HAL
open science

Diagrammes de Voronoï et surfaces évolutives

David Lopez

▶ **To cite this version:**

David Lopez. Diagrammes de Voronoï et surfaces évolutives. Géométrie algorithmique [cs.CG]. Université de Lorraine, 2021. Français. NNT : 2021LORR0247 . tel-03530955

HAL Id: tel-03530955

https://hal.science/tel-03530955v1

Submitted on 18 Jan 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale IAEM Lorraine

Diagrammes de Voronoï et surfaces évolutives

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 1er octobre 2021
pour l'obtention du
Doctorat de l'Université de Lorraine
Mention : Informatique

par

David Lopez

Thèse co-encadrée par Dmitry Sokolov et Nicolas Ray,
préparée au LORIA - Équipe Pixel.

Jury présidé par Pr. Isabelle Debled-Rennesson :

Rapporteurs :	Pr. Maud Marchal	-	Université de Rennes / IRISA
	Pr. Jean-Michel Dischler	-	Université de Strasbourg / ICUBE
Examinateurs :	Pr. Isabelle Debled-Rennesson	-	Université de Lorraine / LORIA
	Dr. Vincent Nivoliers	-	Université de Lyon / LIRIS
Invité :	Dr. Bruno Lévy	-	INRIA

Laboratoire Lorrain de Recherche en Informatique et ses Applications - UMR 7503

Remerciements

Ainsi se termine cette aventure, mais sans la contribution d'une multitude, je serais peut-être encore au détour d'un tas de triangles ou comme hypnotisé par les profondeurs abyssales d'une formule mathématique.

En premier lieu, je tiens à remercier mes encadrants, Dmitry Sokolov et Nicolas Ray pour leur accueil, leur confiance, le partage de leur expérience et leur bonne humeur. Je tiens également à remercier Bruno Lévy pour m'avoir initié à la géométrie algorithmique. Merci également à toutes les personnes que j'ai été amené à rencontrer et côtoyer au cours de ces années, en particulier les membres des équipes Pixel et MFX.

D'un point de vue plus personnel, je tiens à remercier ma compagne, Véronique, pour son soutien inconditionnel. Tu n'as jamais cessé d'y croire et de me motiver... finalement, j'y suis arrivé et j'ai même été plus rapide qu'un certain George ! Merci pour ton amour et ta patience.
Merci à Salomé, ma belle fille, qui m'a appris que finalement on ne fait pas grandir quelqu'un, on grandi avec lui.

Et comme les nouvelles aventures n'attendent pas, je souhaite dédier ce mémoire à la naissance de Loïs, ma filleule. Bon voyage à toi et à toute la tribu de la "lune craquée" : Nathanaël, Alizé, Lison, Apolline, Salomé, Gaspard et Agathe.

Table des matières

Introduction **1**

I État de l'art **5**

1 Simulation numérique d'écoulement **7**
1.A Ce que dit la physique . . . 8
1.A.1 Milieux continus . . . 9
1.A.2 Équations de Navier-Stokes . . . 11
1.A.3 Résolution numérique . . . 13
1.B État de l'art . . . 14
1.B.1 Simulations lagrangiennes . . . 15
1.B.2 Méthodes eulériennes . . . 20
1.C Surfaces déformables . . . 27

2 Géométrie algorithmique **29**
2.A Maillages . . . 31
2.A.1 Surfaces triangulées . . . 31
2.A.2 Géométrie discrète . . . 34
2.A.3 Évaluation d'un maillage . . . 37
2.B Triangulation de Delaunay . . . 41
2.C Diagrammes de Voronoï . . . 42
2.C.1 Dualité avec la triangulation de Delaunay . . . 45
2.C.2 Diagramme de Voronoï barycentrique . . . 45
2.D Application aux domaines courbes . . . 51
2.D.1 Diagrammes de Voronoï géodésiques . . . 52
2.D.2 Diagramme de Voronoï restreint . . . 52
2.D.3 Triangulation de Delaunay restreinte . . . 59
2.E Éléments de topologie . . . 61
2.E.1 Vocabulaire . . . 62

2.E.2 Homotopie et Homéomorphisme 64
2.E.3 Caractéristique d'Euler-Poincaré 64
2.E.4 Équivalence de la triangulation de Delaunay 66
2.F Remaillage fondé sur les diagrammes de Voronoï 69
2.F.1 Optimisations de l'échantillonnage dans $\mathbb{R}^3$ 72
2.F.2 Génération de maillages anisotropes 75

II Contributions à la technique de remaillage fondée sur les diagrammes de Voronoï 83

3 Du diagramme de Voronoï restreint à une variété triangulée 85
3.A Solution naïve et ses limitations 87
3.A.1 Décomposition en composantes connexes 87
3.A.2 Conditions de validité 89
3.A.3 Réalisation géométrique duale 90
3.A.4 Position des sommets 92
3.A.5 Configurations spéciales 93
3.B Recherche d'une solution par force brute 94
3.B.1 Sous domaine restrictif avec bords 94
3.B.2 Raffinement 95
3.C Solution minimale 96
3.C.1 Identification topologique 96
3.C.2 Nouvelles réalisations géométriques 97
3.C.3 Gestion des erreurs relatives au voisinage 103
3.D Résultats 104
3.D.1 Prérequis 104
3.D.2 Résultats sur remaillage statique 105
3.E Optimisation et Partitionnement dans $\mathbb{R}^{n>3}$ 110
3.F Algorithmes et structures de données 112
3.F.1 Décomposition en composantes connexes 112
3.F.2 Combinatoire de chaque composante connexe 114
3.F.3 Structure de données 116

4 Minimisation de l'erreur volumique induite 119
4.A Motivations 120
4.B Principe 121
4.B.1 Discrétisation de l'erreur 121
4.B.2 Problème d'optimisation 123
4.B.3 Procédé de minimisation 124
4.B.4 Gradient de $\mathcal{F}$ 125

4.B.5 Algorithme général . . . 129
4.C Méthodes de mesure . . . 129
4.C.1 Différence de volume . . . 130
4.C.2 Triangulation de l'espace séparant M et M' . . . 133
4.D Résultats . . . 137

5 Suivi de déformations 141
5.A Application directe . . . 143
5.A.1 Ajustement du nombre de sommets - seuillage . . . 143
5.A.2 Optimisation barycentrique . . . 145
5.A.3 Définition de M_{t+1} . . . 145
5.A.4 Premiers résultats . . . 145
5.B Vers une densité d'échantillonnage constante . . . 154
5.B.1 Dans le temps . . . 154
5.B.2 Dans l'espace . . . 156
5.B.3 Résultats . . . 158
5.C Préservation des régions à forte courbure . . . 161
5.C.1 Adaptation du nombre d'échantillons . . . 161
5.C.2 Définition de la nouvelle approximation . . . 163
5.C.3 Résultats . . . 163
5.D Gestion des événements topologiques . . . 171
5.D.1 Circonscription de l'évènement . . . 172
5.D.2 Modification du domaine surfacique . . . 174
5.D.3 Premiers résultats . . . 176
5.D.4 Perspectives . . . 176
5.E Bilan et Perspectives . . . 179

Conclusion 183

Bibliographie 185

A l'origine des présents travaux, il était question du vaste problème de la simulation d'écoulement fluide et plus particulièrement de la modélisation de la surface du corps fluide. Ce type d'interface mécanique accepte de larges déformations au cours du temps et nous cherchons ici à en définir un modèle triangulé à chaque pas de temps de la simulation. Notre travail n'a cependant pas vocation à résoudre des problèmes mécaniques, ici, la simulation sert avant tout un intérêt infographique.

Infographie

Au delà des techniques de visualisation mises en œuvre dans un logiciel de mécanique, lorsqu'on s'intéresse aux objets fluides dans le monde de l'imagerie numérique, deux défis sont omniprésents pour obtenir des scènes photo-réalistes : le *rendu* et l'animation.

L'opération de rendu consiste à définir l'apparence du corps fluide modélisé (*i.e.* teinte, transparence, reflets...). Les traitements nécessaires et la qualité du résultat dépendent principalement de la technique de représentation et du niveau de précision accordé ; ces opérations requièrent généralement des données relatives à la surface de l'objet, notamment sa normale.

La dynamique d'un fluide est complexe et singulière et il est très difficile de la reproduire fidèlement "à la main". Aussi, le talent des modeleurs cède généralement la place à une simulation physique sous-jacente : après avoir défini un ensemble de conditions initiales (nature et géométrie du corps fluide, sources, puits, obstacles...), la main est donnée au simulateur pour calculer la déformation et faire évoluer le modèle 3D. La communauté d'informatique graphique s'est donc approprié le sujet et nombreuses sont les publications s'attachant à définir de nouvelles méthodes de simulation d'écoulement destinées à l'univers visuel (CHAPITRE 1).

Nous nous concentrons ici sur les techniques proposant de modéliser la surface d'un liquide à l'aide d'un maillage surfacique (FIGURE 1) ; cette définition explicite facilite l'accès aux données géométriques (position, normale...) et est particulièrement adaptée aux méthodes de résolutions numériques (chaque maille constitue un élément fini).

Remaillage

Un corps fluide est capable d'accepter de très larges déformations au cours d'une simulation ; il convient alors de faire évoluer sa modélisation au fil du temps. Dans ce contexte, le pas de temps d'une simulation s'articule autour de trois opérations : déterminer le champ de vitesse courant, déformer le modèle surfacique et *remailler*. La dernière étape propose de réviser l'ensemble des sommets et leur combinatoire afin de

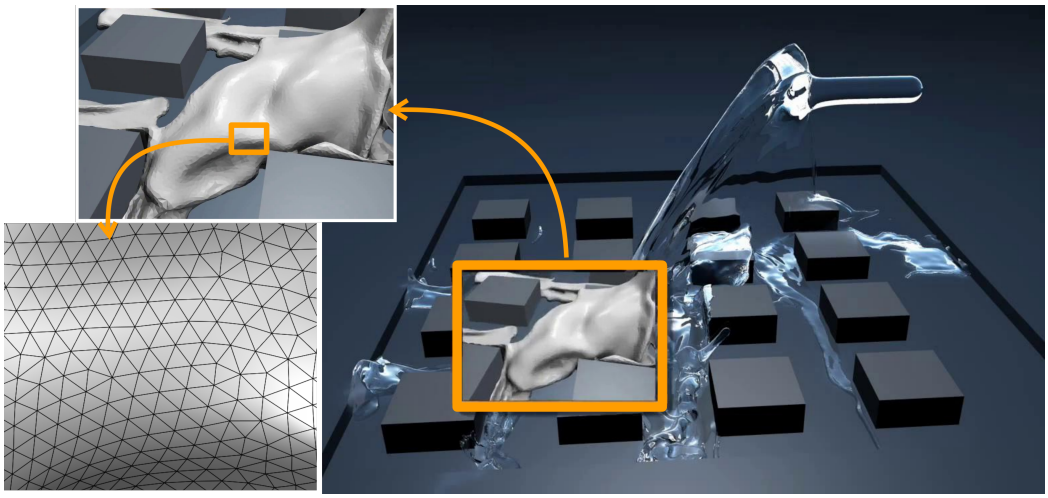


FIGURE 1 – Exemple de simulation employant une représentation explicite de la surface [WTGT09]. Le premier encadré donne un détail de la surface sans le rendu ; une focale plus fine permet de mettre en exergue les facettes du maillage.

satisfaire les contraintes relatives à la discrétisation (qualités intrinsèques des éléments constitutifs du maillage) tout en veillant à préserver la cohérence de l'approximation (proximité avec la surface approchée).

Nous avons choisi d'exploiter une méthode de remaillage fondée sur les diagrammes de Voronoï restreints pour répondre à ce problème. Cette méthode de partitionnement de l'espace permet d'optimiser un échantillonnage sur le domaine surfacique et d'en déduire une triangulation, offrant ainsi une nouvelle approximation du domaine surfacique considéré (CHAPITRE 2).

Travaux

L'objectif initial consiste à appliquer une méthode de remaillage au problème de suivi de surfaces déformables. Pour cela, nous avons dû répondre à plusieurs défis :

- la construction d'une nouvelle modélisation homéomorphe à la précédente,
- la minimisation de l'erreur d'approximation,
- le maintien du taux d'échantillonnage de la surface,
- et l'identification et la gestion d'éventuels événements topologiques (collision, séparation).

Le premier point est détaillé dans le CHAPITRE 3 ; il contribue à une amélioration de la méthode de remaillage fondée sur les diagrammes de Voronoï restreints, sans restriction au présent domaine d'application. Plus précisément, la méthode déduit la nouvelle triangulation à partir de la décomposition offerte par les diagrammes de Voro-

noï mais cette transposition peut faillir et, dans ce cas, le maillage dual ne définit pas une variété[1] triangulée homéomorphe au domaine initial. Cet échec n'est pas acceptable dans un processus itératif (*i.e.* simulation). C'est pourquoi nous proposons une méthode de vérification et de correction automatique du partitionnement qui nous permet d'atteindre une configuration adéquate de cellules, quelque soit l'échantillonnage initial.

Cette garantie topologique n'est cependant pas suffisante : l'opération de remaillage induit une erreur géométrique qu'il nous faut maîtriser. Étant donné le contexte, nous proposons d'exprimer cette erreur d'approximation en terme de variation locale de volume associée à chaque sommet (CHAPITRE 4) ; la position de ces derniers est alors décidée par un processus d'optimisation visant à annuler cette différence de volume.

Le dernier chapitre (CHAPITRE 5) réunit ces deux traitements algorithmiques et propose de compléter le processus de remaillage qui nous intéresse ici (FIGURE 2). En particulier, il s'agit d'ajuster le nombre d'échantillons au grès de la déformation et, le cas échéant, ajuster la topologie du modèle. La méthode est alors confrontée aux tests synthétiques du domaine et fait l'objet d'un couplage avec une méthode de simulation eulérienne ([BB08]).

1. Les surfaces considérées ici définissent généralement le bord d'un corps volumique.

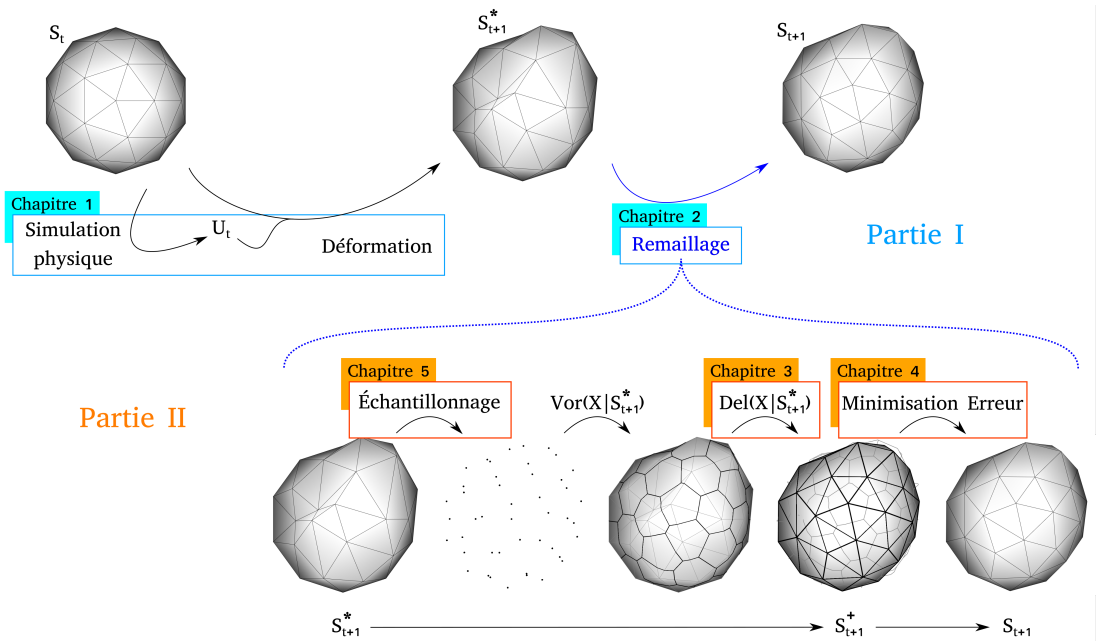


FIGURE 2 – Plan du mémoire reporté sur le déroulement d'un pas de temps de simulation d'écoulement.

Première partie

État de l'art

Modéliser la dynamique des corps fluides est un défi pluridisciplinaire regroupant des problèmes de mécanique, de simulation numérique et de modélisation géométrique. La résolution des équations de mouvement via une méthode type éléments finis est largement dépendante de la génération de ces derniers, en particulier lorsque le système mécanique admet une surface libre : la qualité de l'approximation de cette frontière est prépondérante dans l'estimation du flux (lieu d'application des conditions aux limites du système). Le CHAPITRE 1 se veut relativement généraliste et converge vers notre problématique : le remaillage de surfaces déformables. Pour y répondre, nous exploitons un ensemble d'outils de géométrie algorithmique qui sont présentés dans le CHAPITRE 2.

Chapitre 1

Simulation numérique d'écoulement

Sommaire

1.A Ce que dit la physique **8**
1.A.1 Milieux continus 9
1.A.2 Équations de Navier-Stokes 11
1.A.3 Résolution numérique 13
1.B État de l'art **14**
1.B.1 Simulations lagrangiennes 15
1.B.2 Méthodes eulériennes 20
1.C Surfaces déformables **27**

Contrairement aux solides, les particules élémentaires constituantes d'un corps fluide se meuvent aisément les unes par rapport aux autres. Cette dynamique interne rend le comportement des fluides complexe et leur étude ne peut être réduite à celle d'un point matériel (SECTION 1.A). La mécanique des milieux continus repose sur une discrétisation du domaine d'étude et le choix d'un référentiel (SECTION 1.A.1) ; dès lors, nous pouvons établir les équations du mouvement (SECTION 1.A.2) et opter pour une méthode de résolution (SECTION 1.A.3). La fin de ce chapitre précise l'intérêt d'utiliser une représentation explicite de la surface du liquide et les défis sous-jacents (SECTION 1.B).

1.A Ce que dit la physique

La mécanique des fluides envisage deux cas, l'aspect statique et l'aspect dynamique.

Statique des fluides

L'aspect statique ne pose *a priori* pas de difficultés particulières : un liquide en équilibre ne subissant pas de perturbation extérieure présente une surface libre plane et horizontale (Archimède, principe fondamental de l'hydrostatique). Il faut néanmoins rester prudent lorsque la surface du liquide est très grande ou que le système mécanique considéré est très petit ; les conditions d'études diffèrent et les résultats sont largement liés à la précision accordée à l'établissement des conditions aux limites, *i.e.* phénomène de tension de surface (capillarité, ménisque...).

Dynamique des fluides

La description d'un fluide en mouvement est évidement plus délicate : elle résulte de différentes actions (*e.g.* gravité et tension de surface) et de la convolution de différents paramètres dynamiques, notamment la viscosité [1] et la vitesse de l'écoulement (régime de l'écoulement, possibles ondes de chocs...).

Plusieurs modélisations mathématiques ont été établies au cours des siècles passés (écoulement d'Euler, de Couette, de Stokes...). Le choix de l'une d'entre elles est dirigé par une étude préliminaire mettant en exergue les phénomènes prédominants aux vues de la nature du fluide considéré (viscosité, compressibilité...) et des caractéristiques de l'écoulement (échelle et vitesse). Nous employons ici un modèle *a priori* "généraliste" (FIGURE 1.1), le système non linéaire d'équations aux dérivées partielles de Navier-Stokes (SECTION 1.A.2).

1. Mesure des contraintes engendrées par les frictions inter-moléculaires.

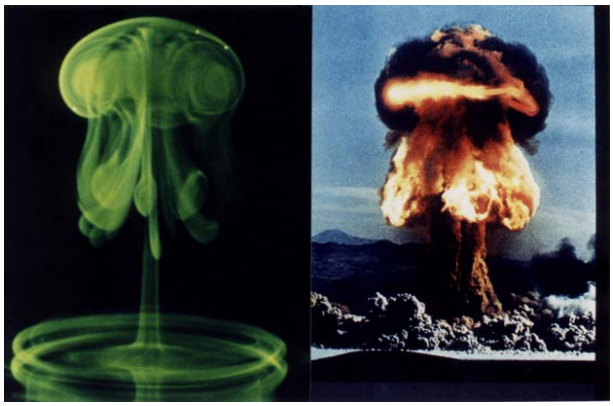


FIGURE 1.1 – On peut supposer qu'il existe un modèle d'écoulement insensible à l'échelle : deux expériences admettant une échelle incontestablement différente présentent une structure tourbillonnaire comparable (la photo retournée d'une goutte d'eau tintée tombant dans un récipient d'eau claire et le "champignon" résultant d'un essai nucléaire) [Sig97]. À noter que le premier écoulement est dit laminaire (deux particules voisines à un instant donné le restent aux instants suivants) alors que le second est résolument turbulent (comportement chaotique).

1.A.1 Milieux continus

A l'échelle moléculaire, un corps fluide se comporte comme un système granulaire, discret. Il est cependant irréalisable de vouloir calculer la part que prend chaque molécule dans un écoulement, même pour un système mécanique de l'ordre de quelques millimètres [2].

Une approche statistique est possible : elle est fondé sur les travaux de J.C. Maxwell et L. Boltzman et constitue l'approche phare de la cinétique des gaz ; nous suivons ici une autre hypothèse, celle des milieux continus.

En se plaçant à une échelle mésoscopique, arbitrairement plus grande que celle de l'atome et relativement petite par rapport à celle de l'écoulement, les variables comme la vitesse, la température ou la pression prennent sens et peuvent être définies en tout point du système mécanique par un champ continu : ce niveau d'abstraction permet d'occulter l'agitation moléculaire (intuitivement, une moyenne estimée sur un grand nombre de molécules). Dorénavant, le terme *particule fluide* fait référence à un volume "physiquement infinitésimal" par rapport au phénomène étudié, formellement :

$$\text{taille d'une molécule} \ll \text{particule fluide} \ll \text{échelle de l'écoulement}$$

2. On dénombre pas moins de 10^{21} molécules dans une goutte d'eau de 4 mm de diamètre ...

L'interprétation mathématique de cette particule élémentaire et le point de vue d'observation de sa dynamique orientent la formulation des équations régissant le mouvement.

1.A.1.a Interprétation mathématique

Ce volume arbitraire peut être mathématiquement interprété comme :

- un volume infinitésimal dV, au sens du calcul différentiel ; les équations fondamentales sont alors exprimées sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles (EDP). Cette formulation dite *faible* est directement exploitée par la technique de résolution des différences finies (voir SECTIONS 1.A.2 et 1.B.2.a).

ou

- un domaine d'intégration des forces ; ce second procédé permet de capturer des variations à l'intérieur même du volume de contrôle (*e.g.* onde de choc le traversant).

Par convention, on utilise le centre d'inertie de la particule comme point matériel auquel sont attachées les différentes grandeurs physiques et sont appliquées les différentes forces, en particulier les forces de corps (agissant sans contact, comme la gravité). Un autre positionnement peut-être exploité lorsqu'il parait plus avantageux (*e.g.* interfaces de la particule pour la pression, FIGURE 1.6).

1.A.1.b Description de la dynamique

De la même manière, nous devons choisir un point de vue d'observation du mouvement, établir le repère à travers lequel est observée la dynamique du système matériel. Deux regards se côtoient depuis plus de deux siècles, celui de Joseph Louis, Comte de Lagrange et celui de son contemporain et confrère Leonhard Paul Euler [3].

La méthode dite *des variables de Lagrange* [dL81] consiste à suivre chaque particule individuellement dans un repère cartésien (x, y, z) en fonction du temps t : la position d'un volume élémentaire est fonction de sa position initiale et du temps. L'ensemble de ses positions successives décrit sa *trajectoire* (FIGURE 1.2.a).

La *méthode des variables d'Euler* [Eul87] propose quant à elle d'observer le champ des vitesses en tout point de l'écoulement à l'instant t. Cette photographie permet entre autre de définir des *lignes de courant* tangentes en tout point au vecteur vitesse local (figure 1.2.b). En 3 dimensions, l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur

3. Leur correspondance épistolaire a largement contribué à l'avancée de leurs travaux respectifs.

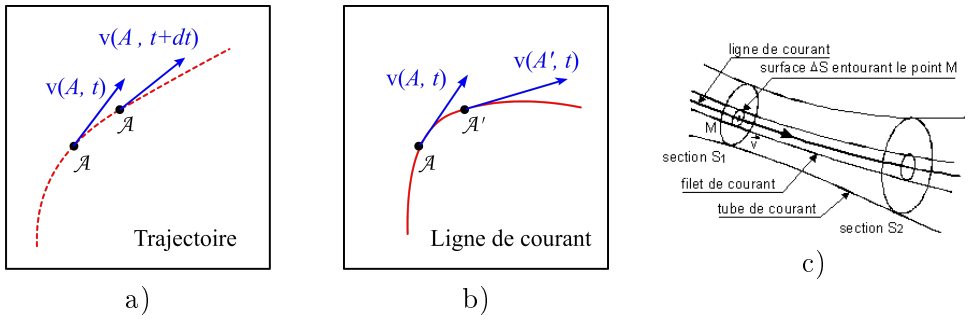


FIGURE 1.2 – trajectoire et ligne de courant

un même contour fermé forme un *tube de courant*. Par définition, aucun flux ne les traverse.

En résumé, dans le premier (resp. le second) référentiel, la particule élémentaire est transportée (resp. traversée) par le courant. Lagrange attache les grandeurs physiques au point matériel (particule en mouvement), alors qu'Euler les rattache au point géométrique (position fixe dans l'espace).

A priori ambivalents, ces deux points de vue sont en réalité équivalents à un changement de variable près (formes conservative et non-conservative des équations de Navier-Stokes) et complémentaires au sens qu'une difficulté d'expression dans l'un est souvent implicite dans l'autre.

A partir des définitions précédentes, nous pouvons obtenir quatre déclinaisons (FIGURE 1.3) des équations de Navier-Stokes [4]. Elles sont présentées dans la section suivante sous leur forme conservative [5] : formulation différentielle et observation eulérienne.

1.A.2 Équations de Navier-Stokes

Les fluides sont soumis aux lois de conservation de la physique classique : conservation de la masse, du moment cinétique (principe fondamental de la mécanique) et de l'énergie (premier principe de la thermodynamique).

Ce triple équilibre est formalisé à travers un système de trois équations aux dé-

4. Les différentes formulations et le passage de l'une à l'autre sont largement discutés dans le livre d'Anderson [And95].

5. La forme non conservative est employée pour les résolutions lagrangiennes ; cette écriture repose sur une dérivation spécifique tenant compte de l'évolution de la grandeur pendant son déplacement, *i.e.* la dérivée particulaire.

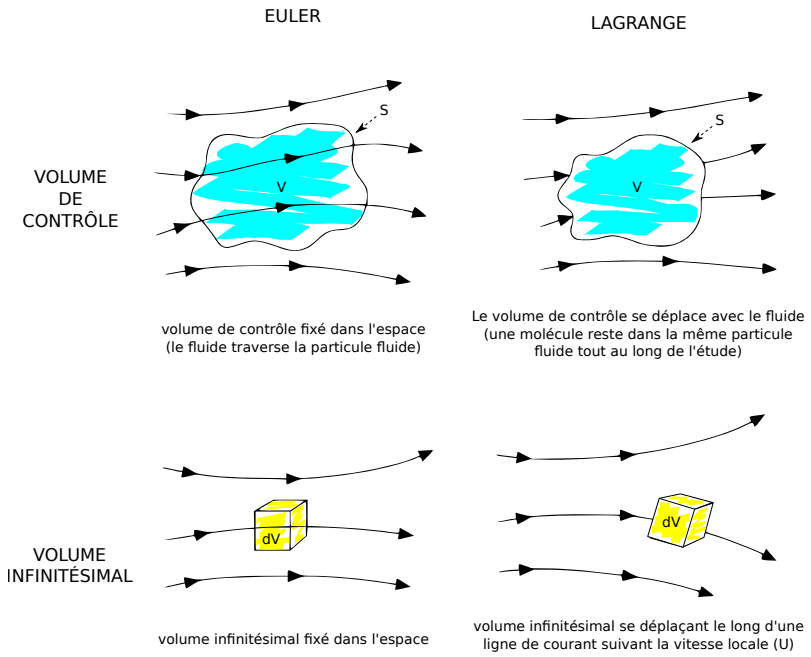


FIGURE 1.3 – Discrétisation de l'espace × point de vue d'observation.

rivées partielles (EDP), le système d'équations de Navier-Stokes [6] qui permettrait en théorie de calculer la dynamique de tous les fluides, sans restriction d'échelle. Cette supposition explique la popularité de ce système bien que nous n'en connaissions pas de solution analytique [7]. Une résolution numérique est cependant possible sous certaines conditions, permettant ainsi l'étude de nombreux phénomènes (météorologie, mouvement océanique, aérodynamisme, hydrodynamique, flux sanguin...).

En particulier, lorsque le corps fluide étudié est newtonien [8] et incompressible [9], son écoulement peut être déterminé à partir de deux variables définies en tout point du domaine : vitesse et pression. L'évolution de ces champs (resp. vectoriel et scalaire) peut être calculée par résolution du système simplifié [10] suivant :

6. Il résulte des travaux menés indépendament aux XIXème siècle par Navier et Stokes mais également Cauchy, Poisson et St Venant.

7. L'existence d'une solution régulière dans le cas général fait l'objet d'un des prix du millénaire (Institut de Mathématiques Clay, [Fef00])

8. *i.e.* homogène, isotrope, dénué d'élasticité et dont le tenseur des contraintes visqueuses est une fonction linéaire du taux de déformation.

9. densité constante.

10. *i.e.* indépendamment du bilan d'énergie et après simplification en rapport à la nature du fluide (viscosité constante).

équation de continuité (bilan de la masse) :

$$\nabla.\mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

équation du moment (bilan de la quantité de mouvement) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + F \tag{1.2}$$

avec :

$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$	Accélération
$-(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$	Terme d'advection, témoin de la conservation du moment du fluide (*i.e.* déplacement du champ de vitesse engendré par lui même). Il correspond à ce que l'on appelle communément la force d'inertie. Sa forme provient directement de la dérivée particulaire.
$-\frac{1}{\rho}\nabla p$	Calcul des forces générées par les différences de pression dans le fluide.
$\nu\nabla^2\mathbf{u}$	Terme de viscosité, il modélise les effets de frictions internes : la vitesse en un point est pondérée par la moyenne des vitesses du voisinage d'où l'utilisation de l'opérateur laplacien (Δ).
F	Les forces de corps ; les mouvements imposés au fluide peuvent être inclus dans ce terme (ex : fontaine, puits...).

1.A.3 Résolution numérique

Pour résoudre ce système d'EDP, nous avons recours à une méthode de résolution numérique. L'espace et le temps sont respectivement décomposés en un ensemble de particules élémentaires et en une succession de pas de temps.

1.A.3.a Modèle du système mécanique

Le système considéré est fermé et borné, et admet des conditions aux limites bien définies. Comme le suggèrent Lagrange et Euler, il convient de diviser l'espace en un ensemble de particules pour lesquelles il est plus aisé d'approcher la solution. Le premier nous amène à travailler au niveau local, chacune des particules n'ayant d'interaction qu'avec un proche voisinage (SECTION 1.B.1). Son confrère cherche à simplifier le problème pour chaque cellule de l'univers ; l'ensemble formant un système à résoudre (SECTION 1.B.2).

Dans les deux cas, la convergence vers une solution repose sur la qualité et la pertinence de la discrétisation : une répartition astucieuse des éléments catalyse la résolution (densité, régularité et combinatoire adaptées aux équations et à la géométrie globale du système) ; à l'opposé, une discrétisation hasardeuse de l'espace conduit inévitablement à des résultats erronés si résultat il y a... Il s'agit donc en premier lieu d'établir un compromis : approcher le plus finement possible la géométrie du corps fluide sans nuire à la résolution du problème (précision limitée par les capacités de stockage et les temps de traitement). Ce constat a par ailleurs amené de nombreux auteurs à privilégier certaines régions, notamment les frontières, le reste du système étant repéré par des éléments plus grossiers.

1.A.3.b Résolution temporelle

La décomposition temporelle est également un facteur majeur de réussite : intuitivement, si δt est trop grand, la simulation numérique perd toute précision et risque de conduire à des résultats aberrants ; à l'inverse, si δt est très petit, le nombre d'itérations anéantit les chances d'obtenir un résultat en temps raisonnable.

Il existe des indicateurs théoriques de stabilité. Ils sont généralement définis en fonction de la nature du matériau fluide, de l'écoulement et de la méthode de simulation. Par exemple, la *condition de Courant-Friedrichs-Lewy* lie δt, la résolution spatiale (δx) et la vitesse maximum (v_{max}) ; avec C une constante dépendante des équations manipulées, elle suggère : $\delta t_{calc} = C * \delta_x / v_{max}$.

En pratique, l'exploitation des résultats requiert généralement une solution à intervalles de temps réguliers, *e.g.* 25 images par seconde pour une animation visuelle soit $\delta t_{th} = 0.04s$. Si au cours de la simulation, le pas de temps retenu ne respecte pas la condition de stabilité, plusieurs étapes intermédiaires de résolutions sont exécutées afin d'assurer l'intégrité de la solution ou l'obtention d'un résultat aux intervalles de temps prédéfinis (t_i). Formellement :

$$\delta t_{\text{courant}} = min \left\{ \ \delta t_{th} \ , \ \delta t_{calc} \ , \ t_{i+1} - t_{\text{courant}} \ \right\}.$$

1.B État de l'art

L'état de l'art concernant la simulation de fluides newtoniens incompressibles avec surface libre est très large ; nous en faisons un tour d'horizon à partir des méthodes historiques en gardant à l'esprit notre objectif initial : la définition d'une représentation explicite de la surface du liquide à chaque instant de la simulation.

1.B.1 Simulations lagrangiennes

Le corps fluide est modélisé par un ensemble de particules matérielles, à l'instar de grosses molécules [11]. La méthode phare, intitulée *Smooth Particule Hydrodynamics* (SPH), résulte de travaux en astrophysique pour la simulation de la naissance des galaxies et des étoiles [Gin77, Luc77]. Son application à la simulation d'écoulement fluide a depuis fait l'objet de nombreuses avancées [Mon92, DG96, CR99, MCG03], aux vues des avantages apparents de ce point de vue :

— conservation de la masse et propagation des ondes de chocs implicites (garanties par les particules elles-mêmes),
— identification instantanée de la géométrie de l'objet fluide : les changements de topologie (détachement de gouttelettes, fusion de plusieurs volumes physiques de fluide) ne font appel à aucun mécanisme particulier.
— les effets de la viscosité et l'estimation de la pression sont calculés suivant le voisinage direct de chaque particule ce qui permet l'emploi d'algorithmes largement parallélisés. L'ouverture des processeurs graphiques (GPU) aux langages de programmation [12] permet aujourd'hui de réaliser de larges simulations en temps réel (plusieurs dizaines de milliers de particules [ZSP08]).

Néanmoins, cette technique de simulation laisse poindre deux difficultés majeures : la géométrie du corps modélisé, *a fortiori* la position de ses frontières, ne peuvent qu'être induites à partir d'un nuage de points (position des particules) et la résolution locale des équations du mouvement ne fournit pas de garanties à l'échelle de l'écoulement, en particulier pour la notion d'incompressibilité.
Après avoir présenté l'algorithme classique et mis en relief les différents points clés (SECTION 1.B.1.a), nous nous penchons sur les solutions avancées pour visualiser le corps fluide et, plus avant, obtenir une représentation explicite de la surface du liquide (SECTION 1.B.1.b).

1.B.1.a Discussion autour de l'algorithme classique

Le voisinage de chaque particule est utilisé pour estimer la densité locale ; la force de pression résultante est alors calculée (*e.g.* équation d'état) puis associée aux autres forces intéressant la particule (*i.e.* inertie, force de corps et viscosité). La vitesse et la position de chaque particule sont finalement mises à jour (intégration du pas de temps). Ces étapes sont résumées dans l'ALGORITHME 1.

Notion de voisinage
Le calcul des différentes grandeurs à l'intérieur du corps fluide et l'approximation des

11. Attention, l'analogie s'arrête ici, chaque point matériel représente un très grand nombre de molécules (*i.e.* milieu continu).
12. Notamment OpenCl (non spécialisé) et CUDA® pour les cartes NVidia®

Algorithme 1 : Pas de temps d'une simulation lagrangienne

```
1  pour chaque particule faire
2      Calcul du voisinage
3  pour chaque particule faire
4      Estimation de la densité locale
5      Déduction de la force de pression
6  pour chaque particule faire
7      Intégration des forces inertielles, extérieures, de corps, de pression
8  pour chaque particule faire
9      Calcul de la nouvelle vitesse
10     Calcul de la nouvelle position
```

dérivations spatiales des équations du mouvement sont dépendantes de la définition du voisinage. Il s'agit de déterminer l'ensemble des particules proches et l'importance qui leur est accordée ; on parle de noyau d'interpolation ou *kernel*. Il n'existe pas de consensus sur la définition d'un kernel optimal [IOS+14], il s'agit encore une fois du compromis précision-coût en dépit des nombreuses stratégies proposées pour limiter ce dernier (*e.g.* grille sous-jacente, table de hachage[13] ...).

On retiendra [IOS+14] que les requêtes de voisinage prennent une part non négligeable du coût total de chaque pas de temps : du quart à presque la moitié du temps selon le pas de temps choisi, la technique de recherche, la méthode de calcul des forces de pression et la taille de la simulation (nombre et dimension des particules).

Incompressibilité

L'ALGORITHME 1 présente une méthode de résolution directe de la force de pression à partir de la densité. La formulation sous forme d'une équation d'état du type $p_i = k((\frac{\rho_i}{\rho_0})^\gamma) - 1)$ [Mon94] est souvent privilégiée mais ne permet pas de forcer l'incompressibilité et le comportement du corps fluide s'en trouve affecté (manque de réalisme).

Une approche itérative permet néanmoins d'affiner le résultat, les méthodes de prédiction-correction (*Predictive-corrective Incompressible SPH*, [SP09]) ajustent la valeur de la force de pression par étapes successives : l'action des différentes forces est intégrée (*i.e.* prédiction) afin d'estimer la nouvelle densité puis la valeur de la pression est corrigée pour parfaire les résultats ; l'opération est répétée jusqu'à atteindre un résultat satisfaisant ou le nombre d'itérations alloué.

D'autres auteurs préconisent une solution plus radicale abandonnant l'approche lo-

13. Pour plus de détails sur ces fonctions de lissage, le lecteur pourra se référer aux publications de Gingold ou Muller (resp. [GM82] et [MCG03].

cale et lagrangienne pour la résolution d'un système global, à la manière des systèmes eulériens : toutes les forces hormis la pression sont appliquées, la pression est calculée puis "projetée" dans un espace de divergence nulle afin de satisfaire l'incompressibilité (*Incompressible SPH*, [CR99]). Plusieurs solutions hybrides ont été développées, qu'elles s'appuient sur une grille eulérienne (*e.g.* [LTKF08]), un maillage tétraédrique évoluant au cours du temps (*e.g.* [MEB+12]) ou encore un diagramme de puissance [dGWH+15, LS18].

1.B.1.b Représentation de la surface

La visualisation d'un nuage de points associe généralement une forme géométrique à chaque position matérielle repérée ; le choix intuitif de la sphère esquive le choix d'un repère local (*e.g.* normale). Cette solution simple, robuste et rapide est généralement réservée au prototypage : aucun modèle de la surface du fluide n'est généré mais les flux internes peuvent être repérés (par coloration et mise en transparence de certaines particules). Un rendu plus aboutit requiert des informations relatives à la surface de l'objet, en particulier pour déterminer l'illumination (*i.e.* réflexion et réfraction). Il en est de même pour agrémenter l'animation et y adjoindre par exemple les effets de la tension de surface.
Dès lors, il est question de générer un modèle surfacique à partir d'un nuage de points.

Représentations implicites
Largement privilégiées dans la littérature, elles reposent sur la définition d'une isosurface à partir d'un champ scalaire directement déduit de la position des particules (*e.g.* somme de primitives sphériques [Bli82]). Les différentes déclinaisons se différencient principalement sur la définition de la fonction approchée et le noyau d'interpolation employé pour limiter l'aspect bosselé du résultat. Muller *et al.* utilisent directement ce contour pour un rendu rapide [MCG03] mais se tournent vers une une autre méthode pour obtenir des résultats plus probants (*Marching Cubes*, voir paragraphe suivant). D'autres préfèrent l'emploi massif de techniques de lissage pour façonner le résultat (*e.g.* [ZB05]). Plus récemment, les auteurs comme Yu et ses collègues se sont tournés vers des kernels anisotropes, ce qui leur permet d'obtenir des résultats plus lisses et de mieux appréhender les films minces ; la FIGURE 1.4 extraite de leur publication compare les résultats des différentes méthodes citées ici.

Toutefois, il s'agit plutôt de capture de surface que de suivi : les représentations à des pas de temps successifs sont décorrélées.
Adams *et al.* [APKG07] ont fait un premier pas dans ce sens : ils exploitent les itérations successives de la simulation pour passer de l'information entre les pas de temps afin d'améliorer la définition de la surface (*i.e.* distance séparant les particules à la surface au pas de temps précédent). Le résultat est plus lisse et cette technique facilite les

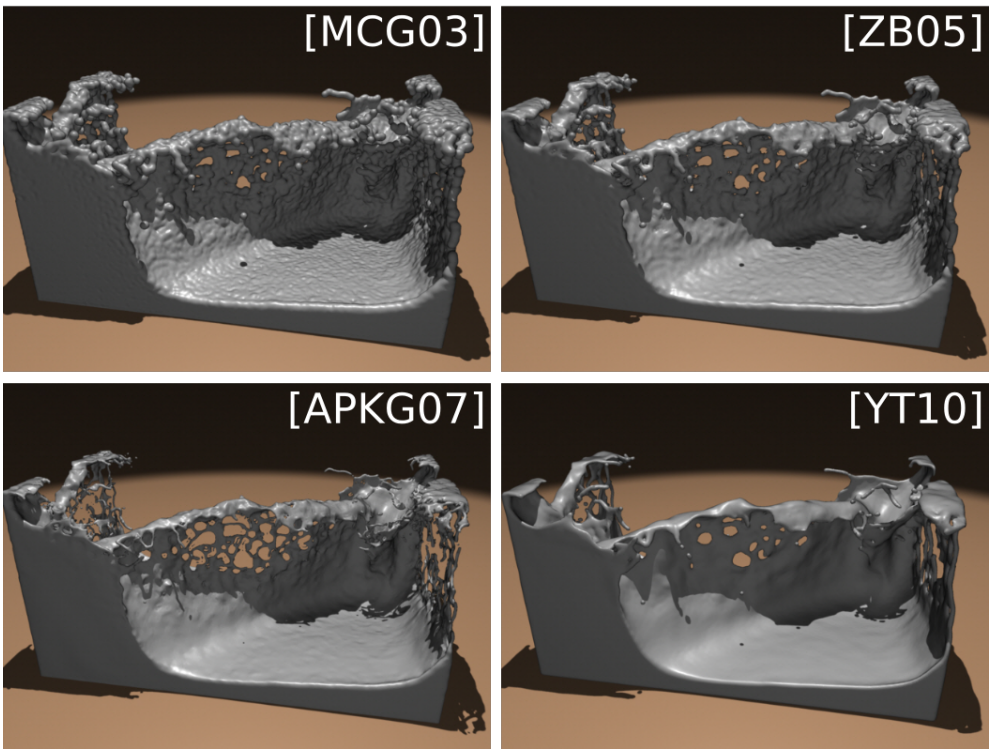


FIGURE 1.4 – Reconstruction de la surface du fluide à partir des particules fluides de la simulation. Yu *et al.* [YT10] comparent leurs résultats à différentes méthodes antérieures.

décisions de ré-échantillonnage du modèle physique (une granulométrie variable est mise en œuvre pour alléger la simulation).

Définition de maillages

Plusieurs méthodes permettent d'extraire un maillage surfacique à partir d'un nuage de points, notamment les techniques *Crust* [ABK98], *PowerCrust*, *Cocoone* [DGH01] ou encore celle fondée sur les diagrammes de Voronoï restreints ([BL17]).
Cette famille de solutions est largement exploitée pour l'interprétation de données issues de scanners 3d : elles acceptent en entrée des nuages de points très importants (plusieurs centaines de milliers de points). Toutefois, les traitements fondés sur les notions [14] de triangulation de Delaunay et de diagramme de Voronoï sont assez complexes et une approche plus simple est généralement privilégiée.

L'approche de Lorensen et Cline (*Marching Cubes* [LC87]) est particulièrement populaire : l'espace est décomposé selon une grille régulière (les cellules contenant des points sont aisément repérées), ce qui permet de réduire les efforts de recherche de voisinage et de guider la génération du maillage (le nombre limité de configurations possibles conduit à décider un ensemble de facette(s) pour chaque cellule). Pour augmenter la pertinence du résultat, Williams *et al.* ont proposé de voir le problème sous une forme d'optimisation : ils génèrent un maillage via la méthode des *marching tiles* (technique proche des *Marching Cubes*) et optimisent la régularité des triangles tout en contraignant la surface à rester entre deux enveloppes définies par l'union de sphères centrées sur les particules et de rayon différent (*i.e.* enveloppes interne et externe, [Wil08]).

Ces techniques ont fait leurs preuves mais il s'agit toujours de capture et non de suivi. Pour assurer une cohérence temporelle, il faut faire évoluer conjointement la simulation et le modèle de la surface. En pratique, ceci s'avère utopique : le volume délimité par la surface et celui repéré par l'ensemble des particules se dissocient après quelques itérations (les particules s'échappent du volume délimité par la surface). La cohérence entre le maillage surfacique et la représentation particulaire doit être contrainte par un mécanisme particulier, par exemple une projection périodique du maillage sur une iso-surface générée à partir du nuage de particules [YWTY12].

Malgré des performances moins attractives en terme de temps de calcul, les méthodes employant le point de vue d'Euler offrent une précision accrue pour le maintien de la densité (le système mécanique est considéré dans son ensemble) et les techniques récentes s'appuient directement sur une modélisation explicite des interfaces.

14. notions détaillées dans le CHAPITRE 2

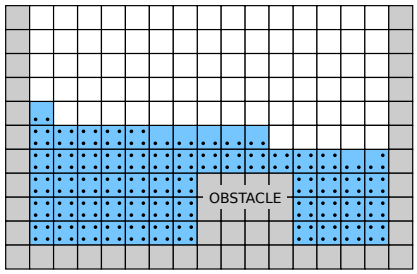


FIGURE 1.5 – Grille employée par la méthode MAC (reproduction de l'illustration proposée dans l'article original).

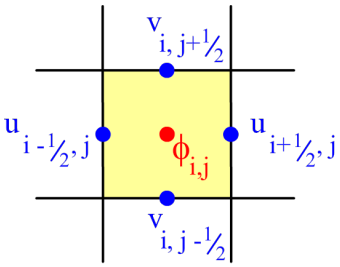


FIGURE 1.6 – Disposition des composantes de la vitesse et de ϕ. L'indexation décalée proposée dans l'article original [HW65] permet d'éviter l'apparition de motifs dans la solution (couplage vitesse-pression). Cette astuce a perdu de sa pertinence du fait de l'amélioration des méthodes de résolution numérique.

1.B.2 Méthodes eulériennes

Les méthodes de simulation d'écoulement de fluides présentant une surface libre et employant un repère eulérien font suite aux travaux fondateurs de Harlow et Welch (SECTION 1.B.2.a). Leur emploi à des fins d'animation est proposé 40 ans plus tard par Foster *et al.* initiant alors un large champs d'étude (SECTION 1.B.2.b).

1.B.2.a Algorithme fondateur

La méthode *Markers and Cells* [HW65] s'appuie sur un pavage régulier de l'espace (FIGURE 1.5) dans lequel chaque cellule est dotée d'un représentant des variables de la simulation (*i.e.* vitesse et pression, FIGURE 1.6), y compris celles ne contenant pas de fluide. Lorsque le système mécanique présente une surface libre, il faut déterminer l'ensemble des cellules contenant le corps fluide et faire évoluer sa représentation à chaque pas de temps de la simulation.

Pour cela, Harlow et Welch emploient un ensemble de particules passives [15] qui renseignent la présence de fluide : une cellule qui en contient au moins une est constituante du corps fluide. Suivant cette définition, la surface libre correspond à l'ensemble des cellules contenant au moins un marqueur et admettant au moins une cellule voisine vide.

15. Ces particules sont dépourvues de masse et n'interviennent pas dans la résolution des équations.

La mise à jour des champs de vitesse et de pression est faite en deux temps. Une première approximation du champ de vitesse est obtenue par intégration des forces d'advection, des effets de la viscosité et des forces de corps (ÉQUATION 1.2). Ce champ de vitesse est ensuite adapté pour satisfaire à la fois les conditions aux limites et l'équation de continuité (ÉQUATION 1.1) ; l'annulation de la divergence du champ de vitesse temporaire est opérée suivant une méthode de relaxation.

Les marqueurs sont ensuite déplacés pour actualiser la géométrie du corps fluide ; leur vitesse est déterminée par interpolation linéaire des valeurs associées aux cellules les plus proches. La liste des cellules contenant le corps fluide est finalement mise à jour pour l'itération suivante.

La méthode est relativement simple et facilement transposable à la 3D [CMBT02] ; d'un autre côté, la grille régulière s'avère peu pertinente : elle couvre tout l'espace, y compris les régions ne contenant pas de fluide, la taille de maille est donnée pour l'ensemble du domaine et il y a peu de chances que les frontières du système mécanique soient alignées avec les éléments finis.

Depuis, de nombreux travaux ont été menés afin d'améliorer chaque point de la méthode et ainsi permettre la résolution d'une très large variété de problèmes [MTF+08]. Il n'est pas question ici d'en dresser un inventaire mais simplement d'apporter au lecteur quelques points clé et d'ajuster la focale sur le sujet d'étude.

1.B.2.b Évolution de la méthode au sein de la communauté graphique

On distingue les évolutions relatives à la résolution des équations de celles s'intéressant à la discrétisation du domaine et finalement la méthode de modélisation de la surface du fluide.

Simulation sur grille régulière

Foster et Metaxas [FM96] sont les premiers à résoudre les équations de Navier-Stokes pour l'animation d'un corps fluide ; leur approche est stable mais requiert des pas de temps très courts. Ce problème est contourné par Stam : il introduit un nouveau système d'intégration des forces, plus permissif, qui autorise des pas de temps arbitrairement longs et suggère même une manipulation du corps fluide en temps réel [Sta99]. Bridson *et al.* se sont penchés sur les problèmes liés à l'alignement ou non de la grille et du phénomène étudié (FIGURE 1.7, [BHN07]). Enfin, certains auteurs suggèrent de se concentrer sur l'apparence de la surface du liquide : Thürey *et al.* proposent de délaisser la dynamique interne (simulation sur grille grossière) au profit d'une dynamique surfacique (simulation de vaguelettes [TWGT10]).

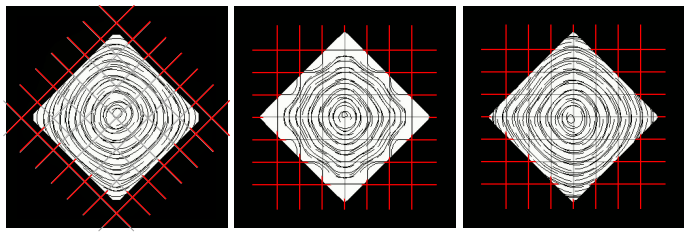


FIGURE 1.7 – Illustration des artefacts créés par le non-alignement de la grille avec les parois du conteneur (milieu). La réécriture (expression sous forme énergétique) de la formule de projection de la pression permet de pallier ce problème (à droite) [BHN07].

Tous ces travaux permettent de s'accommoder d'une décomposition spatiale régulière et cartésienne. Il serait néanmoins intéressant d'exploiter une modélisation spatiale plus souple, permettant par exemple d'avoir un niveau de détail plus important dans les régions d'intérêt particulier (discrétisation plus fine voire adaptée à la nature non structurée d'une surface libre).

Évolution de la discrétisation du domaine

Conscient des avantages d'un repère cartésien et de la nécessité d'adapter le grain de la discrétisation, Lossasso propose une structure de données particulière fondée sur le principe de subdivision (*octree* [LGF04]). La taille des éléments finis est ajustée localement sans compromettre les chances de résolution (persistance d'un équilibre entre éléments voisins).

L'aspect non structuré est ensuite adressé par Feldman [FOK05] qui propose d'exploiter un maillage tétraédrique pour approcher au mieux les frontières du domaine. Il est néanmoins limité par les performances matérielles et les techniques de génération de maillages ; dans ce contexte, la publication expose un système mixte mêlant grille régulière et maillage tétraédrique. Ce n'est que plus tard que l'on voit employés des maillages tétraédriques purs, voire la décomposition duale de l'espace : les diagrammes de Voronoï (*e.g.* travaux de Brochu, Bridson et Batty, [BB09, BXH10]).

La FIGURE 1.8 illustre les différentes approches. On remarque généralement que seules les régions présentant un intérêt particulier (*e.g.* interfaces du corps fluide) sont réellement ajustées à la géométrie ; le reste de l'univers est couvert d'un pavage plus régulier (génération et manipulation plus aisées).

1.B.2.c Modélisation du volume de fluide et des frontières

La totalité de l'espace étant discrétisé, il nous faut renseigner le simulateur sur la position du corps fluide. L'approche historique met en œuvre un ensemble de marqueurs

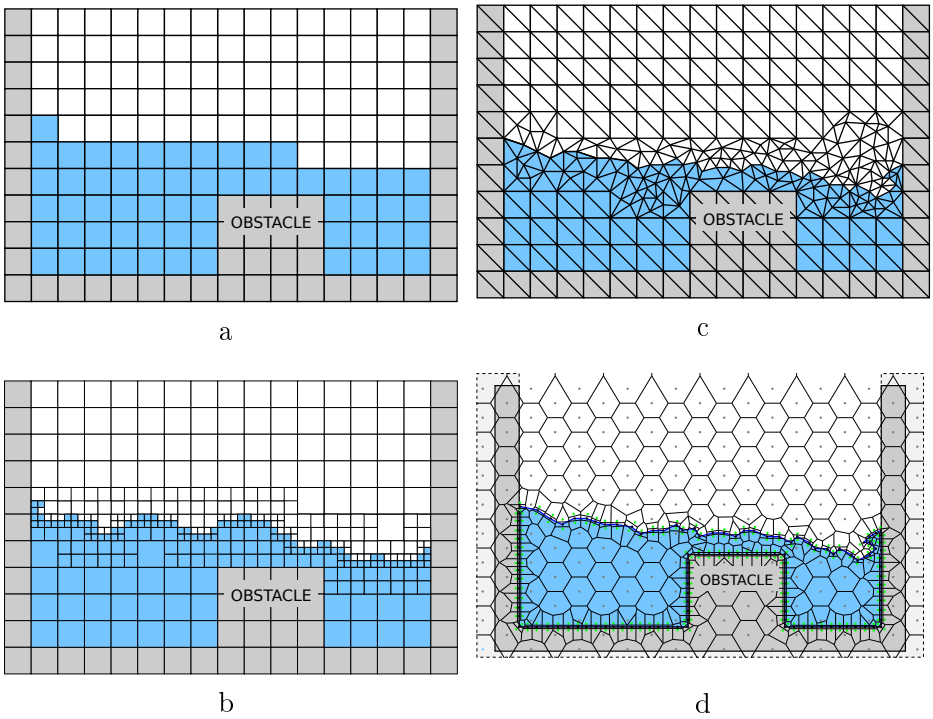


FIGURE 1.8 – Discrétisation de l'espace de résolution des équations de mouvement : grille régulière (a), raffinement de plusieurs cellules (b), maillage triangulaire (c) et découpage de l'espace suivant un diagramme de Voronoï (d).

(particules sans masses [HW65]) et sa première exploitation à des fins graphiques exploite un champ scalaire de hauteur [FM96]. On retrouve ici, comme à l'accoutumée, les deux points de vue antagonistes inspirés des travaux respectifs de Lagrange et Euler. Ces représentations pionnières ont rapidement laissé place à des approches plus précises.

Descriptions implicites

L'interface n'est pas directement définie, sa position et sa géométrie (normale, courbure) sont déduites à partir de données numériques ; en pratique, le zéro d'une fonction scalaire échantillonnée dans l'espace ou un ensemble de données volumétriques. Ces définitions reposent en général sur la même décomposition que celle servant la résolution numérique.

Fonction distance discrète : Les méthodes les plus populaires sont les iso-surfaces [16] (*Level Set*, [OS88, OF03]) : la surface est modélisée par le zéro d'une fonction distance définie par valeurs discrètes (*e.g.* une par cellule de la discrétisation). Faciles d'implantation, elles gèrent avec aisance les changements de topologie. En revanche, la grille sous-jacente et la technique de mise à jour du champs de valeur [17] sont à l'origine d'un lissage important ; ce phénomène de diffusion se traduit par l'érosion des crêtes et une variation importante du volume du système fluide au cours de la simulation. Une meilleure discrétisation de la fonction (*e.g.* raffinement type *Octree* [LGF04, ELF05]) et l'adjonction de particules passives (*Particle Level Set*, [EFFM02, ENGF03]) pallient ces limitations ; l'approche s'avère alors précise et efficace dans de nombreuses applications. La normale et la courbure moyenne sont obtenues par dérivations successives du champs scalaire [18].

Volume de fluide : Une stratégie alternative mesure le "niveau de remplissage" de chaque cellule : une donnée volumique fractionnaire remplace la distance à la surface (FIGURE 1.9.d). Cette formulation permet d'avoir un contrôle direct sur les flux entrants et sortants de chaque cellule (favorise le respect de la contrainte d'incompressibilité) mais nous ne discuterons pas plus ces approches s'appuyant sur une représentation implicite de la surface.

Descriptions explicites

Il s'agit ici d'avoir un modèle maillé de l'interface à chaque pas de temps. Cette représentation explicite rend directs et relativement précis tous les traitements adressant la surface, qu'il s'agisse des opérations graphiques ou de calculs physiques. Toutefois, la génération et la manipulation d'un tel maillage s'avère complexe : il est aisé d'imaginer que les déformations engendrées par un champs de vitesse non uniforme altèrent ses

16. Équivalent 3d des courbes de niveaux.
17. Mécanisme de transport.
18. $N = \nabla\Phi$ et $\kappa = \nabla^2\Phi$

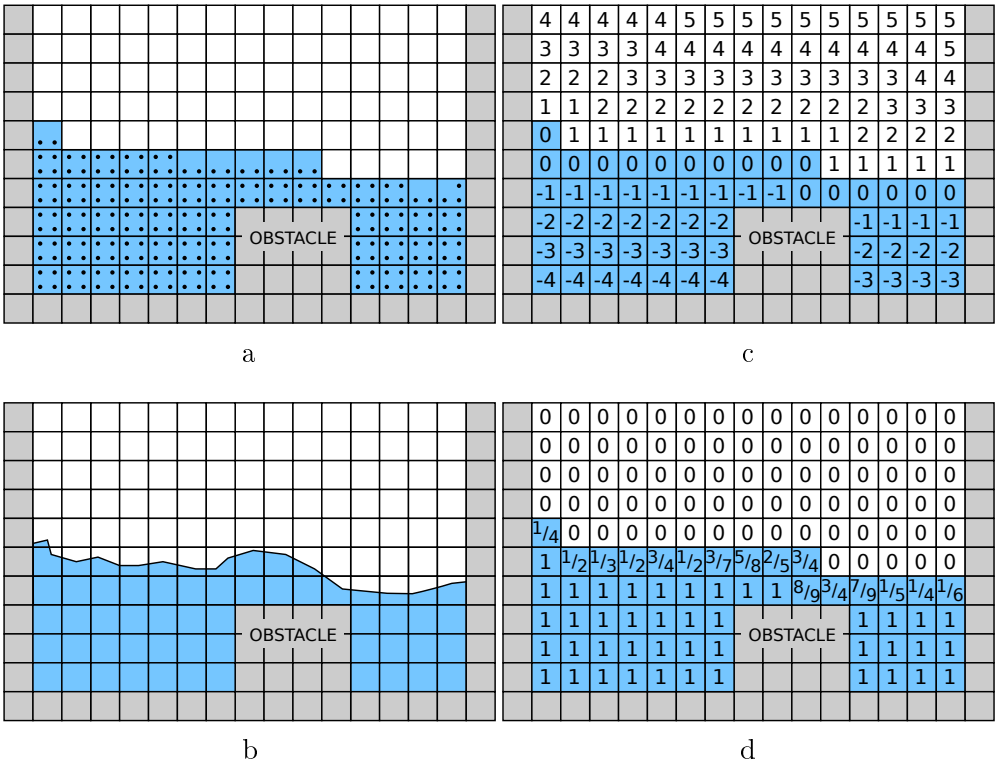


FIGURE 1.9 – description de la surface du fluide : lagrangienne (explicite) : particules (a) et maillage surfacique (b) ; et eulérienne (implicite) : iso-surface (c) et volume de fluide (d).

éléments constitutifs (proportions des facettes) et peut conduire à des situations plus délicates mettant en péril sa définition même (inversion des facettes, auto-intersections, changement de topologie).

La première idée consiste à définir le modèle surfacique à partir de la discrétisation employée pour la simulation. Dès lors, un algorithme de contour est envisageable (*iso-contouring*, [GGL+98]). Glimm *et al.* ont en effet proposé une librairie destinée à la simulation d'écoulement 3d permettant de manipuler un maillage surfacique et ont par la même occasion énoncé les principales idées relatives au domaine. En particulier, ils proposent d'exploiter la description eulérienne du système mécanique pour détecter et résoudre les intersections entre interfaces et d'utiliser des opération simples (*e.g.* insertion / suppression d'arête) pour améliorer la géométrie des facettes ne présentant pas les critères de qualité retenus. Ils soulignent également l'importance des erreurs induites par les opérations de remaillage et suggèrent donc une mise en œuvre judicieuse (*i.e.* régulière et parcimonieuse...).

Cette voie a été suivie et améliorée, en témoignent les travaux de Bargteil *et al.* [BGOS06] dans lesquels il est proposé de générer un maillage à chaque pas de temps de la simulation à partir d'un champs scalaire.

Néanmoins, cette technique est encore fondée sur la capture et non le suivi.

Ce second point de vue est développé par Du *et al.* [DFG+06], qui ont partiellement décorrélé le maillage surfacique de la grille : des opérations de remaillage locales sont menées pour répondre à la déformation ; les difficultés majeures, notamment les changements de topologie, sont quant à elles résolues à l'aide de la grille sous-jacente.

Cette approche hybride bénéficie des avantages de chaque description et de nombreux travaux suivent ce chemin. Le lecteur peut se tourner vers les publications de Wojtan, Thürey, Turk et leurs collègues [WTGT09, TWGT10, WTGT10] ; en plus de proposer une méthode de suivi similaire, ils y présentent plusieurs idées relatives à la topologie des objets modélisés. En particulier, ils contraignent les scissions et favorisent les fusions afin d'assurer la cohérence du système alliant un maillage surfacique haute résolution à une simulation "gros grain" [WTGT10].

Une autre école, inspirée des travaux de Pons et Boissonnat [PB07], privilégie l'extraction de certaines faces de la discrétisation volumique supportant la résolution physique : les faces partagées par deux tétraèdres appartenant à des milieux différents définissent une portion des interfaces. Cette technique directement transposable aux problèmes multi-phases[19] fourni généralement une bonne approximation de la surface du fluide. Certaines facettes sont parfois oubliées aussi, Misztal et ses collègues ont par la suite établi une méthode similaire offrant quelques garanties supplémentaires sur la validité

19. Système de plusieurs fluides non miscibles.

topologique du modèle surfacique et assurant la gestion des auto-intersections y compris pendant la phase de déformation (*Deformable Simplicial Complex*, [MBE+10]).

Toutefois, ces approches ne peuvent garantir la correspondance entre deux constructions successives : elles sont définies à partir d'une représentation alternative, sous-jacente. Une technique purement lagrangienne consiste à faire évoluer le maillage dans le temps (suivi de la déformation) tout en veillant à maintenir la qualité et la validité du modèle surfacique.

1.C Surfaces déformables

Les présents travaux s'intéressent principalement au remaillage de surfaces déformables. La simulation d'écoulement est une application particulière : le maillage modélisant les interfaces du corps fluide. Ce maillage est défini au début de la simulation et la géométrie de ses facettes est supposée satisfaisante [20] favorisant ainsi les traitements relatifs à la simulation et à la visualisation.

