons que $X' \neq Y'$. Comme $\mathcal{M}(Y)$ max-pulvérise D et que $D \subseteq \underline{S}$, $\mathcal{M}'(Y')$ max-pulvérise aussi D. En particulier, $D \subseteq X'^0 \cap Y'^0 = (X' \circ Y')^0$. D'après le lemme 30, les faces $[X']$ et $[Y']$ sont portées. Nous obtenons donc que les sommets de la projection métrique $\mathrm{pr}_{[Y']}([X'])$ de $[Y']$ sur $[X']$ sont exactement les portes des sommets de $[Y']$ dans $[X']$. Par la proposition 26(iii), $\mathrm{pr}_{[Y']}([X']) = [X' \circ Y']$. Il en découle que $[X' \circ Y']$ est un sous-graphe porté de $[X']$, $[X' \circ Y']$ est intersecté par D, et D est pulvérisé par $[X']$. Par

le lemme 34, la VC-dimension de $\mathscr{M}'(X' \circ Y')$ est au moins $|D|$, qui est la VC-dimension de $\mathscr{M}'(X')$. De la proposition 14, nous obtenons que $X' \circ Y' = X'$.

Si $\mathrm{Sep}(X', Y') = \varnothing$, alors $\uparrow X' = \uparrow(X' \circ Y') \subseteq \uparrow Y'$. Comme $\uparrow X'$ est une face maximale de $\mathscr{M}'$, nous avons $X' = Y'$. Sinon, si $\mathrm{Sep}(X', Y') \neq \varnothing$, alors en appliquant le lemme 58, il existe une galerie géodésique $(\uparrow X' = \uparrow X_0, \uparrow X_1, \ldots, \uparrow X_k = \uparrow Y')$ à partir de $\uparrow X'$ jusqu'à $\uparrow Y'$ dans $\mathscr{M}'$. D'après la définition d'une galerie, l'union de $\uparrow X'$ et de $\uparrow X_1$ est une face $\uparrow Z$ de $\mathscr{M}'$ telle que $\uparrow X' \subsetneq Z$. Donc $\uparrow X'$ n'est pas une face maximale de $\mathscr{M}'$ et contredit notre hypothèse que X' est un covecteur minimal de $\mathscr{M}'$. □

6.7. Preuve du théorème 14

Dans cette sous-section, nous décrivons les fonctions de compression et de reconstruction avant de prouver leur correction. La fonction de compression α est une généralisation de la fonction de compression des classes amples de MORAN et WARMUTH [68]. Cependant, la fonction de reconstruction β est plus technique que celle pour les classes amples.

Compression

Soit $\mathscr{M} = (U, \mathscr{L})$ un COM de VC-dimension d. Pour un échantillon donné $S \in \downarrow\mathscr{L}$ de $\mathscr{M}$, considérons le tope $S' = S \setminus S^0$ de $\mathscr{M} \setminus S^0 =: \mathscr{M}'$ et posons X' un covecteur minimal de $\mathscr{M}'$ par rapport à l'ordre des vecteurs signés tel que $S' \geq X'$. Observons que si $\mathscr{M}'$ est un OM, alors $\uparrow X' = \mathscr{M}'$. Dénotons par $\mathscr{M}'(X')$ l'OM défini par la face $\uparrow X'$ de $\mathscr{M}'$. Plus formellement, $\mathscr{M}'(X') = \uparrow X' \setminus \underline{X'}$. Posons

$$\alpha(S)_e = \begin{cases} S_e & \text{si } e \in f_{\mathscr{M}'(X')}(S'), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction α est bien définie car S' est un tope de $\mathscr{M}'(X')$ et donc l'échantillon S' est plein dans $\mathscr{M}'$. De plus, d'après la définition, nous avons $\alpha(S) \leq S$, d'où $\alpha(S) \in \downarrow\mathscr{L}$. Pour terminer, par la proposition 14, l'OM $\mathscr{M}'(X')$ est de VC-dimension au plus d et donc en utilisant le lemme de distinction 64 le support de $\alpha(S)$ est de taille $\leq d$.

Reconstruction

Pour définir la fonction de reconstruction β, prenons $C \in \{-1, 0, +1\}^U$ dans l'image de α et posons $D := \underline{C}$. Soit X un covecteur arbitraire de $\mathscr{H}_D$, *i.e.*, X est un covecteur de $\mathscr{L}$ qui max-pulvérise D. Par le lemme 65, un tel X existe. Maintenant, considérons $\widetilde{S} \in \downarrow\mathscr{L}$ un échantillon satisfaisant les conditions suivantes :

(1) $\widetilde{S} \geq X$;

(2) $\mathrm{Sep}(\widetilde{S}, C) = \varnothing$;

(3) $\widetilde{S}$ est plein dans $\mathscr{M}(X)$;

(4) $f_{\mathscr{M}(X)}(\widetilde{S}) = D$.

Finalement, posons $\beta(C)$ comme n'importe quel tope T de $\mathscr{M}$ avec $T \geq \widetilde{S}$.

Ensuite, nous montrons que la fonction β est bien définie en définissant un échantillon canonique satisfaisant les conditions (1) à (4). Soit $C = \alpha(S)$ pour un échantillon $S \in \downarrow \mathscr{L}$. Posons $D = \underline{C}$ et considérons $X \in \mathscr{H}_D$. D'après le lemme 65, X vérifie $X \setminus S^0 = X'$, où X' est le covecteur minimal de $\mathscr{M}' = \mathscr{M} \setminus S^0$ choisi dans la définition de $\alpha(S)$. Posons $\widehat{S} := X \circ S \geq X$.

Affirmation 4. L'échantillon $\widehat{S}$ satisfait les conditions (1) à (4) de la définition de β. De plus, $[\widehat{S}] = [X] \cap [S]$ et $\widehat{T} \geq S$ pour tout tope $\widehat{T} \in [\widehat{S}]$.

Démonstration. Soit $C = \alpha(S)$ pour $S \in \downarrow \mathscr{L}$. Comme $X \setminus S^0 = X' \leq S' = S \setminus S^0$, nous avons $\mathrm{Sep}(X, S) = \varnothing$. Par le lemme 62, $[\widehat{S}] = [X] \cap [S]$ est un sous-graphe convexe propre de $[X]$. Puisque $X \setminus \widehat{S}^0 = X'$ et que $\mathscr{M}(X)$ et $\mathscr{M}'(X')$ ont la même VC-dimension $|D|$, l'échantillon $\widehat{S}$ est plein dans $\mathscr{M}(X)$.

Comme $[\widehat{S}] = [X] \cap [S]$, $\mathrm{osc}([\widehat{S}]) \subseteq \mathrm{osc}([X]) \cup \mathrm{osc}([S])$. Sachant que $S^0 \cap \mathrm{osc}([S]) = \varnothing$, aucun élément de S^0 touche $[\widehat{S}]$ dans $[X]$. Il en découle que X' et S' peuvent être obtenus à partir de X et de $\widehat{S}$ en supprimant les éléments de S^0 et d'après le lemme 64(iii), nous avons $f_{\mathscr{M}(X)}(\widehat{S}) = f_{\mathscr{M}'(X')}(S') = D$. Puisque $[\widehat{S}] = [X] \cap [S] \neq \varnothing$, cette intersection contient au moins un tope et donc $\beta(C)$ est bien définie. De plus, pour tout tope $\widehat{T} \in [\widehat{S}]$, nous avons $\widehat{T} \geq S$ car $[\widehat{S}] = [X] \cap [S]$. □

Correction

Ici, nous montrons que la paire (α, β) définit un schéma de compression étiqueté.

Affirmation 5. Pour tout $S \in \downarrow \mathscr{L}$, $\beta(\alpha(S)) \geq S$.

Démonstration. Nous devons montrer que pour n'importe quel choix de $\widetilde{S}$ vérifiant les conditions (1) à (4) dans la définition de β et pour n'importe quel choix de tope $\widetilde{T} \in [\widetilde{S}]$, nous avons $\widetilde{T} \geq S$. Pour prouver cela, nous allons montrer que $[\widetilde{S}] = [\widehat{S}]$, où $\widehat{S}$ est l'échantillon canonique définit dans l'affirmation 4. Puisque cela implique que $\widetilde{T} \in [\widehat{S}]$, par la deuxième partie de l'affirmation 4 nous obtiendrons $\widetilde{T} \geq S$.

Donc, supposons que $\widetilde{S}$ et $\widetilde{S}'$ sont deux échantillons qui vérifient les conditions (1) à (4). À savoir, $\widetilde{S}$ et $\widetilde{S}'$ sont des échantillons pleins de $\mathscr{M}(X)$ tels que $\widetilde{S}, \widetilde{S}' \geq X$, $\mathrm{Sep}(\widetilde{S}, C) = \mathrm{Sep}(\widetilde{S}', C) = \varnothing$, et $f_{\mathscr{M}(X)}(\widetilde{S}) = f_{\mathscr{M}(X)}(\widetilde{S}') = D$. D'après le lemme de distinction 64 appliqué à $\mathscr{M}(X)$, nous avons $[\widetilde{S}] = [\widetilde{S}']$. Ceci prouve que tous les échantillons $\widetilde{S}$ valides pour β donnent le même sous-graphe convexe (non vide) $[\widetilde{S}] = [\widehat{S}] = [X] \cap [S]$. Comme $\widehat{T} \geq S$ pour tout tope $\widehat{T}$ de $[\widehat{S}]$, nous concluons que pour n'importe quel choix de $\widetilde{T} \in [\widetilde{S}]$ pour $\beta(\alpha(S))$, nous avons $\widetilde{T} \geq S$. Par conséquent, $\beta(\alpha(S)) \geq S$. □

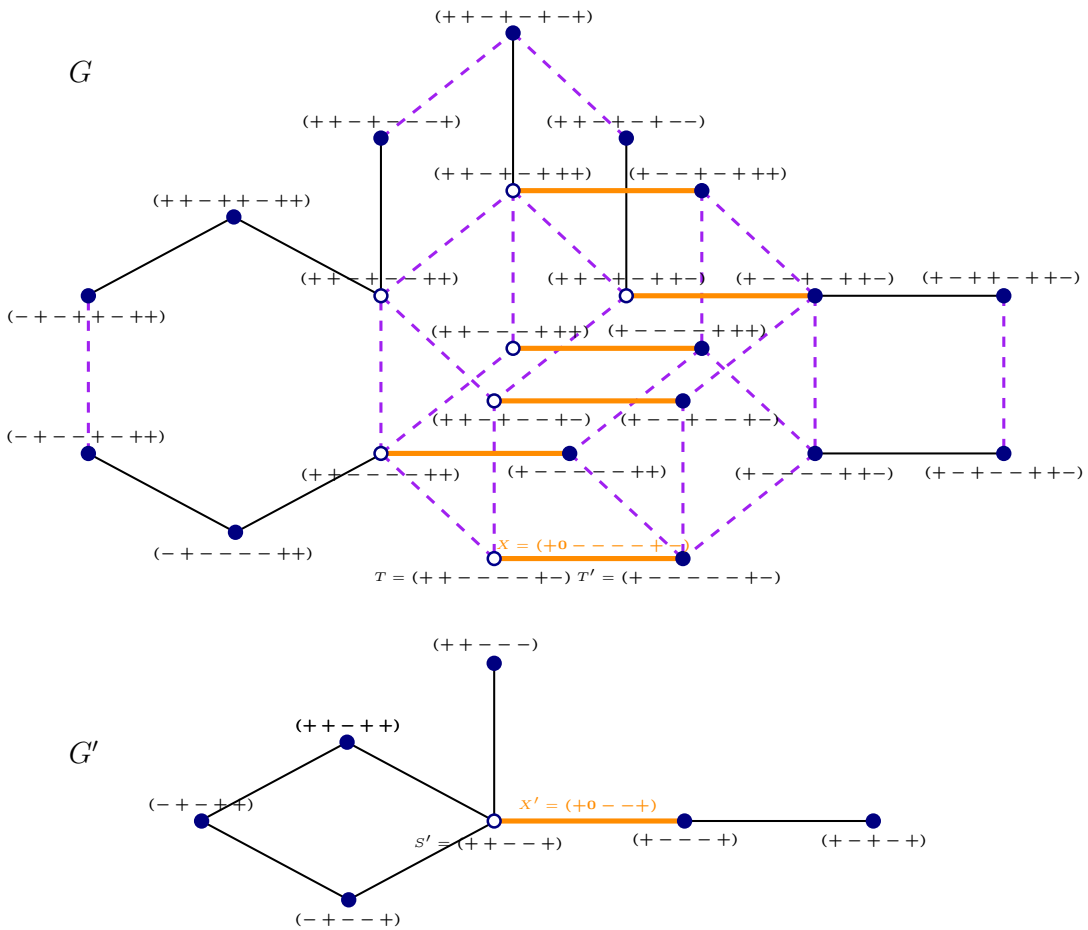


FIGURE 6.3. – Pour compresser l'échantillon réalisable $S = (++-0-0+0)$ (les sommets de $[S]$ sont représentés en blanc dans le graphe de topes G), le compresseur choisi $X' = (+0--+) \leq S' = S \setminus S^0$ dans G' et retourne $\alpha(S) := (0+000000)$ avec $D = \{2\}$. Le reconstructeur reçoit $C = (0+000000)$, et sélectionne $X = (+0-----+-) \in \mathscr{H}_D$ (les éléments de $\mathscr{H}_D$ sont représentés par des arêtes oranges en gras dans G) et retourne $\beta(C) = T = (++-----+-) \geq S$.

6.8. Exemple

Considérons le graphe de topes G d'un COM $\mathscr{M}$ de VC-dimension 3 et un échantillon réalisable $S = (++-0-0+0)$ dans la figure 6.3. $[S]$ est induit par les 7 topes représentés par des sommets blancs de G. Contractées les 3 Θ-classes en pointillées correspondant aux coordonnées $\{4,6,8\} = S^0$, donne le graphe de topes G' du COM $\mathscr{M}' = \mathscr{M} \setminus S^0$. Donc, $S' = S \setminus S^0 = (++--+)$. Le compresseur choisi un covecteur minimal $X' = (+0--+)$ de $\mathscr{M}'$ avec $S' \geq X'$. Le covecteur X' correspond à l'arête en gras orange dans G'. Le compresseur renvoie $\alpha(S) = (0+000000)$ et $D = \{2\}$.

Le reconstructeur reçoit $C = (0+000000) = \alpha(S)$ en entrée, pose $D = \underline{C} = \{2\}$, et construit l'ensemble $\mathscr{H}_D$. Dans cet exemple, il y a six covecteurs de $\mathscr{M}$ appartenant à $\mathscr{H}_D$ qui sont représentés par des arêtes en gras orange dans G. En utilisant le lemme de localisation,

($\mathscr{H}_D = \mathscr{H}_{S,X'}$), ce sont les covecteurs qui ont la même VC-dimension que X' et qui sont d'accord avec X' sur $\{1,2,3,5,7\} = \underline{S}$.

Le reconstructeur choisi $X = (+0----+-) \in \mathscr{H}_D$. L'OM $\mathscr{M}(X)$ est composé des trois covecteurs (X et les extrémités T et T' de l'arête orange correspondante). Parmi T et T', uniquement le tope $T = (++-----+-)$ vérifie les conditions (1) à (4) de la définition de β. Donc, $\beta(\alpha(S))$ est fixé à T, qui est un sommet blanc de G.

7. Grilles et cylindres partiels

Sommaire

7.1 Résultats 117
7.2 Grille partielle 119
7.3 Preuve du théorème 15 121
7.4 Cylindres 121
7.5 Propriétés des cylindres partiels 123
7.6 Cubes partiels de $\mathscr{F}^*(\mathscr{J})$ avec un cycle convexe long 124
7.6.1 Les candidats sont longs 124
7.6.2 Les candidats sont dans l'arène 126
7.6.3 Structure des cubes partiels de $\mathscr{F}^*(\mathscr{J})$ avec un cycle convexe long 130
7.6.4 Plongement 136
7.7 Preuve du théorème 16 137
7.8 Vers une preuve pour les cylindres fins 138

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés aux cubes partiels plongeables isométriquement dans la grille $\mathbb{Z}^2$ et dans les cylindres pairs, *i.e.*, les produits cartésiens d'un cycle pair par un chemin. De tels sous-graphes sont respectivement appelés *grilles partielles* et *cylindres partiels*. Nous les caractérisons par sous-graphes isométriques minimaux interdits. De plus, nous donnons la liste des pc-mineurs minimaux exclus des grilles partielles.

7.1. Résultats

Nous commençons par étudier la structure des cubes partiels plongeables dans la grille $\mathbb{Z}^2$. Nous donnons la caractérisation suivante :

Théorème 15. *Soit G un cube partiel. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G admet un plongement isométrique dans $\mathbb{Z}^2$;

(ii) Pour tout G' pc-mineur de G, G' ne contient ni C_6, ni $K_{1,5}$, ni $K_{1,3}\square K_2$ comme sous-graphe isométrique, i.e., $G \in \mathscr{F}^*(C_6, K_{1,5}, K_{1,3}\square K_2)$;

(iii) G est un graphe médian sans cubes appartenant à $\mathscr{F}^*(K_{1,5}, K_{1,3}\square K_2)$;

(iv) G ne contient aucun des cubes partiels de $\mathscr{H}$ comme pc-mineurs, i.e., $G \in \mathscr{F}(\mathscr{H})$.

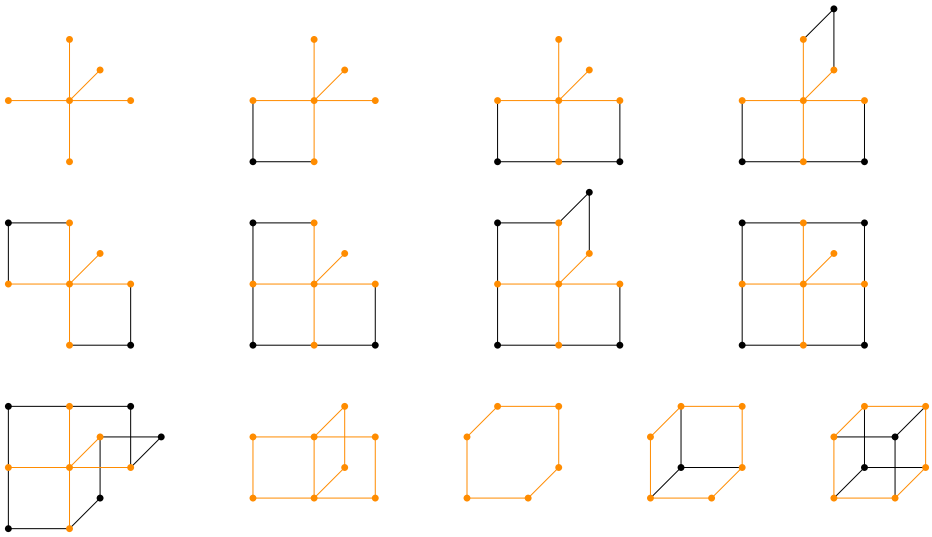


FIGURE 7.1. – L'ensemble $\mathscr{H}$ des pc-mineurs minimaux exclus des grilles partielles.

Nous nous intéressons ensuite aux cylindres partiels. Nous fournissons une caractérisation structurelle et nous présentons l'ensemble $\mathscr{J}$ (illustré dans la figure 7.2) des sous-graphes isométriques interdits de ces derniers.

