



**HAL**  
open science

# **Autour de la géométrie hyperbolique complexe, $SL(3,)$ , $SU(2,1)$ et quelques 3-variétés**

Pierre Will

► **To cite this version:**

Pierre Will. Autour de la géométrie hyperbolique complexe,  $SL(3,)$ ,  $SU(2,1)$  et quelques 3-variétés. Mathématiques [math]. Université Grenoble Alpes, 2021. <tel-03530224>

**HAL Id: tel-03530224**

**<https://hal.science/tel-03530224v1>**

Submitted on 17 Jan 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

**Pierre Will**

**Autour de la géométrie hyperbolique complexe,  
 $SL(3, \mathbb{C})$ ,  $SU(2, 1)$  et quelques 3-variétés.**

*soutenue le 11 mai 2021, devant un jury composé de :*

Gérard Besson	Institut Fourier	Président
Virginie Charette	Université de Sherbrooke	Examinatrice
Elisha Falbel	Sorbonne Université	Examinateur
Hervé Gaussier	Institut Fourier	Examinateur
William Goldman	University of Maryland	Rapporteur
Olivier Guichard	Université de Strasbourg	Rapporteur
John Parker	Durham University	Examinateur
Joan Porti	Universitat Autònoma de Barcelona	Examinateur
Martin Deraux	Institut Fourier	Examinateur invité.

*après avis de :*

William Goldman  
Olivier Guichard  
Joan Porti



## Remerciements.

J'aimerais tout d'abord remercier chaleureusement Bill Goldman, Olivier Guichard et Joan Porti, les rapporteurs de ce travail, qui m'ont fait l'honneur et le plaisir de le lire avec attention. Je les remercie également d'avoir accepté de participer à ce jury.

Je voudrais remercier Gérard Besson d'avoir accepté de faire partie de ce jury, et pour m'avoir encouragé à écrire ce mémoire. Je voudrais également le remercier pour nos conversations mathématiques, triangulaires et amicales.

Virginie Charette a accepté de participer à ce jury, j'en suis très touché. Mon année à Sherbrooke m'a été très bénéfique.

Hervé Gaussier me fait l'amitié de participer à ce jury, et je l'en remercie vivement.

Je voudrais remercier Elisha Falbel pour son soutien sans faille, son enthousiasme et son amitié depuis toutes ces années. Lorsque j'étais en thèse il y avait un "groupe des étudiants d'Elisha" et tout le monde était jaloux qu'on soit en thèse avec lui. Plus sérieusement, c'était vraiment bien. Merci également de participer à ce jury.

Pour son enthousiasme également, et pour avoir accepté de faire partie de ce jury, je voudrais remercier John Parker. C'est toujours un plaisir de faire des maths avec lui.

L'extrémité Nord du couloir 300 de l'institut Fourier est certainement l'un des endroits au monde où la densité hyperbolique complexe est la plus élevée ! Il est très agréable d'y travailler. Pour cela, je remercie vivement Martin auprès de qui j'apprends beaucoup, dans la bonne humeur et l'amitié. Merci également de participer à ce jury.

Depuis la thèse, Julien Paupert et moi avons continué à travailler ensemble. C'est plaisir, et j'espère pouvoir continuer "en vrai". Je souhaite également remercier Antonin Guilloux, c'est vraiment très agréable ( et très instructif ) de travailler ensemble. Mon premier papier en collaboration était avec Julien Marché, c'est un très bon souvenir et j'aimerais remercier Julien pour ces moments partagés. Je voudrais aussi avoir une pensée amicale pour Florent Schaffhauser avec qui nous avons souvent discuté depuis toutes ces années, notamment pendant l'écriture de ce mémoire.

J'aimerais aussi avoir une pensée amicale pour Emmanuel Giroux. J'ai un très bon souvenir d'une conversation à Montréal au cours de laquelle il m'a convaincu que ça valait la peine d'écrire cette habilitation.

Depuis que je suis arrivé à l'institut Fourier, j'ai profité de la gentillesse et de l'efficacité des membres de l'équipe administrative, et je voudrais remercier Géraldine, Ariane, Christine, Romain, Lindsay, Fanny, Francesca, Didier (merci d'avoir sauvé mon ordi !), Céline, Lilian, Patrick, Laurence. J'ai également profité de mes relations amicales avec mes collègues, avec lesquels j'ai (entre autres) appris à faire du vélo, à faire des maths, du ski, à enseigner, joué aux boules devant les dentelles de Montmirail, fait de la musique, échangé des coins à champignons (dans les limites du raisonnable, bien sûr), déménagé ...

Finalement, je voudrais remercier Claire pour la vie belle qu'elle me fait. Je voudrais aussi avoir une pensée émue pour Juliette et Raphaël, mes deux petits cocos :-).



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>L'espace hyperbolique complexe.</b>	<b>12</b>
2.1	Description . . . . .	12
2.1.1	Description ensembliste . . . . .	12
2.1.2	La métrique hyperbolique complexe . . . . .	13
2.1.3	La distance hyperbolique complexe . . . . .	15
2.1.4	Sous-espaces totalement géodésiques . . . . .	15
2.1.5	Les bissecteurs . . . . .	17
2.2	Le bord à l'infini . . . . .	18
2.3	Les classes de conjugaisons de $\text{PU}(2,1)$ . . . . .	21
2.3.1	Classes loxodromiques. . . . .	21
2.3.2	Classes elliptiques . . . . .	22
2.3.3	Classes paraboliques . . . . .	23
2.3.4	L'espace des classes de conjugaison de $\text{PU}(2,1)$ . . . . .	24
2.4	Quelques invariants de configurations de points. . . . .	25
<b>3</b>	<b>Représentations</b>	<b>28</b>
3.1	Introduction . . . . .	28
3.2	La variété des caractères $\chi_2(F_2)$ . . . . .	31
3.3	La variété des caractères $\chi_3(F_2)$ . . . . .	32
3.4	Représentations de certains groupes de trois variétés hyperboliques non-compactes de volume fini dans $\text{SL}(3, \mathbb{C})$ . . . . .	34
3.4.1	La méthode de Thurston pour $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ . . . . .	34
3.4.2	De $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ à $\text{PSL}(3, \mathbb{C})$ : adaptation de la méthode de Thurston. . . . .	36
3.5	Représentations du groupe de l'entrelacs de Whitehead dans $\text{SL}(3, \mathbb{C})$ . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Classes de conjugaisons.</b>	<b>44</b>
4.1	Motivation . . . . .	44

4.2	Problème de Horn multiplicatif dans $PU(2,1)$ . . . . .	47
4.2.1	Les cas de $SU(2)$ et $U(2)$ . . . . .	47
4.2.2	Problème de Horn multiplicatif dans $SU(1,1)$ et $U(1,1)$ . . . . .	50
4.2.3	Éléments sur le problème de Horn dans $PU(2,1)$ . . . . .	51
4.2.4	Le problème de Horn pour les classes paraboliques.[PW15] . . . . .	55
4.3	Involutions et commutateurs dans $PU(2,1)$ . [PW17c] et [PW17b] . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Groupes discrets et structures CR sphériques</b>	<b>66</b>
5.1	Motivations . . . . .	66
5.2	Uniformisations CR sphériques de 3-variétés hyperboliques . . . . .	70
5.2.1	Groupes triangulaires hyperboliques complexes. . . . .	71
5.2.2	Chercher des représentations via des remplissages de Dehn non hyperboliques. . . . .	75
5.3	Exploration d'un exemple : la tranche de Riley hyperbolique complexe. . . . .	79
5.3.1	Description de la tranche de Riley hyperbolique complexe. . . . .	81
5.3.2	Prouver la discrétude d'un groupe et analyser le quotient. . . . .	87
5.4	Une métrique de Hilbert sans convexité pour les uniformisations CR sphériques. [FGW20] . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Perspectives, projets.</b>	<b>96</b>
6.1	Représentations de groupes fondamentaux de 3-variétés dans $PU(2,1)$ . . . . .	96
6.2	Uniformisations CR . . . . .	97
6.2.1	Existence d'uniformisations . . . . .	97
6.2.2	Uniformisations et groupes triangulaires . . . . .	97
6.2.3	Uniformisations et réseaux . . . . .	98
6.2.4	Métrique Finsler . . . . .	98
6.3	Groupes de Schottky hyperboliques complexes et géométrie pseudo-riemmanienne. . . . .	99
6.4	Géométrie hyperbolique complexe en dimension supérieure . . . . .	100

# Chapitre 1

## Introduction

Le but de ce mémoire est de présenter mes travaux récents et les directions dans lesquelles je souhaite qu'ils aillent dans les prochaines années. Je présente principalement les résultats de mes travaux [PW15, PW17a, PW17c, PW17b, GW18, FGW20].

Je travaille sur des questions liées de près à la géométrie hyperbolique complexe, avec comme motivation principale l'étude des sous-groupes discrets de  $\mathrm{PU}(n,1)$  et des quotients associés de l'espace hyperbolique complexe  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ . La popularité - si l'on peut dire - de l'espace hyperbolique complexe vient probablement de la situation particulière qu'occupe son groupe d'isométries parmi les groupes de Lie vis à vis de la théorie des réseaux, notamment en ce qui concerne les questions d'arithméticité. Ainsi, parmi les espaces symétriques de type non-compact, on sait depuis des travaux de Margulis [Mar84], Corlette [Cor92] et Gromov-Schoen [GS92] que seuls les espaces hyperboliques réels et complexes ont des réseaux non-arithmétiques. Or s'il est relativement classique d'en construire dans l'espace hyperbolique réel ([GPS88]), la construction de tels réseaux reste extrêmement ardue dans l'espace hyperbolique complexe, et les seuls exemples connus vivent en dimension 2 ou 3 : les premiers exemples remontent à Mostow [Mos80] et Deligne-Mostow [DM93], de nouveaux ont été construits plus récemment (voir [DPP11, DPP16, Der20]).

La principale question vers laquelle tendent mes travaux récents est la suivante : *quelles sont les 3-variétés qui admettent une structure géométrique modelée sur le bord à l'infini du plan hyperbolique complexe ?* Le bord à l'infini du plan hyperbolique complexe peut être vu comme la sphère  $S^3$  munie de la structure  $CR$  provenant de l'inclusion  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ . Une 3-variété  $M$  est donc munie d'une telle structure si on peut l'équiper d'un atlas dont les cartes sont dans  $S^3$  et les changement de cartes dans  $\mathrm{PU}(2,1)$ . On parle souvent de structure géométrique au sens d'Ehresmann-Thurston, ou encore de  $(X, G)$ -structures, avec dans le cas présent  $X = S^3$  et  $G = \mathrm{PU}(2,1)$ . Il s'agit d'une contrepartie hyperbolique complexe aux structures conformes plates, qui sont modelées sur le bord à l'infini de l'espace hyperbolique réel. La théorie des structures géométriques associe à cette donnée une représentation

d'holonomie  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow PU(2,1)$  et une application développante  $D : \tilde{M} \rightarrow S^3$  qui est  $(\pi_1(M), \rho)$ -équivariante. Ces structures ont été étudiées en particulier depuis Burns et Shneider [BS76] (voir également, par exemple, [KT91], [FG94]). Il s'agit ici d'une géométrie non-riemmanienne, puisque les stabilisateurs des points ne sont pas compacts.

Je m'intéresse plus particulièrement à la question des *uniformisations CR sphériques*, qui apparaissent dans la situation suivante. Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $PU(2,1)$ , d'ensemble limite  $\Lambda$  et d'ensemble de discontinuité  $\Omega = S^3 \setminus \Lambda$ . Supposons  $\Omega$  non-vidé. Cette hypothèse impose que le groupe  $\Gamma$  soit "petit", elle exclut en particulier les réseaux et  $\Gamma$  est donc de covolume infini. On peut former le quotient  $M = \Omega/\Gamma$  qui est une 3-variété (ou un 3-orbifold), variété à l'infini du quotient  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2/\Gamma$ , et on dit alors que le groupe  $\Gamma$  uniformise  $M$ . Dans le cadre d'une uniformisation, l'image de l'application de développement  $D$  est un revêtement de son image  $\Omega$ , et l'image de  $\rho$  est le groupe  $\Gamma$  (mais  $D$  n'est pas une surjection sur  $S^3$ ). On connaît d'assez nombreux exemples d'uniformisations CR sphériques de fibrés en cercles sur des surfaces (voir l'introduction du chapitre 5), mais le sujet a connu un certain renouveau au début des années 2000, lorsque Richard E. Schwartz a produit plusieurs exemples d'uniformisations CR sphériques de 3-variétés hyperboliques, liés de près à des constructions explicites de sous-groupes discrets de  $PU(2,1)$ , dues notamment à Goldman et Parker ([GP92]). L'objet produit par une telle uniformisation est une variété, ou un orbifold, hyperbolique complexe, de volume infini dont le bord à l'infini est une variété hyperbolique réelle. Se posent alors de nombreuses questions naturelles. Peut-on trouver une source d'exemples facile à étudier? Peut-on classifier ces objets? Toute 3-variété hyperbolique peut-elle être obtenue ainsi? Si non, peut-on donner des obstructions?

Les 3-variétés admettant une uniformisation CR sphériques ont ceci de remarquable qu'elles héritent d'une structure de contact, qui provient de celle de  $S^3$ . Cette structure de contact est automatiquement tendue, car ces variétés sont des bords de variétés symplectiques. La question de construire de telles structures est importante dans le monde de la géométrie de contact (voir par exemple [CH18]).

Bien qu'on connaisse aujourd'hui davantage d'exemples, la plupart de ces questions restent sans réponse générale. Les travaux de Schwartz montrent que les groupes triangulaires hyperboliques complexes, qui sont des déformations naturelles des groupes triangulaires fuchsien, sont une source d'exemples (voir le chapitre 5, on nous en donnerons un résumé). Cependant, comme pour de nombreuses questions liées aux groupes discrets en géométrie hyperbolique complexe, les aspects techniques restent difficiles.

Suite aux travaux de Schwartz, Falbel a initié un programme dans [Fal08] pour décrire les représentations des groupes fondamentaux de 3-variétés hyperboliques dans  $PU(2,1)$  et  $PGL(3, \mathbb{C})$  qu'il a développé avec ses collaborateurs (voir par exemple les travaux [BFG14, BFG<sup>+</sup>13, FKR15]). Il s'agit d'une généralisation de la méthode proposée par Thurston dans [Thu] pour construire des structures hyperboliques sur les 3-variétés. Une généralisation similaire a été également proposée par Garoufalidis et ses collaborateurs (voir [GGZ15, GTZ15]). L'idée sous-jacente est de construire d'abord la représentation, puis d'analyser

son image dans l'espoir de prouver qu'elle donne une structure, voire une uniformisation. Ce dernier aspect est souvent assez ardu, car il repose sur la construction de domaines fondamentaux en courbure variable.

Le but de ce mémoire est de présenter mes contributions à ces questions. Je les ai classées en trois parties.

1. Le but de la première partie (chapitre 3) est d'étudier certains aspects de la recherche de représentations de groupes fondamentaux de 3-variétés dans  $SU(2,1)$  et  $SL(3,\mathbb{C})$ . Plus précisément, mon but est de mettre en contexte un résultat commun avec Antonin Guilloux, où nous décrivons une composante algébrique de la variété de caractères du groupe fondamental du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead dans  $SL(3,\mathbb{C})$ . Ce résultat est exposé dans la section 3.5. Cette composante est formée des caractères de représentations qui factorisent par un certain quotient du groupe de l'entrelacs de Whitehead, qui correspond à un remplissage de Dehn non-hyperbolique, qui est la somme connexe de deux espaces lenticulaires. Au delà du fait que très peu de variétés de caractères de variétés hyperboliques dans  $SL(3,\mathbb{C})$  sont connues, mon intérêt pour ce résultat réside dans le fait que cette composante donne des représentations faciles à construire du groupe de l'entrelacs de Whitehead, et surtout, qu'elles sont géométriquement intéressantes. De fait, cette composante contient les caractères de nombreuses holonomies d'uniformisations connues à ce jour. De plus il semble raisonnable d'espérer appliquer cette méthode pour obtenir des composantes d'autres variétés de caractères.
2. Dans la seconde partie (chapitre 4) je m'intéresse aux contraintes qui existent sur les classes de conjugaison dans un sous-groupe de  $PU(2,1)$  à deux générateurs. Plus précisément : supposons qu'un tel sous-groupe soit engendré par deux transformations  $A$  et  $B$  appartenant à deux classes de conjugaisons données  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$ . Soit  $W$  un mot en  $A$  et  $B$ . Quelles sont les classes de conjugaisons possibles pour  $W$  ? Posée telle qu'elle cette question est trop difficile : son cas le plus simple, lorsque  $W = AB$  est le fameux problème de Horn, dont une solution complète est connue dans le cadre des groupes compacts ([Res13, BK16]), mais pas en général dans le cas des groupes de rang 1. Dans le chapitre 4, j'expose tout d'abord certains résultats connus, principalement dûs à Falbel-Wentworth [FW09] et Paupert [Pau07], qui traitent du problème de Horn pour les classes semi simples de  $PU(2,1)$ . Puis, je discute mes contributions (en collaboration avec John Parker [PW15]), qui concernent le problème de Horn pour les classes de conjugaisons paraboliques. Enfin, j'expose des résultats communs avec Julien Paupert qui concernent les contraintes imposées sur les classes de conjugaisons dans le cas de paires d'isométries  $(A, B)$  qui ont la propriétés d'être *décomposables*, c'est à dire de pouvoir s'écrire sous la forme

$$A = I_1 I_2 \text{ et } B = I_2 I_3,$$

où les  $I_k$  sont des involutions isométriques. L'intérêt de l'existence d'une telle décomposition est de ramener l'étude du groupe  $\langle A, B \rangle$  à celle d'un groupe triangulaire. Ces résultats proviennent des travaux [PW17c] et [PW17b].

3. Dans le chapitre 5, je m'intéresse plus directement aux uniformisations. Après un panorama de certains résultats connus, je propose dans la section 5.2.2 une méthode pour rechercher des représentations en passant par des remplissages de Dehn analogues à celui considéré dans le chapitre 3. Plus précisément, étant donné une 3-variété hyperbolique  $M$ , je propose d'étudier les représentations de  $\pi_1(M)$  dans  $\mathrm{PU}(2,1)$  qui factorisent par un quotient de  $\pi_1(M)$  qui est un produit libre de deux groupes finis. Topologiquement, il s'agit de trouver des remplissages de Dehn de  $M$  qui sont des sommes connexes de deux espaces lenticulaires. Ceci motive a posteriori les questions du chapitre 4. En effet, l'image d'une représentation qui factorise par un tel quotient est engendrée par deux éléments elliptiques d'ordre fini. Or pour obtenir des uniformisations, il est naturel d'imposer certaines contraintes sur les classes de conjugaison. Ainsi, pour uniformiser une variété hyperbolique à cusps, on impose souvent que les éléments périphéraux soient paraboliques. Je présente ensuite mon travail commun avec John Parker [Wil07] en l'interprétant comme un exemple d'exploration d'une famille de représentations obtenues par cette méthode. Nous avons baptisée cette famille de représentation *tranche de Riley hyperbolique complexe* en référence à une famille bien connue en géométrie des groupes kleinien. Dans la section 5.4 du chapitre, je présente un résultat commun avec Antonin Guilloux et Elisha Falbel [FGW20], où nous construisons une métrique de Finsler sur les variétés CR uniformisées. Ce travail repose principalement sur une généralisation des géométries de Hilbert à certaines classes d'ouverts non convexes de l'espace projectif complexe.

J'ai essayé d'écrire ces trois chapitres de manière à ce qu'ils soient lisibles de manière indépendante. J'ai par exemple inclus pour chacun une assez longue introduction pour exposer mes motivations et certains résultats connus. J'ai également inclus un chapitre contenant une présentation rapide de l'espace hyperbolique complexe (chapitre 2), et un chapitre contenant des questions et perspectives de recherche pour les prochaines années (chapitre 6)

## Liste de mes travaux

### Travaux publiés dans des revues à comité de lecture.

- [FGW20] (Avec E. Falbel et A. Guilloux) Hilbert geometry without convexity, *J. Geom. Anal.*, 30 (3), 2865–2896, 2020.
- [GW18] (Avec A. Guilloux) On  $SL(3, \mathbb{C})$ -representations of the Whitehead link group, *Geom. Ded.*, 202, 81–101, 2019.
- [PW17c] (Avec J. Paupert) Real reflections, commutators and cross-ratios in complex hyperbolic space, *Groups Geom. Dyn.*, 11, 311–352, 2017.
- [PW17a] (Avec J. Parker) A complex hyperbolic Riley slice, *Geom. Topol.*, 21 (6), 3391–3451, 2017.
- [PW17b] (Avec J. Paupert), Involution and commutator length for complex hyperbolic isometries, *Michigan Math. J.*, 66, 699–744, 2017.
- [PW15] (Avec J. Parker) Complex hyperbolic free groups with many parabolic elements. *Contemporary Mathematics*, 639, 327–348, 2015.
- [Wil12] Bending Fuchsian representations of fundamental groups of cusped surfaces in  $PU(2,1)$ . *J. Differential. Geom.*, 90(3), 473–520, 2012.
- [MW12] (Avec J. Marché) Configurations of flags and representations of surface groups in complex hyperbolic geometry. *Geom. Dedicata*, 156, 49–70, 2012.
- [Wil09] Traces, cross-ratios and 2-generator subgroups of  $SU(2,1)$ . *Can. J. Math.*, 61(6), 1407–1436, 2009.
- [Wil07] The punctured torus and Lagrangian triangle groups in  $PU(2,1)$ , *J. reine angew. Math.*, 602, 95–121, 2007.
- [Wil05] Lagrangian decomposability of some two-generator subgroups of  $PU(2,1)$ . *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 340(5), 353–358, 2005.

### Articles d'expositions.

- [Wil17] On spherical CR uniformisations of 3-manifolds. *Oberwolfach Report*, 14, 1925–1929, 2017.
- [Wil16] Two-generator groups acting on the complex hyperbolic plane. Papadopoulos, Athanase (ed.), Handbook of Teichmüller theory. Volume VI. Zürich : European Mathematical Society (EMS). *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics* 27, 275–334, 2016.
- [Wil08] Groupes triangulaires Lagrangiens en géométrie hyperbolique complexe. *Actes du Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie*, Année 2006–2007, 25, 189–209, 2007.



## Chapitre 2

# L'espace hyperbolique complexe.

### 2.1 Description

#### 2.1.1 Description ensembliste

La manière la plus élémentaire de décrire l'espace hyperbolique complexe est de passer par un modèle projectif. Toute forme hermitienne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de signature  $(n,1)$  sur  $\mathbb{C}^{n+1}$  donne une partition de  $\mathbb{C}^{n+1}$  en trois cônes, négatif, nul et positif, qui sont invariants sous l'action du groupe unitaire de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Notons ces trois cônes  $V^-$ ,  $V^0$  et  $V^+$  respectivement. Ensemblistement, l'espace hyperbolique complexe  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  est la projection du cône  $V^-$  sur  $\mathbb{C}P^n$ . Le choix d'une forme hermitienne particulière sur  $\mathbb{C}^{n+1}$  donne donc un système de coordonnées sur  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Les deux modèles que nous utiliserons dans ce texte sont les suivants. Toutes les matrices sont données dans la base canonique de  $\mathbb{C}^{n+1}$ , notée  $(e_i)_i$ .

1. Le *modèle de la boule*, est associé à la forme hermitienne donnée dans la base canonique de  $\mathbb{C}^{n+1}$  par la matrice

$$H_1 = \begin{bmatrix} I_n & \\ & -1 \end{bmatrix}.$$

On a donc dans ce cas  $\langle Z, Z \rangle = |Z_1|^2 + \dots + |Z_n|^2 - |Z_{n+1}|^2$ . La projection du cône négatif de  $H_1$  dans l'espace projectif est la boule unité de  $\mathbb{C}^n$  vu comme la carte affine  $Z_{n+1} = 1$ .

2. Le *modèle de Siegel*, associé à la forme hermitienne donnée dans la base canonique par

$$H_2 = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & I_{n-2} & \\ 1 & & \end{bmatrix}.$$

Cette fois  $\langle Z, Z \rangle = Z_1 \overline{Z_{n+1}} + Z_{n+1} \overline{Z_1} + |Z_2|^2 + \dots + |Z_n|^2$ , et le cône négatif de  $H_2$  se projette sur le domaine de Siegel défini par  $2\operatorname{Re}(Z_1) + |Z_2|^2 + \dots + |Z_n|^2 < 0$  (toujours dans la carte affine  $\{Z_{n+1} = 1\}$ ).

On peut penser à ces deux modèles comme représentant  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  vu respectivement d'un point à l'intérieur de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  (qui est le centre dans le modèle de la boule), et d'un point au bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  (qui est le point  $P(e_1)$ , seul point de l'adhérence du domaine de Siegel à n'être pas contenu dans la carte affine  $Z_{n+1} = 1$ ). Les chapitres 3 et 4 de [Gol99] discutent ces deux modèles en grands détails. Il est souvent très utile de changer de modèle pour adapter les coordonnées au problème considéré (voir par exemple [HP96, Mos80, Par08, PP09]).

*Remarque 2.1.1.* Dans le cas où  $n = 1$ , les deux domaines ci-dessus deviennent respectivement le disque unité et le demi-plan gauche de  $\mathbb{C}$ .

### 2.1.2 La métrique hyperbolique complexe

On peut alors munir  $P(V^-)$  d'une métrique hermitienne  $\operatorname{PU}(n,1)$ -invariante de la manière suivante. Identifions l'espace tangent à  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  en un point  $p$  à l'espace  $\operatorname{Hom}(\mathbb{C}\mathbf{p}, \mathbf{p}^\perp)$ , où  $\mathbf{p}$  est un relèvement quelconque de  $p$  à  $\mathbb{C}^{n+1}$ , et  $\mathbf{p}^\perp$  est l'orthogonal de  $\mathbb{C}\mathbf{p}$  pour la forme  $H$ . Un vecteur tangent se voit alors comme une application linéaire  $\alpha : \mathbb{C}\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}^\perp$ , et l'on pose pour deux vecteurs tangents  $\alpha$  et  $\beta$

$$h(\alpha, \beta) = -4 \frac{\langle \alpha(\mathbf{p}), \beta(\mathbf{p}) \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle}. \quad (2.1)$$

Cette quantité est indépendante du relèvement de  $p$  choisi. Si l'on fixe un relèvement de  $p$  tel que  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = -1$ , on peut identifier plus directement l'espace tangent en  $p$  à  $\mathbf{p}^\perp$  et l'expression 2.1 devient

$$h(u, v) = 4\langle u, v \rangle. \quad (2.2)$$

La constante multiplicative 4 est ici choisie pour que la courbure sectionnelle de la métrique riemannienne associée soit pincée entre  $-1$  et  $-\frac{1}{4}$  (voir (2.7)). En décomposant la métrique hermitienne sous la forme

$$h = g + i\omega,$$

on obtient une métrique riemannienne  $g$  et une forme symplectique  $\omega$  compatibles, faisant de l'espace hyperbolique complexe une variété kählerienne (voir par exemple la section 3.1.3 de [Gol99]).

On peut également décrire cette métrique via la structure d'espace symétrique de l'espace hyperbolique complexe. Considérons  $U(n,1)$ , le groupe unitaire de la forme hermitienne  $H_1$  ci dessus. Alors  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  est le quotient

$$PU(n,1)/P(U(n) \times U(1)). \quad (2.3)$$

Dans ce quotient,  $P(U(n) \times U(1))$  désigne le compact maximal de  $\mathrm{PU}(n,1)$ , qui est le stabilisateur du point  $P(e_{n+1})$ . On retrouve le modèle projectif de  $H_1$  puisque  $\mathrm{U}(n,1)$  agit transitivement sur les droites du cône négatif. L'algèbre de Lie de  $\mathrm{PU}(n,1)$  est  $\mathfrak{su}(n,1)$ , et ses éléments s'écrivent

$$M(u, z) = \begin{bmatrix} u & z \\ z^* & -\mathrm{tr}(u) \end{bmatrix}, \text{ où } u \in \mathfrak{su}(n) \text{ et } z \in \mathbb{C}^n.$$

L'involution de Cartan associée au compact maximal est donnée par  $M(u, z) \mapsto M(u, -z)$ . L'algèbre de Lie se décompose donc sous la forme

$$\mathfrak{su}(n,1) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \quad (2.4)$$

ou  $\mathfrak{k} = \{M(u, 0), u \in \mathfrak{su}(n)\}$  et  $\mathfrak{p} = \{M(0, z), z \in \mathbb{C}^n\}$  sont respectivement les espaces propres de l'involution de Cartan ci-dessus associés aux valeurs propres 1 et  $-1$ . Le sous-espace  $\mathfrak{p}$  s'identifie à l'espace tangent à  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  au centre de la boule, et la métrique est la forme de Killing sur ce sous-espace. Cette dernière est donnée par

$$\forall X, Y \in \mathfrak{su}(n,1), B(X, Y) = \frac{1}{n+1} \mathrm{tr}(ad(X) \circ ad(Y)) = 2\mathrm{tr}(XY) \quad (2.5)$$

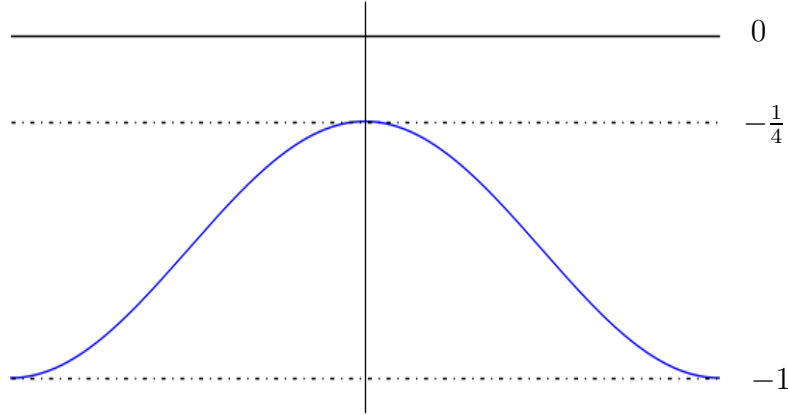
Le facteur multiplicatif  $\frac{1}{n+1}$  sert ici à normaliser la courbure sectionnelle de sorte qu'elle soit pincée entre  $-1$  et  $-\frac{1}{4}$ . On peut en effet estimer la courbure sectionnelle de la manière suivante. Tout 2-plan tangent à  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  en un point  $p$  est  $\mathrm{PU}(n,1)$ -équivalent à un 2-plan tangent à l'origine de la forme

$$V_t = \mathrm{vect}(u, v_t) \text{ où } u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } v_t = \begin{bmatrix} i \sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in [-\pi, \pi] \quad (2.6)$$

La courbure sectionnelle de  $V_t$  s'exprime alors au moyen de la forme de Killing et du crochet de Lie (voir par exemple Ch. V section 3 de [Hel01]) :

$$cs(u, v) = \frac{B([u, v], [u, v])}{B(u, u)B(v, v) - B(u, v)^2} = \frac{3 \cos^2(t) - 4}{4}. \quad (2.7)$$

On en déduit donc que la courbure sectionnelle de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  est pincée entre  $-1$  et  $-\frac{1}{4}$ .

FIGURE 2.1 – Les valeurs de la courbure sectionnelle du plan  $V_t$  en fonction de  $t$ .

### 2.1.3 La distance hyperbolique complexe

On peut montrer par un calcul simple que la distance associée à la métrique riemannienne décrite ci-dessus peut s'exprimer sous la forme

$$\cosh^2\left(\frac{d(m, n)}{2}\right) = \frac{\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle}{\langle \mathbf{m}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}. \quad (2.8)$$

Cette expression est très analogue à l'expression classique de la distance de l'espace hyperbolique réel, ou à la distance de Fubini-Study sur l'espace projectif complexe. Le passage des expressions locales 2.1 et 2.2 à l'expression intégrée 2.8 est explicité à la section 3.1.7 de [Gol99]. On peut retrouver l'expression (2.2) par un calcul "à la Hilbert", en différentiant l'expression  $\cosh^2(d(m, m + tu)/2)$  à  $t = 0$ , où  $u$  est un vecteur tangent en  $m$ .

### 2.1.4 Sous-espaces totalement géodésiques

Les sous-espaces totalement géodésiques de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  sont de deux types :

1. Les sous-espaces totalement réels : ce sont les plongements totalement géodésiques de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^k$  dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  pour  $k = 1, \dots, n$ , de courbure sectionnelle constante égale à  $-1/4$ . Dans le modèle de la boule, ils sont tous  $\text{PU}(n, 1)$ -équivalents à  $\mathbb{R}^k \cap \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Pour  $k = n$ , ce sont des sous-espaces lagrangiens de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ .
2. Les sous-espaces complexes : ce sont les plongements totalement géodésiques de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^k$  dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  pour  $k = 1 \dots n - 1$ .

Puisque la courbure sectionnelle n'est pas constante, il n'existe pas dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  d'hypersurface (réelle) totalement géodésique. Explicitons les sous-espaces totalement géodésiques dans le cas particulier où  $n = 2$ .

**Points.** Les points de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  sont, on l'a vu, les projectivisés des directions négatives de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Tout point  $p$  porte une involution, qui est donnée par

$$I_p(Z) = -Z + 2 \frac{\langle Z, \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} \mathbf{p}, \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{p}$  est un relèvement quelconque du point  $p$ . Ces involutions sont celles qui donnent à  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  sa structure d'espace symétrique riemannien.

**Géodésiques.** Soient  $p$  et  $q$  deux points au bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , c'est à dire tels que tous relèvements satisfont  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = 0$ . On peut choisir des relèvements normalisés de sorte que  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = -1$ . Un relèvement de la géodésique reliant  $p$  à  $q$  paramétré par la longueur d'arc est donné par

$$\gamma(t) = e^{\frac{t}{2}} \mathbf{p} + e^{-\frac{t}{2}} \mathbf{q} \quad (2.10)$$

**Droites complexes.** Une droite complexe  $L$  est l'intersection avec  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  de la projection sur  $\mathbb{C}P^2$  d'un plan complexe de  $\mathbb{C}^3$  qui intersecte le cône  $V^-$ . Ces plan sont tous orthogonaux à une droite de  $V^+$ . Un vecteur directeur de cette direction s'appelle un *vecteur polaire* de  $L$ . Toute droite complexe porte une unique involution  $R_L$ , la réflexion complexe par rapport à  $L$ , qui est donnée par le relèvement.

$$R_L(Z) = -Z + 2 \frac{\langle Z, \mathbf{c} \rangle}{\langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle} \mathbf{c},$$

où  $\mathbf{c}$  est polaire à  $L$ . L'expression (2.7) montre que pour  $t = \pm \frac{\pi}{2}$  le plan  $V_{\pm \frac{\pi}{2}}$  est tangent à une droite complexe, et la courbure sectionnelle est alors  $-1$ . La grassmannienne des droites complexes de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  s'identifie au complémentaire de la fermeture de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , qui peut être vu comme l'espace homogène

$$PU(2, 1) / U(1, 1),$$

qui est naturellement muni d'une métrique pseudo-Hermitienne de signature  $(1, 1)$ . Il s'agit de l'espace hyperbolique pseudo-Hermitien  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^{1,1}$  (voir par exemple la section 12.2 de [Wol11] pour une description des espaces hyperboliques généralisés ou la section 5 de [Web93] pour ce cas particulier).

**Plans réels.** Un plan réel est l'intersection avec  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  du projectivisé d'un sous espace Lagrangien de  $\mathbb{C}^3$  (pour la forme symplectique  $\text{Im}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ ). De même que ci-dessus, on constate sur (2.7) que lorsque  $t = 0$ , le plan  $V_0$  est tangent à un plan réel, et est de

courbure sectionnelle  $-\frac{1}{4}$ . Les plans réels portent une involution anti-holomorphe, qui dans le cas de  $\mathbb{R}^2 \cap \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  est la conjugaison complexe. Nous appellerons ces involutions des *réflexions réelles*. Pour les manipuler, il est intéressant d'utiliser ce que nous appellerons parfois des *matrices de Souriau*, en référence à [Sou76]. Etant donné un plan réel  $V$  de réflexion  $\sigma_V$ , il existe une matrice  $M \in SU(2, 1)$  unique à multiplication près par une racine cubique de l'unité, telle que

$$M\overline{M} = I \text{ et } \forall m \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2, \sigma_V(m) = P(M \cdot \overline{m}). \quad (2.11)$$

Lorsque  $V$  est le  $\mathbb{R}$ -plan standard  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ , on peut prendre pour matrice de Souriau de  $V$  l'identité. Puisque  $PU(2,1)$  agit transitivement sur la grassmanienne des plans réels, on obtient en conjugant des matrices de Souriau pour tous les plans réels : si  $A \in SU(2, 1)$  envoie le plan réel standard un plan réel  $P$ , alors la réflexion par rapport à  $P$  est représentée par la matrice de Souriau  $A\overline{A}^{-1}$ . Notons au passage que si  $V_1$  et  $V_2$  sont deux plans réels dont les réflexions sont  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , représentées par les matrices de Souriau  $M_1$  et  $M_2$ , alors l'isométrie  $\sigma_1 \circ \sigma_2$  est holomorphe et se relève à  $U(2,1)$  en  $M_1\overline{M_2}$ . L'ensemble des plans réels s'identifie naturellement à l'espace homogène

$$PU(2,1)/SO(2,1), \quad (2.12)$$

et l'ensemble des matrices de Souriau fournit un modèle pour cet espace homogène qui est une sous-variété de  $PU(2,1)$ . La métrique sur cet espace homogène provient de la forme de Killing, elle est de signature  $(2, 3)$  dans le cas de  $PU(2,1)$ .