A chaque itération, le maillage est déformé suivant le champs de vitesse avoisinant [21] ; les éléments du maillage sont alors potentiellement disproportionnés par rapport à la résolution originale ou pire encore, la modélisation n'est géométriquement plus valable. Différents traitements sont envisagés pour maintenir la qualité de l'approximation et l'harmonie de la représentation :

- détecter les événements topologiques (coalescence / scission) et adapter le modèle en conséquence,
- ajuster le nombre de sommets au gré des déformations,
- améliorer leur répartition sur le domaine,
- et ajuster leur combinatoire en fonction de la nouvelle géométrie de la surface.

Dans ce domaine, on peut noter les travaux de Jiao *et al.* [Jia07, JCNH10] et les recherches conjointes de Bridson, Brochu et Batty.

Bien que le domaine d'application soit légèrement différent (simulation de combustion), Xiangmin Jiao s'est intéressé au problème des surfaces évolutives en particulier au sujet de l'advection [22] et l'optimisation de la répartition des sommets du maillage

20. La notion de qualité d'un maillage sera précisée dans le chapitre suivant, nous cherchons ici à mettre en exergue les difficultés du domaine et les différentes pistes de travail.

21. Solution la plus simple : advection des sommets suivant une interpolation linéaire des valeurs les plus proches (par exemple, cellule de la grille contenant le sommet et toutes ses voisines).

22. Il distingue deux comportements relatifs à la nature de la déformation : dispersante (simulation écoulement élément gazeux) ou rigide (apparentée aux liquides, conserve les pics et les arêtes vives) ; Ce sujet ne sera pas plus détaillé ici.

sur le domaine surfacique approché. L'auteur met en avant l'importance de l'erreur géométrique induite par les opérations de remaillage et souligne la nécessité de leur minimisation. Il propose d'exploiter une analyse algébrique (analyse en composantes principales d'un système matriciel) de chaque sommet pour définir un espace primaire et son complémentaire, l'espace nul. Lorsqu'un sommet est déplacé dans ce dernier, le volume délimité par l'interface est inchangé.

Toutefois et malgré des résultats pertinents, cette solution de suivi de surface n'est pas suffisamment développée pour répondre à une simulation d'écoulement : la méthode devrait répondre au problème de l'ajustement du nombre de sommets et de leur combinatoire, en particulier lorsque la topologie du corps fluide change (collision, détachement de gouttelettes).

Brochu *et al.* [BB09] apportent une solution complète ; elle combine la technique de lissage proposée par Jiao à un ensemble d'opérations "chirurgicales" du maillage (insertion/suppression de sommet, pivot d'arête) pour améliorer la représentation, y compris pour répondre à un changement topologique. Ce dernier point est rendu possible grâce aux travaux de Bridson *et al.* à propos de la simulation de vêtements [BFA02] (dans ce contexte, le maillage est conservé tout au long de la simulation mais ne peut en aucun cas traverser un autre ou une partie de lui même). Dans ce sens, en plus de détecter les intersections lors de la phase d'advection, ils suggèrent d'étendre cette détection à chaque opération de remaillage ; celle-ci est avortée si elle engendre une intersection.
Cette stratégie est pertinente et mise en œuvre dans un nouveau système de simulation où la discrétisation du domaine volumique est imposée par le modèle surfacique. Batty *et al.* ont en effet proposé de discrétiser l'espace volumique (domaine de la simulation) suivant un diagramme de Voronoï dont une partie des graines sont les sommets de l'interface (FIGURE 1.8, cadre d, [BB08]).

En résumé, il est possible de modéliser les interfaces d'un corps fluide à l'aide d'un maillage triangulaire. Toutefois, la dynamique soulève de multiples défis (l'objet peut subir de larges déformations et même changer de topologie). Pour assurer le suivi, il convient d'ajuster le nombre de sommets de la représentation et leur connectivité sans entacher le niveau de détail. En d'autres termes, limiter les erreurs d'approximation lors des divers traitements visant à optimiser la qualité des éléments constitutifs du maillage ou encore assurer la validité géométrique de l'objet surfacique.

Le chapitre suivant présente l'ensemble des notions de géométrie évoquées jusqu'ici, précise leur définition et introduit les outils nécessaires à la présente étude.

Chapitre 2

Géométrie algorithmique

Sommaire

2.A Maillages **31**
2.A.1 Surfaces triangulées 31
2.A.2 Géométrie discrète 34
2.A.3 Évaluation d'un maillage 37
2.B Triangulation de Delaunay **41**
2.C Diagrammes de Voronoï **42**
2.C.1 Dualité avec la triangulation de Delaunay 45
2.C.2 Diagramme de Voronoï barycentrique 45
2.D Application aux domaines courbes **51**
2.D.1 Diagrammes de Voronoï géodésiques 52
2.D.2 Diagramme de Voronoï restreint 52
2.D.3 Triangulation de Delaunay restreinte 59
2.E Éléments de topologie **61**
2.E.1 Vocabulaire 62
2.E.2 Homotopie et Homéomorphisme 64
2.E.3 Caractéristique d'Euler-Poincaré 64
2.E.4 Équivalence de la triangulation de Delaunay 66
2.F Remaillage fondé sur les diagrammes de Voronoï **69**
2.F.1 Optimisations de l'échantillonnage dans $\mathbb{R}^3$ 72
2.F.2 Génération de maillages anisotropes 75

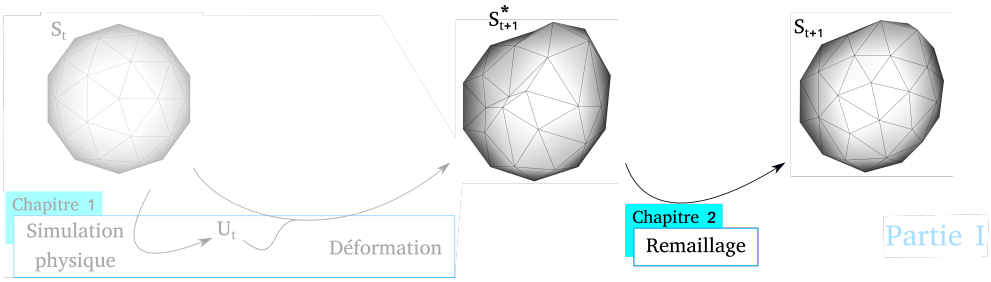


FIGURE 2.1 – Pour conserver un maillage valide et utile aux différentes opérations dont il est support, il est nécessaire de remailler : définir un nouveau maillage à partir d'une précédente approximation.

Comme annoncé en introduction, notre objectif est d'employer une méthode de remaillage fondée sur les diagrammes de Voronoï pour répondre au problème de suivi de surface (FIGURE 2.1). Avant de pouvoir présenter en détail cette technique de remaillage, il convient de préciser l'ensemble de concepts mathématiques et algorithmiques mobilisés.

Nous commençons par décrire quel type de maillage nous souhaitons manipuler, et quels usages vont en être fait, ce qui implique du vocabulaire, des notions générales relatives aux triangulations, et les moyens de les générer (SECTION 2.A). Les définitions et les différentes remarques convergent vers une triangulation particulière la *triangulation de Delaunay* ; celle-ci offre, par construction, une garantie géométrique intéressante (maximise le plus petit angle de la triangulation, SECTION 2.B). Autrement dit, améliorer la qualité intrinsèque du maillage (e.g. allure et régularité des triangles) revient à améliorer la position des sommets de la triangulation. La combinatoire est définie par la suite de manière automatique ; plusieurs méthodes permettent de définir une telle triangulation, en particulier celle fondée sur les diagrammes de Voronoï.

Un diagramme de Voronoï (SECTION 2.C) est une partition de l'espace en un ensemble de cellules convexes définie à partir d'un ensemble de points appelés générateurs ou graines. Cette décomposition de l'espace est intéressante à double titre.
Premièrement, elle fournit un ensemble de domaines d'intégration connexes et convexes, permettant de conduire une optimisation.
D'autre part le diagramme de Voronoï n'est autre que le dual géométrique de la triangulation de Delaunay. Autrement dit, passer de l'un à l'autre est direct, mécanique et bijectif : chaque cellule de Voronoï correspond à un sommet de la triangulation (*i.e.* générateur) et chaque intersection non vide de cellules (double, triple, quadruple...) correspond à un élément du maillage primal (arête, facette, tétraèdre...).

Sous certaines conditions d'échantillonnage, il est possible de généraliser ce concept de remaillage aux domaines surfaciques courbes (SECTION 2.D) ; ces contraintes peuvent être exprimées en fonction de la géométrie (*e.g.* ε-échantillonnage [ABK98])

ou selon un ensemble de règles fondées sur la nature topologique des cellules et leur combinatoire (SECTION 2.E).
Lorsqu'elles sont vérifiées, Lévy *et al.* [YLL+09, LB13] proposent de remailler des domaines surfaciques à l'aide des *diagrammes de Voronoï restreints* : étant donnés un nombre d'échantillons et un précédent maillage, ils optimisent la répartition des échantillons sur ou à proximité du domaine surfacique et, une fois convergé, génèrent la *triangulation de Delaunay restreinte* (primal, résultat du remaillage) à partir du diagramme de Voronoï restreint (dual, SECTION 2.F).

2.A Maillages

La présentation des maillages faite jusqu'à présent est restée volontairement succincte ; nous avons simplement souligné l'aspect pratique des grilles et autres treillis (accès aisé aux nœuds et régularité des mailles) et, d'autre part, insisté sur leur manque d'adaptativité aux configurations réelles (granulométrie, alignement...). C'est pourquoi, malgré une génération et une manipulation plus complexes, les maillages non structurés sont désormais largement privilégiés ; en particulier, les surfaces triangulées (SECTION 2.A.1) sur lesquelles peuvent être transposés les opérateurs et les notions de géométrie classique (SECTION 2.A.2).

Les critères selon lesquels un maillage est estimé être une bonne approximation et une bonne représentation (SECTION 2.A.3) expliquent en grande partie la popularité de la triangulation de Delaunay (SECTION 2.B).

2.A.1 Surfaces triangulées

Le vocabulaire et le formalisme déployés ici permettent de décrire précisément quels objets nous allons manipuler, en partant du triangle pour aller vers l'opération de triangulation d'un ensemble de points.

2.A.1.a Simplexe

Le triangle constitue le polygone plan le plus simple : il est clos par trois arêtes reliant 3 sommets. Le nom et l'orientation d'un triangle dépendent de l'ordonnancement de ses sommets ; par convention, nous utilisons le sens trigonométrique (FIGURE 2.2). Formellement, c'est le simplexe de dimension 2.

Plus généralement, étant donné $e_0, ..., e_k$ un ensemble de $k+1$ points linéairement indépendants[1] dans un espace euclidien $\mathbb{E}^m$ $(0 \leq k \leq m)$, un *k-simplexe* σ est défini

1. Plus précisément, ce sont l'ensemble des vecteurs $e_i - e_0$ qui sont linéairement indépendants.

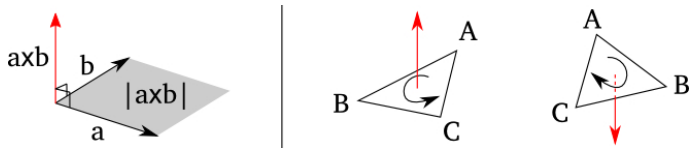


FIGURE 2.2 – Le produit vectoriel permet de déterminer la normale $(a \times b)$ et l'aire $(|a \times b|/2)$ d'un triangle à partir de la formulation vectorielle de deux arêtes issues du même sommet (à gauche). À l'instar d'une pièce de monnaie, on distingue la face et l'envers du triangle (à droite)

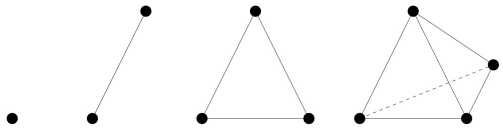


FIGURE 2.3 – Simplexes de $\mathbb{R}^3$.

par l'*enveloppe convexe* [2] de cet ensemble de points. L'ensemble des faces d'un simplexe σ sont les simplexes σ' de dimension inférieure ($dim\ \sigma' < dim\ \sigma$).
Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, on distingue 4 simplexes (FIGURE 2.3) : le tétraèdre (simplexe de dimension 3) est composé de quatre simplexes de dimension 2 (*i.e.* triangles), six segments et quatre sommets (respectivement simplexes de dimension 1 et 0).

Un *complexe simplicial* est une collection de simplexes dont tous les chevauchements sont également des simplexes du même ensemble (FIGURE 2.4). Autrement dit, K est un complexe simplicial si et seulement si :

1. soient $\sigma \in K$ un simplexe et τ une face [3] de σ alors $\tau \in K$,
2. soient $\sigma_1, \sigma_2 \in K$, alors $\sigma_1 \cap \sigma_2$ est vide ou est une face de σ_1 <u>et</u> une face de σ_2.

2.A.1.b Variété

Les surfaces considérées ici sont des *variétés* connexes [4] et orientables de dimension 2, en particulier [5] celles semblables (homéomorphes, voir SECTION 2.E.2) à une sphère ($\mathbb{S}^2$), un tore surface ou une sommation connexe de ces deux types d'objets (FIGURE 2.5).

2. Un ensemble est dit convexe si étant donnés deux points quelconques de cet ensemble, le segment les joignant est intégralement inclus dans l'ensemble ; en 2D, on peut faire l'analogie avec un élastique qui serait "lâché" autour d'un ensemble d'objets.
3. face : simplexe de la dimension considérée (*e.g.* une arête est une face de dimension 1).
4. connexe : qui ne peut être recouvert par 2 ensembles disjoints.
5. On écarte les plans projectifs, hors champs d'étude.

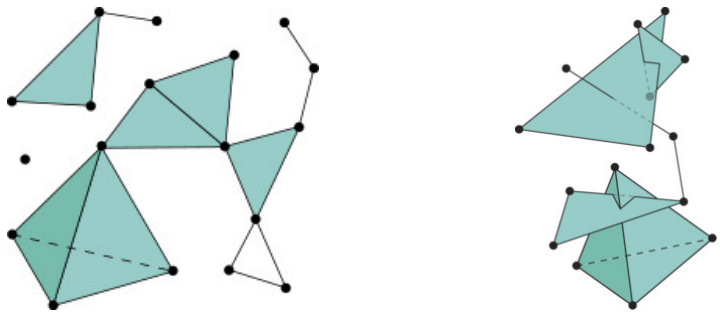


FIGURE 2.4 – Représentation géométrique d'un complexe simplicial valide (à gauche) ; à droite, il ne s'agit pas d'un complexe simplicial : plusieurs intersections ne correspondent pas à un simplexe (source : Wikipedia).

FIGURE 2.5 – Illustration d'une sphère, d'un tore, d'un 2-tore et d'un 3-tore (source : Wikipedia).

Une *variété topologique* de dimension n est un espace topologique séparé[6] dans lequel tout point possède un voisinage ouvert semblable à une boule ouverte de l'espace euclidien ; soit, dans notre cas, un disque ($\mathcal{B}^2$, FIGURE 2.6).

Comme pour le triangle (FIGURE 2.2), on peut choisir un sens de rotation dans le disque correspondant au voisinage ; une surface est orientable si et seulement si tous ses lacets préservent l'orientation. Dans le cas contraire, on se retrouve face à un ruban de Möbius ou une surface dont un sous ensemble est semblable à ce dernier.

Les *variétés à bord* sont définies de la même façon pour l'intérieur : les points non attenants au bord de la surface admettent un disque topologique pour voisinage ; les

6. *I.e.* deux points distincts admettent un voisinage disjoint.

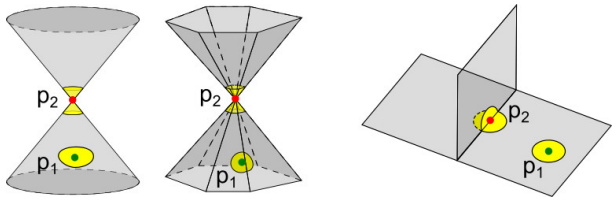


FIGURE 2.6 – dans chacune des figures, $P1$ est un sommet variété ; en revanche, $P2$ admet un voisinage différent d'un disque topologique.

points situés au bord du domaine présentent quant à eux un voisinage semblable à un demi-disque ($\mathbb{H}^2$). L'ensemble des points formant le bord est par ailleurs une variété de dimension 1 sans bord dont le nombre de composantes connexes est fini et chacune d'elles est équivalente au cercle ($\mathbb{S}^1$).

Ces surfaces compactes (finies et bornées) admettent toujours une triangulation (Théorème de T. Rado, 1925). Aussi, quand nous faisons référence à une surface triangulée, nous supposons manipuler un complexe simplicial de dimension 2 dont tous les sommets sont variété.

En pratique, une surface triangulée est variété si et seulement si ses éléments sont non dupliqués, de dimension strictement inférieure à 3, ses arêtes sont partagées par exactement deux facettes [7] et tous ses sommets admettent un ouvert [8] pour voisinage. Autrement dit, toutes les facettes incidentes à un même sommet sont connectées entre elles par leurs arêtes et on doit pouvoir parcourir exactement cet ensemble sans saut ni redondance ; les facettes voisines d'un sommet forment le voisinage de ce point et, par abus de langage, cette notion peut être étendue au premier cercle de sommets voisins (*i.e. one-ring*).

2.A.1.c Triangulation

Le mot triangulation admet plusieurs sens : il désigne à la fois un maillage et l'opération délicate qui consiste à définir ce maillage, c'est à dire l'ensemble d'arêtes et de facettes le constituant.

Ce maillage est supposé être l'approximation d'une surface lisse sur laquelle il est nécessaire d'opérer des mesures (e.g. normale, SECTION 2.A.2), voire d'intégrer un calcul numérique plus conséquent (e.g. optimisation). La stabilité et la précision numérique de ces calculs sont fortement liés à la qualité des éléments finis et plus largement celle de la triangulation (SECTION 2.A.3).

2.A.2 Géométrie discrète

La géométrie classique propose un ensemble d'outils permettant de caractériser une surface courbe, d'en extraire les propriétés comme la normale en un point, ou encore effectuer des mesures (angle, aire, volume). La géométrie algorithmique doit proposer des outils similaires en s'appuyant sur une approximation plane par morceau ; Par exemple, la normale est aisément définissable en tout point des facettes mais qu'en est-il au niveau des arêtes ou des sommets (SECTION 2.A.2.a) ? comment déterminer si le volume

7. Cas des variétés à bords, les arêtes formant le bord n'admettent qu'une unique facette adjacente.
8. De la même manière, les sommets du bord voient leur voisinage limité à un demi-ouvert.

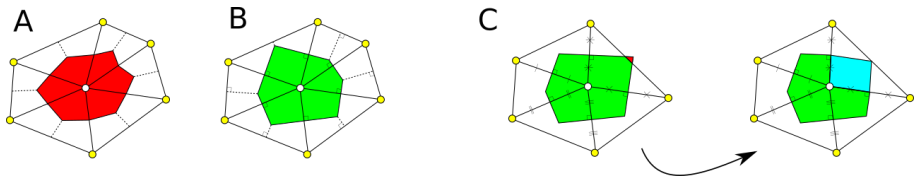


FIGURE 2.7 – Meyer *et al.* suggèrent d'adapter la partition à la géométrie des triangles en remplaçant le découpage barycentrique (A) par un découpage selon Voronoï (B) ce qui permet de borner l'erreur d'approximation. Cependant, l'utilisation de l'opérateur de Laplace-Beltrami leur interdit de sortir du premier cercle de facettes incidentes (C, pointe surlignée en rouge) aussi, pour les triangles obtus, ils suggèrent de se rabattre sur un découpage fondé sur la combinatoire du maillage (découpage mixte, à droite).

délimité par une surface correspond à un objet plein ou un évidement à l'intérieur d'un objet volumique plus large (SECTION 2.A.2.b) ?

Ces mises en situation révèlent que la qualité des mesures est dépendante de la qualité du domaine polygonal et des éléments qui le constituent (SECTION 2.A.3).

2.A.2.a Normale

Définir la normale pour chaque facette d'une surface polygonale ne pose aucune difficulté (produit vectoriel de deux arêtes incidentes en un même sommet, FIGURE 2.2). En revanche, les maillages ne sont pas des surfaces réellement lisses : les notions de plan tangent et de normale ne sont pas définies au niveau des arêtes et des sommets. Un moyennage spatial est généralement envisagé :

$$n_{sommet} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i n_i}{\| \sum_{i=1}^{n} \omega_i n_i \|} \tag{2.1}$$

Cette équation donne une formulation simple, d'autres sont possibles : la littérature recense de nombreuses discussions quand à la définition du voisinage et à la pondération des différents intervenants. Par exemple, Meyer *et al.* [MDSB03] proposent une méthode de mesure dépendante de la géométrie des faces incidentes (FIGURE 2.7) qui, sous couvert de conditions favorables, permet de borner l'erreur d'approximation.

2.A.2.b Volume signé

Pour calculer le volume inscrit dans une surface polygonale fermée bornée et orientable, il nous faut choisir un point fixe quelconque de l'espace (par exemple l'origine)

Algorithme 2 : Volume signé délimité par une surface orientée, bornée fermée

Entrées : F, la liste des facettes orientées d'une variété triangulée

Sorties : vol, le volume signé délimité par le domaine surfacique

1 $vol \leftarrow 0.0$
2 $p_0 \leftarrow (0,0,0)$ `// ou tout autre point de l'espace`
3 **pour chaque** $f \in F$ **faire**
4 $\quad v_1 \leftarrow sommet(f,1)$
5 $\quad v_2 \leftarrow sommet(f,2)$
6 $\quad v_3 \leftarrow sommet(f,3)$
7 $\quad vol \leftarrow vol + vol(v_1, v_2, v_3, p_0)$

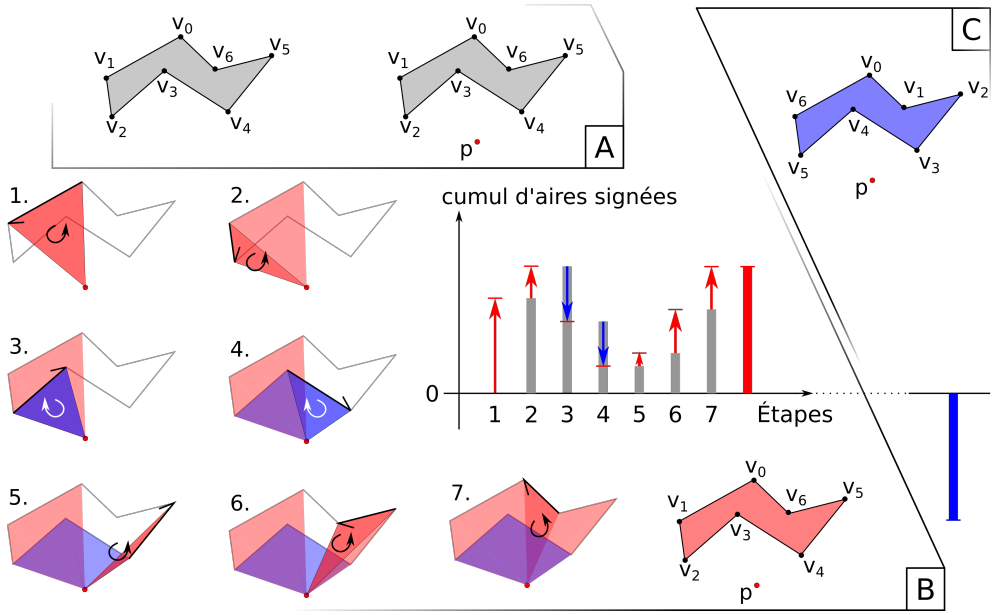


FIGURE 2.8 – Exemple de calcul de l'aire signée d'un polygone ; la première étape consiste à choisir un point de référence arbitraire dans le plan (p, cadre A). Chaque arête du polygone est alors associée à ce troisième point pour former un triangle (étapes 1 à 7, cadre B) ; l'orientation du triangle donne le signe associé à l'aire lors du cumul (coloration : rouge > 0 et bleu < 0). Finalement, la région surlignée de violet a été mesurée deux fois, mais associée à un signe opposé : ces mesures s'annulent et on retrouve la superficie attendue (surlignée de rouge). Le cadre C présente le même polygone, cette fois orienté dans le sens horaire (aire signée < 0).

puis appliquer l'ALGORITHME 2. Il est connu sous différentes appellations, notamment théorème du lacet ou formule de Gauss, et consiste à associer à chaque élément du maillage (facette) un point fixe. Ces quatre points définissent un tétraèdre orienté admettant une mesure de volume signée : négatif si la portion délimitée est un évidement et positif si les normales pointent vers l'extérieur du tétraèdre ; leur sommation retourne le volume signé délimité par la surface.

La FIGURE 2.8 propose une illustration du calcul pour un polygone 2D. La transposition en 3D est directe ; le volume signé résulte directement du produit mixte (calcul vectoriel).

2.A.3 Évaluation d'un maillage

Comme nous venons de le voir, un maillage est généralement construit pour supporter un traitement algorithmique : la notion de qualité d'un maillage est donc dépendante du domaine d'application (CAD, visualisation, animation, domaine de simulation...), des ressources disponibles (des applications mobiles aux super-calculateurs) ou encore de la méthode employée pour le générer (SECTION 2.A.3.a).

Il s'agit en réalité d'un compromis établi en fonction des données d'entrée, des paramètres (nombre de sommets ou tout autre contrainte utilisateur...) et du traitement algorithmique auquel le nouveau maillage est sensé répondre (SECTION 2.A.3.b). La méthode de maillage doit être automatique et doit fournir une nouvelle approximation dont la combinatoire, la géométrie et la compression de données sont adaptées à la future application (SECTION 2.A.3.c).

2.A.3.a Objectifs et contraintes

Les frontières d'un domaine volumique, *a fortiori* celles d'un corps fluide, peuvent être approchées par une variété triangulée et ces modèles surfaciques sont amenés à :

— permettre des mesures géométriques précises et pertinentes (géométrie algorithmique),
— servir d'entrée au pipeline de rendu (affichage),
— ou encore informer la simulation de la position et de la géométrie de surface approchée (*i.e.* frontière du corps volumique)

Dans ce dernier cas, l'ensemble d'éléments finis (triangles) peut être requis pour résolution d'EDP (*e.g.* modélisation de la tension superficielle, simulation de vaguelettes *e.g.* [TWGT10]), ou encore influencer la discrétisation volumique sur laquelle est résolue la simulation (*e.g.* [BXH10]).

Du point de vue des ressources disponibles (puissance de calcul, taille mémoire), nous n'avons pas de contraintes particulières en restant toutefois dans des proportions

raisonnables[9] ; la méthode de remaillage étudiée ici n'a pas vocation à être utilisée par une application temps réel, pour laquelle d'autres techniques sont plus adaptées (*e.g.* travaux de Stam [Sta99] pour une simulation eulérienne ou, une solution lagrangienne exécutée sur GPU comme le suggèrent Crane ou Zhang [CLT07, ZSP08]).

2.A.3.b Repères qualitatifs

De nombreux facteurs permettent de discuter la qualité d'un maillage ; les interrogations portent à la fois sur l'aspect extrinsèque (évaluation de l'approximation) et sur ses propriétés intrinsèques (éléments constitutifs du maillage).

La qualité de l'approximation s'intéresse au rapport modèle - modélisation. Même si cela parait évident, la modélisation doit respecter la dimension et le genre de l'objet de référence (c.f. topologie algébrique SECTION 2.E). Dans le même ordre d'idées, il convient de fournir un modèle bien défini et en accord avec les contraintes générales ; ici, définir une variété triangulée qui est, par définition, exempte d'auto-intersection, d'arête ou sommet isolé... Il nous incombe donc de mettre en place des mécanismes de contrôle visant au maintien de ces assertions.

Du point de vue (géo)métrique, il s'agit d'évaluer la proximité entre l'approximation et le modèle. Plusieurs outils de mesure existent, des plus simples (*e.g.* distance de Hausdorff[10]) aux plus évolués (*e.g.* fondés sur une métrique particulière). Frey et Borouchaki ont mis au point une technique d'optimisation de maillages dirigée par cette distance - séparant le modèle du maillage - et qualifient alors certains maillages de $\mathcal{G}$-*Mesh* lorsque l'erreur est bornée [FB99]. Une alternative, exposée au CHAPITRE 4, apprécie l'erreur volumique induite par les opérations de remaillage et un traitement algorithmique repositionne les nouveaux sommets afin de minimiser cette inexactitude.

Lorsqu'il est question d'approximation, la notion de compression de données est omniprésente : le choix du nombre d'éléments du maillage (facettes ou sommets) est un compromis entre la précision et le poids de la représentation.
Intuitivement, un maillage trop fin ralentit les algorithmes et risque de faire exploser les temps de calcul alloués à la résolution numérique des équations ; à l'opposé, une approximation grossière du domaine ne permet pas la convergence des mêmes algorithmes. Une bonne approximation repose donc en premier lieu sur la pertinence de la résolution retenue, *i.e.* la densité des sommets.

9. Temps de calcul et coût mémoire supportable par une machine actuelle (quelques secondes pour la génération d'un maillage de quelques centaines de milliers de polygones).
10. La distance de Hausdorff souligne la distance euclidienne maximum séparant les deux représentations.

FIGURE 2.9 – ratio des triangles (cas isotrope) : à gauche, un triangle présentant de bonnes proportions géométriques ; les triangles de droite sont déséquilibrés [FB99].

Il est courant et judicieux d'adapter cette densité au contexte (*gradation*) qu'il s'agisse de la géométrie locale (*e.g.* courbure, distance à l'axe médian [11]...) ou d'informations externes (champs scalaire ou métrique défini sur ou autour du domaine). Ces questions relèvent des théories de l'échantillonnage et renvoient principalement au problème du lissage (*i.e.* préserver les détails et s'affranchir du bruit).

Le choix de la position des sommets d'un maillage est d'autant plus délicat qu'il pré-conditionne la géométrie des facettes du maillage.

En pratique, la convergence d'une résolution numérique est en effet fortement liée à la nature des éléments finis : les angles très petits (dont la mesure est proche de zéro) et des faces de taille très variable peuvent poser des problèmes de calcul (respectivement des divisions par presque zéro et des éléments finis déséquilibrés). Aussi, une représentation de qualité est généralement formée par un ensemble d'éléments réguliers, tout du moins localement ; soit, idéalement et dans un univers isotrope [12], des faces proches de triangles équilatéraux et d'aire régulière (FIGURE 2.9). À l'inverse, certaines applications requièrent d'adapter l'allure des facettes au contexte (*i.e.* anisotropie) ; dans ce cas, elles peuvent paraître disproportionnées voire maladroites dans l'espace de visualisation.
Différents indicateurs ont été proposés pour évaluer la pertinence d'une facette vis à vis de sa géométrie propre (*e.g.* proportions) ; par exemple, l'indice de forme (*shape quality measure* [GB97]) juge le ratio de chaque triangle formant le maillage [13]. Frey et Borouchaki ont ensuite étendu la notion au cas anisotrope en associant une métrique à chaque sommet [FB99].

Enfin, l'analyse ne s'arrête pas à une unique portion de plan indépendante des autres éléments du maillage : l'imbrication des différentes facettes joue également. En effet,

11. *Local Feature Size* [AB98]
12. Où la mesure ne dépend pas de l'orientation
13. $G = 2\sqrt{3}\frac{S}{ph}$ avec S la surface du triangle, p son demi-périmètre et h la longueur de sa plus longue arête.

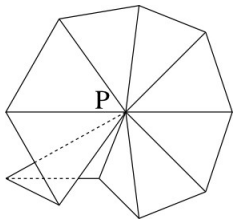


FIGURE 2.10 – Exemple de sommet non conforme.

les variations importantes de la normale entre faces voisines génèrent des artefacts visuels lors du rendu de la surface et, plus généralement, peuvent rendre instables les opérateurs géométriques (*e.g.* estimation des normales et de la courbure) ou encore perturber les systèmes numériques dépendants (*e.g.* mesure d'angles très petits et précision numérique).

Pour aller plus loin, George et Borouchaki ont proposé la notion de *sommet conforme* [GB97] et qualifient un maillage de conforme lorsque pour chacun de ses sommets il est possible de projeter son voisinage sur le plan tangent sans recouvrements (le voisinage est toujours assimilable à un disque après projection, FIGURE 2.10). Cette idée permet de connecter avec les variétés différentielles et plus précisément, les *surfaces lisses*.

2.A.3.c Remaillage

Lorsqu'un maillage ne satisfait pas les critères de bonne représentation fixés pour une application donnée, il faut en définir un nouveau répondant à nos attentes ; cette situation est évidement atteinte lorsque l'on considère, comme ici, une application déformant le maillage au cours du temps. En pratique, il est question du nombre de sommets, de leur position (*i.e.* échantillonnage) et de leur combinatoire (définition des simplexes de dimension supérieure).

Dans tous les cas, la méthode doit être automatique (décidable sans intervention d'un utilisateur) et générique (peu importe la configuration géométrique et topologique de l'objet à modéliser) ; ces deux impératifs sont souvent associés à la notion de robustesse [14]. Comme toute démarche algorithmique, l'efficacité [15] et la complexité de l'approche sont observées ; on notera encore l'existence de preuves [16] ou de garanties [17] vis à vis du résultat. Enfin, les techniques largement parallélisables ou s'accommodant d'un partitionnement du domaine [18] sont aujourd'hui nettement privilégiées.

14. Résistance de l'algorithme à gérer les difficultés, les cas d'échec et sa capacité à produire un résultat valide...
15. Temps de calculs et compression des données.
16. *e.g.* travaux de Schewchuk, *"provably good triangulations"*.
17. *e.g.* travaux d'Edelsbrunner *et al.* et d'Amenta *et al.* ; détaillés dans la suite du document.
18. *e.g.* librairie *METIS*, http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/views/metis.

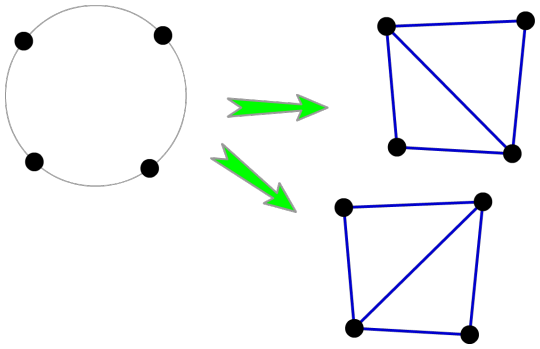


FIGURE 2.11 – La triangulation de Delaunay de quatre points cocycliques n'est pas unique : les deux résultats présentent le caractère Delaunay.

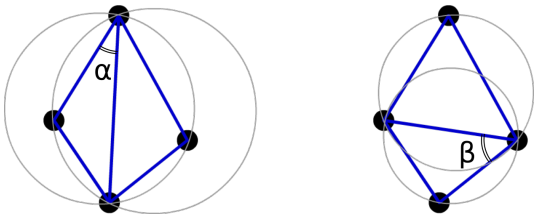


FIGURE 2.12 – À gauche, la triangulation n'est pas Delaunay : les cercles circonscrits aux triangles contiennent un quatrième point ; à droite chaque triangle est Delaunay. On passe d'une configuration à l'autre par pivot d'arête (la triangulation conservée présente un plus petit angle plus grand que l'autre : $\beta > \alpha$).

La technique de remaillage sur laquelle est centrée cette étude vise à la génération d'une triangulation d'un ensemble d'échantillons préalablement répartis sur le domaine considéré ; lorsque les conditions sont réunies, l'algorithme retourne une triangulation optimale au sens de Delaunay.

2.B Triangulation de Delaunay

La triangulation de Delaunay d'un ensemble de points (X) est une triangulation remarquable, que nous notons Del_X. Sous couvert de garanties vis à vis de l'ensemble de points (prochain paragraphe), cette triangulation existe, est unique et optimale (paragraphe suivant).

Ensemble de points en *position générale*
Soit X un ensemble d'au moins trois points[19] ; cet ensemble est en position générale s'il n'est ni dégénéré ni spécial. C'est à dire, qu'il ne comporte pas de points dupliqués et dont l'alignement ne met pas en péril la notion de triangulation (*i.e.* un triangle dont les trois sommets sont alignés ne peut être bien défini). On dit de X qu'il est spécial s'il contient au moins quatre points cocycliques (*i.e.* il est possible de les inscrire sur le même cercle, FIGURE 2.11) ; cette configuration peut être contournée par un pré-traitement algorithmique [EM90, Yap90] palliant la situation non décidable.

Sur la sphère vide
Le principe de la sphère vide permet à lui seul de définir le caractère Delaunay d'un

19. Dans $\mathbb{R}^2$ et $n+1$ points dans $\mathbb{R}^n$

triangle et d'une triangulation, de prouver l'unicité de cette dernière et suggère une méthode de construction "à la volée" [Del34].

Soit X un ensemble de points de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^n$) en position générale, on admet en avoir une triangulation dont au moins un triangle (resp. $n-$simplexe) voit sa sphère circonscrite (resp. $n-$hypersphère) ne contenir aucun autre point du système ; il est alors qualifié de "Delaunay" (FIGURE 2.12). Une triangulation est considérée (globalement) Delaunay lorsque tous les simplexes la constituant vérifient cette propriété.

Si l'on considère l'ensemble des triangulations ($\mathcal{T}$) qu'il est possible de générer à partir d'un ensemble de points en positions générale (X), nous pouvons les classer suivant la mesure de leur plus petit angle. Il existe donc une triangulation ($t_i \in \mathcal{T}$) admettant un plus petit angle plus grand que toutes les autres ($\forall t_{j\neq i} \in \mathcal{T}$, min angle$(t_j) <$ min angle(t_i)) ; c'est, par construction, la triangulation de Delaunay ($t_i \equiv \mathrm{Del}_X$).

Ce caractère optimal a largement contribué à la définition d'algorithmes permettant de la construire, notamment les algorithmes de balayage (l'espace est parcouru suivant l'avance d'un front et la construction est réalisée au fur et à mesure de la découverte des graines [For86, KS95]). Nous employons une alternative fondée sur leur relation de dualité avec les diagrammes de Voronoï (SECTION 2.C.1).

2.C Diagrammes de Voronoï

Un *diagramme de Voronoï* est une partition de l'espace métrique définie à partir d'un ensemble de points générateurs $X = \{\{x_1 \dots x_n\} | x_i \in \mathbb{R}^n\}$. Chaque *graine* est alors associée à une *cellule de Voronoï* ($\mathrm{Vor}_X = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_x$) telle que :

$$\Omega_{x_i} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x_i) \leq d(x, x_j)\ \forall j \in \{1 \dots n\},\ j \neq i\}$$

avec $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ une distance [20], généralement, la distance euclidienne.
De manière plus directe, chaque point de l'espace est associé à la graine la plus proche (FIGURE 2.13).

Demi-espaces :
Dit autrement, deux graines se partagent l'espace suivant l'hyperplan médiateur du segment dont elles sont les extrémités, soit pour un espace deux dimensions, la médiatrice

20. Une distance est une application symétrique ($d(x, y) = d(y, x)$), séparée ($d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$) et répondant à l'inégalité triangulaire ($d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$).

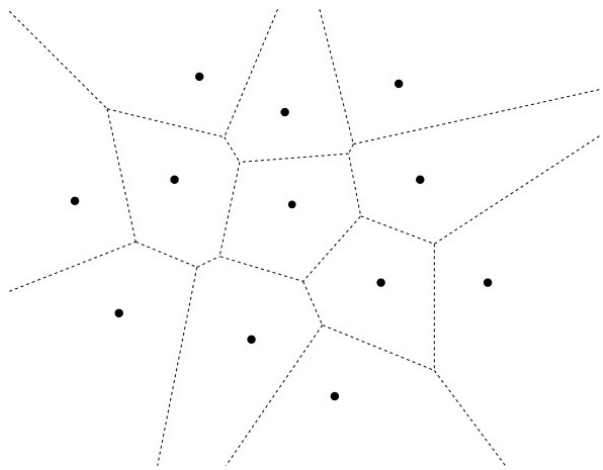


FIGURE 2.13 – Exemple de diagramme de Voronoï dans $\mathbb{R}^2$. Les points marquent les générateurs et les traits pointillés tracent les frontières de chaque cellule. On peut noter que celles correspondant aux sommets de l'enveloppe convexe sont infinies (en gris).

du segment $[x_i, x_j]$ et, dans $\mathbb{R}^3$, le plan passant par le milieu du segment et admettant ce même segment pour normale.

Cette seconde description donne une méthode de calcul aisée et intuitive : une cellule de Voronoï correspond à l'intersection de tous les demi-espaces générés à partir de l'ensemble des couples $(x_i, x_j)_{i \neq j}$ (ALGORITHME 3 et FIGURE 2.14) :

$$\Omega_{x_i} = \bigcap_{j \neq i} \Pi^+(i,j) \text{ avec } \Pi^+(i,j) = \{x \mid d(x, x_i) \leq d(x, x_j)\}$$

Algorithme 3 : Algorithme naïf du calcul du diagramme de Voronoï

Entrées : X, ensemble des graines ($X = \{x_1 \dots x_n\} | x_i \in \mathbb{R}^n$)
Sorties : E, ensemble des cellules de Voronoï ($E = \{e_1 \dots e_n\}$)

```
1
2 foreach graine x_i de X do
3     e_i ← ℝ^n
4     pour chaque graine x_j de X différente de x_i faire
5         découper_espace(e_i, hyperplan_médiateur(x_i, x_j))
```

Cette approche naïve est facile à appréhender et à mettre en œuvre mais n'est pas performante en l'état ($\mathcal{O}(n^2)$).
Comme illustré dans les cadres C et D de la FIGURE 2.14, certaines graines éloignées

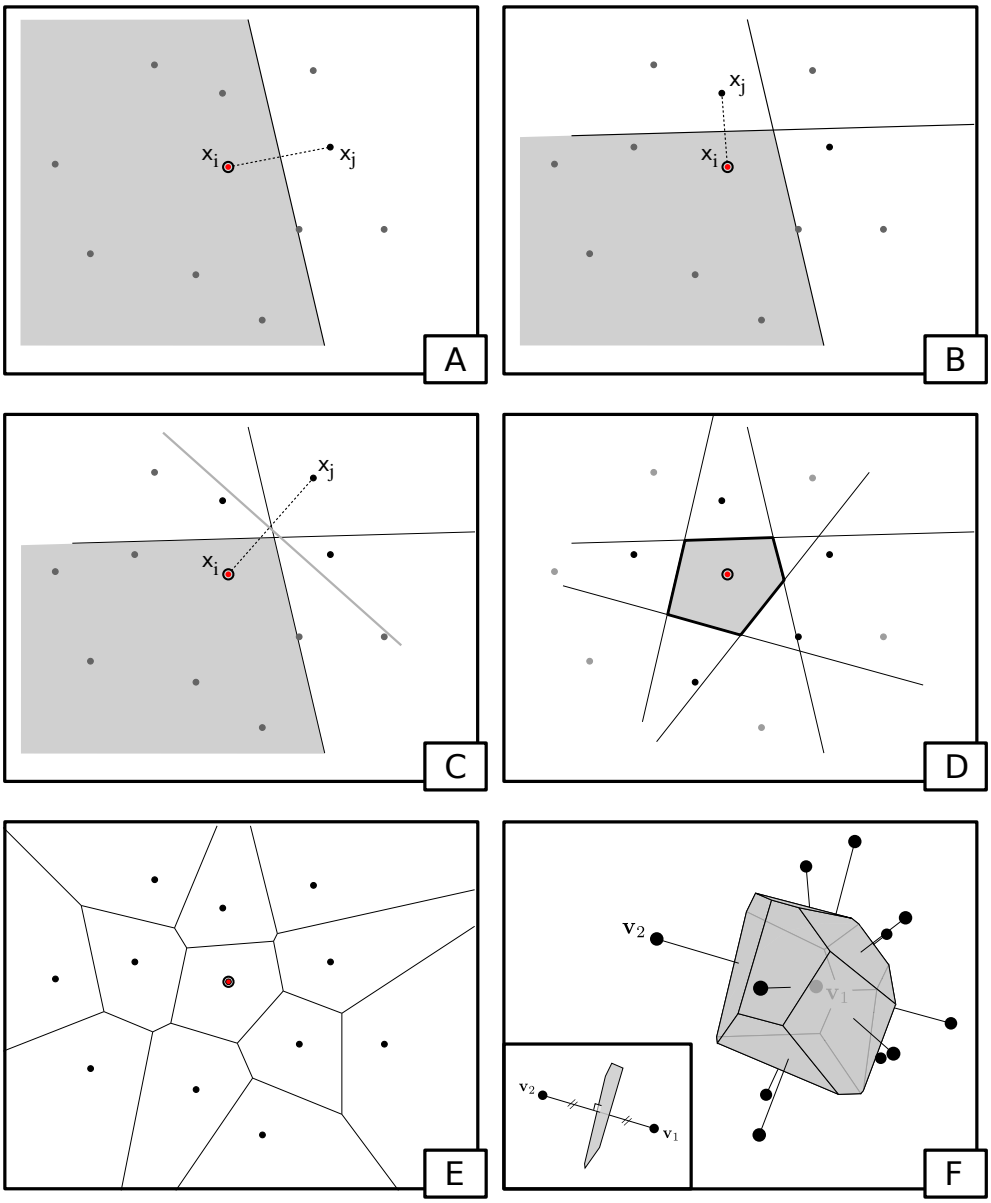


FIGURE 2.14 – Illustration de l'algorithme de découpage itératif d'une cellule de Voronoï dans $\mathbb{R}^2$ (cadres A-D). Dans le cadre C, la graine x_j n'est pas une voisine de x_i (le découpage n'a pas d'influence sur le résultat), c'est également le cas pour toutes les graines grisées du cadre D. Le diagramme de Voronoï de l'ensemble des graines est donné dans le cadre E. Enfin, un exemple de cellule de Voronoï dans $\mathbb{R}^3$ (cadre F).

ne jouent aucun rôle dans le découpage de la cellule. C'est pourquoi l'algorithme naïf donné ici est largement amélioré par l'emploi d'une structure de données permettant de trier les graines suivant leur distance à la graine courante (notion de plus proche voisin) ; le découpage de l'espace débute avec la graine voisine la plus proche, se poursuit avec les générateurs les plus proches et peut être interrompu lorsque les graines suivantes sont "hors de portée" (rayon de sécurité, SECTION 2.D.2.a).

Une cellule est par construction une région convexe (intersection de demi-espaces), bornée ou non. L'intérieur de chaque cellule regroupe l'ensemble des points de l'espace plus proche de la graine associée que de toute autre ; sa frontière est équidistante d'au moins deux graines dont nous dirons qu'elles sont *voisines*. Dans le cas général et pour un espace de dimension n, chaque couple de graines voisines partage une *face de Voronoï* de dimension $n-1$, chaque triplet de cellules voisines partagent une face de dimension $n-2$ et ainsi de suite. Soit respectivement, pour $\mathbb{R}^2$: un segment et un point ; dans $\mathbb{R}^3$, deux cellules voisines partagent une face polygonale (bornée ou non), l'intersection non vide de trois cellules est un segment ou une demi droite (cellule non bornée) ; quatre cellules voisines admettent un point commun (FIGURE 2.14, cadre F).

2.C.1 Dualité avec la triangulation de Delaunay

Pour un ensemble de points donnés en position générale (X), il existe une bijection triviale entre les simplexes de la triangulation de Delaunay et les éléments de Vor_X [Del34]. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, chaque graine de Voronoï correspond à un sommet de la triangulation, l'intersection non vide de deux cellules donne une arête de Del_X et un triangle de Delaunay connecte les 3 graines incidentes à un sommet de Voronoï (FIGURE 2.15).

Dans $\mathbb{R}^3$, un sommet de Voronoï (intersection non vide de quatre cellules, dimension 0) correspond à un tétraèdre (simplexe de dimension 3).
La généralisation à $\mathbb{R}^n$ est intuitive : une face de Voronoï de dimension k correspond à un simplexe de dimension $n-k$ dans la triangulation de Delaunay duale.

2.C.2 Diagramme de Voronoï barycentrique

Un diagramme de Voronoï est qualifié de barycentrique si chaque graine coïncide avec le barycentre de sa cellule. Intuitivement, ce positionnement particulier témoigne d'une bonne répartition des graines dans l'espace (FIGURE 2.16). C'est pourquoi la recherche de telles configurations fait l'objet de nombreux travaux en informatique (traitement d'images, compression, fouille de données, recherche opérationnelle, etc.) et, plus largement, intéresse de nombreux domaines (biologie cellulaire, cristalographie, géographie...) [OBS+00].

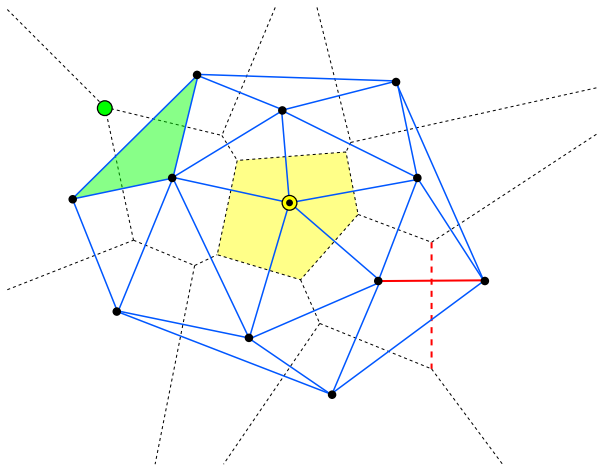


FIGURE 2.15 – Éléments duaux de Vor_X et Del_X dans $\mathbb{R}^2$ (appairés par couleur).

Formellement [DFG99], définir un diagramme de Voronoï barycentrique dans l'espace Ω revient à définir k positions géométriques (x_i) et k régions partitionnant Ω (Ω_i) telles que soient simultanément vérifiées :

— Ω_i est la cellule de Voronoï associée à x_i

— x_i est le centre de masse de Ω_i

Une telle configuration relève d'un ensemble de graines bien choisi (*e.g.* les sommets d'une grille régulière) ou peut être atteinte à partir d'un ensemble quelconque de points dont on fait évoluer les positions (FIGURES 2.16 et 2.17, voir également SECTION 2.C.2.a et suivantes). Dans le deuxième cas, il s'agit d'optimiser la répartition des échantillons dans le domaine ; l'algorithme de Lloyd (SECTION 2.C.2.a) converge vers une [21] solution stable (FIGURE 2.18).

Il est en effet possible de distinguer les configurations suivant leur stabilité : une légère modification de la position d'une graine engendre-t-elle une réorganisation de toutes les cellules ou sera-t-elle amortie dans un voisinage proche ? En pratique, les configurations stables sont composées de cellules quasi-hexagonales (espace et mesure euclidiens, voir FIGURES 2.18 et 2.19).

2.C.2.a Algorithme de Lloyd [Llo82]

L'algorithme itératif de Lloyd permet d'atteindre une configuration barycentrique à partir d'un ensemble quelconque de graines : à chaque itération, chacune d'elles est replacée au barycentre de sa cellule. Cette stratégie simple permet de converger vers

21. Cet arrangement des graines n'est pas unique, d'autant plus que la permutation de deux points ne change pas la nature barycentrique du diagramme.

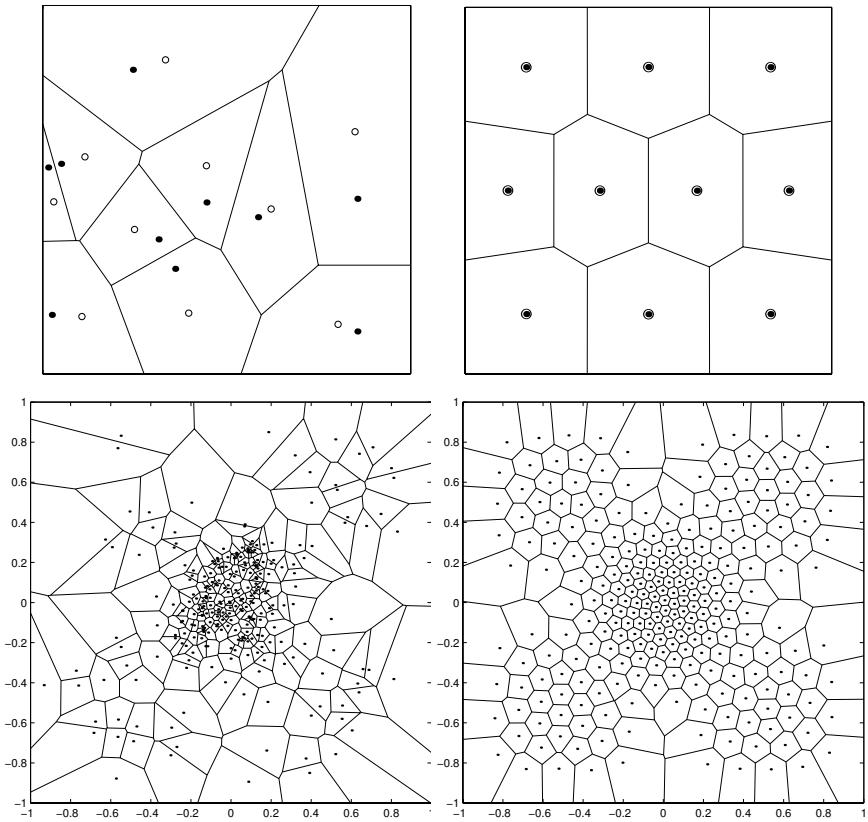


FIGURE 2.16 – En haut : Diagramme de Voronoï d'un ensemble de points quelconques (à gauche) et d'un diagramme barycentrique (à droite).
En bas : comparaison des méthodes d'échantillonnage Monté Carlo (à gauche) et une configuration barycentrique à (droite) en accord avec une fonction de densité (ici, $e^{-20x^2-20y^2} + 0.5sin^2(\pi x)sin^2(\pi y)$ dans $[-1;1]^2$, [DFG99]).

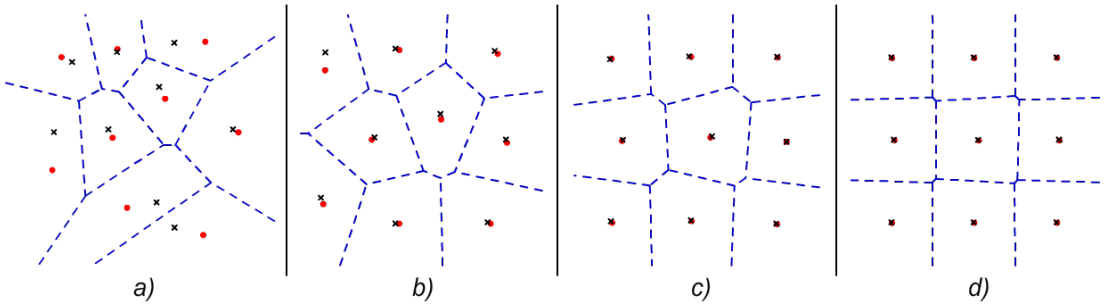


FIGURE 2.17 – Exemple d'execution de l'algorithme de Lloyd : a) configuration initiale, b) et c) itérations intermédiaires et d) résultat obtenu après 50 itérations.

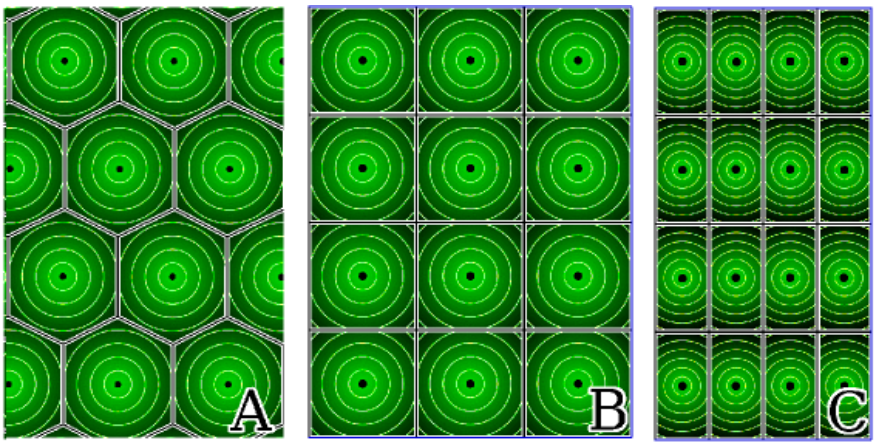


FIGURE 2.18 – La configuration A est dite stable : une légère perturbation appliquée sur la position d'une graine ne changera pas toute la structure du diagramme ; en revanche, les configurations B et C sont instables.

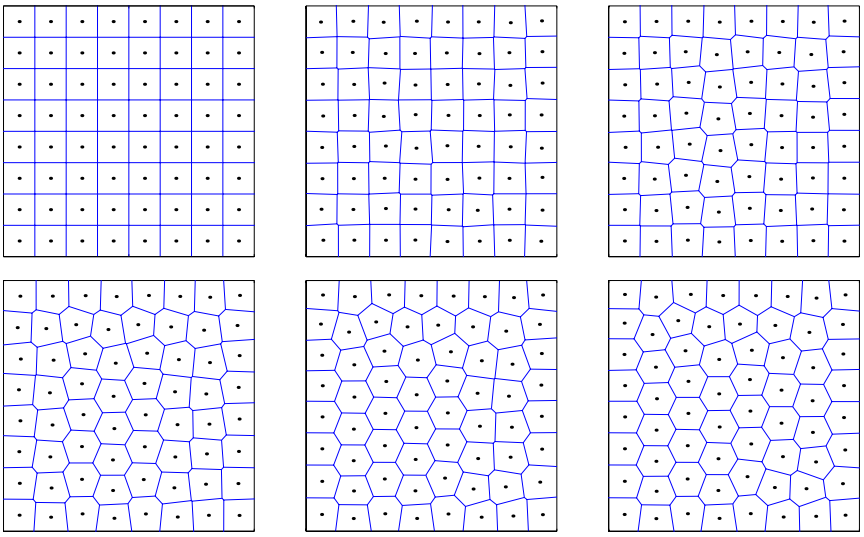


FIGURE 2.19 – Perturbation d'une configuration barycentrique instable (deux premières vignettes) ; l'optimisation barycentrique (de gauche à droite et de haut en bas, itérations 15, 30, 60 et 120 de l'algorithme de Lloyd) convergence vers une nouvelle configuration barycentrique qui cette fois est stable.

une solution stable du diagramme de Voronoï barycentrique (voir ALGORITHME 4 et FIGURES 2.19 et 2.17).

Algorithme 4 : Calcul d'un diagramme de Voronoï barycentrique - Algorithme de Lloyd

Entrées : X, l'ensemble des graines
Entrées : E, l'espace
Entrées : n, nombre d'itérations

```
1 pour i de 1 à n faire
2     cellules = calculer_diagramme_de_voronoi(X, E)
3     pour chaque x ∈ X faire
4         x ← barycentre (cellule (x))
```

Cet algorithme est largement employé pour sa robustesse et sa simplicité d'implémentation. En revanche, sa vitesse de convergence est relativement lente ; deux approches permettent d'accélérer le traitement, l'une est purement algorithmique (parallélisation, [RSLL18]), l'autre suggère une formulation alternative (section suivante).

2.C.2.b Problème d'optimisation

Soit $\mathcal{F}$ une fonction qui retourne pour l'ensemble des graines (X), la somme des distances au carré séparant la graine de chaque point de sa cellule, soit :

$$\mathcal{F} = \sum_{x \in X} \int_{\Omega_x} \| x - x \|^2 \, dx$$

Le déplacement des graines dans l'espace pour atteindre une configuration barycentrique peut être formulé comme la recherche d'un minimum de cette fonction : Du *et al.* ont prouvé qu'elle ne peut être minimisée que lorsque toutes les graines sont situées au barycentre de leur cellule [DFG99], soit formellement :

$$x \equiv g_i \text{ avec : } g_i = \underset{g \in \Omega_x}{\operatorname{argmin}} \int_{\Omega_x} \| g - x \|^2 \, dx$$

Calculer un diagramme de Voronoï barycentrique revient donc à chercher un ensemble de positions géométriques telles que $\mathcal{F}$ soit minimale. Or, $\mathcal{F}$ est largement multivariée et la permutation de deux générateurs définit une autre configuration présentant la même énergie : $\mathcal{F}$ admet donc de nombreux minima locaux, certains d'entre eux correspondent à une configuration barycentrique stable et il existe au moins $n!$ minima globaux (avec n le nombre de graines considérées).

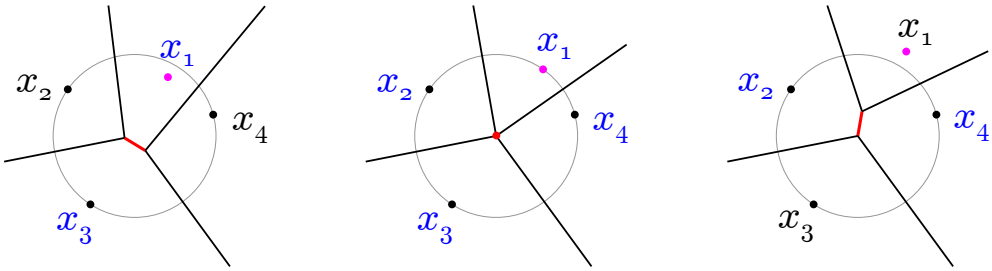


FIGURE 2.20 – Événement combinatoire induit par le déplacement d'une graine. De gauche à droite, x_1 se retrouve tantôt à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère vide de $\{x_2, x_3, x_4\}$; si le déplacement est continu, la graine passe forcément par une configuration spéciale au sens de Delaunay, soit 4 échantillons partageant la même hypersphère circonscrite (au centre).

Ici, nous cherchons à optimiser la répartition d'un ensemble de points pour le remaillage de surface, et nous nous satisfaisons généralement d'un minimum local stable.

Continuité et Gradient de $\mathcal{F}$

La continuité et le gradient de la fonction $\mathcal{F}$ ont été étudiés par de nombreux auteurs. Nous ne donnerons ici que quelques idées du problème et des résultats, le lecteur pourra se référer aux articles de référence pour les détails.

L'écueil principal à la continuité de $\mathcal{F}$ réside dans les changements combinatoires impliqués par le déplacement d'une graine (FIGURE 2.20). D'abord considérée continue uniquement en l'absence d'événements combinatoires ([IMO84]), elle a été ensuite prouvée $\mathcal{C}^1$ par Cortes *et al.* [CMB04] puis $\mathcal{C}^2$ par Liu *et al.* [LWL+09] même en cas de changements dans le voisinage des cellules (le domaine de Vor_X doit néanmoins être convexe et compact).

Après simplifications, le gradient de $\mathcal{F}$ par rapport à une graine (x) peut s'écrire [IMO84, Asa91, DFG99, Niv12] :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = 2m_i(x - g_i)^t \tag{2.2}$$

avec m la masse de la cellule (aire, volume...) et g son barycentre.

Suivant l'expression du gradient donné en ÉQUATION 2.2, on peut aisément remarquer que l'algorithme de Lloyd réalise une descente de gradient de la fonction $\mathcal{F}$ (déplacement vers le centre de gravité) mais sans en maîtriser le pas d'avance.

Optimisation quadratique
Lorsqu'une fonction $\mathcal{F}$ est multivariée et deux fois dérivable ($\mathcal{C}^2$), le calcul de la matrice hessienne de la fonction [22] permet généralement de trouver les points d'annulation du gradient et d'établir la nature du point critique de $\mathcal{F}$ correspondant (*i.e.* dire si c'est un extremum local, un point selle...).

Les solveurs numériques dits de "Newton" utilisent également cette matrice pour estimer au mieux le pas d'avance de la descente du gradient et ainsi accélérer la convergence [JN06]. La vitesse de convergence de cette famille de méthodes est pondérée à la fois par ses besoins en mémoire (stockage de la matrice : $\mathcal{O}(n^2)$ pour n graines) et la nécessité d'une initialisation "suffisamment" proche de la solution. Plus précisément, $\mathcal{F}$ doit être "suffisamment" lisse entre l'initialisation et la solution.

Liu *et al.* ont proposé [LWL+09] d'employer une méthode plus économe, dite quasi-newton, qui ne nécessite ni stockage ni calcul intégral de la matrice hessienne : elle est estimée suivant les valeurs successives prises par $\mathcal{F}$ et son gradient (solveur L-BFGS). Dès lors, le coût mémoire s'en retrouve réduit à $\mathcal{O}(n)$. En ce qui concerne l'initialisation, le problème est pré-conditionné par quelques [23] itérations de Lloyd.

Par la suite, de nombreux travaux de l'équipe ont eu pour objet l'emploi de ce solveur, en particulier pour optimiser la répartition d'échantillons sur un domaine donné, ou encore minimiser une fonction objectif liée à ce même domaine (voir en fin de ce chapitre et CHAPITRE 4).