Théorème 16. *Soit G un cube partiel avec un cycle convexe C de longueur $2m$ avec $m \geq 3$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *G est plongeable isométriquement dans un cylindre $\Gamma := C \square P_n$ avec $n \geq 1$;*
2. *$G \in \mathscr{F}^*(\mathscr{J})$;*
3. *G est de la forme $G_1 \circledcirc (C \square P) \circledcirc G_2$ où :*
   — *$C \square P$ est une arène;*
   — *G_1 et G_2 sont des colisées de base au plus m ;*
   — *les amalgames de G_1 et G_2 se font respectivement sur les cycles $C^\top$ et $C^\perp$ de l'arène.*

Tout d'abord, dans la section 7.2, nous nous intéressons aux grilles partielles. Ensuite, dans la section 7.3, nous démontrons les caractérisations des grilles partielles données dans le théorème 15. Dans les sections 7.4 et 7.5, nous étudions respectivement les structures des cylindres et des cylindres partiels. Puis, dans la section 7.6, nous montrons que les cubes partiels et leurs pc-mineurs ne contenant pas de sous-graphes isométriques de $\mathscr{J}$ peuvent s'écrire comme une amalgamation de deux colisées et d'une arène. De plus, nous démontrons que cette construction est plongeable isométriquement dans un cylindre. Dans la section 7.7, nous démontrons le théorème 16, avant de conclure sur une approche pour caractériser les cubes partiels plongeables dans les cylindres fins qui devrait aboutir dans la section 7.8.

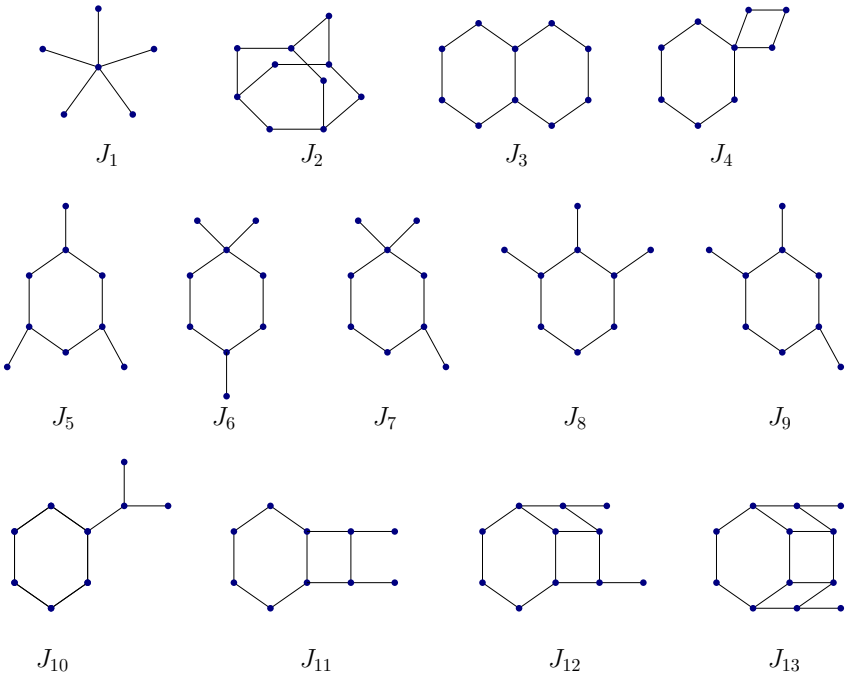


FIGURE 7.2. – L'ensemble $\mathscr{J}$ des sous-graphes isométriques minimaux interdits dans les pc-mineurs des cylindres partiels contenant un cycle convexe de longueur au moins 6.

7.2. Grille partielle

Les espaces métriques plongeables dans $\mathbb{R}^2$ avec métrique ℓ_1 ont été caractérisés par BANDELT et CHEPOI [7] par un théorème de compacité. En effet, ils montrent que tout espace métrique est plongeable isométriquement dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si tout sous-espace d'au plus 6 points l'est. En particulier, leur preuve passe par une réduction aux graphes médians. Par la suite, dans l'article [8], ils montrent que les espaces métriques de $\mathbb{Z}^2$ peuvent être caractérisés de la même manière que ceux de $\mathbb{R}^2$. Un demi-espace H d'un graphe G est dit *minimal* (par inclusion) s'il n'existe pas de demi-espace H' dans G tel que $H' \subset H$.

Proposition 27. *[7, 8] Un graphe est plongeable isométriquement dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement s'il est médian et chacun de ses pc-mineurs admet au plus 4 demi-espaces minimaux.*

Dans [7], BANDELT et CHEPOI présentent les mineurs métriques exclus de $\mathbb{Z}^2$. Dans la cette section, nous allons caractériser les grilles partielles par un ensemble $\mathscr{H}$ (illustré dans la figure 7.1) de pc-mineurs exclus minimaux, et par sous-graphes isométriques interdits.

Un segment de la forme $((a,b),(a,b+1))$ ou $((a,b),(a+1,b))$ dans $\mathbb{Z}^2$ est appelé une arête. Introduisons la relation binaire $\mathscr{R}$ sur les arêtes de $\mathbb{Z}^2$. Deux arêtes e et f de $\mathbb{Z}^2$ sont en relation, *i.e.*, $e\mathscr{R}f$ si et seulement si e et f sont opposées dans un carré. La clôture transitive de $\mathscr{R}$ constitue les classes de parallélisme. Observons que dans un cube partiel plongé isométriquement dans $\mathbb{Z}^d$, les classes de parallélisme coïncident avec les Θ-classes. Une

chaîne d'une grille $\mathbb{Z}^d$ est la suite infinie de toutes les arêtes parallèles le long d'un même axe. Une chaîne d'un cube partiel G plongé dans $\mathbb{Z}^d$ est la restriction de la chaîne de $\mathbb{Z}^d$ correspondante dans le plongement de G. De plus, nous pouvons décrire une chaîne de G par la suite ordonnée des Θ-classes qui la composent.

Remarque 4. Une grille $\mathbb{Z}^d$ contient exactement d chaînes distinctes qui sont induites par les d axes de $\mathbb{Z}^d$et tous les sommets de $\mathbb{Z}^d$ ont exactement degré $2d$.

Tout cube partiel G peut être associé à son *graphe de croisement* dont les sommets sont les Θ-classes de G, et deux sommets sont adjacents si les Θ-classes correspondantes intersectent un même cycle de G.

Lemme 66. *Si G est un graphe médian sans cube appartenant à $\mathscr{F}^*(K_{1,5}, K_{1,3}\square K_2)$, alors G a au plus quatre demi-espaces minimaux.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe un cube partiel minimal G avec au moins cinq demi-espaces minimaux. Ainsi tout pc-mineurs de G a au plus quatre demi-espaces minimaux. Par minimalité de G, nous déduisons que G a au plus six demi-espaces minimaux. En effet, toute contraction ou restriction par rapport à une Θ-classe de G est un graphe médian et son nombre de demi-espaces minimaux est diminué d'au plus deux.

Par un raisonnement analogue, en utilisant la minimalité de G, nous obtenons que pour chaque Θ-classe de G, il existe au moins un demi-espace qui est minimal. Par conséquent, G est un sous-graphe de Q_3, Q_4 ou Q_5. Nous pouvons commencer par constater que pour tout triplet de Θ-classes dans G, elles ne peuvent pas se croiser deux à deux. En effet, G contiendrait un cycle de longueur ≥ 6 et puisque G est médian, l'enveloppe convexe d'un tel cycle serait un cube. Nous distinguons les cas trois cas qui suivent en fonction du nombre de Θ-classes de G.

Cas 1. G est un sous-graphe de Q_3. Alors G est composé de trois Θ-classes. Nous avons vu que ces trois Θ-classes ne se croisent pas deux à deux dans G. Supposons donc que deux d'entre elles, disons E_i et E_j, ne se croisent pas dans G. Sans perte de généralité, nous avons $G_i^+ \subset G_j^+$ et $G_j^- \subset G_i^-$. Les deux demi-espaces G_j^+ et G_i^- ne sont donc pas minimaux dans G. Nous concluons que G a strictement moins de cinq demi-espaces minimaux. Contradiction.

Cas 2. G est un sous-graphe de Q_4. Ici nous réalisons une étude de cas. Comme G est composé des quatre Θ-classes de Q_4, nous pouvons donc énumérer l'ensemble des graphes de croisement pour ces Θ-classes. Puisque tout triplet de Θ-classes dans G ne peuvent pas se croiser deux à deux, nous pouvons nous restreindre aux graphes de croisement ne contenant pas de triangle. À chacun de ces graphes de croisement, nous énumérons l'ensemble des cubes partiels qui lui sont associé, voir l'annexe A. En analysant les différents cubes partiels obtenus, soit G possède au plus quatre demi-espaces minimaux, soit G contient $K_{1,5}$ ou $K_{1,3}\square K_2$ comme sous-graphe isométrique et obtenons une contradiction.

Cas 3. G est un sous-graphe de Q_5. Ici nous raisonnons de la même manière que dans le cas 2. Les graphes de croisement sans triangle sur cinq Θ-classes et les cubes partiels associés sont

donnés dans l'annexe A. Les cubes partiels obtenus ont soit au plus quatre demi-espaces minimaux soit un $K_{1,5}$ ou un $K_{1,3}\square K_2$ comme sous-graphe isométrique, ce qui termine la preuve de ce lemme. $\square$

Remarque 5. L'ensemble $\mathscr{H}$ des pc-mineurs exclus des grilles partielles a été construit comme suit. D'après le théorème 15(ii), nous savons que les cubes partiels plongeables dans $\mathbb{Z}^2$ appartiennent à la classe $\mathscr{F}^*(C_6, K_{1,5}, K_{1,3}\square K_2)$. D'après le lemme 19, nous pouvons énumérer l'ensemble des sous-graphes de Q_3, Q_4 et Q_5 qui contiennent respectivement $C_6, K_{1,3}\square K_2$ et $K_{1,5}$ comme sous-graphe isométrique, et garder dans $\mathscr{H}$ les minimaux par pc-mineurs.

7.3. Preuve du théorème 15

Pour commencer, nous montrons l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii). D'après la remarque 4, dans la grille $\mathbb{Z}^2$, tous les sommets sont de degré 4 et il y a exactement deux chaînes de Θ-classes. Ainsi, il n'existe pas de plongement de C_6, $K_{1,5}$ et $K_{1,3}\square K_2$ dans $\mathbb{Z}^2$. De plus, s'il existe un plongement de G dans $\mathbb{Z}^2$, alors ses pc-mineurs sont aussi plongeables dans $\mathbb{Z}^2$. Les cubes partiels C_6, $K_{1,5}$ et $K_{1,3}\square K_2$ sont donc des sous-graphes isométriques interdits de G et de ses pc-mineurs. Pour montrer que (ii) $\Rightarrow$ (iii), observons que Q_3^- et Q_3 contiennent un cycle isométrique de longueur 6 comme sous-graphe isométrique. Nous en déduisons que $G \in \mathscr{F}(C_6, Q_3^-, Q_3)$. Par un résultat de CHEPOI, KNAUER et MARC [28], cette classe correspond exactement à la classe des graphes médians sans cubes. L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) vient du lemme 66 et de la proposition 27. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iv) est évidente car tous les cubes partiels de $\mathscr{H}$ possèdent un C_6, un $K_{1,5}$, ou un $K_{1,3}\square K_2$ comme sous-graphe isométrique. Nous mettons en évidence en orange sur la figure 7.1 les sous-graphes isométriques interdits pour chacun des graphes de $\mathscr{H}$. Enfin, pour montrer l'implication (iv) $\Rightarrow$ (iii), rappelons que la classe $\mathscr{F}(C_6, Q_3^-, Q_3)$ correspond à la classe des graphes médians sans cubes. Donc G est un graphe médian sans cubes. Supposons par l'absurde qu'il existe un pc-mineur G' de G contenant un sous-graphe isométrique H isomorphe à $K_{1,5}$ ou à $K_{1,3}\square K_2$. Considérons le cube partiel G'' résultant des contractions de toutes les Θ-classes de G' qui n'intersectent pas H. Le graphe G'' est donc contenu dans Q_5 ou Q_4 selon que H soit isomorphe à $K_{1,5}$ ou à $K_{1,3}\square K_2$. D'après la remarque 5, G'' est contenu dans $\mathscr{H}$. Or, G'' est un pc-mineur de G, contradiction. $\square$

7.4. Cylindres

Considérons un cylindre $\Gamma := C_{2m}\square P_n$. D'après le lemme 1 sur les distances, observons que nous pouvons successivement nous déplacer sur une C_{2m}-copie, puis sur une P_n-copie (ou vice-versa) dans Γ. Nous en déduisons que toutes les C_{2m}- et toutes les P_n-copies de G sont portées. Remarquons que les C_{2m}-copies et les P_n-copies sont aussi des couches de Γ. Aussi, les sommets d'un cycle et d'un chemin sont de degré au plus 2. Sachant que

chaque sommet de Γ est sur une couche cycle et sur une couche chemin, il en découle que les sommets de Γ sont de degré au plus 4.

Dans Γ, un cycle isométrique de longueur > 4 est dit *de type* 1 s'il est une C_{2m}-copie et il est dit *de type* 2 s'il intersecte exactement la moitié de deux C_{2m}-copies consécutives, voir figure 7.3. Nous montrons dans le lemme 67 que tout cycle isométrique de Γ est d'un de ces types.

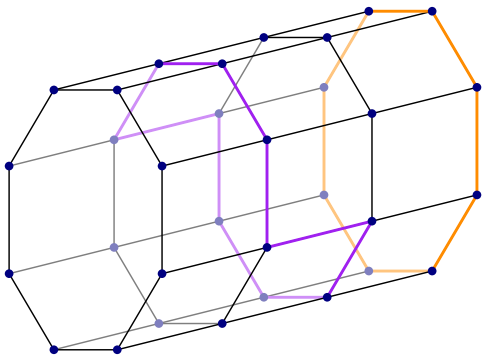


FIGURE 7.3. – Un exemple de cycle de type 1 en orange et de type 2 en violet d'un cylindre $C_8 \square P_3$

Lemme 67. *Tout cycle isométrique de longueur* > 4 *d'un cylindre* $\Gamma := C_{2m} \square P_n$ *est soit de type* 1, *soit de type* 2.

Démonstration. Soit C un cycle isométrique de Γ. Alors, pour toute Θ-classe de C, il existe exactement deux arêtes opposées. Supposons par l'absurde que C utilise deux arêtes xy et zt appartenant respectivement à deux Θ-classes distinctes E_i et E_j de P_n. Comme C est isométrique, il existe deux autres arêtes $x'y'$ et $z't'$ dans C appartenant respectivement à E_i et E_j. Il en découle que E_i et E_j se croisent dans Γ, ce qui est impossible car elles proviennent du chemin P_n. Nous concluons que C utilise au plus une Θ-classe de P_n. Ainsi, C est soit une C_{2m}-copie, donc de type 1, soit sur deux C_{2m}-copies consécutives tel que les arêtes appartenant à une même Θ-classe sont opposées, donc de type 2. $\square$

Rappelons qu'un sous-graphe convexe H touche une Θ-classe E_i si E_i n'intersecte pas H et s'il existe une arête uv de E_i avec $u \in H$ et $v \notin H$. Nous regroupons les propriétés structurelles d'un cylindre dans la proposition suivante :

Proposition 28. *Soit* $\Gamma := C_{2m} \square P_n$. *Alors :*

1. *Le degré de tout sommet* v *de* Γ *est au plus* 4 *;*
2. *Toute* C_{2m}*-copie de* Γ *est portée ;*
3. *Pour tout sommet* $v \in V(\Gamma)$, $Fib_{C_{2m}}(v)$ *est isomorphe à* P_n *;*
4. *Tout cycle facteur de* Γ *touche au plus deux* Θ*-classes.*

7.5. Propriétés des cylindres partiels

Lemme 68. *Soit G une grille partielle. Alors il existe un cylindre Γ suffisamment grand tel que G soit un cylindre partiel de Γ.*

Soit G un cube partiel plongeable isométriquement dans un cylindre Γ. Dénotons le cycle facteur C_{2m} par $\{c_1, \dots, c_{2m}\}$, le chemin facteur P_n par $\{p_1, \dots, p_{n+1}\}$, et les sommets de Γ par les 2-uplets (k, i) où $c_k \in V(C_{2m})$ et $p_i \in V(P_n)$. Deux cycles de longueur > 4 sont dits *parallèles* s'ils intersectent le même ensemble de Θ-classes. Soit C un cycle convexe de longueur > 4 de G. S'il existe un autre cycle $C' \neq C$ convexe de longueur > 4 dans G, alors nous affirmons dans le lemme qui suit que C et C' ont la même longueur et sont parallèles.

Lemme 69. *Soit G un cube partiel plongeable isométriquement dans un cylindre $\Gamma := C_{2m} \square P_n$. S'il existe deux cycles convexes distincts C et C' de longueur > 4 dans G, alors C et C' ont la même longueur et sont parallèles.*

Démonstration. Les cycles C et C' étant convexes, ils sont en particulier isométriques dans G. De plus, d'après le lemme 67, puisque G est plongeable dans un cylindre, C et C' sont de type 1 ou de type 2. Observons que les cycles de type 1 sont de longueur $2m$ et ceux de type 2 de longueur $2m+2$.

Dans un premier temps, supposons que C et C' ne sont pas de la même longueur. Sans perte de généralité, considérons C de type 1 et C' de type 2. Puisque C' est convexe, l'intersection entre G et les deux C_{2m}-copies de Γ qui contiennent C' correspond exactement à C'. Autrement dit, l'ensemble des sommets représentés en rouge sur la figure 7.4 ne sont pas dans G. Alors, il existe deux sommets $(k, i) \in C'$ et $(k, j) \in C$ appartenant à la même fibre $\mathrm{Fib}_{C_{2m}}(c_k)$ tels que le sommet $(k, i+1)$ n'est pas dans G.

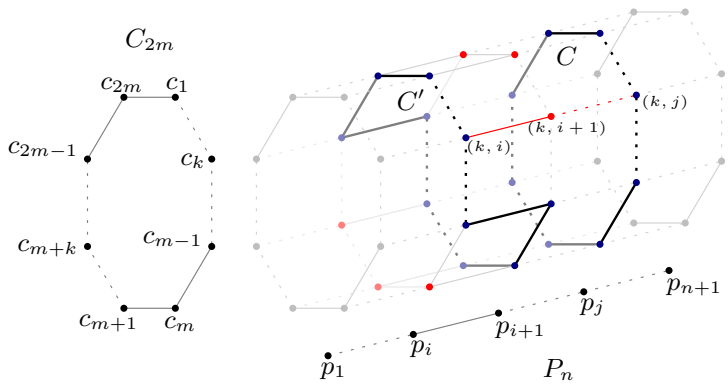


FIGURE 7.4. – Illustration de la preuve du lemme 69

Comme l'unique plus court chemin entre les deux sommets (k, i) et (k, j) dans Γ passe par $(k, i+1)$ et comme G est plongé isométriquement dans Γ, si $(k, i+1) \notin V(G)$, alors G n'est pas un cube partiel, contradiction.

Dans un second temps, supposons que C et C' sont de même longueur. Par un raisonnement similaire, nous pouvons montrer que dans le cas où C et C' sont deux cycles de type 2 nous obtenons aussi une contradiction avec le fait que G soit un cube partiel. Enfin, si C et C' sont de type 1, alors ce sont deux C_{2m}-copies. Ils sont donc de même longueur et parallèles. □

Puisque les pc-mineurs d'un cycle sont des cycles ou des chemins et que les pc-mineurs d'un chemin sont des chemins, en utilisant le lemme 26, nous obtenons que les pc-mineurs des cylindres sont des cylindres ou des plans. De plus, nous pouvons vérifier que tout sous-graphe isométrique d'un cylindre partiel est un cylindre partiel. Par conséquent, nous obtenons :

Lemme 70. *Les cylindres partiels sont clos par pc-mineurs et par sous-graphes isométriques.*

7.6. Cubes partiels de $\mathscr{F}^*(\mathscr{J})$ avec un cycle convexe long

Soit G un cube partiel. Un cycle est dit *long* s'il est de longueur $2m > 4$, et *court* sinon. Un cycle convexe C de G est dit *candidat* pour plonger G dans un cylindre $\Gamma := C_{2m} \square P_n$, pour un certain n, s'il vérifie les trois conditions qui suivent :

1. C est porté ;
2. pour tout $v \in V(C)$, la fibre $\mathrm{Fib}_C(v)$ est un chemin ;
3. C touche au plus deux Θ-classes.