### 2.1.5 Les bisecteurs

Les bisecteurs sont les hypersurfaces équidistantes de deux points de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Nous allons donner quelques éléments sur leur structure dans le cas où  $n = 2$ . Les bisecteurs ne sont pas totalement géodésiques, mais admettent un double feuilletage totalement géodésique, que nous allons décrire rapidement. De très nombreux détails sur la géométrie des bisecteurs se trouvent dans les chapitres 5, 8, 9 de [Gol99].

Soient deux points  $p$  et  $q$  de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Notons  $\mathcal{B}(p, q)$  l'ensemble des points de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  qui sont équidistants de  $p$  et  $q$ . Notons  $\Sigma$  l'unique droite complexe qui les contient. L'intersection de  $\mathcal{B}(p, q)$  est une géodésique  $\sigma$  contenue dans  $\Sigma$ . Nous appellerons  $\sigma$  (resp.  $\Sigma$ ) la *spine réelle* (resp. *spine complexe*) du bisecteur  $\mathcal{B}(p, q)$ . On peut alors décrire  $\mathcal{B}(p, q)$  de deux manières différentes.

**Feuilletage par des droites complexes.** Le bisecteur  $\mathcal{B}(p, q)$  est l'image inverse de  $\sigma$  par la projection orthogonale sur  $\Sigma$ . les fibres de cette projection sont des droites complexes, qui forment donc un feuilletage de  $\mathcal{B}(p, q)$ .

**Feuilletage singulier par des plans réels.** Le bisecteur  $\mathcal{B}(p, q)$  est la réunion de l'ensemble de tous les plans réels qui contiennent la géodesique  $\sigma$ . Il existe un cercle de tels plans réels, qui forme donc un feuilletage singulier de  $\mathcal{B}(p, q)$ .

Les feuilles des deux feuilletages décrits ci-dessus s'appellent les tranches réelles et complexes de  $\mathcal{B}(p, q)$ . Les bisecteurs peuvent être simplement décrit par des équations implicites : si  $p$  et  $q$  sont deux points de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  et que l'on a choisi des relèvements vérifiant

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle,$$

alors l'expression (2.8) montre directement qu'un point  $z \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  est sur  $\mathcal{B}(p, q)$  si et seulement si

$$|\langle \mathbf{p}, \mathbf{z} \rangle| = |\langle \mathbf{q}, \mathbf{z} \rangle|, \quad (2.13)$$

où  $\mathbf{z}$  est un relèvement quelconque de  $z$  à  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

## 2.2 Le bord à l'infini

Le bord à l'infini de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  s'identifie à l'image par projectivisation du cône nul de la forme hermitienne sur  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Dans le cas de modèle de la boule il s'agit donc la sphère  $S^{2n-1}$ . En tant qu'hypersurface de  $\mathbb{C}^n$ , il hérite d'une structure  $CR$ , qui est un champ d'hyperplans tangents complexes (voir par exemple la section 7.1 de [Bog91]). En tout point  $p$  de  $\partial_{\infty} \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ , l'hyperplan complexe tangent est le plus gros sous-espace de  $T_p S^{2n-1}$  stable par la structure complexe. Il est donc défini par

$$H_p = T_p S^{2n-1} \cap J T_p S^{2n-1}. \quad (2.14)$$

En termes projectifs, cet hyperplan peut être décrit comme la projection du noyau (commun) des formes linéaires associées à  $p$  :

$$H_p = P(\ker \langle \cdot, \mathbf{p} \rangle). \quad (2.15)$$

Le bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  s'identifie à la compactification à un point du groupe de Heisenberg  $\mathcal{H}^{2n-1}$  : étant donné un point au bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ , le stabilisateur unipotent de  $p$  est isomorphe à  $\mathcal{H}^{2n-1}$  et agit simplement transitivement sur  $S^{2n-1} \setminus \{p\}$  (voir la section 2.3.3 où ceci est explicité pour  $n = 2$ ). Dans ce contexte, le champ d'hyperplans  $H_p$  coïncide avec la structure de contact de  $\mathcal{H}^{2n-1}$ .

*Exemple 2.2.1.* Explicitons ces éléments dans le cas particulier où  $n = 2$ . Utilisons pour cela le modèle de Siegel. Dans ce modèle, tout point de  $(\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2) \setminus \infty$  admet un unique relèvement à  $\mathbb{C}^3$  du type

$$p_{(z,t,u)} = \begin{bmatrix} -|z|^2 - u + it \\ z\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}_{>0}. \quad (2.16)$$

Le bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  correspond aux points pour lesquels  $u = 0$ . La coordonnée  $u$  est la hauteur de l'horosphère centrée en  $\infty$  sur laquelle  $p$  est situé, et l'on appelle le triplet  $(z, t, u)$  les *coordonnées horosphériques* du point considéré. On utilisera souvent la notation

$$[z, t] = (z, t, 0), \quad (2.17)$$

et nous appellerons la paire  $[z, t]$  les coordonnées de Heisenberg d'un point au bord. L'isométrie parabolique unipotente  $P_{[z,t]}$  définie en (2.28) est l'unique isométrie unipotente qui envoie l'origine  $[0, 0]$  sur le point  $[z, t]$ . Dans ces coordonnées, le champ de droites complexes  $H_p$  est le noyau de la 1-forme

$$\alpha = dt - 2xdy + 2ydx \text{ où } z = x + iy.$$

A tout point  $q_{\infty}$  de  $\partial_{\infty}\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  est associée une famille de distances sur  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n \setminus q_{\infty}$  qui sont proportionnelles les unes aux autres. Etant donné un relèvement  $\mathbf{q}_{\infty}$  de  $q_{\infty}$ , on peut représenter tout point  $p$  de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n \cup \partial_{\infty}\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n \setminus \{q_{\infty}\}$  par un relèvement uniquement déterminé par la condition

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}_{\infty} \rangle = 1 \quad (2.18)$$

On peut alors montrer que l'on définit une distance sur  $\partial_{\infty}\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n \setminus \{q_{\infty}\}$  en posant

$$d(p_1, p_2) = |\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle|^{\frac{1}{2}}, \quad (2.19)$$

où  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  sont les relèvements associés à  $\mathbf{q}_{\infty}$  par (2.18). Cette distance est la *distance de Cygan* associée à  $\mathbf{q}_{\infty}$ . Un calcul simple montre que si l'on change  $\mathbf{q}_{\infty}$  en  $\lambda\mathbf{q}_{\infty}$ , la distance de Cygan change selon

$$d \longrightarrow \frac{d}{|\lambda|}.$$

Nous renvoyons aux notes de John Parker [Par] pour plus de détails sur cette distance. Signalons quelques faits notables. (section 4.3 de [Par]) :

1. la distance de Cygan s'étend en une distance *non-complète* sur  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n \cup \partial_{\infty}\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n \setminus \{q_{\infty}\}$ , qui joue le rôle de la distance euclidienne sur le demi-plan supérieur (l'expression 2.19 donnée ci-dessus n'est alors valable que si l'un des deux points  $p_1$  et  $p_2$  est au bord).
2. la distance de Cygan n'est pas une métrique de longueur : il existe des paires de points dont la distance de Cygan est inférieure à la longueur de toute courbe les reliant.
3. La métrique de Carnot-Carathéodory sur le groupe de Heisenberg est la métrique intérieure de la métrique de Cygan : la distance entre deux points est le l'infimum de la longueur de Cygan des courbes rectifiables reliant ces deux points (voir par exemple [DD16]).

*Exemple 2.2.2.* Dans le modèle de Siegel de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , considérons le cas où le point  $q_{\infty}$  est le point à l'infini, et choisissons le relèvement donné par

$$\mathbf{q}_{\infty} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Le relèvement associé à  $\mathbf{q}_{\infty}$  est alors celui donné par (2.16). La distance de Cygan de deux points  $p_1 = [z_1, t_1]$  et  $p_2 = [z_2, t_2]$  est donnée par

$$d(p_1, p_2) = \left| |z_1 - z_2|^2 + i(t_1 - t_2 + 2\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2)) \right|^{\frac{1}{2}} \quad (2.21)$$

On peut alors définir la sphère isométrique d'une transformation qui ne fixe pas le point choisi pour définir la distance de Cygan.

**Proposition 2.2.1.** *Soit  $q_{\infty}$  un point de  $\partial_{\infty}\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ ,  $\mathbf{q}_{\infty}$  un relèvement de  $q_{\infty}$ , et  $d$  la distance de Cygan associée. Soit  $A \in \operatorname{PU}(n, 1)$  une transformation telle que  $Aq_{\infty} \neq q_{\infty}$ . Alors il existe une unique sphère  $\mathcal{I}(A)$  de la distance  $d$  telle que*

$$\forall p_1, p_2 \in S \cap \partial_{\infty}\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n, d(Ap_1, Ap_2) = d(p_1, p_2) \quad (2.22)$$

La sphère de Cygan ci-dessus s'appelle la sphère isométrique de  $A$ , et elle ne dépend pas du choix du relèvement  $\mathbf{q}_{\infty}$ .

La sphère isométrique de Cygan est l'analogue hyperbolique complexe de la sphère isométrique classique en géométrie hyperbolique réelle, pour laquelle (2.22) est remplacée par une égalité en distance euclidienne. Nous renvoyons à la section 4.3 de [Rat19], où l'analogue réel du résultat ci-dessus est démontré. Il est facile d'adapter la preuve au cas complexe. On vérifie facilement que la sphère isométrique de  $A$  est définie par les équations suivantes

$$\mathcal{I}(A) = \left\{ p \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 : |\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}_{\infty} \rangle| = |\langle \mathbf{p}, A^{-1}(\mathbf{q}_{\infty}) \rangle| = |\langle A(\mathbf{p}), \mathbf{q}_{\infty} \rangle| \right\} \quad (2.23)$$

La sphère isométrique d'un élément s'étend à  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  en un bisecteur, que nous noterons toujours  $\mathcal{I}(A)$ . On peut alors définir l'extérieur (resp. l'intérieur) de  $\mathcal{I}(A)$  comme étant la composante de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n \setminus \mathcal{I}(A)$  qui contient  $q_{\infty}$  (resp. qui ne contient pas  $q_{\infty}$ ). Comme le montre le lemme 2.2.1 ci-dessous, l'ensemble des sphères isométriques des éléments d'un groupe  $\Gamma$  est naturellement muni d'appariements, ce qui en fait un outil utile pour fabriquer des domaines fondamentaux, en particulier pour construire le domaine de Ford d'un groupe discret (voir 9.3 dans [Gol99], et la section 5.3.2 du chapitre 5).

**Lemme 2.2.1** (Section 5.4.5 of Goldman [Gol99]). *Soit  $A \in \operatorname{PU}(n, 1)$  une isométrie de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  ne fixant pas  $q_{\infty}$ .*

1. La transformation  $A$  envoie  $\mathcal{I}(A)$  sur  $\mathcal{I}(A^{-1})$ , et l'intérieur de  $\mathcal{I}(A)$  sur l'extérieur de  $\mathcal{I}(A^{-1})$ .
2. Pour tout  $B \in \text{PU}(2,1)$  fixant  $q_\infty$  et tel que la valeur propre correspondante soit de module 1, on a  $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(BA)$ .

## 2.3 Les classes de conjugaisons de $\text{PU}(2,1)$

La division classique entre isométries hyperboliques elliptiques et paraboliques laisse place à quelques subtilités qui auront leur importance dans les questions que nous allons traiter. Je me permets donc de revenir rapidement dessus. Notons donc  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{P}$  respectivement l'ensemble des classes de conjugaisons loxodromiques, elliptiques et paraboliques de  $\text{PU}(2,1)$ . Nous dirons qu'une valeur propre de  $A \in \text{SU}(2,1)$  est de *type positif* (resp. *type nul*, resp. *type négatif*) si elle correspond à un vecteur propre de norme positive (resp. nulle, resp. négative).

### 2.3.1 Classes loxodromiques.

Toute isométrie loxodromique est déterminée uniquement par sa longueur de translation (mesurée le long de son axe), et son angle de rotation autour de son axe. En termes matriciels, toute isométrie loxodromique est conjuguée à celle donnée dans le modèle de Siegel par

$$L_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}\lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

avec  $|\lambda| > 1$  (la valeur propre attractive de  $L_\lambda$ ). Le paramètre  $\lambda$  est uniquement déterminé à multiplication près par une racine cubique de l'unité (qui correspond aux choix parmi les trois relèvements à  $\text{SU}(2,1)$  d'un élément de  $\text{PU}(2,1)$ ). L'ensemble des classes de conjugaisons loxodromiques s'identifie donc au cylindre :

$$\mathcal{L} \sim S^1 \times (0, +\infty).$$

On voit donc que  $\mathcal{L}$  est homeomorphe au cylindre  $S^1 \times \mathbb{R}^+$  en écrivant

$$\lambda = re^{-i\theta/3}. \quad (2.25)$$

Le paramètre  $\theta$  est l'*angle de rotation* de  $L_\lambda$ , et la longueur de translation de  $L_\lambda$  est donnée par  $\ell = 2 \ln |\lambda|$ . La valeur propre de module 1 d'un élément loxodromique ne détermine donc pas sa classe de conjugaison, mais détermine la génératrice verticale du cylindre  $\mathcal{L} = S^1 \times \mathbb{R}_+$  à laquelle elle appartient.

### 2.3.2 Classes elliptiques

Les éléments elliptiques de  $\text{PU}(2,1)$  peuvent être réguliers ou spéciaux.

- Un élément elliptique  $E$  est dit *régulier* : lorsqu'il provient d'un élément régulier de  $\text{SU}(2,1)$  c'est à dire à valeurs propres distinctes. Dans ce cas,  $E$  a exactement trois points fixes dans  $\mathbb{C}P^2$ . Deux d'entre eux sont extérieurs à  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  et sont polaires à deux droites complexes stables par  $E$ . Ces deux droites s'intersectent orthogonalement en le troisième point fixe de  $E$ . En particulier,  $E$  a un point fixe isolé dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .
- Un élément elliptique  $E$  est *spécial* lorsque tout relèvement de  $E$  admet une valeur propre double. Cette condition est équivalente au fait que  $E$  fixe point par point une droite projective  $L$  dans  $\mathbb{C}P^1$ . La position relative de  $L$  par rapport à  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  donne encore deux cas.
  1. Soit  $L$  coupe  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et dans ce cas  $E$  fixe point par point  $L \cap \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  et agit comme une rotation autour de  $L$ . On appelle alors  $E$  une *réflexion complexe par rapport à une droite*.
  2. Soit  $L$  ne rencontre pas la fermeture de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et dans ce cas  $L$  est duale à un point  $p \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . L'isométrie  $E$  fixe alors  $p$  et agit comme une rotation sur toutes les droites passant par  $p$ . On appelle alors  $E$  une *réflexion complexe par rapport à un point*. Dans ce cas encore,  $E$  a un point fixe isolé dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

En termes matriciels, toute isométrie elliptique correspond dans le modèle de la boule à une matrice diagonale du type

$$\begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & e^{i\theta_2} & \\ & & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

La classe de conjugaison de  $E$  est uniquement déterminée par sa *paire d'angles*, c'est à dire la paire *non-ordonnée*  $\{\theta_1, \theta_2\}$ . Les réflexions complexes par rapport à des droites correspondent au cas où  $\theta_1 = 0$  ou  $\theta_2 = 0$ , les réflexions complexes par rapport à des points correspondent au cas où  $\theta_1 = \theta_2$ . Le spectre du relèvement de  $E$  à  $\text{SU}(2,1)$  ne détermine pas la classe de conjugaison de  $E$  : il faut également connaître le type des vecteurs propres pour se ramener à une forme telle que (2.26). Cette discussion nous permet d'identifier  $\mathcal{E}$  au quotient du tore  $S^1 \times S^1$  par l'involution  $(\theta_1, \theta_2) \mapsto (\theta_2, \theta_1)$ . Autrement dit, on peut voir  $\mathcal{E}$  comme le quotient

$$\{(\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi]^2, \theta_2 \leq \theta_1\} / \{(\theta, 0) \sim (2\pi, \theta)\}. \quad (2.27)$$

L'ensemble des classes de conjugaisons elliptiques  $\mathcal{E}$  est donc homéomorphe à une bande de Möbius (voir la figure 2.2). Les classes de réflexions complexes forment dans cette bande de Möbius un bouquet de deux cercles. Le premier, que nous noterons  $C_0$ , est formé des classes de réflexions complexes par rapport à des points, et forme le bord de  $\mathcal{E}$ , c'est le quotient de la diagonale par l'identification de ses extrémités. Le second, que nous noterons  $C_1$  est

l'ensemble des classes de réflexions complexes par rapport à des droites. Il est l'image dans le quotient de la réunion des deux côtés horizontaux et verticaux du triangle.

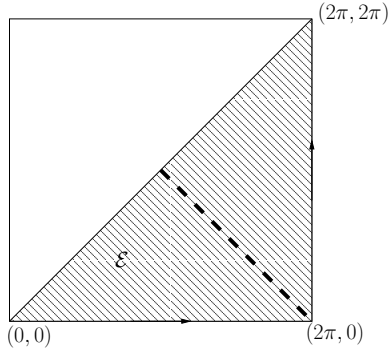


FIGURE 2.2 – L'ensemble des classes de conjugaison elliptiques de  $\text{PU}(2,1)$ . Les identifications sont indiquées par les flèches. Le segment pointillé correspond aux elliptiques qui préservent un  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  plongé totalement géodésiquement.

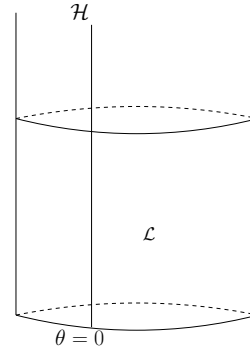


FIGURE 2.3 – Le cylindre des classes de conjugaisons loxodromiques. La génératrice  $\mathcal{H}$  correspond à  $\lambda$  réel dans (2.24), donc aux isométries loxodromiques qui préservent un  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  plongé totalement géodésiquement.

Les réflexions complexes ne sont donc pas en général des involutions, mais chacun des deux types d'elliptiques non réguliers fournit une classe de conjugaison d'involution.

1. Les réflexions complexes d'ordre deux par rapport à des points. Elles sont conjuguées dans le modèle de la boule à  $(z_1, z_2) \mapsto (-z_1, -z_2)$ . Nous les appellerons souvent des *involutions centrales* (ce sont elles qui donnent à  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  sa structure d'espace symétrique riemannien).
2. Les réflexions complexes d'ordre deux par rapport à des droites. Elles sont conjuguées dans le modèle de la boule à  $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, -z_2)$ . Nous les appellerons souvent des *symétries complexes*.

### 2.3.3 Classes paraboliques

Les isométries paraboliques sont celles dont les relèvements à  $\text{SU}(2,1)$  ne sont pas diagonalisables. Une isométrie parabolique est dite unipotente si elle admet un relèvement unipotent à  $\text{SU}(2,1)$ . Dans le cas contraire, elle est appelée un *vissage* (*screw-parabolic*, voir [CG74] or [Gol99]). Les isométries paraboliques unipotentes sont dites *2-step* ou *3-step*, selon que le polynôme minimal de leur relèvement unipotent est  $(X - 1)^2$  ou  $(X - 1)^3$  (voir la section 3.4 de [CG74]).

L'ensemble des isométries paraboliques unipotentes fixant un point donné  $p$  au bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  s'identifie au groupe de Heisenberg de dimension 3. Pour s'en rendre compte, on peut toujours supposer que dans le modèle de Siegel,  $p$  est le point à l'infini, représenté par le vecteur  $[1, 0, 0]^T$ . Le bord est alors muni des coordonnées  $[z, t]$  décrites en 2.2.1. Il existe alors un unique parabolique unipotent qui envoie l'origine  $[0, 0]$  sur un point  $[z, t]$  fixé, qui est donné par la matrice

$$T_{[z,t]} = \begin{bmatrix} 1 & -\bar{z}\sqrt{2} & -|z|^2 + it \\ 0 & 1 & z\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

On vérifie facilement que les unipotents 2-step sont ceux pour lesquels  $z = 0$ . La loi de groupe apparaît en composant deux telles transformations :

$$[z, t] \cdot [w, s] = [z + w, t + s + 2\text{Im}(z\bar{w})]. \quad (2.29)$$

Les vissages, eux, sont tous conjugués à l'une des transformations données par une matrice de  $U(2,1)$  comme suit

$$P_{\theta}^{\pm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm i \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

En particulier, les vissages pour lesquels  $\theta = 0$  sont les paraboliques unipotents 2-step. Géométriquement, ces transformations préservent une droite complexe (ici la droite polaire à  $[0, 1, 0]^T$ ). Elles agissent en restriction à cette droite comme une isométrie parabolique du disque, et tournent autour de cette droite avec un angle  $\theta$ . En coordonnées de Heisenberg, on observe :

$$P_{\theta}^{\pm} \cdot [z, t] = [e^{i\theta}z, t \pm 1],$$

d'où le terme de vissage. Notons que  $P_{\theta}^+$  et  $P_{\theta}^-$  ne sont pas conjuguées entre elles dans  $PU(2,1)$ . En effet, l'action de  $P_{\theta}^{\pm}$  induit une orientation du bord de sa droite complexe stable, qui peut ou pas coïncider ou pas avec celle provenant de la structure complexe, selon que l'on considère  $P_{\theta}^+$  ou  $P_{\theta}^-$ . En revanche, on peut conjuguer  $P_{\theta}^+$  à  $P_{\theta}^-$  par une isométrie antiholomorphe.

### 2.3.4 L'espace des classes de conjugaison de $PU(2,1)$ .

Notons maintenant  $\mathcal{G}$  l'espace des classes de conjugaison de  $PU(2,1)$ . En tant qu'espace topologique (muni de la topologie quotient), cet espace n'est pas séparé. Plus précisément, les classes de conjugaisons de réflexions complexes d'angle  $\theta$  non-nul par rapport à des droites ont les mêmes voisinage que les vissages d'angle  $\theta$ . De même, l'identité et les classes paraboliques unipotentes partagent les mêmes voisinages. Dans cette situation, il est coutumier de considérer alors le plus gros quotient séparé de  $\mathcal{G}$ , que nous noterons  $c(\mathcal{G})$ . Il est obtenu en identifiant les points qui ont les mêmes voisinages.

1. Premièrement,  $c(\mathcal{G})$  contient l'ouvert dense  $\mathcal{G}^{reg}$  formé des classes régulières semi-simples (c'est à dire elliptiques régulières ou loxodromiques). Autrement dit  $\mathcal{G}^{reg} = \mathcal{E}^{reg} \cup \mathcal{L}$ .
2. Deuxièmement, le complémentaire de  $\mathcal{G}^{reg}$  dans  $c(\mathcal{G})$  est l'ensemble des *classes de bord*, qui correspondent aux isométries paraboliques et aux réflexions complexes. Nous le noterons  $\mathcal{B}$ . Il est formé par toutes les classes équivalentes à un point de  $C_0 \cup C_1$ .

Plus visuellement, on obtient  $c(\mathcal{G})$  en collant la bande de Möbius  $\mathcal{E}$  et la fermeture du cylindre  $\mathcal{L} \sim \{|z| \geq 1\}$  en identifiant  $\{|z| = 1\}$  et le cercle  $C_1$ . Pour finir, notons que  $\mathcal{L}$  et  $\mathring{\mathcal{E}}$  sont lisses, alors que les points de  $\mathcal{B}$  ne le sont pas. Par exemple, un point de  $\mathcal{B}$  correspondant à une réflexion par rapport à une droite admet des voisinages arbitrairement petits formé de trois demi disques (deux dans  $\mathcal{E}$  et un dans  $\mathcal{L}$ ). Le récent travail [Aco20] contient une jolie description de cet espace de classes de conjugaisons en termes de quotient GIT pour les formes réelles.

Comme dans le cas classique de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  ou  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  le type d'une isométrie est déterminé –presque– par la trace de l'un de ses relèvements à  $\mathrm{SU}(2, 1)$ . La proposition suivante est énoncée au chapitre 6 de [Gol99] (voir Figure 2.4).

**Proposition 2.3.1** (Goldman). *Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{C}$  par :*

$$f(z) = |z|^4 - 8\mathrm{Re}(z^3) + 18|z|^2 - 27. \quad (2.31)$$

Alors, pour toute isométrie  $g \in \mathrm{PU}(2, 1)$  dont un relèvement est  $A \in \mathrm{SU}(2, 1)$  :

- $g$  est elliptique régulière si et seulement si  $f(\mathrm{tr}(A)) < 0$ .
- $g$  est loxodromique si et seulement si  $f(\mathrm{tr}(A)) > 0$ .
- $g$  est elliptique spéciale ou un vissage si et seulement si  $f(\mathrm{tr}(A)) = 0$  et  $\mathrm{tr}(A) \neq 3\omega$ , où  $\omega$  est une racine cubique de l'unité.
- $g$  est unipotent ou l'identité si et seulement si  $\mathrm{tr}(A) = 3\omega$ .

Le polynôme  $f$  de la proposition 2.3.1 est le discriminant du polynôme caractéristique de  $f$  exprimé en termes de la trace de  $A$ .

## 2.4 Quelques invariants de configurations de points.

A tout triangle  $(p_1, p_2, p_3)$  de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n \cup \partial_{\infty} \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  on peut associer un nombre réel  $\mathbb{A}$  en posant

$$\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = \arg(-\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1 \rangle). \quad (2.32)$$

Cette quantité ne dépend pas des choix de relèvements, et est clairement  $\mathrm{PU}(n, 1)$ -invariante.

**Définition 2.4.1.** La quantité définie par (2.32) est l'*invariant de Cartan* du triangle  $(p_1, p_2, p_3)$ .

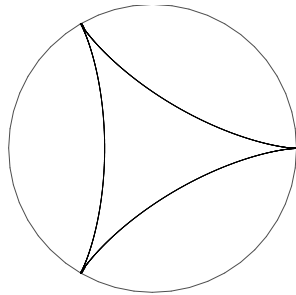


FIGURE 2.4 – Le lieu nul du polynôme  $f$ , inscrit dans le cercle de rayon 3 centré en l'origine.

On peut alors classifier les triangles modulo isométrie holomorphe.

**Théorème 2.4.1** ([Bre90, Pra05]). *Un triangle de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  est déterminé modulo l'action de  $PU(n,1)$  par les longueurs de ses côtés et son invariant de Cartan.*

Lorsque le triangle n'a pas de sommet à l'infini, on peut facilement exprimer l'ensemble des valeurs prises par l'invariant de Cartan en fonction des longueurs des côtés en écrivant le fait que la matrice de Gram du triplet  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$  doit être de déterminant négatif ou nul, puisque la restriction de la forme hermitienne au sous-espace  $\text{Vect}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$  est de signature  $(+, +, -)$  (le déterminant peut être nul lorsque les trois vecteurs sont liés, auquel cas le triangle est inclu dans une droite complexe). On obtient alors l'inégalité suivante

$$\cos \mathbb{A} \geq \frac{1 + 2(\cosh(\ell_1) + \cosh(\ell_2) + \cosh(\ell_3))}{2 \cosh(\ell_1/2) \cosh(\ell_2/2) \cosh(\ell_3/2)} \quad (2.33)$$

où  $\ell_j$  désigne la longueur du côté  $p_{j-1}p_{j+1}$ , les indices étant pris modulo 3. Nous renvoyons à [Bre90, Pra05] pour des calculs explicites. L'invariant de Cartan mesure donc la forme du triangle  $\Delta$  une fois fixées les longueurs de ses trois côtés. Ceci s'exprime par l'identité

$$\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2} \int_{\Delta} \omega, \quad (2.34)$$

où  $\omega$  est la forme de Kähler, et l'intégrale est prise sur un simplexe à côtés géodésiques construit sur le triangle  $(p_1, p_2, p_3)$ . Il s'agit donc d'une aire complexe (voir la section 7.1.4. de [Gol99] pour des calculs explicites). En particulier,

1. Le triangle  $(p_1, p_2, p_3)$  est contenu dans un plan réel si et seulement si son invariant de Cartan est nul.
2. Le triangle  $(p_1, p_2, p_3)$  est contenu dans une droite complexe si et seulement si son invariant de Cartan est extrémal (c'est à dire si (2.33) est une égalité).

Il découle directement de (2.34) la propriété de cocycle suivante :

$$\forall (p_1, p_2, p_3, p_4) \in (\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n)^4, \mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) - \mathbb{A}(p_1, p_2, p_4) + \mathbb{A}(p_1, p_3, p_4) + \mathbb{A}(p_2, p_3, p_4) = 0 \quad (2.35)$$

Le cas particulier des triangles idéaux est intéressant en soi.

**Proposition 2.4.1.** *L'invariant de Cartan prend des triangles idéaux prend toutes les valeurs de l'intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Deux triangles idéaux sont  $PU(n,1)$ -équivalents si et seulement si ils ont même invariant de Cartan.*

*Remarque 2.4.1.* Le fait qu'un triangle d'invariant de Cartan extrémal soit contenu dans une droite complexe est à l'origine de larges généralisations, notamment concernant les représentations de groupes de surfaces dans les espaces symétriques hermitiens (voir [Tol89, BIW10]).

On peut définir un birapport bien adapté à l'espace hyperbolique complexe de la manière suivante.

**Définition 2.4.2.** Soit  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  un quadruplet de points deux à deux distincts de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n \cup \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Le birapport hermitien de  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  est la quantité

$$\mathbf{X}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1 \rangle \langle \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_2 \rangle}{\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2 \rangle \langle \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_1 \rangle}, \quad (2.36)$$

où  $\mathbf{p}_i$  est un relèvement de  $p_i$  à  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

Le birapport hermitien est bien sûr  $PU(n,1)$ -invariant. Nous renvoyons à [KR87], au chapitre 7 de [Gol99], ainsi qu'à [Wil16] pour des exposés des nombreuses propriétés de ce birapport. Notons tout de même un lien entre le birapport et l'invariant de Cartan :

$$\mathbf{X}(p_1, p_2, p_3, p_4) \mathbf{X}(p_2, p_3, p_1, p_4) = \mathbf{X}(p_1, p_3, p_2, p_4) e^{2i\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3)}. \quad (2.37)$$

# Chapitre 3

## Représentations

Nous allons décrire dans ce chapitre quelques résultats sur certaines variétés de caractères : nous commencerons par les variétés de caractères du groupe libre à deux générateurs dans  $SL(2, \mathbb{C})$  et  $SL(3, \mathbb{C})$ , avant de nous tourner vers les représentations du groupe fondamental d'une variété hyperbolique réelle dans  $SL(3, \mathbb{C})$ . Le but de ce chapitre est de présenter un résultat commun avec Antonin Guilloux, sur les représentations du groupe fondamental de l'entrelacs de Whitehead dans  $SL(3, \mathbb{C})$ . En voici un énoncé, que nous préciserons dans la section 3.5.

**Théorème 3.0.1.** *[GW18] La  $SL(3, \mathbb{C})$ -variété de caractères du groupe de l'entrelacs de Whitehead admet une composante algébrique formée par les caractères des représentations qui factorisent par un certain remplissage de Dehn.*

Mon intérêt particulier pour cette composante tient au fait qu'elle contient de nombreux exemples de caractères d'holonomies d'uniformisations CR sphériques, objets encore assez mystérieux et mal compris, que nous discuterons plus avant au chapitre 5.

### 3.1 Introduction

L'étude des structures géométriques sur une variété  $M$  amène à considérer les représentations du groupe fondamental de  $M$  dans un groupe de Lie  $G$  : à une  $(G, X)$ -structure sur une variété  $M$  est associée une représentation de  $\pi_1(M)$  dans le groupe  $G$ , la *représentation d'holonomie* de la structure. Etant donné une variété  $M$ , il est donc naturel de considérer les représentations de  $\pi_1(M)$  dans  $G$ , et donc les variétés de caractères associées. Parmi ces représentations toutes ne sont pas des holonomies de structures, et la question de déterminer celles qui le sont est en général une question difficile<sup>1</sup>

---

1. On peut penser par exemple au théorème de Gallo-Kapovich-Marden, qui énonce entre autres qu'une représentation non-élémentaire du groupe fondamental d'une surface fermée dans  $PSL(2, \mathbb{C})$  est l'holonomie

On peut prendre le problème dans l'autre sens, et commencer chercher des représentations du groupe fondamental d'une variété dans un groupe de Lie. Dans le cas où  $M$  est une 3-variété, produire un exemple de représentation de  $\pi_1(M)$  dans un groupe de Lie donné est déjà un exercice pas évident. Par exemple le groupe fondamental du complémentaire du noeud de 8 admet la présentation suivante

$$\Gamma_8 = \langle a, b | a^3 b a^{-1} b^{-2} a^{-1} b = 1 \rangle. \quad (3.1)$$

Trouver une représentation de ce groupe dans  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$  consiste donc à trouver deux matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  solutions de la relation (3.1). Il s'agit d'un problème clairement non-trivial, même dans le cas où  $n = 2$ . Comme dans le cas des surfaces, la géométrie vient à notre secours. Ainsi, dans le cas de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , Thurston a décrit dans [Thu] une méthode devenue fameuse pour construire des structures hyperboliques sur les 3-variétés non-compactes munies d'une triangulation idéale, avec un contrôle sur la représentation d'holonomie. Grosso modo, la structure et l'holonomie apparaissent via la résolution d'un système d'équations et d'inéquations polynomiales dont les inconnues sont des invariants géométriques (des birapports). Cette méthode permet également de construire des représentations (sans forcément qu'elles soient des holonomies de structures). Nous en rappellerons rapidement le principe dans la section 3.4.1, mais l'on peut dire en quelques mots qu'il s'agit de partir d'une donnée topologique et combinatoire (la triangulation) et de la réaliser géométriquement (chaque simplexe étant réalisé dans l'espace hyperbolique réel par un tétraèdre idéal).

Une structure CR sphérique sur une 3-variété est une  $(G, X)$ -structure pour laquelle  $G = \mathrm{PU}(2, 1)$  et  $X = S^3$ . Dans ce cas, la représentation d'holonomie de la structure est donc à valeur dans  $\mathrm{PU}(2, 1)$ , qui est une forme réelle de  $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ . Il est donc naturel de considérer les variétés de caractères pour le groupe cible  $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$  ou  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ . Lorsque qu'une représentation prend ses valeurs hors de  $\mathrm{SU}(2, 1)$  ou  $\mathrm{PU}(2, 1)$ , elle ne peut bien sûr pas être l'holonomie d'une structure CR sphérique. Cependant, elle peut être l'holonomie d'une structure modelée sur la variété des drapeaux de  $\mathbb{C}P^2$ . Cette remarque est le point de départ d'une généralisation de la méthode de Thurston pour le groupe cible  $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ , décrite par Bergeron-Falbel-Guilloux-Koseleff-Rouiller dans [BFG<sup>+</sup>13] et qui avait été initiée par Falbel dans le cas des structures CR sphériques dans [Fal08]. Nous décrirons cette méthode à la section 3.4.2. Cette méthode a été également développée et utilisée en dimension plus grande dans [GGZ15, GTZ15].

Ceci étant dit, on connaît finalement assez peu d'exemples explicites de variétés de caractères de groupes de type fini dans  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ . Ainsi, la variété de caractères du groupe libre à deux générateurs dans  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$  est connue (voir par exemple [Ter86, Fog02, Law07, Wil06]). Dans [Aco19a], Miguel Acosta a complètement décrit la  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ -variété de ca-

---

d'une structure projective complexe sur  $\Sigma$  si et seulement si cette représentation se relève à  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  (voir [GKM00]). A la question similaire pour les représentations de groupes de surfaces dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ , il n'est pas encore connu de réponse complète.

ractères de  $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3$ . Si l'on réclame que le groupe que l'on représente soit un groupe fondamental, on peut résumer les résultats connus assez rapidement.

1. Les  $SL(3, \mathbb{C})$ -variétés de caractères des noeuds toriques ont été complètement décrites par Muñoz-Porti dans [MP16] (voir également la section 3.2 de [Heu15]).
2. La variété de caractères dans  $SL(3, \mathbb{C})$  du groupe du noeud de huit a été complètement décrite de manière indépendante par Falbel- Guilloux-Koseleff-Rouiller-Thistlethwaite dans [FGK<sup>+</sup>16], et par Heusener-Muñoz-Porti dans [HMnP16].
3. Falbel, Koseleff et Rouiller ont recensé dans [FKR15] les représentations des groupes de noeuds dont le complémentaire est triangulé par au plus quatre tétraèdres, avec la condition supplémentaire que les holonomies périphérales sont unipotentes. La database de l'output est disponible sur le site web [Cur].
4. Comme mentionné plus haut, Antonin Guilloux et moi avons décrit une composante algébrique de la variété de caractères du groupe de l'entrelacs de Whitehead dans  $SL(3, \mathbb{C})$ , associée à un remplissage de Dehn (théorème 3.0.1 plus haut). La méthode pour décrire cette composante est relativement économique, et nous espérons qu'elle soit transposable à d'autres exemples.