2.D Application aux domaines courbes

Les diagrammes de Voronoï offrent une partition de l'espace réel sur laquelle il est possible d'opérer une optimisation et ils admettent pour dual la triangulation de Delaunay de l'ensemble des générateurs. Qu'en est-il des domaines courbes, et plus particulièrement les 2-variétés polygonales plongées dans $\mathbb{R}^3$?

Tout comme il est possible de généraliser la notion de ligne droite de l'espace euclidien aux espaces courbes à l'aide de géodésiques, il est possible de transposer la notion de diagramme de Voronoï aux domaines surfaciques (SECTION 2.D.1). Cet exercice s'avère cependant plus délicat et coûteux que dans l'espace réel et il est possible d'en calculer une approximation : le diagramme de Voronoï restreint (SECTION 2.D.2).

L'algorithme de calcul proposé par Yan *et al.* [YLL+09] autorise un emploi dans un processus itératif (*e.g.* optimisation barycentrique) et lorsque l'échantillonnage est

22. $H(\mathcal{F})$ est une matrice carrée $n * n$ avec n le nombre de graine et telle que $H_{ij}(\mathcal{F}) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x_i \partial x_j}$.
23. Le choix du nombre d'itérations est délicat : trop grand, il rend inefficace l'accélération offerte par la méthode quadratique et trop petit, il ne garanti pas une convergence quadratique en temps.

adapté (densité, répartition), il est possible d'en déduire un nouveau maillage du domaine : la triangulation de Delaunay restreinte (réalisation géométrique duale, SECTION 2.D.3).

2.D.1 Diagrammes de Voronoï géodésiques

Le partitionnement d'un espace courbe suivant l'idée de Voronoï est plus complexe ; d'une part dans l'évaluation même des distances (recherche et mesure des géodésiques [24]) et, d'autre part, les intersections de cellules ne sont plus des espaces euclidiens (arêtes, plans...) mais des espaces courbes (mesures et propriétés plus délicates).

Leur calcul sous forme close est possible, mais ces approches sont trop lentes pour être impliquées dans un algorithme itératif tel que celui de Lloyd : quelques secondes pour une trentaine de graines [LCT11]. Les approximations par propagation [EDD+95] [25] ou par estimation de la distance géodésique [26] sur la surface requièrent, pour être précises, un maillage admettant une résolution bien supérieure à la densité des graines.
Une autre solution consiste à pré-calculer les distances géodésiques sur un ensemble de graines, de stocker ces informations pour ensuite, à la demande, estimer les distances très rapidement ($\mathcal{O}(1)$, interpolation avec les données pré-calculées, [XYH11]). La stratégie est attirante mais gourmande en ressources (coût du pré-traitement : $\mathcal{O}(nm^2 \log m)$ en temps et $\mathcal{O}(n^2 + m)$ en mémoire avec m le nombre de sommets du maillage et n le nombre de graines).

Nous employons ici une approximation : les diagrammes de Voronoï restreints.

2.D.2 Diagramme de Voronoï restreint

Un diagramme de Voronoï d'un ensemble de points (X) restreint à une surface (maillage M) correspond à l'intersection entre Vor_X, calculé dans $\mathbb{R}^n$, et M ; il est noté $\mathrm{Vor}_{X|M}$:

$$\mathrm{Vor}_{X|M} = \mathrm{Vor}_X \cap M$$

autrement dit pour une cellule restreinte : $\Omega_{x|M} = \Omega_x \cap M$

24. La géodésique généralise la notion de plus court chemin de l'espace euclidien (ligne droite) aux domaines courbes : il s'agit du ou des plus court(s) chemin(s) qu'il est possible d'établir en ne se déplaçant que sur le domaine, par exemple une surface variété.
25. Étude sur la compression de données.
26. Approche incrémentale : après chaque insertion de graine, la distance géodésique est mise à jour sur les faces du maillage.

2.D.2.a Calcul

Pour le calculer, il est possible d'employer l'algorithme proposé par Yan *et al.* qui découpe à la volée chaque facette du domaine restrictif suivant sa proximité avec les différentes graines ([YLL+09, LL10, NYL11, LB13, LL12] et de plusieurs autres travaux en collaboration...). En effet, comme dans le cas euclidien, chaque couple de graines se divise l'espace, ici une facette de M, en deux demi-espaces suivant leur plan médiateur. Aussi, la brique élémentaire de cette méthode de calcul est la découpe d'un polygone convexe suivant un plan (Sutherland *et al.* [SH74]).

Algorithme 5 : Algorithme naïf de découpage d'une facette suivant une cellule de Voronoï.

Entrées : F, la facette à découper, i l'indice de la graine courante
Sorties : P, polygone résultat

1 $P \leftarrow F$
2 **pour chaque** $j \neq i$ **faire**
3 ⎸ *médiateur* ← plan_médiateur(x_i, x_j)
4 ⎸ $P \leftarrow$ intersect_polygone(P, *médiateur*)

L'approche naïve (ALGORITHME 5) considère chaque couple de graines possible pour une facette mais comme nous l'avons déjà remarqué, de nombreuses intersections sont vides (les graines les plus éloignées sont occultées par les plus proches). Une structure de données spatiale permet d'initialiser le découpage d'une facette avec la graine la plus proche puis de stopper le processus lorsque tous les médiateurs "à portée" ont été traités. Les différents points d'intersections (sommet du polygone résultat) nous renseignent à la fois sur les autres cellules recouvrant la facette courante et sur l'éventuelle propagation de la cellule de Voronoï aux facettes voisines.
Ces opérations sont détaillées dans les paragraphes suivant, résumées dans l'ALGORITHME 6 et illustrées dans la FIGURE 2.21 ; elles constituent la brique élémentaire de l'algorithme général de calcul de $\mathrm{Vor}_{X|M}$ (ALGORITHME 7).

Algorithme 6 : Algorithme de découpage d'une facette suivant une cellule de Voronoï.

Entrées : F la facette à découper, x_i la graine courante
Sorties : P, polygone résultat

1 $P \leftarrow$ copie(F)
2 **pour chaque** *sommet* v *de* P **faire** r = max(r, distance(x_i, v)) ;
3 $x_j \leftarrow$ prochain_voisin(x_i) `// retourne le plus proche voisin`
4 **tant que** *distance*(x_i,x_j) $<$ *2r* **faire**
5 *médiateur* $\leftarrow$ plan_médiateur(x_i, x_j)
6 $P \leftarrow$ intersect_polygone(P, *médiateur*)
7 **pour chaque** v, *sommet de* P **faire** r = max(r, distance(x_i, v)) ;
8 $x_j \leftarrow$ prochain_voisin(x_i)

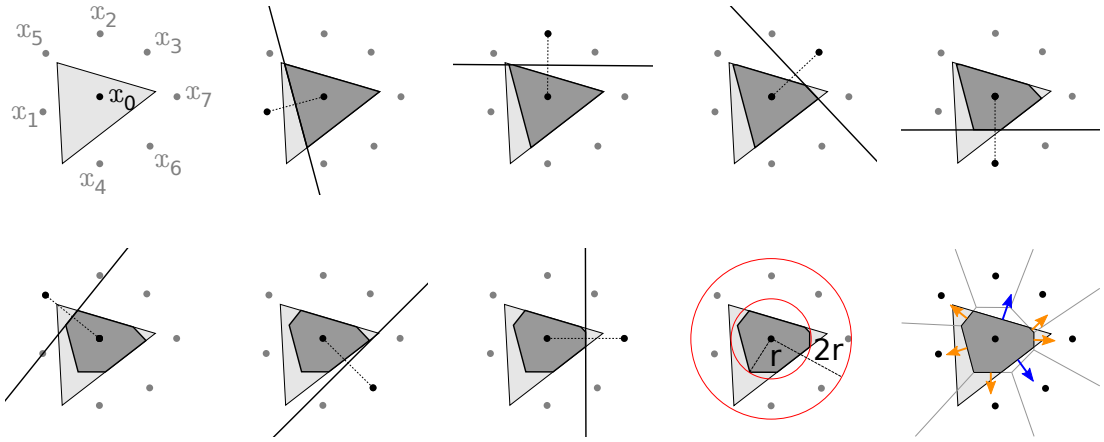


FIGURE 2.21 – Algorithme de découpage itératif d'une facette du maillage ; les graines sont indicées suivant leur proximité à la graine courante (x_0). Les cercles rouges représentent le principe du rayon de sécurité. Les flèches présentes sur la dernière vignette expliquent les propagations possibles : en bleu propagation du couple <graine courante, facette adjacente> et en orange le couple <graine voisine, facette courante>.

Algorithme 7 : Calcul d'un diagramme de Voronoï restreint

Entrées : M un maillage (domaine restrictif), X l'ensemble des graines et TRAITEMENT_POLYGONE, opération à réaliser sur chaque facette du diagramme de Voronoï

```
1  pour chaque f ∈ facettes(M) faire
2      si f non déjà traitée alors
3          graine ← recherche_graine_la_plus_proche(barycentre(f))
4          enfiler(file_de_faces, < f, graine >)
5          tant que file_de_faces ≠ ∅ faire
6              < f2, g >← défiler(file_de_faces)
7              enfiler(file_de_graines, g)
8              tant que file_de_graines ≠ ∅ faire
9                  < g2 >← défiler(file_de_graines)
10                 P ← découper_facette(f2, g2) // ALGORITHME 6
11                 TRAITEMENT_POLYGONE(P)
                   // propagation
12                 pour chaque e ∈ arêtes(P) faire
13                     si e ⊆ arêtes(f2) alors
14                         adj_f ←facette_adjacente(e)
15                         si adj_f non déjà traitée alors
16                             enfiler(file_de_faces, < adj_f, graine >)
17                     sinon
18                         g3 ← graine_voisine_partageant_médiateur(e)
19                         si f2 n'a pas déjà été découpée par g3 alors
20                             enfiler(file_de_graines, < f2, g3 >)
```

Recherche spatiale et tri des graines voisines

La recherche du plus proche voisin (ALGO. 7, ligne 3) peut être effectuée de manière efficace à travers l'emploi d'une décomposition de l'espace [AMN+98] ; par exemple, la librairie ANN[27] retourne pour un point p la liste des m voisins les plus proches triés suivant leur distance à p.

Une fois la plus proche graine déterminée (x_0), l'algorithme de découpage peut commencer avec la seconde graine la plus proche (x_1), puis avec la troisième (x_2, FIGURE 2.21)...

27. Approximated Nearest Neighbors, avec un préréglage minimal $\varepsilon = 0$ et un nombre m de voisins à retourner (valeur par défaut).

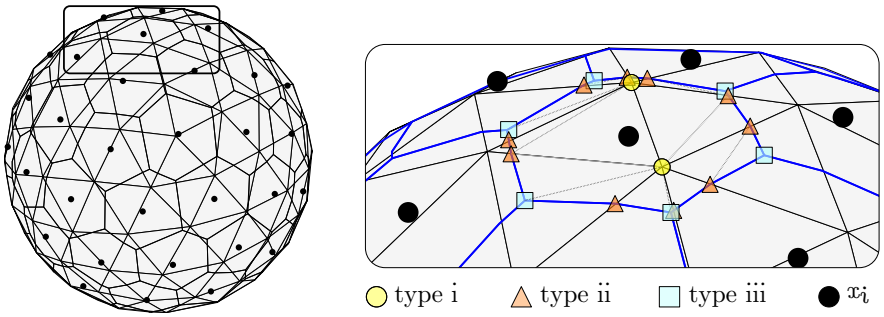


FIGURE 2.22 – Les sommets des facettes résultantes du calcul de $\mathrm{Vor}_{X|M}$ peuvent être classés suivant trois catégories : les sommets du maillage restrictif (type i), l'intersection d'une arête de M et du plan médian de 2 graines voisines (ii) et enfin l'intersection entre une facette de M et l'arête de Voronoï 3D équidistante de 3 graines voisines (iii).

Rayon de sécurité

A chaque itération de l'ALGORITHME 6, on peut déterminer quel sommet de P est le plus éloigné du générateur courant (x_0). La distance les séparant renseigne alors sur la distance maximale à laquelle une intersection avec le polygone peut avoir lieu (r, ALGO. 6 LIGNES 2 et 8).

Sachant que la liste des graines voisines est ordonnée suivant leur distance à x_0, l'ALGORITHME 6 peut être agrémenté d'une condition d'arrêt : lorsque la prochaine graine voisine est située à une distance supérieure à $2r$ de la graine courante (FIGURE 2.21), alors, le médiateur est plus éloigné de x_0 que tout point de P (aucune intersection possible). Le processus itératif peut donc être stoppé avec la garantie d'avoir pris en compte suffisamment de graines voisines.

Information symbolique

Les sommets du polygone résultat peuvent être adjoints d'une information symbolique précisant leur origine et leur nature. En pratique, les sommets d'un diagramme de Voronoï restreint à un domaine surfacique peuvent être classés suivant trois catégories, modélisées par un triplet d'entiers qui repèrent la ou les facette(s) du domaine restrictif et la ou les graine(s) responsables de ce point d'intersection (FIGURE 2.22) :

type i) un sommet de la facette d'origine (trois indices de facettes incidentes)

type ii) intersection d'un plan médiateur et d'une arête du domaine restrictif (indices des deux facettes incidentes et indice de la seconde graine)

type iii) intersection de 3 plans médiateurs et d'une facette (indices de la facette et des deux graines voisines).

Propagation
Les arêtes du Polygone résultant (P = $\Omega_{x_i|F}$, avec F la facette courante) sont soit tout ou partie d'une arête originale, soit l'intersection de la facette avec un plan médiateur. Dans le premier cas, la cellule de Voronoï restreinte s'étend à la facette adjacente, et dans le second, la facette courante s'inscrit également en partie dans la cellule restreinte associée à la graine voisine.

Aussi, après avoir totalement découpé une facette vis à vis d'une graine, la lecture de la provenance de chaque sommet de P nous indique quels couples <facette,graine> sont à traiter pour terminer le partitionnement de la facette courante (couples de la forme <facette courante, graine voisine>) et compléter la cellule restreinte (couple <facette voisine, graine courante>, voir la dernière vignette de la FIGURE 2.21).

Algorithmiquement, ce système de propagation permet d'économiser le coût de la recherche de la graine la plus proche pour la plupart des facettes : si le domaine surfacique est connexe, une seule requête est nécessaire (pour la première facette). Ensuite, deux files de couples <graine / facette> permettent de mémoriser les découpes en suspens ; il s'agit alors de choisir l'ordre de traitement : par facette ou par cellule restreinte d'abord. On choisit généralement le premier car il autorise la décomposition du domaine restrictif et le traitement parallèle de chaque partie.

Avec m le nombre de facettes du domaine restrictif et n le nombre de graines, l'algorithme de calcul présente, dans le pire cas, une complexité mémoire linéaire ($\mathcal{O}(m+n)$) et une complexité de calcul relativement lourde (semblable à l'approche naïve, $\mathcal{O}(mn^2 \log n)$). Il s'avère néanmoins efficace en pratique : Nivoliers propose une étude détaillée des deux méthodes de propagation et conjecture [28] sur un comportement quasi linéaire de l'algorithme vis à vis du nombre de graines et de facettes [Niv12] (*i.e.* $\mathcal{O}(m+n)$).

2.D.2.b Discussion de l'approximation

Diagramme de Voronoï restreint
La méthode de calcul employée permet d'utiliser un ensemble quelconque [29] de graines, même si elles ne sont pas incluses dans la surface restrictive ; nous n'avons pas non plus de contraintes particulières quand au rapport entre le nombre de générateurs et le nombre de facettes du maillage.
L'approche est également robuste face à la qualité du maillage restrictif, qui peut se limiter à une soupe de triangles (*e.g.* scan 3D) ; Le calcul d'un diagramme de Voronoï géodésique s'appuie en partie sur la combinatoire (voisinages SECTION 2.D.1). Ici,

28. Expérimentation sur des systèmes de dimensions équivalentes aux nôtres (10^4 à 10^5 polygones et graines).
29. Plus précisément, en position générale, SECTION 2.B.

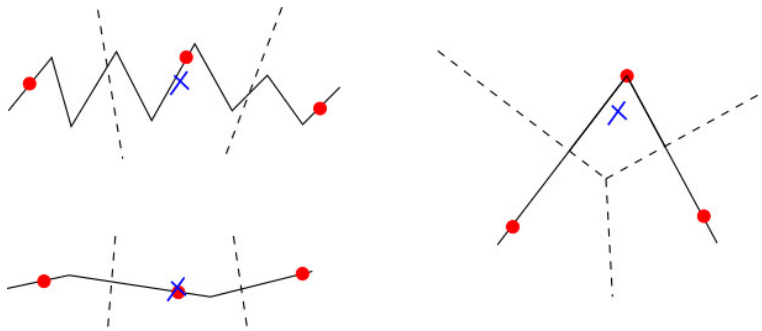


FIGURE 2.23 – Le barycentre (croix) de la cellule restreinte n'est pas exactement sur la surface même lorsque le générateur (point) y est inscrit ; l'approximation réalisée est source de lissage.

l'absence d'information sur leur connectivité ne change en rien le résultat obtenu et n'affecte que peu les temps de calculs [Niv12] (requête spatiale en lieu et place de la propagation). De plus, les temps de calcul et l'espace mémoire requis en pratique sont largement inférieurs au coût d'une mesure géodésique (des milliers de graines et de facettes traitées par seconde).
Enfin, la définition euclidienne des plan médiateurs permet d'effectuer simplement de nombreux traitements, d'autant plus lorsque la densité et la répartition de l'échantillonnage sont appropriées.

Optimisation barycentrique

Il est possible d'améliorer la position des échantillons : l'efficacité de la méthode de calcul permet son application dans un processus itératif, tel que l'algorithme de Lloyd. En revanche, l'utilisation de la méthode d'optimisation quadratique présentée pour le cas général est plus délicate à justifier dans le cas restreint, en particulier pour établir la continuité de $\mathcal{F}$ (Étude détaillée dans [NL13]).

Par ailleurs, l'optimisation barycentrique conduit à un ensemble de points situés à proximité du domaine courbe : le barycentre (au sens euclidien) a peu de chance d'être un point du domaine considéré (sauf courbure nulle ou configuration géométrique spéciale, FIGURE 2.23).

Erreurs, contreparties de l'approximation

L'approximation ne tient pas compte du domaine restrictif ("mesure à vol d'oiseau") et peut associer plusieurs régions non contiguës de la surface à une même graine ; la cellule restreinte admet alors plusieurs *composantes connexes* (FIGURE 2.24) .

ε-échantillonnage
Pour limiter ce problème, Amenta et Bern [AB98] ont proposé d'adapter la densité d'échantillonnage en fonction de la distance à l'axe médian local : lorsque la densité d'échantillonnage est suffisante, le diagramme de Voronoï restreint est une bonne approximation du diagramme de Voronoï géodésique ; en particulier, chaque cellule présente une seule et unique composante connexe.

2.D.3 Triangulation de Delaunay restreinte

Nous définissons par abus de langage la triangulation de Delaunay de X restreinte à M ($\mathrm{Del}_{X|M}$) comme la réalisation géométrique duale de $\mathrm{Vor}_{X|M}$; formellement, $\mathrm{Del}_{X|M}$ est le maillage défini par :

sommets : l'ensemble des graines de Voronoï [30],

arêtes : segments reliant chaque paire de graines dont les cellules restreintes sont voisines,

facettes : triangles témoignant d'une triple intersection non vide de cellules restreintes.

Il faut toutefois rester prudent, l'objet construit n'est pas obligatoirement une surface triangulée et quand bien même, il n'est pas forcément topologiquement équivalent au domaine restrictif (FIGURE 2.24). En pratique, il existe des garanties géométriques (ε-échantillonnage [31], FIGURE 2.25) ou topologiques (SECTION 2.E.4 et CHAPITRE 3) qui assurent la validité de la triangulation générée.

À partir d'ici, nous avons tous les éléments pour comprendre la stratégie de remaillage surfacique proposée par Yan *et al.* [YLL+09, LB13] : étant donnés un échantillonnage quelconque (X) et d'une approximation polygonale de l'objet à remailler (M), il est possible d'optimiser la répartition de l'ensemble d'échantillons sur le domaine surfacique (*e.g.* configuration barycentrique) ; lorsque la densité d'échantillonnage est adaptée à la géométrie et que le degré de répartition est satisfaisant, le maillage $\mathrm{Del}_{X|M}$, dual de la décomposition $\mathrm{Vor}_{X|M}$, est une variété triangulée topologiquement équivalente à M et présentant des facettes régulières et harmonieuses en taille et en forme (SECTION 2.F).

Avant de détailler la méthode et ses évolutions, il est nécessaire de revenir sur des notions fondamentales qui définissent précisément la notion d'équivalence topologique.

31. Par construction, si l'échantillonnage X forme un ε-échantillonnage du domaine restrictif M, alors $\mathrm{Del}_{X|M}$ et M sont topologiquement équivalents.

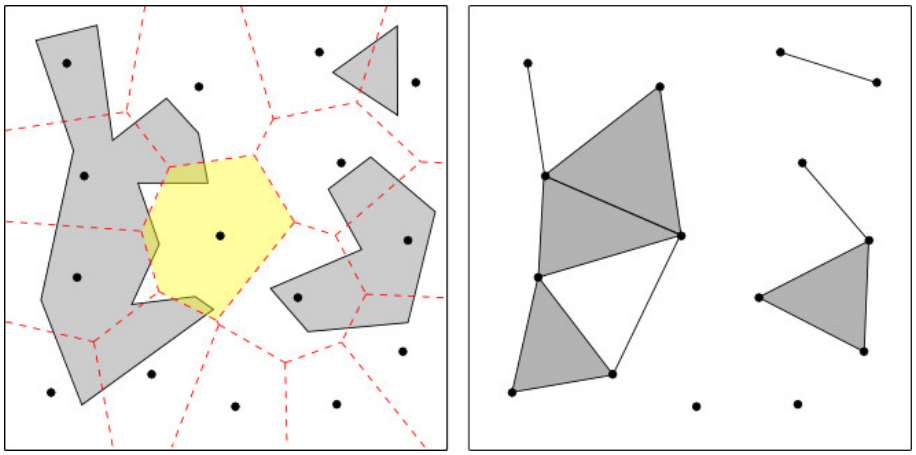


FIGURE 2.24 – À gauche, un diagramme de Voronoï dans $\mathbb{R}^2$; les polygones en gris forment le domaine restrictif. La cellule restreinte surlignée en jaune est formée de plusieurs composantes connexes.
À droite, la réalisation géométrique duale ; bien que toutes les parties du maillage ai été capturées, la combinatoire obtenue ne reflète pas la topologie initiale.

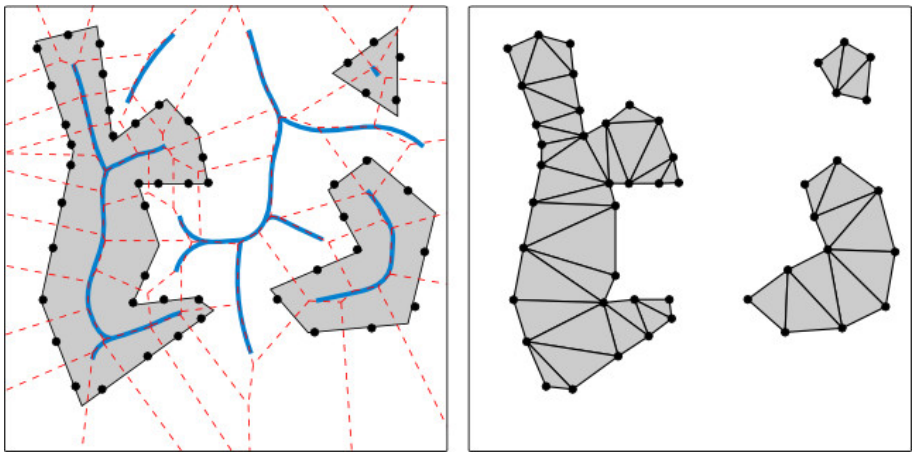


FIGURE 2.25 – Exemple de ε-échantillonnage (à gauche) ; comme suggéré dans cette même figure, il est possible d'approcher l'axe médian (en bleu) à partir des pôles des cellules de Voronoï (points extrêmes de la cellule). À droite, la réalisation géométrique duale ; la densité d'échantillonnage est suffisante pour garantir qu'il s'agit d'une variété triangulée de topologie identique à celle du domaine restrictif ([AB98, ABK98]).

2.E Éléments de topologie

Nous avons vu que les opérations de remaillage sont généralement mises en œuvre afin d'améliorer la qualité de la représentation ; dans ce processus, il est primordial de reproduire fidèlement le modèle. Les notions géométriques de norme et de distance sont trop restrictives pour garantir une équivalence entre les deux représentations.

La topologie est un formalisme axiomatique permettant de décrire un objet et sa structure dans un univers donné. On en obtient des résultats puissants, que ce soit à travers les définitions précises des notions de limite, voisinage, continuité, etc ; ou, qu'il s'agisse de déterminer si un maillage et le résultat du remaillage sont équivalents, notamment qu'ils partagent le même genre.
Par exemple, une tasse et un beignet présentent le même nombre d'anses et on peut déformer l'un pour obtenir l'autre sans arrachement ni recollement (FIGURE 2.26) : il existe une déformation continue permettant de passer de l'un à l'autre de ces objets ; ils sont topologiquement équivalents. *A contrario*, transformer une sphère en un tore requiert de déchirer la surface puis de la recoller pour former l'anse.

Le vocabulaire et les définitions sont avancés de manière intuitive malgré le poids du formalisme et de la rigueur mathématique (SECTION 2.E.1). Ceci nous permet d'arriver rapidement aux relations d'équivalence entre deux objets géométriques (homotopie et homéomorphisme, SECTION 2.E.2). Nos résultats s'appuient en partie sur le calcul d'un invariant numérique caractérisant la classe topologique d'un objet géométrique (SECTION 2.E.3). L'identification de la structure d'un diagramme de Voronoï restreint et les théorèmes clés permettent de déterminer si la triangulation de Delaunay restreinte est homotope ou homéomorphe au domaine restrictif (SECTION 2.E.4).

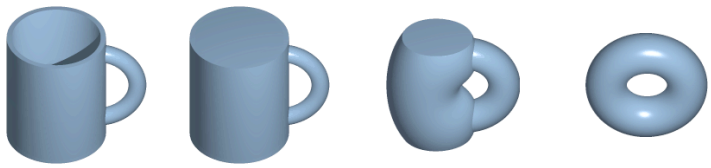


FIGURE 2.26 – Dans cette série d'images, une tasse est déformée de manière continue jusqu'à obtenir un tore. (source : Wikipedia)

2.E.1 Vocabulaire

Soit E un ensemble, une *partie* de E est composée d'éléments de E, de leur union ou encore de leur intersection ; l'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$. On dit d'une partie $p \subset \mathcal{P}(E)$ qu'elle forme un *recouvrement* si et seulement si tous ses constituants sont non vides et que leur union est égale à E ($\forall e \in E\ \exists p \in P$ tel que $e \in p$). Une *partition* définit un recouvrement particulier : tous ses éléments sont disjoints deux à deux. Posons par exemple $E = \{1, 2, 3\}$, alors :

$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, E\}$,

$\{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ forme un recouvrement de E,

$\{1, \{1, 2\}, 2\}$ ne recouvre pas E,

$\{\{1, 2\}, 3\}$ est une partition de E.

Soient E un ensemble et τ une collection de parties[32] de E, τ défini une topologie sur E si les axiomes suivants sont vérifiés :

- τ contient $\emptyset$ et E,
- une union quelconque d'éléments de τ appartient à τ,
- une intersection finie d'éléments de τ appartient à τ.

Le couple (E, τ) forme alors un *espace topologique*. En reprenant l'exemple précédent $E = \{1, 2, 3\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, E\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, \{1\}, E\}$ et $\tau_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, E\}$ forment des topologies sur l'ensemble E.
En revanche, $\tau_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, E\}$ et $\tau_5 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, E\}$ ne décrivent pas une topologie puisqu'ils enfreignent respectivement les axiomes d'union et d'intersection : il manque $\{1, 2\}$ dans la définition de τ_4 et $\{2\}$ devrait faire partie de τ_5.

Le *nerf* d'un recouvrement d'un ensemble donne toutes les parties non vides qu'il est possible de générer à partir de ce recouvrement. Formellement, soient (E, τ) un espace topologique et U un recouvrement ouvert de E (*i.e.* un ensemble d'ouverts de E dont la réunion est E), son nerf $N(U)$ est donné par l'ensemble $\{D \subset E \mid \bigcap D \neq \emptyset\}$.
Par définition, Le nerf d'un recouvrement est un complexe simplicial abstrait : si $\{e\} \in nerf(E)$, alors tout les sous-ensembles non vides de e le sont aussi. Il est possible d'en donner une réalisation géométrique en associant chaque singleton à un point, les couples sont alors modélisés par des arêtes, et plus généralement un n-uplet est représenté par un n-simplexe (FIGURE 2.28). Toutefois, il n'existe pas forcément de relation d'équivalence entre ce complexe simplicial et la topologie de E ; pour qu'il y en ait une (homotopie ou homéomorphisme, SECTION 2.E.2), le recouvrement doit vérifier le théorème du nerf ou encore la propriété de la boule topologique (SECTION 2.E.4).

32. Dans cette définition, les éléments de τ sont des ouverts (voir FIGURE 2.27).

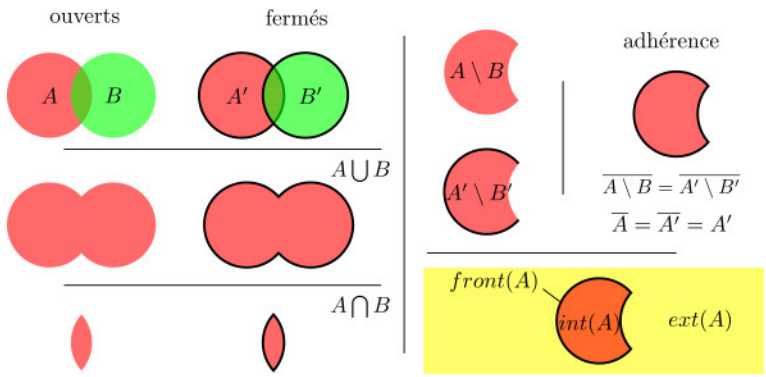


FIGURE 2.27 – Intuitivement, on qualifie un ensemble d'*ouvert* si aucun élément de l'ensemble n'appartient à sa frontière (*e.g.* disque $x^2 + y^2 < r^2$), et de *fermé* s'il contient sa frontière (*e.g.* $x^2 + y^2 \leq r^2$). l'intersection ou l'union d'un couple d'ouverts (resp. fermés) est un ouvert (resp. fermé, voir colonne de gauche). L'adhérence d'un ensemble est le plus petit fermé qui le contient (cadre en haut à droite) ; la frontière d'un ensemble est généralement définie comme l'intersection entre l'adhérence de cet ensemble (intérieur) et l'adhérence de son complémentaire (extérieur, en bas à droite).

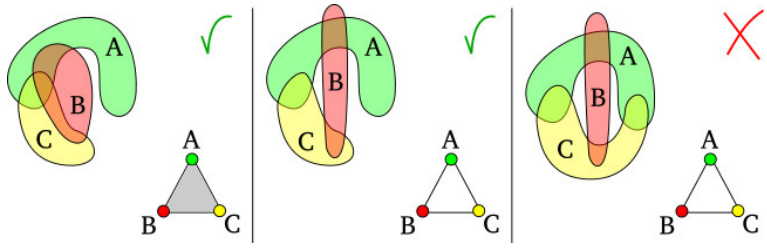


FIGURE 2.28 – Soient $E = \{A, B, C\}$ un ensemble et U un recouvrement ouvert de E ; On donne une réalisation géométrique de $nerf(U)$ pour chacune des trois configurations de E.
À gauche, $nerf(U) = \{\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}\}$, ; au milieu, $\{A, B, C\} = \emptyset$ et à droite, $\{A, C\}$ n'est pas connexe. Dans le dernier cas, il n'y a pas d'équivalence topologique entre $nerf(U)$ et E.

2.E.2 Homotopie et Homéomorphisme

Jusqu'à présent, nous avons dit de deux objets qu'ils étaient (ou non) semblables, équivalents ; on distingue en réalité plusieurs relations d'équivalence topologique, en particulier, l'homotopie et l'homéomorphisme.

Soient X et Y deux espaces topologiques de dimension k, ces deux espaces sont

homotopes (noté $X \sim Y$) si il existe deux applications continues $f(X) \mapsto Y$ et $g(Y) \mapsto X$ telles que :

$$g \circ f(X) \equiv Id(X) \quad \text{et} \quad f \circ g(Y) \equiv Id(Y)$$

homéomorphes (noté $X \approx Y$) si il existe une application f continue, bijective et dont la réciproque (f^{-1}) est également continue, soit :

$$f(X) \mapsto Y \quad f^{-1}(Y) \mapsto X$$

D'après ces définitions, on peut définir des classes d'équivalence dans lesquelles chaque élément est homotope (resp. homéomorphe) à un autre de la même classe.

Espaces contractiles
Par exemple, un objet est dit *contractile* s'il est homotope à un point ; typiquement, un plan, un segment ou encore un disque sont contractiles.
A contrario, le cercle et plus généralement les courbes fermées (ou lacets) ne le sont pas. Ils peuvent néanmoins être décomposés en éléments contractiles ; par exemple, un point et un segment suffisent à la décomposition d'un cercle en éléments contractiles (FIGURE 2.29).

2.E.3 Caractéristique d'Euler-Poincaré

La caractéristique d'Euler-Poincaré (χ) est un invariant numérique permettant d'identifier rapidement [33] la classe d'un espace topologique ; ce scalaire est en effet invariant par homéomorphisme.

Il est possible de le calculer à partir d'une décomposition en éléments contractiles : il correspond à la somme alternée du nombre d'éléments contractiles de chaque dimension, *i.e.* nombre de points, segments, disques, boules...
Clairement, la stratégie de décomposition n'influe en rien sur la valeur de la caractéristique d'Euler-Poincaré. Comme illustré dans la FIGURE 2.30, les maillages forment de telles décompositions : les sommets, arêtes et facettes sont des éléments contractiles.

33. Identification partielle : plusieurs configurations peuvent présenter la même valeur caractéristique ; on les différencie à travers une étude plus large : orientabilité, nombre de bords...

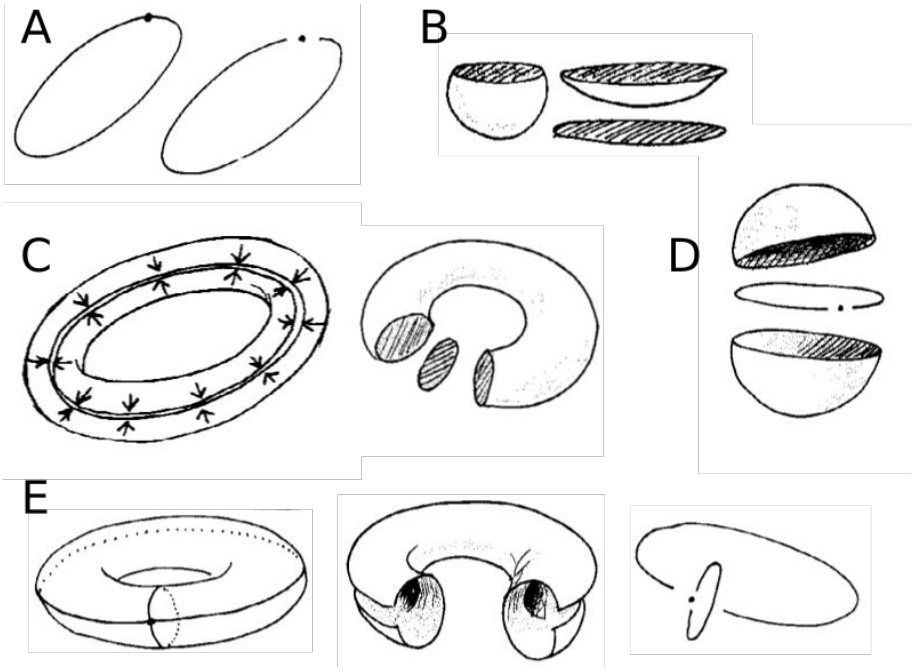


FIGURE 2.29 – On retrouve la décomposition d'une courbe fermée (A) et d'une sphère (D) en éléments contractiles ; plusieurs formes géométriques sont comparables à un disque (B). (C) et (E) donnent respectivement la contraction d'un "tore-volume" et d'un "tore-surface". Ces illustrations sont tirées du "Topologicon" [Pet99]

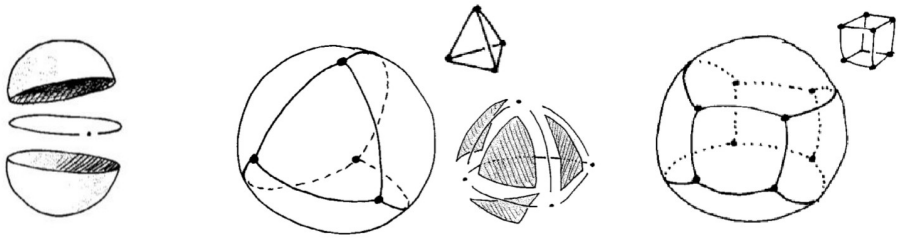


FIGURE 2.30 – La décomposition d'une sphère avec 4 et 6 sommets : on reconnaît alors aisément un tétraèdre et un cube (topologiquement ce sont toutes des surfaces fermées sans anses). Dans le premier cas, $\chi = 4 - 6 + 4 - 0 = 2$ et pour le second, $\chi = 8 - 12 + 6 - 0 = 2$. (source : [Pet99])

Aussi, pour une surface compacte $\mathcal{S}$ de dimension 2 munie d'une triangulation[34] $\mathcal{T}$ (*i.e.* $\mathcal{S} \equiv \mathcal{T}$), sa caractéristique d'Euler χ peut être déterminée à partir du nombre de sommets, d'arêtes et de facettes formant $\mathcal{T}$. En les notant respectivement S, A et F, $\chi(\mathcal{S})$ est défini par :

$$\chi(\mathcal{S}) = S - A + F$$

Il est aisé de retrouver le genre g d'une surface orientable à l'aide de sa caractéristique d'Euler : $\chi(\mathcal{S}) = 2 - 2g$.

Les surfaces à bord peuvent être traitées de manière équivalente : soit $\mathcal{S}$ une variété présentant un bord formé de k composantes connexes, elle est homéomorphe à une sphère ou une somme connexe de tores à k trous. On peut définir $\mathcal{S}^*$ une variété sans bord constituée comme la réunion de $\mathcal{S}$ et de k disques "fermant les trous" de $\mathcal{S}$; alors, on peut calculer sa caractéristique d'Euler ($\chi(\mathcal{S}^*)$) et déduire[35] $\chi(\mathcal{S}) = \chi(\mathcal{S}^*) - k$.

Ces définitions sont exploitées dans la suite pour légitimer la technique de remaillage fondée sur les diagrammes de Voronoï (SECTION 2.F) et garantir l'homéomorphisme entre les maillages source et résultat. En pratique, il s'agit de déterminer si la partition offerte par un diagramme de Voronoï restreint admet pour dual une surface triangulée homéomorphe au domaine restrictif (CHAPITRE 3).

2.E.4 Équivalence de la triangulation de Delaunay

La triangulation de Delaunay restreinte est, par définition, la réalisation géométrique duale d'un diagramme de Voronoï restreint. Nous avons vu qu'un ε-échantillonnage X du domaine restrictif M assurait, par construction, l'équivalence topologique ($\mathrm{Del}_{X|M} \equiv M$). Une étude topologique permet de le confirmer et plus largement de dire si l'échantillonnage d'un domaine surfacique conduit à une construction duale homotope ou homéomorphe au domaine restrictif.

Homotopie - Théorème du nerf

$\mathrm{Vor}_{X|M}$ forme un recouvrement fini et fermé[36] de M. La triangulation de Delaunay restreinte correspond à la réalisation géométrique de $nerf(\mathrm{Vor}_{X|M})$, c'est à dire $\mathrm{Del}_{X|M} = \{\sigma_T | T \subseteq X, \bigcap_{t \in T} \mathrm{Vor}_{t|M} \neq \emptyset\}$.
On dit d'un recouvrement ($\mathrm{Vor}_{X|M}$) qu'il forme un *bon recouvrement* si chacune de ses

34. Ou toute autre modélisation polygonale valide.
35. En pratique, lorsqu'on retire une facette du maillage approchant une variété, on diminue le nombre de face de 1, le nombre de sommets et d'arêtes est constant et finalement, χ est diminué de 1.
36. chaque cellule de Voronoï restreinte est fermée (la surface restrictive n'est pas infinie)

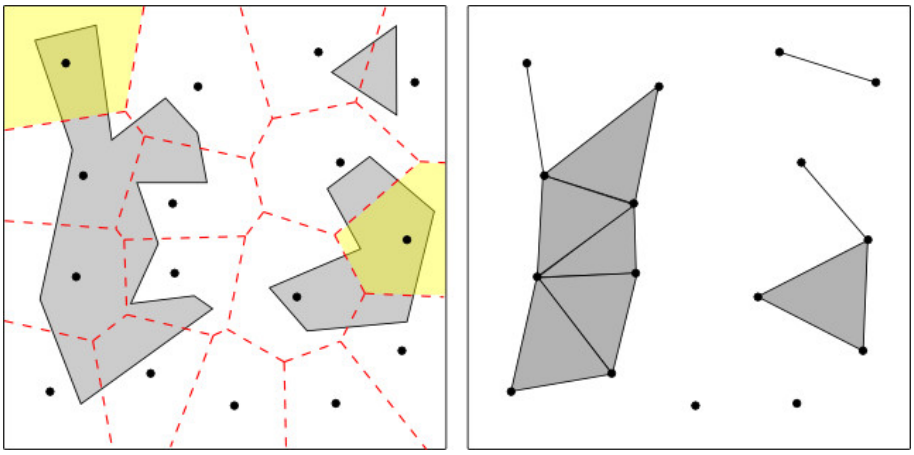


FIGURE 2.31 – Chaque cellule restreinte ou intersection de cellules est contractile : il y a homotopie.
Ce n'est pas le cas pour le bord du domaine (pas d'homéomorphisme) : la cellule en haut à gauche révèle une intersection entre le bord et le médiateur constituée de deux points distincts ; à droite, $\mathrm{Vor}_{x|bord}$ admet plusieurs composantes connexes.

intersections est soit vide soit contractile ; dès lors, le nerf de ce recouvrement, et *a fortiori* à sa réalisation géométrique $\mathrm{Del}_{X|M}$, est homotope à M.

Autrement dit, si tous les éléments[37] de $\mathrm{Vor}_{X|M}$ sont contractiles, alors $M \sim nerf(\mathrm{Vor}_{X|M}) \sim \mathrm{Del}_{X|M}$ (FIGURE 2.31). En revanche, l'homéomorphisme ne peut être atteint qu'avec de plus fortes contraintes.

Homéomorphisme - propriété de la boule topologique :

Edelsbrunner et Shah [ES97] ont établi un ensemble de conditions sous lesquelles est assurée la génération d'un maillage homéomorphe à la surface échantillonnée.

En pratique, une intersection non vide doit être semblable à une boule fermée de même dimension. Formellement, soient $M \subseteq \mathbb{R}^d$ une m-variété ($m > 0$) et $X \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble fini de points en position générale[38]. M vérifie la propriété de la boule vide si, pour tout $T \subseteq X$ tel que $Card(T) = m + 1 - l$ avec $0 < l < m$,

1. $\bigcap_{t \in T} V_{t,M}$ est soit vide, soit une l-boule fermée
2. $\bigcap_{t \in T} V_{t,bord(M)}$ est soit vide, soit une $(l-1)$-boule fermée

37. Pour un domaine surfacique : cellules restreintes, doubles et triples intersections de cellules.
38. On considère que Vor_X intersecte la surface de manière générale (*e.g.* pas d'arêtes du maillage totalement incluse dans un plan médiateur de Voronoï).

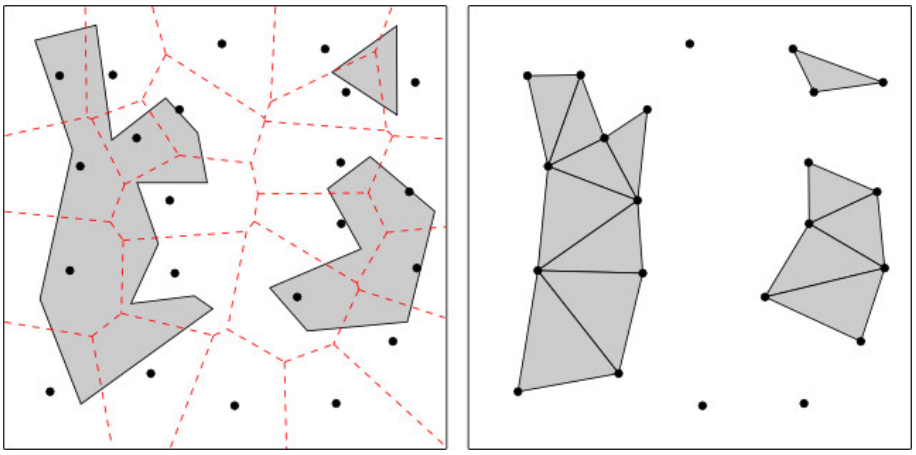


FIGURE 2.32 – Homéomorphisme : chaque cellule ou intersection non vide de cellules vérifie la propriété de la boule vide.

Autrement dit, si tous les éléments de $\mathrm{Vor}_{X|M}$ vérifient la propriété de la boule vide alors $\mathrm{Del}_{X|M} \approx M$ (théorème 2 de [ES97]).

Dans la pratique, nous travaillons avec des surfaces 2-variétés sans bord [39] ($m = 2$), l peut donc prendre pour valeur 0, 1 ou 2 ; le tableau ci-dessous recense les éléments du diagramme de Voronoï manipulés, l'objet topologique auquel ils doivent être équivalent pour garantir l'homéomorphisme de la reconstruction et l'élément dual.

l	$Card(T)$	*objet de* $\mathrm{Vor}_{X\|M}$	*objet topologique*	*élément de* $\mathrm{Del}_{X\|M}$
0	3	$\Omega_{x_1\|M} \cap \Omega_{x_2\|M} \cap \Omega_{x_3\|M}$	*point*	*triangle*
1	2	$\Omega_{x_1\|M} \cap \Omega_{x_2\|M}$	*segment*	*arête*
2	1	$\Omega_{x_1\|M}$	*disque*	*sommet*

L'analyse complète des configurations de cellules est un processus exigeant et la correction d'une configuration invalide n'est pas directe. Une configuration inadaptée de composantes connexes peut *a priori* être résolu par une augmentation de la densité : le raffinement atteindra "en temps fini" la finesse d'un ε-échantillonnage et la partition sera adéquate par construction. Cette solution est généralement retenue dans la littérature (SECTION 2.F) mais n'apporte aucune garantie quant à la compression de données (nombre de nouveaux échantillons nécessaires).

Ce sujet constitue le premier volet des travaux exposés dans la suite (CHAPITRE 3), à savoir : une analyse de chaque composante connexe (topologie, voisinage) en vue

39. Dans notre implantation, le bord d'un maillage est marqué par l'adjacence avec une facette virtuelle. On peut donc considérer ce voisinage comme un voisinage classique.

de la génération d'une variété triangulée duale homéomorphe au domaine restrictif. Les corrections éventuelles de la partition sont opérées de manière combinatoire ce qui permet de borner le nombre d'échantillons nécessaires.

2.F Remaillage fondé sur les diagrammes de Voronoï

Yan et ses collègues ont développé une méthode de remaillage articulée autour des diagrammes de Voronoï ([YLL+09]).

Ils proposent de répartir uniformément un ensemble de points (X) sur un domaine courbe (M) : la surface polygonale est échantillonnée aléatoirement puis la position des graines est optimisée pour atteindre une configuration barycentrique (*i.e.* algorithme de Lloyd et optimisation quasi-newton).

La seconde étape de l'algorithme consiste à extraire la réalisation géométrique duale de $\mathrm{Vor}_{X|M}$ (*i.e.* la triangulation de Delaunay restreinte, M') : chaque graine définit un sommet de la surface, chaque sommet de $\mathrm{Vor}_{X|M}$ de type *iii* conduit à la construction d'une facette triangulaire. Une brève analyse permet d'orienter les facettes générées et d'éviter les doublons ; les sommets isolés (aucune facette incidente) sont supprimés en fin de traitement (FIGURE 2.33).

Cette technique de remaillage est rapide, efficace et relativement robuste face à une entrée bruitée : une simple soupe de triangles suffit. En revanche, elle souffre en l'état de quelques limites : certaines configurations de cellules ne conduisent pas à la génération d'une triangulation valide et l'optimisation barycentrique est source de lissage (positionnement au barycentre de la cellule, FIGURE 2.23).

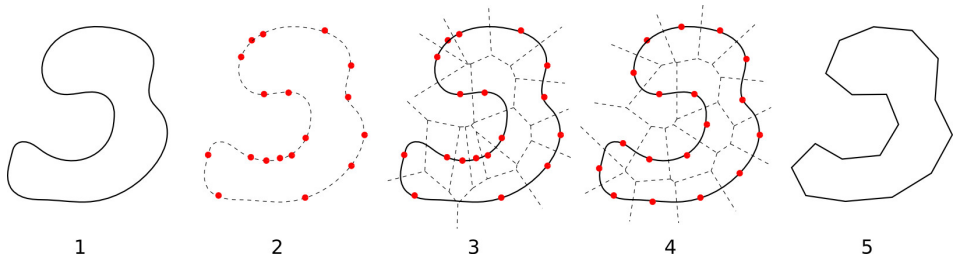


FIGURE 2.33 – Le processus de remaillage de surface (1) débute par un échantillonnage aléatoire du domaine restrictif (2) ; s'en suit une optimisation de la répartition de cet ensemble de point (CVT restreint, vignettes 3 et 4). La réalisation géométrique duale est finalement extraite (5).

Génération du maillage

Yan *et al.* s'appuient sur une bonne répartition des échantillons, ce qui améliore considérablement les chances d'une bonne reconstruction (répartition uniformisée des futurs sommets et patron "régulier" des cellules), mais ce n'est pas suffisant. Comme nous l'avons vu, le dual géométrique du diagramme de Voronoï restreint n'est pas obligatoirement homotope, *a fortiori* homéomorphe, au domaine restrictif. Pour cela, la partition de Voronoï doit satisfaire les prérogatives du théorème du nerf ou la propriété de la boule topologique. L'analyse complète des configurations des cellules restreintes nécessaire à la validation topologique de la construction est longue à mettre en œuvre et rend l'algorithme lourd [YLL+09].

Les premiers pas en matière de reconstruction maîtrisée concernent les cellules formées par plusieurs composantes connexes : les auteurs proposent alors de générer un sommet pour chaque composante connexe, typiquement, son barycentre. Cette stratégie permet d'éliminer bon nombre de sommets non variété et s'avère très efficace dans les régions minces (*i.e.* distance à l'axe médian inférieure ou égale à densité d'échantillonnage). Cette correction simple et automatique requiert néanmoins une mémorisation partielle du résultat du calcul du diagramme de Voronoï pour identifier chaque composante connexe et son voisinage [40].

Les configurations plus complexes ne sont détectées qu'après retour à l'univers primal (analyse du complexe simplicial généré) ; le domaine applicatif (remaillages ponctuels) et la complexité d'une correction automatique de l'échantillonnage font préférer aux auteurs une nouvelle tentative de remaillage avec augmentation de la densité d'échantillonnage (converge vers une solution suivant la théorie de l'ε-échantillonnage, FIGURE 2.34).

Enfin, pour améliorer l'approximation, il est possible de projeter les générateurs sur le domaine restrictif, et ainsi définir une triangulation contrainte [DFG+06], voire de respecter un ensemble arêtes prédéfinies (FIGURE 2.35).

Évolutions de la méthode

La contribution principale est une méthode de calcul d'un diagramme de Voronoï restreint suffisamment rapide pour être employée dans un processus itératif ; aussi, les principaux travaux qui ont suivi cette voie se sont concentrés sur l'optimisation de la répartition de l'ensemble d'échantillons sur le domaine, en prenant éventuellement en compte la géométrie du domaine restrictif (distance à l'axe médian, variation de la normale... ou d'autres contraintes externes (*e.g.* champs scalaire / vectoriel, optimisation numérique, SECTIONS 2.F.1 et 2.F.2).

40. Une évolution de la méthode de calcul du diagramme de Voronoï permet d'éluder chaque composante sans mémorisation (propagation par composante connexe, [Niv12]).

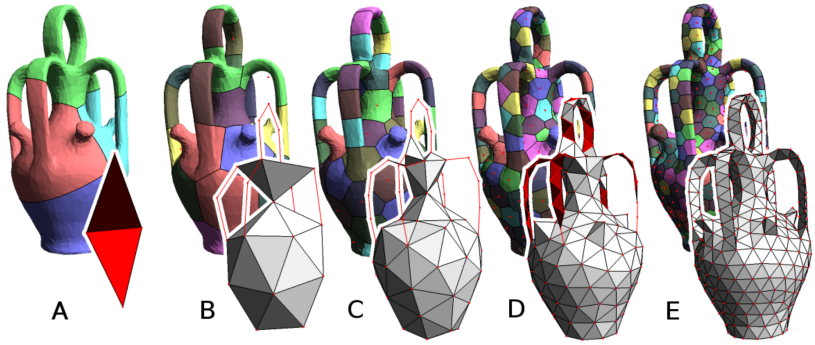


FIGURE 2.34 – Tentatives successives de ré-échantillonnage jusqu'à avoir un maillage respectant la définition d'une variété triangulée : une fois le maillage dual construit, la présence de sommet ou arête non variété déclenche une nouvelle tentative avec un nombre plus important de sommets ; et cela jusqu'à convergence.

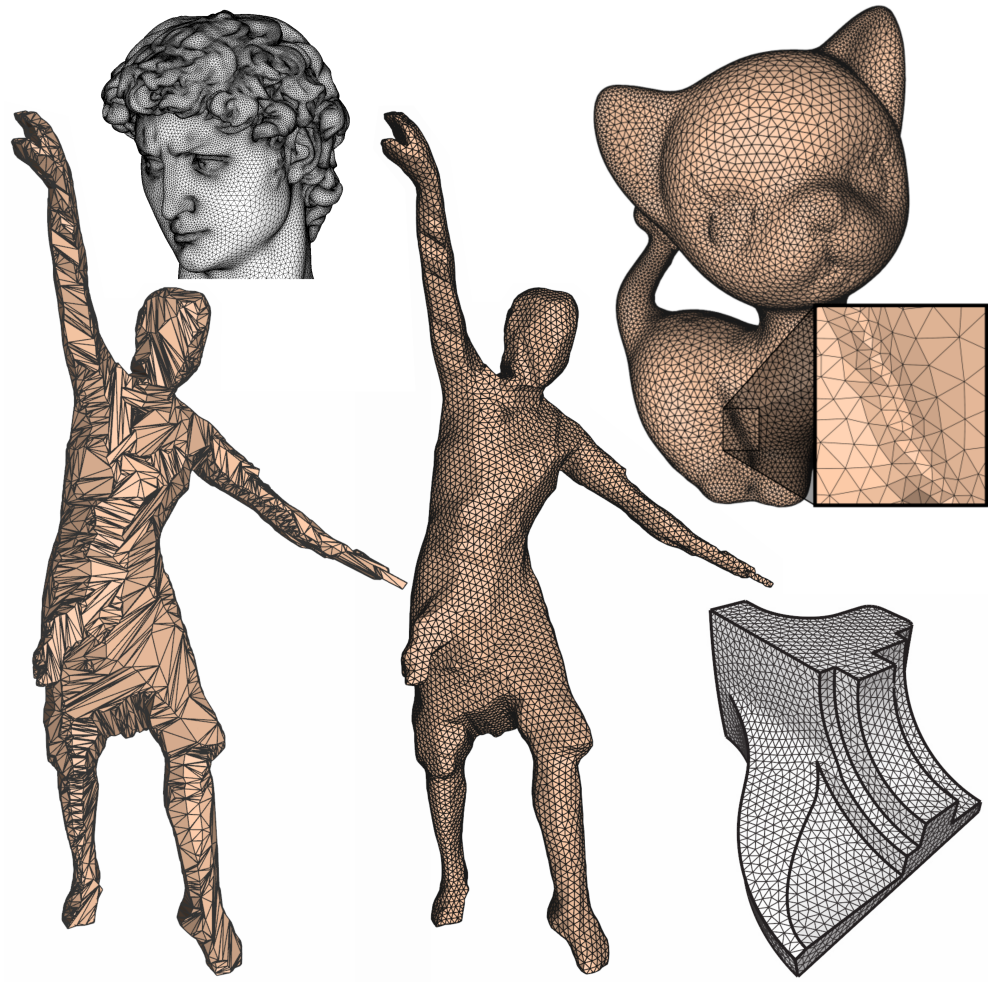


FIGURE 2.35 – Exemple de remaillages isotropes proposés extraits de [YLL+09]. La méthode fournit des maillages harmonieux et réguliers, même lorsque l'entrée est bruitée ; la densité d'échantillonnage peut être adaptée à la géométrie et les sommets peuvent être contraints.

La question d'une construction totalement automatique, incluant une méthode de correction robuste et maîtrisée de l'échantillonnage ne s'est posée qu'ici (CHAPITRE 3), dans le contexte du suivi de surface : la simulation ne doit pas être avortée pour un problème de génération du maillage.
Nous nous sommes également intéressés à la position finale des sommets du maillage et proposons de l'ajuster de manière à préserver localement le volume (CHAPITRE 4).

2.F.1 Optimisations de l'échantillonnage dans $\mathbb{R}^3$

Comme le montre la FIGURE 2.35, l'optimisation barycentrique conduit à la définition d'un maillage équilibré (superficie et proportions régulières des triangles), y compris lorsque la densité d'échantillonnage est variable. Ce point laisse entrevoir de nombreuses possibilités : une modification de la fonction objectif permettrait d'adapter la répartition des échantillons à notre guise.

2.F.1.a Anisotropie normale et norme Lp

Lévy *et al.* généralisent la notion de diagramme de Voronoï barycentrique [LL10] et remplacent la fonction objectif utilisée jusqu'alors par

$$F_{L_p} = \sum_i \int_{\Omega_i \in \Omega} \parallel M_y[y - x_i] \parallel_p^p \, dy$$

avec M une matrice d'anisotropie définie en y et $\| \cdot \|_p^p$ la norme Lp (FIGURE 2.38).

Cette nouvelle formulation présente de nombreux avantages : en plus de permettre d'ajuster la répartition des sommets et leur combinatoire en fonction d'un champs d'anisotropie (FIGURE 2.36), elle permet notamment de définir un échantillonnage sensible aux régions d'intérêt sans identification préalable (préservation des arêtes vives, voir paragraphe suivant). L'emploi de la norme Lp amène à la formulation de la première approche variationnelle pour la définition de maillages hex-dominant (FIGURE 2.39) ; ce sujet n'est pas détaillé ici (hors champ d'étude).

La génération de maillages anisotropes est détaillée dans la suite à travers une autre technique (plongement haute dimension, SECTION 2.F.2).

Préservation des arêtes vives
La technique d'échantillonnage proposée par Yan *et al.* tend à lisser les crêtes ou autres pics [41]. Cette nouvelle formulation de la fonction objectif permet de pallier ce problème

41. Une solution ad-hoc repose sur un étiquetage préalable de ces arêtes/sommets (processus automatique externe ou intervention utilisateur) ; elle propose d'appliquer un traitement particulier aux graines dont les cellules restreintes couvrent les régions mises en évidence ; cette projection est appliquée après avoir procédé à l'optimisation barycentrique.

en associant chaque facette du domaine restrictif à une matrice d'anisotropie (M^f) relative à sa normale (N^f) :

$$\mathrm{M}^f = (s-1)\begin{pmatrix} N_x^f[N^f]^t \\ N_y^f[N^f]^t \\ N_z^f[N^f]^t \end{pmatrix} + \mathrm{I}_{3\times 3}$$

Son application à un vecteur v a pour effet de magnifier d'un facteur s la composante de v alignée avec la normale. Ainsi, chaque facette constituant la cellule de Voronoï retreinte contraint le déplacement suivant sa propre normale et leur combinaison dirige les échantillons vers les arêtes vives ou les pointes (FIGURE 2.37). En résulte une capture automatique et implicite des arêtes vives sans pré-traitement ni surcoût de calcul par rapport à une optimisation barycentrique classique. Cette application repose encore sur la norme euclidienne (L_2).

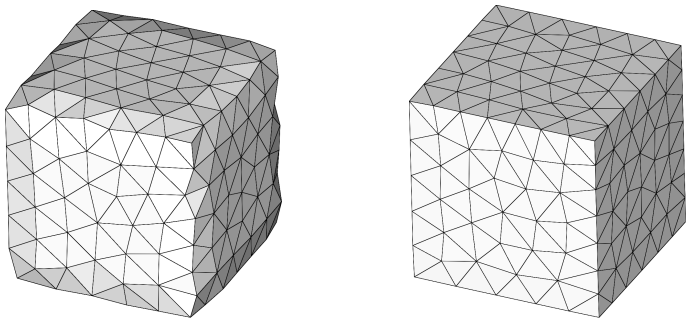
Norme *Lp*
La norme *Lp* avec $p > 2$ est mise en œuvre pour forcer l'alignement des cellules restreintes. En effet, l'imbrication naturelle des cellules de Voronoï dans une configuration barycentrique stable (nid d'abeille) n'est pas souhaitable dans certains cas (*e.g.* FIGURE 2.39).

2.F.1.b Approximation de fonctions à valeur sur un maillage

D'autres travaux à propos de l'échantillonnage ont cherché à approcher une fonction quelconque à valeur sur le domaine restrictif : il s'agit par exemple d'optimiser la position des échantillons de manière à ce que les variations soient minimales au sein d'une même cellule. Cette étude portant sur une fonction d'illumination [NL13] n'est pas détaillée ici.

Cette nouvelle possibilité a néanmoins été reprise pour ajuster la géométrie d'un maillage par rapport à un autre ([NYL11] et CHAPITRE 4).

FIGURE 2.36 – On peut mailler un domaine polygonal (à gauche) suivant un champ de tenseurs métriques (milieu) : le résultat (à droite) proposé par Labelle et Shewchuk [LS03].



(a) sans anisotropie normale (b) avec anisotropie normale

FIGURE 2.37 – A gauche, les arêtes vives du cube sont lissées, l'emploi d'une distance anisotrope les préserve sans avoir recours à une détection préalable (à droite).

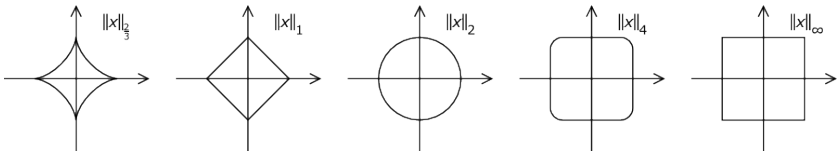


FIGURE 2.38 – Norme Lp - représentation du cercle unitaire pour différentes valeur de p. Pour un vecteur tridimensionnel vx, y, z, $\| v \|_p = \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p + |z|^p}$.

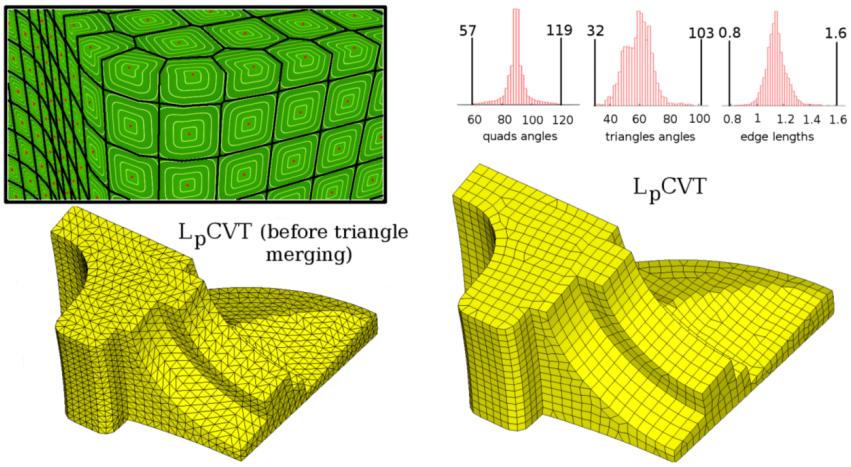


FIGURE 2.39 – Génération de maillages hex-dominant [LL10]. Le maillage triangulaire (en bas à droite) est obtenu suite à une optimisation L_8CVT (aperçu des cellules de Voronoï restreintes et iso-valeurs en haut à droite). La génération des facettes quadrangulaires résulte d'un traitement supplémentaire : fusion préférentielle de certains triangles suivant angle diédral et planéité des quads ([MT00]).

