



Activité et travail mathématique à la transition Lycée-Université en Analyse : Le cas des suites $U(n+1)=f(U_n)$

Macarena Flores González

► To cite this version:

Macarena Flores González. Activité et travail mathématique à la transition Lycée-Université en Analyse : Le cas des suites $U(n+1)=f(U_n)$. Mathématiques [math]. Université de Paris, 2021. Français. ⟨NNT : ⟩. ⟨tel-03545417⟩

HAL Id: tel-03545417

<https://hal.science/tel-03545417v1>

Submitted on 8 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Université de Paris

École Doctorale 623 : Savoirs, Science, Éducation

Laboratoire de Didactique André Revuz

**Activité et travail mathématique à la transition
Lycée-Université en Analyse :**

Le cas des suites $u_{n+1} = f(u_n)$

par

Macarena FLORES GONZÁLEZ

THÈSE DE DOCTORAT

Didactique des Disciplines - Mathématiques

Dirigée par M. Fabrice VANDEBROUCK et M. Laurent VIVIER

Présentée et soutenue publiquement le 9 novembre 2021

Devant un jury composé de :

M ^{me} Ghislaine GUEUDET	PU, Université Paris-Saclay, France	Rapporteur
M. Patrick GIBEL	PU, Université de Bordeaux, France	Rapporteur
M ^{me} Elizabeth MONTOYA DELGADILLO	Professor, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chili	Examinatrice
M ^{me} Ivy KIDRON	Professor, Jerusalem College of Technology, Israel	Examinatrice
M. Alain KUZNIAK	PU émérite, Université de Paris, France	Examineur
M. Fabrice VANDEBROUCK	PU, Université de Paris, France	Directeur
M. Laurent VIVIER	MCF-HDR, Université de Paris, France	Directeur



Except where otherwise noted, this work is licensed under
<https://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

« Il est avant toutes choses, et toutes choses subsistent en lui ».

À toi Abba.

Remerciements

Je remercie tout d'abord mes directeurs de thèse Fabrice Vandebrouck et Laurent Vivier qui m'ont guidée et accompagnée ces dernières années. Merci d'avoir été là pour mes questions, pour ma formation à la recherche. Merci de m'avoir encouragée à toujours aller plus loin. Notre équipe a abouti à des communications et des publications scientifiques. Un grand merci à tous les deux.

Merci aux membres de mon jury :

à Ghislaine Gueudet et à Patrick Gibel d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, pour le temps consacré et pour les rapports qui me donnent des pistes clés pour la poursuite de ma recherche ;

à Ivy Kidron, je me souviens du rendez-vous que nous avons eu à Paris, où je t'ai présenté le début de ma recherche. Ce jour-là j'ai compris que j'étais bien en train de mettre en place un *Networking* de théories. Un grand merci pour les orientations et ce moment riche en partage ;

à Alain Kuzniak, pour tes conseils dès mon master en didactique. Merci pour ta bienveillance et pour tes encouragements : merci Alain !

à Elizabeth Montoya, pour chaque conversation que nous avons partagée. Tu as été une de ces rencontres spéciales. Gracias Eli !

Je ne pourrais pas continuer sans mentionner Maha Abboud. Merci Maha d'être un soutien dans des moments importants et une source d'inspiration ces dernières années. Un grand merci pour ton temps, tes conseils, ton amitié. Les jeunes chercheurs du LDAR, dont je fais encore partie, te doivent beaucoup !

Je remercie spécialement le groupe GLU de l'IREM de Paris, et les deux enseignants qui ont contribué à ce travail de thèse, tant pour leurs réflexions que pour leur côté pratique/méthodologique des expérimentations : Charles Rivière et Pascale Creuse. Vous avez été de véritables contributeurs dans ce travail.

Merci aussi à Rosita Páez, pour les questions et réflexions qui m'ont permis d'aller plus en profondeur dans ma problématique de recherche.

Un grand merci à Vivianne Durand-Guerrier et aux membres du GDR DEMIPS, et plus particulièrement au groupe Analyse. Grâce à vous j'ai eu des retours qui m'ont beaucoup aidée et orientée à différentes étapes de ma recherche.

Je souhaite également remercier les personnes qui ont participé à la relecture patiente et consciencieuse de cette thèse : Charles, Elann, Ludovic, Marie-Thérèse et Maryse.

Je remercie ensuite les chercheurs du LDAR et tout particulièrement celles et ceux qui m'ont encouragée et motivée, que ce soit lors de ma présentation au petit séminaire, ou à d'autres occasions : Sophie, Florence, Cécile O.-B., Sonia, Michèle, Brigitte, Aline, Janine, Marc, Christophe, Cécile de H., Philippe, Julie, Julia, Caroline, Luz, Renaud, Zoé, Assia, Edith,

Nadine, Corinne, Emmanuel, Frédérick... Un grand merci aussi à Evelyne Scaron et Jérôme Barberon qui ont été une aide précieuse sur le côté logistique et bibliographique de cette thèse.

Merci aux jeunes chercheurs du LDAR. Merci à Dorian et Corentin pour les équipes de coordination du groupe. Merci aux JC : Clara, Cécile, Agnes, Helmy, Corinne, Sébastien, Paula, Evi, Aurore, Soledad, Maud, Zakaria, Francesca, Matías, Léonard, Estelle, Jannick, Karine, Dominique, Jorge, Claudia, Blandine, Sophie ... : Merci à chacun d'entre vous qui m'avez accueillie et orientée, et puis à ceux que j'ai accueillis et pu accompagner dans les premières années de thèse. Ces réunions ont été pour moi plus qu'un moment de rassemblement, un moment de croissance personnelle et professionnelle.

Je souligne les belles rencontres avec des doctorants de l'ARDM et hors LDAR : Nicolas, Camille, Marta, Gisela, Rodolfo, Sara, Michael, Stéphane... c'était un plaisir de partager cette aventure.

Merci à mes co-bureaux, Zaahra, Yann, Charles et Alice.

Merci à mes deux amis-collègues Florence et Elann : merci pour la camaraderie, pour nos discussions toujours aussi riches au plan professionnel et personnel.

En ce qui concerne les années avant la thèse, je remercie très chaleureusement tout le corps académique et la communauté de l'IMA de la PUCV de Chile, où j'ai passé cinq précieuses années d'études. C'est là-bas que j'ai découvert la didactique des mathématiques et fait des rencontres qui m'ont marquée jusqu'à présent. Aussi, je voudrais remercier spécialement Arturo Mena Lorca, Jaime Mena Lorca, Diana Zakarian, Astrid Morales, Raimundo Olfos, Soledad Estrella, Gonzalo Espinosa, Romina Menares, Carolina Henriquez, Marcela Parraguez, Luisa Aburto, Roberto Johnson : Vous avez tous contribué à ma formation et m'avez enchanté avec l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Sans vous, cette histoire ne serait pas la même !!

Pour que ce travail de thèse puisse aboutir, la vie personnelle est tout aussi importante que la vie professionnelle. A ce titre, je remercie d'abord ma famille au Chili. Papa, merci à toi parce que ce travail est en grande partie le résultat de l'éducation et de toute la curiosité que tu as mise en moi. Maman, merci de me permettre de rêver aussi grand que mes pensées me le permettent, de me soutenir et de m'orienter avec sagesse. Mes sœurs et frère, Karina, Rodrigo et Andrea, merci d'avoir été à tout moment où il le fallait. Nina Erika, ta fidélité et tes conseils m'ont accompagnée bien avant que cette aventure commence !

Merci aussi à mes très chers amis du Chili, qui malgré la distance sont restés des amis inconditionnels : Flor Toledo, Keren Toledo, Victor Vallejo, Paloma Uribe et Jonathan Valero.

Je remercie aussi ma famille en France : mes très chères amies, Kéren, Sarah, Nishma, Léa ; mes parents de cœur Marlène et Alan ; mais aussi Maryse, Johan, les Benjamins, Hervé, Joly, Joël, Hannah, Léa, Michel, Lydie, Angel, Matias (mon petit frère), et toutes les personnes qui m'ont accompagnée et portée à différents moments dès mon arrivée en France.

Je ne saurais pas finir sans remercier celui qui est un de mes piliers : mon époux Ludovic. Merci mi vida d'être inconditionnel et de me soutenir dans chaque défi.

Enfin, ce travail de thèse est le fruit non seulement des trois dernières années, mais aussi d'un rêve qui a commencé il y a environ 10 ans. Je remercie chacune des personnes que j'ai côtoyées

et eu le plaisir de travailler ou de partager un moment avec elles, car la professionnelle que je suis aujourd'hui est aussi le résultat de ces belles rencontres. Merci à tous.

Titre : Activité et travail mathématique à la transition Lycée-Université en Analyse : Le cas de suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Résumé :

Cette recherche se focalise dans le domaine de l'Analyse mathématique et traite la problématique de la transition lycée-université (Gueudet & Thomas, 2020) en France. Pour étudier cette transition, ses ruptures et ses continuités (Gueudet, 2008), nous nous centrons dans une tâche classique de la fin du secondaire et du début de l'université, concernant l'étude des suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction définie sur \mathbb{R} . Le choix dans l'étude de cet objet mathématique est justifié principalement par sa place dans les deux institutions éducatives et son importance d'un point de vue épistémologique.

Grâce aux productions des élèves de la dernière classe de la filière scientifique du lycée et des étudiants en première année de l'université, nous constatons des difficultés résistantes qui rendent compte d'un problème dans la compréhension de l'objet mathématique en question. Nous nous intéressons à étudier cette transition avec une focalisation sur la notion de contrôle en mathématique, sous une perspective cognitivo-épistémologique de l'apprentissage et de l'enseignement. Pour cela nous utilisons une articulation de deux cadres théoriques qui s'y intéressent : la Théorie de l'Activité en Didactique des Mathématiques (Vandebrouck, 2018) et la Théorie des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak et al., 2016). Ainsi, grâce à des analyses effectuées avec les outils théoriques fournis, nous proposons une nouvelle tâche qui pourrait permettre d'aider à traiter les difficultés sur le contrôle mathématique des élèves lors de l'étude de suites récurrentes à la transition lycée-université.

Mots-clefs :

Suites récurrentes, transition lycée-université, activité mathématique, travail mathématique, activité de contrôle, contrôle sémiotique, contrôle instrumental, contrôle discursif, paradigmes de l'analyse.

Title: Activity and mathematical work at the transition from High School to University in Calculus: The case of sequences $u_{n+1} = f(u_n)$

Abstract:

This research is focused on Calculus and it addresses the problem of the Secondary-Tertiary transition (Gueudet & Thomas, 2020) in France. To study this transition, its discontinuities and continuities (Gueudet, 2008), we focus on a classical task in both the end of high school and the beginning of the university, concerning the study of the recursive sequences $u_{n+1} = f(u_n)$, where f is a function defined on \mathbb{R} . The choice of this mathematical object is justified mostly by its prominence in the two educational institutions and its importance from an epistemological point of view.

The response of the students in the last class of the scientific course during the high school and during the first-year of the university, help us to notice resistant difficulties which reflect a problem in the understanding of the mathematical object in question. We are interested in studying this transition with a focus on the notion of control in mathematics, from a cognitive-epistemological perspective of learning and teaching. To do this, we use a networking of two theoretical frameworks: the Activity Theory in Didactics of Mathematics (Vandebrouck, 2018) and the Mathematical Working Spaces Theory (Kuzniak et al., 2016). Thus, based on analyses performed with the theoretical tools provided, we propose a new task that could help students deal with these difficulties on the mathematical control when learning recursive sequences at the Secondary-Tertiary transition.

Keywords:

Recursive sequences, Secondary-Tertiary transition, mathematical activity, mathematical work, control activities, semiotic control, instrumental control, discursive control, paradigms of analysis.

Table des matières

PARTIE I	RAISONS ET CONTEXTUALISATION DE LA THÈSE	17
1	INTRODUCTION	19
2	ÉTAT DE L'ART	25
2.1	Ampleur de la transition Lycée-Université.....	26
2.1.1	La transition L-U en Analyse.....	29
2.1.2	Le rôle de la technologie comme instrument	33
2.1.3	Quel discours mathématique à la transition ? Rôle de la preuve et de la conjecture.....	36
2.2	Les suites.....	38
2.2.1	La notion de suite : convergence et limite.....	38
2.2.2	Les suites définies par récurrence	43
	a) Travaux qui utilisent ces suites dans leur recherche	43
	b) Études qui abordent l'apprentissage ou les difficultés des étudiants des suites $u_{n+1} = f(u_n)$	45
2.2.3	Quelques éléments de l'enseignement actuel de la notion de suite en France	48
2.3	Conclusion du chapitre.....	52
2.3.1	Points à retenir et questions émergentes	52
2.3.2	Caractéristiques de cadre(s) théorique(s) pour traiter cette question	53
3	CADRE THEORIQUE	55
3.1	La Théorie de l'Activité en Didactique des Mathématiques	56
3.1.1	L'étude de l'activité mathématique : outils théoriques.....	59
	a) Adaptations et niveaux de mise en fonctionnement de connaissances .	59
	b) Les Tâches simples et complexes.....	60
	c) Sous-activités mathématiques des élèves.....	61
	d) Le contexte et les médiations	63
	e) Le relief sur les notions	64
3.2	La Théorie des Espaces de Travail Mathématique.....	65
	a) Les dimensions et les plans verticaux dans les ETM	66
	b) Les différents niveaux des ETM.....	68
3.2.1	L'étude du travail mathématique en analyse	69
	Paradigmes de l'analyse	69
3.3	Premières spécificités de suites $u_{n+1} = f(u_n)$ à la transition L-U selon les deux cadres théoriques	72
3.3.1	Les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ selon la TADM.....	72

3.3.2	Les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ selon la théorie des ETM	73
4	NETWORKING DE THEORIES TADM-ETM : LA NOTION DE CONTROLE	75
4.1	Introduction	76
4.2	Quelques constats préalables au Networking effectué	79
4.3	Analyses avec la TADM et la théorie des ETM à la transition L-U	81
4.3.1	Exemple d'analyse théorique à l'Université : pratique du Networking ascendante	81
4.3.2	Exemple de tâche de Baccalauréat	93
4.3.3	Bilan des premières analyses	96
4.4	La notion de contrôle	99
4.4.1	Le contrôle en début de l'université et à la fin du lycée	99
4.4.2	Littérature sur la notion de contrôle	102
4.4.3	Application à l'exemple de production d'étudiant	109
4.4.4	Conclusions de la révision bibliographique	112
4.5	Le contrôle comme une intégration locale symétrique de ce Networking	114
4.6	Conclusion du chapitre	120
5	QUESTIONS ET METHODOLOGIE DE RECHERCHE	123
5.1	Questions et objectifs de recherche	124
5.1.1	Première question de recherche	126
5.1.2	Deuxième question de recherche	127
5.1.3	Troisième question de recherche	129
5.2	Méthodologie	131
5.2.1	Méthodologie générale	131
a)	QR1 : Première période	132
b)	QR 2 : Deuxième période	132
c)	QR 3 : Troisième période	133
PARTIE II SUITES RECURRENTES À LA TRANSITION LYCÉE-UNIVERSITÉ		135
6	IDENTIFICATION DE L'ETM DE REFERENCE ET ATTENDU DU LYCEE ET DE L'UNIVERSITE	137
6.1	Étude de programmes à la transition L-U	138
6.1.1	Programme de première année de l'université	138
6.1.2	Programme de la Terminale Scientifique	140
6.2	Étude de tâches proposées à la transition L-U	144
6.2.1	Classe L1 : support du cours (diaporamas) et exercices proposés	146
a)	Exercices proposés (non résolus)	147
6.2.2	Classe TS : Manuels	149
a)	Exemples proposés (exercices résolus)	150

	b) Exercices proposés (non résolus)	156
6.3	Analyses de tâches d'évaluation fin de lycée et début de l'université	161
6.3.1	Analyse exemple : examen de L1	161
	a) Analyse question 1 examen L1	162
	b) Analyse question 2 examen L1	165
	c) Analyse question 3 examen L1	168
	d) Analyse question 4 examen L1	169
6.3.2	Analyse exemple tâche d'évaluation : Baccalauréat S.....	170
	a) Analyse question 1 Bac S.....	171
	b) Analyse question 2 Bac S.....	172
	c) Analyse question 3 Bac S.....	174
	d) Analyse question 4 Bac S.....	175
6.4	Conclusion du chapitre 6.....	176
7	DIFFICULTES DES ELEVES ET DES ETUDIANTS A LA TRANSITION L-U	183
7.1	Construction de la tâche pour la TS : modification de la tâche de la L1.....	185
7.1.1	Comparaison de deux tâches	186
7.2	Tâche adaptée à la classe de TS	188
7.2.1	Analyse préalable de la tâche adaptée à la classe de TS.....	189
	a) Question 1 TS : Montrer que pour tout entier n , u_n appartient à $[0,1]$	189
	b) Question 2 TS : Étudier le sens de variation de la suite (u_n)	190
	c) Question 3 TS : Montrer que la suite converge.....	191
	d) Question 4 TS : On note l sa limite et on admet que $f(l) = l$. En déduire la valeur de l	192
7.3	Analyse à posteriori et résultats de données au lycée et à l'université.....	193
7.3.1	Résultats question 1 en TS et en L1.	194
7.3.2	Résultats question 2 en TS et en L1	197
7.3.3	Résultats question 3 en TS et en L1	200
7.3.4	Résultats question 4 en TS et en L1	201
7.4	Conclusion des analyses et des difficultés des étudiants.....	204
8	NOUVELLES TACHES : SOUS-ACTIVITE DE CONTROLE ET PARADIGMES [A1]	
ET [A2]	207
8.1	Conception de la nouvelle tâche et analyse a priori.....	210
8.1.1	Partie B : occasions de contrôle sémiotique et instrumental et paradigme [A1]	211
8.1.2	Partie C : contrôle discursif et paradigme [A2]	215
	a) Question C.1 : Suite bornée	215
	b) Question C.2 : Sens de variation de la suite	216
	c) Question C.3 : Suite convergente	217
8.2	Analyse <i>a posteriori</i> : 2 ^{ème} et 3 ^{ème} expérimentation au lycée.....	219
8.2.1	Partie B.....	221

a)	Question B.1 : reconnaissance de la suite récurrente	221
b)	Questions B.2 et B.3 : représentation décimale versus représentation fractionnaire	228
8.2.2	Partie C.....	231
a)	Question C.1 : prouver que la suite est bornée	232
b)	Question C.2 : prouver que la suite est croissante	238
c)	Question C.3 : prouver la convergence de la suite	243
8.2.3	Retour sur quelques cas particuliers d'élèves	248
8.3	Tâche avec la suite de Héron et analyse a priori	250
8.3.1	Partie B : occasions de contrôle sémiotique et instrumental et paradigme [A1]	251
8.3.2	Partie C : contrôle discursif et paradigme [A2]	254
a)	Question C.1 : Suite bornée	254
b)	Question C.2 : Sens de variation de la suite	256
c)	Question C.3 : Suite convergente	258
8.4	Analyse <i>a posteriori</i> : 4 ^{ème} expérimentation au Lycée	260
8.4.1	Partie B.....	261
a)	B.1 : reconnaissance de la suite récurrente.....	261
b)	B.2 et B.3 : reconnaissances de la décroissance, convergence et de la limite	263
8.4.2	Partie C.....	268
a)	Question C.1 : prouver que la suite est minorée	268
b)	Question C.2 : prouver que la suite est croissante	274
c)	Question C.3 : prouver la convergence de la suite	280
8.4.3	Retour sur quelques cas particuliers d'élèves	282
8.5	Conclusions du chapitre : résultats des deux tâches construites	284
a)	La reconnaissance de la suite récurrente et des propriétés de cette suite.....	285
b)	Le travail mathématique dans la reconnaissance des méthodes de preuve.....	287
CONCLUSIONS FINALES		295
1	PANORAMA DES RESULTATS	295
1.1	Continuités et ruptures de la transition L-U dans l'étude de suites récurrentes.....	295
1.2	Difficultés des élèves et des étudiants à la transition L-U dans l'étude de suites récurrentes.....	297
1.3	Activités et travail mathématique des élèves avec des occasions de contrôle sémiotique et instrumental	298
a)	Travail autonome des élèves	299
b)	Influence de l'enseignant dans le travail des élèves	299

2	CONTRIBUTION DE CE TRAVAIL DANS L'ETUDE DE LA TRANSITION LYCEE-UNIVERSITE	301
2.1	<i>Networking</i> de théories et notion de contrôle	301
2.2	Les suites récurrentes, un objet mathématique peu étudié	305
3	LIMITES ET PERSPECTIVES	307
	BIBLIOGRAPHIE	309
	ANNEXES.....	325

PARTIE I

RAISONS ET

CONTEXTUALISATION DE LA

THÈSE

1 Introduction

La transition lycée-université est le processus que vivent les élèves au moment de quitter l'école secondaire et de commencer les études du niveau supérieur¹ (Gueudet & Thomas, 2020). Cette transition a été étudiée au niveau international depuis plusieurs décennies et nombreuses sont les études qui ont contribué à la compréhension de ce phénomène. La plupart des études montrent les difficultés et les changements par lesquels les élèves passent au moment de changer d'institution éducationnelle, dont les résultats dépendent du pays dans lequel l'étude est menée.

En France, cette transition a été identifiée par le gouvernement comme un enjeu fondamental de la décennie à venir pour améliorer la réussite des étudiants (France Stratégie, 2017). En effet, les auteurs signalent que le fait de prêter une attention particulière à cette transition a pour objectif d'« *élever le niveau de compétences de sa population active, pour lutter contre l'échec et la fréquence des réorientations en début de parcours dans le supérieur, ainsi que contre les inégalités sociales d'accès aux diplômes* » (Ibid., p. 1).

Ce travail de thèse s'intéresse particulièrement aux difficultés des élèves qui se trouvent dans cette transition en France. Nous abordons l'étude de cette transition au sein de la didactique des mathématiques, et dans le domaine mathématique de l'analyse où une des notions emblématiques dans le domaine est la notion de suite numérique (Robert, 1982 ; Bloch et al., 2017).

Parmi l'univers des suites numériques, il existe un type particulier qui a été objet de peu d'études jusqu'à présent : les suites définies par un premier terme et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction définie de \mathbb{R} en \mathbb{R}^2 . En effet, les suites récurrentes sont un objet qui permet de travailler des problèmes en Analyse réelle, des problèmes d'existence jusqu'à l'étude de systèmes dynamiques (voir par

¹ Dans le contexte anglo-saxon on parle plus de *Secondary-Tertiary Transition*.

² Dorénavant, nous utilisons l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$ en tant qu'abréviation pour nous référer à une suite définie par un premier terme et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f une fonction définie de \mathbb{R} en \mathbb{R} .

exemple May, 1976). En ce qui suit, nous donnons quelques considérations dans l'étude des suites récurrentes.

Considérations de l'objet mathématique choisi

Le domaine de l'Analyse mathématique commence à se formaliser dans l'œuvre de Leonard Euler sur le calcul infinitésimal en 1748. L'Analyse Numérique est un des sous-domaines de l'Analyse mathématique. Il s'agit de l'étude des méthodes numériques qui a été objet d'intérêt depuis l'antiquité par les Babyloniens, les Grecs (Archimède, Héron d'Alexandrie) et qui donnent une réelle importance aux suites numériques.

Les suites récurrentes trouvent en partie leur importance dans un problème essentiel en mathématiques telle que la résolution d'équations $f(x) = 0$. En ce qui concerne les méthodes numériques et la résolution d'équations, la construction de suites qui convergent vers les racines de polynômes s'avère une méthode efficace, car on peut déterminer ses racines de manière exacte. Néanmoins, nous les trouvons seulement dans certains cas particuliers³. Une des méthodes numériques les plus connues est celle de Newton. Ici, c'est la définition d'une suite récurrente qui converge vers une solution de $f(x) = 0$ qui permet de trouver les valeurs approchées d'une racine. Ainsi, l'intérêt des suites récurrentes repose principalement dans la résolution des équations numériques de ce type, dont la recherche de ces solutions ramène à un problème de point fixe (Perrin, 2000).

Le théorème du point fixe a une importance cruciale en mathématiques : il sert de base pour des théorèmes de l'Analyse et joue un rôle central en calcul différentiel⁴, il appartient au domaine de la Topologie, et il est possible de l'adapter à différentes applications à partir d'une méthode itérative (Rouvière, 2009, p. 147). En effet, le point fixe permet de prouver l'existence d'objets mathématiques (comme des limites), approchant ces objets avec une précision souhaitée, et il donne un contrôle de la vitesse de convergence des objets approchés vers l'objet limite. Il est basé sur la convergence de suites de Cauchy dans \mathbb{R} , c'est-à-dire, sur la complétude de \mathbb{R} .

Par ailleurs, les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ sont définies par une fonction f qui détermine la relation de récurrence. Bien qu'il soit possible pour certaines suites

³ En effet, pour les équations polynomiales de degrés 2 et 3, nous utilisons les formules de Cardan qui permettent de trouver des solutions exactes, mais pour les équations de degrés 4, les formules commencent à être inconfortables, et il n'existe pas de formule générale pour les degrés supérieurs à 5.

⁴ Le théorème d'inversion locale, le théorème de fonctions implicites, le théorème de Cauchy-Lipschitz par exemple.

récurrentes de déterminer leurs termes par une expression explicite (par exemple les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques), cela n'est pas toujours le cas. Pour certaines suites récurrentes, on a besoin des termes précédents pour calculer un terme donné. En effet, il existe des suites générées par des fonctions dont l'étude peut parfois se compliquer⁵, car la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et un premier terme ne suffisent pas pour bien définir une suite récurrente. Alors, comment étudier les suites récurrentes de sorte qu'elles soient bien définies ?

En outre, les suites récurrentes permettent l'étude de problèmes mathématiques contemporains. Un premier exemple est la modélisation mathématique de dynamique des populations (actuellement dans le cadre de la pandémie du Covid-19). Les premiers mathématiciens à s'intéresser à ce sujet étaient entre autres Fibonacci (1170-1250), Euler (1707 - 1783), Thomas Robert Malthus (1766-1834) et Pierre François Verhulst (1804-1849) (voir par exemple Bacaër (2009) et Perrin (2008)). Verhulst propose un modèle logistique pour étudier cette question, modèle qui est utilisé de nos jours pour étudier des problèmes démographiques, biologiques, épidémiologiques, économiques, géographiques, etc. Il étudie la suite logistique : une « simple »⁶ suite récurrente de la forme $u_{n+1} = \mu u_n(1 - u_n)$ peut conduire à des problèmes mathématiques très difficiles (selon le paramètre, la suite peut soit converger soit avoir un comportement chaotique). Un deuxième exemple concerne les suites homographiques. Ces suites ne sont pas toujours définies et cela dépend du premier terme de la suite. L'intérêt des suites homographiques réside dans le fait qu'elles permettent aussi de travailler dans d'autres domaines des mathématiques comme la géométrie anallagmatique qui correspond à la géométrie de l'inversion, dans laquelle on travaille en projectif (Perrin (s.d.), chapitre VI).

En conséquence, les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ sont un objet mathématique riche qui permet de traiter des problèmes mathématiques s'avérant *a priori* très simples, comme la résolution d'équations $f(x) = 0$, mais qui, en même temps, s'appliquent à des mathématiques plus complexes.

⁵ Par exemple, soit f la fonction $f(x) = 2 + \sqrt{2-x}$ (qui est définie sur $] -\infty, 2]$), et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ définie à partir de $u_0 = 1$. Ici nous avons $u_1 = 3$, mais u_2 n'est pas défini.

⁶ Ici, f est quadratique, mais l'étude de suites récurrentes peut se compliquer dès que l'on sort du cadre linéaire. Pour plus de détails sur les suites et les suites récurrentes, voir « annexe suites récurrentes », page 325.

Motivation et objectifs de cette recherche

La place des suites récurrentes dans l'enseignement actuel nous semble pertinente compte tenu de leur importance épistémologique et de leur utilité dans le développement du domaine de l'Analyse. En France, cet objet mathématique est travaillé en fin de lycée et au début de l'université ; période où les études menées dans le champ constatent que les élèves manquent de contrôle dans leur activité mathématique au moment de travailler avec des objets propres de l'Analyse.

Ainsi, la question qui nous guidera dans la première partie de cette étude est : *Comment promouvoir, d'une part, le contrôle dans le travail mathématique des élèves afin qu'il soit pertinent aux problématiques de la transition lycée-université et, d'autre part, qu'il prenne en compte les spécificités des suites définies par récurrence ainsi que les difficultés que les élèves rencontrent ?*

Plan de la thèse

Cette étude se compose de deux grandes parties. La partie I concerne 5 chapitres relatifs aux raisons et à la contextualisation de ce travail de thèse. Le premier chapitre est une introduction à ce travail de thèse et aux suites récurrentes. Le chapitre 2 concerne l'état de l'Art, qui a un double objectif : d'une part nous nous intéressons aux problématiques de la transition lycée-université et, d'autre part, nous faisons une révision des études sur le domaine de l'analyse, particulièrement sur les suites étudiées dans cette transition. Ensuite, nous présentons le cadre théorique qui guidera cette étude dans le chapitre 3. Puis, nous exposons la pratique du *Networking* théorique qui nous amène à la définition de la notion de contrôle, essentielle pour la poursuite de ce travail dans le chapitre 4. Enfin, dans le chapitre 5, nous présentons nos questions de recherche et la méthodologie adoptée pour donner réponse à ces questions. La partie II a pour but de présenter l'étude de suites récurrentes à la transition Lycée-Université en France au travers de 3 chapitres. Ainsi, le chapitre 6 rend compte de la façon dont on enseigne les suites récurrentes avec un panorama des programmes d'études, des manuels scolaires et des tâches d'évaluation à la transition. Le chapitre 7 expose les résultats d'une étude préliminaire à nos expérimentations, visant à identifier des difficultés des élèves et des étudiants comme conséquence des caractéristiques de l'enseignement actuel de ces suites. Dans le chapitre 8, nous exposons les expérimentations réalisées, ainsi que les résultats que nous obtenons lors des analyses.

Enfin, nous présentons nos conclusions finales au sein desquelles nous faisons référence aux résultats principaux, aux contributions de ce travail dans l'étude de la transition lycée-université, et, enfin, aux limites et perspectives de ce travail de thèse.

2 État de l'Art

Dans ce chapitre, nous faisons un état de l'art concernant la transition lycée-université. Cette transition présente des problématiques et des phénomènes contemporains qui comportent un intérêt international. Ainsi, nous étudions les thèmes principaux qui nous aideront d'une part à comprendre les enjeux de cette transition, et d'autre part à trouver des points clés pour définir notre problématique.

Dans la section 2.1 nous étudierons l'ampleur de la transition lycée-université, les spécificités dans le domaine de l'Analyse, le rôle de la technologie et le discours mathématique de cette transition. Ensuite, dans la section 2.2, nous analyserons les travaux qui portent sur les suites (études sur la convergence et la limite). Nous ferons le point sur les études qui abordent les suites récurrentes, et nous donnerons des éléments sur l'enseignement actuel des suites dans le contexte français. Enfin dans la section 2.3, nous conclurons le chapitre en présentant la question qui guidera cette recherche et les caractéristiques des cadres théoriques pour étudier notre questionnement sur cette transition.

2.1 Ampleur de la transition Lycée-Université

Les derniers ICME's (*International Congress on Mathematical Education*) ont traité le sujet de la transition et mis ainsi en évidence sa portée internationale. Les difficultés issues de la transition Lycée-Université (L-U) dépendent du contexte du pays dans lequel elle est étudiée. Néanmoins, quelques résultats paraissent stables à l'échelle internationale : cette transition reste une difficulté majeure même pour de bons élèves (Luk, 2005). Dans Gueudet et al. (2016), lors d'un panel d'experts en la matière, les auteurs ont identifié différents types de transitions entre le lycée et l'université. Ces dernières impliquent, d'une part, des transitions épistémologiques et cognitives où l'apprentissage des étudiants est principalement étudié et, d'autre part, des transitions socioculturelles où l'on analyse les différentes pratiques mathématiques d'individus qui passent d'un groupe social à un autre.

Plusieurs travaux, dans des domaines mathématiques différents, mettent en relief des ruptures (voir par exemple Gueudet, 2008) qui peuvent avoir des origines distinctes : enseignants, élèves ou institutions éducatives.

D'une part, la formation dispensée aux enseignants est différente selon leur futur niveau d'affectation. En effet, le travail que font les enseignants de lycée diffère de celui des enseignants de l'université. À l'université, par exemple, on trouve souvent des enseignants-chercheurs en mathématiques (ou des champs liés) avec un niveau d'études en mathématiques plus élevé que celui des enseignants du secondaire (Gueudet et al., 2016). En outre, les enseignants qui appartiennent à ces institutions - lycée comme université - ne sont pas toujours sensibles à cette transition. Cela est particulièrement vrai pour les enseignants de l'université (Gueudet & Thomas, 2020).

D'autre part, du côté des élèves, les ruptures semblent être beaucoup plus nombreuses que celles des enseignants. La plupart d'entre eux estiment que les élèves manquent des connaissances nécessaires à l'entrée à l'université dans des sujets mathématiques spécifiques (Thomas et al., 2015). Les étudiants sont ainsi confrontés tantôt à un décalage important dans l'utilisation des symboles (Corriveau & Bednarz, 2016), tantôt à des difficultés dans les pratiques de preuves déductives exigées à l'université. Ces dernières difficultés sont souvent dues à une pratique de reproduction des preuves au lycée plutôt qu'à sa construction. Les différences culturelles des deux institutions auraient donc un impact considérable pour les élèves : groupes d'étudiants plus grands à l'université, différents professeurs de mathématiques, attente d'une plus grande autonomie de travail des étudiants (pour l'étude personnelle, hors et en classe), présentation des cours (plus de ressources de textes à l'université qu'au lycée où il n'y

a qu'un seul manuel), niveau plus élevé des tâches données et de leurs techniques associées d'un niveau plus élevé (Gueudet & Thomas, 2020). Ces ruptures conduiraient au constat de la baisse des résultats des étudiants de première année (voir par exemple Jennings, 2009).

Par ailleurs, la littérature internationale sur le sujet de la transition témoigne des difficultés épistémologiques et cognitives. Gunter (2019) montre que les étudiants qui réussissent dans l'enseignement secondaire n'y parviennent pas nécessairement à l'université, bien au contraire. Les élèves du secondaire réussissent grâce à la reproduction algorithmique systématique mais cette reproduction semble conduire à un apprentissage superficiel. En effet, ils sont formés pour reproduire des informations mathématiques et non pour un apprentissage autonome comme celui dont ils auront besoin à l'université (Guzmán et al., 1998 comme le signale aussi Engelbrecht, 2010). À cela, il faut ajouter le côté traumatique de cette transition pour la plupart des étudiants.

Pour bien étudier cette transition, nous avons besoin de connaître la durée de celle-ci. À ce sujet, Tall (1997, 2008) signale que cette transition commence dans les deux dernières années du lycée, et se termine une fois que les étudiants arrivent à travailler avec une pensée mathématique avancée c'est-à-dire après les deux premières années de l'université (Gunter, 2019). Néanmoins, les chercheurs ne seraient pas tous d'accord sur cette durée. Clark et Lovric (Clark & Lovric, 2008, 2009) se focalisent sur un point de vue anthropologique (et non sur le contenu mathématique) et modélisent la transition L-U comme un « rite de passage ». Ce rite est séparé dans les trois phases « *separation, liminal, and incorporation* ». D'abord, il existe une *séparation* physique du lycée et de tout son contexte (foyer, famille, amis) ; la phase *liminal* correspond, quant à elle, à la position de l'élève qui se trouve entre les deux institutions (il a fini le lycée et n'a pas encore commencé l'université) ; enfin, la phase d'*incorporation* comprend la première année de l'université. Gunter mentionne que cette façon de modéliser la transition L-U diffère de la plupart de la littérature sur ce sujet, notamment quant à la temporalité et la réduction de l'écart entre les deux institutions. D'une part cette temporalité réduite serait moins sensible aux problèmes épistémologiques et cognitives chez les élèves (d'autant plus qu'ils ne traversent pas la transition avec la même vitesse). Et d'autre part, la perspective de Clark et Lovric ne propose pas une réduction de l'écart entre les deux institutions en signalant que la « douleur » des élèves serait nécessaire pour affronter ce *rite de passage*.

En nous focalisant sur la transition du point de vue des institutions, nous remarquons que le corps universitaire se plaint du manque de préparation des élèves qui arrivent en première année. Cela conduit à étudier plus souvent ce que le lycée fait

(ou pas) pour préparer les élèves aux études universitaires. La plupart des études de cette transition se sont focalisées à l'université, et témoignent donc de ce manque de préparation chez les élèves. Cependant, la recherche portant sur ce que l'université fait pour recevoir les étudiants de lycée pourrait être davantage développée. Autrement dit, tout se passe comme si l'enseignement à l'université était correctement fait et que c'est seulement le lycée qui doit prendre en charge cette transition. À cet effet, Gueudet et al. (2016 ; p.21) mentionnent :

Quel point de vue institutionnel est assumé et lequel est contesté ? En ce qui concerne les mathématiques (niveaux spécifiques), nous devons être prudents avec le point de vue de l'université, car il tend à apparaître comme le plus légitime aux yeux des enseignants de mathématiques du secondaire et du primaire, renforçant ainsi la fonction propédeutique des premiers niveaux d'enseignement (faciliter l'accès aux mathématiques universitaires) par rapport à leur rôle de préparation des étudiants à la citoyenneté. (Ibid ; p. 21).

En conséquence, quels sont les efforts faits par l'université ? Plusieurs universités ont créé des cours à destination des élèves qui viennent de terminer leurs études secondaires. Nous pourrions penser que la création de ces cours propédeutiques en 1^{er} année de l'université réduiraient la brèche entre le lycée et l'université et seraient la réponse « immédiate » aux problématiques de la transition. Néanmoins, des études comme celle de (Kajander & Lovric, 2005) nous montrent que, même avec ces aides, on ne constate pas une réelle différence dans le résultat des élèves.

L'ensemble des ruptures trouvées semblent être bien plus importantes de la part des élèves à la transition. En effet, la recherche constate que la charge des enjeux de la transition repose sur les étudiants (Corriveau & Bednarz, 2016). D'ailleurs ce sont eux qui transitent d'une institution à une autre, et non les enseignants⁷. Par ailleurs, spécifiquement dans le cas des étudiants qui font des études pour devenir enseignants de mathématiques au lycée, on note une double discontinuité : en tant qu'étudiants, ils transitent du lycée à l'université puis, pour exercer leur métier d'enseignants, ils transitent de l'université au lycée. Cela implique des phénomènes trouvés dans ces deux transitions appelées double discontinuité de Klein (Winsløw & Grønbaek, 2014) mais nous y reviendrons.

Étudier cette transition est un défi ambitieux et complexe. Il serait donc illusoire d'essayer de répondre dans ce travail de thèse, à toutes les problématiques existantes que la littérature peut nous fournir. Pour ces raisons et afin d'affiner notre recherche

⁷ Les enseignants qui travaillent dans les deux institutions restent rares et donc des cas isolés.

et notre positionnement concernant la transition L-U, nous chercherons à identifier les spécificités du domaine mathématique de l'Analyse, la place des instruments et du discours mathématique dans cette transition.

2.1.1 La transition L-U en Analyse

Comme il est question d'un domaine mathématique spécifique, avant de commencer, il importe de préciser ce que nous entendons par *Analyse* tout au long de notre recherche. D'un point de vue anglo-saxon, nous pouvons trouver que les recherches font référence à l'« *Analysis* » et au « *Calculus* », sans que tous ces travaux en fassent pour autant la distinction. Pour clarifier cette position, l'*Encyclopedia of Mathematics Education* déclare qu'*en mathématiques, il n'y a pas de séparation stricte entre le Calculus et l'Analysis, mais dans l'enseignement universitaire contemporain, ils sont souvent bien distincts*. [Notre traduction] (Winsløw, 2020, p.50). À l'université, le domaine de l'*Analysis* s'adresse à des étudiants qui suivent un cursus en mathématiques (ou sciences fortement liées). Les cours sont plus abstraits et reposent sur des théories mathématiques axiomatiques modernes qui font explicitement référence à des notions comme la complétude, la compacité et les espaces normés (Ibid). Il est spécifique aux recherches en éducation mathématique, dans le domaine du *Calculus*, de trouver les problématiques autour de la notion de limite (qui comprenne aussi la dérivée et l'intégrale) et de fonction. À cet effet l'*Encyclopedia of Mathematics Education* mentionne :

L'apprentissage du Calculus comprend l'analyse de problèmes de changements et de mouvements. Des notions préalables associées, comme le concept de variable et le concept de fonction, sont nécessaires à la compréhension des concepts du Calculus. Cependant, l'apprentissage du Calculus comprend de nouvelles notions comme la notion de limite et les processus de limitation, qui contiennent intrinsèquement des quantités changeantes. [Notre traduction] (Kidron, 2020, p. 87).

Dorénavant, puisqu'il n'est pas question d'étudier l'*Analysis*⁸, ni la transition *Calculus-Analysis* à la transition L-U (bien que nous pourrions mener une expérimentation innovante avec des bons élèves à ce niveau), nous allons nous concentrer à l'enseignement du *Calculus*, tout en l'appelant, selon le contexte français, « Analyse ».

⁸ Pour plus de détails concernant ce sujet voir (Winsløw, 2020), ou (Winsløw, 2007).

Il est connu que l'Analyse est l'un des sujets les plus difficiles pour les étudiants en première année d'université⁹. Cela a amené plusieurs pays, depuis des décennies, à tenter de reformer son enseignement. Avec une expérience de plus de trente ans, David Tall est spécialiste dans ce domaine. Selon Kindron (2020), la perspective des travaux de Tall concernant l'Analyse est de *trouver une "approche raisonnable" de l'analyse qui s'appuie sur les preuves de nos sens humains et utilise ces connaissances comme une base significative pour le développement ultérieur du calculus à l'analysis (...)* [Notre traduction] (Ibid., p. 90).

Néanmoins, lorsque les étudiants commencent à travailler en Analyse, les idées intuitives entrent en conflit avec des définitions plus formelles, ce qui provoque une réelle difficulté au niveau cognitif. Ces problèmes seraient liés aux processus infinis qui sont intrinsèques aux concepts définis comme, par exemple, la notion de limite (Bressoud et al., 2016). Ici, l'intuition de l'infini jouerait un rôle en opposition par rapport à la compréhension de cette notion. De surcroît, la notion de limite constitue un obstacle épistémologique (Sierpinska, 1990) qui génère des problématiques dans l'apprentissage des nombres réels, des fonctions ou encore de la notion d'infini¹⁰ (Job & Schneider, 2014). Ce domaine comporte donc, pour les élèves, d'importantes difficultés. Qui seraient renforcées quand il s'agit de transiter d'une institution éducative à une autre.

Différents chercheurs ont dédié leurs travaux de recherche à cette thématique spécifique de l'Analyse. M. Artigue (Artigue, 1995, 1998), mentionne trois difficultés fortes et persistantes de la part des étudiants, difficultés qui ne peuvent pas être considérées indépendamment les unes des autres :

- Des difficultés en lien à la complexité mathématique de trois objets de base encore en construction quand on commence à étudier l'Analyse : les nombres réels, les fonctions et les suites.
- Des difficultés en lien avec la conceptualisation de la notion de limite et son domaine technique (notion centrale de l'Analyse).
- Des difficultés liées à la rupture nécessaire des modes de pensée algébrique.

⁹ Pour se renseigner par rapport aux travaux récents dans le champ, voir le travail de la conférence *Calculus in upper secondary and beginning university mathematics* (Monaghan et al., 2019). Ici, sous l'hypothèse que le Calculus est bien plus que seulement des techniques à appliquer, dans cette conférence quatre thèmes ont été abordés : (1) La transition Lycée-Université, (2) Le théorème fondamental de l'analyse, (3) L'utilisation de la technologie numérique en Calculus, et (4) L'enseignement et l'apprentissage du Calculus dans différentes disciplines.

¹⁰ Nous mentionnons juste la notion d'infini. Pour un exemple des études se dirigeant à l'ouvrage de (IREM Brest, 1992) sur l'histoire de l'infini.

Ces trois difficultés ont des origines distinctes mais qui, ensemble, se renforceraient et s'impliqueraient les unes aux autres, cela créerait un réseau complexe de difficultés.

En utilisant ces trois points susmentionnés par M. Artigue, Oktaç & Vivier (2016) font une révision des recherches qui touchent ces problématiques et mettent l'accent sur la conceptualisation. La nécessité d'une interaction entre registres différents constitue un des points communs de ces recherches, particulièrement pour le registre graphique qui serait un support visuel important pour la compréhension et, cela, indépendamment de la notion mathématique traitée.

Aussi, M. Artigue (2003) signale quatre leçons qui nous apportent l'histoire de l'enseignement et de l'apprentissage de l'Analyse au lycée : (1) l'enseignement du début de l'Analyse s'appuie sur des niveaux de conceptualisation provisoires ; (2) il ne faut pas laisser à la charge de l'étudiant les reconstructions cognitives qui exigent l'apprentissage de l'Analyse ; (3) l'Analyse étudiée au niveau du lycée doit être épistémologiquement convaincante et réalisable d'un point de vue institutionnel ; (4) la réflexion sur le travail technique doit être considérée dans l'enseignement à des fins conceptuelles. Elle conclut que ces leçons

(...) sembleront peut-être au lecteur de simples évidences, n'ayant pas leur place dans un article. Pourtant, force est de constater que l'étude de l'histoire de cet enseignement montre à quel point ces évidences ont été souvent ignorées et quels effets désastreux cela a eu dans le moyen et long terme (Ibid., p. 6).

D'autre part, dans le contexte francophone notamment, nous trouvons un nombre important des travaux de thèse et des recherches au sujet de l'Analyse qui datent de plus de 40 ans. Sans être exhaustifs quant au nombre de recherches, on s'intéressera ici principalement à celles qui abordent l'étude de la transition Lycée-Université de façon explicite.

La thèse de I. Bloch (2000) montre la complexité de l'étude de l'Analyse de la transition L-U. Elle caractérise le savoir de l'Analyse en rapport aux preuves et au contrôle des énoncés en se basant principalement sur la cohérence, le champ d'application et les conditions de validité. Elle affirme que l'utilisation de ce savoir sera contrôlée par des connaissances. Cela la conduit à se questionner sur comment, à quel niveau et par quel type de situation introduire les connaissances centrales de l'Analyse. À ce stade, elle pose le postulat selon lequel il existe des connaissances manquantes à la transition L-U qui doivent toutes être introduites par les professeurs de niveaux post-bac. Concernant la résolution des tâches par les étudiants les moins avancés par rapport à l'Analyse, elle constate un manque de sens dans des « *calculs cherchant une*

conformité apparente avec le maniement d'énoncés d'analyse, mais dépourvus de signification et de cohérence interne » (Bloch, 2000, p. 343). Nous traduisons cela comme un manque de contrôle dans la résolution de tâches chez les étudiants.

La thèse de F. Praslon (Praslon, 2000) compare la façon de travailler avec la notion de dérivée dans les deux niveaux d'enseignement. Il arrive à des résultats similaires à ceux de I. Bloch quant au travail développé par les élèves. En effet, lors des applications de tests¹¹ à des étudiants, il constate que « *la fonction de vérification et la notion de contrôle de la cohérence leur semblent étrangères* » (Praslon, 1999, p. 206) et ajoute, par la suite, que « *les tâches cognitives complexes sont peu maîtrisables au niveau du lycée et devraient faire l'objet d'une gestion particulière dans la transition entre le lycée et l'université* » (Ibid.). Ce fait provoque un vide didactique à combler. Plus précisément, ce vide est représenté par de micro-ruptures liées aux dimensions outils-objet de la dérivée au sens de Douady (Douady, 1986), aux techniques de résolution et des méthodes qui s'inscrivent dans une résolution plus générale et aux types de démonstrations, type de tâches découpées au lycée contrairement à l'université. De surcroît, tout cela doit être géré de façon individuelle par l'étudiant. D'une certaine façon, pour combler ce vide, il propose de créer des tâches qui se trouvent entre les deux institutions.

La thèse de I. Ghedamsi (Ghedamsi, 2008) identifie deux paramètres pour aborder les difficultés que les élèves rencontrent lors de l'apprentissage de l'Analyse Réelle. Le premier est lié aux caractéristiques épistémologiques se basant, entre autres, sur l'approximation numérique qui est une base pour les notions de suite, de limite, de fonction et qui permet aussi de localiser et d'approcher des objets dont leur existence est établie comme un point fixe. Le second est basé sur des variables macro-didactiques de la transition comme les degrés d'autonomie, de formalisation, de généralisation, de registre de validation, de conversion de registres et de mode d'intervention des notions. La thèse souligne qu'un type de contrôle mixte, entre l'intuitif et le formel, devrait être privilégié dans cette transition. En effet, l'intuitif serait souvent ponctuel et isolé. Ainsi, pour organiser les situations concernant les concepts de limite, de suite et de fonction, elle souligne que les méthodes numériques d'approximation des nombres permettraient de revenir aux énoncés plus formels en considérant la construction de connaissances chez les étudiants.

¹¹ Tests qui faisaient référence à des exercices pour étudier la dérivée en 1^{ère} année de l'université.

2.1.2 Le rôle de la technologie comme instrument

La place et l'influence des instruments technologiques dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques a été le sujet d'étude de plusieurs recherches. Dans le cas de l'Analyse, une des potentialités soulignées a été la visualisation qu'elle peut apporter aux notions qui sont en jeu (voir par exemple Tall, 1991) mais les recherches sur le rôle de la technologie dans le domaine de l'Analyse restent d'actualité (Bressoud et al., 2016). Dans le cas de la transition L-U, la technologie numérique peut être traitée différemment dans chacune des institutions. En effet, l'utilisation des technologies ou des calculatrices à l'université est moins dominante, ce qui crée une discontinuité qui produit encore plus de difficultés aux étudiants à la transition (Thomas et al., 2017). L'autorisation de la calculatrice graphique lors des examens renforcerait cette discontinuité car, au lycée, l'usage de cet outil serait beaucoup plus accepté (Bressoud, 2015). De surcroît, le fait de ne pas utiliser les technologies à l'université peut entraîner une algébrisation mathématique dans des contenus de l'Analyse, alors qu'ils pourraient tout à fait profiter des avantages de celles-ci (López, 2019).

Dans le cas de l'Analyse, il existe des nombreuses discontinuités d'ordre épistémologique (comme le discret/continu, fini/infini, déterminé/indéterminé) où les technologies sont particulièrement importantes pour faciliter le travail des étudiants, ainsi dans la notion de limite (Ferrera et al., 2006). À ce sujet, il existe un saut difficile à combler entre les conceptions de la limite qui a sa racine dans une discontinuité épistémologique présente dans l'histoire de l'Analyse. En effet, nous pouvons considérer la notion de limite comme processus de rapprochement de quelque chose ou comme la valeur limite. Ici, selon Trouche & Guin (1996), les calculatrices graphiques favorisent davantage le premier type de processus (et non la définition formelle de la notion de limite en tant que valeur limite) ; néanmoins, elle comporte le premier moyen, et parfois le seul, d'investigation pour les élèves. Le fait d'utiliser la calculatrice comme aide à la conjecture, à la résolution et à la vérification peut aussi aider à la construction des représentations très riches et à les utiliser de manière souple pour résoudre des problèmes.

Par rapport à cette même notion de limite et l'enseignement du calcul infinitésimal, Trouche (1996) encourage une intégration contrôlée permanente et collective. Dans sa thèse, il conclut que l'utilisation et l'intégration de la calculatrice doivent permettre un contrôle des représentations graphiques (où il faudrait mettre en avant ce que l'on ne « voit » pas et où on devrait promouvoir des contrôles théoriques, contrôle sur l'image elle-même et avec d'autres images afin de regarder « au-delà du

miroir »), un contrôle des nombres (où il faudrait aborder la distinction entre le calcul exact et approché, ou encore les inégalités strictes et larges, et réintroduire des éléments théoriques du calcul), un contrôle du langage sur les objets mathématiques et des schèmes d'usage de la calculatrice.

Cependant, la posture face à l'utilisation des calculatrices dans les mathématiques peut être controversée. En Nouvelle Zélande, par exemple, les enseignants de lycée seraient plus réticents à ne pas utiliser les calculatrices dans leurs cours. Dans l'étude de Hong et al. (2009), lors d'une enquête à destination des enseignants de lycée et de l'université, les auteurs constatent une préoccupation dans le manque de compréhension avec l'utilisation de la calculatrice graphique. Deux enseignants de lycée déclarent ainsi :

« Je crois qu'en analyse ou en mathématiques supérieures, nous essayons de les aider à devenir des penseurs analytiques.... Je pense que les calculatrices diminuent ce que j'essaie de faire passer dans une matière comme le calcul » ;
 « (...) Les calculatrices programmables permettent aux étudiants de résoudre des problèmes qu'ils ne comprennent pas vraiment ». [Notre traduction]
 (Hong et al., 2009, p. 883).

Les enseignants de lycée montrent une volonté de réduire l'utilisation de la calculatrice sans exploiter ce qu'elle peut apporter à l'enseignement et à l'apprentissage.

Par ailleurs, Winsløw (2013) fait une étude sur l'*Analysis* au niveau secondaire, ce qu'il qualifie de dilemme fondamental. Il signale que l'utilisation des CAS¹² au niveau du lycée au Danemark développe des techniques instrumentées qui banalisent les tâches standard liées, par exemple, à l'investigation d'une fonction. Le fait que des calculs (de limites, dérivées, anti-dérivées, etc.) soient réduits à des opérations d'une seule touche provoque une insatisfaction concernant la cohérence mathématique car, au niveau du lycée, il ne resterait pas grand-chose à faire (d'autant plus que les organisations topologiques – au sens de la TAD¹³ - ont été abandonnées à ce niveau). Il démontre ainsi, au niveau du lycée, sa préoccupation concernant la pratique des calculatrices et souligne qu'« *avec l'introduction de techniques instrumentées, nous pouvons faire face à un effondrement plus ou moins complet également en ce qui concerne la cohérence*

¹² Computer Algebra Systems.

¹³ L'auteur signale que l'introduction de l'analyse peut se modéliser par des organisations mathématiques locales algébriques et topologiques. Les organisations algébriques se réfèrent à des techniques algorithmiques d'enseignement et d'apprentissage d'une certaine facilité ; tandis que les organisations topologiques sont celles qui sont le sens des organisations algébriques nécessaires pour une justification plus profonde de l'analyse mais moins faciles à transposer en classe (dû à la nécessité d'une théorie complète des nombres réels (Winsløw, 2013)).

qui subsistait parmi et à l'intérieur des organisations algébriques locales » [Notre traduction] (Ibid., p. 209). Il conclut que la recherche sur les programmes du lycée devrait trouver des moyens pour articuler l'algèbre et la topologie dans le domaine de l'*Analysis*.

En outre, en étudiant la double discontinuité de F. Klein¹⁴ en Analyse, Winsløw & Grønbaek (2014) affirment qu'à l'entrée de l'université, l'étudiant doit combler les définitions des objets mathématiques sans avoir une définition formelle préalable (ce qui serait encore une fois le cas des limites). Ils signalent que les enseignants devraient connaître différentes façons de résoudre des problèmes topologiques basés sur la complétude des nombres réels par exemple et que celles-ci pourraient se servir des potentiels du CAS pour visualiser et calculer (Ibid, p.82).

Mais la façon dont la technologie est (ou devrait être) utilisée par les enseignants n'est pas évidente. Il existe un écart entre les potentialités de la technologie pour l'apprentissage et la façon dont ces technologies sont utilisées (Kidron, 2020). En outre, malgré le fait que des nombreuses études aient été menées pour explorer l'enseignement de l'Analyse en utilisant la technologie, ce n'est pas son utilisation, elle-même, qui provoque un vrai changement : ce sont plutôt les projets du curriculum d'enseignement où des séquences d'enseignement avec technologie sont mises en avant (Ferrera et al., 2006). Ce thème comporte un intérêt actuel pour l'enseignement des mathématiques car l'utilisation de la technologie est actuellement un recours des mathématiciens dans la pratique professionnelle. À cet effet, Hanna & Knipping (2020) pointent le doigt sur les bénéfices des nouvelles technologies disponibles. En effet, dans la pratique des mathématiciens, l'arbitrage traditionnel est devenu lent et peu fiable. Ici les nouvelles technologies permettent au mathématicien de traduire des preuves informelles en preuves formelles et de vérifier leur validité. Finalement, le fait de ne pas utiliser de nouvelles technologies en classe (comme les assistants de preuve) pourrait constituer un regard archaïque des mathématiques en tant que discipline (Ibid.).

¹⁴ La double discontinuité de Klein concerne les processus enseignement-apprentissage et les mathématiques elles-mêmes. Dans cette double discontinuité on considère, d'une part, la transition lycée-université dont souffre l'étudiant et, d'autre part, une transition inverse lorsque l'étudiant revient à l'enseignement secondaire comme professeur et qu'il se trouve alors avec les difficultés de transposition de connaissances du niveau universitaire en connaissances pertinentes pour l'enseignement au lycée.

2.1.3 Quel discours mathématique à la transition ? Rôle de la preuve et de la conjecture

Les études qui traitent la transition L-U ont pointé du doigt la discontinuité des types de preuves, d'argumentations et des raisonnements (voir par exemple Ghedamsi, 2008). Les mathématiques universitaires sont orientées vers les fondements de la connaissance des contenus mathématiques avec l'utilisation de preuves et de théorèmes comme des outils pour traiter des problèmes ; au contraire, au niveau secondaire, l'accent est mis sur la production des résultats où les axiomes, les définitions et les preuves auraient un rôle plutôt décoratif (Gueudet et al., 2016). Mais, est-ce que cela est pris en compte par l'université ?

Gueudet (2008) signale que des recherches à la transition ont mis l'accent sur le rôle de la preuve mathématique et sur le fait que seulement une minorité d'élèves arrivent à produire des preuves cohérentes à la fin du lycée. Par exemple Moore (1994) identifie des sources¹⁵ à l'origine des difficultés des étudiants à l'université ; néanmoins celles-ci peuvent être entremêlées et avoir une nature très différente, ce qui les rend difficiles à étudier. Malgré tout, dans l'apprentissage de la preuve et le langage mathématique, les aspects sémantiques et syntaxiques font partie du langage courant à l'université. La syntaxe (surtout utilisée avec des mathématiques avancées) commence seulement au début de l'université ce qui cause des difficultés chez les étudiants. À ce niveau, il existerait une nécessité de contrôle sémantique des manipulations syntaxiques. C'est-à-dire que la signification mathématique à l'heure d'utiliser des symboles est un requis pour construire des preuves formelles. Cela est particulièrement vrai au moment d'utiliser des quantificateurs (voir par exemple Durand-Guerrier & Arsac 2003, 2005). Ainsi, si l'on considère les mathématiques universitaires comme un langage à apprendre, il serait naturel que les étudiants essaient d'imiter ce que l'enseignement universitaire leur procure, au risque de produire des phrases absurdes au début.

Force est de constater l'absence de conseils pour les enseignants à l'université (contrairement au lycée) mais cela permet une liberté dans l'enseignement. Cette

¹⁵ À partir d'une étude sur des preuves abordant la logique mathématique et les méthodes de preuve, le principe de l'induction mathématique, la théorie des ensembles élémentaires, les relations et les fonctions, et le système des nombres réels, Moore (1994) identifie sept types de sources de difficultés pour les étudiants : (1) non connaissance des définitions, (2) peu de compréhension intuitive des concepts, (3) images conceptuelles inadéquates pour produire des preuves, (4) difficulté à générer ou utiliser des exemples propres à chaque étudiant, (5) difficulté à utiliser les définitions pour structurer une preuve de manière globale, (6) incapacité de compréhension et d'utiliser les notations et le langage mathématique et (7) ne pas savoir commencer des preuves.

liberté peut exacerber les ruptures concernant l'apprentissage de la démonstration (Sawadogo, 2015). De surcroît, Gueudet (2008) remarque le travail de Dreyfus (1999) qui constate, en se référant aux cours de niveau universitaire, que l'objectif de donner aux élèves des moyens pour apprendre à construire et contrôler la validité des preuves n'est pas explicité et donc laissé à la charge des étudiants.

Il est à remarquer ici que, dans l'apprentissage de la preuve, la conjecture fait partie de la transition cognitive de son apprentissage (Boero et al., 1996 ; Boero, 2017). La construction et la justification des conjectures sont considérées comme des stratégies efficaces pour introduire la preuve et la démonstration aux élèves (Thomas et al., 2015). La conjecture n'est pas seulement une bonne stratégie pour l'apprentissage des élèves, elle fait aussi partie de l'histoire et des méthodes mathématiques qui font avancer la discipline. Selon le mathématicien Hiriart-Urruty (2016) « *En mathématiques, comme dans d'autres sciences, les conjectures ont toujours joué un rôle de stimulant et de moteur. Chaque domaine des mathématiques a ses conjectures, plus ou moins connues, plus ou moins compréhensibles...* » (Ibid., p. 1).

Concernant le thème de la preuve et de la conjecture, il est important de citer le travail de I. Lakatos (Lakatos, 1976). Elle montre que la conjecture joue un rôle important dans la rigueur de la preuve et considère l'erreur dans un statut majeur dans le développement des connaissances. En mathématiques, une conjecture, même si elle est démontrée, peut être réfutée à partir d'un contre-exemple. Dans le cas où il n'y a pas de contre-exemple (de la conjecture ou de sa preuve), la conjecture doit être acceptée comme théorème. Ce contre-exemple peut être local (dans la preuve de la conjecture), ou global (de la conjecture elle-même). Le contre-exemple global est le plus problématique car il peut provoquer le rejet de la conjecture. Des contre-exemples locaux peuvent provoquer une précision dans l'énoncé de la conjecture, une précision sur le domaine de validité, une amélioration de la conjecture en introduisant une condition, une amélioration de la preuve (Balacheff, 1982). Enfin, le travail de Lakatos témoigne de l'importance de la conjecture dans le développement des mathématiques et aussi dans la construction des connaissances. Comme l'argumente Balacheff (1982) :

C'est dans l'analyse critique du couple (théorème, preuve) que I. LAKATOS situe la clé du développement des mathématiques ; parce qu'elle permet une amélioration de la rigueur des preuves, mais surtout parce qu'elle est à l'origine d'une réelle construction des connaissances (...) (Ibid., p.9)

Enfin, alors que la conjecture fait partie de la pratique du mathématicien et de la transition de l'apprentissage de la preuve, que peut-on dire de sa présence et de sa pratique au niveau de l'université ?

2.2 Les suites

Malgré l'importance de cet objet mathématique pour l'apprentissage de l'Analyse, les suites ne sont pas toujours considérées comme essentielles dans l'enseignement des mathématiques au point même de disparaître des programmes d'enseignement dans certains pays. Weigand (2004) fait le point sur ce sujet et signale qu'il était conseillé d'étudier les mathématiques discrètes et les suites au lycée¹⁶. Puis Weigand (2014) nomme quatre raisons pour lesquelles il est important de revaloriser le concept de suite dans les mathématiques scolaires : (1) de nombreux problèmes de la vie réelle permettent des représentations mathématiques avec les suites ; (2) de nombreux problèmes mathématiques peuvent être résolus avec de suites particulières ; (3) les algorithmes d'approximation tels que la méthode de Héron (calcul de nombres rationnels) ou la méthode de Newton (calcul de zéros de fonctions) sont basés sur des suites récurrentes ; et (4) les suites sont des outils pour le développement de concepts continus (Ibid., p. 607). Tout comme Weigand (2004 ; 2014 ; 2015), nous soutenons que les suites sont un objet riche pour l'apprentissage de l'Analyse et que son enseignement devrait être encouragé au lycée et à l'université.

Dans la section suivante, nous montrerons d'abord des travaux concernant la notion de convergence et de limite. Ensuite, nous nous centrerons dans les recherches faites au sujet de suites définies par récurrence. Nous finirons avec quelques éléments relatifs à l'enseignement des suites dans le contexte français actuel à la transition L-U.

2.2.1 La notion de suite : convergence et limite

Les études portant sur la notion de suites sont vastes. Cette notion a été étudiée dans différents contextes, avec différents cadres théoriques, et différents points de vue pour décrypter et comprendre les problèmes qui se trouvent dans son enseignement et dans son apprentissage. Sans être exhaustif, nous montrerons les résultats principaux des recherches concernant les suites.

¹⁶ Dans les standards pour l'école de la National Council of teachers of mathematics (NCTM) de 1989 il est déclaré « Les séquences et les séries... devraient faire l'objet d'une plus grande attention, en mettant l'accent sur leur description en termes de relations de récurrence » (NCTM, 1989). Cependant, une dizaine d'années plus tard (NCTM, 2000), les mathématiques discrètes ne constituent plus une norme, mais sont désormais réparties dans l'ensemble des normes et s'étendent de la maternelle à la douzième année d'enseignement (Weigand, 2014).

Les travaux de A. Robert sont emblématiques de ce thème. Robert (1982) étudie comment les étudiants de première année de l'université conçoivent la convergence des suites. Les réponses des étudiants à un questionnaire conçu à ces fins, amènent à l'identification de trois modèles : (1) Modèles primitifs : qui peut impliquer soit un modèle stationnaire (à partir d'un certain rang la limite est atteinte), soit un modèle barrière (où la limite ne peut pas dépasser une certaine valeur), soit un modèle monotone (répondant au théorème de suites croissantes majorées). (2) Modèle dynamique : où la limite est conçue comme le fait de se rapprocher de quelque chose. (3) Modèle statique : où la limite est définie à partir de la définition formelle de convergence. Ici A. Robert constate que le modèle dynamique est privilégié par les étudiants, avec une stabilité telle qu'il perdure jusqu'en première année du master¹⁷. Pourtant c'est le modèle statique qui permet le mieux aux étudiants de réussir les exercices par rapport à la notion de convergence. Cette identification de modèles permet de considérer les connaissances acquises par les élèves dès le niveau secondaire (modèle dynamique pour arriver au modèle statique) pour introduire ensuite la définition formelle de suite convergente à travers une ingénierie didactique (Robert, 1983)¹⁸.

Sierpinska (1990) fait une analyse épistémologique relative à la compréhension du concept de suite numérique convergente et identifie des obstacles liés à cette compréhension. Ces obstacles sont aussi liés à la notion de limite et seraient en relation directe avec les suites infinies et la notion d'infini (comme le fait de concevoir la suite comme une très longue liste des nombres). Enfin, elle identifie des actes indispensables pour comprendre les suites convergentes : reconnaître l'intérêt et l'utilité dans l'étude de l'objet « suites infinies » ; encourager à parler de la notion d'infini (car elle est directement liée à ces suites) ; aborder les problèmes philosophiques de savoir si la limite est atteinte ou non d'un point de vue mathématique (où le problème a une solution); le passage à la limite ; la prise de conscience entre les différences entre la convergence et la stabilisation des nombres décimaux et les différences entre le concept de limite et de valeur d'une fonction, entre autres. Le fait que le mot limite intervienne dans différents contextes (comme dans le domaine de nombres, des grandeurs géométriques et physiques) constitue aussi un obstacle.

En se centrant sur la notion de limite d'une suite Przenioslo (2005) a pour but de sensibiliser les étudiants du secondaire sur leurs idées erronées, voire naïves. Elle

¹⁷ Il existe aussi les modèles mixtes, mais ceux-là deviennent plus présents en master chez les étudiants. Ces modèles mixtes vont permettre de travailler avec le modèle statique et dynamique.

¹⁸ Cette ingénierie a été reprise par Bridoux (2016) (voir aussi Grenier-Boley et al., 2015), où elle se focalise sur le rôle de l'enseignant mais en montrant que l'ingénierie reste encore d'actualité.

résume ces idées erronées comme suit : (a) Les termes d'une séquence convergente : s'approchent de la limite l'atteignant parfois, s'approchent de la limite mais ne doivent pas l'atteindre, doivent soit augmenter soit diminuer. (b) La limite d'une suite est soit la borne de la suite, soit le dernier terme de celle-ci. (c) Une séquence convergente doit suivre un certain patron. (d) Confusion entre l'infini inatteignable du nombre de termes et la valeur finie possiblement atteignable (Ibid., p. 71). Grâce à ses recherches précédentes, elle relève aussi que plusieurs images peuvent être formées chez les élèves dès le lycée, et qu'ils ne mettent pas en avant la définition formelle de la limite (car elle n'est pas utile pour résoudre des problèmes). Przenioslo (2005) conçoit une situation d'apprentissage pour confronter les élèves à ses idées erronées de sorte de pouvoir étudier différents types de suites sensibles aux subtilités de la définition formelle. Ici, elle n'utilise aucun type de représentation graphique, en revanche, elle demande aux élèves de construire leurs propres graphiques. Pour parvenir à une bonne conception de la notion de limite de suites, la condition que les élèves comprennent (entre autres¹⁹) le concept de fonction et considèrent les suites comme une fonction spécifique est nécessaire. Elle conclut que les situations pédagogiques proposées pour introduire le concept de limite doivent :

être précédées et suivies de diverses activités visant à développer la compréhension des limites par les élèves, en commençant par des exercices liés à l'expression de « l'inégalité avec la valeur absolue » dans le langage des distances et des voisinages, à la compréhension des nombres rationnels et irrationnels - leurs expansions décimales ou leurs approximations et en terminant par l'application du concept de limite pour résoudre des problèmes qui ne sont pas directement liés à sa définition formelle. [Notre traduction] (Ibid., p. 91).

Les études portant sur l'apprentissage de la définition formelle de la limite d'une suite ont comme élément en commun les difficultés cognitives que trouvent les étudiants. Pour analyser ces difficultés, plusieurs études font référence à l'image conceptuelle et à la définition du concept (Tall & Vinner, 1981). En effet, la complexité de la définition formelle de convergence rend son image particulièrement difficile à développer pour l'étudiant à cause de la non relation entre l'image conceptuelle et la définition du concept. À cet égard, Alcock & Simpson (2004) travaillent sur la visualisation de convergence de suites. Ils soulignent l'importance du travail entre les images visuelles des objets pour les mettre en relation avec les représentations formelles. Ici, ils démontrent que les élèves qui ont tendance à utiliser des images

¹⁹ Bien évidemment, il faut aussi la compréhension de sous-suite, de voisinage, de certains concepts de logique et la compréhension de quantificateurs.

visuelles peuvent se focaliser sur les objets et peuvent établir des liens entre les représentations visuelles et les formelles. Les élèves qui ont des difficultés sont ceux qui ne s'engagent ni dans les définitions ni dans les preuves formelles. Les auteurs suggèrent que pour aider à une bonne visualisation chez les élèves, on doit leur proposer des tâches qui encouragent davantage les liens entre ces types de représentations (sans se concentrer sur les propriétés algébriques de manière isolée). En outre, Mamona-Downs (2001) souligne qu'il est très exigeant pour les étudiants de créer leurs propres images à partir de la définition formelle. Pour cette raison, des aides didactiques devraient leur être proposées. L'auteur remarque aussi que des prérequis pour aborder la notion de limite de suite sont nécessaires : la notion de nombre réel, la notion de fonction, un travail avec des quantificateurs logiques et le travail avec les valeurs absolues et les inégalités. Dans son travail, elle remarque que plusieurs confusions des élèves ne sont pas dues à la définition de limite elle-même, mais à des fausses idées sur les suites (une monotonie implicite ou un patron évident et cohérent pour la suite). Plus tard, Mamona-Downs (2010) utilise la notion de supremum et du point d'accumulation pour les mettre en relation avec la définition de limite de suite en \mathbb{R} . Le fait que ces trois notions évoquent la proximité arbitraire d'un point permet de soulever ces différences pour une meilleure compréhension de chacune de ces notions.

Dans le contexte d'une classe de première année d'Analyse à l'université en Tunisie, Ghedamsi (2015) étudie les effets de la transition L-U concernant la convergence de suites. Le but est de connaître comment l'enseignant de l'université tient compte des connaissances acquises par les élèves dans l'enseignement secondaire. Elle constate que les interventions de l'enseignant provoquent une réduction des interventions des élèves (qui d'ailleurs cherchaient à faire des liens avec les connaissances qu'ils possédaient) et limitent les choix des étudiants. De plus, l'enseignant impose sans cesse les méthodes des techniques universitaires. Cela provoque un travail non cohérent chez les étudiants qui utilisent pendant toute la leçon des méthodes du lycée.

Dans sa thèse, Verdugo Hernández (2017) étudie le travail mathématique des enseignants de première année de l'université au Chili à propos de l'objet suites. Bien que les tâches abordées par les enseignants se réfèrent à l'Analyse Réelle (où ils demandent un travail avec la définition formelle de convergence, mais aussi des applications immédiates des calculs et des théorèmes), elle constate que cela n'est pas cohérent avec le type de travail que les élèves ont développé à ce niveau. En effet, leur travail mathématique répond plutôt à de l'Analyse algébrisée et, en plus, avec des difficultés qui peuvent aller d'un travail avec des inégalités au travail de récurrence mathématique manifesté par des démonstrations non abouties. En effet, les étudiants

s'appuient sur des représentations numériques pour interpréter les signes algébriques des suites. D'autre part, les enseignants utilisent certains graphiques pendant le cours pour faire des explications mais rien de cet aspect n'est considéré dans les évaluations.

Ghedamsi & Fattoum (2018) ont étudié, chez les élèves de 3^{ème} année de secondaire, l'évolution des images mentales formées en amont et en aval de la définition de convergence de suites numériques en Tunisie. Elles montrent la résistance des modèles dynamiques, fondés sur l'infini potentiel, au moment d'étudier la définition formelle de convergence. Elles signalent qu'au moment de l'étudier, les techniques des opérations sur les limites finies des suites *« pourraient renforcer les pratiques d'algébrisation dans le travail des élèves, sans qu'aucun apport significatif dans le processus de conceptualisation de la convergence ne puisse être entrepris »* (Ibid., p. 232).

Dans le contexte français, Chorlay (2019) et Gibel (2020) étudient la limite de suite réelle dans des classes de première scientifique (élèves de 16-17 ans). Dans le cas de Gibel (2020) l'objectif était de « faire vivre aux élèves une séquence permettant d'étudier expérimentalement le comportement asymptotique d'une suite (géométrique) ayant une limite finie ». Au titre de ces résultats, il constate que les élèves ont une habileté à établir des liens entre les différents registres utilisés (graphique et algébrique, pour expliciter la définition de la suite, sa croissance et la preuve de sa majoration) et entre les registres algébrique, numérique et graphique (pour établir le comportement de la suite à partir de ces valeurs avec du calcul instrumenté et la notion de seuil). Dans le cas de Chorlay (2019)²⁰, l'étude se centre sur l'activité de définition formalisée de la limite infinie d'une suite de la part des élèves. En s'appuyant sur un travail avec différents exemples de suites, il opère le suivi d'un travail collaboratif et réflexif entre les élèves afin de construire la définition formelle de la limite infinie. Au final, les élèves ont pu formuler une telle définition. Ainsi, la situation a permis aux élèves d'aborder des pratiques mathématiques de l'enseignement supérieur en promouvant un travail sur les propriétés et l'argumentation (au lieu des seules formules et du calcul) ainsi que d'avoir une expérience déductive et cohérente dans le domaine de l'Analyse.

Weigand (2016) met l'accent sur la notion de limite. Ici, l'auteur présente les suites comme un outil indispensable pour la compréhension de la notion. Il propose un schéma fondé sur une approche discrète de la notion de limite en 5 étapes : un accès numérique et graphique (1), considérations sur la compréhension intuitive des valeurs limites (2), l'étude de suites définies explicitement (3), l'étude de suites définies par

²⁰ Pour le lecteur intéressé, ce travail montre une révision assez complète de la littérature concernant la définition formelle de limite de suite.

réurrence (4) et, comme étape ultime, une approche de la définition formelle de la limite (5). Par rapport à l'étape (4), l'auteur note que déterminer la valeur de la limite dans ces suites est plus difficile. En effet, dans ce cas, la représentation explicite est absente, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une représentation implicite de la suite au titre qu'elle est définie par une équation fonctionnelle. Par ailleurs, elle n'est pas une fonction explicite du rang. Cela pourrait promouvoir un travail expérimental et heuristique avec l'aide de la technologie et poursuivre les étapes exposées à l'aide de suites récurrentes. Cela impliquerait des justifications formelles de la convergence. C'est avec les conclusions de ce travail que nous allons aborder, dans notre section suivante, les suites définies par récurrence.

2.2.2 Les suites définies par récurrence

Alors que les suites récurrentes comportent un intérêt mathématique considérable les manuels standards d'Analyse mathématique au niveau universitaire les abordent de manière marginale (Krainer, 2016). Cette réalité peut amener à un mépris de cet objet et constituer une raison du dénuement de la littérature en didactique des mathématiques relative aux difficultés que rencontrent les élèves.

Nous présentons ci-après, des études qui ont traité des suites définies par récurrence pour développer des recherches en didactique des mathématiques. Néanmoins, tous les travaux n'explicitent pas les difficultés que les élèves peuvent rencontrer.

a) Travaux qui utilisent ces suites dans leur recherche

Dans les années 80, Boschet (1982) a conduit une étude au niveau de la première année de l'université. À l'époque, elle constate déjà que, dans le contexte français, les exercices sur les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ sont stéréotypés et utilisent le lexique le plus pauvre en comparaison d'autres suites. L'auteur remarque également que ces suites sont artificiellement conçues pour appliquer certains théorèmes et émet l'hypothèse que si nous faisons appel aux mêmes connaissances de façon régulière, cela pourrait provoquer une représentation erronée de la convergence. À cette heure, cela semble être ni démontré ni réfuté.

Des travaux comme ceux de Kidron (2006, 2008) ou la thèse de Barquero i Farràs, (2009) (voir aussi Bosch et al. (2007) et Barquero et al. (2010)), sont intéressants car ils portent sur les différences entre les modèles discrets et continus à l'instar de la suite et l'équation logistique dans le contenu des équations différentielles. Ces

expérimentations ont été faites dans le contexte de la première année de l'université respectivement en Israël et en Espagne.

Kidron (2008 ; 2006) a pour objectif de faire une articulation de trois cadres théoriques en se centrant sur la conceptualisation de la notion de limite au moyen de la définition de la dérivée. Elle cherche à montrer aux élèves que, dans certaines équations différentielles, le passage à un modèle discret peut changer la nature de la solution. Elle a donc pour but de sensibiliser les étudiants à l'usage de la méthode numérique d'Euler qui produit une discrétisation du temps continu pour résoudre des équations différentielles. Les élèves sont amenés à comparer la solution analytique dans un calcul continu (utilisant le concept de la dérivée comme $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$), avec la solution numérique utilisant des méthodes numériques discrètes (utilisant $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour de petits Δx , ce qui omet la limite). Cette comparaison a pour but de montrer que des petits changements dans les conditions initiales peuvent produire un effet important dans la solution. Pour se faire, les élèves observent, avec le logiciel MathLab, les représentations graphiques de l'équation logistique résolue par la méthode d'Euler²¹. Ici, les élèves se rendent compte qu'avec des petits changements dans l'équation, il peut y avoir de grands changements du comportement qui vont jusqu'au comportement chaotique. Lors de l'analyse de données, l'auteure observe que, bien que les élèves aient été conscients des solutions dans la méthode discrète, cela ne garantissait pas leur sensibilisation au fait que la méthode numérique n'utilise pas la dérivée comme limite.

Barquero (2009), quant à elle, soutient dans sa thèse des éléments qui vont dans le sens proche de Kidron. Cependant, elle se focalise plus sur la modélisation, notamment sur l'étude de populations avec des modèles dynamiques discrets et continus. Quand il s'agit d'aborder les modèles discrets²², les étudiants se concentrent dans l'étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$. Ici, une grande partie des étudiants ne se souviennent pas de la définition d'une suite. Il a été nécessaire que l'enseignant définisse les suites récurrentes, enseigne leur représentation graphique et introduise les méthodes

²¹ Si nous comparons la solution par la méthode d'Euler $p(t + \Delta t) = p(t) + \Delta t \cdot r \cdot p(t)(1 - p(t))$ avec l'équation logistique $p_{n+1} = p_n + r \cdot p_n(1 - p_n)$, nous pouvons noter que les formules coïncident pour $\Delta t = 1$. Ici les élèves observent le comportement de l'équation $p(t + \Delta t) = p(t) + \Delta t \cdot r \cdot p(t)(1 - p(t))$; $p(0) = p_0$ où les solutions dépendent de la taille de Δt .

²² Le modèle de Malthus et celui de la suite logistique (ou modèle de Verhulst). Dans la troisième et quatrième session, ils introduisent et travaillent dans le modèle logistique. Dans les deux dernières sessions, ils travaillent sur un modèle « analítico-funcional » avec l'objectif de pouvoir étudier la dynamique de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f une fonction quelconque de classe C^1 . Ici dans cette dernière session, quelques étudiants ont pu s'approcher à une étude locale de la fonction à travers la dérivée évaluée dans le point fixe, pour discuter sur la convergence (ou divergence) de la suite.

d'étude de leur convergence. Finalement, les étudiants ont privilégié la simulation numérique quand il s'agissait d'étudier ces suites.

Un des objectifs de Ghedamsi (2008) est d'approximer des nombres réels par le biais de la recherche de solutions du point fixe du cosinus (qui d'ailleurs assure aussi l'existence). Pour cela, le but est de comparer les approximations et la rapidité de convergence à ce point fixe, à travers la méthode de la dichotomie, de la suite récurrente $u_{n+1} = \cos u_n$ (en s'appuyant sur sa représentation graphique), et de la méthode de Newton. Cette situation permet d'avoir accès à des nombres réels que l'on ne sait pas expliciter, ce qui exige la mise en œuvre des méthodes formelles.

Ces derniers travaux utilisent des suites définies par récurrence qui nous montrent l'intérêt que pourraient trouver les élèves dans l'étude de problématiques liées à l'objet. Cependant, ces recherches évoquent rarement, ou même jamais, les difficultés qu'ont rencontrées les élèves. La section suivante nous permettra d'approfondir l'étude de ces difficultés.

b) Études qui abordent l'apprentissage ou les difficultés des étudiants des suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Une série d'entretiens à destination des étudiants de première année d'une université anglaise a été menée par J. Mamona-Downs (1990) qui, après analyse, a constaté que les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ ²³ provoquaient des confusions chez les étudiants qui les travaillaient. Ainsi elle signale que la portée de la notion de fonction serait sous-estimée à ce niveau d'enseignement. Pour les étudiants, la perception de la notion de fonction est juste une relation entre deux quantités variables qui donnent un graphe « lisse et continu ». L'auteure rapporte que ce qui peut être particulièrement difficile pour les élèves est la présence de deux fonctions impliquées lorsque l'on étudie les suites définies par récurrence²⁴. Ainsi il y aurait une réticence à travailler les fonctions dans des domaines de définition discrets et il existerait des difficultés à travailler avec des graphes de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. L'auteure signale enfin que *si la suite était considérée comme une fonction, cette tendance disparaîtrait certainement*.

En France, une décennie plus tard, Praslon (2000 et 1999 pour une synthèse) dédie son travail de thèse à l'étude de la notion de dérivée dans la transition L-U. Il

²³ Dans l'étude, on a particulièrement demandé d'étudier la suite $u_n = au_{n-1}^2 - bu_{n-1}$ pour différentes valeurs de a et de b .

²⁴ À savoir $n \rightarrow u_n (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R})$, et $u_{n-1} \rightarrow u_n (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ (si nous substituons u_{n-1} par x dans $f(x) = ax^2 - bx$)

observe ainsi que la dérivée est utilisée dans les exercices qui visent à étudier des suites récurrentes afin de déterminer la variation de la fonction qui définit la suite. Il y est également question d'observer la façon dont ces suites sont abordées dans les deux niveaux d'enseignement. Des premiers décalages dans cette transition sont observés. Au niveau du lycée, ces tâches sont introduites avec une étude assez complète de la fonction suivie de l'étude de la suite. En outre, la seule méthode pour étudier ces suites au niveau du lycée est celle du point fixe²⁵. Au niveau de l'université, les tâches avec ce type de suites demanderaient une *flexibilité cognitive et une capacité d'adaptation importantes*. À ce niveau d'enseignement, on ne fait pas une introduction de l'étude de la fonction et de son identification : l'élève doit garder à l'esprit qu'il vise à utiliser le théorème de suite croissante (décroissante) majorée (minorée) tout en planifiant pas à pas le travail qu'il doit entreprendre pour l'étude de ces suites²⁶. L'élève doit aussi garder à l'esprit que même si $f(x) = x$ peut avoir une ou plusieurs solutions, cela n'assure pas la convergence de la suite. Par rapport à ces exercices, il nous semble important de souligner une citation de F. Praslon :

Le simple fait d'avoir à mêler « fonction » et « suite » au sein d'une argumentation sans amalgamer l'étude de l'une, très familière à l'étudiant au sortir du lycée, et celle de l'autre, qui l'est beaucoup moins, représente une difficulté d'un genre nouveau (Praslon, 2000, p. 214).

En Allemagne H. Weigand s'est intéressé aux suites ainsi qu'à une entrée à l'Analyse d'un point de vue discret (Weigand, 2014, 2015). Dans un premier travail sur les suite récurrentes (Weigand, 1991), il argumente sur le fait que ces suites ne peuvent pas toujours être exprimées en termes algébriques. C'est la raison pour laquelle il met en avant différentes représentations graphiques et numériques²⁷ pour les étudier. Dans la phase de l'expérimentation de l'étude, ces représentations sont générées par un programme d'ordinateur. Avec l'objectif de comparer deux populations différentes, l'étude a été menée auprès des élèves d'une classe équivalente à celle de première du lycée en France (sans avoir étudié la notion de suite récurrente préalablement) et avec

²⁵ Ici on demande la construction d'un tableau de variations pour établir ensuite par récurrence que la suite est majorée (ou minorée) par une valeur qui apparaît du tableau. Cette dernière valeur apparaît dans l'étude de la fonction dans l'intervalle stable et qui contient donc aussi le point fixe. Ce dernier est souvent demandé et donc explicité dans une question précédente.

²⁶ Application du théorème du point fixe pour la recherche de la valeur limite de la suite, intervalle stable par f , la production d'un raisonnement par récurrence par exemple.

²⁷ Les représentations utilisées peuvent mettre l'accent soit sur la succession (comme le graphique en escargot, une chaîne de flèches (voir annexe chapitre 2, page 346), analyser seuls les premiers termes de la suite sans les valeurs de n), soit sur la suite récurrente en termes de fonction (comme un graphique linéaire où la suite forme un ensemble discret de points ; la chaîne de flèches (voir annexe chapitre 2, page 346), ou le tableau des termes de la suite plus les valeurs de n).

des enseignants du secondaire. Nous soulignons quelques résultats pertinents à notre recherche : (1) Les étudiants ont des difficultés à comprendre la représentation de suites récurrentes par le graphique en escargot (résultat qui a aussi été constaté par Rousse (2018, p. 156)). En effet, ce type de représentation a besoin de beaucoup d'expériences, et cela pourrait produire des interprétations mathématiques erronées. (2) Les enseignants devraient s'appuyer davantage sur le point de vue de l'élève (avec des expériences qu'ils ont déjà acquises) pour introduire des nouvelles notions. En effet, les élèves utilisent les représentations pour raisonner et argumenter ce qui les amène à reconnaître les propriétés de la suite (à la différence des enseignants qui travaillent plus formellement). (3) Les élèves, contrairement aux enseignants, n'ont pas utilisé la fonction qui génère la suite pour étudier les propriétés de la suite récurrente. (4) La plupart ainsi que quelques enseignants, n'ont pas établi le lien entre la solution de l'équation $f(x) = x$, la valeur de la limite de la suite, le point fixe et l'intersection du graphe de la fonction qui génère la suite avec $y = x$.

Ultérieurement, Weigand continue à s'intéresser aux suites récurrentes (Weigand, 2004; Weigand & Thies, 2003) mais, cette fois, en mettant l'accent sur le processus de croissance de ces suites : croissance linéaire de $a_{n+1} = a_n + B$, croissance exponentielle de $a_{n+1} = A * a_n$, et croissance limitée de $a_{n+1} = a_n + P(B - a_n)$. Ici, l'idée est de promouvoir le travail des élèves (classe Terminale de lycée en France) dans un environnement purement informatique par opposition au travail traditionnel avec papier et crayon. Il tire ensuite des conclusions sur la compréhension des élèves à partir des problèmes géométriques et de la vie réelle. Le programme informatique permet de varier les paramètres de suites et utilise des représentations algébriques, graphiques et des tableaux numériques. Pour la croissance linéaire et exponentielle, les élèves décrivent correctement la croissance mais ne donnent pas des preuves formelles de ce qu'ils visualisent. D'autre part dans les suites de croissance limitée, ils donnent des descriptions plus intuitives concernant leurs comportements (notamment parce qu'il est plus difficile d'écrire la relation des différents paramètres de la suite entre a_1 , P et B). À cet égard, les élèves rencontrent plus de problèmes dans la notation de suites et l'utilisation d'indices comme a_n , a_{n+1} . Cela est peut-être une cause de la non production de preuves de la part des élèves. Finalement, la représentation numérique avec un tableur Excel est considérée comme un outil puissant qui permet de soutenir l'apprentissage. Cet outil aide à visualiser surtout les aspects locaux de la suite tandis que la représentation graphique permet de regarder les aspects globaux. Le travail, exclusivement dans un environnement informatique, de l'étude des suites récurrentes choisies requière beaucoup de concentration et semble être trop exigeant pour la plupart des élèves. Ceux qui réussissent à se concentrer sont ceux qui ont expérimenté

avec les paramètres des suites utilisées, afin de contrôler et vérifier les résultats obtenus. Cependant, se centrer uniquement dans un travail expérimental reste insuffisant pour que les élèves entrent dans une étude théorique de ces suites.

Plus récemment, le travail de thèse de Rousse (2018) a été consacré au thème du discret et du continu au niveau du lycée. Elle constate qu'au moment d'étudier les suites récurrentes, les élèves de lycée mélangent les connaissances acquises par rapport aux suites et par rapport aux fonctions (comme une opposition entre le travail dans un ensemble discret d'un ensemble continu). Les élèves ont également des problèmes avec les indices de la suite, avec sa représentation graphique, et peinent à expliciter la fonction qui définit la suite. Ces problèmes semblent conduire à traiter les suites comme des fonctions continues et dérivables sur un intervalle de \mathbb{R} . Ce dernier problème a aussi été détecté par Litim et al. (2015) en première année d'université au Maroc, sans toutefois expliciter avec quel type de suite ce problème arrive. Cela peut constituer une perte de sens de la notion de suite.

2.2.3 Quelques éléments de l'enseignement actuel de la notion de suite en France

Dans les années soixante et soixante-dix, les mathématiques avaient une entrée rigoureuse dès l'école secondaire. Mais dès les années quatre-vingt, les programmes de lycée ont opté pour une entrée plus intuitive aux notions mathématiques ce qui a provoqué, par exemple, la disparition de la définition formelle de la limite au lycée (Artigue, 2003). Cette réalité existe encore aujourd'hui. Afin de connaître les spécificités de l'enseignement actuel de la notion de suite, nous allons présenter brièvement des constats faits au cours de trois travaux récents : une brochure de la commission Inter-IREM sur les limites des suites réelles et des fonctions numériques (Bloch et al., 2017); un rapport au Cnesco sur le thème « Entrée dans l'enseignement supérieur : Éclairages en didactique des mathématiques » (Gueudet & Vandebrouck, 2019) et le travail de thèse de S. Rousse (Rousse, 2018).

L'objet suite apparaît dès le lycée avec une définition formalisée qui commence par la classe de Première et se poursuit en classe de Terminale. Pour les élèves qui suivent des études scientifiques à l'université, la notion apparaît alors dès la première année de licence comme objet d'étude pour être utilisée plus tard en tant qu'outil. Ce constat permet d'affirmer que les suites sont une notion ancrée dans la transition L-U en France et qu'elles sont rencontrées à différents niveaux éducatifs par les élèves.