Rappelons maintenant quelques généralités sur les variétés de caractères. Dans notre cas, le groupe  $G$  sera donc toujours d'un sous- groupe de  $SL(n, \mathbb{C})$ . On considère donc des variétés de représentations du type

$$\mathcal{R}_n(\Gamma) = \text{Hom}(\Gamma, SL(n, \mathbb{C})), \quad (3.2)$$

où  $\Gamma$  est de type fini. Les variétés de représentations telles que (3.2) sont des ensembles algébriques affines dans  $\mathbb{C}^{k \cdot n^2}$ , où  $k$  est le cardinal d'un système de générateurs de  $\Gamma$ . On est amené à classifier ces représentations modulo conjugaison dans  $SL(n, \mathbb{C})$ . Il s'agit alors de considérer la variété des caractères de  $\Gamma$  dans  $SL(n, \mathbb{C})$ , qui est définie comme le quotient suivant (au sens de la théorie géométrique des invariants, GIT)

$$X_n(\Gamma) = \mathcal{R}_n(\Gamma) // SL(n, \mathbb{C}). \quad (3.3)$$

La variété des caractères paramètre les orbites fermées pour l'action de  $SL(n, \mathbb{C})$  sur  $\mathcal{R}_n(\Gamma)$  (il s'agit des orbites des représentations semi-simples, voir par exemple [LM85], théorème 1.27). Le caractère d'une représentation  $\rho$  est l'application définie sur  $\Gamma$  par  $\chi_\rho(\gamma) = \text{tr}(\rho(\gamma))$ . Deux représentations semi-simples sont conjuguées dans  $SL(n, \mathbb{C})$  si et seulement si leurs caractères sont égaux, d'où la terminologie (voir le théorème 1.28 de [LM85]). Dans ce cadre, l'ensemble des invariants de  $\mathcal{R}_n(\Gamma)$ , c'est à dire l'ensemble des fonctions polynomiales sur  $\mathcal{R}_n(\Gamma)$  qui sont invariantes par conjugaison, s'interprète comme l'algèbre des fonctions sur  $X_n(\Gamma)$ . Dans les cas qui nous intéressent, cette algèbre est finiment engendrée (nous renvoyons à la section 2.1 de [Heu15] et aux références qui s'y

trouvent pour une exposition des subtilités liées à cette question). Il est intéressant d'avoir un système simple de générateurs pour cette algèbre d'invariants. En effet, étant donné un système de générateurs  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ , on obtient un modèle pour  $X_n(\Gamma)$  en considérant l'image de l'application

$$\tau : \mathcal{R}_n(\Gamma)^{SL(n, \mathbb{C})} \longrightarrow \mathbb{C}^N \quad (3.4)$$

$$\rho \longmapsto (\tau_1(\rho), \dots, \tau_N(\rho)), \quad (3.5)$$

qui est une variété algébrique dans  $\mathbb{C}^N$ . Le premier théorème fondamental de la théorie des invariants (voir par exemple la section 3 de [CP17] ou [Pro07]) dit que l'algèbre des invariants pour les représentations du groupe libre à  $k$  générateurs dans  $SL(n, \mathbb{C})$  est engendrée par les polynômes de la forme

$$\text{tr}(X_{i_1} \cdots X_{i_p}), \quad 1 \leq i_1, \dots, i_p \leq k, \quad 1 \leq p \leq n^2.$$

Il "suffit" donc de considérer les mots  $X_{i_1} \cdots X_{i_k}$  de longueur au plus  $n^2$  pour obtenir un système de générateurs. Pour les applications géométriques, il est intéressant de rendre le nombre de générateurs le plus petit possible, de façon à obtenir un modèle manipulable pour la variété des caractères.

Le lecteur intéressé pourra trouver de nombreux calculs explicites dans le chapitre 10 de [Fog02], dans [Ter86], ou dans le survey [Par10], consacré au cas de  $SU(2, 1)$ .

### 3.2 La variété des caractères $\chi_2(F_2)$ .

Soient  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  deux matrices dans  $SL(2, \mathbb{C})$ . L'identité classique

$$\text{tr} \mathbf{A} \text{tr} \mathbf{B} = \text{tr} \mathbf{A} \mathbf{B} + \text{tr} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}, \quad (3.6)$$

s'obtient directement à partir du théorème de Cayley-Hamilton. Le théorème 3.2.1 ci-dessous est crucial dans l'étude des caractères des représentations du groupe libre de rang deux dans  $SL(2, \mathbb{C})$ . Il remonte à Vogt [Vog86] et Fricke-Klein [FK97, FK12], nous renvoyons à l'article d'exposition [Gol09] pour un traitement moderne orienté vers les variétés de caractères des surfaces épointées de genre petit.

Notons  $\mathcal{R}_2 = \mathbb{C}[SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})]^{SL(2, \mathbb{C})}$  l'anneau des invariants de  $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ . Nous identifierons fréquemment une paire de matrices  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  à la représentation de  $F_2 = \langle a, b \rangle$  obtenue en envoyant  $a$  sur  $\mathbf{A}$  et  $b$  sur  $\mathbf{B}$ . Ainsi, une paire  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  d'éléments de  $SL(2, \mathbb{C})$  est dite *irréductible* si la représentation de  $F_2$  dans  $SL(2, \mathbb{C})$  associée l'est, c'est à dire si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  n'ont pas de sous-espace stable commun.

**Théorème 3.2.1.** *1. L'algèbre des invariants de  $\mathcal{R}_2(\mathbb{F}_2)$  est engendrée par les fonctions  $\text{tr} \mathbf{A}$ ,  $\text{tr} \mathbf{B}$  et  $\text{tr} \mathbf{A} \mathbf{B}$ .*

2. L'application

$$\begin{aligned} \Psi_2 : SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ (\mathbf{A}, \mathbf{B}) &\longmapsto (\text{tr} \mathbf{A}, \text{tr} \mathbf{B}, \text{tr} \mathbf{A} \mathbf{B}) \end{aligned}$$

est surjective.

3. Deux paires irréductibles  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  et  $(\mathbf{A}', \mathbf{B}')$  d'éléments de  $SL(2, \mathbb{C})$  sont conjuguées si et seulement si  $\Psi_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \Psi_2(\mathbf{A}', \mathbf{B}')$ .

La variété des caractères de  $F_2$  dans  $SL(2, \mathbb{C})$  s'identifie donc à  $\mathbb{C}^3$ . Remarquons concrètement que la condition d'irréductibilité est nécessaire, comme le montre par exemple la comparaison de la représentation triviale avec une représentation pour laquelle  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont deux matrices paraboliques triangulaires supérieures de  $SL(2, \mathbb{R})$ . Parmi les invariants simples qui apparaissent naturellement, la trace du commutateur peut être calculée directement en utilisant (3.6). On vérifie que

$$\text{tr}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = Q(\text{tr} \mathbf{A}, \text{tr} \mathbf{B}, \text{tr} \mathbf{A} \mathbf{B}) \quad (3.7)$$

où  $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2$ . Cet invariant particulier joue un rôle important dans l'étude des  $SL(2, \mathbb{C})$ -variétés de caractères des "petites surfaces", comme le tore à un trou ou la sphère à quatre trous (voir par exemple [Bow98] ou [Gol09]). En particulier, la représentation  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  est irréductible si et seulement si  $Q(x, y, z) \neq 2$ . Il s'agit d'un exercice "pas si simple". Nous renvoyons à la jolie proposition 2.3.1 de [Gol09].

### 3.3 La variété des caractères $\chi_3(F_2)$ .

La première étape pour décrire  $\mathcal{R}_3(\mathbb{F}_2)$  est d'obtenir un système simple d'invariants. Soit  $\Psi_3$  l'application définie par

$$\begin{aligned} \Psi_3 : SL(3, \mathbb{C})^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^8 \\ (\mathbf{A}, \mathbf{B}) &\longmapsto (\text{tr} \mathbf{A}, \text{tr} \mathbf{B}, \text{tr} \mathbf{A} \mathbf{B}, \text{tr} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}, \text{tr} \mathbf{A}^{-1}, \text{tr} \mathbf{B}^{-1}, \text{tr} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}, \text{tr} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Les relations (3.6) et (3.7) se généralisent à  $SL(3, \mathbb{C})$  sous la forme suivante.

**Proposition 3.3.1.** [Ter86, Fog02, Law07, Wil09] Il existe deux polynômes  $S$  et  $P$  dans  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_8]$  tels que pour toute paire  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in SL(3, \mathbb{C}) \times SL(3, \mathbb{C})$ , les deux traces  $\text{tr}([\mathbf{A}, \mathbf{B}])$  et  $\text{tr}([\mathbf{A}, \mathbf{B}]^{-1})$  sont les racines de l'équation quadratique

$$X^2 - sX + p = 0, \quad (3.9)$$

où  $s = S(\Psi_3(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ ,  $p = P(\Psi_3(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ .

Dans la suite, nous référerons à (3.9) comme à *l'équation des traces*. La preuve de la Proposition 3.3.1 peut se faire d'une manière analogue à celle de (3.7), à la complexité près. Un ordinateur "peut être utile" à ce stade. Nous renvoyons par exemple au chapitre 10 de [Fog02], ou à [Law07, Par10, Wil06]. L'idée de base est d'utiliser l'identité de Cayley-Hamilton de manière répétée. Nous présentons ci-dessous des expressions explicites de  $S$  et  $P$  dans lesquelles nous avons essayé de contrebalancer l'aspect peu engageant des polynômes en groupant ensemble les monômes de manière à faire apparaître le fait que  $S$  et  $P$  sont tous deux invariants par l'involution

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \longleftrightarrow (x_5, x_6, x_7, x_8, x_1, x_2, x_3, x_4), \quad (3.10)$$

qui correspond à la transformation de Nielsen  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \longleftrightarrow (\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{B}^{-1})$ . Puisque cette transformation laisse invariante la classe de conjugaison  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  du commutateur, cette symétrie n'est donc pas surprenante.

$$S = x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_7 + x_4x_8 - (x_1x_2x_7 + x_5x_6x_3) - (x_1x_6x_4 + x_5x_2x_8) + x_1x_2x_5x_6 - 3 \quad (3.11)$$

et

$$\begin{aligned} P = & x_1x_2x_5x_6(x_1x_5 + x_2x_6) \\ & - (x_1^3 + x_5^3)x_2x_6 - (x_2^3 + x_6^3)x_1x_5 \\ & + (x_1^2x_2^2x_3 + x_5^2x_6^2x_7) + (x_1^2x_6^2x_8 + x_5^2x_2^2x_4) \\ & - (x_1^2x_5(x_4x_6 + x_2x_7) + x_5^2x_1(x_2x_8 + x_3x_6)) \\ & - (x_2^2x_6(x_1x_7 + x_5x_8) + x_6^2x_2(x_3x_5 + x_1x_4)) \\ & - x_2x_6(x_1x_3x_8 + x_4x_5x_7) - x_1x_5(x_2x_3x_4 + x_6x_7x_8) \\ & + (x_1^2(x_4x_7 + x_3x_6 + x_2x_8) + x_5^2(x_4x_6 + x_2x_7 + x_3x_8)) \\ & + (x_2^2(x_1x_4 + x_3x_5 + x_7x_8) + x_6^2(x_3x_4 + x_5x_8 + x_1x_7)) \\ & + (x_3^2(x_4x_5 + x_6x_8 - 2x_1x_2) + x_7^2(x_2x_4 + x_1x_8 - 2x_5x_6)) \\ & + (x_4^2(x_6x_7 + x_1x_3 - 2x_2x_5) + x_8^2(x_2x_3 + x_5x_7 - 2x_1x_6)) \\ & + x_1x_5(x_4x_8 + x_2x_6 + x_3x_7) + x_2x_6(x_4x_8 + x_3x_7) + x_3x_7x_4x_8 \\ & + (x_1^3 + x_5^3) + (x_2^3 + x_6^3) + (x_3^3 + x_7^3) + (x_4^3 + x_8^3) \\ & + 3(x_1x_4x_6 + x_2x_5x_8) + 3(x_1x_2x_7 + x_5x_6x_3) \\ & - 3(x_1x_3x_8 + x_5x_7x_4) - 3(x_2x_3x_4 + x_6x_7x_8) \\ & - 6(x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_7 + x_4x_8) + 9 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nous pouvons maintenant décrire la variété de caractères de  $F_2$  dans  $SL(3, \mathbb{C})$ .

**Théorème 3.3.1.** [Law07, Wil06]

1. L'algèbre des invariants de  $\mathcal{R}_3(F_2)$  est engendrée par les neuf traces contenues  $(\Psi_3(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  et  $\text{tr}([\mathbf{A}, \mathbf{B}])$ ). En particulier, tout invariant de  $\mathcal{R}_3(F_2)$  est un polynôme en ces neuf traces, unique modulo l'idéal engendré par le membre de gauche de (3.9).
2. L'application  $\Psi_3$  est un revêtement double de  $\mathbb{C}^8$  ramifié au dessus de la sous-variété  $S^2 - 4P = 0$ .
3. Deux paires irréductibles  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  et  $(\mathbf{A}', \mathbf{B}')$  d'éléments de  $SL(3, \mathbb{C})$  sont conjuguées si et seulement si  $\Psi_3(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \Psi_3(\mathbf{A}', \mathbf{B}')$  et  $\text{tr}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \text{tr}[\mathbf{A}', \mathbf{B}']$ .

En particulier la variété des caractères de  $F_2$  dans  $SL(3, \mathbb{C})$  apparaît comme une sous-variété de  $\mathbb{C}^9$  qui est un revêtement ramifié double de  $\mathbb{C}^8$ .

## 3.4 Représentations de certains groupes de trois variétés hyperboliques non-compactes de volume fini dans $SL(3, \mathbb{C})$ .

### 3.4.1 La méthode de Thurston pour $PSL(2, \mathbb{C})$

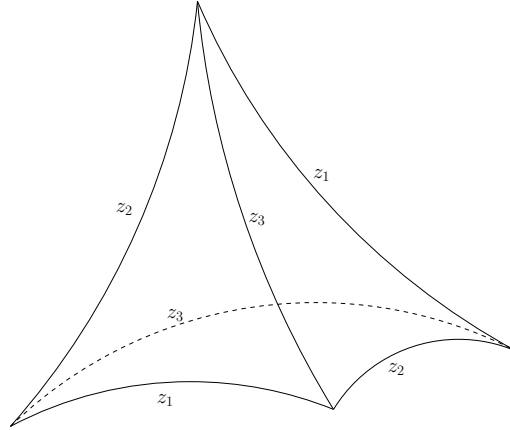
Dans le chapitre 4 de [Thu], Thurston présente une méthode pour décrire des structures hyperboliques sur certaines 3-variétés. Il s'agit de partir d'une triangulation idéale de la variété, et de construire l'image l'application développante de la structure simplexe par simplexe. Plus précisément, supposons donnée une triangulation idéale de  $M$ , c'est à dire une décomposition

$$M = \bigsqcup_{i \in I} T_i, \quad (3.13)$$

où chaque  $T_i$  est un tétraèdre abstrait duquel ont été otés ses sommets. Le but est de réaliser chacun des  $T_i$  en un tétraèdre idéal de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$  en respectant la combinatoire de la triangulation (3.13). En supposant ceci fait, on obtient une famille de tétraèdres idéaux de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$  qui est invariante sous l'action du groupe fondamental de  $M$ . Leur réunion est l'image de l'application développante. La représentation d'holonomie peut s'obtenir de manière algorithmique, nous y reviendrons au paragraphe suivant. Pour mener à bien la réalisation de la famille de tétraèdres, on procède de la manière suivante. Premièrement, les tétraèdres idéaux sont classifiés modulo  $PSL(2, \mathbb{C})$  par un nombre complexe : le birapport. Nous le définissons ici comme

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}. \quad (3.14)$$

On associe alors à chaque arête  $\mathbf{e}$  de chaque tétraèdre  $T_i$  un nombre complexe, qu'on interprétera géométriquement comme le birapport de ce tétraèdre vu de  $\mathbf{e}$ . Plus précisément,


 FIGURE 3.1 – Les birapports associés aux arêtes d’un tétraèdre idéal dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$ 

$T_i$  est isométrique à un tétraèdre idéal du type  $(\infty, 0, 1, z)$ , où  $\mathbf{e}$  est envoyée sur la géodésique  $(0, \infty)$  de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$  (vu comme le demi-espace supérieur). Le birapport associé à  $\mathbf{e}$  est alors le nombre  $z$ . En effectuant le changement

$$(z_1, z_2) \longleftrightarrow (z_3, z_4),$$

on constate que le birapport associé à l’arête de  $T_i$  opposée à  $\mathbf{e}$  est également  $z$ . Autrement dit, on enrichit la triangulation (3.13) en associant à chaque tétraèdre  $T_i$  trois nombres complexes  $(z_1^i, z_2^i, z_3^i)$  : un birapport par paire d’arêtes opposées. Ces trois nombres complexes sont liés par les relations suivantes, qui s’obtiennent par des calculs élémentaires à partir de (3.14).

$$z_1^i z_2^i z_3^i = -1 \tag{3.15}$$

$$1 - z_1^i + z_1^i z_2^i = 0. \tag{3.16}$$

Ces deux relations caractérisent les triplets  $(z_1, z_2, z_3)$  qui sont les birapports d’un tétraèdre idéal hyperbolique réel et doivent donc être vérifiées pour chaque tétraèdre de (3.13). Nous les appellerons donc *relations internes*. Pour vérifier que la famille de tétraèdres décrite par ces birapports est une réalisation géométrique de la triangulation (3.13), il suffit alors de considérer la situation autour de chaque arête de (3.13). En effet, deux triangles idéaux étant toujours congruents dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$ , on peut toujours recoller deux tétraèdres le long d’une face quelconque. Ceci permet de définir la structure hyperbolique sur  $M$  privée du 1-squelette de la triangulation (3.13). Pour que cette structure s’étende à  $M$  tout entière, il faut et suffit que les tétraèdres images des  $T_i$  pavent un voisinage de chacune des

arêtes. Ceci se traduit en termes de birapports par des *condition d'arêtes*. Soit  $\mathbf{e}$  une arête de (3.13) et  $T_{i_1}, \dots, T_{i_k}$  la liste des tétraèdres contenant  $\mathbf{e}$ . La condition de recollement associée à l'arête  $\mathbf{e}$  est

$$z_{\mathbf{e}}(T_{i_1}) \cdots z_{\mathbf{e}}(T_{i_k}) = 1 \tag{3.17}$$

$$\arg(z_{\mathbf{e}}(T_j)) \in [0, \pi), j \in i_1 \cdots i_k. \tag{3.18}$$

où  $z_{\mathbf{e}}(T_j)$  est le birapport associé à l'arête  $\mathbf{e}$  vue dans le tétraèdre  $T_j$ . Les inégalités (3.18) correspondent à la condition que deux tétraèdres successifs sont de part et d'autre de leur face commune, qui est nécessaire pour garantir qu'on a effectivement une structure sur  $M$ . Nous renvoyons à la section 4.2 de [Thu] pour plus de détails. Notons ici que si l'on ne fait que chercher des représentations de  $\pi(M)$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ , et pas forcément des holonomies de structures, on peut s'affranchir de (3.18).

### 3.4.2 De $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ à $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ : adaptation de la méthode de Thurston.

Nous allons maintenant exposer le principe d'une généralisation de la construction de Thurston au cadre de  $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ . Nous nous contenterons d'exposer certains aspects relativement élémentaires. Un exposé plus complet de ce matériel peut-être trouvé dans le premier chapitre de la thèse d'habilitation d'Antonin Guilloux [Gui15].

Le principe général de la méthode de Thurston reste valable pour décrire les représentations des groupes fondamentaux de 3-variétés dans  $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ , ou plus généralement dans  $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$  (à la complexité calculatoire près!). Ce procédé a été employé par Falbel dans [Fal08] sur l'exemple du complémentaire du noeud de huit dans le cas des représentations à valeur dans  $\mathrm{PU}(2, 1)$ , avant d'être exploité de manière plus systématique dans la série de travaux [BFG14, BFG<sup>+</sup>13, FGK<sup>+</sup>16, FKR15]. Le cas de  $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$  pour  $n$  quelconque a été étudié par des moyens analogues dans [GGZ15] et [GTZ15].

Signalons dès à présent une différence notable avec la méthode de Thurston du paragraphe précédent. Nous n'aurons pas ici d'analogue des inégalités (3.18) qui garantissent de manière simple dans le cas de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  que les représentations obtenues correspondent effectivement à une structure hyperbolique. Comme nous allons le voir, la structure géométrique en jeu ici est  $(G, X)$ -structure où  $X$  est l'espace des drapeaux de  $\mathbb{C}P^2$  et  $G$  le groupe  $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ . Nous reviendrons sur l'utilisation des drapeaux un peu plus bas. Il faut donc un travail séparé pour montrer qu'une représentation obtenue par cette méthode est (ou pas) l'holonomie d'une telle structure.

Nous partons donc toujours d'une triangulation idéale de  $M$ , 3-variété hyperbolique de volume fini, comme en (3.13). L'idée directrice est de travailler en utilisant des drapeaux pour remplacer les sommets des tétraèdres idéaux de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$ . Rappelons qu'un drapeau de  $\mathbb{C}P^2$  est une paire  $D = ([x], [f])$ , où  $[x]$  est un point de  $\mathbb{C}P^2$  et  $f$  une forme linéaire telle que  $f(x) = 0$ . Il s'agit donc géométriquement d'un point et d'une droite projective ( $[\ker(f)]$ )

le contenant. Le groupe projectif agit naturellement sur l'ensemble des drapeaux par

$$g \cdot ([x], [f]) = ([g \cdot x], [fg^{-1}]).$$

Supposons alors donnée une représentation  $\rho$  de  $\pi_1(M)$  dans  $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ . Puisque les sommets de la triangulation correspondent aux cusps de  $M$ , à chacun de ces sommets associé un groupe périphéral de  $\pi_1(M)$ , qui est isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ . L'image par  $\rho$  de ce groupe périphéral est donc un groupe abélien (qui n'est pas forcément isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ ). En particulier, on peut associer à chaque sommet de la triangulation un drapeau préservé par le groupe périphéral correspondant. Ce choix n'est en général pas unique, mais il est génériquement fini. Il est donc naturel de remplacer les tétraèdres de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$  par un objet géométrique plus riche : les tétraèdres de drapeaux. Ceci permet de rigidifier la situation, et de définir des applications de collage satisfaisantes comme nous allons le voir. Comme précédemment, il faut commencer par classifier ces objets modulo l'action du groupe projectif, et l'on utilise pour cela des invariants projectifs classiques : birapport et trirapport.

1. Soit  $T = (D_1, D_2, D_3)$  un triplet de drapeaux en position générique. Le trirapport de  $T$  est la quantité

$$z(T) = \frac{f_1(x_2)f_2(x_3)f_3(x_1)}{f_1(x_3)f_2(x_1)f_3(x_2)}, \text{ où } D_i = ([x_i], [f_i]). \quad (3.19)$$

La quantité  $z(T)$  est clairement invariante par transformation projective. Par ailleurs, si  $\sigma$  est une permutation de  $\{1, 2, 3\}$  et  $T^\sigma$  le triplet de drapeaux  $(T_{\sigma(i)})_i$  alors

$$z(T^\sigma) = z(T)^{\varepsilon(\sigma)}. \quad (3.20)$$

Le trirapport classe les triplets génériques de drapeaux en position modulo  $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$  au sens où deux triplets de drapeaux sont images l'un de l'autre par un (unique) élément de  $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$  si et seulement si ils ont même trirapport. Dans le cas particulier où les trois drapeaux sont formés par trois points au bord du plan hyperbolique complexe  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et les trois droites complexes tangentes à  $\partial_\infty \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , le trirapport (3.19) contient exactement la même information que l'invariant de Cartan des triangles idéaux, défini à la section 2.4.

2. Un quadruplet ordonné de droites concourantes dans  $\mathbb{C}P^2$ ,  $(L_i)_{1 \leq i \leq 4}$ , admet un birapport  $[L_1, L_2, L_3, L_4]$  : ces quatre droites vivent dans une même droite projective de l'espace projectif dual.

Afin de préciser la manière d'associer des invariants projectifs à un tétraèdre de drapeaux commençons par choisir une orientation de la surface du tétraèdre. Chaque face hérite alors d'un ordre cyclique sur ses sommets. Sur la figure 3.2, nous avons choisi d'orienter le tétraèdre par la normale extérieure. On procède comme suit.

1. A toute face  $\{ijk\}$  du tétraèdre est associé un triplet *orienté* de drapeaux comme en (3.19). Notons que le choix de l'orientation supprime l'ambiguïté liée à (3.20). On associe alors à cette face le trirapport des drapeaux correspondants, noté  $z_{ijk}$ , qui ne dépend que de l'ordre cyclique.
2. A toute arête *orientée* ( $i \rightarrow j$ ) on associe le birapport  $z_{ij} = [\ker(f_i), L_{ij}, L_{ik}, L_{il}]$ . L'ordre dans lequel apparaissent les trois droites  $L_{ij}, L_{ik}, L_{il}$  est donné par l'orientation de la face opposée à  $D_i$ .

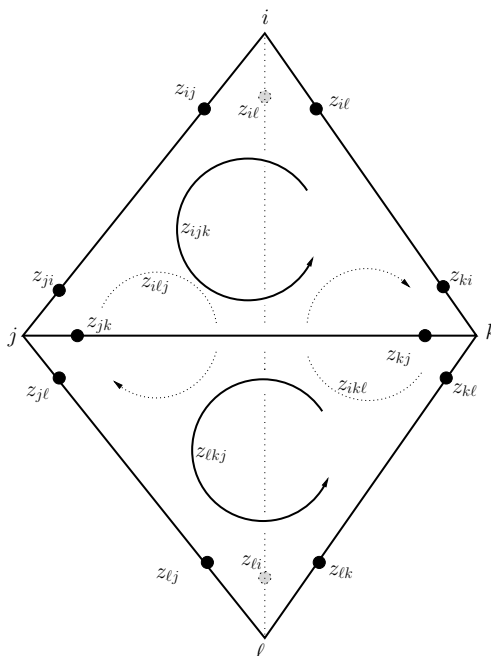


FIGURE 3.2 – Répartition sur un tétraèdre des invariants d'un quadruplet de drapeaux.

Les 16 invariants ainsi produits sont représentés schématiquement sur le tétraèdre  $ijkl$  sur la figure 3.2. Comme dans le cas de Thurston, ces 16 invariants ne sont pas indépendants : ils sont liés entre eux par des relations *internes*, qui garantissent qu'un 16-uplet de nombres complexes est effectivement un jeu d'invariants d'un tétraèdre de drapeaux en position générale.

$$z_{ijk} = -z_{il}z_{jl}z_{kl}, z_{ik} = \frac{1}{1 - z_{ij}}, z_{il} = 1 - \frac{1}{z_{ij}}. \quad (3.21)$$

On montre en fait que les birapports associés à une paire d'arêtes opposées suffisent à déterminer la classe d'un tétraèdre de drapeaux modulo  $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$  : on peut donc choisir par exemple  $z_{12}, z_{21}, z_{34}, z_{43}$ .

*Remarque 3.4.1.* Il peut sembler a priori étrange d'utiliser 16 invariants là où 4 suffisent. En réalité, les conditions de recollement s'écrivent de manière beaucoup plus simples si l'on utilise plus d'invariants. Par ailleurs, l'espace des quadruplets de drapeaux porte une forme symplectique (voir la section 4.4 de [BFG14] et [Gen10]) qui s'exprime plus naturellement si l'on utilise les 16 invariants.

Les conditions de recollement sont cette fois de deux types : conditions de faces et conditions d'arêtes. Les conditions d'arêtes sont similaires à (3.17) : si  $T_1, \dots, T_\nu$  est la liste des tétraèdres contenant une arête donnée  $ij$ , la condition d'arête est

$$z_{ij}(T_1) \cdots z_{ij}(T_\nu) = z_{ji}(T_1) \cdots z_{ji}(T_\nu) = 1. \quad (3.22)$$

Comme annoncé plus haut, il n'y a pas d'analogue des inégalités (3.18), qui garantissaient dans le cas de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  que l'on avait effectivement une structure autour de l'arête.

Les conditions de faces reviennent à demander que l'on ne colle ensemble que des faces de même forme. Ceci s'écrit en termes d'invariants

$$z_{ijk}(T) = z_{ijk}(T')^{-1}, \quad (3.23)$$

pour toute face  $(ijk)$  appartenant à deux tétraèdres  $T$  et  $T'$ . L'inverse dans le membre de droite de (3.23) vient des choix d'orientations faits. Un jeu de nombre complexes  $(z_{mn}, z_{ijk})$  vérifiant toutes les conditions énumérées ci-dessus s'appelle une *décoration* de la triangulation. La *variété des déformations* est l'ensemble des décorations, on la notera  $\mathrm{Deform}_3(M, \mathcal{T})$ , où  $M$  est la variété considérée, et  $\mathcal{T}$  une triangulation de  $M$ . La variété des déformations est donc la sous-variété de  $\mathbb{C}^N$  définie par les conditions internes et les conditions de recollement.

Terminons cette section par quelques remarques.

- Nous avons pour passé sous silence la recherche des solutions du système d'équations associé à la triangulation (qui est donc formé par les équations (3.21), (3.22) et (3.23)). Cet aspect est extrêmement difficile et implique une utilisation non-triviale de l'ordinateur. Nous renvoyons à [FGK<sup>+</sup>16], où certains aspects liés à l'implémentation sont exposés.
- La donnée d'une décoration de  $\mathcal{T}$  permet de construire une configuration de drapeaux, et son holonomie. Il s'agit d'un procédé algorithmique similaire en principe à ce que font Fock et Goncharov dans [FG06]. Nous renvoyons par exemple à [Gui15] pour plus de détails.

### 3.5 Représentations du groupe de l'entrelacs de Whitehead dans $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ .

Dans ce paragraphe, nous allons décrire une composante algébrique de la variété des caractères dans  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$  du groupe de l'entrelacs de Whitehead. Il s'agit d'un résultat obtenu

en collaboration avec Antonin Guilloux dans [GW18]. La méthode que nous appliquons repose sur deux ingrédients principaux :

1. la description de la variété des caractères obtenue au paragraphe précédent par les équations de faces et recollement,
2. la connaissance explicite d'une représentation particulière du groupe considéré (ici le groupe de l'entrelacs de Whitehead).

La représentation que nous utilisons ici provient de mon travail en collaboration avec John Parker. Elle peut paraître un peu parachutée ici, mais nous verrons au chapitre 5 que l'on peut espérer obtenir des représentation similaires pour d'autres 3-variétés et transposer la méthode exposée ici à d'autres cas.

Rappelons que le groupe fondamental du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead admet la présentation suivante.

$$\pi = \langle x, y | [x, y][x, y^{-1}][x^{-1}, y^{-1}][x^{-1}, y] \rangle \quad (3.24)$$

Le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead est une variété hyperbolique de volume fini à deux cusps, qui admet une triangulation idéale à 4 tétraèdres. Son groupe fondamental est arithmétique : il peut-être obtenu comme sous-groupe du groupe de Bianchi  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}[i])$ , voir par exemple [Wie78] ou la section 1.5 de [MR03]. Nous utilisons dans [GW18] la triangulation provenant de la description classique du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead comme espace quotient d'un octaèdre idéal par des recollements "bien choisis". Nous renvoyons à [GW18] ou [Rat19] pour une description plus précise, voir également la section 5.2.2.

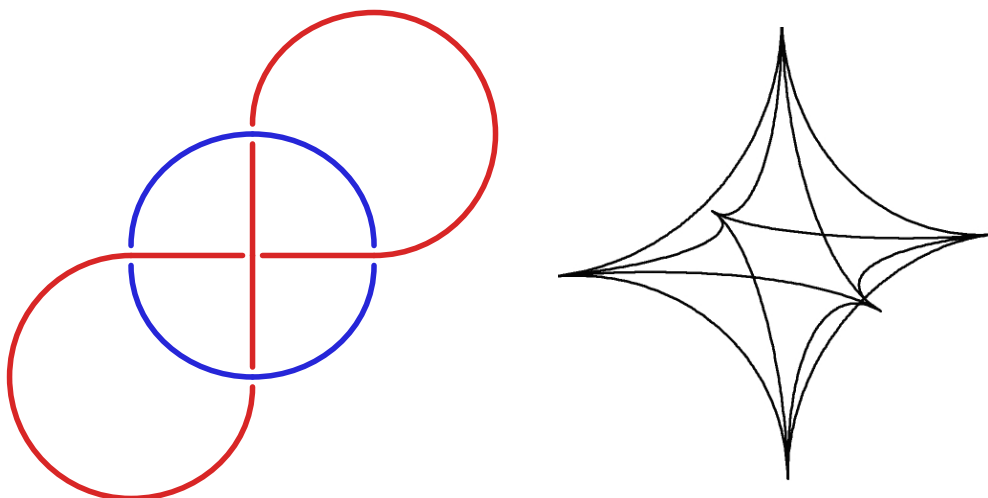


FIGURE 3.3 – L'entrelacs de Whitehead et un octaèdre hyperbolique régulier

La remarque initiale est que le groupe

$$\pi' = \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3 = \langle s, t \mid s^3 = t^3 = 1 \rangle$$

est un quotient de  $\pi$  (voir ci-dessous). Ceci est dû au fait que l'entrelacs de Whitehead admet un remplissage de Dehn homéomorphe à la somme connexe de deux espaces lenticulaires,  $L(3,1)\sharp L(3,1)$  (voir [MP06] et la section 5.2.2). Plus précisément, fixons  $m_i$  et  $\ell_i$  ( $i = 1, 2$ ) des générateurs (méridiens et longitudes) des deux sous-groupes périphéraux de  $\pi$ . Ce choix n'est bien sûr pas unique, il est explicité dans [GW18]. Le quotient  $\pi'$  est associé aux relations

$$m_i^3 \ell_i^{-1} = 1, i = 1, 2. \quad (3.25)$$

Il s'agit donc d'un remplissage de Dehn de pente  $-3$  sur chacun des deux cusps. Par conséquent, toute représentation de  $\pi'$  dans  $SL(3, \mathbb{C})$  peut-être vue comme une représentation de  $\pi$  en la précomposant par la projection  $\pi \twoheadrightarrow \pi'$ . Considérons alors  $X_0$  le sous-ensemble de la variété de caractères de  $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3$  correspondant aux représentations  $\rho$  de  $\pi'$  dans  $SL(3, \mathbb{C})$  telles de  $\rho(s)$  et  $\rho(t)$  sont *réguliers* (c'est à dire à valeurs propres distinctes).

**Théorème 3.5.1** ([GW18]).  *$X_0$  s'identifie à une composante algébrique de dimension 4 de la variété des caractères de  $\pi$  dans  $SL(3, \mathbb{C})$ .*

On constate donc que l'une des composante de la variété de caractère correspond à des représentations qui factorisent par le remplissage de Dehn mentionné ci-dessus. En particulier, aucune des représentations dans cette composante n'est fidèle, et leur noyaux contiennent tous le groupe engendré par les relations (3.25). Le sous-groupe engendré par (3.25) est génériquement égal au noyau dans la composante, mais peut être plus gros.

Un phénomène analogue se produit dans le cas de la  $SL(3, \mathbb{C})$ -variété de caractères du noeud de huit (cf [FGK<sup>+</sup>16]), dont deux composantes correspondent à des représentations qui factorisent par un certain remplissage de Dehn.

Les ingrédients de la preuve du Théorème 3.5.1 sont d'une part la description explicite de  $\chi_3(F_2)$  donnée en section 3.3, et d'autre part la machinerie exposée dans la section précédente. Résumons.

Puisque  $\pi'$  est un quotient de  $\pi$ , et que  $\pi$  est un quotient de  $F_2$ , la suite d'inclusions suivante est vérifiée (voir par exemple la discussion page 15 de [LM85]).

$$\chi_3(\pi') \subset \chi_3(\pi) \subset \chi_3(F_2). \quad (3.26)$$

La condition de régularité de  $\rho(s)$  et  $\rho(t)$  est équivalente aux relations

$$\mathrm{tr}(\rho(s)) = \mathrm{tr}(\rho(s^{-1})) = \mathrm{tr}(\rho(t)) = \mathrm{tr}(\rho(t^{-1})) = 0. \quad (3.27)$$

En particulier,  $X_0$  s'identifie à  $\Psi_3^{-1}(V) \subset \chi_3(F_2)$ , où  $\Psi_3$  est l'application définie en (3.8), et  $V$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{C}^8$  défini par

$$V = \{(0, 0, x_3, x_4, 0, 0, x_7, x_8), x_i \in \mathbb{C}\}.$$

Il s'en suit que  $V$  est un fermé de Zariski de  $\chi_3(F_2)$  de dimension au moins 4. De plus, des calculs élémentaires montrent que  $X_0$  est irréductible : il suffit de montrer que le discriminant de l'équation des traces,  $S^2 - 4P$ , n'est pas un carré lorsque  $x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = 0$ . Le point clé est alors le suivant. On peut trouver une représentation  $\rho_0$  telle que que la dimension de l'espace Zariski tangent à  $\chi_3(\pi)$  en  $[\rho_0]$  est 4. Supposons en effet ce point acquis et soit  $X$  une composante algébrique de  $\chi_3(\pi)$  qui contient  $X_0$ . Elle contient le point  $[\rho_0]$ , et par conséquent est de dimension au plus 4 (sa dimension est majorée par celle de tout espace Zariski-tangent). Mais d'après la discussion ci-dessus,  $X_0 \subset X$  est un fermé de Zariski irréductible de dimension au moins 4. Ceci implique que  $X_0 = X$ . La représentation que nous utilisons est donnée par  $\rho_0(s) = S$  et  $\rho_0(t) = T$ , où

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \bar{q} & -1 \\ -q & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & -q & -1 \\ \bar{q} & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } q = \frac{\sqrt{3} + i\sqrt{5}}{2}. \quad (3.28)$$

Pour calculer la dimension de l'espace Zariski tangent à  $[\rho_0]$ , on calcule en réalité la dimension de l'espace Zariski tangent à la variété des déformations (voir la section 3.4.2), qui est au voisinage de  $[\rho_0]$  un revêtement ramifié de la variété des caractères. Pour cela, on doit identifier une décoration de la triangulation associée à  $\rho_0$ . Or puisque tous les lacets périphériques de  $\pi_1(M)$  sont envoyés par  $\rho_0$  sur des éléments unipotents (donc paraboliques), qui ne préservent qu'un seul drapeau pour lequel le point est précisément le point fixe parabolique. Il en résulte qu'il n'existe qu'une seule décoration possible. On peut alors calculer ses invariants explicitement, ce qui nous donne un point de la variété des décorations. Il faut alors calculer le rang de l'application donnée par les équations de recollement en ce point, ce qui revient à étudier un système de 48 équations. Nous avons utilisé l'ordinateur à ce stade.

Terminons cette section par quelques remarques.