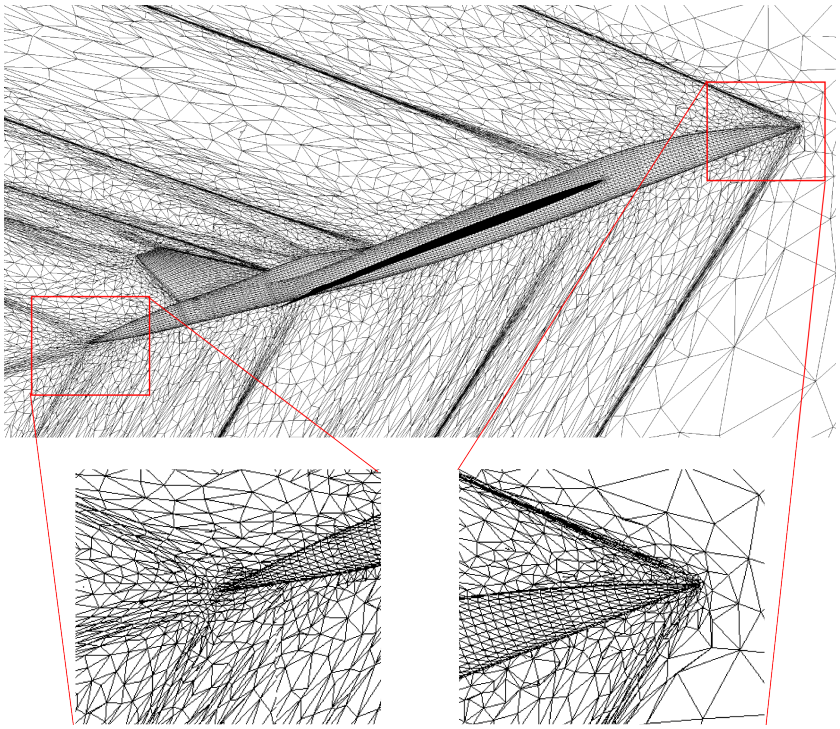


FIGURE 2.40 – Écoulement supersonique autour d'un avion ([AL10]) - dans ce cas, l'écoulement (onde de choc) est très rapide dans le sens de la propagation alors que les variations tangentielles sont faibles (le long du front). Pour respecter le rapport entre les pas d'intégration en temps et en espace (*e.g.* condition C.F.L.), le maillage doit être très fin, en particulier dans la direction de propagation, et les contraintes techniques (espace mémoire et temps de calcul) ne permettent pas d'atteindre la précision requise avec un maillage isotrope.

2.F.2 Génération de maillages anisotropes

Dans de nombreux cas, il parait judicieux, voire impératif, d'adapter la géométrie des facettes au contexte. La définition de maillages anisotropes est un problème difficile, en particulier lorsque les proportions des triangles sont extrêmes (*e.g.* 1 :10000, FIGURE 2.40). Nous ne détaillons pas l'état de l'art ; les lecteurs intéressés peuvent se référer aux travaux de Alauzet et Loseille [AL10, LA11a, LA11b] ou encore à ceux de Boissonnat *et al.* [BWY08].

Notre objectif ici est moins exigeant ; les ratios sont moins élevés et sont dirigés par la courbure locale (FIGURE 2.41). C'est l'application proposée dans [LB13] ; depuis, l'étude a été poursuivie (anisotropie définie à partir d'un champ de tenseurs métriques

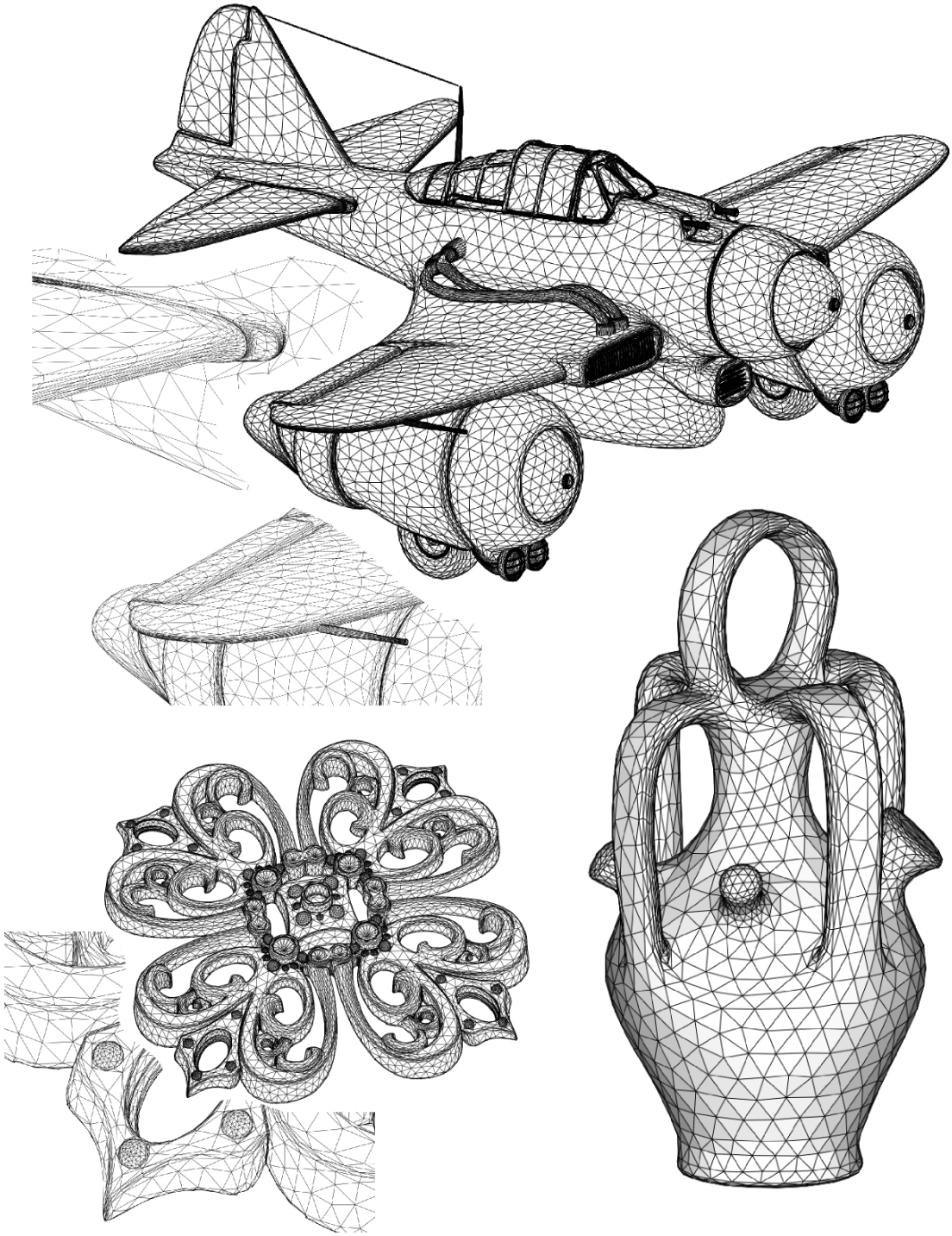


FIGURE 2.41 – Exemple de remaillages anisotropes [LB13].

[ZGW+13]) et l'approche perfectionnée [Lé14, NLG15]. Une application dans un processus itératif (suivi de déformations homéomorphes) est détaillée dans la suite (SECTION 5.C).

La méthode exposée ici repose sur une proposition apparemment simple : approcher la distance anisotrope (mesure réalisée sur une variété riemannienne) à l'aide d'une mesure isotrope (distance euclidienne) opérée dans un espace de plus haute dimension (SECTIONS 2.F.2.a à 2.F.2.b).

Les capacités de l'algorithme de calcul du diagramme de Voronoï sont alors mises à contribution pour partitionner le domaine plongé dans $\mathbb{R}^n$ et, au delà, pour améliorer la répartition d'un ensemble d'échantillons (optimisation barycentrique) et générer la triangulation duale (SECTION 2.F.2.d) ; la projection de ce résultat dans l'espace réel donne un maillage dont la position des sommets et la géométrie des facettes sont adaptées à la courbure locale (SECTION 2.F.2.e).

2.F.2.a Idée et principe

La méthode proposée ici repose sur un résultat mathématique complexe, le théorème de Nash : Nash et Kuiper ont démontré [Nas56] qu'un problème résolu à l'aide d'une métrique anisotrope dans un espace de dimension n peut l'être à travers l'emploi d'une mesure isotrope dans un espace de dimension m ($m > n + 1$ et est borné) ; la difficulté réside dans la définition du plongement. Les FIGURES 2.42 et 2.43 illustrent ce principe.

Il ne s'agit pas ici de déterminer le plongement idéal mais d'utiliser un plongement particulier permettant d'atteindre notre objectif : adapter la géométrie des facettes en fonction de la courbure locale.

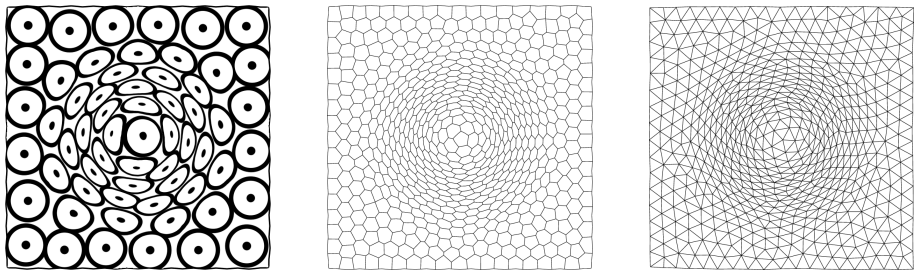
Application de Gauss

L'application de Gauss est une application à valeurs sur la sphère unitaire $\mathbb{S}^2$; elle associe à chaque point d'une surface orientée son vecteur normal ($x \in \Omega \mapsto n_x \in \mathbb{S}^2$, FIGURE 2.44).

En pratique, cette application n'est bijective que pour les domaines convexes, elle ne peut être directement employée pour définir un partitionnement de domaines quelconques.

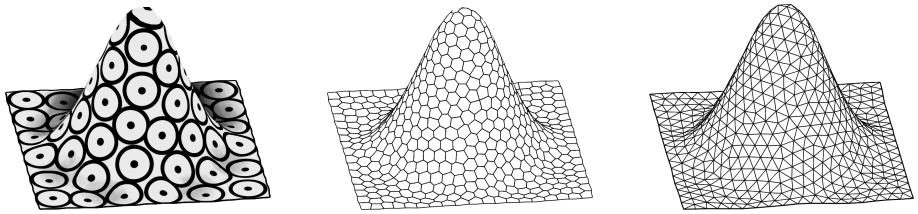
2.F.2.b Plongement proposé

Pour générer des maillages adaptés à la courbure de la surface, les auteurs suggèrent d'utiliser un système 6 dimensions alliant les coordonnées réelles d'un point du



A B C

FIGURE 2.42 – diagramme de Voronoï (B) et triangulation duale (C) d'un ensemble de points idéalement répartis sur un sous domaine de $\mathbb{R}^2$ selon un champ d'anisotropie (A).



A B C

FIGURE 2.43 – Dans cette série de vignettes, le diagramme de Voronoï (B) et la triangulation duale (C) ont été établis sur un sous domaine de $\mathbb{R}^3$; en l'observant du dessus (i.e. projection dans $\mathbb{R}^2$), la mesure isotrope semble encoder la métrique anisotropie de l'exemple précédent (FIGURE 2.42).

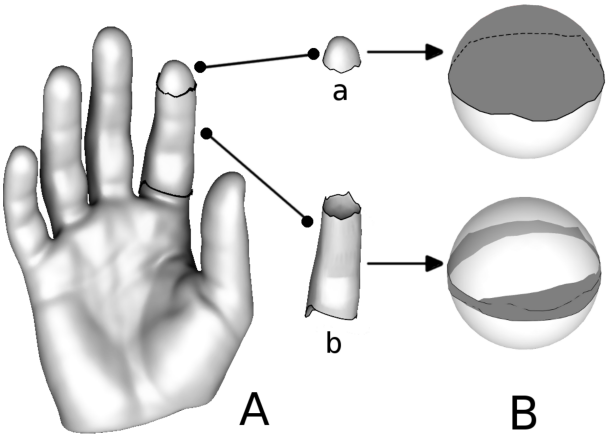


FIGURE 2.44 – Remaillage anisotrope fondé sur l'application de Gauss.
A : un domaine surfacique avec deux régions surlignées (a et b).
B : l'application de Gauss de ces régions (en gris foncé). La région a couvre un hémisphère alors que la zone b b ne couvre qu'un anneau proche de l'équateur.

domaine ($\in \mathbb{R}^3$) et son image par l'application de Gauss. En d'autre termes, les objets géométriques considérés sont plongés dans $\mathbb{R}^6$ suivant $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^6$:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ sn_x \\ sn_y \\ sn_z \end{bmatrix}$$

avec $s \in \mathbb{R}^+$ étant un paramètre de contrôle permettant d'ajuster l'influence de la normale n ; plus s est grand, plus l'anisotropie est forte.

2.F.2.c Répartition uniforme des échantillons

Nous savons que l'aire de l'image par l'application de Gauss est égale à la courbure de Gauss (K, ou courbure totale) ; cette valeur correspond au produit des courbures principales ($K = \kappa_1\kappa_2$).

En d'autres termes, la densité d'échantillonnage locale est largement influencée par l'importance de la courbure : dans notre exemple, l'extrémité des doigts attire plus d'échantillons que les phalanges (région tubulaire) et encore bien plus que la paume ou le dos de la main (portions "planes"). Ces différences de densité sont d'autant plus importantes que le facteur d'anisotropie est élevé (FIGURE 2.45).

2.F.2.d Construction du dual géométrique

Les conditions de validité de cellule restent les mêmes. Certaines difficultés font toutefois leur apparition, en particulier lorsque le facteur d'anisotropie est fort ; par exemple, une cellule restreinte peut se retrouver totalement circonscrite par une unique autre composante connexe, formant une sorte de "boutonnière" mais cet ensemble n'admet pas de dual géométrique valide (FIGURE 2.45, zoom sur la paume de la main et facteur d'anisotropie fixé à 2.0)... Les auteurs proposent de contourner ce problème en fusionnant les composantes connexes incriminées.

De la même manière, la projection des cellules restreintes dans l'espace réel affecte largement leur caractère convexe et pour de trop fortes valeurs de s, certains triangles duaux peuvent être inversés : les normales de plusieurs facettes adjacentes pointent dans des directions opposées (FIGURES 2.46 et 2.47).

2.F.2.e Résultats

La méthode de calcul du diagramme de Voronoï est performante et permet l'optimisation barycentrique (algorithme de Lloyd et méthode quasi-newton) d'un ensemble d'échantillons dans un espace de dimension d supérieure à 3 : la publication originale

mentionne des tests réalisés en temps raisonnable (quelques secondes à quelques minutes) sur des maillages de l'ordre du million de sommets et des espaces de plongement très larges ($d = 5000$).

En pratique, si les données d'entrée sont cohérentes et réalistes, la construction du dual géométrique fournit des maillages anisotropes de haute qualité (FIGURE 2.41) sans réel surcoût par rapport à la version isotrope ; ce résultat est largement lié à la technique de calcul du diagramme de Voronoï (dépouillement par demi-espace et condition d'arrêt fondée sur le rayon de sécurité, SECTION 2.D.2.a).

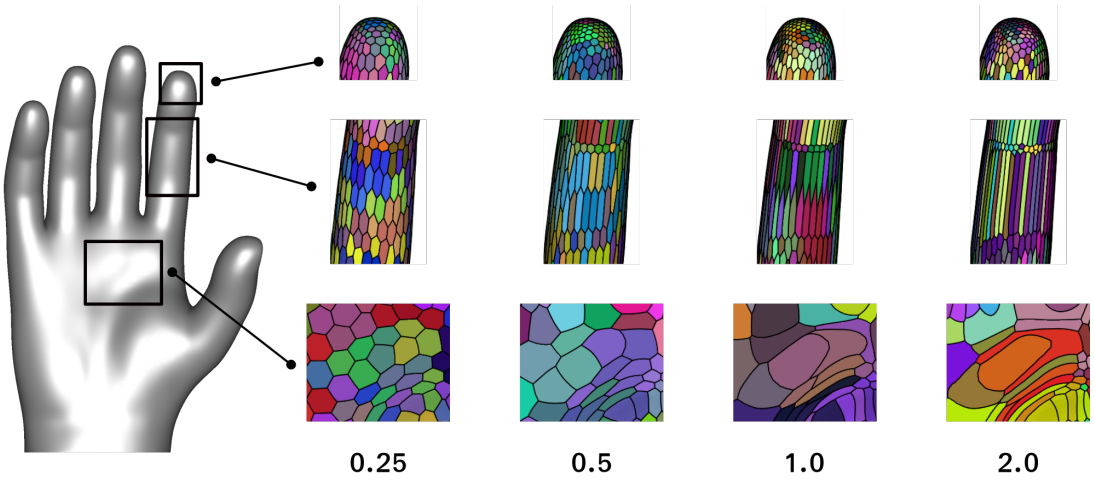


FIGURE 2.45 – Effet du facteur d'anisotropie (diagramme de Voronoï restreints). Lorsqu'il est trop important, la projection des cellules restreintes conduit à la définition de régions de pertinence discutable (à gauche, cellules en forme de croissant, formant des systèmes de boutonnières.)

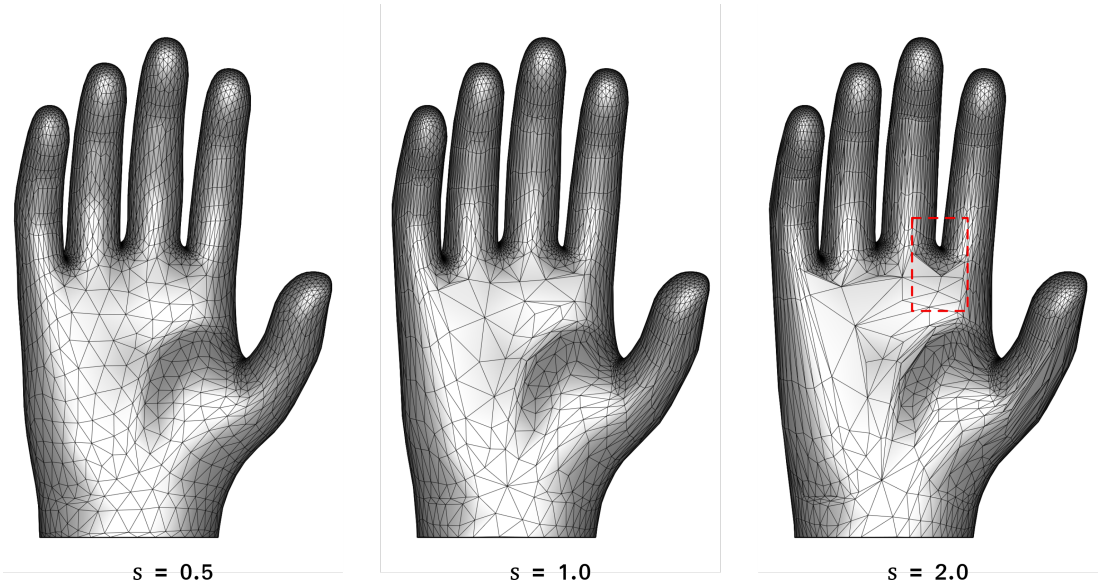


FIGURE 2.46 – Résultats du remaillage du modèle de main avec 3500 échantillons avec différents facteurs d'anisotropie. l'encadré à droite est détaillé en FIGURE 2.47.

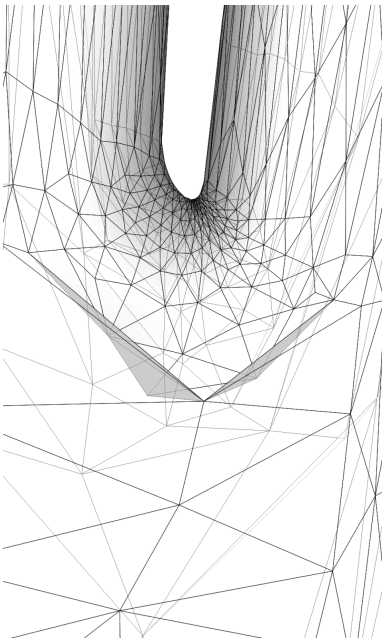


FIGURE 2.47 – Détail du résultat du remaillage du modèle de main avec un facteur d'anisotropie trop important : certaines facettes sont inversées...

Deuxième partie

Contributions à la technique de remaillage fondée sur les diagrammes de Voronoï

Nous avons vu l'importance d'avoir une bonne représentation des surfaces libres dans les simulations d'écoulement (CHAPITRE 1). Les solutions existantes s'appuient sur différents paradigmes, notamment le suivi d'une représentation explicite (i.e. maillage). Ce type d'approche offre de nombreux avantages mais le maintient de la qualité du maillage reste un défi que nous souhaitons relever avec la technique de remaillage initialement proposée par Yan *et al.* (CHAPITRE 2).
Ce nouveau champs d'application requiert un travail préalable de géométrie algorithmique pour améliorer la robustesse et la précision de la technique de remaillage.

Plus précisément, le CHAPITRE 3 s'attache au problème de la définition d'une variété triangulée à partir de la décomposition du domaine surfacique selon un diagramme de Voronoï restreint. En plus d'assurer la validité intrinsèque de la modélisation, la méthode apporte une garantie topologique supplémentaire : le résultat du remaillage est homéomorphe au domaine restrictif.

Un système d'optimisation *a posteriori* propose ensuite de minimiser l'erreur géométrique induite par le lissage et les changements de combinatoire des sommets de la représentation (CHAPITRE 4).

Enfin, le cinquième et dernier chapitre de ce mémoire assemble toutes les briques et expose une étude visant à répondre au problème de représentation des surfaces libres dans les simulations d'écoulement à l'aide des diagrammes de Voronoï.

Chapitre 3

Du diagramme de Voronoï restreint à une variété triangulée

Sommaire

3.A Solution naïve et ses limitations **87**
3.A.1 Décomposition en composantes connexes 87
3.A.2 Conditions de validité 89
3.A.3 Réalisation géométrique duale 90
3.A.4 Position des sommets 92
3.A.5 Configurations spéciales 93
3.B Recherche d'une solution par force brute **94**
3.B.1 Sous domaine restrictif avec bords 94
3.B.2 Raffinement 95
3.C Solution minimale **96**
3.C.1 Identification topologique 96
3.C.2 Nouvelles réalisations géométriques 97
3.C.3 Gestion des erreurs relatives au voisinage 103
3.D Résultats **104**
3.D.1 Prérequis 104
3.D.2 Résultats sur remaillage statique 105
3.E Optimisation et Partitionnement dans $\mathbb{R}^{n>3}$ **110**
3.F Algorithmes et structures de données **112**
3.F.1 Décomposition en composantes connexes 112
3.F.2 Combinatoire de chaque composante connexe 114
3.F.3 Structure de données 116

Les diagrammes de Voronoï restreints introduits dans le chapitre précédant fournissent une base solide pour la génération de maillages triangulaires, via la triangulation de Delaunay restreinte. Cette théorie n'est cependant applicable que sous des hypothèses fortes qui sont rarement réunies dans la pratique ; l'existence même d'une telle triangulation est dépendante de critères topologiques intrinsèques à chaque cellule restreinte et reste fortement liée à leurs relations de voisinage.

Ce chapitre explique concrètement comment définir une variété triangulée à partir de la décomposition spatiale offerte par les diagrammes de Voronoï restreints.

Dans un premier temps (SECTION 3.A), nous nous concentrerons sur les conditions suffisantes pour que la partition admette pour dual une variété triangulée. Dans le cas favorable, la combinatoire de chaque sommet est directement déduite des relations de voisinage des cellules restreintes (FIGURE 3.1) ; il ne reste alors plus qu'à définir la position de ces sommets pour obtenir un maillage.

En pratique, l'ensemble d'échantillons, décidé *a priori*, peut s'avérer moins favorable et conduire à des configurations de cellules inappropriées, rendant impossible la définition d'une triangulation duale valide (SECTION 3.A.5).

Une partie importante des présents travaux est consacrée à développer un ensemble de techniques pour analyser la partition, détecter les configurations spéciales et assurer la correction du partitionnement. Si un simple raffinement local de l'échantillonnage permet d'assurer la convergence vers une décomposition valide (SECTION 3.B), il est possible d'avoir une approche complémentaire, plus élaborée, visant à conserver au mieux la trace de l'échantillonnage initial (SECTION 3.C). La SECTION 3.D compile les résultats de ces deux approches.

Afin de mieux capturer les régions présentant de fortes courbures, nous nous sommes aussi intéressé à un univers de plongement de plus grande dimension ($\mathbb{R}^n$ avec $n > 3$), dans lequel l'analyse des configurations de composantes connexes est semblable mais les éventuelles corrections de l'échantillonnage s'avèrent plus délicates (SECTION 3.E).

L'implémentation de toutes ces opérations est relativement simple mais requiert la mémorisation du résultat du calcul du diagramme de Voronoï restreint. Elle s'appuie sur deux algorithmes de parcours permettant de renseigner l'ensemble des informations nécessaires à l'identification de la nature et du voisinage de chaque composante connexe (SECTION 3.F).

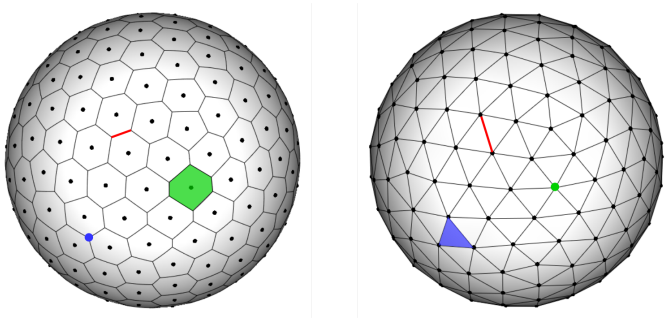


FIGURE 3.1 – Diagramme de Voronoï et graphe dual ; ici, les échantillons sont idéalement répartis sur une sphère, chaque composante vérifie la propriété de la boule topologique et la construction de la variété triangulée duale est triviale (éléments duaux appairés par couleur).

3.A Solution naïve et ses limitations

Il est possible de garantir la construction d'une variété triangulée à partir de la partition offerte par les diagrammes de Voronoï restreints. Comme nous l'avons vu dans la SECTION 2.D.3, il suffit que chaque élément de $\mathrm{Vor}_{X|M}$ vérifie la propriété de la boule topologique [ES97] afin d'assurer l'équivalence topologique, *i.e.* $\mathrm{Del}_{X|M} \approx M$.

Pour arriver à ce résultat, le premier travail consiste à traduire cet énoncé en termes pratiques de cellule et de voisinage (SECTION 3.A.2). Si ces conditions sont respectées, la combinatoire révélée par la partition nous permet de générer une variété triangulée homéomorphe au domaine restrictif (SECTION 3.A.3).
La tâche la plus délicate réside alors dans le choix de la position des sommets de la nouvelle triangulation (SECTION 3.A.4) sachant que chacun d'eux est issu d'une graine de Voronoï et représente une potion du domaine surfacique.

Les configurations de cellules moins favorables (SECTION 3.A.5) requièrent un traitement particulier qui est abordé par la suite (SECTION 3.B et suivante). Et avant d'entrer dans le vif du sujet, nous revenons sur la remarque de Yan *et al.* [YLL+09] qui proposent de considérer chaque composante connexe indépendamment (SECTION 3.A.1).

3.A.1 Décomposition en composantes connexes

Comme Yan *et al.* l'ont souligné [YLL+09], une cellule formée par plusieurs composantes connexes conduit à la définition d'un sommet dual non variété ; la FIGURE 3.2.a donne un exemple 2D. Ce phénomène est fréquent lorsque la surface approchée délimite une région de faible épaisseur, i.e. proche ou inférieure de la résolution de l'échantillon-

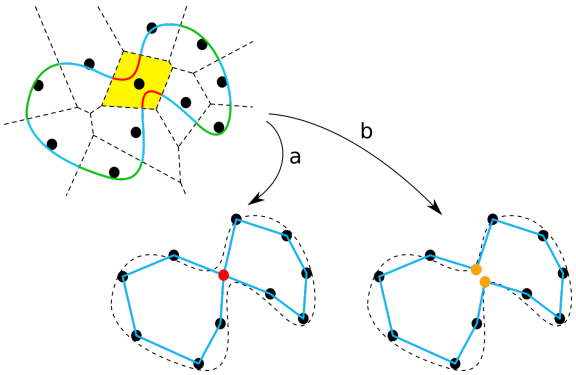


FIGURE 3.2 – Lorsqu'une cellule présente plusieurs composantes connexes (surlignée en jaune), il est préférable de traiter indépendamment chaque composante connexe (b) sous peine de générer des sommets non-variétés (a, en rouge).

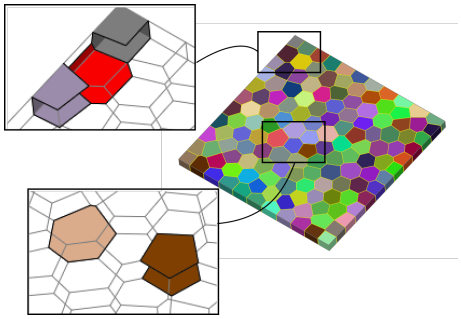


FIGURE 3.3 – Exemple avec un objet surfacique plongé dans $\mathbb{R}^3$.

nage. Des régions entières peuvent alors être considérées comme invalides : exemple du plateau, FIGURE 3.3).

Comme le suggère la FIGURE 3.2, deux postures sont possibles : qualifier la cellule d'invalide ou traiter chaque composante individuellement.

La première met en exergue un échantillonnage inapproprié et implique une correction ultérieure pour obtenir un résultat. Cette stratégie fastidieuse et chronophage est nécessaire pour gérer la plupart des problèmes (SECTION 3.A.5) mais peut être évitée pour ce cas particulier. À l'opposé, la seconde option s'avère très fonctionnelle : instantanée, robuste [1] et économe. Elle se rapproche de la solution minimale tout en reflétant l'échantillonnage initialement proposé.

En conclusion, il est plus pertinent d'identifier chaque composante connexe et de les considérer comme l'élément de base de la partition ; il est toujours possible de faire le lien avec la cellule restreinte parente et le générateur correspondant.

1. Peut pallier à certaines petites erreurs de modélisation du domaine restrictif, notamment les auto-intersections (ce cas met en échec la technique de raffinement).

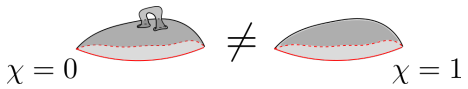


FIGURE 3.4 – Les détails sous échelle ou les défauts de modélisation sont mis en lumière par le calcul de la caractéristique d'Euler de chaque composante.

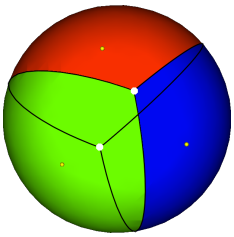


FIGURE 3.5 – Le partitionnement d'une sphère par trois points conduit à la génération d'un dual homotope mais pas homéomorphe : le résultat est un polyèdre fermé mais il ne ne présente que deux faces.

3.A.2 Conditions de validité

Nous avons vu en SECTION 2.E.4 la propriété suivante : *" Si chaque élément de $Vor_{X|M}$ vérifie la propriété de la boule topologique, alors $Del_{X|M} \approx M$. "* Mais comment cela se traduit-il en pratique ?

En premier lieu, chaque composante connexe doit être homéomorphe à un disque topologique. Autrement dit, elle est formée d'un ensemble de facettes connexe, non vide, et ne présentant qu'un seul bord ; ce dernier étant semblable à un cercle.
Le calcul d'un invariant topologique confirme l'analyse et permet de détecter un éventuel détail sous échelle (*i.e.* caractéristique d'Euler égale à 1, FIGURE 3.4).

Vient ensuite la question des éléments de dimension inférieure : les doubles et triples intersections non-vides de composantes. Elles doivent respectivement être semblables à un segment et un point topologique. Pour vérifier ces assertions, nous étudions le nombre et l'agencement des voisins.

Pour qu'une double intersection de disques topologiques soit homéomorphe à un segment, il suffit que chacun d'eux admette au moins deux voisins distincts et non redondants. En effet, le fait que nous manipulions des disques implique un nombre de voisin supérieur à zéro. De plus, si la composante considérée n'admet qu'un unique voisin alors sa frontière est semblable à une courbe fermée, non contractile. Enfin, une redondance témoigne d'une intersection formée de multiples composantes connexes (*e.g.* plusieurs segments topologiques).

Suivons le même raisonnement pour les triples intersections. En supposant que chaque composante satisfait les conditions précédentes (i.e. semblable à un disque admettant au moins deux voisins distincts et non redondants), alors la seule configuration possible dans laquelle une triple intersection diffère d'un point topologique est semblable au partitionnement d'une sphère par trois échantillons (FIGURE 3.5). Les autres configurations font obligatoirement intervenir une redondance dans le voisinage (*e.g.* FIGURE 3.6) ce qui enfreint l'hypothèse initiale.

En conclusion, le voisinage d'un disque topologique est valide s'il est constitué d'au moins trois indices non redondants de composantes qui elles-même sont toutes semblables à un disque. On retrouve ce résultat en regardant l'univers dual : le tétraèdre est le simplexe de dimension 3 et chacun de ses sommets admet pour voisinage un ensemble de trois sommets non redondants.

Cas des variétés à bords

Lorsque l'on considère un domaine à bords, les contraintes qui viennent d'être exposées sont maintenues pour les composantes "internes" et sont complétées pour les régions en contact avec un bord.

En pratique, chaque bord est assimilé à un cercle topologique[2] et le "trou" correspondant est temporairement comblé avec une facette virtuelle ; cette dernière étant directement associée à une composante connexe virtuelle. Chaque bord est associé à une unique composante connexe virtuelle.

Cette astuce permet de mener une analyse similaire à celle engagée pour les domaines sans bords : pour être valide, chaque disque topologique, réel ou virtuel[3], doit admettre au moins 3 composantes voisines non redondantes dont une au plus est virtuelle (FIGURE 3.8).

3.A.3 Réalisation géométrique duale

Lorsque le domaine restrictif est partitionné en un ensemble de composantes connexes respectant la propriété de la boule topologique, la réalisation géométrique duale est homéomorphe au domaine restrictif. La génération du maillage est directe (FIGURE 3.1) : chaque composante défini un sommet et la lecture de son voisinage restreint donne l'ensemble des simplexes de la variété triangulée duale ($\mathrm{Del}_{X|M}$) ; soit en pratique, chaque segment topologique séparant deux composantes connexes code

2. Les contraintes de validité du domaine restrictif l'impose.
3. Par construction, une composante virtuelle ne peut admettre une autre composante virtuelle pour voisine (les bords sont tous fermés et disjoints).

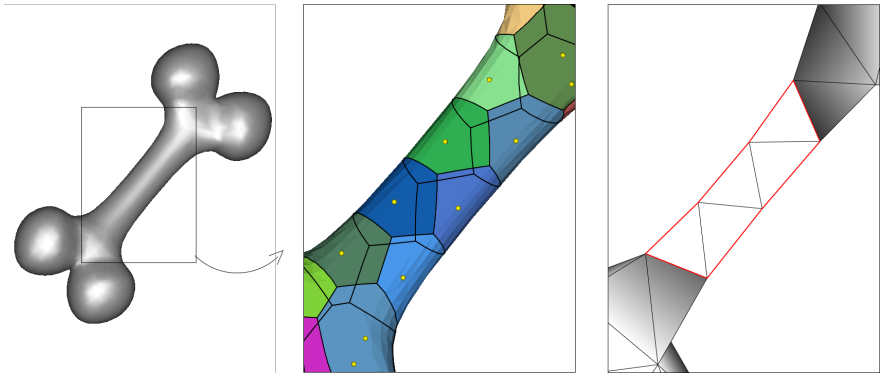


FIGURE 3.6 – Dans cet exemple de reconstruction maladroite (50 points), la surface générée est homotope au domaine restrictif. En revanche, ces deux représentations ne sont pas homéomorphes et le résultat du remaillage n'est pas une variété : le milieu de l'objet est modélisé par des couples de facettes semblables et d'orientation opposée (volume inscrit nul).

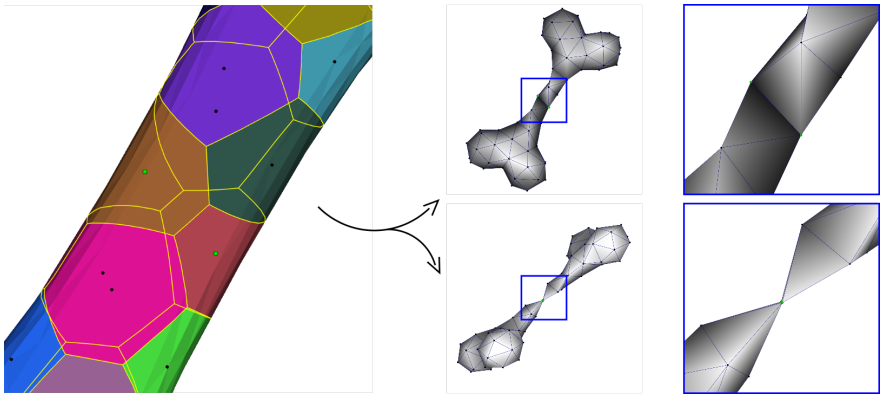


FIGURE 3.7 – Un premier ré-échantillonnage (75 graines) améliore la situation mais les deux segments topologiques surlignés renvoient à la même relation de voisiange (i.e. différente d'un unique segment) et conduisent à la génération d'une arête non variété. Le second angle de vue permet de mieux appréhender le "pincement".

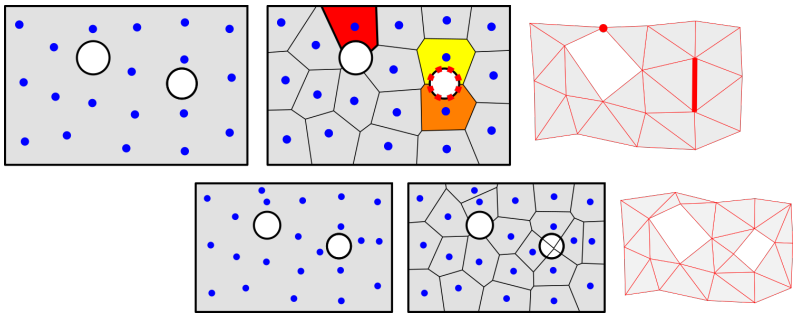


FIGURE 3.8 – Exemple de domaine 2d avec bords. L'échantillonnage proposé (en haut, à gauche) n'est pas satisfaisant (milieu haut) : la composante surlignée en rouge admet deux voisinages virtuels distincts, ce qui revient à contracter la surface en un point (sommet non variété, à droite). La seconde difficulté concerne une cellule virtuelle qui ne se voit pas dotée d'assez de voisins ; cette configuration pathologique implique également une redondance de voisinage dans les cellules adjacentes (en jaune et orange).
La seconde série de vignettes propose une correction de l'échantillonnage.

une arête et chaque couple de voisins successifs donne un triangle orienté. Pour éviter de construire plusieurs fois le même simplexe [4], nous filtrons leur création en ne générant que celui dont l'indice du générateur courant est le plus faible ; les autres lectures conduisant au même simplexe sont simplement ignorées.

3.A.4 Position des sommets

Plusieurs options s'offrent à nous quant à la position des sommets du nouveau maillage. En toute logique, la première considère l'ensemble de graines. Cette solution est possible tant qu'aucune cellule ne s'étend sur plusieurs composantes connexes. Nous préférons généralement le barycentre de la composante : cette solution est robuste [5] et cohérente avec le système d'optimisation barycentrique (s'apparente à une itération de Lloyd).

Différentes solutions ont été proposées pour obtenir une triangulation contrainte, c'est à dire dont les sommets sont inclus dans le domaine restrictif ([DFG+06]) : le point de la composante connexe le pus proche de la graine [YLL+09], la projection de la graine suivant une direction donnée [LL12] ou encore un point remarquable de la précédente approximation (sommet, point d'une arête ou à défaut de la face la plus proche de la graine [WB14])...

4. Chaque sommet ou segment topologique peut être lu depuis chacune des composantes le bordant.
5. En particulier pour les cellules formées de plusieurs composantes connexes.

Nous suivons généralement la seconde option ; la direction de projection est donnée par la normale estimée sur la cellule restreinte (*i.e.* somme pondérée des normales des facettes de la composante). Dans certains cas spécifiques, plusieurs intersections sont relevées, il convient alors d'en sélectionner une (*e.g.* la plus proche de la graine).

Un point du domaine n'est pas forcément la meilleure solution ; par exemple, dans la suite (CHAPITRE 4), nous cherchons à minimiser la distance séparant le modèle et le résultat du remaillage suivant un critère volumique. L'optimisation alors conduite n'est pas contrainte au domaine restrictif car nous cherchons à avoir un maillage le plus proche de la surface initiale, pas uniquement au niveau de ses sommets.

3.A.5 Configurations spéciales

Jusqu'à présent, il a été supposé que les éléments de $\mathrm{Vor}_{X|M}$ satisfont tous la propriété de la boule topologique. En pratique, l'échantillonnage a été décidé *a priori* et bien que ce choix ait pu être diligenté avec soin, il peut conduire à des configurations maladroites : des composantes connexes différentes d'un simple disque topologique ou présentant des relations de voisinage inadaptées.

Les régions ainsi mises en exergue doivent subir un traitement algorithmique supplémentaire pour atteindre une configuration satisfaisante ; plusieurs stratégies sont envisageables.

La première est triviale et consiste à copier la partie du domaine restrictif correspondant aux régions invalidées ; ce "patch" peut être aisément connecté [6] à la nouvelle triangulation et reproduit fidèlement la topologie et géométrie locale (identité). Dans un contexte de remaillage ponctuel, le résultat est décevant (on s'attend à une reformulation du modèle) ; en revanche, dans un contexte itératif comme le suivi de surface, on "repousse l'échéance" du remaillage à plus tard, certains auteurs considèrent même que ce choix peut s'avérer judicieux [BB09]. Cette solution n'est pas retenue ici, elle est simplement réservée au débogage et à l'illustration (voir FIGURE 3.19).

En partant du principe que la densité et/ou la répartition des échantillons décidées *a priori* sont inadaptées à la géométrie locale, la seconde solution repose sur un raffinement local jusqu'à obtenir une décomposition en position générale (SECTION 3.B). Cette recherche de solution par force brute est simple et robuste mais risque de générer des maillages bien trop fins.

6. Il s'agit en réalité de compléter l'ensemble de simplexes duaux (générés à partir des cellules restreintes valides) avec les facettes formant les cellules invalides et d'employer un algorithme de parcours similaire à l'ALGORITHME 9 pour mettre à jour l'adjacence des facettes.

Une troisième et dernière option est finalement explorée : elle propose de déduire de l'analyse topologique menée jusqu'alors un patron, *i.e.* un ensemble de disques topologiques, qui permet de modéliser la région considérée (SECTION 3.C). Cette évolution permet de gérer des détails géométriques plus petits que la résolution souhaitée sans augmenter de manière incontrôlée le nombre final de sommets.

Les résultats des différentes méthodes sont compilés en fin de section pour une comparaison plus aisée (SECTION 3.D).

3.B Recherche d'une solution par force brute

L'ensemble des composantes connexes différentes d'un disque topologique ou celles souffrant d'un voisinage inadapté sont autant de régions qu'il nous faut ré-échantillonner pour atteindre une décomposition valide. Groupées en régions contiguës ou non (SECTION 3.B.1), chaque zone devient un (sous) domaine restrictif avec bords pour lequel il nous incombe de définir un échantillonnage avisé. Selon les résultats de Amenta *et al.* [AB98], l'augmentation du nombre d'échantillons converge vers une solution (SECTION 3.B.2).

3.B.1 Sous domaine restrictif avec bords

Chaque région à ré-échantillonner est considérée indépendamment ; son voisinage est reporté afin de pouvoir vérifier la compatibilité entre le nouvel échantillonnage et le découpage parent. En pratique ce voisinage est considéré comme un voisinage virtuel, *i.e.* chaque indice réfère à un disque topologique.

Option de groupement des composantes invalides

En règle générale, les problèmes de reconstruction interviennent lorsque la densité d'échantillonnage est proche de, ou inférieure à, la résolution du domaine restreint. Dans ce sens, les configurations complexes s'étendent généralement sur plusieurs composantes connexes voisines, en particulier lorsque nous faisons face à un problème de redondance de voisinage ou plus généralement lorsque le niveau de détail de l'objet n'est pas capturé par l'échantillonnage. Il parait donc judicieux de fusionner ces composantes en régions contiguës.

Cette option offre deux avantages : une solution plus homogène et la possibilité de conduire la correction de toutes les régions parallèlement. En effet, le groupement permet d'occulter les éventuelles difficultés introduites par le précédent échantillonnage, la densité du nouvel échantillonnage sera décidée sur une région géométrique plus vaste et puisque le voisinage de chaque région contiguë est donné et déjà validé, il est évident que les opérations de ré-échantillonnage sont indépendantes.

Toutefois, il est parfois préférable, voir impératif [7], de conserver une trace du précédent échantillonnage et de considérer individuellement chaque composante connexe invalide. Dans ce cas, les opérations de ré-échantillonnage sont dépendantes les unes des autres pour les régions admettant une frontière commune : lorsqu'on traite une cellule, il faut avoir connaissance des ré-échantillonnages déjà réalisés et le résultat influencera les suivantes. La parallélisation des corrections est par conséquent délicate et requiert un système de verrouillage ; plus avant, la solution dépend de l'ordre de traitement.

Une étude plus avancée permettrait peut-être d'établir des règles de priorité, privilégiant certaines opérations de remaillage suivant l'arrangement et la nature des différentes régions. En l'état, nous pouvons avancer une première heuristique consistant à définir l'échantillonnage des disques topologiques en dernier lieu (les corrections voisines ont peut-être amélioré leur condition).

Réhabilitation de certains disques topologiques

Certains disques ont été écartés des composantes valides au regard d'un trop faible nombre de voisins. Lorsque ces derniers font l'objet d'une procédure de ré-échantillonnage, le résultat définira un nouveau voisinage pour les premiers qui se retrouvent théoriquement dans une meilleure situation ; par exemple, un unique disque voisin d'une structure à bords multiples devient valide une fois le partitionnement de la composante voisine corrigé et le voisinage du disque mis à jour.

3.B.2 Raffinement

En pratique, le nombre d'échantillons nécessaires au bon partitionnement du sous-domaine n'est pas connu. En revanche, Amenta *et al.* gagent qu'il est borné et nous avons quelques informations relatives à la nature topologique de la région.

C'est pourquoi, nous proposons une heuristique simple pour multiplier la population d'échantillons ; elle s'appuie sur le nombre de bords de la cellule et la précédente densité :

$$\text{nb échantillons} = max(\text{nb bords} * 3, \text{nb précédent} * 2)$$

La région est idéalement [8] échantillonnée. Une nouvelle analyse des configurations de cellules restreintes est menée localement ; suivant le résultat, une nouvelle itération est décidée (poursuite du raffinement) ou la solution est retenue et intégrée dans la décomposition parente.

7. Certaines applications ne tolèrent pas de tels regroupements, en particulier les processus itératifs s'intéressant au transport de données.

8. La répartition d'un échantillonnage aléatoire de la région est rapidement optimisée via un repositionnement barycentrique.

Approche gloutonne

Une approche récursive augmente les chances de réussite et limite l'augmentation de la densité (*i.e.* raffinement progressif). Le procédé est identique à ce qui vient d'être décrit à la différence que chaque cellule validée est conservée, seules celles différentes d'un disque ou présentant un voisinage inapproprié sont concernées par la prochaine itération.
Cette approche accélère le processus lorsque la densité d'échantillonnage décidée *a priori* est réellement sous évaluée et que le domaine restrictif contient de nombreux détails géométriques.

3.C Solution minimale

L'augmentation du nombre d'échantillons apporte une solution mais sans en connaître le coût (le nombre de sommets n'est pas connu à l'avance). Pour limiter cette incertitude et respecter au mieux le découpage initial, nous proposons maintenant d'exploiter l'analyse topologique des composantes connexes pour définir un échantillonnage adapté à la géométrie apparente de la cellule restreinte (SECTION 3.C.1).

En effet, les régions différentes d'un simple disque topologique ont été jusqu'à présent écartées bien qu'elles admettent une décomposition relativement simple (SECTION 3.C.2). Nous proposons ici de les accepter et d'en donner une approximation minimale en terme de nombre de sommets / simplexes, reproduisant le genre de l'objet géométrique.

De la même manière, les contraintes de voisinage exposées jusqu'à présent peuvent mettre en défaut le partitionnement ; ces difficultés peuvent également faire l'objet de corrections simples, fondées sur l'insertion d'échantillons intermédiaires (SECTION 3.C.3).

À noter que cette solution repose en partie sur la nature convexe des cellules de Voronoï et ne supporte donc pas un regroupement préalable de composantes. De la même manière, on suppose que l'échantillonnage initial est relativement homogène, présentant une répartition satisfaisante (e.g. résultat d'une optimisation barycentrique).

3.C.1 Identification topologique

À l'instar des disques topologiques, les sphères ou les surfaces à bords multiples sont des configurations remarquables admettant une réalisation géométrique simple et par la même, une décomposition en un nombre limité de disques topologiques. Ces configurations sont repérées par le nombre de bords de la composante (FIGURE 3.9) et confirmées par le calcul de leur caractéristique d'Euler. La prochaine section (SECTION 3.C.2) s'intéresse à la génération de duaux minimaux ; les erreurs imputables au voisinage sont traitées dans la section suivante (SECTION 3.C.3).

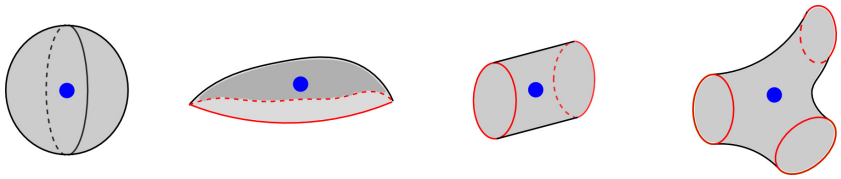


FIGURE 3.9 – Les composantes connexes peuvent admettre 0, 1 2 ou $n \geq 3$ bords (surlignés en rouge) qui seront respectivement vus comme une sphère ($\chi = 2$), un disque ($\chi = 1$), un cylindre ($\chi = 0$) et une structure à bords multiples.

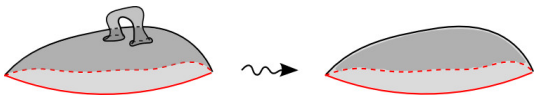


FIGURE 3.10 – Simplification d'un détail au sein d'une cellule.

Simplification

Lorsque le calcul de l'invariant topologique est ignoré, certains détails sous échelle [9] peuvent nous échapper (FIGURE 3.10). Le résultat peut alors différer de la représentation originale, l'homéomorphisme n'est plus garanti et nous ne pouvons que statuer une équivalence à l'échantillonnage près.

Le présent contexte applicatif (suivi de surface) contraint la résolution du domaine restrictif et la densité d'échantillonnage à être très proches et aucune occurrence de simplification ne s'est manifestée [10]. Cette option est donc réservée aux tests de remaillage statique (voir SECTION 3.D).

3.C.2 Nouvelles réalisations géométriques

Les différentes configurations sont discutées suivant l'ordre croissant du nombre de bords, autrement dit, les sphères topologiques, puis les cylindres et finalement les régions à bords multiples.

3.C.2.a Cas de la sphère

La région a été identifiée comme une sphère topologique (*i.e.* surface fermée) ; elle est donc semblable à un tétraèdre (simplexe de dimension 3), soit quatre sommets et quatre facettes à définir (FIGURE 3.11, à gauche).

9. Vis à vis de la densité d'échantillonnage.
10. Dans ce cas, une valeur inattendue de la caractéristique d'Euler témoigne généralement d'une erreur de représentation dans le maillage restrictif.

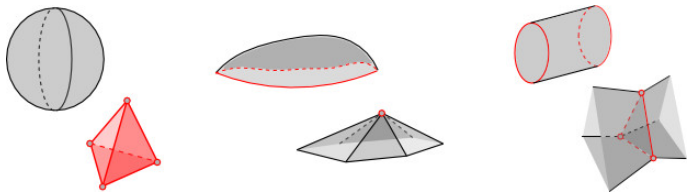


FIGURE 3.11 – Configurations remarquables et duaux minimaux proposés.

La solution la plus simple repose sur le tétraèdre régulier, centré par rapport à la cellule restreinte ; la position du premier sommet [11] peut être fixée arbitrairement (*e.g.* alignée avec le barycentre de la cellule suivant l'axe x) ou choisie suivant une heuristique (*e.g.* pointant en direction du point le plus éloigné du barycentre). La position exacte sur la demi droite (barycentre, direction) peut quant à elle être décidée suivant un critère volumique (volume du tétraèdre = volume de la région) ; de même, les proportions du tétraèdre pourraient être discutées mais nous ne cherchons pas ici à ajuster la géométrie.

Dans le cas présent, la solution s'appuie largement sur la représentation duale, *i.e.* le résultat du remaillage. Du point de vue primal, il s'agit de définir quatre disques topologiques mutuellement voisins ; ils sont uniquement définis de manière combinatoire : leur indépendance vis à vis du reste de la partition nous dispense d'une définition explicite.

Les autres configurations spéciales admettent quand à elles un voisinage et nous devrons modifier explicitement le modèle de la partition pour assurer la bonne conduite de l'algorithme.

3.C.2.b Structure cylindrique

La triangulation minimale homéomorphe à un cylindre est donnée par un ensemble de six sommets et six faces. Dans notre cas, un cylindre n'est pas isolé, il est bordé de composantes, ce qui permet de réduire l'approximation à une courbe fermée (*i.e.* 3 sommets et 3 arêtes). La contraction ainsi opérée est, *in fine*, compensée par les relations de voisinage (FIGURE 3.11, à droite).
Du point de vue de la partition, il s'agit de décomposer la composante cylindrique en trois disques topologiques, chacun d'eux étant à la fois voisin des deux autres et en contact avec chacun des bords du cylindre (FIGURE 3.12).

Pour définir cette nouvelle partition locale, nous pourrions avoir une approche géométrique : choix de trois nouveaux échantillons et découpage selon Voronoï. Intuitivement et idéalement, les trois échantillons forment un triangle équilatéral inscrit dans un plan séparant les bords du cylindre. En pratique, le plan médiateur du segment admettant

11. la position des trois autres est corrélée

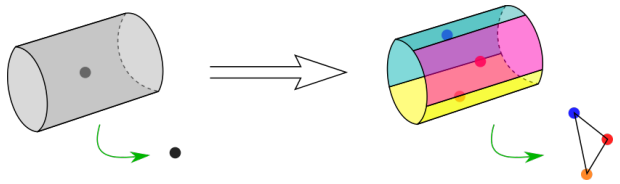


FIGURE 3.12 – Décomposition d'une cellule semblable à un cylindre en trois disques ; les flèches vertes pointent les réalisations géométriques duales.

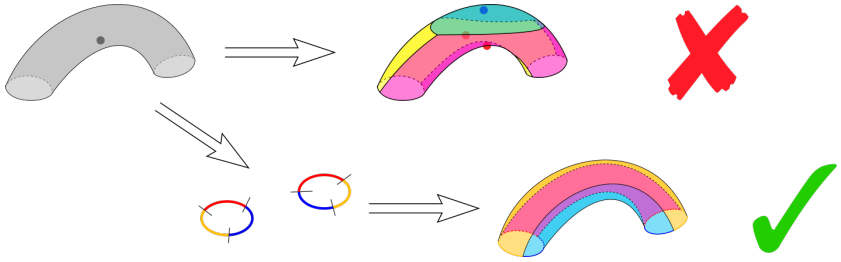


FIGURE 3.13 – La première ligne donne un exemple de configuration dans lequel la réponse géométrique n'est pas probante : la cellule surlignée en bleu ne présente que deux voisins et les deux autres admettent un voisinage redondant. Une solution acceptable repose sur trois cellule joignant les deux bords (ligne inférieure).

pour extrémités les barycentres de chacun des deux bords ou, dans une version plus aboutie, le plan séparateur optimal au sens des machines à vecteur support [WXT+20].

Cependant, malgré le soin apporté à la définition de ces 3 points, l'approche géométrique peut faillir (FIGURE 3.13, première ligne). Il parait préférable d'éluder le problème de manière combinatoire : la partition est calculée sur les frontières de la région et la décomposition interne est inférée.

En pratique, chacun des deux bords est partitionné en trois [12] composantes connexes équilibrées (*i.e.* un tiers de la longueur) et chaque tronçon peut être apparié avec son homologue sur l'autre frontière (FIGURE 3.13, seconde ligne).
Reste à décider de la géométrie, i.e. intégrer la solution topologique dans le contexte (FIGURE 3.14). La partition interne n'est validée qu'une fois le voisinage pris en compte : la mise en relation avec "l'autre côté" de la frontière doit satisfaire les contraintes évoquées plus tôt (SECTION 3.A.2). Elle dépend donc du nombre de disques voisins :

1 disque : Trivial (trois facettes duales, FIGURE 3.15).

12. Il s'agit ici d'avoir une solution minimale ; pour obtenir un résultat plus lisse, on peut augmenter le nombre d'échantillons (*i.e.* de segments topologiques) répartis sur le cercle topologique considéré.

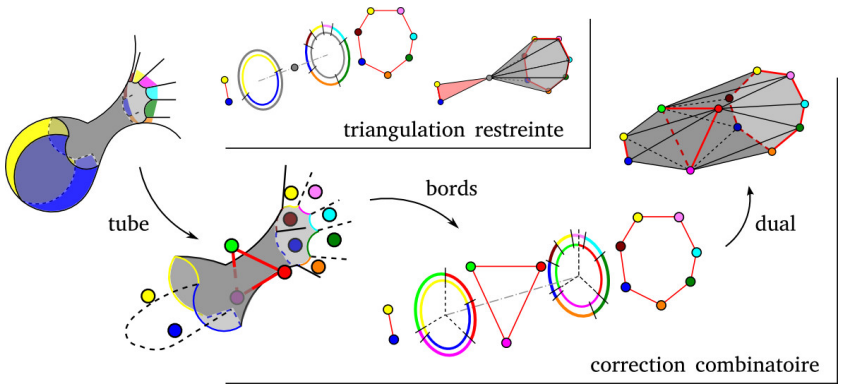


FIGURE 3.14 – Approximation d'une structure tubulaire (les détails de construction du dual sont donnés dans les FIGURES 3.15 et 3.16).
Pour visualiser et comprendre les subtilités relatives aux relations de voisinage, les deux décompositions sont juxtaposées sous forme de cercles concentriques ; l'incidence des composante est rapportée par la coloration des différents tronçons.

$n \geq 2$ **disques :** Dans le cas général, la juxtaposition des deux partitions de la frontière admet un dual valide : chaque triple intersection mène à la définition d'une unique facette dont toutes les arêtes sont variétés (FIGURES FIGURE 3.14 et 3.16). Une difficulté peut toutefois s'exprimer lorsqu'un voisinage s'étale sur 2/3 du bord ou plus (un alignement particulier conduit à une intersection de cellules non contractile). C'est pourquoi nous faisons toujours coïncider une intersection avec le plus petit voisinage (FIGURE 3.15).

La décomposition de la cellule tubulaire est uniquement dirigée par son voisinage : chacun des deux bords apporte, le cas échéant, une contrainte relative à la position d'une intersection (FIGURE 3.15) ; les bords du cylindre sont alors parfaitement segmentés. Pour s'adapter à la géométrie, l'appariement des deux bords se résume au choix de la première paire de segments (e.g. plus proche barycentre, normale...) : ils forment la première cellule de la nouvelle décomposition ; un parcours combinatoire des frontières permet de compléter la définition des composantes et de mettre à jour le voisinage.

Les trois disques résultant admettent un voisinage valide et remplacent la région tubulaire dans la partition parente ; les trois échantillons associés remplacent la graine initiale. Il est par ailleurs aisé de mémoriser la filiation pour un traitement ultérieur (propagation de données, processus de ré-échantillonnage...).

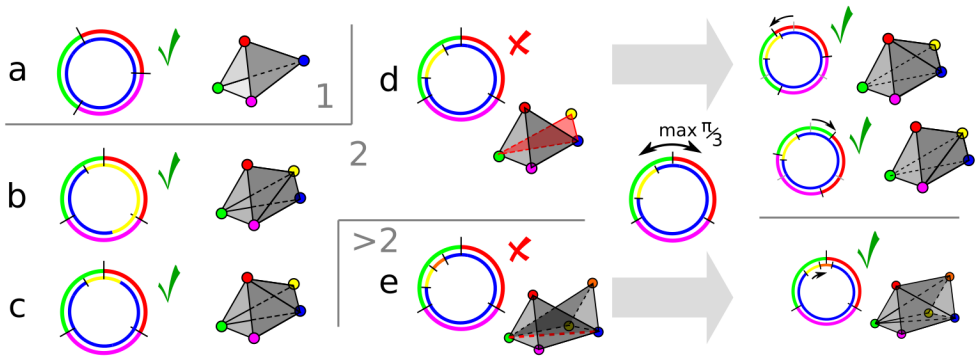


FIGURE 3.15 – La définition des facettes de connexion s'avère triviale lorsqu'il n'y a qu'un seul voisin (a). Lorsque le nombre de voisins est supérieur, il convient de vérifier l'alignement des partitions de la frontière (partition définie par le voisinage et celle donnée par l'approximation courante du tube) : une intersection non contractile conduit à la génération d'éléments non variété (d et e). Corriger cet alignement correspond en réalité à une petite rotation autour de "l'axe" de la composante tubulaire (à droite).

3.C.2.c Régions à bords multiples

Les composantes connexes présentant un plus grand nombre de bords ($n \leq 3$) sont traitées de manière similaire : une première étape décompose la région en un ensemble de cylindres (un par bord de la cellule initiale) agencés autour d'un noyau à l'instar des branches d'une étoile. Le partitionnement de chacune de ses branches est résolu comme indiqué précédemment et le noyau (une sphère topologique) permet d'établir la combinatoire interne, c'est à dire l'arrangement des différents cylindres. La FIGURE 3.17 résume ce processus.

En pratique, le noyau de la cellule est assimilée à une sphère sur laquelle sont projetés les barycentres des différentes frontières. Cette sphère est ensuite partitionnée en autant de disques topologiques (*i.e.* diagramme de Voronoï restreint). Le bord de chacun de ces disques est apparié avec le bord correspondant de la cellule initial : nous avons ainsi défini autant de cylindres que de bords de la cellule initiale.

Chacun des cylindres est alors traités comme exposé dans le paragraphe précédent. La réunion des différentes décompositions remplace la cellule initiale ; la filiation graine originale - ensemble d'échantillon est toujours assurée.

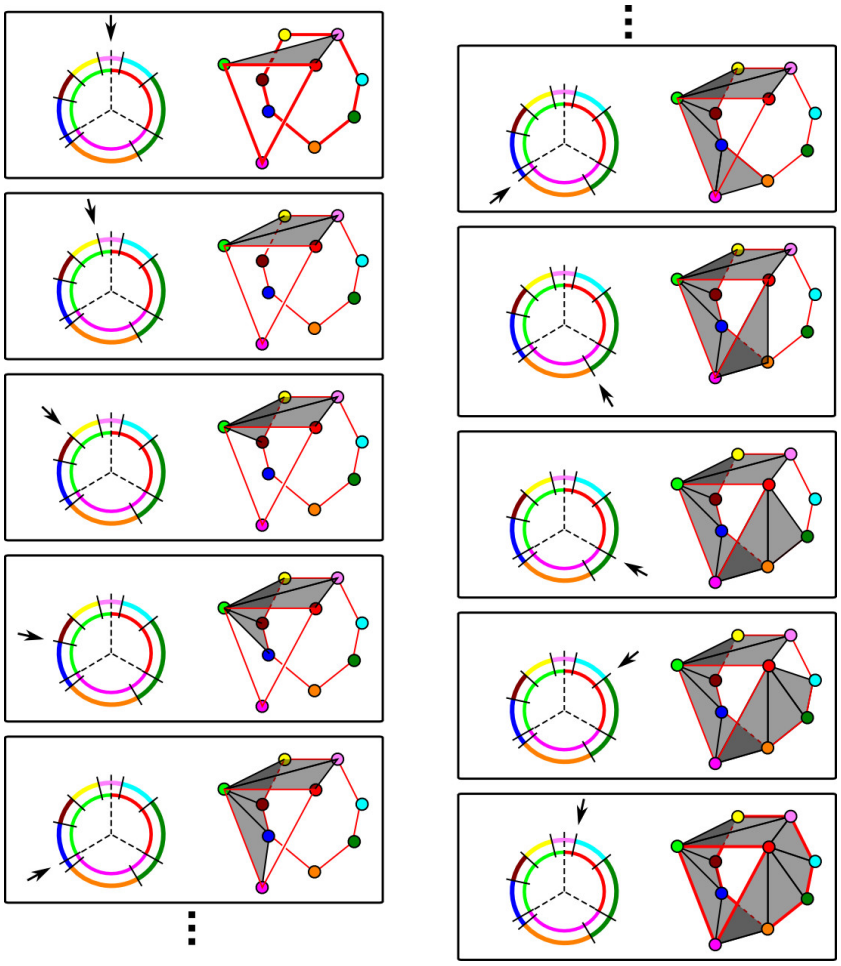


FIGURE 3.16 – Un parcours de la frontière révèle chaque triple intersection (*i.e.* génération des facettes duales).