Dans la classe de Première Scientifique, les manuels définissent les suites comme des fonctions définies sur l'ensemble \mathbb{N} (exemple : « Soit n_0 un entier naturel. Une suite u est une fonction associant à tout entier naturel n un réel $u(n)$ que l'on note u_n). Les manuels introduisent deux modes de génération de suites : soit par une formule explicite comme $u_n = f(n)$ (pour tout n naturel et f définie sur l'intervalle $[n_0, +\infty[$), soit par une définition de la suite par récurrence (cela ne considère pas une suite de la forme $u_n = (-1)^n$, même si le candidat pour la fonction f n'est pas naturel). À ce niveau d'enseignement et concernant la variation d'une suite, c'est surtout la notion de croissance qui est privilégiée (en mettant l'accent sur les suites géométriques et arithmétiques). Les manuels traitent ensuite les méthodes algébriques pour l'étude de la variation de suites (calcul du signe du quotient de deux termes consécutifs de la suite ou la différence entre eux - où l'on ne précise pas que les quantités sont calculées pour tout n). Certaines suites arithmétiques et géométriques sont définies par récurrence. Dans le cas de suites $u_{n+1} = f(u_n)$, les manuels évoquent très peu le fait que si f est croissante, (u_n) n'est pas nécessairement croissante. Généralement, on demande aux élèves de conjecturer la monotonie de la suite à partir des premiers termes de celle-ci. La notion de limite est abordée graphiquement et numériquement avec des tables de valeurs ou en plaçant des valeurs de la suite dans un intervalle comme une représentation graphique en une dimension. Cependant, les conjectures sur la limite ne sont pas prouvées, et elles ne sont valables que si la valeur identifiée est bien la bonne limite.

En classe de Terminale, on commence par le raisonnement par récurrence. À ce niveau, on traite davantage l'étude des suites récurrentes. La notion de convergence est introduite par la définition : « (u_n) tend vers L quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». On définit aussi le cas de la limite infinie. Les opérations sur les limites sont introduites et admises. Le programme scolaire conseille de s'appuyer sur différents registres et encourage le travail algorithmique. Le travail sur la convergence est abordé principalement avec le théorème de croissante majorée (décroissante minorée), qui est admis, et le théorème de l'unicité de la limite (démontrés). Plusieurs exercices sont proposés pour étudier la convergence de suites définies par récurrence (application du théorème sur les suites croissantes et majorées). Les majorants (ou minorants) sont souvent donnés dans les énoncés avec des méthodes pour étudier les suites exprimées explicitement. Le théorème des gendarmes est utilisé pour des fonctions trigonométriques. La notion de convergence, même si elle est présentée dans le manuel de Terminale, est traitée principalement avec des suites définies par récurrence à partir

du théorème de convergence monotone. Finalement, aucun exercice nécessitant d'utiliser la définition de convergence n'est demandé.

Ainsi, pour étudier les suites, que ce soit au niveau des classes de Première ou de Terminale, on utilise et on travaille la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui définit la suite. Notamment, un travail de dérivation est demandé. À cet effet, Bloch et al. (2017) signalent

(...) ce déplacement de l'attention sur les fonctions réelles peut induire un manque de sens quant aux notions de croissance d'une suite et peut, peut-être, provoquer chez l'élève des conceptions erronées (...). On travaille alors sur un objet (les suites) sans jamais revenir sur la nature de cet objet (Ibid., p. 72).

En première année de l'université²⁸ le cours aborde successivement la définition de suite puis la notion formelle de convergence. Par exemple, dans une polycopie de L1, on définit : « une suite numérique est une fonction $u : \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}^{29} \rightarrow \mathbb{R}$ pour un certain entier $n_0 \geq 0$. On note u_n plutôt que $u(n)$, c'est le terme de rang n de la suite, et on note la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ », la notion formelle de convergence en termes de ε et N , soit totalement en registre symbolique comme « $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon$ », soit dans un mélange de registre de la langue naturelle et registre symbolique « Pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que si $n \geq N \Rightarrow |x_n - l| < \varepsilon$ », où la quantification universelle est encore présente de façon implicite. Une fois la définition formelle de convergence donnée, les élèves l'utilisent pour démontrer des théorèmes (tels que l'unicité de la limite ou les règles de calcul) et l'existence ou non de limites particulières. Enfin, les suites deviennent un objet mathématique central à ce niveau d'enseignement : elles sont utilisées pour la construction des nombres réels, pour aborder la notion de complétude, pour produire des propriétés essentielles de l'Analyse (comme la densité, l'adhérence, les limites, la continuité), pour des théorèmes d'existence et pour construire des nouvelles notions de l'Analyse Réelle voire topologiques par la suite.

Concernant la notion de convergence, bien que l'on puisse utiliser la notion donnée au lycée pour l'introduire à l'université, cela demande de la part des élèves un changement de point de vue sur les suites. En effet, ils doivent faire le passage d'une vision dynamique vers une vision statique de la notion. Le travail mathématique

²⁸ La description de la réalité de la classe de première année de l'université est faite à partir de l'expérience des auteurs en tant qu'enseignants de cette classe (Bloch et al., 2017).

²⁹ Ces formulations passent sous silence la structure essentielle pour les suites récurrentes d'ordre et de successeur.

demandé aux lycéens est plutôt d'ordre algébrique et ne met pas en avant un travail sur la définition de la limite.

À l'entrée de l'université, le raisonnement par récurrence reste un des thèmes où les élèves manquent de maîtrise alors qu'il est censé être utilisé comme un outil pour l'étude des suites dans les exercices proposés à ce niveau. Les propriétés des suites sont mises en relation avec les propriétés des fonctions qui les définissent dans le cas des suites $u_{n+1} = f(u_n)$. Ce fait met en lumière les malentendus : « *cette interférence suite-fonctions est justement passée sous silence au lycée - de telles suites y sont étudiées mais au coup par coup et sans attention sur la variable f* » (Gueudet & Vandebrouck, 2019). Même si les suites sont des fonctions, le travail mathématique que l'on entreprend avec les suites diffère de celui que l'on exerce avec les fonctions définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . En effet, cela met en évidence le besoin de prendre en compte la structure des ensembles (domaine et image) et provoque une distinction dans son enseignement, tant dans les programmes que dans les manuels. Pourtant, malgré cette distinction, ce travail est source d'erreurs et de malentendus de la part des élèves, et cela dépasserait le seul niveau du lycée. Voilà qui témoigne d'un manque dans le travail discret.

2.3 Conclusion du chapitre

2.3.1 Points à retenir et questions émergentes

Nous soutenons que l'étude de suites définies par récurrence devrait être mise en avant dans l'enseignement autant pour ces potentialités que pour la richesse conceptuelle qu'elle peut apporter aux étudiants. Toutefois, les travaux montrent que le travail développé par les élèves avec ces suites rencontre des difficultés dans son apprentissage. À ce propos, nous reprenons ici la citation de la thèse de Praslon (2000) :

Le simple fait d'avoir à mêler « fonction » et « suite » au sein d'une argumentation sans amalgamer l'étude de l'une, très familière à l'étudiant au sortir du lycée, et celle de l'autre, qui l'est beaucoup moins, représente une difficulté d'un genre nouveau (Ibid., p. 214).

Artigue (2003) identifie que les notions de suite, de fonction, de nombres réels et de limite constituent un réseau complexe de difficultés pour les élèves. Ce réseau serait d'autant plus difficile à démêler que ces notions sont encore en cours de construction chez l'élève à l'entrée en Analyse. L'étude de suites récurrentes amène les élèves à travailler avec ces notions mais pourrait-elle nous aider à démêler ce réseau de difficultés ? Si oui, comment modéliser ces difficultés au-delà de la confusion « suites-fonctions » ?

Les recherches comportant les notions précédemment signalées concluent que la représentation graphique constitue un support considérable pour la compréhension des objets en Analyse (Oktaç et Vivier, 2016). Or, dans le cas de suites récurrentes, la compréhension de la représentation graphique en escargot, est une difficulté pour les élèves (Weigand 1991, Rousse 2018). Dès lors, comment soutenir la visualisation de ces suites tout en favorisant différents registres sémiotiques ?

Les notions de croissance, décroissance et les caractères bornés, majorés et minorés des suites dans le contexte français, montrent une certaine continuité entre le lycée et la 1^{ère} année de l'université. En effet, le théorème de suite croissante majorée (décroissante minorée) converge est souvent utilisé pour étudier la convergence de suites définies par récurrence aux deux niveaux d'enseignement. Cette continuité constitue-elle un support réel utilisé par les élèves au début de l'université ?

À la lumière des travaux présentés, la technologie est une aide à la visualisation en Analyse, ce qui constitue une évidence scientifique. Mais les chercheurs sont partagés par rapport à la façon dont elle doit être utilisée, et il ne semble pas y avoir de suggestion concernant les types de travail (ou de paradigmes) à promouvoir avec

les technologies numériques pertinentes à la transition L-U. Les pratiques d'enseignement à l'université pourraient (et doivent) aussi être questionnées. À cet égard, et pour l'usage des calculatrices dans l'apprentissage, nous soulevons une des questions posées par Gueudet (2008) : *Les compétences en matière de technologie acquises au lycée sont-elles exploitées à l'université ?* [Notre traduction] (Ibid., p. 252). De surcroît, comment donc savoir quel(s) type(s) de travaux mathématiques privilégier à la transition lycée-université en France avec l'aide de la technologie ?

Les travaux de thèse à la transition L-U dans le domaine de l'Analyse rendent compte d'un problème de manque de contrôle chez les élèves. Cela se manifeste par un manque de cohérence (Bloch, 2000 ; Praslon, 2000). La recherche encourage pourtant un contrôle mixte, entre l'intuitif et le formel, qui soit conséquent à cette transition (Ghedamsi, 2008). Par rapport au contrôle intuitif, la calculatrice joue un rôle clé car, comme signalé par Trouche (1996) (notamment sur la notion de limite), elle doit permettre un contrôle des représentations sémiotiques de l'objet. Un contrôle formel quant à lui, touche aux problématiques de l'apprentissage de la preuve à la transition L-U. Pour ce dernier, les recherches témoignent que la conjecture joue un rôle important et que la calculatrice constitue une aide pour les établir. On peut alors se demander comment la conjecture est abordée à l'université. Se sert-elle de la calculatrice comme une aide à la conjecture ainsi que le suggère la recherche ?

Nous pouvons résumer les interrogations et les points que nous venons d'aborder dans ce chapitre en une seule question :

Comment promouvoir le contrôle dans le travail mathématique des élèves, d'une part pour qu'il soit pertinent aux problématiques de la transition L-U en France et, d'autre part, pour qu'il prenne en compte les spécificités des suites définies par récurrence ainsi que les difficultés rencontrées par les élèves dans leur étude ?

2.3.2 Caractéristiques de cadre(s) théorique(s) pour traiter cette question

Les problèmes que nous avons relevés répondent à des préoccupations cognitives et épistémologiques ancrées dans le contexte particulier de la transition L-U et dans un domaine mathématique précis : celui de l'Analyse. Comme signalé par Kidron (2020), les problématiques de l'Analyse relèvent des dimensions théoriques cognitives et épistémologiques.

Si nous cherchons à promouvoir un certain travail chez l'élève, il faut donc le caractériser pour l'étudier avec détail. Cette caractérisation a besoin d'identifier des actions entreprises par l'élève, mais aussi des activités cognitives qu'ils développent (ou pas). Le défi est établi : utiliser un cadre théorique suffisamment sensible qui nous permette d'analyser l'activité mathématique que l'élève développe au moment d'étudier la notion mathématique visée (suites définies par récurrence) et que ce cadre soit aussi sensible à l'étude du travail mathématique complexe relatif aux deux institutions éducatives impliquées.

Dans le chapitre suivant, nous nous consacrerons à présenter un tel cadre théorique, de telle sorte qu'il soit capable de mettre en valeur nos questionnements.

3 Cadre théorique

L'étude de la transition Lycée-Université est un domaine particulièrement complexe tant le nombre de variables à considérer et les problématiques épistémologiques et cognitives associées impliquent des analyses élaborées. Dans ce chapitre, nous montrerons les deux théories qui abordent des éléments cognitifs et épistémologiques en didactique des mathématiques utilisées dans cette étude. Ensuite nous mènerons une articulation entre ces deux théories à travers un *Networking* de théories (Bikner-Ahsbahr & Prediger, 2014). Par cette démarche, nous tenterons ainsi une meilleure compréhension de la transition L-U dans le domaine de l'Analyse spécifique aux suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

D'une part, nous ferons l'étude de l'activité mathématique en approfondissant les aspects de l'individu dans son contexte grâce à la Théorie de l'Activité en Didactique des Mathématiques (TADM) (Robert, 1998, 2008 ; Rogalski, 2008 ; Abboud et al., 2017 ; Vandebrouck, 2008, 2018). D'autre part, nous analyserons le travail mathématique développé au sein d'une institution, dans une classe ou par un individu, grâce à la théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM) (Kuzniak, 2011 ; Kuzniak & Richard, 2014 ; Kuzniak et al. 2016).

3.1 La Théorie de l'Activité en Didactique des Mathématiques

La TADM repose sur les bases de la Théorie de l'Activité – TA³⁰. Elle est issue des travaux des chercheurs en ergonomie cognitive (ou psychologie du travail) et le fruit d'une adaptation à la discipline de la Didactique des Mathématiques (Robert, 1998 ; Rogalski, 2008). Elle cherche à mieux comprendre les apprentissages des élèves en se centrant sur l'analyse de l'activité (Abboud et al., 2017). Cette analyse s'effectue par le biais de l'étude de processus que développe (ou pas) un sujet individualisé en action (lors de la réalisation de tâches par exemple) dans un contexte donné. Elle caractérise l'activité des enseignants en invoquant la double approche ergonomique et didactique de leurs pratiques (Robert & Rogalski, 2002, 2005). Pour l'étude de cette activité, la théorie met l'accent sur la *tâche* et l'*activité*, ainsi que sur la *situation* et le *sujet*. Observons plus en détail ces dernières notions.

Tâche et activité

La distinction entre la notion de tâche et celle d'activité permet d'entreprendre des analyses d'un point de vue épistémologique et cognitif. La tâche se rapporte à l'objet et elle est définie comme le « *but qu'il s'agit d'atteindre sous certaines conditions* »³¹ (Leplat, 1997). L'activité, quant à elle, se rapporte plutôt au sujet et se définit comme « *ce que développe un sujet lors de la réalisation de la tâche* » (Rogalski, 2003, p.349). Ainsi, l'activité considère, par-delà les actes extériorisés d'un sujet, les inférences, les hypothèses, les décisions, la façon de gérer le temps, et/ou les interactions qu'il peut y avoir avec un autre sujet.

En ce qui concerne la tâche, nous pouvons distinguer celle qui est prescrite et celle qui est effectivement développée. La première concerne le prescripteur de la tâche avec certaines attentes prédéfinies ; tandis que la deuxième concerne le réalisateur qui

³⁰ Dans la TA, on peut identifier quatre générations : la première est l'introduction par Vygotsky de la notion d'activité avec des outils, suivie de la deuxième génération avec une poursuite de ces travaux par Leontyev (Leontyev, 1978), puis de la troisième génération où l'activité peut être conçue comme des systèmes de travaux (Engestrom, 1987) ou concentrée sur le sujet et sa conscience (Holzkamp, 1993) ; enfin la quatrième génération qui étudie l'activité d'un point de vue historico-culturel en incluant les émotions et l'éthique (Roth & Lee, 2007 ; Roth, 2020a) .

³¹ Nous pouvons parler de sous-tâches et donc aussi des sous-buts d'activités liées à ses tâches.

doit aussi redéfinir la tâche qu'on lui a prescrite. Ici, il peut y avoir un décalage entre la tâche prescrite et la tâche effective. En ce qui concerne le réalisateur, cela peut être dû au « *manque de mobile pour s'engager dans l'action attendue, ou parce qu'il n'a pas les compétences nécessaires pour les réaliser, ou parce qu'il s'en est construit une représentation inappropriée* » (Rogalski, 2008, p. 26). L'activité développée sera finalement déterminée (entre autres) par cette tâche effective.

Situation et Sujet

La TADM s'intéresse à un sujet individualisé qui a des intentions et des compétences. Ces compétences vont servir d'appui pour produire des actions qui, elles-mêmes, peuvent permettre d'arriver à des buts. La situation est normée par la tâche et le contexte dans lesquels elle se réalise. La situation³² et le sujet vont jouer le rôle de codétermination de l'activité, qui produit alors des résultats et des effets, à travers une double régulation : un processus dynamique de l'activité se met en place (Figure 1). Cela va dans le sens de la problématique des apprentissages et du développement de l'élève du point de vue de Vygotsky et Piaget (Rogalski, 2008).

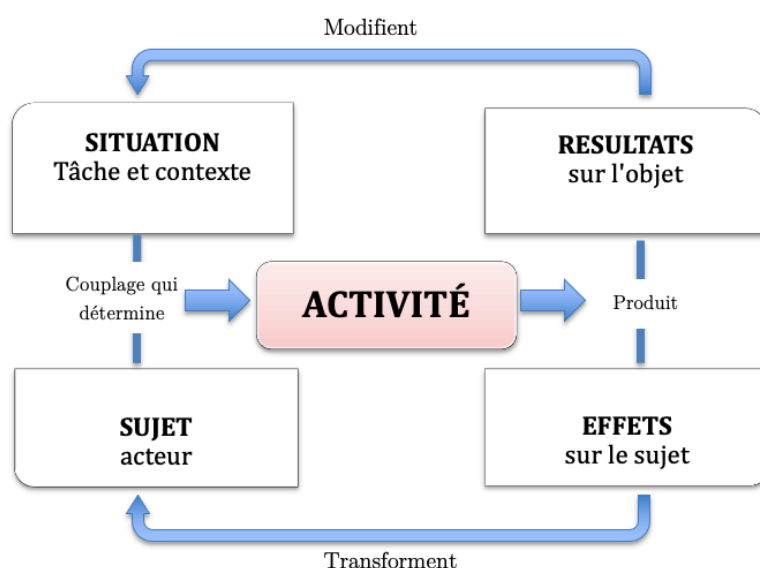


Figure 1 : Diagramme de la double régulation de l'activité (Leplat, 1997).

Le diagramme de la Figure 1 montre la codétermination de l'activité en fonction de la situation et du sujet. En effet, ces derniers vont avoir une incidence directe sur l'activité. De même, les résultats modifient la situation autant que les effets

³² Cette situation est différente à celle définie dans la Théorie de Situations Didactiques (TSD).

transforment le sujet conduisant ainsi à la production d'une nouvelle activité. Cette codétermination a aussi une dimension productive qui s'oriente vers l'objet de la tâche (les résultats sur l'objet modifient la situation) et une dimension constructive orientée vers le sujet et le développement de connaissances en lien avec la conceptualisation (les effets sur le sujet transforment le sujet agissant) (Vandebrouck, 2018). Si, cette régulation peut être observée localement à court terme, elle l'est plus globalement sur le long terme. Par ailleurs, la double régulation de l'activité est aussi en lien avec les théories constructivistes de Piaget et Vygotsky.

Approches complémentaires de Piaget et Vygotsky

La théorie Piagétienne considère l'épistémologie des objets mathématiques d'un point de vue individuel du sujet alors que la théorie de Vygotsky prend aussi en compte les médiations de l'enseignant, ce qui permet des analyses de l'activité au-delà du sujet individuel (Rogalski, 2013). En effet, Vergnaud (1990), dans sa théorie des champs conceptuels, inclut les analyses épistémologiques de la théorie de Piaget sur le développement. La conceptualisation de Vergnaud constitue une des bases de la définition d'apprentissage de la TADM. Par ailleurs, Vygotsky met l'accent sur la médiation dans la zone proximale de développement³³ (ZPD) de l'étudiant pour l'apprentissage. En prenant en compte la ZPD, la TADM distingue les médiations procédurales et constructives. Les médiations procédurales sont orientées vers la résolution de la tâche (l'objet de la tâche), alors que les médiations constructives sont orientées vers le sujet. Cela est aussi en relation avec la double régulation de l'activité de la Figure 1 (Vandebrouck, 2018).

La TADM s'appuie également sur trois niveaux de l'activité introduits à l'origine par Leontyev (1978) : *activité* associée à un motif (ce qui permet au sujet de s'impliquer dans l'action), *actions* associées à des buts (qui permettent l'accomplissement de l'activité), et *opérations* associées à des conditions (moyens par lesquels l'action est réalisée) (Rogalski, 2015). C'est-à-dire que cette activité mathématique se développe à travers les actions et les opérations, voire les non-actions. En fait, les actions peuvent être externes (orales, écrites ou réalisées) ou internes (hypothèses, décisions) et en partie, transformées en opérations, raison pour laquelle ces niveaux peuvent être relatifs

³³ Roth (2020b), en citant Vygotsky, décrit la ZPD comme : "la distance entre le niveau de développement réel tel que déterminé par la résolution indépendante de problèmes et le niveau de développement potentiel tel que déterminé par la résolution de problèmes sous la direction d'un adulte ou en collaboration avec des pairs plus capables" (Vygotsky 1978, p. 86).

(Vandebrouck, 2018). En ce qui concerne les opérations, Galperine (1966) définit trois fonctions : l'orientation, l'exécution et le contrôle. Ainsi, lorsque les élèves sont confrontés à une tâche mathématique, les activités mathématiques englobent ces trois fonctions qui seraient nécessaires à toute action. Enfin, toute activité mathématique se déroule dans une situation spécifique comme en classe, à la maison ou lors d'une session pratique. Nous intégrerons ces aspects lors des analyses de cette activité.

3.1.1 L'étude de l'activité mathématique : outils théoriques

Dans la TADM, on introduit le terme générique d'*activités mathématiques* pour faire référence à l'activité des élèves sur une tâche mathématique spécifique dans un contexte donné.

De ce fait, l'activité mathématique dépend de la complexité de la tâche, des caractéristiques du contexte et des médiations qui peuvent exister. Pour étudier l'activité, il est nécessaire de faire une analyse préalable de la tâche en lien avec l'activité que l'élève peut développer. Ensuite, on peut analyser ce que l'élève a véritablement produit. Ces analyses amènent à prendre en compte les connaissances à mettre en place, leur fonctionnement et leur adaptation.

a) Adaptations et niveaux de mise en fonctionnement de connaissances

Tout d'abord, il est essentiel d'identifier les connaissances mathématiques à utiliser pour une tâche donnée (les représentations d'un concept, les théorèmes, les définitions, les méthodes, les formules, les types de preuves, etc.). Dans certains types de tâches, des adaptations de connaissances peuvent être un prérequis pour pouvoir les résoudre. Robert (2008, p.50), définit sept types d'adaptation de connaissances (voir aussi Horoks & Robert, 2007) :

- A1 : **Reconnaissance** des modalités d'application des connaissances (notions, théorèmes, méthodes, formules).
- A2 : **Introduction d'intermédiaires** : notations, points, expressions...
- A3 : **Mélanges de plusieurs cadres ou notions, mises en relation ou interprétation, changements de points de vue** : comme par exemple utiliser du calcul algébrique pour obtenir un résultat dans le cadre de la géométrie. Les énoncés qui jouent sur les cadres graphique/fonction contiennent automatiquement cette adaptation.

- A4 : *Introduction d'étapes* par rapport aux calculs ou raisonnements : Les étapes peuvent être classiques (comme l'étude des fonctions) ou à imaginer.
- A5 : *Utilisation des questions précédentes* dans un problème.
- A6 : *Existence de choix*, qui peuvent être forcés (quand il y a qu'un seul choix), ou non forcés (quand il y a plusieurs choix).
- A7 : *Manque des connaissances nouvelles*.

Les connaissances (et leurs adaptations) à mettre en fonctionnement peuvent nous permettre d'établir des niveaux de mises en fonctionnement de ces connaissances. Ces derniers répondent à une certaine organisation. Robert (1998, p.165-167) distingue ainsi trois niveaux :

Niveau technique : il s'agit de mises en fonctionnement indiquées. Ce niveau induit une application immédiate de définitions, théorèmes, formules, etc. Ici, il n'existe ni étapes à suivre, ni choix à faire, ni adaptation requise (même pas de reconnaissance).

Niveau mobilisable : il s'agit ici aussi des mises en fonctionnement indiquées mais celles-ci nécessitent des adaptations. Ce qui est en jeu est explicite. Dans ce niveau, on peut avoir plus d'un choix à faire. Il peut y avoir *un début de juxtaposition de savoirs dans un domaine donné, voire d'organisation*.

Niveau disponible : il s'agit de mises en fonctionnement de connaissances nécessaires mais elles ne sont pas données dans l'énoncé. Ce niveau est lié à des reconnaissances, mobilisables sans indication, donc soumises à une forte familiarité avec la connaissance. L'élève peut arriver à tirer des bilans, montrer des exemples, des contre-exemples, effectuer un ou plusieurs changements de cadre, etc.

Le dernier niveau se construit avec l'aide des deux niveaux précédents. Raison pour laquelle il ne faudrait négliger aucun de ces trois niveaux dans l'enseignement des mathématiques.

b) Les Tâches simples et complexes

Les tâches sont analysées en référence aux connaissances disponibles par celui qui apprend, au contexte, aux médiations et aux ressources. Pour la tâche, on utilise la catégorisation de Robert (1998). Nous distinguons donc entre *tâches simples ou isolées* et *tâches complexes*. Les premières sont celles qui ne nécessitent pas d'adaptation de connaissances tandis que les secondes sont celles qui en nécessitent plusieurs,

l'utilisation variée de TICE ou encore une diversité des méthodes éventuellement à choisir (Robert & Vandebrouck, 2014, p. 2). Les tâches complexes stimulent l'apprentissage des mathématiques car les élèves sont en mesure d'accéder plus facilement et plus soupagement aux connaissances en question sous réserve, toutefois, de leur mise en œuvre en classe. Ces tâches complexes vont mettre en jeux des sous-activités de reconnaissance (voir section suivante), liées aux outils et notions mathématiques à mettre en fonctionnement (adaptations A1 et A6) ; et/ou d'organisation du raisonnement (A4 et A5) ; et/ou des sous-activités de traitement (A2 et A3).

c) **Sous-activités mathématiques des élèves**

La théorie fait la différence entre *activités mathématiques* et *sous-activités mathématiques* (Robert, 2008). Les premières font référence aux différents segments de l'activité liés à une tâche mathématique précise tandis que les sous-activités mathématiques font référence à l'activité mathématique d'un sujet en termes de mises en fonctionnement de connaissances spécifiques et sont catégorisées en sous activités mathématiques de reconnaissance, d'organisation et de traitement (ces sous-activités sont des composants cruciaux de l'activité mathématique). Elle sont décrites par Vandebrouck & Robert (2017, pp. 342-343) comme suivent :

Sous-activités de Reconnaissance qui se produisent principalement lorsque les tâches sont de niveau disponible : les élèves doivent reconnaître les connaissances mathématiques qui peuvent être utilisées pour résoudre les tâches qui leur sont confiées. Toutefois, il peut également être demandé aux élèves de reconnaître des modalités d'application ou d'adaptation de ces connaissances. L'élève peut également reconnaître que plusieurs étapes de son raisonnement peuvent être reliées à d'autres étapes. Cette sous-activité concerne principalement les adaptations de connaissance A1 et A6 (de reconnaissance et d'existence des choix respectivement).

Sous-activités d'organisation où les élèves identifient les étapes logiques et temporelles de leur raisonnement mathématique, par exemple si certaines étapes sont nécessaires ou si certains intermédiaires doivent être introduits (faire des choix de méthodes, avec des étapes éventuelles et leur ordre, les reprises de questions précédentes, les interprétations). Les sous-activités d'organisation font référence aux adaptations de connaissances A4 (introduction d'étapes) et A5 (utilisation de questions antérieures) notamment.

Sous-activités de Traitement qui font référence à des constructions de figure, des calculs à effectuer, du travail sur les formules, simple remplacement des données par leurs valeurs ou transformations, équivalences, implications, mais aussi de l'introduction d'intermédiaires, notations ou expressions, des changements de registres ou de points de vue (imposés ou choisis) et des mélanges de cadres éventuels (imposés ou choisis). Cette sous-activité concerne les adaptations de connaissances A2 (introduction d'intermédiaires) et A3 (mélanges de cadre ou de notions, mises en relation, etc.).

Ces trois sous-activités devraient être complétée par des activités transversales de formulation et de rédaction.

Les travaux de Robert et Vandebrouck (2014, 2017a, 2017b), rendent compte de résultats sur les sous-activités définies précédemment, importants à noter ici. Lorsque l'on caractérise des tâches complexes à partir de sous-activités mathématiques, on observe dans les analyses a priori, que ces tâches peuvent activer et imbriquer plusieurs de ces sous-activités (et par conséquent les adaptations de connaissances impliquées). En effet, dans le cas d'une tâche complexe avec l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, les auteurs observent que différents types de connaissances se mettent en place, imbriquant des connaissances mathématiques, d'une part, et des connaissances instrumentales liées au logiciel, d'autre part. Plus précisément, ils signalent :

« Ces connaissances instrumentales peuvent être manipulatoires, voire très spécifiques du logiciel, ou bien instrumentales mathématiques, c'est-à-dire aller au-delà des fonctionnalités du logiciel et imbriquer des mathématiques. Les traitements sont donc complexifiés car il y a des adaptations nouvelles, instrumentales, sans équivalent en environnement papier-crayon où elles n'existent pas. Associées à ces nouvelles adaptations vont s'associer des « reconnaissances instrumentales » et des « sous-activités d'organisation instrumentales » nouvelles. » (Vandebrouck & Robert, 2017, p. 353).

Ainsi, ils constatent que les sous-activités de reconnaissances, d'organisation et de traitement supposent aussi des connaissances instrumentales. En outre, ils soutiennent que ces connaissances instrumentales et instrumentales mathématiques ne sont pas toujours travaillées ni institutionnalisées, ce qui provoque, par la suite, une non disponibilité chez les élèves (Ibid., p. 372). En conséquence, dans cet environnement de TICE, le travail des élèves se voit bloqué par un manque de sous-activité de reconnaissance (qui est donc entremêlé avec la sous-activité de traitement).

En ce qui concerne le contrôle, Rogalski (2015, p. 66) définit les opérations de contrôle (au sens de Galperine, 1966) comme celles qui *assurent que le déroulement de l'action est conforme à ce qui est souhaité et que le produit obtenu correspond au but visé*. Néanmoins, dans le but de caractériser le contrôle dans la TADM et de le rendre théoriquement opérationnel dans le cadre de ce travail de thèse³⁴, nous considérons les sous-activités qui *sont développées lors de la réalisation de tâches complexes, lorsque les élèves sont capables de reconnaître que leur raisonnement est cohérent avec plusieurs points de contrôle*, comme des **sous-activités de contrôle**. Cette dernière définition ne comporte pas de contradiction par rapport à la formulation précédente. Cependant, en vue de mettre en avant le contrôle en tant que sous-activité mathématique, nous faisons la différence entre un contrôle directement lié au but de l'activité (non mathématique) et la sous-activité de contrôle mathématique qui est rattachée aux connaissances mathématiques sous-jacentes.

d) Le contexte et les médiations

Les analyses des tâches et des activités fondées sur la Théorie de l'Activité sont étroitement liées au contexte situationnel des élèves et des classes. En conséquence, les activités ne sont pas seulement caractérisées par la complexité des tâches mais aussi par les caractéristiques du contexte et de toutes les médiations qui se produisent lors de l'exécution des tâches. Le contexte de la tâche répond aux caractéristiques de la situation³⁵: niveau scolaire, programme en vigueur, environnement (numérique, papier crayon, ...) ce que les élèves ont déjà fait. Ainsi les analyses a priori dépendent du contexte et sont transférables partiellement (Vandebrouck & Robert, 2017).

Nous considérons la proximité de la tâche à laquelle les élèves sont confrontés avec toute sorte de tâche habituelle dans le contexte de la classe. Certaines tâches complexes peuvent avoir été établies comme routines en tant qu'opérations dans le contexte de la pratique en classe et se rapportent donc principalement au niveau technique. De même, la caractéristique de l'énoncé ou le discours de l'enseignant peuvent interagir et les élèves peuvent bénéficier de médiations qui les aident à reconnaître le type de tâche et la technique associée. Dans certains cas, des activités

³⁴ La définition théorique que nous considérons du *contrôle* dans ce travail est cruciale puisque les contrôles comportent un des enjeux à la transition L-U dans le domaine de l'analyse (voir chapitre 2 et chapitre 4).

³⁵ La situation se réfère spécifiquement aux conditions, par exemple, la résolution de la tâche se fait à la maison, dans une séance de classe habituelle ou en classe de travaux pratiques.

mathématiques, telles que la reconnaissance, ne peuvent jamais avoir lieu à cause des médiations contextuelles de l'enseignant ou à cause des formes routinières des énoncés.

Ici, la théorie aborde également l'analyse du discours de l'enseignant en considérant les types de médiations qu'il a entrepris pendant l'exécution de la tâche. Ainsi, en se basant sur la double régulation de l'activité et les médiations, Robert & Vandebrouck (2014) développent les *médiations procédurales directes* et *indirectes* (qui comportent des apports qui modifient la tâche ou la situation en jeu) et, orientées vers l'élève dans un but d'apprentissage, les *médiations à visées constructives* qui constituent un apport entre l'activité et la construction des connaissances. L'identification de ces médiations peut amener à observer la mesure dans laquelle ces interventions et actions sont dans la *zone proximale de développement* (ZPD) de l'élève et, cela en identifiant des proximités discursives : des *proximités horizontales* (travail local sur une formule ou travail plus global sur le sens d'un théorème, sans changement de généralité) ; des *proximités descendantes* (des démonstrations générales pour lesquelles les élèves ont déjà développé une activité) ; et des *proximités ascendantes* (des généralisations à partir d'activités possibles, qui aboutissent à l'expression, définition, ou démonstration d'une propriété mathématique générale) (Vandebrouck et Robert, 2017, p. 11-12).

Enfin, les activités des élèves peuvent être reconstituées à partir des activités possibles (celles qui sont attendues dans l'analyse a priori). Dans le contexte d'une classe, on peut distinguer des activités à maxima (qui ne nécessitent pas d'intervention de l'enseignant), des activités à minima (quand l'élève attend les aides de l'enseignant, son investissement dans l'activité est donc minimal). Les activités qui sont faites par tous les élèves reçoivent le nom d'*activités pour tous* (Ibid.).

e) Le relief sur les notions

Bien entendu, les tâches mathématiques à analyser en TADM ont des contenus mathématiques précis. Elles sont étudiées en référence à une analyse épistémologique, curriculaire et cognitive ce qui comporte le relief de la notion (Abboud et al., 2017). Ce relief aide à situer la notion traitée dans l'apprentissage des élèves (savoir si cela correspond à une notion ancienne ou nouvelle par exemple), à considérer un contexte adapté pour une éventuelle élaboration de tâche, à connaître le type de notion en jeu (caractéristiques épistémologiques et cognitives, ou encore des notions qui ont un formalisme précis par exemple). L'ensemble de ces éléments permet d'envisager le scénario. Scénario qui répond à un éventail de cours ordonnés, d'exercices,

d'évaluations (entre autres), et qu'il est préférable d'observer en tant qu'itinéraire cognitif (suite d'activités attendues) (Vandebrouck & Robert, 2017).

3.2 La Théorie des Espaces de Travail Mathématique

La Théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM) a été développée au sein de la communauté de didactique des mathématiques (Kuzniak, 2011 ; Kuzniak et al., 2016 ; Kuzniak & Richard, 2014) comme modèle pour saisir de manière cohérente les perspectives cognitives et épistémologiques de l'apprentissage. Elle s'intéresse aux aspects épistémologiques de l'objet mathématique en question en regardant le référentiel théorique, les artefacts mis à disposition et les signes qui interviennent dans le travail de résolution de la tâche. Son but est aussi de comprendre comment ces composantes épistémologiques se mettent en place lorsqu'un sujet les utilise, à travers l'étude de la preuve et le discours mathématique du sujet, les constructions mathématiques qu'il réalise pour s'en servir et la visualisation de signes qu'il interprète comme des objets mathématiques. Ces éléments sont établis dans un modèle d'espace de travail à travers la création des deux plans : le cognitif et l'épistémologique (voir Figure 2).

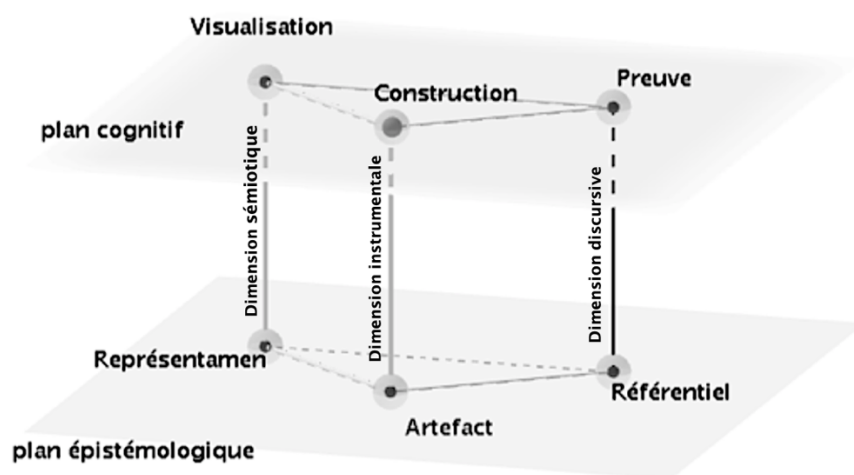


Figure 2 : Diagramme représentatif des Espaces de Travail Mathématique

Ainsi, les relations entre ces deux plans et ses composantes vont être prises en compte à travers trois dimensions (appelés aussi genèses) considérées d'une importance

cruciale pour le travail mathématique : la dimension sémiotique, la dimension instrumentale et la dimension discursive ; ainsi que les plans verticaux générés à partir d'un travail mathématique activant deux dimensions différentes à la fois.

a) Les dimensions³⁶ et les plans verticaux dans les ETM

La **Dimension Sémiotique** associe les signes et le *representamen* (ou signifiants). Ces signes sont présentés et organisés par des systèmes de représentations sémiotiques Duval (1995). Kuzniak et al. (2016, p. 726) signalent deux processus liés à la genèse sémiotique : interprétation et codage de signes. Soit on commence par une représentation de l'objet vers la « conscience cognitive », ce qui amènerait à une perception visuelle de l'objet (visualisation – processus d'interprétation), soit on se place sur le « sujet conscient » et les visualisations qu'il possède comme acquises pour aller vers le *representamen*. Ici, le sujet produira des signes qui vont représenter l'objet (processus de codification) (Ibid.). Dans la dimension sémiotique, on peut aussi considérer le concept de signes, de symboles et d'icônes au sens de Peirce (1931). En conséquence, ces derniers peuvent être analysés dans la connexion entre les deux plans. D'une part, le *representamen* (plan épistémologique) peut avoir une approche quelque peu abstraite en faisant référence aux icônes (qui présentent une ressemblance à l'objet), aux indices (ayant un rapport physique par rapport à l'objet), et aux symboles (contenant les règles qui nous font accéder à l'objet) (Kuzniak, 2011, p. 19). D'autre part, le processus de *Visualisation* (plan cognitif) peut être envisagé comme une démarche visant à structurer l'information donnée par les signes. Elle « (...) doit être associée à des schèmes et des opérations d'usage des signes dont rien ne prouve à priori qu'ils relèvent tous de la visualisation en tant que telle, même dans une conception étendue de celle-ci. » (Kuzniak & Richard, 2014).

La **Dimension Instrumentale** « permet de rendre opérationnels les artefacts dans les processus de construction en contribuant à la réalisation du travail mathématique » [notre traduction] (Kuzniak et al., 2016, p. 726). Cette dimension est fondée sur les idées de Rabardel (1995), qui introduit la notion d'*artefact* comme un élément transformé pour l'être humain et pouvant être utilisé pour lui-même (il peut venir du monde physique – matériel - ou du monde symbolique). Par ailleurs, l'*artefact* devient un instrument lorsqu'il est utilisé par le sujet, ce qui lui attribue une valeur

³⁶ La théorie fait la différence entre *genèse* et *dimension*. La dimension se réfère à la relation entre composants de l'ETM de manière fixe, alors que la genèse répond plus au processus qui fait relier les composantes. Bien que l'analyse du travail en termes de genèse soit intéressante, nous ferons référence aux dimensions tout au long de notre travail.

cognitive grâce aux schèmes d'utilisation qui doivent être mises en place. Deux processus sont différenciés en ce qui concerne l'instrument : le processus d'instrumentation et celui d'instrumentalisation. L'instrumentalisation correspond à ce que fait le sujet avec les artefacts qui « *prolongent les créations et réalisations d'artefacts dont les limites sont de ce fait difficiles à déterminer* » (Rabardel 1995, p.111). Dans l'instrumentation, l'artefact conditionne d'une certaine façon le sujet car c'est un processus qui concerne des évolutions de schèmes d'utilisation et d'actions instrumentées (Rabardel 1995 p.111). Enfin, pour Rabardel, l'activité dans le processus d'instrumentation est orientée vers le sujet, alors que l'activité dans le processus d'instrumentalisation est dirigée vers l'élément artefact (de l'instrument).

La **Dimension Discursive**, relie les propriétés et les résultats organisés dans le référentiel théorique. Dans la genèse discursive « *les systèmes de référence sont actionnés afin d'être disponibles pour le raisonnement mathématique et les validations discursives* » [notre traduction] (Kuzniak et al., 2016, p. 727). Ici, les validations peuvent être déclenchées par des vérifications graphiques, empiriques ou instrumentales. Dans cette dimension, on peut analyser un processus ascendant, partant du *référentiel théorique* vers la *preuve*, ce qui produit un discours de preuve déductive ; ou un processus descendant, qui permet l'identification des propriétés, définitions, théorèmes ... de la part du sujet, et leur incorporation dans le référentiel (Ibid.). Néanmoins, des discours mathématiques ne constitueraient pas un raisonnement déductif (comme une construction d'une définition, une discussion sur une procédure mathématique, une propriété conjecturée). En conséquence, des analyses fines de l'activité mathématique effectivement produite par un sujet sont nécessaires.

Les analyses de ces trois dimensions dans l'étude du travail mathématique conduisent à considérer plusieurs dimensions activées en même temps. En effet, il est difficile d'appréhender les dimensions de façon isolée (même si parfois on met en avant la plus importante selon le travail mathématique). En effet, la plupart du temps les dimensions sont entrelacées et activées concomitamment, ce qui amène à introduire les plans verticaux de l'ETM (Kuzniak & Richard, 2014) : plan sémiotico-discursif [Sem-Dis], plan instrumental-discursif [Ins-Dis] et plan sémiotico-instrumental [Sem-Ins] (voir Figure 3). Ces plans verticaux permettent de décrire les interactions entre les dimensions (ou genèses) en lien avec les plans cognitif et épistémologique de façon cohérente, de telle sorte de pouvoir mieux comprendre l'évolution d'un certain ETM.

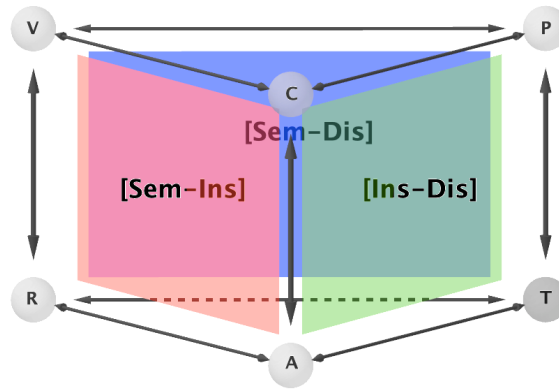


Figure 3 : Diagramme des ETM mettant l'accent sur les trois plans verticaux

Un travail mathématique complet peut être identifié chez le sujet qui réalise le travail. Pour cela, deux conditions sont nécessaires : d'une part, il faut que les deux plans horizontaux (cognitif et épistémologique) soient bien en relation ; et d'autre part, que les circulations entre plans verticaux (transition d'un plan vers un autre) soient mises en place par l'activation des différentes composantes de l'ETM (Kuzniak et al., 2016).

b) Les différents niveaux des ETM

Trois niveaux des ETM peuvent être analysés : de référence, idoine et personnel (Kuzniak, 2011). Ceux-ci répondent à des travaux développés dans différentes situations ou contextes.

L'*ETM de référence* nous permet de regarder une institution donnée en tant que telle via ses documents officiels (les programmes d'étude, les documents des ressources d'accompagnement, voire certains manuels s'ils sont proposés par les gouvernements). Ici, nous pouvons analyser les tâches qui sont proposées par l'institution (exercices du cours, exercices d'entraînement, examens, etc.).

L'*ETM idoine* constitue une adaptation de l'ETM de référence, auquel nous avons accès par le biais de l'action du professeur (avant la classe ou en classe). Nous pouvons ici distinguer l'ETM idoine potentiel (préparé par l'enseignant ou professeur) et l'ETM idoine effectif (celui qui s'est réellement accompli).

L'*ETM personnel* sera celui développé par le sujet qui réalise le travail mathématique (avec le scénario proposé par l'enseignant ou un problème précis). Nous pourrions ainsi trouver des ETM personnels de l'élève, mais aussi de l'enseignant.

3.2.1 L'étude du travail mathématique en analyse

Pour bien caractériser et étudier l'ETM, il est important de différencier le domaine mathématique que l'on veut analyser. Ainsi, nous pouvons trouver des ETM de la géométrie, des probabilités, de l'analyse, etc. Comme notre travail relève du domaine de l'analyse, nous présentons l'outil principal pour caractériser le travail mathématique dans ce domaine.

Paradigmes de l'analyse

Dans le cadre des ETM, un paradigme³⁷ est un assemblage entre croyances scientifiques, des techniques, des méthodes et des valeurs partagées dans un groupe scientifique du même domaine. L'idée des paradigmes a été utilisée dès les commencements de la théorie, dans le domaine de la géométrie (Houdement & Kuzniak, 1999). Un paradigme peut guider le travail mathématique et fixer aussi le travail attendu par une institution, ce qui implique des significations des objets avec lesquels un sujet travaillera.

Si l'idée est d'établir des paradigmes dans le domaine de l'analyse, il paraît nécessaire de déterminer des différences entre l'*analysis* réelle et le *calculus* pour bien les identifier au sein des paradigmes. Montoya Delgadillo & Vivier (2016) signalent les travaux de Bergé (2008) pour illustrer la différence entre *calculus* et *analysis*³⁸. Ici les auteurs font référence au TVI (théorème de valeurs intermédiaires) qui peut être utilisé dans le cas de l'enseignement secondaire, sans faire allusion à une preuve venant de l'analyse (comme celle de la complétude de \mathbb{R}). À cet effet, leurs auteurs signalent :

En analyse, on définit des règles de calcul conduisant à un travail algorithmique. L'accent est mis sur les aspects procéduraux, mais aucune réflexion sur ces procédures n'est menée. Il a été observé que la plupart des étudiants préfèrent utiliser les règles de dérivation pour vérifier si une fonction est croissante, même s'il existe un moyen plus simple [Notre traduction]. (Montoya Delgadillo & Vivier, 2016 , p. 742).

Dans le développement historique de la construction de l'analyse, l'intuition géométrique prend son rôle dans les œuvres de mathématiciens. Tel est le cas de la construction des nombres réels par Dedekind par exemple.

³⁷ Cette idée se fonde sur les travaux de (Kuhn, 1966) qui se base sur la structure des révolutions scientifiques.

³⁸ Voir aussi section 2.1.1 La transition L-U en analyse, page 22.

Pour définir les paradigmes de l'analyse, Montoya Delgadillo & Vivier (2016, pp. 742-743) se positionnent dans le paradigme global de l'analyse standard. Ils s'appuient sur des aspects historiques, mathématiques ainsi que sur le curriculum et proposent la définition des trois paradigmes³⁹ suivants :

L'Analyse arithmético-géométrique [A1] : elle permet des interprétations avec des hypothèses implicites basées sur la géométrie, les calculs arithmétiques ou le monde réel. La nature des liens entre signes et objets est secondaire, voire sans distinction. Bien que l'argumentation joue un rôle dans ce paradigme, le travail est basé sur la visualisation des signes. Cette dernière est éventuellement produite par un logiciel ou une calculatrice. La visualisation de la courbe d'une fonction ou d'un tableau de valeurs est admissible comme preuve en [A1].

L'Analyse calculatoire [A2] : Ici, les règles de calcul sont définies plus ou moins explicitement et sont appliquées sans réfléchir nécessairement à l'existence et la nature des objets introduits. Les calculs sont souvent effectués selon une démarche algébrique efficace pour les expressions formelles qui ont une forme représentative. Ces calculs sont effectués sans aucune conscience de la nature de l'objet mathématique. Le travail est orienté vers la production de preuves et de démonstrations en utilisant les propriétés de l'objet et les théorèmes de la tradition mathématique. La visualisation de la courbe d'une fonction ou d'un tableau de valeurs n'est pas admissible en [A2]. Toutefois, des outils, tels que des logiciels de systèmes d'algèbre informatique, peuvent être utilisés (pour calculer une dérivée, par exemple).

L'Analyse réelle [A3] : elle se caractérise par un travail d'approximation et de voisinage (éventuellement topologique). La définition et les propriétés sont fixées de façon théorique. Cela permet un « travail des ε » spécifique à ce paradigme : limites, inégalité, « le négligeable ». La nature des objets est explicite (ce qui permet de contrôler le travail sans avoir besoin d'approche algorithmique (Ibid.))

À l'instar des paradigmes de la géométrie, les paradigmes de l'analyse ne sont pas isolés. Ainsi, des paradigmes différents peuvent coexister de façon plus au moins explicite. L'idée est de pouvoir travailler ou de créer des situations pour qu'une dialectique entre eux puisse se mettre en place (comme c'est le cas en géométrie, où souvent on utilise des figures pour soutenir des démonstrations). En effet :

L'intuition graphique, utilisée dans le paradigme de l'[A1], est une source de questions ou de conjectures qui peuvent être justifiées dans un autre paradigme ([A2] ou [A3]). Mais elle permet également de contrôler les calculs effectués dans le cadre du [A3] ou de [A2]. En effet, le fait de travailler dans

³⁹ Ici nous les désignons par A1, A2, A3, au lieu de AG, AC et AR.

plus d'un paradigme permet d'éviter les erreurs. Une erreur de différenciation peut être détectée en traçant la courbe et en visualisant sa variation [Notre traduction] (Montoya Delgadillo & Vivier, 2016, p. 743).

Toutefois, ces paradigmes ne sauraient catégoriser les étudiants (l'enseignant ou certaines institutions), mais plutôt à comprendre le travail mathématique qu'ils effectuent. En effet, il est parfois difficile de juger le travail d'un étudiant en fonction d'un seul paradigme. En conséquence, ces paradigmes servent à constater les différents types de travaux mathématiques (ici dans le domaine de l'analyse) qui peuvent être effectués au sein d'une institution.

3.3 Premières spécificités de suites $u_{n+1} = f(u_n)$ à la transition L-U selon les deux cadres théoriques⁴⁰

3.3.1 Les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ selon la TADM

Lorsque les tâches et les activités mathématiques se rapportent à l'enseignement et à l'apprentissage de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, les tâches peuvent être analysées comme des tâches complexes car les concepts relatifs aux fonctions et les concepts relatifs aux suites sont mélangés. Même si les connaissances mathématiques à utiliser existent déjà chez les élèves (la plupart des concepts ne seraient pas nouveaux lorsque les élèves sont confrontés à des tâches sur des suites récurrentes), plusieurs théorèmes ou méthodes doivent être disponibles ou adaptés par les élèves. Par exemple, sans aucune médiation, les élèves doivent reconnaître un théorème spécifique comme outil pour étudier la suite. Au lycée, le seul théorème disponible est que "toute suite croissante et majorée est convergente". Par conséquent, la méthode globale pour étudier les suites récurrentes peut avoir été routinisée ; il resterait aux étudiants à adapter la méthode globale de telle sorte que la tâche se rapporte principalement au niveau d'adaptation sans aucune médiation. À l'université, plusieurs autres types de suites sont étudiés et plusieurs autres théorèmes peuvent être utilisés, de ce fait, le niveau de la tâche est souvent disponible. Cependant, dans les deux institutions, les étudiants doivent développer des activités d'organisation pour planifier le raisonnement : d'abord trouver la variation de la suite, puis trouver si la suite est majorée ou minorée selon le résultat de la première phase. Selon le contexte, les étudiants peuvent calculer $u_{n+1} - u_n$ ou u_{n+1}/u_n et ils doivent interpréter le contexte pour reconnaître la meilleure méthode. Lorsqu'ils calculent $u_{n+1} - u_n$, les élèves peuvent faire face à d'autres activités de reconnaissance pour déterminer le signe de l'expression. Une preuve avec la méthode de démonstration par récurrence peut également être appropriée et les étudiants doivent reconnaître la méthode à appliquer si une médiation est apportée par le contexte (dans l'énoncé ou comme médiation de la part de l'enseignant). Enfin, des activités de contrôle peuvent avoir lieu si les élèves essaient d'établir des relations entre les éléments contextuels et leurs résultats : par exemple, une suite croissante de valeurs positives ne peut pas converger vers 0, dans ce cas les élèves peuvent développer des activités de contrôle pour identifier l'erreur. Celles-ci peuvent également concerner la comparaison entre les résultats que les élèves ont

⁴⁰ Cette partie appartient au cahier Flores González et al. (2020), fruit de ce travail de thèse.

trouvés et les différentes représentations de la suite, ce qui peut être fait par un graphique, un tableau de valeurs, etc.

3.3.2 Les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ selon la théorie des ETM

Selon l'exemple précédent, la dimension discursive est clairement présente lorsque l'on cherche à prouver des résultats ; néanmoins, il y a aussi la dimension sémiotique qui, selon la situation, guidera le choix du calcul de $u_{n+1} - u_n$ ou de u_{n+1}/u_n , ainsi que le choix d'une preuve par récurrence ou non. Par exemple, si l'on trouve $u_{n+1} - u_n = P(u_n)$ une visualisation du polynôme (dimension sémiotique) peut permettre de prouver qu'il a un signe constant (dimension discursive). Cependant, si l'on visualise que $u_{n+1} - u_n$ a un signe identique à $u_n - u_{n-1}$, cela peut conduire plutôt à une preuve par récurrence. La dimension instrumentale est également importante car elle peut guider le travail. Par exemple, le calcul sur tableur des premiers termes de la suite peut amener à penser que la suite est croissante et bornée entre 0 et 1, ce qui permet d'établir quelques conjectures. Il est assez courant pour les lycéens de travailler avec des outils (la calculatrice notamment) alors que cela est souvent interdit ou mis à l'écart à l'université. Cela fait que le travail mathématique à la transition lycée-université change beaucoup.

Nous pouvons en effet reconnaître différents types de travail, chacun ayant des caractéristiques, des exigences et des attentes différentes. Ce n'est pas le même travail de visualiser sur un tableur qu'une suite croît que de justifier algébriquement que $u_{n+1} - u_n$ a un signe constant.

Concernant la notion de paradigme dans l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, le travail dans le paradigme [A1] consiste à représenter les premiers termes de la suite dans un tableau de valeurs ou graphiquement, par exemple, et à visualiser ses propriétés comme la monotonie ou la convergence de la suite. Le travail peut également être contrôlé, par exemple, en calculant plus de termes ou en zoomant sur un graphique. Cela peut être lié au travail du mathématicien lorsqu'il étudie un nouvel objet et même une nouvelle suite pour laquelle aucune procédure n'est disponible. D'autre part, le travail dans le paradigme [A2] écarte les représentations des premiers termes de la suite pour privilégier un travail basé sur des calculs algébriques et l'utilisation de théorèmes. Ainsi : montrer par récurrence que la suite est majorée par 1, calculer $u_{n+1} - u_n > 0$ pour montrer que la suite est croissante et donc conclure sur la convergence avec le théorème déjà mentionné. Le travail dans le paradigme A3 consisterait à travailler davantage sur les inégalités pour mettre en évidence ce qui est prépondérant. Ce paradigme apparaît de façon plus évidente à

l'université, il ne s'agit donc pas d'une question de transition et nous ne développerons pas ce paradigme dans cette étude. Toutefois, une étude au niveau de l'université utilisant le paradigme [A3] serait à creuser.

4 Networking de théories TADM-ETM : la notion de Contrôle

Ce chapitre a un double objectif. D'une part nous montrerons la méthodologie utilisée pour réaliser l'articulation théorique à travers les stratégies du *Networking* de théories (Bikner-Ahsbals & Prediger, 2014). D'autre part, comme conséquence du Networking effectué, nous étudierons la notion de contrôle que nous considérons comme indispensable pour le développement de notre étude et donc, essentielle, pour les analyses à fournir dans la partie II de cette thèse.

Dans la section 4.1 et 4.2 de ce chapitre, nous détaillerons les stratégies de *Networking* et quelques constats préalables au Networking mené. Ensuite dans la section 4.3 nous présenterons des exemples d'analyse avec la TADM et la théorie des ETM à la transition L-U, ce qui rend compte d'une coordination des théories. Cette coordination nous amènera à étudier plus en profondeur la notion de contrôle dans la section 4.4, à partir des analyses des tâches étudiées dans la section 4.3 et d'une révision de la littérature. Dans la section 4.5 nous présenterons la définition de contrôle utilisée dans notre étude (qui en partie diffère de celles étudiées auparavant), suivie des conclusions dans la section 4.6.

4.1 Introduction

La pratique du Networking se développe d'une façon plus au moins formelle depuis une quinzaine d'années. Elle vise « à créer un dialogue et à établir des relations entre des parties d'approches théoriques tout en respectant l'identité des différentes approches » (Prediger & Bikner-Ahsbahr, 2014, p. 118).

Ainsi, différentes stratégies et degrés peuvent être établis pour connecter les théories (voir diagramme Figure 4) :

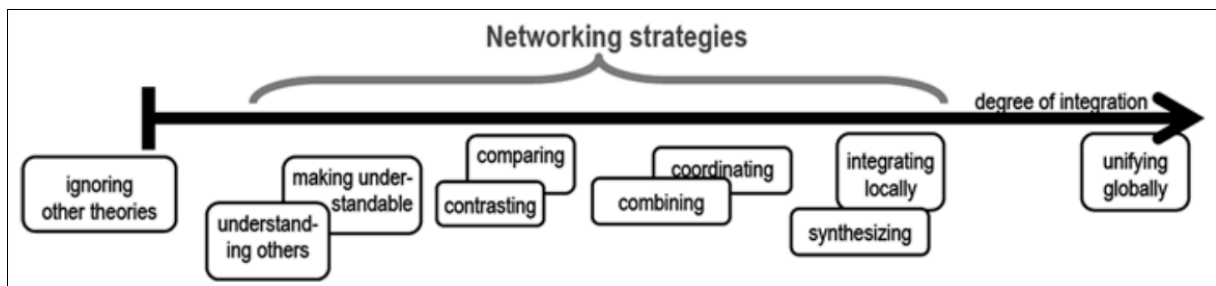


Figure 4 : Stratégies et degrés pour connecter des approches théoriques (Prediger et al., 2008, p. 170).

Dans le diagramme ci-dessus, nous pouvons observer à chaque extrême (*ignoring other theories* et *unifying globally*) des pratiques qui ne se considèrent pas comme des stratégies de Networking : soit elles se concentrent sur une seule théorie (ce qui conduit à ignorer les autres), soit elles unifient toutes les théories dans une seule théorie globale.

Prediger & Bikner-Ahsbahr (2014, p. 119-120) décrivent quatre degrés de Networking :

- Le premier degré répond à un double objectif : comprendre et rendre compréhensible les théories choisies. Pour que cette compréhension aboutisse, il est nécessaire d'aller au-delà des concepts centraux, c'est-à-dire qu'il faut connaître la pratique de recherche de chacune des théories, ses principes, ses questions, ses méthodologies et ses résultats.
- Le second degré (le plus utilisé) vise à comparer et contraster. L'utilisation de celui-ci a pour but de développer les théories. D'une part, la comparaison revient à établir de façon générale des similitudes et des différences relatives aux composantes de chaque théorie. D'autre part, le contraste aide à déterminer les différences de type de théorie. Le fait de comparer et contraster permet d'établir plus facilement des liens possibles entre les théories, ainsi que leurs éventuelles

limites. De ce fait, de fortes similitudes permettent de faire des liens cohérents d'une part, et des fortes différences entre théories mettent en valeur les points forts de chacune des théories d'autre part.

- Le troisième degré est marqué par la combinaison et la coordination des théories. Ces stratégies permettent d'approfondir la compréhension d'un phénomène (ou d'une donnée) à partir des analyses effectuées sous différents angles au sein de chaque théorie. Par ailleurs, toutes les théories n'ont pas le même degré de compatibilité. Cependant, la combinaison ne nécessite pas une compatibilité complète des théories choisies (ici on peut même considérer des théories avec des hypothèses a priori contradictoire). La coordination, quant à elle, permet la construction d'un cadre conceptuel (au sens de Einsenhart, 1991)⁴¹ pour donner du sens au phénomène à analyser. *Un cadre conceptuel n'est pas une nouvelle approche théorique mais un bricolage pragmatique visant à comprendre les phénomènes empiriques* (Ibid., p.120).
- Le quatrième degré comporte une synthèse et une intégration locale des théories. Ici, l'accent est mis sur l'élaboration de théories dans un nouveau cadre. Le degré de symétrie des théories utilisées (qui peut être établi à partir de la portée ainsi que le développement et la maturité de chacune des théories) est important à relever. D'une part, quand la symétrie entre deux théories est seulement locale, on parle d'une intégration locale (on ne considère qu'une partie des théories). Ainsi on parle d'*intégration locale symétrique* si un concept à la frontière de deux théories est élaboré et intégré dans les deux approches théoriques (Prediger & Bikner-Ahsbahs, 2014, p. 120). D'autre part, la synthèse est utilisée quand les théories étudiées sont stables et ont une symétrie plus globale (ici on considère l'ensemble de la théorie), ce qui amène à l'émergence d'une nouvelle théorie. Néanmoins, « *souvent, la portée et le degré de développement des théories ne sont pas symétriques, et il n'y a que quelques constructions ou aspects d'une théorie intégrés dans une théorie déjà plus élaborée ou convertie et élaborée dans une autre* » (Ibid., p.120).

⁴¹ « *Un cadre conceptuel est une structure squelettique de justification, plutôt qu'une structure squelettique d'explication basée sur la logique formelle (c'est-à-dire la théorie formelle) ou l'expérience accumulée (c'est-à-dire les connaissances du praticien). Un cadre conceptuel est un argument comprenant différents points de vue et aboutissant à une série de raisons pour adopter certains points - c'est-à-dire certaines idées ou concepts - et pas d'autres. Les idées ou concepts adoptés servent ensuite de guides : pour la collecte de données, il s'agit d'une étude particulière, et/ou pour les manières dont les données d'une étude particulière seront analysées et expliquées* » (Einsenhart, 1991, p. 209).

Le fait que les degrés et stratégies de Networking soient présentés le long d'une droite peut faire penser à une hiérarchie entre les différentes stratégies mais cela n'est pas nécessairement le cas. Si le dernier degré (intégration locale) n'est pas forcément le plus enrichissant, les premières stratégies nommées (comprendre et faire comprendre) peuvent permettre des connexions importantes et profondes entre théories (Artigue, s.d.).

Bien qu'il existe différentes stratégies de Networking entre théories, nous pouvons aussi établir deux profils de pratique : ascendantes ou descendantes. Le premier commence d'un phénomène empirique trouvé où l'on vise une compréhension majeure du phénomène grâce à la mise en réseaux. Tandis que le deuxième commence par une attention théorique et cherche à faire avancer les théories. Dans notre travail (comme dans les exemples montrés dans Bikner-Ahsbahr & Prediger, 2014), nous avons utilisé ces deux profils, chacun ayant pris sa pertinence à différents moments du développement de la thèse : une pratique ascendante a été plus particulièrement présente quand nous avons cherché des réponses théoriques aux données trouvées dans l'étude de suites définies par récurrence, alors qu'une pratique descendante était plus importante quand on cherchait à approfondir les limites et potentialités de chacune des théories.

Motivation de ce Networking

Des aspects cognitifs et épistémologiques sont essentiels pour comprendre les phénomènes en didactique des mathématiques. Les théories que nous utilisons s'y intéressent et concentrent leurs analyses dans l'activité et le travail mathématique. Ainsi, la TADM et la théorie des ETM accordent toutes les deux une importance aux considérations épistémologiques sur les tâches en veillant à mettre en avant le rôle indispensable des connaissances mathématiques dans le développement de l'activité. En outre, pour les ETM, le travail mathématique est avant tout une activité humaine, d'où un rapprochement a priori naturel entre les deux théories.

Des travaux de thèse comme ceux de Derouet (2016) ou de Masselin (2019) ont utilisé un cadre théorique qui regroupait des outils des deux théories pour les analyses. D'une part, le travail de Derouet visait à étudier l'espace de travail mathématique à travers l'étude de tâches qui déclenchent une activité mathématique. Pour elle, les circulations dans l'ETM représentent une relecture globale des activités possibles des élèves (il faut prendre en compte plusieurs tâches), alors que l'analyse de l'activité est plus locale (Derouet, 2016, p. 57). D'autre part, le travail de Derouet comme celui de

Masselin mettent en avant l'étude de l'ETM idoine à travers l'analyse des aides de l'enseignant définies en TADM (aides procédurales et constructives).

Ces deux travaux rendaient compte des premières cohérences dans l'utilisation de ces deux théories. À partir de l'observation de cette cohérence, nous allons étudier, dans ce chapitre, ces théories sous la lumière des stratégies du Networking. De ce fait, dans ce travail de thèse nous avons aussi pour but d'approfondir l'étude de l'articulation entre la Théorie de l'Activité en Didactique des Mathématiques (TADM), et la théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM).

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté chacune des théories ce qui a contribué à rendre compte de leurs axes principaux, de leurs différences et de leurs similitudes. Comme notre but est de mieux comprendre la transition L-U relative aux suites définies par récurrence, nous faisons l'hypothèse que coordonner les théories choisies nous permettra d'approfondir la compréhension des phénomènes que nous trouverons. Ainsi nous allons présenter des premiers constats avant de présenter notre Networking, suivi d'un exemple de coordination effectuée entre les deux théories et la nécessité dans la définition de contrôle comme une intégration locale des théories.

4.2 Quelques constats préalables au Networking effectué

Dans cette section nous allons montrer des constats généraux en ce qui concerne les stratégies de Networking avec les deux théories utilisées. Nous montrerons aussi des réflexions importantes qui ont été apportées dans le cadre des deuxièmes journées d'études sur le travail mathématique (voir F. Vandebrouck (2020), L. Vivier (2020) et Hoppenot et al. (2019)), réflexions qui ont contribué à un approfondissement dans cette articulation de théories.

Dans les stratégies de Networking déjà réalisées, Bikner-Ahsbahs & Prediger (2014) montrent que la comparaison de théories concourt à une compréhension plus profonde des théories elles-mêmes mais aussi au type de donnée nécessaire pour faire les analyses. Ainsi, voici quelques aspects généraux d'une comparaison et d'un contraste des théories que nous utiliserons.

Dans le cas de la **comparaison** et des similitudes entre théories, il s'est produit une proximité naturelle de la TADM dans l'enseignement des mathématiques avec la

théorie des ETM. Les deux théories donnent un cadre et des outils pour reconstituer rationnellement les processus cognitifs d'un sujet à partir des traces tangibles laissées par les actions de ce sujet en situation, notamment lors de l'exécution de tâches mathématiques. Néanmoins, il semble que tout travail mathématique suppose une activité mathématique mais toute activité mathématique n'entraîne pas nécessairement un travail mathématique. Autrement dit, toute activité qui entraîne une action mathématique extériorisée par un sujet entraîne un travail mathématique mais toutes les activités mathématiques ne sont pas nécessairement extériorisées. Cela est notamment le cas des sous-activités de contrôle qui peuvent être externalisées par un sujet mais qui peuvent aussi rester très implicites dans l'activité.

En ce qui concerne le **contraste** et les différences de « type » de théorie, la TADM a des bases théoriques solides sur l'apprentissage (notamment avec les travaux de Piaget et de Vygotsky), et relève d'une adaptation de la Théorie de l'Activité à la didactique des mathématiques. De plus, comme signalé par Vandebrouck (2020), les outils pour les analyses de tâches mathématiques (Robert, 1998) utilisés dans la TADM ont émergé comme compléments aux outils théoriques des théories traditionnelles en didactique de la TAD et de la TSD. La théorie des ETM, en revanche, est une théorie issue des travaux en didactique des mathématiques (Kuzniak et al., s. d.). Cela la rend sensible à des problématiques clés au sein de la didactique, notamment en structurant ce qui relève de la sémiotique, des aspects instrumentaux et du discours mathématique. Néanmoins, les résultats de la théorie des ETM donnent des indices généraux sur le travail des élèves. L'étude de l'évolution des ETM personnels des élèves est importante pour évaluer l'apprentissage dans les ETM (ce travail reste à faire). Vivier (2020) donne une importance aux dimensions (genèses) relatives à ce sujet car c'est par ce biais et les interactions entre ses composantes que l'on peut analyser l'évolution des ETM personnels. Il note que « *la visée de la TADM est d'atteindre les apprentissages, la théorie des ETM pourrait s'enrichir de cette visée* » (Ibid. p. 65).

Le contraste fait ressortir la difficulté commune aux deux théories pour considérer des études à une échelle plus large dans le temps. Dans le cas de la TADM, cela rend difficile le passage aux analyses globales (Abboud et al., 2017), d'autant plus que les analyses de l'activité d'un sujet peuvent être très fines. Dans le cas des ETM, alors que les analyses théoriques permettent de bien décrire le développement du travail mathématique, des analyses à une temporalité plus large peuvent constituer une difficulté pour analyser l'évolution des ETM personnels (et donc des apprentissages).

4.3 Analyses avec la TADM et la théorie des ETM à la transition L-U

Nous présentons des exemples avec les deux théories visant à illustrer les analyses du troisième niveau du Networking (comparaison et contraste entre les deux théories) à partir d'exemples concrets. Dans cette section nous avons aussi pour but de révéler les apports et les limites de théories appliqués aux problématiques trouvées dans la transition L-U dans l'étude de suites récurrentes.

Ainsi, nous allons présenter l'analyse d'une tâche donnée à l'université, la production d'un étudiant de première année de l'université ainsi qu'un exemple de tâche de baccalauréat. Les analyses présentées avec la TADM sont principalement en terme de sous-activités mathématiques de reconnaissance, organisation et traitement (avec les connaissances et leurs adaptations sous-jacentes) à travers un regard particulier sur la sous-activité de contrôle. Les analyses en terme d'ETM sont faites principalement sur les trois dimensions du travail mathématique, sémiotique, instrumental et discursif ainsi que sur les paradigmes de l'analyse. Finalement grâce à leur compatibilité dans les analyses, nous montrerons que ces théories peuvent être coordonnées. Toutefois, nous pourrions observer que ces théories ne s'opérationnalisent pas de la même façon (voire s'expriment différemment au niveau des analyses) ce qui montre une complémentarité de l'une par rapport à l'autre.

4.3.1 Exemple d'analyse théorique à l'Université : pratique ascendante du Networking

Nous allons tout d'abord présenter une tâche complexe (au sens de la TADM) qui a été donnée dans un examen de première année de l'Université, pour être résolue dans un environnement papier-crayon. Il s'agit de l'étude d'une suite définie par récurrence homographique. Dans la Figure 5 nous montrons l'ensemble de la tâche.

<p>Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in [0,1], f(x) = \frac{1}{2-x}$.</p> <p>On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions : $u_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2-u_n}$.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Montrer que, pour tout $x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$. Puis que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$. 2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. 3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. 4. Quelle est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
--

Figure 5 : Tâche de l'étude d'une suite récurrente en 1^{ère} année de l'université.

Cette tâche se réfère à l'étude de la suite en commençant par l'étude de l'intervalle stable, la bonne définition de la suite, ses variations, sa convergence et la valeur de sa limite. Nous présentons dans cette partie les analyses avec la TADM et la théorie des ETM de la première question⁴².

La tâche 1, bien que rédigée en une seule question, comporte deux sous-tâches. En effet, c'est l'identification du but de l'activité à développer dans chaque tâche qui nous permet de faire cette différenciation. De ce fait, nous identifions la première sous-tâche comme « *montrer que, pour tout $x \in [0, 1], f(x) \in [0, 1]$* », ce qui implique le but d'étude de l'intervalle stable (*sous-tâche a*). La deuxième sous-tâche est donnée par la question « *Puis que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$* », ce qui concerne plus particulièrement le but de montrer que (u_n) est bien définie et bornée (*sous-tâche b*).

Pour la *sous-tâche a*, les connaissances à mettre en fonctionnement sont respectives à l'étude de fonctions dans un intervalle : stabilité d'un intervalle, dérivée d'un quotient, étude de variation de fonctions (tableau ou pas), inéquations et maîtrise d'inégalités. Pour la *sous-tâche b*, les connaissances à mettre en fonctionnement sont le raisonnement et preuve par récurrence. Nous montrons une analyse a priori de cette première question avec des stratégies de résolution comme suit :

Tableau 1 : Stratégies de résolution

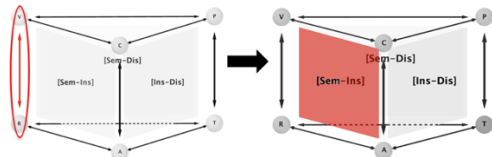
(a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1], f(x) \in [0, 1]$	
Stratégie Inégalités algébriques (a.1)	<p>* Pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $0 \leq x \leq 1$ donc $-1 \leq -x \leq 0$ donc $1 \leq 2 - x \leq 2$ donc $0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2-x} \leq 1$. Cela montre que $f(x) \in [0, 1]$.</p> <p>* Dans cette stratégie on peut procéder comme suit : comme $x \in [0, 1]$ donc $2 - x > 0$, les inégalités $0 \leq \frac{1}{2-x} \leq 1$ sont vraies si et seulement si $(2 - x) \times 0 \leq 1 \leq (2 - x) \times 1$, soit $0 \leq 1 \leq 2 - x$, ce qui est vrai.</p>
Stratégie de variations de f (a.2)	<p>* Nous pouvons procéder à l'étude de variation de f dans $[0, 1]$ par le calcul de la dérivée : $f'(x) = \frac{1'(2-x) - 1(2-x)'}{(2-x)^2} = \frac{1}{(2-x)^2} \geq 0$.</p> <p>Ainsi nous pouvons construire le tableau de variation de f comme suit :</p>

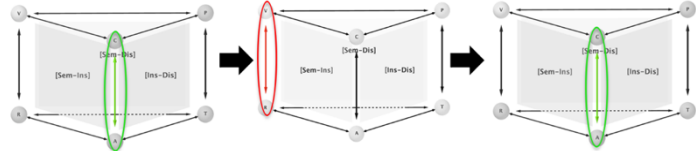
⁴² Pour l'analyse en détail des autres questions de la tâche le lecteur pourra se diriger à la section 6.1.3, page 156.

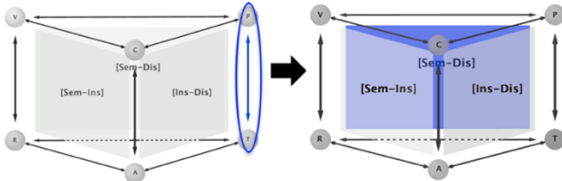
(a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$			
	x	0	1
	$f'(x)$		$+$
	f	$\frac{1}{2}$	\nearrow
			1
Donc pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.			
*Nous pouvons aussi prouver que f est strictement croissante en appliquant la définition élémentaire de fonction croissante : pour tout x_1 et $x_2 \in [0,1]$ tel que $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$. Puis procéder à l'évaluation des bornes de l'intervalle.			
(b) Montrer que, que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$			
Stratégie récurrence	On montre par récurrence que $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.		
	(i) Initialisation : On a $u_0 = \alpha$ et $\alpha \in]0, 1[$ donc $u_0 \in [0, 1]$.		
	(ii) Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose $u_m \in [0, 1]$.		
	$u_m \in [0, 1] \Rightarrow f(u_m) \in [0, 1]$. Or $f(u_m) = u_{m+1}$. Donc $u_{m+1} \in [0, 1]$.		
	(iii) Conclusion : Par le principe de récurrence montre que u_n est bien définie et que $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \geq 0$.		

Tableau 2 : Analyses des stratégies avec les deux théories

(a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$	
TADM	<p>Sous-activités mathématiques attendues</p> <p>L'ordre qui suit concernant les sous-activités répond à une hiérarchisation de celles-ci par rapport à la résolution de la tâche.</p> <p>1^{ère} Reconnaissance : l'étudiant doit étudier la fonction dans l'intervalle $[0, 1]$. Pour cela, il doit mettre en fonctionnement un choix (non forcé) de méthode (adaptation A6), entre la stratégie d'inégalités ou la stratégie de la variation de la fonction. Cela implique la reconnaissance de la méthode pour chacune des stratégies (adaptation A1).</p> <p>2^{ème} Traitement : Les deux stratégies comportent des calculs à effectuer et un travail impliquant des traitements algébriques. Notamment pour la première stratégie, on trouve les expressions de comparaison comme une introduction d'intermédiaires (adaptation A2). Pour la deuxième stratégie, l'étudiant commence par calculer le dérivé de la fonction (où il cherche à connaître le signe de f'). Ensuite, il doit faire une mise en relation entre la croissance de la fonction et l'évaluation des bornes de l'intervalle</p>

	<p>(adaptation A3), ce qui permet la construction du tableau de variations et, à partir de là, conclure.</p> <p>Remarque : L'organisation qui existe dans l'étude des fonctions correspond au développement d'une sous-activité de traitement pour les étudiants de L1 car cette organisation a été routinisée. En effet, même si l'étude de fonctions nécessite de l'introduction d'étapes, elle est connue par les élèves dès la classe de Seconde au Lycée.</p>
ETM	<p>Paradigme de l'analyse : Dans les deux stratégies, il s'agit seulement du paradigme [A2].</p> <p>* L'ordre du travail mathématique décrit dans chaque stratégie répond à une succession dans la résolution de la tâche.</p> <p>(a.1) Stratégie Inégalités algébriques :</p> <p>1^{ère} travail : activation de la dimension sémiotique</p> <p>L'étudiant est d'abord amené à faire une conversion entre registres (du registre ensembliste au registre algébrique : $x \in [0,1]$ vers $0 \leq x \leq 1$, ou $f(x) \in [0,1]$ vers $0 \leq f(x) \leq 1$).</p> <p>2^{ème} travail : activation du plan [Sem-Ins]</p> <p>L'étudiant utilise les traitements du registre algébrique (notamment avec les inégalités) en tant qu'artefact symbolique, ce qui l'amène à conclure et à visualiser la stabilité de l'intervalle.</p> <p>L'illustration de la succession du travail mathématique avec le diagramme est la suivante :</p>  <p>(a.2) Stratégie de variations de f :</p> <p>1^{er} travail : activation de la dimension instrumentale</p> <p>L'étudiant utilise la dérivée en tant qu'artefact symbolique pour obtenir des informations sur le comportement de f. Un deuxième artefact symbolique concernant le signe de la dérivée permet de conclure que f est croissante.</p> <p>2^{ème} travail : activation de la dimension sémiotique</p> <p>Il s'agit de la construction du tableau de variation avec, comme données, le signe de la dérivée de f et les images par f de bornes de l'intervalle. Ce tableau est un signe qui permet à l'étudiant de résumer le comportement de la fonction dans l'intervalle $[0,1]$.</p>

	<p>3^{ème} travail : activation de la dimension instrumentale</p> <p>L'étudiant utilise le tableau de variations en tant qu'artefact symbolique pour conclure sur la stabilité de $[0,1]$ par f.</p> <p>L'illustration de la succession du travail mathématique avec le diagramme est la suivante :</p>  <p>Par les allers-retours entre les dimensions sémiotique et instrumentale, on peut dire que le travail dans cette stratégie est essentiellement dans le plan [Sem-Ins].</p>
<p>(b) Montrer que, que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$</p>	
<p>TADM</p>	<p>Sous-activités mathématiques attendues</p> <p>L'ordre qui suit concernant les sous-activités répond à une hiérarchisation de celles-ci par rapport à la résolution de la tâche.</p> <p>1^{ère} Reconnaissance : L'étudiant doit d'abord faire un choix (forcé) de la méthode (adaptation A6) et il doit reconnaître la stratégie de preuve par récurrence comme méthode valable pour l'étude de la suite dans l'intervalle $[0,1]$ (adaptation A1).</p> <p>2^{ème} Traitement : L'étudiant est amené à utiliser la question précédente pour l'utiliser dans l'hérédité (adaptation A5), ce qui peut être aussi interprété comme une reconnaissance importante à ce moment-là. Dans la démonstration par récurrence, on travaille avec les formules et la définition de la suite comme intermédiaire (adaptation A2).</p> <p>Remarque : Les trois étapes du raisonnement par récurrence (adaptation A4) engagent une sous-activité de traitement car cela correspond à une organisation routinisée par l'étudiant de L1 (raisonnement travaillé dans la classe de Terminale au Lycée).</p>

ETM	<p>Paradigme de l'analyse : Il s'agit du paradigme [A2].</p> <p>* L'ordre du travail mathématique décrit dans chaque stratégie répond à une succession dans la résolution de la tâche.</p> <p>1^{er} travail : activation de la dimension discursive</p> <p>L'étudiant est amené à utiliser son référentiel théorique pour utiliser la récurrence comme type de preuve.</p> <p>2^{ème} travail : activation du plan [Sem-Dis]</p> <p>A partir des signes du registre ensembliste, l'étudiant doit faire un travail de preuve avec le respect des étapes : initialisation (donnée dans l'énoncé de la tâche), hérédité (travail sémiotique dans le registre ensembliste) et conclusion. On utilise la preuve par récurrence qui se trouve dans le référentiel théorique comme outils pour résoudre la tâche. Discours issu de la technique de preuve.</p> <p>L'illustration de la succession du travail mathématique avec le diagramme est la suivante :</p> 
-----	---

Les difficultés possibles rencontrées par les étudiants dans la résolution de la tâche se basent surtout dans le blocage possible de chacune des stratégies en termes de deux théories. Du côté de la TADM, il faut que l'étudiant s'investisse d'abord dans une sous-activité de reconnaissance en mobilisant les adaptations de connaissances correspondantes pour, ensuite, continuer avec la sous-activité de traitement et/ou d'organisation. Par exemple, si l'étudiant choisit les stratégies a.1, il peut trouver des difficultés dans les expressions de comparaison (adaptation A2), ce qui peut engendrer des blocages dans la sous-activité de traitement. Toutefois, les reconnaissances de chacune des stratégies ne sont pas du même ordre : dans la *sous-tâche a*, il s'agit du choix de stratégie (non forcé), et dans la *sous-tâche b*, il s'agit de la nécessité du raisonnement par récurrence. De plus, dans la sous-activité de traitement de la *sous-tâche b*, il y a une reconnaissance importante concernant l'utilisation de la question précédente (hérédité), ce qui peut aussi bloquer le développement de la résolution de la tâche. Dans la *sous-tâche a* il s'agit d'introductions d'intermédiaires avec des calculs à effectuer et la construction d'un outil (le tableau de variation) pour y répondre. Ainsi, les sous-activités de traitement sont aussi d'ordre différent. Par conséquent, l'étudiant peut trouver des difficultés, d'une part, dans le fait de ne pas développer les

reconnaitances attendues et, d'autre part, dans les sous-activités de traitement attendues dans chacune des stratégies.

En termes de la théorie des ETM, l'étudiant peut trouver des difficultés dans le paradigme d'analyse [A2], notamment s'il ne possède pas la maîtrise nécessaire pour produire un travail correct dans ce paradigme. Il peut également rencontrer des difficultés dans ce paradigme si la nature des objets n'est pas bien travaillée, produisant des confusions entre la façon de travailler les suites et les fonctions. Dans la stratégie a.1 par exemple, l'étudiant peut trouver des difficultés du travail dans la dimension sémiotique à travers la non conversion du registre algébrique vers le registre ensembliste ($x \in [0,1]$ équivaut à $0 \leq x \leq 1$). Dans le cas où l'étudiant arrive à bien réaliser les conversions, l'étudiant peut trouver des difficultés dans les traitements à réaliser avec les inégalités dans le registre algébrique en tant qu'artefact symbolique pour produire la réponse souhaitée ($-1 \leq -x \leq 0$ donc $1 \leq 2 - x \leq 2$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2-x} \leq 1$). Si l'étudiant aboutit à ces traitements, il lui reste une dernière conversion à réaliser du registre sémiotique vers le registre ensembliste ($0 \leq \frac{1}{2-x} \leq 1$ équivaut à $\frac{1}{2-x} \in [0,1]$) pour conclure la sous-tâche a ($f(x) \in [0,1]$). Ainsi, les difficultés rencontrées peuvent se traduire comme des difficultés d'ordre sémiotique ou d'ordre instrumental (notamment de l'artefact symbolique).

En ce qui concerne la coordination de théories, nous pouvons noter que les deux types d'analyses répondent, d'une part, à une succession dans le développement de la tâche et, d'autre part, à l'identification de la sous-activité mathématique dominante ainsi que la dimension (ou plan vertical) du travail mathématique qui commande le travail. Les schèmes suivants (Figure 6, Figure 7, et Figure 8 ci-dessous) illustrent la succession entre sous-activités et travail mathématique personnel attendu dans chacune des stratégies.

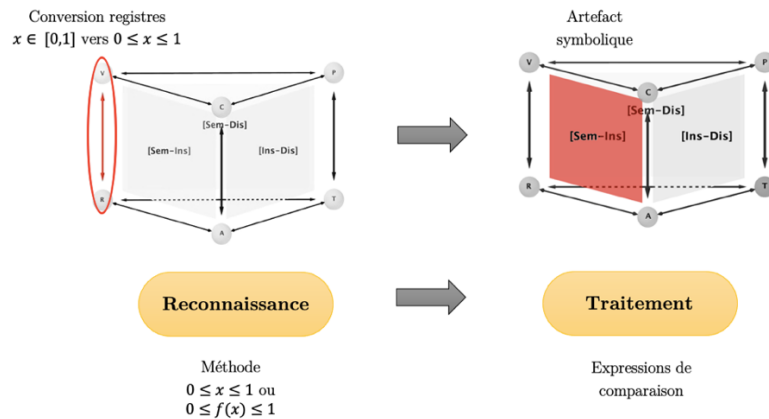


Figure 6 : Succession de sous-activités et du travail attendu dans la stratégie a.1.

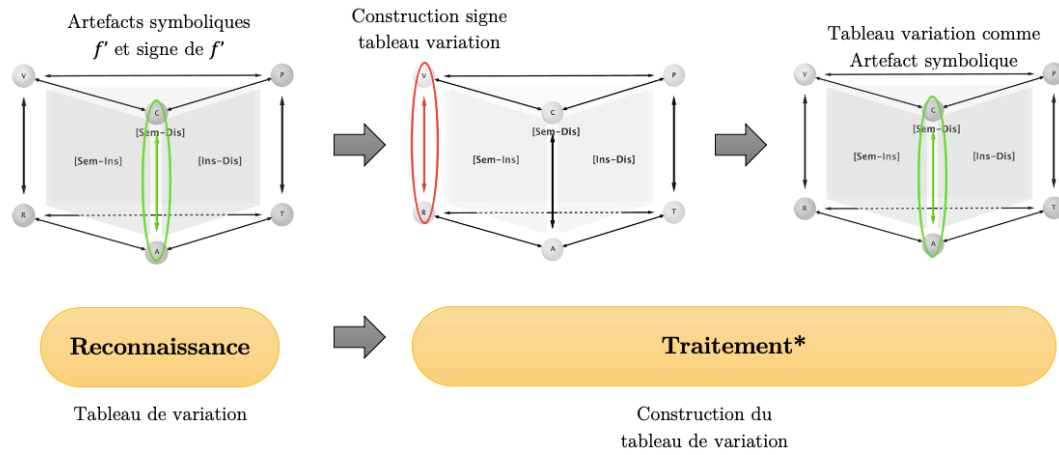
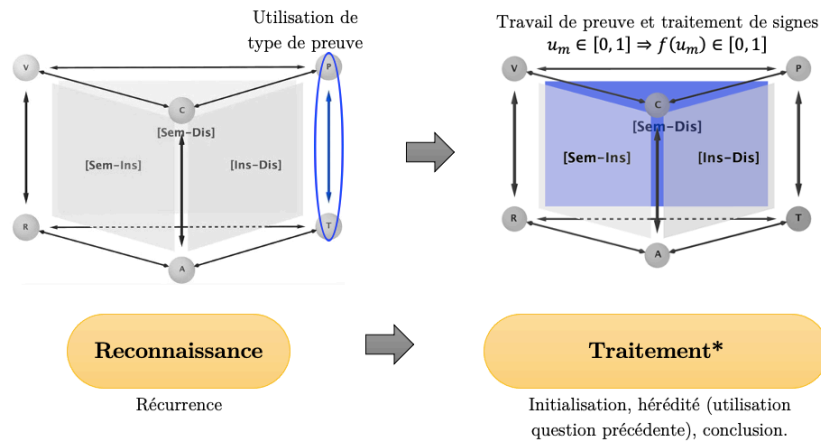


Figure 7 : Succession de sous-activités et du travail attendu dans la stratégie a.2.

Figure 8 : Succession de sous-activités et du travail attendue dans la stratégie b⁴³.

De cette façon, si l'étudiant reste bloqué dans des moments précis de ces successions, il ne pourra pas s'investir dans une sous-activité attendue déterminée ou dans une dimension du travail mathématique prévue. Compte tenu de cette analyse a priori, analysons la production d'un étudiant à l'université.

⁴³ Il est à remarquer que dans le cas de la preuve par récurrence, bien qu'avec la TADM cela relève d'une sous-activité de traitement pour les étudiants de L1, dans le cas des ETM nous considérons que comme il s'agit d'une méthode de preuve, cela relève plus de l'activation de la dimension discursive (et ensuite le plan vertical [Sem-Dis]). En effet, la preuve par récurrence nécessite des raisonnements formels issus de la logique mathématique qui seraient nécessaires pour le développement de la preuve. Toutefois, nous pouvons nous demander, dans quel contexte cela pourrait être considéré comme un artefact symbolique et donc d'une activation de la dimension instrumentale ? Est-ce que c'est l'organisation de cette méthode de preuve (initialisation, hérédité, conclusion) qui est instrumentale ?

Un exemple de production d'étudiant

Sans chercher à expliciter les résultats de l'ensemble des étudiants au niveau de l'université, voici un exemple représentatif d'analyse de production à ce niveau. Il s'agit d'un extrait de la production d'un étudiant de première année de l'université (Figure 9) travaillant de façon individuelle (pendant l'évaluation) et où la calculatrice est interdite. La tâche est celle que l'on a analysée précédemment. Rappelons l'énoncé de la tâche générale et la question 1 :

Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in [0,1], f(x) = \frac{1}{2-x}$. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions : $u_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2-u_n}$.

(1) Montrer que, pour tout $x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$. Puis que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$.

Handwritten mathematical proof for Figure 9:

$$x \in]0,1[\quad f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \alpha \in]0,1[$$

1 - Montrons que $\forall x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$

$$= 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$$

1^{er} cas $\alpha = 0$

$$f(x) = \frac{1}{2} \quad \text{où} \quad 0 \leq \frac{1}{2} \leq 1 \quad f(x) \in [0,1]$$

2^{ème} cas $\alpha = 1$

$$f(x) = \frac{1}{2-1} = 1 \quad \text{d'où} \quad 0 \leq 1 \leq 1 \quad f(x) \in [0,1]$$

Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et donc $u_n = f(u_{n-1}) = f(x) \in [0,1]$
 alors $\forall x \in [0,1], u_n \in [0,1]$

Figure 9 : Production de l'étudiant E28 de première année de l'université.