Étant donné un cube partiel G avec un cycle convexe de longueur au moins 6, nous donnons un algorithme qui plonge isométriquement G dans un cylindre ou retourne un certificat du fait que G ne soit pas plongeable isométriquement dans un cylindre. Pour cela, l'algorithme recherche un cycle candidat C de longueur $2m$ et tente de construire un plongement de G dans Γ par rapport à C. Nous allons montrer que l'algorithme réussi à construire un plongement isométrique de G dans Γ si et seulement si $G \in \mathscr{F}^*(\mathscr{J})$, *i.e.*, *$G$ est tel que ses pc-mineurs et lui-même ne contiennent pas de sous-graphes isométriques de $\mathscr{J}$.*

7.6.1. Les candidats sont longs

Soit G un cube partiel contenant un cycle convexe de longueur au moins 6 appartenant à $\mathscr{F}^*(\mathscr{J})$. Nous commençons par montrer dans les lemmes 71, 72 et 73, que n'importe quel cycle convexe long de G est un cycle candidat.

Lemme 71. *Tout cycle convexe long est porté dans G.*

Démonstration. Soit C un cycle convexe de longueur > 4 dans G. En particulier, C est isométrique. En appliquant le lemme 25, nous distinguons deux cas. Soit il existe $k \geq 3$ tel que $SK_{k+1} \subseteq G$, ce qui contredit le fait que G ne contient pas de sous-graphe isométrique isomorphe à SK_4 ($= J_2 \in \mathscr{J}$). Soit il existe une Θ-classe E_i telle que $\mathrm{conv}(\pi_i(C))$ n'est pas portée dans $\pi_i(G)$. Puisque C est un cycle isométrique, pour toute Θ-classe E_j de G, $\pi_j(C)$ est aussi un cycle isométrique. Tant qu'il existe une telle Θ-classe E_i, nous pouvons appliquer le même raisonnement et contracter la Θ-classe E_i. Après un certain nombre de contractions (en appliquant le lemme 25), nous obtenons un pc-mineur G' de G contenant un cycle isométrique C' tel que $\mathrm{conv}(C')$ n'est pas portée. Nous en déduisons que C' est un cycle de longueur > 4. De plus, pour toute Θ-classe E_i de G', $\mathrm{conv}(\pi_i(C'))$ est portée dans $\pi_i(G')$. Par le lemme 25, G' contient un sous-graphe isométrique isomorphe à SK_{k+1} avec $k \geq 3$. Le pc-mineur G' de G contient donc SK_4 comme sous-graphe isométrique, contradiction. □

Lemme 72. *Pour tout sommet v d'un cycle convexe long C, la fibre $\mathrm{Fib}_C(v)$ est un chemin.*

Démonstration. D'après le lemme 71, le cycle C est porté. Dénotons la longueur de C par $2m \geq 6$. Puisque G est un cube partiel, pour tout sommet v de C, $\mathrm{Fib}_C(v) = \{u \in V(G) : \mathrm{porte}_C(u) = v\}$. De plus, pour tout sommet v de C, $\mathrm{Fib}_C(v)$ est connexe. En effet, d'après la définition d'une fibre, s'il existe un sommet $u \in \mathrm{Fib}_C(v)$, alors $\mathrm{I}_G(u, v) \subseteq \mathrm{Fib}_C(v)$. Par conséquent, pour tout sommet $u \in \mathrm{Fib}_C(v)$, $\mathrm{Fib}_C(v)$ contient un plus court chemin de u vers v dans $\mathrm{Fib}_C(v)$. Par le lemme 15, les Θ-classes intersectant $\mathrm{Fib}_C(v)$ sont disjointes de celles intersectant C. Supposons par l'absurde qu'il existe un sommet v dans C tel que $\mathrm{Fib}_C(v)$ ne soit pas un chemin. Supposons qu'il existe un sommet u de degré ≥ 3 dans $\mathrm{Fib}_C(v)$. Si $u = v$ alors v est incident à au moins trois Θ-classes de $\mathrm{Fib}_C(v)$ et à deux Θ-classes de C. Par conséquent, G contient un sommet de degré 5, ce qui est interdit. Sinon, u et v sont à distance $k \geq 1$. Considérons le graphe G' obtenu à partir de G en contractant $m-3$ Θ-classes de C et $k-1$ Θ-classes séparant u de v. Ainsi, G' est un pc-mineur de G contenant un sous-graphe isométrique isomorphe à $J_{10} \in \mathscr{J}$, contradiction. Supposons maintenant qu'il existe un cycle C' de longueur 2ℓ dans $\mathrm{Fib}_C(v)$. Comme $\mathrm{Fib}_C(v)$ ne contient pas de sommet de degré ≥ 3, il existe un sommet u de C' tel que $v = u$. Posons G'' le graphe obtenu à partir de G en contractant $m-3$ Θ-classes de C et $\ell-2$ Θ-classes de C'. Alors G'' est un pc-mineur de G contenant un sous-graphe isométrique isomorphe à $J_4 \in \mathscr{J}$, ce qui termine cette preuve. □

Soient x et y sont deux sommets distincts d'un cycle convexe long C de G. Considérons $x' \in \mathrm{Fib}_C(x)$ et $y' \in \mathrm{Fib}_C(y)$. D'après le lemme précédent, nous pouvons conclure que si x' et y' sont adjacents, alors leur distance jusqu'au cycle est la même, *i.e.*, $\mathrm{d}(x, x') = \mathrm{d}(y, y')$. Pour montrer que tout cycle convexe long C est un candidat, il nous reste à montrer que C touche au plus deux Θ-classes.

Lemme 73. *Tout cycle convexe long touche au plus deux Θ-classes.*

Démonstration. Soit C un cycle convexe long. Notons $2m$ avec $m \geq 3$ la longueur de C. Supposons par l'absurde que C touche au moins trois Θ-classes. Considérons le cube partiel G' obtenu à partir de G en contractant $m-3$ Θ-classes arbitraires de C. Dénotons par C'

l'image de C après ces contractions. Observons que le cycle C' est isométrique et de longueur 6. Puisque C est convexe et que nous avons uniquement contracté des Θ-classes qui intersectent C, le lemme 23, nous garantit que les Θ-classes qui touchent C' sont les mêmes que celles qui touchent C. Ainsi, C' touche au moins trois Θ-classes dans G'.

Cas 1. Il existe un sommet v de C' qui touche trois de ces Θ-classes. Puisque v est un sommet de degré 2 dans C', le graphe G' contient un sous-graphe isométrique isomorphe à $J_1 \in \mathscr{J}$.

Cas 2. Il existe deux sommets u et v de C' qui touchent respectivement une et deux de ces Θ-classes (deux à deux distinctes). Si u et v sont adjacents, alors en contractant la Θ-classe contenant l'arête uv, le graphe résultant contient un sous-graphe isométrique isomorphe à $J_1 \in \mathscr{J}$, contradiction. Si $\mathrm{d}_{C'}(u,v) = 2$, alors G' contient un sous-graphe H' isomorphe à $J_7 \in \mathscr{J}$. Nous pouvons observer que H' est un sous-graphe isométrique de G' car pour toute paire de sommets de H', il existe un chemin dans H' utilisant au plus une fois chaque Θ-classe intersectant H'. Enfin, si $\mathrm{d}_{C'}(u,v) = 3$, alors G' contient le graphe $J_6 \in \mathscr{J}$ comme sous-graphe isométrique.

Cas 3. Il existe trois sommets u, v, et w de C' touchant chacun une de ces Θ-classes (deux à deux distinctes). En réalisant une analyse de cas comme dans le cas 2, nous déduisons que G' contient J_5, J_8 ou J_9 comme sous-graphe isométrique, contradiction. □

D'après les lemmes 71, 72, et 73, tout cycle convexe long de G est candidat. Dans le reste de cette section, considérons un cycle candidat C de G. Dénotons par $2m$ avec $m \geq 3$ sa longueur.

7.6.2. Les candidats sont dans l'arène

Un sous-graphe convexe est appelé *arène* s'il est isomorphe à un cylindre, voir la figure 7.5(a). Le résultat principal de cette sous-section est de montrer que les cycles convexes longs de G sont parallèles et forment une arène dans G. Pour cela nous allons d'abord étudier les propriétés des fibres par rapport à C dans les lemmes 74 et 75.

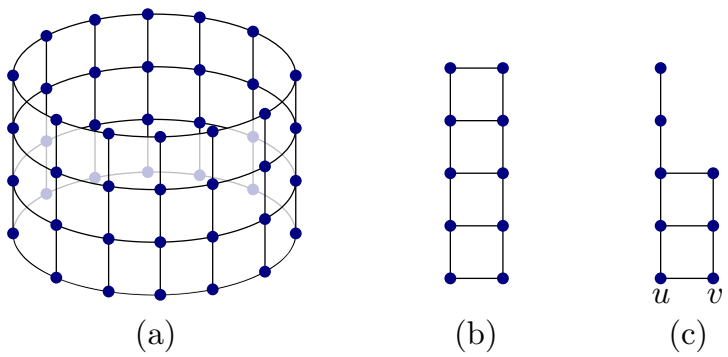


FIGURE 7.5. – (a) Une arène ; (b) Une échelle ; (c) Une échelle partielle de base uv.

Une *échelle* est produit cartésien d'une arête par un chemin. Une échelle peut être vue comme une expansion périphérique d'un chemin sur lui-même. Si nous étendons cette définition aux expansions périphériques d'un chemin par rapport à l'un de ses demi-espaces, nous parlerons d'*échelle partielle*. En particulier, toute échelle est une échelle partielle. La *base* d'une échelle partielle correspond au demi-espace minimal contenant une arête de l'expansion. Nous illustrons respectivement une échelle et une échelle partielle dans la figure 7.5(b) et (c).

Le lemme 74 montre que si deux sommets, appartenant à deux fibres distinctes, sont adjacents alors leurs portes sur C sont adjacentes.

Lemme 74. *Soient x et y deux sommets distincts de C. Soient $x' \in Fib_C(x)$ et $y' \in Fib_C(y)$. Si $x' \sim y'$, alors $x \sim y$ et les arêtes xy et $x'y'$ appartiennent à la même Θ-classe.*

Démonstration. Considérons un plus court (x, y)-chemin R de G. Comme C est convexe dans G, R est un arc de C. De plus, comme x et y sont distincts, $|R| \geq 1$. Montrons que $|R| \leq 1$. Puisque $x' \in \mathrm{Fib}_C(x)$ et $y' \in \mathrm{Fib}_C(y)$, nous avons $\mathrm{porte}_C(x') = x$ et $\mathrm{porte}_C(y') = y$. Soit P un plus court (x', x)-chemin et Q un plus court (y', y)-chemin (voir figure 7.6). Comme x est la porte de x' dans C et que $y \in V(C)$, la concaténation des chemins P et R est un plus court (x', y)-chemin. Nous obtenons donc $|P| + |R| \leq |Q| + 1$. De même y est la porte de y' dans C et $x \in V(C)$, donc $|Q| + |R| \leq |P| + 1$. Il en découle que $2|R| \leq 2$, d'où $|R| \leq 1$. Comme x et y sont deux sommets distincts de C, nous concluons qu'ils sont adjacents. De plus, d'après le lemme 15, les chemins P et Q ne contiennent pas de Θ-classe intersectant C. Puisque G est un cube partiel, nous obtenons que l'arête xy appartient à la même Θ-classe que l'arête $x'y'$.

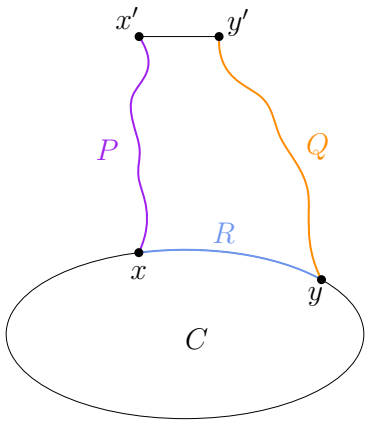


FIGURE 7.6. – Illustration de la preuve du lemme 74

□

Le lemme 75 montre que si deux sommets x' et y', appartenant respectivement aux fibres distinctes $\mathrm{Fib}_C(x)$ et $\mathrm{Fib}_C(y)$, sont adjacents, alors tous les sommets de $\mathrm{Fib}_C(x)$ entre x et x' sont deux à deux adjacents avec les sommets de $\mathrm{Fib}_C(y)$ entre y et y'. Autrement dit, les sommets de $\mathrm{Fib}_C(x)$ et $\mathrm{Fib}_C(y)$ entre x et x', et entre y et y' forment une échelle.

Lemme 75. *Soient x et y deux sommets de C, et soient $x' \in Fib_C(x)$ et $y' \in Fib_C(y)$. Si $x' \sim y'$, alors le graphe induit par l'union des fibres $Fib_C(x)$ entre x et x' et $Fib_C(y)$ entre y et y' est une échelle.*

Démonstration. D'après le lemme 74, x et y sont adjacents et les arêtes $x'y'$ et xy appartiennent à la même Θ-classe E_i. Soient $x'' \in \mathrm{I}(x, x')$ et $y'' \in \mathrm{I}(y, y')$ les voisins respectifs de x' et y'. Pour montrer ce lemme, il suffit de montrer que si x' et y' sont adjacents, alors x'' et y'' les sont aussi.

Supposons que x' et y' sont les plus proches de x et y tels que $x'y' \in E(G)$ et $x''y'' \notin E(G)$. Rappelons que, par le lemme 72, les fibres $\mathrm{Fib}_C(x)$ et $\mathrm{Fib}_C(y)$ sont des chemins. Posons $P := (x =: u_0, u_1, \ldots, u_{\ell-1} := x'', u_\ell := x')$ le plus court chemin (dans G) de x vers x' et $Q := (y =: v_0, v_1, \ldots, v_{\ell-1} := y'', v_\ell := y')$ celui de y vers y'. Soit i le plus petit indice tel que les arêtes $u_{i-1}u_i$ et $v_{i-1}v_i$ appartiennent à la même Θ-classe, et u_iu_{i+1} et v_iv_{i+1} n'appartiennent pas à la même Θ-classe. Nous distinguons deux cas.

Cas 1. $i \neq 0$. Comme G est un cube partiel, cela revient à avoir une suite de carrés entre les i premiers sommets de P et Q, voir l'illustration 7.7 (gauche). Par minimalité de x' et y', les sommets u_i, v_i, y'', y', x' et x'' appartiennent à un même cycle de G. Par le lemme 15, les Θ-classes du cycle C sont distinctes de celles intersectant P et Q. En contractant toutes les Θ-classes séparant les sommets u_1 de u_i dans P (ou de façon équivalente, les Θ-classes séparant v_1 de v_i dans Q) et $m-3$ Θ-classes de C distinctes de E_i, nous obtenons un pc-mineur de G contenant J_{11} comme sous-graphe isométrique, contradiction.

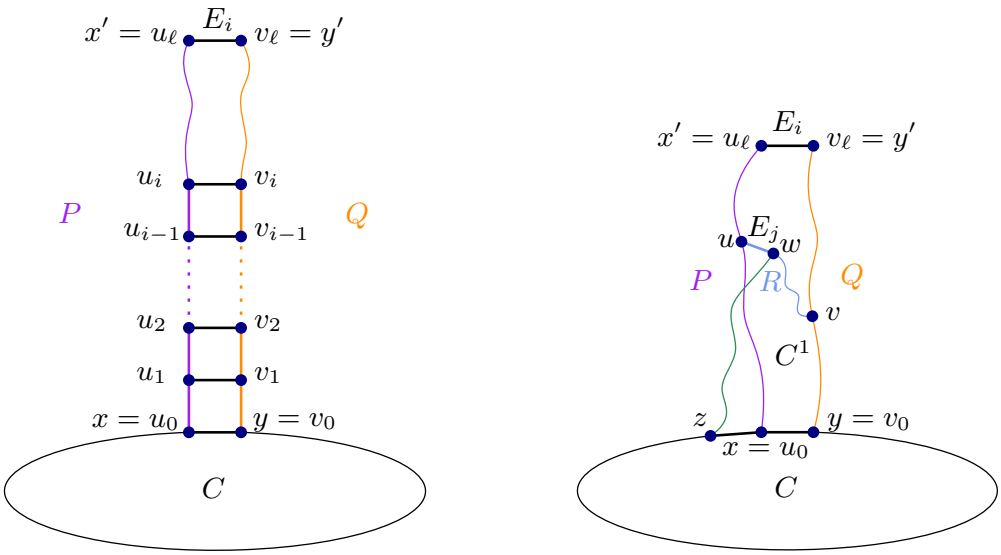


FIGURE 7.7. – Illustration du cas 1 à gauche et du cas 2 à droite de la preuve du lemme 75.

Cas 2. $i = 0$. Par minimalité du choix de x' et y', les sommets x, y, y' et x' appartiennent à un même cycle C' de G. Si C' est isométrique, alors il existe un pc-mineur de G contenant un sous-graphe isométrique isomorphe à J_3. Si C' n'est pas isométrique, alors il existe un plus court chemin R allant d'un sommet $u \neq u_0, u_\ell$ de P vers un sommet $v \neq v_0, v_\ell$ de Q tel

que $R \cap C' = \{u, v\}$, voir la figure 7.7 (droite). Posons w le voisin de u sur R et dénotons E_j la Θ-classe contenant l'arête uw. D'après le lemme 74, comme w est adjacent à $u \in \mathrm{Fib}_C(x)$, w est dans la fibre d'un sommet z de C adjacent à x. Comme G est un cube partiel et qu'il existe un (u, v)-chemin intersectant exactement une fois E_i, nous déduisons que E_i doit intersecter R. De plus, par choix de minimalité de x' et y', $uw \notin E_i$. Par conséquent, $|R| > 1$ et $w \neq v$. Remarquons que $z \neq y$ car $w \notin \mathrm{Fib}_C(y)$ et $w \neq v$. Comme C' est un cycle et que R est un plus court chemin entre deux sommets de ce cycle, C' croise E_j. Par conséquent E_j intersecte les fibres $\mathrm{Fib}_C(x)$ et $\mathrm{Fib}_C(y)$, contradiction. □

Lemme 76. *Soit $G \in \mathscr{F}^*(\mathscr{J})$. Alors tous les cycles convexes de longueur > 4 ont la même longueur, sont parallèles et forment une arène.*

Démonstration. Soient C et C' deux cycles convexes de longueur > 4. Supposons par l'absurde qu'il existe une Θ-classe E_i intersectant C mais pas C'. Numérotons les sommets de C par $c_1, c_2, \ldots, c_{2m}$ dans le sens horaire tels que c_1c_2 appartienne à E_i. Si c_1 et c_2 sont dans deux fibres distinctes de C', alors par le lemme 74, il existe une arête appartenant à E_i dans C', contradiction. Supposons donc que c_1 et c_2 appartiennent à la même fibre $\mathrm{Fib}_{C'}(c'_1)$. D'après le lemme 72, tous les sommets de C n'appartiennent pas à la même fibre de C'.

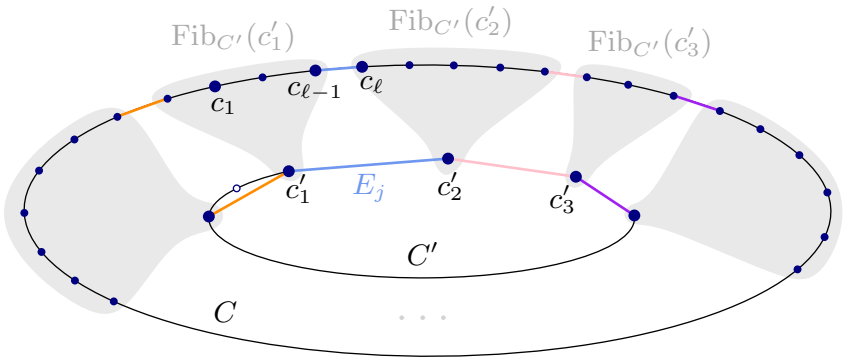


FIGURE 7.8. – Partition de C en chemins par les fibres de C'.