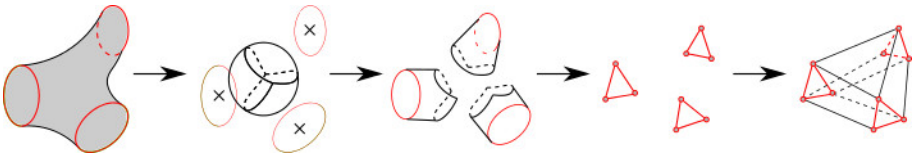


FIGURE 3.17 – Décomposition d'une cellule présentant plusieurs frontières en un ensemble de cylindres ; triangulation minimale de ces tubes avant assemblage du résultat.

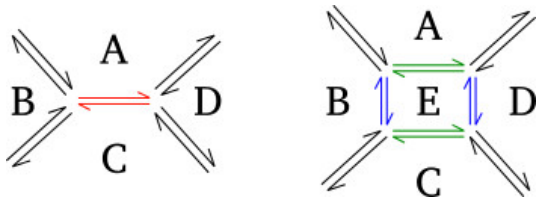


FIGURE 3.18 – Expansion du segment topologique séparant les régions A et D : les arêtes et sommets sont dupliqués et connectés par deux nouvelles arêtes. Le disque topologique résultant (E) admet 4 voisins.

3.C.3 Gestion des erreurs relatives au voisinage

Lorsqu'une double intersection non vide de composantes connexes est formée par plusieurs ensembles disjoints, la définition du dual est mise en péril (*e.g.* arête non variété). Pour contourner ce type de problème, nous proposons une correction suivant la nature de l'intersection considérée : un cercle ou un segment topologique.

Cercles topologiques :
Nous reprenons ici la stratégie d'échantillonnage d'une région cylindrique, à savoir, une segmentation de la frontière et la définition d'au moins trois nouveaux échantillons.

Cette solution est également appliquée lorsque la frontière considérée n'est partagée que par deux composantes semblables à un disque, *e.g.* une sphère partitionnée en deux régions connexes.

Segments topologiques :
Un segment topologique invalide est remplacé par un pseudo-disque. Pour réaliser cette expansion, l'ensemble des sommets constituant le segment topologique est dupliqué et ces deux listes de sommets sont connectées par leur extrémités de manière à former un cercle topologique (schéma d'expansion donné en FIGURE 3.18). Ce dernier délimite une nouvelle cellule restreinte d'aire nulle ; son voisinage est déduit de la configuration originale et se résume à quatre voisins : les deux cellules restreintes responsables du segment topologique visé par la correction et des deux composantes impliquées dans la définition de ses extrémités (*i.e.* triples intersections). Les voisinages de composantes en regard sont évidement mis à jours.

Lorsque plusieurs redondances intéressent un même voisinage, l'opération est répétée jusqu'à aboutissement ; au fur et à mesure de la progression de l'algorithme, certaines frontières jusqu'alors invalides retrouvent un statut admissible sans avoir à être expansées ; l'ordre de traitement influe donc sur le résultat.

Cette solution n'a pas vocation à fournir une solution optimale mais offre une réponse rapide reflétant au mieux la décomposition initiale. Une étude approfondie pourrait

certainement conduire à définir des heuristiques de groupement et / ou règles de priorité pour parfaire l'approche et limiter le nombre de points insérés.

3.D Résultats

Les algorithmes présentés dans ce chapitre permettent de définir une surface triangulée, topologiquement équivalente à la variété polygonale fournie en entrée ; les sommets de la construction sont issus d'un ensemble d'échantillons disposés sur ou à proximité du domaine restrictif.

3.D.1 Prérequis

Il n'y a pas de contraintes particulières quant à la géométrie du domaine restrictif, tant qu'il est représenté sous forme d'une variété polygonale (polygones convexes), fermée ou non [13] , peut importe son genre et son nombre de composantes connexes (*i.e.* $n \geq 1$ compacts).

L'adjacence des facettes est nécessairement connue. Une adjacence non explicitée indique un bord ; en cas de découverte d'une telle occurrence, un processus de découverte du bord est lancé (méthode de parcours semblable à l'ALGORITHME 9). Il permet de vérifier sa fermeture, de juger de sa validité topologique et finalement de mettre à jour l'adjacence des facettes : chaque bord est identifié de manière unique. Il est ensuite traité comme un disque, géométriquement et topologiquement figé et contraint.
Ce pré-traitement algorithmique [14] permet d'assurer la validité de nos constructions.

On suppose également avoir un échantillonnage en position générale : pas d'échantillons dupliqués, les doubles, triples et quadruples intersections de cellules 3d sont respectivement des plans, segments et points. Ces derniers ne sont pas inclus dans le domaine restrictif et, plus généralement, toute intersection est en position générale (*e.g.* l'intersection d'une arête et d'un plan se résume à un point). Dans le cas contraire, un mécanisme de perturbation symbolique (*e.g.* simulation of simplicity [EM90]) devrait être mis en place pour satisfaire ces contraintes ; à noter qu'aucune complication de la sorte ne s'est produite au cours des nombreuses expérimentations.

De la même manière, on suppose avoir un ensemble d'échantillons relativement homogène, présentant une répartition satisfaisante (e.g. résultat d'une optimisation barycentrique).

13. Dans ce cas, chaque bord doit être semblable à un cercle topologique ; En pratique, il doit être composé d'au moins trois arêtes
14. Complexité linéaire, $\mathcal{O}$(nombre de demi-arêtes du bord).

3.D.2 Résultats sur remaillage statique

Les résultats présentés dans ce chapitre s'appuient sur des exercices de remaillage ponctuels.

En pratique, l'approche s'avère robuste même lorsque la densité d'échantillonnage est largement sous estimée. Deux options de correction sont proposées lorsque l'échantillonnage n'est pas adapté : un raffinement classique (FIGURE 3.19) ou une solution déduite de l'analyse topologique des configurations de cellules restreintes.

Cette nouvelle méthode, dite "minimale", permet d'adhérer au mieux à la densité d'échantillonnage d'entrée et s'avère plus économe que celle fondée sur un raffinement (FIGURE 3.20 et TABLEAU 3.1).
Plus avant, le nombre de sommets de la future représentation est prédictible [15] après analyse de la nature des composantes connexes :

— chaque disque topologique conduit à un sommet,
— chaque sphère topologique génère quatre sommets,
— les cylindres topologiques en ajoutent 3,
— on compte 3 nouveaux sommets par bord pour les cellules à bords multiples,
— et enfin chaque redondance de voisinage est susceptible d'en générer 1 (ou 3 si le voisinage est semblable à un cercle topologique).

Les FIGURES 3.21 et 3.22 illustrent la robustesse de la méthode. Elle a également été éprouvée dans le contexte particulier du suivi de surface (CHAPITRE 5) ; pour cette application, la densité d'échantillonnage est généralement proche de celle du maillage mais le nombre de remaillages (à chaque itération de la simulation) et la nature des surfaces approchées (déformations libres) forment à eux deux un défi particulier qui est alors relevé (CHAPITRE 5).

Validité topologique de la construction :

L'analyse de la combinatoire des différentes composantes connexes nous permet d'orienter le maillage résultat, et de garantir un homéomorphisme sous couvert d'un partitionnement en position générale [16] et d'une géométrie clémente (voir paragraphe suivant). Nous pouvons toutefois établir avec certitude une équivalence topologique entre les deux maillages et certifier qu'aucune composante du maillage original n'est oubliée, y compris celles qui n'ont pas été échantillonnées (*e.g.* région trop petite pour

15. Dans le cas d'une simplification des détails sous échelle ; dans le cas contraire, ces derniers doivent être traités au préalable si l'on souhaite établir le nombre maximal de sommets de la future représentation.

16. Le diagramme de Voronoï intersecte le domaine restrictif de manière générale ; de récents travaux [Lé14] permettent de le garantir.

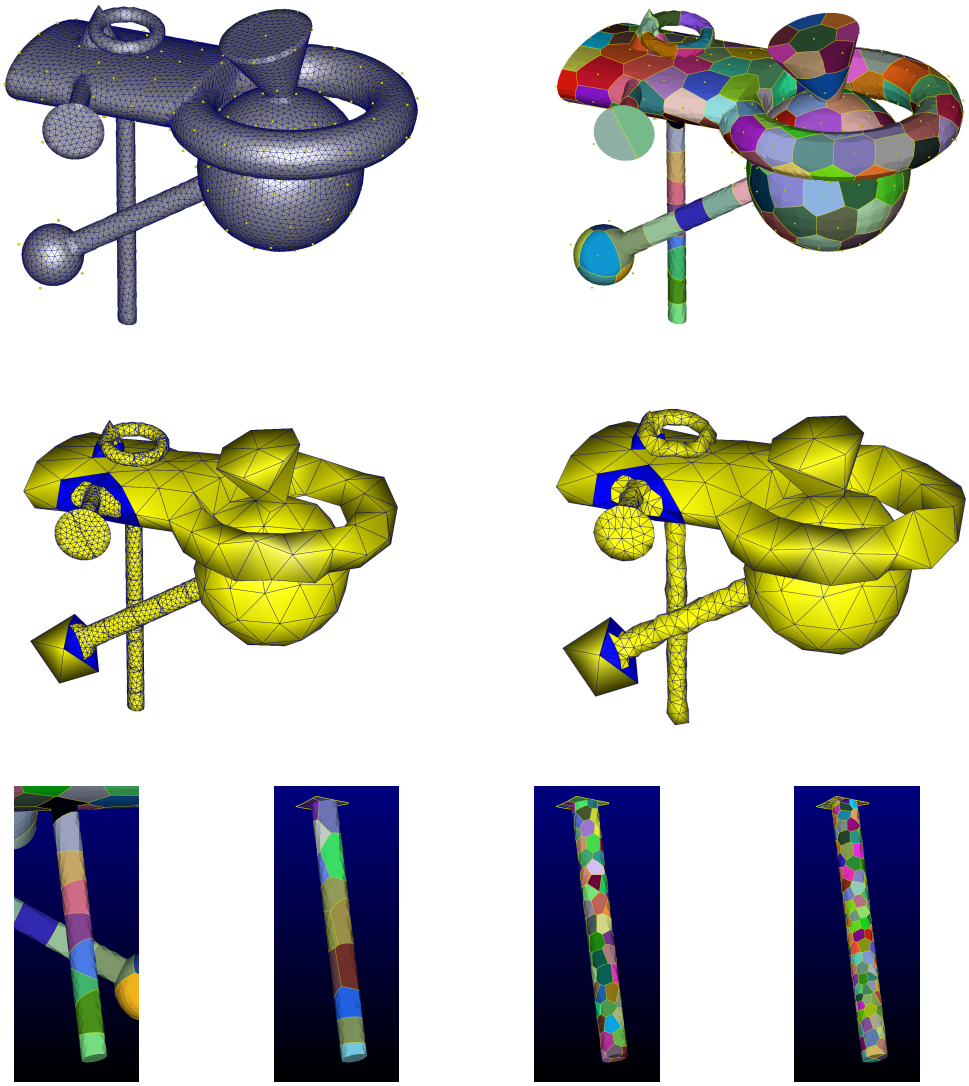


FIGURE 3.19 – En haut à gauche, la surface que l'on va tenter de remailler et l'échantillonnage exploité. À droite, $\mathrm{Vor}_{X|M}$.
Sur la ligne du milieu, le résultat de gauche intègre des portions du maillage initial (copie, uniquement destinée à cette illustration) et à droite, un exemple de résultat obtenu avec la solution de raffinement. Les régions surlignées en bleu correspondent aux voisinages mis à jour lors de l'intégration de la nouvelle décomposition.
En bas, illustration des raffinements successifs de l'échantillonnage convergeant vers une solution acceptable.

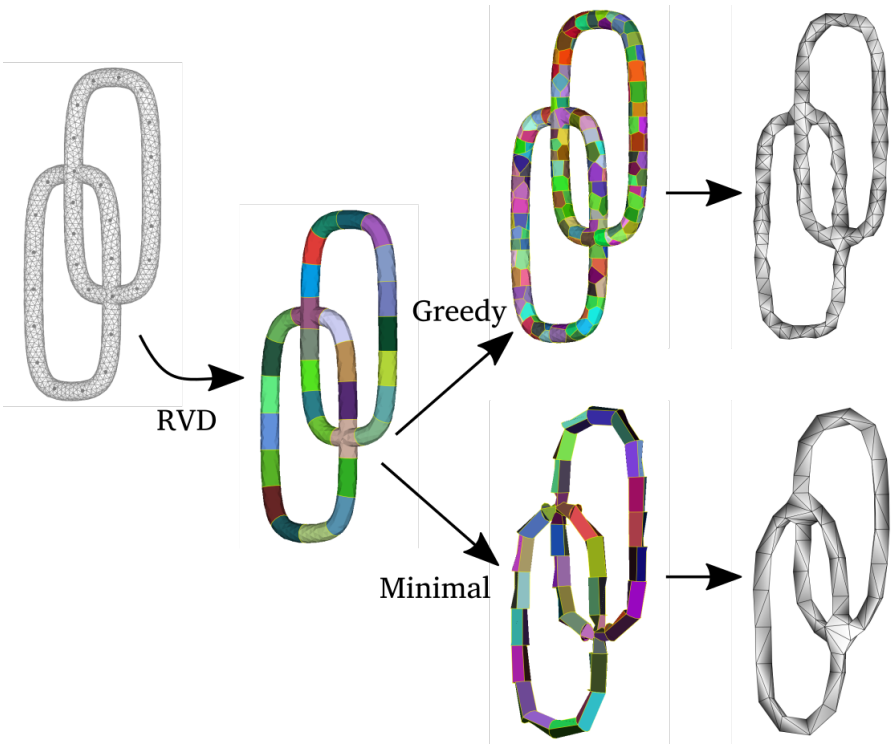


FIGURE 3.20 – Cet exemple de remaillage compare les méthodes de correction gloutonne et minimale sur un objet volontairement sous échantillonné (30 points). Le raffinement de l'échantillonnage (approche gloutonne) converge vers une solution fondée sur 258 composantes connexes (le dual comporte 524 facettes). La solution minimale fournit un maillage de 108 sommets et 224 facettes.
En pratique, le nombre de 108 sommets est prédictible puisque la décomposition conduit à 30 composantes connexes, dont 28 sont semblables à des cylindres topologiques et les deux autres présentent quatre bords, soit $28 \times 3 + 2 \times 4 \times 3 = 108$.

Nombre initial d'échantillons	Nombre final de sommets	
	raffinement	minimale
5k	84295	14828
20k	99695	31058
50k	127875	65230
100k	171020	112198
250k	313471	264873

TABLE 3.1 – Comparaison de la compression de données réalisée avec les deux méthodes de ré-échantillonnage sur le test "Tower Bridge", FIGURE 3.22 ; les deux tentatives de construction s'appuyent sur le même échantillonnage initial.

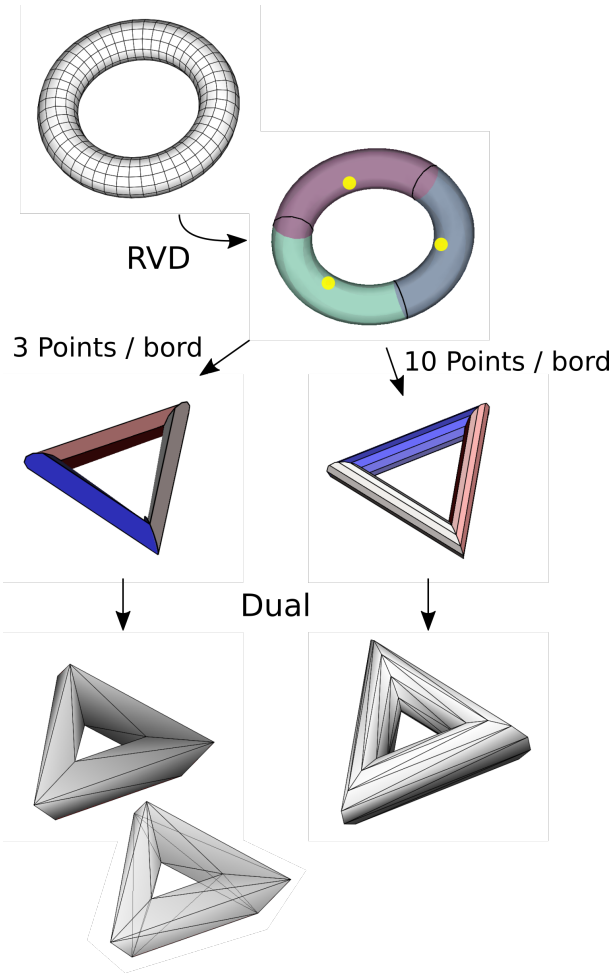


FIGURE 3.21 – Test de robustesse de la solution de correction combinatoire : un tore échantillonné avec seulement 3 points. La colonne de gauche présente la solution minimale (3 sommets par bords) ; la colonne de droite donne une version plus lisse avec 10 sommets par bords.

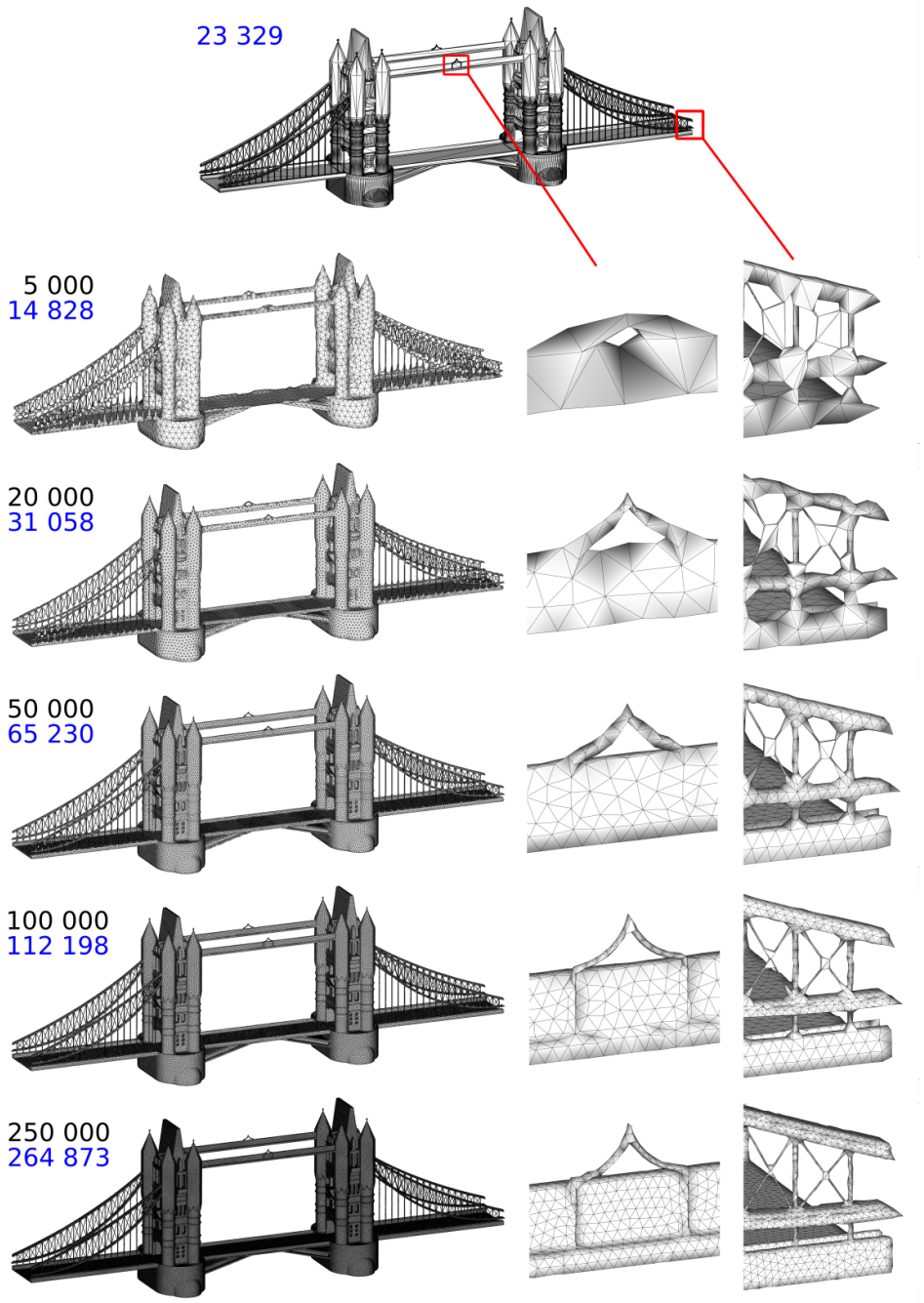


FIGURE 3.22 – Exemples de remaillages du modèle "Tower bridge", sujet du concours de remaillage de la 23ème édition de la conférence International Meshing Roundtable. le domaine restrictif est un compact admettant pas moins de 408 anses ; ce support permet de confronter la méthode à un problème concret, réel. Pour chacun des échantillonnages donnés (nombre d'échantillons indiqué en noir), le remaillage fourni un résultat homéomorphe au domaine initial ; le nombre final de sommets est indiqué en bleu.

accueillir un échantillon au regard de la densité attendue). Les détails sous-échelle sont mis en lumière via le calcul d'un invariant géométrique (caractéristique d'Euler).

Limites géométriques :

Hormis la préservation de l'orientation et la qualité des maillages produits (paragraphe suivant), nous n'apportons pas d'autres réelles garanties géométriques. À titre d'exemple, les maillages proposés ne sont pas forcément conformes (notamment en cas de très forte courbure), les auto-intersections dans les régions minces ne sont pas totalement exclues mais relèvent de cas extrêmes[17] et l'erreur commise n'est pas bornée... Ce dernier point est adressé dans le chapitre suivant : une optimisation de la position définitive des sommets permet de réduire l'erreur volumique induite par le remaillage.

En l'état, la qualité géométrique du nouveau maillage est directement dépendante de l'échantillonnage. En pratique il est nécessaire d'avoir un ensemble d'échantillons bien répartis, résultant par exemple d'une optimisation barycentrique.

Perspectives :

Les corrections minimales pourraient être contraintes et/ou améliorées pour une meilleure maîtrise de la géométrie. Par exemple, un ensemble de mesures pourrait permettre de subdiviser le problème avant d'appliquer une correction minimale ; en particulier, un long tube pourrait être séparé en plusieurs tronçons, permettant d'une part de limiter le ratio des cellules / facettes duales et d'autre part d'apprécier la courbure de l'axe médian.

3.E Optimisation et Partitionnement dans $\mathbb{R}^{n>3}$

Lorsque l'on considère un univers de plongement de dimension supérieure à trois, typiquement le plongement 6D suggéré par Lévy *et al.* [LB13] ou ses dérivations (*e.g.* [ZWL+18]), le parcours, l'analyse et les critères de validité combinatoires sont inchangés. Bien qu'elles soient plus rares que dans le cas 3D, les cellules admettant plusieurs composantes connexes sont traitées composante par composante. Une composante connexe est valide lorsqu'elle est semblable à un disque et qu'elle admet pour voisinage au moins trois composantes valides distinctes et non redondantes ; dans le cas contraire, une correction de l'échantillonnage est nécessaire.
Cette correction de l'échantillonnage s'avère néanmoins plus délicate : une proximité géométrique dans $\mathbb{R}^3$ ne se révèle pas forcément dans $\mathbb{R}^n$ et inversement. Aussi, nous ne pouvons faire appel à une méthode de correction fondée sur une identification géométrique comme celle proposée en SECTION 3.C.

17. Configurations rares ou semblables à un test de robustesse,
e.g. distance à l'axe médian $< 1e^{-2} \times$ distance moyenne voisinage

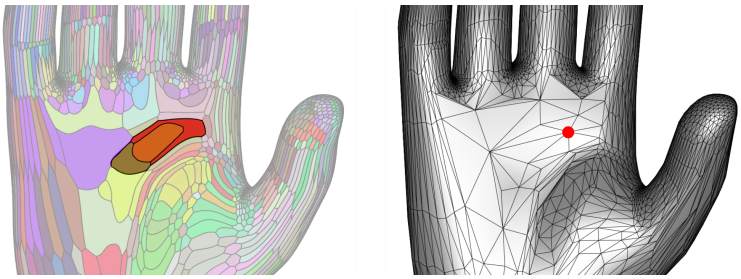


FIGURE 3.23 – Exemples d'imbrication de composantes connexes en "boutonnière" (à gauche). La correction proposée fusionne les composantes en une seule (réalisation géométrique duale à droite).

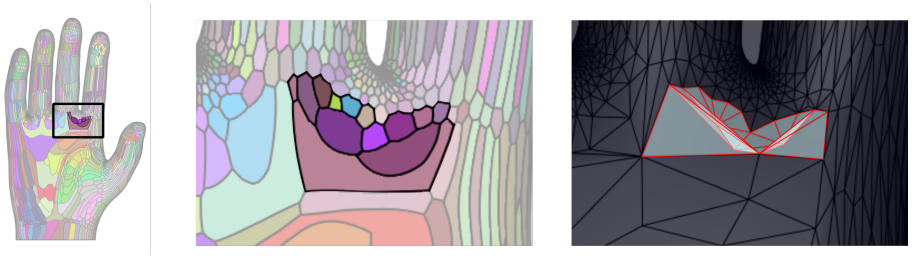


FIGURE 3.24 – Exemple d'imbrication des composantes connexes voisines (au milieu) conduisant à une triangulation duale mal avisée (à droite).

En règle générale, les problèmes découlent d'une valeur d'anisotropie inappropriée, c'est à dire une importance trop faible des coordonnées réelles face à celles des dimensions supérieures.

En effet, la prise en compte de dimensions supplémentaires a pour effet d'étirer les cellules restreintes et peut conduire à certains artefacts, notamment les "boutonnières" à l'intérieur desquelles plusieurs cellules sont imbriquées et n'admettent alors qu'un ou deux voisins ; la correction la plus simple [18] consiste à fusionner ces cellules (FIGURE 3.23).

Plus avant, l'étirement des cellules est très variable, y compris pour des composantes directement voisines ; ces différences de superficie et l'imbrication des cellules peuvent conduire à une triangulation duale maladroite où certaines facettes se présentent retournées vis à vis de leurs voisines (FIGURE 3.24).

18. Une correction par expansion des segments ou cercles topologiques (SECTION 3.C.3) est envisageable mais implique un nombre supérieur de sommets et un risque plus élevé de faire face à une triangulation de moins bonne qualité (voir paragraphe suivant).

Cependant, dans la plupart des cas, le système d'optimisation de la position des échantillons considéré ici s'avère pertinent ; notamment lorsque la normale est prise en compte, les régions présentant une forte courbure sont mieux approchées qu'avec une solution d'échantillonnage classique. Dans les configurations les plus délicates, il est préférable de grouper les composantes connexes qui posent problème avant d'envisager un ré-échantillonnage ; et même si cela va à l'encontre de la philosophie initiale, il parait opportun de réduire l'importance accordée aux dimensions d'ordre supérieur avant d'entamer un raffinement. Ce sujet ne fait pas partie de l'étude menée ici ; lorsqu'elle est employée dans la suite (SECTION 5.C), la méthode s'appuie sur un facteur d'anisotropie très faible pour éviter au maximum ce type de difficulté (inférieur à la distance moyenne séparant deux échantillons).

3.F Algorithmes et structures de données

Pour réaliser l'ensemble des vérifications et les éventuelles corrections, le résultat du calcul du diagramme de Voronoï restreint (ALGORITHME 7) est mémorisé sous forme d'un maillage polygonal dont chacune des facettes est estampillée par l'indice de la graine la plus proche.

Deux algorithmes permettent de parcourir ce maillage pour, d'une part, découvrir les différentes facettes d'une composante connexe (SECTION 3.F.1) et, d'autre part, établir ses relations de voisinage (SECTION 3.F.2).

3.F.1 Décomposition en composantes connexes

L'ALGORITHME 8 est proche de celui utilisé par Yan *et al.* [YLL+09]. Il balaie l'ensemble des facettes et identifie chaque ensemble contigu présentant un même indice de graine ; ce parcours est dirigé par l'adjacence des facettes.

L'appartenance d'une facette à une composante connexe est mémorisée à travers l'indice de cette dernière ($\mathrm{Id}\tilde{x}[i]$, ALGO. 8, ligne 9). De la même manière, chaque composante connexe est également mémorisée sous forme d'un objet composé à minima de l'indice du générateur et de l'indice de la première facette de la composante (facilite un éventuel parcours ultérieur) ; il peut être étendu avec toute information nécessaire aux traitements à venir ; par exemple, le barycentre de la composante, sa normale, sa caractéristique d'Euler, etc (SECTION 3.F.3).

Comme le suggèrent les commentaires dans le pseudo-code, ces données sont collectées au fur et à mesure du parcours, ou une fois celui-ci achevé (*e.g.* accumulation puis finalisation du calcul du barycentre, resp. lignes 10 et 16).

L'analyse des configurations de composantes connexes proposée dans ce chapitre requiert une liste ordonnée des composantes voisines pour chaque bord de la composante. Cette liste ordonnée ne peut être obtenue avec l'ALGORITHME 8 ; pour cela, il faut revoir la stratégie de parcours (SECTION 3.F.2).

Algorithme 8 : Visite des facettes de $\mathrm{Vor}_{X|M}$ par composante connexe

Entrées : $\mathrm{Vor}_{X|M}$, $\mathrm{Ids}X$ et traitements algorithmiques
Sorties : $\mathrm{Ids}\tilde{X}$

```
1  nb_cc ← 0
2  pour chaque i indice de facette de Vor_{X|M*_{t+1}} faire
3      si non visitée( f_i ) alors
4          visiter(f_i)
5          empiler(P, i)
6          g ← Idx[i]
7          tant que P non vide faire
8              j ← dépiler(P)
9              Idx̃[j] ← nb_cc
10             Traitements algorithmiques visant la facette courante.
11                 // propagation
12             pour chaque k indice de facette voisine de f_j faire
13                 si non visitée(f_k) et Idx[k] = g alors
14                     visiter(f_k)
15                     empiler(P, k)
16         Traitements algorithmiques requérant la composante dans son intégralité.
17         nb_cc ← nb_cc + 1
```

3.F.2 Combinatoire de chaque composante connexe

L'algorithme précédent révèle l'ensemble de composantes connexes, mais ne peut donner qu'un aperçu de leur voisinage (*i.e.* liste de cellules voisines[19]). Ici, nous cherchons à déterminer sa combinatoire exacte : une liste ordonnée de composantes voisines pour chaque bord de la composante connexe courante.

Chaque facette de $\mathrm{Vor}_{X|M}$ est de nouveau parcourue, coin après coin, jusqu'à atteindre un bord de la composante courante, *i.e.* un coin pointant vers une facette associée à un autre indice de composante (virtuelle ou non). Dès lors, la stratégie de parcours change pour suivre le bord de la composante ; le coin suivant est déterminé vis à vis de l'adjacence courante (FIGURE 3.25). La fermeture de la frontière est finalement contrôlée (ALGO. 9, ligne 13).

Algorithme 9 : Parcours des bords des composantes connexes

Entrées : $\mathrm{Vor}_{X|M^*_{t+1}}$ et $\mathrm{Ids}\tilde{X}$

Sorties : *Voisinages* : liste de liste de liste : voisinages de chaque $\tilde{\Omega}_i$ (une cellule peut admettre plusieurs bords)

1 **pour chaque** f, *facette de* $Vor_{X|M^*_{t+1}}$ **faire**
2 $\quad g \leftarrow pseudo_graine_id[f]$
3 $\quad$ **pour chaque** c, *coin de* f **faire**
4 $\quad\quad$ **si** *non visité(c)* **alors**
5 $\quad\quad\quad$ visiter(c)
6 $\quad\quad\quad$ $adj_f \leftarrow$ facette_adjacente(c)
7 $\quad\quad\quad$ **si** adj_f *est virtuelle* ***ou*** $Id\tilde{x}[adj_f] \neq g$ **alors**
8 $\quad\quad\quad\quad$ $bord \leftarrow$ nouveau_bord($voisinage[g]$) `// Retourne liste vide`
9 $\quad\quad\quad\quad$ $cur_c \leftarrow c$
10 $\quad\quad\quad\quad$ $cur_f \leftarrow f$
11 $\quad\quad\quad\quad$ $next_c, next_f \leftarrow$ coin_suivant(cur_c, cur_f, g)
12 $\quad\quad\quad\quad$ **tant que** *non visité(next_c)* **faire**
13 $\quad\quad\quad\quad\quad$ $cur_c \leftarrow next_c$
14 $\quad\quad\quad\quad\quad$ $cur_f \leftarrow next_f$
15 $\quad\quad\quad\quad\quad$ $adj_f \leftarrow$ facette_adjacente(cur_c)
16 $\quad\quad\quad\quad\quad$ ajouter($bord$, $\mathrm{Id}\tilde{x}[adj_f]$) `// ou la facette virtuelle...`
17 $\quad\quad\quad\quad\quad$ $next_c, next_f \leftarrow$ coin_suivant(cur_c, cur_f, g)
18 $\quad\quad\quad\quad$ supprimer_doublons_à_la_suite(bord) `// std::unique()`

19. Une seconde passe permet d'établir une liste non ordonnée de composantes connexes.

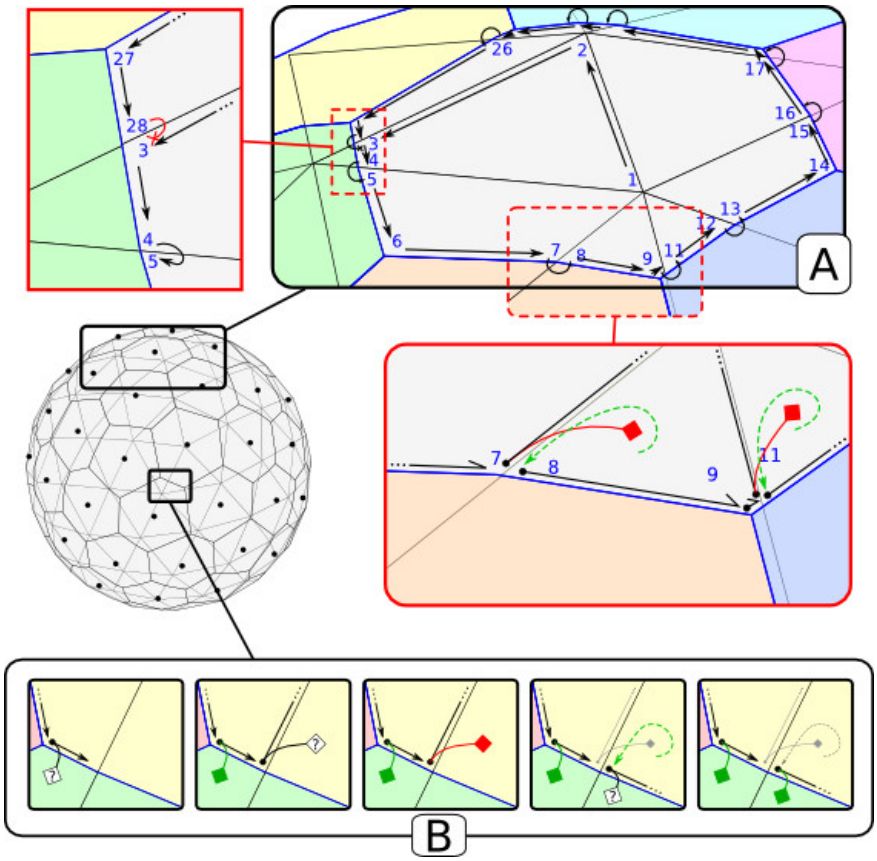


FIGURE 3.25 – Illustration de la marche de l'ALGORITHME 9.
– Cadre A – Parcours des coins de la composante ($\tilde{\Omega}_i$) –
Les coins sont numérotés suivant l'ordre de parcours. Le premier coin non encore visité (♯1) est suivi par les autres sommets de la facette courante. Le coin ♯3 admet une facette adjacente non incluse dans $\tilde{\Omega}_i$, la stratégie de parcours est alors modifiée pour suivre le bord de la composante (coins ♯3 à ♯28).
Une fois le bord parcouru (cercle topologique), le premier algorithme de parcours reprend et visite l'ensemble des coins non encore visités, facette par facette, dans l'attente d'un nouveau bord (pas le cas ici) ou jusqu'à épuisement des candidats (coins ♯29 à ♯38, non représentés ici).

– Cadre B – Détail sur le passage au coin suivant –
Le coin courant est traité, il est au bord et nous parcourons l'arête émanant de celui-ci vers le prochain coin de la facette. Ce coin est-il lui aussi au bord (vignette de gauche) ? Oui, son adjacence indique une cellule restreinte voisine (deuxième vignette, diamant vert), il fait partie du bord et nous pouvons passer au suivant .
Ce nouveau coin pointe vers la même cellule (vignette du milieu, diamant rouge) ; l'arête émanant de ce coin n'est donc pas incluse dans le bord de la cellule. En revanche, le sommet qu'il représente fait partie des sommets au bord de $\tilde{\Omega}$ et il existe une arête au bord émanant de ce sommet (continuité et fermeture du bord). Démarre alors une rotation dans le sens horaire autour du sommet courant (vignette du milieu) ; la combinatoire $\mathrm{Vor}_{X|M^*_{t+1}}$ nous conduit à la dernière vignette et le prochain coin au bord.

Ces deux algorithmes suffisent à récolter les informations requises pour établir avec précision la classe topologique d'une composante connexe, ses propriétés géométriques et ses relations de voisinage ; ces informations sont ici exploitées avec succès pour juger de la validité de la partition. Au delà, associés à une structure de données dérivée de ce qui est proposé ici, ils permettent d'adresser l'ensemble des traitements qu'il est possible d'imaginer et ainsi profiter pleinement du potentiel offert par les diagrammes de Voronoï restreints.

3.F.3 Structure de données

En plus du maillage représentant le résultat du calcul du diagramme de Voronoï restreint, dont les facettes sont estampillées avec l'indice du générateur et de la composante connexe auxquelles elles appartiennent, nous disposons maintenant d'une structure de données reflétant la structure et la combinatoire des cellules restreintes. Ces informations sont rassemblées à travers une structure de données dont le pseudo-code minimal est présenté ci-dessous qu'il convient d'augmenter avec l'ensemble des données nécessaires au traitement auquel ils sont destinés (*e.g.* mesures, attributs...). Cette formulation permet de se détacher de la géométrie et de ce concentrer sur l'aspect combinatoire comme l'est proposé dans les SECTIONS 3.C.2 et 3.C.3.

```
1 Struct Cellule de Voronoï
2   Liste(Composante connexe) composantes connexes
```

```
1 Struct Composante connexe
2   Entier indice de la graine
3   Entier indice de la première facette
4   Liste(Bord) bords
```

```
1 Struct Bord
2   Liste(Entier) indice des composantes connexes voisines
```

De la même manière, les algorithmes de parcours permettent d'analyser et éventuellement modifier la partition surfacique à notre guise. Par exemple, ils ont été employés à la définition d'une partition particulière associant à chaque générateur une unique composante connexe (FIGURE 3.26) offrant ainsi une décomposition semblable à celle offerte par un diagramme de Voronoï géodésique (application proposée par Wang *et al.* [WXT+20]).

Enfin, la mémorisation de chaque composante connexe est nécessaire à la définition d'un diagramme de Voronoï restreint à l'intérieur d'un domaine surfacique (SECTION 4.C.1) ; cette solution présente l'avantage de prendre en compte l'ensemble des configurations possibles.

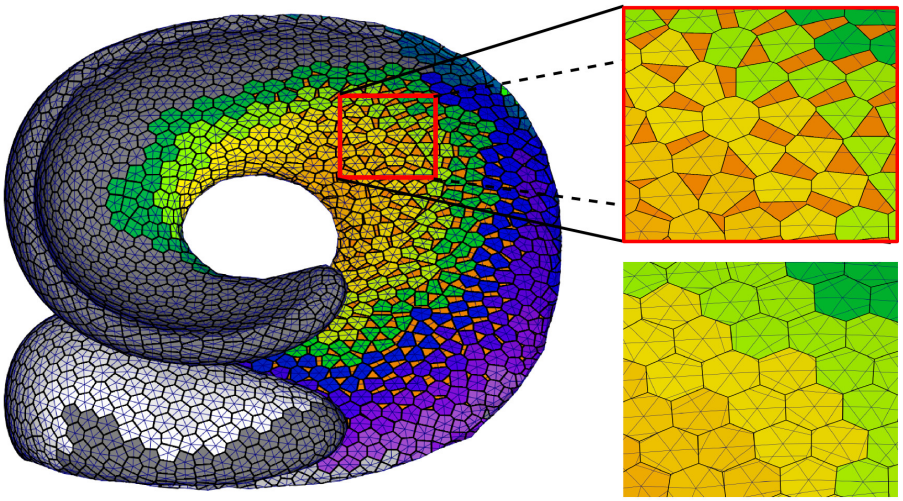


FIGURE 3.26 – Dans les régions de faible épaisseur, les cellules restreintes présentent généralement plusieurs composantes connexes (encadré en haut à droite : les composantes colorées en orange foncé dépendent d'un échantillon situé sur la face arrière du modèle). Cette configuration diffère largement d'un diagramme de Voronoï géodésique (il associe une unique composante connexe à chaque échantillon).
Pour atteindre une configuration similaire et offrir une approximation plus probante du diagramme de Voronoï géodésique, nous proposons de choisir une unique composante connexe pour chaque échantillon (*i.e.* sélectionner une composante connexe "principale", par exemple la plus proche de l'échantillon), les éventuelles autres composantes connexes (rendues orphelines par notre sélection) sont remises en jeu pour un second découpage en fonction de leur voisinage direct (diagramme de Voronoï restreint local). Cet algorithme permet d'approcher un diagramme de Voronoï géodésique y compris lorsque la densité d'échantillonnage est faible en regard de la distance à l'axe médian (encadré en bas à droite).

Chapitre 4

Minimisation de l'erreur volumique induite

Sommaire

4.A Motivations **120**
4.B Principe **121**
4.B.1 Discrétisation de l'erreur 121
4.B.2 Problème d'optimisation 123
4.B.3 Procédé de minimisation 124
4.B.4 Gradient de $\mathcal{F}$ 125
4.B.5 Algorithme général 129
4.C Méthodes de mesure **129**
4.C.1 Différence de volume 130
4.C.2 Triangulation de l'espace séparant M et M' 133
4.D Résultats **137**

Nous avons vu comment optimiser la répartition d'un ensemble d'échantillons aux abords d'un domaine surfacique (Voronoï barycentrique, CHAPITRE 2) et comment utiliser ce même partitionnement pour générer une variété triangulée topologiquement équivalente au domaine restrictif (CHAPITRE 3).
Ces techniques sont combinées avec succès pour remailler des surfaces : la répartition optimisée des sommets et le caractère Delaunay de la reconstruction conduisent à une représentation de qualité (géométrie des facettes).

Qu'en est il de l'approximation : quelle erreur commet-on lors du changement de représentation ? Quels moyens pouvons nous mettre en œuvre pour la minimiser ?

Pour améliorer la position des futurs sommets, la technique de remaillage fondée sur les diagrammes de Voronoï barycentriques [YLL+09], s'est vu augmenter de plusieurs solutions : adapter la répartition des échantillons à la géométrie du domaine restrictif (optimisation 3D avec anisotropie normale [LL10], échantillonnage haute dimension[LB13], projection sur le domaine...). Mais cette attention est toujours apportée *a priori*, sans connaître la combinatoire, et par conséquent, la géométrie précise du nouveau maillage.

Quand il s'agit de remaillage pour le suivi de surface, un des critères majeurs d'évaluation réside dans la capacité à contrôler les variations de volume induites par les opérations de remaillage (SECTION 4.A). Aussi, nous proposons (SECTION 4.B) d'exprimer cette erreur géométrique en terme de variations locales de volume et de les minimiser au sens des moindres carrés. Le processus d'optimisation est finalement accéléré par une approximation de la mesure qui exploite les conditions d'échantillonnage et la proximité des domaines surfaciques considérés (SECTION 4.C).

4.A Motivations

Nous savons que toute opération de remaillage est une source potentielle d'erreurs d'approximation. Lorsque la surface est fermée, ces erreurs géométriques se traduisent par de petites variations du volume inscrit.

Dans le contexte particulier du suivi de déformation de surface appliqué à la simulation d'écoulement d'un fluide incompressible, une telle variation n'est pas acceptable. En effet, la simulation physique tend à annuler la divergence du champs de vitesse (déformation isochore). Il serait malvenu que la méthode de remaillage induise une variation de volume ; d'autant que le simulateur ne pourrait ni identifier ni compenser ce biais.

Sur ce principe, certains auteurs suggèrent de contraindre les opérations de remaillage pour minimiser leur impact : placement astucieux des nouveaux sommets (*e.g.* schéma papillon, [DLG90, BB09]), repositionnement dans l'espace nul([Jia07]) ; Brochu

et ses collègues annulent même celles qui engendrent une variation de volume trop importante [BB09]. Cette dernière solution est d'ailleurs la référence dans le domaine et a été généralisée par Da *et al.* pour suivre l'évolution de plusieurs interfaces simultanément (simulation d'écoulement de plusieurs fluides non miscibles, [DBG14]).

Cependant, les erreurs d'approximation existent et s'accumulent au fil des itérations. Pour pallier ces erreurs résiduelles, la littérature préconise une correction finale pour annuler la variation de volume : une compensation globale par déplacement de tous les sommets suivant leur normale [Bro06] ; si le pas d'intégration est bien choisi, une approche itérative converge [WTGT09]. Cette technique est certes rapide et efficace lorsque l'on s'intéresse au volume de l'ensemble du domaine ; en revanche elle ne cerne pas les sources d'erreur et une variation locale est amortie sur l'ensemble des sommets.

La méthode de remaillage discutée ici ne prête pas attention à l'importance des modifications (la géométrie et la combinatoire sont décidées *a priori*) et une simple mise à l'échelle n'est pas satisfaisante : les erreurs de remaillage sont conservées voire magnifiées (FIGURE 4.1).

Clairement, s'intéresser au volume global manque de sens[1] et n'apporte pas de solution. Aussi, nous proposons de suivre une approche plus fine, discutant la position de chaque sommet pour minimiser la variation de volume dans sa propre région d'influence, réduisant de fait l'erreur totale ; la FIGURE 4.1 esquisse un exemple 2d du problème et des solutions avancées.

4.B Principe

Nous cherchons à ajuster la position des sommets du résultat du remaillage $M' = \mathrm{Del}_{X|M}$ de manière à minimiser la distance géométrique séparant cette triangulation du domaine initial M. Comme annoncé, nous souhaitons exprimer cette distance en terme de variation de volume et avoir une solution de correction agissant à l'échelle de l'échantillonnage.

Une fois l'espace discrétisé (SECTION 4.B.1), cette question géométrique devient un problème d'optimisation numérique (SECTION 4.B.2) que nous proposons de résoudre (SECTIONS 4.B.3 et 4.B.4).

4.B.1 Discrétisation de l'erreur

À l'échelle de l'objet, la différence de volume séparant les domaines surfaciques M et M' s'exprime par :

$$\Delta V = \mathrm{Vol}(M') - \mathrm{Vol}(M)$$

1. Le déplacement d'un seul sommet peut produire le résultat souhaité.

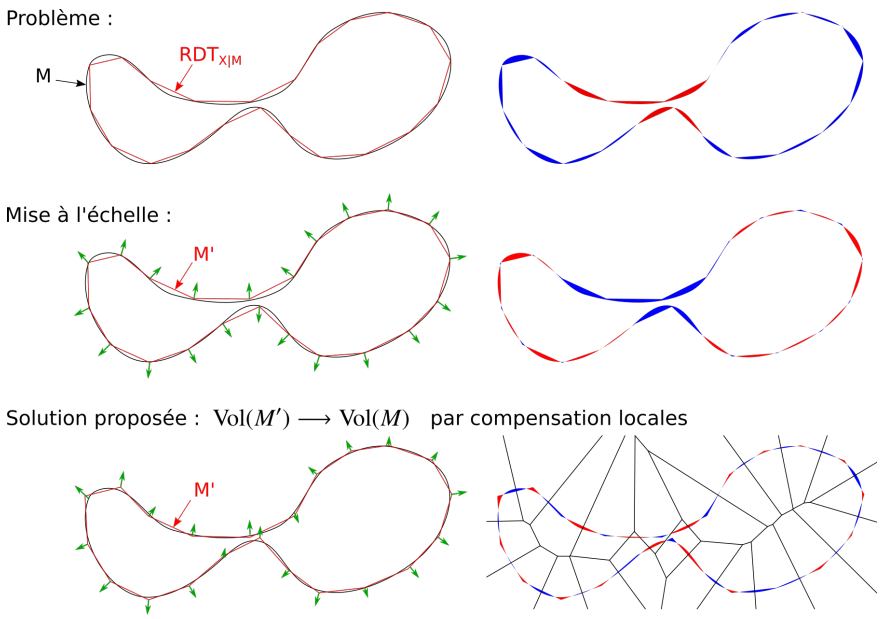


FIGURE 4.1 – Illustration 2D du problème de l'erreur d'approximation : à gauche les objets considérés et à droite l'erreur volumique signée (bleue ou rouge) relative au domaine de référence. La ligne du haut représente le remaillage initial, la seconde ligne présente une correction de l'erreur volumique globale et la dernière ligne un aperçu de notre approche par minimisation de l'erreur locale.

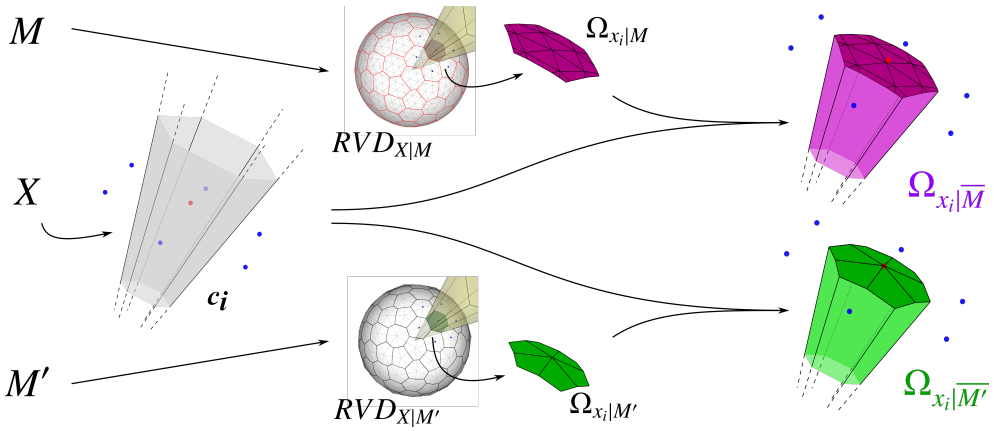


FIGURE 4.2 – Aperçu de la génération des cellules restreintes aux domaines volumiques délimités par M et M' ; une version détaillée du processus est décrite en SECTION 4.C.1.

Étant donné un ensemble d'échantillons X, ce calcul peut être décomposé comme suit :

$$\begin{aligned}\Delta V &= \mathrm{Vol}(M') - \mathrm{Vol}(M) \\ &= \sum_{x_i \in X} \mathrm{Vol}(\Omega_{x_i|\overline{M'}}) - \sum_{x_i \in X} \mathrm{Vol}(\Omega_{x_i|\overline{M}}) \\ &= \sum_{x_i \in X} \mathrm{Vol}(\Omega_{x_i|\overline{M'}}) - \mathrm{Vol}(\Omega_{x_i|\overline{M}}) \\ &= \sum_{x_i \in X} \delta(c_i)\end{aligned}$$

où $\delta(c_i)$ représente la différence de volume entre la surface initiale et son remaillage, dans la cellule de Voronoï c_i.

Nous savons calculer de manière efficace les diagrammes de Voronoï et il est possible de restreindre une cellule à un domaine volumique, notamment l'intérieur du domaine surfacique. La FIGURE 4.2 donne un exemple de construction des cellules restreintes qui permettent de mesurer la différence de volume ; la méthode est détaillée dans la seconde partie du chapitre (SECTION 4.C.1). Pour l'instant nous supposons avoir une "boîte noire", acceptant en entrée deux domaines surfaciques (M et M') et un ensemble d'échantillons (X), et capable de retourner pour chaque cellule la variation locale de volume : $\delta(c_i)$.
$\delta(c_i)$ est une valeur réelle qui est positive lorsque la nouvelle modélisation de la cellule restreinte présente un volume plus important que celle restreinte à l'objet de référence (portions colorées en rouge sur la FIGURE 4.1), et négative lorsque le changement de représentation implique une perte locale de volume (régions teintées de bleu dans la même figure).

4.B.2 Problème d'optimisation

Nous proposons de minimiser chaque différence locale de volume ($\delta(c_i)$) au sens des moindres carrés :

$$\begin{aligned}\text{si } \forall x_i \in X, \delta(c_i)^2 &\longrightarrow 0, \\ \text{alors } |\Delta V| &\longrightarrow 0, \\ \text{donc } \mathrm{Vol}(M') &\longrightarrow \mathrm{Vol}(M), \\ \text{et, par extension, } M' &\approx_X M.\end{aligned}$$

Il s'agit de définir une fonction objectif, fondée sur l'ensemble des $\delta(c_i)^2$, que nous cherchons à minimiser par approximations successives (SECTION 4.B.3).

Fonction objectif :

En pratique, M' est initialisé avec le résultat du remaillage ($M'_0 = \mathrm{Del}_{X|M}$). On pose $\mathcal{F}$, la fonction qui associe X, M et M' à une valeur réelle positive telle que :

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Vol}(M')\to X\mathrm{Vol}(M)} = \sum_{x\in X} \delta(c_i)^2 + \epsilon\mathcal{R}_v \tag{4.1}$$

Avec $\epsilon\mathcal{R}_v$ un terme de régulation agissant sur les sommets $\boldsymbol{v}$ de M'.

Terme de régulation :

Ce terme permet d'une part de compléter l'optimisation selon un autre paramètre et d'autre part d'orienter le solveur numérique. Nous proposons par exemple d'ajouter un "terme d'élasticité", et ainsi de limiter l'altération des propriétés géométriques du maillage. La distorsion est exprimée sous la forme d'amplitude de déplacement des sommets (avec v_j^0 la position initiale du sommet j) :

$$\mathcal{R}_v = \sum_{\boldsymbol{v}_j\in M'} |\, \boldsymbol{v}_j^0 - \boldsymbol{v}_j \,|^2 \tag{4.2}$$

Concrètement, ce terme va préserver la qualité de la triangulation lorsque différentes solutions sont équivalentes au regard de la variation locale de volume. Le facteur ε doit néanmoins rester petit (*i.e.* $\leq 10^{-3}$) pour ne pas trop interférer dans le processus d'optimisation.

Échantillonnage retenu :

Nous utilisons un échantillonnage particulier permettant de simplifier la procédure : chaque sommet de M'_0 donne un échantillon. Dans cette configuration, la fonction $\mathcal{F}$ présentée dans l'ÉQUATION 4.1 devient :

$$\mathcal{F} = \sum_{i\in\mathrm{Card}(X)} \delta(c_i)^2 + \epsilon\,|\,\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{v}_i\,|^2 \tag{4.3}$$

4.B.3 Procédé de minimisation

La recherche d'une nouvelle position plus avantageuse pour les sommets de M' est opérée de manière itérative et est guidée par la minimisation de $\mathcal{F}$: la position des sommets est meilleure si la valeur de retour de $\mathcal{F}$ est inférieure à l'actuelle.

Lorsque la fonction est dérivable, nous pouvons envisager une descente de gradient mais cette technique présente un écueil majeur : le choix du pas d'avancement. Ce problème est délicat ; une solution repose sur une initialisation adaptée (pas d'avance utilisé pendant la première itération) et un système de correction automatique qui, par

exemple, augmente le pas d'intégration si sa direction est proche du précédent gradient (accélère la convergence) ou, au contraire, le réduit lorsque deux gradients successifs vont dans des directions opposées (limite les oscillations autour de la solution).

Lorsque la fonction est deux fois dérivable, le procédé L-BFGS [LN89] utilise une approximation de la hessienne de la fonction pour ajuster au mieux le pas d'avance et ainsi accélérer la convergence. Nous bénéficions ici d'une initialisation proche du résultat attendu et on suppose que les conditions d'échantillonnage sont satisfaisantes pour sa mise en œuvre (les résultats empiriques obtenus confirment cette hypothèse). Pour fonctionner, cette méthode requiert de connaître la valeur de la fonction et celle de son gradient.

Continuité de $\mathcal{F}$:

Tant que la combinatoire des diagrammes de Voronoï restreints est préservée, $\mathcal{F}$ est continue vis à vis du déplacement des sommets de M' ; le théorème des valeurs intermédiaires l'assure. De la même manière, la proximité des deux domaines surfaciques et les conditions d'échantillonnage laissent penser que le déplacement des sommets n'implique pas de changement de la combinatoire et, par conséquent, que $\mathcal{F}$ est continue. Comme détaillé dans la section suivante, $\mathcal{F}$ est même dérivable.

4.B.4 Gradient de $\mathcal{F}$

Nous devons maintenant déterminer la valeur du gradient de la fonction objectif (ÉQUATION 4.3). C'est une fonction quadratique, elle admet donc pour gradient :

$$\nabla\mathcal{F} = 2\sum_{i\in \mathrm{X}} \delta(c_i)\ \nabla\delta(c_i) + \epsilon\,|\,x_i - v_i\,|\,\nabla(\,|\,x_i - v_i\,|\,) \tag{4.4}$$

Le second terme ne pose *a priori* pas de problèmes particuliers ; le premier requiert une étude plus approfondie. En pratique, la différence de volume associée à chacune des cellules restreintes aux domaines volumiques s'appuie sur une décomposition en tétraèdres (mesure de volumes signés, SECTION 2.A.2.b) ; la méthode de décomposition est discutée dans la suite (SECTION 4.C), et nous considérons pour l'instant $\mathcal{T}$ l'ensemble de ces tétraèdres :

$$\delta(c_i) = \sum_{t\in\mathcal{T}} \mathrm{Vol}(t)$$

et donc :

$$\nabla\delta(c_i) = \sum_{t\in\mathcal{T}} \nabla\mathrm{Vol}(t). \tag{4.5}$$

Nous savons également qu'un tétraèdre t, admettant pour base le triangle $(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3)$ et x_i pour quatrième sommet, renferme le volume suivant :

$$\mathrm{Vol}(t(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{x}_i)) = \frac{1}{6}[((\boldsymbol{s}_3 - \boldsymbol{s}_1) \wedge (\boldsymbol{s}_2 - \boldsymbol{s}_1)) \cdot (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{s}_3)] \tag{4.6}$$

Après développement et arrangement des différents termes, on obtient en considérant les indices des sommets modulo 3 :

$$\nabla \mathrm{Vol}(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{2} ((\boldsymbol{s}_{i+2} - \boldsymbol{s}_{i+1}) \wedge (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{s}_{i+2})) \cdot \nabla \boldsymbol{s}_i \tag{4.7}$$

Il faut néanmoins prendre quelques précautions et préciser quelles sont les variables considérées lors de la dérivation ; en particulier, l'ÉQUATION 4.7 donne une expression en fonction des sommets s du diagramme de Voronoï restreint ($\mathrm{Vor}_{X|M'}$) alors que les variables de notre système sont les positions des sommets de M' ($V' = \{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^{m}$). Pour passer à une formulation exploitable, nous devons opérer un changement de variables et ainsi pouvoir établir $\nabla_{\boldsymbol{v}} \mathcal{F}$. Cela se traduit en pratique par la définition de matrices jacobiennes telles que :

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} \mathrm{Vol}(t) = \nabla_{\boldsymbol{s}} \mathrm{Vol}(t) \cdot J_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{v})$$

4.B.4.a Reformulation des sommets de $\mathbf{Vor}_{X|M'}$

Lorsqu'on considère un diagramme de Voronoï restreint à un domaine surfacique, nous pouvons distinguer trois classes de sommets (FIGURE 4.3). Ces trois configurations géométriques sont respectivement indexées par le nombre de composantes connexes impliquées dans leur définition (i.e. de 1 à 3) et chacune d'elles conduit à la définition d'une matrice Jacobienne.

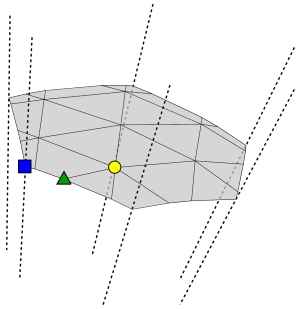


FIGURE 4.3 – Les sommets d'un diagramme de Voronoï restreint se distinguent par leur origine (SECTION 2.D.2.a). Le premier groupe rassemble les sommets du domaine restrictif (un spécimen est surligné par le point jaune) ; les deux autres configurations (respectivement matérialisées par un triangle vert et un carré bleu) correspondent à une intersection entre le domaine restrictif et les faces du diagramme de Voronoï.

Configuration *i* :

Pour les sommets du diagramme de Voronoï correspondant à des sommets du domaine restrictif, aucun changement de variable n'est nécessaire puisque le point considéré est déjà une variable du système. Autrement dit, pour cette configuration, la matrice Jacobienne se résume à la matrice identité :

$$J_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{v}) = I_{3\times 3} \tag{4.8}$$

Autres configurations :

Dans les deux autres cas, le sommet du diagramme de Voronoï correspond à l'intersection d'une droite (passant par un point $\boldsymbol{a}$ et admettant $\boldsymbol{e}$ pour vecteur directeur) et d'un plan (de normale $\boldsymbol{n}$ et passant par un point $\boldsymbol{p}$). Il est possible de formuler leur intersection de la manière suivante :

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + u\boldsymbol{e} \qquad \text{avec } u = \frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}} \tag{4.9}$$

et d'en déduire le gradient :

$$\nabla\boldsymbol{s} = \nabla\boldsymbol{a} + \nabla(u)\boldsymbol{e} + u\nabla\boldsymbol{e} \tag{4.10}$$

Dorénavant, il s'agit d'exprimer les sommets issus de l'intersection de deux ou trois cellules sous la forme donnée par l'ÉQUATION 4.9, c'est à dire identifier $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{n}$ dans les configurations *ii* et *iii* pour en déduire la matrice Jacobienne $J_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{v})$.

Configuration *ii* :

La droite est variable (elle correspond au prolongement de l'arête du domaine restrictif) et le plan est constant (plan médiateur de deux graines voisines, FIGURE 4.4).

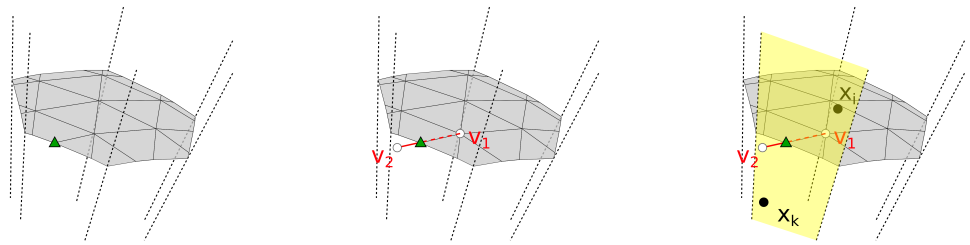


FIGURE 4.4 – Un sommet de type *ii* correspond à l'intersection d'une arête du domaine restrictif et du plan médiateur de deux graines.