Pour la sous-tâche *a* concernant l'intervalle stable par f , du point de vue de la TADM, cet étudiant semble avoir développé une sous activité de reconnaissance avec un choix de méthode pour la première stratégie (adaptations A6 et A1). Néanmoins, la sous-activité de traitement (qui dépend de la reconnaissance), est investie *a minima*, car les étapes du raisonnement mathématique de l'étude de la fonction sont bloquées dans la résolution de la tâche. Bien qu'il reconnaisse la méthode à utiliser et qu'il introduise des expressions de comparaison (adaptation A2), il ne réalise pas les traitements nécessaires, avec celles-ci, pour résoudre la tâche. Tout se passe comme si l'étudiant avait mélangé les stratégies car, d'abord, il reconnaît la méthode d'inégalités

puis il calcule $f(0)$ et $f(1)$, étape qui est nécessaire dans la construction du tableau de variation de f . Cela empêche un développement de la sous-activité de traitement telle qu'attendue.

Du côté de la théorie des ETM, l'étudiant commence bien en activant la dimension sémiotique et en réalisant les conversions du registre ensembliste vers l'algébrique (il arrive bien à convertir des intervalles vers des inégalités). Toutefois, il ne prouve pas la stabilité de l'intervalle $[0,1]$ par f malgré le fait que la conclusion du travail produit dans cette sous-tâche est correcte ($f(x) \in [0,1]$). Il n'arrive pas à bien prouver cette stabilité car il n'effectue pas le travail avec les inégalités en tant qu'artefact symbolique (d'ailleurs, on peut penser que pour lui il n'y a pas d'artefact symbolique) et procède seulement à l'évaluation de la fonction dans les bornes de l'intervalle $[0,1]$ (ce qui pourrait être interprété comme une habitude de l'utilisation du TVI). De plus, l'étudiant n'utilise pas la croissance de la fonction (il ne l'évoque pas). Il est à noter, ici, que si la calculatrice avait été acceptée dans la résolution de l'examen, l'étudiant aurait pu l'utiliser pour visualiser la croissance de f à partir du graphique. De cette façon, il aurait pu utiliser ce résultat pour contrôler son travail et pour argumenter son discours mathématique.

Dans la

Figure 10 et la Figure 11⁴⁴ nous montrons la succession des sous-activités atteintes (et non atteintes) et du travail mathématique fourni par l'étudiant. Ici nous observons que le fait de produire une sous-activité de traitement a minima ne permet pas d'activer le plan vertical [Sem-Ins] de l'ETM personnel de l'étudiant. Sa production se réduit ainsi à une sous-activité de reconnaissance et un travail mathématique dans la dimension sémiotique.

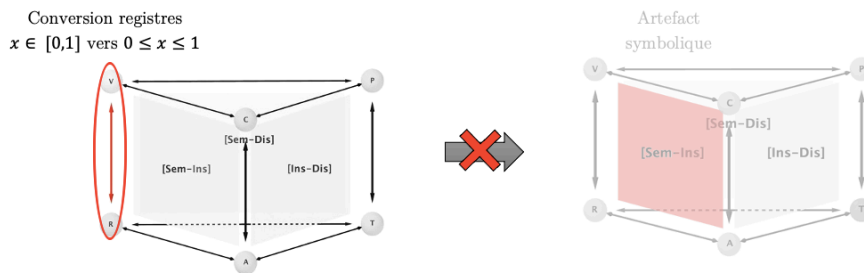


Figure 10 : Illustration des successions du travail mathématique développé par E28 dans la sous-tâche a.

⁴⁴ Comme l'entrée des analyses a posteriori sont différentes entre les deux théories, nous séparons les schémas des successions.

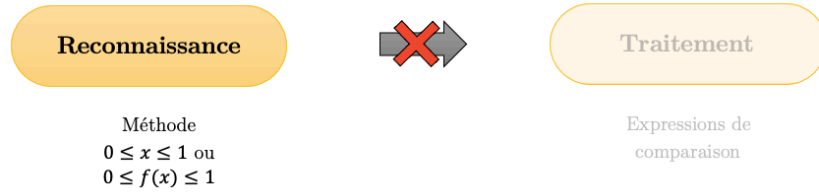


Figure 11 : Illustration des sous-activités atteintes et non atteintes par E28 dans la *sous-tâche a*.

Pour la *sous-tâche b* du point de vue de la TADM, l'étudiant ne s'engage pas dans une sous-activité de reconnaissance car il ne reconnaît aucune méthode valable pour la résolution de la tâche (adaptation A1 et A6 non mises en place). Autrement dit, bien qu'il établisse une reconnaissance (dans ce cas celle de $u_n = f(n)$), celle-ci ne correspond pas à celle attendue. Ainsi l'étudiant ne s'engage pas dans une sous-activité du traitement. Du point de vue des ETM, la dimension qui commande le travail est la sémiotique car il est capable de produire des signes et de les mettre en relation. Or, la dimension attendue pour être activée était la discursive. Même si l'étudiant rédige un discours, celui-ci ne correspond pas à une preuve valable dans le paradigme [A2]. L'étudiant semble aussi avoir un manque de contrôle au niveau du travail mathématique produit, ce qui s'exprime par les formulations « Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et donc $u_n = f(n) = f(x) \in [0, 1]$ ». Dans ce dernier point, l'étudiant ne développe pas ces dernières égalités mais cela peut exprimer, qu'à ce stade, il ne développe pas une reconnaissance de la suite comme une suite récurrente et qu'il risque de la traiter comme une suite $u_n = f(n)$.

Comme dans le cas de sous-tâche précédente, la Figure 12 et la Figure 13 montrent la succession des sous-activités (dans ce cas non atteintes) et du travail mathématique fourni par l'étudiant dans la résolution de la *sous-tâche b*. Nous notons que le fait de ne pas reconnaître la nécessité d'utiliser une récurrence n'empêche pas d'activer la dimension discursive. Comme il existe une erreur d'interprétation de la suite, l'étudiant ne poursuit pas le travail dans le plan vertical [Sem-Dis].

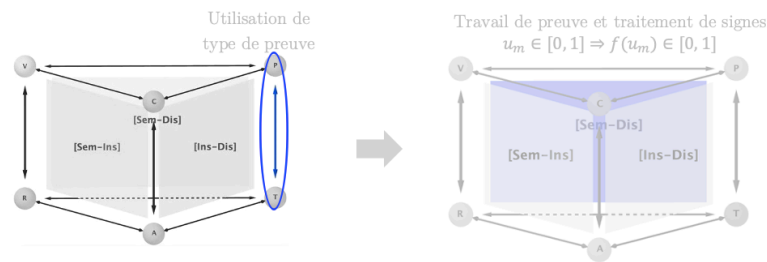


Figure 12 : Illustration des successions du travail mathématique développé par E28 dans la *sous-tâche b*.



Figure 13 : Illustration des sous-activités non atteintes par E28 dans la *sous-tâche b*.

À partir de cet exemple de production d'un étudiant de l'université, nous observons des problèmes dans les sous-activités de reconnaissance (qui impliquent des blocages dans les sous-activités de traitement) ainsi que dans la dimension instrumentale de l'ETM personnel de l'étudiant, dûs à la non utilisation des artefacts symboliques (est-ce que les éléments du référentiel théorique se sont effectivement transformés en outils pour cet étudiant ?). Mais la production de l'étudiant E28 est, bien sûr, influencée par la façon dont la tâche a été conçue. Par exemple, la tâche est réduite à un travail dans le paradigme [A2] (on n'observe pas une articulation entre paradigmes) et le registre sémiotique privilégié est l'algébrique. On n'observe pas d'artefact numérique qui permette l'utilisation d'autres registres de représentation (comme la calculatrice) et, même si l'on utilise un peu de registre ensembliste, aucun autre registre de représentation (graphique, numérique ou autre) n'est suggéré. En outre, la dimension instrumentale serait évoquée seulement au moment de travailler les artefacts symboliques et son activation est donc mineure. La dimension discursive commande le travail seulement à un moment de la *sous-tâche b*. Par ailleurs, on n'observe pas de moyens de contrôles mathématiques pour le travail personnel de l'étudiant. D'autant plus que l'étudiant a sûrement développé de nouvelles connaissances qui ont été introduites seulement à ce niveau d'enseignement, ce qui peut s'avérer très difficile à maîtriser (nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 6).

La production de l'étudiant que nous venons de présenter est influencée par la façon dont la tâche a été conçue mais aussi par le type de tâches qu'il a été amené à résoudre à la fin de son enseignement du Lycée. Nous pouvons donc nous demander de quelles caractéristiques sont les tâches travaillées au niveau du Baccalauréat ?

Concernant la coordination de théories, nous pouvons caractériser l'activité mathématique de l'étudiant et le travail mathématique produit. Dans l'exemple présenté, que ce soit dans la *sous-tâche a* ou *b*, tout d'abord il faut que l'étudiant fasse une reconnaissance pour activer ensuite une dimension de son ETM personnel. Puis, selon le travail mathématique fourni dans une certaine dimension, celui-ci peut permettre (ou empêcher) à l'étudiant d'avancer à une sous-activité de traitement. Par ailleurs, peut-être que selon la sous-activité de reconnaissance que l'élève développe,

cela déterminera la dimension (ou plan vertical) de l'ETM qui sera activé ainsi que le travail mathématique produit lors de la mise en fonctionnement de cette sous-activité, qui déterminera également si l'on peut continuer vers une sous-activité de traitement ou d'organisation. Il paraît que c'est la sous-activité de reconnaissance qui permet de donner une explication cognitive de la raison pour laquelle une certaine dimension est activée dans l'ETM personnel d'un sujet.


4.3.2 Exemple de tâche de Baccalauréat

Compte tenu de ces premières analyses au niveau de l'Université, nous allons présenter un exemple de tâche donnée dans une épreuve du Baccalauréat de la série Scientifique (Figure 14). Il s'agit de l'étude d'une suite récurrente à partir de l'étude de la fonction f qui définit la suite. Pour faire une première comparaison, nous allons nous concentrer dans les questions qui évoquent la *sous-tâche a* et la *sous-tâche b* venant de l'exemple de l'université.

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} , par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

1. Résoudre dans \mathbf{R} l'équation : $f(x) = x$.
2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$	1	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	+
f	$-\infty$			$+\infty$

3. Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0,1]$, $f(x)$ appartient à $[0,1]$.
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels ;
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln(N^2 + 1) < A$ N prend la valeur $N+1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

- a. Que fait cet algorithme ?
- b. Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

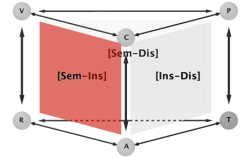
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

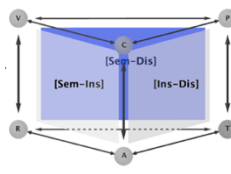
1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n) .
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. On note l sa limite, et on admet que l vérifie l'égalité $l = f(l)$. En déduire la valeur de l .

Figure 14 : Tâche correspondant à l'étude d'une suite récurrente au Baccalauréat Scientifique Métropole (2016).

Si nous comparons la façon dont la tâche est proposée, au niveau des buts des tâches, nous pouvons d'ores et déjà voir des différences concernant la *sous-tâche a* et la *sous-tâche b* de l'université. Alors qu'à l'université, ces dernières étaient présentées dans une seule question, au Baccalauréat ces sous-tâches sont bien identifiées dans deux parties distinctes. En effet, l'exercice sépare l'étude de la fonction qui définit la suite (Partie A) de l'étude de la suite elle-même (Partie B). Une autre différence avec la tâche de l'Université est au niveau du premier terme de la suite donnée dans l'énoncé de la partie B : au Baccalauréat, le premier terme est une valeur fixée, alors qu'à l'université il s'agit d'un paramètre, ce qui augmente la complexité de la tâche à ce dernier niveau d'enseignement.

Tableau 3 : Résumé d'analyse avec les deux théories

A3 : Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$ *avec usage de tableau de variation qui est donné	
TADM	Sous-activités mathématiques attendues 1ère Traitement : Cette sous-activité est celle qui pilote pour calculer $f(0)$ et $f(1)$. Toutefois l'élève peut procéder par la stratégie d'inégalités (mais ce n'est pas privilégié dans l'énoncé). Les reconnaissances et organisation en tant que traitement sont plutôt faites par les énoncés et donc elles ne sont pas encouragées dans l'activité à développer par l'élève.
ETM	Paradigme de l'analyse : il s'agit seulement du paradigme [A2]. Le travail demandé est dans le plan [Sem-Ins]. L'activation de la dimension sémiotique concerne les traitements algébriques. La dimension instrumentale est activée par l'usage du tableau de variations (donné) en tant qu'artefact symbolique. 
B1 : Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$	
TADM	Sous-activités mathématiques attendues 1ère Traitement : Bien qu'il existe une organisation dans le raisonnement par récurrence, la sous-activité dominante est celle du traitement. On fait ici un travail avec la formule et définition de la suite. Remarque : La reconnaissance est donnée dans l'énoncé puisqu'il explicite : « <i>montrer par récurrence que...</i> ». L'élève a seulement à voir que la suite donnée correspond à $f(u_n)$. Comme dans la tâche d'université, la

	reconnaissance de l'utilisation de la question A3 dans l'hérédité est attendue.
ETM	<p>Paradigme de l'analyse : Il s'agit du paradigme [A2].</p> <p>Le plan vertical privilégié est le [Sem-Dis]. Il s'agit d'activer la dimension discursive pour produire le discours correspondant à une démonstration par récurrence et d'utiliser le traitement des signes nécessaires pour y répondre.</p> 

Pour l'étude de l'intervalle stable dans la question A.3 (*sous-tâche a*), nous voyons que la stratégie du tableau de variation est suggérée dans la question A.2. Bien que l'élève puisse faire un choix de méthode (entre inégalités et l'utilisation du tableau), en termes de la TADM cela se traduit par une sous-activité de reconnaissance apportée par l'énoncé ; elle n'est donc pas demandée à l'élève. Ainsi, les énoncés des questions donnent déjà la méthode pour l'étude de la fonction à travers le tableau de variation (qui est d'ailleurs complété !). De ce fait, l'élève a seulement besoin de s'investir dans une sous-activité de traitement pour répondre à la tâche. Ici, il doit utiliser la question précédente pour argumenter la croissance de la fonction (adaptation A5) puis, ensuite, calculer $f(0)$ et $f(1)$. En termes d'ETM, cela se traduit par un travail dans la dimension sémiotique à travers des traitements dans le registre algébrique et l'activation de la dimension instrumentale (à travers l'utilisation de la croissance de la fonction issue du tableau de variation en tant qu'artefact symbolique). Néanmoins il est à noter que, même si l'on travaille dans deux dimensions, ce travail est investi avec une exigence cognitive très faible puisque, comme on l'a dit, les reconnaissances à faire dans ces dimensions sont déjà données dans les énoncés.

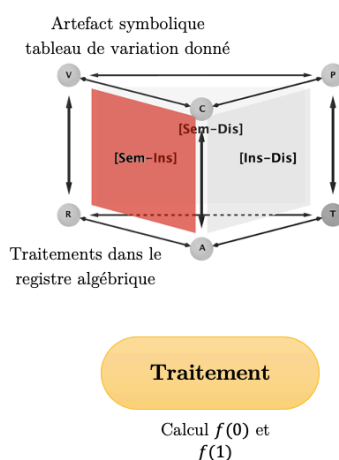


Figure 15 : Sous-activité et travail attendu dans la question A3.

Pour l'étude de la bonne définition de la suite et, du fait qu'elle est bornée (*sous-tâche b*), encore une fois la méthode est suggérée dans l'énoncé de la question B.1, ce qui veut dire que la sous-activité de reconnaissance a été apportée une fois de plus par l'énoncé. Ainsi, l'élève n'a qu'à appliquer les étapes de la preuve par récurrence. Comme ces étapes sont classiques (et travaillées pendant la dernière année de lycée), la sous-activité d'organisation peut se réduire à une sous-activité de traitement pour les élèves (organisation routinisée). En termes d'ETM, ce travail se traduit par des traitements de signes dans la preuve par récurrence, produisant un travail dans le plan vertical [Sem-Dis] et dans le paradigme [A2] (le travail investi dans les autres deux dimensions ne commande pas la résolution de la tâche).

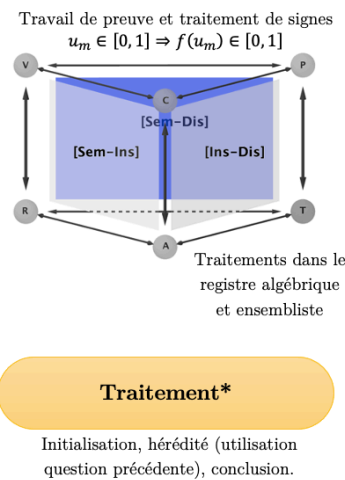


Figure 16 : Sous-activité et travail attendu dans la question B1.

4.3.3 Bilan des premières analyses

Nous rappelons ici que la coordination de théories cherche à mieux comprendre des phénomènes empiriques. Concernant le Networking effectué, les premières analyses théoriques que nous avons fournies rendent compte d'une meilleure compréhension de la transition Lycée-Université avec une coordination entre la TADM et la théorie des ETM. Une temporalité dans le développement de la tâche a été révélée comme un aspect commun aux deux théories, ce qui permet de décrire la façon dont l'activité et le travail mathématique évoluent conjointement. C'est-à-dire que les sous-activités s'appuient sur le travail mathématique développé pour faire avancer l'activité mathématique et, réciproquement, le travail mathématique repose sur des sous-activités qui font avancer le travail. Dans exemple de l'université notamment, une fois que l'étudiant développe une sous-activité de reconnaissance, nous pouvons voir

comment un travail dans la dimension discursive peut permettre (ou empêcher) à l'étudiant d'avancer vers une sous-activité de traitement (voir Figure 6, Figure 10 et Figure 11). Mais nous notons également qu'un travail mathématique dans la dimension discursive peut permettre de développer une sous-activité de traitement (dans le plan [Sem-Dis]), ou empêcher cette activité si l'élève n'active pas la dimension du travail mathématique attendu (voir Figure 8, Figure 12 et Figure 13).

Or, ces théories ne sont pas identiques et l'entrée dans les analyses, que ce soit dans les analyses a priori ou dans l'analyse de production des élèves sont différentes. En effet, chaque théorie offre des précisions différentes de ce qu'un sujet réalise. En d'autres termes, les sous-activités mathématiques analysées dans la TADM ne sont pas mises en avant dans les analyses avec la théorie des ETM et, vice-versa, les dimensions du travail mathématique et les paradigmes de l'analyse issus de la théorie des ETM ne sont pas mises en avant dans la TADM. Ainsi, le fait d'inclure les analyses de l'ETM dans celles de la TADM permet de structurer et de caractériser les actions entreprises (ou pas) par un sujet lors du développement de sous-activités ; le fait d'inclure les analyses de la TADM dans celles de l'ETM permet d'affiner les analyses cognitives des actions (ou non actions) d'un sujet. Par ailleurs, les ETM s'expriment peu sur la réduction dans l'exigence cognitive de la tâche quand la reconnaissance est apportée par l'énoncé et que la sous-activité à développer se réduit à du traitement (cas du Baccalauréat) ou quand la reconnaissance est à la charge de l'étudiant (cas de l'université). En revanche, à d'autres moments, la théorie des ETM permet d'aller plus loin dans les analyses et caractérise le type de travail à fournir pour le développement d'une sous-activité déterminée. Notamment dans la sous-activité du traitement, l'ETM permet d'analyser s'il s'agit d'un travail plutôt sémiotique, instrumental ou discursif : en l'occurrence, dans l'exemple de la Figure 7, l'ETM permet de caractériser et de détailler cette sous-activité avec une analyse du travail mathématique à produire, d'une part dans la dimension sémiotique et, d'autre part, dans la dimension instrumentale.

Concernant les similitudes de tâches analysées, d'une part, les deux tâches se limitent au paradigme [A2], ce qui nous permet de faire l'hypothèse que le travail mathématique attendu à la transition Lycée-Université est essentiellement celui de [A2]. Les tâches des deux niveaux d'enseignement permettent un travail dans les plans verticaux [Sem-Ins] et [Sem-Dis] de l'ETM, et on n'observe pas du travail privilégié dans le plan [Ins-Dis]. Concernant les différences, au niveau des sous-activités, la reconnaissance est la plus importante à l'université (exigence cognitive plus élevée), suivie des sous-activités de traitement tandis qu'au Baccalauréat les sous-activités sont réduites à seulement des sous-activités de traitement (la Figure 15 et la Figure 16 montrent que le travail mathématique autant que les sous-activités mathématiques à

développer sont bien plus réduits que ceux demandés à l'université, voir Figure 6, Figure 7 et Figure 8). En effet, toutes les reconnaissances nécessaires ont été données dans les énoncés. Peut-être que la sous-activité de reconnaissance est cruciale pour faire avancer le travail mathématique car si la reconnaissance n'est pas investie, cela peut provoquer des blocages importants dans les autres sous-activités et aussi dans le travail de dimensions de l'ETM. Ce serait peut-être la raison de la présence des reconnaissances dans les énoncés du Baccalauréat ?

Une dernière sous-activité reste à analyser : la sous-activité de contrôle. Comme nous avons un regard particulier sur celle-ci, nous l'aborderons dans la section suivante.

4.4 La notion de contrôle

Pour commencer cette section, rappelons la question qui découle de l'état de l'art effectué au chapitre 2 (page 52) :

Comment promouvoir le contrôle dans le travail mathématique des élèves, d'une part pour qu'il soit pertinent aux problématiques de la transition L-U en France et, d'autre part, pour qu'il prenne en compte les spécificités des suites définies par récurrence ainsi que les difficultés rencontrées par les élèves dans leur étude ?

À l'instar de cette question posée, il nous semble essentiel d'étudier la notion de contrôle de manière plus approfondie. En effet, les analyses développées dans la section précédente nous montrent un défaut de contrôle tant au début de l'université (déjà évoqué par ailleurs dans les travaux de Bloch (2000) et Praslon (2000) dans le domaine de l'Analyse) qu'en fin du lycée. Notre hypothèse est que si les occasions de contrôle sont plus disponibles pour les élèves et que l'enseignement les rend plus explicites, cela faciliterait leur utilisation de façon autonome de la part des élèves et des étudiants par la suite. Ainsi, le contrôle devient pour nous une des problématiques clés de la transition. Ces raisons nous motivent à faire une étude bibliographique concernant la notion de contrôle en identifiant les définitions de contrôle utilisées dans les travaux qui se sont centrés sur ce sujet. Cela pour, ensuite, analyser la façon dont nous pouvons prendre en compte les considérations des travaux déjà faits dans nos analyses afin de mieux élaborer ultérieurement la définition de contrôle mathématique que nous souhaitons privilégier.

Nous abordons cette section avec un regard plus détaillé du problème du contrôle à la transition L-U en analysant la tâche de l'université (Figure 5), la production de l'étudiant E28 (Figure 9), et la tâche du Baccalauréat (Figure 14).

4.4.1 Le contrôle en début de l'université et à la fin du lycée

En regardant le contrôle comme une sous-activité mathématique, nous pouvons observer qu'elle a un statut particulier par rapport aux autres sous-activités. Comme nous l'avons vu dans la section Sous-activités mathématiques des élèves (page 61), Robert & Vandebrouck (2014) signalent que la liste de sous activités de reconnaissance, organisation et traitement (chacune liée à des adaptations de connaissance spécifiques) devraient être complétées par d'autres sous-activités plus transversales. Nous pensons que le contrôle mathématique fait partie de ces sous-activités mathématiques

transversales, notamment parce qu'elles seraient nécessaires pendant toute l'activité mathématique et qu'elles traverseraient toutes les adaptations de connaissances à mettre en fonctionnement.

Pour analyser le contrôle au deux niveaux d'enseignement, nous revenons rapidement à la définition que nous avons donnée en page 61 : les sous-activités qui *sont développées lors de la réalisation de tâches complexes, lorsque les élèves sont capables de reconnaître que leur raisonnement est cohérent avec plusieurs points de contrôle*, correspondent à des sous-activités de contrôle. Rappelons que cela passe aussi par un déroulement de l'action en accord avec ce que l'on veut effectivement mettre en fonctionnement ainsi qu'à une production qui correspond bien au but qui a été fixé par la tâche (Rogalski, 2015).

Compte tenu de cette définition, nous pouvons identifier un *contrôle non mathématique* qui sera directement lié au but de l'activité à développer lors de la tâche complexe, et un autre type de contrôle, plus lié aux mathématiques, qui entraîne des reconnaissances d'ordre mathématique.

En ce qui concerne la conception de la tâche du niveau universitaire, nous pouvons dire qu'elle considère de façon explicite seulement le contrôle non mathématique puisque le but de l'activité est explicité dans la tâche (dans la *sous-tâche a* le but est prouver que $f(x) \in [0, 1]$, et dans la *sous-tâche b* le but est prouver que $u_n \in [0, 1]$). Ce type de contrôle, bien qu'utile, peut provoquer des effets didactiques, de sorte que les élèves sont capables d'arriver à des conclusions mathématiques attendues, sans mettre en fonctionnement les sous-activités mathématiques nécessaires pour résoudre la tâche (notamment de reconnaissance, d'organisation et de traitement) ou sans avoir mis en place un référentiel théorique cohérent à la réponse discursive donnée. Le contrôle mathématique, quant à lui, n'est pas explicité dans la tâche et donc laissé complètement à la charge de l'élève. Il se trouve que c'est justement avec ce dernier type de contrôle que l'étudiant (Figure 9) de l'université a des difficultés. En effet, bien qu'il mette en fonctionnement un contrôle non mathématique (car il arrive aux conclusions que $f(x) \in [0, 1]$ et que $u_n \in [0, 1]$) il ne met pas en fonctionnement un contrôle mathématique : il n'utilise la croissance de la fonction à aucun moment, il ne considère pas que $u_{n+1} = f(u_n)$ est différente de $u_n = f(n)$ et, dans ce dernier cas, il ne semble pas se demander si la suite restera toujours dans l'intervalle $[0, 1]$.

L'énoncé de la tâche, tel qu'il a été conçu, ne favorise pas la sous-activité de contrôle mathématique ; serait-ce pour cette raison que l'étudiant E28 (Figure 9) ne la développe pas ? En l'occurrence, il faut noter qu'il existe une possibilité de contrôle mathématique dans la résolution de la tâche et donc que ce contrôle peut être

effectivement encouragé. À cet égard, l'étudiant E28 aurait pu activer la dimension instrumentale avec l'utilisation d'une calculatrice symbolique (si on le lui avait permis) pour réaliser un travail au sein du paradigme de l'analyse [A1] : pour la *sous-tâche a* par exemple, il aurait pu tracer le graphe de la fonction f et, par-là, visualiser sa croissance. Dans ce cas, l'activation de la dimension instrumentale aurait permis à l'étudiant de donner une production dans un espace de travail mathématique complet (il aurait travaillé dans les trois dimensions de l'ETM) ; et par la visualisation, il aurait pu mettre en fonctionnement un contrôle mathématique. Il importe, ici, de relever aussi que l'activation de cette dimension instrumentale entraîne des connaissances et des sous-activités de reconnaissance instrumentales et de reconnaissance instrumentales mathématiques (Vandebrouck et Robert, 2017) que les étudiants devraient mettre en fonctionnement.

En ce qui concerne le Baccalauréat (donc la fin du Lycée), nous voyons que le contrôle non mathématique, tel que l'énoncé de l'université, est aussi explicité dans les énoncés des *sous-tâches a* et *b* (A.3 et B.1 respectivement). Dans la question A3, bien que l'élève pourrait utiliser le résultat de la question précédente concernant la croissance de la fonction, le fait d'avoir donné ce résultat n'assure pas un développement de l'activité de contrôle mathématique de la part de l'élève. Il est à remarquer que dans l'épreuve de Baccalauréat la calculatrice est acceptée mais, malgré cela, en ce qui concerne l'étude de la suite, aucune question n'est proposée de telle sorte à encourager un contrôle mathématique dans le travail de l'élève. Par ailleurs, le découpage de tâches ne favorise guère le contrôle mathématique ; au contraire, celui-ci pourrait provoquer une dépendance de l'élève face à l'aide dans l'organisation de l'étude d'une suite et des reconnaissances qui sont apportées. On peut ainsi se demander si l'élève comprend ce qu'il est en train d'étudier ? De surcroît, une dialectique entre les paradigmes de l'analyse qui pourrait aider à contrôler mathématiquement le travail, n'est pas du tout mise en avant.

Ainsi, que ce soit à la fin du lycée ou en début de l'université, la tâche proposée n'encourage pas les occasions de développer une sous-activité de contrôle mathématique. Au Baccalauréat, compte tenu de l'organisation des questions et les reconnaissances qui sont fournies, l'élève a moins besoin de contrôler son travail de façon autonome. En revanche, à l'université la tâche est beaucoup moins guidée et moins découpée ce qui provoque une nécessité dans le contrôle mathématique chez l'étudiant. Or, il ne semble pas avoir une préparation au contrôle mathématique nécessaire pour résoudre les tâches à l'université (notamment dans l'étude de suites récurrentes) et le contrôle possible que les étudiants pourraient effectuer avec leur calculatrice est interdit.

De même, le constat du manque de contrôle mathématique dans le travail produit par l'étudiant de l'université témoigne d'une nécessité dans l'explicitation des sous-activités de contrôle dans l'apprentissage des élèves. Comment donc rendre ce contrôle plus explicite ? Ce manque dans l'encouragement de contrôle mathématique dans les tâches et dans la production des élèves, provoque un véritable problème : d'une part, puisque le contrôle est essentiel dans l'activité mathématique, et d'autre part, parce que l'on veut que les élèves puissent apprendre à utiliser le contrôle mathématique afin de pouvoir s'en servir.

Dans la section suivante nous réaliserons une révision bibliographique de la notion de contrôle pour connaître les définitions utilisées dans la littérature. Cela nous permettra d'analyser dans quelle mesure ces définitions permettent une explicitation de contrôles mathématiques dans la conception de tâches et la façon de les encourager pour permettre aux élèves de les développer.

4.4.2 Littérature sur la notion de contrôle

Le contrôle est une partie importante de l'activité mathématique reconnue dans plusieurs recherches et dans différents domaines des mathématiques.

Pour Schoenfeld (1985), le contrôle est présent et nécessaire dans la structure de la résolution de problèmes. Ainsi, il définit le contrôle comme des *décisions globales concernant la sélection et la mise en œuvre des ressources et des stratégies* (Ibid., p. 15). Ce contrôle implique la planification, la surveillance et l'évaluation d'une certaine démarche, la prise de décision et des actes métacognitifs conscients. En utilisant cette définition Lithner (2000) peut identifier des contrôles utilisés à partir de l'application des méthodes mathématiques connus pour la résolution d'un problème. Il conclut que l'utilisation de ces contrôles sont mathématiquement faibles et sans planification de la part des élèves. L'auteur signale que pour conduire à un progrès dans les réponses des élèves, un renforcement dans le contrôle mathématique est nécessaire.

En didactique, nous identifions que le contrôle dans l'activité mathématique a été ciblé dès les travaux de Brousseau (1986) à travers les contrôles sémantiques et syntaxiques requis en mathématiques. Il signale que, pour éviter les erreurs, il est nécessaire d'avoir un contrôle sémantique c'est-à-dire qu'il « *ne suffit pas d'appliquer des axiomes, il faut savoir de quoi on parle et connaître les paradoxes attachés à certains usages pour les éviter* » (Ibid., p.43). Ainsi le contrôle sémantique est plus lié au sens tandis que le contrôle syntaxique se réfère plus aux techniques mathématiques et serait plus habituel en mathématiques.

Dans le cadre du modèle de connaissances Ck ϵ , N. Balacheff et C. Margolinas ont centré une partie de leurs études⁴⁵ à la notion de contrôle. Pour eux, le contrôle est lié à la compréhension du concept mathématique lui-même. C'est cette compréhension qui permettra de décider si une action est pertinente ou pas dans la résolution d'une tâche. Dans leur modèle, une conception est caractérisée par un quadruplet constitué d'un ensemble de problèmes (P), un ensemble d'opérateurs (R), un système de représentation (L), et une structure de contrôle (Σ) (Balacheff & Margolinas, 2005). Ici, la structure de contrôle « *assure la non contradiction de la conception et contient au moins sous la forme d'oracles les outils de décision sur la légitimité de l'emploi d'un opérateur ou sur l'état (résolu ou non) d'un problème* » (Ibid., p. 6). À l'époque les auteurs affirment que la notion de contrôle a retenu peu d'attention en didactique des mathématiques ce qui est peut-être dû à la volonté de garder une distance des travaux en résolution de problèmes (Schoenfeld, 1985). Des difficultés d'ordre théorique et méthodologique pour étudier le contrôle sont exposées : d'une part, les contrôles sont souvent implicites et, d'autre part, même si un opérateur peut devenir un contrôle, la distinction entre opérateurs et contrôles n'est pas toujours établie. Toutefois, pour les auteurs, les contrôles comportent « *Des jugements, des décisions et plus généralement les moyens du choix ; des méthodes, structures et organisations des opérateurs (les méta-connaissances, voir à ce sujet les travaux sur le « méta » de Robert et Robinet, 1996)* » (Balacheff & Margolinas, 2005, p. 10). Plus tard Balacheff (2017) utilise la notion de contrôle en soulignant la nécessité de lier le contrôle, la validation et la preuve. Il fait référence à la définition de contrôle proposée par Margolinas (1993) comme « *le processus d'anticipation de la validation* » (Margolinas, 1993, p. 213). Cette définition assure une cohérence au lien entre contrôle et validation. Dans cet article, Balacheff (2017) fait référence au travail de thèse de Gaudin (2005) qui travaille aussi avec le modèle de connaissances Ck ϵ . Ici elle identifie deux types de contrôles qui rendent compte d'une cohérence existante dans la résolution d'un problème. D'une part, elle définit les *Contrôles référents* comme ceux qui « *permettent de régler l'anticipation de l'action et l'adéquation du résultat obtenu au résultat attendu anticipent la validation* » (Gaudin, 2005, p. 153). Ces contrôles anticipent que dans le processus de résolution d'un problème on devra valider ce que l'on affirme. Cela engage une certaine légitimité à la résolution. D'autre part les *contrôles permettant l'instrumentation* sont ceux qui permettent « *l'adéquation entre les contrôles de référents et les opérateurs* » (Ibid.) exprimés par la structure si [condition] alors

⁴⁵ Ses travaux se situent dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et les champs conceptuels (Vergnaud, 1990).

[action]. Ces contrôles permettent de faire un bon choix d'outils pour une stratégie choisie. Enfin, il existe des contrôles locaux qui permettent la bonne mise en œuvre d'un opérateur ce qui engagera une certaine action. Dans le travail de Gaudin (2005), on voit que les systèmes de représentation sémiotique jouent aussi un rôle dans cette cohérence interne et permettent l'expression des contrôles et opérateurs (actions) (Ibid., p.321). Néanmoins, Gaudin ne qualifie pas les représentations sémiotiques ou les signes comme des activités de contrôle.

Par ailleurs Saboya (2006, 2010) fait une étude assez complète de la question du contrôle en abordant des points de vue épistémologique, psychologique, sociologique, didactique et l'éducation mathématique. Elle utilise la littérature étudiée dans ces différents domaines pour proposer une définition de contrôle. Elle signale que le contrôle est un processus qui se développe sur le long terme chez l'élève. Cependant, d'un point de vue local, le contrôle est présent tout au long de la réalisation de la tâche. Ainsi, Saboya Mandico (2010, p.116), identifie une temporalité dans l'activité de contrôle en indiquant que celui-ci peut se développer en amont, pendant et en aval de la résolution d'une tâche. En amont, il est capable d'anticiper des validations du résultat en mobilisant des connaissances à mettre en fonctionnement. Ici l'élève visualise le but de l'activité à atteindre lors de la résolution de la tâche. Pendant le processus de résolution de la tâche, le contrôle permet de choisir des stratégies efficaces et des évaluations périodiques. Finalement, en aval, le contrôle permet de vérifier le résultat obtenu ainsi que l'évaluation des actions entreprises et une perception d'erreurs.

De ce fait, l'auteure propose une définition générale en identifiant des composantes du concept de contrôle Saboya (2010, p. 406-408), composantes qui ont ensuite été reprises dans Saboya et al. (2015) : (a) Anticipation : Condition de validité du résultat avant de le connaître (Coppé, 1993). (b) Vérification : Elle peut soit être issue d'une anticipation du résultat, soit d'une vérification sans anticipation où l'on vérifie, à partir du résultat obtenu, ce qui permet de découvrir des éventuelles incohérences (Richard, 1990). (c) Perception des erreurs/sensibilité à la contradiction : Constatation d'un résultat qui ne correspond pas à celui qui est attendu (peut provenir d'une anticipation). Le retour vers les erreurs est fait à partir de la question du sens des résultats trouvés (Cipra, 1985). La contradiction s'exprime par un déséquilibre. Le dépassement de la contradiction peut se faire à travers un rétablissement de l'équilibre, ce qui demande un effort additionnel de la part de l'élève (Piaget, 1974) et un retour sur les concepts et leur signification. (d) Engagement réfléchi : S'exprime par un arrêt dans la résolution de la tâche (Kargiotakis, 1996), un retour aux fondements théoriques à travers un esprit critique et réflexif sur l'action. (e) Discernement/choix éclairé :

Capacité de choisir la stratégie ou l'écriture la plus efficace (en temps et appropriation) (Schoenfeld, 1985). (f) Validation : Fondements explicités qui impliquent un jugement du vrai ou du faux, ce qui permet une sensibilité à des possibles erreurs et difficultés. Elle peut aussi s'exprimer par des écritures équivalentes d'un concept. (g) Méta-connaissances : Fruit de réflexions sur les connaissances et la combinaison entre elles, sa pertinence, son efficacité et son écriture.

Dans Saboya et al. (2015) les auteurs analysent l'activité du contrôle dans le domaine de l'algèbre. En cohérence au travail mené par Saboya (2010), ils identifient une conceptualisation du contrôle à partir des deux dimensions. La première serait en lien avec les contrôles sémantiques et syntaxiques⁴⁶ qui sont jugés essentiels pour le domaine de l'algèbre mais qui restent très globaux ; la deuxième se référant aux composantes détaillées dans le paragraphe précédent qui avaient déjà été identifiées. Ici, les auteurs considèrent l'activité cognitive de contrôle comme progressive et dynamique, notamment due au caractère dynamique du réseau qui détermine les composantes. En effet, le contrôle se développerait pendant le processus de résolution d'un problème à travers une interrelation (des aller-retours) des composantes, ce qui promeut un enrichissement de chacune de ces dernières.

Par rapport au travail de Balachef et Gaudin, Saboya et al. (2015) signalent que leur structure de contrôle (moyens qui permettent de faire des choix, de prendre des décisions et d'exprimer un jugement) se rapproche de la leur. Ils ajoutent « *Notre idée du contrôle est toutefois plus générale que celle associée à une construction conceptuelle (à une conception liée à un ensemble de problèmes, d'opérateurs et de signifiants), elle cible le processus de résolution de l'élève dans différents types de tâches (et non les conceptions qui s'y construisent) et s'intéresse au contrôle exercé sur ce processus, contrôle pouvant amener éventuellement à la réussite de la tâche* » (Saboya et al., 2015, p.4).

En cohérence à ces derniers travaux, Saboya & Rhéaume (2015) analysent le contrôle qu'exercent les élèves dans une tâche relative à la notion de fraction. Elles qualifient ici le rôle de l'enseignant comme essentiel pour le développement du contrôle chez les élèves. Notamment, elles signalent que l'enseignant, à travers un bilan, peut promouvoir une réflexion sur les procédures possibles à mettre en place dans la résolution d'une tâche avec les élèves. Cela leur permet de décider la validité d'une certaine procédure et d'argumenter leurs choix. Ainsi « *la phase de bilan, rendant*

⁴⁶ Les contrôles sémantiques qui se réfèrent aux significations contextuelles des grandeurs en présence, des relations et des transformations, et les contrôles syntaxiques se réfèrent au travail sur les expressions algébriques qui ont des significations dans d'autres registres (Saboya et al., 2015).

publiques les diverses procédures devant la classe, est intéressante du point de vue du rôle de l'enseignant qui peut alors reformuler, renvoyer des questions au reste de la classe pour que les élèves statuent sur les avantages, les limites, l'efficacité des diverses procédures ressorties. (...) À notre avis, c'est quand l'élève est responsable de ses actions qu'une activité de contrôle risque de se développer » (Ibid., p.24).

Alcock & Simpson (2005) font référence à ce que veut dire un manque de contrôle sémiotique. Ils étudient le travail des étudiants d'un premier cours d'analyse réelle en première année de l'université. Ces étudiants sont décrits au départ comme non-visualisateurs car ils n'utilisent pas de représentations visuelles des notions travaillées et utilisent majoritairement des représentations algébriques. Ici les auteurs considèrent un manque de contrôle sémiotique comme *un manque de la capacité d'interpréter et de traiter correctement les expressions et énoncés symboliques impliqués dans une tâche mathématique en tant que textes à interpréter, et non en tant que supports de mots-clés ou d'indices de toute sorte* (Ferrari, 2002) (Alcock & Simpson, 2005, p. 79). Un exemple de manque de contrôle sémiotique se rapporte aux étudiants qui peuvent utiliser une notation mathématique mais qui ne s'emparent pas du lien avec des concepts mathématiques sous-jacents. Les auteurs soutiennent qu'un apprentissage des mathématiques avec un manque du contrôle sémiotique produit des connaissances mathématiques moins utiles dans des problèmes non-standard, des connaissances difficiles à mémoriser dans le temps et de difficiles accès à l'heure de choisir la bonne procédure dans une situation donnée. Cela peut conduire l'élève à produire des écritures absurdes. En revanche, un contrôle sémiotique va permettre de faire un lien entre les représentations algébriques du cours (les notations) aux concepts sous-jacents et à leurs noms. Ce contrôle sémiotique peut se manifester quand les élèves gardent trace des traitements par rapport à l'énoncé à prouver.

Par ailleurs, Arzarello & Sabena (2011) analysent l'activité d'argumentation et de la preuve dans le domaine de l'analyse au lycée lors de la résolution de problèmes graphiques. Pour ce faire, ils identifient trois types d'actions sémiotiques : (1) Interprétation de signes pertinents : la perception de signes joue un rôle important. Les connaissances du sujet et la dimension culturelle de la tâche ont une incidence ; (2) Identification et description des relations entre les signes interprétés : ces relations sont organisées en arguments cohérents (ces derniers peuvent être locaux avec la considération d'un sous-ensemble de signes) ; (3) Argumentation qui justifie les relations entre les signes en termes de théorie mathématique : les arguments ont des caractéristiques formelles et déductives. Dans ce type d'action, les relations théoriques et logiques et le requis dans la communication d'un texte pour que ce soit considéré comme une preuve mathématique, impliquent vraisemblablement une conscience chez

les élèves (ici les élèves parlent de théorèmes ou d'axiomes). Ces trois actions dans les processus d'argumentation et de preuve semblent être aussi guidées par deux types de contrôles qui sont entrelacés : les contrôles sémiotiques et les contrôles théoriques. Les contrôles sémiotiques *concernent les décisions relatives à la sélection et aux traitements des ressources sémiotiques*. Ici, en se basant sur la perspective de Pierce concernant le signe (des symboles, graphiques, dessins, gestes exprimés par les élèves), les décisions sont prises à partir des traitements de ces signes. Les contrôles théoriques *concernent la sélection et la mise en œuvre d'une théorie ou de parties de celle-ci, à travers un faisceau plus ou moins organisé de propriétés, d'algorithmes et de conceptions que les élèves activent pour élaborer un argument ou une preuve* (Ibid., p. 204). Les propriétés énoncées sont plus au moins organisées et sont utilisées pour donner un argument ou une preuve. Bien que les deux types de contrôle soient souvent entremêlés, il est possible de les distinguer. Par exemple, selon la tâche, le choix d'une représentation sémiotique est nécessaire pour sa résolution, ce qui implique un contrôle sémiotique. Aussi, si des théorèmes ou propriétés sont utilisés à l'heure de donner un argument, on parle de contrôle théorique. À partir de la classe observée dans l'étude, les auteurs signalent que les aspects théoriques (argumentation et preuve) ont été guidés par les interventions de l'enseignant et la conception didactique des activités menées. En effet, les élèves auraient besoin du soutien de l'enseignant pour atteindre les objectifs didactiques concernant les aspects théoriques (Ibid., p. 205).

Plus tard, Bikner-Ahsbabs et al. (2014) se concentrent dans une tâche combinant différents cadres conceptuels concernant les paraboles. Ils continuent le travail sur les contrôles sémiotiques et théoriques définis par Arzarello & Sabena (2011), et ils affirment que *l'on sait peu de choses sur la façon dont ils jouent ensemble et comment ils sont liés au domaine de contenu respectif* (Bikner-Ahsbabs et al., 2014, p. 153). Ils s'interrogent sur le rôle de ces contrôles dans une argumentation en tant que processus épistémique. À partir de leur étude de cas, ils concluent que les élèves arrivent en premier lieu à travailler dans le cadre arithmétique. Dans ce cadre les élèves rassemblent et connectent des signes. Après, ils travaillent dans le cadre algébrique afin de généraliser les structures arithmétiques pour, ensuite, travailler dans le cadre géométrique-analytique. Ici, malgré le fait que les élèves semblent avoir des contrôles (théoriques et sémiotiques à l'intérieur de chaque cadre - contrôle local), ils restent bloqués. C'est grâce à l'intervention d'un enseignant (rôle pris par l'interviewer qui n'était pas prévu dans la recherche) que les élèves réussissent à réaliser la tâche en exploitant le contrôle sémiotique et théorique. Cela à travers un lien entre les différents cadres (algébrique et géométrique), ce qui leur permet d'avoir un contrôle de manière globale. Les auteurs concluent que pour bien aboutir les processus d'argumentation ou

de résolution de problèmes, même si ceux-ci se font dans un certain cadre (contrôle local), cela nécessite un contrôle global qui permette de bien lier les différents cadres. Ils s'interrogent, finalement, quant aux interventions didactiques qui seraient nécessaires pour développer, à un niveau global, le contrôle sémiotique et théorique des élèves (Ibid., p. 160).

Dans le domaine de l'analyse à la transition L-U, comme nous l'avons évoqué dans le chapitre 2, Ghedamsi (2008) fait allusion aux contrôles formels et intuitifs lors du développement de tâches dans ce domaine. Sans donner une définition explicite, elle se réfère au contrôle comme des connaissances qui permettent de valider un résultat ou une conjecture. Ces connaissances peuvent permettre un contrôle formel ainsi qu'un contrôle intuitif. Elle signale qu'à la transition L-U « *l'intuition est souvent ponctuelle et isolée du contrôle formel. De ce fait, l'enseignement aboutit à une concentration et une fermeture sur la théorie et la succession de calcul* » (Ibid., p.189). Cependant, I. Ghedamsi signale que, dans les objets de l'analyse, l'intuition est délicate, prend du temps et que les étudiants ne seraient pas autorisés à faire des preuves pragmatiques à leur niveau. En effet, les étudiants disposent des instruments formels et ceux qui savent les utiliser peuvent produire des preuves formelles. Néanmoins, à partir de son travail, elle conclut qu'un contrôle mixte entre l'intuitif et le formel est possible à la transition L-U tout en introduisant un milieu (au sens de la TSD) adapté. Ce milieu adapté correspondrait à la mise en place d'un milieu instrumenté grâce aux calculatrices ou logiciels permettant un calcul formel. Or, ce milieu « *nécessite d'avoir les moyens de contrôler un autre type de connaissances : celui lié au fonctionnement de la calculatrice ou du logiciel utilisés, soient les processus d'instrumentalisation et d'instrumentation* » (Ibid., p. 298) ; raison pour laquelle il est aussi important de travailler dans un milieu papier/crayon.

Concernant ce milieu instrumenté, comme nous l'avons signalé dans le chapitre 2 (page 33), Trouche (1996) signale que les calculatrices permettent un contrôle des représentations graphiques qui devrait promouvoir des contrôles théoriques, un contrôle des nombres où on devrait réintroduire des éléments théoriques du calcul, un contrôle du langage sur les objets mathématiques et des schèmes d'utilisation de la calculatrice. Sur l'utilisation de la calculatrice (ou autres artefacts numériques), les auteurs travaillant sur ce thème sont d'accord sur le fait que le contrôle est au centre de l'activité mathématique instrumentée (voir par exemple Trouche (2000), Guin et al. (2005), Monaghan et al., (2016)). Bien que les travaux sur la calculatrice en tant qu'instrument parlent souvent de contrôle, sa définition n'est pas toujours explicitée et elle ne semble pas être utilisée dans le même sens pour les auteurs (parfois la

littérature fait référence à des contrôles autres que celui de l'activité mathématique⁴⁷ avec une caractéristique plus sociale). Trouche (2005, p. 203) définit le processus de contrôle comme *l'attitude consciente de considérer, avec une objectivité suffisante, toutes les informations immédiatement disponibles non seulement de la calculatrice, mais aussi d'autres sources, et de rechercher une cohérence mathématique entre elles* (Guin & Trouche, 1999)⁴⁸. Ce processus implique deux méta-connaissances requises par l'activité mathématique qui sont particulières à l'utilisation de calculatrices symboliques : (1) de références construites dans la pratique qui permettent une démarche investigatrice (méta-connaissances de premier niveau), (2) des traitements d'informations trouvées par une interprétation sémantique, des inférences, des comparaisons (méta-connaissances de second niveau).

4.4.3 Application à l'exemple de production d'étudiant

Dans cette section, nous étudierons l'exemple donné dans la section 4.3 de l'élève E28 à la lumière de la littérature examinée. Pour ce faire, nous identifierons trois domaines où le contrôle a été étudié : (1) la résolution de tâches en tant que problèmes, (2) la validation, l'argumentation et la preuve, et (3) l'activité de contrôle en tant qu'activité plus générale (un quatrième domaine lié au contrôle dans l'utilisation d'artefacts numériques a été identifié mais comme la tâche de départ ne considère pas ces artefacts, nous n'analyserons pas ces contrôles dans cette section).

Pour pouvoir revenir sur notre exemple, rappelons la tâche et la production de l'élève de 1^{ère} année de l'université (Figure 17 ci-dessous) :

Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in [0,1], f(x) = \frac{1}{2-x}$. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions : $u_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2-u_n}$.

(1) Montrer que, pour tout $x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$. Puis que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$.

⁴⁷ Certains travaux font référence au contrôle que l'enseignant peut exercer sur un groupe d'étudiants à l'heure d'organiser une séance. Cela fait référence à la gestion de la classe de la part de l'enseignant.

⁴⁸ Guin & Trouche (1999) ont traduit le terme contrôle par *process of command* dans leur article en anglais. Par ailleurs, dans le texte de Trouche & Drijvers (2014) nous pouvons trouver le terme *self-monitoring* dans le contexte de l'orchestration instrumentale interne vue comme un auto-contrôle des instruments individuels (Ibid., p. 6). Cette orchestration est la façon dont l'enseignant (ou l'élève) utilise les outils de son environnement à travers des configurations didactiques.

$x \in]0; 1[\quad f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \in]0; 1[$
 1 - Montrons que $\forall x \in [0; 1], f(x) \in [0; 1]$
 = $0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0; 1]$
 1^{er} cas $x = 0$
 $f(x) = \frac{1}{2}$ où $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1 \quad f(x) \in [0; 1]$
 2^{ème} cas $x = 1$
 $f(x) = \frac{1}{2-1} = 1$ d'où $0 \leq 1 \leq 1 \quad f(x) \in [0; 1]$
 Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et donc $u_n = f(u_{n-1}) = f(x) \in [0; 1]$
 alors $\forall x \in [0; 1], u_n \in [0; 1]$

Figure 17 : Production de l'étudiant E28 de première année de l'université.

(1) Résolution de tâches en tant que problèmes

Le résultat concernant le contrôle du travail de Lithner (2000) est cohérent à l'analyse du contrôle de l'étudiant E28 que nous avons fournie. En effet, comme dans les exemples de Lithner (2000), la mise en place du contrôle d'E28 répond plus à un effet de contrat ou à la familiarité avec la tâche (car le but de l'activité à développer dans la tâche est explicité), qu'à des contrôles sur des propriétés mathématiques (E28 ne remet pas en questions ces écritures erronées). Cela nous montre la pertinence dans la distinction entre contrôles mathématiques et non mathématiques. Cependant, bien que dans le travail de Lithner on mentionne la nécessité d'un contrôle mathématique (avec des calculs plus minutieux, des comparaisons du travail produit avec des figures ou encore la vérification de conclusions), rien n'est dit sur la façon dont ce contrôle peut être encouragé, que ce soit dans la conception de tâches ou dans l'explicitation pour les élèves.

(2) Validation, argumentation et preuve

En prenant en compte la définition de contrôle donné par Balacheff & Margolinas (2005) et Balacheff (2017), l'étudiant E28 ne semble pas réaliser une anticipation pour prévoir l'action qui lui permettra de valider le résultat trouvé. Bien qu'il arrive au résultat voulu, son problème se trouve sur le fait qu'il ne valide pas son résultat. Autrement-dit, en prenant en compte les contrôles permettant l'instrumentation mises en place par la structure [condition] alors [action] (Gaudin, 2005), l'étudiant semble avoir une difficulté dans l'analyse de conditions pour la mise en place des actions. De surcroît, les écritures produites par E28 dans l'avant dernière ligne (*sous-tâche b*)

rendent compte des confusions entre les conceptions que l'étudiant possède par rapport aux fonctions et aux suites.

En analysant l'activité d'argumentation et de preuve à la lumière des contrôles sémiotiques d'Arzarello & Sabena (2011), nous pouvons dire que le choix de représentation sémiotique est celui du registre algébrique où l'étudiant ne réalise pas les traitements nécessaires pour résoudre la tâche. Cela produit un manque dans le contrôle sémiotique et est à ajouter au fait que l'élève ne met pas en place les contrôles théoriques nécessaires. En effet, l'argumentation que E28 donne est très faible : notamment la réponse à la *sous-tâche a* n'utilise pas la croissance de la fonction et la réponse à la *sous-tâche b* ne constitue pas une preuve. Cela peut être mis en regard du résultat trouvé par Arzarello & Sabena (2011) et Bikner-Ahsbals et al. (2014), puisque ces deux derniers travaux concluent que ce sont les interventions de l'enseignant qui permettent de débloquer le travail des élèves avec l'aide de contrôles sémiotiques et théoriques de façon globale (à travers des liens entre différents cadres). On se demande, alors, comment aurait changé la production de cet élève si l'intervention de l'enseignant lui avait permis d'avoir des contrôles sémiotiques ou théoriques pour faire avancer son travail ? Et d'ailleurs, comment donner un cadre pour que les enseignants puissent expliciter et faire développer ces contrôles mathématiques chez les élèves ?

Par ailleurs, la production de E28 est cohérente avec ce que Alcock & Simpson (2005) décrivent comme un manque de contrôle sémiotique, notamment à travers la non clarté des concepts de la part de l'étudiant. Cela est manifesté avec la phrase « $u_{n+1} = f(u_n)$ et donc $u_n = f(n) = f(x)$ ». Néanmoins, compte tenu de l'énoncé de la tâche et de sa conception, comme elle ne fait pas référence à un autre registre que l'algébrique, nous pouvons faire l'hypothèse que l'institution (dans ce cas l'université) considère tous les élèves comme de non-visualisateurs. Comment alors permettre à ces élèves de contrôler leur travail mathématique ?

(3) Activité de contrôle en tant qu'activité mathématique plus générale

Concernant les contrôles sémantiques et syntaxiques nécessaires pour l'activité mathématique décrite par Brousseau (1986), l'élève E28 présente un manque de contrôle sémantique et syntaxique. Dans le cas du contrôle syntaxique, l'élève ne met pas en place les techniques mathématiques nécessaires (même s'il semble reconnaître la méthode à utiliser). Le manque de contrôle sémantique peut s'observer dans la réponse à la *sous-tâche b*, notamment car l'élève ne relie pas le sens et les différences entre la suite récurrente et la suite définie de manière explicite.

Quant à l'activité cognitive de contrôle travaillé par Saboya Mandico (2010) et Saboya et al. (2015), l'élève E28 semble avoir des difficultés dans toute la temporalité du contrôle : en amont, pendant et en aval de la résolution de sa tâche. En effet, comme nous l'avons dit, il ne semble pas anticiper une validation de sa réponse (malgré le fait de prendre en compte le but à atteindre) et il ne semble pas avoir des évaluations régulières qui lui permettent de relancer son travail à travers une perception de ses erreurs. Mais cela est influencé par le fait que la tâche n'encourage pas une perception d'erreurs, ni une vérification du résultat. Comment donc encourager ce type de contrôle tout au long de la résolution de la tâche ?

4.4.4 Conclusions de la révision bibliographique

Les études mentionnées montrent que le contrôle est nécessaire pour la bonne résolution d'une tâche mathématique. Les analyses concluent souvent à un manque de contrôle mathématique de la part des élèves (que ce soit dans une conception, une argumentation ou tout simplement la résolution d'une tâche mathématique en tant que problème), ce qui implique un besoin dans le renforcement de leur acquisition. Cependant, la littérature donne peu de suggestions sur la façon de travailler, d'encourager et d'explicitier les différents contrôles mathématiques avec les élèves. Alors que le contrôle mathématique est crucial, nous nous intéressons, d'une part, à savoir comment rendre ce contrôle plus explicite pour que les élèves puissent s'en emparer et, d'autre part, à répondre spécifiquement à la question sur le type de travail qui sert à promouvoir le contrôle mathématique.

Par ailleurs la révision de la littérature montre que, pour étudier l'activité de contrôle mathématique nous avons besoin des analyses de l'activité personnelle de l'élève mais aussi de son usage en classe. Les interventions de l'enseignant ont été identifiées à plusieurs reprises comme importantes et nécessaires pour développer l'activité de contrôle chez les élèves. En effet, même quand cela n'a pas été prévu, il a été nécessaire d'introduire une intervention pour faire avancer le travail des élèves qui restaient bloqués (Bikner-Ahsbahs et al., 2014). De même, quant au rôle de l'enseignant, il serait intéressant d'analyser la place du bilan dans l'enseignement au moment d'étudier l'activité de contrôle (Saboya & Rhéaume, 2015). Dans ce dernier point, il faudrait analyser ce qui peut rester à la charge de l'élève pour qu'il puisse effectivement développer une activité de contrôle. Nous relevons aussi que la question posée par Bikner-Ahsbahs et al. (2014) tend à s'interroger quant aux interventions didactiques de l'enseignant qui pourraient servir à développer un contrôle (global et local) chez les élèves. Cette question posée nous est aussi d'un grand intérêt.

Rapprochements des contrôles étudiés aux théories TADM et ETM

Des rapprochements entre les définitions données par la littérature de la notion de contrôle peuvent se faire avec les théories TADM et ETM que nous utilisons.

En prenant comme exemple la définition de contrôle dans la résolution de problèmes de Schoenfeld (1985) (définition qui est d'ailleurs aussi utilisée dans les travaux de Saboya (2010) et de Saboya et al. (2015)), nous pouvons rapprocher ce contrôle de différentes sous-activités mathématiques définies au sein de la TADM. Rappelons que ce contrôle fait référence au choix de stratégie et de ressources, à leur mise en œuvre, à la planification, la surveillance et l'évaluation d'une certaine démarche, ainsi qu'à la prise de décision et des actes métacognitifs conscients. Les choix des stratégies de ressources, la prise de décisions et les actes métacognitifs peuvent répondre à des sous-activités de reconnaissance. La planification et la mise en œuvre peuvent répondre à des sous-activités d'organisation et de traitement tandis que la surveillance et l'évaluation d'une démarche peuvent répondre plus à ce que nous considérons comme des sous-activités de contrôle.

Par ailleurs, dans le cas de l'activité mathématique instrumentée le processus de contrôle de Guin & Trouche (1999) se réfère aux connaissances instrumentales et instrumentales mathématiques décrites dans la TADM, connaissances qui doivent permettre des sous-activités de reconnaissance et de traitement selon la tâche.

Dans le cas de la théorie des ETM, nous pouvons voir que les différentes dimensions peuvent se rapprocher de contrôles déjà travaillés : la dimension sémiotique avec les contrôles sémiotiques d'Arzarello & Sabena (2011) et d'Alcock & Simpson (2005) ; la dimension discursive avec contrôles théoriques d'Arzarello & Sabena (2011) avec les propriétés mathématiques de Lithner (2000) ou encore à l'anticipation de la validation de Margolinas (1993) utilisée aussi dans Balachef (2017) ainsi que la dimension instrumentale avec le processus de contrôle de l'activité mathématique instrumentée (Guin & Trouche, 1999).

Cependant, les contrôles mathématiques possibles à travers des changements de paradigmes (voir section 4.3.3) ne semblent pas être évoqués par les considérations de contrôle que la littérature a abordées. En effet, le travail mathématique permettant une articulation des paradigmes facilite la mise en place de conjectures et la perception d'erreurs. Par le biais de cette articulation, il pourrait y avoir un encouragement de différents types de contrôles mathématiques qui pourrait aussi aider à les rendre plus explicites dans la conception de tâches et dans l'apprentissage des élèves. Nous reviendrons sur ce thème dans la section suivante.

4.5 Le contrôle comme une intégration locale symétrique de ce Networking

Dans les stratégies de Networking *on parle d'intégration locale symétrique si un concept à la frontière de deux théories est élaboré et intégré dans les deux approches théoriques* [notre traduction] (Prediger & Bikner-Ahsbahr, 2014, p. 120). La cohérence établie et la symétrie⁴⁹ entre la TADM et les ETM, nous permettent de proposer une intégration locale dans ce travail par le biais de la notion de contrôle. Cela permet un enrichissement théorique sans altérer les principes de chacune des théories et nous pensons qu'une telle étude peut être bénéfique pour les deux : pour la TADM, cela peut aider à mieux expliciter et structurer les sous-activités de contrôle ; pour la théorie des ETM, le contrôle du travail mathématique pourrait apporter un enrichissement dans la compréhension du travail mathématique.

Nous allons, maintenant, nous intéresser particulièrement aux contrôles mathématiques qui, comme signalé par Balacheff & Margolinas (2005), sont complexes à étudier car ils sont souvent implicites. Nous faisons l'hypothèse qu'une intégration locale du Networking entre la TADM et la théorie des ETM sur la sous-activité de contrôle pourrait constituer un cadre pour expliciter ce contrôle et l'étudier sans se limiter à un type de tâche (argumentative, de preuve, ou graphique). Nous chercherons ainsi à étudier comment exercer un contrôle mathématique à la transition L-U (où le contrôle est essentiel) dans l'étude de suites récurrentes, objet mathématique à la transition L-U.

Pour se faire, nous distinguons deux caractéristiques de sous-activités de contrôle apportées par les ETM ; tout d'abord, l'une liée aux trois dimensions du travail mathématique et l'autre liée aux paradigmes de l'analyse. Ces deux caractéristiques permettent d'enrichir la description des sous-activités de contrôle.

Sous-activités de contrôle en lien avec les dimensions de l'ETM

Sous-activités de contrôle sémiotique : Elles peuvent être établies lorsque les élèves font des liens entre différentes représentations sémiotiques de l'objet. Selon la théorie de Duval (1995), nous considérons qu'il existe un contrôle

⁴⁹ Concerne le développement de la théorie et sa maturité.

sémiotique quand les activités de conversion et de traitement⁵⁰ entre représentations sémiotiques sont mises en place. Dans le cas des suites, par exemple, un graphique croissant doit être cohérent avec un tableau de valeurs numériques. Ici, un traitement dans le registre algébrique pour calculer $f(0)$ et $f(1)$ peut être entrepris pour contrôler la croissance de la fonction visualisée à partir de son graphique. Un manque de contrôle sémiotique peut être observé lors de la non connexion entre registres sémiotiques au moment d'utiliser différentes représentations de l'objet pour résoudre une tâche. Ce type de contrôle serait en accord avec le travail d'Alcock & Simpson (2005) et d'Arzarello & Sabena (2011).

Sous-activités de contrôle discursif : Elles sont mises en place quand l'élève utilise diverses définitions mathématiques, méthodes de preuve ou théorèmes dans son travail c'est-à-dire le référentiel théorique (ce contrôle est cohérent au contrôle théorique d'Arzarello & Sabena (2011)). Cela peut être mis en place pendant le développement de la tâche (pour justifier une certaine démarche ou étape) ou lorsque le travail est fini pour le vérifier. Nous parlons d'un manque de contrôle lorsque l'élève montre des incohérences théoriques dans le discours mathématique de sa réponse. Dans les cas de suites par exemple, le fait qu'une suite croissante et positive ne peut pas avoir 0 comme limite (sauf la suite constante nulle) peut être prouvé par une argumentation discursive.

Sous-activités de contrôle instrumental : Elles sont établies lorsque les élèves utilisent des outils ou des logiciels pour vérifier leur travail. Dans le cas de suites par exemple, l'élève peut étudier la suite à l'aide d'un algorithme ; il peut également comparer ses calculs manuels avec ceux produits par sa calculatrice. Le développement de ce contrôle peut impliquer des contrôles sémiotiques et discursifs (qui sont ici souvent implicites) car, comme le signale Trouche (1996), l'intégration de la calculatrice doit permettre un contrôle des représentations en mettant en avant des contrôles théoriques (sur les nombres, sur le langage des objets mathématiques) et les schèmes d'utilisation des calculatrices.

⁵⁰ Duval (1995) distingue trois activités cognitives fondamentales liées aux représentations sémiotiques : la formation de représentations, leur traitement et leur conversion. La conversion est la moins immédiate. En effet, pour Duval (2010) ce type de transformation est considéré comme « *le paradoxe cognitif des mathématiques* » (Ibid., p. 135).

La Figure 18 illustre les trois sous-activités de contrôle décrites en lien avec les dimensions sémiotique, instrumentale et discursive.

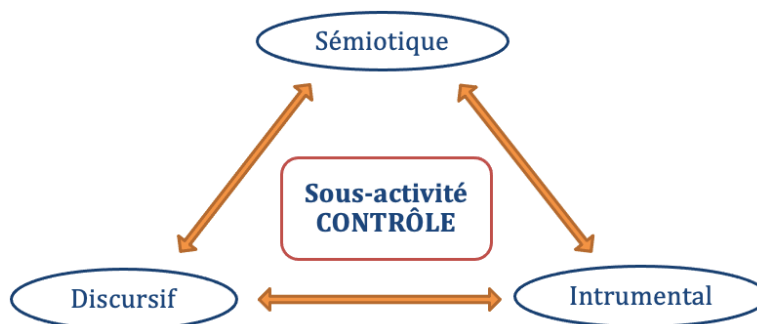


Figure 18 : Schéma de trois sous-activités de contrôle en lien avec les dimensions de l'ETM

Comme nous l'avons déjà dit, le fait de considérer le contrôle comme une sous-activité mathématique plus transversale peut solliciter la mise en fonctionnement de différents types de connaissances et, par-là, considérer des imbrications entre les autres sous-activités (de reconnaissance, d'organisation et de traitement) dans chacun des contrôles mathématiques décrits selon la tâche à résoudre.

Comme nous cherchons à analyser le contrôle mathématique en tant qu'activité cognitive, dans certains cas le sujet peut avoir effectué un contrôle discursif ou sémiotique sans que cela soit explicité dans la résolution de la tâche⁵¹. Pour cette raison, nous resterons prudents à affirmer ou réfuter la mise en place de telles activités.

Par ailleurs, comme dans l'étude du travail mathématique avec la théorie des ETM, lorsque le sujet utilise deux types de contrôles imbriqués, il est intéressant d'analyser ce qui se passe avec les contrôles dans un plan vertical de l'ETM. Par exemple, si l'on trace une fonction f sur la calculatrice symbolique pour visualiser son comportement, nous parlons d'un contrôle mathématique dans le plan [Sem-Ins] ou dans le plan [Ins-Dis] selon le cas. En effet, l'élève utilise des reconnaissances instrumentales et instrumentales mathématiques pour visualiser le comportement de la fonction et réciproquement ; l'élève doit être capable d'établir des cohérences entre les différentes représentations sémiotiques affichées sur la calculatrice (notamment algébrique et graphique), ce qui implique la mise en fonctionnement de sous-activités de contrôle mathématique dans le plan [Sem-Ins]. D'autre part, le fait de reconnaître le comportement d'une fonction, entraîne aussi des sous-activités mathématiques de

⁵¹ Voir par exemple Hoppenot & Vivier (2020) où un contrôle peut s'affirmer seulement lors d'un entretien avec l'étudiant.

reconnaissance à travers l'utilisation du référentiel théorique de l'élève, ce qui suppose des sous-activités de contrôle dans le plan [Ins-Dis].

Il est possible de développer des sous-activités de contrôle au sein de paradigmes de l'analyse. En effet, à l'intérieur du paradigme [A1] (analyse arithmético-géométrique) nous pouvons développer un contrôle sémiotique en visualisant la variation d'une suite à partir de sa représentation graphique et en vérifiant si cela est cohérent avec la représentation numérique de leurs termes. Dans ce même paradigme, nous pouvons développer un contrôle instrumental en utilisant un logiciel ou la calculatrice pour avoir un certain résultat (contrôle qui sera sans doute aussi sémiotique) ; il est encore possible de mettre en fonctionnement un contrôle discursif si l'on fait appel au théorème de suite monotone au moment d'observer si la suite est croissance et majorée par exemple. Par ailleurs, dans le cas du paradigme [A2] (analyse calculatoire), nous pouvons aussi développer un contrôle discursif en montrant la variation d'une suite à travers des méthodes différentes connues (différence ou quotient par exemple) ou un contrôle instrumental qui permette de vérifier des résultats du calcul algébriques de la dérivée avec la calculatrice (par exemple, calculer à la main la dérivée de la fonction qui définit la suite pour montrer sa croissance et ensuite calculer la dérivée dans la calculatrice). Cependant, les sous-activités de contrôle que nous avons décrites peuvent s'appuyer ou être déclenchées grâce à des changements de paradigmes. Comme nous l'avons dit, notre travail se situe dans le domaine de l'analyse à la transition lycée-université. À partir de nos premières analyses, nous pouvons noter que le paradigme privilégié dans les tâches est le paradigme [A2]. L'étudiant E28 dont nous avons analysé le travail, montre un manque de contrôle mathématique qui arrive jusqu'à la non perception d'erreurs. Comme signalé, cela peut être dû au fait d'avoir travaillé dans un seul paradigme. En revanche, comme le signalent Montoya-Delgadillo et Vivier (2016, p.743), travailler dans plus d'un seul paradigme permet d'éviter des erreurs et de contrôler son travail. D'ailleurs, le paradigme [A1] permet d'établir des conjectures et de se poser des questions d'ordre mathématique qu'il est possible de justifier dans le paradigme [A2] ou [A3]. Mais cela nécessite d'une dialectique entre paradigmes, ce que les tâches de la fin de lycée et du début de l'université ne favorisent pas puisqu'elles se limitent à un travail dans le paradigme [A2].

Afin de privilégier un changement de paradigmes à la transition L-U, nous nous intéressons davantage à la dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] : d'une part, travailler dans le paradigme [A1] de manière efficace peut impliquer l'utilisation d'instruments numériques pour aider la visualisation et la conjecture. Comme nous l'avons dit, cette utilisation entraîne des contrôles sémiotiques et instrumentaux [Sem-Ins], mais aussi instrumentaux et discursifs [Ins-Dis]. D'autre part, travailler dans le

paradigme [A2] peut permettre un travail dans la dimension [Sem-Dis], ce qui implique des reconnaissances de théorèmes, de méthodes (l'activation du référentiel théorique), mais aussi de traitements dans un certain registre (souvent algébriques). Nous représentons la dialectique entre ces deux paradigmes dans la Figure 19 ci-dessous :



Figure 19 : Illustration de la dialectique de changement entre paradigmes [A1] et [A2].

Par la mise en place de ces sous-activités de contrôle, que ce soit en lien avec la dimension de l'ETM ou les paradigmes de l'analyse, nous sommes dans deux cas de figure : soit c'est le sujet qui, par sa propre initiative, met en place des sous-activités de contrôle pour assurer une cohérence dans la production mathématique. Soit le contrôle est apporté par le contexte. Dans ce dernier cas, le contrôle peut être encouragé dans l'énoncé de la tâche ou être apporté par une médiation de l'enseignant. À la différence des sous-activités de reconnaissance, le fait que les occasions de développer des sous-activités de contrôle sémiotique et instrumentale soient favorisées dans l'énoncé de la tâche, peut enrichir cognitivement le développement de cette tâche car cela permet une mise en fonctionnement de la sous-activité de contrôle et n'entraîne pas une diminution dans son exigence cognitive. Au contraire, le fait que ces contrôles soient plus explicites permet que l'élève soit conscient du fait qu'un contrôle mathématique est possible ou attendu.

Ainsi, lorsqu'il est question d'analyser la sous-activité de contrôle mathématique (sémiotique, instrumental et discursif) dans une tâche, nous distinguerons deux considérations⁵² du contrôle mathématique selon les indications des énoncés :

- Au moment où le contrôle n'est pas explicité dans l'énoncé mais que l'énoncé de la tâche favorise un contrôle sémiotique, instrumental ou discursif, nous parlons d'une *occasion de développer une sous-activité de contrôle* mathématique. Par exemple, dans le cas du contrôle sémiotique, une occasion de contrôler se présente si l'énoncé montre différents registres de représentations de la suite concernée mais un travail explicite quant à la cohérence entre chacun d'entre eux, n'est pas demandé ; dans le cas du contrôle instrumental,

⁵² Selon les connaissances à mobiliser, ces considérations pourraient amener à établir des niveaux de sous-activités de contrôle.

l'utilisation d'un logiciel ou de la calculatrice pour étudier la suite est explicitée, mais rien n'est dit sur la façon de l'utiliser.

- Lorsque l'énoncé stimule l'établissement de cohérences dans l'étude de la suite, nous parlons d'un *contrôle explicite*. Ici, l'énoncé peut demander de façon explicite l'établissement des conjectures, l'utilisation de la calculatrice, ou encore, que certains théorèmes ou propriétés soient utilisés pour la résolution de la tâche par exemple.

4.6 Conclusion du chapitre 4

Nous avons montré, dans ce chapitre, comment les deux pratiques du Networking ont été utilisées. D'une part, la pratique ascendante a été mise en place à travers les analyses de tâches de suites récurrentes, ancrées dans la problématique de la transition L-U, ce qui a permis une meilleure compréhension, comparaison et contraste des données et de ce phénomène empirique. D'autre part, la pratique descendante (attention théorique) a été davantage mise en avant lorsque nous avons cherché à préciser le concept défini à la frontière des deux théories à partir de l'étude de la notion de contrôle.

Nous avons établi une coordination entre la TADM et la théorie des ETM grâce à la compatibilité dans les analyses théoriques ; analyses qui montrent aussi une complémentarité réciproque. Les traces tangibles laissées dans la résolution de la tâche permettent de construire (dans l'analyse *a priori*) et de reconstruire (dans l'analyse *a posteriori*) la succession du travail mathématique et des éléments de l'activité mathématique d'un sujet (à développer ou qui ont été développés). Or, la TADM permet de bien identifier les différences d'exigence cognitive de la tâche entre la fin du lycée et le début de l'université (aspect qu'il est plus difficile d'analyser avec les ETM lorsque l'on travaille seulement dans le paradigme [A2] et que l'on privilégie le registre algébrique). De la même façon, la théorie des ETM permet de détailler le type de travail demandé (ou mis en place) et du développement de sous-activités comme nous l'avons notamment vu avec la sous-activité de traitement.

Concernant la sous-activité de contrôle et le contrôle en général, nous avons vu qu'elle nécessite un regard particulier parce qu'ayant une caractéristique plus transversale, elle n'est pas du même ordre que les autres sous-activités. Le contrôle peut être explicite mais il peut aussi rester très implicite, ce qui peut rendre plus difficile son étude (Balacheff & Margolinas, 2005).

Bien que le contrôle non mathématique (celui qui est lié au but) soit présent dans les énoncés de tâches sur l'étude de suites récurrentes analysées au début de l'université et à la fin de lycée, nous avons observé que ces tâches n'encouragent pas le contrôle mathématique. Or, à l'université, les étudiants ont besoin d'utiliser les contrôles mathématiques pour lesquels ils n'auraient pas la préparation nécessaire à leur exploitation. De plus, une source importante de contrôle mathématique telle que la calculatrice est interdite. Le manque de contrôle mathématique en Analyse des étudiants de première année de l'université est une évidence ; il nous faut donc étudier

la façon de le rendre plus explicite afin que les étudiants puissent s'en servir et l'inclure dans leur propre pratique mathématique.

Pour étudier l'activité de contrôle, il est important d'analyser le travail et l'activité individuelle de l'étudiant (ou de l'élève). Cependant, comme les intervention de l'enseignant ont été signalées comme nécessaires pour activer un contrôle mathématique chez les élèves (Bikner-Ahsbahs et al., 2014), il est intéressant de connaître le rôle que joue l'enseignant ainsi que son bilan dans le développement des sous-activités de contrôle (sémiotique, instrumental et discursif) dans une situation de classe. Ainsi, notre objectif est d'étudier comment encourager le contrôle dans l'étude des suites récurrentes, objet caractéristique de la transition L-U en France. Quels sont les moyens dont les élèves disposent pour travailler les sous-activités de contrôle que nous avons décrites ? Plus précisément, comment les institutions lycée et université travaillent-elles une dialectique entre paradigmes qui puisse permettre des contrôles sémiotiques, instrumentaux et discursifs ? Et quels types de contrôles promouvoir pour aider les élèves à surmonter les difficultés qu'ils rencontrent dans l'étude de suites récurrentes ? Ce sont des questions que nous établirons plus formellement dans le chapitre suivant.

5 Questions et méthodologie de recherche

À partir de l'étude de la littérature à la transition Lycée-Université dans le Chapitre 2, nous avons identifié des problématiques dans le domaine de l'Analyse et quelques difficultés que peuvent rencontrer les élèves lors de l'étude de suites récurrentes. Ici, la difficulté de ne pas amalgamer le type de travail engagé dans l'étude de suites avec celui des fonctions, constitue une difficulté nouvelle (Praslon, 2000), située justement à la transition L-U. Cela est à additionner à un manque de contrôle de la part des élèves lors de la résolution de tâches mathématiques dans ce domaine de l'Analyse (Bloch, 2000 ; Praslon, 2000 ; Ghedamsi, 2008).

Dans le Chapitre 3 nous avons présenté deux théories qui permettent d'étudier d'une part l'activité mathématique (TADM) et d'autre part, le travail mathématique (ETM). Dans le Chapitre 4 nous avons montré que ces théories se complètent de façon réciproque. De plus, le Networking de théories TADM-ETM permet une sensibilité aux analyses complexes à réaliser pour étudier le phénomène de la transition L-U, mais il permet aussi de définir et d'étudier la notion de contrôle mathématique essentiel dans cette transition.

Dans ce chapitre nous formulerons théoriquement les questions de recherche que nous nous posons. Celles-ci guideront ce travail de thèse en termes théoriques et nous permettront de définir les objectifs qui en découlent. Nous présenterons successivement la méthodologie générale de ce travail et les périodes de la recherche qu'elle implique.

5.1 Questions et objectifs de recherche

La recherche montre que la charge la plus importante des enjeux de la transition L-U repose sur les élèves (Corriveau & Bednarz, 2016). En effet, ce sont les élèves qui vivent le passage d'une institution à l'autre et ils seraient les plus affectés par les ruptures que l'on peut y trouver. Ici, les spécificités du domaine de l'Analyse se rapportent au problème de confronter les élèves : aux idées intuitives avec les définitions plus formelles (qui créent des difficultés cognitives) ; et au réseau de difficultés qu'ont les élèves entre les notions de suite, de fonction, de nombres réels et de limite, qu'il est difficile de démêler (Artigue, 2003). Par ailleurs, un autre des enjeux à la transition L-U est l'apprentissage de la preuve. On trouve qu'à l'université la manière de construire et de contrôler la validité de ces preuves n'est pas explicitée (Dreyfus, 1999). De plus, la conjecture joue une place importante dans l'apprentissage de la preuve qui est vraisemblablement prise en compte au niveau du lycée, mais que se passe-t-il au niveau de l'université ?

Pour étudier le domaine de l'analyse à la transition L-U nous avons choisi les suites définies par récurrence en tant qu'objet d'étude. En effet, les suites sont un objet riche pour l'apprentissage de l'analyse (Weigand, 2014, 2015) qui comporte un domaine d'intérêt mathématique (voir chapitre 1) ; et elles sont présentes dans le contexte français à la transition L-U (Bloch et al., 2017). Néanmoins, des difficultés dans leur apprentissage ont été constatées (Weigand 1991, Rouse, 2018), et le manque de contrôle mathématique des élèves dans la résolution de tâches du domaine de l'Analyse (Bloch, 2000 ; Praslon, 2000 ; Ghedamsi, 2008) n'aiderait pas. De plus, le problème du contrôle mathématique ne semble pas pris en charge par l'enseignement actuel alors que le contrôle mathématique est essentiel à l'entrée de l'université (voir chapitre 2 et 4). Ainsi, l'étude bibliographique nous a conduit à la question suivante :

Comment promouvoir le contrôle dans le travail mathématique des élèves, d'une part pour qu'il soit pertinent aux problématiques de la transition L-U en France et, d'autre part, pour qu'il prenne en compte les spécificités des suites définies par récurrence ainsi que les difficultés rencontrées par les élèves dans leur étude ?

Cette question vise d'une part à étudier les spécificités dans l'apprentissage et l'enseignement des suites définies par récurrence à la transition L-U en France. Elle motive également l'étude plus approfondie du contrôle mathématique dans le travail et l'activité des élèves, essentiel à la transition L-U. En effet, l'hypothèse principale de notre travail est que le contrôle représente un des enjeux clé de la transition L-U car il est essentiel pour l'activité mathématique. Cependant les institutions concernées mettraient peu en avant l'enseignement de ce contrôle, le rendant souvent implicite, les élèves ayant alors plus de difficultés pour s'en emparer. Cette transition est avant tout un phénomène institutionnel (Artigue, 2008), il est donc naturel d'aller regarder ce qui se passe pour les contrôles mathématiques à chaque niveau d'enseignement.

Compte tenu des théories choisies et du Networking exposé, nous avons observé que la coordination théorique TADM-ETM rend compte d'une compatibilité dans les analyses de tâches et des productions écrites des élèves. Ces analyses sont complémentaires et permettent une lisibilité progressive du travail et de l'activité mathématique de façon conjointe et dynamique. De cette façon, avec la TADM nous pouvons identifier quels types de sous-activités (et adaptations de connaissances) sont nécessaires à mettre en fonctionnement pour résoudre une certaine tâche. Ici la théorie des ETM peut permettre de détailler quel type de travail mathématique (dans un ou plusieurs paradigmes, dans une ou plusieurs dimensions) est nécessaire pour le développement d'une sous-activité précise. En analysant les données avec la théorie des ETM, nous pouvons aussi identifier et caractériser le travail mathématique à développer (ou développé), là où la TADM permet d'identifier les sous-activités mathématiques qu'il est nécessaire de mettre en fonctionnement pour développer un certain travail.

Nous nous intéressons plus particulièrement à la sous-activité de contrôle sous l'angle des trois dimensions du travail mathématique (sémiotique, discursive et instrumentale) dans l'étude de suites définies par récurrence. De même, nous nous intéressons au rôle que joue les paradigmes pour opérationnaliser (ou encourager) ces contrôles. Nous cherchons donc à savoir quelles sous-activités de contrôle sont privilégiées à la transition L-U et lesquelles ne le sont pas ; savoir comment les élèves les mettent (ou pas) en fonctionnement ; savoir quel rôle joue l'enseignant dans le développement de ces sous-activités ; et finalement, quels types de contrôle restent à promouvoir pour améliorer l'étude de suites récurrentes à la transition L-U.

Dans les sections qui suivent, nous présentons la reformulation théorique de notre questionnement initial en trois questions de recherche. Chaque question implique des objectifs sous-jacents que nous présentons à la fin de chaque partie.

5.1.1 Première question de recherche

Avant d'identifier quel type de contrôle promouvoir chez les élèves dans l'étude des suites récurrentes, il faut tout d'abord s'interroger sur la place du contrôle dans les programmes d'étude et les documents utilisés dans les deux institutions. Ensuite, pour étudier la transition il ne suffit pas d'étudier chaque institution de façon isolée mais il importe aussi de connaître quelles sont ses ruptures et quelles sont ses continuités (Gueudet, 2008). En conséquence, notre première question de recherche est :

QR 1

Quelles sont les continuités et les ruptures de la transition L-U en France quant aux suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$? Plus particulièrement, que peut-on dire des trois sous-activités mathématiques de contrôle (sémiotique, instrumental, discursif) et des paradigmes de l'Analyse [A1] et [A2] dans les ETM de référence ; et quelles sont les caractéristiques pour les successions de l'activité et du travail mathématique dans les ETM attendus de chaque institution ?

Puisque cette question cherche à caractériser les institutions lycée et université, il importe d'étudier le contexte dans lequel les tâches concernant les suites récurrentes sont proposées et donc, à identifier les connaissances et les adaptations nécessaires pour étudier ces suites, et les sous-activités mathématiques à développer qui caractérisent les tâches proposées. Nous cherchons aussi à identifier l'ETM de référence (les dimensions et/ou plans verticaux qui prédominent) et les paradigmes d'analyse utilisés. D'autre part, cette question touche la première partie de notre interrogation initiale en ce qui concerne la promotion d'un contrôle pertinent par rapport aux problématiques de la transition L-U. Ici, nous cherchons à identifier la présence et absence des sous-activités de contrôle sémiotiques, discursives et instrumentales. Lorsque celles-ci sont présentes, nous analysons le rôle que jouent les paradigmes de l'Analyse pour les encourager à chaque niveau d'enseignement. Nous nous demandons ainsi : que peut-on dire de la dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] ? Est-ce qu'il y a un contrôle encouragé au moment d'utiliser différents types de représentations sémiotiques dans l'étude des suites récurrentes ? Quels types d'outils technologiques sont utilisés ? Quelle est la place de la preuve dans le contrôle mathématique discursif à ces niveaux ?

Par ailleurs, les recherches à la transition L-U montrent que la conjecture joue un rôle important dans l'apprentissage de la preuve, et que la calculatrice aiderait à les élaborer. Nous nous demandons ainsi si les compétences en outils numériques et le travail sur les conjectures fait au lycée sont exploités à l'université.

De cette façon la QR1 répond à l'objectif d'une caractérisation du terrain à étudier en termes théoriques : l'identification de l'ETM de référence concernant les paradigmes de l'Analyse travaillés, le travail mathématique attendu par chacune des institutions à travers l'analyse de tâches. Cela va nous permettre de savoir quels éléments épistémologiques et cognitifs sont ou non considérés dans les deux institutions, pour en déduire ensuite les ruptures et les continuités.

Pour répondre à la question QR1, il est nécessaire d'analyser théoriquement les tâches en contexte, ce qui implique la prise en compte de l'environnement (papier-crayon ou technologique), l'analyse de programmes d'étude en vigueur, l'analyse des manuels de lycée et les feuilles de TD de l'université. Il importe aussi d'analyser les tâches d'évaluation que l'on peut y trouver, ce qui permettra de caractériser l'ETM de référence attendu à la fin du lycée et au début de l'université.

Objectif de la QR 1 : caractériser les ETM de référence et l'ETM attendu à la transition L-U concernant les suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, en identifiant des ruptures et des continuités en termes de sous-activités de contrôle sémiotique, discursive et instrumentale, et leur éventuel encouragement avec une dialectique entre les paradigmes de l'analyse [A1] et [A2].

5.1.2 Deuxième question de recherche

Pour pouvoir savoir quel type de contrôle il faut promouvoir à la transition L-U, comme conséquence de la QR1, il est nécessaire d'identifier comment les élèves s'emparent des différents contrôles et des paradigmes de l'Analyse que chacune des institutions cherche à développer. Cela implique aussi l'identification des difficultés que rencontrent les élèves en termes de sous-activités mathématiques et de travail mathématique. Ces dernières sont spécifiques à l'étude des suites définies par récurrence. C'est ainsi que l'on formule notre deuxième question de recherche comme suit :

QR 2

Quelles difficultés existent dans l'ETM personnel des étudiants et des élèves dans le développement de sous-activités mathématiques et du travail mathématique dans l'étude de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ à la transition L-U ? Quel lien ont ces difficultés avec les sous-activités de contrôle et les paradigmes de l'Analyse [A1] et [A2] ?

Cette deuxième question a pour but de caractériser les difficultés spécifiques en termes d'activité et travail mathématique que les élèves rencontrent. Pour cela il est pertinent de caractériser les ETM personnels des élèves, ainsi que les sous-activités mathématiques (de reconnaissance, d'organisation et/ou de traitement) qu'ils développent dans chacune des institutions. À nouveau, nous cherchons plus particulièrement à savoir s'il existe une mise en place de sous-activités de contrôle (sémiotique, discursive et/ou instrumentale) dans le travail développé par les élèves, et si oui, de quelle façon. De plus, nous nous demandons comment les paradigmes [A1] et [A2] sont utilisées par les élèves pour l'étude de ces suites, et quels types de sous-activités de contrôle ils mettent en fonctionnement (ou non) dans le paradigme du travail développé.

Le théorème de la limite monotone a été identifié comme une continuité de la transition L-U dans l'étude de suites récurrentes (voir Chapitre 2), mais, constitue-t-il une vraie continuité de la transition L-U pour les élèves ? Autrement dit, les étudiants utilisent-ils ce théorème pour développer une sous-activité de contrôle discursif ?

Pour traiter cette QR2 et caractériser les ETM personnels des élèves, il est nécessaire de décrire théoriquement ce qui se passe avec les élèves quand ils résolvent individuellement des tâches mettant en jeu les suites récurrentes. Ici, il importe de savoir quelles sont les connaissances et adaptations que les élèves mobilisent, les sous-activités mathématiques de contrôle développées (ainsi que d'autres sous-activités présentes), et le (ou les) paradigme(s) de travail effectivement développé(s) par les élèves.

Objectif de la QR 2 : identifier les difficultés des élèves dans l'étude de suites $u_{n+1} = f(u_n)$ en caractérisant l'ETM personnel des élèves à travers les sous-activités de contrôle sémiotique, discursive et instrumentale, et le(s) paradigme(s) de l'analyse que les élèves développent.

5.1.3 Troisième question de recherche

À la lumière des réponses trouvées grâce aux QR1 et QR2, nous nous demandons quel est le travail spécifique à promouvoir à la transition L-U. Autrement dit, une fois connus l'ETM de référence (du lycée et de l'université) et les difficultés dans le développement de sous-activités mathématique d'élèves et leur ETM personnel, nous cherchons à savoir dans quelle mesure une dialectique entre paradigmes de l'Analyse [A1] et [A2] peut permettre davantage la mise en fonctionnement de sous-activités de contrôle dans le travail des élèves.

Ici, il importe de savoir comment ces contrôles se développent dans deux contextes différents : dans la résolution d'une tâche sans l'intervention de l'enseignant et avec son intervention. Par conséquent, il nous faut répondre à la question :

QR 3.1

Quel est le travail mathématique des élèves et quelles sous-activités mathématiques développent-ils lors de la résolution de tâches permettant des occasions de contrôle mathématique issue d'une dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] et l'introduction de la dimension instrumentale du travail mathématique dans l'étude de suites $u_{n+1} = f(u_n)$ à la transition L-U ?