Nous parcourons, à partir de c_2, les sommets de C dans le sens horaire jusqu'à obtenir un sommet $c_\ell \notin \mathrm{Fib}_{C'}(c'_1)$. D'après le lemme 74, comme $c_{\ell-1} \in \mathrm{Fib}_{C'}(c'_1)$ et $c_\ell \in \mathrm{Fib}_{C'}(c'_2)$ avec $c'_1 \neq c'_2$, c'_1 et c'_2 sont adjacents et les arêtes $c'_1c'_2$ et $c_{\ell-1}c_\ell$ appartiennent à la même Θ-classe E_j. En raisonnant de façon analogue à partir de c_ℓ, nous obtenons que les fibres de C' intersectées avec C forment une partition de C en chemins, voir la figure 7.8. Montrons que ces chemins sont en bijection avec les sommets de C'. Par définition des fibres, chaque chemin de C correspond à un unique sommet de C'. Il suffit donc de montrer qu'à chaque sommet de C' correspond un chemin de C. Supposons qu'il existe au moins un sommet de C' qui ne contienne pas de sommets de C dans sa fibre. Alors, en utilisant le résultat du lemme 74, il existe une *corde* dans C' (une arête reliant deux sommets non adjacents de C'). Cela contredit la convexité de C'.

Montrons maintenant que chaque chemin de la partition de C est réduit à un sommet. Supposons, par l'absurde, qu'il existe une fibre de C', disons $\mathrm{Fib}_{C'}(c'_1)$, contenant au moins

deux sommets de C. Considérons le chemin $\mathrm{Fib}_{C'}(c'_1) \cap C = c_1, c_2, \dots c_{\ell-1}$ avec $\ell \geq 3$. Nous avons vu que les arêtes $c'_1 c'_2$ et $c_{\ell-1} c_\ell$ appartiennent à la même Θ-classe E_j. En particulier, E_j intersecte C. D'après le lemme 75, les fibres $\mathrm{Fib}_{C'}(c'_1)$ et $\mathrm{Fib}_{C'}(c'_2)$ forment une échelle. En particulier, le sommet $c_{\ell-2}$ est incident à une arête de E_j. Cela contredit la convexité de C. Par conséquent chaque sommet de C' est exactement associé à sa porte dans C, et ces deux cycles partagent le même ensemble de Θ-classes. Donc C et C' ont la même longueur et sont parallèles.

Il reste à montrer que C et C' appartiennent à une arène dans G. Soit $c_{i-1} c_i$ une arête de C. Les deux extrémités de cette arête appartiennent respectivement à deux fibres $\mathrm{Fib}_{C'}(c'_{i-1})$ et $\mathrm{Fib}_{C'}(c'_i)$ distinctes. En utilisant le lemme 75, nous obtenons que l'union de ces fibres forment une échelle. Donc les cycles C et C' sont dans une arène dans G. □

D'après le lemme 76, nous savons que tous les cycles convexes longs de G sont parallèles et que le graphe induit par les sommets des cycles convexes longs de G est une arène. Plus précisément, c'est une arène $C \square P_{k-1}$ où k est le nombre de cycles convexes longs de G. De plus, comme l'arène contient tous les cycles convexes longs de G, il s'agit de la plus grande arène contenue dans G. Notons-la Γ_G. Considérons $C^\top$ et $C^\perp$ les deux cycles extrémaux de Γ_G. Si G contient un unique cycle convexe long C, alors $\Gamma_G = C = C^\top = C^\perp$.

7.6.3. Structure des cubes partiels de $\mathscr{F}^*(\mathscr{J})$ avec un cycle convexe long

Les fibres d'un chemin P sur un cycle C forment une *séquence unimodale* si ce sont des chemins et s'il existe un sommet c_{max} dans P tel que pour toute arête $c_i c_j$ de P, si $\mathrm{d}_P(c_i, c_{max}) \leq \mathrm{d}_P(c_j, c_{max})$, alors $\left|\mathrm{Fib}_C(c_j)\right| \leq |\mathrm{Fib}_C(c_i)| \leq |\mathrm{Fib}_C(c_{max})|$. Un graphe H est appelé *colisée* s'il contient un cycle C comme demi-espace minimal et si l'ensemble $P := \{c \in C : |\mathrm{Fib}_C(c)| > 1\}$ induit un chemin de C et admet une séquence unimodale telle que pour toute arête $c_i c_j$ de P, l'union des fibres $\mathrm{Fib}_C(c_i)$ et $\mathrm{Fib}_C(c_j)$ induit une échelle partielle. Le chemin P est appelé la *base* de H. Si P est de longueur ℓ, alors H est un *colisée de base* ℓ. La figure 7.9 donne un exemple d'un colisée.

Dans cette sous-section, nous allons montrer que tout graphe $G \in \mathscr{F}^*(\mathscr{J})$ est l'amalgame de deux colisées et d'une arène.

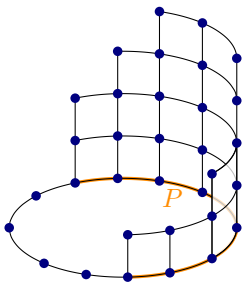


FIGURE 7.9. – Un colisée de base P de longueur 7.

Proposition 29. *Soit $G \in \mathscr{F}^*(\mathscr{J})$, et soit C un cycle candidat de G de longueur $2m$. Alors G s'écrit de la forme $G_1 \circledcirc (C\square P) \circledcirc G_2$ où :*

— *$C\square P$ est une arène ;*
— *G_1 et G_2 sont des colisées de base au plus m ;*
— *les amalgames de G_1 et G_2 se font respectivement sur les cycles $C^\top$ et $C^\perp$ de l'arène.*

Comme C est un cycle convexe long de G, le lemme 73, nous garantit que C touche au plus deux Θ-classes. Si C touche exactement une Θ-classe, alors C est un cycle extrémal de Γ_G. Supposons que $C = C^\perp$. Nous nous intéressons à la structure du graphe induit par les sommets de $(G \setminus \Gamma_G) \cup C^\top$. Si C touche deux Θ-classes E_e et E_f, dénotons par G_e^+ et G_f^- les deux demi-espaces de G défini respectivement par rapport à E_e et E_f contenant le cycle C. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que $C^\top \subset G_e^+$ et $C^\perp \subset G_f^-$. Considérons $G^\top$ le graphe induit par les sommets de $(G_e^+ \setminus \Gamma_G) \cup C^\top$. De même, considérons $G^\perp$ le graphe induit par les sommets de $(G_f^- \setminus \Gamma_G) \cup C^\perp$. Observons que les graphes $G^\top$ et $G^\perp$ sont des pc-mineurs de G puisqu'ils correspondent à une restriction de G. Nous pouvons alors voir G comme l'amalgamation respective des graphes $G^\top$ et $G^\perp$ sur l'arène Γ_G par rapport à $C^\top$ et $C^\perp$.

Ainsi, il suffit d'étudier la structure des cubes partiels appartenant à la classe $\mathscr{F}^*(\mathscr{J})$ contenant un unique cycle convexe long C touchant exactement une Θ-classe. Dans les lemmes 77 et 78 nous nous s'intéressons donc à ces graphes. Observons que le cycle C est un demi-espace minimal de G et $\Gamma_G = C$. Soit $c \in V(C)$ tel que $\forall c' \in V(C), \left|\mathrm{Fib}_C(c')\right| \leq |\mathrm{Fib}_C(c)|$. Dénotons les sommets de C dans le sens horaire par $c =: c_1, c_2, \ldots, c_{2m}$. Montrons dans le lemme 77 qu'il existe un chemin dans C formant une séquence unimodale.

Lemme 77. *Soit G un cube partiel contenant un unique cycle convexe long C et supposons que C touche exactement une Θ-classe tel que $G \in \mathscr{F}^*(\mathscr{J})$. Alors les fibres du chemin $c_{m+2}, \ldots, c_{2m}, c_{max} := c_1, c_2, \ldots, c_m$ de C forment une séquence unimodale. De plus, nous avons* $\min\{|Fib_C(c_m)|, |Fib_C(c_{m+2})|\} \leq |Fib_C(c_{m+1})| \leq \max\{|Fib_C(c_m)|, |Fib_C(c_{m+2})|\}$.

Démonstration. Montrons que pour tout $1 \leq i < j \leq m, |\mathrm{Fib}_C(c_i)| \geq \left|\mathrm{Fib}_C(c_j)\right|$. Si C ne touche pas de Θ-classe, alors pour tout sommet $c \in C, \mathrm{Fib}_C(c) = \{c\}$ et c'est terminé car G coïncide avec C. Supposons maintenant que C touche exactement une Θ-classe E_e. D'après le lemme 72, pour tout sommet $c \in C$, $\mathrm{Fib}_C(c)$ est un chemin. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $1 \leq i < j \leq m$ tels que $|\mathrm{Fib}_C(c_i)| < \left|\mathrm{Fib}_C(c_j)\right|$. Considérons $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ le plus petit indice tel que pour tout $\ell \in \{i+1, \ldots, m\}, |\mathrm{Fib}_C(c_i)| \leq |\mathrm{Fib}_C(c_\ell)|$. Si $i = 1$, alors nous obtenons une contradiction avec le choix de c_1. À partir de maintenant, supposons que $i \geq 2$. Nous savons que $|\mathrm{Fib}_C(c_i)| < |\mathrm{Fib}_C(c_1)|$ et que $|\mathrm{Fib}_C(c_i)| < \left|\mathrm{Fib}_C(c_j)\right|$. Si $\mathrm{Fib}_C(c_i) = \{c_i\}$, alors d'après nos hypothèses, les fibres $\mathrm{Fib}_C(c_1)$ et $\mathrm{Fib}_C(c_j)$ sont des chemins de longueur > 0. Puisque E_e est l'unique Θ-classe qui touche C, considérons u_1 et u_j les uniques voisins respectifs de c_1 et c_j dans $\mathrm{Fib}_C(c_1)$ et $\mathrm{Fib}_C(c_j)$. Les arêtes c_1u_1 et c_ju_j appartiennent donc à E_e (voir la figure 7.10).

De plus, G est un cube partiel, donc il existe un plus court (u_1, u_j)-chemin P dans G. Puisque c_1u_1 et c_ju_j appartiennent à E_e, $\mathrm{d}_G(c_1, c_j) = \mathrm{d}_G(u_1, u_j)$. Autrement dit, toutes les Θ-classes intersectant les plus courts (u_1, u_j)-chemins, donc P, intersectent C. Considérons la première arête u_1u_2 de P. Dénotons par E_f sa Θ-classe. Le chemin (u_2, u_1, c_1) est un chemin

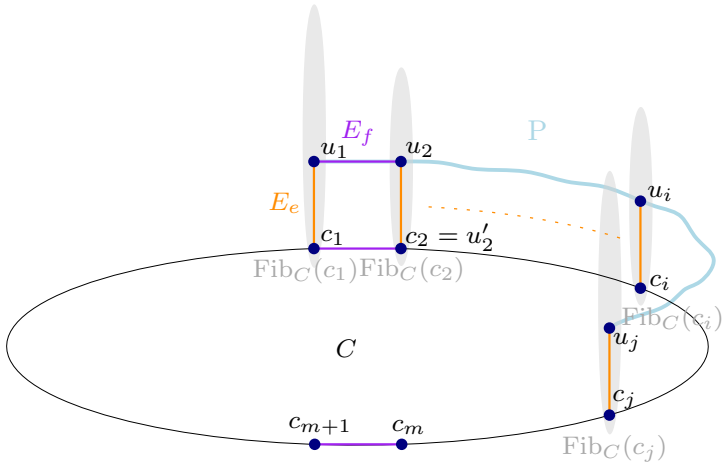


FIGURE 7.10. – Illustration de la preuve du lemme 77.

de G contenant exactement une arête de E_f et une de E_e. Sachant que E_f intersecte C et que C est porté dans G, le plus court chemin entre u_2 et sa porte u'_2 dans C est une arête appartenant à E_e. Ainsi, u_1 et u_2 n'appartiennent pas à la même fibre de C. En utilisant le lemme 74, u'_2 est adjacent à c_1 et l'arête $c_1u'_2$ appartient à la Θ-classe E_f. De plus, $\mathrm{d}_C(u'_2, c_j) = \mathrm{d}_C(c_1, c_j) - 1$ car u'_2 et c_j sont dans le même demi-espace par rapport à E_f, *i.e.*, $u'_2 = c_2$. En appliquant le même raisonnement en remplaçant c_1 par c_2, et ainsi de suite, nous obtenons que c_i est relié à un sommet u_i par une arête de E_e. Par conséquent, $u_i \in \mathrm{Fib}_C(c_i)$, contradiction.

Supposons maintenant que $\mathrm{Fib}_C(c_i)$ contient au moins deux sommets. Comme C touche uniquement la Θ-classe E_e, pour tout $1 \leq k \leq m$, $\mathrm{Fib}_C(c_k)$ contient une arête c_ku_k appartenant à E_e. De plus, pour tout $1 \leq k \leq m-1$, u_k et u_{k+1} sont adjacents. Nous affirmons qu'il existe une Θ-classe intersectant $\mathrm{Fib}_C(c_j)$ et une intersectant $\mathrm{Fib}_C(c_1)$ différentes qui n'intersectent pas $\mathrm{Fib}_C(c_i)$. Pour cela nous montrons l'affirmation suivante :

Affirmation 6. Si une Θ-classe intersecte $\mathrm{Fib}_C(c_j)$ et $\mathrm{Fib}_C(c_1)$ alors elle intersecte aussi $\mathrm{Fib}_C(c_i)$.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe E_ℓ intersectant $\mathrm{Fib}_C(c_j)$ et $\mathrm{Fib}_C(c_1)$ mais pas $\mathrm{Fib}_C(c_i)$.

Comme illustré dans la figure 7.11, considérons le graphe G' obtenu à partir de G en contractant :

— $m-3$ Θ-classes de C telles que c'_1, c'_i et c'_j les images respectives des sommets c_1, c_i et c_j soient deux à deux distinctes ;
— toutes les Θ-classes intersectant $(\mathrm{Fib}_C(c_1) \cup \mathrm{Fib}_C(c_j))$ sauf E_e et $E_n = \ell$.

Notons C' l'image de C. D'après le lemme 23, C' est convexe car nous n'avons contracté que des Θ-classes disjointes ou intersectant C. Puisque c_i est sur le plus court (c_1, c_j)-chemin de C, donc de G (car C convexe), c'_i est sur le plus court (c'_1, c'_j)-chemin de C'. Soit G'^{+}_{ℓ} le demi-espace de G' défini par E_ℓ ne contenant pas C'. Soient v'_1 et v'_j les sommets de G'^{+}_{ℓ}

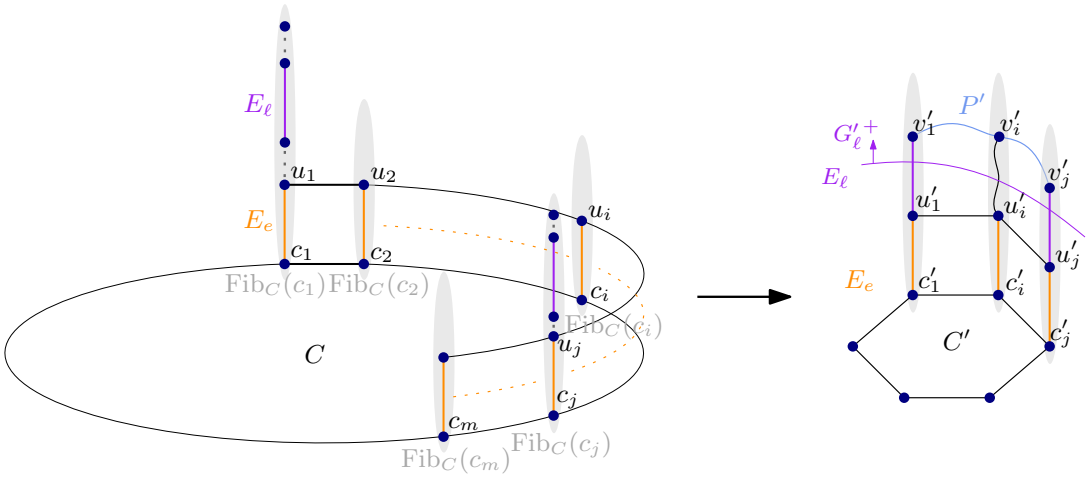


FIGURE 7.11. – Illustration de la preuve de l'affirmation 6.

appartenant respectivement aux fibres $\mathrm{Fib}_{C'}(c'_1)$ et $\mathrm{Fib}_{C'}(c'_j)$. Alors, il existe un plus court (v'_1, v'_j)-chemin P' dans G' passant par un sommet v'_i de $\mathrm{Fib}_{C'}(c'_i)$. Comme v'_1 et v'_j sont dans G'^+_ℓ, P est contenu dans G'^+_ℓ. Par conséquent, $v'_i \in G'^+_\ell$. Comme C' est dans le demi-espace complémentaire de G'^+_ℓ et que $v'_i \in \mathrm{Fib}_{C'}(c'_i)$, le plus court chemin reliant v'_i à sa porte c'_i dans C' passe par une arête deE_ℓ. Ainsi, la Θ-classe E_ℓ intersecte $\mathrm{Fib}_{C'}(c'_i)$, et donc E_ℓ intersecte aussi $\mathrm{Fib}_C(c_i)$ dans G, contradiction. □

Considérons maintenant le graphe G'' obtenu à partir de G en contractant :

— $m-3$ Θ-classes de C telles que c''_1, c''_i et c''_j les images respectives des sommets c_1, c_i et c_j soient deux à deux distinctes ;
— toutes les Θ-classes intersectant $\mathrm{Fib}_C(c_i)$ sauf E_e ;
— toutes les Θ-classes intersectant $\mathrm{Fib}_C(c_1)$ mais pas $\mathrm{Fib}_C(c_i)$ sauf une, disons E_{ℓ_1} ;
— toutes les Θ-classes de $\mathrm{Fib}_C(c_j)$ mais pas $\mathrm{Fib}_C(c_i)$ sauf une, disons E_{ℓ_2}.

Notons C'' l'image de C. De même, observons que C'' est un cycle convexe de longueur 6 car nous n'avons contracté que des Θ-classes disjointes ou intersectant C. Comme c_1, c_i et c_j appartiennent à un arc de C de longueur $\leq m$ et que les Θ-classes d'un cycle convexe (isométrique) sont opposés, après les contractions, c''_1, c''_i et c''_j appartiennent à un arc de C'' de longueur ≤ 3. Autrement dit, $\mathrm{d}_{C''}(c''_1, c''_j) \leq 3$. Si c''_i est adjacent à c''_1 et à c''_j dans C'', alors G'' contient un sous-graphe H'' isomorphe à J_{12}. En effet, par l'affirmation 6, les Θ-classes E_{ℓ_1} et E_{ℓ_2} sont distinctes. Donc pour toute paire de sommet de H'' il existe un chemin passant au plus une fois par chacune des Θ-classes qui intersectent H''. D'après le lemme 14, H'' est un sous-graphe isométrique de G'', contradiction. Si c''_i est adjacent à c''_1 ou à c''_j dans C'', alors c''_1 et c''_j sont à distance 3. Nous pouvons vérifier par un raisonnement analogue que G'' contient un sous-graphe isométrique H'' isomorphe à J_{13}. Nous pouvons conclure que $\forall 1 \leq i < j \leq m, |\mathrm{Fib}_C(c_i)| \geq \left|\mathrm{Fib}_C(c_j)\right|$.