En posant :

$$\boldsymbol{a} \leftarrow \boldsymbol{v}_1 \qquad \boldsymbol{p} \leftarrow 0.5(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$$
$$\boldsymbol{e} \leftarrow \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 \qquad \boldsymbol{n} \leftarrow \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$$

la différentielle de $\boldsymbol{s}$ (ÉQUATION 4.10) devient :

$$\nabla \boldsymbol{s} = (1-u)\nabla \boldsymbol{v}_1 + u\nabla \boldsymbol{v}_2 + \nabla(u)\boldsymbol{e}$$

avec :

$$\nabla(u) = \frac{(\nabla \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n})((\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{n})^2} - \frac{(\nabla \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{n})((\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{n})^2}$$

ce qui nous conduit finalement à :

$$\begin{aligned} J_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{v_1}) &= (1-u)I_{3\times 3} + \frac{(\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{n}}{(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{n})^2}\boldsymbol{n}^t\ \boldsymbol{e} \\ J_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{v_2}) &= \quad u \quad I_{3\times 3} - \frac{(\boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{n}}{(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{n})^2}\boldsymbol{n}^t\ \boldsymbol{e} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Configuration *iii* :
Reprenons l'ÉQUATION 4.9, cette fois, la droite est constante et le plan est variable (FIGURE 4.5). La droite correspond à une arête de Voronoï, elle passe par $\boldsymbol{m}$, le centre du cercle circonscrit au triangle formé par les trois graines (x_1, x_2 et x_3) et sa direction est donnée par la normale du même triangle. Le plan est déduit à partir des trois sommets $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$. On pose alors :

$$\boldsymbol{a} \leftarrow \boldsymbol{m} \qquad \boldsymbol{p} \leftarrow \boldsymbol{v}_1$$
$$\boldsymbol{e} \leftarrow (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \wedge (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3) \qquad \boldsymbol{n} \leftarrow (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) \wedge (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_3)$$

Dans cette configuration, l'ÉQUATION 4.10 se réduit à :

$$\nabla \boldsymbol{s} = \nabla(u)\boldsymbol{e}$$

avec :

$$\nabla(u) = \frac{((\boldsymbol{m} - \boldsymbol{v_1}) \cdot \nabla \boldsymbol{n}) - (\nabla \boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{n})}{\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{n}} - \frac{((\boldsymbol{m} - \boldsymbol{v_1}) \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{e} \cdot \nabla \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{n})^2}$$

et (en considérant les indices modulo 3) :

$$\nabla \boldsymbol{n} = \sum_{i=1}^{3} \nabla \boldsymbol{v_i} \times (\boldsymbol{v_{i+1}} - \boldsymbol{v_{i+2}})$$

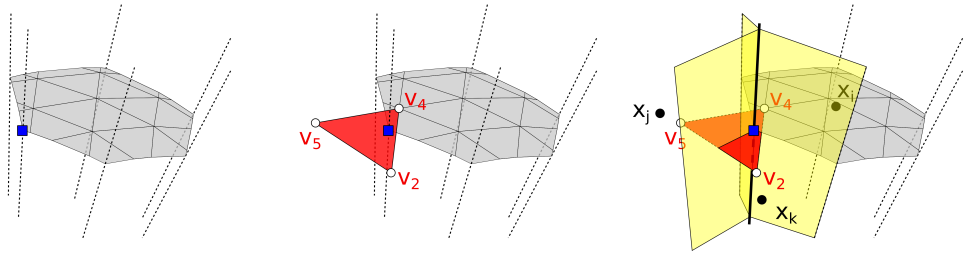


FIGURE 4.5 – Construction d'un sommet de type *iii*

Ce qui conduit aux matrices Jacobiennes suivantes :

$$
\begin{aligned}
J_s(\boldsymbol{v_1}) &= \left[\frac{(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3)\times(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{v}_1)-\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}} - \frac{((\boldsymbol{m}-\boldsymbol{v}_1)\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{e}\wedge(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3))}{(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n})^2}\right]\boldsymbol{e} \\
J_s(\boldsymbol{v_2}) &= \left[\frac{(\boldsymbol{v}_3-\boldsymbol{v}_1)\times(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{v}_1)}{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}} - \frac{((\boldsymbol{m}-\boldsymbol{v}_1)\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{e}\wedge(\boldsymbol{v}_3-\boldsymbol{v}_1))}{(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n})^2}\right]\boldsymbol{e} \\
J_s(\boldsymbol{v_3}) &= \left[\frac{(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\times(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{v}_1)}{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}} - \frac{((\boldsymbol{m}-\boldsymbol{v}_1)\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{e}\wedge(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2))}{(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n})^2}\right]\boldsymbol{e}
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

4.B.5 Algorithme général

En pratique, la mesure relative à la surface de référence M n'est opérée qu'une seule fois. Ensuite, l'algorithme s'intéresse à M' ; à chaque itération, nous devons établir la valeur de $\mathcal{F}$ et, pour chaque sommet, son gradient. Dès lors, le solveur numérique propose un nouvel ensemble de positions pour les sommets de M'.

La mesure est établie avec l'une des méthodes présentées dans la section suivante (SECTION 4.C). En pratique, elles mettent en évidence un ensemble de facettes qui sont triangulées et chacun de ces triangles est associé à un quatrième point, l'apex, pour former un tétraèdre dont le volume est pris en compte. De plus, les sommets variables ($\in \mathrm{Vor}_{X|M'}$, SECTION 4.B.4.a) définissent une part du gradient associé à chacun des sommets de M'.

4.C Méthodes de mesure

Nous disposons en entrée d'un ensemble d'échantillons et de deux domaines surfaciques. Établir la différence de volume relative à chaque échantillon telle qu'elle a été présentée (FIGURE 4.2) semble être une opération relativement simple en considérant

les diagrammes de Voronoï restreints à chacun des deux domaines volumiques (SECTION 4.C.1). Cette solution s'avère néanmoins assez lourde puisque dans la plupart des cas, une mesure directe de l'espace séparant les deux portions de surfaces donne le même résultat et une triangulation de cet espace permet de réduire notre problème à une simple interprétation des facettes retournées par le calcul du diagramme de Voronoï surfacique (SECTION 4.C.2).

4.C.1 Différence de volume

Les restrictions successives du même diagramme de Voronoï nous invitent à calculer et mémoriser les cellules tridimensionnelles (SECTION 4.C.1.a) pour ensuite déduire leur restriction selon le domaine surfacique considéré (SECTION 4.C.1.b).

4.C.1.a Initialisation des cellules 3D

Nous avons vu dans le CHAPITRE 2 qu'une cellule de Voronoï correspond à l'intersection de l'ensemble des demi-espaces qu'il est possible de générer entre un échantillon donné et le reste de l'ensemble. L'algorithme exploité ici s'appuie sur cette définition, à l'instar des méthodes exposées proposées par Rycroft [Ryc09] et Ray *et al.* [RSLL18].

Boite englobante locale

Nous ne cherchons pas ici à décomposer l'intégralité de l'espace : certaines cellules sont arbitrairement grande (infinies si l'on considère $\mathbb{R}^3$) et nous cherchons seulement à définir une différence de volume entre un modèle surfacique et son remaillage. Aussi, nous n'avons pas besoin d'une définition complète de chaque cellule, seulement d'une portion proche du domaine considéré. De la même manière, la prédisposition des échantillons nous permet de supposer que l'ensemble de voisins nécessaire au calcul d'une cellule est relativement petit [RSLL18].

Aussi, nous ne considérons pas l'ensemble du domaine (*e.g.* boite englobante du système) mais une boite englobante plus petite, centrée sur l'échantillon et de rayon r ; ce rayon est défini à partir des données géométriques extraites lors du remaillage (*e.g.* sommet c d'une cellule restreinte le plus éloigné de sa graine x_i, soit, $r = 2 * |c - x_i| + \varepsilon$, FIGURE 4.6).

Cette boite englobante est ensuite dépouillée suivant l'algorithme de Sutherland *et al.* [SH74] pour obtenir une pseudo-cellule (Ω_{x_i}). Les faces du polyèdre convexe résultant sont le produit d'une intersection non-vide de deux cellules de Voronoï (faces médiatrices) ou des vestiges la boite englobante (elles témoignent l'existence de portions de la cellule de Voronoï trop éloignées, non pertinentes, pour l'application proposée ici).

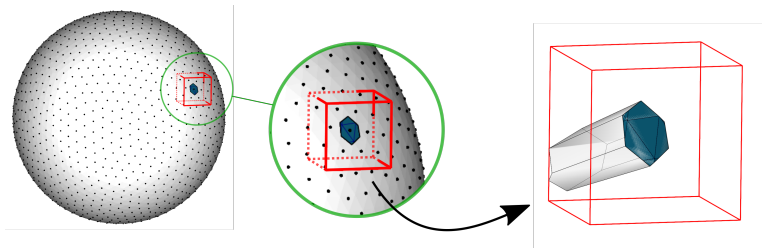


FIGURE 4.6 – Exemple de boite englobante locale, le rayon de la boite est déterminé à partir de la distance séparant la graine du coin le plus éloigné de sa cellule restreinte (à gauche et détail au centre). à droite, résultat de la découpe : pseudo cellule restreinte.

4.C.1.b Restriction

Nous avons d'un coté un polyèdre convexe Ω_{x_i} et de l'autre un domaine volumique $\overline{M}$ défini explicitement par sa frontière M ; nous cherchons à mesurer le volume de leur intersection $\mathrm{Vol}(\Omega_{x_i|\overline{M}})$. $\Omega_{x_i|\overline{M}}$ est donc défini par un ensemble de facettes : les facettes de $\Omega_{x_i|M}$ et un sous ensemble de facettes de Ω_{x_i}.

Deux étapes sont nécessaires pour déterminer le sous ensemble de Ω_{x_i} : une résolution de l'intersection entre le bord des cellules restreintes au domaine surfacique $\partial\Omega_{x_i|M}$ et la pseudo cellule Ω_{x_i} et une propagation de l'information aux sommets de Ω_{x_i}.

Faces médiatrices
Le bord de la cellule restreinte au domaine surfacique est inclus dans une ou plusieurs faces médiatrices. Les arêtes le formant sont donc distribuées sur ces faces, conduisant pour chacune d'elle à définir un ou plusieurs chemins. Ces chemins permettent de déterminer quelles parties de la face sont à prendre en compte, comme l'illustre les FIGURES 4.7 et 4.8.

Complétion de la cellule :

Certaines faces de la cellule tridimensionnelle ne font pas l'objet d'une intersection et il nous faut alors propager les drapeaux associés aux faces intersectées pour déterminer si elles entrent ou non dans la définition de la cellule restreinte au domaine volumique.

4.C.1.c Bilan :

Cette stratégie est fiable, robuste mais relativement lourde pour être employée dans un processus itératif. Elle requiert un effort de mémorisation : l'ensemble des cellules 3d

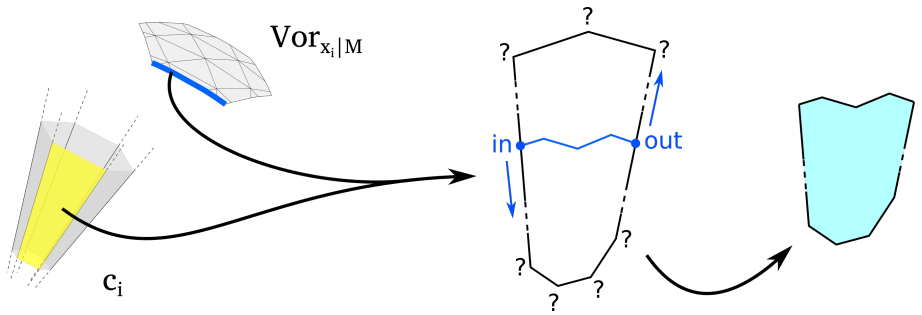


FIGURE 4.7 – Chaque face d'une cellule tridimensionnelle est confrontée à la part correspondante du bord de la cellule restreinte au domaine surfacique ; la restriction implique un marquage de chaque sommet de la face (détaillé dans la FIGURE 4.8).

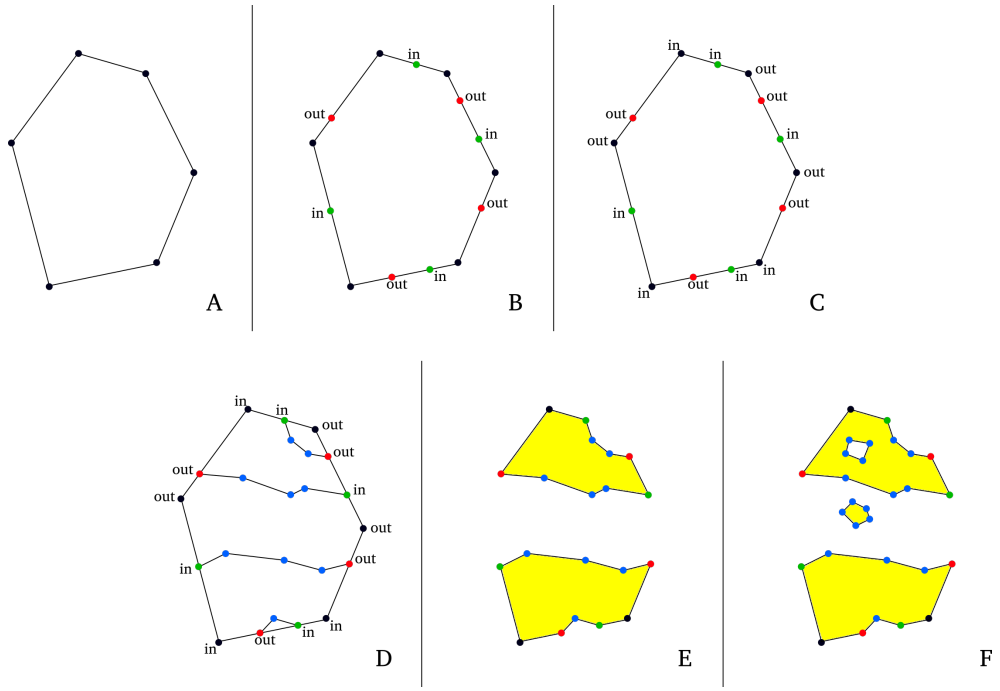


FIGURE 4.8 – Exemple de résolution de l'intersection entre une face d'une cellule de Voronoï et le bord d'une cellule restreinte à un domaine surfacique. Plusieurs étapes sont nécessaires :

(A) face de Voronoï,
(B) insertion des sommets de type *iii* et mise en place des drapeaux,
(C) propagation des drapeaux,
(D) insertion des arêtes du bord (segments topologiques),
(E) résolution de l'intersection et
(F) insertion des arêtes formant les bords fermés.

Cette configuration a été générée "à la main" pour exposer l'ensemble des cas de figures (hors auto-intersection du domaine surfacique) ; dans le présent contexte, le bord de la cellule restreinte associé à un plan médiateur se résume généralement à un seul chemin ouvert.

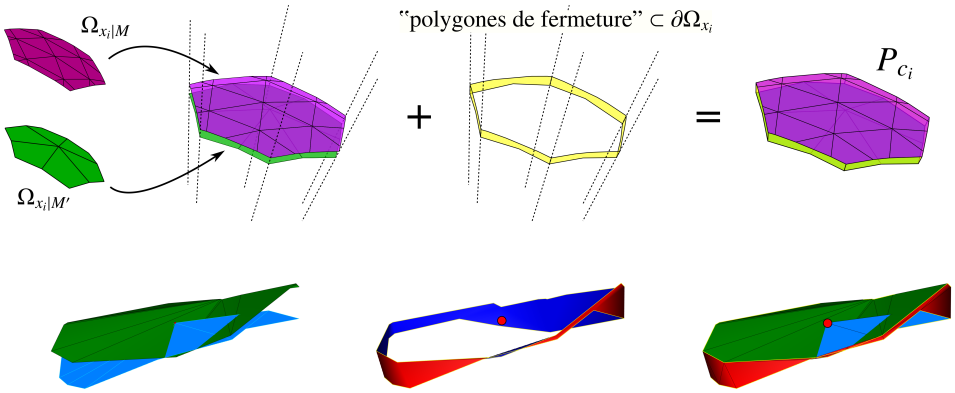


FIGURE 4.9 – Les deux domaines surfaciques sont proches, il en va de même pour les cellules restreintes à l'un ou l'autre des domaines (à gauche). L'espace séparant les deux cellules restreintes peut être borné selon les faces de la cellule tridimensionnelle (milieu) ; ce sous ensemble du bord de Ω_i permet de définir un polyèdre modélisant la différence locale de volume (*i.e.* $\delta(c_i) = \mathrm{Vol}(P_{c_i})$, à droite). La ligne inférieure donne un exemple "réel" avec des cellules restreintes qui s'intersectent mutuellement, cette situation n'entraîne cependant pas de complications, le polyèdre peut être défini et mesuré.

et les bords des cellules restreintes au domaine surfacique considéré avant de pouvoir calculer la restriction volumique et finalement déterminer le volume inscrit.

En pratique, les configurations géométriques suggèrent d'employer une méthode alternative n'impliquant pas la mémorisation d'objets géométriques.

4.C.2 Triangulation de l'espace séparant M et M'

Dans le cas général, les deux domaines sont très proches et l'échantillonnage retenu conduit à un ensemble de cellules tridimensionnelles semblables à des cylindres au voisinage des domaines surfaciques considérés. De ce fait, il est très courant que $\Omega_{x_i|M}$ et $\Omega_{x_i|M'}$ partagent le même nombre de composantes connexes, que ces dernières soient de même nature topologique et présentent un voisinage identique.

Cette configuration particulière suggère une méthode de mesure plus directe, s'intéressant uniquement à l'espace séparant les cellules restreintes ; la région est bornée par $\Omega_{x_i|M}$, $\Omega_{x_i|M'}$ et une partie des plans médiateurs relatifs aux voisinages restreints ("polygones de fermeture" $\subset \partial\Omega_i$, FIGURE 4.10).

En d'autres termes, nous proposons ici de mesurer directement l'espace séparant les deux objets surfaciques plutôt que d'établir la différence entre les volumes des cellules restreintes à chacun des deux domaines volumiques.

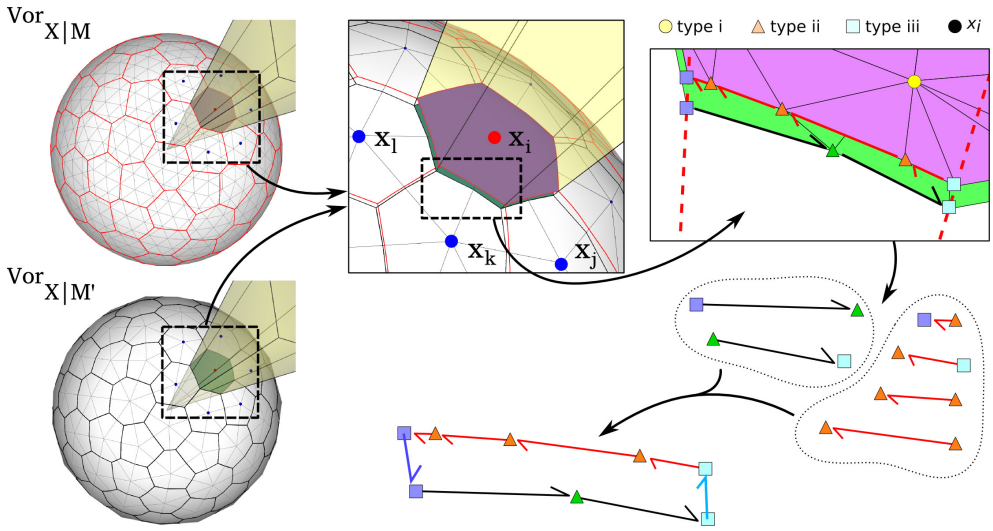


FIGURE 4.10 – Exemple de construction naïve d'un polygone de fermeture (au centre en bas) à partir des ensembles d'arêtes formant les bords respectifs de $\Omega_{x_i|M}$ et de $\Omega_{x_i|M'}$.

Polygones de fermeture :

En admettant une configuration en position générale [2], les polygones de fermeture peuvent être construits à partir de l'ensemble des arêtes formant les bords respectifs de $\Omega_{x_i|M}$ et de $\Omega_{x_i|M'}$ et d'un sous ensemble des arêtes de voronoi partagées par la cellule courante et ses voisines (FIGURE 4.9). Cette méthode de construction implique une mémorisation des arêtes formant les deux bords, un arrangement de cet ensemble par face de Voronoï et finalement leur interconnexion (FIGURE 4.10).

Cette stratégie requiert toujours une mémorisation et peut être mise en défaut lorsque les cellules restreintes diffèrent d'un simple disque ou présentent un voisinage différent.

Aussi, nous proposons d'aller plus loin et de construire une triangulation de ces polygones de fermeture en intégrant, à la volée, les facettes retournées par le calcul du diagramme de Voronoï restreint. Cette astuce nous permet d'éviter la mémorisation, d'augmenter la robustesse face à quelques cas difficiles et autorise un traitement parallèle.

Points intermédiaires :

La triangulation des polygones de fermeture s'appuie sur un ensemble de points intermédiaires. Comme l'illustre la FIGURE 4.11, nous en définissons un pour chaque

2. $\Omega_{x_i|M}$ et $\Omega_{x_i|M'}$ sont des disques topologiques admettant un voisinage restreint identique.

double ou triple intersection.

La position géométrique exacte de ces points importe peu, tant qu'ils restent à l'intérieur de l'espace auquel ils sont attachés : les compensations entre volumes signés assurent la bonne marche de la méthode (FIGURE 4.12). En revanche pour éviter leur mémorisation, nous proposons de les définir à partir de l'ensemble d'échantillons (FIGURE 4.13) qui reste inchangé tout au long du processus.

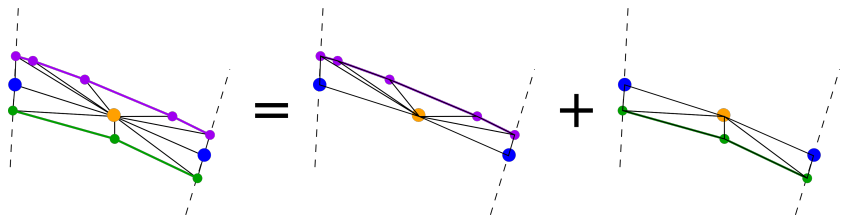


FIGURE 4.11 – Triangulation du polygone de fermeture présenté dans la FIGURE 4.10 à l'aide de points intermédiaires (points surlignés en bleu et en orange) ; elle peut être décomposée selon la provenance des chemins (au milieu, $\partial\Omega_{x|M}$, et à droite : $\partial\Omega_{x|M'}$).

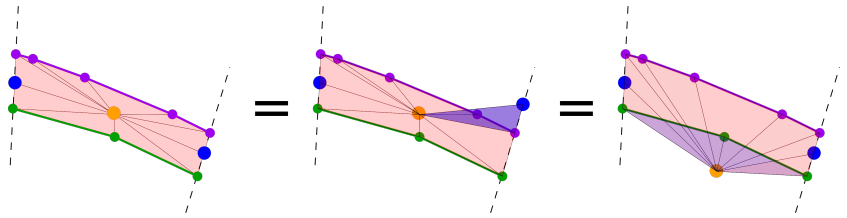


FIGURE 4.12 – La position des points intermédiaires n'influe pas sur la mesure selon le principe de compensation entre volumes signés.

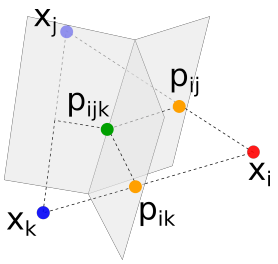


FIGURE 4.13 – Les points intermédiaires sont définis à partir de l'ensemble de graines utilisées pour la décomposition. Ils sont équidistants des 2 ou 3 graines impliquées, *i.e.* barycentre de deux graines et centre du cercle circonscrit au triangle formé par trois générateurs.

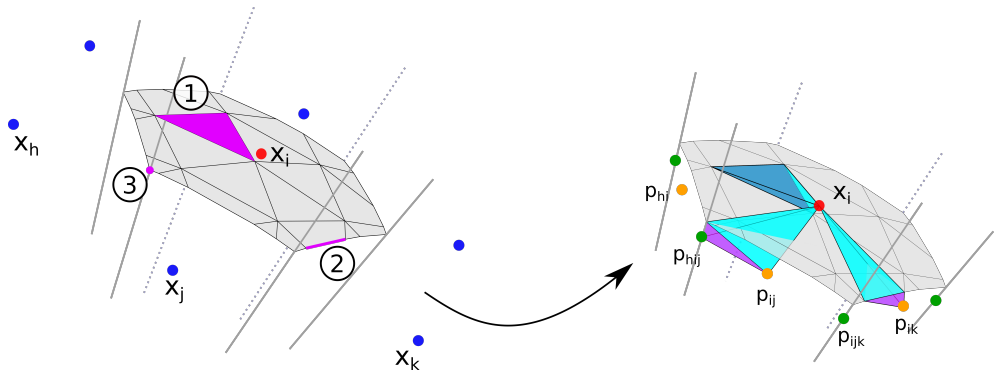


FIGURE 4.14 – Une facette résultante du calcul du diagramme de Voronoï restreint déclenche la mesure du volume du tétraèdre qu'elle forme lorsqu'elle est associée à l'apex (1). Si une de ses arêtes coïncide avec le bord de la cellule (2), une nouvelle mesure est opérée (le tétraèdre est composé des sommets de l'arête, d'un point fixe et de l'apex). Le cas échéant, une triple intersection de cellules (3) est également associée à deux points intermédiaires pour compléter la mesure.

Algorithme :

Après avoir intégré la facette courante (SECTION 4.B.5 et FIGURE 4.14-1), il s'agit de vérifier si elle conduit à la génération de facettes supplémentaires, celles constituant la triangulation des polygones de fermeture.

Pour cela, chaque arête de la facette courante est analysée pour savoir si elle entre dans la composition du bord de la cellule restreinte (*i.e.* ses deux sommets sont de type *ii* et/ou *iii* et ils renvoient sur un voisin commun). Dans ce cas, nous générons un triangle supplémentaire connectant cette arête au point intermédiaire correspondant à la face de Voronoï concernée (FIGURE 4.14-2).

De la même manière, nous détaillons la nature des sommets de l'arête. Si il correspond à une configuration de type *iii* alors il entraîne la génération d'un nouveau triangle additionnel qui le connecte au point intermédiaire de la face de Voronoï courante et à celui de l'arête correspondant à la triple intersection de cellules (FIGURE 4.14-2).

En résumé, une arête située sur le bord peut déclencher la génération d'une à trois facette(s) additionnelle(s) ; elles sont instantanément intégrées à la mesure, avec une attention particulière accordée à leur orientation.
La TABLEAU 4.C.2 donne l'ensemble des configurations possibles pour une arête $(c1, c2)$ située sur la frontière commune aux cellules restreintes i et k (la cellule courante initiée par x_i admet trois voisins successifs x_j, x_k et x_l).

config. $c1$	config. $c2$	facette(s) virtuelle(s) générée(s)
ii	*ii*	$(c1, c2, m_{i,k})$
ii	*iii*	$(c1, c2, m_{i,k})$ et $(c2, m_{i,k,l}, m_{i,k})$
iii	*ii*	$(c1, m_{i,k}, m_{i,j,k})$ et $(c1, c2, m_{i,k})$
iii	*iii*	$(c1, m_{i,k}, m_{i,j,k})$, $(c1, c2, m_{i,k})$ et $(c2, m_{i,k,l}, m_{i,k})$

Dans de bonnes conditions d'échantillonnage, la décomposition présentée ici fourni une mesure exacte de la surface des polygones de fermeture et conduit à la mesure du volume associé à chaque échantillon sans aucune mémorisation des diagrammes de Voronoï restreints. En pratique, il suffit, pour chaque échantillon, que leur cellule restreinte présente pour l'un ou l'autre des deux domaines restrictifs un nombre de composantes connexes et un voisinage similaire.

4.D Résultats

La technique d'optimisation proposée ici est certes plus complexe qu'une mise à l'échelle mais elle permet un contrôle local de l'erreur et une correction adaptée pour chaque sommet : cette solution tente d'assurer une cohérence géométrique à l'échelle de l'échantillonnage ($\forall x_i \in X, \delta(c_i) \longrightarrow 0$) alors que l'approche de référence s'accommode d'une équivalence globale ($Vol(M') \longrightarrow Vol(M)$).

La mise en évidence des résultats est délicate puisqu'il s'agit d'un ajustement de chaque sommet et les valeurs manipulées sont relativement petites ; par exemple, pour un objet de taille $\mathcal{O}(1)$ admettant des arêtes de longueur $\mathcal{O}(10^{-2})$, l'erreur volumique induite par le remaillage est de l'ordre de 10^{-4} et une fois la correction appliquée, l'erreur résiduelle est inférieure à 10^{-6}. De plus, la pertinence de la correction ne réside pas uniquement dans des données chiffrées relatives au volume inscrit, il s'agit de la position des sommets et donc de l'erreur géométrique commise.

Cette technique d'optimisation de maillage est avant tout destinée aux applications itératives telles que le suivi de déformation de surfaces : de nombreux remaillages se succèdent et l'accumulation d'erreur géométrique peut s'avérer désastreuse. Pour donner un aperçu des résultats, il est possible de s'appuyer sur le test synthétique d'Enright [3] ; il implique une large déformation de l'objet et présente également l'avantage d'être périodique : l'objet final peut directement être comparé à l'objet initial.

La FIGURE 4.15 met en évidence l'erreur géométrique après une période et la FIGURE 4.16 illustre la difficulté principale (remaillage en présence de très fortes courbures).

3. Description détaillée dans le chapitre suivant.

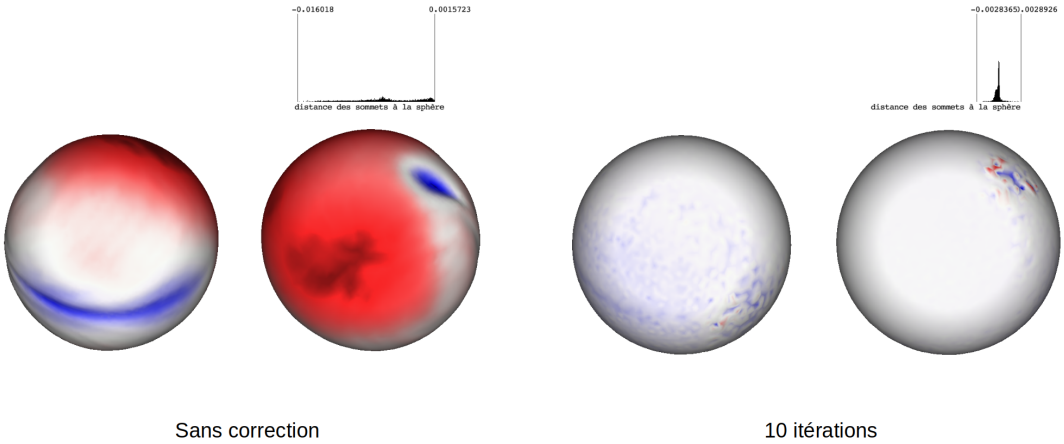


FIGURE 4.15 – Sphère ayant subit une période du test d'Enright (300 itérations). À gauche, le résultat sans apporter de correction au remaillage et à droite, avec 10 itérations de l'algorithme présenté ici. Chaque résultat apporte une vue arrière et une vue avant de la sphère ; la coloration et l'histogramme présente la distance des sommets à la sphère initiale.

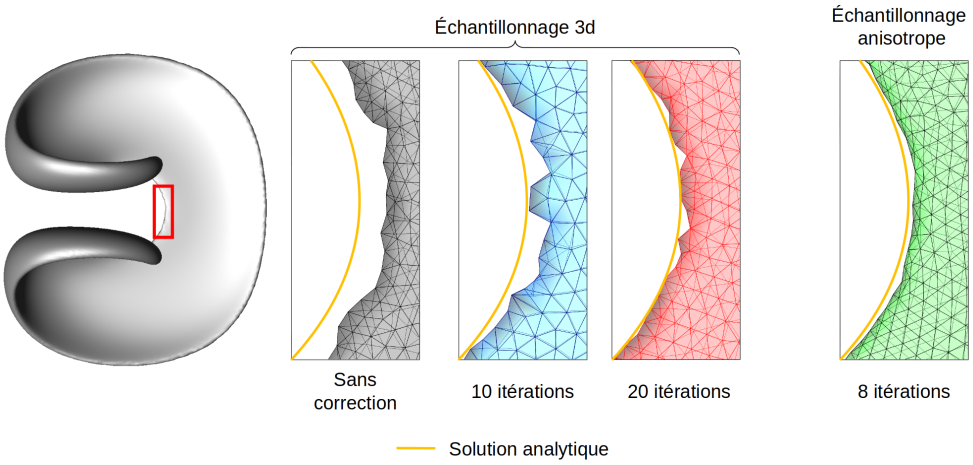


FIGURE 4.16 – Au plus fort de la déformation imposée par le test d'Enright, l'objet (à gauche) présente une partie très mince et des régions admettant une très forte courbure ; comme l'illustrent les encadrés, le remaillage de ces régions est délicat (à gauche) et le résultat est nettement amélioré avec l'optimisation proposée ici (l'augmentation du nombre d'itérations permet de converger vers une solution satisfaisante). À droite, une solution d'échantillonnage adaptée à la géométrie limite le lissage et les changements de combinatoire, réduisant de fait l'effort de correction (nombre d'itérations nécessaires à l'obtention d'un résultat satisfaisant).

Avantages et limites de l'approximation :
La méthode d'approximation offre de bons résultats, en particulier, elle gère de manière totalement implicite les cellules comportant plusieurs composantes connexes (FIGURE 4.17). Cette remarque est valable tant que le nombre de composantes connexes ne varie pas d'un domaine restrictif à l'autre ; dans le cas contraire, les triangulations générées pour la cellule courante et ses voisines sont décorrélées : les points intermédiaires employés ne sont plus communs aux deux parties de la mesure FIGURE 4.18. Ce défaut reste assez marginal et l'erreur commise est très faible, ce qui impacte que peu le résultat de l'optimisation.

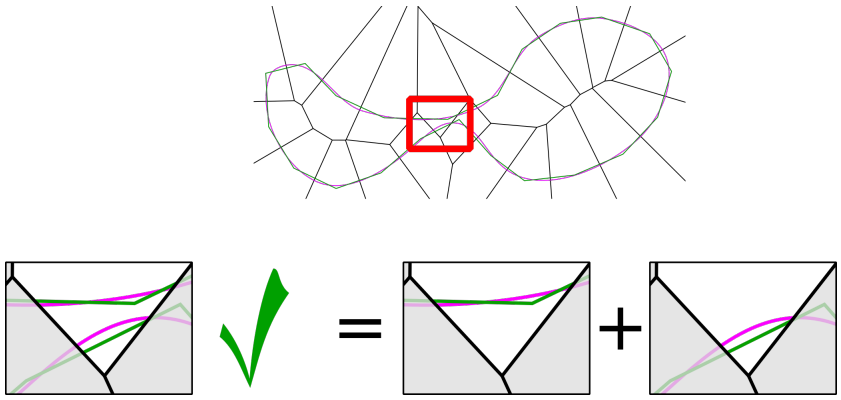


FIGURE 4.17 – Exemple de configuration à composante connexes multiples (reprise de l'exemple 2D exposé en introduction) ; la méthode triangule avec succès la région sans avoir recours à une quelconque identification de paires de composantes connexes. Une différence avec la mesure exacte est possible si les points intermédiaires utilisés par chaque couple de composantes connexes diffère (voir FIGURE 4.18).

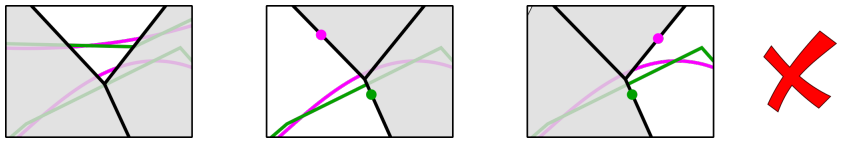


FIGURE 4.18 – Un léger décalage de la décomposition par rapport au scénario précédent (FIGURE 4.17) entraîne cette fois une erreur dans la mesure (à gauche, le nombre de composantes connexes diffèrent). Par ailleurs, les cellules voisines souffrent également d'une erreur d'approximation puisque les voisinages pris en compte pour chacun des deux domaines diffèrent, ce qui implique l'emploi de points intermédiaires différents (points violets et verts sur les figures du milieu et de droite), conduisant de fait à une mesure erronée.

Chapitre 5

Suivi de déformations

Sommaire

5.A Application directe 143
5.A.1 Ajustement du nombre de sommets - seuillage 143
5.A.2 Optimisation barycentrique 145
5.A.3 Définition de M_{t+1} 145
5.A.4 Premiers résultats 145
5.B Vers une densité d'échantillonnage constante 154
5.B.1 Dans le temps 154
5.B.2 Dans l'espace 156
5.B.3 Résultats 158
5.C Préservation des régions à forte courbure 161
5.C.1 Adaptation du nombre d'échantillons 161
5.C.2 Définition de la nouvelle approximation 163
5.C.3 Résultats 163
5.D Gestion des événements topologiques 171
5.D.1 Circonscription de l'évènement 172
5.D.2 Modification du domaine surfacique 174
5.D.3 Premiers résultats 176
5.D.4 Perspectives 176
5.E Bilan et Perspectives 179

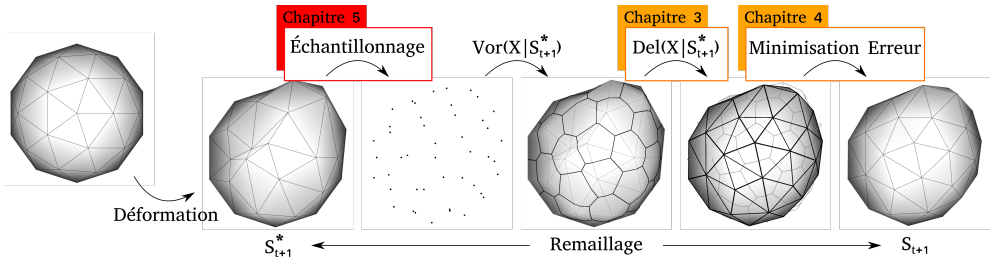


FIGURE 5.1 – Ce chapitre se concentre sur la phase d'échantillonnage (encadré rouge).

Le suivi de surfaces déformables consiste à faire évoluer un domaine surfacique dans l'espace et dans le temps par pas de temps successifs.

À chaque pas de temps de la simulation, on suppose avoir une bonne approximation (M_t) de la surface réelle (S), en particulier M_0. Le maillage M_t est déformé par advection de ses sommets (*advection lagrangienne*) ; le résultat, M^*_{t+1}, constitue la meilleure approximation connue de S_{t+1} mais le champs de déformation n'est pas uniforme et les éléments finis formant M_t ont tous été potentiellement contractés ou dilatés [1]. La qualité de la représentation est remise en question ; il convient d'adapter le maillage à la nouvelle géométrie de la surface : remailler pour définir M_{t+1}.

Comme le résument l'ALGORITHME 10 et la FIGURE 5.1, le processus de remaillage s'appuie sur un échantillonnage de la surface déformée ; une triangulation est alors déduite du diagramme de Voronoï restreint et la position des sommets de la nouvelle modélisation est finalement, optimisée afin de réduire l'erreur commise lors du changement de représentation. Les deux derniers points sont respectivement détaillés dans les chapitres précédents (CHAPITRES 3 et 4) ; ici, il est principalement question de la définition de l'ensemble d'échantillons, à savoir, la discussion du nombre de générateurs employés et l'optimisation de leur répartition sur le domaine restrictif.

Cette application directe offre des premiers résultats satisfaisants (SECTION 5.A.4) que nous cherchons par la suite à améliorer ; nous nous interrogeons à propos de la variation de la densité d'échantillonnage au cours de la simulation (SECTION 5.B) et, par la suite, au sujet du problème de lissage des régions présentant une forte courbure (SECTION 5.C).

Les diagrammes de Voronoï aident également à la détection et la gestion des événements topologiques (fusion, détachement, SECTION 5.D).

1. Nous nous limitons pour l'instant à de simples déformations homéomorphes ; la gestion des évènements topologiques est discutée dans la suite (SECTION 5.D).

Algorithme 10 : Évolution du maillage pendant un pas de temps

Entrées : M_t, approximation de la surface au temps t
Entrées : $\mathbf{U}$, δt champs de vitesse et longueur du pas de temps courant
Sorties : M_{t+1}, approximation de la surface au temps $t+1$

1 $M^*_{t+1} \leftarrow$ advection(M_t, $\mathbf{U}$, δt)
2 $X \leftarrow$ optimisation de l'échantillonnage (M^*_{t+1})
3 $M_{t+1} \leftarrow$ triangulation (X, M^*_{t+1})
4 $M_{t+1} \leftarrow$ minimisation des variations locales de volume (M_{t+1}, M^*_{t+1})

5.A Application directe

Comme annoncé, l'échantillonnage est ré-évalué à chaque itération de la déformation ; ceci au travers de deux opérations : l'ajustement du nombre d'éléments (SECTION 5.A.1) et l'optimisation de leur distribution sur le domaine (SECTION 5.A.2). Les résultats obtenus avec cette solution sont raisonnables mais suggèrent plusieurs évolutions (SECTION 5.A.4).

5.A.1 Ajustement du nombre de sommets - seuillage

La déformation affecte la géométrie de la surface approchée, elle peut être étirée ou contractée et nous cherchons à maintenir la dimension des éléments finis, autrement dit le nombre de sommets de la représentation. Pour cela, les sommets de la surface déformée forment un ensemble d'échantillons "candidats" qui est alors possiblement tronqué (certaines candidatures sont rejetées) et/ou complété (insertion de nouveaux échantillons) suivant l'allure de la déformation.

La littérature propose de capturer les variations par seuillage de la dimension d'un élément de base du maillage, notamment la longueur des arêtes [2]. Les seuils sont définis à l'initialisation (intervalle de validité encadrant la valeur moyenne mesurée sur l'objet initial) et les arêtes non conformes aux exigences conduisent à un *évènement géométrique* : l'insertion ou la suppression d'un échantillon. En pratique un échantillon vient se substituer à une arête trop courte et les plus longues sont morcelées (*i.e.* le nouvel échantillon s'ajoute aux deux sommets existants, voir FIGURE 5.2).

Cette approche est efficace : un seul parcours des arêtes est nécessaire pour statuer sur la pertinence des différents candidats et converger vers l'ensemble retenu.

Il convient cependant de prendre quelques précautions, en particulier lorsqu'il s'agit de statuer sur la candidature de plusieurs échantillons voisins. Comme l'illustre la FI-

2. La méthode se transpose facilement à la notion de voisinage au sens de Voronoï, voir une superficie (facettes ou dans notre contexte, à celle des cellules de Voronoï).

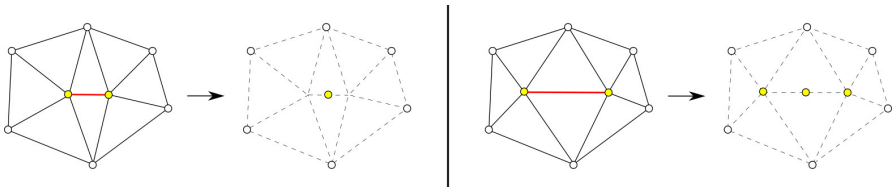


FIGURE 5.2 – Échantillonnage d'une région contenant une arête trop petite (à gauche) et trop grande (à droite). La position du nouveau point peut être envisagée subtilement (*e.g. butterfly subdivision scheme* [DLG90, BB09] ou suivant une métrique locale [GH97, Jia07]) mais l'optimisation de l'échantillonnage (lissage) qui suit cette phase d'ajustement nous invite à choisir la solution de facilité : le barycentre de l'arête.

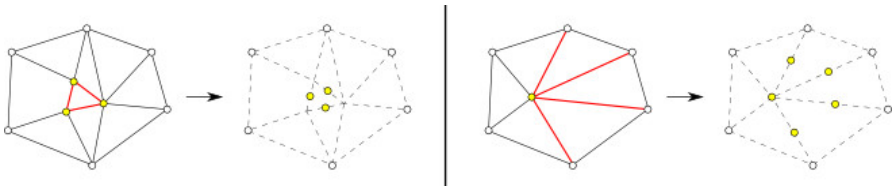


FIGURE 5.3 – Plusieurs décisions s'intéressant à des arêtes connexes conduisent généralement à un nouvel échantillonnage inadapté.

GURE 5.3, plusieurs décisions intéressant les arêtes incidentes d'un même sommet peuvent rendre l'approche inopérante voire instable ; dans ce sens, nous proposons ici d'interdire toute décision afférente à une arête si l'un au moins de ses sommets est déjà concerné par une modification. Cela se traduit en pratique par l'association d'un second [3] marqueur booléen à chaque sommet qui est activé dès qu'une de ses arêtes incidentes est affectée par un évènement géométrique.

Lorsqu'un tel événement est déclenché, nous devons définir la position du nouvel échantillon. Plusieurs approches sont possibles, de la plus simple (*i.e.* milieu de l'arête concernée) à des versions plus sophistiquées, généralement fondées sur la géométrie locale (rang du sommet [Jia07], schéma de subdivision [BB09]...). Nous retenons ici la première puisque cette phase d'ajustement est suivi d'un lissage visant à optimiser la répartition de cet ensemble de points sur le domaine surfacique.

3. Le premier témoigne de sa participation dans la génération de la prochaine approximation ($\in X$).

5.A.2 Optimisation barycentrique

L'ensemble d'échantillons (X) donne, dans le cas général, l'ensemble de sommets de la future approximation (M_{t+1}). La régularité géométrique des facettes de ce maillage est largement liée au degré de répartition des échantillons sur le domaine. Aussi, nous proposons de l'améliorer en faisant tendre $\mathrm{Vor}_{X|M^*_{t+1}}$ vers une configuration barycentrique.

Prédisposition :
La répartition des échantillons est d'ores et déjà presque optimale : elle résulte d'une petite déformation du résultat d'une précédente optimisation barycentrique (itération précédente de la déformation) et l'ajustement du nombre d'échantillons a été diligenté avec soin.

L'emploi de l'algorithme de Newton n'est donc pas justifié en regard de l'initialisation et se révélerait coûteux : plusieurs itérations sont nécessaires pour obtenir une bonne estimation du hessien de la fonction, autrement dit, pour profiter pleinement de l'accélération quadratique. Aussi, seule(s) une ou deux itération(s) de l'algorithme de Lloyd suffisent à atteindre un degré de répartition satisfaisant ; un nombre d'itérations supérieur peut finalement s'avérer préjudiciable en augmentant l'erreur d'approximation.

5.A.3 Définition de M_{t+1}

La partition de la surface déformée suivant l'échantillonnage que nous venons d'établir ($\mathrm{Vor}_{X|M^*_{t+1}}$) est analysée et éventuellement modifiée pour satisfaire les conditions de validité du primal évoquées en SECTION 3.A.2. La variété triangulée duale est extraite ; les sommets de M_{t+1} correspondent dans un premier temps à un point du domaine restrictif (projection).

Leur position est alors ajustée finement à l'aide de l'algorithme de minimisation de l'erreur volumique présenté au chapitre précédent (CHAPITRE 4).

5.A.4 Premiers résultats

La mise en œuvre d'une méthode de simulation d'écoulement est un large problème (CHAPITRE 1) et il serait difficile d'interpréter distinctement les résultats conjoints d'une méthode de remaillage surfacique et d'une solution de simulation d'écoulement. C'est pourquoi ces tests "grandeur nature" sont remis à plus tard (SECTION 5.A.4.c). Dans un premier temps, nous nous appuyons sur des champs de vitesse dont l'effet est connu et maîtrisé (SECTION 5.A.4.a), notamment le test d'Enright déjà évoqué dans le chapitre précédent (SECTION 5.A.4.b).

5.A.4.a Tests analytiques du domaine

La littérature recense plusieurs déformations synthétiques, définies sous forme close par une formule explicite qui retourne le vecteur vitesse pour tout point de l'espace et du temps. Ces champs de vitesse n'impliquent pas de changement topologique de l'objet et présentent une divergence nulle (*i.e.* déformation homéomorphe et isochore).

Le test d'Enright [EFFM02] propose de déformer largement une sphère (FIGURE 5.4). En plus de proposer un étirement suffisant à produire des régions de fortes courbures, cette déformation présente l'avantage d'être périodique : idéalement, les objets initiaux et finaux sont identiques. Leur comparaison directe permet de se faire un avis sur la qualité de la méthode de suivi.

Le test Curlnoise [BHN07, BB09] place la barre plus haut en terme d'amplitude de déformation (FIGURE 5.5) ; à volume constant, la surface de l'objet est multipliée par un facteur supérieur à 10 et certaines régions deviennent extrêmement minces.

A l'opposé, le test de Zalesak [EFFM02] ne déforme pas l'objet (une sphère fendue) mais cette simple rotation s'avère pertinente pour juger des effets négatifs du lissage (FIGURE 5.6).

La librairie *El topo* proposée par Brochu et ses collègues [BB09] est une des méthodes de suivi de surface les plus efficientes développées jusqu'à présent ; les résultats obtenus avec sa base de test open source *Talpa* servent ici de référence.

5.A.4.b Discussion autour du test d'Enright

Les résultats obtenus sont discutés à travers différents points de vue et se concentrent principalement sur la méthode de seuillage et de lissage.

Seuillage :
L'efficacité annoncée du système d'ajustement du nombre de sommets fondé sur des seuils peut être pondérée : la réponse est brusque, discrète face à un phénomène continu [4]. En effet, plusieurs itérations se déroulent avant d'atteindre les valeurs critiques : suivant la configuration mise en œuvre pour produire la FIGURE 5.7, la première insertion a lieu au $37^{\text{ème}}$ pas de temps ; sachant qu'à densité constante, elle devrait se produire dès le $8^{\text{ème}}$ pas de temps. Au pas de temps 37, près de 140 d'échantillons [5] auraient dû être ajoutés pour atteindre une densité d'échantillonnage semblable à celle du modèle initial. En d'autres termes, la densité d'échantillonnage varie au grès des pas de temps de la simulation (pointillés bleus de la FIGURE 5.7) ; elle dépend des précédentes étapes de la déformation. Certains arguent en faveur de cette méthode, justifiant

4. Le champs de déformation est supposé être continu en espace et en temps.
5. Précisément 142 échantillons en plus des 2562 sommets de l'objet initial.

FIGURE 5.4 – Test d'Enright [EFFM02], de gauche à droite, représentation de l'objet déformé aux pas de temps 0, 50, 100, 150 (apogée de la déformation), 200, 250 et 300 (fin de la période, l'objet est théoriquement identique à M_0).

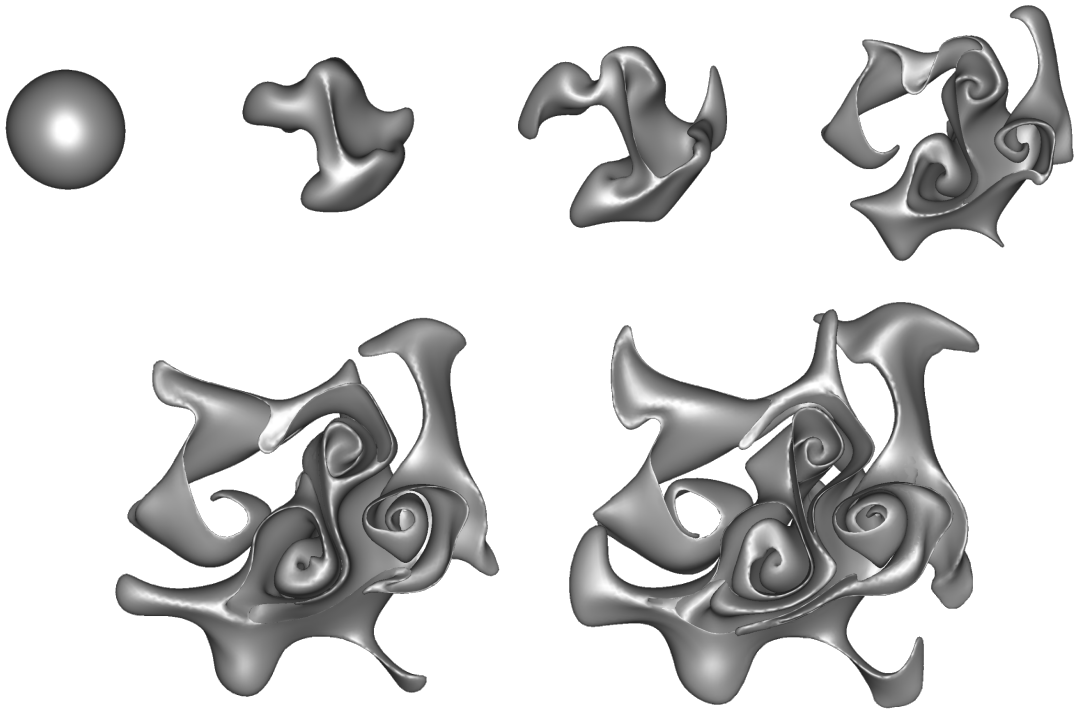


FIGURE 5.5 – Test curnlnoise aux pas de temps 0, 50, 100, 200, 300 et 400.

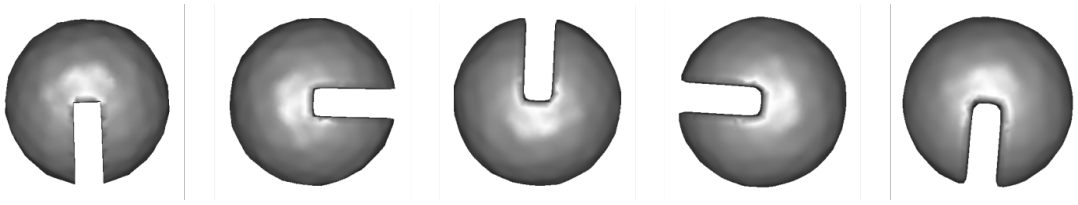


FIGURE 5.6 – Le test de Zalesak consiste en une simple rotation d'une sphere fendue.

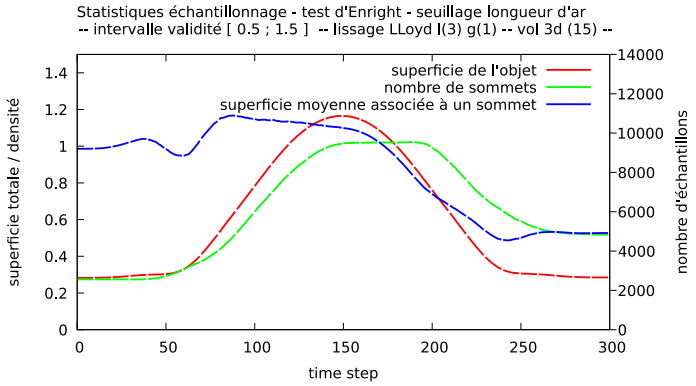


FIGURE 5.7 – Variation de la densité d'échantillonnage observable au cours du test d'Enright avec un seuillage de la longueur des arêtes ; l'intervalle de validité est fixé à [0.5 ; 1.5] avec pour unité la longueur moyenne des arêtes de l'objet de départ.

une forme d'historique [BB09]. Cependant, pour le même objet géométrique [6], la densité d'échantillonnage passe quasiment du simple au double (TABLEAU 5.1).

Pour pallier cet état de fait, nous pourrions être tentés de réduire l'intervalle de validité mais ce dernier doit rester suffisamment large pour éviter des phénomènes d'oscillation entre plusieurs itérations : lorsque l'intervalle retenu est trop restrictif, une décision prise à l'instant t risque d'être remise en cause et contrée par la décision opposée à l'instant $t+1$ faisant ainsi exploser le nombre d'événements géométriques (FIGURE 5.8 et TABLEAU 5.1). Dans la suite, nous proposons d'adopter une solution alternative, maintenant la densité d'échantillonnage aussi proche que possible de celle du départ tout en limitant le nombre de ces événements (SECTION 5.B).

Lissage et génération du dual :
L'optimisation de la répartition des échantillons offerte par l'algorithme de Lloyd et la méthode de génération de la nouvelle approximation (triangulation de Delaunay restreinte) permettent de définir un ensemble de maillages réguliers et harmonieux comme en témoignent les relevés statistiques exposés dans le TABLEAU 5.2 (superficie des facettes et indice de forme [GB97]).

Ces résultats sont prometteurs mais il convient de les pondérer puisque aucune opération n'est contrainte par la géométrie locale ; qu'il s'agisse des décisions d'ajustement, du lissage ou encore des changement de combinatoire. En pratique, cette liberté d'action a un coût non négligeable : certains changements de combinatoire sont mal avisés, en particulier dans les régions présentant une forte courbure (FIGURE 5.9) et de la même

6. La déformation proposée par Enright est périodique : les objets initiaux et finaux sont équivalents.

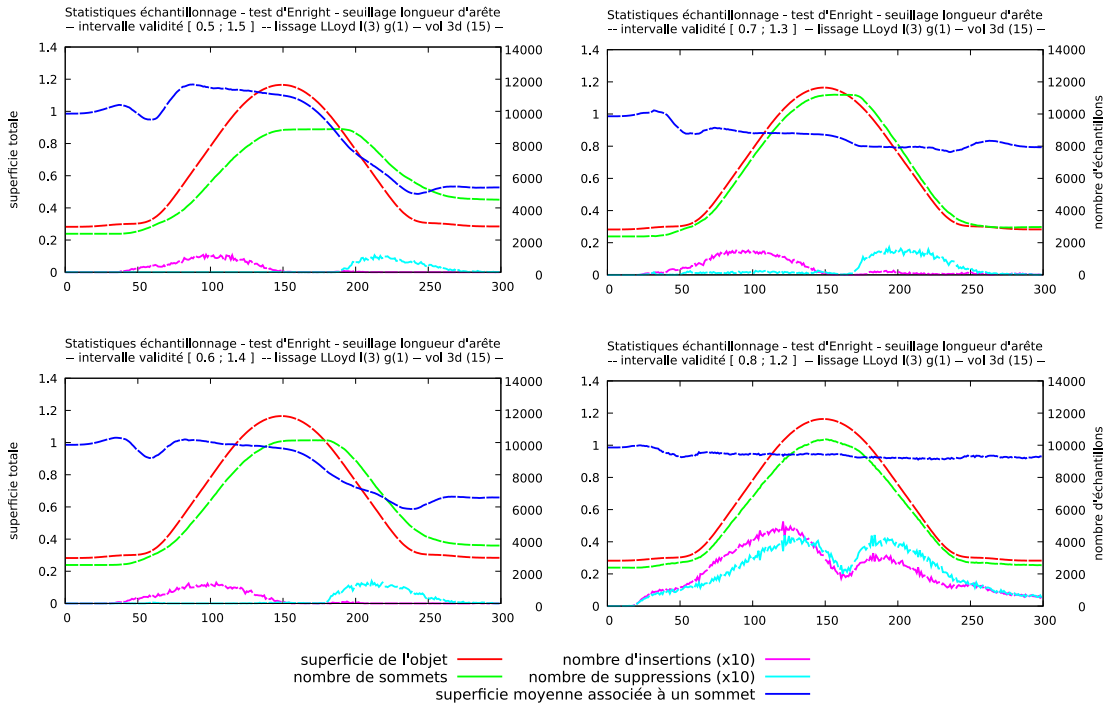


FIGURE 5.8 – Statistiques liées à l'ajustement de l'échantillonnage par la méthode des seuils. Plusieurs intervalles de validité sont mis en concurrence (de [0.5,1.5] en haut à gauche à [0.8,1.2] en bas à droite) ; la densité d'échantillonnage se rapproche de la constante si l'intervalle est réduit mais le nombre d'opérations géométriques augmente considérablement.

		nombre de sommets		densité	temps	événements
		maximum	final	finale	d'exécution	géométriques
Seuillage	[0.5,1.5]	9545	4865	1.90	1.1	11842
	[0.65,1.35]	11555	3415	1.33	1.2	18648
	[0.75,1.25]	11476	2967	1.15	2.0	50906

TABLE 5.1 – Statistiques relatives au changement d'intervalle de validité . La sphère initiale compte 2562 sommets. La densité d'échantillonnage finale est exprimée en fonction du nombre de sommet initiaux ; le temps d'exécution est cumulé sur l'ensemble de la déformation (temps en seconde passé à ajuster l'échantillonnage) et la dernière colonne révèle le nombre total d'événements géométriques déclenchés au cours de la simulation.

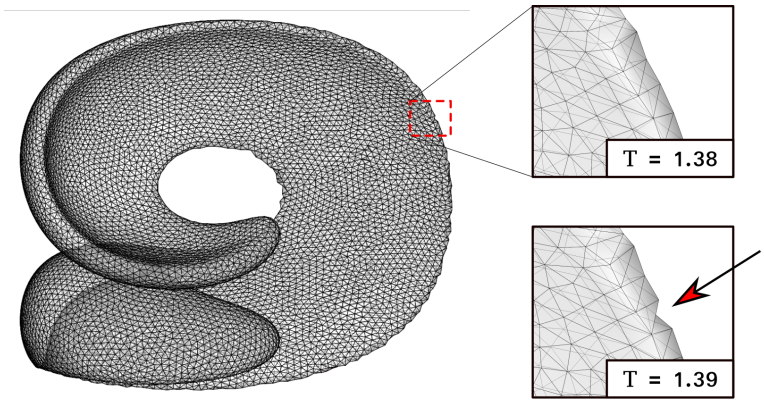


FIGURE 5.9 – La nouvelle combinatoire est définie de manière automatique en fonction des voisinages mis en évidence par le diagramme de Voronoï restreint. Cette solution peut engendrer une grande erreur géométrique notamment dans les régions présentant une forte courbure.

manière, le lissage serait plus dévastateur sans le système de minimisation de l'erreur volumique.

Ajustement Volumique :
En effet, malgré les imprécisions géométriques révélées précédemment, la variation de volume est plutôt bien maîtrisée ; par exemple, sur une période du test d'Enright, la variation de volume globale est inférieure à 0.2% (TABLEAU 5.3). Ce résultat est comparable à celui obtenu avec la méthode de référence en dépit de la liberté accordée au processus de remaillage ; pour rappel, la méthode de référence n'opère aucun changement dès lors qu'il implique une variation de volume trop importante.

Performances :
Le coût de calcul de la méthode est raisonnable en l'état (implémentation peu optimisée) : le surcoût du remaillage par rapport à celui de la méthode de référence correspond approximativement au temps d'exécution de l'algorithme de minimisation de l'erreur volumique(TABLEAU 5.3).

Au delà des statistiques :
La FIGURE 5.10 donne un aperçu des maillages obtenus ; leur observation permet de pondérer les résultats statistiques en exposant clairement les erreurs géométriques.