QR 3.2

Quelle est l'influence de l'intervention de l'enseignant dans l'activité et l'ETM personnel des élèves lorsqu'il s'agit de développer des sous-activités de reconnaissance et de contrôle dans la dialectique des paradigmes [A1] et [A2] ?

Cette question vise à savoir comment articuler les paradigmes [A1] et [A2] avec les sous-activités mathématiques pour aider les élèves à contrôler leur travail et à mieux comprendre les suites $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour encourager un contrôle dans l'activité et dans le travail mathématique, nous devons prendre en compte les difficultés que rencontrent les élèves (QR 2), ainsi que les spécificités de la transition L-U (QR1).

Par ailleurs, malgré la quantité des études sur les instruments technologiques, l'analyse de la littérature nous montre que leur usage (et notamment celui des calculatrices) peut-être controversé. Néanmoins, les calculatrices semblent être

bénéfiques pour aider au contrôle dans la résolution de tâches mathématiques (Trouche, 1996). En conséquence, avec la QR3.1 et la QR3.2 nous tentons aussi de répondre aux questions suivantes : dans quelle mesure la notion de paradigmes de l'analyse peut-elle établir un cadre pour expliciter les différents types de contrôle adaptés à la transition L-U ? Les élèves peuvent-ils utiliser ces contrôles par eux-mêmes de manière adéquate dans la résolution de tâches étudiant les suites récurrentes ? Comment ce dernier travail peut-il aider à stimuler les contrôles intuitifs et formels signalés par Ghedamsi (2008) dans un milieu instrumenté ?

Aussi par rapport à la notion de contrôle en lien avec le rôle de l'enseignant (Bikner-Ahsbahs et al. (2014) et Saboya & Rhéaume (2015)) nous nous demandons : dans le contexte d'une classe, quels types de sous-activités de contrôle sont introduits par les aides de l'enseignant lors de l'étude de suites définies par récurrence et comment ces aides influencent-elles l'activité et le travail mathématique des élèves ? Quel rôle joue l'aide de l'enseignant dans le travail de dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] ? Dans le même sens, quel rôle joue le bilan dans les sous-activités de contrôle ?

Objectif de la QR 3 : Construction d'une tâche visant à favoriser l'explicitation des trois sous-activités de contrôle, sensible aux difficultés des élèves concernant les suites $u_{n+1} = f(u_n)$, et avec une dialectique entre les paradigmes de l'analyse [A1] et [A2] cohérente à la transition L-U.

5.2 Méthodologie

Pour répondre aux trois questions de recherche introduites dans la section précédente, il nous faut identifier des étapes nécessaires qui prennent en compte le contexte dans lequel la recherche est menée. Naturellement, il existe des potentialités et des limites dans ce contexte. Cela, nous conduit à effectuer des choix méthodologiques qui correspondent à nos questions. Dès à présent, nous exposons la méthodologie générale et le scénario qui nous permettront d'avancer dans ce travail.

Contexte de la recherche

La plupart des études sur la transition Lycée-Université se sont concentrés sur la 1^{ère} année de l'université (Gueudet & Thomas, 2020). Bien que les recherches ne soient pas toutes d'accord sur la durée de la transition L-U (voir chapitre 2), celle-ci peut être étudiée dès la fin du lycée et au début de l'université a minima. Surtout si l'on se focalise sur les élèves, nous soutenons que le travail est à faire au moins dès la classe de Terminale. Par conséquent, dans notre recherche nous utilisons des données de la fin du lycée et du début de l'université. Notre recherche s'inscrit dans le groupe de travail Lycée-Université (GLU) de l'IREM de Paris, lieu fondamental pour nos réflexions et nos expérimentations. D'une part, cette participation permet à cette recherche d'être ancrée dans la réalité scolaire du contexte français, et d'autre part, cela permet de trouver un équilibre entre les buts de notre recherche et les besoins présentés par les enseignants pour leurs propres cours. Les classes des enseignants qui participent au groupe GLU nous serviront donc de terrain d'expérimentation pour les différentes tâches conçues.

5.2.1 Méthodologie générale

La notion de tâche contribue à l'obtention des réponses à nos trois questions de recherche et elle est clé pour la TADM et la théorie des ETM. Pour ces raisons, la tâche sera une des notions principales tout au long de notre recherche du point de vue méthodologique pour répondre à nos questions. En conséquence, les analyses de tâches en contexte nous permettront : d'analyser l'ETM de référence et attendu par les institutions à travers l'analyse de *tâches attendues* et des sous-activités possibles ; d'analyser l'ETM personnel des élèves ainsi que les sous-activités mathématiques

subséquentes à travers la *tâche effective* ; et de proposer des modifications dans les tâches pour promouvoir un contrôle mathématique chez les élèves.

a) QR1 : Première période

Nous commençons par faire une analyse des programmes d'étude et des tâches qui peuvent être indiquées à la fin du lycée et au début de l'université. Ensuite, nous procédons à l'analyse d'évaluations proposées aux deux niveaux d'enseignement dans lesquelles les institutions traitent les suites $u_{n+1} = f(u_n)$. Notamment, nous analysons des tâches d'évaluation proposées dans des manuels de Terminale S, des sujets de baccalauréat, des tâches qui apparaissent dans les feuilles de TD de la première année de l'université et une tâche d'examen à ce même niveau d'enseignement. Ces données nous permettent de faire quelques inférences pour la caractérisation des ETM de référence et attendu du lycée et de l'université. Ainsi, notre recherche va dans le même sens que des études faites précédemment à la transition L-U (Praslon (2000) pour la notion de dérivée et Artigue (2008a) pour la notion de fonction) car il s'agit de repérer des continuités et des ruptures liées à cette transition. Grâce à ces données nous espérons pouvoir conclure sur le contexte des tâches proposées, sur les sous-activités mathématiques possibles qui sont encouragées (avec une attention particulière aux sous-activités de contrôle sémiotique, discursif et instrumental), sur la place des paradigmes [A1] et [A2] dans l'étude des suites récurrentes, et sur le travail mathématique que chaque institution cherche à promouvoir.

b) QR 2 : Deuxième période

Dans cette période, nous analysons le travail et l'activité mathématique que les élèves développent au moment d'étudier les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ par eux-mêmes. Il nous importe de connaître l'activité mathématique individuelle et l'ETM personnel des élèves, raison pour laquelle dans un premier temps nous analysons des productions en situation d'évaluation ou de devoir surveillé. Les données que nous analysons à l'université correspondent à des productions d'étudiants lors d'un examen de première année (en décembre 2018). Pour le cas des données du lycée, nous choisissons des tâches modèle de Baccalauréat et nous faisons une adaptation de la tâche universitaire, ce qui nous amène à faire la première expérimentation dans la classe de Terminale Scientifique (en juin 2019). Ici, l'objectif est d'identifier des premières spécificités dans les difficultés que rencontrent les élèves aux deux niveaux d'enseignement, à partir de l'étude des dimensions activées dans l'ETM personnel, les sous-activités mathématiques de

contrôle qu'ils développent ou pas, ainsi que la place des paradigmes de l'Analyse [A1] et [A2] du travail mathématique fourni.

c) QR 3 : Troisième période

Dans la troisième période, comme il est question de promouvoir le contrôle mathématique dans l'étude de suites récurrentes, nous proposons des tâches qui visent à favoriser une dialectique entre paradigmes [A1] et [A2] permettant des sous-activités mathématiques où le contrôle est plus explicite dans le travail des élèves à la transition L-U. Notre hypothèse est qu'une dialectique entre le paradigme [A1] et [A2] pourrait aider à mieux contrôler l'étude de suites récurrentes, et qu'une activation de la dimension instrumentale de l'ETM à l'aide de la calculatrice, pourrait potentialiser les trois types de sous-activités de contrôle : sémiotique, instrumental et discursif.

Ici, il est pertinent de regarder les productions des élèves au niveau individuel, autant qu'il est nécessaire d'analyser leurs productions au cours d'une classe avec l'intervention de l'enseignant. Ainsi, en choisissant une même tâche, nous faisons d'abord deux expérimentations au niveau du lycée en Terminale Scientifique : une avec l'intervention de l'enseignant et l'autre sans son intervention en mode devoir surveillé (expérimentations menées en novembre 2019). Deuxièmement nous faisons une troisième expérimentation avec les mêmes élèves qui ont participé à l'expérimentation précédente, mais avec une nouvelle tâche (sur la suite de Héron). Cette expérimentation a été menée en fin d'année scolaire (mai 2020).

En raison de la crise sanitaire et la pandémie que nous vivons depuis mars 2020, des modifications dans la méthodologie ont dû être entreprises : l'expérimentation en Terminale Scientifique en mai 2020 a dû se réaliser en mode devoir maison des élèves, une dernière expérimentation en première année de l'université a été effectuée en novembre 2020, mais nous n'avons pas obtenu des données exploitables pour nos analyses. Cela implique que nos expérimentations s'inscrivent majoritairement au niveau du lycée (classe de Terminale Scientifique).

Nous organisons nos questions et les trois périodes de recherche dans le schéma de méthodologie générale de la Figure 20.

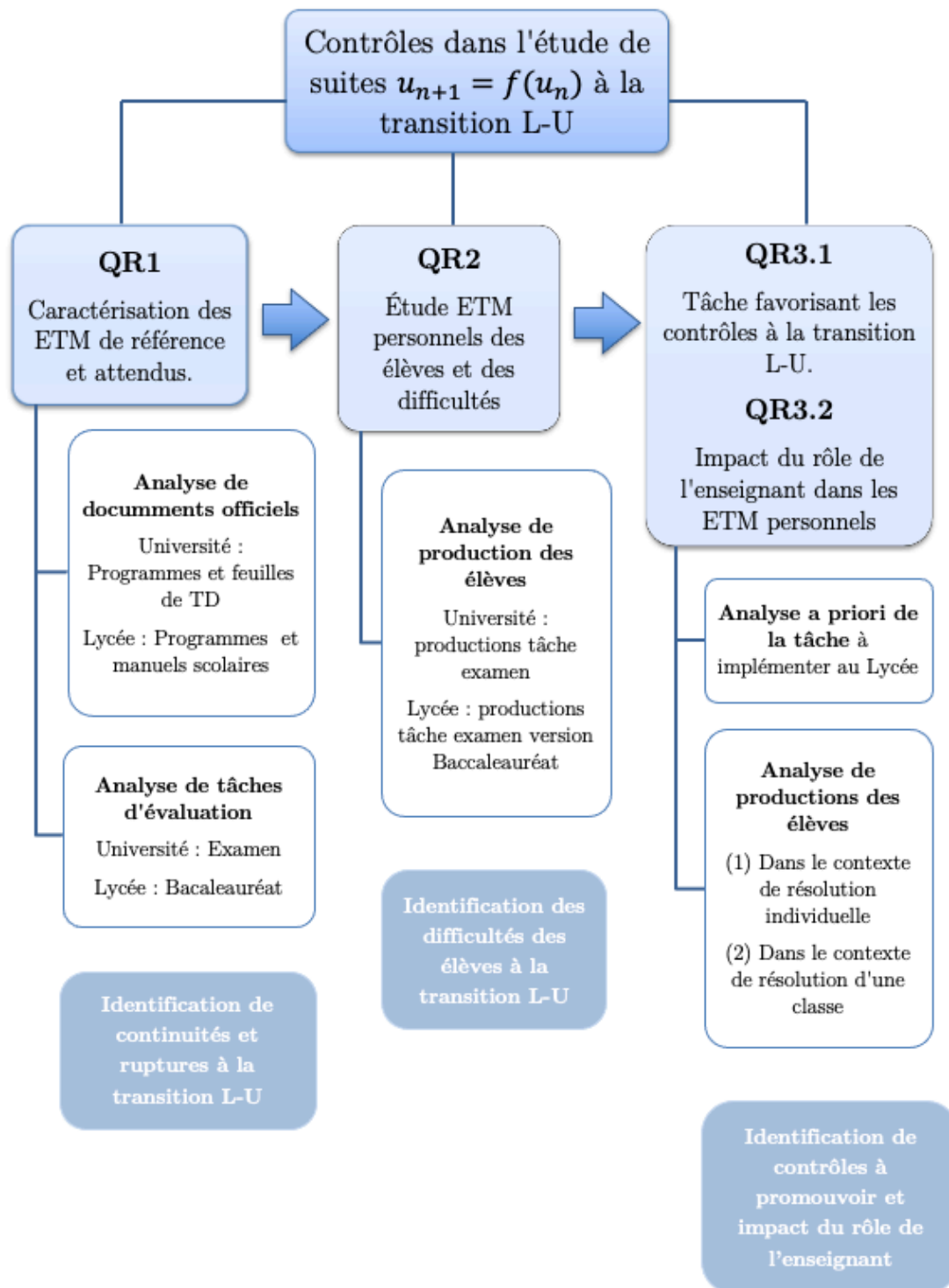


Figure 20 : Schéma de la méthodologie générale compte tenu des trois questions de recherche.

PARTIE II

SUITES RECURRENTES À LA TRANSITION LYCÉE- UNIVERSITÉ

6 Identification de l'ETM de référence et attendu du lycée et de l'université

Dans ce chapitre il s'agit de donner une réponse à la QR1 :

QR 1

Quelles sont les continuités et les ruptures de la transition L-U en France quant aux suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$? Plus particulièrement, que peut-on dire des trois sous-activités mathématiques de contrôle (sémiotique, instrumental, discursif) et des paradigmes de l'Analyse [A1] et [A2] dans les ETM de référence ; et quelles sont les caractéristiques pour les successions de l'activité et du travail mathématique dans les ETM attendus de chaque institution ?

L'objectif de cette question est de caractériser les ETM de référence concernant les suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ en identifiant des ruptures et des continuités et aussi de décrire l'activité mathématique attendue à partir des sous-activités (de reconnaissance, de traitement et d'organisation). Nous accorderons un regard particulier sur des occasions des sous-activité de contrôle (sémiotique, discursif et instrumental) et leur éventuel encouragement avec une dialectique entre les paradigmes de l'analyse [A1] et [A2] ainsi que l'analyse du travail selon les dimensions et plans verticaux de l'ETM. Nous essaierons aussi de caractériser l'ETM attendu à la transition L-U en identifiant les successions de l'activité et le travail mathématique à développer.

Pour atteindre cet objectif, nous nous centrerons davantage sur l'analyse des tâches (notion centrale pour les deux théories) et le contexte dans lequel ces tâches sont proposées. Cela nous permettra d'identifier les ruptures et les continuités de cette transition. De cette façon, nous analyserons le programme de la classe de Terminale Scientifique de lycée et le programme du premier semestre (S1) de la première classe

de mathématique de l'université (premier niveau d'analyse). Ensuite, nous analyserons les documents référents utilisés en première année de l'université par les étudiants - cours et feuilles de travaux dirigés (TD) ainsi que des tâches de trois manuels de la classe de Terminale Scientifique (deuxième niveau d'analyse). Nous finaliserons par des exemples de tâches d'évaluation qui interviennent dans les deux niveaux d'enseignement en analysant les successions de l'activité et le travail mathématique attendu (troisième niveau d'analyse).

6.1 Étude de programmes à la transition L-U

Dans cette partie nous analyserons les documents officiels correspondant à chaque niveau d'enseignement. En ce qui concerne l'université, il s'agira du le programme de première année de licence (L1) utilisé à l'Université de Paris et, dans le cas de Lycée, du programme d'enseignement de l'année 2018 (MEN, 2011) pour la classe de Terminale Scientifique (TS), document fourni par le ministère de l'éducation nationale.

Pour réaliser cette analyse, nous présenterons chaque programme en cherchant à connaître le contexte dans lequel l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ est abordé. Nous repèrerons les connaissances à traiter de façon explicite, le temps accordé pour les thèmes à traiter et les attendus explicites de l'institution concernant le travail de l'étudiant ou de l'élève pendant le développement du cours.

6.1.1 Programme de première année de l'université

Le programme que nous analysons correspond à celui du premier semestre de la première année (S1-L1). Ce programme a été conçu pour différentes filières (ou mentions) de licence prenant le cours. Ces filières sont : mathématiques, MIAH⁵³, Informatique, Physique, CPEI⁵⁴, Chimie et STEP⁵⁵. Pour des raisons d'accessibilité des données nous nous intéressons davantage à la filière CPEI.

⁵³ Licence mathématiques et informatique appliquées aux sciences humaines et sociales.

⁵⁴ Cycle préparatoire aux écoles d'ingénieurs.

⁵⁵ Sciences de la terre, de l'environnement et des planètes.

Le programme⁵⁶ a pour titre « Algèbre et analyse élémentaire I » (code MM1) ce qui permet de comprendre que deux domaines mathématiques seront objets d'étude. L'évaluation du cours a lieu en contrôle continu avec un examen final. L'objectif général, annoncé par le programme, est : *Utiliser les nombres complexes dans différents contextes. Maîtriser les notions de base associées aux fonctions, s'initier aux rudiments et à l'Algèbre linéaire. En Licence Mathématiques : commencer le raisonnement d'Analyse*⁵⁷. Concernant le temps des cours, le programme préconise 3 heures de cours magistral et 4,5 heures de travaux dirigés (TD) par semaine (ou 6 heures de cours magistraux et TD). Il s'agit de 12 semaines de cours au total, et la distribution du temps par thème traité dépend de la filière concernée. Dans le cas de la CPEI, avant de traiter le sujet de suites, le programme accorde 3 semaines pour l'étude de fonctions (fonctions réelles d'une variable réelle, parité, périodicité, fonctions usuelles, composé de fonctions, limites, asymptotes, dérivabilité, dérivées secondes, convexité, concavité, tracé de courbes représentatives) ; 3 semaines pour l'étude de nombres complexes (rappel de la classe de Terminale du lycée, racines d'un nombre complexe, formules d'Euler et de Moivre, formule du binôme et applications à la géométrie) ; 3 semaines pour une introduction à l'algèbre linéaire (résolution de systèmes linéaires, définitions et opérations en \mathbb{R}^n , sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n) ; et enfin, 3 semaines pour l'étude de propriétés de \mathbb{R} et de suites numériques.

Contenus mathématiques en Analyse : propriétés de \mathbb{R} et de suites

L'objectif du programme déclaré pour ce thème est : *Apprendre les raisonnements fins en analyse. On prendra du temps pour les démonstrations en cours qui seront retravaillées en TD sous forme d'exercices*. Pour la mention de CPEI, le programme souligne que, suivant le temps disponible, le thème « ensembles et applications » (correspondant à l'UE de *Raisonnements mathématiques*) pourrait être abordé. Des quatre thèmes traités dans ce cours, celui-ci est le seul où le programme ne fait pas référence à un objectif « pragmatique » (la théorie qui soutient les propriétés est traitée dans les cours ultérieurs) puisqu'il préconise l'apprentissage des raisonnements fins avec une importance particulière aux démonstrations. Dans ce thème, les contenus se résument en :

⁵⁶ Voir annexe 3.2, page 349.

⁵⁷ Mais, ici, ce que les étudiants doivent comprendre du raisonnement d'Analyse n'est pas très explicite.

- Nombres réels : propriétés d'ordre, corps, valeur absolue, intervalles, majorant et minorant ; définitions et théorèmes de la borne supérieure et inférieure (admis). Partie entière. Voisinages. Densité de \mathbb{Q} et de $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} .
- Suites : définition de la limite finie d'une suite de nombres réels ou complexes. Limite $\pm\infty$ dans le cas réel. Limite : Unicité, opérations, inégalités, théorème de gendarmes. Suites bornées, monotones, adjacentes. Théorème de la limite monotone. Sous-suites, théorème Bolzano-Weierstrass.

Ainsi, les suites définies par récurrence n'apparaissent pas de façon explicite dans le programme. Du point de vue théorique, nous en déduisons que le paradigme à privilégier à ce niveau d'enseignement est le paradigme [A2], mais cela reste à être vérifié (nous y reviendrons dans la section 6.2.1). Concernant les suites, aucun registre sémiotique n'est explicité et l'utilisation d'instruments numériques dans les cours n'est pas mentionné. A ce stade et vu la façon dont le programme est rédigé, nous ne pouvons pas inférer de sous-activités qui soient mises en avant à l'heure d'étudier les suites.

6.1.2 Programme de la Terminale Scientifique

Le programme de la classe de terminale scientifique de lycée commence en présentant l'objectif général :

« Outre l'apport de nouvelles connaissances, le programme vise le développement des compétences suivantes :

- mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
- mener des raisonnements ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer à l'écrit et à l'oral. » (MEN, 2011, p. 1)

Nous pouvons observer que, dès le début, le programme préconise un travail en autonomie de la part de l'élève tout en ayant une démarche critique par rapport au travail produit. Ainsi, un contrôle (en terme général) autonome de la part de l'élève est recommandé. Mais avec quels moyens l'élève peut-il arriver à maîtriser ce contrôle ?

Le programme présente ensuite trois axes à développer tout au long de ce niveau d'enseignement. (1) Le raisonnement et le langage mathématiques où il est préconisé des capacités d'argumentation, de rédaction et de démonstrations. Ici, il n'existe pas une section spéciale d'apprentissage de la logique, du vocabulaire ou de notations mathématiques, bien qu'elles doivent faire partie des cours de façon systématique. (2)

L'utilisation de logiciels pour favoriser la démarche investigatrice de la part des élèves est signalée. Les logiciels sont mis en avant pour réduire le temps de calcul et se focaliser davantage dans les raisonnements. Pour les utiliser, trois façons de les utiliser sont recommandées : deux utilisations en classe, d'abord par l'enseignant pour favoriser une visualisation collective de la classe et, ensuite, par les élèves au cours du développement des travaux pratiques ; enfin, une utilisation hors classe de la part de l'élève dans son étude personnelle. (3) Une diversité de l'activité de l'élève visant à résoudre des problèmes est aussi signalée. Cette diversité passe par les actions à réaliser de la part de l'élève : chercher, expérimenter, modéliser (avec des logiciels), appliquer des techniques de calcul, raisonner, démontrer, etc. Il est important de signaler que la conjecture n'est pas mise en avant dans le programme et aucune recommandation n'est faite par rapport à cela. Concernant le point (2), le programme attend un développement de la sous-activité de contrôle instrumental dans le travail des élèves. Cela est explicité par la phrase « *À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et de programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle* » (Ibid., p.16) ; néanmoins cela dit peu sur la façon dont on peut encourager ce type de contrôle chez l'élève.

Par rapport aux modes d'évaluation, le programme précise l'évaluation de l'utilisation d'outils informatiques dans la résolution de problèmes. Finalement, quant à l'organisation, le programme explique que le plan présenté n'indique pas la progression à suivre, néanmoins il signale que la moitié du temps pourrait être consacrée à l'étude du thème de l'analyse (l'autre moitié étant consacrée aux thèmes de géométrie et de probabilités-statistiques de façon équitable).

Contenus mathématiques en Analyse

Dans le programme⁵⁸, le thème d'Analyse commence par énoncer qu'un des objectifs est la « *consolidation et un enrichissement des notions relatives aux suites et aux fonctions* » pour étudier des phénomènes discrets et continus. Ainsi le programme marque une séparation entre le travail de suites et celui de fonctions dès le début⁵⁹. La notion de limite de suite impliquera une étude approfondie pour présenter ensuite la notion de limite de fonction. Différents types de fonctions sont préconisées à être

⁵⁸ Voir annexe 3.1, page 347.

⁵⁹ Car les suites sont des fonctions définies sur l'ensemble discret \mathbb{N} , et la façon de les étudier diffère de celle des fonctions qui sont définies sur un ensemble « continu », comme \mathbb{R} .

étudiés (exponentielle, logarithme, sinus et cosinus) et une partie spéciale est dédiée à l'étude du concept d'intégrale. Ici le programme déclare comme objectif l'acquisition d'automatismes de calcul de la part des élèves, cela nous laisse penser qu'il pourrait y avoir un privilège du paradigme d'analyse [A2] à ce niveau⁶⁰.

Plus précisément, concernant le thème de suites, 6 contenus mathématiques sont établis : raisonnement par récurrence, limite finie ou infinie d'une suite (avec la capacité attendue de la mise en place d'un algorithme pour étudier le cas d'une limite infinie), notion de convergence d'une suite de façon non formelle, limites et comparaisons (plus précisément, il faut démontrer qu'étant données deux suites de telle sorte que, si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et que $(u_n) \rightarrow +\infty$ alors $(v_n) \rightarrow +\infty$ ainsi que, si une suite croissante converge vers l , tous ces termes sont inférieurs ou égaux à l et le théorème des gendarmes qui est admis), opérations des limites (limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient de deux suites), comportement à l'infini de la suite (q^n) (on démontre que la suite (q^n) , avec $q > 1$ a pour limite $+\infty$) et, finalement, suite majorée, minorée, bornée et le théorème de convergence de suites croissantes majorées (resp. décroissantes minorées) comme admis. Ensuite, le programme déclare : « *Il est intéressant de démontrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$* ».

Au moment d'étudier les suites, le programme stipule « *il est important de varier les approches et les outils sur lesquels le raisonnement s'appuie* » ; néanmoins, rien n'est dit de la façon de faire « varier » les approches dans l'étude de suites et aucun cadre n'est donné. Nous pensons qu'ici la notion de paradigmes peut s'avérer pertinente pour encourager cette variété souhaitée.

Concernant les suites définies par récurrence, les signes $u_{n+1} = f(u_n)$ n'apparaissent pas dans la partie du tronc commun du programme. Il stipule seulement que « *Des exemples de suites récurrentes, en particulier arithmético-géométriques, sont traités en exercice* », sans donner des méthodes d'étude de ses suites, ni de spécificités de l'étude de ces suites récurrentes en lien avec l'étude des fonctions qui les définissent. Des tâches faisant intervenir des algorithmes sont indiquées, néanmoins aucune suggestion n'est donnée.

D'un point de vue théorique et spécifiquement aux trois types de sous-activités de contrôle, nous pouvons dire que les contrôles sémiotiques ne s'observent pas de façon explicite dans le programme mais ce dernier laisse sous-entendre que l'utilisation des logiciels (où il y aura besoin d'un contrôle instrumental) va permettre une

⁶⁰ Rappelons qu'une des caractéristiques du paradigme [A2] est de suivre une démarche de calcul algébriquement efficace.

visualisation des objets mathématiques travaillés (cela possiblement avec l'utilisation de différents registres et leur exploration). Bien qu'une activité d'argumentation soit mise en avant dans cette classe de terminale, des précisions sur la façon d'apprendre aux élèves à argumenter ou démontrer ne sont pas détaillées. Cela nous dit également très peu de la façon dont ils pourront contrôler leur discours mathématique et cette argumentation.

Compte tenu de l'évolution du programme, nous tenons à remarquer que les nouveaux programmes de spécialité de mathématiques de terminale générale (MEN, 2019) changent peu en contenu concernant les spécificités de suites. Dans les deux programmes, le théorème de convergence de suites croissantes majorées (décroissantes minorées) est admis. À la différence du programme précédent, celui-ci signale l'utilisation de suites adjacentes comme approfondissement possible, de suites récurrentes linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, l'application de la méthode de Newton et l'étude de la convergence de la méthode de Héron (alors qu'avant les programmes faisaient seulement référence à l'approximation de réels). En d'autres termes, l'étude de suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ apparaît cette fois de façon explicite dans le programme, mais dans la section « *continuité des fonctions d'une variable réelle* ». Dans cette section il est, d'abord, explicité le contenu « *Image d'une suite convergente par une fonction continue* »⁶¹ et, ensuite, la capacité attendue « *Pour une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$* ». À nouveau, la méthode de Newton est évoquée, cette fois pour l'étude d'exemples d'algorithmes. Bien que dans ces nouveaux programmes les suites récurrentes soient explicites, les outils théoriques pour les étudier ne semblent pas être différents du programme précédent, et les programmes n'explicitent pas un travail spécifique pour différencier les suites $u_n = f(n)$ des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ notamment.

⁶¹ Cela fait référence notamment au théorème que si (u_n) converge vers l , f est continue et définie sur un intervalle I et pour tout $n, u_n \in I$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$.

6.2 Étude de tâches proposées à la transition L-U

Pour mieux connaître l'activité et le travail mathématique à développer dans chacune des institutions, un deuxième niveau d'analyse est nécessaire : l'étude de tâches proposées dans les classes. En effet, les tâches sont importantes pour les deux théories que nous utilisons (Flores González, 2018) et c'est en partie grâce à celles-ci que nous pourrions mieux caractériser l'activité et le travail mathématique développés dans les institutions lycée et université.

Nous analyserons tout d'abord des données de la L1, à savoir : le support du cours en version diaporama (spécifiquement celui utilisé dans la filière CPEI) et les tâches proposées dans les feuilles de TD de MM1 sur le thème de suites⁶². Deuxièmement, en ce qui concerne le lycée, nous analyserons les tâches proposées dans trois manuels de lycée de la classe de Terminale Scientifique. La décision d'analyser les tâches des manuels vient du fait que les enseignants de Lycée déclarent les utiliser pour s'en servir en tant que listes d'exercices dans leurs pratiques (Hache, 2008).

Catégories d'analyse de tâches

Comme il s'agit d'analyser les tâches proposées, nous repèrerons tout d'abord les **paradigmes** de l'analyse [A1] et [A2] utilisés dans chacune de ces tâches, ainsi que les articulations entre eux, à savoir $[A1] \leftrightarrow [A2]$. Plus particulièrement :

- Nous considérons que la tâche permet un travail mathématique dans le paradigme [A1] si l'exercice demande, de façon explicite, des interprétations issues de calculs arithmétiques de plusieurs termes de la suite, des représentations graphiques de ces termes ou encore des représentations numériques données dans un tableau de valeurs. Ici, la demande d'une conjecture du comportement de la suite répond à un travail basé sur la visualisation de signes (données d'emblée dans l'énoncé ou demandées dans la résolution de l'exercice), ce qui est en accord au travail en [A1].
- La tâche assure un travail dans le paradigme [A2] si l'énoncé demande de façon explicite un travail de preuve avec des expressions mathématiques formelles sur le comportement de la suite. Ici, il est nécessaire d'étudier les théorèmes et les propriétés mathématiques dont l'élève dispose pour y répondre.

⁶² Voir annexe 3.4, page 354.

- La tâche propose un travail de changement de paradigme [A1] vers le paradigme [A2] si, à l'issue d'un travail dans le paradigme [A1] (travail de conjectures par exemple), l'énoncé demande de montrer le comportement de la suite dans [A2].
- La tâche propose un travail de changement de paradigme [A2] vers le paradigme [A1] si l'exercice demande, tout d'abord, d'étudier le comportement de la suite grâce aux méthodes algébriques connues puis si l'exercice demande explicitement la représentation graphique de la suite ou de calculer les termes de la suite par exemple.

Deuxièmement, nous regarderons dans quelle mesure les différentes **reconnaisances** à réaliser sont laissées à la charge des élèves (attendues) ou si elles sont présentées dans les énoncés. Plus précisément, nous analyserons si l'énoncé de l'exercice est explicite ou pas concernant :

- La suite récurrente : par exemple, si l'exercice demande d'étudier la suite définie par un premier terme et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec par exemple f la fonction $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$, la fonction est présentée de façon explicite (l'introduction de cet intermédiaire n'est pas à la charge de l'élève). En revanche, si l'énoncé demande d'étudier la suite récurrente définie par un premier terme et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$, dans ce cas la fonction n'est pas explicite dans l'énoncé.
- La nécessité de faire une preuve par récurrence pour montrer une propriété de la suite (u_n) .
- Les variations de la suite (u_n) .
- La convergence de la suite (u_n) .

Enfin, nous analyserons la possibilité de mettre en fonctionnement des sous-activités de contrôle à partir de la rédaction de l'énoncé. En particulier nous analyserons si l'énoncé de l'exercice :

- Explicite un contrôle non mathématique ou pas. Comme nous l'avons signalé dans le chapitre 4, ce type de contrôle est lié au but de l'activité à développer lors de la résolution de la tâche et il est identifié dans l'énoncé lorsque le but de l'activité est explicité. Par exemple, dans l'énoncé « montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite (u_n) est dans $[0,1]$ », la conclusion à laquelle l'élève doit arriver est déjà formulée.

- Favorise un contrôle mathématique c'est-à-dire qui encourage des sous-activités de contrôle sémiotique, instrumental ou discursif. Selon les indications données dans chaque tâche, nous repérons deux considérations de ces contrôles :
 - a) *Occasion de contrôle mathématique* : dans ce cas le contrôle n'est pas explicité dans l'énoncé ; néanmoins un contrôle mathématique est possible. Par exemple, dans une occasion de contrôle sémiotique et instrumental, l'exercice demande d'utiliser la calculatrice pour conjecturer le comportement de la suite mais aucune indication n'est donnée ni sur le registre sémiotique, ni sur la façon dont on doit/peut utiliser la calculatrice.
 - b) *Contrôle mathématique explicite* : celui-ci est formulé clairement dans l'énoncé. Par exemple, dans le cas d'un contrôle sémiotique et instrumental, l'exercice indique ce que l'élève doit faire ou interpréter et quelle fonction de la calculatrice utiliser pour obtenir des informations sur le comportement de la suite.

6.2.1 Classe L1 : support du cours (diaporamas) et exercices proposés

Le thème de suites est présenté après l'étude des propriétés de \mathbb{R} et correspond au dernier thème à traiter dans le semestre. Tout d'abord on remarque que le cours aborde les suites numériques dans le système numérique \mathbb{C} . Cela peut être considéré comme une difficulté potentielle pour les étudiants puisque \mathbb{C} n'est pas un ensemble ordonné contrairement à \mathbb{R} donc toutes les propriétés des suites réelles ne sont pas équivalentes pour les suites complexes (notamment celles qui se réfèrent aux comparaisons). Ensuite, un vocabulaire sur les suites est présenté (suite majorée, minorée, bornée en \mathbb{C}) et les définitions des suites arithmétiques et géométriques sont exposées. Plus précisément elles sont présentées de façon explicite pour tout n dans \mathbb{N} comme $u_n = nr + c$ et $u_n = r^n c$ respectivement (raison r et premier terme c). Ensuite, les définitions formelles de suite convergente et de suite infinie sont données. Cela est suivi des propositions sur les suites extraites (non démontrées) ainsi que de la propriété de la densité de \mathbb{R} en termes de suites convergentes (considérée comme admise). Puis on trouve les théorèmes « Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l$ » (non démontré), « f définie en tout point d'un intervalle de \mathbb{R} contenant α , alors f est continue en α si et seulement si pour toute (u_n) qui converge vers α , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\alpha)$ » (admis). Ensuite ces théorèmes sont suivis par le

théorème de prolongement des inégalités larges⁶³ et le théorème des gendarmes⁶⁴ (non démontrés). Cela est suivi de propriétés d'opérations sur les limites (somme et produit) et de la définition des suites monotones (croissantes, décroissantes), majorées et minorées. Le cours finit par les trois théorèmes suivants : théorème de la limite monotone (pour les suites réelles), théorème des suites adjacentes (toujours de suites réelles) et théorème de Bolzano-Weierstrass (pour les suites complexes). Ainsi, aucune propriété ni théorème n'est démontré dans le support du cours (diaporama) ; néanmoins, leurs démonstrations peuvent être abordées par l'enseignant pendant le déroulement de la classe, que ce soit à l'oral ou par écrit directement au tableau. Le cours ne présente pas d'exemple ni développé, ni proposé comme exercice. Néanmoins, comme le cours est utilisé en tant qu'appui par l'enseignant, des exercices et des exemples peuvent être pris en compte dans la classe, à l'oral ou à l'écrit (directement au tableau). Dans ce cas, la responsabilité de garder des traces écrites est complètement à la charge de l'élève.

a) Exercices proposés (non résolus)

La feuille d'exercices sur les suites numériques est la même que celle de l'étude des nombres réels où 46 exercices au total sont proposés (feuille V à ce stade de l'année académique). De ceux-là, 21 exercices correspondent aux corps des réels (structure d'ordre totale, valeur absolue, borne supérieure et inférieure, propriété Archimédienne et irrationalité), et 25 aux suites numériques. Concernant ces 25 derniers, il y est proposé des exercices pour étudier les bornes, la monotonie, la limite et la convergence de suites. Cependant, seulement 3 exercices font référence aux suites récurrentes (voir Figure 21, Figure 22 et Figure 23 ci-dessous).

Exercice 40. Soit $x \in \mathbb{R}, x > 0$. On considère la suite définie par récurrence

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{x}{u_n} \right)$$

1. Montrer que $u_n \geq \sqrt{x}$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que u_n est décroissante.
3. Calculer $\lim u_n$.

Figure 21 : Première tâche de suite récurrente dans la feuille TD.

⁶³ Si $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v$ alors $u \leq v$.

⁶⁴ Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.

Exercice 43. Soient $0 < a < b$. Montrer préliminairement les inégalités suivantes

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

On considère maintenant les suites définies par récurrence

$$\begin{aligned} u_1 &= a, & v_1 &= b. \\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n}, & v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \end{aligned}$$

Montrer que

1. $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$ pour tout $n \geq 1$.
2. les suites u_n et v_n ont même limite.

Figure 22 : Deuxième tâche de suite récurrente dans la feuille de TD

Exercice 45. Soit $\alpha \geq 0$ et (u_n) la suite définie par récurrence

$$u_0 = \alpha, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite. [*Indication : commencer par $\alpha = 2$.*]

Figure 23 : Troisième tâche de suite récurrente dans la feuille de TD.

Concernant le premier exercice, il s'agit d'une étude de la convergence de la suite de Héron. L'exercice cherche à montrer que la limite de la suite est \sqrt{x} en montrant qu'elle est décroissante et minorée par \sqrt{x} . Quant au deuxième exercice, il s'agit d'étudier la convergence de deux suites récurrentes sans calculer la limite (les suites sont adjacentes et leur limite est la moyenne arithmético-géométrique). Cet exercice a une complexité supplémentaire puisque les deux suites définies par récurrence sont imbriquées. Dans le troisième exercice il s'agit de montrer la convergence de la suite vers 2, où l'on peut identifier deux cas : la suite est croissante et majorée pour $\alpha \in [0, 2]$, décroissante et minorée pour $\alpha \in]2, +\infty[$.

Ces exercices sont proposés dans le paradigme [A2] et dans le registre algébrique (le paradigme [A1] est absent) ce qui, évidemment, ne permet pas une articulation entre paradigmes. Concernant les reconnaissances, dans les trois cas, les suites récurrentes sont présentées explicitement par les énoncés et elles ne font pas référence à la fonction qui les définissent. Ainsi, la reconnaissance de la fonction, d'une part, et la nécessité d'une preuve par récurrence, d'autre part, restent toutes les deux à la charge de l'étudiant. Par rapport à la variation de la suite, elle est explicitée dans le premier et deuxième exercice mais pas dans le troisième et la valeur de la limite reste à la charge de l'étudiant dans le premier et troisième cas. En ce qui concerne les contrôles, nous observons que les trois tâches présentent des contrôles non mathématiques : dans le premier exercice, par exemple, les informations de la borne inférieure et de la décroissance de la suite sont données ; dans le deuxième, la croissance de (u_n) et la décroissance de (v_n) sont exprimées en registre de représentation algébrique et, dans le troisième, il est explicité que la suite est convergente. Néanmoins,

concernant la possibilité de développer des contrôles mathématiques, on n'observe ni des occasions de contrôle, ni de contrôles explicites, que ce soit des contrôles sémiotiques, instrumentaux ou discursifs. Ainsi, la sous-activité mathématique de contrôle reste implicite et à la charge de l'élève. À cela, il est à additionner qu'on n'observe ni un travail de conjecture, ni des registres de représentation autre que l'ensembliste ou l'algébrique, ni un travail de pour étudier la convergence de ces suites (qui correspondrait à un travail dans le paradigme [A3]) que ce soit dans le support diaporama du cours ou dans les feuilles de TD.

6.2.2 Classe TS : Manuels

Pour faire l'étude de classes de TS, nous avons choisi trois manuels : *Indice* de l'éditeur Bordas (*Maths Term. S. Enseignement Spécifique*, 2016), *Odyssée* de l'éditeur Hatier (*Mathématiques TS. Enseignement Spécifique*, 2012) et, *Transmath* de l'éditeur Nathan (*Transmath Term S. Enseignement Spécifique*, 2012). L'ensemble des manuels commencent par le thème Analyse avec le chapitre concernant les « suites ». D'abord ils présentent des tâches d'introduction qui permettent aux élèves de se situer dans le thème à traiter par rapport aux connaissances qu'ils ont déjà acquises. Puis, ils continuent avec la partie « cours » où ils exposent des définitions, des propriétés, des méthodes et des théorèmes à utiliser dans les exercices qui sont proposés ensuite. Concernant le cours, ils abordent le raisonnement par récurrence, les définitions intuitives de limite finie et infinie d'une suite, les théorèmes (admis) sur les limites (unicité, opérations somme, produit et quotient de suites), la limite d'une suite géométrique (démontré), les théorèmes de comparaison de limites infinies (démontré), le théorème des gendarmes (démontré seulement dans 1 des manuels), les définitions de suites majorées, minorées et bornées, les suites géométriques, arithmétiques et le théorème de convergence de suites monotones (admis). Ensuite ils continuent avec la section de « savoir-faire du cours » où ils présentent des exemples d'exercices développés et ils terminent avec des exercices proposés, que ce soit pour préparer l'évaluation du cours ou pour s'entraîner au Baccalauréat.

Pour en savoir davantage sur l'enseignement dans cette classe, nous nous intéresserons aux exercices qui y sont proposés puisqu'ils ont été identifiés comme la partie la plus utilisée des manuels dans les classes de mathématiques (Hache, 2008). Ainsi, nous pouvons différencier deux sortes de tâches, l'une correspondant aux exercices résolus (les exemples) par les auteurs du manuel et l'autre correspondant à ceux qui ne sont pas résolus mais proposés pour que l'élève les résolve. Pour analyser ces tâches, nous sélectionnerons celles où l'on propose d'étudier une suite récurrente

que ce soit à partir de l'étude de la fonction ou pas. Nous excluons les tâches qui demandent d'exprimer le terme général u_n en fonction de n , car cela revient à une étude explicite de (u_n) et on n'est plus dans le cas de l'étude d'une suite récurrente mais plutôt dans l'étude d'une fonction. Nous présenterons les résultats de cette analyse dans ce qui va suivre.

a) Exemples proposés (exercices résolus)

Des trois manuels analysés⁶⁵, nous avons repéré 11 exemples résolus. Concernant les paradigmes (voir Figure 24 ci-dessous), il existe un privilège dans l'utilisation du paradigme [A2] (utilisation dans 100% des exemples) sur le paradigme [A1] (utilisation dans 36% des exemples). La présence des deux paradigmes pourrait faire penser qu'une articulation immédiate est produite entre les paradigmes [A1] et [A2] (c'est-à-dire que quand le calcul des termes de la suite est demandé dans l'énoncé, une preuve dans le paradigme [A2] est demandée ensuite) ; néanmoins, cela n'est pas toujours le cas. En effet, 27% des exemples présentent une articulation du paradigme [A1] vers le paradigme [A2] (où dans la plupart des cas il s'agit de conjectures) et seulement 9% des exemples font une articulation de [A2] vers [A1]. Si une articulation entre paradigmes n'est pas appuyée par les exemples que présentent les manuels, comment pourrions-nous espérer que la mise en fonctionnement d'une sous-activité de contrôle grâce à l'articulation de ces paradigmes soit entreprise par les élèves ?

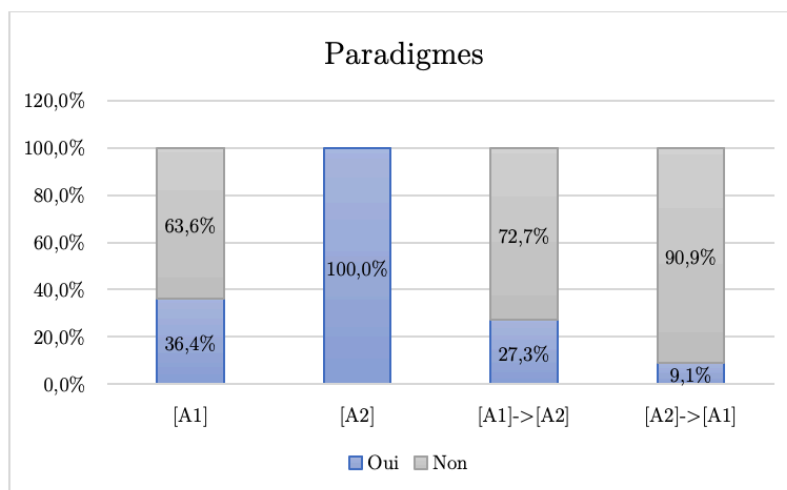


Figure 24 : Graphique analysant les paradigmes [A1] et [A2] dans les exemples des manuels.

⁶⁵ Voir annexes 3.5 et 3.6, page 356-379.

En ce qui concerne les reconnaissances (voir Figure 25 ci-dessous), la plupart sont effectuées par les énoncés : la variation de la suite est apportée dans 100% des énoncés, la suite récurrente exprimée en termes de u_n est explicitée dans 90% des énoncés, la fonction f est explicite dans 36% des 11 énoncés, et la nécessité d'utiliser une preuve par récurrence est explicitée dans 79%. La convergence de la suite est également explicitée dans 42% des énoncés. Ce fait se traduit par une baisse dans la demande cognitive de la tâche du point de vue de la sous-activité de reconnaissance.

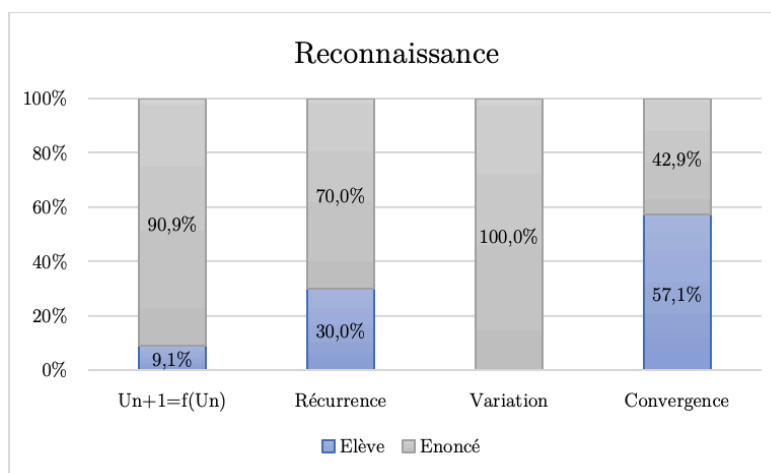


Figure 25 : Graphique analysant les reconnaissances dans les exemples des manuels.

En faisant référence aux sous-activités de contrôle, nous tenons à rappeler que les contrôles sémiotiques et instrumentaux n'ont pas le même statut que les sous-activités de reconnaissance car, lorsque les occasions de contrôle mathématique sont présentes, elles permettent la mise en fonctionnement de ces sous-activités de contrôle alors que lorsque les reconnaissances sont évidentes, ou quand le contrôle discursif est explicite, cela produit une baisse dans la demande cognitive de l'activité à développer. En ce qui concerne le contrôle et les pourcentages relatifs aux énoncés, la totalité des exemples de manuels présentent des contrôles non mathématiques apportés par les énoncés (voir Figure 26 ci-dessous). En lien avec les reconnaissances des énoncés analysées dans la Figure 25, on peut penser que, comme il s'agit des exemples de résolution de tâches, le manuel entraîne les élèves à une routinisation de l'identification de la variation de la suite ou de l'utilisation d'une preuve par récurrence, par exemple, qui apparaissent explicitement dans l'énoncé de la tâche. Concernant les sous-activités de contrôle mathématique, 36% permettent un contrôle sémiotique (18% des occasions de contrôle et 18% aussi de contrôle explicite), alors que seulement 9% montrent un contrôle instrumental (tous explicites) et 18% présentent un contrôle discursif (9% de contrôle explicite et 9% des occasions de contrôle). Nous pourrions interpréter ces

pourcentages comme si la résolution de la tâche attendue devait se faire en favorisant les contrôles non mathématiques. En effet, les exemples que l'on montre aux élèves explicitent à chaque fois la conclusion à laquelle l'élève doit arriver dans l'énoncé. Il reste à s'attendre seulement à une bonne résolution de ce qui est déjà indiqué c'est-à-dire à ce que l'élève développe seulement une sous-activité de traitement (tâches avec des mises en fonctionnement de connaissances de niveau technique).

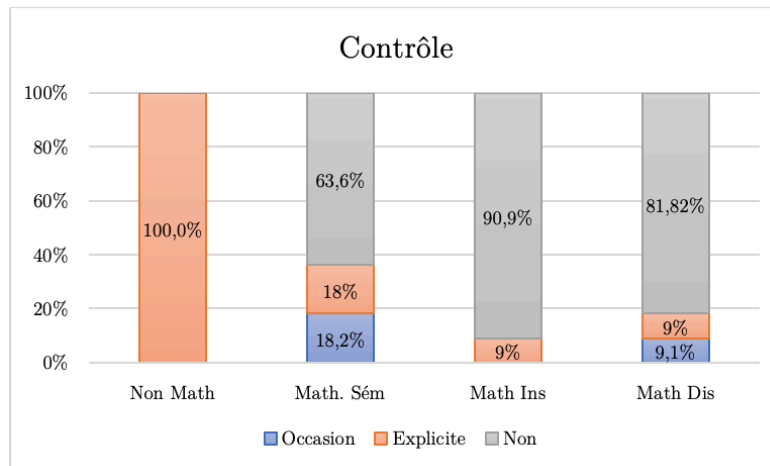


Figure 26 : Graphique analysant les contrôles dans les énoncés des exemples des manuels.

Il est à remarquer que toutes les résolutions des exemples utilisent un contrôle discursif, 36% utilisent un contrôle sémiotique et seulement 9% un contrôle instrumental (voir Figure 27 ci-dessous). Cela est cohérent avec les énoncés pour les contrôles sémiotique et instrumental mais non pour le contrôle discursif.

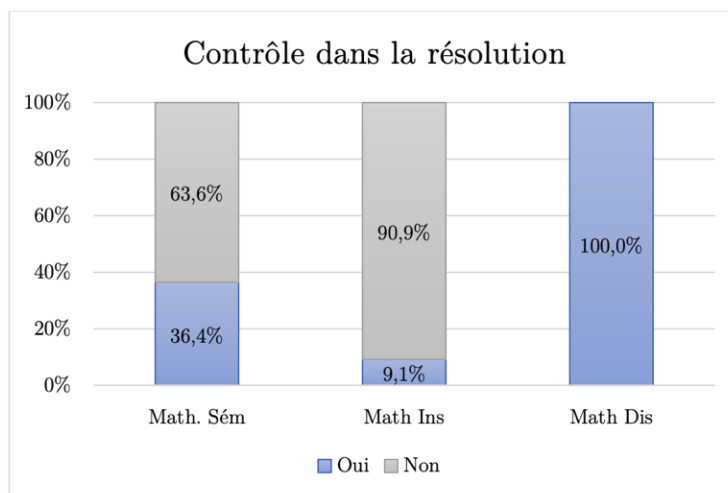
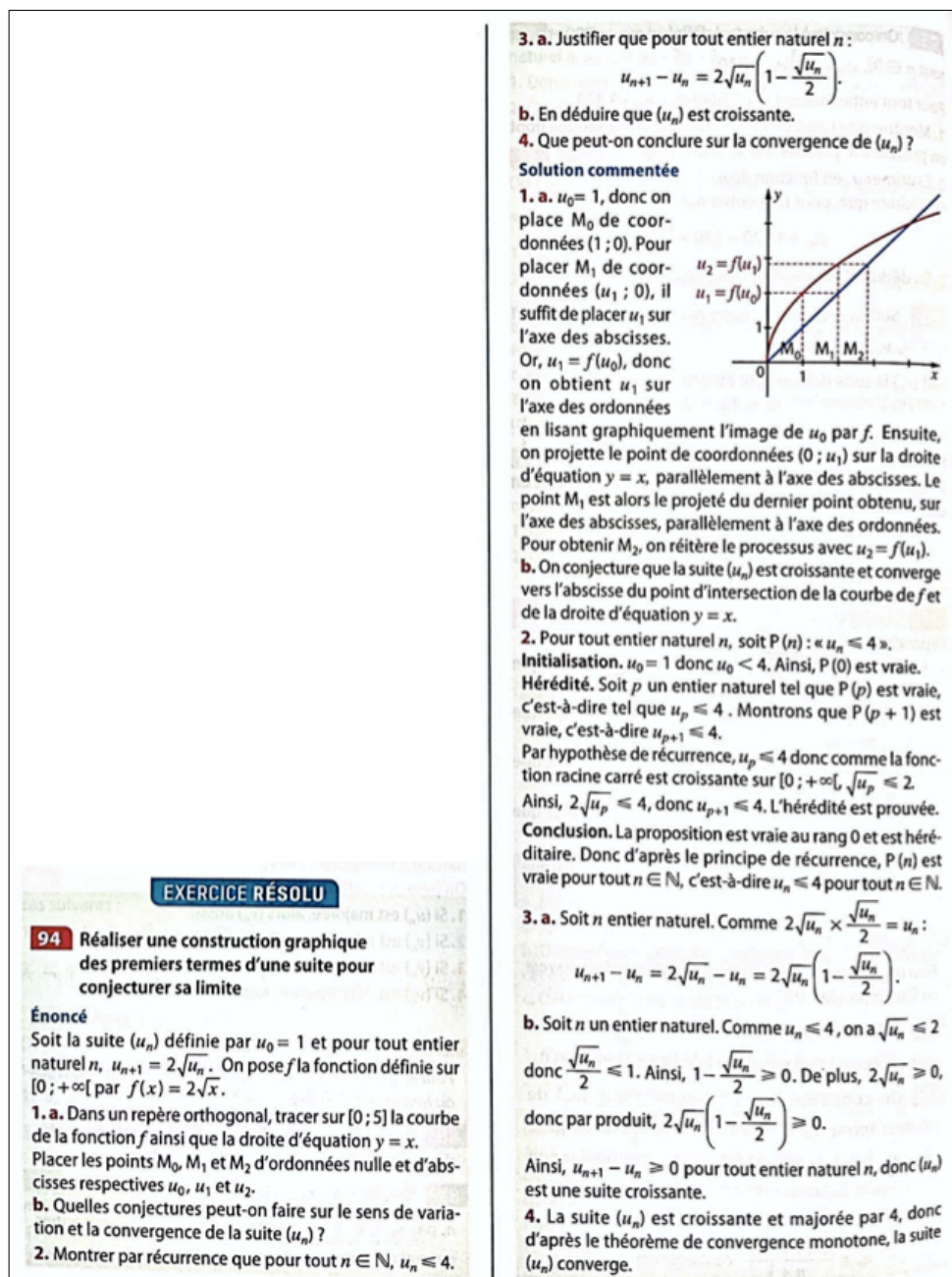


Figure 27 : Graphique analysant les contrôles des résolutions d'exemples de manuels.

Ci-dessous, dans la Figure 28 nous présentons, à titre d'exemple, un exercice résolu issu du manuel *Indice*. Cet exemple présente les paradigmes [A1] et [A2] et un passage du [A1] vers [A2] (il fait partie des 27% de la Figure 24). Concernant les reconnaissances présentées dans les énoncés, la suite récurrente $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$ (avec la fonction $f(x) = 2\sqrt{x}$ de façon explicite), la nécessité d'une preuve par récurrence et le sens de variation de la suite ont été apportés dans l'énoncé ; cependant, la reconnaissance de la convergence de la suite reste attendue. Le contrôle non mathématique est présent dans les questions 2 ($u_n \leq 4$) et 3 ((u_n) est croissante). Quant à la sous-activité de contrôle possible, l'énoncé présente un contrôle sémiotique de façon explicite dans la question 1 (faire une conversion et des traitements dans le registre de représentation graphique pour, ensuite conjecturer la variation et la convergence de la suite) et une occasion de contrôle discursif explicite dans l'énoncé de la question 3 car il montre la méthode à utiliser pour y répondre (justifier pour tout n que $u_{n+1} - u_n = 2\sqrt{u_n} \left(1 - \frac{\sqrt{u_n}}{2}\right)$). Le contrôle instrumental n'est pas présent dans l'énoncé. Finalement la résolution de l'exercice utilise des contrôles sémiotiques (utilisation de registre graphique, et algébrique) et discursifs (il est nécessaire d'appliquer différents éléments du référentiel théorique pour l'étude de la suite, l'étude de $u_{n+1} - u_n$, la preuve par récurrence, le théorème de convergence monotone).

Figure 28 : Exemple a.4, manuel *Indice*, page 28.

L'exemple de la Figure 29, ci-dessous, est intéressant car il s'agit d'un exemple type Baccalauréat qui montre comment analyser un énoncé pour repérer les contrôles non mathématiques présents. Il indique les objectifs des questions et explique comment utiliser les énoncés de questions pour conclure la tâche. Alors que la calculatrice est proposée dans l'« analyse de l'énoncé » pour étudier le comportement de la suite, l'énoncé de la tâche ne propose pas l'utilisation de la calculatrice et la résolution de l'exercice a été faite seulement en utilisant des contrôles discursifs (voir partie « guide ») et totalement dans le paradigme [A2] (comme la plupart des résolutions).

Du côté des reconnaissances, celles à la charge de l'élève sont l'utilisation d'une démonstration par récurrence et le théorème de la limite monotone, et la fonction qui définit la suite récurrente n'est pas explicite dans l'énoncé.

EXE

92 Travail en autonomie

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.

Soit (u_n) la suite numérique définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}.$$

1. a) Démontrez que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n < 4$.

b) Démontrez que (u_n) est croissante.

c) Déduisez-en que (u_n) converge.

2. a) Démontrez que pour tout entier naturel n , $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

b) La suite (v_n) est définie sur \mathbb{N} par $v_n = 4 - u_n$. Démontrez que pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$.

c) Déduisez-en la convergence de la suite (v_n) et sa limite, puis la limite de la suite (u_n) .

Sur le Web

Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site www.transmathlycee.net/eleve-TermS

Analyser l'énoncé

- L'objectif de la partie 1. est de prouver la convergence de la suite (u_n) . Les questions **a)** et **b)** vous donnent les outils pour conclure.
- L'utilisation d'une calculatrice est conseillée pour avoir une idée du comportement de la suite (u_n) .

Analyser l'énoncé

Dans la partie 2., apparaît la suite auxiliaire (v_n) . L'encadrement demandé en **b)** doit permettre de prouver sa convergence et de déterminer sa limite.

Guide

1. a) On pense à un raisonnement par récurrence, car la suite (u_n) est définie par récurrence. C'est la stricte croissance de la fonction racine carrée qui permet de passer aux inégalités suivantes.

b) L'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ nécessite un changement d'écriture. L'expression de cette différence, $\sqrt{3u_n + 4} - u_n$, incite à utiliser son expression conjuguée, $\sqrt{3u_n + 4} + u_n$. L'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ se ramène ainsi à celle du trinôme du second degré $-x^2 + 3x + 4$ sur $[0; 4]$.

c) Pour prouver la convergence de la suite, il suffit maintenant d'exploiter les propriétés de la suite (u_n) démontrées dans les questions précédentes : la suite (u_n) est croissante et majorée, donc...

2. a) Pour majorer $4 - u_{n+1}$, vous pouvez utiliser l'expression (conjuguée) $4 + \sqrt{3u_n + 4}$ en remarquant que ce nombre est, pour tout entier naturel n , supérieur ou égal à 6.

b) Traduisez le résultat précédent à l'aide de v_{n+1} , v_n , puis prouvez par récurrence que $v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0$, soit $v_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$. La positivité de tous les termes de la suite (v_n) est, quant à elle, facile à établir.

c) L'encadrement obtenu précédemment vous permet de conclure que la suite (v_n) converge vers 0. Exprimez u_n en fonction de v_n pour déterminer la limite de la suite (u_n) .

ZOOM sur la rédaction

Explicitez la propriété P_n et mettez bien en évidence les trois étapes d'un raisonnement par récurrence : initialisation – hérédité – conclusion.

ZOOM sur la rédaction

Pensez à justifier que, pour tout entier naturel n , $\sqrt{3u_n + 4} + u_n \geq 0$.

ZOOM sur la rédaction

Précisez clairement le théorème utilisé en vous assurant que les conditions d'application sont bien remplies et en les rappelant dans votre rédaction.

ZOOM sur la rédaction

Précisez, de nouveau, clairement le théorème utilisé (ici le théorème d'encadrement) et justifiez dans votre rédaction que les conditions d'application sont bien remplies.

Figure 29 : Exemple 3.c, manuel *Transmath*, page 46.

b) Exercices proposés (non résolus)

En ce qui concerne les exercices non résolus, nous avons repéré, dans les trois manuels analysés, 51 tâches au total⁶⁶. Concernant les paradigmes (voir Figure 30 ci-dessous), nous trouvons comme résultat de cette analyse, une cohérence entre les exemples d'exercices résolus et les exercices non résolus. C'est-à-dire qu'il existe une prédominance du paradigme [A2] (qui apparaît dans 88% des exercices) sur le paradigme [A1] (présent dans 47% des exercices). Au titre d'articulation entre paradigmes, les résultats vont aussi dans le même sens que les exemples résolus ayant 28% d'une articulation de [A1] vers [A2] et 10% d'une articulation de [A2] vers [A1]. Cela permet de dire qu'une dialectique entre ces deux paradigmes n'est pas favorisée non plus dans les exercices proposés (dans la plupart des cas il s'agit d'un travail avec des conjectures).

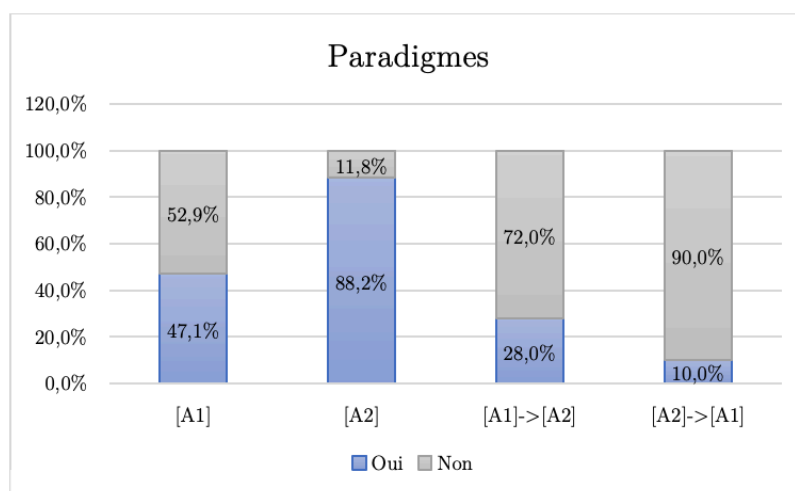


Figure 30 : Graphique analysant les paradigmes dans les exercices des manuels.

En ce qui concerne les reconnaissances (voir Figure 31 ci-dessous), les résultats varient un peu par rapport aux exemples développés. La reconnaissance de la suite récurrente exprimée en termes de u_n est prise en charge par 90% d'énoncés (elle est donc peu attendue à développer de la part des élèves) et la fonction f est explicite dans 35% des 51 exercices. Ensuite, le besoin d'une preuve par récurrence, la variation et la convergence de la suite sont à peu près similaires. La récurrence apparaît dans 62% des énoncés (alors que cela est explicite dans 70% des exemples), et la variation

⁶⁶ Voir annexe 3.5 et 3.6, page 356-379

de la suite est explicitée dans 63% d'exercices (et dans tous les exemples). Finalement la convergence est explicite dans 59% des exercices (et dans 42% des exemples).

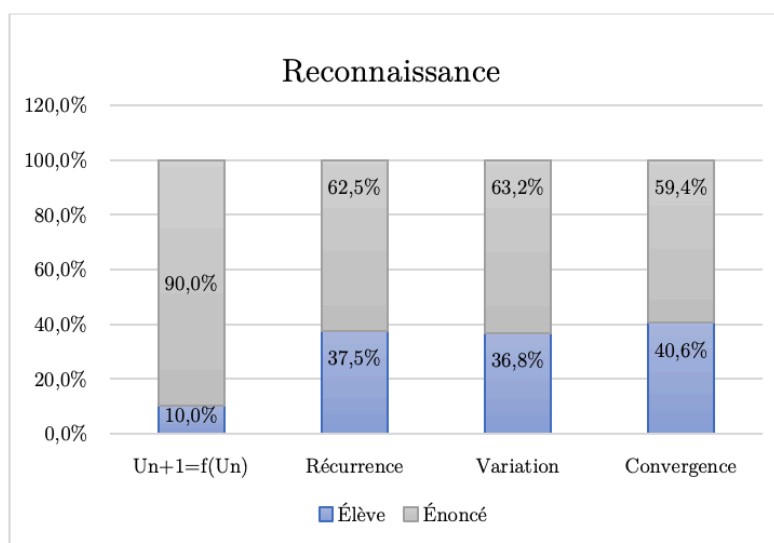


Figure 31 : Graphique analysant les reconnaissances dans les exercices des manuels.

En ce qui concerne les contrôles (voir Figure 32 ci-dessous) nous notons quelques changements dans les exercices par rapport aux exemples résolus. Les contrôles non mathématiques sont présents dans 84% des exercices proposés alors que pour les exemples c'était 100%. Concernant les contrôles mathématiques, les occasions de contrôle discursif sont présentes dans 4% des exercices (il n'y a pas de contrôle discursif explicite) et nous pouvons dire que la sous-activité de contrôle discursif est totalement à la charge de l'élève (96% d'exercices), ce qui est cohérent à la résolution d'exemples. Concernant les contrôles sémiotiques, ils sont cohérents avec les énoncés des exemples résolus. Ici, 13% constituent des occasions de contrôler et 24% constituent des contrôles sémiotiques explicites. Le contrôle instrumental est présent dans 33% des énoncés, ce qui constitue une hausse par rapport aux exemples (9%). Dans le cas des exercices, il s'agit de 13% d'occasion de contrôle instrumental et 20% de contrôle instrumental explicite. De surcroît, une corrélation entre un changement de paradigme et les contrôles de type mathématique est constaté. En effet, lorsque l'on favorise le passage du paradigme [A1] vers [A2], on observe une possibilité de contrôle sémiotique et instrumental (contrôles explicites ou seulement des occasions de contrôle). Les contrôles instrumentaux et sémiotiques, sont principalement encouragés par l'utilisation de la calculatrice (que ce soit avec l'utilisation de l'algorithmique, du tableur ou des graphiques).

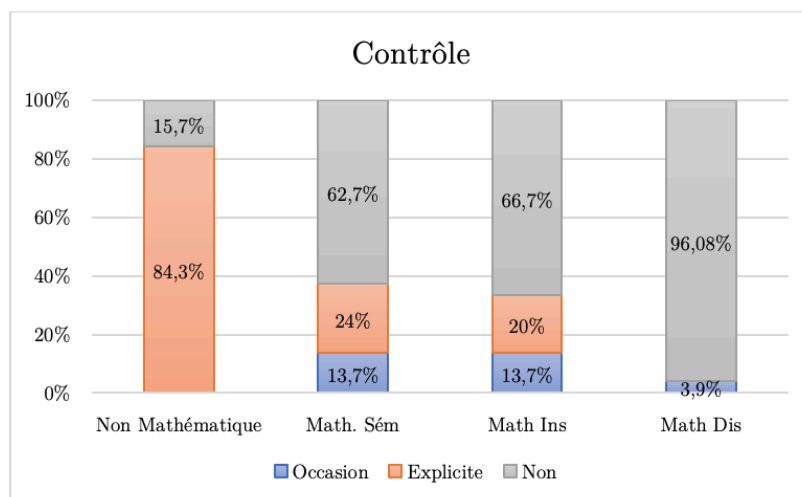


Figure 32 : Graphique analysant les contrôles dans les exercices des manuels.

L'exemple de la Figure 33 correspond à un travail dans le paradigme [A2]. Le paradigme [A1] serait potentiellement présent. Ainsi, nous ne pouvons pas dire grand-chose concernant la dialectique entre ces paradigmes si elle se produit. En effet, bien que la calculatrice soit recommandée en tant qu'aide pour effectuer une conjecture, nous ne savons pas dans qu'elle mesure cette dialectique serait mise en avant. Quant aux reconnaissances, la suite $u_{n+1} = \frac{7}{9}u_n + 2$ est explicitée dans l'énoncé mais pas la fonction définissante (comme il s'agit d'une suite arithmétique géométrique on peut ne pas utiliser la fonction pour étudier la suite car on peut utiliser une suite auxiliaire) et, la variation de la suite est apportée par l'énoncé (ce qui est représentatif des autres exercices). Le contrôle non mathématique est présent et les occasions de sous-activités de contrôle instrumental et sémiotique existent grâce à l'usage, fortement encouragée, de la calculatrice (dans ce cas, cette sous-activités serait attendue).

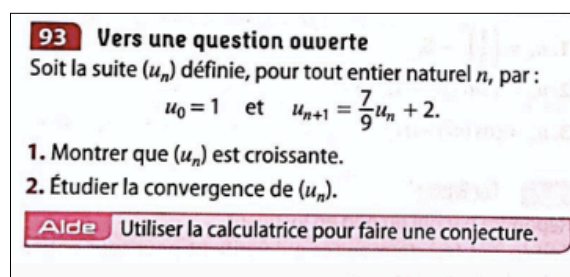


Figure 33 : Exercice a.11, manuel *Indice*, page 28.

La Figure 34 montre un exemple intéressant où l'on étudie la suite récurrente à l'aide de la fonction qui la définit. Ici les paradigmes [A1] et [A2] sont clairement présents. L'élève peut visualiser la croissance de la fonction (occasion de développer

une sous-activité de contrôle sémiotique car cela n'est pas demandé dans l'énoncé) et doit conjecturer la croissance de la suite (contrôle sémiotique explicite) pour ensuite la démontrer (possibilité de développer une sous-activité de contrôle discursif). Cela se traduit par un changement de paradigme du [A1] vers [A2] ; néanmoins le changement du paradigme de [A2] vers [A1] est peu mis en avant. Quant aux reconnaissances, l'énoncé de la tâche prend en charge trois des quatre reconnaissances repérées : la suite récurrente $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$ (où la fonction est explicitée dans l'énoncé), l'utilisation d'une preuve par récurrence et la convergence de la suite. Ainsi, seule la variation de la suite est laissée à la charge de l'élève. Concernant les sous-activités mathématiques de contrôles, même si une occasion de développer un contrôle instrumental n'est pas mise en avant, l'élève peut quand même avoir un contrôle sémiotique puisque la conversion entre registres de représentation sémiotique et leur traitement sont proposés.

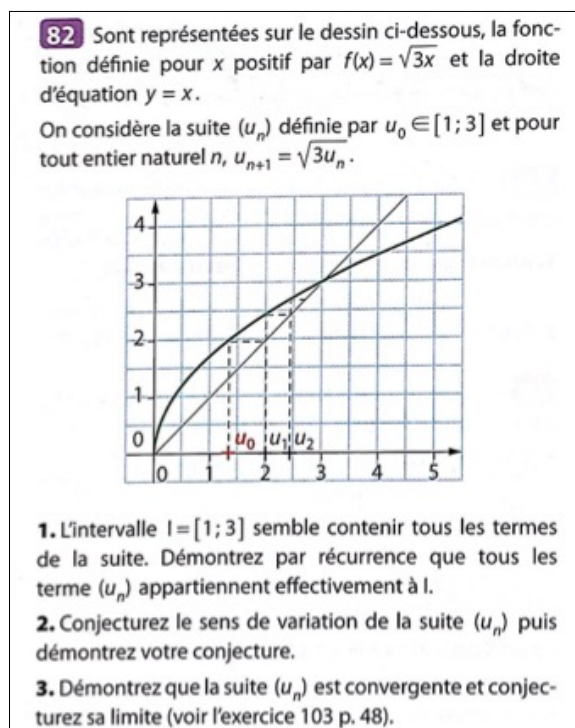


Figure 34 : Exercice c.9, manuel *Transmath*, page 44.

Finalement, l'exemple de la Figure 35 est un extrait d'un exercice d'approfondissement visant à une introduction à l'étude de la suite logistique⁶⁷. Ici, il est intéressant de remarquer que dans un type d'exercice avec une difficulté mathématique qui peut être très élevée pour la classe de TS, c'est le paradigme [A1] qui est privilégié. D'ailleurs les questions de l'énoncé favorisent les occasions pour

⁶⁷ Voir annexe 1.2.4, page 341.

développer des sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental, les reconnaissances sont à la charge de l'élève (sauf pour celle de la suite $p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$ et la fonction qui est introduite dans l'énoncé) et on ne repère pas de contrôle non mathématique. Cet exemple est isolé et ne représente pas la majorité des exercices proposés dans les manuels.

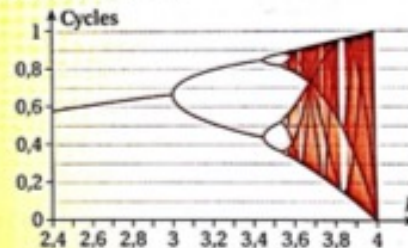
2. Étude de la suite p_n

La correspondance avec le modèle cyclique constaté au Canada est frappante, ce qui montre la validité du modèle de Verhulst. Pour en simplifier l'étude, on s'intéresse à présent à la proportion de proies p_n parmi la population totale des deux espèces pour l'année n . Cela permet d'étudier une seule suite, avec un seul paramètre. Pour tout entier n , on a $0 \leq p_n \leq 1$ et, pour voir l'évolution de cette proportion d'une année sur l'autre, il faut exprimer la suite par récurrence. Pour retrouver le phénomène cyclique recherché, il est classique d'utiliser la relation de récurrence $p_{n+1} = k p_n(1 - p_n)$ où k est un coefficient que l'on va faire varier en fonction des situations. Il est possible de tracer les différents termes de la suite (p_n) pour un réel k fixé, en traçant la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = kx(1 - x)$ ainsi que la droite d'équation $y = x$.

- Proposer une technique pour réaliser cette construction.
- Réaliser cette construction sous un logiciel de géométrie dynamique pour les 20 premiers termes de la suite en gardant la possibilité de faire varier k .
- Comment expliquer la forme du diagramme pour $k = 2,8$?
- Pour quelle valeur de k obtient-on des cycles similaires à ceux obtenus pour les lièvres et les lynx ? Comment expliquer ces cycles ?

Théorie du chaos

Le mathématicien et physicien Mitchell Feigenbaum a étudié ces phénomènes et a utilisé le diagramme suivant sur lequel on place en abscisses le nombre k et en ordonnées les points formant les cycles.



Ces diagrammes sont utilisés dans de nombreux domaines, comme l'économie, la physique, la biologie, etc.

On peut voir certaines zones blanches dans le diagramme de bifurcation de Feigenbaum. Ces zones sont des zones où règne le « chaos », c'est-à-dire où les suites ont des comportements très étranges avec d'extrêmes variations en changeant très peu les conditions initiales. Cette situation de chaos se retrouve dans de nombreux domaines et notamment les systèmes dynamiques continus.

En effet, nous avons vu ce qu'est un système dynamique discret mais si on s'intéresse à des intervalles plutôt qu'à des nombres isolés, à des fonctions plutôt qu'à des suites, à des dérivées plutôt qu'à des taux de croissance, on se retrouve avec des problèmes qui occupent les chercheurs en mathématiques à l'heure actuelle.

Figure 35 : Extrait exercice b.16, manuel *Odyssée*, page 69.

6.3 Analyses de tâches d'évaluation fin de lycée et début de l'université

En vue d'étudier un troisième niveau d'analyse des institutions, nous analyserons des tâches d'évaluation proposées à la fin de la TS et en début de L1. Cela dans le but de caractériser l'activité et le travail mathématique attendu des institutions de façon plus fine à travers la succession à suivre par l'étudiant ou l'élève. En effet, comme nous l'avons vu dans les analyses du chapitre 4, les analyses avec les deux théories TADM et ETM nous permettent d'identifier une temporalité dans l'activité et le travail que développe un sujet. Cela rend possible une reconstruction chronologique des sous-activités mathématiques (reconnaissance, organisation et traitement) et du travail mathématique (à travers les dimensions et plans verticaux des ETM).

Dans cette section nous analyserons d'abord une tâche proposée dans un examen de décembre 2018, à la fin du premier semestre de la L1. Ensuite nous analyserons une tâche du Baccalauréat Scientifique de 2016 (date relativement proche de celle de l'examen). De plus, cette tâche est cohérente avec celles qui proposent les manuels de TS en guise de préparation à cette épreuve.

6.3.1 Analyse exemple : examen de L1

La Figure 36 ci-dessous, correspond à un exercice d'un examen qui contient 5 exercices au total⁶⁸ et qui, sauf pour la filière des MIAASH, était commun à toutes les autres filières de la L1. La durée de cet examen était de 3 heures, ce qui laisse en moyenne 36 minutes de résolution par exercice.

Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in [0,1], f(x) = \frac{1}{2-x}$.

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions : $u_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2-u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$. Puis que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
4. Quelle est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Figure 36 : Tâche de l'étude d'une suite récurrente en L1.

⁶⁸ Voir annexe 3.7, page 380.

Il s'agit d'une tâche où le contrôle non mathématique est favorisé dans l'énoncé. Au titre des paradigmes, la tâche est proposée entièrement dans le paradigme [A2] donc il n'y a pas de possibilité de dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2]. Concernant les reconnaissances, seule la nécessité d'une preuve par récurrence est laissée à la charge des étudiants. Dans l'énoncé de l'examen, en plus de signaler le temps, il est déclaré que les calculatrices sont interdites (ce qui fait partie du contrat didactique) et l'environnement de la tâche est celui du papier-crayon. Cela nous permet d'assurer qu'une occasion de développer une sous-activité de contrôle instrumental n'est pas possible d'emblée. Dans ce cas, l'interdiction de la calculatrice empêche aussi la possibilité de développer une sous-activité de contrôle sémiotique : comme l'énoncé ne demande pas une conversion entre registres, cette sous-activité est très peu présente (voire presque nulle). Ci-après nous présenterons d'abord l'analyse détaillée de chacune des questions de la tâche et ses stratégies puis la succession des sous-activités et le travail mathématique attendu dans la résolution de chaque sous-tâche.

a) Analyse question 1 examen L1

Tableau 4 : Stratégies de résolution question 1.

(a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$										
Stratégie Inégalités algébriques (a.1)	<p>* Pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $0 \leq x \leq 1$ donc $-1 \leq -x \leq 0$ donc $1 \leq 2 - x \leq 2$ donc $0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2-x} \leq 1$. Cela montre que $f(x) \in [0, 1]$.</p> <p>* Dans cette stratégie on peut procéder comme suit : comme $x \in [0, 1]$ donc $2 - x > 0$, les inégalités $0 \leq \frac{1}{2-x} \leq 1$ sont vraies si et seulement si $(2 - x) \times 0 \leq 1 \leq (2 - x) \times 1$, soit $0 \leq 1 \leq 2 - x$, ce qui est vrai.</p>									
Stratégie de variations de f (a.2)	<p>* Nous pouvons procéder à l'étude de variation de f dans $[0, 1]$ par le calcul de la dérivée : $f'(x) = \frac{1'(2-x) - 1(2-x)'}{(2-x)^2} = \frac{1}{(2-x)^2} \geq 0$.</p> <p>Ainsi nous pouvons construire le tableau de variation de f comme suit :</p> <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>f</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>\nearrow 1</td></tr></table> <p>Donc pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.</p>	x	0	1	$f'(x)$		+	f	$\frac{1}{2}$	\nearrow 1
x	0	1								
$f'(x)$		+								
f	$\frac{1}{2}$	\nearrow 1								

(a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$	
	*Nous pouvons aussi prouver que f est strictement croissante en appliquant la définition élémentaire de fonction croissante : pour tout x_1 et $x_2 \in [0, 1]$ tel que $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$. Puis procéder à l'évaluation des bornes de l'intervalle.
(b) Montrer que, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$	
Stratégie récurrence	<p>On montre par récurrence que $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.</p> <p>(i) Initialisation : On a $u_0 = \alpha$ et $\alpha \in]0, 1[$ donc $u_0 \in [0, 1]$.</p> <p>(ii) Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose $u_m \in [0, 1]$.</p> <p>$u_m \in [0, 1] \Rightarrow f(u_m) \in [0, 1]$. Or $f(u_m) = u_{m+1}$. Donc $u_{m+1} \in [0, 1]$.</p> <p>(iii) Conclusion : Par le principe de récurrence montre que $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \geq 0$.</p>

La Figure 37, la Figure 38 et la Figure 39 ci-dessous montrent la succession des trois stratégies décrites. Dans chacune des trois, il faut que l'étudiant s'investisse d'abord dans une sous-activité de reconnaissance pour, ensuite, continuer avec la sous-activité de traitement. Toutefois, les reconnaissances de chacune des stratégies ne sont pas du même ordre : dans la *sous-tâche a*, il s'agit du choix de stratégie (non forcé), et dans la *sous-tâche b*, il s'agit de la nécessité du raisonnement par récurrence. De plus, dans la sous-activité de traitement de la *sous-tâche b*, il y a une reconnaissance importante concernant l'utilisation de la question précédente (hérédité), ce qui peut aussi bloquer le développement de la résolution de la tâche. Dans la *sous-tâche a* il s'agit d'introduction d'intermédiaires avec des calculs à effectuer et la construction d'un outil (le tableau de variation) pour y répondre. Ainsi, les sous-activités de traitement sont aussi d'ordre différent. En termes de la théorie des ETM, dans la stratégie a.1 par exemple, l'étudiant peut trouver des difficultés de travail dans la dimension sémiotique à travers la non conversion du registre algébrique vers le registre ensembliste ($x \in [0, 1]$ équivaut à $0 \leq x \leq 1$). Dans le cas où l'étudiant arrive à bien réaliser les conversions, l'étudiant peut trouver des difficultés dans les traitements à réaliser avec les inégalités dans le registre algébrique en tant qu'artefact symbolique pour produire la réponse souhaitée ($-1 \leq -x \leq 0$ donc $1 \leq 2 - x \leq 2$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2-x} \leq 1$). Si l'étudiant réalise ces traitements, il lui reste une dernière conversion à faire du registre sémiotique vers le registre ensembliste ($0 \leq \frac{1}{2-x} \leq 1$ équivaut à $\frac{1}{2-x} \in [0, 1]$) pour conclure la *sous-tâche a* ($f(x) \in [0, 1]$). Ainsi, les difficultés rencontrées peuvent se traduire comme des difficultés d'ordre sémiotique ou d'ordre instrumental (notamment de l'artefact symbolique).

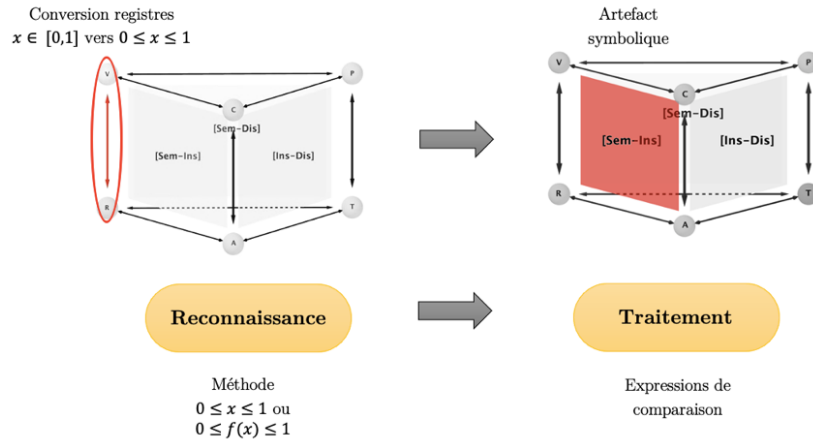


Figure 37 : Successions de sous-activités et du travail attendu dans la stratégie a.1 question 1.

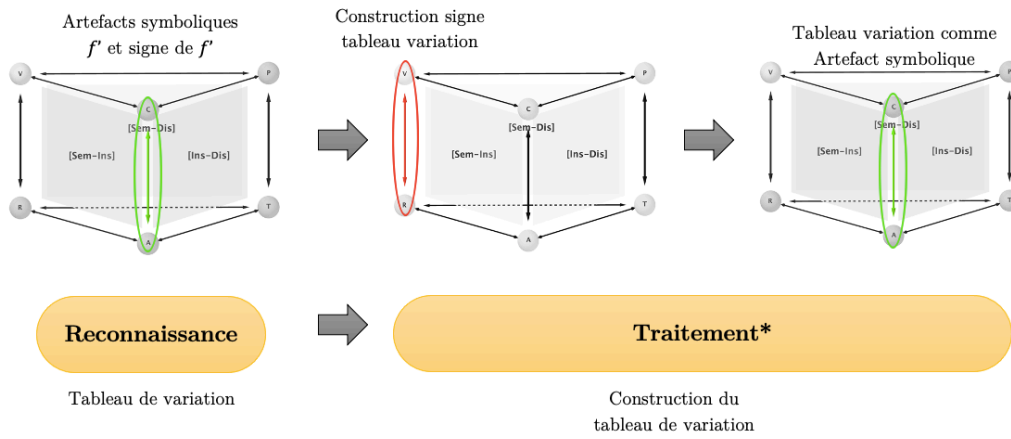


Figure 38 : Successions de sous-activités et du travail attendu dans la stratégie a.2 question 1.

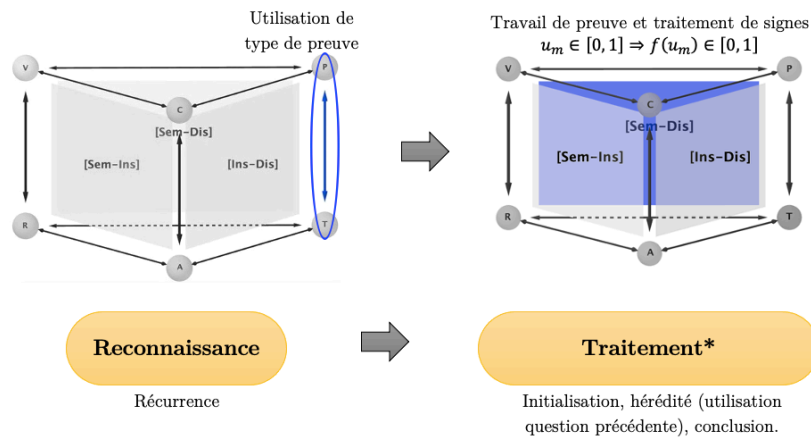


Figure 39 : Successions de sous-activités et du travail attendu dans la stratégie b question 1.

b) Analyse question 2 examen L1

Tableau 5 : Stratégies de résolution question 2.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.	
Stratégie 1 : $u_{n+1} - u_n \geq 0$	<p>Pour tout $n \geq 0$ on a :</p> $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{1}{2-u_n} - u_n = \frac{1-2u_n+u_n^2}{2-u_n} = \frac{(u_n-1)^2}{2-u_n}$ <p>Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Cela montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.</p>
Stratégie 2 : $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$	<p>Par récurrence on montre que u_n est non nul pour tout n.</p> <p>Initialisation : $u_0 = \alpha$ est non nul par définition car $\alpha \in]0, 1[$.</p> <p>Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose u_m est non nul.</p> <p>On sait que $u_{m+1} = \frac{1}{2-u_m}$ et par résultat de la question 1, on a que $2 - u_m \in [1, 2]$ donc u_{m+1} est non nul.</p> <p>Conclusion : Par le principe de récurrence on montre que u_n est non nul pour tout $n \geq 0$.</p> <p>Puis nous procédons par l'étude du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:</p> $\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1}{(2-u_n)u_n} = \frac{1}{2u_n - u_n^2} = \frac{1}{(2u_n - u_n^2 - 1) + 1} \\ &= \frac{1}{-(u_n - 1)^2 + 1} > 1 \end{aligned}$ <p>car $u_n \in [0, 1]$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Cela montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante</p>
Stratégie 3 : récurrence	<p>On montre par récurrence que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (on reviendra à la stratégie 1)</p> <p>(i) Initialisation : On a $u_0 \leq u_1$ car</p> $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = \frac{1}{2-\alpha} - \alpha = \frac{1-2\alpha+\alpha^2}{2-\alpha} = \frac{(\alpha-1)^2}{2-\alpha}$ <p>$\alpha \in]0, 1[$ donc $u_1 - u_0 \geq 0$.</p> <p>(ii) Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose $u_{m-1} \leq u_m$. $u_{m+1} - u_m$</p> $= f(u_m) - u_m = \frac{1}{2-u_m} - u_m = \frac{1-2u_m+u_m^2}{2-u_m} = \frac{(u_m-1)^2}{2-u_m}$ <p>donc $u_{m+1} - u_m \geq 0$.</p> <p>(iii) Conclusion : Par le principe de récurrence on montre que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.</p>
Stratégie théorème *	<p>Utilisation théorème : si f croissante alors (u_n) monotone. Si $f(u_0) - u_0 \geq 0$, alors (u_n) est croissante.</p> <p>Appliquons ce théorème :</p> $f(u_0) - u_0 = \frac{1}{2-\alpha} - \alpha = \frac{1-2\alpha+\alpha^2}{2-\alpha} = \frac{(\alpha-1)^2}{2-\alpha} \geq 0$

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.	
	<p>Donc (u_n) est croissante.</p> <p>*Ce théorème n'est pas traité dans la classe de Licence que nous analysons.</p>

La Figure 40 correspond aux successions de sous-activités et travail attendu dans les stratégies 1 et 2 de la question 2. Que ce soit pour la stratégie 1 ou 2, l'étudiant commence par une sous-activité de reconnaissance de la méthode à utiliser pour prouver que la suite est croissante. Il peut choisir entre $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (choix non forcé). En termes de travail mathématique, l'étudiant commence par l'utilisation d'une des méthodes en tant qu'artefact symbolique, ce qui active la dimension instrumentale. Ensuite, l'étudiant continue dans une sous-activité de traitement par laquelle il effectue des calculs pour arriver à une expression algébrique qui lui permet de conclure (dans la stratégie 2, une argumentation supplémentaire est nécessaire, puisque pour utiliser la méthode $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ il est nécessaire que u_n soit strictement positif). Ici la reconnaissance de l'identité remarquable dans l'expression $1 - 2u_n + u_n^2$ vers $(u_n - 1)^2$ est nécessaire. En même temps, en termes de travail, pour bien utiliser cet artefact symbolique, l'élève doit réaliser un travail de traitements sémiotiques dans le registre algébrique ce qui amène à activer le plan vertical [Sem-Ins] pour conclure avec la conversion du registre sémiotique algébrique (comme $\frac{(u_n-1)^2}{2-u_n} \geq 0$) vers le registre sémiotique de langue naturelle (la suite (u_n) est croissante).

La Figure 41 illustre la succession de la stratégie 3. Il s'agit d'abord d'une sous-activité de reconnaissance de la méthode de preuve par récurrence (choix non forcé). Cela amène l'activation de la dimension discursive puisque la récurrence est utilisée comme une méthode de preuve. Ensuite il est nécessaire de développer la méthode avec les étapes d'initialisation, d'hérédité et de conclusion. Ici, comme dans les stratégies précédentes, la reconnaissance de l'identité $(u_n - 1)^2$ est nécessaire. En termes de travail mathématique, cela implique un travail dans le plan [Sem-Ins] puisqu'il s'agit d'effectuer la preuve par récurrence où, dans chacune des étapes, il faut faire un travail de traitements et de conversions dans le registre de représentation algébrique et dans le registre de représentation de la langue naturelle. Par exemple, l'étudiant doit non seulement établir l'égalité $\frac{1-2u_m+u_m^2}{2-u_m} = \frac{(u_m-1)^2}{2-u_m}$, mais aussi convertir $u_n \leq u_{n+1}$ au registre de langue naturel pour conclure que la suite (u_n) est croissante.