Par un raisonnement analogue, nous pouvons montrer que pour tous i, j tels que $m+2 \leq$

$i < j \leq 2m, |\mathrm{Fib}_C(c_i)| \leq \left|\mathrm{Fib}_C(c_j)\right|$. Il reste donc à montrer que $\min\{|\mathrm{Fib}_C(c_m)|, |\mathrm{Fib}_C(c_{m+2})|\} \leq |\mathrm{Fib}_C(c_{m+1})|$ et que $|\mathrm{Fib}_C(c_{m+1})| \leq \max\{|\mathrm{Fib}_C(c_m)|, |\mathrm{Fib}_C(c_{m+2})|\}$ D'une part, supposons par l'absurde que $\min\{|\mathrm{Fib}_C(c_m)|, |\mathrm{Fib}_C(c_{m+2})|\} > |\mathrm{Fib}_C(c_{m+1})|$. Par l'affirmation 6, nous savons qu'il existe deux Θ-classes, une intersectant $\mathrm{Fib}_C(c_m)$ et une intersectant $\mathrm{Fib}_C(c_{m+2})$, qui sont distinctes. Dénotons-les E_{ℓ_1} et E_{ℓ_2}. Considérons le graphe G''' obtenu à partir de G en contractant $m-3$ Θ-classes de C distinctes de celles contenant les arêtes $c_m c_{m+1}$ et $c_{m+1}c_{m+2}$, toutes les Θ-classes intersectant les fibres de C sauf E_e, E_{ℓ_1} et E_{ℓ_2}. Le graphe G''' est un pc-mineur de G et nous pouvons vérifier qu'il contient le sous-graphe isométrique J_{12}, contradiction. D'autre part, supposons par l'absurde que $|\mathrm{Fib}_C(c_{m+1})| > \max\{|\mathrm{Fib}_C(c_m)|, |\mathrm{Fib}_C(c_{m+2})|$. Par un raisonnement similaire nous pouvons montrer qu'un pc-mineur de G contient un sous-graphe isométrique J_{13}.

En conclusion, les fibres du chemin $c_{m+2}, \ldots, c_{2m}, c_{max} := c_1, c_2, \ldots, c_m$ de C forment une séquence unimodale, et la longueur de la fibre $\mathrm{Fib}_C(c_{m+1})$ est comprise entre les longueurs des deux fibres $\mathrm{Fib}_C(c_m)$ et $\mathrm{Fib}_C(c_{m+2})$. □

D'après le lemme 77, soit les fibres du chemin $c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots, c_{2m}, c_{max} := c_1, c_2, \ldots, c_m$ soit les fibres du chemin $c_{m+2}, \ldots, c_{2m}, c_{max} := c_1, c_2, \ldots, c_m, c_{m+1}$ de C forment une séquence unimodale. Dénotons-la par P. Dans le lemme 78, nous allons montrer que deux fibres consécutives par rapport à C dans G induisent une échelle partielle.

Lemme 78. *Soit $G \in \mathscr{F}^*(\mathscr{J})$ un cube partiel contenant un unique cycle convexe long C. Supposons que C touche exactement une Θ-classe. Alors pour tout $c_i c_j \in E(C)$, le graphe induit par l'union des fibres $\mathrm{Fib}_C(c_i)$ et $\mathrm{Fib}_C(c_j)$ forme une échelle partielle de base $c_i c_j$.*

Démonstration. Supposons que C touche une seule Θ-classe E_e. Par le lemme 72, pour tout $c \in V(C)$, la fibre $\mathrm{Fib}_C(c)$ est un chemin. Soient c_i et c_j deux sommets de C adjacents. Dénotons par E_f la Θ-classe contenant l'arête $c_i c_j$. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $|\mathrm{Fib}_C(c_i)| \geq \left|\mathrm{Fib}_C(c_j)\right|$.

Pour montrer que l'union des fibres $\mathrm{Fib}_C(c_i)$ et $\mathrm{Fib}_C(c_j)$ forme une échelle partielle de base $c_i c_j$, nous devons montrer que pour tout $1 \leq k \leq \left|\mathrm{Fib}_C(c_j)\right|$, les sommets de $\mathrm{Fib}_C(c_i)$ et de $\mathrm{Fib}_C(c_j)$ à distance k de c_i et c_j sont adjacents. Dénotons par u_i et u_j les sommets respectifs de $\mathrm{Fib}_C(c_i)$ et de $\mathrm{Fib}_C(c_j)$ à distance $\left|\mathrm{Fib}_C(c_j)\right|$ de c_i et c_j. Soit Q le (c_i, u_i)-chemin de $\mathrm{Fib}_C(c_i)$ et R le (c_j, u_j)-chemin de $\mathrm{Fib}_C(c_j)$, comme illustré dans la figure 7.12. Remarquons que R est isomorphe à $\mathrm{Fib}_C(c_j)$ et que les chemins Q et R sont de même longueur.

Nous savons que u_i et u_j ne sont pas dans la même fibre. Par le lemme 75, si u_i et u_j sont adjacents, alors l'union des fibres $\mathrm{Fib}_C(c_i)$ et $\mathrm{Fib}_C(c_j)$ forme une échelle partielle de base $c_i c_j$. De manière équivalente, l'union de ces fibres forme une échelle partielle de base $c_i c_j$. Supposons donc que u_i et u_j ne sont pas adjacents. Comme C touche uniquement la Θ-classe E_e et que les fibres de C sont des chemins, il existe respectivement un unique voisin v_i et v_j de c_i et c_j tels que $v_i c_i$ et $v_j c_j$ appartiennent à E_e. Comme G est un cube partiel, l'arête $v_i v_j$ appartient à même Θ-classe E_f que l'arête $c_i c_j$. Par isométricité de G, si les Θ-classes qui intersectent Q sont identiques à celles qui intersecte R, alors u_i et u_j sont reliés par une arête de E_f, contradiction. Supposons qu'il existe une Θ-classe E_{ℓ_1} intersectant

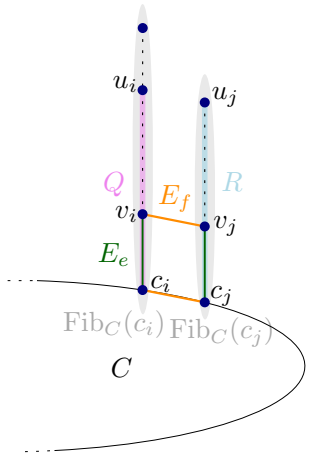


FIGURE 7.12. – Illustration de la preuve du lemme 78.

Q mais pas R. Alors nous affirmons qu'il existe une Θ-classe E_{ℓ_2} intersectant R mais pas Q. Puisque les chemins Q et R ont la même longueur et que ce sont des sous-chemins respectifs de $\mathrm{Fib}_C(c_i)$ et $\mathrm{Fib}_C(c_j)$, les arêtes de Q (respectivement de R) appartiennent deux à deux à des Θ-classes différentes. Posons G' le graphe obtenu à partir de G en contractant $m-3$ Θ-classes de C sauf E_f et l'ensemble des Θ-classe des fibres de C sauf E_e, E_{ℓ_1} et E_{ℓ_2}. Le graphe G' est un pc-mineur de G qui contient un sous-graphe isométrique isomorphe à J_{11}, contradiction. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat de la proposition 29.

D'après le lemme 73, comme C est un cycle candidat, C touche au plus deux Θ-classes. Rappelons que C est de longueur $2m$. Si C touche aucune Θ-classe, alors $G = C$ et c'est terminé. Supposons que C touche exactement une Θ-classe E_e. Nous distinguons deux cas. Soit $\Gamma_G = C$, soit $\Gamma_G = C\square P_n$ avec $n \geq 1$. Dans le premier cas, C est le seul cycle long de G et touche uniquement E_e. Ainsi, d'après le lemme 77, nous déduisons que $P := \{c \in C : |\mathrm{Fib}_C(c)| > 1\}$ induit un chemin de C. D'après les lemmes 77 et 78, nous obtenons que G est un colisée de base $|P|$. Il reste donc à montrer que $|P| \leq m$, où m correspond à la moitié de la longueur de C. Raisonnons par l'absurde en supposant que $|P| > m$. Soient c_i et c_j les extrémités de P. Sachant que la seule Θ-classe qui touche C est E_e, il existe une copie R du chemin P telle que tout sommet de P est relié par une arête de E_e à sa copie dans R. Notons u_i et u_j les copies de c_i et c_j dans R. Soit c_{i+1} le voisin de c_i dans P. Dénotons par E_ℓ la Θ-classe de l'arête $c_i c_{i+1}$. Sachant que $|P| > m$, c_i et c_j appartiennent au même demi-espace défini par E_ℓ, disons G_ℓ^+. Comme C est convexe, le plus court (c_i, c_j)-chemin de C, donc de G, est dans G_ℓ^+. Par isométricité de G, nous savons que $\mathrm{d}_G(u_i, u_j) = \mathrm{d}_G(c_i, c_j)$. Cela signifie que les plus courts (u_i, u_j)-chemins de G intersectent un sous-ensemble des Θ-classes de C ne contenant pas E_ℓ. Considérons un plus court (u_i, u_j)-chemin Q de G. Posons u le voisin de u_i dans Q. Notons c_u la porte de u dans C. Comme l'arête uu_i appartient à une Θ-classe $E_f \neq E_\ell$ qui intersecte C, uc_u est une arête de E_e et $c_u c_i$ est une arête de C appartenant à E_f. Si $u = u_j$, alors nous obtenons une contradiction avec le fait que $\Gamma_G = C$. Sinon $|\mathrm{Fib}_C(c_u)| > 1$ et $c_u \notin V(P)$, ce qui contredit la définition de P. Dans le deuxième cas, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $C^\perp = C$ et que E_i est la Θ-classe de l'arène qui touche $C^\top$. Posons

$G^\top$ la restriction de G par rapport à E_i contenant $C^\top$. Le cycle $C^\top$ touche une unique Θ-classe dans $G^\top$ et $\Gamma_{G^\top} = C^\top$. Nous nous retrouvons dans le premier et déduisons que $G^\top$ est un colisée de base au plus m. Le graphe G peut être vu comme l'amalgamation de Γ_G et $G^\top$ par rapport à $C^\top$, ce qui termine ce cas. Nous en déduisons que G s'écrit de la forme $\Gamma_G \circledcirc G_2$ où G_2 est un colisée de base au plus m. Enfin, supposons que C touche deux Θ-classes, disons E_e et E_f. Soient G_e^+ et respectivement G_f^- les demi-espaces de G par rapport à E_e et E_f contenant C. Ces deux demi-espaces de G contiennent le cycle C comme demi-espace minimal. Plus précisément, C touche une unique Θ-classe dans G_e^+. D'après le cas précédent, G_e^+ s'écrit de la forme $G_1 \circledcirc (C\square P_1)$ où G_1 est un colisée de base au plus m. De même, G_f^- s'écrit de la forme $G_2 \circledcirc (C\square P_2)$ où G_2 est un colisée de base au plus m. Sachant que G est exactement le graphe obtenu par amalgamation sur C de G_e^+ et G_f^-, nous obtenons que G s'écrit sous la forme $G_1 \circledcirc (C\square P) \circledcirc G_2$ tel que P est le chemin résultant de la concaténation des chemins P_1 et P_2 et G_1 et G_2 sont deux colisées de base au plus m. □

7.6.4. Plongement

D'après la sous-section 7.6.1, nous avons montré que si $G \in \mathscr{F}^*(\mathscr{J})$, alors G contient toujours un cycle candidat. Nous pouvons donc considérer un cycle candidat C de G. De plus, d'après la proposition 29, G s'écrit de la forme $G_1 \circledcirc (C\square P) \circledcirc G_2$ où G_1 et G_2 sont des colisées de base au plus $\frac{|C|}{2}$. Par conséquent, nous savons que le cycle candidat C sépare G en deux composantes connexes. Dénotons par $G_C^\downarrow$ et $G_C^\uparrow$ les deux parties de G contenant C comme demi-espace. En d'autres termes, G est le cube partiel résultant du collage de $G_C^\downarrow$ et de $G_C^\uparrow$ sur le cycle C. Dénotons respectivement par d_1 et d_2 les longueurs des plus grandes fibres de $G_C^\downarrow$ et de $G_C^\uparrow$ par rapport à C.

Dans cette sous-section, nous nous intéressons au plongement φ de G dans le cylindre $\Gamma := C_{2m}\square P_n$, avec $n = d_1 + d_2$ et avec C_{2m} isomorphe à C. Nous définissons φ tel que

— pour tout $v \in V(G_C^\downarrow)$, $\varphi(v) = (c_i, p_{d_1-j})$, où $\text{porte}_C(v) = c_i$ et $j = \mathrm{d}_G(c_i, v)$;

— pour tout $v \in V(G_C^\uparrow)$, $\varphi(v) = (c_i, p_{d_1+j})$, où $\text{porte}_C(v) = c_i$ et $j = \mathrm{d}_G(c_i, v)$.

En particulier, le cycle candidat C est plongé sur la d_1-ième C_{2m}-couche de Γ, notée C^{d_1}. Dans le lemme suivant nous montrons que ce plongement préserve les distances.

Lemme 79. *Le plongement φ de G dans Γ est isométrique.*

Démonstration. Pour montrer que le plongement φ de G dans Γ est isométrique, nous devons montrer que, pour toute paire de sommets (u, v) de G, $\mathrm{d}_G(u, v) = \mathrm{d}_\Gamma(\varphi(u), \varphi(v))$. D'après le lemme 14, nous savons que la distance dans G entre deux sommets u et v correspond au nombre de Θ-classes sur un plus court (u, v)-chemin de G. D'autre part, le lemme 1 nous garantit que la distance entre deux sommets de Γ est la somme de leurs distances dans leur facteur respectif. Nous distinguons trois cas.

Cas 1. Supposons que $\varphi(u)$ et $\varphi(v)$ ne soient pas du même côté de C_1^d dans Γ. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\varphi(u) = (c_i, p_j)$ et $\varphi(v) = (c_{i'}, p_{j'})$ avec $p_j < d_1$ et $p_{j'} > d_1$.

Par conséquent, u et v appartiennent respectivement à $G_C^{\downarrow}$ et de $G_C^{\uparrow}$. Puisque C et C^{d_1} sont portés et qu'ils séparent respectivement u de v et $\varphi(u)$ de $\varphi(v)$, nous avons $\mathrm{d}_G(u,v) = \mathrm{d}_G(u,u') + \mathrm{d}_G(u',v') + \mathrm{d}_G(v',v)$ et $\mathrm{d}_\Gamma(\varphi(u),\varphi(v)) = \mathrm{d}_\Gamma(\varphi(u),\varphi(u)') + \mathrm{d}_\Gamma(\varphi(u)',\varphi(v)') + \mathrm{d}_\Gamma(\varphi(v)',\varphi(v))$ où u' et v', et $\varphi(u)'$ et $\varphi(v')$ sont les portes respectives de u et v, et $\varphi(u)$ et $\varphi(v)$ sur C et C^{d_1}. Par définition de φ, $\mathrm{d}_\Gamma(\varphi(u),\varphi(u)') = \mathrm{d}_G(u,u')$ et $\mathrm{d}_\Gamma(\varphi(v),\varphi(v)') = \mathrm{d}_G(v,v')$. De plus, par définition de C^{d_1}, $\mathrm{d}_\Gamma(\varphi(u)',\varphi(v)') = \mathrm{d}_G(u',v')$. Nous obtenons donc que $\mathrm{d}_G(u,v) = \mathrm{d}_\Gamma(\varphi(u),\varphi(v))$.

Cas 2. Supposons que $\varphi(u)$ et $\varphi(v)$ soient du même côté de C_1^d dans Γ. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\varphi(u) = (c_i, p_j)$ et $\varphi(v) = (c_{i'}, p_{j'})$ avec $p_j \geq p_{j'} \geq d_1$. Alors u et v sont deux sommets de $G_C^{\uparrow}$. Puisque G s'écrit de la forme $G_1 \circledcirc (C\square P) \circledcirc G_2$, il existe un sommet w dans la fibre $\mathrm{Fib}_C(c_i)$ dans G qui est à la même distance que v de C (éventuellement $w = c_i$). Observons que l'union du plus court (u,w)-chemin P et du plus court (w,v)-chemin Q est un plus court (u,v)-chemin de G. En effet, comme u et w sont dans la même fibre de C, P ne croise pas de Θ-classes de C. D'autre part, $\mathrm{d}_G(v,w) = \mathrm{d}_G(c_{i'},c_i)$. De plus, de par la structure des arènes et des colisées, Q croise uniquement des Θ-classes qui intersectent C. L'image de w par φ est le sommet $\varphi(w) = (c_i, p_{j'})$. La distance entre $\mathrm{d}_\Gamma(\varphi(u),\varphi(w))$ est égale à l'écart entre leur deuxième coordonnée. Cette distance correspond exactement à $\mathrm{d}_G(u,c_i) - \mathrm{d}_G(w,c_i) = \mathrm{d}_G(u,w)$. D'autre part, la distance entre $\varphi(w)$ et $\varphi(v)$ est égale à la distance entre leurs portes respectives $\varphi(u)'$ et $\varphi(v)'$. Comme C^{d_1} est isomorphe à C, $\mathrm{d}_\Gamma(\varphi(w),\varphi(v)) = \mathrm{d}_G(c_i,c_{i'})$. En conclusion, nous avons $\mathrm{d}_G(u,v) = \mathrm{d}_G(u,w) + \mathrm{d}_G(w,v) = \mathrm{d}_G(u,w) + \mathrm{d}_G(c_i,c_{i'}) = \mathrm{d}_\Gamma(\varphi(u),\varphi(w)) + \mathrm{d}_\Gamma(\varphi(w),\varphi(v)) = \mathrm{d}_\Gamma(\varphi(u),\varphi(v))$. □

7.7. Preuve du théorème 16

Pour montrer 1 implique 2 supposons que G est plongeable isométriquement dans un cylindre $C_{2m}\square P_n$. Commençons par montrer que tous les cubes partiels de $\mathscr{J}$ ne sont pas plongeables isométriquement dans un cylindre. Dans la proposition 28, nous avons établi quelques propriétés importantes des cylindres. En particulier, nous avons vu que les sommets d'un cylindre sont de degré au plus 4 et que les cycles facteurs sont portés. Donc, les cubes partiels J_1 et J_2 de $\mathscr{J}$ ne sont pas des sous-graphes isométriques d'un cylindre. Les cubes partiels J_5, J_6, J_7, J_8, et J_9 ne sont pas plongeables dans un cylindre car leur cycle convexe de longueur 6 touche strictement plus que deux Θ-classes. Comme pour tout sommet d'un cylindre, sa fibre par rapport au cycle facteur est un chemin, nous en déduisons que les cubes partiels J_3, J_4, et J_{10} ne sont pas plongeables dans un cylindre. Supposons par l'absurde que le cube partiel J_{11} soit plongeable isométriquement dans un cylindre. D'après le lemme 67, son cycle isométrique C de longueur 6 est soit de type 1, soit de type 2. Nous pouvons vérifier que lorsqu'un cube partiel est plongeable dans un cylindre et qu'il contient un unique cycle de longueur > 4, alors il est plongeable dans un cylindre tel que ce cycle est de type 1. Donc, J_{11} est plongeable isométriquement dans un cylindre $\Gamma := C_6\square P_n$ pour un certain n. Observons que les sommets *pendants, i.e.*, de degré 1, de J_{11} sont à la même distance du cycle C. Puisque C est une C_6-couche de Γ, et sachant que leurs sommets pendants sont du même côté par rapport à C dans Γ, les arêtes incidentes aux sommets pendants appartiennent à la même Θ-classe. Or, par isométricité de J_{11}, les arêtes incidentes aux sommets pendants appartiennent

à des Θ-classes distinctes. Par un raisonnement similaire, nous pouvons montrer que les cubes partiels J_{12} et J_{13} ne sont pas plongeables isométriquement dans un cylindre. Par conséquent, l'ensemble des graphes de $\mathscr{J}$ ne sont pas plongeables isométriquement dans un cylindre. De plus, par le lemme 70, s'il existe un plongement de G dans un cylindre, alors ses pc-mineurs et ses sous-graphes isométriques peuvent être plongés dans un cylindre aussi. Nous en déduisons que l'ensemble des cubes partiels de $\mathscr{J}$ ne peuvent pas être des sous-graphes isométriques de G ni de ses pc-mineurs. Ensuite, l'implication $2 \Rightarrow 3$ provient de la proposition 29. Enfin, l'implication $3 \Rightarrow 1$ découle du plongement décrit dans la sous-section 7.6.4. □

7.8. Vers une preuve pour les cylindres fins

Nous avons caractérisé les cubes partiels plongeables isométriquement dans les cylindres larges, *i.e.*, dont le cycle facteur est de longueur > 4 (théorème 16). Notons que la classe des cylindres larges n'est pas close par pc-mineur. En effet, en contractant des Θ-classes du cycle facteur, nous diminuons sa taille. Dénotons par $\mathscr{C}_{>4}$ la classe des cubes partiels contenant un cycle convexe de longueur > 4. Dans le théorème 16, nous avons donc caractérisé la classe $\mathscr{F}^*(\mathscr{J}) \cap \mathscr{C}_{>4}$ qui correspond exactement à la classe des cylindres partiels contenant au moins un cycle convexe de longueur > 4. Nous pouvons observer que la classe $\mathscr{F}^*(\mathscr{J})$ est plus grande que celle des cylindres partiels. En fait, il existe d'autres sous-graphes isométriques minimaux interdits pour les cylindres partiels qui ne sont pas dans $\mathscr{J}$, voir $\mathscr{J}^+$ l'extension de $\mathscr{J}$ dans la figure 7.13. Nous souhaitons montrer que $\mathscr{F}^*(\mathscr{J}^+)$ est la classe des cylindres partiels.