Test seuils lg arête	El topo [0.5 ;1.5]	Voronoï 3D [0.5 ;1.5]	Voronoï 3D [0.5 ;1.5]	Voronoï 3D [0.65 ;1.35]
nombre de sommets initial - max - final	3296 - 12617 - 5325	3296 - 11980 - 6074	3296 - 12149 - 6174	3296 - 14783 - 4355
G (min, avg, max)				
$t = 0.0$	0.55 - 0.88 - 0.99	0.55 - 0.88 - 0.99	0.68 - 0.94 - 0.99	0.68 - 0.94 - 0.99
$t = 0.5$	0.49 - 0.86 - 0.99	0.55 - 0.88 - 0.99	0.54 - 0.88 - 0.99	0.52 - 0.87 - 0.99
$t = 1.0$	0.23 - 0.82 - 0.99	0.52 - 0.86 - 0.99	0.50 - 0.85 - 0.99	0.48 - 0.85 - 0.99
$t = 1.5$	0.21 - 0.83 - 0.99	0.50 - 0.89 - 0.99	0.20 - 0.89 - 0.99	0.54 - 0.89 - 0.99
$t = 2.0$	0.14 - 0.82 - 0.99	0.53 - 0.85 - 0.99	0.40 - 0.85 - 0.99	0.54 - 0.86 - 0.99
$t = 2.5$	0.08 - 0.81 - 0.99	0.60 - 0.86 - 0.99	0.34 - 0.86 - 0.99	0.59 - 0.87 - 0.99
$t = 3.0$	0.11 - 0.88 - 0.99	0.56 - 0.90 - 0.99	0.64 - 0.90 - 0.99	0.63 - 0.90 - 0.99
Θ [min, max] (% $< 30°$)				
$t = 0.0$	$[33.2; 108.9]$ (0%)	$[33.2; 108.9]$ (0%)	$[40.8; 93.4]$ (0%)	$[40.8; 93.4]$ (0%)
$t = 0.5$	$[27.2; 114.8]$ (0.02%)	$[32.6; 109.3]$ (0%)	$[32.4; 109.7]$ (0%)	$[32.6; 112.7]$ (0%)
$t = 1.0$	$[13.4; 149.1]$ (0.75%)	$[30.9; 112.6]$ (0%)	$[30.9; 115.0]$ (0%)	$[31.2; 116.9]$ (0%)
$t = 1.5$	$[11.0; 148.7]$ (0.66%)	$[26.1; 114.8]$ (0.01%)	$[7.3; 128.4]$ (0.01%)	$[31.4; 110.1]$ (0%)
$t = 2.0$	$[8.6; 160.7]$ (0.52%)	$[27.2; 109.1]$ (0.01%)	$[26.3; 126.9]$ (0.01%)	$[31.7; 110.2]$ (0%)
$t = 2.5$	$[4.5; 167.2]$ (1.02%)	$[30.5; 103.1]$ (0%)	$[19.9; 133.8]$ (0.01%)	$[31.8; 103.8]$ (0%)
$t = 3.0$	$[5.3; 160.7]$ (0.26%)	$[31.7; 106.7]$ (0%)	$[34.7; 97.9]$ (0%)	$[33.7; 99.0]$ (0%)
$\mathcal{A}e^5$ (min, avg, max)				
$t = 0.0$	1.85 - 4.28 - 7.02	1.85 - 4.28 - 7.02	3.54 - 4.28 - 5.49	3.54 - 4.28 - 5.49
$t = 0.5$	1.48 - 4.20 - 8.62	1.86 - 4.26 - 7.48	1.81 - 4.27 - 7.35	2.21 - 3.91 - 6.05
$t = 1.0$	1.22 - 4.66 - 8.13	3.22 - 5.02 - 7.86	3.05 - 4.99 - 7.66	2.55 - 4.03 - 6.33
$t = 1.5$	1.26 - 4.60 - 8.72	1.79 - 4.86 - 7.08	0.24 - 4.82 - 7.61	1.97 - 3.95 - 5.74
$t = 2.0$	0.77 - 3.21 - 7.76	1.31 - 3.31 - 6.52	1.31 - 3.25 - 7.28	2.15 - 3.23 - 5.40
$t = 2.5$	0.48 - 2.47 - 6.52	1.31 - 2.15 - 4.48	0.60 - 2.16 - 4.45	2.13 - 3.10 - 4.88
$t = 3.0$	0.30 - 2.65 - 6.33	1.27 - 2.34 - 4.57	1.27 - 2.30 - 4.53	2.10 - 3.24 - 5.27

TABLE 5.2 – Comparatif des statistiques (voir [FB99] pour le calcul des indices de qualité) relatives aux maillages produits par notre méthode et celle proposée par Brochu *et al.*

Les maillages de départ sont identiques pour les deux premières colonnes (génération de la sphère via l'algorithme des marching cubes) ; dans les deux suivantes, le maillage initial est obtenu par subdivision d'un icosaèdre.

L'absence de contraintes lors des opérations d'ajustement, de lissage et de triangulation nous permet d'obtenir des maillages équilibrés ; ils le sont d'autant plus que la densité d'échantillonnage s'approche de la constante (quatrième colonne).

Test nombre d'itérations	El topo	Voronoï 3D 3d - 5 iter	Voronoï 3D 3d - 15 iter	Voronoï 3D 3d - 25 iter
volume initial (e2)	1.411144	1.410662	1.410662	1.410662
volume final (e2)	1.408618	1.408351	1.409164	1.409246
différence (e5)	2.526	2.312	1.498	1.416
erreur relative	0.179%	0.163%	0.106%	0.100%
coût relatif	- (1.0)	63% (3.0)	75% (4.3)	81% (5.6)

TABLE 5.3 – Variation de volume sur une période d'Enright (300 itérations) ; la méthode de minimisation de l'erreur parvient à de bons résultats malgré une erreur géométrique plus importante que la méthode de référence (FIGURES 5.9, 5.10). Le coût relatif indiqué correspond à la part que prend l'opération de correction de l'erreur volumique dans le temps total de remaillage ; la valeur entre parenthèse correspond au temps d'exécution total (la méthode de référence sert de base unitaire).

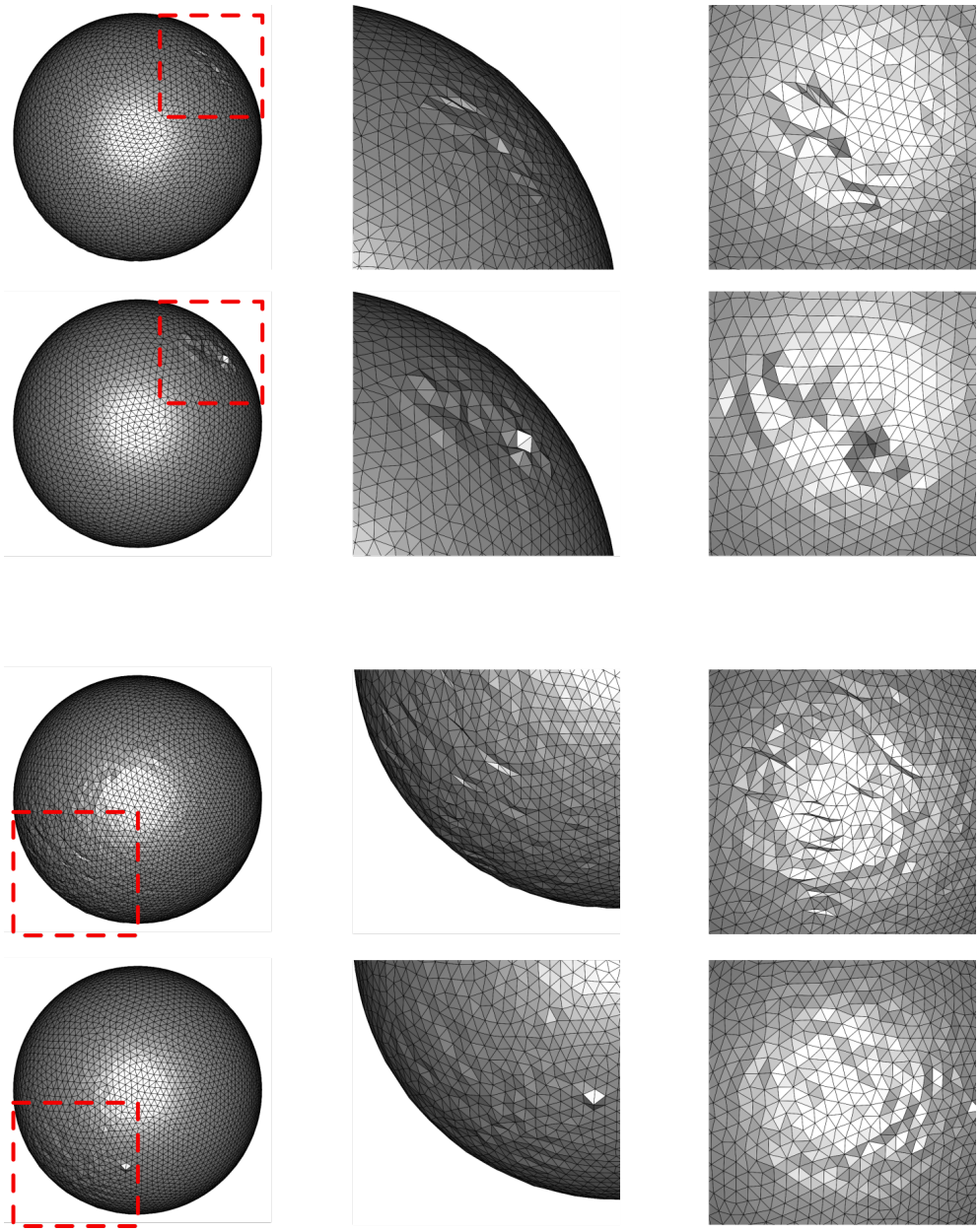


FIGURE 5.10 – Comparaison des maillages finaux ($t = 3.0$) après une période du test d'Enright. Pour chacun des deux hémisphères, la première ligne donne un aperçu du résultat de la librairie El topo et la seconde celui de la méthode décrite ici. Une légère rotation permet d'avoir une vue de face du maillage (troisième colonne).
Notre méthode permet d'obtenir un ensemble de facettes plus harmonieuses que la solution de référence, en revanche, l'erreur géométrique est légèrement plus importante. Ces résultats sont cohérents vis à vis de à la liberté accordée à l'algorithme de remaillage ; les régions surlignées ici correspondent aux zones de forte courbure mise en évidence au plus fort de la déformation.

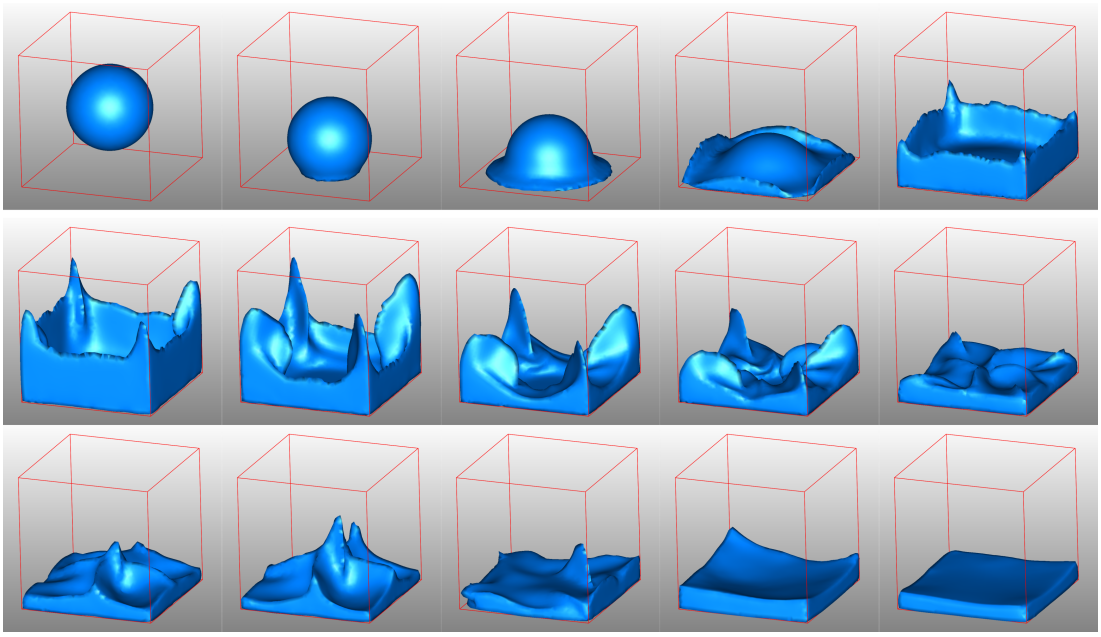


FIGURE 5.11 – Quelques vignettes extraites d'une simulation d'écoulement : chute d'une sphère de liquide dans un réservoir.

5.A.4.c Couplage avec un simulateur eulérien

Une collaboration avec Christopher Batty nous a permis de coupler notre méthode de remaillage avec un système de simulation d'écoulement qu'il développe (*"Voronoï liquid"*, [BB08, BXH10, DHB+16]). La FIGURE 5.11 donne un aperçu du premier exercice : une sphère de liquide chute dans un réservoir cubique. Cette mise en situation est simple : aucun événement topologique ne se produit. Il n'est cependant pas rare d'en rencontrer au cours d'une simulation, en particulier la collision de deux portions d'interface et le détachement de gouttelettes ; ce sujet est traité dans la suite (SECTION 5.D).

Du point de vue de l'exercice de remaillage pour le suivi de l'évolution de l'interface du liquide, les remarques sont les mêmes que celles exposées lors de la précédente discussion autour du test d'Enright.

Plus spécifiquement, cette technique de simulation eulérienne s'appuie sur une partition spatiale selon Voronoï. Les sommets de la représentation surfacique forment une partie de l'ensemble des générateurs employés. Pour faciliter le calcul de la force de pression, ils sont complétés par deux ensembles "miroirs" situés de part et d'autre du domaine surfacique (décalage suivant la normale) ; Un échantillonnage régulier complète le partitionnement de la boite englobante. La décomposition est calculée à chaque

itération de la simulation ; les valeurs physiques sont déduites de la précédente décomposition par interpolation. En réalité, cette méthode de simulation a été développée conjointement à la solution de suivi proposée par Brochu *et al.* (El topo, [BB09]) et sa réussite est fortement liée au peu de changement entre deux approximations successives.

Bien que notre stratégie de remaillage soit plus invasive et implique plus de modifications, ces dernières sont suffisamment maîtrisées puisque nous arrivons à mener à leur terme les différentes simulations sans perturber de manière significative la résolution des équations de mouvement.

L'application directe des algorithmes décrits précédemment fourni des résultats encourageants ; poursuivons avec plusieurs pistes explorées afin d'améliorer la phase d'échantillonnage.

5.B Vers une densité d'échantillonnage constante

La méthode d'ajustement de l'échantillonnage fondée sur des seuils conduit à une variation de la densité d'échantillonnage au cours de la simulation ; pouvons-nous maintenir la densité d'échantillonnage initiale sur l'ensemble des pas de temps ?

En pratique, un sommet de la représentation initiale est associé à une superficie moyenne égale à $\mathcal{A}_v^0 = \frac{\mathcal{A}(M_0)}{\mathrm{Card}(V_0)}$. Aussi, pour toute autre surface, une simple règle de trois nous donne le nombre de sommets nécessaires à la définition d'un modèle présentant une résolution identique. La stratégie la plus simple consiste à ajuster l'échantillonnage de manière globale en considérant le maillage dans son ensemble (SECTION 5.B.1) mais cette solution ne nous permet que de maintenir la densité dans le temps. C'est pourquoi nous proposons une alternative offrant un compromis entre notre objectif et l'aspect local de la déformation (SECTION 5.B.2).

5.B.1 Dans le temps

Après avoir déformé l'objet surfacique, il est possible de mesurer sa superficie et d'en déduire le nombre d'échantillons nécessaires (règle de trois) ; l'ajustement se résume alors à contracter les plus petites arêtes (resp. morcelant les plus grandes) lorsque le nombre réel de sommets est plus grand (resp. petit) que celui attendu.

Cependant, cette solution d'échantillonnage s'appuie principalement sur le lissage : le nombre d'évènements géométriques est limité à son strict minimum (FIGURE 5.12 et TABLEAU 5.4) et l'optimisation de la distribution des échantillons sur le domaine compense les variations locales en faisant progressivement migrer les échantillons des régions les plus denses vers celles moins peuplées. En pratique, le nombre d'itérations de repositionnement est limité et il est possible d'observer une légère disparité de la densité entre différentes régions du maillage (FIGURE 5.13).

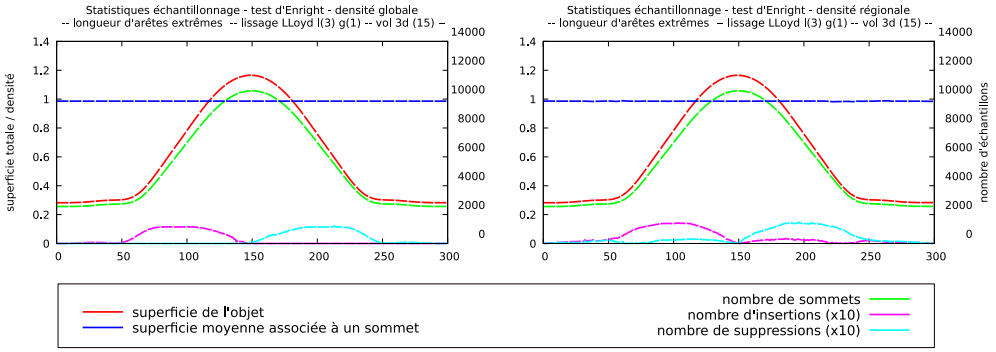


FIGURE 5.12 – Statistiques d'échantillonnage sur une période du test d'Enright. À gauche, le nombre d'échantillons est décidé suivant l'intégralité du maillage ; à droite, l'allure de la déformation est prise en compte : le nombre d'événements géométriques est légèrement supérieur à l'approche globale.

De la même manière, cette solution ne tient pas compte des distorsions locales : certaines régions de la surface peuvent subir un étirement pendant que d'autres portions se contractent. Idéalement, la phase d'ajustement doit refléter ces différences.

Une mesure préalable à l'advection permet, après intégration du mouvement, de distinguer une ou plusieurs région(s) connexe(s) soumise(s) à une déformation similaire, de même signe. Ce signe correspond à l'effet du champ de vitesse sur le domaine surfacique, c'est à dire une augmentation ou une diminution de la superficie de la région considérée (FIGURE 5.14). Ces régions peuvent théoriquement être mises en relation avec un puits (contraction) ou une source (expansion) du champ vectoriel[7] et l'ajustement de leur échantillonnage respectif peut être considéré et traité indépendamment des autres.
Pour chacune d'elles, le nombre idéal de sommets est simplement déterminé en fonction de la superficie couverte ; si la différence est en accord avec la déformation régionale, l'ajustement est réalisé. Dans le cas contraire, la modification est reportée : si le champs de vitesse est maintenu, il compensera par lui même la différence d'échantillonnage.

En pratique, le nombre d'évènements géométriques est évidement supérieur à l'approche globale mais la densité reste constante à l'échelle du maillage et s'avère plus harmonieuse entre les différentes régions (FIGURES 5.12 et 5.13).

Du point de vue algorithmique, le coût de cette solution d'ajustement est supérieur à celui de la méthode des seuils puisqu'elle implique une mesure préalable à l'advection, une mémorisation de la superficie attachée à chaque sommet, une nouvelle mesure et finalement, un tri pour définir le lieu des événements géométriques. Au delà, même

7. Le champ vectoriel considéré ici est restreint au domaine surfacique.

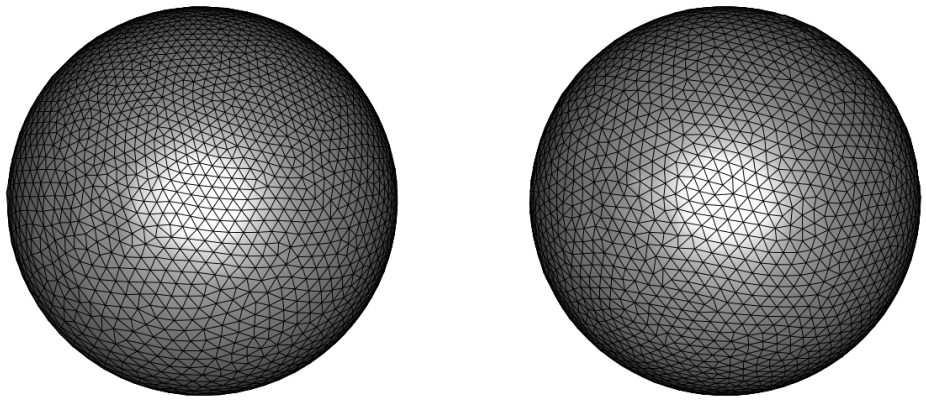


FIGURE 5.13 – À gauche, la densité d'échantillonnage est estimée sur l'ensemble du maillage et nous pouvons observer une différence de densité entre le nord et le sud de la sphère (aire des facettes) après une période du test d'Enright ; cette disparité est amoindrie en considérant l'allure de la déformation (à droite).

en considérant l'allure de la déformation en repérant les régions en expansion ou se contractant, il peut exister plusieurs sources ou puits dans une même région et seule une approche locale permettrait de les apprécier.

5.B.2 Dans l'espace

Nous proposons une alternative permettant de tirer parti des avantages de chaque méthode (SECTIONS 5.A.1 et 5.B.1) en s'appuyant sur la notion de densité sans s'éloigner de l'échelle de l'échantillon.

Chaque sommet de la surface déformée forme un candidat et se voit associé à une portion de la surface ; la méthode de partitionnement est discutée dans un prochain paragraphe. La comparaison de cette superficie à la donnée initiale ($\mathcal{A}_v^0$) donne la différence locale d'échantillonnage associée à l'échantillon courant. Cette différence est alors propagée de proche en proche sur les échantillons voisins jusqu'à atteindre une valeur seuil et le déclenchement d'un évènement géométrique (ALGORITHME 11).
Le parcours est initialisé à partir d'un sommet non encore traité et s'exécute jusqu'à avoir épuisé les possibilités de propagation ou avoir couvert m sommets dont les régions d'influence s'étalent sur une superficie $\mathcal{A}$ correspondant à celle de $m+1$ ou $m-1$ sommets initiaux, autrement dit jusqu'à avoir $abs\left(m - {}^{\mathcal{A}}/_{\mathcal{A}_v^0}\right) \geq 1$.
Le cas échéant, il nous incombe de définir le lieu de l'événement géométrique. Nous proposons d'opérer la contraction ou le morcellement de l'arête présentant la longueur la plus extrême de la région ; d'autant que cette information peut-être recueillie au cours

Algorithme 11 : Adaptation du nombre d'échantillons fondée sur un ratio global et une mesure locale

Entrées : le maillage après advection (M^*_{t+1}),
densité originale ($\mathcal{A}^0_v$)
seuil de déclenchement (*seuil*)
Sorties : ensemble d'échantillons retenus (X)

```
1
2   Sommets_region : liste des sommets de la région (vide)
3   Voisinage : file d'indices de sommets à traiter (vide)
4   Visite : tableau de booléen initialisé à faux (taille Card(V*_{t+1}))
5   Candidat : tableau de booléen initialisé à vrai (taille Card(V*_{t+1}))
6
7 pour chaque v ∈ V*_{t+1} faire
8     si v non visité alors
9         vider file(Sommets_region)
10        ajouter en queue(Voisinage, v)
11        aire_region ← 0
12        nb_v_theorique ← 0
13        visiter(v)
14        tant que Voisinage ≠ ∅ faire
15            cur_v ← retirer premier de la file(Voisinage)
16            ajouter en queue(Sommets_region, cur_v)
17            aire_region ← aire_region + aire_sommet[cur_v]
18            nb_v_theorique ← aire_region/A^0_v
              // Propagation
19            pour chaque n ∈ voisins(cur_v) faire
20                si n non visité alors
21                    ajouter en queue(Voisinage, n)
22                    visiter(n)
              // condition d'arrêt
23            si abs(nb_v_theorique − Card(Sommets_region)) > seuil alors
24                ajuster échantillonnage(Sommets_region)
                  // sortie de la boucle...
25                tant que Voisins ≠ ∅ faire
26                    cur_v ← retirer premier de la file(Voisins)
27                    Visite[v] ← false
28 pour chaque v ∈ sommets(V*_{t+1}) faire
29     si Candidat[v] alors
30         ajouter(X, v)
```

de la propagation.

Partitionnement :
La méthode de décomposition employée peut influencer les résultats. Nous avons d'un côté, le découpage barycentrique, rapide, associant à chaque sommet une unique région connexe semblable à un disque topologique mais qui fournit un résultat dépendant de la triangulation existante, et de l'autre, le découpage selon Voronoï. Il ne dépend pas de la triangulation et offre des mesures plus pertinentes [8]. Il faut néanmoins rester prudent, nous n'avons pas de garanties quant à la nature de la cellule restreinte : elle peut être formée de plusieurs composantes connexes [9] ou avoir une topologie différente d'un simple disque.

Référence alternative :
Pour contourner cette difficulté, nous proposons dans la suite d'employer un autre système de mesure fondé sur la longueur des arêtes incidentes ; plus précisément, la distance moyenne du voisinage au sens de Voronoï. Il s'agit alors de maintenir une distance moyenne entre les échantillons. Cette solution est dédouanée des contraintes géométriques et surfaciques et est applicable quelque soit la nature de la cellule restreinte ; du point de vue algorithmique, seule la méthode de mesure change.

5.B.3 Résultats

Il est clair que la méthode d'ajustement du nombre d'échantillons fondé sur la densité globale permet de maintenir une résolution constante tout au long de la déformation, tout en limitant le nombre d'événements géométriques (FIGURE 5.12). Cette méthode présente néanmoins un coût algorithmique supérieur à la méthode des seuils (comportement linéaire en terme de nombre d'arêtes), en particulier à cause du tri préalable au choix des lieux des événements géométriques.

La méthode fondée sur la propagation de la différence de densité locale permet d'observer une densité quasi constante sans accroître le nombre d'événements géométriques (FIGURE 5.15) ; le coût algorithmique reste maîtrisé (quasi linéaire si les régions considérées sont petites face à l'ensemble du maillage). Le TABLEAU 5.4 dresse un comparatif des différentes méthodes d'ajustement de l'échantillonnage ; ces données statistiques confirment les différentes assertions faites jusqu'ici.

Capture de la déformation locale :
L'expérience montre que cet algorithme identifie assez bien les déformations locales

8. la justification est semblable à celle exposée par Meyer *et al.* [MDSB03].
9. Un algorithme comme celui proposé en FIGURE 3.26 permet de palier ce type de complication (*i.e.* composante connexe unique).

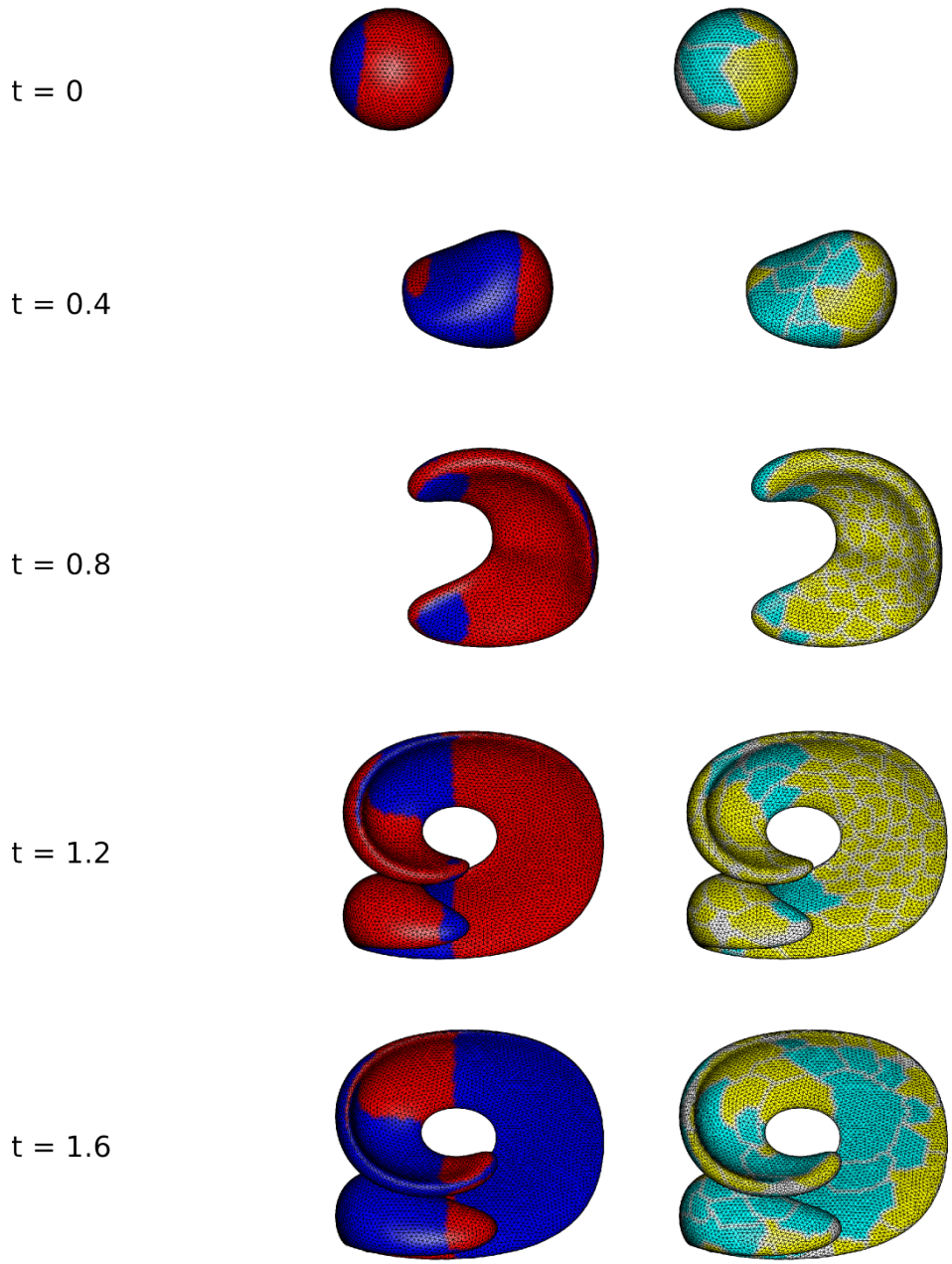


FIGURE 5.14 – Comparaison entre l'évolution de la région d'influence de chaque sommet pendant l'advection (à gauche, rouge = dilatation, bleu = contraction) et les régions menant à l'adaptation locale du nombre d'échantillons (à droite, en bleu les régions sur-échantillonnées et en jaune les régions requérant un échantillon supplémentaire).

FIGURE 5.14. Il serait possible d'orienter la propagation en privilégiant les voisins admettant une déformation similaire et de faire parfaitement corréler l'ensemble de régions avec la déformation mais cette stratégie implique une mesure préalable et une mémorisation qui s'avèrent finalement superflues.

Distance moyenne du voisinage :
La seconde vignette de la FIGURE 5.15 illustre les résultats obtenus en considérant la distance moyenne du voisinage restreint. Cet indice de mesure permet d'obtenir le résultat souhaité : elle s'avère plus précise que le simple seuillage et plus robuste que la solution fondée sur une mesure surfacique. Elle reste en effet bien définie quelque soit la nature topologique de la cellule restreinte, y compris lorsqu'elle est dotée de plusieurs composantes connexes.

		nombre de sommets		densité	temps	événements
		maximum	final	finale	d'exécution	géométriques
Seuillage	[0.5,1.5]	9545	4865	1.90	1.1	11842
	[0.65,1.35]	11555	3415	1.33	1.2	18648
	[0.75,1.25]	11476	2967	1.15	2.0	50906
Densité	globale	10580	2563	1.00	4.7	15964
	régionale	10573	2572	1.01	3.9	24682
Propagation	superficie	9870	2450	0.95	3.2	22733
	distance voisins	10684	2597	1.01	3.1	22403

TABLE 5.4 – Statistiques et performances des différentes solutions d'échantillonnage sur un test d'Enright ; la sphère de départ est modélisée à l'aide de 2562 sommets. la variation de densité est exprimée entre les valeurs initiale et finale. Le temps d'exécution cumulé accordé à la phase d'ajustement du nombre d'échantillons (en secondes). La dernière colonne révèle le nombre total d'événements géométriques déclenchés au cours de la simulation.

5.C Préservation des régions à forte courbure

Nous avons vu dans le CHAPITRE 2 comment utiliser un plongement dans un espace de plus haute dimension pour adapter la géométrie des facettes à celle de la surface approchée et ainsi obtenir une approximation plus fine des régions fortement courbées.

Cette méthode semble être une bonne alternative pour limiter les changements de combinatoire inopportuns mentionnés en FIGURE 5.9 : sans limiter leurs occurrences, ils n'auraient lieux qu'entre échantillons dont les cellules restreintes partagent une normale proche, limitant de fait l'erreur géométrique induite. Cependant, la mise en œuvre d'un système de coordonnées plus large, typiquement $\Phi(\mathbf{x}) = \{x, y, z, sN_x, sN_y, sN_z\}^T$, nécessite de prendre quelques précautions vis à vis de l'ajustement du nombre d'échantillons afin d'assurer un échantillonnage consistant à la fois dans l'univers de plongement et dans l'espace réel (SECTION 5.C.1). Le reste de la procédure est semblable à ce qui a déjà été présenté (SECTION 5.C.2) et conduit à la définition d'une série de maillages anisotropes de bonne facture sur un large éventail de *scenarii* (SECTION 5.C.3).

5.C.1 Adaptation du nombre d'échantillons

Comme le montrent les différents résultats exposés au CHAPITRE 2, les maillages obtenus avec un système de coordonnées étendu à des univers de plus haute dimension présentent des facettes de tailles et de formes très variées. Plus précisément, le choix de l'emphase accordée à la normale s'avère délicat ; lorsque le résultat attendu est connu, il est possible de l'adapter en conséquence mais ce n'est pas le cas lors d'une simulation d'écoulement où la déformation peut conduire à des variations de courbure extrêmes. L'adaptation automatique du facteur d'anisotropie reste un problème ouvert non résolu

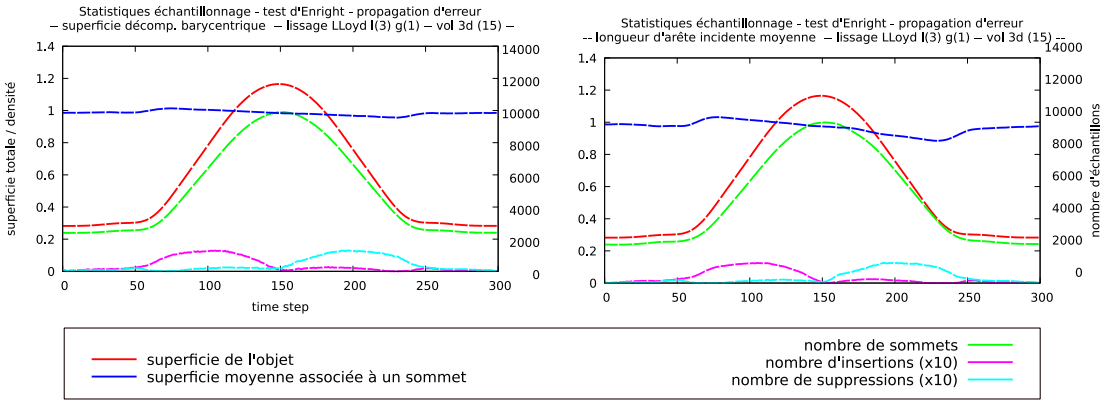


FIGURE 5.15 – Résultats statistiques des méthodes alternatives d'adaptation du nombre d'échantillons en fonction de la surface déployée.

à ce jour ; sa valeur est ici majorée [10] par la longueur moyenne des arêtes du maillage initial.

Malgré cette restriction, nous ne sommes pas en mesure de garantir qu'une fois de retour dans l'espace réel, certaines arêtes ne soient pas encore trop petites ou trop grandes par rapport à nos attentes. C'est pourquoi nous proposons de définir des seuils de validité dans l'univers de plongement et dans l'espace réel, ce qui ne pose *a priori* pas de difficultés, tant que les intervalles de validité admettent un recouvrement suffisant [11].

Seuillage de la longueur des arêtes :
La validité d'une arête est décidée suivant deux mesures ; une décision conflictuelle est toujours résolue en faveur des contraintes réelles. Dit autrement, les bornes 3d sont prédominantes et sont donc appliquées en premier ; si elles sont respectées, un second seuillage est réalisé suivant la mesure établie dans l'espace de plongement (critère récessif).

Cette hiérarchisation tend à contrebalancer les effets d'une courbure moyenne trop prononcée (conduisant à la génération de très petites facettes, *e.g.* extrémités des doigts sur le modèle de la main FIGURE 2.47) ou trop faible (larges facettes formant la paume de la main dans la même figure). Cependant, le seuillage de la longueur des arêtes n'est pas suffisant, en particulier lorsque les rayons de courbure principaux diffèrent largement (*i.e.* $\kappa_1 >> \kappa_2$).

Incidence du plongement et hauteur minimale des triangles duaux :
En effet, l'optimisation barycentrique tend généralement vers une solution stable en "nid d'abeilles" (CHAPITRE 2) et l'anisotropie affecte la géométrie des cellules restreintes qui s'allongent de part et d'autre de l'axe de la seconde courbure principale (la première est perpendiculaire et son rayon de courbure est bien plus faible). Après projection dans l'espace réel et du point de vue dual, cela se traduit par un étirement des facettes triangulaires selon la direction de κ_2.

Lorsqu'un triangle présente cette morphologie (triangle quasi isocèle de faible hauteur), l'arête la plus susceptible de déclencher un événement géométrique est sa base (FIGURE 5.16, première ligne). Son morcellement n'est pas judicieux : le nombre d'échantillons augmente et cette décision risque d'être contestée lors du prochain remaillage. Suivant cette idée, il paraît pertinent de vérifier au préalable la hauteur des triangles incidents à chaque arête et, lorsque deux triangles adjacents présentent une faible hauteur associée à l'arête commune, la candidature des sommets opposés n'est pas retenue en faveur du milieu de l'arête en question (seconde ligne de la même figure).

10. Les essais menés avec une valeur supérieure ne se sont pas montrés concluants.
11. Ce recouvrement est nécessaire pour éviter des décisions contradictoires (effet oscillatoire similaire à celui exposé en SECTION 5.A.1).

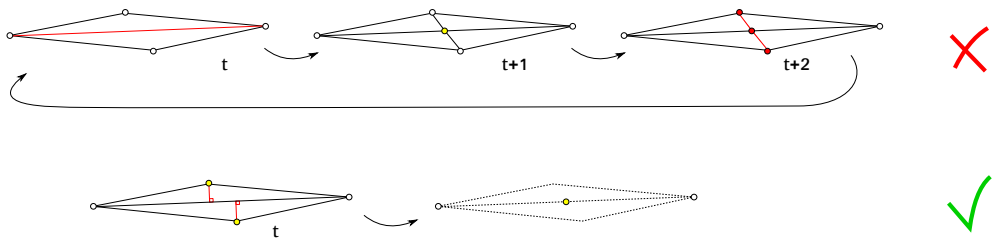


FIGURE 5.16 – Échantillonnage d'une région modélisée par deux triangles adjacents de faible hauteur (seconde ligne) ; la première ligne illustre l'effet oscillatoire provoqué par la stratégie fondée sur la longueur des arêtes uniquement : la grande arête est morcelée, conduisant à une nouvelle triangulation dont les petites arêtes seront remise en cause à l'itération suivante (retour à l'échantillonnage initial).

Harmonisation de la répartition des échantillons :
Après avoir défini l'ensemble d'échantillons, quelques itérations de l'algorithme de Lloyd assurent une meilleure répartition dans l'espace de plongement.

5.C.2 Définition de la nouvelle approximation

Le retour à l'espace réel résulte d'une simple projection ($P : \mathbb{R}^6 \mapsto \mathbb{R}^3$ avec $P(\{x, y, z, sNx, sNy, sNz\}^T) = \{x, y, z\}^T$). L'analyse des configurations des composantes connexes est mise en œuvre pour valider et éventuellement corriger la décomposition primale (SECTION 3.E).
L'algorithme permettant de minimiser les variations locales de volume (CHAPITRE 4) est également mobilisé pour affiner l'approximation.

5.C.3 Résultats

Comme dans le cas statique, la solution de remaillage est pertinente et fournit des variétés triangulées de haute qualité. Les écueils rencontrés par l'approche (SECTION 5.A) sont, *a priori*, largement contournés par la prise en compte de la normale dans le système de coordonnées : les crêtes sont aisément préservées, comme le montrent les résultats obtenus avec les différents tests synthétiques.

5.C.3.a Galerie

Test d'Enright
Le test d'Enright est achevé sans réelles difficultés, les sphères initiale et finale sont très

		$t = 0$	$t = 1.0$	$t = 2.0$	$t = 3.0$	$t = 4.0$	$t = 5.0$
Superficie	- 3d	12.5673	28.6809	56.2474	82.1717	114.618	139.994
	- Nd	25.2419	191.782	523.23	843.685	1336.12	1549.13
Nombre réel	- vorNd	4355	10798	21844	33573	45905	64025
de sommets	- el topo	4358	13900	33469	57000	86620	116850
Nombre théorique	- 3d	4355	9939	19492	28475	39719	48513
de sommets	- Nd	4355	33088	90273	145561	230522	267272
Volume	- vorNd	4.183	4.181	4.178	4.174	4.169	4.164 (-0.45%)
	- el topo	4.183	4.187	4.191	4.196	4.198	4.202 (+0.45%)

TABLE 5.5 – Statistiques relevées lors d'un test Curlnoise - comparaison à la méthode de référence ; le nombre théorique de sommets est calculé par extrapolation à partir du nombre initial d'échantillons et de l'évolution de la superficie.

proches, tant du point de vue géométrique (volume, distance de haussdorff...) que du point de vue modélisation (régularité des facettes).

Aussi, le même test a été reconduit sur divers objets de départ : un cube, le lapin et le tatou de Stanford [12] (respectivement FIGURE 5.18, 5.19 et 5.20). La littérature présente peu de détails sur ce genre d'essais et ne permet pas de comparaison [13].

Test Curlnoise

Le résultat à ce test est présenté dans les FIGURES 5.21 et 5.22 et le TABLEAU 5.5. La technique de suivi anisotrope présentée ici permet d'atteindre un résultat économe (en terme de nombre de sommets), équilibré (géométrie des facettes) et pertinent (approximation comparable à celle produite par la méthode de référence).

La méthode de référence limite au maximum les erreurs d'origine géométrique aux dépends de la qualité intrinsèque de la représentation (de nombreuses opérations de remaillage sont annulées pour éviter une erreur géométrique trop importante). Nous procédons à l'inverse, en privilégiant la qualité du maillage ; la précision n'est pas pour autant mise en défaut (faible erreur volumique).

Malgré un nombre d'échantillons plus important que celui théoriquement escompté dans la version 3d, la présente solution offre une compression de données considérable : le nombre de sommets employés est inférieur de 45% par rapport aux résultats de la méthode de référence. Au delà, en se fondant uniquement sur les mesures dans l'espace de plongement, le nombre final de sommets devrait être multiplié par 4 (à densité constante, voir TABLEAU 5.5).

12. The Stanford 3D Scanning Repository, Bunny and Armadillo models.

13. Comparaison trouvée pour la déformation du lapin dans la thèse de Nielsen [Nie06] et dans l'article associé [HNB+06]. La présentation se résume à des captures d'écran et les informations relatives à la méthode : représentation implicite avec une grille 1024^3 (maxi) et l'emploi d'une structure de donnée compressée (sujet d'étude).

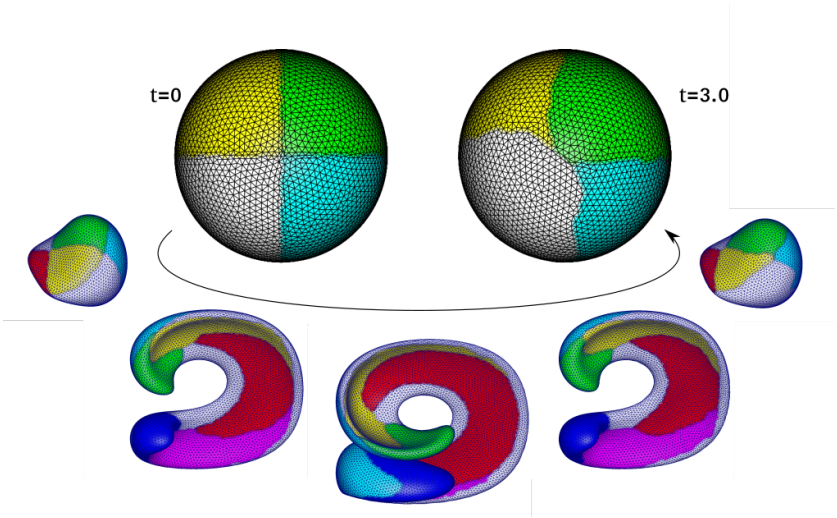


FIGURE 5.17 – Test d'Enright sur sphère ; initialement, les couleurs associées aux sommets permettaient de mettre en évidence l'importance du lissage en colorant chaque octant de l'objet. Ici, l'expérience a été étendue en augmentant le système de coordonnées avec les valeurs RGB (système 9D avec $\Phi(\mathbf{x}) = \{x, y, z, sN_x, sN_y, sN_z, sR, sG, sB\}^T$) : l'anisotropie affecte la géométrie des triangles au niveau des fortes courbures (notamment à $t = 1.5s$) et à proximité des changements de couleur.

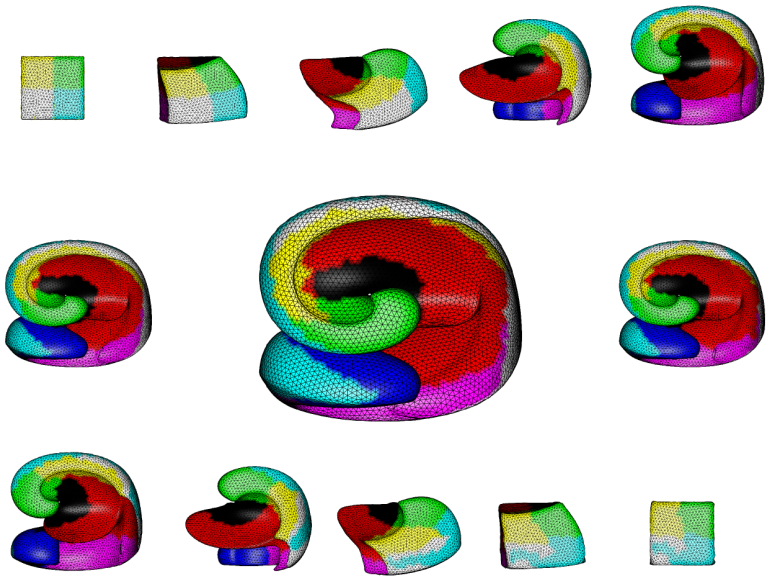


FIGURE 5.18 – Captures d'écran du test d'Enright sur un cube tous les 50 pas de temps (une période = 300 itérations). On peut deviner quelques erreurs sur le transport de l'information entre la première et la dernière image (couleur simplement associée aux sommets et reportée suivant sa prédominance dans la cellule restreinte au moment de la génération du dual).
Nombre de sommets : 3000 (initial) - 9989 (max) - 2929 (final).
Variation de volume : -0.17 % (volume initial = 2.70e-02).

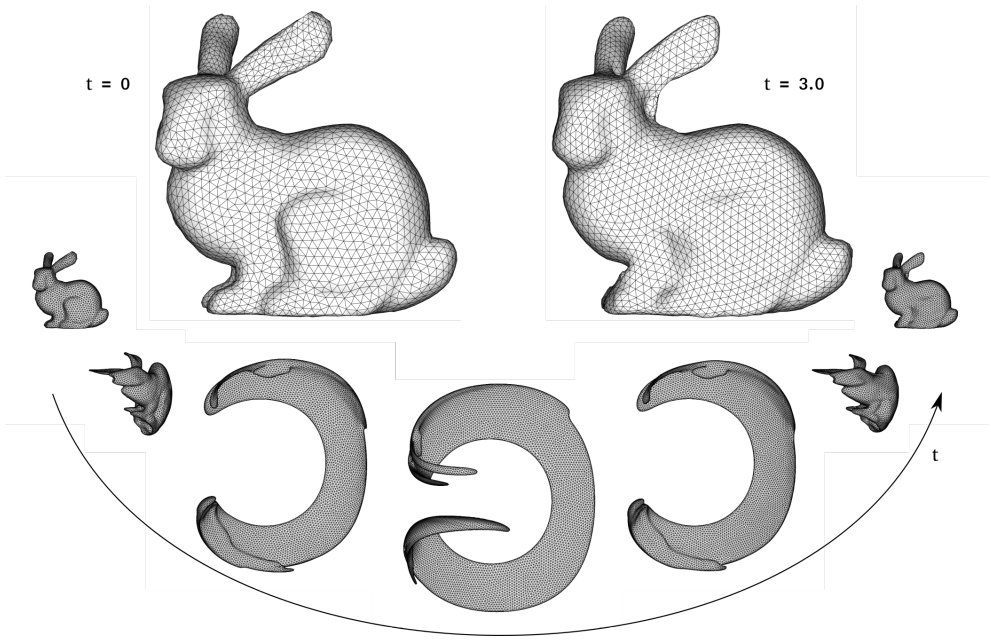


FIGURE 5.19 – Test d'Enright appliqué au lapin de Stanford - 2500 sommets à l'initialisation (maillage isotrope), 15400 au plus fort de la déformation et 3300 pour l'objet final. Chaque remaillage implique 10 itérations de Lloyd ce qui amène au lissage des détails (pattes et cou).

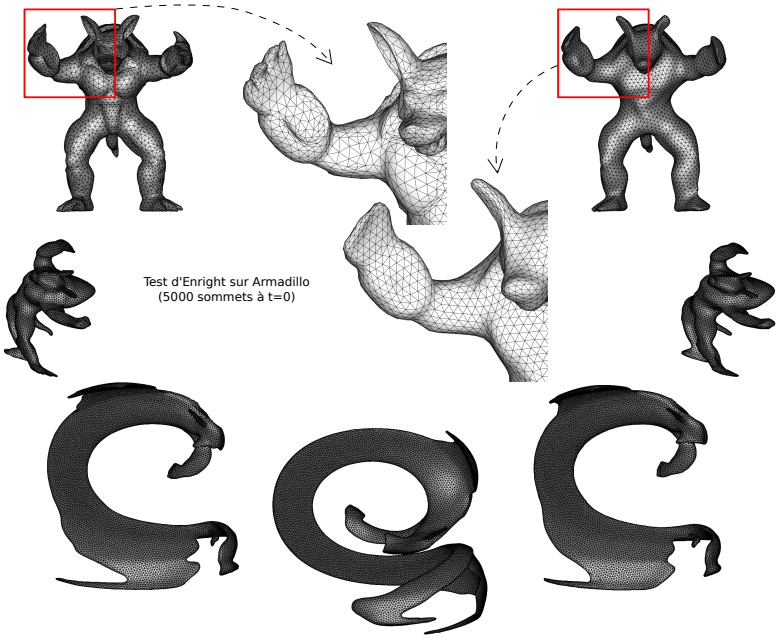


FIGURE 5.20 – Test d'Enright sur modèle "Armadillo" - Du point de vue intrinsèque, le maillage final est de très bonne qualité. En revanche, les détails (creux de l'oreille, doigts) ont disparus ; le lissage est manifestement trop important (15 itérations de l'algorithme de Lloyd).

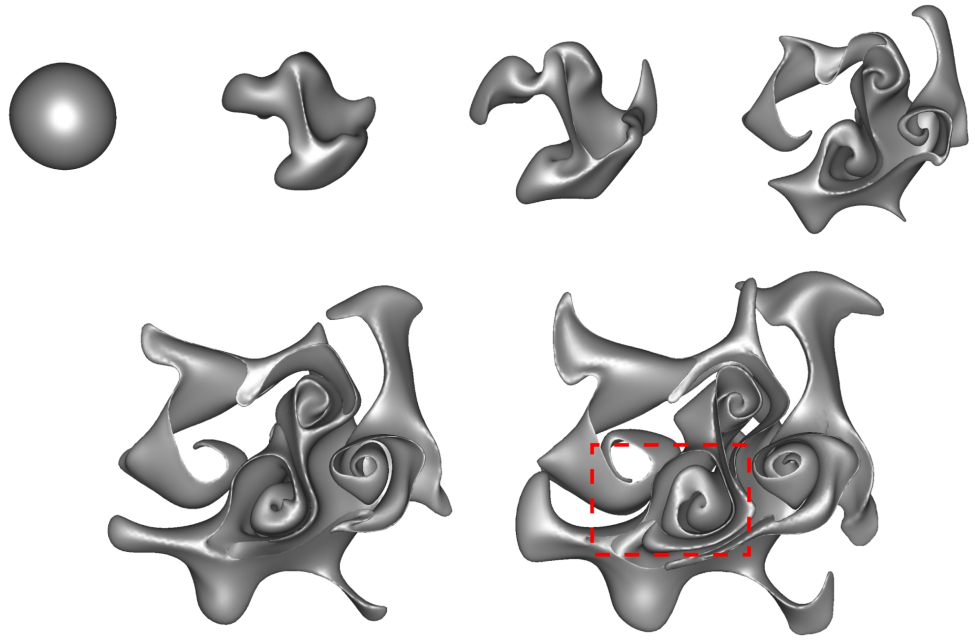


FIGURE 5.21 – capture d'écran du test curlnoise aux pas de temps 0, 50, 100, 200, 300 et 400 ; la zone encadrée est détaillée dans la figure suivante (FIGURE 5.22).

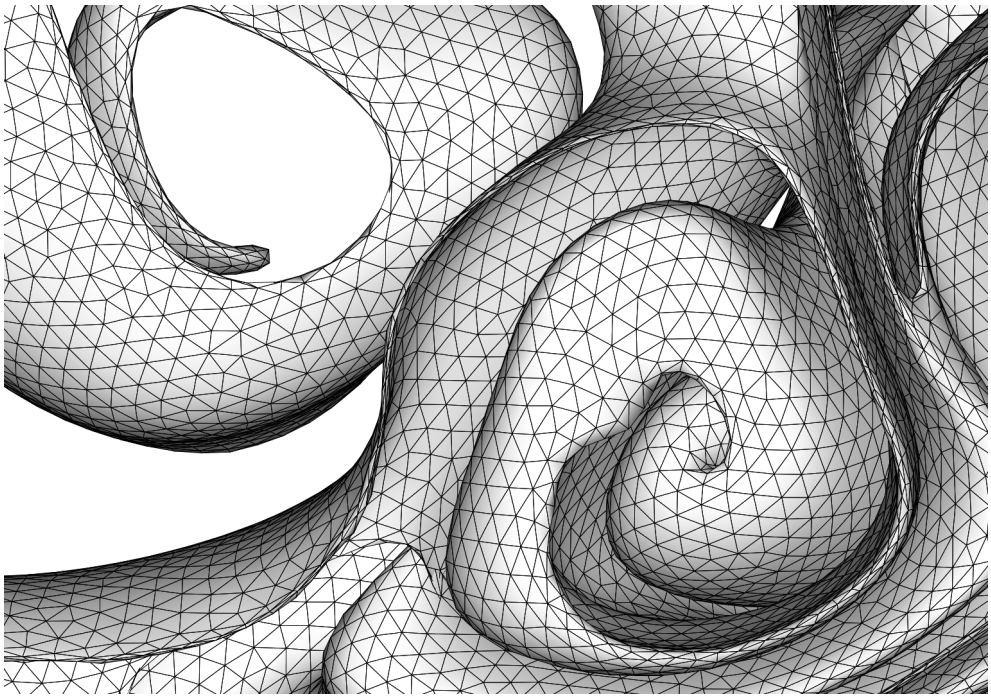


FIGURE 5.22 – Détail du maillage au 400ème pas de temps (t = 20).

Ces résultats sont prometteurs, toutefois, le système admet quelques limites qu'il convient de préciser.

5.C.3.b Discussion, limites

Cette solution d'échantillonnage se révèle finalement plus délicate à mettre en œuvre et plus difficile à exploiter que pour les remaillages ponctuels. Le changement d'application ne repousse évidemment pas les limites déjà exposées de la méthode de remaillage (SECTIONS 2.F.2 et 3.E) ; le facteur d'anisotropie doit rester faible pour atteindre un résultat (inférieur à la longueur moyenne d'une arête de l'objet initial).

Le lissage et notre stratégie d'ajustement de l'échantillonnage ne s'accordent pas réellement et génèrent une migration des échantillons. Elle résulte d'un déséquilibre entre les décisions d'ajustement du nombre d'échantillons et les repositionnements successifs dirigés par l'algorithme de Lloyd (prochain paragraphe).

Nous n'avons pas de réponse appropriée pour ce problème, les premières pistes de réflexion se sont tournées vers une pondération des échantillons (paragraphe suivant).

L'étude ne s'est pas poursuivie dans ce sens puisque au delà des limites de la méthode, les maillages générés ne sont pas compatibles avec tous les traitements (notamment le simulateur d'écoulement) et rend plus délicate la prise en compte des changements de topologie (derniers paragraphes).

Flux d'origine géométrique :
Intuitivement, l'intervalle de validité défini dans l'espace réel (longueur des arêtes) et l'opération de lissage travaillent à contre-courant : une insertion (resp. suppression) initiée uniquement pour satisfaire les contraintes de l'espace réel se traduit par un sur-échantillonnage d'une région plane (resp. sous échantillonnage d'une région fortement courbée). L'optimisation barycentrique fait ensuite migrer progressivement ces échantillons des régions les plus planes vers celles présentant une forte courbure.

En d'autre termes, chaque itération de l'algorithme de Lloyd tente de rétablir l'équilibre que nous avons volontairement biaisé.

Ce flux géométrique a finalement peu de répercussions sur la qualité finale du résultat à un test synthétique. Le nombre d'événements géométriques est néanmoins supérieur à celui attendu et ce phénomène peut poser problème si un autre traitement intéresse ou exploite le modèle surfacique, notamment une simulation. En pratique, le nombre d'itérations de l'algorithme de Lloyd peut être diminué ce qui limiterait l'importance du déplacement des échantillons ; en revanche, seule une nouvelle formulation du plongement permettrait de l'annuler complètement.

Maillages générés :
Les différents traitements heuristiques des configurations pathologiques convergent généralement et produisent des triangulations duales satisfaisantes.
La principale difficulté reste la même que pour l'application aux remaillages statiques : certains groupes contigus de facettes duales peuvent se recourir totalement ou partiellement et présentent des normales alternées. Les composantes connexes responsables sont généralement situées à proximité de régions dont les rayons de courbure diffèrent largement et à plus forte raison au niveau des points scelle (courbure totale négative) : ces composantes s'étirent suffisamment pour occulter leur voisinage (en forme de croissant).

Une routine d'inspection du maillage généré pourrait détecter ce type de configuration et un raffinement local corrigerait l'erreur de représentation (traitement *a posteriori*). Une détection *a priori* s'avère plus délicate, elle demanderait des mesures pour évaluer l'allongement [14] de la cellule et une comparaison avec celui des voisines.

Par ailleurs, ces erreurs de représentation influent sur l'échantillonnage des prochains pas de temps : les changements brusques de la normale agissent comme un aimant à échantillons. L'expérience montre cependant que cette accumulation tend à se résorber plus ou moins rapidement (sur quelques itérations de la déformation), en particulier grâce aux contraintes exprimées dans l'espace réel (*i.e.* seuillage longueur des arêtes et hauteur des triangles).

Nécessité d'amortir l'effet de la mesure :
Comme l'ont souligné Lévy *et al.* [LB13], il serait intéressant de limiter la portée de l'anisotropie dans les configurations de courbure extrême : une fois de retour dans l'espace réel, l'échantillonnage de ces régions est exagéré et la géométrie des facettes résultantes sort largement des critères escomptés. Nous avons cherché à répondre à ce problème lors de la phase d'ajustement du nombre d'échantillons mais cette solution n'est pas pérenne (flux d'origine géométrique, cf paragraphe précédent).

Idéalement, l'idée est de réduire l'attraction des régions présentant une très forte courbure. D'aucuns pourraient être tenté d'ajuster localement le facteur d'anisotropie mais cette décision est délicate [15] et va à l'encontre de l'objectif initial, *i.e.* utiliser une représentation anisotrope pour mieux modéliser ces régions et limiter la possibilité de changements de combinatoire.

Une piste plus plausible reposerait sur une pondération des échantillons : la gradation augmenterait le poids des échantillons situés dans les régions présentant une forte

14. *E.g.* rapport des distances extrêmes séparant le barycentre du bord de la composante. Cette évaluation devrait, à mon avis, être complétée par une autre notion adressant la "convexité" de la cellule.

15. Il s'agit d'ajuster la valeur du facteur d'anisotropie en fonction de la courbure locale : la réduire lorsqu'elle devient une source de difficulté et revenir à la normale lorsque la courbure s'adoucit. C'est un processus d'optimisation à part entière.

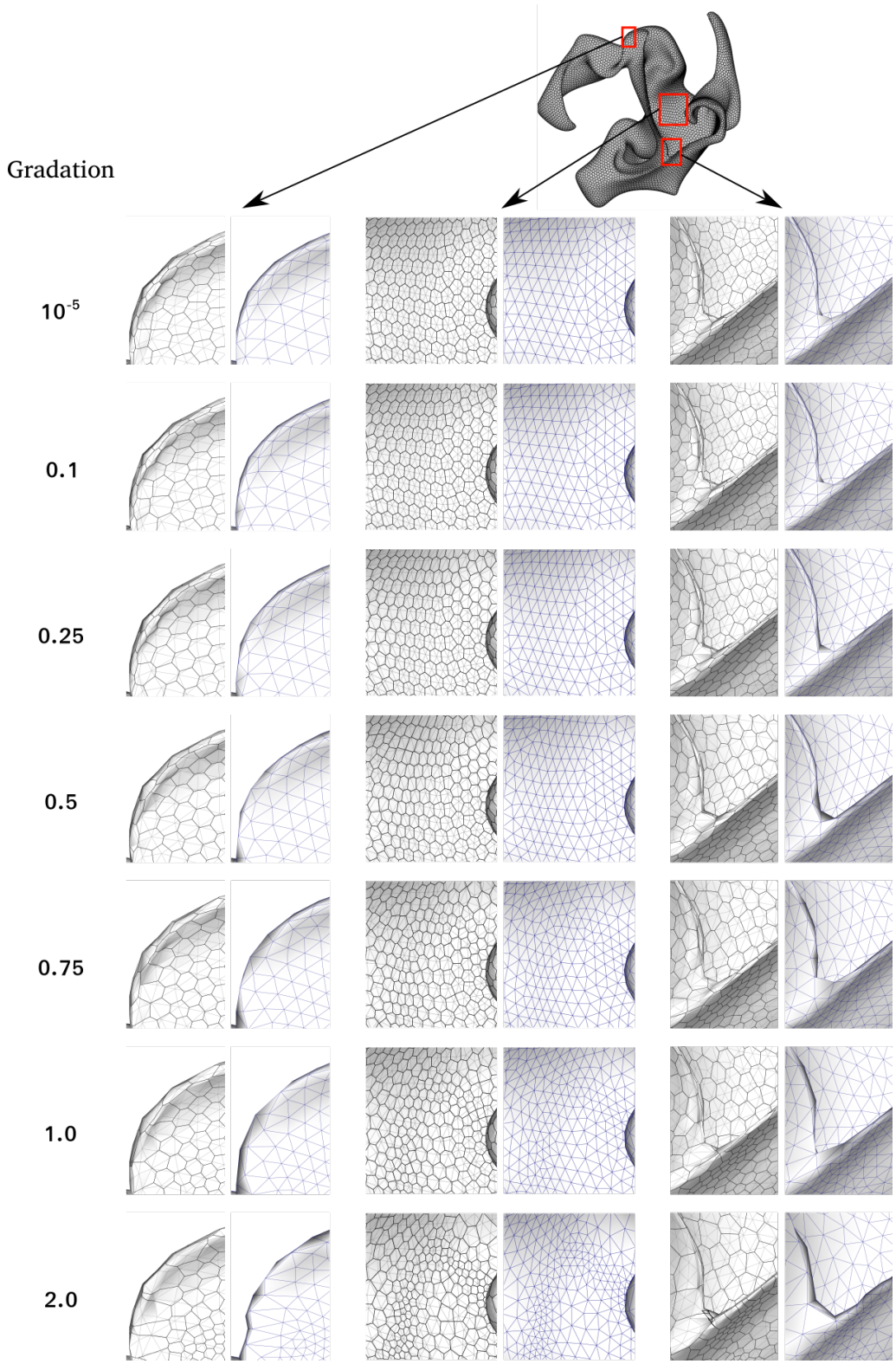


FIGURE 5.23 – Effet de la pondération - le domaine restrictif est donné par un maillage anisotrope ; ce dernier fourni l'échantillonnage initial (sommets) et le facteur d'anisotropie (longueur moyenne d'une arête). Les résultats sont donnés après 35 itérations de Lloyd.

courbure afin de limiter le phénomène d'attraction. En substance, il s'agit d'un effet diamétralement opposé à la gradation suggérée pour affiner un maillage lorsque la distance à l'axe médian est faible (*i.e. "local feature size"* de Amenta *et al.*) : augmenter le poids de l'échantillon afin d'étendre sa cellule. Quelques essais ont été réalisés *a posteriori* sur un remaillage statique (FIGURE 5.23) mais requièrent une étude plus approfondie pour atteindre le résultat souhaité et permettre son application au suivi de surface. Ce sont effectivement deux exercices parfaitement distincts : plusieurs itérations successives de Lloyd n'ont pas le même comportement et ne fournissent pas le même résultat qu'une suite de remaillages, même si le nombre final de repositionnements est identique.