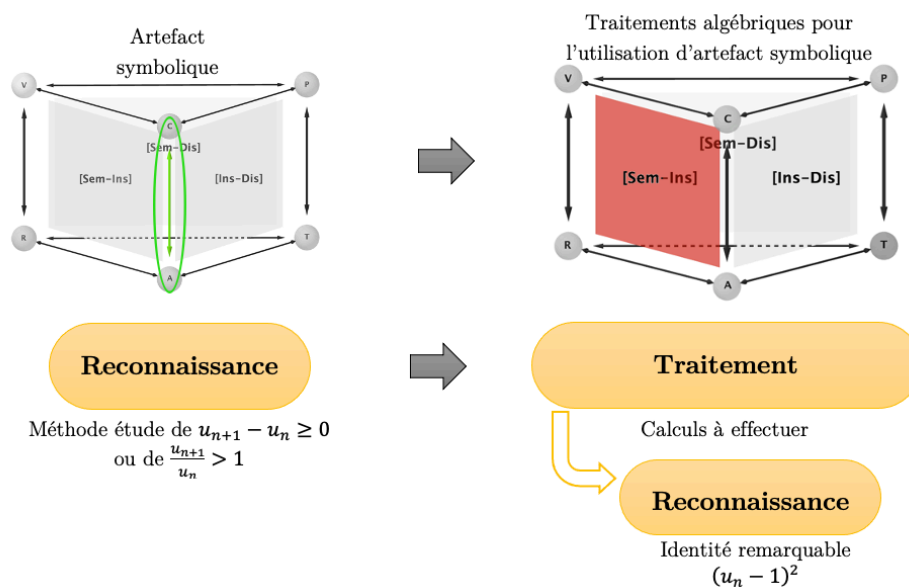


Figure 40 : Successions de sous-activités et du travail attendu dans les stratégies 1 et 2 de la question 2.

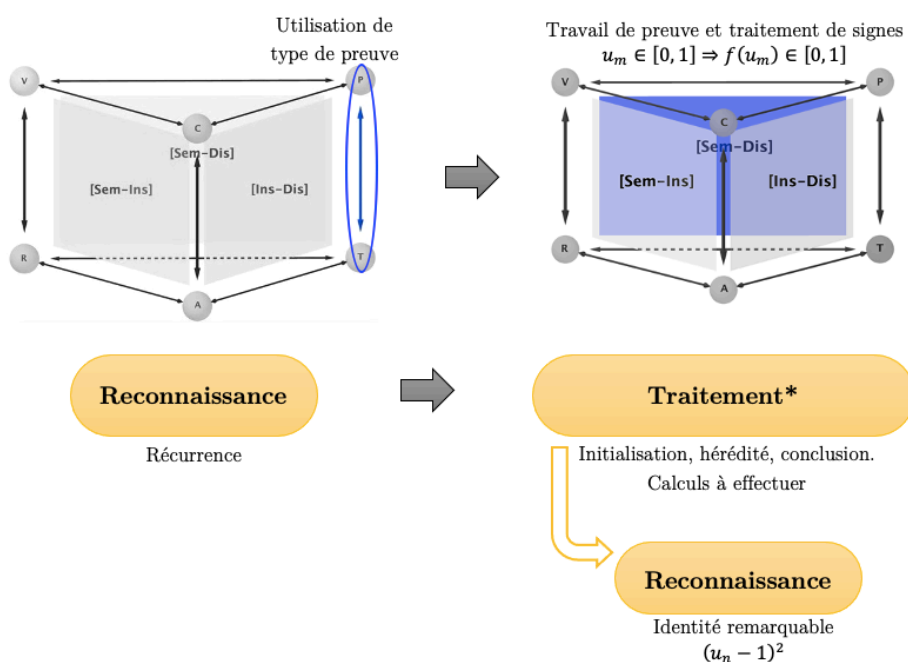


Figure 41 : Successions de sous-activités et du travail attendu dans la stratégie 3 de la question 2.

c) Analyse question 3 examen L1

Tableau 6 : Stratégie de résolution question 3.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge	
Stratégie théorème	D'après la question 1, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est majorée par 1. De plus, d'après la question 2, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante. Donc par théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

Quant à la succession de sous-activités et travail attendu dans la question 3 (Figure 42), l'étudiant doit reconnaître le théorème de la limite monotone pour répondre à la question. Ici il s'agit d'un choix forcé. En termes de travail mathématique, cela veut dire que l'étudiant identifie ce théorème comme dans son référentiel théorique. Ensuite, l'étudiant doit développer une sous-activité du traitement en utilisant les résultats de questions précédentes, c'est-à-dire que la suite est croissante et majorée. Cela amène à activer la dimension instrumentale chez l'étudiant en utilisant le théorème en tant qu'artefact symbolique pour y répondre.

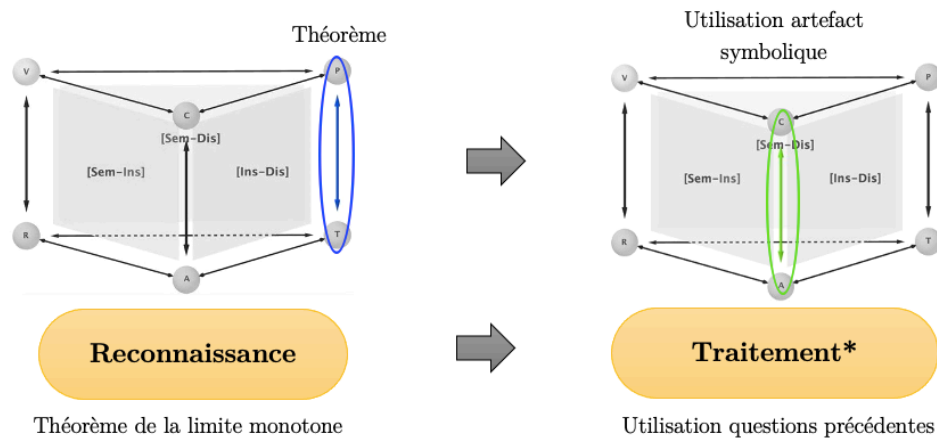


Figure 42 : Successions de sous-activités et du travail attendu dans la stratégie de la question 3.

d) Analyse question 4 examen L1

Tableau 7 : Stratégies de résolution question 4.

4. Quelle est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?	
Stratégie passage à la limite	On note la limite de $(u_n)_{n \geq 0}$ comme l . Ensuite, par passage à la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$ car f est continue en l . Puis comme $u_{n+1} = f(u_n)$ on obtient $f(l) = l$ par passage à la limite. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2-x} = x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ce qui montre que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 1.

Concernant la succession de sous-activités et du travail attendu dans la question 3 (Figure 43), l'étudiant doit d'abord reconnaître qu'un passage à la limite est nécessaire pour utiliser $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$. Ainsi l'élève est amené à développer une sous-activité de reconnaissance. Cela nécessite ensuite une sous-activité de traitement pour l'utilisation de $f(l) = l$. En termes de travail mathématique, il s'agit de l'activation de la dimension instrumentale notamment pour l'utilisation de $f(l) = l$ en tant qu'artefact symbolique. La sous-activité de traitement est requise ensuite pour finaliser la résolution de la tâche, notamment pour effectuer les calculs de $f(x) = x$ et trouver la valeur de la limite dans cette sous-activité de traitement, la reconnaissance de l'identité remarquable ou le calcul de delta dans l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$ est nécessaire pour conclure que $x = 1$. Puisqu'il s'agit d'un travail sémiotique de traitements dans le registre algébrique et de la finalisation de la preuve, cela se traduit par un travail mathématique dans le plan vertical [Sem-Ins].

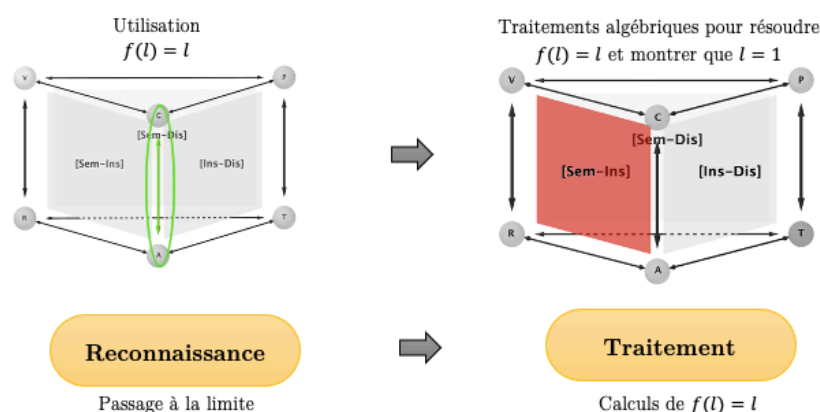


Figure 43 : Successions de sous-activités et du travail attendu dans la question 4.

6.3.2 Analyse exemple tâche d'évaluation : Baccalauréat S


La tâche de la Figure 44 correspond à un exercice du Baccalauréat Scientifique Métropole de 2016. L'épreuve possède 4 exercices et l'élève dispose de 4 heures pour résoudre la totalité. Il s'agit de l'exercice 3 qui est le seul exercice qui correspond aux suites. À la différence de la classe de L1, les calculatrices sont autorisées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} , par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

- Résoudre dans \mathbf{R} l'équation : $f(x) = x$.
- Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
f			+



- Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0,1]$, $f(x)$ appartient à $[0,1]$.
- On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels ;
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln(N^2 + 1) < A$ N prend la valeur $N+1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

- Que fait cet algorithme ?
- Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

- Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.
- Étudier les variations de la suite (u_n) .
- Montrer que la suite (u_n) est convergente.
- On note l sa limite, et on admet que l vérifie l'égalité $l = f(l)$. En déduire la valeur de l .

Figure 44 : Tâche suite récurrente Baccalauréat Scientifique Métropole (2016).

Il s'agit de l'étude d'une suite récurrente (décroissante) – Partie B - qui a été précédée par l'étude de la fonction f (croissante) qui définit la suite – Partie A. Malgré le fait que la calculatrice est acceptée, l'étude de la suite, tel que l'énoncé de la Partie B est rédigé, ne demande pas l'utilisation de la calculatrice. Nous présenterons l'analyse de chaque question de l'étude de la suite ci-dessous.

a) Analyse question 1 Bac S

Tableau 8 : Stratégie résolution question 1 Bac S.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n appartient à $[0, 1]$	
Stratégie récurrence	<p>On montre par récurrence que $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.</p> <p>(i) Initialisation : On a $u_0 = 1$ donc $u_0 \in [0, 1]$.</p> <p>(ii) Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose $u_m \in [0, 1]$. Comme $u_m \in [0, 1] \Rightarrow f(u_m) \in [0, 1]$ (par résultat de la question A3), on a $u_{m+1} \in [0, 1]$.</p> <p>(iii) Conclusion : Par le principe de récurrence on montre que $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \geq 0$.</p>

Pour cette question, la reconnaissance de la méthode d'une preuve par récurrence est suggérée. Ainsi, l'élève doit seulement appliquer les étapes de la preuve, travaillées pendant l'année scolaire dans la classe de Terminale Scientifique. Comme ces étapes sont classiques, la seule sous-activité à développer par l'élève est celle du traitement. En termes d'ETM, ce travail se traduit par des traitements de signes dans la preuve par récurrence, produisant un travail commandé par les dimensions du plan vertical [Sem-Dis].

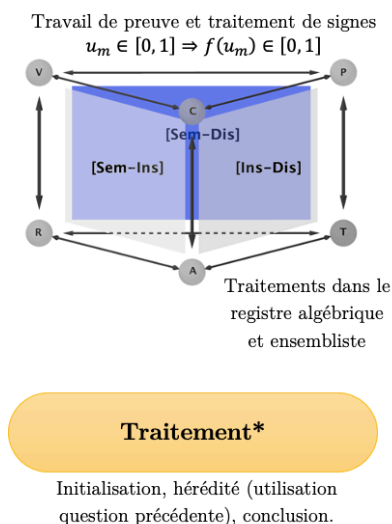


Figure 45 : Sous-activité et travail attendu dans la question 1.

b) Analyse question 2 Bac S

Tableau 9 : Stratégies résolution question 2 Bac S

2. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.	
Stratégie 1 : signe de $u_{n+1} - u_n$	<p>Pour tout $n \geq 0$ on a :</p> $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \ln(u_n^2 + 1) - u_n = -\ln(u_n^2 + 1).$ <p>Comme $u_n^2 + 1 \geq 1$ et que la fonction \ln est croissante $-\ln(u_n^2 + 1) \leq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Cela montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.</p>
Stratégie 2 : étude de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$	<p>On a que u_n est positive par résultat de la question 1. Pour cette méthode on doit d'abord prouver que u_n est non nul $\forall n \in \mathbb{N}$.</p> <p>(i) Initialisation : On a u_0 non nul par définition.</p> <p>(ii) Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose que u_m est non nul. Puisque f est strictement croissante elle possède au plus un zéro. Or $f(0) = 0$, 0 est donc le zéro de f. Comme u_m est non nul, $u_{m+1} = f(u_m)$ est aussi non nul.</p> <p>(iii) u_n est non nul $\forall n \in \mathbb{N}$.</p> <p>On peut alors procéder par l'étude du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.</p> <p>Pour tout $n \geq 0$ on a :</p> $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n - \ln(u_n^2 + 1)}{u_n} = 1 - \frac{\ln(u_n^2 + 1)}{u_n} < 1$ <p>Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.</p>
Stratégie 3 :	<p>On montre par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.</p> <p>(i) Initialisation : On a $u_0 \geq u_1$ car</p> $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = f(1) - 1 = -\ln(2) \text{ et comme } -\ln(2) < 0 \text{ donc } u_1 - u_0 \leq 0.$ <p>(ii) Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose $u_{m-1} \geq u_m$.</p> $u_{m+1} - u_m = f(u_m) - u_m = u_m - \ln(u_m^2 + 1) - u_m = -\ln(u_m^2 + 1) \leq 0$ <p>donc $u_{m+1} - u_m \leq 0$.</p> <p>(iii) Conclusion : Par le principe de récurrence montre que $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.</p>

La Figure 46 est une illustration des successions de sous-activités et du travail attendu à l'issu des stratégies 1 et 2 de la question 3. Dans les deux stratégies l'élève commence son activité par une sous-activité de reconnaissance avec un choix de la méthode à utiliser (choix non forcé entre l'étude de $u_{n+1} - u_n$ ou de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ou une preuve par récurrence). Il est à remarquer ici qu'à la différence de l'énoncé de l'université, la

question n'explicite pas la variation de la suite. Cela amène à l'activation de la dimension instrumentale dans l'ETM personnel de l'élève car la méthode choisie devient un artefact symbolique. Pour développer cette méthode, il faut que l'élève mette en fonctionnement une sous-activité de traitement pour effectuer des calculs afin d'arriver à une expression algébrique qui permette de conclure (comme dans le cas de la question L1, il faut que l'élève s'assure que u_n soit non nul pour tout n pour appliquer la stratégie 2). Dans les deux stratégies il faut que dans cette sous-activité de traitement, l'élève fasse une nouvelle reconnaissance de l'utilisation de la croissance de f (résultat question précédente). En termes de travail mathématique, l'utilisation de cet artefact symbolique entraîne un travail dans des registres sémiotiques, notamment pour les traitements et conversions à réaliser. Ce travail active le plan vertical [Sem-Ins] de l'ETM personnel de l'élève.

La Figure 47 montre la succession de la stratégie 3. Tous d'abord il faut que l'élève s'investisse dans une sous activité de reconnaissance de la méthode de preuve par récurrence, ce qui active la dimension discursive dans l'espace de travail mathématique de l'élève. Ensuite, la sous-activité de traitement est nécessaire pour continuer avec la résolution de la tâche en posant et développant les étapes de la preuve où la reconnaissance de l'utilisation de la croissance de f (une des questions précédentes) est nécessaire. Cette preuve par récurrence, comme dans les cas précédents, active le plan vertical [Sem-Dis].

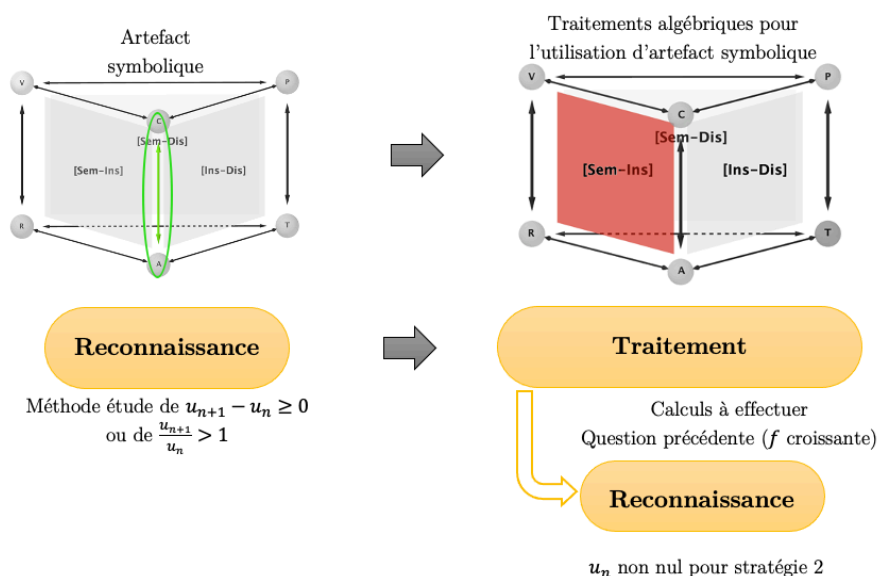


Figure 46 : Successions de sous-activités et du travail attendu dans les stratégies 1 et 2 de la question 2.

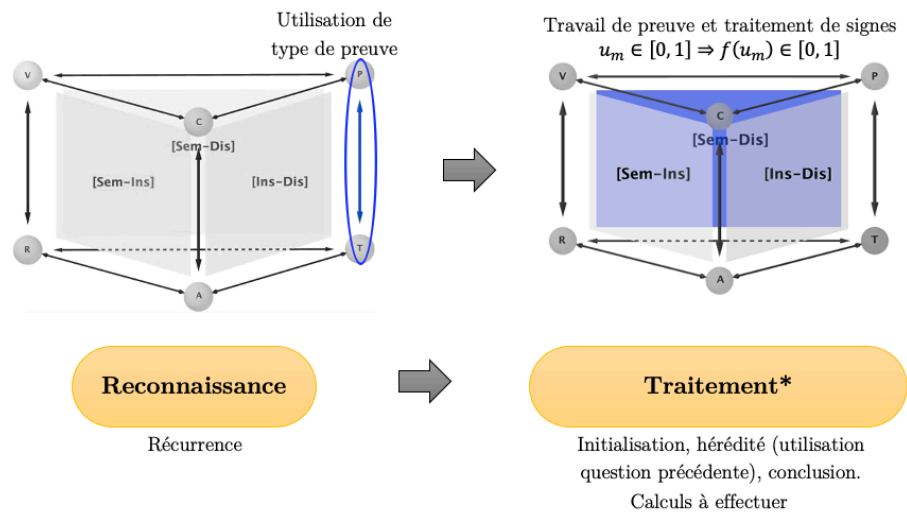


Figure 47 : Successions de sous-activités et du travail attendu dans la stratégie 3 de la question 2.

c) Analyse question 3 Bac S

Tableau 10 : Stratégie de résolution question 3 Bac S.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge	
Stratégie théorème	D'après la question 1, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est minorée par 0. De plus, d'après la question 2, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante. Donc par théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

La Figure 48 montre la succession de sous-activités et du travail attendu dans la question 3. Ici l'élève doit d'abord s'investir dans une sous-activité de reconnaissance avec le choix forcé du théorème de la limite monotone. Cela signifie que l'élève active la dimension discursive en utilisant le théorème qui se trouve dans son référentiel théorique. Cela est suivi d'une sous-activité de traitement car l'élève a besoin d'utiliser les résultats de questions précédentes pour y répondre, ce qui amène à activer la dimension instrumentale et à utiliser le théorème comme artefact symbolique dans le travail mathématique que développe l'élève.

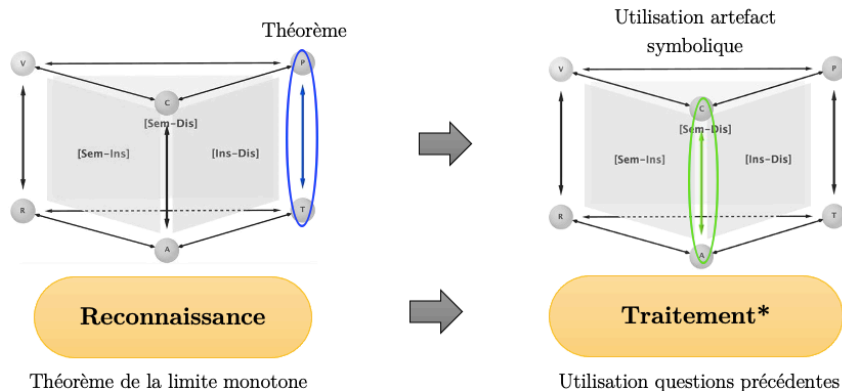


Figure 48 : Succession de sous-activités et du travail attendu dans la question 3.

d) Analyse question 4 Bac S

Tableau 11 : Stratégie question 4 Bac S

4. On note l sa limite, et on admet que l vérifie l'égalité $f(l) = l$. En déduire la valeur de l ?	
Stratégie $f(l) = l$	D'après la question A.1 on a : $f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln(x^2 + 1) = x \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Comme $f(l) = l$ on peut en déduire que $l = 0$.

La Figure 49 montre la sous-activité et le travail mathématique à développer par l'élève. Cela concerne seulement la sous-activités du traitement pour le calcul de $f(l) = l$ (la reconnaissance de la méthode a été apportée par l'énoncé). Concernant le travail mathématique, le travail se fait dans le plan [Ins-Dis] car il s'agit de résoudre l'équation en utilisant l'artefact symbolique $f(l) = l$ avec des connaissances sur la fonction \ln qui interviennent.

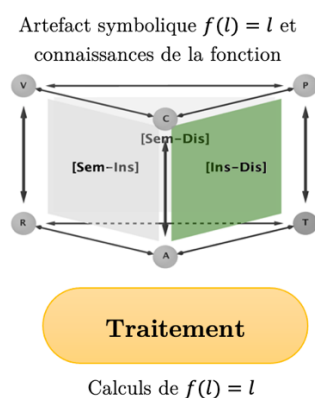


Figure 49 : Sous-activité et travail attendu dans la question 4.

6.4 Conclusion du chapitre 6

Nous revenons à la QR1 rappelée dans l'introduction de ce chapitre à laquelle nous souhaitons répondre : *Quelles sont les continuités et les ruptures de la transition L-U en France quant aux suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$? Plus particulièrement, que peut-on dire des trois sous-activités mathématiques de contrôle (sémiotique, instrumental, discursif) et des paradigmes de l'Analyse [A1] et [A2] dans les ETM de référence ; et quelles sont les caractéristiques pour les successions de l'activité et du travail mathématique dans les ETM attendus de chaque institution ?*

Pour répondre à cette question, nous avons établi trois niveaux d'analyse où chacun d'entre eux nous permet d'aller plus en profondeur dans les analyses des activités et du travail mathématique. Nous avons identifié l'analyse de programmes comme le premier niveau puisqu'ils nous permettent d'avoir une vision globale de la classe à analyser et les objectifs généraux fixés par les institutions. Mais cela n'est pas suffisant pour caractériser l'ETM de référence ni l'ETM attendu. C'est ainsi que nous avons poursuivi avec un deuxième niveau d'analyse qui cherchait à caractériser les tâches proposées aux élèves et aux étudiants dans chacune des classes. Cela nous a permis de caractériser de façon générale comment les paradigmes [A1] et [A2] sont considérés, d'identifier les reconnaissances qui sont apportées dans les énoncés et lesquelles sont attendues pour être développées par les élèves, et finalement, quel rôle jouent les différents types de contrôle dans les énoncés de ces tâches. Nous avons repéré les contrôles non mathématiques ainsi que les sous-activités de contrôle sémiotique, instrumental et discursif en identifiant les occasions de contrôle ainsi que le contrôle explicite. Un dernier niveau d'analyse nous permet de connaître l'ETM attendu : il s'agit de l'analyse de tâches d'évaluation à la transition L-U. Dans ces analyses nous avons pu relever notamment la succession existante dans la résolution de ces tâches qui se construisent grâce au développement de sous-activités mathématiques et l'activation de dimensions ou de plans verticaux de l'ETM personnel d'élèves et des étudiants. Ainsi, les analyses fournies nous permettent de constater les ruptures et les continuités des ETM de référence et de l'activité mathématique de chacune des institutions dans chacun de ces trois niveaux d'analyse ; ce que nous présentons ci-dessous :

Continuités dans les ETM de référence et attendu de la fin de lycée et du début de l'université

En ce qui concerne les continuités des programmes (premier niveau d'analyse) dans les deux niveaux d'enseignement, on les observe particulièrement dans les éléments du référentiel théorique : la définition de limite à l'infini dans le cas réel, l'unicité de la limite, un travail d'opération de limites et d'inégalités, le théorème de gendarmes, définitions de suites bornées, suites monotones et le théorème de la limite monotone.

Dans les analyses des tâches de cours (deuxième niveau d'analyse) nous identifions comme continuité le paradigme [A2] qui est largement travaillé dans les deux classes analysées. Ensuite, une deuxième continuité est la non prédominance de la dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] (surtout dans le cas du travail de [A2] vers [A1]), même si dans la classe de TS les deux paradigmes sont présents. De plus, la reconnaissance de la suite récurrente en termes de u_n reste explicitée dans la plupart des tâches des deux institutions et la reconnaissance de la convergence est attendue pour être développée par l'élève dans la plupart des exercices. Finalement, les contrôles non mathématiques sont fortement présents en L1 et en TS. Est-ce que ce dernier point répond, de façon plus générale, à une partie du contrat didactique des deux institutions ? Si oui, que se passerait-il avec les résultats des élèves et des étudiants si on réduisait les possibilités de ce type de contrôle dans les exercices ?

Avec les analyses de tâches d'évaluation (troisième niveau d'analyse), nous observons des continuités concernant l'ETM attendu à partir des successions de sous-activités et du travail mathématique car ces successions restent les mêmes pour les résolutions des questions 2 et 3. En effet, les connaissances à mettre en fonctionnement (éléments du référentiel théorique) pour étudier la variation de la suite (preuve par récurrence, étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ et étude du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$) et pour montrer la convergence de la suite (théorème de la limite monotone) restent les mêmes au lycée et à l'université. Par ailleurs, nous repérons que l'ETM personnel attendu est plutôt dans le paradigme [A2] car il est le seul à être utilisé dans l'étude de la suite dans les deux tâches d'évaluation. Aussi, le travail à développer présente presque les mêmes types de signes à utiliser (la plupart dans le registre algébrique) et, en général, c'est le traitement de ces signes qui va permettre un discours mathématique cohérent ainsi que des signes utilisés en tant qu'outils (les artefacts symboliques). Finalement, en ce qui concerne les contrôles non mathématiques, ils constituent aussi une continuité. En effet les deux énoncés donnent déjà l'intervalle stable par f et ils explicitent tous les deux que la suite est convergente.

Ruptures dans les ETM de référence et attendu de la fin de lycée et du début de l'université

Concernant les programmes (premier niveau d'analyse), les principales ruptures entre le lycée et l'université sont les suivantes : (1) La sous-activité mathématique de contrôle instrumental est attendue dans le travail des élèves en TS mais rien n'est précisé dans les programmes de L1, (2) L'ordre de contenus est différent toutefois cela peut changer selon les enseignants (en TS on commence par le raisonnement par récurrence et les suites, en L1 on commence par l'étude de fonctions). (3) Les éléments du référentiel théorique : contrairement à la TS, la preuve par récurrence n'apparaît pas comme un contenu du cours en L1. Les suites y sont introduites dans les nombres complexes, ce qui signifie qu'elles sont travaillées en deux dimensions alors qu'au lycée, on travaille les suites seulement en une dimension dans le cas réel. En L1 on introduit la définition de suites adjacentes (absentes en TS) et il existe une introduction de définitions formelles tout au long du cours ainsi qu'un accent sur les preuves formelles par rapport à la TS.

Dans les tâches présentées dans les cours (deuxième niveau d'analyse), les exercices résolus dans les manuels et ceux qui sont potentiellement proposés dans les classes, permettent de caractériser l'activité et le travail à développer dans les institutions en ce qui concerne les paradigmes présents, les reconnaissances, les contrôles mathématiques et non mathématiques. Nous observons tout d'abord une rupture qui concerne les contextes des tâches : dans le cas de la classe de L1, les étudiants trouvent dans la feuille des cours TD seulement 3 exercices parmi 25 sur les suites récurrentes et le mot récurrence n'est évoqué que pour nommer la suite ; au lycée, par contre, la tâche est présente dans plusieurs exercices des manuels de la classe de TS, et la démonstration par récurrence fait un objet d'étude du cours. En ce qui concerne les ruptures des paradigmes travaillés, il n'y a guère de paradigme [A1] dans la classe de L1 alors qu'en TS il est présent dans la moitié des exercices. Ainsi, on n'observe pas de dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] en L1 alors qu'en TS on l'observe de façon limitée. Concernant les ruptures liées aux reconnaissances, alors qu'en TS la récurrence était apportée dans plus de la moitié des exercices (exemples résolus et exercices proposés), à l'université la reconnaissance de la récurrence est une sous-activité attendue à développer par l'élève dans tous les exercices. La variation de la suite est une reconnaissance plus attendue à développer par l'élève en L1 qu'en TS.

Concernant la sous-activité de contrôle (contrôles mathématiques), il est à remarquer la corrélation existante entre le changement de paradigme et les occasions de contrôle ou contrôle explicite. En effet, lors que l'on favorise un passage du

paradigme [A1] vers [A2] ou de [A2] vers [A1] on observe la possibilité de développer les sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental avec des occasions de contrôle ou d'un contrôle explicite. Nous observons qu'un peu moins de la moitié des exercices permet ce type de contrôles mathématiques dans la classe de TS ; néanmoins, ils ne sont pas possibles dans la classe de L1. Mais quelles sont les raisons qui motivent ce choix de l'institution université ? Pourquoi empêcher les élèves d'avoir des occasions de contrôle instrumental, notamment avec la calculatrice ? Plus largement, concernant ces ruptures, nous n'observons pas un travail sur les conjectures dans les tâches de L1 alors qu'en TS, cela fait partie des exercices. Par ailleurs, la preuve par récurrence est requise dans le développement d'exercices de L1, sans être traitée dans les contenus, ce qui pourrait être interprété comme si, à l'université, ce type de preuve était considéré comme une connaissance ancienne (ou un acquis) pour les élèves qui devraient donc pouvoir l'utiliser en tant qu'outil.

Les analyses des tâches d'évaluation (troisième niveau d'analyse) permettent une comparaison de tâches proposées aux deux niveaux d'enseignement et cherche à caractériser la succession des sous-activités et du travail mathématique attendu par chaque institution. Ces successions permettent une analyse des tâches qui est plus fine par rapport à celles analysées dans le niveau précédent. Tout d'abord, l'exercice du baccalauréat portait sur l'étude de la suite donnée par $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$ et $u_0 = 1$. L'étude est faite en deux parties, la première concernant l'étude de la fonction en jeu et la seconde concernant la suite elle-même et les tâches sont divisées en plusieurs questions où la mise en fonctionnement de connaissances répond à un *niveau technique* (elles sont indiquées). L'exercice de l'examen de niveau universitaire porte sur la suite donnée par $u_{n+1} = 1/(2 - u_n)$ et $u_0 = \alpha$ dans $[0,1]$. Cet exercice a un niveau de complexité plus élevé, tout d'abord à cause de la généralité de α . Ici, l'étude de la suite et l'étude de la fonction sont liées de telle sorte que les étudiants doivent davantage reconnaître et contrôler les objets mathématiques sur lesquels ils travaillent. Les sous-tâches sont aussi divisées en plusieurs questions mais à la différence du baccalauréat, les étudiants de l'université ont moins de questions qui peuvent orienter leur activité, ce qui se traduit aussi par un *niveau disponible* de mise en fonctionnement de connaissances (elles ne sont pas données dans l'énoncé, notamment pour la question 1 et la question 4). Concernant les ruptures des successions analysées, une première se trouve dans l'énoncé et la résolution de la question 1. Alors que dans l'examen de L1 il faut montrer la stabilité de l'intervalle en addition aux bornes de la suite, au Baccalauréat il faut seulement montrer que la suite est bornée (la preuve de la stabilité de l'intervalle correspond à l'étude de la fonction - Partie A). Ce changement provoque une exigence cognitive différente dans la tâche. En effet, dans le cas de L1 il y a des

choix non forcés à mettre en fonctionnement qui amènent tous à des sous-activités de reconnaissance puis de traitement et à l'activation de différentes dimensions ou plans verticaux de l'ETM (selon les choix de stratégies, on peut d'ailleurs activer les trois dimensions). Au contraire, dans le cas du Baccalauréat, il s'agit seulement de la sous-activité du traitement et de l'activation du plan vertical [Sem-Dis] de l'ETM. Par ailleurs, nous observons une deuxième rupture dans la succession de la résolution de la question 4. En effet, en L1 il est demandé la valeur de la limite de la suite (sans aucune aide), et, au Baccalauréat, il faut donner la valeur de limite sachant que $f(l) = l$. Alors qu'en L1 la résolution de la tâche demande le développement de sous-activités de reconnaissance et de traitement avec l'activation de la dimension instrumentale et du plan vertical [Sem-Ins], la tâche du Baccalauréat nécessite seulement la mise en fonctionnement d'une sous-activité de traitement (qui est simple car les élèves doivent juste résoudre l'équation) et l'activation du plan [Ins-Dis] de l'ETM. Une dernière rupture concerne la sous-activité de contrôle mathématique. Bien que la tâche du Baccalauréat ait été proposée de sorte que l'élève n'utilise pas la calculatrice, elle pourrait éventuellement être utilisée permettant ainsi le développement d'un contrôle mathématique instrumental et sémiotique de la part de l'élève ce qui est, comme nous l'avons signalé, interdit à l'université. Cela est paradoxal si l'on considère que les étudiants universitaires ont une plus grande responsabilité quant à l'orientation de l'ensemble du raisonnement et ont besoin d'un niveau de contrôle plus élevé afin de réussir la tâche globale.

Par ce qui précède nous pouvons dire que les théories utilisées et le networking de théories effectué, nous permettent d'observer des ruptures et des continuités dans l'étude de suites récurrentes à la transition L-U à partir de l'étude de tâches sur ces suites récurrentes. Par ailleurs, les analyses menées nous permettent de relever une des questions que nous avons citée dans le chapitre 2, posée par Gueudet (2008) : *Les compétences en matière de technologie acquises au lycée sont-elles exploitées à l'université ?* [Notre traduction] (Ibid., p. 252). Avec l'analyse des programmes, des manuels (de cours et de tâches) et les tâches d'évaluation, nous pouvons dire que la réponse, quant à l'étude de suites récurrentes, est non. D'ailleurs les tâches travaillées au lycée diffèrent de celles travaillées à l'université non seulement du point de vue technologique mais aussi de par les types de travail réalisé avec les paradigmes [A1] et [A2]. Au lycée, même si le contrôle privilégié est celui du non mathématique, il existe quand même la possibilité de contrôler l'activité et le travail mathématiquement grâce à la calculatrice, ce qui n'est pas possible à l'université.

Un autre point important à soulever est l'importance du théorème du point fixe dans l'étude de suites définies par récurrence. En effet, ce théorème n'est pas abordé dans la classe du TS au lycée ni du L1 à l'université, néanmoins il est au centre de la méthode d'étude de ces suites, que ce soit du point de vue algébrique (pour chercher les limites possibles de la suite en étudiant les solutions de $f(x) = x$) ou du point de vue graphique sans ou avec calculatrices. L'utilisation du point fixe est une méthode rigoureuse et pertinente, néanmoins l'usage qu'en font les élèves ne semble pas être questionné. De cette façon les élèves, au lieu d'entreprendre une étude d'une suite par eux-mêmes, résolvent un certain nombre de tâches très guidées et cadrées. Cela est fait notamment par le guidage de contrôles non mathématiques et les reconnaissances apportées par les énoncés qui sont, de plus, presque seulement dans un seul registre de représentation sémiotique et dans le paradigme [A2]. Ainsi, même si les énoncés répondent à une cohérence théorique mathématique, cela risque d'être dénué de sens pour les élèves. D'ailleurs, au lycée, au-delà de l'exercice qui étudie la suite logistique, aucun exercice en vue d'analyser l'intervalle où la suite est définie n'est proposé.

Dans le chapitre suivant nous étudierons l'activité et le travail que les élèves développent lors de la résolution de ces tâches d'évaluation. Plus précisément nous observerons quels sont les effets d'une non articulation entre paradigmes [A1] et [A2] dans le contrôle mathématique des étudiants, et nous chercherons à étudier les difficultés qu'élèves et étudiants rencontrent. Ainsi, nous nous demanderons quels sont les effets des ruptures de la transition L-U que nous avons constatées ? Est-ce que les continuités de la transition L-U relevées dans ce chapitre comportent aussi une continuité dans l'activité et le travail effectifs développés par les étudiants ?

7 Difficultés des élèves et des étudiants à la transition L-U

Dans le chapitre 6, nous avons constaté que le paradigme privilégié à la transition Lycée-Université est celui de [A2]. En fin de lycée, la dialectique entre paradigmes est limitée, et le paradigme [A1] est complètement abandonné en début de l'université. Comme conséquence, les élèves ont une faible possibilité de contrôle mathématique dans le paradigme [A1] à la fin du lycée, et aucune possibilité de contrôle mathématique en [A1] en début de l'université.

Compte tenu de l'activité et du travail mathématique à développer au sein des institutions, dans ce chapitre 7 nous avons pour objectif de caractériser l'activité et le travail des élèves et des étudiants, en donnant réponse à notre deuxième question de recherche :

QR 2

Quelles difficultés existent dans l'ETM personnel des étudiants et des élèves dans le développement de sous-activités mathématiques et du travail mathématique dans l'étude de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ à la transition L-U ? Quel lien ont ces difficultés avec les sous-activités de contrôle et les paradigmes de l'Analyse [A1] et [A2] ?

Pour répondre à notre QR2, nous nous appuyons sur les modèles de tâches d'évaluation que nous avons analysés dans le chapitre précédent (section 6.3, page 161). Puis, en tenant compte de ces analyses et en suivant le modèle du Baccalauréat, nous construisons une tâche pour la classe de TS, qui considère la suite récurrente étudiée dans l'examen de L1 (suite définie par $u_0 = \alpha$ et $\alpha \in]0,1[$, et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$). Ce faisant, nous cherchons à caractériser les difficultés des élèves et des étudiants en termes de sous-activités mathématiques de reconnaissance, d'organisation et/ou de traitement ; et en termes des dimensions du travail

mathématique personnel des élèves et des étudiants, et des paradigmes de l'analyse qu'ils utilisent. Pour cela, nous analysons les successions de l'activité et du travail mathématique développées au moment d'étudier une suite récurrente, lors de la résolution de la tâche de façon individuelle. En outre, conformément au Networking réalisé, nous analysons les types de contrôles qui jouent un rôle dans l'énoncé, et ceux qui n'interviennent pas, afin d'identifier le lien qui existe entre la sous-activité de contrôle et les difficultés des élèves et des étudiants. Comme nous l'avons signalé, nous faisons la différence entre contrôle non mathématique et contrôle mathématique. Si un contrôle est possible d'après l'énoncé, nous identifions s'il s'agit d'une sous-activité de contrôle sémiotique, instrumental ou discursif, et aussi s'il s'agit d'une occasion de contrôler ou d'un contrôle explicite. De plus, nous étudions l'effet que produit l'utilisation d'un seul paradigme dans les tâches, celui de [A2]. Cet effet est décrit à partir de l'analyse des difficultés que rencontrent les élèves et les étudiants. Par ailleurs, nous nous demandons si les continuités constatées dans le chapitre précédent entre la classe de TS et la classe de L1 constituent aussi une continuité pour les étudiants de L1.

La section 7.1 de ce chapitre présente la construction de la tâche pour la classe de TS. Dans la section 7.2 nous présentons cette nouvelle tâche construite et son analyse *a priori*. Ensuite dans la section 7.3 nous exposons les résultats de l'examen de L1, ainsi que ceux de la tâche construite pour la TS lors de l'expérimentation réalisée en mode devoir surveillé. Ces résultats sont donnés en termes d'activités et de travail mathématique effectif des élèves lors de la résolution des tâches d'évaluation. Par cette démarche, nous cherchons à comparer les productions des étudiants de L1 avec celles des élèves de TS. De plus, l'expérimentation de cette dernière tâche de la TS est considérée comme une pré-expérimentation visant à identifier les difficultés des élèves et des étudiants, pour savoir quelles dimensions du travail mathématique et quelles sous-activités mathématiques nous pourrions favoriser en vue d'aider les élèves à faire face à leurs difficultés (cet aspect sera développé dans le chapitre 8). Finalement dans la section 7.4 nous présentons les conclusions de ce chapitre 7.

Nous tenons à signaler que les premiers résultats présentés dans ce chapitre ont été présentés dans Flores González, Vandebrouck & Vivier (2020).

7.1 Construction de la tâche pour la TS : modification de la tâche de la L1

Comme signalé, nos tâches modèles correspondent aux tâches d'évaluation analysées dans le chapitre 6. Nous les rappelons rapidement dans cette section.

Notre premier modèle a été extrait d'un examen de première année de licence, de l'année 2018 (Figure 50). Il s'agit d'une suite de récurrence non linéaire à un terme (homographique)⁶⁹. De cette tâche nous conservons le choix de la suite pour construire une tâche pour la classe de TS.

Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in [0,1], f(x) = \frac{1}{2-x}$.
 On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions : $u_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2-u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$. Puis que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
4. Quelle est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Figure 50 : Tâche d'examen de la 1ère année de licence, 2018.


Notre deuxième tâche modèle est un exercice de Baccalauréat de 2016. Comme nous l'avons signalé dans la section 6.3, cette tâche se compose de deux parties : la première partie se réfère à l'étude de la fonction $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$ en commençant par la résolution de l'équation $f(x) = x$, puis l'étude des variations de f (grâce au tableau de variations déjà complété dans l'énoncé), et l'étude de la stabilité de l'intervalle $[0,1]$ par f (Partie A). Dans la deuxième partie de l'exercice, on commence par étudier la suite comme le montre la Figure 51 (Partie B). Ici, il est demandé de montrer que la suite est bornée, d'étudier les variations de la suite, de montrer qu'elle est convergente, et finalement d'en déduire la valeur de la limite sachant que $f(l) = l$.

⁶⁹ Pour une introduction aux suites homographiques, voir annexe 1.2.1 page 332.

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} , par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

1. Résoudre dans \mathbf{R} l'équation : $f(x) = x$.
2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$	1	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	+
f	$-\infty$			

3. Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0,1]$, $f(x)$ appartient à $[0,1]$.
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels ;
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln(N^2 + 1) < A$ N prend la valeur $N+1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

- a. Que fait cet algorithme ?
- b. Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n) .
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. On note l sa limite, et on admet que l vérifie l'égalité $l = f(l)$. En déduire la valeur de l .

Figure 51 : Exercice 3 Baccalauréat Scientifique Métropole 2016.

7.1.1 Comparaison de deux tâches

Afin de construire notre tâche pour la classe de TS inspirée de nos deux tâches modèles, nous procédons par une comparaison des tâches à partir de cinq critères : l'organisation globale de la tâche, la complexité du premier terme et le type de suites, le niveau d'adaptation et de reconnaissances apportées par les énoncés des sous-tâches, les paradigmes de l'analyse, la nature des dimensions de l'ETM.

- 1) Organisation globale de la tâche : L'exercice du baccalauréat est divisé en deux parties, la première concernant l'étude de la fonction en jeu et la seconde concernant la suite elle-même. Dans l'examen, l'étude de la suite et l'étude de la fonction sont liées de telle sorte que les étudiants universitaires doivent davantage reconnaître et contrôler les objets mathématiques sur lesquels ils travaillent.
- 2) L'exercice du baccalauréat porte sur l'étude de la suite donnée par $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$ et $u_0 = 1$ (fonction croissante, suite décroissante).

L'exercice de l'examen de niveau universitaire porte sur la suite donnée par $u_{n+1} = 1/(2 - u_n)$ et $u_0 = \alpha$ dans $[0,1]$ (fonction croissante, suite croissante). Cet exercice a un niveau de complexité élevé, tout d'abord à cause de la généralité de α .

- 3) Dans l'exercice du baccalauréat, les sous-tâches réduisent le niveau d'adaptation au niveau technique. Cela est dû aux reconnaissances apportées dans les énoncés, notamment la récurrence et la valeur de la limite de la suite à partir de $f(l) = l$. Ces tâches sont renvoyées à des tâches habituelles et routinières que les élèves ont l'habitude de rencontrer.

L'exercice de l'université ne possède pas ces dernières reconnaissances, ce qui transforme le niveau d'adaptation en disponible. Ainsi les étudiants ont moins de questions qui peuvent orienter leur activité, et les étudiants doivent reconnaître et adapter les techniques/outils à utiliser avec chaque question qui est au niveau disponible et/ou au niveau d'adaptation.

- 4) Les deux tâches concernant l'étude de la suite sont proposées uniquement dans le paradigme [A2].
- 5) Concernant la dimension sémiotique, les seuls registres de représentation utilisés sont l'algébrique et l'ensembliste, et c'est à partir d'un traitement dans ces registres que les élèves et les étudiants doivent visualiser le comportement de la suite. Bien que la dimension instrumentale intervienne dans l'ETM personnel à développer dans la résolution de la tâche, le statut de l'activation de cette dimension répond uniquement à l'utilisation des artefacts symboliques. La dimension discursive est, soit activée au moment de montrer par récurrence, soit activée pour la question 3 pour déduire l'utilisation du théorème de la limite monotone.

Enfin, l'exécution de la tâche au niveau universitaire est plus complexe avec la nécessité des connaissances disponibles, et avec un niveau plus élevé dans l'orientation et le contrôle de l'activité. Au niveau du baccalauréat, les élèves peuvent répondre à chacune des questions avec un minimum d'activités (au niveau technique), avec peu de nécessité d'orienter et de contrôler (avec cohérence) leur activité globale. Les étudiants universitaires ont une plus grande responsabilité quant à l'orientation de l'ensemble du raisonnement et ont besoin d'un niveau de contrôle plus élevé afin de réussir la tâche globale.

7.2 Tâche adaptée à la classe de TS

Pour adapter la tâche de L1 à la classe de TS, nous avons adopté la façon dont la tâche est présentée dans le modèle du Baccalauréat, et la suite choisie à étudier est celle de la tâche proposée dans l'examen de L1. Pour rester dans le contexte de la classe de TS, nous avons présenté le découpage de la tâche tel qu'au Baccalauréat. C'est-à-dire que, d'abord, on étudie la fonction qui définit la suite (partie A) et, qu'ensuite, on fait l'étude de la suite elle-même (partie B) (Figure 51 ci-dessous). Les changements qui ont été faits se situent principalement au niveau des reconnaissances apportées par l'énoncé : nous avons retiré l'aide du tableau de variations de l'énoncé du Baccalauréat (question A.2, Figure 51) ; nous avons enlevé la reconnaissance de la suite récurrente de façon explicite (énoncé partie B) et la reconnaissance de la méthode « montrer par récurrence » (question B.1, Figure 51). Ces changements ont été faits pour trouver un équilibre entre la tâche de la L1 et celle du modèle du Baccalauréat, et aussi notamment pour le cas de la suite récurrente et de la récurrence, nous avons confié aux élèves du secondaire ces sous-activités de reconnaissance qui ne sont pas usuelles à leur niveau (voir reconnaissances de la suite récurrente et de la méthode de preuve par récurrence apportés dans les énoncés des exercices des manuels de la TS, page 149).

PARTIE A : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R} - \{2\}$ l'équation : $f(x) = x$.
- 2) Étudier le sens de variation de f .
- 3) Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0,1]$, $f(x)$ appartient à $[0,1]$.

PARTIE B : Soit α un réel appartenant à $]0,1[$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient $[0,1]$.
- 2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
- 3) Montrer que la suite (u_n) converge.
- 4) On note l sa limite, et on admet que $l = f(l)$. En déduire la valeur de l .

Figure 52 : Adaptation de l'exercice universitaire de L1 pour les lycéens en TS.

Comme la partie A est consacrée à l'étude de la fonction f , nous nous concentrons sur l'analyse de la partie B qui reste le cœur de notre étude. Ainsi, les énoncés de la

partie B considèrent les reconnaissances des questions 3 et 4 (la convergence et la valeur de la limite de la suite). Il est attendu que les reconnaissances de la suite récurrente $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$ (avec $u_0 = \alpha$ dans $[0,1]$), la nécessité d'une preuve par récurrence et de la variation sont développées par les élèves. Nous voulons connaître les difficultés des élèves à partir des tâches modèles, et comme elles considèrent toutes les deux seulement le paradigme de l'analyse [A2], nous ne favorisons pas une dialectique entre paradigmes dans cette expérimentation. Ensuite, nous respectons le contrat didactique⁷⁰ concernant les contrôles non mathématiques, et nous conservons ce type de contrôle dans cette tâche. Nous allons dans le même sens concernant la sous-activité de contrôle mathématique, c'est-à-dire que nous considérons seulement la sous-activité de contrôle discursif à la charge des élèves (sans encouragement dans l'énoncé). Nous ne favorisons ni les occasions de contrôle mathématique, ni les contrôles mathématiques explicites. Tout cela, pour connaître les conséquences de la façon d'étudier les suites définies par récurrence dans l'enseignement actuel. Dans la prochaine section nous expliquerons plus en détail l'analyse de chaque question.

7.2.1 Analyse préalable de la tâche adaptée à la classe de TS

a) Question 1 TS : Montrer que pour tout entier n , u_n appartient à $[0,1]$.

La question 1, bien qu'elle présente un contrôle non mathématique (il est explicite de prouver que la suite est dans $[0,1]$), sa résolution nécessite davantage du développement de la sous-activité de reconnaissance et les élèves doivent procéder à un raisonnement par récurrence sans aucune indication (niveau de connaissance disponible). Le développement de cette reconnaissance doit permettre l'activation de la dimension discursive de l'ETM personnel en mobilisant la méthode de preuve ancrée dans le référentiel théorique du sujet et en utilisant des raisonnements issus de la récursivité et du formalisme liés à ce type de preuve. Comme deuxième étape de la succession, les élèves doivent s'investir dans une sous-activité de traitement et ils doivent utiliser le résultat de $[0,1]$ est stable par f (partie A) avec une sous-activité

⁷⁰ Le contrat didactique « *c'est l'ensemble des obligations réciproques et des « sanctions » que chaque partenaire de la situation didactique - impose ou croit imposer, explicitement ou implicitement, aux autres - et celles qu'on lui impose ou qu'il croit qu'on lui impose, à propos de la connaissance en cause. Le contrat didactique est le résultat d'une « négociation » souvent implicite des modalités d'établissement des rapports entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et un système éducatif.* » (Brousseau, 2010, p.6).

de reconnaissance dans la sous-activités de traitement. Pour bien développer ces activités il faut que l'élève développe un travail dans le plan vertical [Sem-Dis], notamment pour les traitements dans les registres algébriques et ensemblistes et la rédaction de la preuve par récurrence avec les implications correspondantes. Les sous-activités et le travail mathématique à développer dans cette question 1 correspondent à la *sous-tâche b* de l'examen du niveau de L1 et non au niveau du Baccalauréat qui avait seulement besoin de développer une sous-activité de traitement dans le plan vertical [Sem-Dis] de l'ETM personnel de l'élève.

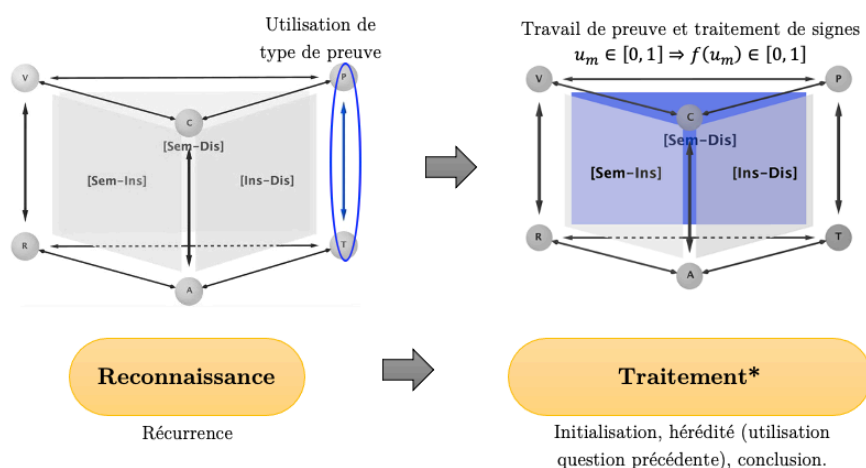


Figure 53 : Succession de sous-activités et travail mathématique question 1 classe TS.

b) **Question 2 TS :** Étudier le sens de variation de la suite (u_n)

La question 2 ne présente pas de contrôle non mathématique et la variation de la suite est à reconnaître par l'élève. Ainsi, les élèves doivent tout d'abord s'investir dans une sous-activité de reconnaissance pour choisir la méthode de preuve (entre étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ (stratégie 1), le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (stratégie 2) ou une preuve par récurrence (stratégie 3)). Cela amène l'élève à activer la dimension instrumentale dans l'ETM personnel de l'élève avec l'identification d'une de ces méthodes en tant qu'artefact symbolique. Dans les deux méthodes l'élève doit développer ensuite des sous-activités de traitement (avec la reconnaissance de l'identité remarquable). Néanmoins, selon la méthode de preuve choisie, cette sous-activité de traitement peut faire activer, soit le plan vertical [Sem-Ins] de l'ETM (stratégies 1 et 2), soit le plan vertical [Sem-Dis] de l'ETM (stratégie 3). Contrairement à la question 2 de l'examen de L1 qui demandait de montrer que la suite est croissante, seul le Baccalauréat préconisait d'étudier le sens de variation, raison pour laquelle nous avons gardé la version du Baccalauréat.

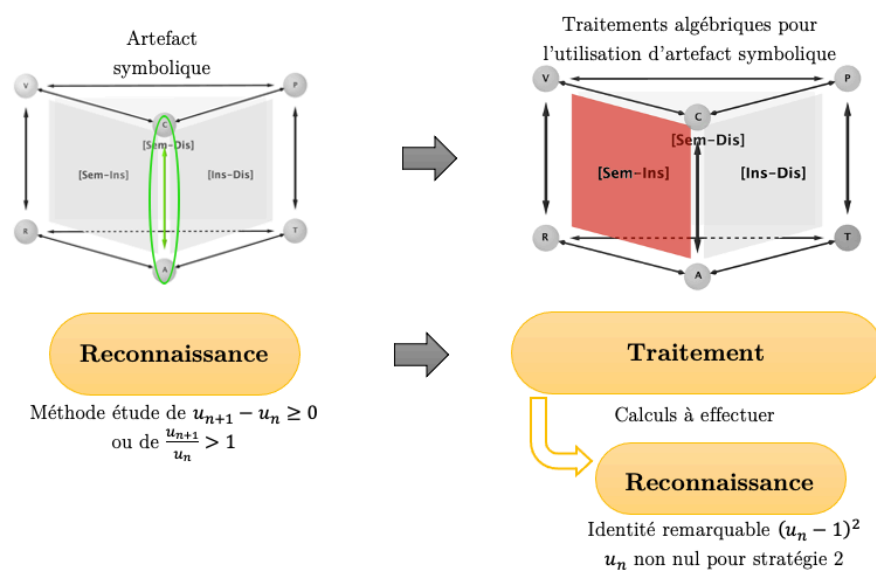


Figure 54 : Succession de sous-activités et travail mathématique question 2, stratégie 1 et 2, classe TS.

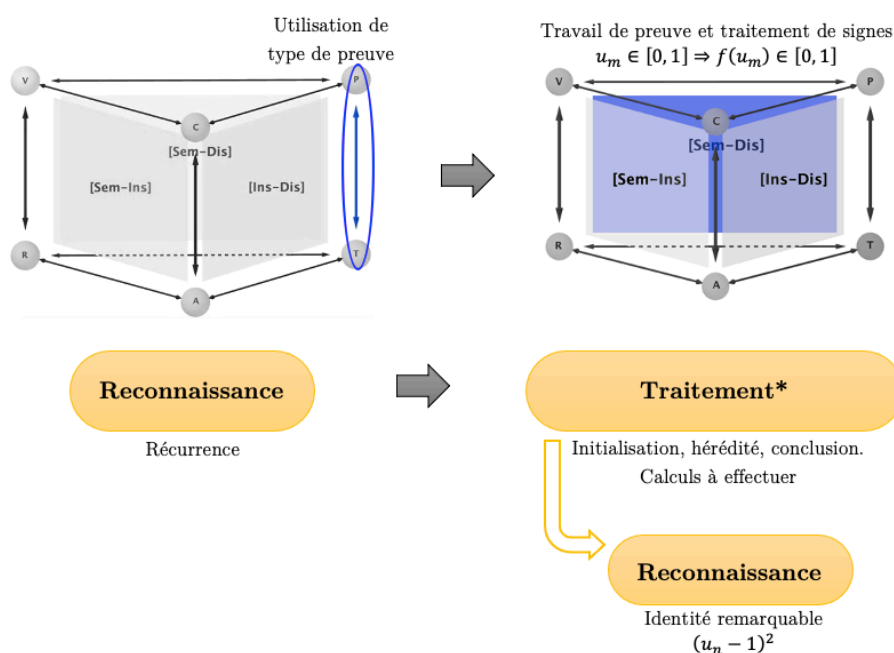


Figure 55 : Succession de sous-activités et travail mathématique question 2 stratégie 3, classe TS.

c) Question 3 TS : Montrer que la suite converge

La question 3 est considérée comme une continuité dans nos tâches modèles puisqu'elle est présentée de la même façon dans le Baccalauréat et dans l'examen de L1. Comme le montre la Figure 56, l'élève doit tout d'abord développer une sous-

activité de reconnaissance pour mobiliser le théorème de la limite monotone en activant la dimension discursive. Ensuite, l'élève doit développer une sous-activité de traitement et activer la dimension instrumentale pour prouver la convergence de la suite en utilisant les résultats des questions précédentes ((u_n) est croissante et majorée), et du théorème en tant qu'artefact symbolique.

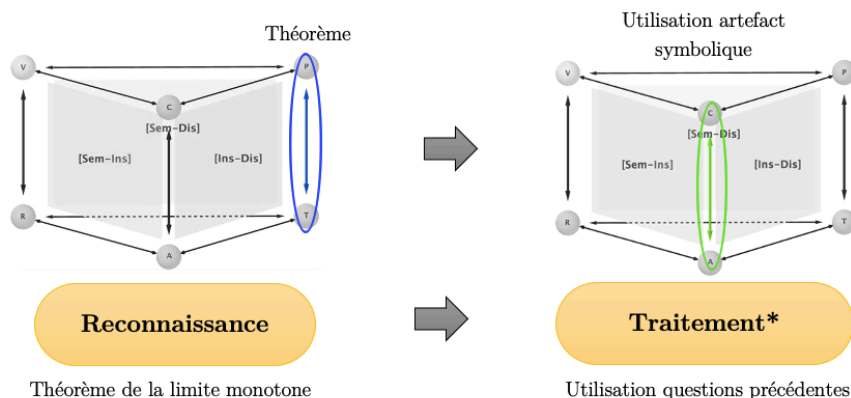


Figure 56 : Succession de sous-activités et travail mathématique question 3, classe TS.

d) **Question 4 TS** : On note l sa limite et on admet que $f(l) = l$. En déduire la valeur de l .

Pour cette question les élèves doivent seulement développer une sous-activité de traitement et activer la dimension instrumentale de leur ETM personnel. Ici, nous gardons la question telle qu'elle a été posée au Baccalauréat.

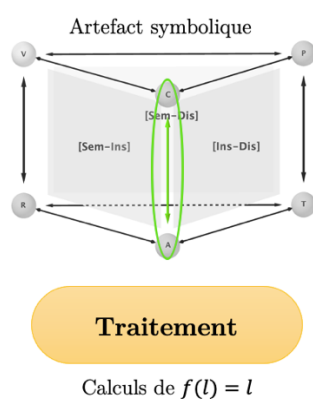


Figure 57 : Succession de sous-activités et travail mathématique de la question 4.

7.3 Analyse à posteriori et résultats de données au lycée et à l'université

Nous cherchons à connaître les difficultés des élèves et des étudiants au moment d'étudier les suites récurrentes, à partir de la résolution de tâches telle qu'elles sont proposées à la transition L-U dans le contexte français. Pour cela, nous nous concentrons dans l'étude de l'ETM personnel et de l'activité mathématique individuelle des élèves et des étudiants concernant l'étude de telles suites. Nous analysons leurs traces écrites car elles rendent compte du travail mathématique produit lors de la résolution de tâches, ce qui nous permet d'avoir accès à une partie de l'activité mathématique qui a eu lieu. Pour ce faire, nous prenons en compte les analyses *a priori* de l'examen (chapitre 6, page 161) et les analyses *a priori* de la nouvelle tâche conçue, exposées dans la section précédente 7.2.1.

Concernant les données du début de l'université, nous disposons de 40 productions écrites d'étudiants de l'examen de L1 proposé en CPEI⁷¹ à l'Université de Paris (décembre 2018). En ce qui concerne la classe de TS, nous disposons de 10 productions écrites des élèves d'un lycée de la région parisienne. Ces élèves de TS sont ceux susceptibles de poursuivre des études à l'université selon l'enseignant. L'expérimentation de la tâche (Figure 52, page 188) dans cette dernière classe a eu lieu en fin d'année académique (juin 2019).

Tout d'abord, on différencie le contexte de la tâche des deux institutions en question. Au début de l'université, comme nous l'avons signalé dans le chapitre 6, les étudiants ont travaillé sur trois exemples de suites dans leurs cours de travaux dirigés et la démonstration par récurrence n'a pas été un objet d'étude ni dans les cours magistraux, ni dans les cours de travaux dirigés. Pour le lycée, comme l'expérimentation a été faite en fin d'année académique, les élèves ont déjà travaillé sur l'étude de suites définies par récurrence et la preuve par récurrence a été étudiée en début d'année.

Notre but est d'identifier les erreurs fréquentes apparues dans les productions des élèves de chacun des niveaux scolaires et non d'être exhaustifs concernant toutes les erreurs que nous trouvons dans leurs productions. Ainsi, nous rendons compte des difficultés des élèves et des étudiants en termes de sous-activités mathématiques (de

⁷¹ Cycle préparatoire aux écoles d'ingénieurs.

reconnaissance et de traitement) et du travail mathématique (de dimensions ou de plans verticaux).

7.3.1 Résultats question 1 en TS et en L1.

Concernant la sous-activité de reconnaissance de la preuve par récurrence, seulement soit 5/10 des élèves de la classe de TS la développent. Le reste des élèves n'aboutissent pas à cette reconnaissance et ils recopient l'énoncé ou rédigent des explications qui n'aboutissent pas à une preuve correcte. À titre d'exemple, nous montrons la production de l'élève 10 (Figure 58) de la classe de TS.

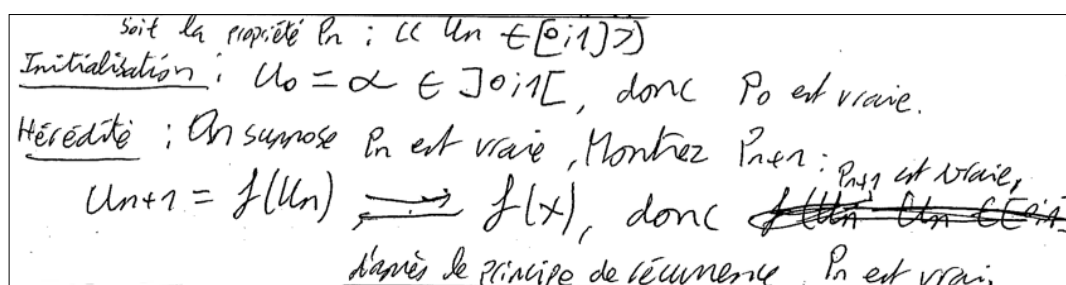


Figure 58 : Production question 1 de l'élève 10 de la classe de TS.

La Figure 59 et la Figure 60 ci-dessous montrent la succession du travail mathématique et de l'activité mathématique atteinte par l'élève 10. Nous observons que cet élève développe une sous-activité de reconnaissance pour montrer par récurrence que la suite est dans $[0,1]$, ce qui fait activer la dimension discursive de son ETM personnel, néanmoins, malgré le fait qu'il peut produire un discours mathématique en activant le plan vertical [Sem-Dis] de son ETM, il ne parvient pas à développer la sous-activité de traitement. Cela vient vraisemblablement du fait qu'il ne reconnaît pas l'hérédité du problème sémiotique d'établir une égalité entre la suite récurrente et la fonction qui définit la suite.

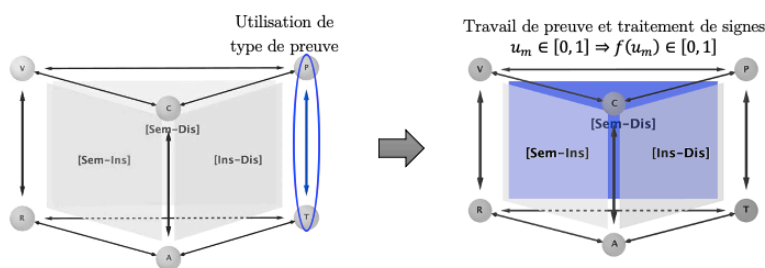


Figure 59 : Reconstruction de succession du travail mathématique de l'élève 10 dans la question 1.



Figure 60 : Succession de sous-activités mathématiques de l'élève 10 dans la question 1.

Quant aux étudiants de l'université, 23% des étudiants (soit 9/40) ne répondent pas à la question. Seulement 23% des étudiants (soit 9/40) mobilisent une preuve par récurrence. 35% des étudiants (soit 14/40) justifient que parce que la fonction est dans $[0,1]$ la suite récurrente est aussi dans $[0,1]$, et 20% des étudiants (soit 8/40) font des raisonnements qui ne correspondent pas à la preuve attendue. Parmi les erreurs fréquentes celle qui ressort correspond à l'erreur d'interprétation $u_n = f(n) = f(x)$ et le problème sémiotique $f(x) = f(u_n)$ (exemple E13), qui sont présents dans 5 productions d'étudiants. Pour ces productions nous interprétons qu'il n'y pas eu de reconnaissance de la suite récurrente et qu'ils considèrent la suite comme explicite $u_n = f(n)$. À titre d'exemple, nous montrons la production de l'étudiant E13 qui a le problème sémiotique $f(x) = f(u_n)$ et l'étudiant 28 (Figure 58) qui a une erreur de mauvaise interprétation, tous les deux de la classe de L1.

Figure 61 : Production question 1 de l'étudiant 13 de la classe de L1.

Le problème sémiotique est manifesté par la phrase « Si $f(u_n) = f(x)$ alors $\forall x \in [0,1], f(x) \in [\frac{1}{2}, 1] \subset [0,1]$ ». Ici, bien que l'élève ne démontre pas ce qui est demandé, tout se passe comme si le fait d'établir l'égalité $f(u_n) = f(x)$ lui fait perdre de vue ce que l'on veut démontrer (que la suite $(u_n) \in [0,1]$), et cet élève ne prend plus en compte ni la dépendance de n dans $f(u_n)$, ni la suite (u_n) . Il se passe quelque chose de différent avec l'étudiant 28 dont nous analysons les successions de travail mathématique et d'activité mathématique.

Figure 62 : Production question 1 de l'étudiant 28 de la classe de L1.

La Figure 63 et la Figure 64 ci-dessous, montrent la succession suivie par cet étudiant lors de la résolution de cette tâche⁷². Il ne développe pas la sous-activité de reconnaissance mais il produit un travail mathématique issu de l'activation de la dimension sémiotique. Cependant, la relation établie dans les signes du registre algébrique utilisés n'est pas correcte. Tout comme l'élève précédent, il établit des égalités entre la suite et la fonction (erreur d'interprétation) exprimées par la phrase « Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et donc $u_n = f(n) = f(x) \in [0, 1]$ ». Ici, nous voyons l'effet produit par les contrôles non mathématiques car sans cohérence dans le discours mathématique que produit l'élève (manque de sous-activité de contrôle mathématique), il arrive à conclure que $(u_n) \in [0, 1]$.

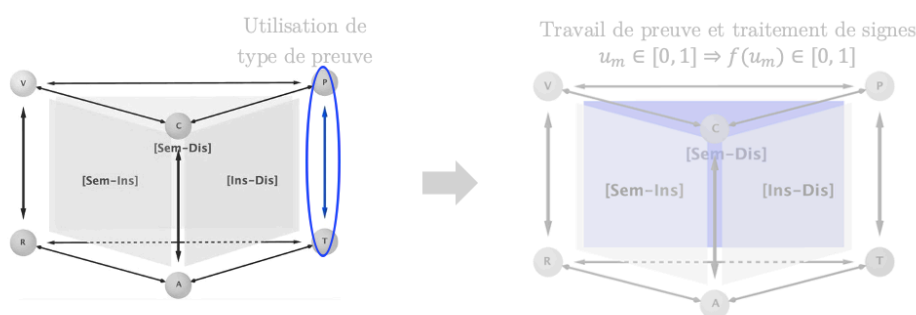


Figure 63 : Reconstruction de succession du travail mathématique de l'étudiant 28 dans la question 1.

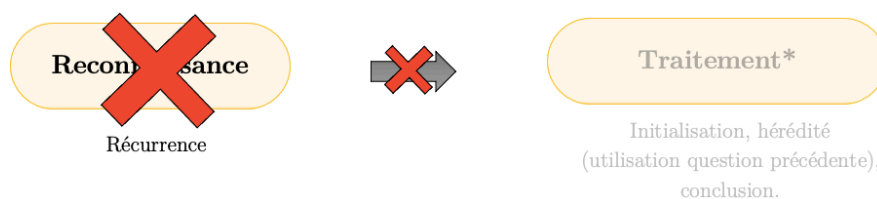


Figure 64 : Succession de sous-activités mathématiques de l'étudiant 28 dans la question 1.

La différence entre la reconnaissance et la non reconnaissance de la récurrence entre la classe de L1 et la classe de TS peut être due aux différences de contextes dans les deux niveaux d'enseignement. Cela montre que cette connaissance n'est pas disponible comme on l'aurait espéré au niveau de l'université.

⁷² Rappelons qu'au niveau de l'université, la question 1 était composée de deux sous-tâches, la première visant à montrer la stabilité de l'intervalle (*sous-tâche a*), et la deuxième à montrer que la suite est bornée et bien définie (*sous-tâche b*). Voir chapitre 4, page 82.

7.3.2 Résultats question 2 en TS et en L1

Concernant les élèves de la classe de TS, tous répondent à cette question. La sous-activité de reconnaissance avec la méthode $u_{n+1} - u_n$ est développée par 7 des 10 élèves. Cependant, aucun élève ne reconnaît l'identité remarquable $(u_n - 1)^2$ de l'expression $1 - 2u_n + u_n^2$. Les élèves qui restent (soit 3/10) mettent en place le théorème en acte « si f est croissante alors (u_n) est croissante ». Dans la Figure 65, nous montrons un exemple qui fait partie de 7 élèves et qui au-delà de la non reconnaissance de l'identité remarquable, montre un travail de décomposition intéressant pour analyser le sens de variation de la suite.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2-u_n} - u_n$$

$$= \frac{1}{2-u_n} - \frac{2u_n - u_n^2}{2-u_n}$$

$$= \frac{-u_n^2 - 2u_n + 1}{2-u_n}$$

$u_n \in [0; 1]$ Le sens de variation de la suite (u_n) est
 $2 - u_n \geq 1$
 $-u_n^2 - 2u_n + 1$
 $\in [1; 0] \cup [0; 2]$
 $\in [1; 0] \cup [0; 2]$
 $\in [1; 0] \cup [0; 2]$

Figure 65 : Production de l'élève 1 de la classe de TS de la question 2.

Concernant la succession des sous-activités et du travail mathématique développé (Figure 66 et Figure 67), il s'agit d'un élève qui développe une sous-activité de reconnaissance avec la méthode de l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$, en activant la dimension instrumentale de son ETM personnel avec l'utilisation de cet artefact symbolique. Il poursuit son travail avec l'activation du plan vertical [Sem-Ins] et commence à développer une sous-activité de traitement. Cependant, dans cette dernière sous-activité, il ne reconnaît pas l'identité remarquable nécessaire pour finir la résolution de la tâche, et donc, pour conclure avec la variation de la suite.

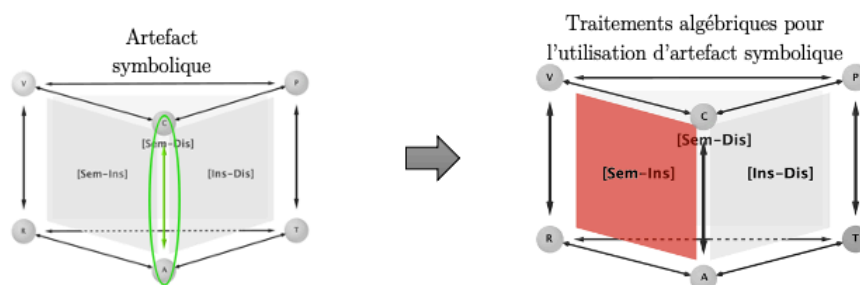


Figure 66 : Reconstruction de succession du travail mathématique de l'élève 1 dans la question 2.

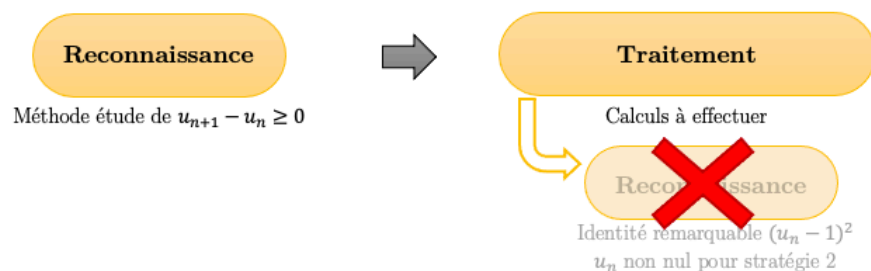


Figure 67 : Succession de sous-activités mathématiques de l'élève 1 dans la question 2.

Dans le cas de la L1, il est à remarquer que la question demandait de montrer que la suite est croissante, contrairement à celle de notre construction pour la TS. Ici, 50% des étudiants (soit 20/40) développe une sous-activité de reconnaissance en identifiant une méthode valable pour étudier la croissance de la suite : parmi ceux-là, 13 utilisent la méthode de l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$, dont seulement 5 étudiants font la reconnaissance de l'identité remarquable. 1 seul étudiant choisit la stratégie d'étudier le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (mais il ne réussit pas). Finalement parmi les méthodes possibles, 6 des étudiants essaient une preuve par récurrence. 30% des étudiants (soit 12/40) appliquent le théorème en acte « si f est croissante alors (u_n) est croissante ». Cela est exprimé soit par des phrases explicites, soit par des représentations des tableaux de variation de $f(u_n)$ comme le montre la Figure 69 ci-dessous. Par ailleurs, 8% d'étudiants (3/40) font d'autres types de raisonnements (un étudiant essaye de raisonner par l'absurde (E10), un autre dit que la suite est croissante pour les limites de ses bornes (E8) et un autre, en introduisant d'autres variables, argumente que parce n augmente, la suite est croissante (E23)) ; et 13 % des étudiants (soit 5/40) ne répondent pas. Comme il est question d'analyser les difficultés des étudiants, nous montrons l'exemple d'un étudiant (Figure 68) qui fait encore l'erreur de l'égalité entre la suite récurrente et la fonction qui la définit. Cette difficulté est plus présente que la non reconnaissance de l'identité remarquable.

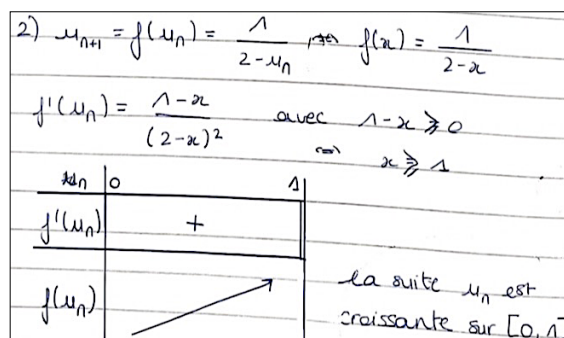


Figure 68 : Production de l'étudiant 26 de la classe de L1 de la question 2.

La Figure 69 et la Figure 70 montrent la succession de l'étudiant E26. Nous observons qu'il ne développe pas la sous-activité de reconnaissance attendue, mais malgré cela, il active la dimension instrumentale en mobilisant un artefact symbolique (la dérivée de la fonction f), qui n'est pas valable dans ce contexte. Le tableau de variation est correct puisque la suite est croissante dans l'intervalle $[0,1]$, ce qui permet d'activer le plan vertical [Sem-Ins], mais cela n'est pas dû à la croissance de la fonction. Comme la tâche ne favorise pas une sous-activité de contrôle mathématique, cet étudiant ne développe pas une telle sous-activité pour l'aider à contrôler le travail mathématique qu'il produit. Cela pourrait être la raison de la présence du théorème en acte « si f croissante alors (u_n) est croissante ».

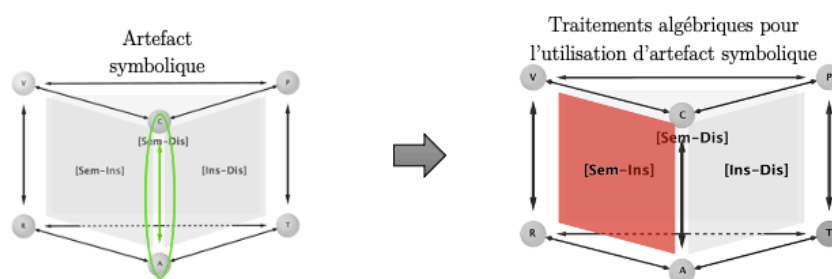


Figure 69 : Reconstruction de succession du travail mathématique de l'étudiant 26 dans la question 2.

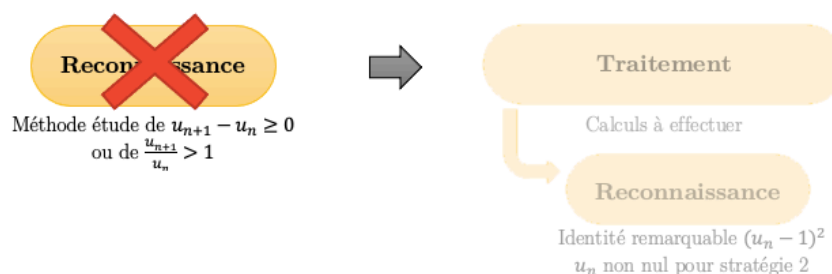


Figure 70 : Succession de sous-activités mathématiques de l'étudiant 26 dans la question 2.

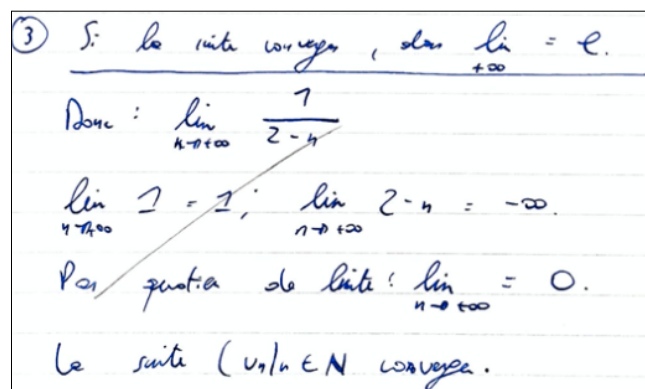
Dans les deux niveaux d'enseignement, les traitements produits dans le registre algébrique semblent rester bloqués à un moment de la résolution de la tâche, soit au début (pour la bonne reconnaissance de la méthode), soit au moment de développer la sous activité de traitement et sans reconnaître l'identité remarquable.

7.3.3 Résultats question 3 en TS et en L1

En ce qui concerne les élèves de la classe de TS, 7/10 élèves développent une sous-activité de reconnaissance avec l'utilisation du théorème limite monotone. 1 argumente que comme la suite est bornée, elle est convergente, et 2 élèves ne répondent pas à la question (pas de sous-activité de reconnaissance).

Dans le cas de la classe de L1, seulement 38% des étudiants (soit 15/40) développent une sous-activité de reconnaissance en mobilisant correctement le théorème de la limite monotone. 28% des étudiants (soit 11/48) pour montrer la convergence, indiquent que la limite de la suite dépend de la limite de la fonction. 10% des étudiants (soit 4/40) ne reconnaissent pas le théorème correctement (ils identifient seulement une hypothèse par exemple). 18% d'étudiants (soit 7/40) ne répondent pas à la question. 8% des étudiants restants (soit 3/40) indiquent : que la suite converge car elle est croissante et continue (étudiant 7), que la suite converge car elle est définie dans $[0,1]$ (étudiant 35), et que la suite converge car la fonction est croissante (étudiant 37).

À titre d'exemple, nous montrons la production de l'étudiant 16 (Figure 71) qui appartient aux 28% d'étudiants qui ne développent pas une sous-activité de reconnaissance en utilisant le théorème, mais qui cherchent à calculer la limite de la suite pour conclure que la suite est convergente. Cet étudiant traite la suite en tant que $u_n = f(n)$. Dans cet exemple nous notons à nouveau l'effet de la présence de contrôles non mathématiques dans les énoncés de tâches car l'étudiant 16 est conscient du fait qu'il doit montrer la convergence de la suite, mais il ne prend pas vraiment en compte un contrôle mathématique et une cohérence dans son discours avec la suite récurrente.



3) Si la suite converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$.

Donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2-n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$; $\lim_{n \rightarrow \infty} 2-n = -\infty$.

Par quotient de limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2-n} = 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Figure 71 : Production de l'étudiant 16 de la classe de L1 de la question 3.

La Figure 72 montre le travail produit par cet étudiant. Nous voyons que malgré le fait qu'il ne développe pas une sous-activité de reconnaissance, il active la dimension discursive de son travail mathématique personnel pour argumenter que la suite converge.

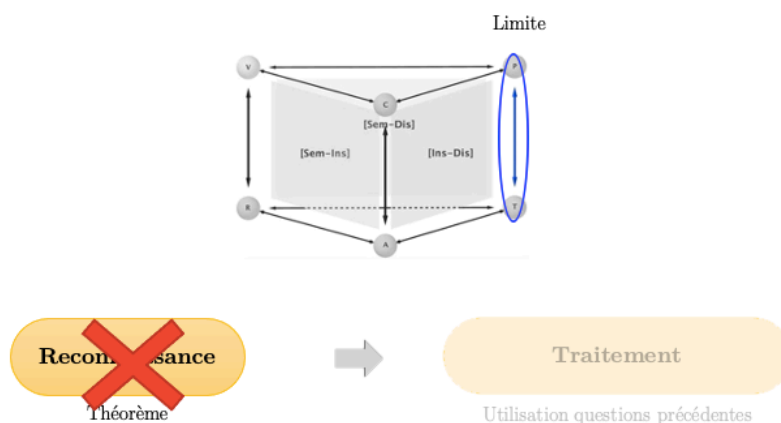


Figure 72 : Reconstruction du travail mathématique et état de l'activité mathématique (non atteinte) par l'étudiant 16 dans la question 3.

7.3.4 Résultats question 4 en TS et en L1

Concernant la classe de TS, nous rappelons que l'énoncé de la tâche explicitait la reconnaissance de $f(l) = l$. De ce fait, les élèves devaient seulement développer une sous-activité de traitement en activant la dimension instrumentale par l'artefact symbolique $f(l) = l$. Ici, 9/10 élèves développent une sous activité de traitement et trouvent la valeur de la limite. 1 élève ne répond pas à la question. À titre d'exemple, nous montrons dans la Figure 73 la production de l'élève 9, et dans la Figure 74 la sous-activité et le travail mathématique développé en répondant à la question. Nous pouvons voir qu'il ne reconnaît pas l'identité remarquable, mais qu'il trouve tout de même la valeur de la limite.

$$\begin{array}{l}
 l = f(l) \Leftrightarrow l = \frac{1}{2-l} \\
 l(2-l) = 1 \\
 -l^2 + 2l - 1 = 0 \\
 \Delta = 4 - 4 \times (-1) \times (-1) = 0 \quad \text{1 seule solution} \quad \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1 \\
 \boxed{l = 1}
 \end{array}$$

Figure 73 : Production de l'élève 9 de la classe de TS de la question 4.

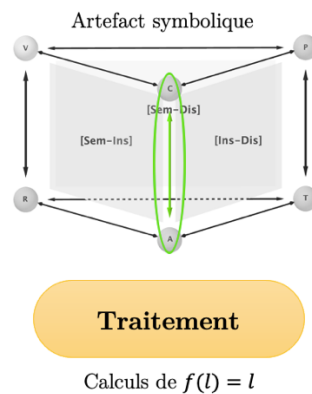


Figure 74 : Reconstruction de l'activité et du travail mathématique de l'élève 9 dans la question 4.

Dans la classe de L1, la reconnaissance de $f(l) = l$ n'a pas été fournie dans l'énoncé de la question. Ici, seulement 10% des étudiants (soit 4/40) développent une sous-activité de reconnaissance avec le passage de la limite et l'égalité $f(l) = l$. 43% des étudiants (soit 17/40) argumentent soit que la $\lim f(x) = \lim f(u_n)$ (8/40 d'étudiants) soit que la $\lim f(u_n) = 0$ (9/40 d'étudiants). Nous considérons ce groupe d'étudiants comme faisant une potentielle confusion entre la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec la suite explicite $u_n = f(n)$. Ensuite, 20% des étudiants (soit 8/40) argumentent que la limite de la suite (u_n) est 1 sans donner une preuve valable ; et 1 étudiant dit que $\lim f(u_n) = +\infty$. Finalement, 25% des étudiants de L1 (soit 10/40) ne répondent pas à cette question.

L'étudiant 26 (Figure 75) est un exemple de la classe de L1 qui correspond au groupe de 43% de réponses des étudiants.

3 et 4) Pour montrer que la suite converge, il faut déterminer la limite de la suite quand n tend vers $+\infty$.

$\lim_n f(u_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-x} = 0^-$

donc $\lim_n f(u_n) = 0^-$

la suite u_n converge vers 0^- .

Figure 75 : Production de l'étudiant 26 de la classe de L1 des questions 3 et 4.

Comme la Figure 77 le montre, cet élève ne développe pas une sous-activité de reconnaissance et n'utilise pas $f(l) = l$. Néanmoins, il active la dimension discursive

de son ETM personnel (Figure 76) et essaye de calculer la limite pour montrer que la suite converge et pour expliciter la valeur de la limite (il répond aux deux questions dans une seule réponse). Il conclut de façon erronée que la valeur de la limite est 0 en établissant des égalités entre la limite de la suite récurrente et la limite de fonction qui la définit. Ici, l'étudiant aurait pu développer un contrôle discursif avec la question précédente car il avait argumenté que la suite était croissante dans l'intervalle $[0,1]$ (elle ne peut pas converger à 0).

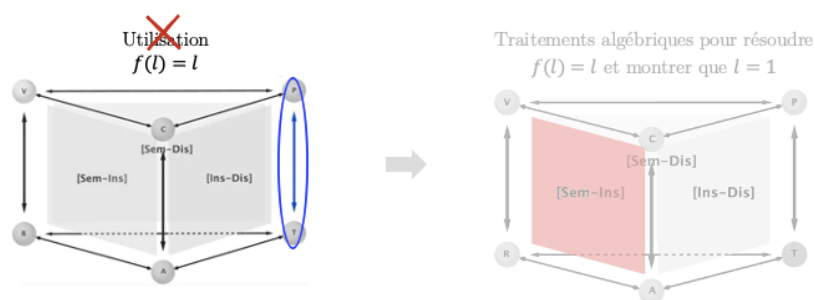


Figure 76 : Reconstruction de succession du travail mathématique de l'étudiant 26 dans la question 4.



Figure 77 : Succession de sous-activités mathématiques de l'étudiant 26 dans la question 4.

7.4 Conclusion des analyses et des difficultés des étudiants

A ce point de la recherche, nous avons construit une tâche pour la dernière classe de lycée visant à étudier la même suite que l'exemple de la tâche donnée dans le contexte de l'université. Pour pouvoir analyser les résultats de l'étude de cette suite dans la dernière classe de lycée, nous avons adapté la tâche de l'examen en utilisant le modèle du Baccalauréat. De cette façon, nous avons analysé 40 productions d'étudiants dans le contexte de l'examen première année de l'université. Nous avons étudié également 10 productions d'élèves d'une classe de terminale scientifique faisant l'étude de la même suite récurrente sous le modèle de Baccalauréat.

Les analyses issues de ces données nous permettent de répondre à notre deuxième question de recherche. Nous la rappelons rapidement ici : *Quelles difficultés existent dans l'ETM personnel des étudiants et des élèves dans le développement de sous-activités mathématiques et du travail mathématique dans l'étude de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ à la transition L-U ? Quel lien ont ces difficultés avec les sous-activités de contrôle et les paradigmes de l'Analyse [A1] et [A2] ?*

Quant aux difficultés au niveau des sous-activités des élèves et des étudiants, une de celles qui ressort à plusieurs reprises est la difficulté à développer une sous-activité de reconnaissance de la suite comme récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, car les élèves et les étudiants les traitent comme des suites explicites $u_n = f(n)$. Cela est mis en évidence par des arguments trouvés dans les productions étudiées pour chacune des questions :

- Pour montrer que la suite est bornée (question 1), un pourcentage important d'étudiants de L1 écrit « $u_n = f(n) = f(x)$ » ou « $f(x) = f(u_n)$ » (35% de réponses).
- Pour montrer la croissance de la suite, les élèves et les étudiants utilisent le théorème en acte « si f croissante alors (u_n) est croissante », où son domaine de validité est $u_n = f(n)$ (30% de réponses d'élèves et d'étudiants).
- Pour montrer la convergence de la suite (question 3) les 28% des étudiants de L1 argumentent que la limite de la suite dépend de la limite de la fonction, phénomène que l'on observe aussi dans des productions des étudiants de l'université concernant la valeur de la limite (question 4).

Cette non reconnaissance de la suite récurrente conduit à des difficultés dans le travail mathématique produit par des élèves et des étudiants, et à l'activation des dimensions des ETM personnels qui n'étaient pas celles attendues dans l'analyse a

priori. Un exemple qui illustre cela est la production de l'étudiant E28 (Figure 62) qui devait activer la dimension discursive pour développer une preuve par récurrence, néanmoins, il active la dimension sémiotique en produisant un discours avec manque de contrôle mathématique. Ainsi, la sous-activité de reconnaissance liée à la nécessité d'une preuve par récurrence est aussi une difficulté pour les élèves et les étudiants, lorsqu'elle n'est pas explicitée dans l'énoncé.

En outre, les élèves ont des difficultés dans la sous-activité de traitement, que ce soit dans la preuve par récurrence (question 1) ou pour conclure concernant la variation de la suite (question 2) en utilisant la méthode de l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$. En effet, dans une grande partie des productions nous observons un manque dans la reconnaissance de l'identité remarquable qui permet de conclure que la suite est croissante. Cela se traduit comme une difficulté dans la dimension sémiotique pour développer des traitements dans le registre algébrique, qui parfois bloque le travail des élèves et des étudiants.