- Remarque 3.5.1.*
1. Etant donné une représentation de  $\pi_1(M)$  dans  $SL(2, \mathbb{C})$ , on peut la "prolonger" à  $SL(3, \mathbb{C})$  en la post-composant par la représentation irréductible de  $SL(2, \mathbb{C})$  dans  $SL(3, \mathbb{C})$ . En procédant ainsi avec la représentation d'holonomie de la structure hyperbolique de volume fini sur l'entrelacs de Whitehead, on obtient une représentation fidèle dans  $SL(3, \mathbb{C})$  que nous noterons  $\rho_{hyp}$ . La composante  $X_0$  ne contient pas le caractère de  $\rho_{hyp}$  puisqu'elle correspond à des représentations qui sont toutes non-fidèles.
  2. La représentation  $\rho_0$  donnée en (3.28) provient de mon travail commun avec John Parker [PW17a]. Son image est incluse dans  $SU(2, 1)$ . Elle donne donc une action sur le plan hyperbolique complexe, et nous montrons dans [PW17a] qu'elle est l'holonomie d'une uniformisation CR sphérique du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead. Nous y reviendrons dans la section 5.

3. La méthode présentée ci-dessus est en théorie transposable à d'autres exemples de 3-variétés. Il faut pour cela disposer d'une représentation, et d'une triangulation. En pratique aucune de ces deux données n'est très facile à obtenir.
4. Les points de  $X_0$  peuvent être vus comme des caractères de représentations de  $\mathbb{Z}_3 \star \mathbb{Z}_3$  dans  $SL(3, \mathbb{C})$ . Dans [Aco19a], Miguel Acosta a vérifié que ces caractères forment en réalité la composante de dimension maximale de cette variété de caractères. Dans [FG17], Falbel et Guilloux ont montré que si  $M$  est une 3-variété et  $X$  une composante de la  $PGL(n, \mathbb{C})$  variété de caractères de  $\pi_1(M)$  contenant une représentation  $\rho$  Zariski-dense et régulière au bord (c'est à dire que pour toute composante torique  $T$  de  $\partial M$ , tout sous-espace sur lequel  $\rho(\pi_1(T))$  agit comme une homothétie est une droite), alors

$$\dim(X) \geq (n-1)t - (n-1)\chi(M),$$

où  $t$  est le nombre de composantes toriques. Ceci montre que la composante  $X_0$  décrite ici réalise le minimum des dimensions possibles (la représentation  $\rho_0$  décrite en (3.28) vérifie les deux conditions de Zariski densité, et de régularité au bord).

# Chapitre 4

## Classes de conjugaisons.

### 4.1 Motivation

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux contraintes sur les classes de conjugaisons qui existent au sein d'un sous-groupe à deux générateurs de  $SU(2,1)$  ou  $PU(2,1)$ . Pour situer le problème, considérons l'application

$$\begin{aligned} \Psi_{2,1} : SU(2,1) \times SU(2,1) &\longrightarrow \mathbb{C}^4 \\ (A, B) &\longmapsto (\operatorname{tr} A, \operatorname{tr} B, \operatorname{tr} AB, \operatorname{tr} A^{-1}B) \end{aligned}$$

Le théorème 3.3.1 implique presque directement

**Proposition 4.1.1.** *Deux paires irréductibles  $(A, B)$  et  $(A', B')$  d'éléments de  $SU(2,1)$  sont conjuguées dans  $SU(2,1)$  si et seulement si*

$$\Psi_{2,1}(A, B) = \Psi_{2,1}(A', B') \text{ et } \operatorname{tr}[A, B] = \operatorname{tr}[A', B']. \quad (4.1)$$

Les cinq traces impliquées dans la proposition 4.1.1 sont liées entre elles par une relation : l'équation des traces (3.9) restreinte à  $SU(2,1)$  nous dit que  $\operatorname{tr}[A, B]$  est solution d'une équation de degré deux dont les coefficients sont polynômiaux en les quatre autres traces. Cette équation est à coefficients réels : ceci provient de ce que  $SU(2,1)$  satisfait

$$\forall M \in SU(2,1), \operatorname{tr}(M^{-1}) = \overline{\operatorname{tr} M}, \quad (4.2)$$

et de la symétrie dans les coefficients de l'équation des traces, exhibée en (3.11) et (3.12). Par ailleurs, les traces de  $[A, B]$  et  $[A, B]^{-1}$ , qui sont les racines de l'équation des traces, sont conjuguées dans  $\mathbb{C}$  par (4.2). Ceci implique donc la

**Proposition 4.1.2.** *Le discriminant de l'équation des traces restreinte à  $SU(2,1)$  est négatif ou nul.*

La proposition 4.1.2 fournit donc une contrainte entre quatre classes de conjugaison  $(\mathcal{C}_i)_{1 \leq i \leq 4}$  pour qu'il existe  $A$  et  $B$  dans  $SU(2,1)$  telles que

$$A \in \mathcal{C}_1, B \in \mathcal{C}_2, AB \in \mathcal{C}_3 \text{ et } A^{-1}B \in \mathcal{C}_4. \quad (4.3)$$

J'ai vérifié dans [Wil16] (Th. 5.2) qu'il s'agissait de la seule contrainte sous l'hypothèse supplémentaire que  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont toutes deux loxodromiques. Cependant la situation est plus complexe lorsque cette hypothèse supplémentaire n'est pas vérifiée. En effet, lorsque  $A$  et  $B$  sont elliptiques, il existe déjà des contraintes pour trois classes de conjugaison. Etant données trois classes elliptiques  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$ , il n'est pas trivial de déterminer s'il existe ou non une paire  $(A, B)$  telle que

$$A \in \mathcal{C}_1, B \in \mathcal{C}_2, AB \in \mathcal{C}_3. \quad (4.4)$$

Il s'agit d'une version hyperbolique complexe du fameux *problème de Horn multiplicatif*<sup>1</sup>, qui peut s'énoncer comme suit. Etant données deux classes de conjugaisons  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  dans un groupe de Lie  $G$ , quelles sont les classes de conjugaison possibles pour le produit  $AB$  lorsque  $A \in \mathcal{C}_1$  et  $B \in \mathcal{C}_2$ ? On cherche donc à donner des conditions garantissant l'existence de représentations du groupe fondamental de la sphère moins trois points avec classes de conjugaisons périphérales prescrites. Ce problème a une version à  $n$  classes de conjugaisons, souvent appelée problème de Deligne-Simpson (voir par exemple le survey [Kos04]). Cette question a engendré une littérature extrêmement abondante dans le cas des groupes compacts, mettant en jeu des méthodes très variées (théorie géométrique des invariants, géométrie symplectique, combinatoire...). Il découle des travaux de Biswas ([Bis, Bis99]), Belkale [Bel01], Meinrenken-Woodward [MW98], Ressayre [Res13] et [BK16] que

**Théorème 4.1.1.** *L'ensemble des triplets de classes de conjugaisons  $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$  dans  $U(n)$  pour lesquelles il existe  $(A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_3$  tels que  $A_1 A_2 A_3 = I$  est un polytope convexe d'intérieur non-vide dans  $\Delta^3$ , où  $\Delta$  est l'alcôve fondamentale de  $U(n)$ , qui paramétrise les classes de conjugaison de  $U(n)$ . De plus, on connaît un ensemble minimal d'équations qui décrit ce polyèdre.*

Biswas ([Bis, Bis99]) avait donné un ensemble d'équations décrivant l'ensemble des solutions, et c'est plus récemment que Ressayre et Balkale-Kumar ([Res13, BK16]) ont obtenus un ensemble minimal d'équations. La convexité est due à Meinrenken et Woodward (voir la section 4.4 de [MW98]). Leur approche relève de ce qui est devenu depuis la théorie des espaces quasi-Hamiltoniens, décrite par Alekseev-Malkin-Meinrenken dans [AMM98]. Il s'agit d'une généralisation de la géométrie hamiltonienne classique, dans laquelle l'application moment prend ses valeurs dans un groupe de Lie (au lieu du dual de l'algèbre de Lie

---

1. Il existe une version additive du même problème, qui consiste à trouver le spectre de  $A + B$  en supposant connus les spectres de  $A$  et  $B$ , où  $A$  et  $B$  sont des matrices hermitiennes

dans le cas classique). Dans le cas du problème de Horn, l'espace considéré est le produit de trois classes de conjugaison, et l'application moment est le produit du groupe  $G$  :

$$\begin{aligned} \mu & : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_3 & \longrightarrow & G \\ & (A_1, A_2, A_3) & \longmapsto & A_1 A_2 A_3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Alekseev-Malkin-Meinrenken ont démontré dans [AMM98] (Théorème 7.2) un théorème de convexité pour l'image de l'application moment qui est le pendant quasi-Hamiltonien du théorème d'Atiyah et Guillemin-Sternberg (voir par exemple [Can]) qui implique la partie convexité du Théorème 4.1.1. Une description élémentaire et explicite de la structure quasi-Hamiltonienne de l'espace des modules des représentations unitaires du groupe fondamental de la sphère moins  $n$  points a été donnée dans [Sch07a] (voir également [Sch08]). On peut également trouver dans les transparents [Tha] de l'exposé donné par M. Thaddeus à la conférence AGNES en 2014 des informations intéressantes sur la nature des sommets de ce polyèdre.

Le cas de  $\text{PU}(2,1)$  est donc une généralisation du cas compact vers le cas de rang 1. Pour comprendre la situation, nous devons considérer le cas intermédiaire de  $\text{PU}(1,1)$ , qui peut se résoudre entièrement de façon élémentaire. Les résultats connus sur cette question dans le cas des classes de conjugaisons elliptiques sont principalement dus à J. Paupert [Pau07], je les exposerai dans la section 4.2.3. Nous verrons qu'on peut obtenir également certains résultats impliquant des classes paraboliques qui proviennent de mon travail avec John Parker [PW15].

On peut aussi généraliser la question du problème de Horn sous la forme suivante. Soient  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$  trois classes de conjugaisons d'un groupe de Lie  $G$ , et soit  $\mathbf{w}$  un mot dans le groupe libre à deux générateurs  $F_2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ . Existe-t-il une représentation  $\rho$  de  $F_2$  dans  $G$  telle que

$$\rho(\mathbf{a}) \in \mathcal{C}_1, \rho(\mathbf{b}) \in \mathcal{C}_2 \text{ et } \rho(\mathbf{w}) \in \mathcal{C}_3? \quad (4.6)$$

On se doute bien que le problème est trop difficile posé tel quel.

Notre motivation principale pour poser cette question est la recherche de représentations de groupes fondamentaux de 3-variétés dans  $\text{PU}(2,1)$ , en particulier de 3-variétés hyperboliques. Nous aborderons cette question plus précisément à section 5.2.2, en lien avec la recherche de structures géométriques modelées sur le bord à l'infini de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . En un mot, en passant par certaines opérations topologiques (remplissage de Dehn), on peut trouver des représentations de groupes de 3-variétés hyperboliques dans  $\text{PU}(2,1)$  relativement facilement, et la question 4.6 prend un sens intéressant (voir par exemple les tableaux 5.1 et 5.2, où l'on cherche à ce que certains mots  $\mathbf{w}$  soient paraboliques avec une contrainte sur les classes de conjugaison de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ ). Nous avons déjà partiellement discuté cette question de point de vue des variétés de caractères dans la section 3.5, dans le cas spécial du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead.

Pour finir, une contrainte sur la classe de conjugaison d'un mot du groupe libre peut avoir des conséquences géométriques intéressantes. Ainsi, le théorème 4.3.1 de la section 4.3 montre que si  $\mathbf{w} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ , alors le fait que la classe de  $\rho(\mathbf{w})$  soit "réelle" (nous précisons ce que nous entendons par là) implique que l'image de  $\rho$  est d'indice deux dans un groupe de réflexions antiholomorphes.

Nous allons donc considérer ces contraintes sur les classes de conjugaisons sous divers points de vue.

1. Nous allons décrire certains aspects du problème de Horn multiplicatif dans  $\mathrm{PU}(2,1)$  (section 4.2). J'ai inclus un rapide exposé des résultats concernant les classes semi-simples (qui sont dus principalement à Paupert [Pau07]). Le lecteur intéressé peut trouver davantage d'informations dans [Pau07], dans le survey [Wil16] ou dans [PW17b]. Les résultats concernant les classes paraboliques proviennent de mon travail avec John Parker [PW15].
2. Nous allons étudier dans la section 4.3 certaines questions relatives à la possibilité de décomposer une paire  $(A, B)$  en produits d'involutions sous la forme  $A = I_1 I_2$  et  $B = I_3 I_2$ . L'existence d'une telle décomposition est intéressante car elle permet de ramener l'étude du groupe engendré par  $A$  et  $B$  à celle du groupe triangulaire  $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$ . Ces résultats ont été obtenus en collaboration avec Julien Paupert et reposent partiellement sur la solution du problème de Horn décrite précédemment.

## 4.2 Problème de Horn multiplicatif dans $\mathrm{PU}(2,1)$ .

Nous considérons donc maintenant le problème suivant. Soient  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux classes de conjugaison dans  $\mathrm{PU}(2,1)$ . Quelles sont les classes de conjugaisons possibles pour le produit  $AB$  lorsque  $A \in \mathcal{C}_1$  et  $B \in \mathcal{C}_2$ ? Nous supposons que  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont des classes semi-simples, c'est à dire elliptiques ou loxodromiques. Nous donnerons quelques éléments sur le cas où l'on manipule des classes paraboliques dans la section 4.2.4. Pour commencer, nous considérons les paires  $(A, B)$  réductibles, qui sont contenues dans le stabilisateur d'un point (qui est une copie de  $\mathrm{U}(2)$ ) ou d'une droite complexe (qui est une copie de  $\mathrm{U}(1,1)$ ), et commençons donc par traiter les deux cas de  $\mathrm{U}(2)$  et  $\mathrm{U}(1,1)$ .

### 4.2.1 Les cas de $\mathrm{SU}(2)$ et $\mathrm{U}(2)$

L'ensemble des classes de conjugaisons de  $\mathrm{U}(2)$  est, comme en (2.27) le quotient

$$\{(\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi]^2, \theta_2 \leq \theta_1\} / \{(\theta, 0) \sim (2\pi, \theta)\}.$$

Parmi les classes de conjugaison de  $\mathrm{U}(2)$ , celles qui correspondent à  $\mathrm{SU}(2)$  sont celles pour lesquelles  $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$ .

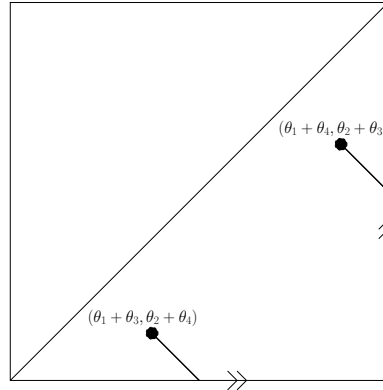


FIGURE 4.1 – Solution du problème de Horn pour  $U(2)$ . L'ensemble des paires d'angle des produits  $AB$  pour lesquels  $A$  (resp.  $B$ ) a pour paire d'angles  $\{\theta_1, \theta_2\}$  (resp.  $\{\theta_3, \theta_4\}$ ), est le segment en gras qui apparaît non connexe en carte.

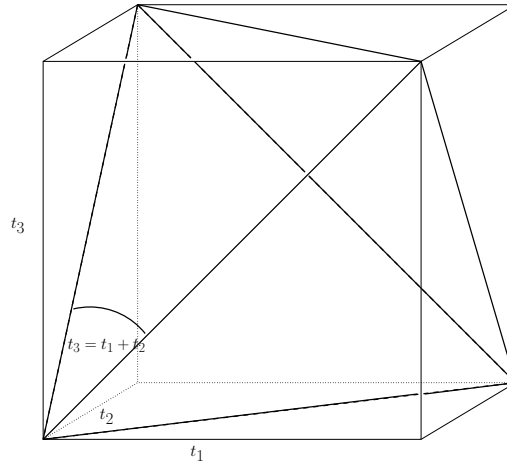
**Proposition 4.2.1.** *Soient deux classes de conjugaisons de  $U(2)$ , notée  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . L'ensemble des classes de conjugaisons possibles pour  $AB$  lorsque  $A$  et  $B$  parcourent respectivement  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  est un segment dont les points extrémaux correspondent aux paires  $(A, B)$  réductibles (voir la figure 4.1).*

La proposition 4.2.1 peut se démontrer de manière très élémentaire, par exemple par des calculs explicites. On peut également se ramener à un exercice de géométrie sphérique, et on constate alors que la proposition 4.2.1 est une reformulation de la loi des cosinus sphérique. Dans les coordonnées de la figure 4.1, ce segment est de pente  $-1$ , et si  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont données par les paires d'angles respectives  $\{\theta_1, \theta_2\}$  et  $\{\theta_3, \theta_4\}$ , il relie les paires d'angles  $\{\theta_1 + \theta_3, \theta_2 + \theta_4\}$  et  $\{\theta_1 + \theta_4, \theta_2 + \theta_3\}$ .

On peut symétriser le problème, et décrire l'ensemble des triplets  $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$  de classes de conjugaison dans  $SU(2)$  pour lesquels il existe des éléments  $A_i \in \mathcal{C}_i$  tels que  $A_1 A_2 A_3 = I$ . Les triplets de classes de conjugaisons correspondent au tore  $T^3$ , que nous représenterons en carte par le cube  $\{(t_1, t_2, t_3), t_i \in [0, 1]\}$  (on a posé ici  $\theta_i = 2\pi t_i$ ). On vérifie alors que l'ensemble des triplets de classes qui sont solutions du problème est le tétraèdre plein représenté sur la figure 4.2. Dans cette représentation de l'ensemble des solutions

1. les faces correspondent aux représentations réductibles,
2. les arêtes correspondent aux représentations pour lesquelles  $A$ ,  $B$  ou  $AB$  est l'identité,
3. les sommets, qui sont tous identifiés correspondent à la représentation triviale.

Remarquons que ces représentations correspondent aux triplets qui sont fixés par l'action de

FIGURE 4.2 – Solution du problème de Horn pour  $SU(2)$ .

$SU(2)$  par conjugaison diagonale. On a donc obtenu de manière élémentaire la proposition suivante :

**Proposition 4.2.2.** *L'ensemble des triplets  $(C_1, C_2, C_3)$  de classes de conjugaisons de  $SU(2)$  telles qu'il existe  $A_i \in C_i$  vérifiant  $A_1 A_2 A_3 = I$  est un simplexe, qui est l'enveloppe convexe de l'ensemble des classes de triplets solutions  $(A_1, A_2, A_3) \in C_1 \times C_2 \times C_3$  qui sont fixes sous l'action de  $SU(2)$  par conjugaison diagonale.*

Cette proposition est réminiscente du théorème d'Atiyah et Guillemin-Sternberg de convexité de l'image de l'application moment pour les actions de tores sur les variétés symplectiques compactes (voir par exemple le chapitre 27 de [Can]). Cependant,  $SU(2)$  n'est pas abélien et la situation ne relève pas tout à fait de ce théorème de convexité. Pour comprendre la coloration symplectique de ce résultat, il faut utiliser la théorie des espaces quasi-Hamiltoniens, développée par Alekseev-Malkin-Meinrenken dans [AMM98]. Cette théorie contient un théorème de convexité qui généralise celui d'Atiyah et Guillemin-Sternberg : l'image de l'application moment (généralisée) est un polytope convexe (th. 7.2 de [AMM98]). Cependant, ce polytope n'apparaît pas comme l'enveloppe convexe de l'ensemble des points fixes de l'action, comme c'est le cas dans le théorème classique. Comme on le constate, ce dernier point reste valide dans ce cas, mais ce n'est pas vrai pour  $SU(n)$  avec  $n$  grand (voir [Tha]).

### 4.2.2 Problème de Horn multiplicatif dans $SU(1,1)$ et $U(1,1)$ .

Dans le cas de  $SU(1,1)$  et  $U(1,1)$ , on peut appliquer à la question une méthode analogue à ce que nous venons de faire dans le cas de  $SU(2)$  et  $U(2)$  : on résout le problème de manière géométrique pour  $SU(1,1)$  (il s’agit d’exercices de géométrie hyperbolique), puis on traite le cas de  $U(1,1)$  en se ramenant à  $SU(1,1)$ . Les énoncés sont un peu moins agréables du fait des différents types de classes de conjugaison semi simples possibles : ceci traduit le fait que l’ensemble des classes de conjugaisons de  $SU(1,1)$  a une topologie un peu plus compliquée que  $SU(2)$ .

Pour raccourcir l’exposition, nous allons donc nous restreindre au cas où  $A$  et  $B$  sont elliptiques. Les résultats sont de même nature que précédemment .

**Proposition 4.2.3.** *Soient  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux classes de conjugaisons elliptiques de  $SU(1,1)$ , correspondant à des angles de rotations  $\theta_1$  et  $\theta_2$  (avec  $\theta_i \in [0, 2\pi)$ ). Si  $A \in \mathcal{C}_1$  et  $B \in \mathcal{C}_2$ , le produit  $AB$  peut prendre toutes les classes de conjugaisons hyperboliques ou paraboliques, et toutes les classes de conjugaisons elliptiques d’angle  $\theta$  telles que  $\theta \in [\theta_1 + \theta_2, 2\pi)$  (resp.  $(2\pi, \theta_1 + \theta_2]$ ) si  $\theta_1 + \theta_2 < 2\pi$  (resp.  $\theta_1 + \theta_2 > 2\pi$ ).*

On voit que l’énoncé ci-dessus fait déjà intervenir quelques sous-cas, et que bien qu’élémentaire cette question nécessite un certain soin. Lorsque  $A$  ou  $B$  n’est pas elliptique, on

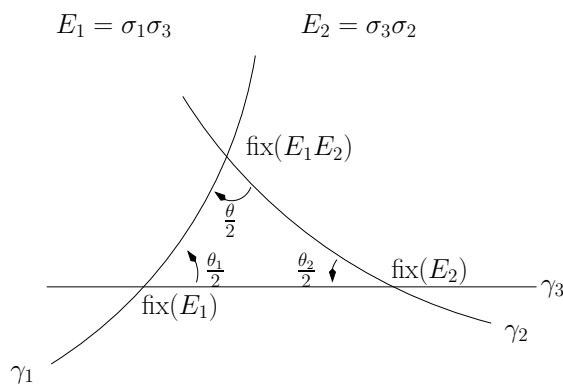


FIGURE 4.3 – Produit de deux rotations d’angles prescrits dans le disque hyperbolique

peut traiter la question de manière analogue, et réinterpréter – c’est un exercice amusant – la plupart des relations métriques des polygones hyperboliques “simples” en terme de produit d’isométries. Par exemple, les pentagones à quatre angles droits (voir la section 7.18 de [Bea83]) correspondent aux produits elliptiques d’isométries hyperboliques, les hexagones à angles droits aux produits hyperboliques de deux isométries hyperboliques (voir la section 7.19 de [Bea83]).

### 4.2.3 Éléments sur le problème de Horn dans $\mathrm{PU}(2,1)$ .

Le cas de  $\mathrm{PU}(2,1)$  combine les deux cas précédents. Soient donc  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux classes de conjugaisons semi simples de  $\mathrm{PU}(2,1)$ . On considère donc le problème de déterminer l'image de l'application

$$\mu : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{G} \tag{4.7}$$

$$(A, B) \longmapsto [AB] \tag{4.8}$$

Pour alléger un peu l'exposition, nous allons nous restreindre au cas où  $A$  et  $B$  sont tous deux elliptiques et supposer que leur produit l'est également. je vais donc exposer rapidement les principaux résultats de [Pau07]. Les cas où l'un de  $A$  ou  $B$  est loxodromiques peuvent se traiter de manière analogue. Cependant, une solution complète du problème de Horn dans  $\mathrm{PU}(2,1)$  reste à écrire.

Nous fixons donc une fois pour toutes  $\{\theta_1, \theta_2\}$  et  $\{\theta_3, \theta_4\}$  les paires d'angles respectives de  $A$  et  $B$ . L'idée directrice est la suivante (voir [FW09, Pau07, PW17b]) : l'image par l'application  $\mu$  de l'ensemble des paires  $(A, B)$  réductibles est de dimension 1, c'est la réunion d'une famille de segments et droites. On l'appelle *squelette réductible*. Il divise l'ensemble des classes de conjugaisons de  $\mathrm{PU}(2,1)$  en *chambres* dont il faudra déterminer lesquelles sont vides ou pleines.

1. **Description des murs réductibles, chambres.** Notons  $W_{\mathrm{red}}$  le *squelette réductible*, c'est à dire les classes de conjugaisons provenant des paires réductibles. On a donc

$$W_{\mathrm{red}} = \{[AB] \mid (A, B) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \text{ réductible}\} \tag{4.9}$$

- (a) Si la paire  $(A, B)$  est réductible sphérique, le mur obtenu est le segment de pente  $-1$  décrit dans le cadre de  $U(2)$ . Les extrémités de ce segment proviennent des paires abéliennes, comme dans le cas de  $U(2)$ .
  - (b) Les murs provenant des paires réductibles hyperboliques sont des segment de pente 2 ou  $1/2$  (on travaille modulo l'involution  $x \longleftrightarrow y$ ) issus des sommets abéliens (voir [Pau07] ou [Wil16])
2. **Différentielle de  $\mu$ .** L'application  $\mu$  est localement surjective en toute paire  $(A, B)$  irréductible. En effet, un calcul simple montre que

$$\mathrm{Im}(d_{(A,B)}\mu) = \mathfrak{z}(A, B)^\perp \cdot AB, \tag{4.10}$$

où  $\mathfrak{z}(A, B)$  est l'algèbre de Lie du centralisateur du groupe engendré par  $A$  et  $B$ , et l'orthogonalité est prise pour la forme de Killing. En particulier, si  $(A, B)$  est irréductible,  $\mathfrak{z}(A, B)$  est nulle donc la différentielle est de rang maximal. Ceci implique que les images des paires irréductibles sont intérieures à l'image de  $\mu$ .

3. **Propreté de  $\mu$ .** L'application  $\mu$  induit une application propre  $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)/G \longrightarrow c(G)$  dont l'image est fermée dans  $c(\mathcal{G})$ . L'ingrédient principal est le lemme de compacité de Bestvina-Paulin (Théorème 3.9 de [Bes02]). Nous renvoyons à [PW17b] pour plus de détails. L'utilisation de ce lemme est intéressante car c'est un ingrédient qui n'apparaît pas dans le cas des groupes de Lie compacts, puisqu'il nécessite la  $\delta$ -hyperbolicité de l'espace auquel on l'applique.
4. **Remplissage des chambres.** Il découle des points précédents que toute chambre est soit pleine soit vide. La détermination des chambres vides et pleines est assez subtile, et je ne connais pas de résultat qui décrive cela de manière synthétique. On dispose cependant de critères partiels. Ainsi, Paupert a montré dans [Pau07] :

**Proposition 4.2.4.** *Si ni  $A$  ni  $B$  n'est une réflexion complexe, alors l'image de  $\mu$  contient toute chambre qui touche un point réductible et qui rencontre l'enveloppe convexe locale de  $W_{\text{red}}$  en ce point.*

Paupert a montré par ailleurs dans [Pau07] que s'il existe des configurations irréductibles, alors tout mur borde au moins une chambre pleine. (Remarquons qu'il existe des cas où toutes les configurations sont réductibles : lorsque  $A$  et  $B$  sont tous deux elliptiques spéciaux, voir l'exemple 4.2.1 plus bas.)

Nous allons maintenant donner quelques exemples. La question posée dans [FW09] (resp. [Pau07]) est la suivante : si  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont toutes les deux loxodromiques (resp. elliptiques), quelles sont les classes loxodromiques (resp. elliptiques) atteintes par  $\mu$  ? L'énoncé suivant donne les cas où toutes les classes du même type que  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont atteintes.

**Théorème 4.2.1.** *Soient  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux classes semi simples de  $PU(2,1)$ .*

1. [FW09] *Si  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont toutes deux loxodromiques, alors l'image de  $\mu$  contient toutes les classes loxodromiques.*
2. [Pau07] *Si  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont toutes deux elliptiques, alors l'image de  $\mu$  contient toutes les classes elliptiques si et seulement si les angles de rotation de  $\mathcal{C}_1$  satisfont les conditions*

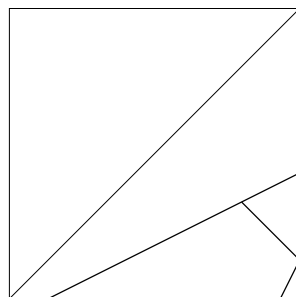
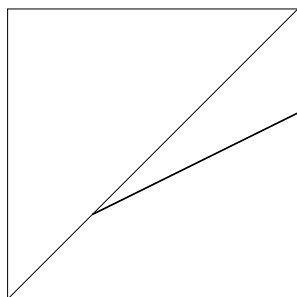
$$\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3 - 2\theta_4 \geq 2\pi \tag{4.11}$$

$$2\theta_1 - \theta_2 + 2\theta_3 - \theta_4 \geq 6\pi. \tag{4.12}$$

Lorsque  $A$  et  $B$  sont elliptiques, le cas où l'image de l'application  $\mu$  ne contient pas toutes les classes elliptiques est intéressant, nous en donnons maintenant quelques exemples.

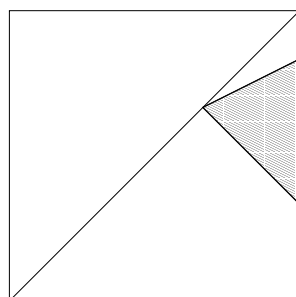
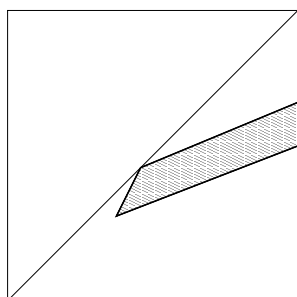
*Exemple 4.2.1.* La figure 4.4 présente l'ensemble des produits elliptiques dans quelques cas où au moins l'un de  $A$  et  $B$  est elliptique spécial.

*Exemple 4.2.2.* La figure 4.5 présente deux cas où  $A$  et  $B$  sont tous les deux elliptiques réguliers.



$\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}, \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\}$  :  $A$  et  $B$  sont des réflexions par rapport à des points. Le segment réductible sphérique est réduit à un point. Toutes les paires sont hyperbolique réductibles : elle préservent la droite complexe contenant les points fixes de  $A$  et  $B$

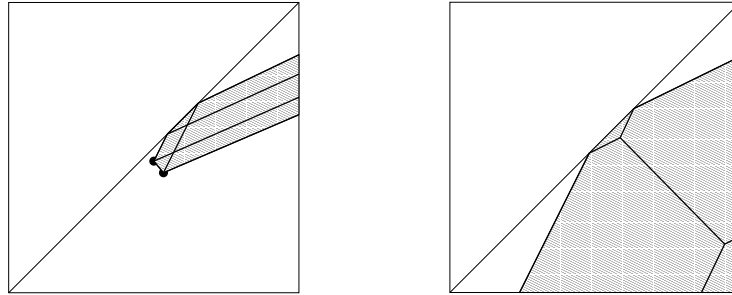
$\{\frac{2\pi}{3}, 0\}, \{\frac{8\pi}{5}, 0\}$  :  $A$  et  $B$  sont des réflexions par rapport à des droites. Comme leurs miroirs s'intersectent dans  $\mathbb{C}P^2$ , toutes les paires sont réductibles, soit sphériques (quand l'intersection est dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ ), soit hyperboliques (sinon).



$\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\}, \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\}$  : l'une des classe est une réflexion par rapport à un point. Ceci implique que le segment sphérique réductible est réduit à un point.

$\{\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}, \{\frac{2\pi}{3}, 0\}$  : l'une des classes est une réflexion par rapport à une droite.

FIGURE 4.4 – L'image de  $\mu$  quand au moins l'une des deux classes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  est elliptique spéciale.



$\{\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}\}, \{\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{6}\}$  :  $A$  et  $B$  sont elliptiques réguliers. Ici les points abéliens sont au bord de l'image.

$\{\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{4}\}, \{\frac{2\pi}{5}, -\frac{2\pi}{6}\}$  :  $A$  et  $B$  sont elliptiques réguliers. Ici les points abéliens sont intérieurs à l'image.

FIGURE 4.5 – L'image de  $\mu$  quand les deux classes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont elliptiques régulières .

L'exemple suivant est lié à la composante  $X_0$  décrite à la section 3.5.

*Exemple 4.2.3.* Considérons le cas où  $A$  et  $B$  sont tous deux elliptiques réguliers d'ordre 3. Dans ce cas la paire  $(A, B)$  engendre l'image d'une représentation du groupe de l'entrelacs de Whitehead dont le caractère appartient à la composante  $X_0$  décrite en section 3.5. Les deux transformations  $A$  et  $B$  appartiennent à la même classe de conjugaison : elles ont tous deux pour paire d'angles  $\{\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$ . On décrit les murs réductible comme indiqué ci-dessus. Puis, la proposition 4.2.4 appliquée au point totalement réductible  $(4\pi/3, 2\pi/3)$  (voir la figure 4.6) montre que l'image de  $\mu$  contient au moins la zone grisée sur la figure. On conclut en appliquant la seconde partie du théorème 4.2.1 : dans ce cas  $\mu$  n'est pas surjective et la chambre restante est donc vide.

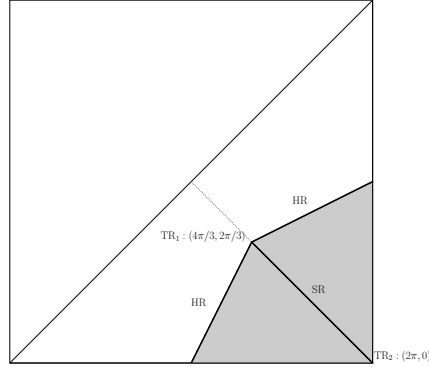


FIGURE 4.6 – Isométries elliptiques produits de deux isométries elliptiques d’ordre trois. Les segments HR et SR représentent respectivement les paires réductibles hyperboliques et sphériques, les deux points  $TR_1$  et  $TR_2$  représentent les représentations totalement réductibles (c’est à dire abéliennes).

#### 4.2.4 Le problème de Horn pour les classes paraboliques.[PW15]

Dans ce paragraphe, je présente un aspect de mon travail en commun avec John Parker [PW15]. Nous y abordons entre autres la question du problème de Horn pour les classes de conjugaisons paraboliques, bien que cela ne soit pas formulé ainsi dans l’article.

*Pour quels triplets de classes de conjugaisons paraboliques de  $SU(2,1)$  ( $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ ) existe t’il un triplet  $(A_1, A_2, A_3)$  tel que  $(A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_3$  et  $A_1 A_2 A_3 = 1$  ?*

Nous montrons dans [PW15] que la réponse à cette question s’exprime en termes de la répartition des points fixes paraboliques sur la sphère  $S^3 = \partial_\infty \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Pour  $i = 1, 2, 3$ , notons  $p_i$  le point fixe de  $A_i$ , et complétons le triplet  $(p_1, p_2, p_3)$  en un tétraèdre en notant  $p_4$  le point fixe de  $A_2 A_1$ , qui est également parabolique puisque  $A_2 A_1$  est conjugué à  $A_1 A_2 = A_3^{-1}$  (voir la figure 4.7). On obtient alors une contrainte qui relie les classes de conjugaisons des  $A_i$  à la forme du tétraèdre  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$ .

**Proposition 4.2.5.** *Soient  $A_1, A_2$  et  $A_3$  trois éléments paraboliques de  $SU(2,1)$  tels que  $A_1 A_2 A_3 = I$ , et soit  $\lambda_i$  la valeur propre associée à  $p_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Alors le birapport du tétraèdre  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  vérifie*

$$\mathbf{X}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (4.13)$$

*En particulier, il est de module 1.*

Le fait que le birapport soit de module 1 est équivalent à la condition géométrique que les points  $p_3$  et  $p_4$  aient la même projection orthogonale sur la géodésique  $(p_1 p_2)$  : on appelle ces tétraèdres *équilibrés*.

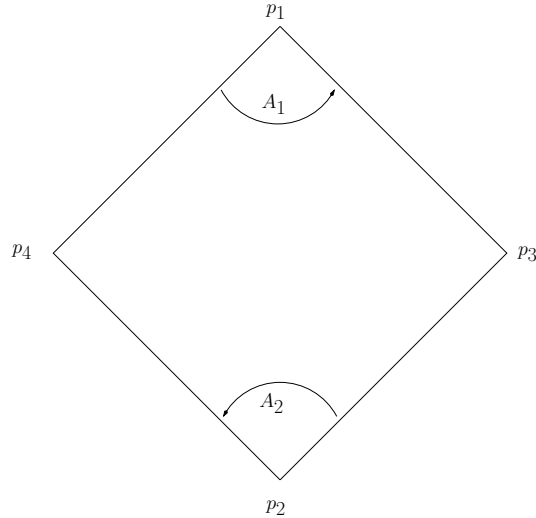


FIGURE 4.7 – Le tétraèdre des points fixes

On vérifie alors que cette contrainte est génériquement la seule :

**Proposition 4.2.6.** *Soit  $\tau = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  un tétraèdre idéal équilibré, et soient  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux classes de conjugaisons paraboliques de  $SU(2,1)$ . Alors il existe une unique paire  $(A_1, A_2)$  d'éléments de  $SU(2,1)$  telle que*

1.  $A_1 \in \mathcal{C}_1$  et  $A_2 \in \mathcal{C}_2$  fixent respectivement  $p_1$  et  $p_2$ ,
2.  $A_3 = A_2^{-1}A_1^{-1}$  et  $A_4 = A_1^{-1}A_2^{-1}$  fixent  $p_3$  et  $p_4$  avec valeur propre imposée par (4.13)

$$\lambda_3 = \frac{X(\tau)}{\lambda_1\lambda_2},$$

Cet énoncé ne garantit pas complètement que  $A_3$  (et  $A_4$ ) soient paraboliques. Ceci provient du fait que les classes de conjugaisons paraboliques ne sont pas séparées de celles des réflexions complexes. En particulier, ces deux types d'isométries peuvent avoir un point fixe au bord avec une valeur propre de module 1. Dans [PW15], nous décrivons une paramétrisation explicite de l'ensemble des tétraèdres équilibrés modulo isométrie par trois invariants réels. En particulier l'ensemble des classes de conjugaisons de représentations décrites par la proposition 4.2.6 est de dimension (réelle) 5. Sans expliciter cette paramétrisation, on peut dire que l'ensemble des triplets donnés par 4.2.6 où l'un de  $A_1$ ,  $A_2$  ou  $A_3$  n'est pas parabolique correspond à une réunion finie de sous-ensembles algébriques de l'espace des paramètres.