Notre objectif est de montrer que les cubes partiels appartenant à $\mathscr{F}^*(\mathscr{J}^+)$ sans cycle convexe de longueur > 4 possèdent un cycle candidat. En effet, nous pensons que certaines preuves des cylindres larges pourraient s'adapter aux cylindres fins lorsqu'ils possèdent un cycle candidat. Pour ce faire, nous sommes en train de réaliser des études de cas. Plus précisément, les graphes dans $\mathscr{F}^*(\mathscr{J}^+)$ sans cycle convexe de longueur > 4 sont soit plongeables isométriquement dans $\mathbb{Z}^2$ (donc dans un cylindre large), soit ils contiennent au moins un $K_{1,3} \square K_2$, un Q_3^-, ou un Q_3 comme sous-graphe isométrique, voir le théorème 15. Ce dernier cas peut être divisé en deux. En effet, nous savons que tout cycle de longueur 6 (non convexe) est contenu dans un Q_3^- ou dans un Q_3. D'après le corollaire 2, nous pouvons distinguer le cas où nos graphes sont médians du cas où ils contiennent un Q_3^- qui n'est pas inclus dans un Q_3. C'est donc ces deux cas que nous souhaitons traiter pour extraire un cycle candidat.

Ensuite, à partir des sous-graphes isométriques minimaux interdits dans les cylindres, nous pourrions extraire l'ensemble des pc-mineurs minimaux exclus pour les cylindres, comme nous l'avons fait pour la grille $\mathbb{Z}^2$.

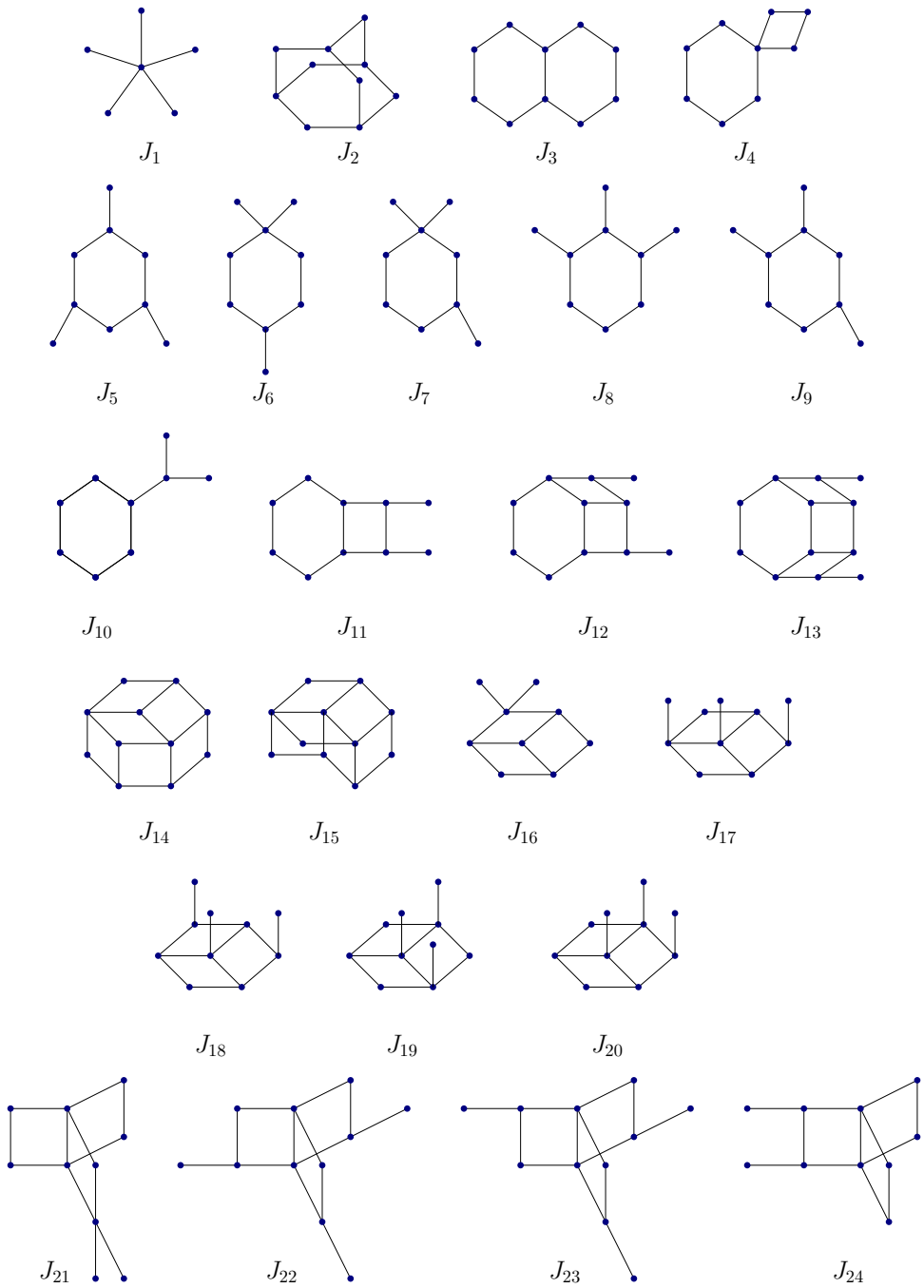


FIGURE 7.13. – L'ensemble $\mathscr{J}^+$ des sous-graphes isométriques minimaux interdits dans les pc-mineurs des cylindres partiels à notre connaissance.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié la structure de classes des cubes partiels de VC-dimension bornée. En particulier, nos travaux sont centrés sur les cubes partiels provenant des familles amples, des matroïdes orientés et plus généralement des complexes de matroïdes orientés. Nous nous sommes aussi intéressés aux classes de cubes partiels plongeables dans la grille et dans les cylindres. Nous donnons maintenant plusieurs perspectives autour des travaux réalisés dans cette thèse qui suivent deux directions.

Complétions

Comme nous l'avons vu dans cette thèse, compléter une famille d'ensembles quelconque $\mathscr{S}$ en une famille ample sans trop augmenter la VC-dimension est un problème difficile et intéressant. En particulier, la conjecture de FLOYD et WARMUTH [42] serait résolue si nous montrions que toute famille d'ensembles de VC-dimension d peut être étendue à une famille ample de VC-dimension $O(d)$. Si nous considérons les complétions du graphe de 1-inclusion de $\mathscr{S}$ d'abord en graphe de 1-inclusion connexe, puis isométrique et ensuite en graphe de topes d'un COM, alors le problème de passer d'une famille d'ensembles quelconque $\mathscr{S}$ à une famille ample peut être découpé de façon naturelle comme suit :

$$\text{quelconque} \to \text{connexe} \to \text{cube partiel} \to \text{COM} \to \text{AMP}.$$

L'étude de chacune de ces complétions partielle est intéressante. Nous discutons maintenant des différentes questions ouvertes et des travaux réalisés autour de ces familles.

Un des résultat principal de cette thèse est la complétion en cube partiel ample sans augmenter la VC-dimension de deux sous-classes des graphes de topes des COMs, les graphes de topes des OMs et des CUOMs (théorèmes 11 et 12). Pour les graphes de topes des COMs, nous pouvons envisager la même stratégie que pour les CUOMs, *i.e.*, compléter chacune de leurs facettes, puis prendre leurs unions. Cependant en utilisant notre complétion des OMs pour compléter chacune de ces faces, nous rencontrons plusieurs difficultés. En effet, dans la figure 8.1, nous présentons un exemple de graphe de topes d'un COM pour lequel n'importe quelle complétion de ses facettes en graphes de topes de UOMs ne donne pas un cube partiel. Pourtant ce graphe admet une complétion ample de même VC-dimension que nous illustrons dans la figure 8.1(c). Nous ne pouvons donc pas compléter indépendamment chaque face. Nous faisons cependant la conjecture suivante :

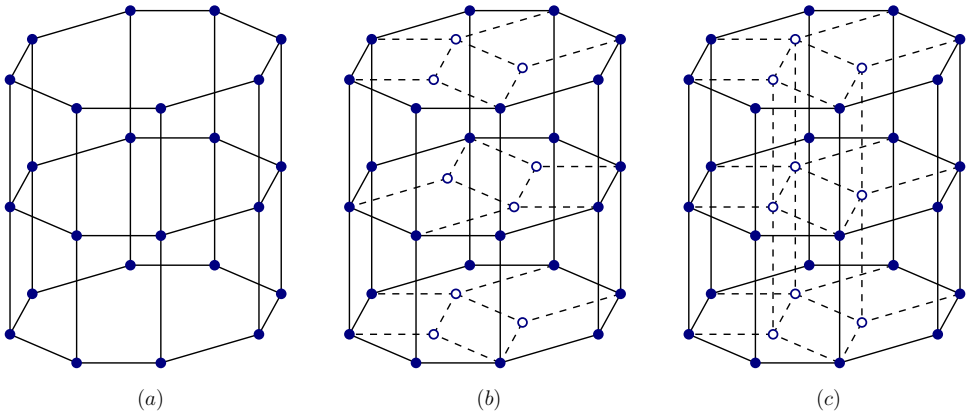


FIGURE 8.1. – (a) Le graphe de tope G d'un COM correspondant à $C_8 \square P_2$ composé de deux facettes $C_8 \square P_1$; (b) La complétion partielle de G après la complétion des deux facettes ; (c) La plus petite complétion ample de G.

Conjecture 3. Le graphe de topes de tout COM de VC-dimension d admet une complétion ample de VC-dimension d.

En analysant de plus près, la figure 8.1(c) vérifie la *propriété des complétions des faces parallèles* : toutes les faces parallèles de G sont complétées de la même façon. Plus rigoureusement, l'isomorphisme entre deux faces $[X]$ et $[Y]$ (donné par la projection métrique) peut être étendu à un isomorphisme entre les complétions $\mathrm{amp}(G) \cap \mathrm{C}(X)$ et $\mathrm{amp}(G) \cap \mathrm{C}(Y)$. Nous pensons que si la conjecture 3 est vraie, alors les complétions amples des graphes de topes des COMs vérifieront la *propriété des complétions des faces parallèles*.

Nous nous sommes aussi intéressés à la complétion ample de certaines classes de cubes partiels de VC-dimension bornée. Notre étude détaillée de la structure cellulaire des cubes partiels de VC-dimension 2, nous a notamment permis d'obtenir que chaque cube partiel de VC-dimension 2 admet une complétion ample de même VC-dimension. En revanche, compléter sans augmenter la VC-dimension n'est plus possible en VC-dimension supérieure. En effet, il existe un cube partiel de Q_5 de VC-dimension 3, illustré dans la figure 8.2, tel que toute complétion ample est de VC-dimension au moins 4.

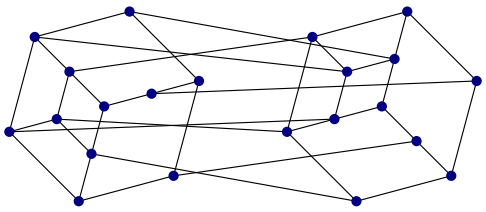


FIGURE 8.2. – Un cube partiel de VC-dimension 3 ne pouvant pas être complété en cube partiel ample de même VC-dimension.

Ce dernier fait partie d'un ensemble de six sous-graphes isométriques de Q_5 qui nécessitent une augmentation de la VC-dimension lorsque nous les complétons en amples. L'exemple donné dans la figure 8.2 est un sous-graphe isométrique des cinq autres. Ces

exemples ont été obtenus en utilisant le logiciel SageMath [87] et la base de donnée des cubes partiels de Q_5 fournit par MARC [67]. Bien qu'en dimension supérieure nous ne puissions pas compléter les cubes partiels sans augmenter la VC-dimension, nous suspectons que cette augmentation est affine, voire uniquement additive. Dans ce contexte, nous posons naturellement la question suivante :

Question 1. *Existe-t-il une constante c telle que tout cube partiel de VC-dimension d admette une complétion ample de VC-dimension $d + c$?*

Une piste possible pour aborder la question 1 serait serait de généraliser nos résultats. En effet, nous avons l'impression que certains de nos résultats sur les disques, utilisés dans les preuves des caractérisations des cubes partiels de VC-dimension au plus 2, peuvent être étendus aux boules. Un cube partiel G est une *d-boule* si $G \in \mathscr{F}(Q_{d+1})$ et G contient un sous-graphe isométrique antipodal $C \in \mathscr{F}(Q_{d+1})$ tel que $G = \mathrm{conv}(C)$.

Une des motivations centrales pour les complétions amples est qu'en utilisant les schémas de compression de MORAN et WARMUTH [68], nous pouvons obtenir des schémas de compression non propres. Dans cette thèse, nous avons présenté des schémas de compression étiquetés propres de taille d pour les COMs de VC-dimension d qui généralisent ceux de MORAN et WARMUTH [68] pour les amples. Cela entraîne une question plus faible de la question 1 où nous compléterions vers les graphes de topes de COMs.

Nous avons étendu les cubes partiels de VC-dimension 2 à des cubes partiels amples de même VC-dimension. Pour terminer de traiter le cas de la VC-dimension 2, il serait particulièrement intéressant d'obtenir une telle complétion pour tout sous-graphe induit d'hypercube sans trop augmenter la VC-dimension. Nous illustrons dans la figure 8.3 un sous-graphe induit Z de Q_4 non-isométrique de VC-dimension 2 tel que tout cube partiel le contenant est de VC-dimension 3.

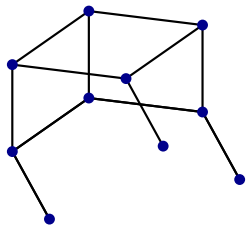


FIGURE 8.3. – Un sous-graphe induit Z de Q_4 de VC-dimension 2 tel que tout cube partiel contenant Z est de VC-dimension 3.

Plus généralement, dans un projet en cours avec Sébastien RATEL, nous nous intéressons à la question d'étendre tout sous-graphe d'hypercube de VC-dimension d à un cube partiel de VC-dimension $O(d)$. Nous avons montré que pour toute famille d'ensembles $\mathscr{S}$, il existe une famille d'ensembles connexe $\mathscr{S}_{\text{connexe}}$ telle que $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{S}_{\text{connexe}}$ et que $\text{VC-dim}(\mathscr{S}_{\text{connexe}}) \leq \text{VC-dim}(\mathscr{S}) + 1$. Il se trouve que cette borne supérieure est serrée puisqu'il existe une famille d'ensembles non-connexe, présentée dans la figure 8.4, telle que l'ajout de n'importe quel autre ensemble de $Q(U)$ augmente la VC-dimension.

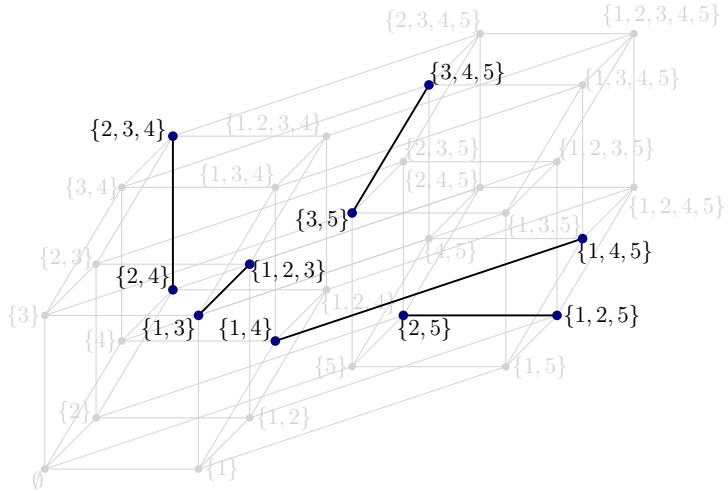


FIGURE 8.4. – Exemple d'une famille d'ensembles de VC-dimension 2 dont le graphe de 1-inclusion est non connexe et dans lequel tout ajout de sommet augmente strictement la VC-dimension.

En revanche, la question de savoir si tout graphe de 1-inclusion d'une famille d'ensembles (connexe) peut être complétée en un cube partiel reste ouverte. Le graphe Z de la figure 8.3 montre que cette complétion doit aussi augmenter la VC-dimension. Notons que NISSE et KNAUER [74] se sont aussi intéressés à cette complétion mais sous un autre aspect. En effet, leur paramètre n'était pas la VC-dimension mais la taille de la famille obtenue. Ils se demandent en particulier si pour ensemble de sommets $\mathscr{S}$ de l'hypercube Q_d, il existe un cube partiel G de Q_d contenant $\mathscr{S}$ tel que $|V(G)|$ est polynomial en $|\mathscr{S}| + d$.

Classes closes par pc-mineur

Durant cette thèse, nous avons étudié et analysé différentes classes de cubes partiels, et notamment celles admettant peu de pc-mineurs minimaux exclus.

Dans le chapitre 7, nous avons caractérisé les cubes partiels plongeables isométriquement dans la grille $\mathbb{Z}^2$ et dans les cylindres larges (théorèmes 15 et 16). Comme évoqué dans la section 7.8, contrairement à la classe des cylindres partiels, la classe des cylindres larges n'est pas close par pc-mineur. En particulier, la classe des cubes partiels dans $\mathscr{F}^*(\mathscr{J})$ est plus grande que celle des cylindres partiels. Nous étudions actuellement les cubes partiels qui sont plongeables isométriquement dans les cylindres fins. Leur caractérisation par sous-graphes isométriques minimaux interdits nous permettrait d'obtenir une caractérisation par sous-graphes isométriques minimaux interdits pour les cylindres partiels.

Dans une suite logique, nous pouvons aussi nous demander quels sont les cubes partiels plongeables isométriquement dans le *tore*, *i.e.*, dans le produit cartésien de deux cycles de longueur paire. Il existe déjà des caractérisations en ce qui concerne le produit de deux arbres. En effet, ce produit a été caractérisé par [12] par mineurs et sous-graphes convexes. Il serait

aussi intéressant de regarder les pc-mineurs minimaux exclus dans d'autres structures assez similaires telles que les produits cartésiens d'un chemin par une étoile, d'un chemin par un arbre, ou encore d'un arbre par un cycle.

Au cours de cette thèse, nous avons longtemps essayé d'étendre le résultat de BANDELT et CHEPOI [7, 8] (proposition 27) en dimension supérieure. Cependant, cette question est toujours ouverte. N'ayant trouver aucun contre-exemple à ce résultat pour $\mathbb{Z}^3$, nous faisons la conjecture suivante (dont une direction est facile) :

Conjecture 4. Un graphe médian est plongeable isométriquement dans $\mathbb{Z}^3$ (respectivement dans $\mathbb{Z}^d$) si et seulement si chacun de ses pc-mineurs admet au plus 6 (respectivement $2d$) demi-espaces minimaux.