Cette comparaison entre la classe de TS au lycée et la classe de L1 à l'université, a montré comment les sous-activités de reconnaissance sont à atteindre par les étudiants universitaires, même si le cœur de la tâche - l'étude d'une suite récurrente - est le même. Nous avons montré à travers les productions des étudiants qu'il y a un faible taux de réussite et nous avons identifié que la plupart des étudiants amalgament les connaissances pour étudier les objets « suites » et « fonctions ». La faible cohérence entre ces deux objets manifeste un manque de contrôle mathématique à la transition L-U lors de l'étude de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$. Dans les tâches des deux niveaux d'enseignement, la dimension instrumentale du travail mathématique est seulement activée avec les artefacts symboliques et les étudiants n'ont pas d'occasions pour développer les sous-activité de contrôle sémiotique ou instrumental. Ainsi, telle que la tâche a été conçue, elle met en avant seulement une sous-activité de contrôle discursif et elle n'exploite pas les potentialités d'une étude contrôlée en autonomie des élèves et des étudiants. Nous pensons que nous pourrions mieux favoriser l'apprentissage des élèves à l'entrée de l'université à partir d'un soutien dans la réorganisation des connaissances (qui est nécessaire). Ce soutien pourrait se faire, par exemple, par le biais de l'utilisation de connaissances anciennes des élèves concernant l'usage des calculatrices. Nous faisons l'hypothèse que cela produirait un enrichissement de l'activité et du travail mathématique via l'introduction de la dimension instrumentale avec cet artefact numérique de façon à ce que les élèves puissent exploiter les capacités technologiques qu'ils ont développées au lycée. De plus, une telle utilisation pourrait permettre l'introduction du paradigme [A1] en mettant l'accent sur la visualisation de la suite, et ainsi promouvoir des occasions pour que la sous-activité

mathématique de contrôle sémiotique et instrumentale, puisse effectivement être développé par les élèves à la transition L-U.

8 Nouvelles tâches : sous-activité de contrôle et paradigmes [A1] et [A2]

Dans le chapitre 6, nous avons identifié qu'une dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] n'est pas privilégiée pour la transition L-U : dans la classe de TS, le paradigme [A1] est présent mais celui-ci n'est pas travaillé de façon systématique, dans la classe de L1 le paradigme [A1] est absent⁷³ et les suites récurrentes sont travaillées seulement dans le paradigme [A2]. De plus, la sous-activité de contrôle mathématique privilégiée à la transition L-U correspond au contrôle discursif. Les contrôles sémiotiques et instrumentaux, bien que parfois utilisés dans la classe de TS, sont totalement abandonnés dans la classe de L1. Les possibilités de contrôle des élèves au début de l'université sont principalement issues d'un contrôle non mathématique. Nous avons prévu que ce fait pouvait provoquer un manque dans la sous-activité de contrôle mathématique chez les élèves et les étudiants à l'heure d'étudier les suites récurrentes, ce qui a été démontré dans les résultats du chapitre 7. En outre, dans ce même chapitre 7, nous avons montré que ce manque de contrôle a un effet quant à la non reconnaissance de la suite récurrente car un tiers des élèves et des étudiants les traitent comme des suites explicites en fonction de n ($u_n = f(n)$).

Ainsi, les difficultés trouvées dans le chapitre précédent nous amènent à nous poser des questions relatives au développement de sous-activités mathématiques et à l'ETM personnel des élèves. Plus particulièrement, nous cherchons à connaître l'activité et le travail des élèves lorsqu'ils disposent d'occasions pour développer des sous-activités de contrôle en favorisant une dialectique entre les paradigmes de l'analyse [A1] et [A2]. Notre hypothèse repose sur l'idée que donner des occasions de sous-activité de contrôle mathématique de type sémiotique, instrumental et discursif, pourrait permettre aux élèves d'enrichir leurs capacités à traiter les suites récurrentes. Cela devrait être mis en évidence par une cohérence entre les paradigmes [A1] et [A2], et la bonne reconnaissance de la suite.

⁷³ Au moins dans les tâches proposées et le cours mis à disposition des étudiants.

Lorsqu'il s'agit d'étudier le développement de la sous-activité de contrôle à la transition L-U, il importe de connaître comment ces contrôles se développent de façon individuelle chez l'élève dans la résolution d'une tâche. Mais il est également nécessaire d'étudier ces contrôles dans le contexte d'une classe avec l'intervention de l'enseignant. Par conséquent, il nous faut répondre aux questions suivantes :

QR 3.1

Quel est le travail mathématique des élèves et quelles sous-activités mathématiques développent-ils lors de la résolution de tâches permettant des occasions de contrôle mathématique issue d'une dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] et l'introduction de la dimension instrumentale du travail mathématique dans l'étude de suites $u_{n+1} = f(u_n)$ à la transition L-U ?

QR 3.2

Quelle est l'influence de l'intervention de l'enseignant dans l'activité et l'ETM personnel des élèves lorsqu'il s'agit de développer des sous-activités de reconnaissance et de contrôle dans la dialectique des paradigmes [A1] et [A2] ?

Ces questions visent à connaître les effets d'un travail mathématique articulant les paradigmes de l'analyse [A1] et [A2] sur les sous-activités mathématiques (reconnaissance et traitement) pour aider les élèves à développer un contrôle mathématique dans leur travail et ainsi à mieux comprendre les suites $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour rendre compte d'un tel contrôle dans l'activité et dans le travail mathématique, nous considérons les difficultés rencontrées par les élèves (résultats de la question QR 2 – chapitre 7), ainsi que les spécificités de la transition L-U concernant l'étude de suites récurrentes dans le contexte français (résultats de la question QR1 - chapitre 6). Notre objectif est d'enrichir la capacité des élèves à traiter les suites récurrentes à la fin de l'école secondaire et au début de l'université.

Même si l'usage des calculatrices peut être controversé (Monaghan, 2016), et ces instruments peuvent être bénéfiques pour aider au contrôle dans la résolution de tâches mathématiques (Trouche, 1996). Nos dernières questions de recherche (QR3.1 et QR3.2) visent aussi à répondre aux questions suivantes : Dans quelle mesure la notion de paradigmes de l'analyse peut-elle établir un cadre pour expliciter les différents types

de contrôles adaptés à la transition L-U ? Les élèves peuvent-ils utiliser ces contrôles par eux-mêmes et de manière adéquate dans la résolution de tâches portant sur les suites récurrentes ? Comment aider à stimuler les contrôles intuitifs et formels signalés par Ghedamsi (2008) dans un milieu instrumenté ?

Dans le développement de la sous-activité de contrôle, le rôle de l'enseignant a été identifié comme un des éléments importants d'analyse dans le contexte d'une classe (Bikner-Ahsbahs et al., 2014 ; Saboya & Rhéaume, 2015). Ainsi, nous nous demandons : quels types de sous-activités de contrôle sont explicites, c'est-à-dire introduits en tant qu'aides de l'enseignant lors de l'étude de suites définies par récurrence ? Comment ces aides influencent l'activité et le travail mathématique des élèves ? Quel rôle jouent les aides de l'enseignant dans le travail de dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] ? Dans le même sens, quel rôle joue le bilan dans les sous-activités de contrôle ?

Présentation des sections du chapitre

Dans la section 8.1, nous présenterons la nouvelle tâche et son analyse a priori avec l'introduction de la calculatrice et les occasions de mise en fonctionnement des sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental. Dans la section 8.2 nous exposerons l'analyse *a posteriori* et les résultats lors de deux expérimentations au lycée (novembre-décembre 2019) : (1) résolution individuelle de la tâche par les élèves, en classe, selon le mode devoir surveillé ; (2) résolution de la tâche en classe, accompagné de l'intervention de l'enseignant avec un bilan après la résolution de chaque partie. À l'issue de ces deux expérimentations, nous ferons une dernière modification de la tâche en utilisant une nouvelle suite récurrente que nous présenterons dans la section 8.3. Par cela nous chercherons à mettre à l'épreuve la stabilité de nos résultats et à observer de possibles évolutions dans les réponses des élèves. Nous présenterons l'analyse a posteriori et les résultats de la quatrième expérimentation (mai 2020) dans la section 8.4. Nous conclurons ces trois expérimentations réalisées au lycée dans la section 8.5.

8.1 Conception de la nouvelle tâche et analyse a priori

Compte tenu des résultats trouvés jusqu'ici, nous étudierons dans ce chapitre 8 l'activité et le travail des élèves avec des tâches qui offrent des occasions de sous-activité de contrôle issues d'une dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] et l'utilisation de la calculatrice. Par cette démarche, nous cherchons à construire une tâche qui favorise les trois sous-activités de contrôle mathématique⁷⁴, qui soit sensible aux difficultés des élèves concernant les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ et qui soit cohérente à la transition L-U. Pour ce faire, nous allons utiliser comme référence l'étude des tâches d'évaluation abordées dans le chapitre précédent mais en proposant, cette fois, un travail dans le paradigme [A1] avant de demander un travail dans le paradigme [A2].

Ainsi, pour la construction de cette nouvelle tâche (Figure 78), nous avons conservé l'étude de la fonction (partie A) car ses propriétés sont nécessaires pour étudier la suite. Tout d'abord, le travail peut être effectué dans l'un ou l'autre des deux paradigmes. Ensuite, la partie B est directement liée au paradigme [A1] (avec un horizon au [A2] puisque nous demandons de conjecturer certaines propriétés de la suite) avec des occasions de contrôle sémiotique et instrumental grâce à l'utilisation de la calculatrice. Après ce travail, nous demandons dans la partie C un travail qui permette à l'élève de prouver les conjectures des propriétés de la suite avec un contrôle discursif soutenu par les contrôles développés dans la partie B. Cette partie C est consacrée au paradigme [A2]. Enfin, nous soutenons que la mise en fonctionnement de trois sous-activités de contrôle mathématiques (sémiotique, instrumental et discursif) pourraient permettre la production d'un travail mathématique contrôlée.

Pour étudier ces sous-activités de contrôle, l'accent sera mis sur la recherche de traces de contrôle explicite. Des incohérences dans les réponses peuvent manifester des manques de sous-activités de contrôle. Il est possible de penser que le contrôle s'opère dans une dimension complémentaire à celle dans laquelle le travail est développé. Il en est de même pour les contrôles par paradigmes quand des élèves contrôlent par exemple leur travail dans [A2] en utilisant des résultats de [A1]. Dans ce qui suit, nous nous focalisons sur les questions B.1, B.2 et B.3 de la partie B, et les questions C.1, C.2 et C.3 de la partie C (la partie A ne concernant que l'étude de la fonction).

⁷⁴ En nous concentrant davantage dans les sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental.

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, compléter les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$	
u_0	0
u_1	
u_2	
u_3	
u_4	
u_5	
u_6	

Cas $\alpha_2 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	
u_2	
u_3	
u_4	
u_5	
u_6	

Cas $\alpha_3 = 0,9$	
u_0	0,9
u_1	
u_2	
u_3	
u_4	
u_5	
u_6	

B.2) Conjecturer les **variations**, la **convergence**, et l'éventuelle **limite** de la suite en observant les tableaux pour les trois valeurs de α de la question B.1.

Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?

Ne modifiez plus vos réponses aux parties A et B, vous pourrez revenir sur vos réponses dans la partie D.

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0, 1]$.

Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?

C.4) On note l la limite de la suite (u_n) , expliquer pourquoi $l = f(l)$.

Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?

C.5) En déduire la valeur de l sachant que $l = f(l)$.

Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?

Figure 78 : Parties B, C et D de la nouvelle tâche en utilisant la calculatrice.

8.1.1 Partie B : occasions de contrôle sémiotique et instrumental et paradigme [A1]

L'énoncé de la partie B favorise la sous-activité de reconnaissance de la fonction en jeu mais ne favorise pas la reconnaissance de la suite récurrente sous la forme $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$. Cela n'empêche pas les élèves de travailler avec la suite en fonction de n (et non de u_n). L'énoncé de cette partie ne permet pas de contrôles non mathématiques sur la variation de la suite, sur sa convergence et sur la valeur de la limite de la suite.

Cette partie est totalement proposée dans le paradigme [A1] où l'on offre les occasions de contrôle sémiotique et instrumental avec l'utilisation de la calculatrice.

Suit la sous-partie B.1 avec trois tableaux à remplir pour les valeurs de termes u_1 à u_6 , pour trois valeurs différentes de α (valeurs 0, 0.5 et 0.9). Ici l'objectif est d'identifier et de se familiariser avec la suite à l'aide d'exemples explicites de termes de la suite. Du point de vue théorique nous souhaitons encourager le développement de la sous-activité de reconnaissance de la suite récurrente $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$ (qui n'est pas prise en charge par l'énoncé). Les sous-parties B.2 et B.3 ont pour objectif de conjecturer la variation, la convergence et la limite de la suite à partir de l'observation des premiers termes de la suite pour chaque valeur de α donné. Si la monotonie peut être visualisée pour les 6 premiers termes puis inférée pour les valeurs suivantes (avec un possible contrôle avec les calculs des termes suivants), cela n'est pas possible pour la convergence et la limite. Il s'agit en effet d'une propriété locale en l'infini et nous disposons de trop peu d'informations⁷⁵. Il peut ainsi y avoir des non-réponses à cette demande de conjecture qui proviendraient d'une bonne compréhension des tables de valeurs et de la notion de convergence.

Nous identifions deux représentations numériques possibles données par la calculatrice : représentation décimale et représentation fractionnaire (cf. le Tableau 12 et le Tableau 13). La première (celle que nous espérons) permet de répondre plus manifestement aux questions suivantes. La deuxième est moins évidente pour répondre aux questions, mais elle permet de conjecturer l'expression algébrique de la suite $u_n = \frac{n}{n+1}$ de manière plus flagrante. Le choix de la représentation peut être conscient, avec éventuellement un affichage des deux types, ou subi à partir de la configuration de la calculatrice. Si le choix de représentation est conscient, cela pourrait aider les élèves à avoir soit un contrôle de type discursif (en utilisant l'expression de u_n), soit un contrôle de type instrumental.

⁷⁵ Peut-on conjecturer que la suite $\ln(n)$ converge vers 3 avec les 20 premiers termes ou bien que la série harmonique converge vers 4 avec les 30 premiers termes ? Ces types de questions méritent l'étude de la vitesse de convergence de suites.

Tableau 12 : valeurs de termes de la suite en représentation décimal pour trois valeurs de α (0, 0.5 et 0.9).

Cas $\alpha_1 = 0$		Cas $\alpha_2 = 0,5$		Cas $\alpha_3 = 0,9$	
u_0	0	u_0	0,5	u_0	0,9
u_1	0,5000	u_1	0,6666	u_1	0,9090
u_2	0,6666	u_2	0,7500	u_2	0,9166
u_3	0,7500	u_3	0,8000	u_3	0,9230
u_4	0,8000	u_4	0,8333	u_4	0,9285
u_5	0,8333	u_5	0,8571	u_5	0,9333
u_6	0,8571	u_6	0,8750	u_6	0,9375

Tableau 13 : valeurs de termes de la suite en représentation fractionnaire pour trois valeurs de α (0, 0.5 et 0.9).

Cas $\alpha_1 = 0$		Cas $\alpha_2 = 0,5$		Cas $\alpha_3 = 0,9$	
u_0	0	u_0	0,5	u_0	0,9
u_1	1/2	u_1	2/3	u_1	10/11
u_2	2/3	u_2	3/4	u_2	11/12
u_3	3/4	u_3	4/5	u_3	12/13
u_4	4/5	u_4	5/6	u_4	13/14
u_5	5/6	u_5	6/7	u_5	14/15
u_6	6/7	u_6	7/8	u_6	15/16

Par ailleurs, la Figure 79 montre une représentation graphique (de la fonction et de termes de la suite) et numérique décimale des 4 premiers termes de la suite pour $\alpha = 0$. Pour arriver à ce type de représentation, et que l'élève puisse développer une sous-activité de contrôle sémiotique, il faut que l'élève mobilise des connaissances issues du fonctionnement de la calculatrice, donc qu'il développe aussi une sous-activité de contrôle instrumental.

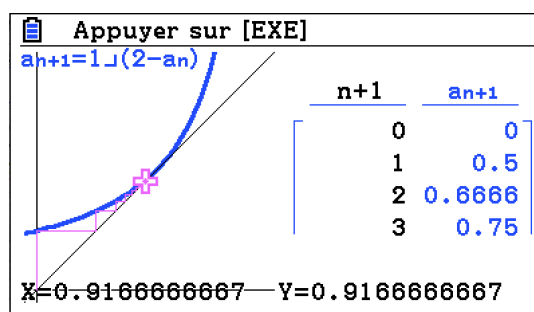


Figure 79 : Exemple de représentation graphique et numérique décimale donnée par la calculatrice CASIO graph.

Comme le montre la Figure 80, la reconnaissance de la suite récurrente sera tout d'abord encouragée par l'activation de la dimension instrumentale de l'ETM grâce à l'utilisation de la calculatrice qui est ici essentielle. Ensuite, la tâche met en avant le registre de représentation numérique des termes de la suite (d'autres registres sémiotiques mis à disposition par la calculatrice peuvent aussi intervenir), qui serait soutenu par les sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental. Ce faisant, nous souhaitons encourager les reconnaissances liées au comportement de la suite : la croissance, la convergence et la valeur de la limite de la suite. Puis, les élèves doivent activer le plan vertical [Sem-Ins] pour bien visualiser le comportement de la suite avec les signes des représentations de la calculatrice. L'idée est que la sous-activité de contrôle soutienne les sous-activités de reconnaissance ainsi que le travail produit dans la dimension instrumentale et dans le plan vertical [Sem-Ins] de l'ETM personnel des élèves.

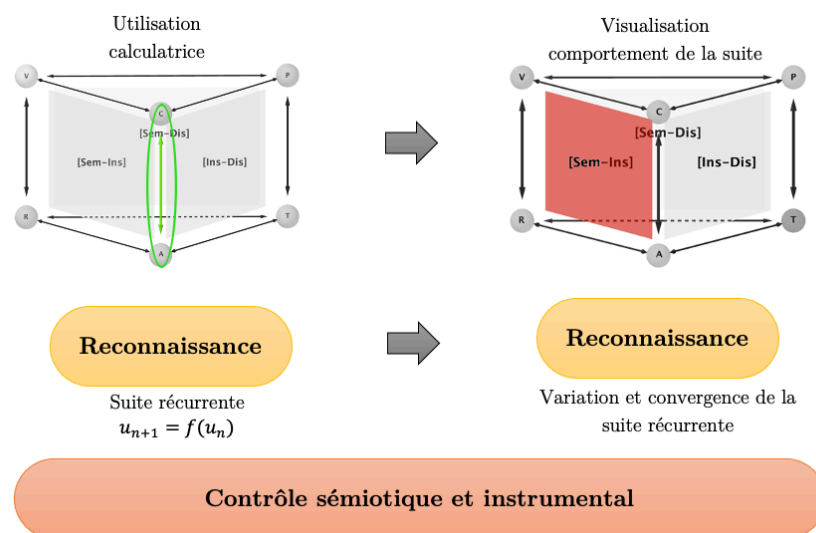


Figure 80 : Succession de sous-activités et travail mathématique dans la partie B.

Pour stimuler un contrôle instrumental de l'objet mathématique et pour que les reconnaissances puissent aboutir, nous rajoutons la question « comment avez-vous utilisé la calculatrice ? ». Nous espérons ainsi susciter d'autres stratégies de la part des élèves. À travers cette question nous cherchons à faire prendre conscience à l'élève de la façon dont il utilise la calculatrice et pouvoir stimuler, chez lui, la reconnaissance d'une cohérence (ou non cohérence) dans sa démarche. Tout cela en espérant donner des éléments pour qu'ils puissent contrôler leur activité mathématique comme une programmation algorithmique de la suite, une représentation graphique ou le calcul de plus de termes de la suite sur la table de valeurs.

8.1.2 Partie C : contrôle discursif et paradigme [A2]

Dans cette partie, nous espérons que les élèves parviennent à des reconnaissances de théorèmes, de procédures et de preuves liées à chacune des questions. Cela implique un travail mathématique ancré dans le paradigme [A2] et les dimensions instrumentale, discursive ou sémiotique selon le cas. Les successions de sous-activités et du travail mathématique sont les mêmes que dans l'adaptations de la tâche pour la classe de TS du chapitre précédent avec la différence que, dans cette tâche, les occasions de sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental devraient soutenir le travail mathématique produit dans la partie C.

a) Question C.1 : Suite bornée

Dans cette question, nous attendons un changement de paradigme de [A1] (partie B) vers le paradigme [A2] (partie C). La sous-activité de reconnaissance de la démonstration par récurrence peut rendre compte de ce changement de paradigme. Pour bien répondre à cette question, le développement d'une sous-activité de traitement avec l'utilisation des étapes que la preuve par récurrence implique est nécessaire. Comme on l'a déjà signalé dans le chapitre 7 (page 189), vu qu'il s'agit d'une méthode spécifique de preuve, le travail mathématique se fera principalement dans la dimension discursive et dans le plan [Sem-Dis] pour le traitement dans le registre de représentation algébrique. On pourra dire que l'élève a développé une sous-activité de contrôle issue du changement des paradigmes [A1] vers [A2] s'il met en relation explicitement le résultat qu'il vient de prouver avec la partie B sur les conjectures. Dans ce cas, l'élève aura bien développé les trois sous-activités de contrôle sémiotique, instrumental et discursif. En revanche, si l'élève ne reconnaît pas la méthode de démonstration par récurrence et fait seulement des interprétations issues de son travail dans la partie B, on dira qu'il se trouve dans le paradigme [A1] et qu'il ne met pas en fonctionnement une sous-activité de contrôle discursif nécessaire pour aboutir à la tâche. Nous rappelons la succession de l'activité du travail mathématique dans la Figure 81 ci-dessous.

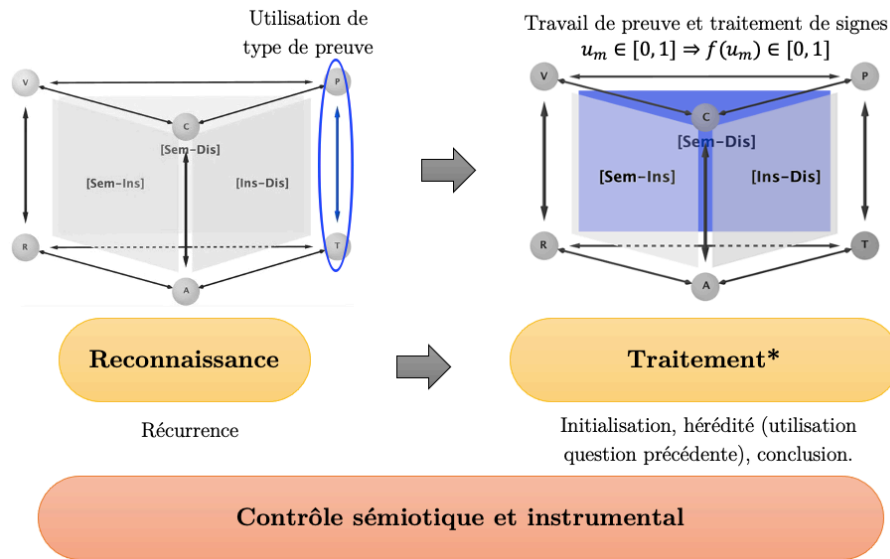


Figure 81 : Succession de l'activité et du travail mathématique dans la question C.1.

b) Question C.2 : Sens de variation de la suite

Comme signalé à la page 190, pour cette question, nous attendons la reconnaissance d'une méthode pour déterminer la croissance de la suite. Il y a un choix possible. Soit on utilise encore le raisonnement par récurrence (en montrant que pour tout n , $u_n \leq u_{n+1}$), soit on choisit d'analyser les variations de la suite via les expressions algébriques de $u_{n+1} - u_n$ ou de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Dans la stratégie, $u_{n+1} - u_n$, on attend la reconnaissance de l'identité remarquable $(u_n - 1)^2$ au numérateur. À partir de cette reconnaissance l'élève conclut d'abord que $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{2 - u_n} \geq 0$ et ensuite que la suite est croissante. Dans le deuxième cas, pour parvenir à la bonne conclusion, il faut que l'élève puisse reconnaître un polynôme de deuxième degré au numérateur d'une part, l'utilisation du résultat de la question C.1 (*ie.* que (u_n) est dans $[0, 1]$) d'autre part. Comme dans les cas précédents, si le travail de l'élève manque de cohérence on dira que son contrôle est faible ou qu'il n'y a pas eu de contrôle (surtout quand il interprète sans avoir abouti à la reconnaissance de la méthode).

Nous rappelons la succession de l'activité du travail mathématique dans les Figure 82 et Figure 83 ci-dessous.

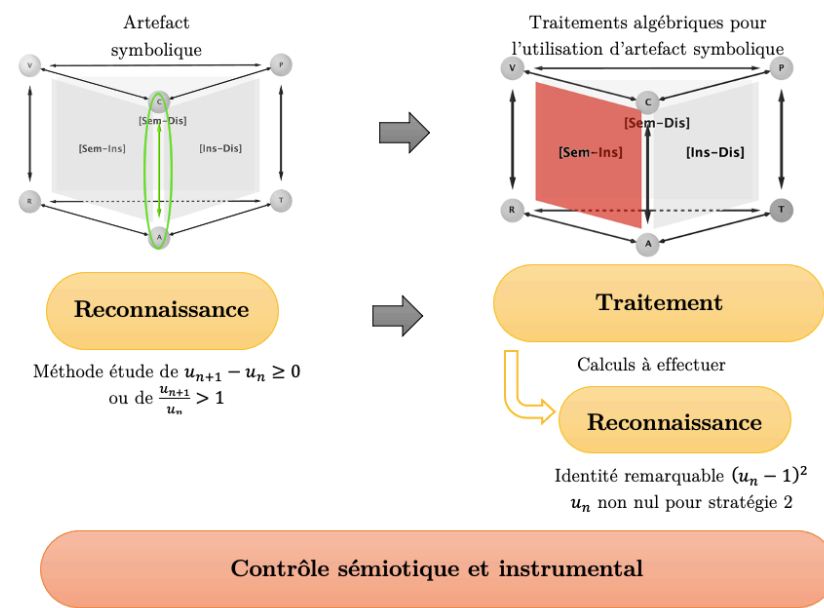


Figure 82 : Succession de l'activité et du travail mathématique dans la question C.2 (stratégie 1 et 2).

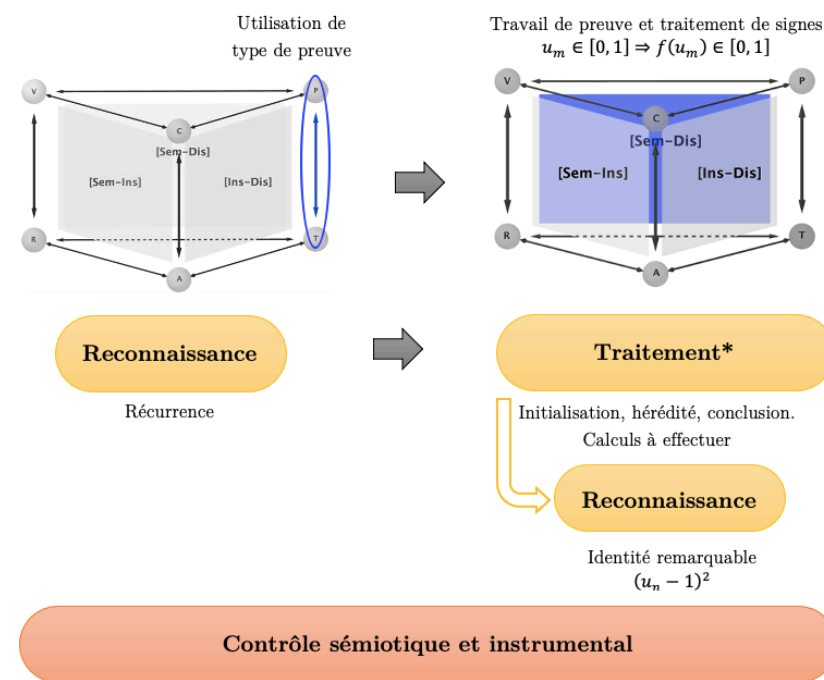


Figure 83 : Succession de l'activité et du travail mathématique dans la question C.2 (stratégie 3).

c) Question C.3 : Suite convergente

Pour cette tâche, on attend uniquement la stratégie de la reconnaissance du théorème de convergence monotone. Dans cette question les élèves utilisent des

résultats des tâches précédentes : à partir de la question C.1 ils interprètent que la suite (u_n) est majorée par 1, et dans la question C.2 que la suite (u_n) est croissante ; donc (u_n) est convergente. On attend que l'élève ait aussi des activités de contrôle pour relier le résultat de C.3 avec les conjectures de la partie B. Nous rappelons la succession de l'activité du travail mathématique dans la Figure 82.

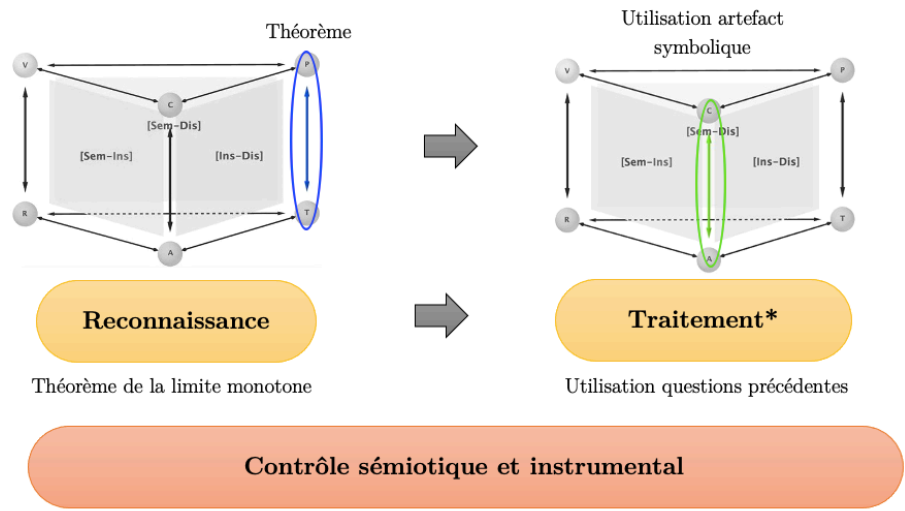


Figure 84 : Succession de l'activité et du travail mathématique dans la question C.3.

8.2 Analyse *a posteriori* : 2^{ème} et 3^{ème} expérimentation au lycée

Comme précisé, nous avons fait deux expérimentations dans deux classes de la fin de secondaire scientifique (classe de TS), dans deux lycées différents de la région parisienne. Les expérimentations ont été effectuées au début de l'année scolaire (fin novembre et début décembre de l'année 2019). À ce moment de l'année, les élèves ont déjà travaillé les contenus de limite de suites et de limite de fonctions. Nous faisons la différence des deux expérimentations en les appelant classe 1 et classe 2 décrites ci-dessous :

Classe 1 : correspond à une expérimentation avec 30 élèves, codés G1, qui travaillent de façon individuelle dans deux demi-groupes (G1-1 et G1-2).

Classe 2 : il s'agit d'une expérimentation avec 32 élèves, codés G2, qui comporte selon les cas un temps de travail individuel ou en binômes d'une durée de 12 minutes par partie. Ce temps de travail des élèves est suivi de l'intervention de l'enseignant d'une durée de 3 à 5 minutes. Ces interventions sont de deux ordres : d'une part le professeur fait un bilan à la fin de chaque partie de la tâche (partie A, partie B, partie C) ; et d'autre part, il aide les élèves qui seraient bloqués pour que toute la classe puisse poursuivre la résolution de la tâche.

Les deux classes⁷⁶ ont utilisé leurs calculatrices scientifiques pour résoudre la tâche (modèle TI83 et CASIO graph).

Méthodologie d'analyse

Nous repérons les paradigmes du travail mathématique développé par l'élève comme suit :

Paradigme [A1] : Il s'agit du paradigme basé sur les conjectures faites dans la partie B. Ici les élèves peuvent utiliser des termes de la suite (en représentation graphique ou numérique) pour argumenter qu'elle est bien définie, décroissante ou convergente.

Paradigme [A2] : Dans ce paradigme les élèves utilisent explicitement les méthodes connues pour prouver le comportement de la suite récurrente (preuve

⁷⁶ Pour voir les productions des élèves des deux classes, se diriger aux annexes 5.1, 5.2 et 5.3, pages 435-559.

par récurrence, utilisation de propriétés de la fonction qui définit la suite, étude de $u_{n+1} - u_n$ ou de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, théorème de la limite monotone).

Travail intermédiaire entre les paradigmes [A1] et [A2] : Il existe des productions difficiles à catégoriser en [A1] ou [A2]. Toutefois, dans ce type de travail intermédiaire nous pouvons trouver des éléments du paradigme [A1] et/ou du [A2]. Typiquement, les réponses de ces élèves sont guidées par les contrôles non mathématiques présentes dans les énoncés. Nous identifions ce travail avec le signe « ? ».

Une fois le paradigme du travail identifié, il faut ensuite déterminer si le travail mené par un individu est correct ou non. Ainsi, on distinguera trois états du travail :

- 1) **Travail mathématique correct** (codé C) quand les actions mathématiques répondent à ce qui était attendu.
- 2) **Travail mathématique incomplet** ou pas totalement correct (codé I) quand le discours mathématique comporte des assertions mathématiquement vraies mais qui manque d'argumentation. Ce travail pourrait être complété par d'autres justifications correctes.
- 3) **Travail mathématique non correct** (codé N) quand les actions mathématiques sont fausses ou ne répondent pas à ce qui était attendu.

Bien entendu, cela est à croiser avec les sous-activité de contrôle, de reconnaissance, de traitement et les dimensions du travail mathématique. Nous noterons les élèves qui comprennent le travail demandé comme suit : le paradigme [A1] en B et [A2] en C. Cette notation comprend l'interprétation correcte de l'objet mathématique de l'étude en écartant la production des élèves qui interprètent la suite récurrente comme une suite explicite $u_n = f(n)$. Nous focaliserons ensuite nos analyses sur les élèves qui ont réalisé le travail attendu (paradigmes et objet de suite récurrente) en identifiant les sous-activités en lien avec le travail mathématique.

Nous rappelons ici que l'on se concentre plutôt sur les résultats des questions B.1, B.2 et B.3 de la partie B, les questions C.1, C.2 et C.3 de la partie C. La partie A est, quant à elle, exclue puisqu'elle est réservée à l'étude de la fonction.

8.2.1 Partie B

L'objectif de cette partie est que les élèves puissent se familiariser avec la suite proposée et de leur offrir, dès le début, des occasions de sous-activités de contrôle (sémiotique et instrumental), grâce à un travail dans le paradigme [A1] et l'utilisation de la calculatrice. Nous espérons qu'avec la bonne interprétation des signes produits par la calculatrice et le développement de sous-activités de reconnaissance, les élèves conjecturent la croissance, la convergence et la limite de la suite. Il s'agit ici de l'activation de la dimension sémiotiques et du plan [Sem-Ins] du travail mathématique personnel des élèves.

a) Question B.1 : reconnaissance de la suite récurrente

Dans un premier temps, nous identifions les bonnes reconnaissances de la suite récurrente telle qu'elle est définie ($u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2-u_n}$) et nous identifions spécifiquement les élèves qui ont fait une mauvaise reconnaissance de la suite comme $u_{n+1} = f(n) = \frac{1}{2-n}$.

Pour la Classe 1, la réussite de cette reconnaissance est de 57% soit 17 élèves (sur 30). Parmi eux, 14 élèves ont bien utilisé l'instrument (sous-activité de contrôle instrumental), ce qui les amène à produire un tableau correct (C). Les 3 autres ont des tableaux incomplets (I) malgré la bonne reconnaissance de la suite. Ensuite, pour les 13 autres élèves (43%), il y a confusion entre $f(u_n)$ et $f(n)$ pour 9 élèves (non développement ni de sous-activité de reconnaissance, ni de sous-activité de contrôle sémiotique). Pour les 4 élèves restants, 3 ne répondent pas à la question et 1 remplit seulement le premier tableau avec des zéros.

L'élève G1-2.3 (Figure 85) permet d'illustrer la confusion entre $f(u_n)$ et $f(n)$ dans la classe 1. On remarque que les trois tables sont identiques (u_0 mis à part) ce qui est caractéristique de cette confusion entre suite récurrente et $f(n)$, dans la mesure où il n'y a aucune dépendance avec u_0 . Par ailleurs, cet élève est très explicite sur l'implémentation de la calculatrice, ce qui permet de rejeter une erreur (toujours possible) d'écriture de la calculatrice (manque de sous-activité de contrôle instrumentale). Il ajoute également un décalage en remplaçant n par $n - 1$, ce qui est cohérent puisque la formule $u_{n+1} = f(n)$ peut se réécrire $u_n = f(n - 1)$ ⁷⁷. D'autres

⁷⁷ Ici l'élève aurait pu avoir un contrôle de type discursif sur ce qu'il écrit, mais il aurait fallu un entretien avec cet élève pour le confirmer.

élèves produisent ce décalage, mais de manière moins explicite. Il est enfin à signaler que, malgré son explication, cet élève calcule finalement les valeurs de $\frac{1}{2+n}$, sans doute en cherchant à développer un contrôle sémiotique cette fois, pour rejeter des valeurs négatives obtenues, mais celui-ci est inadéquat (voir le premier tableau pour $\alpha = 0$ de la Figure 85). Les élèves qui produisent trois fois le même tableau ne semblent pas développer une sous-activité de reconnaissance de la suite récurrente soutenue par les sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental leur permettant d'identifier cette identité des tableaux.

Cas $\alpha_1 = 0$		Cas $\alpha_2 = 0,1$		Cas $\alpha_3 = 0,5$	
u_0	0	u_0	0,1	u_0	0,5
u_1	0,3	u_1	0,5 0,3	u_1	0,3
u_2	0,25	u_2	0,25	u_2	0,25
u_3	0,2	u_3	0,2	u_3	0,2
u_4	0,17	u_4	0,17	u_4	0,16
u_5	0,14	u_5	0,14	u_5	0,14
u_6	0,125	u_6	0,125	u_6	0,125

<p>La suite semble croissante pas décroissante. Elle semble être convergente, et sa limite serait 0.</p>		<p>Comment avez-vous utilisé la calculatrice ? On a rentré la suite $\frac{1}{2-(n-1)}$ on a tapé Table et on a noté les solutions.</p>
--	--	--

Figure 85 : Réponse à la question B2 de l'élève G1-2.3.

La Figure 86 et la Figure 87 montrent les successions de l'activité du travail mathématique de l'élève G1-2.3. Nous observons que bien que cet élève active la dimension instrumentale dans le travail mathématique produit, il ne développe pas une sous-activité de reconnaissance ni de la suite, ni de ses propriétés. Cela ne l'empêche pas de produire un travail dans le plan vertical [Sem-Ins] de l'ETM personnel de l'élève pour répondre à la question.

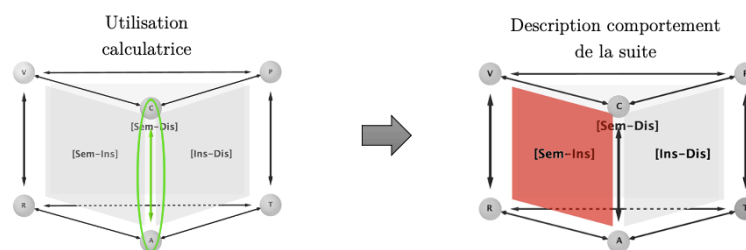


Figure 86 : Reconstruction du travail mathématique de l'élève G1-2.3 dans la partie B.

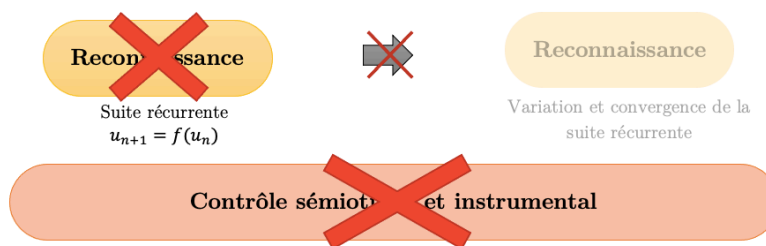


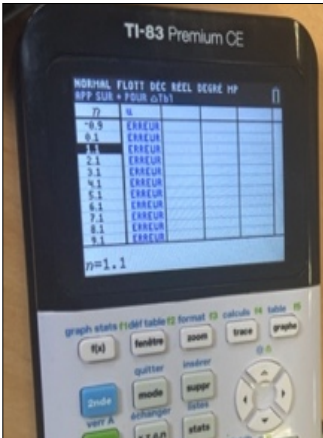
Figure 87 : Successions de sous-activité de l'élève G1-2.3 dans la partie B.

Dans la Classe 2, le taux de reconnaissance de la suite récurrente est très bon avec 30 élèves sur 32 (94%). L'erreur de la confusion entre $f(u_n)$ et $f(n)$ est faite par un seul élève. La majorité des élèves (25 sur 32, 78%) semble avoir développé une sous-activité de contrôle instrumentale par une bonne utilisation de l'instrument calculatrice. Ainsi, ils donnent les bonnes valeurs des termes de la suite dans les tableaux, ce qui amène ces élèves à avoir un travail correct.

Les différences entre la classe 1 et la classe 2 sont vraisemblablement dues au fait que, dans le cas de l'expérimentation avec l'intervention de l'enseignant (classe 2), deux minutes après que les élèves aient commencé à résoudre l'exercice, l'enseignant aide toute la classe en disant : « La suite $u_{n+1} = f(u_n)$ ça veut dire que u_{n+1} est égale à 1 sur 2 moins u_n , avec un terme initial quelque chose... ». De cette façon, la sous-activité de reconnaissance et le travail que produisent les élèves sont donc impactés par cette aide majeure du professeur à ce moment-là.

Sous-activité de contrôle instrumental dans la question B.1

Dans les figures suivantes (Figure 88 et Figure 89), nous présentons l'exemple d'un type de développement de sous-activité de contrôle instrumental. L'élève G1-1.8 de la classe 1 (travail individuel), en utilisant la calculatrice dans la partie B.1 pour calculer les valeurs de la suite, est confronté à un affichage systématique d'erreur sans doute dû aux n qui sont affichés comme décimaux (Figure 88, il y a des « ERREUR » partout sur l'écran de la calculatrice !). Nous pouvons faire l'hypothèse qu'il a un contrôle instrumental, et que cela ne lui semble pas cohérent, raison pour laquelle il reprend ses calculs. Dans sa production finale nous trouvons finalement les valeurs correctes de la suite (Figure 89). D'ailleurs, il est à remarquer que cet élève est celui qui a le mieux réussi la tâche dans un travail en autonomie (classe 1).



TI-83 Premium CE

NORMAL FLOAT DEC RECL DEGRE HP
OFF SUR + POUR C/TXT

n	u _n	u _{n+1}
0	0	1
1	1	ERREUR
2	ERREUR	ERREUR
3	ERREUR	ERREUR
4	ERREUR	ERREUR
5	ERREUR	ERREUR
6	ERREUR	ERREUR
7	ERREUR	ERREUR
8	ERREUR	ERREUR
9	ERREUR	ERREUR
10	ERREUR	ERREUR

n=1.1

Production élève avant contrôle :

Cas $\alpha_1 = 0$

u_0	0
u_1	1
u_2	ERREUR
u_3	ERREUR
u_4	ERREUR
u_5	ERREUR
u_6	ERREUR

Figure 88 : Élève G1-1.8 avant de faire le contrôle.

Cas $\alpha_1 = 0$		Cas $\alpha_2 = 0,1$	
u_0	0	u_0	0,1
u_1	0,5	u_1	0,5263
u_2	0,6667	u_2	0,6786
u_3	0,7500	u_3	0,7568
u_4	0,8	u_4	0,8044
u_5	0,8333	u_5	0,8364
u_6	0,8571	u_6	0,8594

Figure 89 : Élève G1-1.8 après le contrôle

La Figure 90 et la Figure 91 illustrent la reconstruction des successions des sous activités et du travail mathématique de l'élève G1-1-8. En ce qui concerne son travail mathématique, il active d'abord la dimension instrumentale par l'utilisation de la calculatrice, puis de la dimension discursive. Grâce à cette seconde activation il s'aperçoit que les valeurs données par la calculatrice ne sont pas cohérentes. Il revient alors pour réaliser les bonnes manipulations dans la calculatrice pour qu'elle produise les bonnes valeurs de la suite (travail dans le plan [Ins-Dis]). En outre, on voit que cet élève reconnaît la bonne suite récurrente et le bon usage final montre des premiers indices de la mise en fonctionnement des sous-activités de contrôle sémiotique et instrumentale.

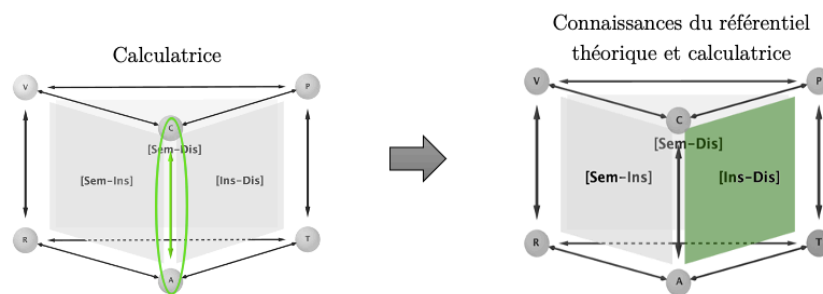


Figure 90 : Reconstruction de succession du travail mathématique de l'élève G1-1.8 dans la partie B.1.

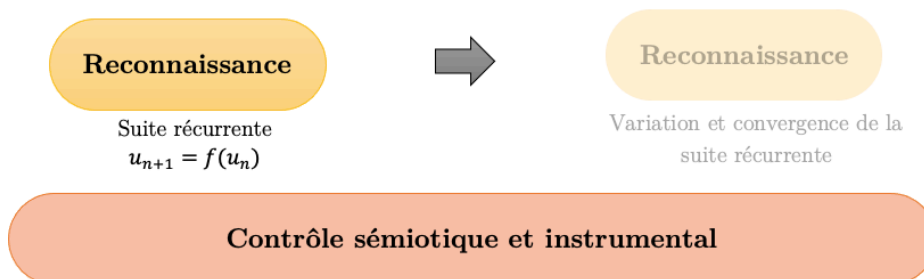


Figure 91 : Sous-activités de l'élève G1-1.8 dans la partie B.1.

On peut donc se demander si certains élèves n'ont pas reconnu la bonne suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ grâce à l'utilisation de la calculatrice pour déterminer les premiers termes de la suite. Ces élèves ont ainsi pu développer un contrôle instrumental et sémiotique à la fois. En effet, les élèves savent que la calculatrice doit fournir des valeurs à cette suite et que les premiers termes des trois tableaux devaient nécessairement être différents. Cela valide déjà, en partie, l'importance de passer par une telle étape pour que les élèves réussissent mieux la tâche proposée.

Ce travail dans le paradigme [A1] nous montre que pour beaucoup d'élèves (notamment ceux en autonomie totale de la classe 1), la sous-activité de reconnaissance du bon type de suite n'est déjà pas facile. Quel serait le sens du travail correct dans le paradigme [A2] pour ces élèves ?

Dorénavant, dans notre analyse, nous allons nous focaliser sur les élèves qui ont eu les bonnes reconnaissances de la suite récurrente, c'est à dire 17 élèves pour la classe 1 et 30 élèves pour la classe 2 (même si leur travail n'était pas toujours correct). Nous reviendrons à la fin sur la situation des élèves qui n'ont pas reconnu la bonne suite pour constater le travail effectué dans le paradigme [A2] en partie C.

B.2 et B.3 : reconnaissances de la croissance, convergence, limite

Le Tableau 14 présente l'effectif des élèves de chaque classe que nous avons considéré pour l'analyse et les réponses respectives aux questions B.2 et B.3 : le nombre d'élèves n'ayant pas répondu à la question ; le nombre de réponses des élèves qui font les reconnaissances attendues en ce qui concerne les conjectures de la croissance, de la convergence et de la valeur de la limite pour les trois valeurs demandées de α (question B.2), et les mêmes conjectures pour tout α dans $[0,1]$ (question B.3).

Tableau 14 : Nombre d'élèves avec les bonnes reconnaissances de la croissance, de la convergence et de la valeur de la limite (questions B.2 et B.3).

Effectif d'élèves	Sans réponse		Croissance		Convergence		Limite	
	B.2	B.3	B.2	B.3	B.2	B.3	B.2	B.3
Classe 1 : 17	2	7	13	9	7	5	8	5
Classe 2 : 30	6	19	24	12	24	11	24	10

Les sous-activités de reconnaissance de la croissance, de la convergence et de la valeur de la limite sont bien mieux développées avec les trois valeurs fixes de α que dans la généralisation. On constate que la croissance est toujours mieux reconnue. Cela s'explique par le fait que dans la question B.3 on demande une conjecture (ou généralisation) d'une autre conjecture qui a été faite dans la question B.2. Ainsi la baisse de la réussite n'est pas étonnante. On choisit donc, pour des questions de lisibilité des résultats, de se concentrer sur les élèves qui ont développé des sous-activités de reconnaissance – même partielles - pour la question B.2 : 15 dans la classe 1 et 24 dans la classe 2. Comme pour les élèves qui n'ont pas reconnu la bonne suite en B.1, on reviendra sur les productions dans la partie C des élèves mis à l'écart (2 dans la classe 1 et 6 dans la classe 2).

Si on se concentre sur la question B.2 et les élèves qui ont répondu quelque chose (15 dans la classe 1 et 24 dans la classe 2), on obtient plus spécifiquement le tableau suivant :

Tableau 15 : Activité de reconnaissance et travail mathématique des élèves qui répondent à la question B.2.

Effectif d'élèves	Tableaux B.1	Reconnaissance en B.2			Paradigme	Correction		
		Cr	Co	Lim		C	I	N
Classe 1 : 15	12 C	11	10	7	A1	7	3	2
	3 I	2	2				2	1
Classe 2 : 24	24 C	24	24	24	A1	24		

Dans la classe 1, sur les 15 élèves qui ont eu des reconnaissances partielles, seuls 12 d'entre eux avaient des tableaux corrects à l'issue de la réponse à B.1. On a parmi ceux-là 11 élèves qui ont reconnu la croissance. Parmi ces 11 élèves, on a 7 élèves qui ont le travail correct (codé C) en B.2 avec toutes les bonnes reconnaissances. Sur les 4 autres élèves qui reconnaissent la croissance, 1 élève dit que la convergence est vers 0 sans développer aucun contrôle (codé N – travail non correct) ; 1 élève reconnaît seulement la croissance, 1 élève dit que la convergence est vers 0,9, et 1 élève dit que la convergence est vers 0 et la limite 1 (codés I -travail incomplet- tous les 3). Donc la reconnaissance de la croissance à partir des tableaux de valeur corrects n'est pas une sous-activité si aisée pour tous les élèves.

Pour les 3 élèves sur les 15 qui partent avec des tableaux de valeurs incomplets dans la question B.1, 2 reconnaissent tout de même la croissance de la suite mais reconnaissent soit une convergence vers 0,9 soit une convergence et une divergence à la fois (codés I -travail incomplet- tous les 2).

On voit donc à nouveau la relative difficulté pour les élèves à passer de tableaux de valeurs, même s'ils sont corrects, à une reconnaissance de la croissance de la suite. On constate surtout que la convergence est beaucoup plus difficile à reconnaître par les élèves, notamment la valeur de la limite, d'autant plus qu'avec 6 valeurs dans les tableaux cela nécessite de leur part de passer dans une perspective locale, en cherchant éventuellement à avoir des valeurs supplémentaires de la suite avec leur instrument.

Dans la classe 2 on a, comme pour la question B.1, un effet professeur qui fait que les 24 élèves qui se sont engagés dans les questions B.2 et B.3, ont tous reconnu la croissance, la convergence et la valeur de la limite à partir de leurs tableaux de valeurs. Il semble que les difficultés que l'on identifie chez les élèves en autonomie (reconnaissance de la convergence à partir des tableaux de valeurs, liés à un passage d'une perspective ponctuelle à une perspective locale (Montoya Delgadillo et al., 2018)

soient gommées en classe 2 par des aides données par le professeur durant la séance. D'ailleurs, 3 élèves (G2-20, G2-18 et G2-4) parmi les 24 qui n'avaient pas des tableaux à valeurs correctes, arrivent tout de même à produire des discours corrects en réponse à la question B.2. On reviendra ci-après sur l'importance des interventions du professeur dans la classe 2.

Concernant le paradigme travaillé par les élèves, tous les élèves qui ont répondu aux différentes questions de la partie B ont travaillé dans le paradigme [A1] comme cela était prévu dans l'analyse *a priori*. Les conjectures correctes répondent à un développement de sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental.

b) Questions B.2 et B.3 : représentation décimale versus représentation fractionnaire

La représentation fractionnaire des termes de la suite donnée par la calculatrice joue un rôle à l'heure de reconnaître la variation, la convergence et la limite de la suite (surtout pour toutes les valeurs d' α en $[0,1]$, question B.3).

Dans le cas de la classe 1, sur l'effectif de 17 élèves, un seul utilise cette représentation fractionnaire : il développe un travail correct dans B.2 et un travail incomplet en B.3. Dans le cas de la classe 2, 17 élèves sur 30 utilisent des fractions. Ainsi, on constate que sur 6 élèves qui ne répondent pas à la question B.2, 4 utilisent des fractions en B.1 ; et sur 18 élèves qui ne répondent pas à la question B.3, 9 travaillent avec une représentation fractionnaire. Compte tenu des difficultés que pourrait provoquer le travail avec des fractions chez les élèves, elles pourraient expliquer les non-réponses qui utilisent ce type de représentation et des élèves peuvent rester bloqués dans la production de leur travail mathématique ou développement de sous-activités. Tel serait, le cas d'un binôme d'élèves qui a dépassé le problème provenant vraisemblablement de la représentation en fraction.

Les élèves G2-28 et G2-27 travaillent ensemble et ont utilisé des fractions dans leurs tableaux en B.1. La Figure 92 montre la production de l'élève G2-28. En B.2 il a d'abord mis que la suite était décroissante, effectuant une mauvaise reconnaissance dès le départ. Puis, on voit sur les copies originales qu'il a effacé son erreur avant d'écrire correctement que la suite était croissante.

Cas $\alpha_1 = 0$		Cas $\alpha_2 = 0,5$		Cas $\alpha_3 = 0,9$	
u_0	0	u_0	0,5	u_0	0,9
u_1	$\frac{1}{2}$	u_1	$\frac{3}{4}$	u_1	$\frac{10}{11}$
u_2	$\frac{3}{4}$	u_2	$\frac{9}{8}$	u_2	$\frac{11}{12}$
u_3	$\frac{5}{4}$	u_3	$\frac{27}{8}$	u_3	$\frac{12}{13}$
u_4	$\frac{7}{4}$	u_4	$\frac{81}{64}$	u_4	$\frac{13}{14}$
u_5	$\frac{9}{4}$	u_5	$\frac{6561}{4096}$	u_5	$\frac{14}{15}$
u_6	$\frac{6}{2}$	u_6	$\frac{9}{8}$	u_6	$\frac{15}{16}$

B.2) Conjecturer les **variations**, la **convergence**, et l'éventuelle **limite** de la suite en observant les tableaux pour les trois valeurs de α de la question B.1.

<p>Cas $\alpha_1 = 0$: la suite semble croissante et semble posséder une limite = à 1.</p> <p>Cas $\alpha_2 = 0,5$: la suite semble croissante et semble posséder une limite = à 1.</p> <p>Cas $\alpha_3 = 0,9$: la suite semble croissante et semble posséder une limite = à 1.</p>	<p>Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?</p> <p>Création d'un tableau pour éviter de calculer le stade d'après.</p>
--	---

Figure 92 : Production élève G2-28 réponses en B.1 et B.2 : « la suite semble croissante et semble posséder une limite = à 1 » ; « création d'un tableau pour éviter de calculer le stade d'après ».

La Figure 93 illustre le travail mathématique développé par ce binôme d'élèves jusqu'à cette question. Nous pouvons voir qu'un travail, dans la dimension instrumentale avec la calculatrice, produit des signes qui ne permettent pas d'effectuer facilement une visualisation du comportement de la suite. C'est la raison pour laquelle les élèves reviennent à la calculatrice pour qu'elle puisse afficher des signes dans un registre de représentation qui parvienne à les aider à bien conclure.

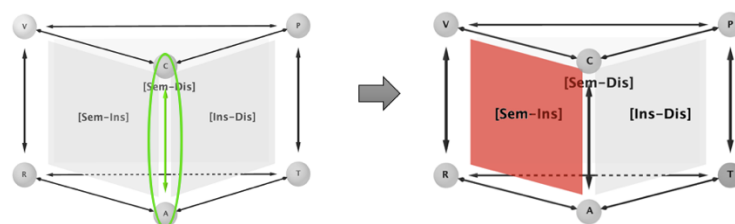


Figure 93 : Reconstruction des successions du travail mathématique du binôme d'élèves G2-27 et G2-28 dans la partie B (avant l'aide de l'enseignant).

La Figure 94 montre la production de l'élève G2-27 qui a écrit également qu'il regarde la courbe de la suite pour voir sa convergence et la valeur de sa limite. On pourrait penser que pour ce binôme, les fractions utilisées en B.1 n'ont pas permis de faire des conjectures correctes. Ils ont eu besoin d'autres représentations pour développer une sous-activité de contrôle sémiotique dans la production de leur travail. La représentation graphique de la suite peut en effet permettre de conjecturer plus

facilement la convergence et la valeur de la limite que la représentation ponctuelle en tableau de valeurs surtout, comme dans ce cas, sous formes fractionnaires.

<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p> <p><i>on regarde la courbe de la suite et vers où elle converge et quelle serait sa limite</i></p>	<p><i>On regarde la courbe de la suite et vers où elle converge et quelle serait sa limite</i></p>
--	--

Figure 94 : Production partie B.3 de l'élève G2-27.

Il est à noter une aide du professeur (que d'ailleurs d'autres élèves ont pu entendre) à propos d'un contrôle instrumental avec la calculatrice, vraisemblablement pour faire avancer les élèves vers un travail mathématique correct, comme on peut le voir en Figure 95 au cours de la partie B⁷⁸.

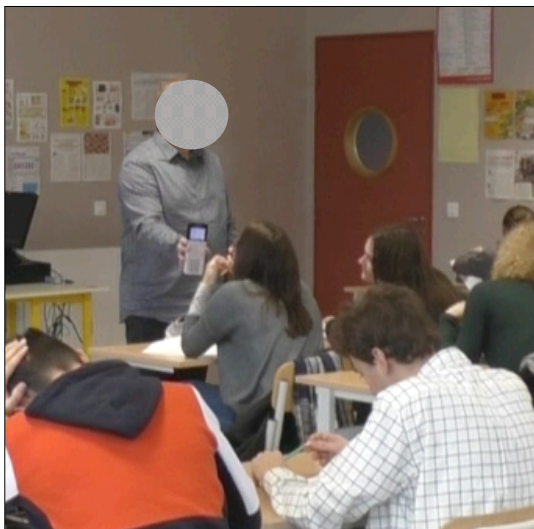
	<p>Enseignant (20.15) : <i>Ça va de moins 3000 à plus 3000 et de moins 600 à 600. On ne voit pas grand-chose ...</i></p> <p><i>(L'enseignant programme la calculatrice de l'élève, puis se dirige à toute la classe en disant)</i></p> <p><i>Si vous faites une recherche graphique, pensez à régler la fenêtre...</i></p>
---	---

Figure 95 : Minute 20.15 de la Class 2, aide de l'enseignant au contrôle instrumental des élèves G2-27 et G2-28.

La Figure 976 et la Figure 97 illustrent la reconstruction des successions des sous-activités et du travail mathématique du binôme d'élèves G2-27 et G2-28 lors de l'intervention faite par l'enseignant. En effet, cette aide au niveau de la sous-activité

⁷⁸ Pour la transcription de la classe 2, voir annexe 5.3, page 560.

de contrôle instrumental régule l'activité mathématique que produit ce binôme. Cette aide conduit ces élèves à s'investir dans les bonnes sous-activités de reconnaissance de la suite récurrente, et des propriétés de cette suite, et à rectifier le travail qu'ils avaient produit au début.

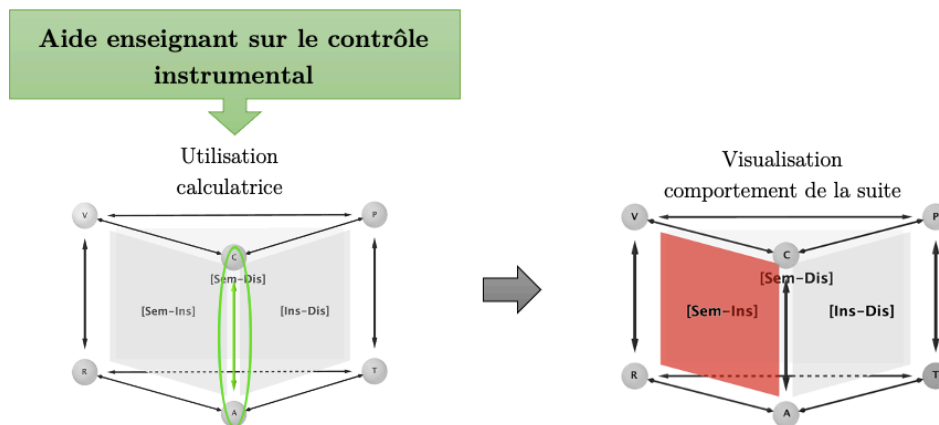


Figure 96 : Reconstruction des successions du travail mathématique du binôme d'élèves G2-27 et G2-28 avec l'aide de l'enseignant dans la partie B.

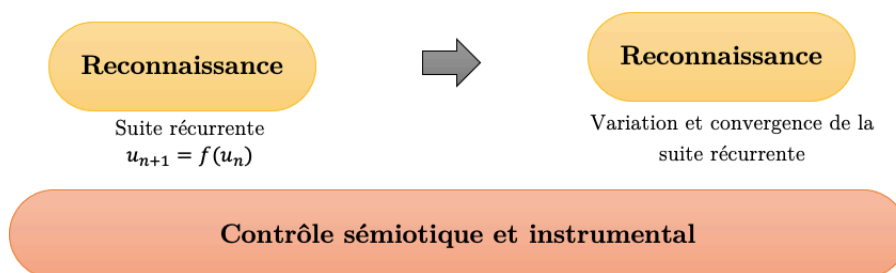


Figure 97 : Reconstruction des sous-activités du binôme d'élèves G2-27 et G2-28 avec l'aide de l'enseignant dans la partie B.

Cette aide a servi à ce binôme d'élèves, mais a pu aussi être utile à d'autres binômes. Ceci peut expliquer que les reconnaissances ont été à nouveau bien meilleures dans la classe 2 avec l'intervention de l'enseignant. Comme nous l'avons signalé, certains élèves arrivent à produire les réponses attendues à la question B.2 sans pour autant avoir les tableaux de valeurs correctes dans la question B.1.

8.2.2 Partie C

L'objectif de cette partie était que les élèves puissent prouver les conjectures faites dans la partie B. Ici un travail mathématique dans le paradigme [A2] est attendu,

avec la mobilisation de théorèmes et des méthodes de preuve d'une part, avec le soutien des sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental s'appuyant sur le travail dans le paradigme [A1] de la partie B d'autre part. Autrement-dit, il s'agissait de développer des sous-activités de reconnaissance, de traitement et de contrôle discursif dans le paradigme [A2], avec un soutien des sous-activités de contrôle effectués dans le paradigme [A1] (partie B).

Dans un premier temps, on considère seulement les 15 élèves de la classe 1 et les 24 élèves de la classe 2 qui ont reconnu la bonne suite récurrente dans la question B.1 et qui ont produit des résultats dans la question B.2. Pour ceux-là, on attend des contrôles entre ce qu'ils produisent comme discours dans la partie C et ce qu'ils ont développé – même partiellement correct – dans la partie B. On reviendra sur les autres élèves en fin de section.

a) **Question C.1 : prouver que la suite est bornée**

Nous présentons le Tableau 16 qui synthétise les sous-activités mathématiques et le travail mathématique développés dans la question C.1 à partir des catégories issues des questions B.1 et B.2. Nous détaillons le paradigme de travail mathématique, la sous-activité de reconnaissance de la preuve par récurrences, ainsi que la correction du travail mathématique des élèves. Les catégories issues des questions B.1 et B.2 sont reprises du Tableau 15. Pour la classe 1, il s'agit des 7 élèves qui ont eu un travail correct (codé C en B.2), 3 élèves qui ont eu un travail incomplet (codé I en B.2), et le regroupement des 3 élèves qui n'avaient pas obtenu des tableaux corrects en B.1 (codés I en B.1) et les 2 élèves qui ont eu un travail non correct en B.2 (codés N en B.2). Pour la Classe 2, les 24 élèves sont dans la même catégorie (C) après B.1 et B.2.

Tableau 16 : Résumé des réponses à la question C.1.

Effectif d'élèves	Catégories issues de B.1 et B.2	NR	Paradigme			Récurrence (ou tentative)	Correction		
			A1	A2	?		C	I	N
Classe 1 15	7 élèves travail C en B.1 et B.2	1	4	2		2 [A2]	1 [A2]	4	1
	3 élèves travail I en B2 : reconnaissance croissance mais convergence farfelue	1		2		2 [A2]		2	
	5 élèves : travail NC en B2 ou I en B1	3	1		1			2	
Classe 2 24	Travail C en B1 et B2	1		23		21	7	14	2

Dans la classe 1, parmi les 15 élèves qui ont eu un travail dans la question B.2 (avec des reconnaissances partielles sur croissance et convergence), 5 n'ont pas pu donner de réponse à la question C.1 dont 1 fait partie des élèves qui ont eu un travail correct en B.2 (G1-1.9). Le travail correct dans le paradigme [A1] (partie B) semble donc être un bon précurseur pour amorcer le travail attendu dans le paradigme [A2] (partie C). On peut donc faire l'hypothèse que les élèves peuvent d'autant mieux aborder la question C.1 qu'ils ont des occasions pour développer des sous-activités de contrôle à partir de leur travail dans la partie B. Il faut cependant noter que parmi les 7 élèves qui ont eu un travail correct en B.2 (et qui ont travaillé dans C.1), 4 d'entre eux restent spontanément dans le paradigme [A1]. Le travail dans le paradigme [A1] pourrait peut-être aussi constituer un frein au changement de paradigme pour une partie des élèves.

Au total, 5 élèves de la classe 1 travaillent dans le paradigme [A1] (4 qui avaient un travail correct dans les questions B.1 et B.2 et 1 (G1-1.12) qui n'avait pas tous ses tableaux de valeurs corrects en B.1). 4 élèves font un travail incomplet (I) : on identifie assez clairement chez ces élèves un travail pas seulement discursif, voire des contrôles explicites en lien avec la partie B. Par exemple l'élève G1-1.15 argumente que la suite converge vers 1 mais sans l'atteindre, donc que la suite est dans $[0,1]$. Puis, il dit qu'il peut utiliser la fonction table de la calculatrice. Il en est de même de l'élève G1-2.8, sans qu'il évoque cependant l'utilisation de la calculatrice. L'élève G1-1.16 explicite la possibilité d'utiliser la calculatrice. L'élève G1-1.12 (qui n'avait pas ses tableaux de valeurs corrects en B.1) extrapole ses observations à partir des trois tableaux de

valeurs. Il écrit aussi que l'on pourrait utiliser la calculatrice. La dimension instrumentale et sémiotique entre en jeu dans le travail des élèves, néanmoins, ce travail ne permet pas le développement des sous-activités de contrôle telle qu'attendue. D'ailleurs, le cinquième élève qui travaille dans [A1] (G1-1.14) retourne à considérer $u_n = f(n)$ sans mettre en relation son travail de la partie C avec celui correct de sa partie B. Son travail est ainsi non correct (N).

Un autre élève G1-1.4 (Figure 98), qui lui aussi n'avait pas ses tableaux corrects en B.1, produit un travail entre les paradigmes [A1] et [A2]. Il se base sur l'allure de la courbe de la fonction f . A nouveau, sa réponse n'est pas conforme au travail attendu. Mais il y a ici une sous-activité de contrôle sémiotique à partir de la courbe de f et il produit un travail incomplet (I) – ce qu'il dit n'est pas non correct et peut être complété (notamment par la mise en fonctionnement d'une preuve par récurrence).

$f(0) = \frac{1}{2}$ $f(1) = 1$ on a pas de variation anormale dans l'encadrement $[0,1]$ et ayant une courbe croissante alors pour tout entier n , u_n appartient à $[0,1]$	$f(0) = 1/2$ $f(1) = 1$ N'ayant pas de variation anormale dans l'encadrement $[0,1]$ et ayant une courbe croissante alors pour tout entier n , u_n appartient à $[0,1]$.
--	---

Figure 98 : Production de la question C.1 de l'élève G1-1.4.

La Figure 99 et la Figure 100 montrent la reconstruction des successions de l'activité et le travail mathématique de l'élève G1-1.4. Au lieu de mobiliser une preuve par récurrence et activer la dimension discursive de son ETM personnel, c'est la dimension sémiotique qui est activée pour guider le travail de cet élève. Il développe une sous-activité de contrôle sémiotique, mais comme la reconnaissance de la récurrence n'est pas atteinte, il ne développe pas la sous-activité de traitement attendue. Le travail d'argumentation que produit l'élève répond à l'activation du plan vertical [Sem-Dis], mais celui-ci ne permet pas de répondre à la tâche avec un travail mathématique correct.

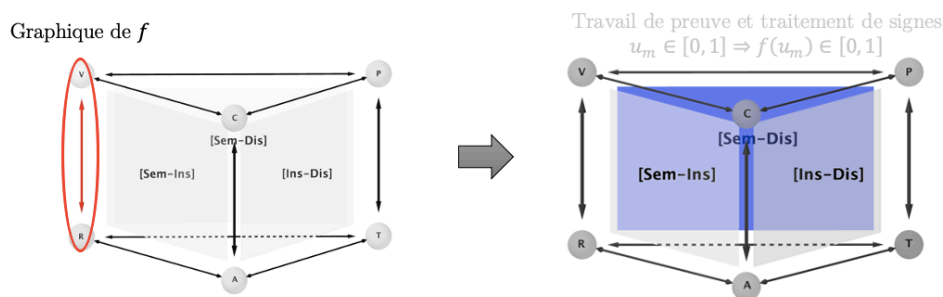


Figure 99 : Reconstruction du travail mathématique de l'élève G1-1.4 dans la question C.1.

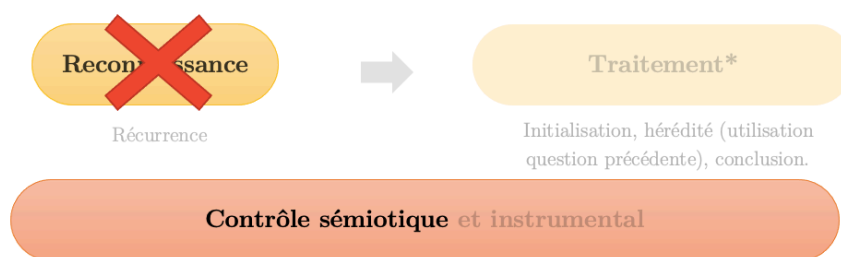


Figure 100 : Successions de sous-activités de l'élève G1-1.4 dans la question C.1.

La classe 1 compte ensuite 4 élèves dans le paradigme [A2] attendu. Ils sont 2 parmi les 7 élèves qui avaient un travail correct dans les parties B.1 et B.2, et 2 qui avaient bien reconnu la croissance de la suite mais qui avaient proposé des convergences déraisonnables (notamment 1 qui l'identifie comme étant vers 0,9). Ces 4 élèves ont tous fait ou amorcé une récurrence pour prouver que la suite est dans $[0,1]$. Un seul a développé un travail correct (C). Deux autres ont produit un travail incomplet (I) car la récurrence n'est pas complétée. Le troisième (G1-2.10) a basculé sur le modèle $u_n = f(n)$ pour sa récurrence, mais comme il a bien reconnu la nécessité d'une récurrence on le code aussi incomplet (I).

Remarquons finalement qu'un seul élève de la classe 1 produit un travail totalement non correct (N). C'est l'élève G1-1.14 qui part sur le modèle $u_n = f(n)$ en restant dans le paradigme [A1]. C'est typiquement un élève qui n'aurait rien fait si la partie C avait été donnée d'emblée (comme des exercices proposés en TS et ceux de L1) alors qu'il a travaillé tout à fait correctement dans la partie B. Tout se passe comme si cet élève était déstabilisé par le paradigme [A2], alors qu'il travaille sans problème dans le paradigme [A1].

En ce qui concerne les autres élèves, ils travaillent dans les paradigmes [A1] ou [A2] (avec la récurrence), sur des dimensions à la fois discursive, sémiotique (sur les tableaux de valeurs ou des graphes), voire instrumentale (quand ils reprennent ou

même évoquent leur calculatrice). Ils arrivent au mieux à produire un travail incomplet (I). Nous y reviendrons en conclusion.

Pour la classe 2, parmi les 24 élèves que nous considérons, 23 ont répondu à la question et tous travaillent dans le paradigme [A2] en produisant un travail conforme au paradigme attendu. La dimension privilégiée est discursive et il n'y a pas de traces dans les productions des élèves de contrôles sémiotiques ou instrumentaux du travail produit dans la partie B. Parmi ces élèves, 21 reconnaissent la démonstration par récurrence, mais la mène de façon incomplète (14 élèves). Pour les 2 élèves qui ne reconnaissent pas la récurrence, ils essaient tout de même de raisonner dans [A2] avec des inégalités et sans développer une sous-activité de contrôle en lien avec la partie B. Par exemple l'élève G2-10 (Figure 101) produit un travail non correct (N) en échangeant sans contrôle discursif le terme u_n par la variable de la fonction. Il cherche certainement à produire un travail guidé par la dimension sémiotique (traitements algébriques), avec des inégalités pour montrer que la suite sera toujours dans $[0,1]$. On retrouve aussi chez des élèves des notations explicites du type $f(x) = f(u_n)$ (comme dans les productions que nous avons analysées dans le chapitre 7 dédié à l'étude de ces difficultés).

$ \begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq 2-x \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2-x} \leq 1 \text{ } u_n \text{ appartient à } [0,1]. \end{aligned} $
$ \begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq 2-x \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2-x} \leq 1 \text{ } u_n \text{ appartient à } [0,1]. \end{aligned} $

Figure 101 : Production de l'élève G2-10 dans question C.1.

La Figure 102 et la Figure 103 montrent la reconstruction des successions de l'activité et du travail mathématique de l'élève G2-10. À nouveau, c'est la dimension sémiotique qui guide le travail de l'élève mais, cette fois, avec le travail de conversion et des traitements sémiotiques dans un seul registre. Cela ne permet pas à l'élève de développer les sous-activités de reconnaissance et de traitement attendues, ni aucune des sous-activités de contrôle. Néanmoins, le travail mathématique produit par l'élève répond à une activation du plan vertical [Sem-Dis].

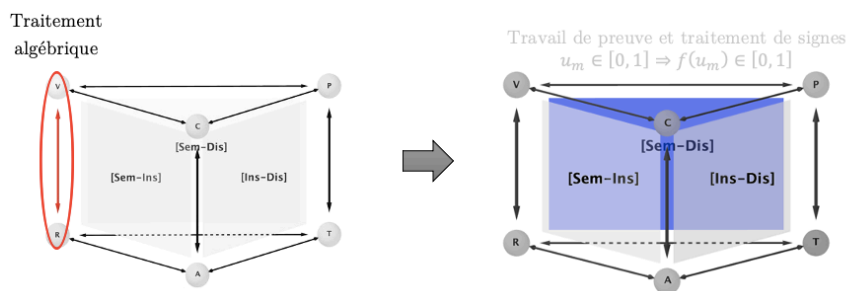


Figure 102 : Reconstruction du travail mathématique de l'élève G2-10 dans la question C.1.

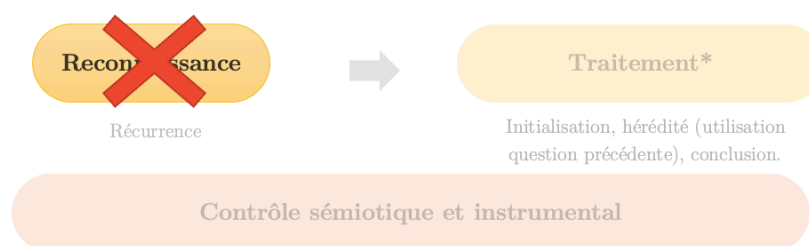


Figure 103 : Successions de sous-activités mathématiques non atteintes de l'élève G2-10 dans la question C.1.

La Figure 104 et la Figure 105 ci-dessous, montrent l'investissement des élèves de la classe 1 et de la classe 2 dans la partie B et dans la question C.1 où on constate dans les deux classes une baisse du nombre d'élèves qui travaillent. Cela est nettement plus marqué dans la classe sans intervention de l'enseignant (classe 1). Ces figures illustrent aussi les changements de paradigmes effectués (ou pas) dans les deux classes.

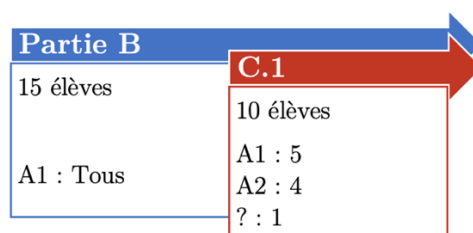


Figure 104 : Schéma d'investissement des élèves classe 1, partie B et question C.1.

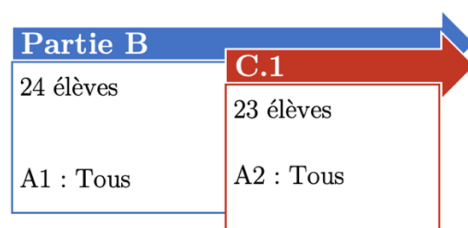


Figure 105 : Schéma d'investissement des élèves classe 2, partie B et question C.1.

b) Question C.2 : prouver que la suite est croissante

Sur les 10 élèves de la classe 1 qui ont répondu à C.1, tous ont ensuite répondu à la question C.2, tandis que sur les 23 élèves de la classe 2 qui ont répondu à la question C.1, seuls 18 ont répondu à C.2. On retrouve l'idée qu'un travail dans [A1] (qui est largement plus présent pour les élèves de la classe 1 jusqu'à la question C.1) favorise l'engagement des élèves jusqu'à la question C.2. Ce ne peut pas être le cas dans la classe 2 où tous les élèves ont basculé au paradigme [A2] dès la partie C, après le bilan du professeur à la fin de la partie B.

Dans le Tableau 17 nous présentons à nouveau la synthèse des productions mathématiques des élèves, le paradigme utilisé et les reconnaissances des méthodes de preuve les plus utilisées⁷⁹ (la reconnaissance de $u_{n+1} - u_n$, de la méthode de preuve par récurrence, et du théorème en acte « comme la fonction est croissante, la suite est croissante aussi ») ainsi que la correction du travail. Ici nous considérons uniquement les 10 élèves de la classe 1 et les 18 élèves de la classe 2 que nous prenons en compte pour l'analyse des réponses à la question C.2.

Tableau 17 : Résumé des réponses de la question C.2 pour les deux classes.

Catégories à l'issue de C1	Paradigme			$u_{n+1} - u_n$	Récurrence	$f \nearrow \Rightarrow u_n \nearrow$	Correction		
	A1	A2	?				C	I	N
Classe 1 : 4 dans [A2]	1	3		2		1	1	2	1
Classe 1 : 5 dans [A1]	4	1		1		1		2	3
Classe 1 : 1 dans ?			1			1		1	
Classe 2 : 18 qui répondent à C.1 dans [A2] et dimension Dis	2					1		1	1
	1					1		1	
		15		3	10	3		9	6

Pour la classe 1, on observe que 4 élèves travaillent dans le paradigme [A2] : 3 qui étaient déjà dans [A2] dans la question C.1 et 1 qui est revenu dans le paradigme

⁷⁹ Aucun élève ne propose le calcul du quotient u_{n+1}/u_n .

[A2] (G1-1.14). Parmi les 3 premiers élèves, 1 produit le travail correct conforme à ce qui était attendu (en utilisant la méthode $u_{n+1} - u_n$), et 1 produit un travail incomplet (avec la même méthode $u_{n+1} - u_n$). C'est la dimension instrumentale du travail qui est privilégiée. Le troisième élève dans le paradigme [A2] (Figure 106 ci-dessous) produit un travail non correct (N) issu de la dimension sémiotique ou instrumentale sans développer un contrôle discursif. En effet, la confusion $u_n = f(n)$ arrive à ce moment-là, alors que sa récurrence incomplète à la question précédente portait sur la bonne expression de la suite.

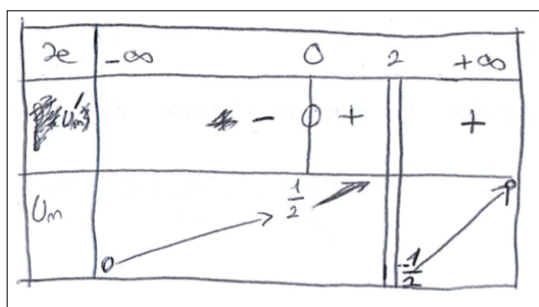


Figure 106 : Production de l'élève G1-2.6 en réponse à la question C.2.

La Figure 107 et la Figure 108 montrent les reconstructions des successions de l'activité et le travail mathématique de l'élève G1-2.6. Cet élève ne reconnaît pas une méthode valable pour prouver la croissance de la suite (donc il ne s'investit pas dans la sous-activité de traitement attendue), néanmoins il active la dimension instrumentale de son ETM personnel, sans aucune sous-activité de contrôle, en mobilisant le tableau de variation de la suite et en transposant les propriétés de la fonction à la suite. Cela lui permet de conclure (avec un signe de flèche) que la suite est croissante, produisant un travail dans le plan vertical [Sem-Ins] de son ETM.

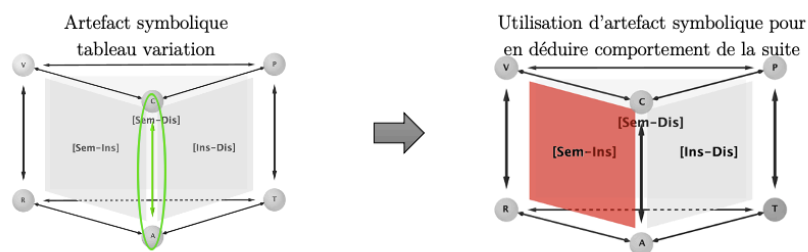


Figure 107 : Reconstruction des successions du travail mathématique de l'élève G1-2.6 dans la question C.2.

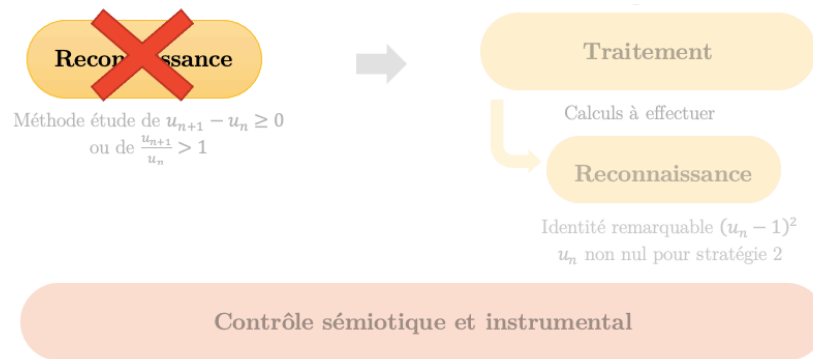


Figure 108 : Successions des sous activités non atteintes de l'élève G1-2.6 dans la question C.2.

L'élève G1-1.14 (Figure 109) qui est passé du paradigme [A1] au paradigme [A2], est celui qui avait basculé sur le modèle $u_n = f(n)$ dans la question C.1. Il calcule bien la différence $u_{n+1} - u_n$ mais il continue avec $u_n = f(n)$ toujours sans mettre en fonctionnement une sous-activité de contrôle en lien avec la partie B. Son travail est non correct (N).

The image shows handwritten mathematical work in blue ink. It starts with the expression $u_{n+2} - u_n = \frac{1}{2-(n+2)} - \frac{1}{2-n}$. This is followed by several steps of algebraic manipulation: $= \frac{1}{-n} - \frac{1}{2-n}$, then $= \frac{1}{(2-n)-n} - \frac{1(1-n)}{(2-n)-n}$, and finally $u_{n+2} - u_n = \frac{1+n}{-2n+n^2} = \frac{1+n}{-2n+n^2}$. An arrow points upwards from the final result.

Figure 109 : Production de l'élève G1-1.14 en réponse à la question C.2.

La Figure 110 et la Figure 111 illustrent la reconstruction de successions des sous-activités et du travail mathématique de l'élève G1-1.14. Cet élève reconnaît une méthode valable pour montrer la croissance de la suite, ce qui active cette méthode en tant qu'artefact symbolique, mais le fait de ne pas développer de sous-activité de contrôle l'empêche de travailler avec la suite récurrente et de développer la sous-activité de traitement attendue. Toutefois, il active bien le plan vertical [Sem-Ins] de son ETM personnel, ce qui lui permet de conclure la tâche avec une flèche qui indique que la suite est croissante.

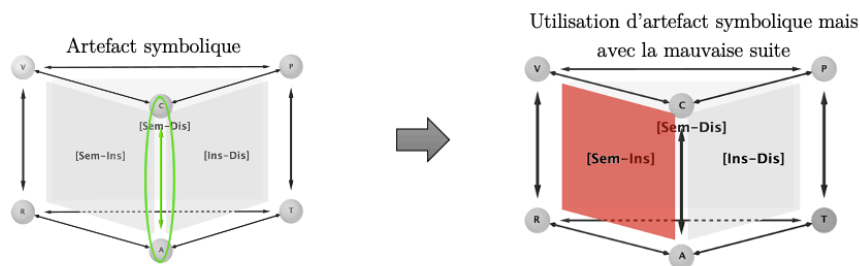


Figure 110 : Reconstruction du travail mathématique de l'élève G1-1.14 dans la question C.2.

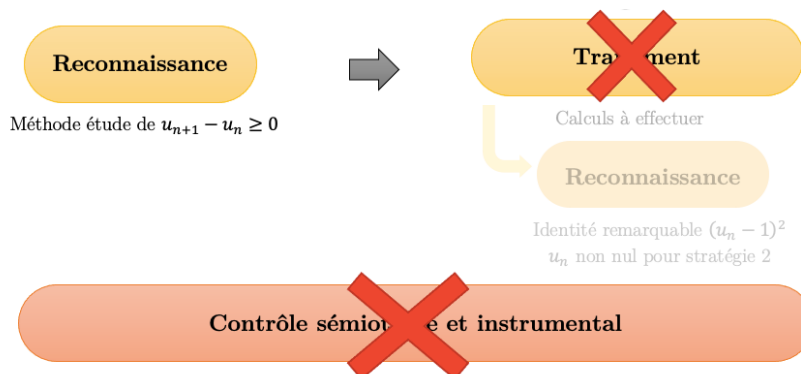


Figure 111 : Successions de sous-activités de l'élève G1-1.14 dans la question C.2.

On a aussi 5 élèves dans le paradigme [A1] : 4 qui étaient déjà dans [A1] pour la partie C.1, et 1 qui est passé de [A2] vers [A1]. Parmi les 4 premiers, 2 produisent un travail incomplet (I) en argumentant avec le tableau de valeurs ou le graphique donné par la calculatrice (dimensions sémiotique et instrumentale du travail mathématique personnel des élèves). Les 2 autres élèves produisent un travail non correct (N). L'élève qui est passé de [A2] vers [A1] (G1-2.10) est celui qui avait tenté la récurrence en réponse à la question C.1 mais avec le modèle de la suite explicite $u_n = f(n)$. A cette question C.2, il revient dans le paradigme [A1] en écrivant que « la suite semble croissante car $u_0 < u_1 < u_2 \dots u_{n+1}$ ». Sans doute s'appuie-t-il aussi sur ses tables de valeurs de la partie B. Son travail est cette fois incomplet (I).

Pour le dernier élève, on ne peut rien dire concernant le paradigme du travail : il argumente lui aussi que la suite est croissante en s'appuyant sur la courbe croissante de la fonction. Il s'agit du même élève (G1-1.4) qui travaillait entre deux paradigmes à la question C.1. Comme nous l'avons signalé dans le chapitre 7 lors de l'étude des difficultés que rencontrent les élèves, ce théorème-en-acte⁸⁰ « f croissante donc (u_n) croissante » peut cacher soit une confusion entre suite et fonction, soit un modèle du

⁸⁰ Vergnaud (1991) définit les théorèmes-en-acte comme des invariants opératoires de type « propositions » : ils sont susceptibles d'être vrais ou faux (Ibid, p.142).

type $u_n = f(n)$ ou encore un transfert de propriétés de f sur la suite dans le cas du bon modèle $u_{n+1} = f(u_n)$. Dans cette expérimentation, il apparaît dans le cas où les élèves travaillent tant dans le paradigme [A1] que dans le paradigme [A2] (4 élèves au total de la classe 1 appliquent ce théorème en acte, 3 qui apparaissent dans la table 5 et 1 élève - G1-1.5 - qui ne répond pas à la question C.1).

Pour la classe 2, les élèves continuent massivement de travailler dans le paradigme [A2]. Les seuls mouvements observés sont des décrochages du paradigme [A2] vers [A1] pour 3 élèves. Parmi les 15 élèves qui travaillent toujours dans le paradigme [A2] à ce stade, aucun ne produit un travail correct en réponse à la question C.2 (alors qu'on avait un élève qui en produisait un dans la classe 1). On a, dans ce paradigme [A2], 9 élèves qui font un travail incomplet (8 en faisant une récurrence et 1 avec la méthode de la différence) et 6 qui font un travail non correct (3 essayent une récurrence, 1 en utilise la méthode de la différence et plusieurs d'entre eux font des confusions entre la suite et la fonction que l'on peut interpréter comme une régression vers le modèle $u_n = f(n)$). Des 3 élèves qui sont dans le paradigme [A1], 2 élèves regardent le graphique de (u_n) sur leur calculatrice (travail sémiotique et instrumentale) et 1 élève écrit simplement que « $u_n < u_{n+1}$ car la fonction est croissante » (G2-10, discursif uniquement, travail incomplet I).

Si on revient sur la classe 1, on trouve aussi 2 élèves parmi les 5 qui n'ont pas travaillé dans C.1 mais qui retravaillent dans C.2 (G1-2.11 et G1-1.5). Ils ne reconnaissent cependant aucune méthode valable pour étudier les variations de la suite. L'un travaille dans le paradigme [A1] et dit que la suite est croissante d'après les tableaux de valeur (contrôle sémiotique, G1-2.11). L'autre énonce que « *dans le cas de $u_{n+1} = f(u_n)$, les variations de la suite sont les mêmes que les variations de la fonction, donc la suite est croissante* » (travail discursif uniquement, G1-1.5).

La Figure 112 et la Figure 113 ci-dessous, montrent la progression de l'investissement des élèves. Aux figures précédentes de la classe 1 et de la classe 2, nous ajoutons les résultats concernant le nombre d'élèves qui produisent un travail mathématique et les paradigmes utilisés dans les réponses à la question C.2. Nous observons que dans la classe 1 le nombre d'élèves reste le même alors que, dans la classe 2, il existe une baisse avec 5 élèves qui ne produisent pas de travail mathématique. Concernant les paradigmes travaillés, on voit que dans la classe avec des élèves en autonomie (classe 1), le paradigme [A1] est bien plus investi que dans la classe avec l'intervention de l'enseignant (classe 2), où une minorité d'élèves reste en [A1].