La situation est cependant plus agréable dans le cas particulier *symétrique* où  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_3$ , car on peut alors lever cette ambiguïté.

**Théorème 4.2.2.** *Soit  $\mathcal{C}$  une classe de conjugaison parabolique dans  $SU(2,1)$ , et  $\lambda$  la valeur propre associée au point fixe.*

*Pour tout tétraèdre équilibré  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  dont le birapport est une racine cubique de  $\lambda$ , il existe un unique triplet d'isométries paraboliques  $(A_1, A_2, A_3)$  vérifiant*

1.  $A_i$  fixe  $p_i$  (en gardant les notations ci-dessus),
2.  $A_i \in \mathcal{C}$  pour  $i = 1, 2, 3$
3.  $A_1 A_2 A_3 = I$

*Réciproquement, pour tout triplet  $(A_1, A_2, A_3)$  tel que  $A_i \in \mathcal{C}$  pour  $i = 1, 2, 3$  et  $A_1 A_2 A_3 = I$ , il existe un unique tétraèdre idéal équilibré dont le birapport est une racine cubique de  $\lambda$ .*

Ceci implique en particulier

**Corollaire 4.2.1.** *L'ensemble des solutions du problème de Horn parabolique symétrique dans  $PU(2,1)$  est en bijection avec l'ensemble des tétraèdres idéaux équilibrés de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .*

Il est intéressant que la symétrie entre les trois classes paraboliques peut être réalisée géométriquement : il existe une unique paire  $(S, T)$  d'isométries elliptiques d'ordre trois  $S$  et  $T$  qui vérifient  $A_1 = ST$  et  $A_2 = TS$ . Les deux isométries  $S$  et  $T$  conjuguent cycliquement  $A_1, A_2$  et  $A_3$  (resp.  $A_1, A_2$  et  $A_4$ ). Ce dernier fait montre que les solutions du problème de Horn parabolique symétrique fournissent des représentations dont les caractères vivent dans la composante  $X_0$  du Théorème 3.5.1.

**Corollaire 4.2.2.** *Soit  $\mathcal{C}$  une classe de conjugaison parabolique, et  $\tau$  un tétraèdre idéal équilibré associé. L'unique paire  $(S, T)$  associée à la solution de problème de Horn symétrique pour  $\mathcal{C}$  engendre un sous-groupe de  $SU(2,1)$  qui est image du groupe de l'entrelacs de Whitehead par une représentation dont le caractère appartient à la composante  $X_0$  du Théorème 3.5.1.*

Nous avons montré dans [PW17c] que cette “tranche” de la variété de caractère contenait les caractères de nombreuses représentations discrètes. Par ailleurs, le cas particulier où les trois classes de conjugaisons  $\mathcal{C}_i$  sont égales et correspondent à une isométrie parabolique unipotente horizontale fait l'objet du travail [PW17a], où nous avons montré qu'on pouvait alors obtenir des holonomies d'uniformisations CR sphériques du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead. Nous en reparlerons au chapitre 5.

John Parker et moi avons considéré dans [PW15] une variation sur ces questions en considérant d'autres mots que le produit, dans le cas parabolique. Nous avons abordé la question suivante.

*Dans un sous-groupe à deux générateurs  $\langle A, B \rangle$  de  $PU(2,1)$ , quels mots peuvent être paraboliques simultanément ?*

Autrement dit : décrire des/les familles de mots  $\mathcal{F} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$  telles qu'il existe une représentation  $\rho : F_2 \rightarrow \mathrm{PU}(2, 1)$  satisfaisant aux conditions que  $\rho(\mathbf{w})$  est parabolique pour tout  $\mathbf{w}$  dans  $\mathcal{F}$ . On peut bien sûr se restreindre aux familles qui ne contiennent que des éléments primitifs. L'idée directrice est la suivante. L'ensemble des classes paraboliques est de codimension (réelle) un dans l'espace des classes de conjugaisons de  $\mathrm{PU}(2, 1)$ . Demander alors qu'un mot donné soit parabolique impose une condition de codimension 1 sur une paire de  $(A, B) \in \mathrm{PU}(2, 1) \times \mathrm{PU}(2, 1)$ . Puisque la variété des représentations de  $F_2$  dans  $\mathrm{PU}(2, 1)$  est de dimension 8, il serait intéressant de trouver huit mots "indépendants" dont on puisse imposer la parabolicité, et obtenir alors les générateurs d'un sous-groupe de  $\mathrm{PU}(2, 1)$  uniquement déterminé modulo conjugaison par la parabolicité de ces mots, qui devrait être rigide pour ces conditions de parabolicité. Nous venons donc de voir que l'on peut par exemple imposer que  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{ab}$  soient paraboliques, avec un contrôle sur leurs classes de conjugaisons respectives. Dans [PW15], John Parker et moi avons décrit une classe d'exemples intéressants.

**Théorème 4.2.3.** [PW15] *Il existe une famille à un paramètre de représentations  $\rho_t : F_2 \rightarrow \mathrm{PU}(2, 1)$  telles que les sept mots  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{ab}$ ,  $\mathbf{ab}^{-1}$ ,  $\mathbf{a}^2\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{ab}^2$  et  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  sont envoyés par  $\rho_t$  sur des éléments paraboliques.*

Nous avons baptisé ce phénomène "super-pinching", en référence au fait que faire devenir parabolique un mot dans une représentation fuchsienne (resp. quasi-Fuchsienne) d'un groupe de surface dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  (resp.  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ ) correspond à pincer une courbe sur la surface. On a donc ici sept mots primitifs deux à deux non conjugués dans  $F_2$  dont les images sont paraboliques. Nous obtenons cette famille à un paramètre de manière implicite, et nous ne savons pas si un mot supplémentaire peut devenir parabolique pour certaines valeurs du paramètre  $t$ .

*Remarque 4.2.1.* [Wil16] On peut généraliser l'identité (4.13) au cas d'une surface à cusps quelconque de la manière suivante. Définissons le quadrirapport de quatre points comme la quantité

$$\mathbf{Q}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_3 \rangle \langle p_3, p_4 \rangle \langle p_4, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_4 \rangle \langle p_4, p_3 \rangle \langle p_3, p_2 \rangle \langle p_2, p_1 \rangle}.$$

On vérifie facilement que  $\mathbf{Q}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \mathbf{X}(p_1, p_2, p_3, p_4) \overline{\mathbf{X}(p_1, p_2, p_3, p_4)}^{-1}$ , où  $\mathbf{X}$  est le birapport hermitien défini en (2.36), si bien qu'en combinant avec (4.13), on obtient

$$\mathbf{Q}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}. \quad (4.14)$$

On peut donc associer à toute représentation du groupe de la sphère moins trois points un tel quadrirapport, et l'exprimer en fonction des valeurs propres des images des courbes périphérales. Considérons maintenant une surface  $\Sigma$  de genre  $g$  avec  $p$  trous, et donnons

nous une décomposition en pantalons  $\Sigma = \cup_{i=1}^{2g-2+p} P_i$ . Une représentation du groupe fondamental de  $\Sigma$  dans  $\mathrm{PU}(n,1)$  induit donc une représentation de chacun des  $P_i$ , et l'on peut alors associer un quadrirapport  $\mathbf{Q}_i$  à chacun des pantalons. En recollant soigneusement les pantalons, on obtient alors l'identité

$$\prod_{i=1}^{2g-2+p} \mathbf{Q}_i = \prod_{j=1}^p \frac{\lambda_j}{\bar{\lambda}_j}, \quad (4.15)$$

où  $\lambda_j$  désigne une valeur propre associée à un point fixe dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  de l'image par la représentation  $\rho$  des la  $j$ -ième composante périphérale de  $\Sigma$ . Notons que la relation (4.15) est vraie quel que soit le type de l'image par  $\rho$  des composantes périphérales (nous avons énoncé (4.13), sous l'hypothèse qu'elles étaient paraboliques).

En prenant l'argument des deux côtés de la relation (4.15), cette identité s'interprète de la manière suivante : l'invariant de Toledo (voir 5.1.2) de la représentation  $\rho$  est égal modulo  $2\pi$  à la somme des nombres de rotation des images par  $\rho$  des classes périphérales de  $\Sigma$ . C'est un résultat classique, dû notamment à Burger-Iozzi-Wienhardt (Lemme 8.2 de [BIW10]).

### 4.3 Involutions et commutateurs dans $\mathrm{PU}(2,1)$ . [PW17c] et [PW17b]

Les sous-groupes de  $\mathrm{PU}(2,1)$  les plus "accessibles" sont les groupes triangulaires : ils sont engendrés par trois involutions. Rappelons (voir le chapitre 2) qu'il y a trois classes d'involutions isométriques dans le plan hyperbolique complexe : les involutions centrales (qui ont un point fixe isolé), les symétries complexes (qui fixent point par point une droite complexe) et les symétries réelles (qui fixent point par point un plan réel). On peut distinguer deux types de groupes triangulaires, selon qu'ils sont engendrés par des involutions holomorphes ou antiholomorphes.

Une méthode classique pour étudier un groupe à deux générateurs sur la sphère ou dans le disque de Poincaré est de le décomposer en un groupe triangulaire. Plus précisément, partant d'une paire  $(A, B)$ , il s'agit de trouver trois involutions  $I_1, I_2$  et  $I_3$  telles que

$$A = I_1 I_2 \text{ et } B = I_2 I_3. \quad (4.16)$$

Une telle décomposition existe toujours dans le groupe d'isométries du disque lorsque la groupe  $\langle A, B \rangle$  est non-élémentaire : les  $I_k$  sont soit des demi tours, soit des réflexions géodésiques. La connaissance d'une telle décomposition ramène l'étude du groupe  $\langle A, B \rangle$  à celle du triangle formé par les éléments fixes des  $\sigma_k$ . Comme exemple d'application non-triviale de cette technique, Gilman décrit dans [Gil95] un algorithme capable de décider si

un sous-groupe à deux générateurs de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  est discret ou non, qui est basé sur l'étude fine de ces décompositions.

Dans le cadre du plan hyperbolique complexe, on se rend facilement compte qu'il n'y a aucun espoir pour qu'une telle décomposition existe pour une paire générique. En effet, par un rapide compte de dimension, on vérifie que l'ensemble des classes de conjugaisons de triplets d'involutions holomorphes (resp anti-holomorphes) est de dimension réelle 4 (resp. de dimension réelle 5), alors que l'ensemble des classes de paires d'éléments de  $\mathrm{PU}(2,1)$  est de dimension 8. Il est cependant intéressant de caractériser les paires  $(A, B)$  pour lesquelles une telle décomposition existe.

**Définition 4.3.1.** On dit que la paire  $(A, B)$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable (resp.  $\mathbb{C}$ -décomposable) si elle admet une décomposition telle que (4.16) où les  $I_k$  sont des involutions antiholomorphes (resp. holomorphes).

Dans [PW17c], Julien Paupert et moi avons montré le résultat suivant (qui généralise [Wil09]).

**Théorème 4.3.1.** [Paupert-Will [PW17c]] Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathrm{PU}(2,1)$  sans point fixe commun. La paire  $(A, B)$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable si et seulement si le commutateur  $[A, B]$  admet un point fixe dans  $\overline{\mathbf{H}}_{\mathbb{C}}^2$  dont la valeur propre est réelle et positive.

Nous appelons ici, "valeur propre de  $[A, B]$ " une valeur propre de  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ , où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont des relèvements quelconques de  $A$  et  $B$  à  $\mathrm{U}(2,1)$ . Le commutateur  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  ne dépend pas du choix de relèvement, ces valeurs propres sont donc bien définies. L'argument principal est le suivant. Etant donné un point fixe de  $[A, B]$ , disons  $p_1 \in \overline{\mathbf{H}}_{\mathbb{C}}^2$ , on a un cycle de longueur 4, défini par

$$p_1 \xrightarrow{B^{-1}} p_2 \xrightarrow{A^{-1}} p_3 \xrightarrow{B} p_4 \xrightarrow{A} p_1. \quad (4.17)$$

On peut relier le birapport des quatre points  $p_1, p_2, p_3, p_4$  à la valeur propre de  $[A, B]$  associée à  $p_1$ . Il s'agit essentiellement d'écrire la relation (4.15) dans le cas où la surface  $\Sigma_{g,p}$  est un tore à un trou. Lorsque la valeur propre est réelle et positive, le birapport du quadruplet  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  l'est également, et ceci implique qu'il admet une symétrie antiholomorphe (proposition 3.1 de [PW17c]), c'est à dire qu'il existe une involution antiholomorphe qui échange  $p_1$  et  $p_3$  d'une part, et  $p_2$  et  $p_4$  d'autre part. Cette involution est  $I_2$ , et l'on montre qu'alors  $AI_2$  et  $BI_2$  sont également des involutions antiholomorphes.

*Remarque 4.3.1.* La condition sur la valeur propre du commutateur dans le théorème 4.3.1 implique que le commutateur  $[A, B]$  est de trace réelle. En particulier, ceci est équivalent à dire que le caractère de la représentation de  $F_2$  définie par la paire  $(A, B)$  appartient au lieu de ramification de l'équation des traces restreinte à  $\mathrm{SU}(2,1)$ . Les calculs exposés dans [PW17c] montrent également que lorsque la valeur propre associée à  $p_1$  est réelle et négative, alors la paire  $(A, B)$  est réductible, et  $\mathrm{tr}[A, B]$  est réelle. Ceci exhauste presque tous les cas où  $\mathrm{tr}[A, B] \in \mathbb{R}$ , mais pas tout à fait.

*Proposition 4.3.1.* Soit  $(A, B) \in \mathrm{PU}(2, 1) \times \mathrm{PU}(2, 1)$ . La trace de  $[A, B]$  est réelle si et seulement si on est dans l'un des trois cas suivants.

1. La paire  $(A, B)$  est réductible.
2. La paire  $(A, B)$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable.
3.  $[A, B]$  est conjugué à une transformation du type  $(z_1, z_2) \mapsto (e^{i\theta} z_1, e^{2i\theta} z_2)$ .

Notons ici que le dernier cas peut arriver, vu le théorème 4.3.3. Il est par ailleurs assez facile de vérifier que la condition  $\mathrm{tr}[A, B] \in \mathbb{R}$  est nécessaire pour assurer la  $\mathbb{R}$ -décomposabilité. En effet, étant donné  $A = I_1 I_2$  et  $B = I_3 I_2$ , où les  $I_k$  sont des réflexions réelles, le commutateur est

$$[A, B] = (I_1 I_2 I_3)^2 \tag{4.18}$$

En prenant des matrices de Souriau  $M_k$  pour les  $I_k$  (voir la section 2.1.4), on constate directement que  $[A, B] = M \overline{M}$ , où  $M = M_1 \overline{M_2} M_3$ . Une telle matrice est toujours de trace réelle.

*Remarque 4.3.2.* Notons  $\Sigma_{g,p}$  la surface orientable de genre  $g$  à  $p$  trous. Le groupe fondamental de  $\Sigma_{1,1}$  est

$$\pi_1(\Sigma_{1,1}) = \langle a, b, c \mid [a, b] \cdot c = 1 \rangle$$

On peut alors noter qu'étant donné une paire  $(A, B)$ , le groupe  $\langle A, B \rangle$  est l'image de la représentation du groupe fondamental du tore époiné définie par

$$\begin{aligned} \rho_{(A,B)} : \pi_1(\Sigma_{1,1}) &\longrightarrow \mathrm{PU}(2, 1) \\ (a, b) &\longmapsto (A, B). \end{aligned} \tag{4.19}$$

On montre alors le

*Théorème 4.3.2.* Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. La paire  $(A, B)$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable.
2. L'invariant de Toledo (voir le chapitre 5) de la représentation  $\rho_{(A,B)}$  est nul.

Il serait intéressant de donner une caractérisation de même type des représentations d'invariant de Toledo nul pour  $g$  et  $p$  quelconques. Des résultats de ce type existent déjà dans les travaux de Schaffhauser [Sch07a, Sch08], dans le cadre d'un groupe de Lie compact. Schaffhauser y montre entre autres que pour un groupe de Lie compact connexe  $U$ , l'ensemble des (classes de) représentations possédant une décomposition en involutions lagrangiennes –qui généralise (4.16)– forme une sous-variété lagrangienne de l'espace des modules des représentation de  $\pi_1(\Sigma_{g,p})$  dans  $U$ . Ce résultat repose en particulier sur l'utilisation du formalisme quasi-hamiltonien de Alekseev-Malkin-Meinrenken, où de groupe de Lie image est supposé compact. Il serait très intéressant de transposer ce type de résultat à  $U(n,1)$ , ou aux groupes de Lie non-compact de rang 1.

En appliquant le théorème 4.3.1 à des systèmes de générateurs bien choisis de certains réseaux, nous obtenons alors

**Corollaire 4.3.1.** *Les réseaux  $PU(2,1,\mathcal{O}_d)$  pour  $d = 1, 2, 3, 7, 11$  sont d'indice deux dans un groupe triangulaire réel.*

Les valeurs de  $d$  ci-dessus sont celles pour lesquelles l'anneau d'entiers  $\mathcal{O}_d$  est euclidien.

Dans [Wil09], j'avais obtenu des résultats partiels concernant la décomposition en involutions holomorphes. Le résultat précis est un peu lourd et un peu incomplet, donc je ne l'énonce pas ici. Essentiellement, une paire  $(A, B)$  d'éléments de  $SU(2,1)$  est  $\mathbb{C}$ -décomposable lorsque les quatre traces de  $A$ ,  $B$ ,  $AB$  et  $A^{-1}B$  sont réelles. Ces conditions définissent une sous-variété de dimension 4 de la  $PU(2,1)$ -variété de représentations de  $F_2$ , qui est de dimension 8. Cette sous-variété de dimension 4 est cependant suffisamment "grosse" pour rencontrer toutes les fibres de l'application commutateur. Julien Paupert et moi avons montré dans [PW17b] le

**Théorème 4.3.3.** *Tout élément de  $PU(2,1)$  est le commutateur d'une paire  $(A, B)$  qui est  $\mathbb{C}$ -décomposable.*

Ce résultat découle d'une étude de la longueur d'involution holomorphe de  $PU(2,1)$  (la longueur d'involution d'un groupe  $G$  est le nombre  $k$  minimum tel que tout élément de  $G$  s'écrive comme un produit de  $k$  involutions). Nous obtenons

**Théorème 4.3.4.** [PW17b]

1. *Tout élément de  $PU(2,1)$  est produit de quatre involutions holomorphes. Ce résultat est optimal : il existe des éléments qui ne sont pas produits de trois involutions holomorphes, et l'on peut donner une description explicite de l'ensemble de ces éléments.*
2. *Tout élément de  $PU(2,1)$  est le carré d'un produit de trois involutions holomorphes.*

Remarquons que la longueur d'involution antiholomorphe est 2 : il est assez facile de vérifier que tout élément de  $PU(2,1)$  est produit de deux isométries antiholomorphes (voir par exemple [FZ99]). Le théorème 4.3.3 découle directement du second point du théorème 4.3.4 en remarquant que le carré d'un produit de trois involutions est toujours un commutateur :

$$(I_1 I_2 I_3)^2 = [I_1 I_2, I_3 I_2].$$

Le coeur de la preuve du théorème 4.3.4 est de décrire explicitement l'ensemble des classes qui sont produit de trois involutions holomorphes. Pour cela, on observe (!) qu'un produit de trois involutions est un produit de deux involutions et d'une involution. Il y a diverses combinaisons possibles : chacune des involutions peut-être soit une involution centrale, soit une symétrie par rapport à une droite complexe. Il suffit en réalité de se restreindre aux deux où (voir la section 2.3.2) :

1. les produits de deux symétries complexes et d'une involutions centrale,
2. les produits de deux symétries complexes et d'une symétrie complexe.

Or les produits de deux symétries complexes sont soit elliptiques *réels* (c'est à dire qu'ils sont conjugués à des éléments de  $SU(2)$  dans le compact maximal), soit *hyperboliques* (loxodromiques avec rotation nulle, c'est à dire que  $\theta = 0$  dans 2.24). On se ramène donc à résoudre des familles à un paramètre de problèmes de Horn, pour lesquelles on peut appliquer les méthodes de la section 4. Nous donnons un exemple de résolution dans l'exemple 4.3.1. Il en découle que

1. Toute isométrie loxodromique ou parabolique est produit de trois involutions holomorphes.
2. Une isométrie elliptique est produit de trois involutions sauf si sa paire d'angle est contenue dans l'un des triangles  $T$  et  $T'$  indiqués sur la figure 4.8.

En prenant le carré dans la zone grisée de la figure 4.8, on vérifie facilement que toute isométrie elliptique est le carré d'un produit de trois involutions. Le même type de raisonnement permet de montrer que tout élément de  $PU(2,1)$  est produit de quatre involutions.

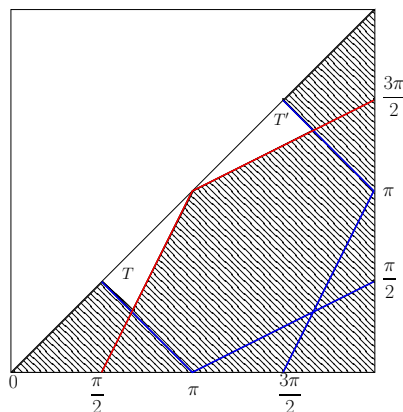


FIGURE 4.8 – Les classes elliptiques qui sont produits de trois involutions. Un élément elliptique est produit de trois involutions centrales (resp. deux symétries complexes et une involution centrale) si et seulement si sa paire d'angles est dans la région bordée par les segments rouge (resp. bleus) qui ne contient ni  $T$  ni  $T'$ .

*Exemple 4.3.1.* Considérons le cas où le triplet d'involutions  $(I_1, I_2, I_3)$  est formé de deux symétries complexes et d'une involution centrale, et supposons que les droites complexes fixes de  $I_1$  et  $I_2$  se coupent avec un angle  $\theta/2$ . Le produit  $I_1 I_2$  est alors elliptique, avec comme paire d'angles  $\{\theta, 2\pi - \theta\}$  (il est dans  $SU(2)$ ). La solution du problème de Horn associé est représentée à la figure 4.9 pour toutes les valeurs de  $\theta$ .

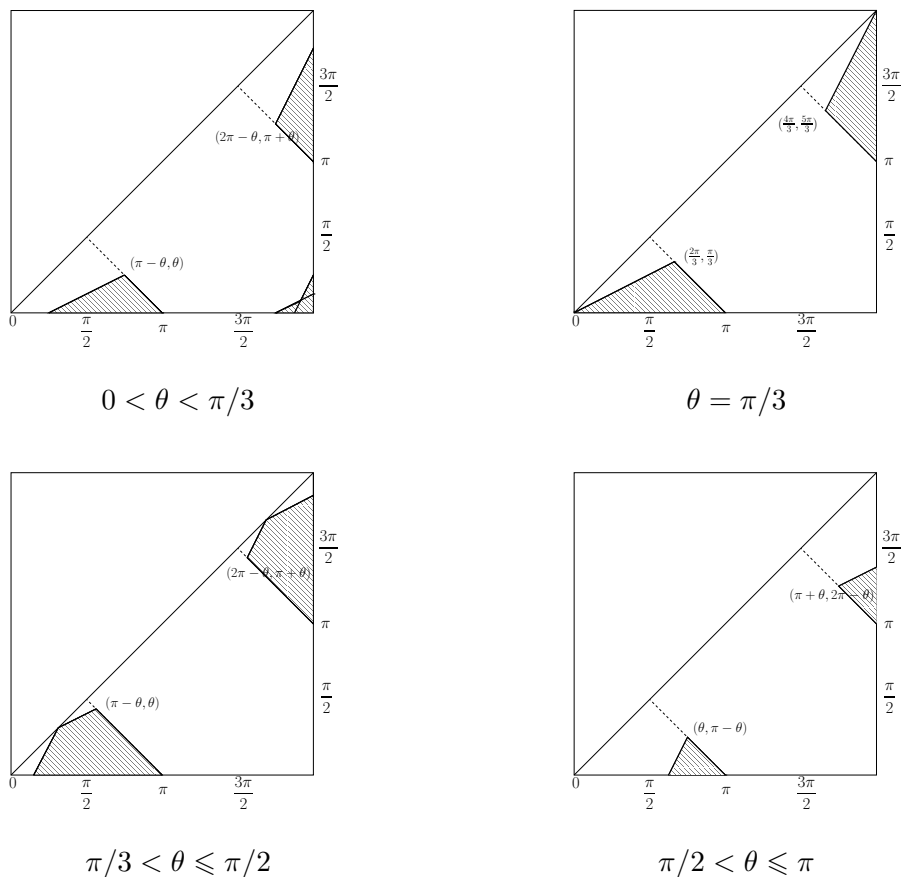


FIGURE 4.9 – Classes elliptiques produit d’une symétrie complexe et d’un elliptique réel d’angles  $\{2\pi - \theta, \theta\}$ , avec  $0 < \theta < \pi$ .



## Chapitre 5

# Groupes discrets et structures CR sphériques

### 5.1 Motivations

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $\mathrm{PU}(2,1)$ , que l'on suppose "petit", au sens où l'on réclame que son ensemble limite  $\Lambda_\Gamma$  est *strictement inclus* dans  $S^3$ . Ceci exclut donc par exemple les réseaux de  $\mathrm{PU}(2,1)$ . L'ensemble de discontinuité de  $\Gamma$ ,  $\Omega_\Gamma = S^3 \setminus \Lambda_\Gamma$  est donc un ouvert strict de  $S^3$  sur lequel  $\Gamma$  agit discontinûment et l'on peut former le quotient de  $\Omega_\Gamma$  par l'action de  $\Gamma$ . On obtient alors a priori un orbifold de dimension 3. Supposons pour simplifier que cet orbifold soit en réalité une 3-variété, que nous noterons  $M_\Gamma$ . Cette dernière hypothèse revient à réclamer que les éléments de  $\Gamma$  n'ont que des points fixes isolés dans  $\mathbf{H}_\mathbb{C}^2$ , ce qui sera toujours le cas dans nos exemples.

Comme nous l'avons vu à la section 2.2, le bord à l'infini de  $\mathbf{H}_\mathbb{C}^2$ , vu comme  $S^3 \subset \mathbb{C}P^2$ , est muni d'une structure CR formée par le champ des droites complexes tangentes à  $S^3$ . En particulier, les quotients d'un ouvert de  $S^3$  par un sous-groupe discret de  $\mathrm{PU}(2,1)$  sont munis d'une structure CR modelée sur celle de  $S^3$ . On peut voir cette structure comme une  $(G, X)$ -structure :  $X = S^3$  et  $G = \mathrm{PU}(2,1)$  (voir [BS76] où cette structure est formalisée dans le langage des  $(G, X)$ -structure pour la première fois). Parmi les structures CR sphériques, les structures *complètes* sont celles qui sont données par des quotients  $S^3/\Gamma$ . Les espaces lenticulaires relèvent par exemple de cette catégorie. Mais à partir du moment où le groupe  $\Gamma$  contient un élément non-elliptique, on ne peut espérer avoir une structure complète. La situation décrite au paragraphe précédent est celle d'une *uniformisation CR sphérique* :

**Définition 5.1.1.** [Der15] Soit  $M$  une variété de dimension 3. Une uniformisation CR-sphérique de  $M$  est la donnée d'un sous-groupe discret  $\Gamma \subset \mathrm{PU}(2,1)$  dont tous les points fixes dans  $\mathbf{H}_\mathbb{C}^2$  sont isolés et tel que  $M$  soit homéomorphe au quotient de  $\Omega(\Gamma)$  par l'action

de  $\Gamma$ .

Les structures CR sphériques apparaissent donc comme les pendants hyperboliques complexes des structures conformes plates, qui sont modélées sur la variété à l'infini de l'espace hyperbolique réel. Il s'agit également d'un cas particulier des structures modélées sur des espaces de drapeaux mentionnées au chapitre 3 : celui où tous les drapeaux sont formés par un point  $p \in S^3$  et la droite complexe tangente à  $S^3$  en  $p$ . Une question naturelle est alors la suivante.

$$\textit{Quelles 3-variétés admettent une uniformisation CR sphérique ?} \quad (5.1)$$

Voici déjà deux exemples simples d'uniformisations. Soit  $\Sigma$  une surface fermée orientable de genre  $g > 2$ . Une manière simple de construire des représentations de  $\pi_1(\Sigma)$  dans  $\text{PU}(2,1)$  est de le faire agir proprement discontinûment sur une tranche totalement géodésique  $V$ . Il y a donc deux possibilités :  $V$  peut-être soit une copie de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ , soit une copie de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$  (voir la section 2.1.4). Dans les deux cas, le quotient de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  par l'action est un fibré en disques sur  $\Sigma$ , dont le bord à l'infini est un fibré en cercles de base  $\Sigma$ .

1. Si  $V = \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ , on dit que la représentation est  $\mathbb{R}$ -fuchsienne. Le fibré en disque obtenu est homéomorphe au fibré tangent de  $\Sigma$ , le bord à l'infini s'identifie alors au fibré unitaire tangent, donc de nombre d'Euler  $-\chi(\Sigma)$ .
2. Si  $V = \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ , on dit que la représentation est  $\mathbb{C}$ -fuchsienne. Le nombre d'Euler du fibré obtenu est  $-\frac{1}{2}\chi(\Sigma)$ .

Les deux exemples ci-dessus ne donnent donc pas des variétés à l'infini homéomorphes. Si l'on relâche la condition d'uniformisation, et que l'on ne réclame qu'une structure on peut obtenir toutes les valeurs du nombre d'Euler (voir Falbel-Gusevskii [FG94]). On peut alors se poser la question suivante.

$$\textit{Soit } \Sigma \textit{ une surface hyperbolique fermée. Quels fibrés en cercles sur } \Sigma \textit{ peuvent être uniformisés par un sous-groupe discret de } \text{PU}(2,1) \textit{ ?} \quad (5.2)$$

On est encore loin d'avoir une réponse complète à cette question, qui est liée à la répartition des représentations discrètes de  $\pi_1(\Sigma)$  dans la  $\text{PU}(2,1)$ -variété des représentations. Les deux exemples ci-dessus sont ainsi associés à certaines composantes connexes de cette variété de représentations. L'outil principal est l'*invariant de Toledo* d'une représentation  $\rho$ .

**Définition 5.1.2.** Soit  $\Sigma$  une surface fermée, et  $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{PU}(n, 1)$  une représentation. L'invariant de Toledo de  $\rho$ , noté  $\tau(\rho)$  est défini par

$$\tau(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} F^* \omega, \quad (5.3)$$

où  $F$  est une application  $\rho$ -équivariante de  $\tilde{\Sigma}$  dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ .

L'invariant de Toledo est donc très lié à l'invariant de Cartan de la section 2.4, et on peut le voir également comme une aire complexe. Dans le cas où  $n = 1$ , il coïncide avec la classe d'Euler de la représentation  $\rho$ . L'invariant de Toledo vérifie les deux conditions suivantes, qui généralisent les conditions similaires pour la classe d'Euler :

1. (Inégalité de Milnor-Wood) :  $2 - 2g \leq \tau(\rho) \leq 2g - 2$ ,
2. (Intégralité) :  $\tau(\rho) \in \frac{2}{n+1}\mathbb{Z}$

Dans le cas d'une surface non-compacte, l'invariant peut-être défini modulo certaines précautions garantissant la convergence de l'intégrale dans (5.3). L'inégalité de Milnor-Wood reste alors vérifiée, mais l'invariant de Toledo prend toutes les valeurs réelles dans l'intervalle  $[\chi(\Sigma), -\chi(\Sigma)]$ . Les représentations  $\mathbb{C}$ -fuchsiennes sont bien détectées par l'invariant de Toledo :

**Théorème 5.1.1.** [Tol89] *L'invariant  $\tau(\rho)$  est maximal, (ie)  $|\tau(\rho)| = 2g - 2$  si et seulement si  $\rho$  est un isomorphisme de  $\pi_1(\Sigma)$  sur un sous-groupe  $\mathbb{C}$ -fuchsien de  $PU(n,1)$ .*

L'image de  $\rho$  est alors discrète et fidèle, et est un réseau dans le stabilisateur d'une droite complexe. Le théorème 5.1.1 est la source de nombreuses généralisations dans le cadre des espaces symétriques hermitiens, notamment sous l'influence de Burger, Iozzi et Wienhard (voir par exemple [BIW10] ou le survey [BIW14] et les références qui s'y trouvent), et Korziaz-Maubon [KM08, KM17]. Pour les représentations  $\mathbb{R}$ -fuchsiennes, on ne dispose que d'une condition nécessaire :

**Proposition 5.1.1.** *Si la représentation  $\rho$  préserve une copie totalement géodésique de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ , alors son invariant de Toledo est nul.*

Ce dernier fait est immédiat, puisque la restriction de la forme de Kähler à un sous-espace totalement réel est nulle. Plus généralement, l'invariant de Toledo varie continûment avec  $\rho$ , et la condition d'intégralité ci-dessus impose donc qu'il sépare les composantes connexes de la variété des représentations. Il n'est pas du tout aisé de construire des représentations d'invariant de Toledo prescrit, encore moins si l'on réclame qu'elles soient discrètes. Mentionnons quelques travaux dans cette direction, tous basés sur des constructions explicites de représentations de groupes fondamentaux de surfaces dans  $PU(2,1)$ .

1. Goldman, Kapovich et Leeb ont construit des exemples de telles structures dans [GKL01]. Ils ont décrit une classe de représentations obtenues en combinant des sous-espaces réels et complexes. C'est à dire qu'ils construisent un plongement du disque de Poincaré dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  muni d'une action de  $\pi_1(\Sigma)$  en assemblant des triangles réels et complexes le long de géodésiques. Ils construisent ainsi une famille de représentations, qui montre que dans le cas du groupe cible  $PU(2,1)$ ,
  - (a) toute valeur de l'invariant de Toledo peut être réalisé par une représentation,

- (b) toute valeur entière et paire de l'invariant de Toledo peut être réalisée par une représentation discrète et fidèle. Dans le cas des représentations qu'ils construisent, le fibré obtenu vérifie

$$e = \chi(\Sigma) + \left| \frac{\tau(\rho)}{2} \right|$$

2. Une autre source d'exemples provient de techniques de "colliers de perles", introduites par Anan'in, Grossi et Gusevskii dans [AGG11, AG], et utilisées également par [Gay08]. L'esprit de ces constructions est de fabriquer des "colliers de perles" munis d'indentifications dans  $S^3$ , où chaque perle est un morceau de bisecteur (voir section 2.1.5), deux perles successives s'intersectant le long d'une tranche complexe. En théorie, cette construction est assez générale, mais elle est très difficile à mettre en pratique. Les auteurs parviennent à construire des exemples de fibrés en cercles pour lesquels ils analysent les valeurs de l'invariant de Toledo et du nombre d'Euler. Ils produisent en particulier des uniformisations de fibrés en cercles sur des surfaces qui correspondent à des valeurs fractionnaires de l'invariant de Toledo (ce qui n'était pas connu). Notons cependant que la complexité des calculs impliqués impose l'usage de l'ordinateur, et ne leur permet pas d'obtenir des exemples en genre arbitraire. Dans [AG] Anan'in et Gusevskii produisent un exemple de fibré trivial sur une surface. La question de l'existence d'une uniformisation d'un tel fibré était longtemps restée sans réponse.
3. Pour les surfaces non-compactes, Gusevskii et Parker ont montré dans [GP03] que toutes les valeurs de l'invariant de Toledo étaient réalisées par des représentations discrètes, fidèles et telles que les éléments périphériques soient paraboliques. Dans ce cas le fibré en cercle obtenu est trivial.

On sait ([Gol83]) que les variétés fermées modelées sur l'espace Euclidien ou sur *Sol* n'admettent pas de structure CR sphérique. Conjecturalement, cette restriction est essentiellement la seule : Kapovich énonce dans [Kap00] la conjecture suivante.

**Conjecture 5.1.1.** *[Conjecture 20.18 de [Kap00]] Toute 3-variété fermée dont aucun des composants premiers n'est modelé sur Sol ou sur l'espace euclidien admet un revêtement fini qui admet une structure CR sphérique*

Kapovich énonce également une *conjecture de stabilisation*

**Conjecture 5.1.2.** *[Conjecture 20.19 de [Kap00]] Pour toute 3-variété orientée fermée connexe  $M$ , il existe une 3-variété  $N$  telle que la somme connexe  $M \sharp N$  admette une structure CR sphérique.*

Ce résultat a été prouvé en géométrie conforme (voir [Hwa02]).