Une des difficultés que nous avons rencontré est la non-rigidité des plongements de certains graphes médians possédant 6 demi-espaces minimaux. En effet, la roue bipartie de taille 6 n'admet pas un unique plongement isométrique dans $\mathbb{Z}^3$. Nous illustrons dans la figure 8.5 les deux plongements isométriques possibles de cette roue dans $\mathbb{Z}^3$. Ces exemples nous montrent que le plongement ne peut pas être réalisé localement.

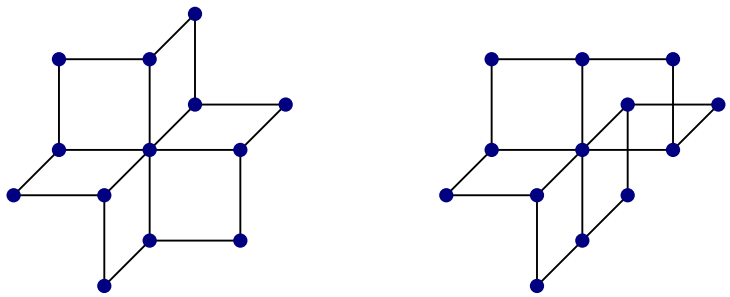


FIGURE 8.5. – Deux plongements isométriques de la roue bipartie de taille 6 dans $\mathbb{Z}^3$.

Une autre façon de caractériser la classe des cubes partiels plongeables isométriquement dans $\mathbb{Z}^d$, notée $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}^d}$, est de déterminer leurs pc-mineurs minimaux exclus. Plus généralement, la question de l'existence d'une telle caractérisation de ces graphes par un nombre fini de pc-mineurs minimaux exclu est ouverte. Notons que la conjecture 4 impliquerait que ce nombre de pc-mineurs minimaux exclus serait fini. D'un autre côté, nous avons montré qu'il existe au moins 2^{d-2} pc-mineurs exclus pour les cubes partiels plongeables isométriquement dans la grille $\mathbb{Z}^d$. Nous pensons qu'il est possible d'affiner cette borne inférieure.

Venant de $\mathbb{Z}^d$, nous pouvons observer que le cube partiel $K_{1,2d+1}$ n'est pas plongeable dans la grille $\mathbb{Z}^d$. Finalement, la classe $\mathscr{F}(K_{1,k})$ est intéressante. En particulier, les graphes des treillis distributifs correspondent à la classe $\mathscr{F}(C_6, Q_3^-, K_{1,3})$ et appartiennent à la classe $\mathscr{F}(K_{1,3})$. Une autre classe intermédiaire correspond à la classe des cubes partiels tels que chacun de leurs convexes est l'enveloppe convexe d'au plus k sommets. Notons-la $\mathscr{G}^k_{\text{conv}}$. Nous avons montré que cette classe est close par pc-mineur et que si un cube partiel appartient à $\mathscr{G}^{k-1}_{\text{conv}}$, alors il appartient à $\mathscr{F}(K_{1,k})$. Plus précisément, nous avons les inclusions suivantes :

$$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}^d} \subsetneq \mathscr{G}^{2d}_{\text{conv}} \subsetneq \mathscr{F}(K_{1,2d+1}).$$

Notons que les inclusions sont strictes. En effet, nous avons exhibé un cube partiel qui n'est pas l'enveloppe convexe de $k-1$ sommets et qui n'admet pas $K_{1,k}$ comme pc-mineur, voir la figure 8.6.

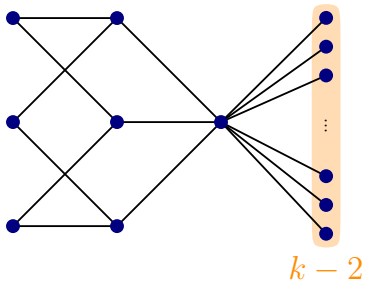


FIGURE 8.6. – Un cube partiel $G \in \mathscr{F}(K_{1,k})$ tel que G est l'enveloppe convexe de $k+1$ sommets.

La première inclusion est aussi stricte puisque tous les hypercubes Q_{d+1} avec $d \geq 1$ et leurs sous-graphes convexes sont des intervalles, *i.e.*, ils appartiennent à la classe $\mathscr{G}^2_{\text{conv}} \subseteq \mathscr{G}^{2d}_{\text{conv}}$, mais ne sont pas plongeables isométriquement dans la grille $\mathbb{Z}^d$. En général, nous pensons que ces trois classes sont très intéressantes et valent le coup d'être étudiées.

Bibliographie

[1] Marie ALBENQUE et Kolja KNAUER. « Convexity in partial cubes : the hull number ». In : *Discrete Mathematics* 339.2 (2016), p. 866-876 (cf. p. 39, 107).

[2] Richard P. ANSTEE, Lajos RÓNYAI et Attila SALI. « Shattering news ». In : *Graphs and Combinatorics* 18.1 (2002), p. 59-73 (cf. p. 28).

[3] S.P. AVANN. « Metric ternary distributive semi-lattices ». In : *Proceedings of the American Mathematical Society* 12.3 (1961), p. 407-414 (cf. p. 46).

[4] Hans-Jürgen BANDELT. « Retracts of hypercubes ». In : *Journal of Graph Theory* 8.4 (1984), p. 501-510 (cf. p. 47).

[5] Hans-Jürgen BANDELT. « Graphs with intrinsic S_3 convexities ». In : *Journal of Graph Theory* 13.2 (1989), p. 215-228 (cf. p. 39, 107).

[6] Hans-Jürgen BANDELT et Victor CHEPOI. « Cellular bipartite graphs ». In : *European Journal of Combinatorics* 17.2–3 (1996), p. 121-134 (cf. p. 53).

[7] Hans-Jürgen BANDELT et Victor CHEPOI. « Embedding metric spaces in the rectilinear plane : a six-point criterion ». In : *Discrete & Computational Geometry* 15.1 (1996), p. 107-117 (cf. p. 16, 119, 144).

[8] Hans-Jürgen BANDELT et Victor CHEPOI. « Embedding into the rectilinear grid ». In : *Networks : An International Journal* 32.2 (1998), p. 127-132 (cf. p. 16, 119, 144).

[9] Hans-Jürgen BANDELT et Victor CHEPOI. « Metric graph theory and geometry : a survey ». In : *Contemporary Mathematics* 453 (2008), p. 49-86 (cf. p. 13, 14, 47, 53, 65).

[10] Hans-Jürgen BANDELT, Victor CHEPOI, Andreas DRESS et Jack KOOLEN. « Combinatorics of lopsided sets ». In : *European Journal of Combinatorics* 27.5 (2006), p. 669-689 (cf. p. 13, 14, 28-30, 36, 37, 48).

[11] Hans-Jürgen BANDELT, Victor CHEPOI, Andreas DRESS et Jack KOOLEN. « Geometry of lopsided sets ». unpublished (cf. p. 48).

[12] Hans-Jürgen BANDELT, Victor CHEPOI et David EPPSTEIN. « Ramified rectilinear polygons : coordinatization by dendrons ». In : *Discrete & Computational Geometry* 54.4 (2015), p. 771-797 (cf. p. 143).

[13] Hans-Jürgen BANDELT, Victor CHEPOI et Kolja KNAUER. « COMs : complexes of oriented matroids ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 156 (2018), p. 195-237 (cf. p. 14, 30, 33-37, 50, 51, 86-89, 93, 107).

[14] Jean-Pierre BARTHÉLEMY et Julien CONSTANTIN. « Median graphs, parallelism and posets ». In : *Discrete Mathematics* 111.1-3 (1993), p. 49-63 (cf. p. 14, 47).

[15] Shai BEN-DAVID et Ami LITMAN. « Combinatorial variability of Vapnik-Chervonenkis classes with applications to sample compression schemes ». In : *Discrete Applied Mathematics* 86.1 (1998), p. 3-25 (cf. p. 105).

[16] Anders BJÖRNER. « Topological methods ». In : *Handbook of Combinatorics*. T. 2. 1995, p. 1819-1872 (cf. p. 89).

[17] Anders BJÖRNER, Michel LAS VERGNAS, Bernd STURMFELS, Neil WHITE et Gunter M. ZIEGLER. *Oriented Matroids*. 46. Cambridge University Press, 1999 (cf. p. 14, 30, 32, 33, 35, 50, 92, 94).

[18] Robert G. BLAND et Michel LAS VERGNAS. « Orientability of matroids ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 24.1 (1978), p. 94-123 (cf. p. 14, 31).

[19] Béla BOLLOBÁS et Andrew J. RADCLIFFE. « Defect Sauer results ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 72.2 (1995), p. 189-208 (cf. p. 13, 28, 29).

[20] Boštjan BREŠAR. « Characterizing almost-median graphs ». In : *European Journal of Combinatorics* 28.3 (2007), p. 916-920 (cf. p. 53).

[21] Peter BUNEMAN. « The recovery of trees from measures of dissimilarity ». In : *Mathematics in the Archaeological and Historical Sciences* (1971) (cf. p. 66).

[22] Jérémie CHALOPIN, Victor CHEPOI, Fionn MC INERNEY, Sébastien RATEL et Yann VAXÈS. « Distinguishing and compressing balls in graphs ». in preparation (cf. p. 29, 105).

[23] Jérémie CHALOPIN, Victor CHEPOI, Shay MORAN et Manfred WARMUTH. « Unlabeled Sample Compression Schemes and Corner Peelings for Ample and Maximum Classes ». In : *ICALP* (2019), p. 34-1 (cf. p. 30, 105).

[24] Victor CHEPOI. « d-Convex Sets in Graphs ». In : *Dissertation* (1986) (cf. p. 13, 39, 42, 45, 53, 107).

[25] Victor CHEPOI. « Isometric subgraphs of Hamming graphs and d-convexity ». In : *Cybernetics* 24.1 (1988), p. 6-11 (cf. p. 13, 41, 45, 53).

[26] Victor CHEPOI. « Separation of two convex sets in convexity structures ». In : *Journal of Geometry* 50.1-2 (1994), p. 30-51 (cf. p. 13, 42).

[27] Victor CHEPOI. « Graphs of some CAT(0) complexes ». In : *Advances in Applied Mathematics* 24.2 (2000), p. 125-179 (cf. p. 14, 47).

[28] Victor CHEPOI, Kolja KNAUER et Tilen MARC. « Hypercellular graphs : Partial cubes without Q_3^- as partial cube minor ». In : *Discrete Mathematics* 343.4 (2020), p. 111678 (cf. p. 13, 16, 42-44, 46, 53, 65, 80, 86, 121).

[29] Victor CHEPOI, Kolja KNAUER et Manon PHILIBERT. « Two-dimensional partial cubes ». In : *The Electronic Journal of Combinatorics* (2020), P3-29 (cf. p. 64).

[30] Victor CHEPOI, Kolja KNAUER et Manon PHILIBERT. *Labeled sample compression schemes for complexes of oriented matroids*. 2021 (cf. p. 104).

[31] Victor CHEPOI, Kolja KNAUER et Manon PHILIBERT. « Ample completions of OMs and CUOMs ». In : *SIAM Journal on Discrete Mathematics* (to appear). arXiv 2007.12527 (cf. p. 90).

[32] Ilda P.F. DA SILVA. « Axioms for maximal vectors of an oriented matroid ; a combinatorial characterization of the regions determined by an arrangement of pseudohyperplanes ». In : *European Journal of Combinatorics* 16.2 (1995), p. 125-145 (cf. p. 61).

[33] Pierre DELIGNE. « Les immeubles des groupes de tresses généralisés ». In : *Inventiones Mathematicae* 17.4 (1972), p. 273-302 (cf. p. 13).

[34] Rémi DESGRANGES et Kolja KNAUER. « A correction of a characterization of planar partial cubes ». In : *Discrete Mathematics* 340.6 (2017), p. 1151-1153 (cf. p. 43).

[35] Michel Marie DEZA et Monique LAURENT. « Geometry of Cuts and Metrics ». In : *Springer* 2 (1997) (cf. p. 13, 53).

[36] Dragomir Ž. DJOKOVIĆ. « Distance-preserving subgraphs of hypercubes ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 14.3 (1973), p. 263-267 (cf. p. 13, 23, 24, 38, 39, 53).

[37] Andreas DRESS. « Towards a theory of holistic clustering ». In : *DIMACS : Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 37 (1997), p. 271-289 (cf. p. 28).

[38] Andreas W.M. DRESS, Katharina T. HUBER, Jacobus KOOLEN, Vincent MOULTON et Andreas SPILLNER. *Basic phylogenetic combinatorics*. Cambridge University Press, 2012 (cf. p. 66).

[39] Andreas W.M. DRESS et Rudolf SCHARLAU. « Gated sets in metric spaces ». In : *Aequationes Mathematicae* 34.1 (1987), p. 112-120 (cf. p. 22, 99).

[40] Paul H. EDELMAN et Robert E. JAMISON. « The theory of convex geometries ». In : *Geometriae Dedicata* 19.3 (1985), p. 247-270 (cf. p. 14).

[41] David EPPSTEIN. « Recognizing partial cubes in quadratic time ». In : *Journal of Graph Algorithms and Applications* 15.2 (2011), p. 269-293 (cf. p. 13, 53).

[42] Sally FLOYD et Manfred WARMUTH. « Sample compression, learnability, and the Vapnik-Chervonenkis dimension ». In : *Machine Learning* 21.3 (1995), p. 269-304 (cf. p. 15, 16, 28, 30, 65, 104, 140).

[43] Jon FOLKMAN et Jim LAWRENCE. « Oriented matroids ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 25.2 (1978), p. 199-236 (cf. p. 14, 31, 50).

[44] Bernd GÄRTNER et Emo WELZL. « Vapnik-Chervonenkis dimension and (pseudo-) hyperplane arrangements ». In : *Discrete & Computational Geometry* 12.4 (1994), p. 399-432 (cf. p. 28).

[45] Ronald L. GRAHAM et Henry O. POLLAK. « On the addressing problem for loop switching ». In : *The Bell System Technical Journal* 50.8 (1971), p. 2495-2519 (cf. p. 52).

[46] Mikhael GROMOV. « Hyperbolic groups ». In : *Essays in Group Theory*. Springer, 1987, p. 75-263 (cf. p. 47).

[47] Richard H. HAMMACK, Wilfried IMRICH et Sandi KLAVŽAR. *Handbook of Product Graphs*. T. 2. CRC Press Boca Raton, 2011 (cf. p. 13, 21, 22, 53).

[48] Keiichi HANDA. « Topes of oriented matroids and related structures ». In : *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* 29.2 (1993), p. 235-266 (cf. p. 53).

[49] David HAUSSLER. « Sphere packing numbers for subsets of the Boolean n-cube with bounded Vapnik-Chervonenkis dimension ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 69.2 (1995), p. 217-232 (cf. p. 12, 25).

[50] David HAUSSLER, Nick LITTLESTONE et Manfred K. WARMUTH. « Predicting {0, 1}-functions on randomly drawn points ». In : *Information and Computation* 115.2 (1994), p. 248-292 (cf. p. 12, 25).

[51] David HELMBOLD, Robert SLOAN et Manfred K. WARMUTH. « Learning nested differences of intersection-closed concept classes ». In : *Machine Learning* 5.2 (1990), p. 165-196 (cf. p. 105).

[52] Winfried HOCHSTÄTTLER et Volkmar WELKER. « The Varchenko determinant for oriented matroids ». In : *Mathematische Zeitschrift* 293.3 (2019), p. 1415-1430 (cf. p. 107).

[53] Wilfried IMRICH et Sandi KLAVŽAR. « A convexity lemma and expansion procedures for bipartite graphs ». In : *European Journal of Combinatorics* 19.6 (1998), p. 677-685 (cf. p. 53).

[54] Wilfried IMRICH et Sandi KLAVŽAR. *Product Graphs : Structure and Recognition*. Wiley, 2000 (cf. p. 47).

[55] John R. ISBELL. « Median algebra ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 260.2 (1980), p. 319-362 (cf. p. 47).

[56] Johan KARLANDER. « A characterization of affine sign vector systems ». In : *PhD Thesis, Kungliga Tekniska Högskolan Stockholm* (1992), p. 67-91 (cf. p. 36).

[57] Sandi KLAVŽAR et Henry Martyn MULDER. « Median graphs : characterizations, location theory and related structures ». In : *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 30 (1999), p. 103-128 (cf. p. 14).

[58] Sandi KLAVŽAR et Sergey SHPECTOROV. « Characterizing almost-median graphs II ». In : *Discrete Mathematics* 312.2 (2012), p. 462-464 (cf. p. 53).

[59] Sandi KLAVŽAR et Sergey SHPECTOROV. « Convex excess in partial cubes ». In : *Journal of Graph Theory* 69.4 (2012), p. 356-369 (cf. p. 86, 88).

[60] Sandi KLAVŽAR, Petra ŽIGERT et Gunnar BRINKMANN. « Resonance graphs of catacondensed even ring systems are median ». In : *Discrete Mathematics* 253.1-3 (2002), p. 35-43 (cf. p. 47).

[61] Kolja KNAUER et Tilen MARC. « Corners and simpliciality in oriented matroids and partial cubes ». In : *arXiv :2002.11403* (2020) (cf. p. 92).

[62] Kolja KNAUER et Tilen MARC. « On tope graphs of complexes of oriented matroids ». In : *Discrete & Computational Geometry* 63.2 (2020), p. 377-417 (cf. p. 14, 42, 43, 51, 52, 60, 61, 77, 78, 94).

[63] Dima KUZMIN et Manfred K. WARMUTH. « Unlabeled compression schemes for maximum classes ». In : *Journal of Machine Learning Research* 8.9 (2007) (cf. p. 30, 105).

[64] James LAWRENCE. « Lopsided sets and orthant-intersection by convex sets ». In : *Pacific Journal of Mathematics* 104.1 (1983), p. 155-173 (cf. p. 13, 28-30, 37, 92).

[65] Nick LITTLESTONE et Manfred K. WARMUTH. « Relating data compression and learnability ». unpublished. 1986 (cf. p. 14, 29, 30, 105).

[66] Tilen MARC. *Cycling in Hypercubes*. Thèse de doctorat. Univ. of Ljubljana, 2018 (cf. p. 42, 53).

[67] Tilen MARC. *Repository of partial cubes*. https ://github.com/tilenmarc/partial_cubes (cf. p. 142).

[68] Shay MORAN et Manfred K. WARMUTH. « Labeled compression schemes for extremal classes ». In : *International Conference on Algorithmic Learning Theory* (2016), p. 34-49 (cf. p. 15, 16, 30, 65, 105, 113, 142).

[69] Shay MORAN et Amir YEHUDAYOFF. « Sample compression schemes for VC classes ». In : *Journal of the ACM* 63.3 (2016), p. 1-10 (cf. p. 15, 30, 105).

[70] Henry Martyn MULDER. « The structure of median graphs ». In : *Discrete Mathematics* 24.2 (1978), p. 197-204 (cf. p. 47).

[71] Henry Martyn MULDER. « The interval function of a graph ». In : *Math. Centre Tracts 132, Amsterdam* (1980) (cf. p. 45, 47).

[72] Henry Martyn MULDER et Alexander SCHRIJVER. « Median graphs and Helly hypergraphs ». In : *Discrete Mathematics* 25.1 (1979), p. 41-50 (cf. p. 46).

[73] Ladislav NEBESKY. « Median graphs ». In : *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 12.2 (1971), p. 317-325 (cf. p. 46).

[74] Nicolas NISSE et Kolja KNAUER. « Computing metric hulls in graphs ». In : *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* 21 (2019) (cf. p. 143).

[75] Sergei OVCHINNIKOV. *Graphs and Cubes*. Springer Science & Business Media, 2011 (cf. p. 13, 53).

[76] Alain PAJOR. « Sous-espaces ℓ_1^n des espaces de Banach ». In : *Hermann, Paris, Collection Travaux en cours* (1985) (cf. p. 28).