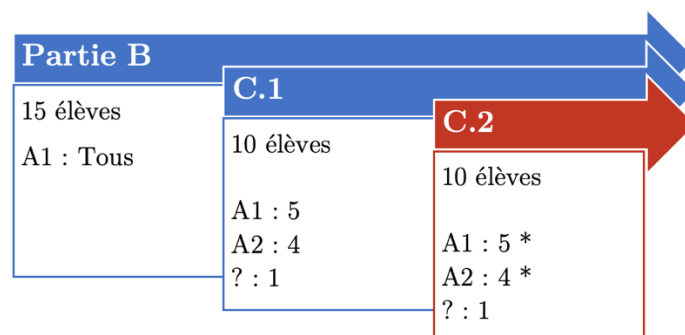


Figure 112 : Schéma d'investissement des élèves classe 1, partie B, questions C.1 et C.2.

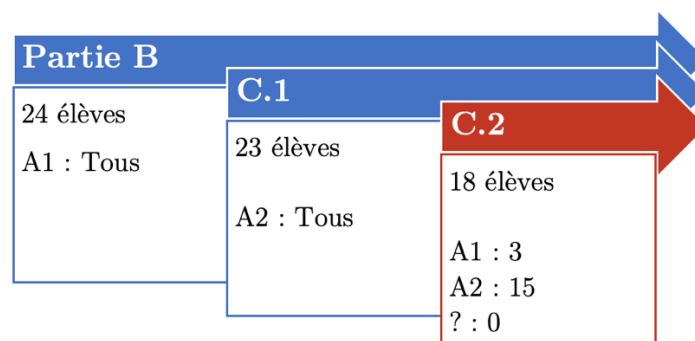


Figure 113 : Schéma d'investissement des élèves classe 2, partie B, questions C.1 et C.2.

c) Question C.3 : prouver la convergence de la suite

Comme on l'a dit dans l'analyse des réponses à la question C.2 de la classe 1, 10 élèves parmi les 15 qui avaient des reconnaissances de la suite, de la convergence et de la limite à l'issue de B.1 et de B.2, avaient répondu à C.1 et à C.2. Parmi ces élèves, 7 répondent encore à la question C.3. Dans cette classe 1, sur les 5 qui n'ont pas répondu à C.1, 2 élèves travaillent tout de même en C.2 (G1-2.11 et G1-1.5 rencontrés plus haut). Ils ne produisent plus rien ensuite en réponse à la question C.3.

Ce n'est pas du tout la même observation dans la classe 2 où on a une géographie totalement différente des parcours des élèves. En effet, sur 24 élèves qui avaient travaillé à l'issue de B.1 et de B.2, 23 ont répondu à la question C.1, 18 à la question C.2 et à nouveau 22 parmi les 23 élèves répondent dans la question C.3. En ce qui concerne le seul élève qui n'a pas travaillé dans C.1, il ne reconnaît aucune méthode acceptable pour C.2 mais il travaille tout de même de façon correcte dans C.3 (G2-20) : il le fait sans aucun appui sur C.1 et C.2. Cela est possible à nouveau à cause du professeur car il a donné le bilan intermédiaire entre les parties B et C et a validé les conjectures sur la croissance et sur la convergence de la suite.

Les élèves qui travaillent dans C.3 sont donc au nombre de 7 dans la classe 1 et 23 dans la classe 2. Le Tableau 18 ci-dessous montre de façon synthétique le travail qui a été produit. Nous quantifions les paradigmes, la reconnaissance du théorème et le statut du travail.

Tableau 18 : Résumé de réponses à la question C.3.

Catégories à l'issue de C2	Effectif	Paradigme			Théorème	Correction		
		A1	A2	?		C	I	N
A1 pour C1 et C2	Classe 1 7	3					3	
A2 pour C1 et C2			2		1	1		1
Changent			1 (en C2)	1 (en C3)				2
A2 pour C1 et A1 pour C2	Classe 2 23		2	1	2	2		1
A2 pour C1 (22) A2 pour C2 (19)			20		19	19	1	

Dans la classe 1, sur les 7 élèves qui travaillent en C.3, aucun ne reconnaît le théorème en jeu sauf 1 (travail correct C). Il s'agit de l'élève G1-1.8 qui avait reconnu la croissance et qui avait conjecturé une convergence de la suite vers 0,9 dans la partie B. Il est toujours dans le paradigme [A2] depuis le début de la partie C, avec une dimension de travail essentiellement instrumentale (issue de l'artefact symbolique) et sans éléments de contrôle sémiotique ou instrumental observables. Cependant, on peut penser que cet élève contrôle tout de même sa production avec le travail fourni dans le paradigme [A1] de sa partie B car il explicite à la fin du travail (partie D) que la suite converge vers 1 et non pas 0,9 (ce qu'il avait conjecturé en partie B). Dans ce cas précis, on peut parler d'un contrôle mathématique issu de la dialectique entre paradigmes [A1] \leftrightarrow [A2].

Trois élèves ont un travail incomplet (I). Il importe d'ailleurs de remarquer qu'il s'agit d'élèves qui travaillent dans le paradigme [A1] dans toutes les réponses aux questions C.1, C.2 et C.3 avec, notamment, l'un d'entre eux (G1-1.15, Figure 114) qui essaie de développer des sous-activités de contrôle sémiotique et instrumentale, sans contrôle discursif. Il travaille ainsi dans le plan [Sem-Ins] en faisant référence constamment aux tableaux de valeurs et à la calculatrice. La Figure 115 et la Figure 116 montrent la reconstruction des successions de l'activité et du travail mathématique de l'élève G1-1.15.

d'après la calculatrice on voit que la suite converge vers 1 mais ne l'atteint pas	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ? oui avec le tableau
D'après la calculatrice on voit que la suite converge vers 1 mais ne l'atteint pas	Oui avec le tableau

Figure 114 : Réponse de l'élève G1-1.15 à la question C.3.

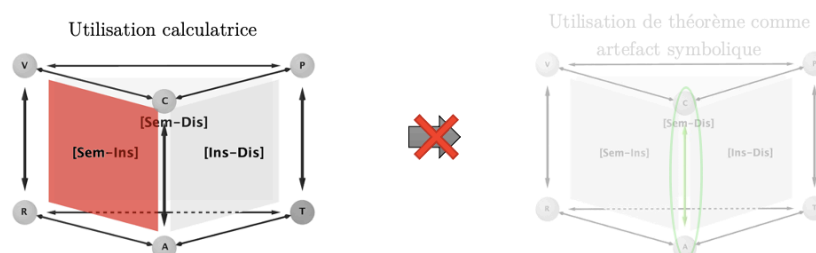


Figure 115 : Reconstruction du travail mathématique de l'élève G1-1.15 dans la question C.3.

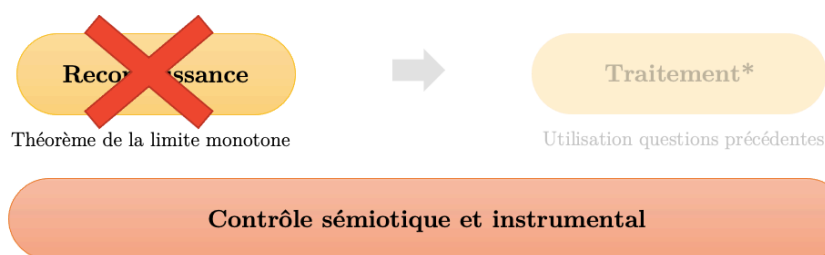


Figure 116 : Successions des sous-activités de l'élève G1-1.15 dans la question C.3.

Il y a enfin 3 élèves qui font un travail non correct (N) : 1 argumente que la suite converge car elle est croissante et minorée (G1-2.2), 1 autre essaye de calculer la limite de la suite directement et de façon erronée (G1-1.14). Ces deux élèves sont dans le paradigme [A2]. Il reste 1 élève qui passe du paradigme [A2] vers un paradigme entre [A1] et [A2] (G1-2.6) après un travail correct en C.1 et un travail non correct en C.2. Il conclut de son tableau de variation faux (Figure 106) que la suite converge vers 0. Il apparaît donc que l'appui constant sur le paradigme [A1] permet d'aller, si ce n'est vers un travail correct, au moins jusqu'à la question C.3 avec un travail incomplet (I). Ce n'est pas forcément les élèves qui sont dans [A2] qui réalisent le mieux ce qui est attendu. Autrement-dit, tout se passe comme si pour les élèves qui veulent rester ou rentrer dans [A2] (pour répondre à ce qui est attendu) produisent finalement un travail mathématique non correct (N). Tel est le cas de l'élève G1-1.14 (Figure 117) qui a travaillé dans le paradigme [A1] pour C.1, dans [A2] pour C.2 et dans [A2] pour C.3 ; ou de l'élève G1-2.2 qui a travaillé en [A2] dans les trois questions.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n) = \frac{1+n}{-2n+n^2} = \frac{+\infty}{-\infty} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$-\frac{1}{2n} + \frac{1}{n} = -\infty$$

Figure 117 : Production de l'élève G1-1.14 en réponse à la question C.3.

La Figure 118 et la Figure 119 montrent la reconstruction des successions des sous-activités et du travail mathématique de l'élève G1-1.14. Cet élève, sans avoir une sous-activité de reconnaissance du théorème, ni des sous-activités de contrôle, active la dimension discursive de son ETM personnel pour produire un certain discours qui lui permet de conclure quant à la convergence de la suite. Comme cette dimension est activée sans aucune sous-activité de contrôle, il conclut que la suite converge vers -2 .

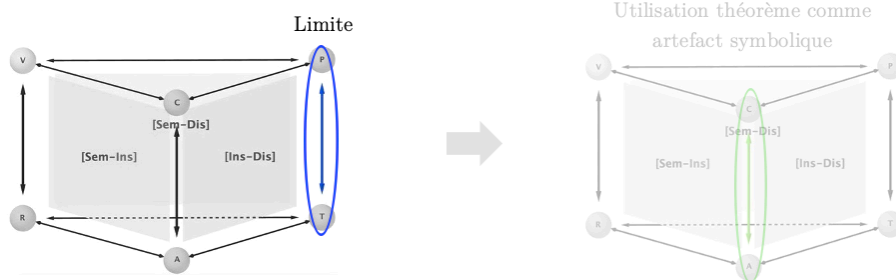


Figure 118 : Reconstruction du travail mathématique de l'élève G1-1.14 dans la question C.3.

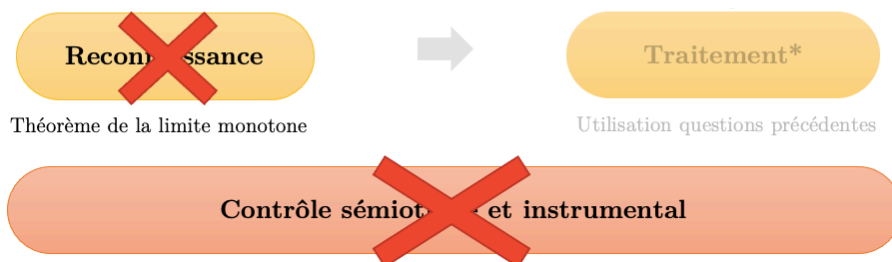


Figure 119 : successions des sous-activités non atteintes de l'élève G1-1.14 dans la question C.3.

Dans la classe 2, sur les 23 élèves qui répondent, 2 seulement ne reconnaissent pas le théorème à appliquer. Comme on l'a déjà signalé plus haut, on est donc dans une situation totalement différente de la classe 1 quant au parcours des élèves dans les questions (voir figures Figure 120 et Figure 121 ci-dessous).

L'un des élèves (G2-4) qui ne reconnaît pas le théorème est un élève parmi les 5 ayant produit un travail dans C.1 mais pas dans C.2. Il écrit que la suite est « *croissante, majorée et convergente* ». On ne peut pas dire qu'il a reconnu le théorème à la lecture de ses affirmations, en revanche, on dit qu'il produit un travail incomplet car ses affirmations sont correctes.

L'autre élève (G2-10) avait glissé du paradigme [A2] (en réponse à la question C.1) vers [A1] (ou à un travail intermédiaire entre [A1] et [A2]) dans la question C.2 (« $u_n < u_{n+1}$ car la fonction est croissante »). Dans cette question C.3, on ne peut rien dire de son paradigme de travail. En effet, il essaye de calculer la limite de f pour connaître la limite de la suite, ce qui lui fait produire un travail non correct (N). Plus précisément il affirme que la limite de f à l'infini est 1 – ce qui est faux – et donc que « u_n converge vers 1 ». On peut se demander si l'élève n'essaye pas un certain contrôle (incorrect) le conduisant à affirmer que la limite de f est 1 car il sait que la limite de (u_n) est 1 (notamment à cause du bilan du professeur).

Mis à part ces deux élèves, tous les élèves ont un travail codé correct (C), dans le paradigme [A2], mettant en jeu la dimension instrumentale pour l'artefact symbolique. On note que c'est en particulier le cas de l'élève G2-20 qui n'a pas d'appui sur C.1 et C.2. C'est le cas aussi pour les deux élèves qui étaient passés dans le paradigme [A1] pour la réponse à la question C.2. Ils reviennent dans le paradigme [A2] et répondent correctement dans la question C.3, avec une bonne reconnaissance du théorème à utiliser.

Comme dans les deux autres questions de la partie C, nous montrons dans les Figure 120 et Figure 121 l'investissement des élèves depuis la partie B. On voit notamment que dans la classe 1 il y a encore une réduction dans la production du travail des élèves, contrairement à la classe 2, où il y a une augmentation dans leur production. Nous pouvons voir également que les paradigmes [A1] et [A2] sont tous les deux présents dans la classe 1 en même quantité, tandis que dans la classe 2 tous les élèves, sauf un, produisent un travail exclusivement dans le paradigme [A2].

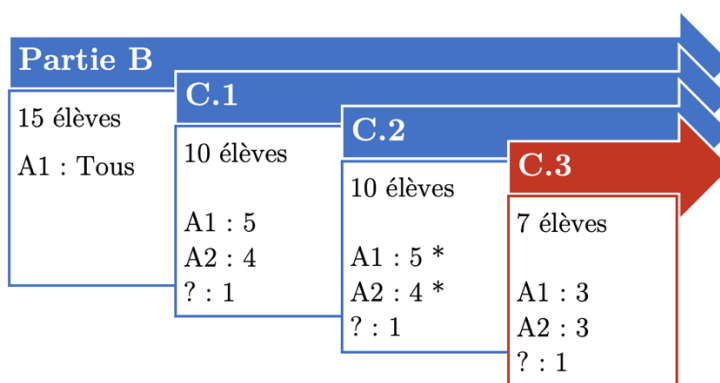


Figure 120 : Schéma d'investissement des élèves classe 1, partie B et questions C.1, C.2 et C.3.

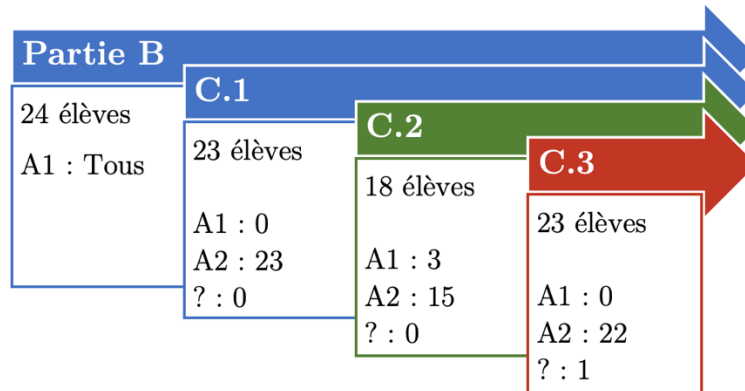


Figure 121 : Schéma d'investissement des élèves classe 2, partie B et questions C.1, C.2 et C.3.

8.2.3 Retour sur quelques cas particuliers d'élèves

Nous revenons sur les cas des élèves provisoirement écartés et qui n'ont pas répondu de manière adéquate aux questions B.1 ou B.2.

Non reconnaissance de la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

Il s'agit des élèves qui ont traité la suite récurrente comme $u_n = f(n)$ dans la partie B, soit 9 élèves de la classe 1 et 1 élève de la classe 2.

Parmi les 9 élèves de la classe 1 qui ont utilisé $u_n = f(n)$ dans la réponse de la question B.1, 5 ne répondent à aucune question de la partie C. Parmi les 4 qui restent, en ce qui concerne la partie C.1 : 2 travaillent la récurrence, donc dans le paradigme [A2], mais ils ne respectent pas forcément les règles de la preuve. 1 travaille encore dans le paradigme [A1]. Enfin, 1 commence à travailler avec des inégalités (seulement présente l'inégalité u_n entre 0 et 1). Concernant la question C.2, 2 de ces 4 élèves font le tableau de variation pour montrer la croissance de la suite, 1 seul énonce la stratégie $u_{n+1} - u_n$, et 1 élève écrit que la suite est croissante mais ne fournit aucune preuve. Pour les réponses à la question C.3, 2 ne répondent pas, 1 dit que la suite est divergente, et le dernier que la suite converge vers 0 (par rapport à leur paradigme de travail on ne peut rien dire).

Pour le seul élève de la classe 2 qui a travaillé avec le modèle $u_n = f(n)$ à la question B.1, il répond seulement à la question C.2 (preuve de la croissance de la suite) en essayant de faire une récurrence, mais sans y parvenir.

La non-reconnaissance dans la question B.2

Certains élèves n'ont pas réussi à reconnaître la croissance, la convergence et/ou la valeur de la limite de la suite dans la question B.2 à partir de leurs tableaux de valeurs corrects ou incomplets. Cela concerne 2 élèves de la classe 1 qui avait réalisé un travail correct en B.1 et 6 élèves de la classe 2 dont 2 avaient réalisé un travail incorrect en B.1.

Concernant les 2 élèves de la classe 1, 1 seul produit ensuite des éléments en réponse à la question C.2 : il ne reconnaît pas de méthode valable pour montrer que la suite est croissante, il s'inscrit dans un travail discursif et dans un paradigme dont on ne sait pas si c'est [A1] ou [A2].

Concernant les 6 élèves de la classe 2, il est intéressant de remarquer qu'ils travaillent à nouveau dans la partie C dans le paradigme [A2]. Ils procèdent par récurrence ou inégalité dans la question C.1. L'un des deux reconnaît même la méthode par différence pour montrer que la suite est croissante. Toutefois, pour tous les élèves, le travail est incomplet ou non correct dans les questions C.1 et C.2. Par contre 3 d'entre eux travaillent toujours dans la question C.3 (dont 1 qui avait réalisé un travail incomplet en B.1, G2.16). Tous les élèves reconnaissent le théorème et l'appliquent correctement : cela est possible car il y a eu la mise en commun du professeur après la partie B. Ils savent donc comment orienter leur activité (la suite est croissante et convergente vers 1 selon les conjectures qui ont été formulées collectivement). On peut sans doute voir un *effet de classe* sur la reconnaissance du paradigme, avec un contrat didactique bien installé et toujours un effet du bilan de l'enseignant entre la partie B et la partie C. Nous y revenons en conclusion.

8.3 Tâche avec la suite de Héron et analyse a priori

Cette nouvelle tâche vise à obtenir des résultats robustes en changeant une variable didactique importante, comme l'est la suite choisie. Dans les sections 8.1 et 8.2, nous avons montré les analyses et les premiers résultats d'une tâche favorisant les sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental avec une suite récurrente, où la fonction qui la définit était croissante et la suite était également croissante. Dans les deux sections qui suivent, nous changeons la suite définie par $u_0 = \alpha$ appartenant à $[0,1]$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$, par la suite d'Héron convergente à $\sqrt{3}$, définie par $u_0 = \alpha$ appartenant à $]0, +\infty[$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)$. Dans ce cas, la fonction $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$ est croissante dans l'intervalle $[\sqrt{3}, +\infty[$ et la suite (u_n) est décroissante pour $n \geq 1$.

Ce changement de variable didactique peut nous permettre d'une part de confronter les élèves au théorème en acte « *f croissante donc (u_n) croissante* », et d'autre part, peut nous permettre de savoir si le modèle $u_n = f(n)$ est encore présent dans ces conditions. En effet, comme nous l'avons signalé, ce théorème en acte peut cacher une confusion avec les suites $u_n = f(n)$, ou bien un transfert de propriétés de f sur la suite dans le cas du bon modèle $u_{n+1} = f(u_n)$.

Mis à part le changement de suite récurrente dans la tâche, présentée dans la Figure 122, nous avons demandé aux élèves l'utilisation d'une représentation numérique décimale au lieu d'une représentation numérique fractionnaire (cette fois nous n'avons pas détaillé l'approximation à considérer).

Dans ce qui suit, nous nous focalisons sur les questions B.2, B.2 et B.3 de la partie B, et les questions C.1, C.2 et C.3 de la partie C (la partie A ne concernant que l'étude de la fonction).

Partie B

Soit α un réel appartenant à $]0, +\infty[$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, compléter les tableaux de valeurs ci-dessous avec des nombres décimaux pour les trois valeurs de α données.

Cas $\alpha_1 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	
u_2	
u_3	
u_4	
u_5	
u_6	

Cas $\alpha_2 = 1$	
u_0	1
u_1	
u_2	
u_3	
u_4	
u_5	
u_6	

Cas $\alpha_3 = 3$	
u_0	3
u_1	
u_2	
u_3	
u_4	
u_5	
u_6	

B.2) En observant les tableaux pour les trois valeurs de α de la question B.1.

- Conjecturer le sens de **variation**, la **convergence**, et la **limite** éventuelle de la suite pour $\alpha_1 = 0,5$
- Conjecturer le sens de **variation**, la **convergence**, et la **limite** éventuelle de la suite pour $\alpha_2 = 1$
- Conjecturer le sens de **variation**, la **convergence**, et la **limite** éventuelle de la suite pour $\alpha_3 = 3$

B.3) Conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α dans $]0, +\infty[$. Exposez la (ou les) démarche(s) qui vous amène à vos conjectures.

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B. À chaque question, si vous utilisez la calculatrice, expliquez comment et pourquoi.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, u_n appartient à $[\sqrt{3}, +\infty[$.

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

C.4) On note l la limite de la suite (u_n) . En admettant $l = f(l)$, en déduire la valeur de l .

Figure 122 : Partie B et C de la tâche avec la suite de Héron.⁸¹

8.3.1 Partie B : occasions de contrôle sémiotique et instrumental et paradigme [A1]

Comme dans les deux dernières expérimentations, l'énoncé de la partie B favorise la sous-activité de reconnaissance de la fonction en jeu mais ne favorise pas la reconnaissance de la suite récurrente sous la forme $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)$. L'énoncé ne permet pas de contrôle non mathématique sur les variations ni la convergence ni la

⁸¹ Pour voir la totalité de la tâche, voir annexe 5.4, page 568.

valeur de la limite de la suite. En revanche, la tâche offre les occasions de contrôle sémiotique et instrumentale pour que les élèves puissent reconnaître le comportement de la suite avec l'utilisation de la calculatrice, et une partie du travail se fait dans le paradigme [A1].

Comme l'objectif est tout d'abord de travailler la sous-activité de reconnaissance de la suite en tant que suite récurrente, et donc de créer une familiarité avec la suite, la question B.1 consiste à remplir trois tableaux de valeurs, pour les termes u_1 à u_6 pour trois valeurs différentes de α (valeurs 0.5, 1 et 3). Ensuite, à partir de l'observation des 6 premiers termes de la suite pour chaque valeur de α donné, les questions B.2 et B.3 ont pour objectif de conjecturer la variation, la convergence et la limite de la suite. Concernant la monotonie, il faut que les élèves reconnaissent que la suite est strictement décroissante à partir de $n = 1$. Ici, l'idée est que les élèves puissent développer un contrôle instrumental et sémiotique pour bien visualiser le comportement de la suite. A nouveau, la convergence et la limite restent plus difficiles à visualiser car, il s'agit d'une propriété locale en l'infini.

Le Tableau 19 montre la représentation numérique décimale donnée par la calculatrice. Comme nous l'avons signalé, la représentation décimale permet de mieux répondre aux questions posées.

Tableau 19 : valeurs de termes de la suite en représentation décimal pour trois valeurs de α (0.5, 1 et 3).

Cas $\alpha_1 = 0,5$		Cas $\alpha_2 = 1$		Cas $\alpha_3 = 3$	
u_0	0,5	u_0	1	u_0	3
u_1	3,25	u_1	2	u_1	2
u_2	2,08653846153846	u_2	1,750000000000000	u_2	1,750000000000000
u_3	1,76216323998582	u_3	1,732142857142860	u_3	1,732142857142860
u_4	1,73230809320663	u_4	1,732050810014730	u_4	1,732050810014730
u_5	1,73205082667515	u_5	1,732050807568880	u_5	1,732050807568880
u_6	1,73205080756888	u_6	1,732050807568880	u_6	1,732050807568880

Enfin, la Figure 123 montre une représentation graphique (de la fonction et des termes de la suite) et la représentation numérique décimale des 4 premiers termes de la suite pour $\alpha = 1$, donnés par la calculatrice CASIO graph. Pour arriver à ce type de représentation, et que l'élève puisse développer une sous-activité de contrôle sémiotique, il faut que l'élève mette en place un contrôle instrumental.

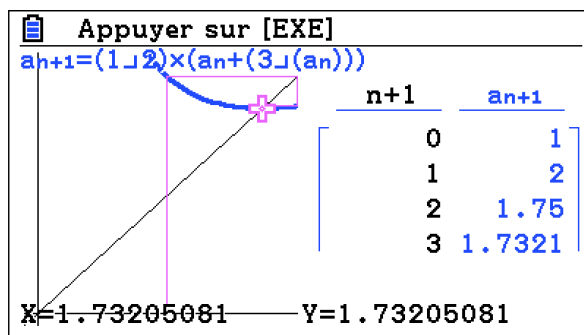


Figure 123 : Exemple de représentation graphique et numérique décimale donnée par la calculatrice CASIO graph lors de 4 itérations.

La Figure 124 montre la succession de l'activité et le travail mathématique que devrait suivre un élève dans cette partie B. L'utilisation de la calculatrice permet d'encourager la reconnaissance de la suite récurrente, ce qui active la dimension instrumentale de l'ETM personnel des élèves. Puis, en utilisant les différents registres de représentation apportés par la calculatrice et donc l'activation du plan vertical [Sem-Ins] de l'ETM, la tâche encourage la reconnaissance du comportement de cette suite récurrente. Les sous-activités de reconnaissances et les activations des dimensions de l'ETM, sont soutenues par les sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental.

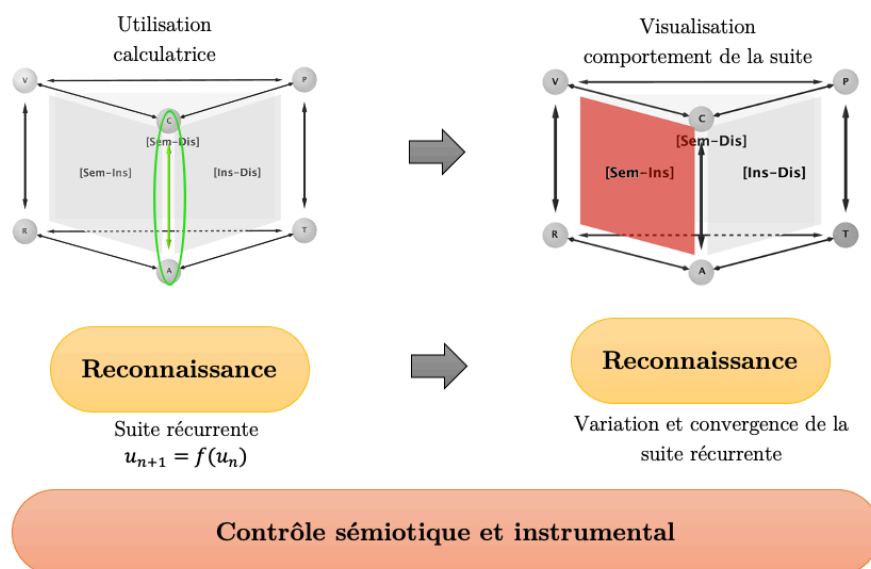


Figure 124 : Succession des sous-activités et du travail mathématique dans la partie B.

Si la tâche expérimentée auparavant cherchait à savoir comment les élèves avaient utilisé la calculatrice, nous rajoutons cette fois la question « *exposez la (ou les) démarche(s) qui vous amène à vos conjectures* » dans la question B.3. Cela pour laisser

les élèves s'exprimer sur ce qui a été utilisé (calculatrice, ordinateur, tableur Excel, Internet, etc.) pour formuler les conjectures.

8.3.2 Partie C : contrôle discursif et paradigme [A2]

Comme dans l'expérimentation précédente, nous espérons à nouveau que les élèves mettent en fonctionnement des sous-activités de reconnaissances de théorèmes, de procédures et de preuves. Nous espérons aussi que les élèves produisent un travail dans le paradigme [A2], avec l'activation de dimensions des ETM personnels cohérentes à l'analyse a priori. Les successions d'activité et du travail mathématique sont les mêmes que dans les autres expérimentations en TS qui ont été réalisées précédemment (sauf pour la question C.4, car nous gardons ici le modèle du Baccalauréat). Là encore, les occasions de sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental, et le travail fourni dans la partie B, devraient soutenir le travail mathématique à produire dans la partie C.

Comme il s'agit d'une nouvelle suite à étudier, dans ce qui suit nous présentons l'analyse des stratégies ainsi que des successions entre activités et travail mathématique à développer par les élèves lors de la résolution de chaque question.

a) Question C.1 : Suite bornée

Tableau 20 : Stratégie résolution question 1.

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, u_n appartient à $[\sqrt{3}, +\infty[$	
Stratégie récurrence ⁸²	<p>On montre par récurrence que $u_n \geq \sqrt{3}$ pour tout entier naturel n non nul.</p> <p>(i) Initialisation : On a $u_1 = f(u_0)$. Or la fonction f croissante et admet pour minimum $\sqrt{3}$ (d'après une question précédente), donc $u_1 \geq \sqrt{3}$.</p> <p>(ii) Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, on suppose $u_m \geq \sqrt{3}$. $u_m \geq \sqrt{3} \Rightarrow f(u_m) \geq \sqrt{3}$ (car f admet pour minimum $\sqrt{3}$ sur $[\sqrt{3}, +\infty[$). Or $f(u_m) = u_{m+1}$. Donc $u_{m+1} \geq \sqrt{3}$.</p> <p>(iii) Conclusion : Par le principe de récurrence, on montre que $u_n \in [\sqrt{3}, +\infty[$ pour tout $n \geq 1$.</p>

⁸² Il existe aussi la possibilité de justifier que si $\sqrt{3}$ est le minimum de f , alors $u_n > \sqrt{3}$ dès que $n > 0$. Toutefois pour considérer cette réponse comme correcte qui correspond au niveau scolaire des élèves, nous estimons comme nécessaire la justification par une preuve par récurrence.

La Figure 125 montre les successions de sous-activité et du travail mathématique attendues. Tout d'abord nous attendons la sous-activité de reconnaissance de la preuve par récurrence au sein du paradigme [A2]. Cela active la dimension discursive de l'ETM personnel de l'élève. Ensuite pour pouvoir continuer à résoudre la tâche, il faut que l'élève développe une sous-activité de traitement en identifiant qu'il est nécessaire d'utiliser le résultat de la question précédente. Cela amène l'élève à activer le plan vertical [Sem-Dis]. Éventuellement (si l'élève laisse des traces écrites dans sa production) on pourra dire que l'élève met en fonctionnement une sous-activité de contrôle en lien avec la partie B (et donc avec le paradigme [A1]), s'il mentionne que le résultat de sa preuve est cohérent avec les conjectures de la partie B. Néanmoins, si l'élève ne se situe pas dans le paradigme [A2] et qu'il fait seulement des interprétations du travail fait dans la partie B, l'élève peut produire un travail qui est entre les paradigmes [A1] et [A2], ou produire un travail dans le paradigme [A1].

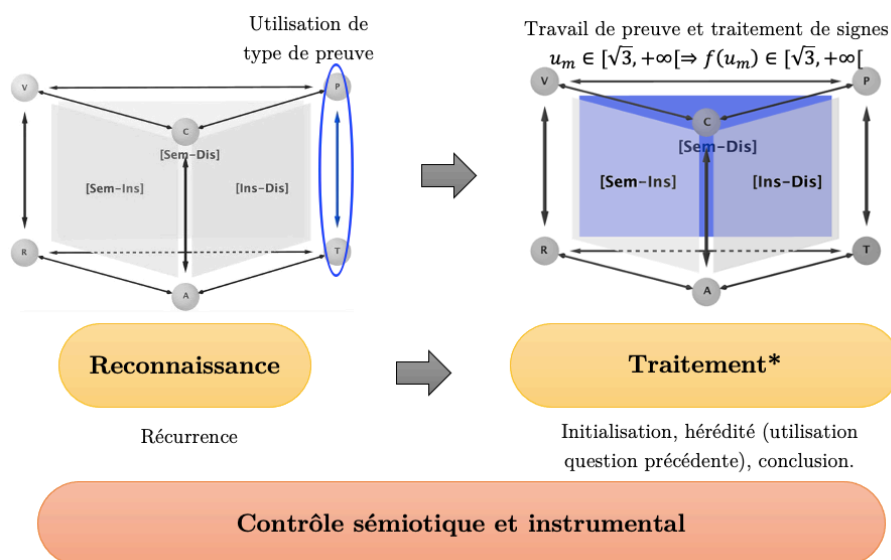


Figure 125 : Succession de l'activité et du travail mathématique dans la question C.1.

b) Question C.2 : Sens de variation de la suite

Tableau 21 : Stratégies résolution question 2.

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .	
Stratégie 1 : signe de $u_{n+1} - u_n$	<p>Pour tout $n \geq 1$ on a :</p> $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = -\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2u_n} = \frac{-(u_n^2)+3}{2u_n} = \frac{(\sqrt{3}-u_n)(\sqrt{3}+u_n)}{2u_n}.$ <p>Comme $u_n \geq \sqrt{3}$, $\frac{(\sqrt{3}-u_n)(\sqrt{3}+u_n)}{2u_n} \leq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.</p> <p>Cela montre que (u_n) est décroissante pour tout $n \geq 1$.</p>
Stratégie 2 : étude de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$	<p>Pour tout $n \geq 1$ on a que u_n est positif et non nul (par résultat de la question 1).</p> <p>On peut alors procéder par l'étude du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.</p> <p>Pour tout $n \geq 1$ on a :</p> $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)}{u_n} = \frac{\frac{u_n^2 + 3}{2u_n}}{u_n} = \frac{u_n^2 + 3}{2u_n^2}$ <p>Et $\frac{u_n^2 + 3}{2u_n^2} \leq 1$ car $u_n \geq \sqrt{3}$. En effet,</p> $u_n^2 + 3 \leq 2u_n^2 \Leftrightarrow 3 \leq u_n^2 \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq u_n.$ <p>Donc, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ et (u_n) est décroissante.</p>
Stratégie 3 :	<p>Avec l'utilisation de la calculatrice on peut supposer que la suite (u_n) est décroissante et on le montre par récurrence pour tout $n \geq 1$.</p> <p>(i) Initialisation : On a $u_1 \geq u_2$ car</p> $u_2 - u_1 = f(u_1) - u_1 = -\frac{1}{2}u_1 + \frac{3}{2u_1} = \frac{-(u_1^2)+3}{2u_1} = \frac{(\sqrt{3}-u_1)(\sqrt{3}+u_1)}{2u_1} \leq 0$ <p>et comme $u_1 \geq \sqrt{3}$, donc $u_2 - u_1 \leq 0$.</p> <p>(ii) Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N} - \{0\}$. On suppose que $u_m \geq u_{m+1}$. Par question 1 on sait que pour tout $m \geq 1$, $u_m \geq \sqrt{3}$. De plus la fonction f est croissante sur $[\sqrt{3}, +\infty[$. Donc $f(u_m) \geq f(u_{m+1})$ donc $u_{m+1} \geq u_{m+2}$.</p> <p>(iii) Conclusion : Par le principe de récurrence on montre que $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. Donc (u_n) est décroissante.</p>

La Figure 126 correspond aux successions de sous-activités et du travail mathématique attendues dans les des stratégies 1 et 2 de la question 2. Dans les deux premières stratégies l'élève commence par s'investir dans une sous-activité de reconnaissance de la méthode à utiliser pour prouver que la suite est croissante. Comme dans les tâches précédentes, il peut choisir entre l'étude de $u_{n+1} - u_n$ ou l'étude du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (choix non forcé). En termes de travail mathématique, l'utilisation d'une des méthodes en tant qu'artefact symbolique fait activer la dimension instrumentale.

Puis, la mise en fonctionnement d'une sous-activité de traitement permet à l'élève d'effectuer des calculs pour arriver à une expression algébrique qui lui permet de conclure. En termes de travail mathématique, l'élève doit réaliser un travail de traitements sémiotiques dans le registre algébrique, ce qui amène à activer le plan vertical [Sem-Ins], pour bien utiliser cet artefact symbolique et conclure avec la conversion du registre sémiotique algébrique (comme par exemple $\frac{(\sqrt{3}-u_1)(\sqrt{3}+u_1)}{2u_1} \leq 0$) vers le registre sémiotique de langue naturelle (la suite (u_n) est décroissante). Enfin, on attend que l'élève développe des sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental pour rendre compte d'une cohérence du travail produit.

La Figure 127 montre les successions de sous-activités et du travail mathématique à mettre en fonctionnement dans la stratégie 3. Comme dans les stratégies antérieures, l'élève commence par une sous-activité de reconnaissance de la méthode de preuve par récurrence (choix non forcé), ce qui active la dimension discursive de l'ETM de l'élève. Puis, la sous-activité de traitement est nécessaire pour bien développer les étapes correspondantes au type de preuve (initialisation, hérédité et conclusion). Ici, la reconnaissance de $u_n \geq \sqrt{3}$ (résultat question précédente) est nécessaire. En termes de travail mathématique, cela implique un travail dans le plan vertical [Sem-Ins] qui correspond au travail de preuve avec des traitements et des conversions dans le registre de représentation algébrique et dans le registre de représentation de la langue naturelle. À nouveau nous attendons une cohérence du travail produit avec les résultats de la partie B, ce qui pourrait rendre compte de la mise en fonctionnement d'une sous-activité de contrôle sémiotique et instrumental.

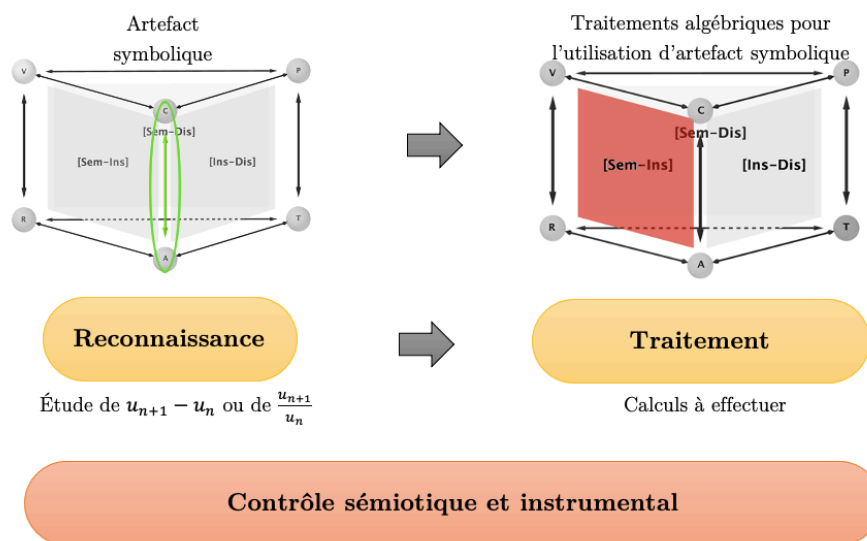


Figure 126 : Succession de l'activité et du travail mathématique dans la question C.2, stratégies 1 et 2.

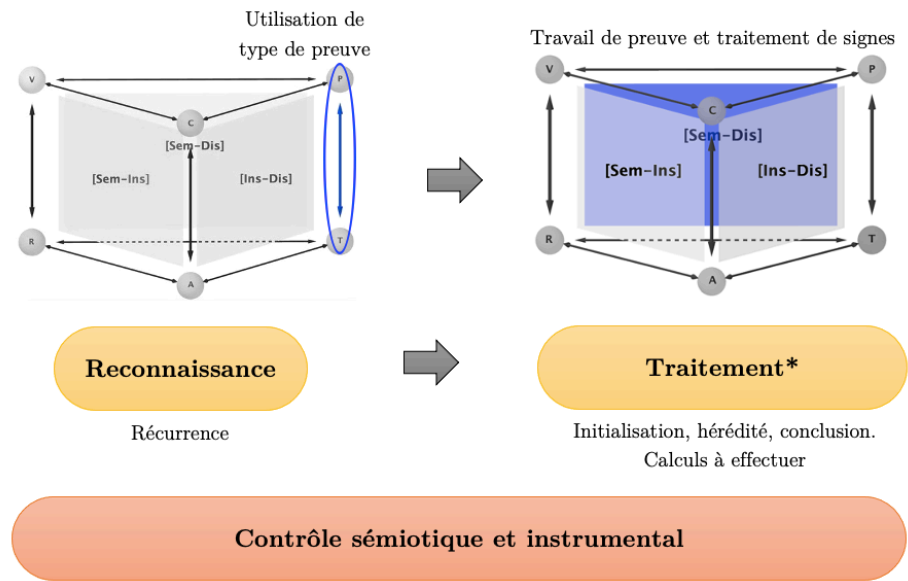


Figure 127 : Succession de l’activité et du travail mathématique dans la question C.2, stratégie 3.

c) Question C.3 : Suite convergente

Tableau 22 : Stratégie de résolution question 3.

Montrer que la suite (u_n) converge.	
Stratégie théorème	D’après le résultat de la question 1, la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{3}$. De plus, d’après le résultat de la question 2, la suite (u_n) est décroissante. Donc par théorème de la limite monotone, (u_n) est convergente.

La Figure 128 correspond aux successions de sous-activités et de travail mathématique dans cette question, où nous attendons uniquement la stratégie du théorème de la limite monotone. Tout d’abord l’élève doit reconnaître le théorème, ce qui l’amène à activer la dimension discursive de l’ETM personnel. Puis, le fait d’utiliser le résultat précédent met en fonctionnement une sous-activité de traitement chez l’élève et l’activation de la dimension instrumentale de l’ETM pour utiliser le théorème en tant qu’artefact symbolique et conclure que la suite est convergente⁸³. Nous attendons aussi que ce résultat soit cohérent aux conjectures de la partie B, et donc de la mise en fonctionnement d’une sous-activité de contrôle.

⁸³ Pour certains élèves la reconnaissance du théorème peut activer la dimension instrumentale directement avec l’artefact symbolique (utilisation routinisé). Toutefois, pour leur niveau scolaire, ils ont besoin de reconnaître ce théorème comme faisant partie de leur référentiel théorique.

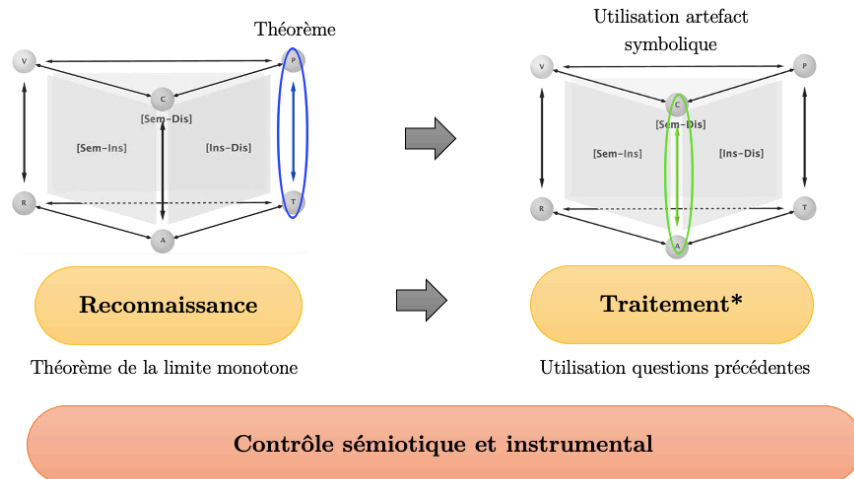


Figure 128 : Succession de l'activité et du travail mathématique dans la question C.3.

8.4 Analyse *a posteriori* : 4^{ème} expérimentation au Lycée

Cette quatrième expérimentation a été faite avec les deux mêmes classes de fin de secondaire scientifique que les troisième et quatrième expérimentations : classes de TS de deux lycées de la région parisienne. Cette intervention a eu lieu à la fin de l'année académique de la même année, en mai 2020⁸⁴ en condition de devoir maison pour les élèves. À ce moment de l'année, les élèves ont travaillé tous les contenus nécessaires pour résoudre la tâche et ils se préparent pour l'épreuve du Baccalauréat, raison pour laquelle cette tâche s'inscrit dans une cohérence avec cette préparation.

Les expérimentations dans les deux classes avaient les mêmes conditions dans la résolution de la tâche dans le sens où les deux se déroulaient en mode *distanciel*. Ici, la calculatrice scientifique (modèle TI83 ou CASIO graph) est mise en avant dans la résolution de la tâche, mais nous partons du principe que les élèves ont à leur disposition aussi des ressources qu'ils peuvent trouver sur internet. En ce qui concerne le détail de la participation des élèves dans les classes : Classe 1 : correspond à 30 élèves (avec 6 qui n'étaient pas présents lors de la première expérimentation) encore codés G1. Classe 2 : correspond cette fois à 14 élèves (dont 1 n'était pas présent à la première expérimentation), codés G2 et G3⁸⁵.

Comme il s'agit des mêmes élèves que ceux de l'expérimentation précédente, nous comparons les résultats obtenus entre les deux moments d'expérimentations et les deux classes dans les conclusions du chapitre 8 mais, cette fois, nous présentons les deux analyses des classes ensemble car les élèves avaient les mêmes consignes à suivre et étaient dans la même situation de devoir à la maison⁸⁶. Au total, nous analysons 44 productions d'élèves (voir annexe 5.5, page 569), dont 7 n'avaient pas participé aux expérimentations précédentes.

La méthodologie d'analyse de cette partie 8.4 correspond à celle que nous avons utilisée dans la section 8.2 (voir page 219). Nous rappelons ici que les analyses *a posteriori* pour les études de cas avec chaque théorie ont une entrée différente. D'une part, concernant la TADM, dans chaque réponse nous analysons les successions des sous-activités, atteintes et non atteintes. D'autre part, en ce qui concerne les ETM,

⁸⁴ Au départ il s'agissait d'une expérimentation en présentielle en classe avec les élèves pendant le mois d'avril 2020 ; néanmoins, la conjoncture de la crise sanitaire liée à la Covid-19 a fait que cette intervention s'est déroulée dans les conditions « devoir maison individuel ».

⁸⁵ Comme dans l'expérimentation précédente il s'agit d'une classe séparée en deux demi-groupes.

⁸⁶ Bien entendu, chaque élève pouvait avoir des conditions de travail différentes chez eux, mais nous n'analysons pas ces différences dans ce travail.

nous analysons les productions des élèves en faisant une reconstruction de leur travail et en identifiant les dimensions activées (parfois sans avoir atteint une sous-activité de reconnaissance), et nous identifions la correction du travail.

8.4.1 Partie B

Dans cette partie nous avons pour objectif que les élèves puissent reconnaître la bonne suite récurrente, grâce à un travail dans le paradigme [A1] et l'utilisation de l'instrument calculatrice. Ici la calculatrice comporte une occasion de sous-activités de contrôle (sémiotique et instrumental), pour la bonne reconnaissance de la suite et la visualisation de son comportement. Il s'agit ainsi principalement de l'activation des dimensions sémiotique et instrumentale de l'ETM personnel pour réaliser un travail qui permet de déterminer la décroissance, la convergence et la limite de la suite.

a) B.1 : reconnaissance de la suite récurrente

Par rapport à la bonne reconnaissance de la suite ($u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)$), la réussite de cette reconnaissance est de 93% (soit 41 sur 44 élèves). 41 élèves semblent avoir bien utilisé l'instrument, produisant tous un travail correct dans le remplissage des tables de valeurs en réponse à la question B.1. Parmi les 3 élèves qui restent, 2 traitent la suite comme $u_n = f(n) = \frac{1}{2}\left(n + \frac{3}{n}\right)$, et l'autre ne répond pas à cette question (G3-21 - nous reviendrons à ce cas dans la section 8.4.3, page 282). Aucun élève des deux classes ne présente des tableaux incomplets.

La Figure 129 correspond au travail produit par l'élève G3-a de la classe 2 (qui n'a pas été présent lors de la première expérimentation). Il est dans le même cas que les deux élèves ayant une mauvaise reconnaissance de la suite qui, malgré la demande dans l'énoncé d'utiliser une représentation numérique décimale, utilisent la représentation fractionnaire des nombres. Ils interprètent que la suite est croissante à partir d'un certain rang et qu'elle n'a pas de limite. Cela permet de faire le lien avec un des résultats de l'expérimentation précédente car, comme signalé, la représentation fractionnaire permet moins facilement la visualisation (reconnaissance sémiotique) des variations de la suite.

Cas $\alpha_1 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	2
u_2	7/4
u_3	2
u_4	19/8
u_5	14/5
u_6	13/4

Cas $\alpha_2 = 1$	
u_0	1
u_1	2
u_2	7/4
u_3	2
u_4	19/8
u_5	14/5
u_6	13/4

Cas $\alpha_3 = 3$	
u_0	3
u_1	2
u_2	7/4
u_3	2
u_4	19/8
u_5	14/5
u_6	13/4

B.2) En observant les tableaux pour les trois valeurs de α de la question B.1.

- Conjecturer le sens de variation, la convergence, et la limite éventuelle de la suite pour $\alpha_1 = 0,5$

La suite semble croissante à partir de u_3
 il semblerait qu'elle ne converge pas et qu'elle n'a pas de limite

- Conjecturer le sens de variation, la convergence, et la limite éventuelle de la suite pour $\alpha_2 = 1$

La suite semble croissante à partir de u_3
 Elle ne converge pas et n'a pas de limite

- Conjecturer le sens de variation, la convergence, et la limite éventuelle de la suite pour $\alpha_3 = 3$

La suite est croissante à partir de u_3
 Elle ne converge pas et n'a pas de limite

Figure 129 : Réponses à B.1 et B.2 de l'élève G3-a de la classe 2.

La Figure 130 et la Figure 131 montrent la reconstruction de successions de sous-activités et travail mathématique suivie par l'élève G3-a. Il semble activer la dimension instrumentale avec l'utilisation de la calculatrice mais le registre numérique fractionnaire utilisé ne favorise pas la reconnaissance de la suite récurrente. Cela empêche les bonnes reconnaissances du comportement de la suite. En revanche, l'élève produit tout de même un travail dans le plan vertical [Sem-Ins] qui lui permet de répondre à la question (mais produisant un travail non correct).

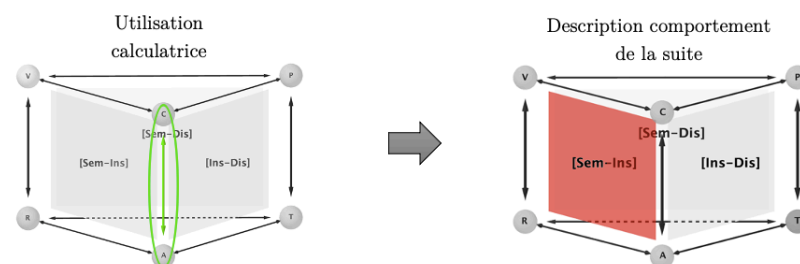


Figure 130 : Reconstruction des successions du travail mathématique de l'élève G3-a dans la partie B.

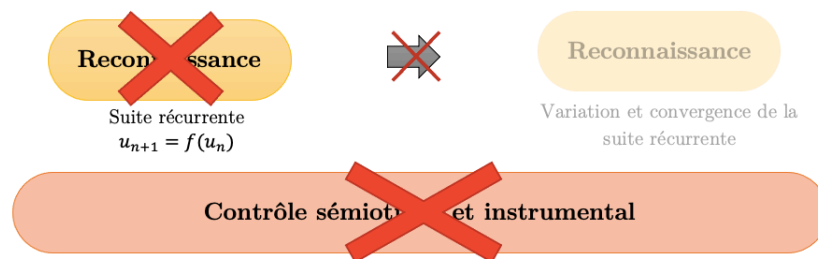


Figure 131 : Successions de sous-activités non atteinte de l'élève G3-a dans la partie B.

Dans cette partie de la résolution de la tâche, il n'y a pas de différences substantielles entre les deux classes. Dorénavant dans notre analyse, nous allons nous focaliser sur les élèves qui ont eu les bonnes reconnaissances de la suite, c'est-à-dire 41 élèves au total (29 élèves pour la classe 1 et 12 élèves pour la classe 2). Comme dans l'analyse de la question précédente, nous reviendrons à la fin sur les élèves qui n'ont pas reconnu la bonne suite pour constater le travail effectué dans le paradigme [A2] en partie C. En effet, nous écartons ce type d'élève car même si le travail peut être correct en [A2], il serait totalement artificiel.

b) B.2 et B.3 : reconnaissances de la décroissance, convergence et de la limite

Le Tableau 23 présente l'effectif des élèves avec le détail des questions B.2 et B.3 : le nombre d'élèves qui n'ont pas répondu à la question ; et le nombre d'élèves qui font les reconnaissances attendues de la décroissance, de la convergence et de la valeur de la limite pour les trois valeurs demandées de α (question B.2) et pour tout α dans $]0, +\infty[$ (question B.3).

Tableau 23 : Nombre d'élèves avec les bonnes reconnaissances de la décroissance, de la convergence et de la valeur de la limite (questions B.2 et B.3).

Effectif d'élèves	Sans réponse		Décroissance		Convergence		Limite	
	B.2	B.3	B.2	B.3	B.2	B.3	B.2 ($\sqrt{3}$)	B.3 ($\sqrt{3}$)
Classe 1 et 2 : 41	1	8	40	28	41	31	2	13

Concernant le comportement de la suite et la reconnaissance de sa décroissance, nous trouvons que 97% des élèves (soit 40 sur 41) reconnaissent et déclarent ce comportement dans la question B.2 et environ 68% d'élèves (soit 28 sur 41) dans la

question B.3. En ce qui concerne les sous-activités de reconnaissance de la décroissance et de la convergence, elles sont mieux développées pour les trois valeurs fixes de α , tandis que la valeur de la limite de $\sqrt{3}$ est mieux développée dans la généralisation (question B.3). Ce dernier résultat vient du fait que certains élèves, notamment de la classe 1, n'ont pas travaillé seulement dans le paradigme [A1].

Pour une meilleure lisibilité des résultats, nous allons nous concentrer sur les élèves qui ont bien reconnu la suite avec des tableaux corrects dans la question B.1, les reconnaissances faites dans les questions B.2 et B.3, et la classification des réponses en fonction du travail mathématique incomplet, correct ou non correct (conformément à la méthodologie d'analyse).

L'effectif des élèves dans la question B.2 est de 40 élèves au total et l'effectif d'élèves pour la question B.3 est de 33 élèves (car 7 élèves de la classe 1 n'ont pas répondu à cette question). A nouveau, comme pour les élèves qui n'ont pas reconnu la bonne suite dans la question B.1, on reviendra ensuite sur les productions dans la partie C des élèves mis à l'écart (un élève de chaque classe pour le traitement $u_n = f(n)$ et un élève de la classe 2 qui ne répond pas à B.1 – G3-21).

Dans le Tableau 24, en ce qui concerne la reconnaissance de la variation de la suite dans la question B.2, nous avons marqué une différence entre les élèves qui reconnaissent une croissance pour les premiers deux termes de la suite, puis une décroissance pour le reste des termes (C.D). Dans la question B.3, nous avons fait de même avec les élèves qui reconnaissent une croissance quand (u_n) est dans l'intervalle $]0, \sqrt{3}[$ et une décroissance de (u_n) dans l'intervalle $[\sqrt{3}, +\infty[$ (C.D).

Tableau 24 : Sous-activité de reconnaissance et correction du travail mathématique des élèves qui répondent aux questions B.2 et B.3.

Effectif en B.2	Recon. en B.2		Correction en B.2			Effectif d'élèves en B.3	Recon. en B.3		A1-A2 en B.3	Correction en B.3		
	C.D.	lim	C	I	N		C.D.	lim		C	I	N
40 élèves	12	2	11	27	2	33	7	13	20	6	24	3

Sur les 29 élèves qui ont reconnu la bonne suite, 12 élèves reconnaissent une croissance puis une décroissance en B.2, et parmi ceux-là, 7 font cette reconnaissance en B.3. Ils ont un travail correct sauf quelques erreurs que l'on ne considérera pas pour

la reconnaissance du comportement global de la suite⁸⁷. Les élèves qui ont un travail incomplet affirment une décroissance monotone de la suite dans $]0, +\infty[$ et ne reconnaissent pas la limite de suite comme $\sqrt{3}$.

Si l'on observe la différence dans la quantification de la reconnaissance de la limite, il existe une hausse dans les réponses de B.3 par rapport à B.2 : en B.3, 13 élèves trouvent la bonne limite, tandis qu'en B.2, il s'agit seulement de 2 élèves. Nous faisons l'hypothèse que cette hausse est peut-être due à une transition entre le paradigme [A1] vers [A2] ou que ces élèves reviennent sur cette partie après avoir fini toute la partie C. Une majorité d'élèves a répondu de cette façon, réponses qui, par ailleurs, sont presque identiques dans la classe 1. Ici, comme il s'agit de faire une conjecture d'une conjecture, tout se passe comme si les élèves de la classe 1 commençaient à « ressentir le besoin » de prouver leurs affirmations car ils essaient de mettre en place des méthodes de preuve dans le paradigme [A2] pour justifier leurs conjectures. Il doit être noté que, dans cette expérimentation, cette question n'est pas du même ordre que la précédente car cette fois la limite c'est $\sqrt{3}$ (nombre irrationnel) alors qu'avant la limite était 1. Des questions supplémentaires concernant l'approximation du nombre réel $\sqrt{3}$ se posent : est-ce que dans cette expérimentation les élèves reconnaissent bien $\sqrt{3}$ ou seulement 1,73... comme limite ? Font-ils attention à la stabilisation des décimaux ? Si oui, avec quelle précision ?

Un exemple de cet échantillon est l'élève G1-1 de la Figure 132. Cet élève fait appel à la méthode $u_{n+1} - u_n$ pour étudier la variation de la suite (mais sans réussir correctement la preuve), ou encore à l'utilisation de $f(l) = l$ pour la justification de la valeur de la limite. Ainsi, les problèmes liés à passer d'une représentation décimale donnée par la calculatrice (approximation de la limite parfois seulement à 10^{-2} près pour certains élèves) à $\sqrt{3}$, reste transparente, et nous nous demandons dans quelle mesure et avec quelle profondeur ces élèves font le lien entre le nombre 1,7321 et $\sqrt{3}$ dans une perspective locale.

⁸⁷ Par exemple, considérer 0 dans la définition de (u_n) , ou appeler deux termes de la suite u_0 et u_1 comme un intervalle $[0,1]$ – notamment les élèves G1-2, G1-18, G1-d.

$$\begin{aligned}
 U_{m+1} - U_m &= \frac{1}{2} U_m + \frac{3}{2 U_m} - U_m \\
 &= -\frac{1}{2} U_m + \frac{3}{2 U_m} < 0
 \end{aligned}$$

Sur $]0; +\infty[$ la suite U_m est décroissante
et pour chacune des valeurs de α la suite
semble être minorée par 1,7321.

$$\begin{aligned}
 f(l) &= l \\
 \frac{1}{2} l + \frac{3}{2 l} &= l \\
 \frac{3}{2 l} &= \frac{1}{2} l \quad \text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_m) = \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 &= \frac{1}{2} \times l \times 2 \times l \\
 3 &= l^2 \\
 l &= \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Figure 132 : Réponse à la question B.3 de l'élève G1-1 de la classe 1.

La Figure 133 et la Figure 134 montrent les successions de sous-activités et du travail mathématique développées par l'élève G1-1. Comme nous l'avons signalé, ici nous attendions seulement des sous-activités de reconnaissance des propriétés de la suite et non la sous-activité de traitement. Néanmoins, comme cet élève développe dans cette question B.3 la sous-activité de reconnaissance des méthodes pour prouver les propriétés de la suite et qu'il active la dimension instrumentale de son ETM personnel non pas avec la calculatrice, cette fois-ci, mais avec les artefacts symboliques qu'il mobilise, il commence à développer une sous-activité de traitement mais elle n'est pas complètement aboutie en ce qui concerne la décroissance de la suite. Par ailleurs, le fait qu'il écrive « ...la suite semble être minorée par 1,7321 » nous permet de dire qu'il utilise le travail produit dans la partie B.2 (avec un contrôle sémiotique et instrumental) mais qu'il ne fait pas explicitement le lien avec la valeur $\sqrt{3}$ de la limite de la suite. Ici nous pouvons dire que les manques de connaissances sur les nombres (notamment les nombres réels) et les différentes représentations de nombres peuvent faire obstacle aux contrôles sémiotiques et instrumentaux. Ainsi, même si l'élève essaye d'argumenter son travail dans le paradigme [A2], on ne peut pas affirmer que cet élève développe effectivement une sous-activité de contrôle.

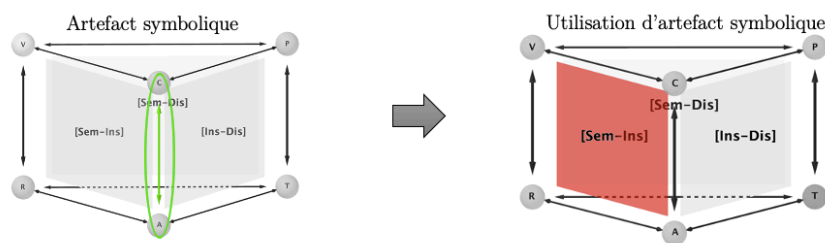


Figure 133 : Reconstruction du travail mathématique de l'élève G1-1 de la classe 1 dans la question B.3.

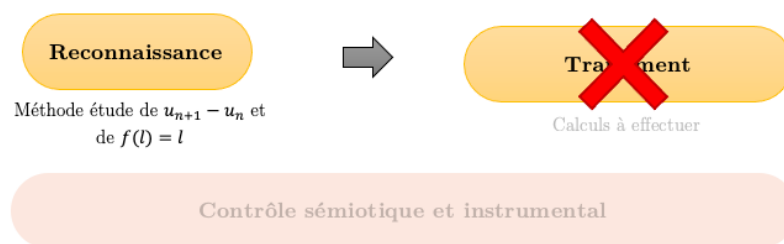


Figure 134 : Reconstruction des successions des sous-activités mathématiques de l'élève G1-1 de la classe 1 dans la question B.3.

Finaleme nt, la reconnaissance à partir des tableaux de valeur corrects de la croissance puis de la décroissance de la suite, n'est pas une activité si aisée pour tous les élèves (comme dans l'expérimentation précédente). Parmi les 40 élèves, on a 11 élèves qui ont un travail correct (C) en B.2 et, sur ces 11 élèves, seulement 6 élèves ont un travail jugé correct en B.3. Parmi les 5 autres élèves, 1 produit un travail non correct en B.3 (G3-4 il argumente que la suite est croissante et qu'elle converge vers $\sqrt{3}$, en même temps qu'il donne des arguments de la fonction selon des valeurs d'alpha), et les 4 autres réalisent un travail incomplet en B.3 : un dit que la suite est décroissante dans tout l'intervalle de définition - G1-2.8 - ; deux autres utilisent la méthode de la différence pour justifier la décroissance (un en donnant une conclusion – G1-2.7 – et l'autre sans la donner) ; 1 seul élève (G3-18) reconnaît seulement la valeur de la limite de la suite comme $\sqrt{3}$.

En outre, les élèves qui ont un travail incomplet en B.3 sont ceux qui reconnaissent seulement la décroissance ou une croissance pour les cas des deux premières valeurs d'alpha (comme l'élève G3-13). On pourrait penser que reconnaître une croissance entre le premier et le deuxième terme, puis la décroissance de la suite pour le reste des termes, peut aider les élèves à produire davantage un travail mathématique correct puisqu'ils visualiseraient mieux (ou avec plus de précision) les signes donnés par la calculatrice.

Ainsi, concernant le travail mathématique au sens des paradigmes travaillés dans la question B.3, on trouve 20 élèves sur 40 essayent de justifier leurs conjectures de [A1] dans le paradigme [A2]. À la différence de l'expérimentation précédente où le travail intermédiaire entre [A1] et [A2] apparaissait dès la partie C, ce type de travail apparaît cette fois dès la partie B.

8.4.2. Partie C

Dans cette partie l'objectif était que les élèves prouvent les conjectures faites dans la partie B à partir d'un travail mathématique dans le paradigme [A2] avec des occasions de sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental. En termes de sous-activité mathématique, on cherchait les reconnaissances de méthodes de preuve pertinentes en ce qui concerne l'étude de suites récurrentes et la nécessité d'un basculement, du point de vue du travail mathématique à produire, vers le paradigme [A2]. Cela avec le soutien des sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental s'appuyant sur le travail effectué dans le paradigme [A1] de la partie B.

Pour analyser cette partie, nous allons considérer les 40 élèves qui ont reconnu la bonne suite récurrente dans la question B.1 et qui ont produit des résultats dans les questions B.2 et B.3. Ici nous attendons de voir des traces d'une cohérence entre les parties B et C, ce qui pourrait rendre compte de la mise en fonctionnement de la sous-activité de contrôle (même avec un travail incomplet). Nous aborderons les autres élèves dans la section 8.4.3, page 282.

a) Question C.1 : prouver que la suite est minorée

Dans le Tableau 25 nous présentons une synthèse du travail mathématique des élèves, en ce qui concerne les paradigmes⁸⁸ et la correction du travail, et nous quantifions aussi la sous-activité de reconnaissance de la preuve par récurrence dans la question C.1. Rappelons que tous les élèves qui ont répondu à la question B.1 ont produit un travail mathématique correct (aucun élève qui a reconnu la bonne suite n'a eu un travail mathématique incomplet ou non correct), raison pour laquelle nous pouvons considérer les réponses obtenues en B.2 et en B.3 (à la différence de l'expérimentation précédente où nous avons considéré seulement B.1 et B.2 dans le Tableau 16, page 233).

Les catégories issues des questions B.2 et B.3 sont reprises du Tableau 24 (page 264). Il s'agit de 11 élèves qui ont eu un travail correct en B.2 et de 6 élèves qui ont eu un travail correct en B.3 (codés C) ; 26 élèves qui ont eu un travail incomplet en B.2 et 23 élèves en B.3 (codés I) ; et 3 élèves qui avaient un travail non correct en B.2 et en B.3 (codé N).

⁸⁸ Nous n'avons pas considéré ici le paradigme [A1] puisqu'il ne s'est pas présenté dans aucune des réponses des élèves à cette question C.1.

Tableau 25 : Résumé des réponses à la question C.1.

Effectif	Travail en B.2 et B.3	NR C.1	Paradigme		Récurrence (ou essai)	Correction		
			[A2]	?		C	I	N
40 élèves	C : 11 en B.2		9		2		9	
	C : 6 en B.3		3		1	1	2	
	I : 26 en B.2	5	20	1	3		19	2
	I : 23 en B.3							
	N : 2 en B.2 et en B.3		1	1	1		1	1

Des 40 élèves considérés qui ont produit un travail dans la partie B.2 ou B.3, 5 n'ont pas répondu à la première question, ce qui fait un effectif de 35 élèves qui répondent à C.1. Ces 5 élèves n'ont pas répondu à B.3 non plus et, en B.2, ils ont eu un travail incomplet.

Le travail correct en B.2 ou en B.3 produit un travail dans le paradigme [A2] en C.1, comme souhaité, mais ce travail est incomplet pour 11 élèves (un seul produit un travail correct en faisant une preuve par récurrence (G3-17). Le travail incomplet en B.2 ou en B.3 produit aussi un travail incomplet dans le paradigme [A2] pour 19 élèves (1 travail non correct en [A2] et 1 avec un travail intermédiaire entre [A1] et [A2]).

Le travail incomplet en C.1 présente des assertions vraies mais dans la plupart des cas le travail doit être complété par une preuve par récurrence. C'est l'exemple de l'élève G2-8 de la Figure 135. Cet élève transfère les propriétés de la fonction presque automatiquement à la suite, activant la dimension discursive de son ETM personnel. Cependant, il ne semble pas se questionner concernant la bonne définition de la suite et il ne fait pas allusion à une preuve par récurrence (pas de sous-activité de reconnaissance). De plus, grâce à l'explication de sa procédure, nous pouvons supposer un essai de sous-activité de contrôle instrumental et sémiotique mais il lui reste à mettre en fonctionnement un contrôle discursif (essentiel dans cette partie C) pour aboutir à la réponse. La Figure 136 et la Figure 137 montrent la reconstruction de successions de l'activité et du travail mathématique développé par l'élève G2-8. Il est à remarquer que 23 des élèves de la classe 1, qui produisent un travail mathématique incomplet, répondent de cette façon aussi mais sans avoir recours à la calculatrice (ils rédigent seulement la partie gauche par rapport à ce qu'a répondu l'élève G2-8).

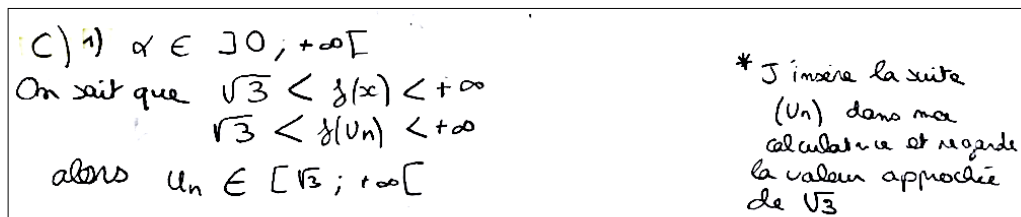


Figure 135 : Réponse C.1 de l'élève G2-8 de la classe 1.

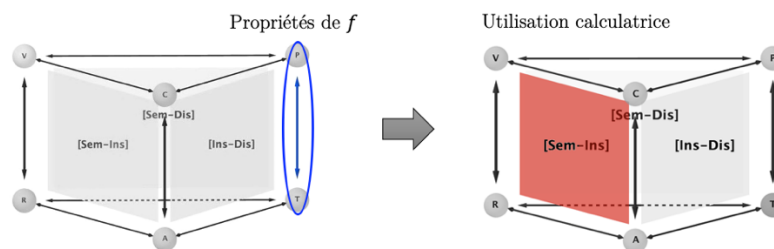


Figure 136 : Reconstruction du travail mathématique de l'élève G2-8 (classe 1) dans la question C.1.

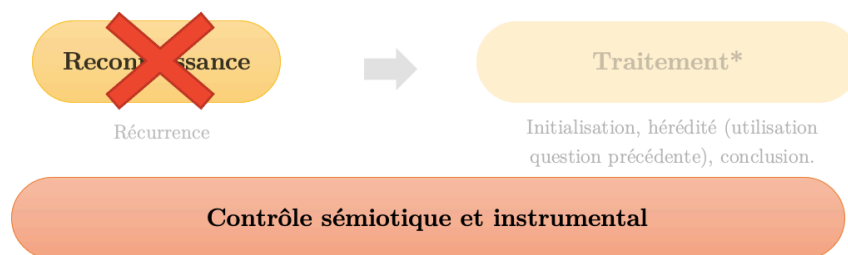


Figure 137 : Successions des sous-activité de l'élève G2-8 (classe 1) dans la question C.1.

Même si la reconnaissance de la nécessité d'une preuve par récurrence n'est pas une sous-activité développée par la plupart des élèves, le fait de ne pas avoir eu des élèves travaillant dans le paradigme [A1] dans la question C.1 nous permet d'inférer que les élèves participant à l'expérimentation précédente reconnaissent au moins, dans cette nouvelle expérimentation, qu'il faut changer de paradigme dans cette partie C (à la différence de l'expérimentation précédente où on trouvait des réponses au sein du paradigme [A1]).

Un seul élève travaillant dans le paradigme [A2] produit un travail non correct (les deux autres élèves qui produisent un travail non correct sont dans un travail intermédiaire). Il s'agit de l'élève G1-10 (Figure 138) qui, malgré une connaissance dans les étapes de la preuve par récurrence (ce qui permet de le situer en [A2]), produit via son hypothèse de récurrence un travail non correct. La Figure 139 et la Figure 140 montrent la reconstruction des successions de l'activité et du travail mathématique de

cet élève. Tout d'abord il développe une sous-activité de reconnaissance de la bonne méthode à utiliser, ce qui lui fait activer la dimension discursive de son ETM personnel. Ensuite, il active le plan vertical [Sem-Ins] pour développer cette preuve, mais il ne développe pas la sous-activité de traitement telle que souhaitée. Cet élève ne montre pas de contrôle mathématique explicite en lien avec la partie B.

C) 1.
Soit $P_n : U_n = \frac{1}{2} \left(U_0 + \frac{3}{U_0} \right)$

Initialisation:
pour $n=1$
On voit que $U_0 = 1$ (a_2)
 $U_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{1} \right) = 2$
la proposition P_1 est vraie

Hérédité :
Soit $m \in \mathbb{N}$ fixe
On suppose P_m vraie : $U_m = \frac{1}{2} \left(U_0 + \frac{3}{U_0} \right)$ H1
 $U_{m+1} = \frac{1}{2} \left(U_{m+1} + \frac{3}{U_{m+1}} \right)$
On $U_{m+1} = f(U_m)$
$$= \frac{1}{2} \left(U_m + \frac{3}{U_m} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(U_0 + \frac{3}{U_0} \right) + \frac{3}{\frac{1}{2} \left(U_0 + \frac{3}{U_0} \right)} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{U_0^2 + 3}{U_0} + \frac{3}{\frac{1}{2} \left(U_0 + \frac{3}{U_0} \right)} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left(U_0 + \frac{3}{U_0} \right)$$

donc si P_m est vraie, alors P_{m+1} est vraie. P_n est héréditaire

Conclusion :
 P_1 est vraie, P_n est héréditaire donc d'après le principe de raisonnement par récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$
donc appartenant à $\mathbb{C}(\mathbb{Q})$ et \mathbb{R} .

Figure 138 : Réponse à C.1 de l'élève G1-10 de la classe 1.

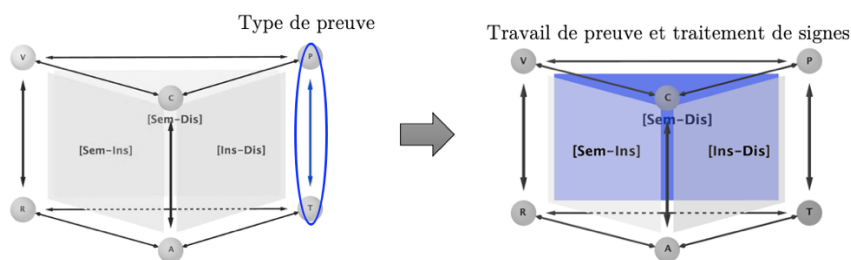


Figure 139 : Reconstruction des successions du travail mathématique de l'élève G1-10 de la (classe 1) dans la question C.1.

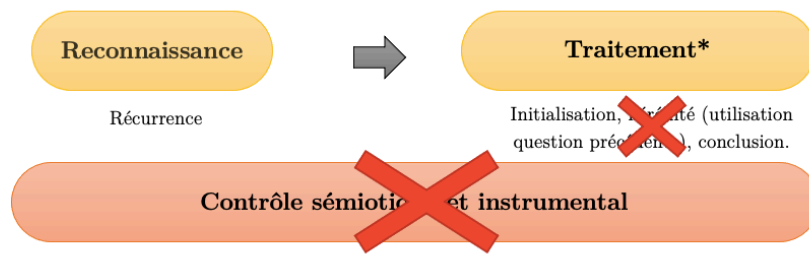


Figure 140 : Reconstruction des successions des sous-activités de l'élève G1-10 (classe 1) dans la question C.1.

Comme signalé deux élèves produisent un travail non correct avec un travail intermédiaire entre les paradigmes [A1] et [A2]. L'un correspond à l'élève G2-1, qui a produit un travail non correct dans la question B.2 et la question B.3 et qui a encore un travail non correct en C.1. Dans sa réponse il réalise juste une conversion de registres en affirmant que « $u_n \geq \sqrt{3}$, alors u_n appartient à $[\sqrt{3}, +\infty[$ ». Cela rend compte de l'utilisation des contrôles non mathématiques présents dans l'énoncé et qui ne permettent pas de produire un travail correct. L'autre élève, G3-6, dont nous présentons le travail dans la Figure 141⁸⁹, utilise aussi les contrôles non mathématiques présents dans l'énoncé mais il reste bloqué sans pouvoir continuer son raisonnement à cause du paramètre alpha. Dans une réponse comme celle-ci, nous pourrions supposer que dans le contexte d'une classe en présentiel, une aide de l'enseignant aurait débloqué le travail de cet élève. La Figure 142 et la Figure 143 montrent la reconstruction des successions de l'activité et du travail mathématique et nous pouvons voir qu'aucune sous-activité mathématique attendue dans l'énoncé n'est développée par cet élève. En revanche, il active la dimension discursive de son ETM personnel et l'élève écrit les affirmations de l'énoncé qu'il comprend comme « $n > 0$ » ou « $P_n : \sqrt{3} \leq u_n < +\infty$ ». Ainsi, les sous-activités de contrôle sémiotique, instrumental et discursif ne sont pas investies par cet élève.

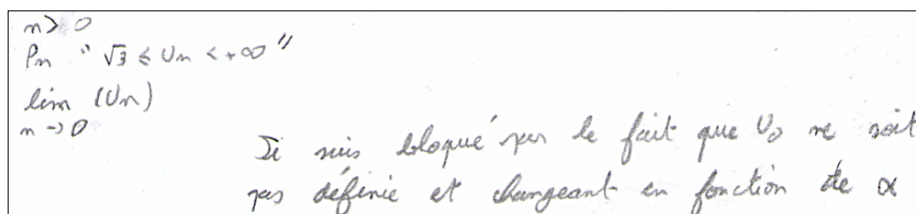


Figure 141 : Réponse à question C.1 de l'élève G3-6, classe 2.

⁸⁹ Nous avons classé cet élève dans un travail intermédiaire entre [A1] et [A2], mais le fait qu'il écrit P_n laisse aussi penser qu'il aurait pu penser à une preuve par récurrence.

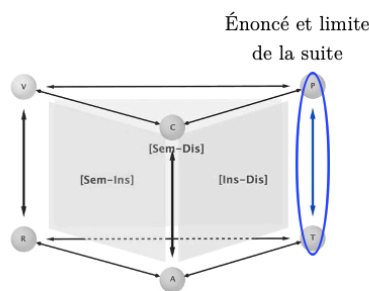


Figure 142 : Reconstruction du travail mathématique de l'élève G3-6 (classe 2) en C.1.

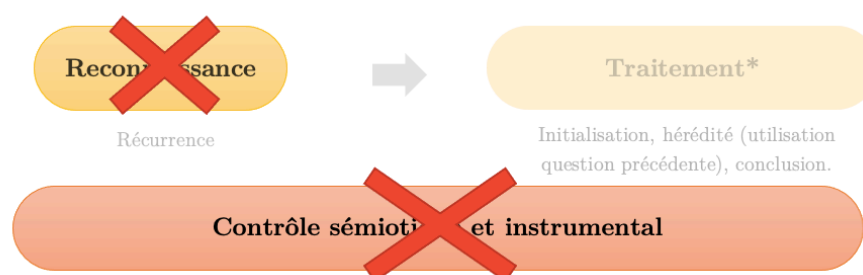


Figure 143 : Successions de sous-activités non atteintes par l'élève G3-6 (classe 2) en C.1.

Nous présentons aussi l'exemple de l'élève G3-26 dans la Figure 144. La Figure 145 et la Figure 146 montrent la reconstruction des successions de l'activité et du travail mathématique qu'il développe. Cet élève ne reconnaît pas la preuve par récurrence mais il utilise les propriétés de la fonction qui lui permettent d'activer la dimension discursive de son ETM personnel. Comme la récurrence n'est pas reconnue en tant que telle, la sous-activité de traitement souhaitée n'est pas atteinte. Néanmoins ses affirmations (utiliser les propriétés de la fonction pour différents cas par exemple) et les signes utilisés dans sa production (qui relèvent des registres ensembliste et algébrique) permettent d'affirmer que son travail avance vers l'activation du plan vertical [Sem-Dis]. Les différents cas qu'il prend pour α permettent d'inférer que cet élève contrôle le travail produit avec la partie B (sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental). Finalement il produit un travail incomplet dans le paradigme [A2], (avec un travail incomplet aussi pour B.2 et B.3 et correct pour B.1).

- Si $\alpha > \sqrt{3}$: $U_1 \in [\sqrt{3}; +\infty[$ et $\forall n$ on a $U_n \in [\sqrt{3}; +\infty[$ (d'après A_1)
- Si $\alpha = \sqrt{3}$: $U_1 = \sqrt{3}$ et $\forall n$ on a $U_n \in [\sqrt{3}; +\infty[$ (d'après A_1)
- Si $\alpha < \sqrt{3}$: $U_1 > \sqrt{3}$ (car $g(x)$ est décroissant sur $[\alpha; \sqrt{3}]$ avec un minimum en $\sqrt{3}$) et $\forall n$ on a $U_n \in [\sqrt{3}; +\infty[$.
Donc pour tout n , on a $U_n \in [\sqrt{3}; +\infty[$

Figure 144 : Réponse à la question C.1 de l'élève G3-26, Classe 2.

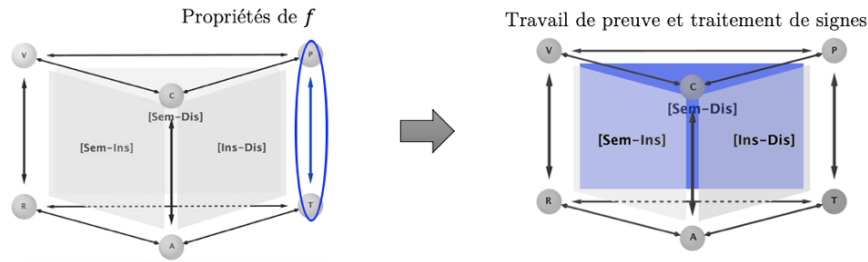


Figure 145 : Reconstruction du travail mathématique de l'élève G3-26 (classe 2) en C.1.

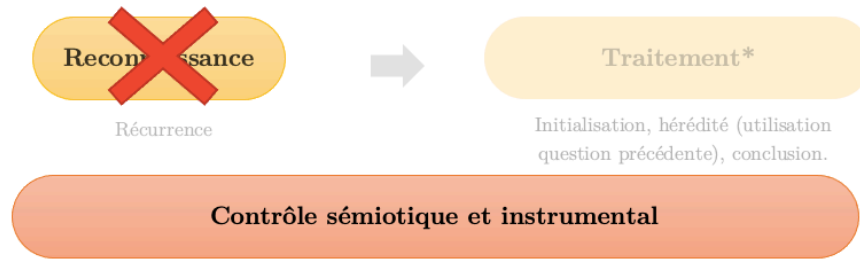


Figure 146 : Successions des sous-activités de l'élève G3-26 (classe 2) en C.1.

Ainsi, le travail incomplet ou non correct en B.2 ou en B.3 ne produit pas un travail correct en C.1. Finalement, concernant les contrôles mathématiques en général, il y a peu de contrôles explicites (pas de traces dans les productions).

b) Question C.2 : prouver que la suite est croissante

Sur les 35 élèves qui ont répondu à C.1, tous ceux de la classe 1 répondent à C.2, et nous additionnons à cet échantillon trois élèves (G1-7, G1-13 et G1-f) sur les 5 qui n'ont pas répondu à C.1 mais qui répondent tout de même à C.2. Des élèves de la classe 2, 1 ne répond pas à C.2. Cela fait un effectif de 37 élèves au total (28 élèves de la classe 1 et 9 élèves de la classe 2). Le Tableau 26 présente une synthèse du travail concernant les paradigmes travaillés ainsi que les reconnaissances des méthodes les plus utilisées⁹⁰ et la correction du travail.

⁹⁰ À nouveau comme dans l'expérimentation précédente, aucun élève ne propose le calcul du quotient u_{n+1}/u_n .

Tableau 26 : Résumé réponses de la question C.2.

Catégories à l'issue de C.1	Paradigme			$u_{n+1} - u_n$	Récurs.	$f \nearrow \Rightarrow u_n \nearrow$	Correction		
	NR	A2	?				C	I	N
33 élèves dans [A2]	1	31	1	24	1	3	1	25	6
2 élèves dans ?		2				1			2
5 élèves NR C.1	2	3		3			1		2

Des 37 élèves qui répondent à C.2, 36 travaillent dans le paradigme [A2] en C.2 : 31 étaient déjà dans [A2] dans la question C.1, 2 dans le travail entre les deux paradigmes et 3 n'avaient pas répondu à C.1. Concernant les 31 qui ont jusqu'ici un profil [A2], 1 produit un travail correct (G2-7), 25 un travail incomplet et 6 un travail non correct. Puis un seul élève qui était dans [A2] en C.1 (G1-b) bascule vers le travail intermédiaire entre [A1] et [A2] en produisant un travail incomplet. Il affirme que la suite est décroissante en argumentant que « $u_{n+1} - u_n < 0$ et comme $u_n \in [\sqrt{3}, +\infty[$, la suite est décroissante ».

Des 6 élèves qui produisent un travail non correct dans le paradigme [A2], deux utilisent la stratégie $u_{n+1} - u_n$ (G1-6, G1-d) et 4 élèves argumentent que la suite possède les mêmes variations que f (G3-14, G3-17, G3-27, G3-16). À titre d'exemple nous présentons dans la Figure 147 la production de l'élève G3-17. Dans la Figure 148 et dans la Figure 149 nous montrons la reconstruction des successions de l'activité et le travail mathématique qu'il produit. Cet élève ne reconnaît pas de méthode valable pour répondre à la question, ce qui empêche la mise en fonctionnement de la sous-activité de traitement attendue et de l'activation de la dimension instrumentale avec un artefact symbolique. Néanmoins, il active la dimension discursive de son ETM personnel. Peut-être que le problème de cet élève se trouve dans son référentiel théorique car, malgré le fait qu'il reconnaît la bonne suite récurrente dans son écriture, on peut penser qu'il utilise les propriétés de cette suite comme une suite explicite. Enfin, cet élève ne développe pas la sous-activité de contrôle sémiotique et instrumental.

$$U_{n+1} = f(U_n) = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{3}{U_n} \right)$$

La suite U_n a les mêmes variations que la fonction donc elle est décroissante dans $]0; \sqrt{3}]$ et croissante dans $[\sqrt{3}; +\infty[$

Figure 147 : Production de l'élève G3-17 à la question C.2.

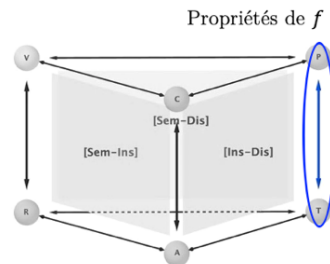


Figure 148 : Reconstruction du travail mathématique de l'élève G3-17 (classe 2) en C.2.

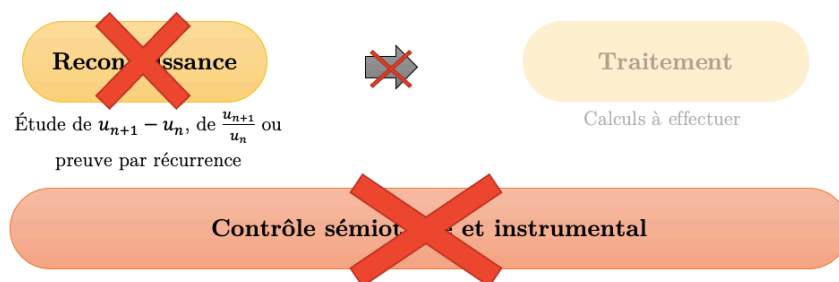


Figure 149 : Successions des sous-activités de l'élève G3-17 (classe 2) en C.2.

La plupart des élèves qui travaillent dans le paradigme [A2] présentent un travail incomplet, en développant une reconnaissance de la méthode à utiliser et en activant la dimension instrumentale de leur ETM personnel et ils activent ensuite le plan vertical [Sem-Ins] de leur ETM. L'élève de la Figure 150, ci-dessous, permet d'illustrer la réponse donnée par ce groupe d'élèves et la Figure 151 et la Figure 152 permettent d'observer la reconstruction des successions de l'activité et du travail mathématique qu'il développe. Nous constatons que cet élève ne contrôle pas son travail de façon discursive car il manque d'argumentation pour affirmer que la suite est décroissante. Néanmoins, comme il sait que la suite est décroissante par les questions B.1 et B.2 (où il avait reconnu la décroissance à partir des tableaux de valeurs de la suite) il force la conclusion de sa preuve, ce qui le conduit à rendre un travail incomplet.

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2u_n} - u_n \\
 &= -\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2u_n} \\
 \text{Comme } u_n &\in [\sqrt{3}; +\infty[\\
 \text{donc } &= -\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2u_n} < 0 \\
 &\text{donc la suite est décroissante}
 \end{aligned}$$

Figure 150 : Production de l'élève G1-2.2 pour la question C.2.

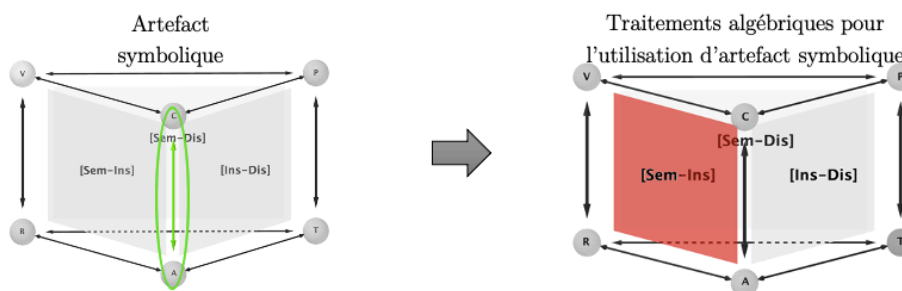


Figure 151 : Reconstruction du travail mathématique de l'élève G1-2.2 (classe 1) en C.2.

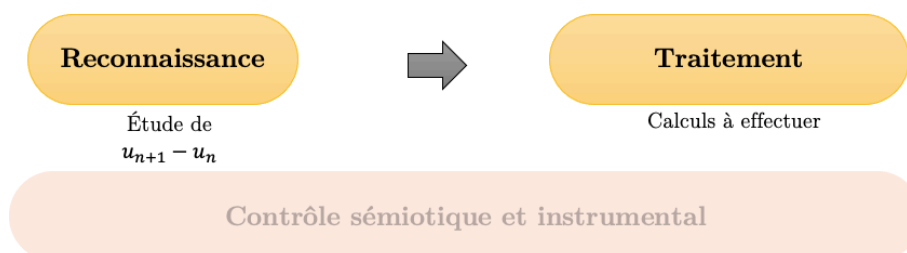


Figure 152 : Successions de sous-activités de l'élève G1-2.2 (classe 1) en C.2.