En particulier ces deux conjectures laissent à penser que de nombreuses 3-variétés hyperboliques devraient admettre des structures CR sphériques. Terminons cette section avec,

en guise de transition, la question qui a motivé de nombreux travaux récents en géométrie hyperbolique complexe et CR sphérique :

*Existe-t-il des 3-variétés hyperboliques qui admettent une uniformisation CR sphérique ?*  
(5.4)

## 5.2 Uniformisations CR sphériques de 3-variétés hyperboliques

Dès le début des années 2000, R.E. Schwartz a répondu par l’affirmative à la question (5.4) dans [Sch01a] en produisant un groupe discret dont la variété à l’infini est homéomorphe au complémentaire de l’entrelacs de Whitehead. Le groupe étudié par Schwartz est lié de très près à sa résolution de la conjecture de Goldman-Parker ([GP92]) sur les groupes triangulaires idéaux hyperboliques complexes. Nous y reviendrons un peu plus loin. Depuis [Sch01a], d’autres exemples d’uniformisations CR sphériques de 3-variétés hyperboliques ont été construits par divers auteurs (Schwartz encore dans [Sch03, Sch07b], Deraux et Falbel dans [DF15], Parker et Will dans [PW17a], Acosta dans [Aco19b] (voir également [PWX16])). On dispose donc d’une liste d’exemples de 3-variétés hyperboliques qui admettent une uniformisation CR sphérique. Cette liste est “de plus en plus longue”, mais on n’a pour l’instant pas de résultat général. On peut par exemple faire une liste de choses que l’on ne sait pas (et que l’on aimerait savoir).

1. On ne connaît pas de méthode efficace pour construire une uniformisation CR sphérique d’une 3-variété hyperbolique donnée.
2. On ne connaît pas à ce jour d’obstruction à ce qu’une 3-variété hyperbolique admette une uniformisation CR sphérique.
3. On ne connaît pas d’exemple de 3-variété hyperbolique qui n’admette pas d’uniformisation CR sphérique.

On peut tout de même noter, dans un cas plus simple, que les seuls fibrés en tores  $T^2$  sur le cercle qui admettent une structure CR sphérique sont ceux pour lesquels l’application de recollement est un élément parabolique de  $SL(2, \mathbb{Z})$  (voir la section 4 de [Gol83], où la question de l’existence de telles structures pour les variétés hyperboliques est d’ailleurs déjà posée).

Les différents auteurs mentionnés ci-dessus se sont tous intéressés à l’aspect “groupe” du problème, c’est à dire qu’ils ont cherché à trouver *le bon groupe*  $\Gamma \subset PU(2, 1)$  tel que le quotient  $\Omega_\Gamma/\Gamma$  soit une 3-variété hyperbolique. On peut toutefois distinguer deux approches principales.

1. Schwartz a suggéré par ses travaux que l'on pouvait obtenir de nombreux exemples d'uniformisations CR sphériques de 3-variété hyperboliques en étudiant les variétés à l'infini des groupes triangulaires *dégénérés*. Nous préciserons le point de vue de Schwartz au prochain paragraphe.
2. La théorie des structures géométriques nous dit qu'étant donnée une uniformisation CR sphérique d'une 3-variété  $M^3$ , on doit avoir une représentation discrète du groupe fondamental de  $M^3$  dans  $\mathrm{PU}(2,1)$ . La méthode mise en place par Falbel et ses collaborateurs, que nous avons exposée au chapitre 3, vise donc à construire des représentations de  $\pi_1(M^3)$  dans  $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$  (voir [Fal08],[BFG14, FGK<sup>+</sup>16, FKR15]). Parmi ces représentations, certaines ont leur image incluse dans  $\mathrm{PU}(2,1)$  (forme réelle de  $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ ). L'espoir est d'être capable, une fois obtenues les représentations, de les analyser géométriquement, et de montrer a posteriori que ce sont des holonomies de structures, voire d'uniformisations. Certaines représentations ainsi obtenues se sont effectivement avérées être des représentations d'holonomies d'uniformisations CR sphériques (voir par exemple [DF15], [Der15], et la représentation d'holonomie de l'uniformisation du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead obtenue dans [PW17a] avait également été obtenue par la méthode de Falbel).

La méthode de Falbel a ceci d'intéressant qu'elle permet a priori de produire des représentations du groupe fondamental d'une 3-variété triangulée quelconque fixée. Cependant, les difficultés computationnelles la rendent difficile à exploiter si la complexité de la variété est trop grande. Falbel, Koseleff et Rouiller ont ainsi produit ainsi une liste de représentations dans  $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$  pour des 3-variétés hyperboliques triangulées par au plus quatre tétraèdres (voir [FKR15] et [Cur]). Une fois obtenue une représentation son étude géométrique est une tâche très technique : à ce jour, on n'a pas d'autre méthode en main que de construire un domaine fondamental, et d'analyser sa combinatoire à l'infini. Même si de nombreux progrès ont été faits dans la construction de ces domaines fondamentaux (voir par exemple [Aco19b]), l'étude de ces polyèdres (en courbure variable, donc) reste ardue.

### 5.2.1 Groupes triangulaires hyperboliques complexes.

Le point de vue de Schwartz pour une uniformisation CR sphérique est d'étudier les groupes triangulaires hyperboliques complexes et leurs variétés à l'infini. Ainsi, tous les exemples d'uniformisations CR sphériques de 3-variétés hyperboliques évoqués au paragraphe ci-dessus ont tous un point commun : à commensurabilité près, ils apparaissent comme bords à l'infini des quotients de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  que l'on obtient en faisant dégénérer des représentations de groupes triangulaires. Nous allons maintenant exposer cette démarche.

### 5.2.1.1 Faits généraux

Soit  $p, q, r$  un triplet d'entiers tels que  $p \leq q \leq r$  vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1. \quad (5.5)$$

Un groupe triangulaire de type  $(p, q, r)$  dans le disque de Poincaré est un groupe engendré par les symétries par rapport aux côtés d'un triangle dont les angles sont  $(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r})$ . Ces groupes sont donc rigides dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Notons  $\Gamma_{p,q,r}$  le groupe triangulaire fuchsien de type  $(p, q, r)$ . Il admet la présentation suivante

$$\langle i_1, i_2, i_3 \mid i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = (i_1 i_2)^p = (i_2 i_3)^q = (i_3 i_1)^r = 1 \rangle. \quad (5.6)$$

On convient que si l'un des trois entiers est infini, le produit  $i_k i_\ell$  correspondant est parabolique. C'est le cas où les côtés correspondant du triangle sont asymptotiques. Le sous-groupe pair de  $\Gamma_{p,q,r}$  est le groupe fondamental d'une sphère à trois points coniques d'angles  $2\pi/p$ ,  $2\pi/q$  et  $2\pi/r$ . Il admet la présentation

$$\langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha^p = \beta^q = \gamma^r = \alpha\beta\gamma = 1 \rangle.$$

On appelle alors *groupe triangulaire hyperbolique complexe* de type  $(p, q, r)$  une représentation  $\rho$  de  $\Gamma_{p,q,r}$  dans  $\mathrm{PU}(2,1)$  pour laquelle les images de  $i_1, i_2$  et  $i_3$  sont des réflexions complexes d'ordre deux par rapport à des droites complexes (voir 2.1.4), qui se coupent avec des angles  $(\frac{2\pi}{p}, \frac{2\pi}{q}, \frac{2\pi}{r})$ . On peut commencer par classifier ces représentations modulo conjugaison dans  $\mathrm{PU}(2,1)$ .

Si  $p, q$  ou  $r$  vaut 2 alors le groupe  $\Gamma_{p,q,r}$  est rigide dans  $\mathrm{PU}(2,1)$ , mais si  $\min(p, q, r) \geq 3$ , alors on a un paramètre réel de déformation modulo conjugaison dans  $\mathrm{PU}(2,1)$  (voir par exemple [Pra05]). Ce paramètre correspond à la *forme* du triangle formé par les trois miroirs des réflexions complexes : c'est l'invariant de Cartan de ce triangle (voir 2.4). Nous noterons  $t$  ce paramètre.

**Proposition 5.2.1.** *Soit  $(p, q, r)$  un triplet d'entiers naturels vérifiant (5.5) et tel que  $p, q, r \geq 3$ . Deux groupes de triangles  $(p, q, r)$  hyperboliques complexes sont conjugués dans  $\mathrm{PU}(2,1)$  si et seulement si ils ont le même invariant  $t$ . De plus, l'espace des modules des groupes triangulaires hyperboliques complexes de type  $(p, q, r)$  est un segment dans  $\mathbb{R}$ , noté  $\mathcal{I}_{p,q,r}$ .*

On peut facilement décrire explicitement le segment où varie  $t$  (voir par exemple [Pra05]), mais nous n'aurons pas besoin ici de valeurs explicites. Mentionnons les faits suivants, qui rapprochent l'invariant  $t$  de l'invariant de Toledo des groupes de surfaces.

1. Le segment  $\mathcal{I}_{p,q,r}$  est symétrique par rapport à l'origine.

2. Lorsque  $t = 0$  le groupe de triangle est  $\mathbb{R}$ -fuchsien. C'est une représentation discrète et fidèle de  $\Gamma_{p,q,r}$  dans  $\text{PU}(2,1)$ .
3. Les points extrémaux du segment  $\mathcal{I}_{p,q,r}$  correspondent aux cas où les trois sommets du triangles sont dans une droite complexe commune. Les miroirs des réflexions complexes sont alors égaux deux à deux et l'image de la représentation dégénère en un groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
4. Le changement de  $t$  en  $-t$  correspond à la conjugaison de la représentation par une isométrie antiholomorphe.

### 5.2.1.2 Discrétude : les conjectures de Schwartz.

La question de la discrétion de ces déformations hyperboliques complexes des groupes triangulaire a été abordée par de nombreux auteurs ([GP92, San95, Pra05, Sch02]). Schwartz a proposé une série de conjectures qui décrit la répartition des groupes discrets dans ces espaces de modules (voir par exemple [Sch02] ou la discussion des groupes triangulaires dans [Wil16]). Pour les énoncer, supposons que  $p \leq q \leq r$  (ce qui est toujours possible qui à réordonner les indices des trois involutions), et notons  $I_k = \rho_t(i_k)$ . Nous désignons par  $W_A$  et  $W_B$  les deux mots

$$W_A = I_3 I_2 I_1 I_2 \text{ et } W_B = I_1 I_2 I_3. \quad (5.7)$$

Nous dirons qu'un triplet  $(p, q, r)$  est de type  $A$  lorsque  $\rho_t(W_A)$  devient elliptique avant  $\rho_t(W_B)$  quand  $t$  varie de 0 à  $\max(\mathcal{I}_{p,q,r})$ . Dans le cas contraire nous dirons qu'il est de type  $B$ . Je n'énonce pas ici toutes les conjectures, mais seulement les "deux plus cruciales".

**Conjecture 1** : La représentation  $\rho_t$  de  $\Gamma_{p,q,r}$  dans  $\text{PU}(2,1)$  est discrète et fidèle si et seulement si ni  $\rho_t(W_A)$  ni  $\rho_t(W_B)$  n'est elliptique. Ces valeurs de  $t$  forment un sous-intervalle fermé  $\mathcal{I}_{p,q,r}^0 \subset \mathcal{I}_{p,q,r}$ , et nous noterons  $t_{p,q,r}^{\text{lim}}$  ou plus simplement  $t^{\text{lim}}$  l'extrémité positive de cet intervalle.

**Conjecture 2** : Si  $(p, q, r)$  est de type  $B$ , alors toute représentation discrète et infinie est fidèle et correspond à un point de  $\mathcal{I}_{p,q,r}^0$ . Si  $(p, q, r)$  est de type  $A$ , alors il existe une famille dénombrable de représentations discrètes mais non-fidèles, qui correspondent à des valeurs  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hors de  $\mathcal{I}_{p,q,r}^0$ .

**Définition 5.2.1.** Nous appellerons *dégénéré* tout groupe triangulaire  $(p, q, r)$  hyperbolique complexe obtenu pour la valeur critique  $t_{p,q,r}^0$ . Nous appellerons *sporadique* tout groupe triangulaire  $(p, q, r)$  discret donc le paramètre  $t$  est extérieur à  $\mathcal{I}_{p,q,r}^0$ .

La conjecture 1 est encore largement ouverte, bien que des cas aient été traités par divers auteurs ([GP92, Sch01b, Sch01a, Sch05, PW15, PWX16]). Concernant la conjecture 2, John Parker a montré dans la proposition 7.5 de [Par06] qu'il pouvait exister des représentations discrètes non injectives isolées hors de l'intervalle  $\mathcal{I}_{p,q,r}^0$  même dans le cas  $B$ . Il s'agit donc

d'une réfutation partielle de la conjecture de Schwartz. Cependant, ces représentations discrètes non-injectives sont d'un grand intérêt (voir par exemple [Der06, Sch03]). Donc, *c'est plutôt mieux s'il y en a plus.*

### 5.2.1.3 Dégénérescence de groupes triangulaires et 3-variétés hyperboliques.

On constate donc sur les conjectures de Schwartz, et sur les cas où elles ont été démontrées que le caractère discret et fidèle d'un groupe triangulaire hyperbolique complexe ne dépend que du type d'isométrie d'un élément du groupe ! Qu'il s'agisse du type  $A$  ( $I_3I_2I_1I_2$ ) ou du type  $B$  ( $I_1I_2I_3$ ) l'élément considéré est toujours hyperbolique à  $t = 0$ . Lorsque  $t$  augmente, la représentation  $\rho_t$  reste discrète jusqu'à une valeur  $t^{\text{lim}}$  pour laquelle le mot considéré est parabolique. Il s'agit alors de la dernière représentation discrète et fidèle de  $\Gamma_{p,q,r}$ .

Considérons la topologie du bord à l'infini du quotient.

- Lorsque  $t = 0$ , le groupe est  $\mathbb{R}$ -fuchsien, il s'agit d'un fibré en cercles sur une orbisurface à coins d'angle  $(2\pi/p, 2\pi/q, 2\pi/r)$ .
- Lorsque  $t$  dégénère, c'est à dire lorsque  $t = t_{\text{lim}}$ , on obtient conjecturalement une uniformisation d'une 3-variété hyperbolique en passant à un groupe commensurable (le groupe triangulaire lui-même donne alors un 3-orbifold).

Le fait que la topologie du quotient change lorsque  $t$  atteint la valeur critique  $t_{\text{lim}}$  n'est pas une surprise en soi. En effet, pour tout  $t \in ]-t_{\text{lim}}, t_{\text{lim}}[$  le mot  $W_A$  (ou  $W_B$ ) est loxodromique et a donc deux points fixes. A la valeur limite, ses deux points fixes se confondent. Ce phénomène induit un pincement de l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma$  en tous les points fixes des mots conjugués à  $W_A$  (ou  $W_B$ ). La topologie de  $\Omega_\Gamma = S^3 \setminus \Lambda_\Gamma$  change donc pour cette valeur critique du paramètre  $t$ . Voici quelques exemples connus.

1. Lorsque  $p = q = r = \infty$ , il s'agit de groupes triangulaires idéaux complexes : les trois droites complexes miroirs des trois réflexions complexes sont deux à deux asymptotiques. Dans ce cas, Schwartz a montré dans [Sch01a], que le groupe obtenu pour la valeur critique uniformise (à commensurabilité près) le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead.
2. Le cas des groupes triangulaires  $(3, 3, n)$  est maintenant assez bien compris. Ainsi, dans [PW17a], John Parker et moi-même avons montré que la conjecture 1 de Schwartz était vraie dans le cas des groupes  $(3, 3, \infty)$  et que la variété à l'infini du sous-groupe pair pour le paramètre critique était le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead. Le cas des groupes  $(3, 3, n)$  a été étudié par Parker, Wang et Xie dans [PWX16], et par Acosta dans [Aco19b]. Il ressort de ces travaux que la variété à l'infini uniformisée pour le paramètre critique dans le cas  $(3, 3, n)$  est le remplissage de Dehn de pente  $(n - 2)$  sur l'un des cusps du complémentaire de l'entrelacs de

Whitehead. Ces exemples incluent en particulier le cas  $(3, 3, 4)$ , considéré par Deraux et Falbel dans [DF15], où la variété obtenue est le complémentaire du noeud en huit.

Les exemples ci-dessus fournissent deux uniformisations différentes du complémentaires de l'entrelacs de Whitehead, qui ne sont pas conjuguées. Nous incluerons ces deux uniformisations dans une même famille de représentations dans la section 5.3. Au vu des exemples ci-dessus, il est naturel de s'intéresser à la question suivante, qui sous-tend les travaux de Schwartz sur les groupes triangulaires.

*Peut-on prévoir la topologie des 3-variétés au bord des quotients de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  par un groupe triangulaire hyperbolique complexe dégénéré de type  $(p, q, r)$  ?*

Cette question est absolument fascinante, et l'on n'a pas de réponse simple. On peut même en un sens prédire *qu'il n'y aura pas de réponse très simple*. En effet, dans [Der15], Martin Deraux a montré le résultat suivant. Notons  $\Gamma_{3,3,5}^{(2)}$  le sous-groupe pair du groupe triangulaire hyperbolique complexe dégénéré de type  $(3, 3, 5)$ .

**Théorème 5.2.1.** *Le groupe  $\Gamma_{3,3,5}^{(2)}$  est l'image une représentation des deux groupes fondamentaux des 3-variétés hyperboliques  $\mathfrak{m}_{009}$  et  $\mathfrak{m}_{015}$ . Cette représentation est l'holonomie d'une uniformisation CR sphérique de  $\mathfrak{m}_{009}$ .*

La raison topologique sous-jacente pour la première partie du résultat est la fait que les deux variétés  $\mathfrak{m}_{009}$  et  $\mathfrak{m}_{015}$  admettent des remplissages de Dehn qui sont des fibrés de Seifert sur l'orbifold sphérique  $(3, 3, 5)$  (c'est à dire le quotient du disque de Poincaré par le sous-groupe pair d'une groupe triangulaire fuchsien  $(3, 3, 5)$ ). La seconde partie du résultat est tout à fait frappante : il semble que "la nature choisisse l'une des deux variétés". Ce phénomène observé par Deraux paraît renforcé par des observations expérimentales très récentes faites par Raphaël Alexandre [Ale]. Il semble en effet que l'on ait "des paquets" de 3-variétés hyperboliques qui admettent un morphisme sur le sous-groupe pair d'un groupe triangulaire via des remplissages de Dehn, et que pour une raison encore mystérieuse, l'une d'entre elle soit uniformisée par le dit sous-groupe pair.

Ces remarques montrent la nécessité d'être capable de reconnaître la 3-variété uniformisée. Pour l'instant, la principale méthode dont on dispose est d'étudier un domaine fondamental. Nous discuterons cet aspect à la section 5.3.2. Il existe également des théorèmes de remplissage de Dehn adaptés aux structures CR, qui permettent parfois de répondre à cette question (voir la remarque 5.3.2).

### 5.2.2 Chercher des représentations via des remplissages de Dehn non hyperboliques.

La remarque qui suit l'énoncé du théorème 5.2.1 suggère une stratégie pour trouver de nouvelles représentations intéressantes du groupe fondamental d'une variété de dimension 3 non-compacte de volume fini  $M$  dont nous notons  $\pi$  le groupe fondamental.

1. On cherche un remplissage de Dehn non-hyperbolique de  $M$ . Le groupe fondamental du remplissage de Dehn est un quotient de  $\pi$ , noté  $\pi'$ , et l'on espère donc qu'il soit plus facile de trouver des représentations de  $\pi'$  que de  $\pi$ .

On a vu des exemples où ce remplissage de Dehn est

- (a) un fibré de Seifert sur un orbifold sphérique à trois coins dont le groupe fondamental est un groupe triangulaire. On obtient des représentations facilement en considérant des groupes triangulaires hyperboliques complexes.
  - (b) La somme connexe de deux espaces lenticulaires, dont le groupe fondamental est le produit libre de deux groupes cycliques (dans les exemple connus, il s'agit donc de  $\mathbb{Z}_3 \star \mathbb{Z}_3$ ). On obtient facilement des représentations de tels groupes dans  $\text{PU}(2,1)$ , puisqu'ils sont des produits libres.
2. Lors du passage de  $\pi$  à  $\pi'$ , l'opération de remplissage de Dehn impose une relation entre les éléments périphéraux des différents cusps de  $M$ . Typiquement, l'image d'un groupe périphéral dans le quotient  $\pi'$  est cyclique (alors que le cusp était de rang 2 dans  $\pi$ ). On cherche alors une/des représentations intéressantes en imposant que les images non-triviales des éléments périphéraux de  $\pi$  soient paraboliques dans  $\text{PU}(2,1)$ . On peut faire une hypothèse plus forte en réclamant même que ces éléments soient unipotents (c'est par exemple ce que font Falbel et ses coauteurs, voir par exemple [Cur]).

Il est intéressant de noter dans le dernier point ci-dessus que l'existence de représentations de  $\pi'$  telles que l'image des classes non-triviales d'éléments périphéraux de  $\pi$  soient paraboliques est liée de près à la question 4.6 posée au chapitre 4. Le remplissage de Dehn impose une contrainte sur les classes de conjugaisons de  $s$  et  $t$  (leur ordre), et l'image du groupe périphéral dans  $\pi'$  suggère qu'un certain mot soit parabolique.

Explicitons la stratégie ci-dessus dans le cas de l'entrelacs de Whitehead. Il est très utile d'utiliser le logiciel SnapPy [CDW] pour mener les calculs nécessaires. Considérons donc le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead. Il admet plusieurs incarnations dans SnapPy, par exemple  $M = \text{L5a1} = \text{m}_{129}$ .<sup>1</sup>

La suite de commandes suivantes nous donne accès aux informations nécessaires.

---

1. Dans l'utilisation de SnapPy, le fait de choisir l'un des deux modèles **L5a1** ou **m<sub>129</sub>** induit un changement de paramétrage des groupes périphéraux, ce qui modifie en apparence les résultats obtenus. Si l'on utilise dans SnapPy la version **m<sub>129</sub>** de  $M$ , il faut modifier les paramètres du remplissage de Dehn en passant dans la commande ci-dessous de `M.dehn_fill([(-3,1), (-3,1)])()` à `M.dehn_fill([(1,1), (1,1)])()`

```

M=Manifold('L5a1')
Pi=M.fundamental_group()
Pi

π = ⟨a, b|ab3a2ba-1b-3a-2b-1⟩

G.peripheral_curves()

m1 = ba et ℓ1 = baba-1b-3a-1ba
m2 = bab et ℓ2 = bab-1a-2b-1ab

M.dehn_fill([(-3,1),(-3,1)])()
M.fundamental_group()

π' = ⟨s, t|s3, t3⟩

```

Ici nous avons noté par  $s$  et  $t$  les classes respectives de  $a$  et  $b$  dans le quotient  $\pi'$ . Les éléments  $m_i$  et  $l_i$  ci-dessus sont les générateurs des groupes périphéraux (méridien et longitude) des deux cusps (pour  $i = 1, 2$ ). Leurs images dans  $\pi'$  sont alors données par

$$[m_1] = ts, [l_1] = (ts)^3, [m_2] = tst, [l_2] = (tst)^3.$$

Dans notre cas,  $s$  et  $t$  sont d'ordre trois, si bien qu'imposer la parabolicité de  $tst$  revient à imposer celle de  $s^{-1}t$ . En imposant que ces éléments périphéraux soient unipotents, on en vient à considérer la question suivante :

*Quels sont les sous-groupes de  $PU(2,1)$  engendrés par deux éléments elliptiques d'ordre trois  $S$  et  $T$  tels que  $ST$  et  $S^{-1}T$  soient unipotents ?*

Le théorème principal de [PW17a] donne une réponse complète :

**Théorème 5.2.2** (Parker-Will [PW17a]). *Modulo conjugaison dans  $PU(2,1)$ , il existe une unique paire  $(S, T)$  d'éléments elliptiques d'ordre trois telle que*

1. *Le groupe  $G = \langle S, T \rangle$  est Zariski-dense dans  $PU(2,1)$ ,*
2. *les deux éléments  $ST$  et  $TST$  sont unipotents.*

*Ce groupe  $G$  est une uniformisation CR sphérique du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead.*

On peut espérer produire des représentations d'autres variétés en appliquant la même technique. Suite à mes questions, Nathan Dunfield a produit la liste de toutes les variétés à un cusp obtenus par un collage d'au plus 9 tétraèdres qui ont la propriété d'avoir un remplissage de Dehn homéomorphe à la somme connexe de deux espaces lenticulaires. Ceci se traduit algébriquement par l'existence d'une surjection de leurs groupes fondamentaux

sur un produit libre du type  $\mathbb{Z}_p \star \mathbb{Z}_q$ . Les tableaux donnés sur les figures 5.1 et 5.2 montrent quelques exemples de 3-variétés hyperboliques qui admettent un remplissage de Dehn homéomorphe à une somme connexe de deux espaces lenticulaires. Nous donnons à chaque fois un mot engendrant l'image du groupe du cusp dans le quotient  $\pi'$ . Tous les calculs ont été fait de manière analogue à l'exemple traité ci-dessus pour l'entrelacs de Whitehead. Pour chacun de ces exemples se pose alors la question de décrire les représentations dans  $SU(2,1)$  de  $\mathbb{Z}_p \star \mathbb{Z}_q$  pour lesquels le mot engendrant l'image du cusp est parabolique.

Variété	Nombre de tétraèdres	Paramètres du remplissage de Dehn	Générateur de l'image du groupe périphéral
m_160	4	(0,1)	$ts^{-1}(ts)^2$
m_207	4	(1,0)	$[s, t]$
m_207	4	(0,1)	$s^{-1}t(st^{-1})^2$
m_288	5	(1,0)	$s^{-1}tst$
m_373	5	(1,0)	$[s, t]$
s_455	6	(1,0)	$s^{-1}tst$
s_464	6	(1,0)	$[s, t]$
s_581	6	(1,0)	$s^{-1}tst$
s_820	6	(1,1)	$ts^{-1}(ts)^2$
s_882	6	(1,0)	$(st)^2$
s_899	6	(1,0)	$[s, t]$
v_0974	7	(1,0)	$s^{-1}tst$
o9_44089	9	(1,0)	$(st)^2$
o9_44126	9	(1,0)	$st^{-1}(s^{-1}t)^2$

FIGURE 5.1 – Quelques groupes de 3-variétés hyperboliques qui se surjectent sur  $\mathbb{Z}_3 \star \mathbb{Z}_3$ , avec un générateur de l'image du groupe périphéral. Les lettres  $s$  et  $t$  désignent respectivement les générateurs du premier et deuxième facteur.

Les exemples des tableaux des figures 5.1 et 5.2 traitent tous de variétés à un seul cusp. Le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead, traité précédemment a lui deux cusps. Ainsi, si l'on réclame que les images des groupes périphéraux par la représentation recherchée soient unipotents, on impose une contrainte plus forte sur le groupe à deux générateurs considéré : on réclame que deux mots non-conjugués soient unipotents. Dans le cas d'une variété à un cusp, on n'impose de condition que sur un seul mot. On s'attend donc à obtenir des familles de représentations plus grosses dans le cas des variétés à un cusp. Ceci pose un problème : dans les familles obtenues, quelles représentations sont susceptibles d'être les holonomies d'uniformisations ?

Parmi ces exemples de cas des groupes engendrés par deux éléments d'ordre fini  $s$  et

Variété	Nombre de tétraèdres	Paramètres du remplissage de Dehn	Groupe quotient $\pi'$	Générateur de l'image du groupe périphéral
m_294	4	(1,0)	$\mathbb{Z}_3 \star \mathbb{Z}_4$	$s^{-1}tst$
m_369	5	(1,0)	$\mathbb{Z}_3 \star \mathbb{Z}_4$	$st^{-1}st$
m_371	5	(1,0)	$\mathbb{Z}_3 \star \mathbb{Z}_4$	$st^{-1}st$
v_3498	7	(1,0)	$\mathbb{Z}_3 \star \mathbb{Z}_4$	$[s, t]$
s_235	6	(-1,1)	$\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_7$	$st(st^{-3})^2$
s_432	6	(1,0)	$\mathbb{Z}_3 \star \mathbb{Z}_5$	$s^{-1}tst$

FIGURE 5.2 – Quelques groupes de 3-variétés hyperboliques qui se surjectent sur  $\mathbb{Z}_p \star \mathbb{Z}_q$ , avec un générateur de l'image du groupe périphéral. Ici on a toujours  $p \leq q$ , les générateurs  $s$  et  $t$  du quotient étant respectivement d'ordres  $p$  et  $q$ .

$t$ , dont le commutateur  $[s, t]$  est parabolique semble particulièrement intéressant. Cette situation semble apparaître dans de nombreux cas, dont par exemple m\_207, m\_373, m\_464, s\_899, v\_3498. On retrouve donc ici le phénomène mentionné plus haut ([Der15, Ale]) : le même groupe image peut-être vu comme une représentation de plusieurs groupes de 3-variétés, avec un contrôle sur les groupes périphéraux. Si l'on impose en plus, suivant Falbel, que ledit commutateur  $[s, t]$  soit unipotent, alors le théorème 4.3.1 impose que la paire  $(\rho(s), \rho(t))$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable, c'est à dire qu'il existe trois involutions antiholomorphes telles que

$$\rho(s) = \sigma_1\sigma_2, \rho(t) = \sigma_3\sigma_2.$$

Le groupe  $\rho(\langle s, t \rangle)$  apparaît donc comme le sous-groupe pair d'un groupe triangulaire réel  $\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle$  ayant la propriété que  $\rho([s, t]) = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^2$  est unipotent. Dans [Wil07], j'avais décrit ces groupes ainsi que des familles de groupes discrets de cette forme. Il paraît donc intéressant de revisiter ces groupes à la lumière des remarques ci-dessus.

### 5.3 Exploration d'un exemple : la tranche de Riley hyperbolique complexe.

Le travail [PW17a] peut être vu *a posteriori* comme une exploration des représentations du groupe de l'entrelacs de Whitehead qui factorisent par le remplissage de Dehn  $L(3, 1) \sharp L(3, 1)$ . Comme nous l'avons vu à la section précédente, il est naturel dans ce contexte de poser la question suivante.

*Décrire l'ensemble des représentations de  $\langle s, t | s^3 = t^3 = 1 \rangle$  telles que  $\rho(st)$  et  $\rho(s^{-1}t)$  soient paraboliques.*

Les images de ces représentations ont été baptisées *diamond groups* par R.E. Schwartz dans le chapitre 15 de [Sch07b]. Pour expliquer ce terme, fixons quelques notations. Pour tout élément parabolique de  $\mathrm{PU}(2,1)$   $A$ , nous notons  $p_A \in \partial_\infty \mathbf{H}_\mathbb{C}^2$  le point fixe de  $A$ . Si maintenant  $ST$  et  $S^{-1}T$  sont paraboliques alors il en est de même pour les mots  $TS$ ,  $STS$ ,  $T^{-1}S$ ,  $TS^{-1}T$  et  $ST^{-1}S$ , car il sont des conjugués des deux précédents. On peut alors disposer les points  $p_{ST}, p_{TS}, p_{STS}, p_{T^{-1}S}, p_{PTST}$  et  $p_{ST^{-1}}$  sur un octaèdre combinatoire (le diamant de Schwartz, donc, voir la figure 5.3). Cet octaèdre est naturellement muni d'identifications fournies par les relations de conjugaisons entre les différents mots dont on considère les points fixes. A titre d'exemple, la transformation  $S$  réalise l'identification entre les deux faces suivantes

$$S : (p_{S^{-1}T}, p_{ST^{-1}S}, p_{ST}) \longmapsto (p_{TS^{-1}}, p_{TS}, p_{ST^{-1}S}). \quad (5.8)$$

Un examen attentif montre que la combinatoire ainsi obtenue est la même que celle qui permet d'obtenir l'entrelacs de Whitehead à partir d'un octaèdre idéal (voir la section 3.3 de [Thu] ou la section 10.3 de [Rat19]).

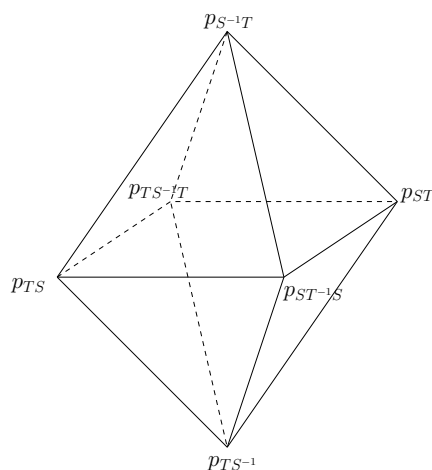


FIGURE 5.3 – Répartition des points fixes sur un octaèdre

Pour montrer que le groupe  $\langle S, T \rangle$  est l'image de l'holonomie d'une structure CR sphérique sur le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead, on peut alors tenter de construire un version géométrique de l'octaèdre de la figure 5.3. Avec des techniques différentes, c'est ce que Schwartz a fait dans [Sch01a, Sch07b], et ce que John Parker et moi avons fait dans [PW17a] pour démontrer le théorème 5.2.2. Les deux structures ainsi obtenues diffèrent par le fait que celle de Parker-Will a holonomie périphérale unipotente (sur les deux cusps), alors que celle de Schwartz a un cusp unipotent et un cusp dont l'holonomie est un vissage. Du point de vue technique, le fait d'avoir deux cusp unipotent rend la structure

plus simple à analyser. En particulier, nous avons pu utiliser une méthode relativement standard (construction d'un domaine de Ford), quand Schwartz a construit un polyèdre *ad hoc*, qui est une construction extrêmement belle, mais très technique. La prochaine section décrira un cadre simple où ces deux structures apparaissent ensemble.

### 5.3.1 Description de la tranche de Riley hyperbolique complexe.

La question que nous avons étudiée dans [PW17a] est une variation sur (5.8) : nous imposons que  $\rho(st)$  et unipotent et nous libérons  $\rho(s^{-1}t)$ . La question devient donc

*Décrire l'ensemble des représentations de  $\langle s, t | s^3 = t^3 = 1 \rangle$  telles que  $\rho(st)$  soit unipotent. Parmi ces représentations, quelles sont celles pour lesquelles  $\rho(s^{-1}t)$  est parabolique ?*

L'intérêt de restreindre les contraintes par rapport à la question originale est que le fait que l'un des deux produits soit unipotent au lieu de seulement parabolique simplifie nettement les aspects calculatoires (voir plus bas en (5.13) des expressions explicites). Les analogues pour le cas où  $ST$  et  $S^{-1}T$  sont paraboliques quelconques sont nettement plus dures à manipuler.

Dans la suite nous noterons  $S$  et  $T$  les images de  $s$  et  $t$  par  $\rho$ . La remarque de base sur les représentations que nous considérons est la suivante : si  $ST$  est parabolique, alors il en est de même pour les mots  $S^{-1}TS^{-1}$ ,  $TS$ ,  $T^{-1}ST^{-1}$ , qui sont obtenus en conjugant cycliquement  $ST$  par  $S$  et  $T$ . En associant à chacune de ces transformations son unique point fixe au bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , on associe donc à une représentation un quadruplet de points dans  $\partial_{\infty}\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , que nous noterons :

$$q_{\rho} = (p_{ST}, p_{S^{-1}TS^{-1}}, p_{TS}, p_{T^{-1}ST^{-1}}).$$

On remarque que  $q_{\rho}$  est l'équateur de l'octaèdre de la figure 5.3. Il est naturellement organisé en deux triangles :  $S$  et  $T$  permutent cycliquement les deux triangles idéaux  $\tau_S = (p_{ST}, p_{S^{-1}TS^{-1}}, p_{TS})$  et  $\tau_T = (p_{ST}, p_{TS}, p_{T^{-1}ST^{-1}})$  (voir la figure 5.4).

**Théorème 5.3.1** (Parker-W. [PW17a]). *Les  $PU(2,1)$ -classes de conjugaisons de paires  $(S, T)$  d'éléments elliptiques réguliers satisfaisant aux conditions*

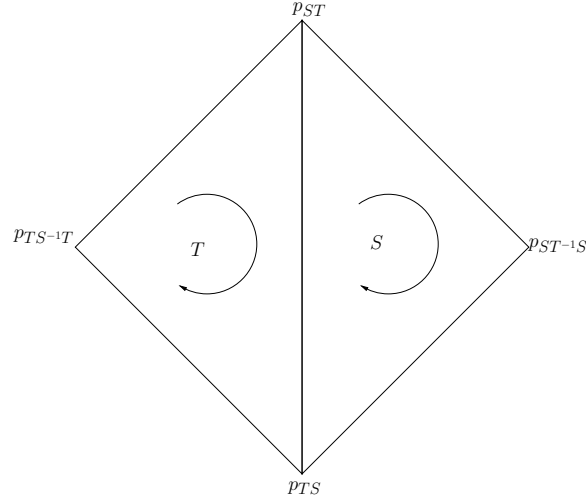
$$S^3 = T^3 = 1 \text{ et } ST \text{ unipotent,} \quad (5.9)$$

*sont paramétrées par les paires  $(\alpha_1, \alpha_2) \in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^2$ , où*

$$\alpha_1 = \mathbb{A}(p_{ST}, p_{S^{-1}TS^{-1}}, p_{TS}) = \mathbb{A}(\tau_S) \text{ et } \alpha_2 = \mathbb{A}(p_{ST}, p_{TS}, p_{T^{-1}ST^{-1}}) = \mathbb{A}(\tau_T). \quad (5.10)$$

*De plus, le produit  $S^{-1}T$  est parabolique si et seulement si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  satisfont*

$$x_1^2 x_2^4 - 4x_1^2 x_2^3 + 18x_1 x_2^2 - 27 = 0 \quad (5.11)$$


 FIGURE 5.4 – Les deux éléments d'ordre trois  $S$  et  $T$ .

où  $x_i = \sqrt{2 \cos(\alpha_i)}$ .

La figure 5.5.a. représente le lieu où le produit  $S^{-1}T$  est parabolique. L'expression 5.11, s'obtient par des calculs standards à partir de l'expression suivante de la trace de  $S^{-1}T$  en termes des  $\alpha_i$ .