***"Voronoï liquid"*, [BB08, BXH10] :**
En l'état, cette solution d'échantillonnage est incompatible avec le simulateur déjà mis en œuvre. Les différents tests laissent à penser que la disposition des échantillons décidée dans l'espace de plongement ne satisfait pas les conditions nécessaires à la convergence des algorithmes de la simulation physique. En particulier, le caractère anisotrope de la triangulation entrave les mesures qui exploitent l'orthogonalité supposée entre le diagramme de Voronoï support de la simulation et la triangulation modélisant l'interface. Cet écueil s'ajoute aux instabilités émanant du flux d'origine géométrique évoqué plus haut et la combinaison de ces facteurs perturbe trop le simulateur pour aboutir à un résultat satisfaisant. En pratique, la résolution de l'équation de pression ne parvient pas à converger et on assiste très rapidement à une augmentation considérable du volume de fluide : il passe du simple au double sur l'exercice type présenté dans la FIGURE 5.11.

Éloignement des interfaces délimitant une région mince :
La prise en compte de la normale dans le système de coordonnées a pour effet d'éloigner (du point de vue de la mesure) des points de l'espace en réalité très proches, typiquement deux portions de surface délimitant une région mince. Du point de vue du remaillage ponctuel, c'est un des avantages de la méthode. En revanche, dans notre contexte, cette solution d'échantillonnage rend plus difficile l'appréciation de la distance séparant deux portions d'interfaces. En d'autres termes, il est préférable d'exploiter un système de coordonnées réels pour détecter un événement topologique comme une collision.

5.D Gestion des événements topologiques

Certaines déformations conduisent à l'intersection de deux portions d'interfaces. À cette occasion, le genre de l'objet modélisé doit changer. Une fois de plus, les diagrammes de Voronoï (SECTION 3.F) sont mis à contribution pour circonscrire les lieux touchés par ce type d'événement et adapter la représentation surfacique en conséquence.

La détection de l'événement intervient directement après la déformation (ALGO. 10, ligne 1) et avant la phase d'optimisation de l'échantillonnage (ALGO. 10, ligne 2). Une analyse du diagramme de Voronoï restreint ($\mathrm{Vor}_{X|M^*_{t+1}}$) permet de diriger la recherche d'intersections (SECTION 5.D.1) et, le cas échéant, guide la définition d'une nouvelle modélisation (SECTION 5.D.2) ; le domaine restrictif est alors remplacé avant d'entamer le processus de remaillage homéomorphe classique (SECTION 5.D.3). Une alternative fondée sur la combinatoire promet une simplification importante en esquivant les opérations de chirurgie du maillage (SECTION 5.D.4).

5.D.1 Circonscription de l'évènement

Lors du calcul du diagramme de Voronoï, chaque cellule restreinte est constituée de l'ensemble des portions de surface à proximité de l'échantillon. Une auto-intersection est donc synonyme, par construction, d'au moins une cellule avec plusieurs composantes connexes : le diagramme de Voronoï restreint permet ainsi de réduire le champ des possibles lors de la recherche d'intersection. En effet, la plupart des cellules restreintes ne présentent qu'une seule composante connexe, elles sont instantanément écartées d'un test d'auto-intersection.

Pour vérifier la présence d'une intersection, la solution la plus simple repose sur une routine d'intersection de triangles. De nombreuses méthodes existent : la littérature recense plusieurs stratégies / algorithmes, chacun ayant leurs aptitudes. Il s'agit en général de rapidité à cerner les régions d'intérêt ou plus exactement celles à écarter (dépourvues d'intersection) et ainsi limiter le nombre de test d'intersection de polygones. Ici, le travail est largement préparé par l'analyse du diagramme de Voronoï et le choix d'une méthode en particulier n'influe que peu sur les performances[16].

Une fois les intersections détectées, les cellules concernées sont groupées en régions contiguës. Chacune d'elles est le théâtre d'un événement topologique et peut être traitée indépendamment des autres.

Propagations éventuelles :
Dans certains cas de figure, l'intersection n'est pas limitée aux cellules que nous venons de mettre en lumière. La région considérée doit être étendue pour inclure l'intégralité de l'intersection ; deux configurations se distinguent.

16. Les essais ont été réalisés avec une méthode semblable à celle proposée par Gottschalk *et al.* (librairie PQP) ; la nouvelle version du code doit exploiter l'alternative proposée par Devillers et Guigue [GD03]. Une mise en compétition des ces deux méthodes permettra de confirmer cette assertion.

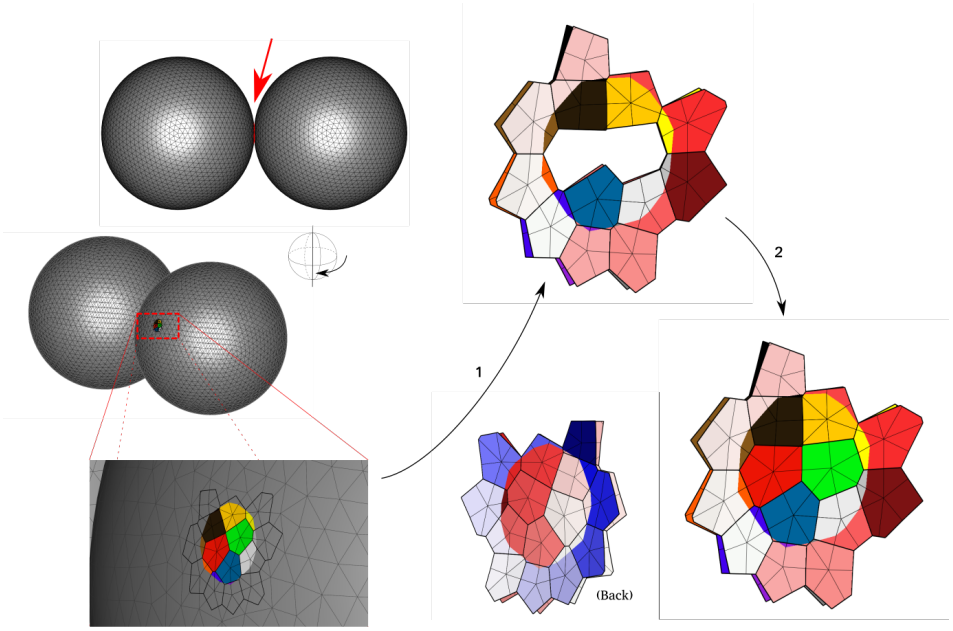


FIGURE 5.24 – Deux sphères entrent en collision (à gauche, test fondé sur le déplacement suivant la normale, SECTION 5.D.3) ; les cellules colorées dans la vignette en bas à gauche donnent la portion de la première sphère qui a traversé la seconde.
Plusieurs cellules restreintes présentent une auto-intersection (en haut à droite, flèche n° 1) ; bien que les cellules centrales soient exemptes d'auto-intersection, elles font partie de la région considérée par l'événement topologique (en bas à droite, flèche n° 2).

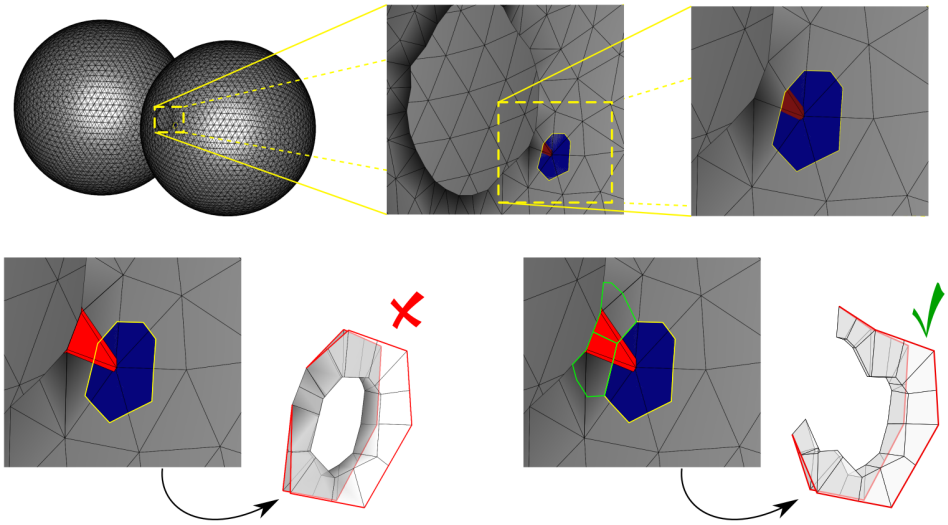


FIGURE 5.25 – Quelques itérations après la première collision (suite de la déformation dont la FIGURE 5.24 est issue), une nouvelle collision est détectée (ligne du haut). Cette fois, elle intervient à proximité d'une crête et si le procédé d'adaptation se concentre uniquement sur les cellules dotées de plusieurs composantes connexes, il faillit à considérer l'intégralité de l'auto-intersection (surlignée en rouge, en bas à gauche). Pour une correction valide, il faut considérer les cellules voisines (surlignées en vert, à droite).

Malgré les précautions relatives à l'avance du pas de temps [17], certaines cellules peuvent ne pas présenter d'intersection alors qu'il y a bien eu une collision au cours de la phase d'advection : dans l'exemple illustré par la FIGURE 5.24, les deux cellules au centre de la région considérée ne présentent pas d'intersection (cellules colorées en vert et en rouge sur la représentation de face) mais leurs composantes connexes respectives se sont mutuellement traversées lors de l'intégration du champs de vitesse. Un parcours de proche en proche permet de pallier cette situation : ce parcours est initialisé à partir d'une cellule simple (*i.e.* dotée d'une unique composante connexe) et la propagation ne traverse pas les cellules présentant une intersection. À la fin du parcours, les cellules restreintes non visitées sont englobées dans la région de l'événement topologique attenant (FIGURE 5.24, flèche n° 2).

Une seconde configuration retient notre attention : la déformation peut causer l'effondrement d'une crête (région présentant une courbure extrême). Il est possible que l'intersection s'étende sur une ou plusieurs cellules dotées d'une unique composante connexe (FIGURE 5.25) à l'intérieur desquelles certaines facettes sont inversées et ne délimitent plus un volume.

5.D.2 Modification du domaine surfacique

Nous avons un ensemble de cellules restreintes à l'intérieur desquelles nous avons mis en évidence une intersection et nous cherchons ici à modifier le domaine surfacique pour qu'il reflète la nouvelle topologie : un "patch" correctif vient remplacer les facettes du domaine restrictif couvertes par l'intersection (FIGURE 5.26). Cette opération est menée de la même manière que nous avons décrit un événement topologique, à savoir un déchirement et un recollement ; le travail est réalisé sur le maillage correspondant au diagramme de Voronoï restreint et une fois déterminé, le patch correctif est greffé dans le domaine restrictif.

Déchirement :
Comme toute cellule retreinte, les cellules restreintes concernées par l'évènement topologique sont formées de morceaux de facettes du domaine restrictif. Pour faciliter la future greffe, la région considérée est étendue de manière à couvrir un ensemble de facettes "entières" du domaine restrictif parent (deuxième vignette de la FIGURE 5.26). Cet ensemble de facettes étendu forme la base de travail dont la première étape consiste

17. Une contrainte comme la condition CFL (CHAPITRE 1) limite la longueur du déplacement des sommets au cours d'un pas de temps (inférieur à la longueur moyenne d'une arête). Aussi, nous sommes assurés qu'une intersection implique la présence d'au moins une cellule restreinte présentant plusieurs composantes connexes.

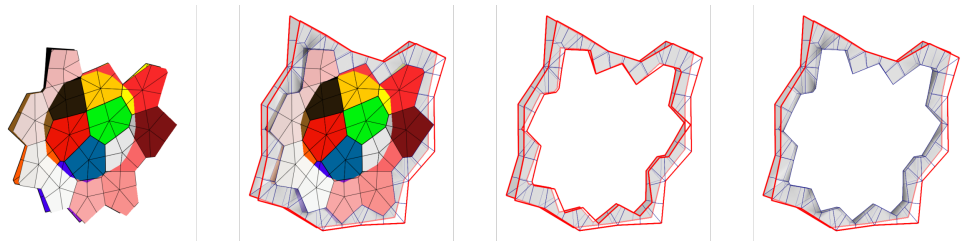


FIGURE 5.26 – Des cellules restreintes concernées par l'évènement topologique (à gauche) au patch de substitution (à droite).

à supprimer l'ensemble des facettes des cellules restreintes couvrant l'intersection (troisième vignette de la FIGURE 5.26).

En parallèle, les facettes du domaine restrictif correspondant au domaine étendu sont également supprimées.

Génération du patch :
La suppression des facettes du diagramme de Voronoï restreint laisse apparaître un ou deux [18] bord(s) formé(s) d'arêtes situées sur les faces médiatrices des cellules de Voronoï séparant les cellules impliquées dans l'intersection de celles jugées valides. Un algorithme de triangulation de ces faces de Voronoï est alors mis en œuvre pour connecter les arêtes du bord et ainsi refermer le domaine surfacique. Cet algorithme est semblable à celui employé pour mesurer le volume séparant deux maillages (SECTION 4.C.2) : chaque arête et face de Voronoi est associée à un sommet tiers inclus dans cette arête/face et chaque arête formant le(s) bord(s) conduit à la génération d'une facette de fermeture. Ici, pour assurer une meilleure approximation, nous prenons le soin de centrer le sommet tiers par rapport aux éléments du maillage auxquels il est connecté.

De la même manière, la géométrie du patch est dépendante de la partition selon Voronoï : la nouvelle modélisation peut paraître rugueuse, anguleuse. C'est pourquoi, nous proposons de subdiviser et de lisser (simple lissage laplacien) le résultat pour faciliter le futur remaillage et ainsi éviter de reproduire fidèlement des crêtes ou des pics dont l'origine est purement géométrique (FIGURE 5.27).

Recollement :
Finalement, la greffe du patch est réalisée : les arêtes formant le ou les bord(s) du patch correspondent aux arêtes du domaine restrictif (le travail préparatoire l'assure, FIGURE 5.26). Aussi, un simple parcours du bord du patch permet de retrouver l'arête du domaine restrictif et d'y insérer les points intermédiaires nécessaires ; ces derniers

18. Deux dans le cas général, et un seul bord lorsque la région concernée par l'intersection couvre une forte courbure (FIGURE 5.25)

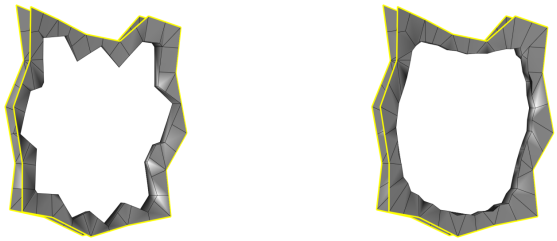


FIGURE 5.27 – Un lissage laplacien des sommets internes du patch permet de limiter l'insertion de détails d'origine géométrique.

résultent du morcellement des arêtes du domaine parent lors du calcul du diagramme de Voronoï restreint (*i.e.* sommets de types *ii*). Ce parcours est suivi de la copie des facettes du patch en prenant soin de mettre à jour les adjacences de facettes.

Le domaine restrictif reflète maintenant la nouvelle topologie de l'objet géométrique et l'algorithme de remaillage homéomorphe peut se poursuivre comme à son habitude (FIGURE 5.28 et ALGO. 10 lignes 2 à 4).

5.D.3 Premiers résultats

Les premiers résultats s'appuient une fois encore sur un test synthétique au cours duquel la déformation est dictée par la géométrie du modèle : les sommets de deux sphères voisines sont déplacés suivant leur normale (FIGURE 5.29). À mi-parcours de cette dilatation, elles entrent en collision. Le modèle surfacique est alors adapté en conséquence et la phase d'expansion se poursuit. La seconde période de la déformation contracte l'objet ; la normale donne toujours la direction du déplacement mais le sens est opposé.

5.D.4 Perspectives

Les difficultés relatives à la chirurgie du maillage et notre méthode de remaillage suggèrent une réponse alternative fondée sur la combinatoire des cellules restreintes (prochain paragraphe). Ce nouveau système doit également faciliter la détection et le traitement d'un autre type d'événement topologique : la séparation de deux volumes (paragraphe suivant).

Solution combinatoire :
Une fois l'événement détecté et circonscrit, la modification du domaine surfacique peut

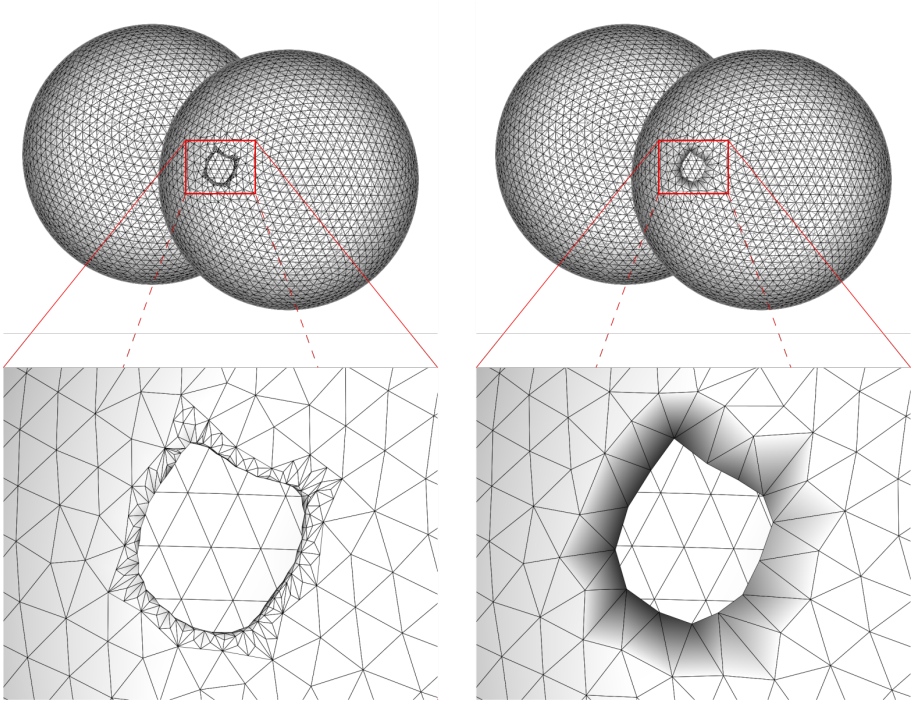


FIGURE 5.28 – Détail du résultat de la chirurgie opérée sur domaine restrictif (à gauche) et résultat du remaillage homéomorphe (à droite).

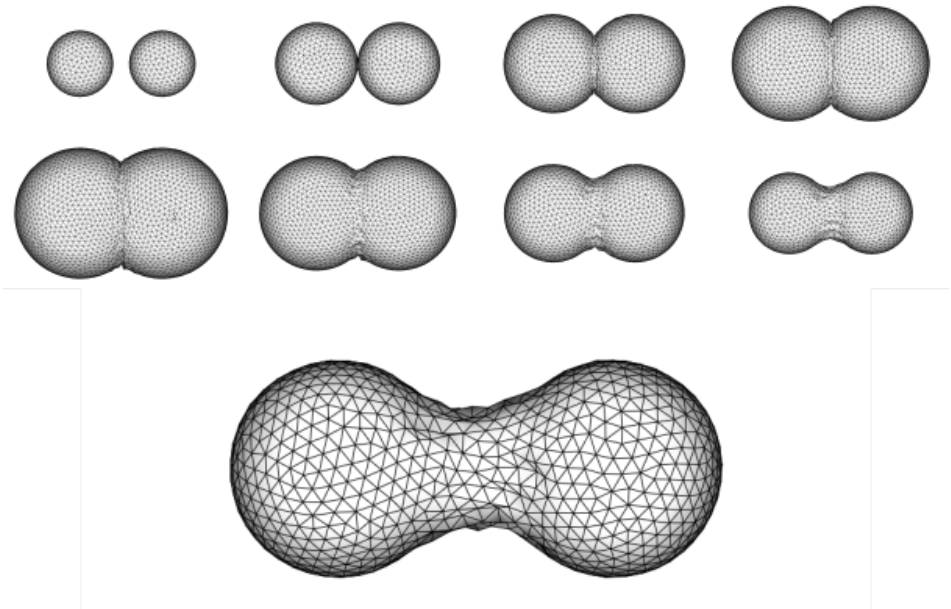


FIGURE 5.29 – Déformation périodique suivant la normale calculée aux sommets du maillage ; une vignette tous les 50 itérations, de gauche à droite et de haut en bas. Les sphères initiales sont formées de 500 sommets chacune. La dernière vignette est agrandie pour mettre en évidence les erreurs d'approximation de la normale (une modélisation initiale plus fine permet d'obtenir de bien meilleurs résultats).

être allégée : une simple suppression des facettes couvertes par la région étendue ; le travail restant est délégué à l'organe responsable de la génération de la nouvelle approximation (3).

En pratique, il s'agit d'instaurer une communication entre la phase d'échantillonnage (ALGO. 10, ligne 2) et la phase de construction de la nouvelle approximation (ALGO. 10, ligne 3).
La première détecte l'événement topologique, ajuste l'échantillonnage en conséquence et actualise le domaine surfacique (*i.e.* appliquer le déchirement). L'optimisation barycentrique peut s'accommoder d'un domaine partiellement connecté : l'algorithme de Lloyd est applicable sur un domaine présentant des bords.
Pour construire la nouvelle modélisation, l'analyse des composantes connexes met en lumière les bords du domaine résultant du déchirement. Les cellules restreintes impliquées doivent alors recevoir un traitement particulier visant à fusionner les composantes connexes voisines de l'intersection ; cette opération correspond à la phase de recollement.
Enfin, l'algorithme de minimisation de l'erreur volumique peut fonctionner sans changements particuliers : la méthode d'approximation de la mesure (SECTION 4.C.2) ne sera pas perturbée par la différence de topologie des deux domaines surfaciques ni par la présence de bords sur l'un des deux modèles.

Cette solution permettra de se dégager des difficultés relatives à la manipulation directe des éléments finis et de profiter pleinement des avantages de la décomposition volumique sous-jacente (*i.e.* des propriétés du diagramme de Voronoï).

Séparation :
Contrairement à la fusion, la séparation d'un volume de fluide en deux volumes distincts résulte d'une décision : une séparation ne peut subvenir qu'en des régions très minces et est généralement conditionnée par des paramètres non géométriques (*e.g.* instabilité de Rayleigh-Taylor...). Ce principe est détaillé par Wojtan *et al.* [WTGT10]. Sans entrer dans les détails, la topologie du modèle surfacique est dirigée et s'inscrit dans un univers où seules certaines configurations de cellules sont admises (voir section suivante), en particulier il s'agit de considérer une épaisseur minimale en deçà de laquelle le modèle subit un événement topologique.

En pratique, la mise en œuvre d'une scission devrait être moins complexe que la résolution d'une collision mais ne sera développée que dans une prochaine version de la méthode dont les premiers éléments sont exposés dans la section suivante ; il est question d'établir un nouveau paradigme articulé autour de deux entités géométriques évoluant conjointement (un maillage et un ensemble de points) et s'appuie sur l'interprétation volumique des diagrammes de Voronoï restreints.

5.E Bilan et Perspectives

L'application de la méthode de remaillage fondée sur les diagrammes de Voronoï au problème de suivi de surface déformable permet d'obtenir des résultats similaires à ceux formant l'état de l'art. La qualité de la représentation est très satisfaisante (géométrie et harmonie des facettes) et l'approximation reste fiable grâce à la méthode de minimisation de l'erreur.

Cependant, le procédé de remaillage est relativement lourd par rapport aux méthodes concurrentes : une solution de chirurgie du maillage telle que celle proposée par Brochu *et al.* [BB09] permet un contrôle fin de chaque opération et ne requiert donc pas la mise en œuvre d'une solution complexe de correction de l'erreur ; cette approche purement lagrangienne nécessite néanmoins un suivi attentif (avance de front) pour détecter les intersections, synonymes d'événements topologiques. À l'opposé, les méthodes mixtes s'appuyant sur une grille régulière bénéficient d'une simplicité d'implémentation mais restent dépendantes des axes, de la finesse des mailles et du problème de transport (limite principale des méthodes eulériennes).

Originalité de l'approche :
Ici, nous nous situons à mi-chemin : les diagrammes de Voronoï permettent de capturer l'interface plus finement, sans contrainte d'alignement, et arborent un aspect lagrangien dans le sens où les générateurs se déplacent et suivent la déformation. La décomposition spatiale est dépendante de la position des échantillons qui elle même est liée à la géométrie du domaine surfacique.

Séparation de l'échantillonnage et du maillage surfacique :
Les développements les plus récents visent une séparation de l'échantillonnage et du maillage surfacique ; ces deux entités évoluant en parallèle. En pratique, l'échantillonnage n'est alors plus initialisé à partir de l'ensemble des sommets de la surface déformée ; il correspond à l'échantillonnage du pas de temps précédent sur lequel a été appliqué la déformation. L'objectif principal étant de minimiser les variations d'échantillonnage entre plusieurs pas de temps : il n'est plus affecté par les insertions de sommets nécessaires à la bonne construction du dual ni par l'optimisation de la position des sommets afin de satisfaire la contrainte volumique.

Pour éviter la divergence des deux ensembles, l'advection des échantillons est déduite de la déformation appliquée à la cellule restreinte.

Le reste de l'algorithme est proche de ce qui a été proposé jusqu'ici : l'ajustement de l'échantillonnage s'appuie sur la propagation de la distance moyenne au voisinage selon Voronoï ; une légère variation de l'algorithme de Lloyd permet de mieux positionner les échantillons dans les régions de faible épaisseur (chaque composante connexe a le même poids, il n'est plus dépendant de sa superficie, FIGURES 5.30 et 5.31). Cet alignement

permet d'éviter certains artefacts dans la triangulation duale (FIGURE 5.32).

Cette stratégie facilite également la gestion des événements topologiques puisqu'il est possible de suivre explicitement un échantillon donné et sa cellule de Voronoï sur plusieurs itérations successives. Dès lors, il est envisageable de limiter les configurations admissibles au sein d'une même cellule à l'instar de la proposition de Wojtan *et al.* [WTGT10] (FIGURE 5.33).

Il reste néanmoins quelques zones d'ombre non éludées pour atteindre un résultat plus avancé que l'application directe proposée dans ce chapitre : en particulier lors de la contraction des régions présentant une forte courbure (le recul du front est légèrement exagéré et l'erreur commise est évidement reportée dans les pas de temps suivants, FIGURE 5.34).

Génie logiciel :
La stratégie de développement empirique [19] a atteint ses limites et une ré-écriture serait nécessaire pour permettre une évolution significative de la méthode ou la distribution d'une librairie.

En particulier, la mise en œuvre d'un banc de test efficace et pertinent permettrait d'apprécier les différentes variantes et d'observer l'effet "à long terme" d'un paramètre. Cela demande beaucoup de temps de calcul [20] et un code suffisamment robuste.

De la même manière, il serait pertinent de développer un simulateur propre à notre modélisation et nos structures de données afin de permettre une communication entre le simulateur et le mailleur : idéalement, l'échantillonnage doit satisfaire les contraintes du simulateur et du mailleur de manière à ce qu'ils partagent une interprétation commune des configurations géométriques.

19. Travail de recherche,...

20. Une simulation compte généralement plusieurs centaines de pas de temps, voir quelques milliers pour les simulations physiques ; soit autant de remaillages. La taille des objets manipulés est généralement comprise entre 10^3 et 10^4 sommets à l'état initial mais peut admettre une amplitude de variation supérieure au facteur 10. Soit, en terme horaire, une dizaine de minutes à plusieurs heures pour compléter une simulation.

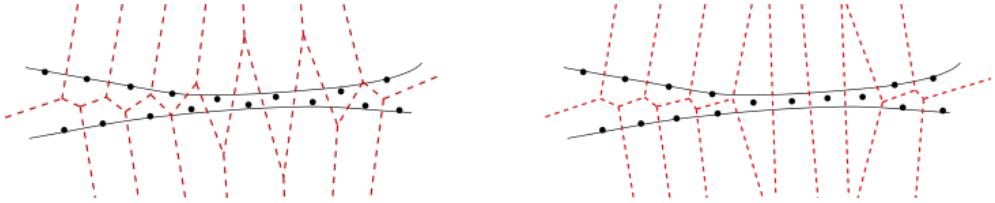


FIGURE 5.30 – Illustration 2D de la nouvelle définition du barycentre d'une cellule comptant plusieurs composantes connexes (à droite) ; à gauche, solution classique (barycentre de la cellule restreinte).

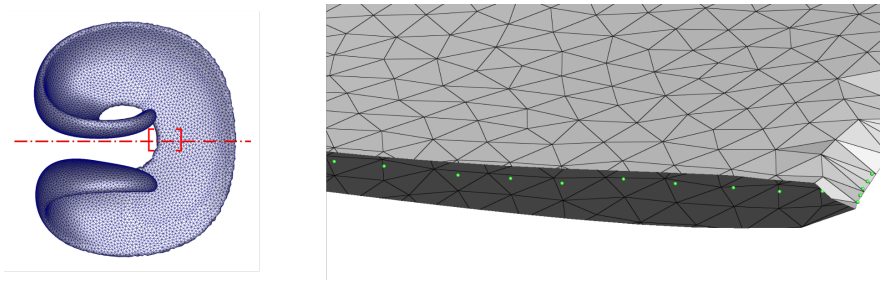


FIGURE 5.31 – Test d'Enright - t=1.5 - détail de la vue en coupe avec l'ensemble d'échantillons (points verts).

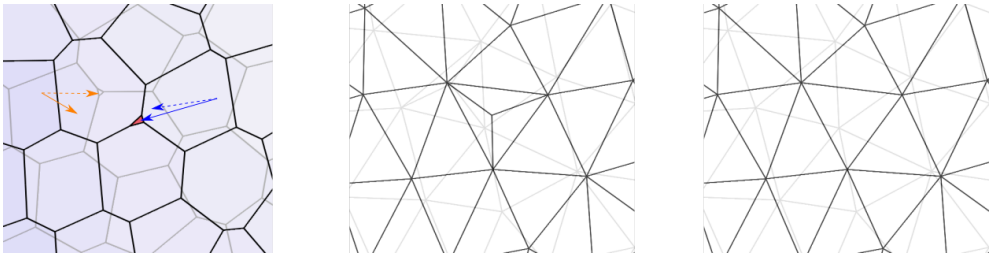


FIGURE 5.32 – Exemple de triangles superflus générés aux abords d'une région de faible épaisseur (au milieu) ; ils sont dus à l'imbrication naturelle en quinconce des générateurs de part et d'autre de cette région (à gauche, flèches colorées) ; ce type de configurations n'a plus court avec la nouvelle formulation du barycentre : les graines s'alignent naturellement à proximité de l'axe médian, ce qui conduit à un équilibrage des composantes connexes et donc des facettes duales (à droite).

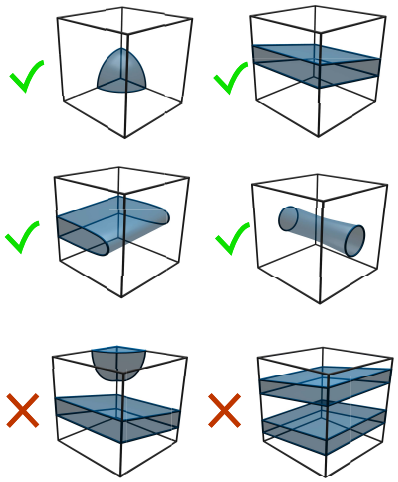


FIGURE 5.33 – Exemples d'intersections entre le maillage et la grille eulérienne extraits des publications de Chris Wojtan ; celles situées sur la dernières lignes ne sont pas valides et amènent à une redéfinition topologique.

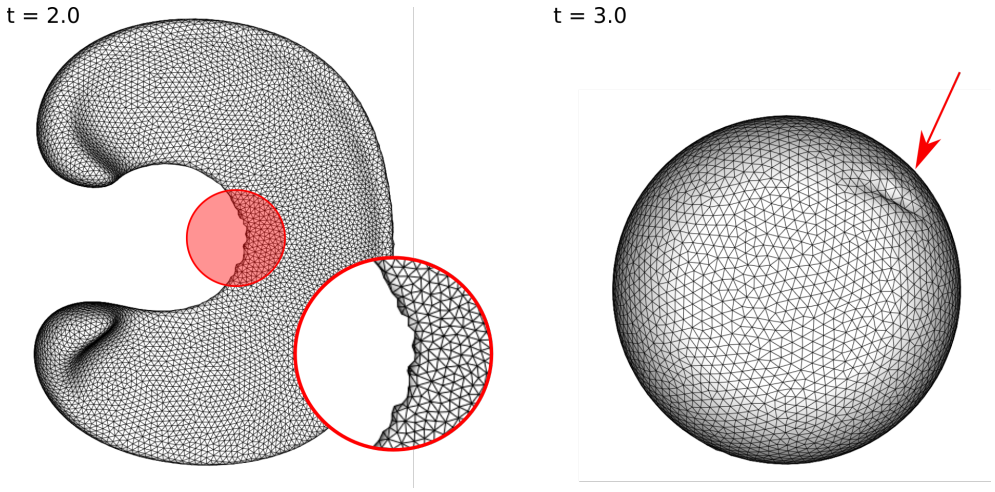


FIGURE 5.34 – Recul du front constaté lors de la contraction de la région présentant la plus forte courbure dans le test d'Enright (à gauche) ; l'erreur commise est retrouvée en fin de période (à droite).

Conclusion

Les surfaces déformables et la simulation d'écoulements fluides sont des sujets passionnants, très vastes et relativement difficiles à appréhender. Ils demandent une mise en œuvre longue et fastidieuse dont les résultats sont "différés" par les temps de calculs. L'étude présentée dans ce mémoire s'apparente à un travail préliminaire essentiellement centré sur la géométrie algorithmique et plus précisément la manipulation et l'interprétation des diagrammes de Voronoï restreints. Elle s'inscrit dans la lignée des travaux initiés par Lévy *et al.* proposant une technique de remaillage fondée sur les diagrammes de Voronoï restreints barycentriques.

Les premiers travaux présentés ici concernent l'ajustement de la décomposition surfacique afin d'assurer la définition d'une triangulation duale variété homéomorphe au domaine restrictif. L'objectif principal est de fournir une méthode de détection des configurations de cellules pathologiques et de proposer une correction du primal. En d'autres termes, la triangulation duale est alors définie mécaniquement et ne requiert aucun traitement supplémentaire pour assurer sa validité.

Les algorithmes déployés sont génériques et suggèrent d'autres applications ; deux d'entre elles sont exposées ici, la première propose d'associer une unique composante connexe à chacun des échantillons (définition d'une région d'influence) ; la seconde permet la modélisation locale de l'espace tridimensionnel aux abords du domaine surfacique (pseudo cellule 3d). L'originalité de cette dernière réside dans la prise en compte de configurations complexes (composantes connexes multiples ou différentes d'un simple disque).

Une autre tranche de travaux concerne la qualité géométrique de la nouvelle représentation et plus précisément de sa proximité volumique avec le domaine restrictif (modèle de référence). Elle consiste en une optimisation de la position des sommets du résultat d'un remaillage en vue de minimiser l'erreur induite par le changement de représentation. Elle s'avère particulièrement utile dans le contexte applicatif : le remaillage surfacique d'un domaine soumis à une déformation isochore.

Le dernier chapitre se concentre sur le problème initial et propose un ensemble de solutions permettant d'optimiser l'échantillonnage au grès de la déformation de la représentation surfacique. Les résultats sont encourageants et suggèrent une poursuite de l'étude. Celle-ci devra en partie porter sur le développement d'un système de simulation propre, largement compatible avec les algorithmes déjà mis en œuvre.

Publications :

IMR 2012 [LL12] - couvre partiellement les contributions présentées ici, en particulier l'approche naïve et les premiers pas de la version anisotrope.

JFIG 2020 - aperçu général de la méthode de remaillage pour le suivi de surface et introduction des derniers développements (maillage et échantillonnage évoluant en parallèle).

GTMG 2021 - présentation détaillée de la méthode de minimisation de l'erreur de volume (récompensée par un prix).

Bibliographie

[AB98] Nina Amenta et Marshall Bern : Surface reconstruction by voronoi filtering. *In Proceedings of the fourteenth annual symposium on Computational geometry*, SCG '98, pages 39–48, New York, NY, USA, 1998. ACM. (Cité en pages 39, 59, 60 et 94.)

[ABK98] Nina Amenta, Marshall Bern et Manolis Kamvysselis : A new voronoi-based surface reconstruction algorithm. *In Proceedings of the 25th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '98, pages 415–421, New York, NY, USA, 1998. ACM. (Cité en pages 19, 30 et 60.)

[AL10] F. Alauzet et A. Loseille : High-order sonic boom modeling based on adaptive methods. *J. Comput. Phys.*, 229(3):561–593, février 2010. (Cité en page 75.)

[AMN+98] Sunil Arya, David M. Mount, Nathan S. Netanyahu, Ruth Silverman et Angela Y. Wu : An optimal algorithm for approximate nearest neighbor searching fixed dimensions. *J. ACM*, 45(6):891–923, novembre 1998. (Cité en page 55.)

[And95] John David Anderson : *Computational fluid dynamics - the basic with applications*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, février 1995. (Cité en page 11.)

[APKG07] Bart Adams, Mark Pauly, Richard Keiser et Leonidas J. Guibas : Adaptively sampled particle fluids. *ACM Trans. Graph.*, 26(3), juillet 2007. (Cité en page 17.)

[Asa91] Y. Asami : A note on the derivation of the first and second derivatives of objective functions in geographical optimization problems. *Journal of Faculty of Engineering University of Tokyo,*, 61(1):1–13, 1991. (Cité en page 50.)

[BB08] Christopher Batty et Robert Bridson : Accurate viscous free surfaces for buckling, coiling, and rotating liquids. *In SCA '08 : Proceedings of the 2008 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Ani-*

mation, pages 219–228, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2008. Eurographics Association. (Cité en pages 3, 28, 153 et 171.)

[BB09] Tyson Brochu et Robert Bridson : Robust topological operations for dynamic explicit surfaces. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(4):2472–2493, 2009. (Cité en pages 22, 28, 93, 120, 121, 144, 146, 148, 154 et 179.)

[BFA02] Robert Bridson, Ronald Fedkiw et John Anderson : Robust treatment of collisions, contact and friction for cloth animation. *ACM Trans. Graph.*, 21(3):594–603, juillet 2002. (Cité en page 28.)

[BGOS06] Adam W. Bargteil, Tolga G. Goktekin, James F. O'brien et John Strain : A semi-lagrangian contouring method for fluid simulation. *ACM Trans. Graph.*, 25(1):19–38, 2006. (Cité en page 26.)

[BHN07] Robert Bridson, Jim Houriham et Marcus Nordenstam : Curl-noise for procedural fluid flow. *ACM Trans. Graph.*, 26(3), juillet 2007. (Cité en pages 21, 22 et 146.)

[BL17] Dobrina Boltcheva et Bruno Levy : Surface reconstruction by computing restricted Voronoi cells in parallel. *Computer-Aided Design*, 90:123 – 134, septembre 2017. (Cité en page 19.)

[Bli82] James F. Blinn : A generalization of algebraic surface drawing. *ACM Trans. Graph.*, 1(3):235–256, juillet 1982. (Cité en page 17.)

[Bro06] Tyson Brochu : Fluid animation with explicit surface meshes and boundary-only dynamics. Mémoire de D.E.A., University of British Columbia, 2006. (Cité en page 121.)

[BWY08] Jean-Daniel Boissonnat, Camille Wormser et Mariette Yvinec : Anisotropic diagrams : Labelle shewchuk approach revisited. *Theor. Comput. Sci.*, 408:163–173, November 2008. (Cité en page 75.)

[BXH10] Christopher Batty, Stefan Xenos et Ben Houston : Tetrahedral embedded boundary methods for accurate and flexible adaptive fluids. *In Proceedings of Eurographics*, 2010. (Cité en pages 22, 37, 153 et 171.)

[CLT07] Keenan Crane, Ignacio Llamas et Sarah Tariq : *Real Time Simulation and Rendering of 3D Fluids*, chapitre 30. Addison-Wesley, 2007. (Cité en page 38.)

[CMB04] Jorge Cortes, Sonia Martinez et Francesco Bullo : Spatially-distributed coverage optimization and control with limited-range interactions. *In ESAIM. Control, Optimisation & Calculus of Variations*, pages 691–719, 2004. (Cité en page 50.)

[CMBT02] Mark Carlson, Peter J. Mucha, R. Brooks Van Horn et Greg Turk : Melting and flowing. *In SCA '02 : Proceedings of the 2002 ACM SIG-*

GRAPH/Eurographics symposium on Computer animation, pages 167–174, New York, NY, USA, 2002. ACM. (Cité en page 21.)

[CR99] Sharen J. Cummins et Murray Rudman : An sph projection method. *J. Comput. Phys.*, 152(2):584–607, 1999. (Cité en pages 15 et 17.)

[DBG14] Fang Da, Christopher Batty et Eitan Grinspun : Multimaterial mesh-based surface tracking. *ACM Trans. on Graphics (SIGGRAPH 2014)*, 2014. (Cité en page 121.)

[Del34] Boris N. Delaunay : Sur la sphère vide. *Bulletin de l'Académie impériale des sciences de L'URSS*, 6(6):793–800, 1934. (Cité en pages 42 et 45.)

[DFG99] Qiang Du, Vance Faber et Max Gunzburger : Centroidal voronoi tessellations : Applications and algorithms. *SIAM Rev.*, 41(4):637–676, décembre 1999. (Cité en pages 46, 47, 49 et 50.)

[DFG+06] Jian Du, Brian Fix, James Glimm, Xicheng Jia, Xiaolin Li, Yuanhua Li et Lingling Wu : A simple package for front tracking. *Journal of Computational Physics*, 213(2):613 – 628, 2006. (Cité en pages 26, 70 et 92.)

[DG96] Mathieu Desbrun et Marie-Paule Gascuel : Smoothed particles : a new paradigm for animating highly deformable bodies. *In Proceedings of the Eurographics workshop on Computer animation and simulation '96*, pages 61–76, New York, NY, USA, 1996. Springer-Verlag New York, Inc. (Cité en page 15.)

[DGH01] Tamal K. Dey, Joachim Giesen et James Hudson : Delaunay based shape reconstruction from large data. *In Proceedings of the IEEE 2001 Symposium on Parallel and Large-data Visualization and Graphics*, PVG '01, pages 19–27, Piscataway, NJ, USA, 2001. IEEE Press. (Cité en page 19.)

[dGWH+15] Fernando de Goes, Corentin Wallez, Jin Huang, Dmitry Pavlov et Mathieu Desbrun : Power particles : An incompressible fluid solver based on power diagrams. *ACM Trans. Graph.*, 34(4), juillet 2015. (Cité en page 17.)

[DHB+16] Fang Da, David Hahn, Christopher Batty, Chris Wojtan et Eitan Grinspun : Surface-only liquids. *ACM Trans. on Graphics (SIGGRAPH 2016)*, 2016. (Cité en page 153.)

[dL81] J.L. de Lagrange : *Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides.* Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin, 1781. (Cité en page 10.)

[DLG90] Nira Dyn, David Levine et John A. Gregory : A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control. *ACM Trans. Graph.*, 9:160–169, April 1990. (Cité en pages 120 et 144.)

[EDD+95] Matthias Eck, Tony DeRose, Tom Duchamp, Hugues Hoppe, Michael Lounsbery et Werner Stuetzle : Multiresolution analysis of arbitrary meshes. *In Proceedings of the 22Nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '95, pages 173–182, New York, NY, USA, 1995. ACM. (Cité en page 52.)

[EFFM02] Douglas Enright, Ronald Fedkiw, Joel Ferziger et Ian Mitchell : A hybrid particle level set method for improved interface capturing. *J. Comput. Phys.*, 183(1):83–116, 2002. (Cité en pages 24, 146 et 147.)

[ELF05] Douglas Enright, Frank Losasso et Ronald Fedkiw : A fast and accurate semi-lagrangian particle level set method. *Comput. Struct.*, 83(6-7):479–490, février 2005. (Cité en page 24.)

[EM90] Herbert Edelsbrunner et Ernst Peter Mücke : Simulation of simplicity : a technique to cope with degenerate cases in geometric algorithms. *ACM Trans. Graph.*, 9(1):66–104, janvier 1990. (Cité en pages 41 et 104.)

[ENGF03] Douglas Enright, Duc Nguyen, Frédéric Gibou et Ronald Fedkiw : Using the particle level set method and a second order accurate pressure boundary condition for free surface flows. *In Proc. of the 4th ASME-JSME Joint Fluids Eng. Conf.*, juin 2003. (Cité en page 24.)

[ES97] H. Edelsbrunner et N.R. Shah : Triangulating topological spaces. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 7(4): 365–378, 1997. (Cité en pages 67, 68 et 87.)

[Eul87] Leonhard Euler : *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum.* Petri Galeati, 1787. (Cité en page 10.)

[FB99] Pascal J. Frey et Houman Borouchaki : Surface mesh quality evaluation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45:101–118, 1999. (Cité en pages 38, 39 et 151.)

[Fef00] Charles L. Fefferman : EXISTENCE and SMOOTHNESS OF THE NAVIER-STOKES EQUATION. Clay instute millenium problem, Princeton University, Department of Mathematics, mai 2000. (Cité en page 12.)

[FM96] Nick Foster et Dimitri Metaxas : Realistic animation of liquids. *Graph. Models Image Process.*, 58(5):471–483, 1996. (Cité en pages 21 et 24.)

[FOK05] Bryan E. Feldman, James F. O'Brien et Bryan M. Klingner : Animating gases with hybrid meshes. *In SIGGRAPH '05 : ACM SIGGRAPH 2005 Papers*, pages 904–909, New York, NY, USA, 2005. ACM. (Cité en page 22.)

[For86] S Fortune : A sweepline algorithm for voronoi diagrams. *In SCG '86 : Proceedings of the second annual symposium on Computational geometry*, pages 313–322, New York, NY, USA, 1986. ACM. (Cité en page 42.)

[GB97] Paul-Louis George et Houman Borouchaki : *Triangulation de Delaunay et maillage*. Hermès, Paris, 1997. Triangle, tétraèdre, triangulation, maillage. Triangulation de Delaunay. Triangulation contrainte. Triangulation anisotrope. Maillage plan. Maillage d'une surface paramétrique. Maillage volumique. Optimisations. Adaptation de maillages. Bases de données. Maillage d'une frontière. Applications aux éléments finis. Autres applications. (Cité en pages 39, 40 et 148.)

[GD03] Philippe Guigue et Olivier Devillers : Fast and Robust Triangle-Triangle Overlap Test Using Orientation Predicates. *Journal of graphics tools*, 8(1):39–52, 2003. (Cité en page 172.)

[GGL+98] James Glimm, John W. Grove, Xiao Lin Li, Keh ming Shyue, Yanni Zeng et Qiang Zhang : Three-dimensional front tracking. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(3):703–727, 1998. (Cité en page 26.)

[GH97] Michael Garland et Paul S. Heckbert : Surface simplification using quadric error metrics. *In Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, SIGGRAPH '97, pages 209–216, New York, NY, USA, 1997. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co. (Cité en page 144.)

[Gin77] J. J. Gingold, R. A. ; Monaghan : Smoothed particle hydrodynamics - theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181:375–389, Nov 1977. (Cité en page 15.)

[GM82] R.A Gingold et J.J Monaghan : Kernel estimates as a basis for general particle methods in hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 46(3):429 – 453, 1982. (Cité en page 16.)

[HNB+06] Ben Houston, Michael B. Nielsen, Christopher Batty, Ola Nilsson et Ken Museth : Hierarchical rle level set : A compact and versatile deformable surface representation. *ACM Trans. Graph.*, 25(1):151–175, 2006. (Cité en page 164.)

[HW65] Francis H. Harlow et Eddie J. Welch : Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids*, 8(12):2182–2189, 1965. (Cité en pages 20 et 24.)

[IMO84] Masao Iri, Kazuo Murota et Takao Ohya : A fast voronoi-diagram algorithm with applications to geographical optimization problems. *In* P. Thoft-Christensen, éditeur : *System Modelling and Optimization*, volume 59 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 273–288. Springer Berlin Heidelberg, 1984. (Cité en page 50.)

[IOS+14] Markus Ihmsen, Jens Orthmann, Barbara Solenthaler, Andreas Kolb et Matthias Teschner : SPH Fluids in Computer Graphics. *In*

Sylvain Lefebvre et Michela Spagnuolo, éditeurs : *Eurographics 2014 - State of the Art Reports*. The Eurographics Association, 2014. (Cité en page 16.)

[JCNH10] Xiangmin Jiao, Andrew Colombi, Xinlai Ni et John Hart : Anisotropic mesh adaptation for evolving triangulated surfaces. *Eng. with Comput.*, 26(4):363–376, août 2010. (Cité en page 27.)

[Jia07] Xiangmin Jiao : Face offsetting : A unified approach for explicit moving interfaces. *Journal of computational physics*, 220(2):612–625, 2007. (Cité en pages 27, 120 et 144.)

[JN06] S. J. Wright J. Nocedal : *Numerical Optimization*. Springer, New York, 2nd édition, 2006. (Cité en page 51.)

[KS95] P. Kauffmann et J.-C. Sperhner : Sur l'algorithme de fortune. *Revue internationale de CFAO et d'informatique graphique*, 10(4):321–336, nov 1995. (Cité en page 42.)

[LA11a] Adrien Loseille et Frédéric Alauzet : Continuous mesh framework part i : Well-posed continuous interpolation error. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 49(1):38–60, 2011. (Cité en page 75.)

[LA11b] Adrien Loseille et Frédéric Alauzet : Continuous mesh framework part ii : Validations and applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 49(1):61–86, 2011. (Cité en page 75.)

[LB13] Bruno Lévy et Nicolas Bonneel : Variational anisotropic surface meshing with voronoi parallel linear enumeration. *In* Xiangmin Jiao et Jean-Christophe Weill, éditeurs : *Proceedings of the 21st International Meshing Roundtable*, pages 349–366. Springer Berlin Heidelberg, 2013. (Cité en pages 31, 53, 59, 75, 76, 110, 120 et 169.)

[LC87] William E. Lorensen et Harvey E. Cline : Marching cubes : A high resolution 3d surface construction algorithm. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 21(4):163–169, août 1987. (Cité en page 19.)

[LCT11] Yong-Jin Liu, Zhanqing Chen et Kai Tang : Construction of iso-contours, bisectors, and voronoi diagrams on triangulated surfaces. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 33(8):1502–1517, août 2011. (Cité en page 52.)

[LGF04] Frank Losasso, Frédéric Gibou et Ronald Fedkiw : Simulating water and smoke with an octree data structure. *In SIGGRAPH '04 : ACM SIGGRAPH 2004 Papers*, pages 457–462, New York, NY, USA, 2004. ACM. (Cité en pages 22 et 24.)

[LL10] Bruno Lévy et Yang Liu : Lp centroidal voronoi tesselation and its applications. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH conference*

proceedings), 2010. patent pending - FR 10/02920 (filed 07/09/10). (Cité en pages 53, 72, 74 et 120.)

[LL12] David Lopez et Bruno Lévy : Dynamic Mesh Optimization for Free Surfaces in Fluid Simulation. *In IMR - 21th international meshing roundtable - 2012*, pages 1–5, San José, États-Unis, octobre 2012. Xiangmin Jiao and Jean-Christophe Weill. (Cité en pages 53, 92 et 184.)

[Llo82] Stuart P. Lloyd : Least squares quantization in PCM. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-28(2):129–137, mars 1982. (Cité en page 46.)

[LN89] D. C. Liu et J. Nocedal : On the limited memory bfgs method for large scale optimization. *Math. Program.*, 45(3):503–528, décembre 1989. (Cité en page 125.)

[LS03] Francois Labelle et Jonathan Richard Shewchuk : Anisotropic voronoi diagrams and guaranteed-quality anisotropic mesh generation. *In Proceedings of the nineteenth annual symposium on Computational geometry*, SCG '03, pages 191–200, New York, NY, USA, 2003. ACM. (Cité en page 73.)

[LS18] Bruno Lévy et Erica L. Schwindt : Notions of optimal transport theory and how to implement them on a computer. *Computers and Graphics*, 72:135–148, 2018. (Cité en page 17.)

[LTKF08] Frank Losasso, Jerry Talton, Nipun Kwatra et Ronald Fedkiw : Two-way coupled sph and particle level set fluid simulation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 14(4):797–804, 2008. (Cité en page 17.)

[Luc77] L.B. Lucy : A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, 82:1013–1024, décembre 1977. (Cité en page 15.)

[LWL+09] Yang Liu, Wenping Wang, Bruno Lévy, Feng Sun, Dong-Ming Yan, Lin Lu et Chenglei Yang : On centroidal voronoi tessellation - energy smoothness and fast computation. *ACM Trans. Graph.*, 28(4):101 :1–101 :17, septembre 2009. (Cité en pages 50 et 51.)

[Lé14] Bruno Lévy : Restricted voronoi diagrams for (re)-meshing surfaces and volumes. *In Curves and Surfaces*, 2014. (Cité en pages 77 et 105.)

[MBE+10] Marek Krzysztof Misztal, Robert Bridson, Kenny Erleben, Jakob Andreas Bærentzen et François Anton : Optimization-based fluid simulation on unstructured meshes. *In Proceedings of the Seventh Workshop on Virtual Reality Interactions and Physical Simulations, VRIPHYS 2010, Copenhagen, Denmark, 2010.*, pages 11–20, 2010. (Cité en page 27.)

[MCG03] Matthias Müller, David Charypar et Markus Gross : Particle-based fluid simulation for interactive applications. *In SCA '03 : Proceedings of*

the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation, pages 154–159, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2003. Eurographics Association. (Cité en pages 15, 16 et 17.)

[MDSB03] Mark Meyer, Mathieu Desbrun, Peter Schröder et AlanH. Barr : Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. *In* Hans-Christian Hege et Konrad Polthier, éditeurs : *Visualization and Mathematics III*, Mathematics and Visualization, pages 35–57. Springer Berlin Heidelberg, 2003. (Cité en pages 35 et 158.)

[MEB+12] M. K. Misztal, K. Erleben, A. Bargteil, J. Fursund, B. Bunch Christensen, J. A. Bærentzen et R. Bridson : Multiphase flow of immiscible fluids on unstructured moving meshes. *In Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, SCA '12, page 97–106, Goslar, DEU, 2012. Eurographics Association. (Cité en page 17.)

[Mon92] Joe J. Monaghan : Smoothed particle hydrodynamics. *Annual review of astronomy and astrophysics*, 30:543–574, 1992. (Cité en page 15.)

[Mon94] J.J. Monaghan : Simulating free surface flows with sph. *J. Comput. Phys.*, 110(2):399–406, février 1994. (Cité en page 16.)

[MT00] Sia Meshkat et Dafna Talmor : Generating a mixed mesh of hexahedra, pentahedra and tetrahedra from an underlying tetrahedral mesh. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49(1-2):17–30, 2000. (Cité en page 74.)

[MTF+08] S. McKee, M.F. Tomé, V.G. Ferreira, J.A. Cuminato, A. Castelo, F.S. Sousa et N. Mangiavacchi : The mac method. *Computers & Fluids*, 37(8):907 – 930, 2008. (Cité en page 21.)

[Nas56] J. F. Nash : The imbedding problem for riemannian manifolds. *Annals of Mathematics*, 63:20–63, 1956. (Cité en page 77.)

[Nie06] Michael B. Nielsen : *"Efficient and High Resolution Level Set Simulations - Data Structures, Algorithms and Applications"*. Thèse de doctorat, Aarhus University, 2006. (Cité en page 164.)

[Niv12] Vincent Nivoliers : *Échantillonnage pour l'approximation de fonctions sur des maillages*. Thèse de doctorat, Université de Lorraine, nov. 2012. (Cité en pages 50, 57, 58 et 70.)

[NL13] Vincent Nivoliers et Bruno Lévy : Approximating functions on a mesh with restricted voronoi diagrams. *In ACM/EG Symposium on Geometry Processing / Computer Graphics Forum*, 2013. (Cité en pages 58 et 73.)

[NLG15] Vincent Nivoliers, Bruno Lévy et Christophe Geuzaine : Anisotropic and feature sensitive triangular remeshing using normal l ifting. *Journal*

of Computational and Applied Mathematics, 289, December 2015. (Cité en page 77.)

[NYL11] Vincent Nivoliers, Dongming Yan et Bruno Lévy : Fitting polynomial surfaces to triangular meshes with voronoi squared distance minimization. *In International Meshing Roundtable conference proceedings*, 2011. (Cité en pages 53 et 73.)

[OBS+00] Atsuyuki Okabe, Barry Boots, Kokichi Sugihara, Sung N. Chiu et Sung N. Chiu : *Spatial Tessellations : Concepts and Applications of Voronoi Diagrams (Wiley Series in Probability and Statistics)*. Wiley series in probability and statistics. Wiley, 2 édition, aug 2000. (Cité en page 45.)

[OF03] Stanley Osher et Ronald P. Fedkiw : *Level set methods and dynamic implicit surfaces*. Applied mathematical science. Springer, New York, N.Y., 2003. (Cité en page 24.)

[OS88] Stanley Osher et James A. Sethian : Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 79(1):12–49, 1988. (Cité en page 24.)

[PB07] J.-P. Pons et Jean-daniel Boissonnat : Delaunay deformable models : Topology-adaptive meshes based on the restricted delaunay triangulation. *In Computer Vision and Pattern Recognition, 2007. CVPR '07. IEEE Conference on*, pages 1–8, June 2007. (Cité en page 26.)

[Pet99] Jean-Pierre Petit : *Les Aventures d'Anselme Lanturlu : Le Topologicon*. belin, 1999. (Cité en page 65.)

[RSLL18] Nicolas Ray, Dmitry Sokolov, Sylvain Lefebvre et Bruno Lévy : Meshless Voronoi on the GPU. *ACM Transactions on Graphics*, 37, 2018. (Cité en pages 49 et 130.)

[Ryc09] Chris H. Rycroft : *Voro++ : a three-dimensional Voronoi cell library in C++*, 2009. (Cité en page 130.)

[SH74] Ivan Sutherland et Gary W. Hodgman : Reentrant polygon clipping. *Communications of the ACM*, 17:32–42, 1974. (Cité en pages 53 et 130.)

[Sig97] L.W. Sigurdson : "flow visualization in turbulent large-scale structure research". *In 7th Asian Symposium on Visualization*, volume 3, pages 99–113, 1997. (Cité en page 9.)

[SP09] B. Solenthaler et R. Pajarola : Predictive-corrective incompressible sph. *ACM Trans. Graph.*, 28(3):40 :1–40 :6, juillet 2009. (Cité en page 16.)

[Sta99] Jos Stam : Stable fluids. *In SIGGRAPH '99 : Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 121–128, New York, NY, USA, 1999. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co. (Cité en pages 21 et 38.)

[TWGT10] Nils Thürey, Chris Wojtan, Markus Gross et Greg Turk : A multiscale approach to mesh-based surface tension flows. *ACM Trans. Graph.*, 29(4):1–10, 2010. (Cité en pages 21, 26 et 37.)

[WB14] Witalij Wambold et Günter Bärwolff : New mesh motion solver for large deformations based on cvt. *Procedia Engineering*, 82:390 – 402, 2014. 23rd International Meshing Roundtable (IMR23). (Cité en page 92.)

[Wil08] Brent Williams : Fluid surface reconstruction from particles. Mémoire de D.E.A., University of Waterloo, 2008. (Cité en page 19.)

[WTGT09] Chris Wojtan, Nils Thürey, Markus Gross et Greg Turk : Deforming meshes that split and merge. *ACM Trans. Graph.*, 28(3):76 :1–76 :10, juillet 2009. (Cité en pages 2, 26 et 121.)

[WTGT10] Chris Wojtan, Nils Thürey, Markus Gross et Greg Turk : Physics-inspired topology changes for thin fluid features. *ACM Trans. Graph.*, 29(4):1–8, 2010. (Cité en pages 26, 178 et 180.)

[WXT+20] Pengfei Wang, Shiqing Xin, Changhe Tu, Dongming Yan, Yuanfeng Zhou et Caiming Zhang : Robustly computing restricted voronoi diagrams (rvd) on thin-plate models. *Computer Aided Geometric Design*, 79:101848, 2020. (Cité en pages 99 et 116.)

[XYH11] Shi-Qing Xin, Xiang Ying et Ying He : Constant-time o(1) all pairs geodesic distance query on triangle meshes. *In SIGGRAPH Asia 2011 Sketches*, SA '11, pages 23 :1–23 :2, New York, NY, USA, 2011. ACM. (Cité en page 52.)

[Yap90] Chee-Keng Yap : Symbolic treatment of geometric degeneracies. *J. Symb. Comput.*, 10(3-4):349–370, août 1990. (Cité en page 41.)

[YLL+09] Dong-Ming Yan, Bruno Lévy, Yang Liu, Feng Sun et Wenping Wang : Isotropic remeshing with fast and exact computation of restricted voronoi diagram. *In Proceedings of the Symposium on Geometry Processing*, SGP '09, pages 1445–1454, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2009. Eurographics Association. (Cité en pages 31, 51, 53, 59, 69, 70, 71, 87, 92, 112 et 120.)

[YT10] Jihun Yu et Greg Turk : Reconstructing surfaces of particle-based fluids using anisotropic kernels. *In Proceedings of the 2010 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, SCA '10, pages 217–225, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2010. Eurographics Association. (Cité en page 18.)

[YWTY12] Jihun Yu, Chris Wojtan, Greg Turk et Chee Yap : Explicit mesh surfaces for particle based fluids. *EUROGRAPHICS 2012*, 30:41–48, 2012. (Cité en page 19.)

[ZB05] Yongning Zhu et Robert Bridson : Animating sand as a fluid. *ACM Trans. Graph.*, 24(3):965–972, juillet 2005. (Cité en page 17.)

[ZGW+13] Zichun Zhong, Xiaohu Guo, Wenping Wang, Bruno Lévy, Feng Sun, Yang Liu et Weihua Mao : Particle-based anisotropic surface meshing. *ACM Trans. Graph.*, 32(4):99 :1–99 :14, juillet 2013. (Cité en page 77.)

[ZSP08] Yanci Zhang, Barbara Solenthaler et Renato Pajarola : Adaptive sampling and rendering of fluids on the gpu. *In Proceedings Symposium on Point-Based Graphics*, pages 137–146, 2008. (Cité en pages 15 et 38.)

[ZWL+18] Zichun Zhong, Wenping Wang, Bruno Lévy, Jing Hua et Xiaohu Guo : Computing a high-dimensional euclidean embedding from an arbitrary smooth riemannian metric. *ACM Trans. Graph.*, 37(4), juillet 2018. (Cité en page 110.)

Diagrammes de Voronoï et surfaces évolutives

Résumé :

Dans ce mémoire, nous proposons de répondre au problème de suivi de surface déformable à l'aide d'une technique de remaillage fondée sur les diagrammes de Voronoï restreints. Ces derniers offrent une une partition d'un domaine surfacique permettant entre autre d'optimiser la répartition d'un ensemble d'échantillons sur ce domaine et d'en définir une triangulation remarquable : la triangulation de Delaunay restreinte.

Cette solution de remaillage n'est efficace que lorsque certaines conditions sont réunies. Aussi, le premier travail a consisté à mettre en œuvre une technique d'analyse des configurations de cellules et une méthode de correction automatique permettant de générer une nouvelle approximation homéomorphe au domaine initial quelque soit l'échantillonnage donné. Un second travail propose d'améliorer la proximité entre le maillage initial et le résultat du remaillage : il s'agit de minimiser l'erreur d'approximation qui est ici exprimée sous forme de différences locales de volume. Ces deux outils sont associés à une stratégie d'échantillonnage qui permet de maintenir une densité d'échantillonnage constante tout au long de la déformation et propose ainsi une nouvelle méthode de suivi d'une surface libre pour la simulation d'écoulement de fluides incompressibles.

Mots clés :

Remaillage, diagramme de Voronoï, triangulation de Delaunay, optimisation, simulation d'écoulement de fluides incompressibles à surface libre.

Voronoi diagrams and evolving surfaces

Abstract : In this paper, we propose to address the problem of tracking a deformable surface using a remeshing technique on restricted Voronoi diagrams. The latter offer a partition of a surface domain allowing, among other things, to optimize the distribution of a set of samples on this domain and to define a remarkable triangulation : the restricted Delaunay triangulation.

This remeshing solution is only effective when certain conditions are met. Thus, the first work consisted in implementing a cell configuration analysis technique and an automatic correction method allowing to generate a new new approximation homeomorphic to the initial domain whatever the given sampling. A second work proposes to improve the proximity between the initial mesh and the result of the remeshing : the aim is to minimize the approximation error which is here expressed as local volume differences. These two tools are associated with a sampling strategy that allows to maintain a constant sampling density throughout the deformation and thus proposes a new method to track free surfaces in incompressible fluid simulation.

Keywords :

Remeshing, Voronoi diagram, Delaunay triangulation, optimization, front tracking.