En ce qui concerne les 2 élèves qui travaillaient entre [A1] et [A2] en C.1, les deux (G2-1 et G3-6) se situent dans le paradigme [A2] en C.2 en produisant toujours un travail non correct. L'élève G2-1 produit un travail non correct aussi B.2, B.3 et C.1, et en C.2 il répond : « pour étudier les variations de la suite u_n , $u_n \geq \sqrt{3}$, $f(u_n) \geq f(\sqrt{3})$, $u_{n+1} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \sqrt{3}$, donc f est croissante ». L'autre élève G3-6 (travail N) mentionne : « je devrais dériver u_n pour avoir le signe de la dérivée ($-$), en déduire que la suite est décroissante et minorée » ; et l'élève G3-27 mentionne « (...) f est décroissante sur $]0; \sqrt{3}]$ puis croissante sur $[\sqrt{3}; +\infty[$ donc (u_n) a les mêmes variations que f ».

Finalement sur les 3 élèves (classe 1) qui répondent à C.2 mais qui n'avaient pas produit un travail dans C.1, ils se situent tous en [A2] : 1 produit un travail correct (G1-f) et 2 produisent un travail non correct (G1-7 et G1-13). L'élève G1-7 reconnaît

la bonne méthode de l'étude différence $u_{n+1} - u_n$ mais, délibérément, il décide de calculer la dérivée de la fonction f . Ce type d'erreur entre dans les confusions de $u_n = f(n)$, ce qui montre un manque aussi de contrôle (la production de cet élève est du même ordre que le cas de l'élève G1-2.6 de l'expérimentation précédente, voir Figure 106, page 239).

Le cas de l'élève G1-13 de la Figure 153 mérite d'être soulevé et nous pouvons voir la reconstruction des successions de l'activité et du travail mathématique qu'il développe dans la Figure 154. Cet élève développe une sous-activité de reconnaissance quant à la méthode à utiliser avec l'activation de la dimension instrumentale de son ETM. Ensuite, il développe aussi une sous-activité de traitement et active le plan vertical [Sem-Ins] de son ETM personnel. Le problème est que cet élève bascule sur une mauvaise reconnaissance de la suite récurrente en effectuant la confusion avec $u_n = f(n)$, ce qui l'amène à produire un travail non correct. Ainsi cet élève a un manque dans les sous-activités de contrôle et ne présente pas de traces de contrôle sémiotique et instrumental en lien avec la partie B. Le cas de cet élève est similaire à celui de l'élève G1-1.14 de l'expérimentation précédente Figure 109, page 240).

C.2.

$$u_n = \frac{1}{2} \left(n + \frac{3}{n} \right)$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(n+1 + \frac{3}{n+1} \right)$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(n+1 + \frac{3}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left(n + \frac{3}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(n + \frac{3}{n+1} - \left(n + \frac{3}{n} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(n + \frac{3}{n+1} - n - \frac{3}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{n+1} - \frac{3}{n} \right)$$

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{3}{n+1} - \frac{3}{n} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - 3(n+1)}{(n+1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - 3n - 3}{n+1} > 0$$

$$\frac{-3n}{n+1} > 0$$

$$\frac{n}{n+1} < 0$$

$$n < n+1$$

donc u_n est
décroissante à
partir de $n+1$

Figure 153 : Production de l'élève G1-13 pour la question C.2.

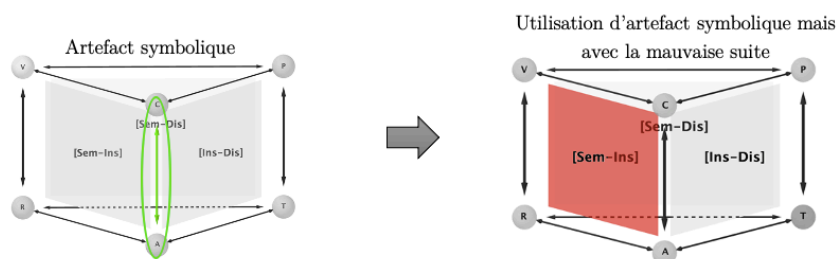


Figure 154 : Reconstruction du travail mathématique de l'élève G1-13 (classe 1) en C.2.

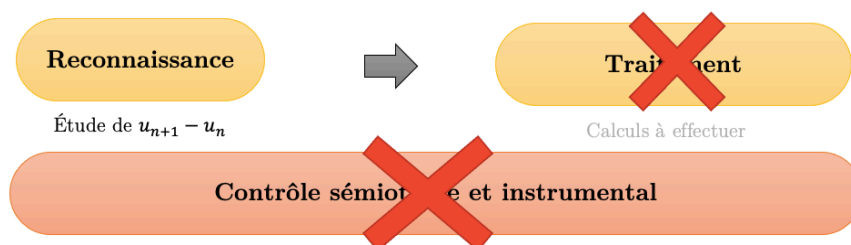


Figure 155 : Successions des sous-activités de l'élève G1-13 (classe 1) en C.2.

Toutefois, nous pouvons penser que ce manque de contrôle vient d’une mauvaise écriture de la suite dans la partie B. En effet, cet élève avait bien reconnu la bonne suite récurrente avec des bons tableaux lors de la question B.1 mais à la fin de la partie B il écrit explicitement $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$ (Figure 156). Cela peut être interprété comme un manque de contrôle lié à un problème d’ordre sémiotique.

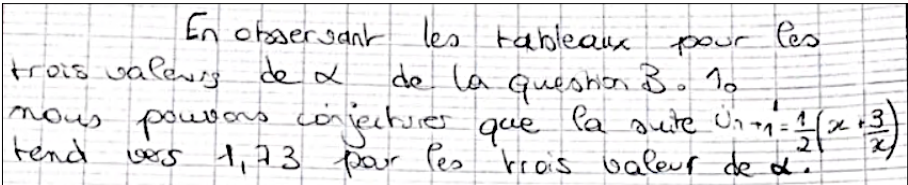


Figure 156 : production de l’élève G1-13 à la fin de la partie B

c) Question C.3 : prouver la convergence de la suite

Dans l’analyse de la question C.2, 37 parmi les 40 élèves qui avaient des reconnaissances de la suite, de la convergence et de la limite à l’issue de B.1 et B.2, avaient répondu à C.1 et à C.2, 36 répondent encore à la question C.3 (un élève ne répond pas à C.3). Ici, sur les 4 qui n’ont pas répondu dans C.1, 3 travaillent tout de même en C.2 (G1-7, G1-13 et G1-f). Tous les trois répondent aussi à la question C.3. Nous présentons, dans le Tableau 27 ci-dessous, une synthèse des résultats à cette question avec les paradigmes du travail mathématique, la reconnaissance du théorème à utiliser et le statut du travail mathématique.

Tableau 27 : Résumé réponses de la question C.3.

Catégories à l’issue de C.2	Effectif en C.3	NR C.3	Paradigme			Théorème	Correction		
			[A1]	[A2]	?		C	I	N
31 élèves [A2] pour C.1 et C.2	40 élèves	4	1	30		29	28	1	2
2 élèves ? pour C.1 et [A2] pour C.2				2		2	2		
3 NR pas C1 et [A2] pour C.2				3		3	2		1

Sur les 36 élèves qui répondent à cette question C.3, 35 reconnaissent le théorème et travaillent dans le paradigme [A2], mais 32 produisent un travail correct (C), 1 un travail incomplet (I) et 3 un travail non correct (N).

Les deux élèves qui produisaient un travail entre [A1] et [A2] pour C.1 et en [A2] pour C.2, produisent cette fois en C.3 un travail correct. Il s'agit des élèves G2-1 et G3-6 qui en C.1 et C.2 avaient un travail non correct mais qui reconnaissent bien le théorème en C.3.

Un seul élève (G3-14) produit un travail incomplet en C.3. Il avait C.1 incomplet aussi et C.2 non correct. Cet élève reconnaît le théorème mais ne reconnaît pas si la suite est décroissante ou croissante, majorée ou minorée par $\sqrt{3}$.

Des trois élèves qui produisent un travail non correct en C.3, l'élève G3-27 écrit « *sur $[0; \sqrt{3}] (u_n)$ est décroissante est donc minorée. (u_n) est minorée par 0, donc elle est convergente vers une limite l* ». Il avait produit un travail incomplet pour C.1 et non correct pour C.2, tous les deux en [A2]. Le deuxième élève (G1-7) ne reconnaît pas la décroissance de la suite. En effet, cet élève fait partie des trois élèves qui n'ont pas répondu à la question C.1 mais qui travaillent tout de même en C.2 (où il produit un travail aussi non correct) et en C.3. Dans sa réponse à la question C.3 il argumente « *pour prouver qu'elle est convergente il faut que la suite soit croissante ou décroissante et qu'elle soit majorée ou minorée. Là on sait qu'elle est croissante et nous avons vu que la limite était 1,73, donc majorée par 1,73, donc la suite u_n est convergente* » (ce résultat est très différent à l'expérimentation précédente où seulement 1 élève de la classe 1 avait reconnu le théorème⁹¹). Le troisième élève (G3-16) produisant un travail non correct est celui qui bascule au paradigme [A1] dans cette partie alors qu'il avait travaillé en [A2] pour C.1 et C.2 (Figure 157). Cet élève produit un travail non correct (C.1 et C.2 non corrects également) et répond à partir de la partie B sans faire référence au théorème de la limite monotone. Cela fait qu'il active le plan vertical [Sem-Ins] de son ETM personnel mais ce travail ne lui permet pas de développer ni une sous-activité de reconnaissance, ni une sous-activité de traitement (voir figure Figure 158 et Figure 159).

⁹¹ Il s'agissait de l'élève G1-1.8 que nous avons exclu pour cette première analyse puisqu'il ne reconnaît pas la bonne suite.

(u_m) est convergente car $(u_m) \in [1,732; +\infty[$
à partir de $m=1$ pour α_1 , de $m=1$ pour α_2 , de $m=0$ pour α_3 .
Elle a donc une limite unique, elle converge.

Figure 157 : Production de l'élève G3-16 à la question C.3.

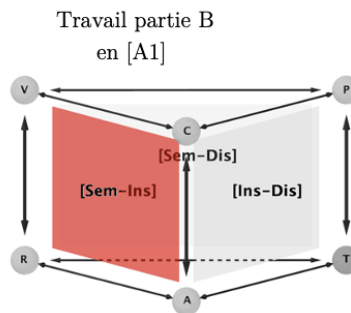


Figure 158 : Reconstruction du travail mathématique de l'élève G3-16 (classe 2) en C.3.



Figure 159 : Successions de sous-activités (non atteintes) de l'élève G3-16 (classe 2) en C.3.

8.4.3 Retour sur quelques cas particuliers d'élèves

Nous revenons sur les cas des élèves provisoirement écartés et qui n'ont pas répondu de manière adéquate aux questions B.1 ou B.2.

Mauvaise reconnaissance de la suite

Comme dans l'expérimentation précédente, il s'agit des élèves qui ont reconnu une suite $u_n = f(n)$ dans la partie B. Ici nous comptons 2 élèves au total, c'est-à-dire un élève de chaque classe (dans l'expérimentation précédente il y avait 9 élèves de la classe 1 et 1 élève de la classe 2). Dans la classe 1, c'est l'élève G1-8 qui a ses tableaux

incorrects dans la question B.1, qui répond donc de façon non correcte à B.2 (il signale que la suite est décroissante puis croissante, donc divergente), et il ne répond ni à B.3, ni à C.1 ni à C.3. Néanmoins, dans la Figure 160, nous pouvons voir qu'il essaie une preuve par récurrence dans la question C.2 pour argumenter que la suite est croissante puis décroissante. À ce moment-là il argumente qu'il utilise la calculatrice, ce qui nous permet de dire qu'il veut contrôler son travail avec la partie B mais il ne réussit pas puisqu'il avait produit un travail non correct.

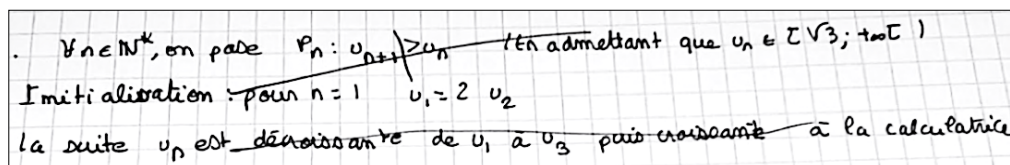


Figure 160 : Production de l'élève G1-8 à la question C.2.

Dans la classe 2 nous trouvons l'élève G3-a qui travaille avec $u_n = f(n)$ dès la partie B.1. Il travaille dans toutes les questions sauf C.2 et C.3. Dans la partie B naturellement il conclut que la suite a toujours le même comportement « *elle est croissante, ne semble pas converger ni avoir de limite* ». Dans la partie C.1 il utilise la récurrence (bascule bien au paradigme [A2]), mais sans travailler vraiment avec la définition de la suite.

Dans cette expérimentation (contrairement à la précédente), hormis les élèves qui n'ont pas reconnu une croissance pour les deux premiers termes de la suite dans les cas de α_1 et de α_2 , nous ne constatons pas d'élèves qui n'ont pas reconnu le comportement de la suite (décroissance ou convergence), ayant bien reconnu la suite récurrente en B.1.

Un cas isolé de reconnaissance sans production de travail

Dans la classe 2 nous trouvons l'élève G3.21 qui ne répond pas à la question B.1 mais qui répond aux questions B.2, B.3 et C.3. Pour B.2 il produit un travail correct et conforme à ce qui est attendu, il reconnaît même que la suite est décroissante après $n = 1$. Mais dans la question C.3 il ne reconnaît pas le théorème et répond que la suite est convergente car elle est dérivable !

8.5 Conclusions du chapitre : résultats des deux tâches construites

Pour commencer cette conclusion, nous revenons tout d'abord à nos deux questions de recherche :

QR 3.1 : *Quel est le travail mathématique des élèves et quelles sous-activités mathématiques développent-ils lors de la résolution de tâches permettant des occasions de contrôle mathématique issue d'une dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] et l'introduction de la dimension instrumentale du travail mathématique dans l'étude de suites $u_{n+1} = f(u_n)$ à la transition L-U ?*

QR 3.2 : *Quelle est l'influence de l'intervention de l'enseignant dans l'activité et l'ETM personnel des élèves, lorsqu'il s'agit de développer des sous-activités de reconnaissance et de contrôle dans la dialectique des paradigmes [A1] et [A2] ?*

Dans ce chapitre, nous avons présenté des analyses de trois expérimentations menées dans la dernière classe de Lycée (Terminale Scientifique), ce qui nous a permis d'approfondir l'étude de la transition lycée-université d'un point de vue cognitif et épistémologique à partir des suites définies par récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour ce faire, nous avons conçu deux tâches qui pourraient servir de pont entre deux institutions, car elles ont des caractéristiques de la fin de lycée (notamment en exploitant les connaissances des élèves concernant l'utilisation de calculatrices) et des caractéristiques du début de l'université (comme par exemple des reconnaissances laissées à la charge de l'élève et qui donc, n'apparaissent pas dans l'énoncé, ou le caractère de paramètre du premier terme de la suite).

La première tâche consistait à l'étude de la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$, $\alpha \in [0,1]$ et pour tout entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (suite croissante et fonction croissante dans l'intervalle $[0,1]$). La deuxième tâche concernait l'étude de la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$, $\alpha \in]0, +\infty[$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$ (fonction croissante et suite décroissante dans l'intervalle $[\sqrt{3}, +\infty[$).

Nous avons expérimenté ces tâches au niveau du lycée dans trois contextes différents : la première tâche avec une classe et un travail individuel des élèves (**expérimentation I**), une autre classe avec l'intervention de l'enseignant (**expérimentation II**) et la deuxième tâche avec un travail individuel à la maison dans les deux classes (**expérimentation III**). Ces tâches avaient pour but d'enrichir les occasions de sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental grâce à la

calculatrice et l'activation de la dimension instrumentale dans l'ETM personnel au sein du paradigme [A1], pour soutenir les sous-activités de contrôle discursif et un travail dans le paradigme [A2]. Ainsi l'idée était de favoriser une dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] dans l'étude de ces suites récurrentes. Par ailleurs, cette tâche cherchait à favoriser les sous-activités de reconnaissance et les sous-activités de traitement.

Le travail dans le paradigme [A1] permettait de reconnaître la bonne définition de la suite récurrente, donnant l'opportunité aux élèves de faire une exploration de la suite en formulant des conjectures de son comportement avec l'aide de la calculatrice (partie B). Le travail dans le paradigme [A2] prend appui sur le travail préalable en [A1] et permettait de prouver les conjectures faites ; il s'agissait de l'étude formelle de la suite et de ses propriétés.

Dans ce qui suit, nous cherchons à répondre aux QR 3.1 et QR 3.2 en présentant une synthèse des résultats trouvés lors des expérimentations menées. Nous cherchons à décrire le travail et les activités mathématiques des élèves, ainsi que l'influence des interventions de l'enseignant, lors de la résolution de tâches construites visant à promouvoir les sous-activités de contrôle issue de la dialectique [A1] et [A2].

a) La reconnaissance de la suite récurrente et des propriétés de cette suite

Grâce à un premier travail avec la calculatrice où on espérait la reconnaissance de la suite récurrente (question B.1), nous souhaitions favoriser la bonne interprétation des signes données par la calculatrice pour ainsi conjecturer la croissance, la convergence et la limite de la suite (question B.2 et B.3).

Pour la question B.1 concernant les expérimentations I et II, la reconnaissance de la suite récurrente a été faite par presque la moitié des élèves dans la classe 1 (57%), alors que la suite a été bien reconnue par presque la totalité des élèves dans la classe 2 (94%). Un tel écart entre les résultats de deux classes est certainement dû à l'intervention de l'enseignant dans le cas de la classe 2. Son intervention prive peut-être certains élèves de la reconnaissance de la forme de la suite mais, par contre, elle permet que beaucoup plus d'élèves continuent de travailler avec la bonne suite. Pour la question B.1 concernant l'expérimentation III, les élèves reconnaissent mieux la suite récurrente que dans les expérimentations I et II (93% d'élèves). Dans les trois expérimentations et dans les deux classes, les élèves comprennent toutefois bien que le travail est à développer dans le paradigme [A1]. Ils ont des bons usages des instruments (calculatrice) pour remplir leurs tableaux de valeurs. Il y a des sous-activités de

contrôle qui s'exercent déjà, notamment les contrôles sémiotiques et instrumentaux quand la calculatrice n'indique pas ce qui pourrait être attendu (surtout visibles dans l'expérimentation I et II), et on peut penser que pour certains élèves cela les aide aussi à reconnaître la bonne suite.

Dans le cas des élèves qui sont en autonomie dans la classe 1 (expérimentation I), malgré l'idée que l'on peut se faire du fait qu'un travail plus pragmatique dans le paradigme [A1] pourrait être plus accessible, le non-aboutissement de la reconnaissance de la suite nous montre que ce travail n'est pas évident pour de nombreux élèves. Il est paradoxal de penser que ce type d'élève pourrait réaliser un travail correct en [A2] s'ils manquent d'activité du contrôle même dans le paradigme [A1] car, dans ce cas, cela montrerait un manque de compréhension importante quant à l'objet étudié.

Pour les questions B.2 et B.3 on attendait la reconnaissance de la variation, de la convergence et de la valeur de la limite de la suite. A partir des tableaux de valeurs, la reconnaissance de la variation est bonne chez une grande partie des élèves dans les trois expérimentations et dans les deux classes. Il semble donc facile de passer d'une perspective ponctuelle portée par le tableau de valeur (ou d'une perspective globale s'ils utilisent une représentation graphique) à une perspective globale sur la suite pour conjecturer la croissance de la suite (dimension sémiotique du travail). Par contre la reconnaissance de la convergence et de la valeur de la limite peut être plus difficile, ce qui est lié à un changement de perspective plus difficile : par exemple seulement 25% des élèves de classe 1 en autonomie (expérimentation I) ont réussi ces reconnaissances. Dans le cas de l'expérimentation III ce changement de perspective est en lien avec l'approximation d'un nombre réel. Cela crée une différence par rapport aux expérimentations I et II car il fallait que les élèves reconnaissent la limite $\sqrt{3}$ dès la partie B. Mais, comme beaucoup d'élèves ont utilisé l'artefact symbolique $f(l) = l$ dans la question B.3, nous ne savons pas dans quelle mesure ils reconnaissent vraiment $\sqrt{3}$ comme limite, ou juste 1,73... En effet, les élèves doivent se mettre dans une perspective locale pour apprécier la convergence et la limite. Nous n'avons pas cherché à creuser ce changement de perspective mais ces résultats sont cohérents avec le travail de Montoya Delgadillo et al. (2018). Cependant, dans l'expérimentation III nous identifions des élèves travaillant dans le paradigme [A2] dans la partie B.3, contrairement aux expérimentations I et II où les élèves travaillaient en [A1].

La forme des représentations numériques (décimale ou fractionnaire) semble avoir un effet sur les reconnaissances puisque les représentations fractionnaires ne favorisent pas les reconnaissances que nous attendions ; en effet, la majorité des élèves bloqués dans B.2 et B.3 avaient des représentations fractionnaires dans leur tableau de valeurs dans les expérimentations I et II. Il y a alors un effet lié au professeur dans la classe 2

(expérimentation II) qui a favorisé le fait, pour les élèves bloqués, de pouvoir changer de représentations. D'ailleurs, l'aide individuelle du professeur à un binôme d'élèves pour régler la fenêtre d'affichage de la calculatrice et visualiser la représentation graphique de la suite numérique a été faite à haute voix et elle a pu aider d'autres élèves ce qui a provoqué une régulation de l'activité mathématique des élèves à partir de cette intervention dédiée à la sous-activité de contrôle sémiotique et instrumental. De plus, la représentation graphique porte mieux les perspectives globales et locales nécessaires aux reconnaissances. Ainsi on a une très bonne reconnaissance de la croissance, de la convergence et de la valeur de la limite dans la classe 2 (80%) lors de l'expérimentation II. On voit d'ailleurs dans cette même expérimentation que certains élèves ont tout de même les bonnes conjectures (sans doute avec la représentation graphique) alors que leurs tableaux de valeurs étaient incomplets ou non corrects. Il existe aussi une différence avec la limite entière (expérimentation I et II) et la limite irrationnelle (expérimentation III). En effet, il est plus difficile de passer d'une approximation décimale d'un nombre réel, vers sa valeur exacte, d'autant plus que les différentes représentations des nombres réels sont plus complexes que celles des nombres entiers (de nouvelles connaissances mathématiques sont nécessaires pour traiter ce système numérique). Cela peut expliquer l'introduction du paradigme [A2] pour les élèves de l'expérimentation III dès la partie B.3 (élève G1-1, Figure 132).

b) Le travail mathématique dans la reconnaissance des méthodes de preuve

Pour la partie C, nous avons pour objectif que les élèves puissent produire des preuves mathématiques dans le paradigme [A2] des conjectures qu'ils avaient formulées dans la partie B et le paradigme [A1], avec les occasions de contrôle sémiotique et instrumental. Pour le déroulement de ces preuves, les élèves devaient tout d'abord s'investir dans des sous-activités de reconnaissances des méthodes avec un travail mathématique soit issu de la dimension instrumentale de leurs ETM (avec les artefacts symboliques), soit issu de la dimension discursive (comme dans le cas de la récurrence ou de la limite monotone notamment). Ensuite, les élèves devaient développer des sous-activités de traitement et l'activation des différentes dimensions de l'ETM selon le cas.

On peut dire que le travail mathématique correct (voire incomplet) dans la partie B (paradigme [A1]) s'avère être un bon précurseur pour entrer dans la partie C (paradigme [A2]). Mais ce type de dialectique entre paradigmes [A1] et [A2] s'avère aussi constituer un frein chez certains élèves, notamment dans la classe 1 en autonomie lors de l'expérimentation I, car des élèves restent spontanément dans le paradigme [A1]

pour tenter des argumentations. A ce moment-là ces élèves contrôlent souvent leur discours avec la partie B – contrôle sémiotique ou instrumental en référence à la calculatrice - mais ils fournissent un travail qui ne peut qu'être incomplet. Un seul élève dans l'expérimentation I (G1-1.14) semble totalement déconnecter sa partie C de la partie B tout en restant dans le paradigme [A1]. Il repart sur le modèle $u_{n+1} = f(n)$ dans la partie C.2, alors que sa partie B était correcte. Un exemple similaire se trouve dans la production de l'élève G1-13 de l'expérimentation III (classe 1) car il revient aussi sur le modèle $u_{n+1} = f(n)$ dans la question C.2 alors que ses tableaux de la partie B étaient corrects.

On peut dire que les élèves de l'expérimentation I travaillant dans le paradigme [A1] (et en particulier l'élève G1-1.14) n'auraient finalement rien pu faire si seule la partie C avaient été proposée d'emblée comme c'est le cas dans les exercices de tâches d'évaluations qui sont proposées à la fin du lycée et au début de l'université (voir chapitre 7). En d'autres termes, on voit qu'une partie des élèves est tout de même capable de produire un travail incomplet (et non pas non correct) si tant est qu'on leur permet de rester dans le paradigme [A1] et qu'ils se le permettent aussi. Mais nous pensons qu'il pourrait y avoir différentes raisons au fait que les élèves continuent leur travail dans le paradigme [A1] dans cette expérimentation I : Est-ce que c'est le travail dans la partie B qui amène aux élèves à continuer dans le paradigme [A1] dans la partie C ? Les élèves sont-ils plus à l'aise en restant dans le paradigme [A1] ? Sont-ils conscients de leurs lacunes dans le paradigme [A2] ? Ont-ils conscience du changement de contrat didactique lié au changement de paradigme ? Dans tous les cas on pourrait conclure que ce changement de contrat est à expliciter et à travailler, au même titre que le changement de paradigmes géométriques (Kuzniak, 2004) qui est clairement identifié et explicitement travaillé entre le primaire et le collège au cycle 4.

Concernant les résultats des paradigmes de la partie C de l'expérimentation III, nous notons que la plupart des élèves reconnaissent que le paradigme à travailler correspond à celui de [A2], néanmoins, certains élèves travaillent dans ce paradigme dès la partie B.3 dans la plupart des productions.

Question C.1

Cette question C.1 avait pour but de prouver que tous les termes de la suite étaient bien définis, et que la suite était soit bornée (expérimentations I et II), soit minorée (expérimentation III).

Dans la tâche avec la première suite récurrente (expérimentations I et II), dans la question C.1, malgré le fait que la moitié des élèves restent dans [A1], 1 seul des

élèves de la classe 1 (expérimentation I) a produit un travail non correct. Ce n'est pas le cas dans la classe 2 (expérimentation II) où tous les élèves sont passés au paradigme [A2] dans la partie C où 2 élèves produisent un travail non correct. On peut à nouveau attribuer le travail massif dans [A2] au sein de la deuxième classe au rôle du professeur qui impose un rythme à la classe, donne des aides individuelles qui peuvent être entendues par tous et signale la fin de la partie B en marquant la différence entre les conjectures (partie B) et ce qui va être fait « maintenant » dans la partie C⁹².

En ce qui concerne l'expérimentation III, mis à part 2 élèves (un de chaque classe) qui produisent un travail entre les paradigmes [A1] et [A2], tout le reste des élèves de la classe 1 et 2 se trouvent dans le paradigme [A2] dans la question C.1. La plupart produisent un travail incomplet et le travail non correct concerne 3 élèves. Concernant cette expérimentation III, on peut observer une avancée dans la reconnaissance du changement de paradigme vers [A2] dans les deux classes : la classe 1 parce qu'ils continuent en autonomie et réussissent mieux à identifier le paradigme de travail et la classe 2, parce que, maintenant, ils n'ont pas les aides de l'enseignant qui les font basculer tous vers [A2]. Toutefois nous restons prudents avec ce type de conclusions parce que la situation dans laquelle les élèves résolvent la tâche ne permet pas d'assurer une autonomie de leur part (on voit d'ailleurs que des copies se ressemblent considérablement entre elles et qu'il y a eu un transfert de réponses entre les élèves).

Dans cette question C.1 et les deux premières expérimentations, le travail mathématique produit et les erreurs observées ne sont pas de même nature entre la classe 1 et la classe 2. Une partie des élèves de la classe 1 en autonomie (expérimentation I) reste dans le paradigme [A1] et fournissent un travail incomplet s'appuyant pour partie sur la partie B (sauf l'exception G1-1.14). Ceux qui passent dans le paradigme [A2] reconnaissent qu'il faut mobiliser un raisonnement par récurrence mais pour ceux qui ne basculent pas, est-ce que c'est à cause de la difficulté de la preuve par récurrence qu'ils restent dans le paradigme [A1] ? Ainsi, cette preuve par récurrence semble être un marqueur fort du passage dans le paradigme [A2] mais les conditions sont différentes dans les deux classes : dans la classe 1 (expérimentation I) ce sont les élèves en autonomie qui reconnaissent spontanément la récurrence ; et dans la classe 2 (expérimentation II), c'est plus un effet du discours du professeur ou plus un effet du contrat didactique (dialectique « conjecture / preuve » des problèmes du lycée) qui impose le paradigme [A2] et donc les raisonnements qui vont avec. En

⁹² Enseignant : « *Maintenant l'objectif c'est de discuter, est-ce que c'est valable tout le temps, pour tous les alphas entre 0 et 1 d'avoir une suite croissante, majorée par 1 et qui converge vers 1 sa limite. Et cela pour l'instant on ne sait pas, c'est juste une conjecture* ».

effet, dans cette expérimentation II, tous les élèves sauf 3 amorcent une récurrence. Les autres semblent être confinés dans [A2] et 1 élève est bloqué et ne produit rien (par ailleurs cela arrive aussi dans l'expérimentation III à l'élève G3-6, Figure 141). Peut-être qu'à l'instar des élèves de la classe 1, ce dernier élève aurait pu continuer à produire du travail si on lui avait laissé l'opportunité de continuer à travailler dans le paradigme [A1]. Les 2 autres produisent un travail non correct tout en étant dans [A2].

Dans le cas de l'expérimentation III, les difficultés trouvées dans le paradigme [A2] sont principalement la non reconnaissance de la preuve par récurrence qui implique une non mise en fonctionnement de la sous-activité de traitement et l'activation du plan [Sem-Dis] des ETM personnels. En effet, seulement 7/35 élèves reconnaissent ce type de preuve (alors que dans l'expérimentation 2, 21/24 élèves reconnaissent la récurrence grâce à l'aide de l'enseignant).

Le travail non correct est lié à des traitements qui restent dans le paradigme [A2] (des problèmes sémiotiques entre x et u_n dans un travail algébrique avec des inégalités comme l'exemple de l'élève G2-10 de l'expérimentation II, Figure 101) sans qu'on ne repère de contrôle d'aucun type avec ce qui a été produit dans la partie B ou des difficultés liés à transférer automatiquement les propriétés de la fonction à la suite (typiquement les élèves comme G2-8 dans l'expérimentation III, Figure 135). Les élèves semblent comme prisonniers du travail dans le paradigme [A2] et la différence de paradigme entre la partie B et la partie C n'aide finalement pas à faire des contrôles qui ne sont pas habituels dans les pratiques classiques des élèves dans les classes du lycée.

Question C.2

La question C.2 avait pour objectif de prouver la variation de la suite. Dans les deux premières expérimentations on retrouve l'idée développée dans les résultats de la question C.1. Le travail dans le paradigme [A1], qui est largement plus présent pour les élèves de la classe 1 (expérimentation I) jusqu'à la question C.1, favorise l'engagement jusqu'à la question C.2. Plusieurs élèves arrivent encore à produire des argumentations incomplètes dans le paradigme [A1] (ou un travail intermédiaire entre [A1] et [A2]) basé sur les tableaux de valeurs ou le graphique donné par la calculatrice (contrôle sémiotique et instrumental) ; néanmoins on peut dire que, proportionnellement, on a une tendance à plus de travail incomplet dans la classe 2 (expérimentation II) qui est majoritairement dans le paradigme [A2] (5/10 dans la classe 1 contre 11/18 dans la classe 2). Cependant, les changements de paradigmes ne sont pas du même type dans les deux classes des expérimentations I et II, car à nouveau

un effet du professeur ou du contrat didactique dans la classe 2 impose le paradigme [A2]. Dans la classe 1 (expérimentation I), on a plusieurs mouvements de [A1] vers [A2] et de [A2] vers [A1]. Revenir dans [A2] peut correspondre à reconnaître une méthode de ce paradigme pour répondre à la question (typiquement calculer $u_{n+1} - u_n$) mais cela se fait sans contrôle et mène à du travail non correct. Revenir dans [A1] semble permettre, au contraire, de continuer à développer un travail incomplet basé sur la partie B (« la suite semble croissante car $u_0 < u_1 < u_2 \dots u_{n+1}$ »). Dans la classe 2 (expérimentation II), on a seulement 3 élèves qui changent de paradigme de [A2] vers [A1], dont deux qui peuvent développer un travail incomplet par ce biais (en se référant à la calculatrice notamment). Ce n'est pas le même cas dans l'expérimentation III où les élèves continuent dans le paradigme [A2] (sauf un avec 2 travaux intermédiaires entre [A1] et [A2], un dans chaque classe). Dans cette expérimentation III, des élèves dans [A2] (avec la méthode $u_{n+1} - u_n$) ne concluent pas correctement leurs preuves (sans contrôle discursif) mais ils contrôlent tout de même leur travail avec la partie B car ils savent qu'il faut conclure que la suite est décroissante. C'est notamment l'exemple de l'élève G1-2.2 de la Figure 150.

Les méthodes utilisées varient aussi entre les classes des expérimentations I et II, puisque dans la classe 1 la méthode de la différence $u_{n+1} - u_n$ est surtout utilisée et dans la classe 2 c'est massivement la récurrence qui est utilisée. Dans le paradigme [A2] on voit peu de contrôles de l'activité en appui sur les autres dimensions et par des références au travail de la partie B (les tableaux de valeurs, les conjectures). On a des utilisations du théorème en acte « f croissante donc (u_n) croissante », surtout dans la classe 1 mais ce théorème recouvre de multiples interprétations qui dépendent du contexte et il apparaît d'ailleurs aussi bien dans [A1] que dans [A2]. On n'a pas de travail correct sauf 1 élève dans la classe 1 (expérimentation I). La plupart du travail non correct est dans le paradigme [A2] sans contrôle discursif avec un travail essentiellement sémiotique ou instrumental où on dérive la suite $(u_n)'$: ce type de travail correspond à l'utilisation d'un artefact symbolique (la dérivée) sans contrôle discursif car dans ce contexte cela n'a pas du sens. Les objets suites et fonctions entrent en confusion et les élèves représentent la suite comme f dans un tableau de variation (G1-2.6). Concernant l'expérimentation III, les méthodes plus utilisées dans les deux classes est celui de différence $u_{n+1} - u_n$, produisant surtout un travail incomplet, et le travail non correct relève de l'utilisation du théorème en acte qui relie la variation de la fonction à la variation de la suite (notamment le théorème a été utilisé par 4 élèves de la classe 2 et aucun élève de la classe 1, contrairement à l'expérimentation I et II où il était utilisé par 3 élèves de la classe 1 et 5 élèves de la classe 2).

Question C.3

Le but de la question C.3 était de prouver la convergence de la suite. Dans les expérimentations I et II les parcours sont très différents entre la classe 1 en autonomie (expérimentation I) et la classe 2 guidée par le professeur avec le bilan entre les parties B et C (expérimentation II). Les élèves de la classe 1 font des allers retours entre les deux paradigmes, ce qui leur permet d'avancer dans un travail au mieux incomplet (typiquement G1-1.15 qui travaille uniquement dans le paradigme A1). Dans cette même classe 1, un seul des élèves reconnaît le théorème à mobiliser dans la question C.3, et c'est celui qui fournit un travail final correct. Comme nous l'avons signalé précédemment, on peut penser que cet élève (G1-1.8) développe une sous-activité de contrôle dans son travail en lien avec la partie B car il explicite à la fin du travail que « la suite converge vers 1 et non pas 0,9 », ce qu'il avait conjecturé en partie B. Les autres élèves dans le paradigme [A2] produisent des raisonnements non corrects et, vice versa, les raisonnements non corrects sont surtout dans le paradigme [A2]. Les élèves de la classe 1 font des discours sans contrôle avec la partie B (« suite croissante et minorée, converge », « suite converge vers 0 » ...) ; cela montre que pour ces élèves la partie B et la partie C semblent déconnectées et, par conséquent, les paradigmes [A1] et [A2] sont des paradigmes déconnectés aussi (nous y reviendrons dans les conclusions finales). Concernant les élèves de la classe 2 (expérimentation II), ils restent massivement dans [A2] et peuvent changer vers le paradigme [A1] temporairement (3 élèves), mais reconnaissent majoritairement le théorème approprié (21 élèves parmi les 26 au total qui ont répondu à cette question). Ils produisent massivement un travail correct même pour un élève qui n'avait pas travaillé dans C.1 et C.2 (G.20) ou un élève qui n'avait pas des tableaux de valeurs corrects et n'avait fait aucune conjecture dans la partie B (G3.16). Il y a donc toujours un effet du bilan intermédiaire entre les parties B et C qui permet que les élèves continuent leur travail mais aussi, du coup, une certaine illusion du travail correct dans le paradigme [A2]. Là encore, on a des discours ancrés dans le paradigme [A2] (ou un travail intermédiaire) mais sans contrôle d'aucun type avec les représentations fournies par la partie B ou par la calculatrice (par exemple G2-4 ou G2-10 qui transfère la limite de f pour donner celle attendue pour la suite). Il semble donc que les élèves dans [A2] cherchent à répondre à ce qui est attendu dans ce paradigme coûte que coûte.

Dans le cas de l'expérimentation III, les élèves continuent tous à travailler dans le paradigme [A2] (sauf un élève qui travaille en [A1]) et la plupart développent un travail mathématique correct. 1 élève produit un travail incomplet (G3-14 qui produit qui avait C.1 incomplet aussi et C.2 non correct) et 3 non corrects. L'élève qui travaille

en [A1] (G3-16) produit un travail non correct (il produisait un travail intermédiaire entre [A1] et [A2] à la question C.1 et dans [A2] à la question C.2). L'élève G1-7 produit un travail non correct aussi (il s'agit de l'élève qui n'avait pas répondu à C.1 et qui travaillait en [A2] pour C.2 avec un travail non correct). Le troisième élève avec un travail non correct est G3-27 qui avait produit un travail incomplet pour C.1 et non correct pour C.2, tous les deux en [A2]. À nouveau, dans cette dernière expérimentation nous observons que les élèves reconnaissent mieux le théorème de la limite monotone que dans la première expérimentation en autonomie des élèves.

Conclusions finales

Nous présentons tout d'abord dans la section 1, un panorama des résultats de ce travail de thèse à partir de nos questions de recherche relatives à l'étude de suites récurrentes à la transition L-U. Ensuite, dans la section 2, nous présentons les contributions de cette recherche concernant l'étude de la dialectique entre le paradigme [A1] et [A2], le *networking* de théories entre la TADM et la théorie des ETM qui permettent une définition de la notion de contrôle de l'objet mathématique étudié. Enfin, dans la section 3, nous présentons les perspectives et les limites du travail mené.

1 Panorama des résultats

1.1 Continuités et ruptures de la transition L-U dans l'étude de suites récurrentes

Notre première question de recherche portait sur les continuités et les ruptures de la transition L-U quant aux sous-activités mathématiques de contrôle et la dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] dans l'étude de suites récurrentes. Trois niveaux d'analyse ont été menés pour caractériser ces ruptures et ces continuités propres de la transition L-U à partir de l'étude de la classe de TS au lycée et de L1 à l'université : une étude de programmes d'enseignements (1), une étude de tâches proposées dans les manuels de la classe de Terminale Scientifique et dans des feuilles TD de la première classe de l'Université (2) et une étude de tâches d'évaluation à la fin de Lycée et au début de l'université.

Parmi les continuités de cette transition concernant l'étude de suites récurrentes, nous relevons : des contenus qui sont travaillés dans les deux classes présentes dans les programmes d'étude (définition de limite à l'infini dans \mathbb{R} , unicité de la limite, opération sur les limites, des inégalités, théorème des gendarmes, définition des suites bornées, suites monotones, théorème de la limite monotone) ; en ce qui concerne les

tâches des manuels et des feuilles de TD, l'utilisation du paradigme [A2] est le plus utilisé dans les deux classes étudiées et, même si le paradigme [A1] est présent dans la classe de lycée, une dialectique entre paradigme [A1] et [A2] n'est pas prédominante. En outre, les contrôles non mathématiques sont présents dans tous les exercices de L1 et de TS. Enfin, dans les tâches d'évaluation nous avons constaté que les successions des sous-activités et du travail mathématique à développer sont les mêmes pour deux types de questions (étude des variations de la suite et l'étude de la convergence de la suite – application du théorème de la limite monotone). Dans ces mêmes tâches, nous n'observons pas de questions proposées dans le paradigme [A1] et, celles qui sont proposées, sont à résoudre entièrement dans le paradigme [A2]. Les signes et les registres de représentations sémiotique à utiliser sont pratiquement les mêmes dans les deux classes (registre algébrique et ensembliste). Finalement les deux tâches d'évaluation présentent des contrôles non mathématiques.

En ce qui concerne les ruptures entre les deux classes, nous constatons tout d'abord celles des programmes. En L1, par exemple, la notion de suite est travaillée sur l'ensemble \mathbb{C} , et pas seulement sur \mathbb{R} comme c'est le cas en TS. Par ailleurs, il est attendu que la sous-activité de contrôle instrumental soit développée de la part les élèves de TS, ce qui n'est pas le cas dans la classe de L1. Concernant les tâches des manuels et des feuilles de TD, il n'y a guère de paradigme [A1] dans ces dernières, contrairement aux tâches de TS où les paradigmes [A1] et [A2] sont présents. En outre, nous pouvons dire que la reconnaissance d'une preuve par récurrence, pour démontrer que la suite est bornée (ou minorée ou majorée) et implicitement bien définie, est présente dans la plupart des énoncés des manuels de TS alors que ce n'est pas le cas en L1 (sous-activité de reconnaissance à la charge des étudiants). Concernant la sous-activité de contrôle mathématique, nous avons observé que des occasions de contrôle sémiotique et instrumental sont présentes dans les tâches des manuels de la TS, notamment grâce au travail proposé dans le paradigme [A1] et l'utilisation de la calculatrice. Cependant, ces occasions de contrôle sont totalement abandonnées dans la classe de L1 (contrôle instrumental interdit, car la calculatrice est interdite) et il n'y a pas d'évidence quant à un travail sur les conjectures à ce niveau (alors qu'il fait partie du travail en TS). Concernant les tâches d'évaluation et les successions d'activité et du travail mathématique à développer, les ruptures se centrent sur la façon de concevoir l'énoncé de tâches de l'étude de la suite. Alors que le Baccalauréat vise à faire une étude séparée de la fonction et de la suite récurrente, la tâche de l'examen de L1 étudie simultanément la suite et la fonction dans la première question (*Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$*). Cela est à additionner à la différence du premier terme de la suite : au Baccalauréat (et

aussi dans les tâches du manuel de TS) il s'agit toujours d'une seule valeur alors qu'en L1 c'est un paramètre. Ces deux derniers aspects conduisent à ce que la demande cognitive de la tâche soit plus élevée dans l'évaluation de l'université. Enfin, bien que la tâche du Baccalauréat ne nécessite pas l'utilisation de la calculatrice pour sa résolution, elle est acceptée dans le cas où l'élève voudrait développer une sous-activité de contrôle sémiotique ou instrumental, ce qui est interdit dans l'examen de l'université.

1.2 Difficultés des élèves et des étudiants à la transition L-U dans l'étude de suites récurrentes

Les difficultés que nous trouvons dans les productions analysées des élèves et des étudiants de notre étude sont cohérentes avec ce que mentionne Gueudet (2008). Notamment elle signale que les productions mathématiques des élèves présentent « *un usage incorrect des signes (symboles ou mots), ou une syntaxe incorrecte ; ou une incohérence dans l'articulation globale d'un texte* » [Notre traduction] (Ibid., p. 251). Cela correspond, entre autres, à ce que nous avons déterminé comme un problème de contrôle mathématique.

Dans le cas des suites récurrentes, la difficulté qui revient sans cesse dans les productions des élèves de lycée et des étudiants d'université est leur reconnaissance de la suite récurrente. En effet, plusieurs d'entre eux les traitent comme des suites explicites $u_n = f(n)$. Différentes expressions, dans les productions des élèves et des étudiants, sont présentes et identifiées dans un tiers des réponses : l'erreur d'interprétation « $u_n = f(n) = f(x)$ » ou le problème sémiotique entre « $f(x) = f(u_n)$ », l'utilisation du théorème en acte « si f croissante alors (u_n) est croissante ». On constate encore que pour déterminer la valeur de la limite de la suite ils argumentent que la limite de la suite dépend de la limite de la fonction. Une des conséquences de ce manque de sous-activité de reconnaissance attendue est de créer des difficultés dans le travail mathématique produit par les élèves et les étudiants car, lorsqu'ils ne reconnaissent pas la bonne suite ou qu'ils ont des problèmes sémiotiques, ils n'activent pas les dimensions du travail mathématique qui permettent de produire un travail mathématique correct.

Nous avons constaté que les tâches d'évaluations dans l'enseignement actuel à la transition lycée-université ne favorisent pas les sous-activités de contrôle sémiotique et

instrumental, n'exploitant pas les potentialités d'une étude contrôlée en autonomie des élèves. De plus, le fait que les examens ne prennent pas en charge la problématique liée au contrôle mathématique des élèves ne concourt pas à ce qu'elle soit travaillée dans l'enseignement et dans l'apprentissage actuel. En fait, les examens ont la capacité d'orienter l'enseignement et d'assurer une évaluation des connaissances requises à l'université (Wood, 2001). Comment donc influencer ces tâches d'évaluation de telle sorte qu'elles mettent en avant le contrôle mathématique chez l'élève ?

Par ailleurs, il serait intéressant de faire un travail sur les erreurs des élèves comme le signale (Balacheff, 1982). Selon lui, l'observation de l'activité mathématique de la part de l'élève montre que l'erreur, en plus d'exister, peut être féconde. En effet, « *l'identification de l'erreur, son analyse, la reconnaissance de sa résistance et par là la remise en cause des connaissances qui lui sont associées* » (Ibid., p. 4) peut aider à son dépassement, ce qui rendrait compte d'un apprentissage chez l'élève.

1.3 Activités et travail mathématique des élèves avec des occasions de contrôle sémiotique et instrumental

En faisant l'hypothèse que la reconnaissance de la suite pourrait être encouragée par des occasions de contrôle mathématique, notamment grâce à l'usage de la calculatrice et aux différents registres de représentation que celle-ci offre, nous avons construit des tâches qui pourraient servir de pont entre les deux institutions. Ces tâches avaient pour but de donner des occasions de contrôle sémiotique et instrumental (grâce à la calculatrice) et d'activer la dimension instrumentale dans l'ETM personnel, au-delà de l'utilisation des artefacts symboliques et au sein du paradigme [A1]. Cela afin de soutenir le travail discursif issu du paradigme [A2] et de favoriser la dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] dans l'étude de suites récurrentes.

Ces tâches, nous les avons expérimentées dans trois situations différentes : travail autonome en classe, travail en classe avec un bilan de l'enseignant et travail autonome à la maison.

a) Travail autonome des élèves

En ce qui concerne le travail autonome en classe, presque la moitié des élèves reconnaît la bonne suite au sein du paradigme [A1]. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, nous constatons que le paradigme [A1] n'est pas si maîtrisé par les élèves, ce qui ne les aide pas à reconnaître la bonne suite. Comment imaginer que les élèves qui ne reconnaissent pas correctement la suite récurrente avec le paradigme [A1] (travail incorrect) puissent réaliser un travail correct en [A2] ? Et même si un travail correct en [A2] existait dans leur production, quel serait le niveau de compréhension de leur part sur l'objet mathématique des suites récurrentes ?

Par ailleurs, lorsqu'il s'agissait de changer de paradigme vers [A2], et que ce dernier s'appuyait sur ce qui avait été travaillé dans [A1], certains élèves en autonomie produisaient un travail dans [A1] ou un travail intermédiaire entre les paradigmes [A1] et [A2] avec un travail, au mieux, incomplet. Ce non basculement au paradigme [A2] pourrait répondre à un travail qui promeut un contrôle mathématique issu de la dialectique entre paradigmes [A1] et [A2] qui ne serait pas travaillé dans les classes de façon habituelle.

Pour le cas particulier du travail au sein du paradigme [A2], nous observons que la preuve par récurrence n'est pas mobilisée de façon spontanée chez les élèves en autonomie (ils ne développent pas la sous-activité de reconnaissance) quand cette reconnaissance n'est pas apportée dans l'énoncé. La non mise en fonctionnement de cette reconnaissance pourrait constituer « un effet » des énoncés travaillés à la fin du secondaire (car cette reconnaissance n'est pas à la charge des élèves dans les exercices - voir chapitre 6).

Enfin, peut-être que le travail mathématique à produire dans le paradigme [A1] avec l'utilisation de la calculatrice a besoin d'autres reconnaissances, ce qui s'exprime aussi par la nécessité d'un travail mathématique plus performant dans les trois dimensions : l'élève a besoin de développer des sous-activités de reconnaissance sémiotiques, instrumentales et discursives avec des sous-activités de contrôle mathématique (nous y reviendrons).

b) Influence de l'enseignant dans le travail des élèves

Nous avons constaté à différents moments que l'enseignant prive les élèves de développer une sous-activité de reconnaissance par eux-mêmes. En effet, pour guider les élèves vers la production d'un travail mathématique correct, il donne des aides qui leur permettent de travailler avec la bonne suite récurrente, d'une part, et de contrôler

leurs résultats mathématiques d'autre part. D'ailleurs nous avons vu que pour des élèves utilisant des représentations fractionnaires (avec lesquelles la croissance est plus difficile à visualiser), l'intervention de l'enseignant a eu une influence sur le contrôle instrumental et sémiotique que les élèves cherchaient à exercer. Cette aide a provoqué la production d'un travail mathématique correct de la part des élèves avec les bonnes reconnaissances et interprétations dans le paradigme [A1].

Par ailleurs, l'enseignant incite les élèves à produire un travail dans le paradigme souhaité à chaque partie de la tâche conçue. Cela se manifeste dès la partie C.1 où il fallait commencer le travail dans le paradigme [A2] (tous les élèves sauf 3 amorcent une récurrence dans cette classe guidée par l'enseignant).

Ainsi, en lien avec les travaux de Bikner-Ahsbahr et al. (2014) et de Saboya & Rhéaume (2015) concernant le développement de la sous-activité de contrôle et le rôle de l'enseignant, nous pouvons affirmer que, dans la classe étudiée, les aides de l'enseignant ont eu une influence sur les sous-activités de contrôle instrumental et sémiotique. Le rôle que joue ses aides et son bilan se traduit par un éclaircissement et une explicitation du travail attendu, travail qui aurait pu rester implicite (comme c'est le cas des élèves en autonomie), notamment en ce qui concerne la dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2].

2 Contribution de ce travail dans l'étude de la transition lycée-université

2.1 *Networking* de théories et notion de contrôle

Ce travail de thèse est motivé par la prise en compte du manque de contrôle mathématique au moment de l'étude des suites récurrentes chez les étudiants. Le constat de ce manque chez les étudiants de première année de l'université n'est pas récent (évoqué dans les thèses de Bloch (2000) et de Praslon (2000) par exemple). Cependant, le contrôle mathématique n'est pas une notion simple à étudier.

Nous avons fait l'hypothèse qu'un *networking* entre la TADM et les ETM pourrait, d'une part, nous aider à mieux comprendre le phénomène de la transition lycée-université dont le manque de contrôle chez les étudiants et, d'autre part, nous permettre de définir avec plus de détail la notion de contrôle. Cela nous a servi, non seulement, pour interpréter plus finement les productions des étudiants et des élèves (chapitre 7) mais, aussi, pour pouvoir construire des séquences d'enseignement afin de favoriser les trois types de sous-activités de contrôle sémiotique, instrumental et discursif en lien avec la dialectique des paradigmes [A1] et [A2] (chapitre 8).

Par ailleurs, le fait d'avoir travaillé avec la notion de contrôle en tant que sous-activité, nous a permis de constater une différence entre la sous activité de contrôle mathématique, qui est en lien avec les trois dimensions du travail mathématique, et la sous-activité de contrôle non mathématique qui est, quant à elle, en lien avec le but à atteindre par l'élève dans l'activité qu'il développe. Nous avons vu que les contrôles mathématiques, notamment sémiotiques et instrumentaux, doivent être plus explicites pour les élèves. De la même manière, nous avons observé que les contrôles non mathématiques, dans une certaine mesure, font partie du contrat didactique des deux institutions (voir chapitre 6). En effet, nous avons constaté que le contrôle non mathématique est utilisé par les concepteurs d'exercices de la fin de lycée et du début de l'université, ce qui provoque des effets dans les réponses des élèves : à certains moments, ils produisent des réponses sans aucun contrôle mathématique mais ils arrivent tout de même à la conclusion de la résolution de la tâche car elle a été exposée dans l'énoncé.

Nous faisons l'hypothèse que la sous-activité de contrôle agit comme un régulateur de l'activité mathématique pouvant aussi être un autorégulateur de cette activité. Il serait intéressant que l'enseignement actuel puisse considérer concrètement une préparation à cette autorégulation de l'activité mathématique d'autant plus qu'elle joue un rôle dans la réussite des étudiants à l'entrée de l'université (Johns, 2020). A cet égard, nous soutenons que le contrôle est un des problèmes majeurs de la transition lycée-université : au lycée, lorsque la nécessité de contrôler mathématiquement se présente, c'est l'enseignant qui donne des aides aux élèves pour contrôler leur activité et leur travail mathématique (aide sur la manipulation de l'instrument et sur les bonnes reconnaissances dans notre étude par exemple); tandis qu'à l'université, dès la première année, on veut que les étudiants puissent autoréguler leur activité mathématique c'est-à-dire qu'ils développent en autonomie des sous-activités de contrôle. Comment aider les élèves à développer un travail mathématique qui mette en fonctionnement des sous-activités de contrôle adéquates à la transition lycée-université ?

Grâce au Networking développé entre ETM et TADM nous avons pu détailler les trois sous-activités de contrôle mathématique : sémiotique, instrumental et discursif. Nous nous sommes surtout concentrés sur les contrôles sémiotiques et instrumentaux à l'aide de la dialectique des paradigmes [A1] et [A2] (car elle est cruciale à la transition L-U). Ici, on peut faire l'hypothèse qu'un élève mettant en fonctionnement des sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental aura plus de facilité à mettre en fonctionnement une sous-activité de contrôle discursif. La mise en avant des contrôles discursifs n'était pas un objectif de cette thèse, mais sa définition nous a tout de même permis d'observer des carences de ce contrôle dans la production des élèves. Nous pensons que ce même type de caractérisation avec les trois dimensions des ETM pourrait se faire sur les sous-activités de reconnaissances. Cela pourrait notamment permettre de rendre compte des différentes sous-activités à mettre en fonctionnement lors de l'activation d'une certaine dimension dans le travail mathématique que produit un sujet.

Enfin, le *networking* entre ces deux théories mérite d'être encore développé car des mises en réseaux restent à faire. En effet, concernant les degrés du *networking* (voir chapitre 4), leurs comparaisons et contrastes nous montrent des liens et des différences plus claires par rapport à la notion d'activité et du travail mathématique. Cela nous permet la formulation de questions relatives à l'articulation des deux théories qui auraient le potentiel de faire avancer ces réseaux. Nous posons de façon synthétique quelques questions (voir Vandebrouck (2020) et Vivier (2020)) :

- Concernant la structuration des analyses en TADM à partir des ETM : Comment considérer la notion de relief de la TADM en lien avec les ETM ? Pourrait-on

faire l'étude du relief à partir des dimensions sémiotique, instrumentale et discursive de l'ETM ? La notion d'ETM idoine pourrait-elle servir à étudier les itinéraires cognitifs des scénarios d'enseignement ? La notion d'ETM de référence peut-elle être mise en lien avec la notion de niveau de conceptualisation ?

- Concernant l'étude des dimensions et des plans verticaux de l'ETM en lien avec les activités mathématiques : Une description des dimensions en termes d'activités mathématiques aiderait-elle à une meilleure compréhension de ce qu'est une dimension (ou genèse) ? Une identification des activités mathématiques a minima et/ou a maxima chez des élèves pourrait-elle enrichir les notions de travail complet (dans le cas où c'est l'enseignant qui déclenche les circulations) et de travail confiné (dans le cas où plusieurs sous-activités mathématiques sont à la charge de l'élève) ?

Dialectique entre paradigmes [A1] et [A2] et usage de la calculatrice

Comme nous l'avons constaté, bien que le travail mathématique dans le paradigme [A1] ne soit pas le plus favorisé au lycée, les élèves travaillent avec des représentations graphiques ou numériques au sein du paradigme [A1] pour l'étude de suites récurrentes. Cependant, le travail dans ce paradigme semble être absent à l'université. Quelle est la raison de cette rupture à la transition L-U ? On pourrait penser qu'à l'université les élèves ont déjà acquis le travail de la dialectique entre [A1] et [A2] et n'ont plus besoin de cet appui pour contrôler leur travail. Pourtant, les résultats de notre recherche nous permettent d'affirmer que cela n'est pas le cas car ces paradigmes semblent être totalement déconnectés pour certains élèves (surtout lorsqu'ils travaillent en autonomie). D'ailleurs l'institution universitaire limite drastiquement cette dialectique en abandonnant la calculatrice.

Les paradigmes de l'analyse sont un outil théorique sensible au travail mathématique à la transition lycée-université. Ces paradigmes permettent de comprendre le travail que peuvent développer les élèves à chaque niveau d'enseignement et d'identifier, en l'occurrence, le type de travail entre paradigmes qui nécessite un renforcement de la part de l'enseignement actuel. Cela, non seulement, pour que l'élève soit capable de développer différents types de travail dans le domaine de l'analyse mais, aussi, pour soutenir la sous-activité de contrôle et donc cette autorégulation de l'activité mathématique. En effet, la notion de paradigmes et la dialectique entre [A1] et [A2] a été fondamentale pour favoriser les sous-activités de contrôle. Comme le signalent Montoya Delgadillo et Vivier (2016), le fait de travailler dans plus d'un seul paradigme permet de contrôler le travail mathématique produit.

Notamment, travailler dans le paradigme [A1] permet un travail d'exploration des objets mathématiques (conjectures, visualisation) préalable à un travail dans le paradigme [A2] (ou [A3] peu étudié dans cette thèse). Néanmoins, une dialectique entre paradigmes est nécessaire. Sachant que le paradigme privilégié au lycée et à l'université est le paradigme [A2], nous avons soutenu la dialectique entre [A1] et [A2] dans ce travail de thèse.

Dans notre cas, c'est l'utilisation de la calculatrice qui a permis une telle exploration de l'objet mathématique dans le paradigme [A1]. Mais, comme le signalent Winsløw & Grønbaek (2014) l'utilisation de celle-ci devrait se faire d'une façon réfléchie, et avec attention, car si elle peut amener à ne pas avoir un contrôle sur les étapes d'une résolution d'équation par exemple, elle doit permettre, dans le même temps, de faire des contrôles sur le travail mathématique qu'un élève entreprend. Autrement dit, les étudiants doivent apprendre à avoir le bon équilibre entre les techniques instrumentées et les non instrumentées. Dans notre cas, cela implique aussi une cohérence entre les paradigmes [A1] et [A2], et une reconnaissance du paradigme à utiliser selon la tâche donnée. En effet, cette dialectique entre paradigmes devrait être travaillée et explicitée à l'instar du changement de paradigmes géométriques (Kuzniak, 2004).

Les résultats que nous avons exposés concernant les paradigmes de l'analyse et l'usage qu'en font les élèves ne sont pas du même ordre que ceux trouvés précédemment dans l'étude de la transition lycée-université : ils sont complémentaires. Bosch et al. (2004), qui analysent des productions des élèves avec la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), argumentent que les étudiants ne sont pas en mesure d'interpréter le résultat mathématique obtenu après avoir appliqué une technique précise. Cette non interprétation peut être à l'origine d'une articulation entre paradigmes qui n'a pas été suffisamment travaillée au sein des institutions.

2.2 Les suites récurrentes, un objet mathématique peu étudié

Comme nous l'avons signalé dans le chapitre 2, malgré l'importance des suites pour l'apprentissage de l'Analyse, cet objet n'est pas toujours considéré comme essentiel dans les programmes d'enseignement au niveau international Weigand (2004). Encore moindre est l'importance qui peut être accordée à l'étude des suites récurrentes dans l'enseignement actuel. Cependant les suites récurrentes sont un objet particulièrement présent à la transition lycée-université en France. Nous rejoignons les arguments de Weigand (2014) et soutenons que l'objet suite récurrente doit être revalorisé dans les mathématiques scolaires au niveau international d'autant plus qu'avec l'étude menée nous avons constaté que les élèves présentent des difficultés résistantes dans leurs études.

Cet objet mathématique est particulièrement intéressant à étudier à la transition lycée-université, non seulement parce qu'il est étudié en fin de lycée et au début de l'université en France mais, aussi, parce qu'il permet de travailler avec des notions mathématiques qui sont encore en construction chez le jeune étudiant comme celle de suite, de fonction, de nombres réels, de limite (Artigue, 2003). En effet, ces suites peuvent être définies par des fonctions dont l'étude n'est pas immédiate et dont la suite récurrente peut être mal définie. Cette question ne semble pas être suffisamment prise en compte dans l'enseignement actuel, au même titre que les questions sur l'étude de l'intervalle stable qui permet d'assurer l'existence de la suite et sa bonne définition. Le théorème du point fixe, pourtant essentiel en analyse, n'intervient que de façon implicite dans l'étude de ces suites et n'est pas mentionné. Peut-être qu'une étude cherchant à identifier une transposition didactique adéquate à la transition lycée-université donnerait du sens à l'usage que l'on fait de ce théorème dans l'étude des suites récurrentes dans l'enseignement actuel.

Dans ce travail de thèse, nous avons abordé principalement la question du contrôle mathématique dans l'étude des suites récurrentes et nous avons analysé des productions d'élèves et d'étudiants pour chercher à comprendre l'origine de ce manque de contrôle à la transition lycée-université. Cependant, nous n'avons pas exploité toute la richesse de cet objet mathématique. Ainsi, toute une gamme de problèmes de modélisation peut être représentée au moyen de suites récurrentes donnant comme résultat l'étude de problèmes mathématiques (comme la résolution de systèmes dynamiques) ou la résolution des algorithmes d'approximation. Une telle démarche pourrait permettre la création de tâches non traditionnelles et non artificielles pour

répondre à un des besoins dans les cours de transition au début de l'université (Gunter, 2019), notamment parce que ces tâches pourraient favoriser la transition d'un apprentissage superficiel vers un apprentissage conceptuel plus profond.

3 Limites et perspectives

Dans cette dernière section, nous exposons les limites du travail mené pour ensuite présenter des perspectives de recherches à ces limites et à l'étude de la transition lycée-université.

La première limite concerne le seul travail dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] et non celui de [A3]. En effet, bien que le paradigme [A3] ne puisse pas être totalement absent dès la dernière classe scientifique du lycée, son étude mérite une attention particulière. Nous n'avons pas cherché à le mettre en avant dans nos expérimentations, principalement parce que les tâches d'évaluation proposées à la transition lycée-université (travail mathématique attendu) ne l'exploitent pas. Mais cette limite ouvre la possibilité à des nouvelles recherches avec la prise en compte d'une dialectique entre les trois paradigmes de l'analyse, ce que pourrait considérer une étude sur la vitesse de convergence de suites récurrentes vers l'objet limite ou la modélisation de systèmes dynamiques au moyen de l'étude de suites récurrentes (études de comportement de populations). La considération d'une dialectique entre les paradigmes de l'analyse [A1], [A2] et [A3] mérite d'être approfondie, d'autant plus qu'elle pourrait permettre davantage le développement de sous-activités de contrôle dans l'étude de suites récurrentes. À cela, s'ajoute la nécessité d'une étude plus spécifique pour approfondir l'analyse de la sous-activité de contrôle discursif. Cette étude permettrait de savoir dans quelle mesure l'enseignement actuel pourrait aider, voire encourager, ce contrôle discursif au-delà de la complémentarité entre les trois sous-activités de contrôle définies.

Une deuxième limite concerne les tâches que nous avons prises en compte pour construire notre modèle : le Baccalauréat de 2016 et un examen de L1 de 2018. En effet, bien qu'elles se trouvent dans la réalité de l'enseignement actuel à la transition L-U en France et qu'elles soient cohérentes à la plupart des tâches de la fin de TS (tâches des manuels) et du début de l'université (tâches des feuilles de TD), une étude à plus grande échelle est nécessaire pour affirmer qu'elles sont représentatives d'autres sujets de Baccalauréat et d'autres examens de L1 dans d'autres universités.

Une autre limite concerne les expérimentations en présentiel pendant la crise sanitaire. En effet la troisième expérimentation de la tâche conçue avec la calculatrice n'a pas pu prendre en compte une analyse détaillée de l'influence du travail mathématique de l'enseignant sur le développement de la sous-activités de contrôle et reconnaissance dans l'étude de suites récurrentes. La crise sanitaire a rendu

inexploitable une expérimentation en distanciel de première année de l'université (nous n'avons pas pu avoir accès à l'interaction des étudiants avec l'enseignant et les élèves n'ont pas donné de réponses exploitables pour l'analyse). Cette limite pose néanmoins de nouvelles questions relatives aux limites et potentialités des enseignements à distance. Des nouvelles méthodes pour étudier le travail et l'activité mathématique, des enseignants et des élèves devraient être envisagées pour pouvoir faire face aux nouvelles problématiques issues de contextes dans lesquels l'utilisation des outils numériques deviennent incontournables. Ici, si l'on veut continuer à étudier le contrôle mathématique chez l'élève, des entretiens individuels semblent être essentiels pour analyser le travail mathématique produit et l'activité développée, en particulier parce que le contrôle s'effectue principalement en pensée (Saboya & Rhéaume, 2015, p. 25).

De même, nous avons constaté qu'un manque de communication entre le lycée et l'université est présent, notamment en ce qui concerne l'usage de la calculatrice et ses potentialités pour contrôler l'activité et le travail mathématique des élèves et des étudiants. Comme le signale (Gunter, 2019), il faudrait mettre en place un lieu pour que des discussions entre enseignants de lycée et enseignants de l'université puissent s'organiser. Ces espaces d'échange pourraient permettre d'utiliser à l'université les connaissances que les élèves ont exploitées au lycée ainsi que d'introduire de nouvelles connaissances tout en prenant en compte les connaissances anciennes des élèves. Par ailleurs, lors de ces mêmes moments, on devrait pouvoir être en mesure d'aborder le sujet du rôle de l'enseignant : ses interventions nous semblent essentielles vu le constat réalisé dans notre expérimentation concernant l'effet que cela pouvait produire dans le travail et les activités que les élèves développaient. La question sur le rôle que devrait jouer l'enseignant de lycée et celui de la première année de l'université pour favoriser cette transition avec le développement des sous-activités de contrôle reste encore ouverte.

La littérature sur la transition lycée-université témoigne des efforts qui ont été faits pour comprendre la complexité du phénomène de cette transition et pour améliorer la compréhension des élèves. Cependant, le taux d'abandon des études des élèves en première année de l'université (Rach & Heinze, 2017) nous montre qu'il faut aller encore plus loin et que le problème de la transition n'est pas encore maîtrisé.

Bibliographie

- Abboud, M., Aline, R., Rogalski, J., & Vandebrouck, F. (2017). Pour une théorie de l'activité en didactique des mathématiques. Un résumé des fondements partagés des développements récents et des perspectives. *Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz*, 18. IREM de Paris, Université Paris Diderot.
- Alcock, L., & Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, 57(1), 132.
- Alcock, L., & Simpson, A. (2005). Convergence of Sequences and Series 2: Interactions Between Nonvisual Reasoning and the Learner's Beliefs about their own Role. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 77–100.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In P. Gómez (Éd.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
- Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 40–55.
- Artigue, M. (2003). Evolutions et perspectives de l'enseignement de l'analyse au lycée. *L'Ouvert*, 107, 1–18.
- Artigue, M. (2008). L'enseignement des fonctions à la transition Lycée – Université. In B. Grugeon-Allys (Ed.), *Actes du 15ème colloque de la CORFEM* (p. 22–40).
- Arzarello, F., & Sabena, C. (2011). Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2), 189–206.
- Bacaër, N. (2009). Dynamique des populations: Histoire de R_0 , de Fibonacci à la grippe H1N1. *Images des Mathématiques*.
- Balacheff, N. (2017). Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. In J. Pilet & C. Vendeira (Éds.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018* (p. 423–456). IREM de Paris – Université Paris Diderot.
- Balacheff, N. (1982). Construction des connaissances mathématiques, l'approche de Imre Lakatos. *Séminaire d'histoire et didactique des mathématiques*, 2, 1–12.
- Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). CKc Modèle de connaissances pour le calcul

- de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Éds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 1–32). La Pensée Sauvage éditions.
- Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2010). Génesis y desarrollo de un problema didáctico: El papel de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las CCEE. In M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carillo, & T. A. Sierra (Éds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (p. 235–244).
- Barquero i Farràs, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* [Ph.D. Thesis, Universitat Autònoma de Barcelona]. In *TDX (Tesis Doctorals en Xarxa)*.
- Barros, J.-M., Bénizeau, P., Morin, J., Aimani, S., Bonneval, L.-M., & Devynck, P. (2012). *Transmath Term S. Enseignement Spécifique*. Nathan.
- Bergé, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 217–235.
- Bikner-Ahsbahr, A., & Prediger, S. (Éds.). (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. Springer International Publishing.
- Bikner-Ahsbahr, A., Sabena, C., Arzarello, F., & Krause, C. (2014). Semiotic and theoretic control within and across conceptual frames. *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, 2, 153–160.
- Bloch, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université : Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux.
- Bloch, I., Bridoux, S., Durand-Guerrier, V., Grenier, D., Frétigné, P., Mac Aleese, J., Madec, G., Menini, C., Rogalski, M., Sénéchaud, P., & Vandebrouck, F. (2017). *Limites de suites réelles et de fonctions numériques d'une variable réelle : Constats, pistes pour les enseigner* (Commission inter-IREM Université, Université Paris-Diderot.). IREM de Paris.
- Boero, P. (2017). Cognitive unity of theorems, theories and related rationalities. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 99–106). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.
- Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., & Mariotti, M. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 113–120.
- Bosch, M., Barquero, B., & Gascón, J. (2007). La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de

- Ciencias. Estudio de la dinámica de poblaciones. In L. Ruiz Higuera, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (p. 531-544). Publicaciones de la Diputación de Jaén.
- Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques*, 24(2-3), 205–250.
- Boschet, F. (1982). *Cours sur les suites numériques dans le premier cycle de l'enseignement supérieur* [Thèse de 3e cycle]. Université de Paris VII.
- Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). *Teaching and Learning of Calculus*. Springer International Publishing.
- Bridoux, S. (2016). Introduire la notion de convergence avec une ingénierie des années 1980 : Rêve ou réalité didactique pour l'enseignant? In. E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings on the First conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*, (INDRUM 2016) (pp. 53–62). Montpellier, France: University of Montpellier and INDRUM.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques—Revue RDM. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33–115.
- Brousseau, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998)*. http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf
- Chorlay, R. (2019). A Pathway to a Student-Worded Definition of Limits at the Secondary-Tertiary Transition. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 5(3), 267-314.
- Cipra, B. (1985). *Erreurs... Et comment les trouver avant le prof...* InterEditions.
- Clark, M., & Lovric, M. (2008). Suggestion for a Theoretical Model for Secondary-Tertiary Transition in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 25–37.
- Clark, M., & Lovric, M. (2009). Understanding secondary–tertiary transition in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(6), 755–776.
- Corriveau, C., & Bednarz, N. (2016). La transition secondaire postsecondaire abordée sous l'angle de l'harmonisation des manières d'utiliser le symbolisme chez les enseignants. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 16(3), 213–236.

- Derouet, C. (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S. Étude de la conception et de la mise en œuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral* [Thèse de Doctorat]. Université Paris 7 - Denis Diderot.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5–31.
- Dreyfus, T. (1999). Why Johnny Can't Prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1), 85-109.
- Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(3), 295-342.
- Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2005). An Epistemological and Didactic Study of a Specific Calculus Reasoning Rule. *Educational Studies in Mathematics*, 60(2), 149–172.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. (Peter Lang). Berne.
- Duval, R. (2010). Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, 6(1), 126–143.
- Eisenhart, M. (1991). Conceptual frameworks for research. Ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education researchers. *Proceedings of the thirteenth annual meeting of psychology of mathematics education – North America*, 202–219.
- Engelbrecht, J. (2010). Adding structure to the transition process to advanced mathematical activity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 143–154.
- Ferrari, P. L. (2002). Understanding elementary number theory at the undergraduate level: A semiotic approach. In *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (S.R. Campbell and R. Zazkis, p. 97–115). Ablex Publishing.
- Ferrera, F., Pratt, D., & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. In Gutiérrez A, Boero P. (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (p. 237–273).
- Flores González, M. (2018). L'activité et le travail mathématique dans une tâche géométrique. *Actes du Sixième Symposium sur le Travail Mathématique ETM6*, 533–543.

- Flores González, M., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (2020a). L'apprentissage du calculus dans une tâche classique de la transition lycée-université. *Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz*, 23. IREM de Paris, Université Paris Diderot.
- Flores González, M., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (2020b). Suites définies par récurrence dans la transition lycée-université : Activité et travail mathématique. In T. Hausberger, M. Bosch & F. Chellougui (Eds.), *Proceedings of the Third conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2020)* (pp. 31–40). Bizerte, Tunisia: University of Carthage and INDRUM.
- France Stratégie. (2017). *La transition Lycée-Enseignement Supérieur*. <https://www.strategie.gouv.fr/sites/strategie.gouv.fr/files/atoms/files/17-27-action-critiques-transition-web-ok.pdf>
- Galperine, P. (1966). Essai sur la formation par étapes des actions et des concepts. In A. Leontiev, A. Luria et A. Smirnov (Eds.), *Recherches psychologiques en URSS* (p. 114-132). Editions du progrès.
- Gaudin, N. (2005). *Place de la validation dans la conceptualisation, le cas du concept de fonction* [Thèse de Doctorat]. Université Joseph Fourier - Grenoble 1.
- Ghedamsi, I. (2008). *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université : Articuler contrôles pragmatique et formel dans des situations à dimension a-didactique*. [Thèse de Doctorat]. Université de Bordeaux 2 & Université de Tunis.
- Ghedamsi, I. (2015). Teacher management of learning calculus : The case of sequences in the first year of university mathematics studies. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *CERME 9—Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 2103–2109). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.
- Ghedamsi, I., & Fattoum, F. (2018). Étude de l'évolution des images de la convergence de suites lors d'un enseignement ordinaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 38(2), 207–259.
- Gibel, P. (2020). Analyse en théorie des situations didactiques d'une ingénierie visant une première approche de la notion de limite finie d'une suite. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 1, 153–189.
- Grenier-Boley, N., Bridoux, S., De Vleeschouwer, M., Durand-Guerrier, V., Grenier, D., Menini, C., Rogalski, M., Sénéchaud, P., & Vandebrouck, F. (2015). Introduction aux concepts de limite de fonction et de suite en première année d'université : Adaptation de deux ingénieries. In L. Theis (Éd.), *EMF 2015* (p. 666–676).

- Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 237–254.
- Gueudet, G., Bosch, M., Disessa, A., Kwon, O., & Verschaffel, L. (2016). In G. Kaiser (Ed.), *Transitions in Mathematics Education*. Springer.
- Gueudet, G., & Thomas, M. O. J. (2020). Secondary-Tertiary Transition in Mathematics Education. In S. Lerman (Éd.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 762–766). Springer International Publishing.
- Gueudet, G., & Vandebrouck, F. (2019). *Entrée dans l'enseignement supérieur : Éclairages en didactique des mathématiques*. CNESCO.
- Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (Éds.). (2005). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators* (Vol. 36). Springer.
- Guin, D., & Trouche, L. (1999). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments: The Case of Calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195–227.
- Gunter, D. L. (2019). The Secondary–Tertiary Transition in Mathematics: A Multifaceted Issue. In M. Shelley & S. A. Kiray (Eds.), *Education Research Highlights in Mathematics, Science and Technology* (pp. 2–16). ISRES Publishing.
- Guzmán, M. D., Hodgson, B. R., Robert, A., & Villani, V. (1998). Difficulties in the Passage from Secondary to Tertiary Education. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 747–763.
- Gyöngyösi, E., Solovej, J., & Winsløw, C. (2011). Using CAS based work to ease the transition from calculus to real analysis. *Proceedings of the seventh congress of the European society for research in mathematics education, Rzeszow*, 2002–2011.
- Hache, C. (2008). Le cas des manuels dans l'enseignement des mathématiques. In F. Vandebrouck (Éd.), *La classe de mathématiques : Activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 345–370). Octarès.
- Hanna, G., & Knipping, C. (2020). Proof in Mathematics Education, 1980–2020: An Overview. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 30(SP1), 1–13.
- Hiriart-Urruty, J.-B. (2016). Conjecturez, conjecturez... Il en restera toujours quelque chose. *Tangente*, 168, 10–11.
- Hong, Y. Y., Kerr, S., Klymchuk, S., McHardy, J., Murphy, J., Spencer, S., Thomas, M., & Watson, P. (2009). A comparison of teacher and lecturer perspectives on the transition from secondary to tertiary mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40, 877–889.

- Hoppenot, P., Kuzniak, A., Masselin, B., Nechache, A., Reyes Avendaño, C., López Fernandez, S., & Vivier, L. (2019). Le travail mathématique personnel vu par le prisme des Espaces de Travail Mathématique. *Actes de la 20ème Ecole d'Eté de Didactique de l'ARDM*.
- Hoppenot, P., & Vivier, L. (2020). Atelier 1 : La notion de tangente. In M. Flores González, A. Kuzniak, A. Nechache, & L. Vivier (Eds.), *Regards croisés sur le travail mathématique en contexte éducatif. Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz*, 21, (pp. 71–83). IREM de Paris.
- Horoks, J., & Robert, A. (2007). Tasks Designed to Highlight Task-Activity Relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4), 279–287. <https://doi.org/10.1007/s10857-007-9040-1>
- Houdement, C., & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, 40(3), 283–312.
- IREM Brest (Éd.). (1992). *Histoire de l'infini*.
- Jennings, M. (2009). Issues in bridging between senior secondary and first year. *Crossing divides*, 1, 273–280.
- Job, P., & Schneider, M. (2014). Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus. *ZDM*, 46(4), 635–646.
- Johns, C. (2020). Self-Regulation in First-Semester Calculus. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 6(3), 404–420.
- Kajander, A., & Lovric, M. (2005). Transition from secondary to tertiary mathematics : McMaster University experience. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2-3), 149–160.
- Kargiotakis, G. (1996). *Contribution à l'étude de processus de contrôle en environnement informatique : Le cas des associations droites-équations* [Thèse de doctorat en didactique des mathématiques]. Université Paris VII - Denis Diderot.
- Kidron, I. (2008). Abstraction and consolidation of the limit concept by means of instrumented schemes : The complementary role of three different frameworks. *Educational Studies in Mathematics*, 69(3), 197–216.
- Kidron, I. (2020). Calculus Teaching and Learning. In S. Lerman (Éd.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 87–94). Springer International Publishing.
- Kidron, I. (2006). Conceptualization of the limit by means of the discrete continuous interplay : Different theoretical approaches. *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1295–1304.

- Kuhn, T. S. (1966). *The Structure of Scientific Revolutions*. University of Chicago Press.
- Kuzniak, A. (2004). Paradigmes et espaces de travail géométriques. *IREM de Paris*, 73.
- Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9–24.
- Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, & Richard, P. R. (Éds.). (s. d.). *Mathematical Work in an Educational Context. The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Springer.
- Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17, 5–39.
- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in Schooling: An Introduction. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 48(6), 721–737.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The logic of mathematical discovery* (John Worrall, Elie Zahar). Cambridge University Press.
- Leontyev, A. N. (1978). *Activity and Consciousness* (Englewood Cliffs: Prentice Hall).
- Leplat, J. (1997). *Regard sur l'activité en situation de travail*. PUF.
- Lithner, J. (2000). Mathematical Reasoning in School Tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 41(2), 165–190.
- Litim, B., Zaki, M., & Benbachir, A. (2015). Difficultés conceptuelles d'étudiants de première année d'université face à la notion de convergence des suites numériques. *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*, 677–686.
- López, S. (2019). La algebrización en un curso de curvas y superficies parametrizadas: Una sesión de clase. *Sixième Symposium sur le Travail Mathématique*, 383–394.
- Luk, H. S. (2005). The gap between secondary school and university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2-3), 161–174.
- Mamona, J. (1990). Sequences and Series – Sequences and Functions: Students' Confusions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 21(2), 333–337.
- Mamona-Downs, J. (2001). Letting the Intuitive bear on the Formal; A Didactical

- Approach for the Understanding of the Limit of a Sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259–288.
- Mamona-Downs, J. (2010). On introducing a set perspective in the learning of limits of real sequences. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41, 277–291.
- Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et le faux dans la classe de mathématiques*. La Pensée Sauvage.
- Masselin, B. (2019). *Étude du travail de l'enseignant autour de la simulation en classe de troisième et seconde : Métamorphoses d'un problème au fil d'une formation*. [Thèse de Doctorat]. Université Paris 7 - Denis Diderot.
- May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(5560), 459–467.
- MEN. (2011). *Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques. Classe terminale de la série scientifique*. Ministère de l'éducation nationale.
- MEN. (2019). *Programme de spécialité de mathématiques de terminale générale*. Ministère de l'éducation nationale et de la Jeunesse.
- Monaghan, J. (2016). The Calculator Debate. In J. Monaghan, L. Trouche, & J. Borwein (Éds.), *Tools and Mathematics* (p. 305–331). Springer International Publishing.
- Monaghan, J., Nardi, E., & Dreyfus, T. (2019). *Calculus in upper secondary and beginning university mathematics*. University of Agder.
- Monaghan, J., Trouche, L., & Borwein, J. (2016). *Tools and Mathematics*. Springer International Publishing.
- Montoya Delgadillo, E. M., & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM*, 48(6), 739–754.
- Montoya Delgadillo, E., Páez Murillo, R., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (2018). Deconstruction with Localization Perspective in the Learning of Analysis. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1), 139–160.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27(3), 249–266.
- NCTM. (1989). *Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Oktaç, A., & Vivier, L. (2016). Conversion, Change, Transition... in Research About Analysis. In B. R. Hodgson, A. Kuzniak, & J.-B. Lagrange (Éds.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues: A Homage to Michèle Artigue* (p. 87–121). Springer International Publishing.
- Peirce, C. S. (1931). *Collected Papers* (Vol. 1, p.1–16). Harvard University Press.
- Perrin, D. (2000). *Sur les suites récurrentes*. <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/CAPES/analyse/Suites/suites-re%cc%81currentes.pdf>
- Perrin, D. (2008). *La suite logistique et le chaos*. 63.
- Perrin, D. (s.d.). Partie VI : La géométrie Anallagmatique. In *Géométrie projective plane et applications aux géométries euclidienne et non euclidiennes (titre provisoire)*. https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Livre_de_geometrie_projective.html
- Piaget, J. (1974). Recherches sur la contradiction. In *Les différentes formes de la contradiction* (Vol. 2). Presses Universitaires de France.
- Poncy, M., Russier, M.-C., & Vieudrin, D. (2016). *Maths Term. S. Enseignement Spécifique*. Bordas.
- Praslon, F. (2000). *Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Université Paris 7 - Denis Diderot.
- Praslon, F. (1999). *Continuités et ruptures dans la transition terminale S / DEUG sciences en analyse : Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. 3, 1–27.
- Prediger, S., & Bikner-Ahsbahr, A. (2014). Introduction to Networking : Networking Strategies and Their Background. In *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (p. 117–125). Springer International Publishing.
- Prediger, S., Bikner-Ahsbahr, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches : First steps towards a conceptual framework. *ZDM*, 40, 165–178.
- Przenioslo, M. (2005). Introducing the Concept of Convergence of a Sequence in Secondary School. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 71–93.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

- Rach, S., & Heinze, A. (2017). The Transition from School to University in Mathematics : Which Influence Do School-Related Variables Have? *International Journal of Science and Mathematics Education* volume, 15, 1343-1363.
- Richard, J. F. (1990). *Les activités mentales : Comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Armand Colin.
- Robert, A. (1982). *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*. [Thèse de doctorat]. Université Paris VII.
- Robert, A. (1983). L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP*, 340, 431-449.
- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(2), 139-190.
- Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques et une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In F. Vandebrouck (Éd.), *La classe de mathématiques : Activité des élèves et pratiques des enseignants* (p. 45–68). Octarès.
- Robert, A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : Une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 505–528.
- Robert, A., & Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : Analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en didactique des mathématiques*, 34(2-3), 239–283.
- Rogalski, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : Activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 23–30). Octarès.
- Rogalski, J. (2013). Theory of Activity and Developmental Frameworks for an Analysis of Teachers' Practices and Students' Learning. In F. Vandebrouck (Ed.), *Mathematics Classrooms: Students' activities and teachers' practices* (p. 3–22). Sense Publishers.
- Rogalski, J. (2015). *Didactique et cognition. De Vygotsky à Dehaene...?* Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz (13). IREM de Paris.
- Rousse, S. (2018). *Discret et continu au lycée : Enjeux de ces notions à travers l'étude de l'enseignement de l'analyse et des probabilités* [Thèse de Doctorat]. Université Paris Diderot.
- Rouvière, F. (2009). *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de*

l'agregation. Cassini.

- Saboya, M., Bednarz, N., & Hitt, F. (2006). Le contrôle sur l'activité mathématique comme constitutif de la rationalité en mathématiques : Élaboration d'un cadre de référence. *Actes du colloque EMF 2006*. Sherbrooke (Canada).
- Saboya, M., Bednarz, N., & Hitt, F. (2015). Le contrôle exercé en algèbre : Conceptualisation et analyses en résolution de problèmes. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 20, 61–100.
- Saboya, M., & Rhéaume, S. (2015). Quel contrôle exercent les élèves lors de la résolution d'un problème de comparaison de fractions ? *petit x*, 5–31.
- Saboya Mandico, M. (2010). *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire* [Thèse de doctorat]. Université de Québec à Montréal.
- Sawadogo, T. (2015). Rupture en formalisme et en démonstration dans la transition Secondaire-Supérieur : Cas des filières scientifiques de l'Université de Ouagadougou. *Actes du colloque EMF 2015*. Alger.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Sierpinska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10(3), 24–36.
- Sigward, É. (2012). *Mathématiques TS. Enseignement Spécifique*. Hatier.
- Tall, D. (1991). Intuition and rigour : The role of visualization in the calculus. In *Visualization in the Teaching and Learning of Mathematics* (W.S. Zimmerman and S. Cunningham, p. 105–119).
- Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5–24.
- Tall, D. (1997). From School to University : The Transition from Elementary to Advanced Mathematical Thinking. In *Proceedings of the 7th Conference of the Australasian Bridging Mathematics Network*, 1–20.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.
- Thomas, M., Druck, I., Huillet, D., Ju, M.-K., Nardi, E., Rasmussen, C., & Xie, J. (2015). Key Mathematical Concepts in the Transition from Secondary School to University. In *The Proceedings of the 12th International Congress on*

- Mathematical Education* (Cho, Sung Je, p. 265–284). Springer.
- Thomas, M., Hong, Y. Y., & Oates, G. (2017). *Innovative Uses of Digital Technology in Undergraduate Mathematics*. In E. Faggiano et al. (Eds.), *Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education, Mathematics Education in Digital Era* (p. 109–136). Springer International Publishing.
- Trouche, L. (1996). *A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un « environnement calculatrice » : Étude des rapports entre processus d'instrumentation et processus de conceptualisation. Histoire et perspectives sur les mathématiques* [Thèse de Doctorat]. Université de Montpellier 2.
- Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur : Étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. *Educational Studies in Mathematics*, 41 (3), 239–264.
- Trouche, L. (2005). Instrumental Genesis, Individual And Social Aspects. In D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Éds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (p. 197–230). Springer US.
- Trouche, L., & Drijvers, P. (2014). Webbing and orchestration. Two interrelated views on digital tools in mathematics education. *Teaching Mathematics and its Applications*, 33(3), 193–209.
- Trouche, L., & Guin, D. (1996). Seeing is reality : How graphing calculators may influence the conceptualisation of limits. *Proceedings of the 20th PME International Conference*, 4, 323–330.
- Vandebrouck, F. (Éd.). (2008). *La classe de mathématiques : Activités des élèves et pratiques des enseignants*. Octarès.
- Vandebrouck, F. (2018). Activity Theory in French Didactic Research. In *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (Kaisier G., Forgasz H., Graven M., Kuzniak A., Simmt E., Xu B., p. 679–698). Springer.
- Vandebrouck, F. (2020). Théorie de l'Activité en didactique des mathématiques. In M. Flores González, A. Kuzniak, A. Nechache, & L. Vivier (Eds.), *Regards croisés sur le travail mathématique en contexte éducatif. Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, 21 (pp. 43–54). IREM de Paris.
- Vandebrouck, F., & Robert, A. (2017a). Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 37(2-3), 333–382.
- Vandebrouck, F., & Robert, A. (2017b). *Activités mathématiques des élèves avec les*

- technologies numériques : Vers une théorie didactique de l'activité (TDA)*. IREM de Paris – Université Paris Diderot.
- Verdugo Hernández, P. (2017). *Espacio de trabajo matemático del análisis : Enseñanza de las sucesiones en los primeros años de la universidad* [Tesis Doctoral]. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133–169.
- Vivier, L. (2020). Portée et usage du travail mathématique dans le cadre de la théorie des ETM. In M. Flores González, A. Kuzniak, A. Nechache, & L. Vivier (Eds.), *Regards croisés sur le travail mathématique en contexte éducatif. Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, 21 (pp. 55–67). IREM de Paris.
- Weigand, H.-G. (1991). Iteration sequences and their representations. *Educational Studies in Mathematics*, 22(5), 411–437.
- Weigand, H.-G. (2004). Sequences—Basic elements for discrete mathematics. *ZDM*, 36, 91–97.
- Weigand, H.-G. (2014). A discrete approach to the concept of derivative. *ZDM*, 46(4), 603–619.
- Weigand, H.-G. (2016). Zur Entwicklung des Grenzwertbegriffs unter stoffdidaktischer Perspektive. *Mathematische Semesterberichte*, 63.
- Weigand, H.-G. (2015). Discrete or continuous? – A model for a technology-supported discrete approach to calculus. In K. Krainer & N. Vondrová (Éds.), *CERME 9—Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 2580–2586). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.
- Weigand, H.-G., & Thies, S. (2003). Working styles of students in a computer-based environment. Results of a DFG1 project. In G. Törner et al. (Eds.), *Selected papers from the Annual Conferences on Didactics of Mathematics, Ludwigsburg 2001*.
- Winsløw, C. (2007). Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 12, 189–204.
- Winsløw, C. (2013). Mathematical analysis in high school : A fundamental dilemma. *Refractions of Mathematics Education: Festschrift for Eva Jablonka*, 197–213.
- Winsløw, C. (2020). Analysis Teaching and Learning. In S. Lerman (Éd.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 50–53). Springer International Publishing.
- Winsløw, C., & Grønbaek, N. (2014). The ecological Klein's double discontinuity

revisited : Contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *Recherches en didactique des mathématiques*, 34(1), 59–86.

Wood, L. (2001). The Secondary-tertiary Interface. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, & A. Schoenfeld (Éds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (p. 87–98). Springer Netherlands.