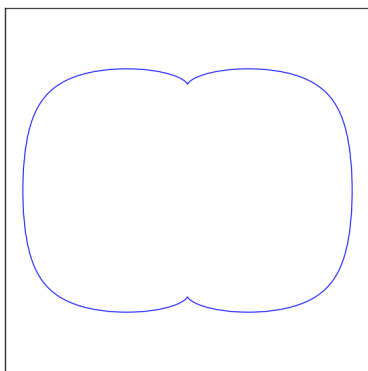
$$\text{tr}(S^{-1}T) = x_1^2 x_2^4 e^{-i\alpha_1/3}. \quad (5.12)$$

Cette dernière relation s'obtient facilement à partir d'expressions explicites de  $S$  et  $T$  en fonctions des mêmes paramètres. Nous donnons dans [PW17a] les matrices de  $SU(2,1)$  suivantes :

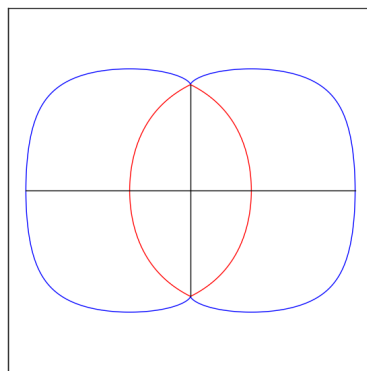
$$\begin{aligned} S &= e^{-i\alpha_1/3} \begin{bmatrix} e^{i\alpha_1} & x_1 e^{i\alpha_1 - i\alpha_2} & -1 \\ -x_1 e^{i\alpha_2} & -e^{i\alpha_1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ T &= e^{i\alpha_1/3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -e^{-i\alpha_1} & -x_1 e^{-i\alpha_1 - i\alpha_2} \\ -1 & x_1 e^{i\alpha_2} & e^{-i\alpha_1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Nous allons maintenant décrire quelques points et régions remarquables de la tranche de Riley hyperbolique complexe (voir la figure 5.5). Nous notons ici  $\Gamma$  le groupe engendré par les deux transformations  $S$  et  $T$ .

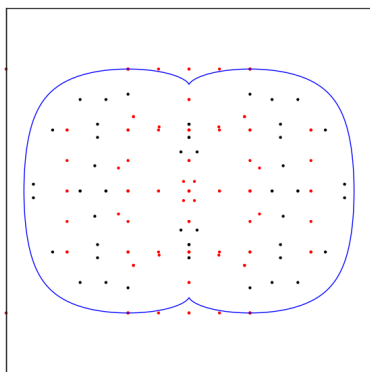
1. **Axe des abscisses 1.** Les groupes correspondant à des paramètres  $(\alpha_1, 0)$  sont commensurables à des groupes triangulaires idéaux. Plus précisément, pour chacun



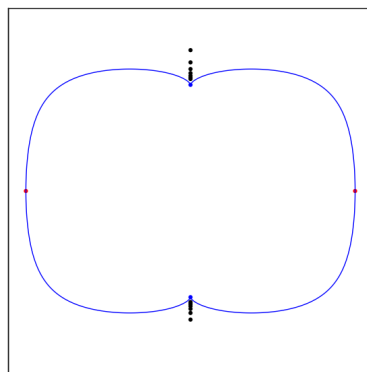
**a.** Le lieu parabolique  $\mathcal{P}$ . A l'intérieur de la courbe  $S^{-1}T$  est loxodromique, et elliptique à l'extérieur



**b.** Dans la région rouge, le groupe  $\Gamma$  est discret par [PW17a]. Sur l'axes des abscisses (resp. ordonnées), il est à commensurabilité près un sous-groupe d'un groupe triangulaire idéal (resp. d'un groupe que j'avais obtenu par bending dans [Wil12])



**c.** Aux points marqués sur la figure,  $\Gamma$  est à commensurabilité près un sous-groupe d'un réseau (donc discret). Les points noirs (resp. rouges) correspondent à des sous-groupes de réseaux de Mostow (resp. de Deraux-Parker-Paupert[DPP16]).



**d.** Les points rouges (resp. bleus) correspondent à l'uniformisation du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead obtenue par Schwartz [Sch01a, Sch07b] (resp. Parker-Will [PW17a]). Les points noirs sont les uniformisations de remplissages Dehn sur un cusp [Aco19b, DF15, PWX16].

FIGURE 5.5 – Le lieu de parabolicité de  $S^{-1}T$ , avec divers points et régions remarquables. Dans toute la figure, on note  $\Gamma$  le groupe  $\langle S, T \rangle$ .

de ces points, le groupe  $\Gamma$  est commensurable au groupe triangulaire idéal dont les miroirs sont les côtés complexes du triangle  $\tau_S$ . Sur la figure 5.5 **b**, le segment horizontal noir correspond donc aux groupes triangulaires idéaux hyperboliques complexes dcret (voir [GP92, Sch01a, Sch07b]).

2. **Axe des abscisses 2.** Les deux points d'intersections de l'axe horizontal avec le lieu de parabolicité (marqués en rouge sur la figure 5.5.d. représentent les uniformisations du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead obtenues par Schwartz dans [Sch01a].
3. **Axe des ordonnées 1.** Dans [Wil12], j'avais montré comment construire par un procédé de pliage des représentations discrètes de groupes fondamentaux de surfaces à cusps dans  $\text{PU}(2,1)$ . Les groupes  $\Gamma$  obtenus pour des paramètres du type  $(0, \alpha_2)$  sont commensurables à des exemples que j'avais traité dans [Wil12]. Plus précisément, j'avais construit dans ce travail des représentations de tout groupe de surface à cusps  $\Sigma$  dans  $\text{PU}(2,1)$ , donc les groupes périphéraux étaient unipotents. Dans le cas où la surface  $\Sigma$  est la sphère moins trois points, les trois pointes sont unipotentes, et le théorème 4.2.2 montre que dans ce cas l'image de la représentation est d'indice fini dans un groupe engendré par deux éléments d'ordre trois. Plus précisément les trois transformations  $A = ST$ ,  $B = TS$  et  $C = S^{-1}TS$  vérifient  $ABC = 1$  et engendrent ces représentations.
4. **Axe des ordonnées 2.** On peut résumer la situation des variétés à l'infini des groupes représentés par des points de l'axe vertical de la manière suivante
  - (a) Si  $S^{-1}T$  est unipotent alors le groupe  $\Gamma$  uniformise le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead ([PW17a]). C'est le cas pour les deux points d'intersection de l'axe vertical avec le lieu de parabolicité.
  - (b) Si  $S^{-1}T$  est loxodromique, alors le groupe  $\langle S, T \rangle$  uniformise un remplissage de Dehn de pente  $-1/3$  sur les deux cusps du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead ([Aco19b]). C'est le cas pour la portion d'axe vertical qui est intérieure au lieu de parabolicité.
  - (c) Si  $S^{-1}T$  est elliptique d'ordre fini,  $\Gamma$  uniformise le remplissage de Dehn de pente  $1/(n-3)$  sur un des cusps du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead ([Aco19b]). C'est le cas pour certains points de l'axe vertical, extérieurs au lieu de parabolicité (marqués en noir sur la figure 5.5.d. Ces groupes ont été également étudié par Parker-Wang-Xie dans [PWX16].
5. **La zone rouge.** Dans [PW17a], John Parker et moi avons montré que la zone délimitée par la courbe rouge sur la figure 5.5.b est formée de groupes discrets. Nous avons pour cela construit un domaine fondamental avec deux paramètres de flexibilité (un domaine de Ford). La zone obtenue correspond à une limitation combinatoire sur ce domaine fondamental. Nous pensons que tout la partie intérieure

au lieu de parabolicité est formée de groupes discrets. Plus précisément on peut énoncer :

**Conjecture.** *Un groupe  $\langle S, T \rangle$  tel que dans le théorème 5.3.1 est discret et isomorphe à  $\mathbb{Z}_3 \star \mathbb{Z}_3$  si et seulement si  $S^{-1}T$  n'est pas elliptique.*

Nous reviendrons à cette preuve de discrétude à la section 5.3.2.

6. **Sous-groupes de réseaux.** La conjecture ci-dessus est renforcée par l'observation suivante, faite par Martin Deraux. De nombreux points intérieurs à la courbe bleue correspondent à des sous-groupes de réseaux connus. Ces points sont marqués sur la figure 5.4 c. Plus précisément, en ces points, le sous-groupe de  $\Gamma$  engendré par  $ST$  et  $TS$  est un sous-groupe d'un réseau de Mostow (points noirs) ou un sous-groupe de l'un des réseaux produits par Deraux-Parker-Paupert dans [DPP16].

*Remarque 5.3.1.* Expliquons maintenant la terminologie. Dans ses travaux, Riley considérait l'espace des classes de conjugaisons de sous-groupes de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  engendrés par deux transformations paraboliques qui ne commutent pas. On peut identifier cet espace avec  $\mathbb{C} - \{0\}$  via l'application qui associe à tout  $\rho \in \mathbb{C} - \{0\}$  la classe de conjugaison du groupe  $\Gamma_\rho$ , où

$$\Gamma_\rho = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad (5.14)$$

La question originale de Riley était de déterminer les valeurs de  $\rho$  pour lesquelles  $\Gamma_\rho$  est discret. Parmi ces valeurs, le sous-ensemble fermé des valeurs de  $\rho$  pour lesquelles  $\Gamma_\rho$  est discret et libre est maintenant appelé *tranche de Riley* ([KS94] ou l'exposé [Ser]). Dans le cadre de la tranche de Riley hyperbolique complexe, en notant  $A = ST$  et  $B = TS$ ,  $A$  et  $B$  sont deux transformations paraboliques unipotentes qui ne commutent pas. La condition supplémentaire réclamant que  $AB$  soit également unipotent sert ici à rigidifier la situation, de manière à avoir une tranche de dimension plus petite.

Du point de vue de la discrétude, les résultats attendus sont bien différents dans le cadre hyperbolique complexe. Ainsi, tout mot en les deux matrices (5.14) qui représente une courbe simple sur la sphère à quatre trous (voir [KS94]) peut devenir parabolique et fournit un unique point de la courbe sur la figure 5.6. Ces points correspondent donc à l'apparition d'un élément parabolique accidentel, et forment un sous-ensemble dense de la courbe. Les autres points peuvent s'interpréter comme un pincement le long d'une lamination géodésique. Dans le cas complexe, la conjecture ci-dessus peut se réénoncer en disant que  $\langle A, B \rangle$  est discret et libre à deux générateurs si et seulement si le commutateur  $[A, B]$  est non-elliptique. On voit donc que la situation attendue est drastiquement différente.

Dans [PP10] (problème 6.2), Parker et Platis posent cette question pour les déformations quasi-fuchsienues hyperboliques complexes de représentation  $\mathbb{R}$ -fuchsienues de groupes de surface fermées. Ils laissent entendre en particulier que le bord de l'espace des déformations discrètes et fidèles pourrait avoir une structure polyédrale, dont les faces

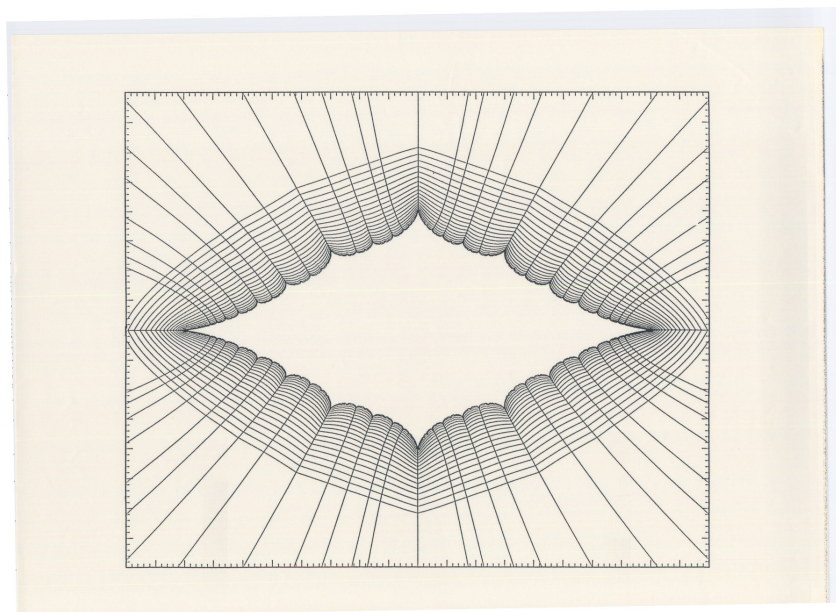


FIGURE 5.6 – La tranche de Riley. Les classes de groupes discrets et libres forment l’extérieur de la “courbe”. Les “cils” de l’oeil sont les *pleating rays*, qui rencontrent la courbe limite en les paramètres  $\rho$  pour lesquels apparaît un élément parabolique exceptionnel. Je remercie C. Series qui m’a fourni ce scan de l’original du dessin qui apparaît dans [KS94].

correspondraient à l'apparition d'éléments paraboliques. La situation serait donc encore une fois très différente du cas hyperbolique réel.

De ce point de vue, le cas des représentations de groupes de surfaces dans  $\mathrm{PU}(3,1)$  paraît extrêmement intéressant puisque  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^3$  contient des copies plongées de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$  et  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et que les deux comportements doivent se combiner.

### 5.3.2 Prouver la discrétude d'un groupe et analyser le quotient.

Je vais ici brièvement exposer le principe la méthode que John Parker et moi avons employée pour prouver la discrétude des groupes correspondant aux points de la zone rouge de la figure 5.4.b. Les détails sont très techniques, je renvoie donc pour cela à notre article [PW17a], ainsi qu'au papier de Miguel Acosta [Aco19b], où notre analyse est partiellement réexposée et élargie.

**Le principe général.** Nous construisons un domaine fondamental en utilisant un *Domaine de Ford*. Le principe est le suivant.

1. On choisit un point fixe parabolique d'un élément du groupe (dans notre cas, il s'agit de  $p_{ST}$ ), et on fixe une métrique de Cygan sur  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  associée à ce point. On associe alors à tout élément  $\gamma \in \Gamma \setminus \mathrm{Stab}(p_{ST})$  sa sphère isométrique (voir la section 2.2), notée  $\mathcal{I}(\gamma)$ . Le domaine de Ford de  $\Gamma$  est alors l'intersection des extérieurs des sphères isométriques de tous ces éléments. Il est décrit par le système d'inégalités :

$$\mathcal{F}_{\Gamma} = \{\mathbf{m} \in (\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial_{\infty} \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2) \setminus p_{ST}, |\langle \mathbf{m}, \mathbf{p}_{ST} \rangle| > |\langle \mathbf{m}, \gamma^{-1} \mathbf{p}_{ST} \rangle| \forall \gamma \in \Gamma \setminus \mathrm{Stab}(p_{ST})\}. \quad (5.15)$$

Ici, nous désignons par  $\mathbf{p}_{ST}$  le relèvement de  $p_{ST}$  correspondant au choix de la métrique de Cygan (voir la section 2.2) ; pour tout point  $m$ ,  $\mathbf{m}$  est le relèvement qui vérifie  $\langle \mathbf{m}, \mathbf{p}_{ST} \rangle = 1$ , et  $\gamma$  un relèvement de  $\gamma$  à  $\mathrm{SU}(2,1)$ . Le domaine de Ford est donc une variante du domaine de Dirichlet, où le point base est à l'infini (voir la section 9.3 de [Gol99]). Il est invariant sous l'action du stabilisateur parabolique de  $p_{ST}$ . Il suffit en théorie de montrer qu'il contient un ouvert non-vide pour obtenir la discrétude du groupe  $\Gamma$ .

2. En pratique il n'est pas simple de vérifier que l'ensemble (5.15) contient un ouvert non-vide car il est décrit par un nombre infini d'inégalités. On procède donc de la manière suivante.
  - (a) On étudie expérimentalement le bord de  $\mathcal{F}_{\Gamma}$ . Lorsque le groupe est discret, on espère obtenir une structure polyédrale. Il s'agit donc de deviner expérimentalement cette structure.
  - (b) Une fois obtenu un domaine de Ford conjectural on l'intersecte avec un domaine fondamental pour le stabilisateur parabolique du centre du domaine de Ford.

L'objet obtenu est alors un candidat domaine fondamental pour le groupe, et l'on applique le théorème du polyèdre de Poincaré pour le prouver, qui nous donne une présentation du groupe  $\Gamma$ . La figure 5.8 représente l'intersection avec  $\partial_\infty \mathbf{H}_\mathbb{C}^2$  de quelques sphères isométriques dans le cas du groupe  $\langle S, T \rangle$  pour lequel  $ST$  et  $S^{-1}T$  sont unipotents (théorème 5.2.2). L'intersection du domaine de Ford avec  $S^3$  est l'extérieur de la réunion de ces sphères. On peut observer sur la figure que ces sphères isométriques “suivent” la structure de contact du groupe de Heisenberg : chacune de ces sphères est symétrique par rapport au plan de contact en son centre.

La figure 5.7 montre l'exemple classique du domaine de Ford centré à l'infini pour le groupe  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \langle e, \iota | e^3 = \iota^2 = 1, \iota e \text{ parabolique} \rangle$ . Il est bordé par les sphères isométriques bleues et rouges, qui sont celles de  $e$ ,  $e^{-1}$  et leurs conjugués par la translation  $z \mapsto z + 1$ . Les deux géodésiques verticales bordent un domaine fondamental pour le stabilisateur du point à l'infini.

#### Difficultés de la mise en oeuvre.

1. Comme nous l'avons vu à la section 2.2, les sphères isométriques sont des exemples de bisecteurs de  $\mathbf{H}_\mathbb{C}^2$ . Ce sont en particulier des hypersurfaces, qui ne sont donc pas totalement géodésiques. Il s'agit donc d'étudier les intersections d'une famille de telles hypersurfaces. Techniquement, il s'agit d'un système d'équations et d'inéquations, qui sont polynômiales (typiquement de degré deux) ou trigonométriques, suivant les paramétrages choisis. Notons ici que dans le cas des espaces hyperboliques réels, les sphères isométriques sont totalement géodésiques, et par conséquent les équations impliquées dans la description du domaine de Ford sont affines. Dans [PW17a], nous décrivons complètement la combinatoire de ces intersections pour les paramètres qui appartiennent à la zone rouge de la figure 5.5.b. Cette région est définie comme l'ensemble des paramètres  $(\alpha_1, \alpha_2)$  pour lesquels seules les sphères isométriques de  $S$  et  $T$  interviennent dans le bord du domaine de Ford. Pour obtenir la description de la zone rouge, nous avons essentiellement éliminé des variables dans les systèmes d'équations décrivant les intersections des sphères isométriques de  $S$  et  $T$  et de leurs voisines. L'effet mécanique est d'augmenter le degré des équations, ce qui mène à des difficultés calculatoires, spécialement lorsque l'on traite des familles de polyèdres (ici donc, une famille à 2 paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ ).
2. L'identification de la topologie du bord à l'infini du quotient est un problème qui peut s'avérer épineux. Dans la plupart des cas connus à ce jour ([DF15, Sch01a, PW17a]), cette identification est faite de manière artisanale. Dans le cas de [PW17a], qui en quelque sorte suit [Sch01a], nous montrons à la main que pour les paramètres  $(\alpha_1, \alpha_2)$  situés sur la pointe du lieu de parabolicité (points bleus de la figure 5.5.d.), on obtient le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead. Pour cela, nous vérifions

que l'intersection du domaine fondamental avec le bord à l'infini est un octaèdre idéal  $\mathcal{O}$  dont les sommets sont des points fixes paraboliques du groupe. Il s'agit donc d'une réalisation géométrique de l'octaèdre combinatoire décrit à la figure 5.3. Cette méthode est envisageable sur des exemples particuliers, mais plusieurs problèmes se posent :

- (a) il n'est pour l'instant pas possible de prédire la topologie de la variété que l'on va obtenir sans procéder à une analyse fine de la combinatoire des domaine fondamentaux.
- (b) Il est difficile de traiter un grand nombre d'exemples de cette manière à moins d'envisager un traitement à l'ordinateur. Cet aspect paraît indispensable en l'état des connaissances.

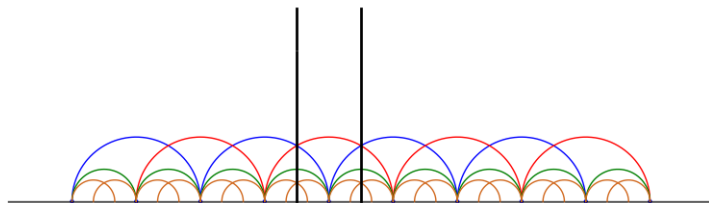


FIGURE 5.7 – Quelques sphères isométriques d'éléments de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Le domaine de Ford est la partie du demi-plan de Poincaré située au-dessus des sphères isométriques bleues et rouges.

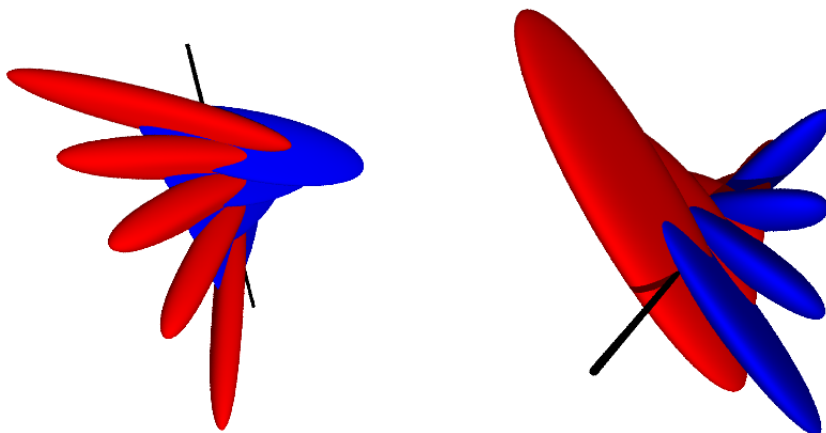


FIGURE 5.8 – Deux vues d’une portion du bord du domaine de Ford.

*Remarque 5.3.2.* Concernant le problème de l’identification de la topologie, on peut tout de même mentionner deux résultats de remplissage de Dehn CR sphérique, qui vont donc dans le sens d’une reconnaissance plus simple de la topologie d’une variété.

1. Le premier, dû à Schwartz (Théorème 1.2 de [Sch07b]) permet de réaliser un remplissage de Dehn sur une uniformisation, et d’obtenir encore une uniformisation. C’est donc un résultat très fort, mais il repose sur l’hypothèse que l’ensemble limite  $\Lambda$  de l’uniformisation de départ est *poreux*, c’est à dire si pour tout  $g \in \text{PU}(2, 1)$ ,  $g(S^3 \setminus \Lambda)$  contient une boule dont le diamètre sphérique est minoré uniformément par rapport à  $g$ . Schwartz suggère que cette condition est équivalente à celle d’être géométriquement fini (au moins lorsque  $\Lambda$  est strictement inclu dans  $S^3$ ), mais ne le prouve pas. Cette condition semble difficile à vérifier sur un exemple, et à ma connaissance, personne n’a réussi à la vérifier depuis Schwartz.
2. Le second résultat de remplissage de Dehn est dû à Miguel Acosta dans [Aco16] (théorème 3.23). Ce résultat est plus souple et plus facile à appliquer, mais il ne considère que des structures, qui ne sont donc pas forcément des uniformisations. Il faut donc de nouveau un travail séparé pour obtenir un résultat d’uniformisation.

## 5.4 Une métrique de Hilbert sans convexité pour les uniformisations CR sphériques. [FGW20]

Dans [FGW20], Elisha Falbel, Antonin Guilloux et moi avons défini une métrique à la Hilbert sur certains ouverts de l'espace projectif. Soit  $\Lambda$  une famille compacte d'hyperplans de  $\mathbb{C}P^n$ , et soit  $\Omega$  un ouvert contenu dans le complémentaire de la réunion des hyperplans de  $\Lambda$ . En identifiant chaque hyperplan avec une forme linéaire, on a donc

$$\Omega \subset \left( \bigcup_{\phi \in \Lambda} \ker(\phi) \right)^c. \quad (5.16)$$

On pose alors

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, d_\Lambda = \max\{\ln(|[\phi, \phi', \omega, \omega']|), \phi, \phi' \in \Lambda\} \quad (5.17)$$

Le birapport  $[\phi, \phi', \omega, \omega']$  est défini comme le birapport des quatre points  $\phi_{\omega, \omega'}$ ,  $\phi'_{\omega, \omega'}$ ,  $\omega$  et  $\omega'$ , où en notant  $(\omega\omega')$  la droite engendrée par  $\omega$  et  $\omega'$ ,

$$\phi_{\omega, \omega'} = \ker(\phi) \cap (\omega\omega'), \phi'_{\omega, \omega'} = \ker(\phi') \cap (\omega\omega') \quad (5.18)$$

Voir la figure 5.9. On peut facilement vérifier que ce birapport est donné par

$$[\phi, \phi', \omega, \omega'] = \frac{\phi(\omega)\phi'(\omega')}{\phi(\omega')\phi'(\omega)} \quad (5.19)$$

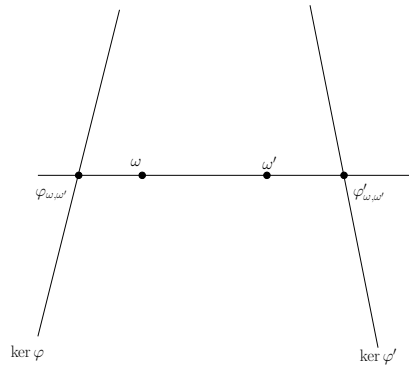


FIGURE 5.9 – Le birapport  $[\phi, \phi', \omega, \omega']$

Lorsque  $\Omega$  est un domaine linéairement convexe de  $\mathbb{C}P^n$  et que  $\Lambda$  est son dual (l'ensemble des hyperplan qui ne le rencontrent pas), cette définition coïncide avec une construction de Dubois [Dub09]. Dans ce cadre, le choix fait de  $\Lambda$  est “le plus gros possible”. Cette

situation a été également considérée par Ledrappier ([Led12]), Vince ([Vin13]) ou Zimmer [Zim15, Zim17]. Cependant la métrique de Dubois existe également lorsque  $\Lambda$  et  $\Omega$  ne sont pas duaux l'un de l'autre : nous n'imposons ici seulement que  $\Omega$  soit inclu dans le dual de  $\Lambda$ . Il s'en suit que  $d_\Lambda$  n'est en général pas une distance, mais seulement une pseudo-distance : elle ne sépare pas les points. On peut cependant caractériser les paires  $(\Omega, \Lambda)$  pour lesquelles  $d_\Lambda$  est une distance sur  $\Omega$  :

**Théorème 5.4.1.** *Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux points distincts de  $\Omega$ . Les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

1.  $d_\Lambda$  ne sépare pas  $\omega$  et  $\omega'$  ( $d_\Lambda(\omega, \omega') = 0$ ).
2. Pour toute paire  $(\phi, \phi')$  dans  $\Lambda \times \Lambda$ ,  $\|[\phi, \phi', \omega, \omega']\| = 1$ .
3. Il existe une involution anti-holomorphe de la droite complexe  $(\omega, \omega')$  qui échange  $\omega$  et  $\omega'$  et fixe point par point la projection de  $\lambda$  sur  $(\omega, \omega')$ .

De plus, si  $d_\Lambda$  sépare toutes les paires de points distincts, alors  $d_\Lambda$  est une distance.

Ici, la projection d'un hyperplan sur une droite est juste son intersection avec elle. L'exemple le plus simple est le suivant : on se place dans  $\mathbb{C}P^1$ , les hyperplans sont donc des points, et l'on considère  $\Lambda = \{a, b, c\}$ . On voit facilement que deux points sont séparés par  $d_\Lambda$  sauf s'il sont images l'un de l'autre par l'inversion par rapport au cercle contenant les trois points de  $\Lambda$ . Dans [Vin13], Vince étudie cette métrique sous l'hypothèse que l'adhérence de  $\Omega$  est strictement contenue dans  $\mathbb{C}P^1$ . Le cas où  $\Lambda$  est constitué d'un nombre fini de points dans  $\mathbb{C}P^1$  est en quelque sorte un analogue de la métrique de Hilbert classique dans un polygone. Lorsque la condition de séparation du théorème 5.4.1 est vérifiée, on peut montrer que la distance  $d_\Lambda$  donne une métrique infinitésimale Finsler :

**Théorème 5.4.2.** *Soit  $(\Omega, \Lambda)$  tels qu'en 5.16 et vérifiant la condition de séparation. La métrique  $d_\Lambda$  induit une métrique infinitésimale Finsler  $(\omega, v) \rightarrow \|v\|_{\Lambda, \omega}$  sur  $T\Omega$ , qui est donnée par :*

$$\forall \omega \in \Omega, \forall v \in T_\omega \Omega, \|v\|_{\Lambda, \omega} = \max_{\phi, \phi' \in \Lambda} \operatorname{Re} \left( \frac{\phi'(v)}{\phi'(\omega)} - \frac{\phi(v)}{\phi(\omega)} \right), \quad (5.20)$$

On peut caractériser les cas où la boule unité de cette métrique est strictement convexe (Proposition 2.15 de [FGW20]). Dans le cas de la sphère moins  $n$  points :  $\Sigma = \mathbb{C}P^1 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ , on peut montrer que la métrique Finsler induite est uniformément équivalente à toute métrique hyperbolique de volume finie (Théorème 4.1 de [FGW20]). En notant  $\|\cdot\|$  la norme de Finsler et la norme hyperbolique  $\|\cdot\|^h$ , on vérifie qu'il existe une constante  $C > 1$  telle que

$$\forall m \in \Sigma, \forall v \in T_m \Sigma, \frac{\|v\|_m^h}{C} \leq \|v\|_m \leq C \|v\|_m^h. \quad (5.21)$$

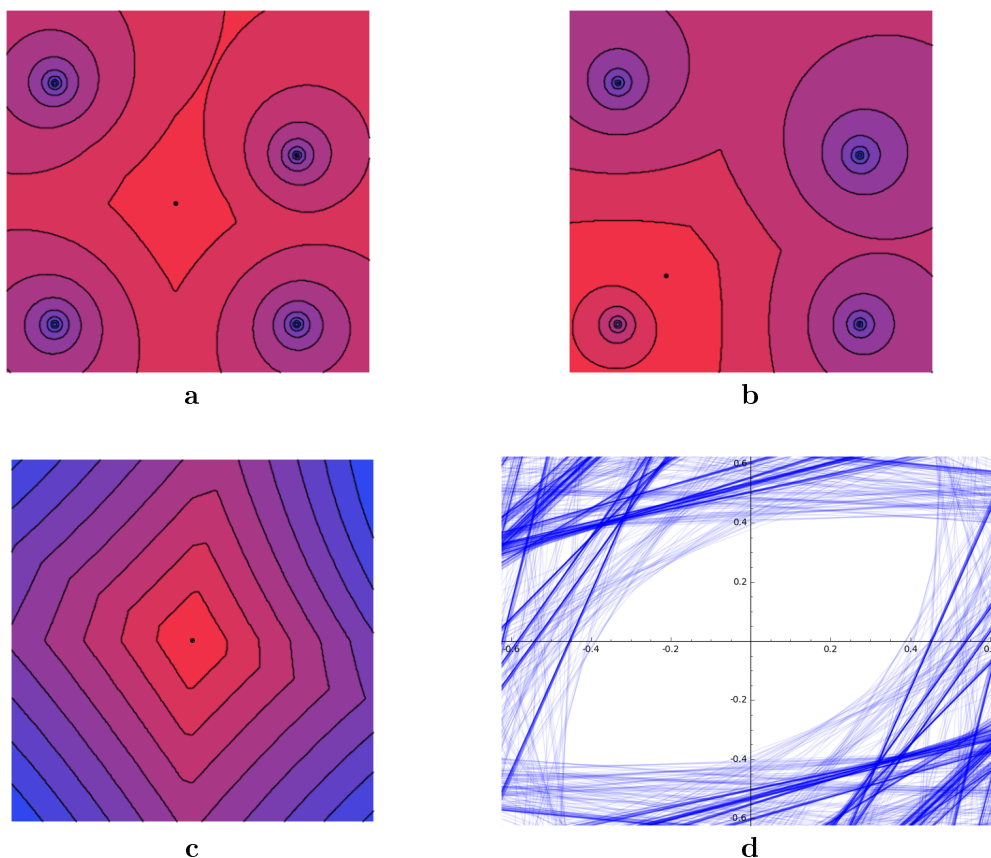


FIGURE 5.10 – **a**, **b**, **c** : diverses vues de lignes de niveaux de la distance à un point dans le cas de la sphère privée de quatre points. **d** : boule unité de la norme sur le plan tangent dans le cas du complémentaire de l'ensemble limite d'un groupe de Schottky. le dessin **d** a été réalisé par Antonin Guilloux.

On ne peut pas cependant en tirer tel quel de résultat de quasi-isométrie car  $d_\Lambda$  n'est en général pas une métrique de longueur. On peut illustrer ce fait par les estimées suivantes, qui traitent du disque épointé vu alternativement comme cusp modèle hyperbolique où comme voisiane d'un point ôté de  $\Sigma$  muni de la métrique  $d_\Lambda$ .

1. La métrique hyperbolique sur le disque épointé est donnée par  $\frac{|dz|}{|z|\log|z|}$  (c'est donc le cusp modèle des surfaces hyperboliques). On peut alors estimer la distance entre le point  $1/2$  et un point  $t > 0$ , qui est  $\approx \log(|\log(t)|)$ .
2. Si maintenant l'on suppose que  $p_1 = 0$  et que les autres points ôtés sont suffisamment loin à l'extérieur du disque unité, la distance de Finsler entre les même deux

points est donnée par

$$\max_{i,j} \log \frac{|t - p_i||1/2 - t_j|}{|t - p_j||1/2 - p_i|} \approx |\log(t)|.$$

Revenons maintenant au cas d'un sous-groupe de  $\mathrm{PU}(n,1)$ . Rappelons qu'à tout point  $p$  de  $S^{2n-1}$ , est associé l'hyperplan complexe  $H_p$  tangent à  $S^{2n-1}$  en  $p$  défini par (voir la section 2.2)

$$H_p = P(\ker(\langle \cdot, \mathbf{p} \rangle)).$$

L'hyperplan  $H_p$  est la projection sur  $\mathbb{C}P^n$  du noyau de la forme  $\phi_{\mathbf{p}} = \langle \cdot, \mathbf{p} \rangle$ , où  $\mathbf{p}$  est un relèvement quelconque de  $p$ . Ceci implique en particulier que si  $p, q \in S^{2n-1}$  et  $m, n \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ , on a

$$[\phi_p, \phi_q, m, n] = \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \langle \mathbf{q}, \mathbf{m} \rangle}, \quad (5.22)$$

qui n'est autre que le birapport de Koranyi-Reimann défini à la section 2.4. Lorsque  $\Gamma$  est un sous groupe-discret de  $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{C})$ , l'ensemble limite au sens de Kulkarni de  $\Gamma$  défini de la manière suivante.

**Définition 5.4.1** ([Kul78, Definition 1.1]). Soit  $\Gamma \subset \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{C})$  un sous-groupe discret.

1.  $L_0(\Gamma)$  est la fermeture de l'ensemble des points de  $\mathbb{C}P^n$  avec isotropie infinie.
2.  $L_1(\Gamma)$  is la fermeture de l'ensemble des points d'accumulation des  $\Gamma$ -orbites des points  $z$  de  $\mathbb{C}P^n \setminus L_0(\Gamma)$ .
3.  $L_2(\Gamma)$  est la fermeture de l'ensemble des points d'accumulation des  $\Gamma$ -orbites des sous-ensembles compacts compacts  $K \subset P \setminus (L_0(\Gamma) \cup L_1(\Gamma))^2$ .
4. L'ensemble limite au sens de Kulkarni  $\Lambda_{\mathrm{Kul}}(\Gamma)$  est la réunion  $L_0(\Gamma) \cup L_1(\Gamma) \cup L_2(\Gamma)$ .
5. La région de discontinuité au sens de Kulkarni, notée  $\Omega_{\mathrm{Kul}}(\Gamma)$  est le complémentaire de  $\Lambda_{\mathrm{Kul}}(\Gamma)$  dans  $\mathbb{C}P^n$

Si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $\mathrm{PU}(n,1)$ , notons  $\Lambda_{\Gamma} \subset S^{2n-1}$  son ensemble limite classique. Cano, Liu et Lopez ont montré dans le théorème 0.1 de [CLL17] que

1. On a l'égalité

$$\Lambda_{\mathrm{Kul}}(\Gamma) = \bigcup_{p \in \Lambda} H_p \quad (5.23)$$

2.  $\Omega_{\mathrm{Kul}}(\Gamma)$  est le plus gros ouvert de  $\mathbb{C}P^n$  sur lequel  $\Gamma$  agit proprement discontinûment.