[77] Dömötör PÁLVÖLGYI et Gábor TARDOS. « Unlabeled compression schemes exceeding the VC-dimension ». In : *Discrete Applied Mathematics* 276 (2020), p. 102-107 (cf. p. 30, 105).

[78] Norbert POLAT. « Netlike partial cubes I. General properties ». In : *Discrete Mathematics* 307.22 (2007), p. 2704-2722 (cf. p. 53).

[79] Norbert POLAT. « Netlike partial cubes II. Retracts and netlike subgraphs ». In : *Discrete Mathematics* 309.8 (2009), p. 1986-1998 (cf. p. 53).

[80] Norbert POLAT. « Netlike partial cubes III. The median cycle property ». In : *Discrete Mathematics* 309.8 (2009), p. 2119-2133 (cf. p. 53).

[81] Norbert POLAT. « Netlike partial cubes, IV : Fixed finite subgraph theorems ». In : *European Journal of Combinatorics* 30.5 (2009), p. 1194-1204 (cf. p. 53).

[82] Norbert POLAT. « On some characterizations of antipodal partial cubes. » In : *Discussiones Mathematicae : Graph Theory* 39.2 (2019) (cf. p. 53).

[83] Norbert POLAT. « Peano partial cubes ». In : *arXiv :1901.09075* (2019) (cf. p. 53).

[84] Milan RANDIĆ. « Resonance in catacondensed benzenoid hydrocarbons ». In : *International Journal of Quantum Chemistry* 63.2 (1997), p. 585-600 (cf. p. 47).

[85] Benjamin I.P. RUBINSTEIN et J. Hyam RUBINSTEIN. « A geometric approach to sample compression. » In : *Journal of Machine Learning Research* 13.4 (2012) (cf. p. 105).

[86] J. Hyam RUBINSTEIN, Benjamin I.P. RUBINSTEIN et Peter L. BARTLETT. « Bounding embeddings of VC classes into maximum classes ». In : *Measures of complexity*. Springer, 2015, p. 303-325 (cf. p. 15).

[87] William STEIN. *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 8.1)*. https ://www.sagemath.org. 2017 (cf. p. 142).

[88] Norbert SAUER. « On the density of families of sets ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 13.1 (1972), p. 145-147 (cf. p. 27, 28).

[89] Saharon SHELAH. « A combinatorial problem ; stability and order for models and theories in infinitary languages ». In : *Pacific Journal of Mathematics* 41.1 (1972), p. 247-261 (cf. p. 27).

[90] Geoffrey C. SHEPHARD. « Combinatorial properties of associated zonotopes ». In : *Canadian Journal of Mathematics* 26.2 (1974), p. 302-321 (cf. p. 16).

[91] Leslie G. VALIANT. « A theory of the learnable ». In : *Communications of the ACM* 27.11 (1984), p. 1134-1142 (cf. p. 14, 26).

[92] Marcel VAN DE VEL. « Matching binary convexities ». In : *Topology and its Applications* 16.3 (1983), p. 207-235 (cf. p. 47).

[93] Vladimir N. VAPNIK et Alexey Ya CHERVONENKIS. « On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities ». In : *Theory of Probability and its Applications* 16.2 (1971), p. 264-281 (cf. p. 12, 14, 27).

[94] Douglas H. WIEDEMANN. *Hamming geometry*. University of Waterloo, 1987 (cf. p. 13, 28).

Index

Symbols

Θ-classe . . . 38
1-complétion canonique . . . 83
2d-amalgame . . . 88

A

adjacentes (arêtes) . . . 19
adjacents (sommets) . . . 19
amalgame . . . 20
AMP-amalgame (graphes) . . . 48
AMP-amalgame . . . 37
ample (cube partiel) . . . 29
antipode . . . 23
arbre . . . 19
arbre isométrique virtuel . . . 66
arène . . . 126
arête . . . 18

B

base d'un colisée . . . 130
base d'une échelle partielle . . . 127
bordure d'un pseudo-disque . . . 75

C

carrière (COM) . . . 35
carrière (cube partiel) . . . 87
chaîne (grille) . . . 120
chemin . . . 19
circuit (non orienté) . . . 33
circuit . . . 32
classe de concepts . . . 25
cocircuit . . . 32
colisée . . . 130
colisée de base ℓ . . . 130
COM-amalgame . . . 36
complétion (famille d'ensembles) . . . 29
complétion ample . . . 48
complétion cyclique . . . 84
Complexe de Matroïdes Orientés . . . 33
COM réalisable . . . 34
CUOM . . . 34
composante connexe . . . 19
composition . . . 31
concept . . . 25
contraction (COM) . . . 35
contraction (cube partiel) . . . 41
couche . . . 22
couverture . . . 20
couverture isométrique . . . 45
covecteur . . . 30
croiser (Θ-classes) . . . 40
cube partiel . . . 23
cube partiel affine . . . 43
cube partiel bidimensionnel . . . 64
cubes parallèles . . . 48
cycle . . . 19
cycle long . . . 74
cycles parallèles . . . 123
cylindre pair . . . 22
cylindre . . . 22
cylindre partiel . . . 117

D

degré (sommet) . . . 19
demi-carrière (COM) . . . 35
demi-carrière (cube partiel) . . . 87
demi-espace (COM) . . . 35
demi-espace étendu (COM) . . . 35
demi-espace minimal . . . 119
demi-espaces complémentaires . . . 24
demi-espace étendu (cube partiel) . . . 87
dimension isométrique . . . 38
disjointe (Θ-classe) . . . 40

disque 75
distance 22

E

échantillon d'apprentissage 25
échantillon d'apprentissage réalisable 29
échantillon plein 109
échelle 127
échelle partielle 127
ensemble indépendant 19
ensemble fortement pulvérisé 28
ensemble pulvérisé 27
ensemble zéro 31
enveloppe convexe 23
enveloppe portée 23
expansion 20
expansion convexe 45
expansion isométrique 45
expansion périphérique 21
extrémité (chemin) 19
extrémité (arête) 18

F

face (COM) 33
face (graphe) 50
face propre 33
faces adjacentes 99
faces parallèles 99
facette 33
facette cube 103
facette originale 103
facteur 21
famille ample 28
famille maximum 28
feuille 19
fibre (ensemble) 27
fibre (graphe) 55
fibre (produit cartésien) 22
forêt 19
frontière 39

G

galerie de longueur k 48
galerie 99
galerie géodésique 48
galerie géodésique 99
G_i-copie 22
graphe antipodal 23
graphe biparti 19
graphe biparti complet 19
graphe complet 19
graphe connexe 19
graphe de 1-extension 82
graphe de croisement 120
graphe de topes 50
graphe fini 18
graphe de 1-inclusion 25
graphe infini 18
graphe médian 46
graphe non-orienté 18
graphe sans boucle 18
graphe (simple) 18
grille partielle 117

H

hypercube 21, 25
hypercube 19
hyperplan (COM) 35
hyperplan (cube partiel) 39

I

incidente 18
indépendant 33
intersecter (Θ-classe) 40
intervalle 22
isomorphe 19
isomorphisme 19

L

longueur (chemin) 19

M

matroïde (non orienté) 33
matroïde orienté (cocircuits) 32
matroïde orienté (covecteurs) 31
matroïde orienté affine 36
matroïde orienté affine réalisable 36
matroïde orienté réalisable 31
matroïde orienté simple 31
matroïde orienté uniforme 33
matroïde sous-jacent 33
médian 46

mineur (COM) 35
mineur (cube partiel) 42
mineur (graphe) 41

N

n-cycle 19

O

opération de 1-extension 82
orthogonal 32

P

parallèles (Θ-classes) 40
pc-mineur propre 42
plongement isométrique 23
plongement standard 67
porte 22
prisme 21
produit cartésien 21
projection métrique 99
pseudo-disque 75

R

rang 32
restriction (COM) 35
restriction (cube partiel) 41

S

schéma de compression étiqueté 29
schéma de compression non étiqueté 30
schéma de compression propre 29
séparateur 31
séquence unimodale 130
sommet 18
sommet original 20
sommet subdivision 20
sous-graphe 19
sous-graphe convexe 22
sous-graphe induit 19
sous-graphe isométrique 23
sous-graphe plein 109
sous-graphe porté 22
sous-graphe propre 19
sous-produit 22
stable 19
subdivision (graphe) 20
subdivision entière 20
support 30
suppression (COM) 35
système de vecteurs signés 30

T

tope 50
trace 27
treillis 32

U

(u, v)-chemin 19

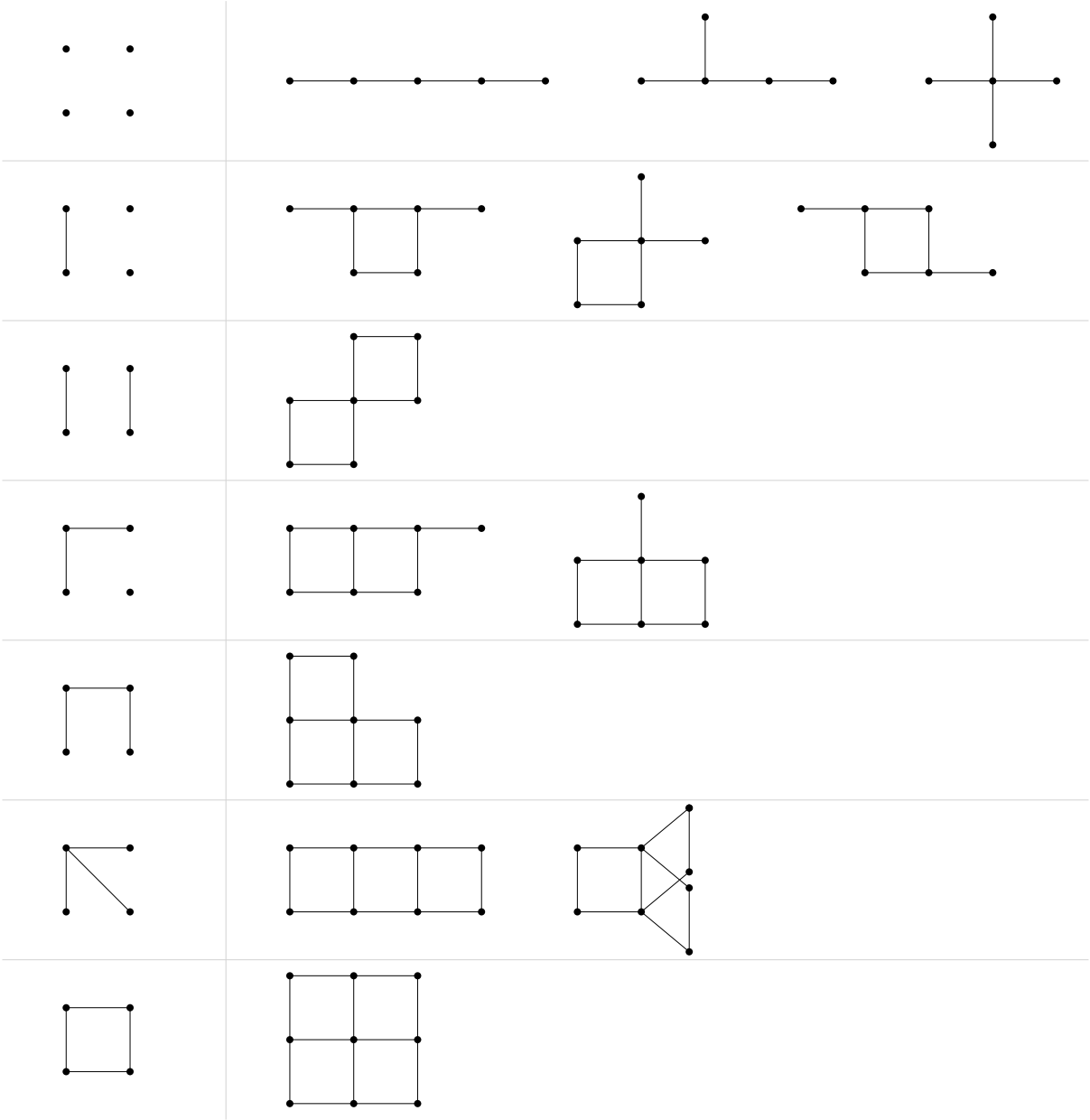
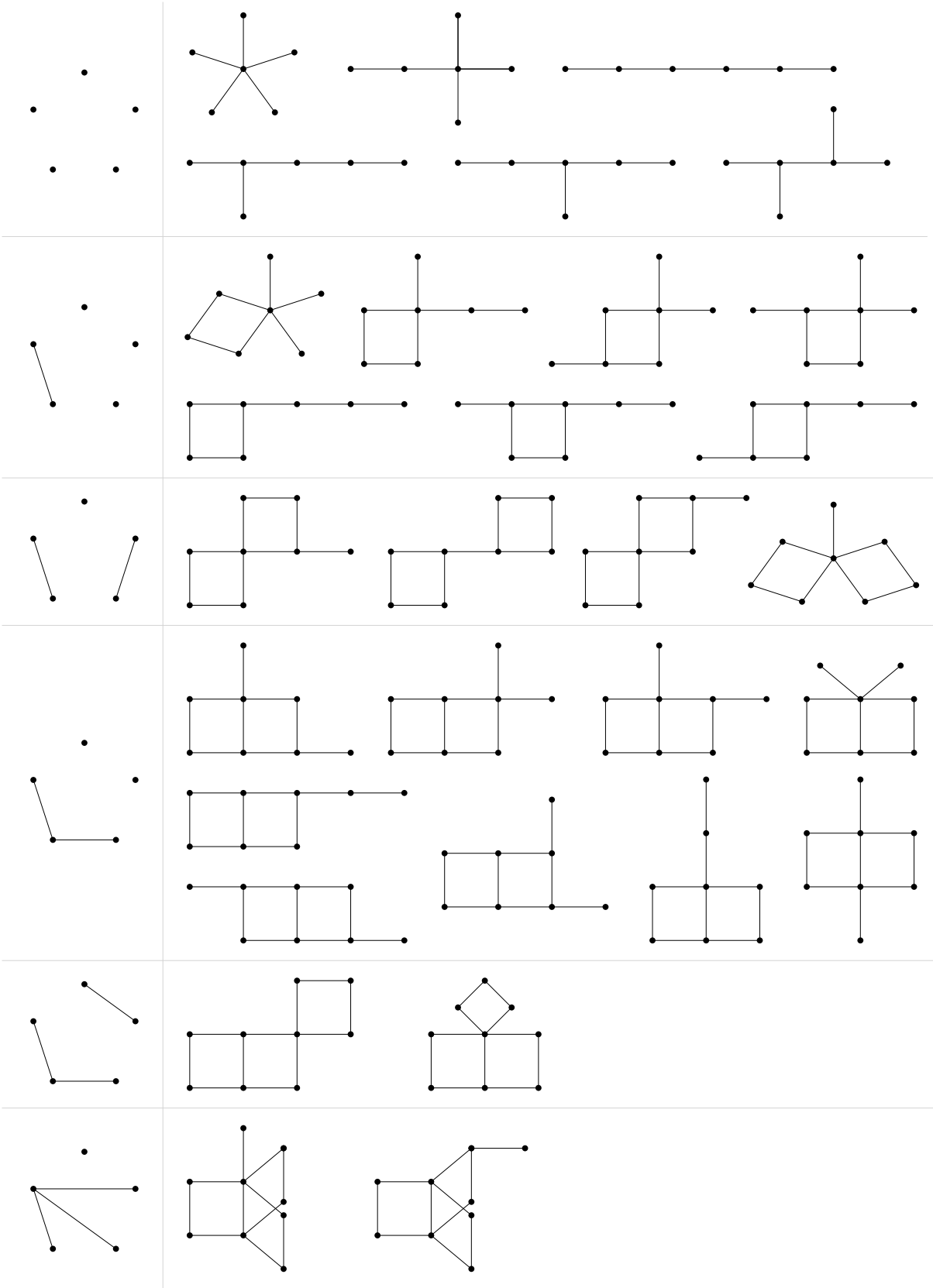
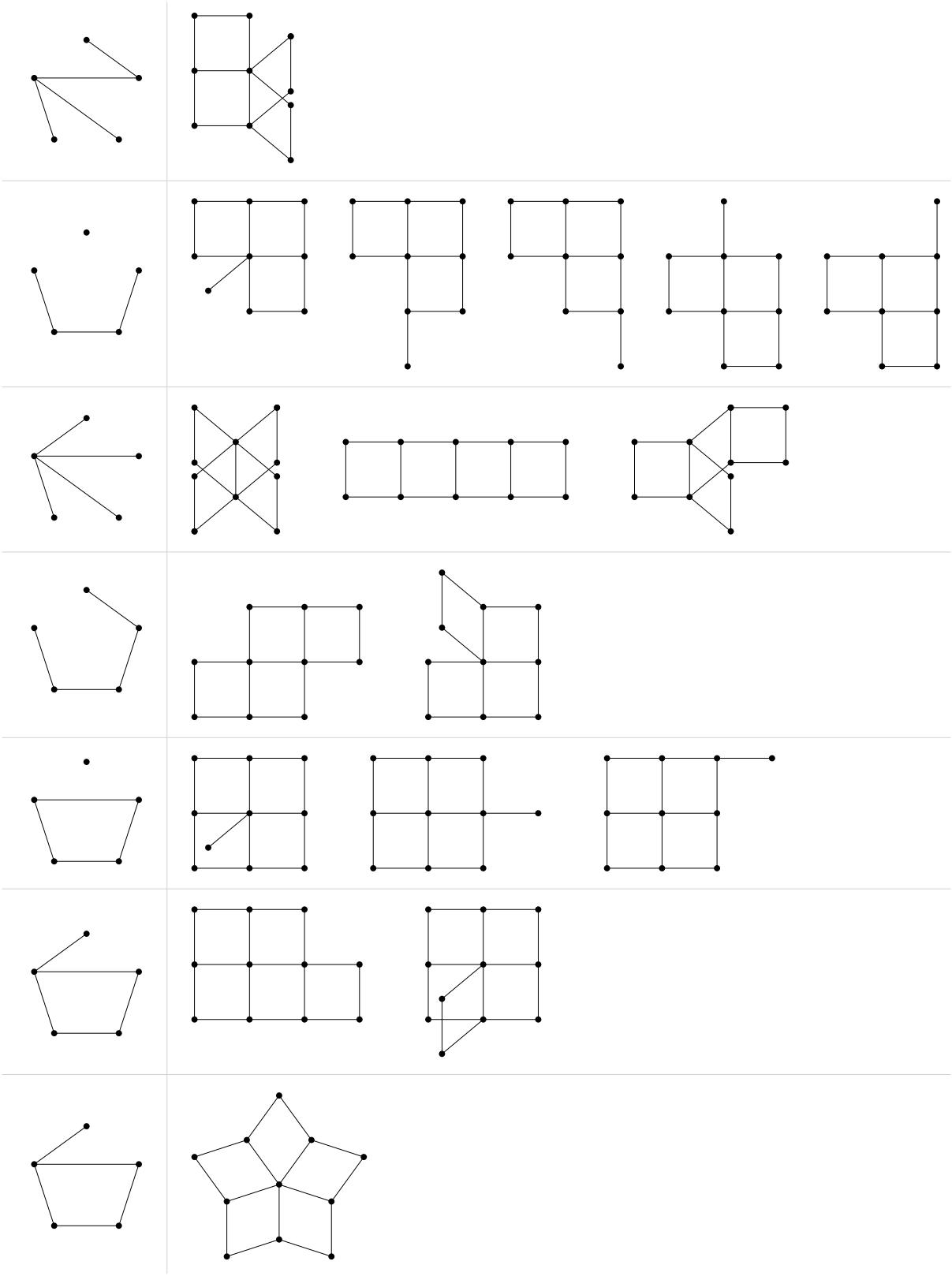
V

VC-dimension (COM) 55
VC-dimension (covecteur) 55
VC-dimension 27
vecteur 32

Y

Y-cube 28

ANNEXES

A. Étude des cas

L'ensemble des graphes de croisement sans triangle à quatre et cinq sommets, et leurs cubes partiels correspondant.