---

2. Un point  $p \in \mathbb{C}P^n$  est un point d'accumulation d'une famille de compacts  $C_{\alpha}$  si tout voisinage de  $p$  rencontre une infinité compacts  $C_{\alpha}$ , voir [Kul78]

On constate donc directement que la pseudo-métrique  $d_\Lambda$  est bien définie sur  $\Omega_{\text{Kul}}(\Gamma)$ , et que de plus elle est invariante par le groupe  $\Gamma$ . Lorsque par exemple  $\Gamma$  est un sous-groupe  $\mathbb{R}$ -Fuchsien de  $\text{PU}(2,1)$ , Cano, Parker et Seade ont montré dans [CPS16] que  $\Omega_{\text{Kul}}(\Gamma)$  a exactement trois composantes connexes donc en contient  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Ce cas précis ne remplit pas les conditions de séparation : l'ensemble limite est le bord d'un plan réel, et la réflexion  $\sigma$  par rapport à ce plan réel préserve  $\Lambda_{\text{Kul}}(\Gamma)$ , ce qui conduit au fait que les points échangés par  $\sigma$  ne sont pas séparés par  $\Lambda$ . On peut vérifier également que pour un sous-groupe  $\mathbb{C}$ -Fuchsien de  $\text{PU}(2,1)$ , la condition de séparabilité n'est pas non-plus remplie. Cependant c'est ce qui peut arriver de pire : l'énoncé suivant est une combinaison du Théorème de Cano, Liu et Lopez et du Théorème 3.8 de [FGW20]

**Théorème 5.4.3.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret Zariski-dense de  $\text{PU}(n,1)$ . Alors  $d_{\Lambda_{\text{Kul}}}$  est une distance sur  $\Omega_{\text{Kul}}$ . De plus,  $\Gamma$  agit proprement discontinûment et par isométries sur  $\Omega_{\text{Kul}}$ .*

On en déduit directement l'énoncé suivant

**Théorème 5.4.4.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret Zariski dense de  $\text{PU}(n,1)$  dont l'ensemble limite  $\Lambda$  est un fermé strict de  $S^{2n-1}$ .*

1. *Alors  $d_\Lambda$  est une métrique  $\Gamma$ -invariante sur l'ensemble de discontinuité  $\Omega$ .*
2. *La métrique finsler définie sur  $\Omega_{\text{Kul}}(\Gamma)$  induit une métrique infinitésimale finsler sur  $T\Omega_{\text{Kul}}(\Gamma)$  qui est  $\Gamma$ -invariante.*

En particulier cet énoncé équipe naturellement les uniformisations CR sphériques de 3-variétés d'une métrique finsler.

# Chapitre 6

## Perspectives, projets.

Dans cette partie, je vais présenter quelques pistes de recherche pour les années qui viennent. Certaines ont déjà été largement esquissées dans les chapitres précédents.

### 6.1 Représentations de groupes fondamentaux de 3-variétés dans $\mathrm{PU}(2,1)$ .

Mes résultats autour de la tranche de Riley hyperbolique complexe ([GW18, PW15, PW17a]) suggèrent comme j'ai tenté de l'exposer à la section 5.2.2 les questions suivantes. Soit  $M$  une 3-variété hyperbolique non-compacte de volume fini. Soit  $M'$  un remplissage de Dehn non-hyperbolique de  $M$ .

1. Donner des conditions sous lesquelles la  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ -variété des caractères de  $M'$  (ou plus vraisemblablement sa composante de dimension maximale) s'identifie à une composante algébrique de la  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ -variété des caractères de  $M$ . Mon travail avec Antonin Guilloux [GW18] laisse penser que c'est vrai pour une variété à deux cusps admettant un remplissage de Dehn homéomorphe à la somme connexe de deux espaces lenticulaires. Peut-on donner des conditions plus générales ?
2. Décrire des tranches définies géométriquement de la variété des caractères de  $M'$ , qui généralisent la tranche de Riley hyperbolique complexe à d'autres variétés. Lorsque  $M'$  est homéomorphe à la somme connexe de deux espaces lenticulaires, les aspects calculatoires et algébriques sont sans doute un peu plus simple à aborder. On a vu dans la section 5.2.2 certains cas intéressants à aborder en premier. L'existence de telles familles d'exemples paramétrées efficacement permettrait d'expérimenter (par exemple à l'aide des outils d'étude des ensembles limites récemment mis au point par Raphaël Alexandre et Antonin Guilloux). Voici par exemple un échantillon de problème possible : paramétrer l'ensemble des représentations du groupe  $\mathbb{Z}_3 \star \mathbb{Z}_3 =$

$\langle a, b | a^3, b^3 \rangle$  dans  $\text{PU}(2,1)$  telles que le commutateur  $[a, b]$  soit envoyé sur un élément unipotent.

La description des tranches géométriques des variétés de caractères pose des questions de nature algébriques sur les relations et contraintes entre les classes de conjugaisons des éléments d'un groupe à deux générateurs. L'exemple le plus simple à poser est celui du problème de Horn dans  $\text{PU}(2,1)$ , mais les éléments que j'ai donné dans le chapitre 4 restent relativement lacunaires. En particulier, les travaux de Paupert [Pau07] et mon travail avec John Parker [PW15] décrivent les classes de conjugaison possibles pour le produit  $AB$  sachant que  $A$  et  $B$  appartiennent à deux classes données. Dans ce cas, les tranches géométriques auxquelles je réfère ci-dessus peuvent être comprises comme les fibres de l'application moment décrite au chapitre 4. Il serait très intéressant d'avoir une compréhension géométrique de ces fibres. Il est très vraisemblable qu'elles portent une structure symplectique, qu'il serait très intéressant de décrire. On peut espérer obtenir des sous-variétés lagrangiennes correspondant à certaines représentations ayant des propriétés de type décomposition en involutions (voir la section 4.3), dans l'esprit des travaux de Schaffhauser pour  $\text{U}(n)$  [Sch07a, Sch08].

## 6.2 Uniformisations CR

### 6.2.1 Existence d'uniformisations

La conjecture de Kapovich 5.1.1 laisse espérer que toutes les variétés hyperboliques admettent une structure CR sphérique. Cependant la question des uniformisations CR sphériques de ces mêmes variétés reste largement ouverte. A ce stade, la question la plus importante me paraît être de trouver un éventuel contre-exemple : existe-t'il une 3-variété hyperbolique qui n'admette pas d'uniformisation CR sphérique ?

### 6.2.2 Uniformisations et groupes triangulaires

A ce jour, on observe un fort lien entre les groupes triangulaires hyperboliques complexes et les uniformisations CR sphériques de 3-variétés hyperboliques. On ne sait pas cependant s'il s'agit d'un accident de basse complexité dû au fait qu'on n'arrive pour l'instant à ne manipuler que des groupes relativement simples (disons, à deux générateurs), ou si le lien est plus profond. Il serait intéressant de construire des exemples dont on puisse montrer qu'il ne sont pas liés simplement aux groupes triangulaires hyperboliques complexes. Une piste possible serait d'étudier des déformations de groupes de surfaces avec un parabolique accidentel (qui joue le rôle de la dégénérescence dans les groupes triangulaires hyperboliques complexes). Une autre approche serait de tenter de recenser les 3-variétés uniformisées par des groupes triangulaires hyperboliques complexes dégénérés, ou d'obtenir des conditions sur les 3-variétés uniformisées dans ces cas. Par exemple :

*La 3-variété uniformisée par un groupe triangulaire hyperbolique complexe dégénéré est-elle toujours hyperbolique ?*

### 6.2.3 Uniformisations et réseaux

Un examen attentif de la tranche de Riley hyperbolique complexe montre que le lieu de parabolicité (5.5) contient un point qui est un sous-groupe  $\Gamma$  (d'indice infini) du réseau d'Eisenstein-Picard  $\mathrm{PU}(2,1, \mathbb{Z}[\omega])$ , où  $\omega$  est une racine cubique de l'unité. Il est très vraisemblable que ce groupe uniformise le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead, mais ce n'est pas démontré. Il s'agirait de répondre aux questions suivantes.

1. Prouver qu'en effet  $\Gamma$  uniformise l'entrelacs de Whitehead.
2. Quels sont les sous-groupes de  $\mathrm{PU}(2,1, \mathbb{Z}[\omega])$  qui uniformisent une 3-variété hyperbolique ? Pour des raisons simples d'ensemble limite, ces sous-groupes doivent être d'indice infini. Ceci fait qu'on ne peut sans doute pas réduire cette question à des simples techniques de cut and paste sur un domaine fondamental connu de  $\mathrm{PU}(2,1, \mathbb{Z}[\omega])$  (voir par exemple [FP06]).
3. On sait que pour toute surface hyperbolique non-compacte  $\Sigma_{g,p}$ , il existe un sous-groupe  $H$  du groupe modulaire  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  tel que le quotient du disque de Poincaré par  $H$  soit homéomorphe à  $\Sigma_{g,p}$  (voir par exemple [Mil69]). Peut-on recenser les variétés hyperboliques de dimension 3 dont le groupe fondamental admette une représentation dans  $\mathrm{PU}(2,1)$  dont l'image soit incluse dans  $\mathrm{PU}(2,1, \mathbb{Z}[\omega])$  ? Cette représentation est-elle l'holonomie d'une uniformisation ?
4. De manière plus générale, on peut se poser la même question pour les sous-groupes des réseaux non cocompacts de Mostow et Deraux-Parker-Paupert.

### 6.2.4 Métrique Finsler

La métrique de Finsler que nous avons décrit à la section 5.4 met sur les 3-variétés CR uniformisées une géométrie naturelle, que j'aimerais étudier pour son intérêt propre. Cette métrique est par ailleurs définie dans un cadre plus large que celui des groupes discrets de  $\mathrm{PU}(n,1)$  (groupes de Schottky, groupes quasi-Fuchsien, sous-groupes kleiniens généralisés de  $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{C})$  au sens de [CNS13]), et il serait intéressant d'étudier son comportement dans ces différents cas.

Dans le cas particulier des variétés CR sphériques compactes, on peut espérer utiliser cette métrique pour prouver un résultat d'ouverture de l'ensemble des holonomies de structures au sein de la variété des représentations, dans l'esprit du théorème d'ouverture de Koszul pour les structures projectives convexes (voir [Kos68] ou la section 6 de [Ben08]), où la métrique de Hilbert joue un rôle important.

### 6.3 Groupes de Schottky hyperboliques complexes et géométrie pseudo-riemmanienne.

Nous l'avons dit, l'un des problèmes récurrents en géométrie hyperbolique complexe est de prouver la discrétude d'un groupe. C'est assez frustrant car les résultats sont assez simples à énoncer, mais difficiles à démontrer. L'exemple typique est celui des conjectures de Schwartz sur les groupes triangulaires complexes. La discrétude du groupe est contrôlée par le type d'isométrie d'un seul mot, mais la preuve reste malgré tout difficile. Falbel-Koseleff [FK00, FK02], Falbel-Parker [FP03] et Schwartz [Sch07b] ont développé des techniques de fabrications de domaines fondamentaux reposant sur la construction d'hypersurfaces feuilletées par des sous-espaces totalement géodésiques. Il s'agit principalement de groupes de Schottky.

**Définition 6.3.1.** Une  $\mathbb{C}$ -sphere (resp.  $\mathbb{R}$ -sphere) est une hypersurface de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  homéomorphe à une 3-sphère, feuilletée par des droites complexes (resp. des plans réels).

Ces objets ont une jolie interprétation en termes pseudo-riemanniens : à toute hypersurface feuilletée de ce type est associée une courbe  $\gamma$  dans la grassmannienne correspondante. Cette grassmannienne est un espace homogène muni d'une métrique pseudo-riemmanienne provenant de la forme de Killing de  $\mathrm{PU}(2,1)$ . La condition de feuilletage local s'interprète par le fait que  $\gamma$  est *causale* : le vecteur tangent à  $\gamma$  en un point est toujours de type temps (négatif pour la métrique).

Ainsi, les bisecteurs (voir la section 2.1.5) sont feuilletés par des droites complexes et correspondent aux géodésiques de type temps de  $\mathrm{PU}(2,1)/\mathrm{U}(1,1)$ . Leur feuilletage singulier par des plans réels les associe aux géodésiques de type espace de  $\mathrm{PU}(2,1)/\mathrm{PO}(2,1)$ . Dans [Wil12], j'avais défini des  $\mathbb{R}$ -sphères qui a posteriori correspondent aux géodésiques de type temps de  $\mathrm{PU}(2,1)/\mathrm{PO}(2,1)$ . Les exemples construits par Falbel, Koseleff et Parker s'interprètent comme des géodésiques brisées de type temps de  $\mathrm{PU}(2,1)/\mathrm{U}(1,1)$ , qui sont réminiscentes des *plans croches* (*crooked planes*) de l'espace de de Sitter définis par Todd Drumm (voir par exemple [BCD<sup>+</sup>08]). Il serait très intéressant de mieux comprendre la constructions de domaines fondamentaux, au moins pour des groupes de Schottky, à la lumière de cette interprétation. Ceci pose en particulier la question de comprendre l'action des sous-groupes de  $\mathrm{PU}(2,1)$  sur ces espaces homogènes. Un projet commun avec Andrea Seppi va dans cette direction.

Les techniques de colliers de perles utilisées par exemples par Ananin-Grossi-Gusevskii [AGG11] ou Gaye [Gay08] peuvent également s'interpréter en ces termes (d'ailleurs ce fait est mentionné dans [AGG11]). Essentiellement : à tout collier de perles formé par des morceaux de bisecteurs est associé un lacet de type temps géodésique par morceau dans l'espace  $\mathrm{PU}(2,1)/\mathrm{U}(1,1)$ . Des techniques de ce type, appliquées dans le cas de la géométrie conforme, ont permis de montrer la conjecture de stabilisation de Kapovich (conjecture 5.1.2) pour les structures conformes plates. Il est vraisemblable qu'on puisse

adapter cette preuve au cas hyperbolique complexe, mais les problèmes techniques que pose cette adaptation sont assez ardues. Mes efforts n'ont pour l'instant pas été couronnés de succès, mais je ne perd pas espoir !

## 6.4 Géométrie hyperbolique complexe en dimension supérieure

Dans un projet commun avec Julien Paupert, nous nous intéressons aux variétés de représentations de groupes fuchsien et kleinien en dimension supérieure (plus grande ou égale à trois). On peut ainsi se poser la question de la déformation : étant donné un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $\mathrm{PO}(m,1)$ , peut-on le déformer dans  $\mathrm{PU}(n,1)$  (avec  $n \geq m$ ) ? Si oui, ces déformations restent-elles discrètes ?

Le théorème de Guichard [Gui04] répond par l'affirmative à la question de la discrétude des déformations dans le cas où  $\Gamma$  est convexe-cocompact. L'existence de telles déformations est une question très classique (voir par exemple [Wei64] ou [CLT07, HP11]). La question analogue dans le cas des déformations projectives est très étudiée. Il s'agit là de déformer les sous-groupes discrets de  $\mathrm{PO}(m,1)$  dans  $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R})$ . Ainsi, Cooper, Long, et Thistlethwaite ont montré que beaucoup de 3-variétés fermées étaient projectivement rigides, c'est à dire que leur structure hyperbolique ne peut être déformée en une structure projective. On sait également ([CLT07]) que lorsque  $\Gamma$  est une représentation du groupe fondamental d'une variété hyperbolique fermée qui est un point lisse de la  $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{R})$ -variété de représentations, alors c'est aussi un point lisse de la  $\mathrm{PU}(n,1)$  variété de représentation et les espaces de déformation associés ont même dimension.

Lorsque  $\Gamma$  est un réseau non cocompact ou un groupe géométriquement fini, la situation est moins claire. A titre d'exemple, nous étudions les représentations du groupe modulaire  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  dans  $\mathrm{PU}(n,1)$  pour  $n$  quelconque. Nous avons classifié les composantes connexes dans la variété de représentations  $\mathrm{Hom}(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}), \mathrm{PU}(n,1))$ , et décrit les composantes irréductibles (celles qui contiennent des représentations irréductibles). Lorsque  $n = 2$ , ce problème a été résolu par les travaux de Falbel et Parker [FP03], ainsi que Falbel-Koseleff [FK02] et Parker-Gusevskii [GP00, GP03]. Ainsi :

1.  $\mathrm{Hom}(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}), \mathrm{PU}(2,1))$  a 16 composantes connexes, parmi lesquelles deux sont irréductibles et de dimension deux,
2.  $\mathrm{Hom}(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}), \mathrm{PU}(3,1))$  a 40 composantes connexes, parmi lesquelles cinq sont irréductibles et de dimension trois ou un,
3.  $\mathrm{Hom}(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}), \mathrm{PU}(4,1))$  a 69 composantes connexes, parmi lesquelles cinq sont irréductibles et sont toutes de dimension quatre.

Nous espérons aborder la question de la discrétude de ces représentations, notamment en adaptant les techniques appliquées par Falbel et Parker dans  $\mathrm{PU}(2,1)$ . Ceci nous ramène

donc à la question des hypersurfaces feuilletées totalement géodésiquement que nous avons posée à la section 6.3.

# Bibliographie

- [Aco16] M. Acosta. Spherical CR Dehn surgeries. *Pac. J. Math.*, 284(2) :257–282, 2016.
- [Aco19a] M. Acosta. Character varieties for real forms. *Geometriae Dedicata*, (203) :257–277, 2019.
- [Aco19b] M. Acosta. Spherical CR-uniformizations of Dehn surgeries of the Whitehead link complement. *Geometry and Topology*, (23) :2593–2664, 2019.
- [Aco20] M. Acosta. On git quotients and real forms. *arXiv :2005.10512v2*, 2020.
- [AG] S. Anan'in and N. Gusevskii. Complex hyperbolic structures on disc bundles over surfaces. II. Example of a trivial bundle. *arXiv :math/0512406*.
- [AGG11] S. Anan'in, C. Grossi, and N. Gusevskii. Complex hyperbolic structures on disc bundles over surfaces. *Int. Math. Res. Not.*, (19) :4295–4375, 2011.
- [Ale] R. Alexandre. Redundancy of hyperbolic triangle groups in spherical CR representations. *Preprint arXiv :2006.09089*.
- [AMM98] A. Alekseev, A. Malkin, and E. Meinrenken. Lie group valued moment maps. *J. Differential Geometry*, 48 :445–495, 1998.
- [BCD<sup>+</sup>08] Thierry Barbot, Virginie Charette, Todd Drumm, William M. Goldman, and Karin Melnick. A primer on the (2+1) Einstein universe. In *Recent developments in pseudo-Riemannian geometry*, pages 179–229. Zürich : European Mathematical Society, 2008.
- [Bea83] A. Beardon. *The geometry of discrete groups*. Springer, New York, 1983.
- [Bel01] P. Belkale. Local systems on  $\mathbb{P}^1 - s$  for  $s$  a finite set. *Compositio Math.*, 129, 2001.
- [Ben08] Y. Benoist. A survey on divisible convex sets. In *Geometry, analysis and topology of discrete groups. Selected papers of the conference on geometry, topology and analysis of locally symmetric spaces and discrete groups, Beijing, China, July 17–August 4, 2006*, pages 1–18. Somerville, MA : International Press ; Beijing : Higher Education Press, 2008.

- [Bes02] M. Bestvina.  $\mathbb{R}$ -trees in topology, geometry, and group theory. In *Handbook of geometric topology*, pages 55–91. Amsterdam, north-holland edition, 2002.
- [BFG<sup>+</sup>13] N. Bergeron, E. Falbel, A. Guilloux, P. V. Koseleff, and F. Rouillier. Local rigidity for  $SL(3, \mathbb{C})$  representations of 3-manifold groups. *Exp. Math.*, 22(4) :410–420, 2013.
- [BFG14] N. Bergeron, E. Falbel, and A. Guilloux. Tetrahedra of flags, volume and homology of  $SL(3)$ . *Geom. Top.*, 18(4) :1911–1971, 2014.
- [Bis] I. Biswas. A criterion for the existence of a parabolic stable bundle of rank 2 over the projective line. *Int. Jour. Math.*
- [Bis99] I. Biswas. On the existence of unitary flat connections over the punctured sphere with given local monodromy around the punctures. *Asian J. Math.*, 3(2) :333–344, 1999.
- [BIW10] M. Burger, A. Iozzi, and A. Wienhard. Surface group representations with maximal Toledo invariant. *Ann. Math.*, 172(1) :517–570, 2010.
- [BIW14] M. Burger, A. Iozzi, and A. Wienhard. Higher Teichmüller spaces : from  $SL(2, \mathbb{R})$  to other lie groups. In A. Papadopoulos, editor, *Handbook of Teichmüller theory IV*, volume 19 of *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*, pages 539–618. EMS, Strasbourg, France, ems edition, 2014.
- [BK16] P. Belkale and S. Kumar. The multiplicative eigenvalue problem and deformed quantum cohomology. *Adv. Math.*, 288, 2016.
- [Bog91] A. Boggess. *CR manifolds and the tangential Cauchy Riemann complex*. Boca Raton, FL : CRC Press, 1991.
- [Bow98] B. Bowditch. Markoff triples and quasifuchsian groups. *Proc. London. Math. Soc.*, 1998.
- [Bre90] U. Brehm. The shape invariant of triangles and trigonometry in two-point homogeneous spaces. *Geom. Dedicata*, 33(1) :59–76, 1990.
- [BS76] D. Burns and S. Shnider. Spherical hypersurfaces in complex manifolds. *Invent. math.*, 33 :223–246, 10 1976.
- [Can] A. Cannas da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Lecture Notes in Mathematics. Springer.
- [CDW] M. Culler, N. M. Dunfield, and J. R. Weeks. SnapPy, a computer program for studying the topology of 3-manifolds. Available at <http://snappy.computop.org>.
- [CG74] S. Chen and L. Greenberg. Hyperbolic spaces. In *Contribution to Analysis*, pages 49–87. Academic Press, New York, 1974.
- [CH18] V. Colin and K. Honda. Foliations, contact structures and their interactions in dimension three. *arXiv :1811.09148*, 2018.

- [CLL17] A. Cano, B. Liu, and M. López. The limit set for discrete complex hyperbolic groups. *Indiana Univ. Math. J.*, 66(3) :927–948, 2017.
- [CLT07] D. Cooper, D. D. Long, and M. B. Thistlethwaite. Flexing closed hyperbolic manifolds. *Geom. Topol.*, 11 :2413–2440, 2007.
- [CNS13] A. Cano, J. P. Navarrete, and J. Seade. *Complex Kleinian groups.*, volume 303. Berlin : Springer, 2013.
- [Cor92] K. Corlette. Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry. *Annals of Maths*, 135 :165–182, 1992.
- [CP17] C. De Concini and C. Procesi. *The invariant theory of Matrices.* University Lectures Series. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2017.
- [CPS16] A. Cano, J. R. Parker, and J. S. Action of  $\mathbb{R}$ -Fuchsian groups on  $\mathbb{C}P^2$ . *Asian J. Math.*, 20(3) :449–473, 2016.
- [Cur] Data for snappy manifolds. Available at <http://ptolemy.unhyperbolic.org/html/summary.html>.
- [DD16] M. M. Deza and E. Deza. *Encyclopedia of distances. 4th edition.* Berlin : Springer, 4th edition edition, 2016.
- [Der06] M. Deraux. Deforming the  $\mathbb{R}$ -fuchsian  $(4, 4, 4)$ -triangle group into a lattice. *Topology*, 45 :989–1020, 2006.
- [Der15] M. Deraux. On spherical CR uniformization of 3-manifolds. *Exp. Math.*, 24 :355–370, 2015.
- [Der20] M. Deraux. A new nonarithmetic lattice in  $PU(3, 1)$ . *Algebr. Geom. Topol.*, 20(2) :925–963, 2020.
- [DF15] M. Deraux and E. Falbel. Complex hyperbolic geometry of the figure eight knot. *Geom. Topol.*, 19 :237–293, 2015.
- [DM93] P. Deligne and G.D. Mostow. *Commensurabilities among Lattices in  $PU(1, n)$ .* Ann. of Math. Studies. Princeton University Press, Paris, 1993.
- [DPP11] M. Deraux, J. Parker, and J. Paupert. Census of the complex hyperbolic sporadic triangle groups. *Exper. Math.*, 10 :467–486, 2011.
- [DPP16] M. Deraux, J. Parker, and J. Paupert. New non-arithmetic complex hyperbolic lattices. *Invent. Math.*, 203 :681–771, 2016.
- [Dub09] L. Dubois. Projective metrics and contraction principles for complex cones. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 79(3) :719–737, 2009.
- [Fal08] E. Falbel. A spherical CR structure on the complement of the figure eight knot with discrete holonomy. *Journal Diff. Geom.*, 79(1) :69–110, 2008.
- [FG94] E. Falbel and A. Gusevskii. Spherical CR manifolds of dimension 3. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, 25(1) :31–56, 1994.

- [FG06] V. Fock and A.B. Goncharov. Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory. *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.*, 103 :1–211, 2006.
- [FG17] E. Falbel and A. Guilloux. Dimension of character varieties for 3-manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 145 :2727–2737, 2017.
- [FGK<sup>+</sup>16] E. Falbel, A. Guilloux, P.-V. Koseleff, F. Rouillier, and M. Thistlethwaite. Character varieties for  $SL(3, \mathbb{C})$  : the figure eight knot. *Exp. Math.*, 25(2), 2016.
- [FGW20] E. Falbel, A. Guilloux, and P. Will. Hilbert geometry without convexity. *J. Geom. Anal.*, 30(3) :2865–2896, 2020.
- [FK97] R. Fricke and F. Klein. *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. Band I : Die gruppentheoretischen Grundlagen.* Teubner, Leipzig, 1897.
- [FK12] R. Fricke and F. Klein. *Vorlesungen über die Theorie der Automorphen Funktionen. Band II : Die funktionentheoretischen Ausführungen und die Anwendungen.* Teubner, Leipzig, 1912.
- [FK00] E. Falbel and P.V. Koseleff. Flexibility of ideal triangle groups in complex hyperbolic geometry. *Topology*, 39 :1209–1223, 2000.
- [FK02] E. Falbel and P.V. Koseleff. A circle of modular groups in  $PU(2,1)$ . *Math. Res. Let.*, 9 :379–391, 2002.
- [FKR15] E. Falbel, P.V. Koseleff, and F. Rouillier. Representations of fundamental groups of 3-manifolds into  $PGL(3, \mathbb{C})$  : exact computations in low complexity. *Geometriae Dedicata*, 177 :229–255, 2015.
- [Fog02] N. Pytheas Fogg. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics.* Springer, Berlin Heidelberg, 2002.
- [FP03] E. Falbel and J. Parker. The moduli space of the modular group. *Inv. Math.*, 152, 2003.
- [FP06] E. Falbel and J. Parker. The geometry of the Eisenstein-Picard modular group. *Duke Math. J.*, 131(2) :249–289, 2006.
- [FW09] E. Falbel and R. Wentworth. On products of isometries of hyperbolic space. *Topo. Appl.*, 156(13) :2257–2263, 2009.
- [FZ99] E. Falbel and V. Zocca. A Poincaré polyhedron theorem for complex hyperbolic geometry. *J. reine angew. Math.*, 516 :133–158, 1999.
- [Gay08] M. Gaye. Sous-groupes discrets de  $PU(2,1)$  engendrés par  $n$  réflexions complexes et Déformations. *Geom. Ded.*, 137 :27–61, 2008.
- [Gen10] J. Genzmer. *Sur les triangulations des structures CR-sphériques.* Thèse de l’université Paris 6, Paris, 2010.

- [GGZ15] S. Garoufalidis, M. Goerner, and C. K. Zickert. Gluing equations for  $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ -representations of 3-manifolds. *Algebr. Geom. Topol.*, 15(1) :565–622, 2015.
- [Gil95] J. Gilman. Two-generator discrete subgroups of  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . *Mem. of AMS*, 117(561), 1995.
- [GKL01] W. Goldman, M. Kapovich, and B. Leeb. Complex hyperbolic manifolds homotopy equivalent to a Riemann surface. *Comm. Anal. Math.*, 9 :61–95, 2001.
- [GKM00] D. Gallo, M. Kapovich, and A. Marden. The Monodromy Groups of Schwarzian Equations on Closed Riemann Surfaces. *Annals of Math.*, 151(2) :625–704, 2000.
- [Gol83] W. M. Goldman. Conformally flat manifolds with nilpotent holonomy and the uniformization problem for 3-manifolds. *Trans. Am. Math. Soc.*, 278 :573–583, 1983.
- [Gol99] W. Goldman. *Complex Hyperbolic Geometry*. Oxford University Press, Oxford, 1999.
- [Gol09] W. Goldman. Trace coordinates on Fricke spaces of some simple hyperbolic surfaces. In *Handbook of Teichmüller theory vol. II*, volume 13 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.* Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.
- [GP92] W. Goldman and J. Parker. Complex hyperbolic ideal triangle groups. *Journal für die reine und angewandte Math.*, 425 :71–86, 1992.
- [GP00] N. Gusevskii and J.R. Parker. Representations of free Fuchsian groups in complex hyperbolic space. *Topology*, 39 :33–60, 2000.
- [GP03] N. Gusevskii and J.R. Parker. Complex Hyperbolic Quasi-Fuchsian groups and Toledo’s invariant. *Geom. Ded.*, 97 :151–185, 2003.
- [GPS88] M. Gromov and I. Piatetski-Shapiro. Nonarithmetic groups in Lobatchevsky spaces. *Publ. I.H.E.S.*, 66 :93–103, 1988.
- [GS92] M. Gromov and R. Schoen. Harmonic maps into singular spaces and  $p$ -adic superrigidity for lattices in groups of rank one. *Publ. I.H.E.S.*, 76 :165–246, 1992.
- [GTZ15] S. Garoufalidis, D. P. Thurston, and C. K. Zickert. The complex volume of  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ -representations of 3-manifolds. *Duke Math. J.*, 164(11) :2099–2160, 2015.
- [Gui04] O. Guichard. Groupes plongés quasi isométriquement dans un groupe de Lie. *Math. Ann.*, 330 :331–351, 2004.
- [Gui15] A. Guilloux. *Représentations et structures géométriques*. Mémoire d’habilitation à diriger des recherches. Université Pierre et Marie Curie, 2015.
- [GW18] A. Guilloux and P. Will. On  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ -representations of the whitehead link group. *Geom. Ded.*, 2018.
- [Hel01] S. Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. Reprint with corrections of the 1978 original.*, volume 34. Providence, RI : American

- Mathematical Society (AMS), reprint with corrections of the 1978 original edition, 2001.
- [Heu15] M. Heusener. Some recent results about the  $SL(n, \mathbb{C})$ -representation spaces of knot groups. *Séminaire de théorie spectrale et géométrie*, 32 :137–161, 2014–2015.
- [HMnP16] M. Heusener, V. Muñoz, and J. Porti. The  $SL(3, \mathbb{C})$ -character variety of the figure eight knot. *Illinois J. Math.*, 60(1) :55–98, 2016.
- [HP96] S. Hersonsky and F. Paulin. On the volume of complex hyperbolic manifolds. *Duke Math. J.*, 84(3) :719–737, 1996.
- [HP11] M. Heusener and J. Porti. Infinitesimal projective rigidity under Dehn filling. *Geom. Topol.*, 15(4) :2017–2071, 2011.
- [Hwa02] S. Hwang. Möbius structures on 3-manifolds, PhD Thesis, University of Utah. available at <https://www.math.ucdavis.edu/~kapovich/eprints.html>, 2002.
- [Kap00] M. Kapovich. *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups*. Progress in Mathematics. Birkhäuser, Boston, 2000.
- [KM08] V. Koziarz and J. Maubon. Harmonic maps and representations of non-uniform lattices of  $PU(m, 1)$ . *Ann. Inst. Fourier*, 58(2) :507–558, 2008.
- [KM17] V. Koziarz and J. Maubon. Maximal representations of uniform complex hyperbolic lattices. *Ann. Math.*, 185, 2017.
- [Kos68] J.-L. Koszul. Déformations de connexions localement plates. *Ann. Inst. Fourier*, 18(1) :103–114, 1968.
- [Kos04] V. P. Kostov. The Deligne-Simpson problem – a survey. *J. Algebra*, 281 :83–108, 2004.
- [KR87] A. Koranyi and H.M. Reimann. The complex cross-ratio on the Heisenberg group. *L’Enseign. Math.*, 33 :291–300, 1987.
- [KS94] L. Keen and C. Series. The Riley slice of Schottky space. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 69(1) :72–90, 1994.
- [KT91] Y. Kamishima and T. Tsuboi. CR-structures on Seifert manifolds. *Invent. math.*, 104 :149–163, 1991.
- [Kul78] R. S. Kulkarni. Groups with domains of discontinuity. *Math. Ann.*, 237(3) :253–272, 1978.
- [Law07] S. Lawton. Generators, relations and symmetries in pairs of  $3 \times 3$  unimodular matrices. *J. Algebra*, 313 :782–801, 2007.
- [Led12] F. Ledrappier. Analyticity of the entropy for some random walks. *Groups Geom. Dyn.*, 6(2) :317–333, 2012.
- [LM85] A. Lubotzky and A. R. Magid. Varieties of representations of finitely generated groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 58(336) :xi+117, 1985.

- [Mar84] G. Margulis. Arithmeticity of the irreducible lattices in the semisimple groups of rank greater than 1. *Invent. Math.*, 76 :93–120, 1984.
- [Mil69] M.H. Millington. Subgroups of the classical modular group. *J. London Math. Soc.*, 1 :351–357, 1969.
- [Mos80] G. D. Mostow. A remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space. *Pac. J. Math.*, 86 :171–276, 1980.
- [MP06] B. Martelli and C. Petronio. Dehn filling of the 'magic' 3-manifold. *Comm. Anal. Geom.*, 14(5) :967–1024, 2006.
- [MP16] V. Munoz and J. Porti. Geometry of the  $SL(3, \mathbb{C})$ -character variety of torus knots. *Algebr. Geom. Topol.*, 16(3) :397–426, 2016.
- [MR03] C. Maclachlan and A. Reid. *The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds*. Number 219 in Graduate Texts in Math. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [MW98] E. Meinrenken and C. Woodward. Hamiltonian loop group actions and Verlinde factorization,. *Jour. Differential Geom.*, 50(3) :417–469, 1998.
- [MW12] J. Marché and P. Will. Configurations of flags and representations of surface groups in complex hyperbolic geometry. *Geom. Ded.*, 156(1) :49–70, 2012.
- [Par] J. Parker. Notes on complex hyperbolic geometry. Available at <http://maths.dur.ac.uk/~dma0jrp/img/NCHG.pdf>.
- [Par06] J. Parker. Cone metrics on the sphere and Livné's lattices. *Acta Mathematica*, 196(1), 2006.
- [Par08] J. Parker. Unfaithful complex hyperbolic triangle groups I : Involutions. *Pacific J. Math.*, 238 :145–169, 2008.
- [Par10] J. Parker. Traces in complex hyperbolic geometry. In *Geometry, Topology and Dynamics of Character Varieties*, volume 23 of *Lecture Notes Series, National University of Singapore*, pages 191–245. World Scientific, 2010.
- [Pau07] J. Paupert. Elliptic triangle groups in  $PU(2,1)$ , Lagrangian triples and momentum maps. *Topology*, 46(2) :155–183, 2007.
- [PP09] J. Parker and J. Paupert. Unfaithful complex hyperbolic triangle groups II : Higher order reflections. *Pacific J. Math.*, 239 :357–389, 2009.
- [PP10] J. Parker and I. Platis. Complex hyperbolic quasi-fuchsian groups. In *Geometry of Riemann Surfaces*, volume 368 of *London Mathematical Society Lecture Notes*, pages 309–355. 2010.
- [Pra05] A. Pratussevitich. Traces in complex hyperbolic triangle groups. *Geometriae Dedicata*, 111 :159–185, 2005.
- [Pro07] C. Procesi. *Lie groups. An approach through invariants and representations*. Springer, New-York, 2007.

- [PW15] J. Parker and P. Will. Complex hyperbolic free groups with many parabolic elements. In *Geometry, Groups and Dynamics*, volume 639 of *Contemporary Mathematics*, pages 327–348. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [PW17a] J. Parker and P. Will. A complex hyperbolic Riley slice. *Geom. Topol.*, 21(6) :3391–3451, 2017.
- [PW17b] J. Paupert and P. Will. Involution and commutator length for complex hyperbolic isometries. *Michigan Math. J.*, 66 :699–744, 2017.
- [PW17c] J. Paupert and P. Will. Real reflections, commutators and cross-ratios in complex hyperbolic space. *Groups Geom. Dyn.*, 11 :311–352, 2017.
- [PWX16] J. Parker, J. Wang, and B. Xie. Complex hyperbolic  $(3, 3, n)$  triangle groups. *Pacific J. Math.*, 280 :433–453, 2016.
- [Rat19] J. G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149. Springer, 3rd expanded edition, 2019.
- [Res13] N. Ressayre. On the quantum Horn problem. *arXiv :1310.7331*, 2013.
- [San95] H. Sandler. Traces on  $SU(2, 1)$  and complex hyperbolic ideal triangle groups. *Algebras groups and geometries*, 12 :139–156, 1995.
- [Sch01a] R. E. Schwartz. Degenerating the complex hyperbolic ideal triangle groups. *Acta Math.*, 186 :105–154, 2001.
- [Sch01b] R. E. Schwartz. Ideal triangle groups, dented tori, and numerical analysis. *Ann. of Math. (2)*, 153 :533–598, 2001.
- [Sch02] R. E. Schwartz. Complex hyperbolic triangle groups. *Proc. Int. Math. Cong.*, 1 :339–350, 2002.
- [Sch03] R. E. Schwartz. Real hyperbolic on the outside, complex hyperbolic on the inside. *Inv. Math.*, 151(2) :221–295, 2003.
- [Sch05] R. E. Schwartz. A better proof of the Goldman-Parker conjecture. *Geometry and Topology*, 9, 2005.
- [Sch07a] F. Schaffhauser. Representations of the fundamental group of an  $l$ -punctured sphere generated by products of Lagrangian involutions. *Canad. J. Math.*, 59 :845–879, 2007.
- [Sch07b] R. E. Schwartz. *Spherical CR Geometry and Dehn Surgery*, volume 165 of *Ann. of Math. Studies*. Princeton University Press, Princeton, 2007.
- [Sch08] F. Schaffhauser. Decomposable representations and Lagrangian submanifolds of moduli spaces associated to surface groups. *Math. Annal.*, 342 :405–447, 2008.
- [Ser] C. Series. All about the Riley Slice. Available at <http://home-pages.warwick.ac.uk/masbb/PresLecture.pdf>,

- [Sou76] J.-M. Souriau. Construction explicite de l'indice de Maslov - Applications. Group theor. Meth. Phys., 4th int. Colloq., Nijmegen 1975, Lect. Notes Phys. 50, 117-148 (1976)., 1976.
- [Ter86] Y. Teranishi. The ring of invariants of matrices. *Nagoya Math. J.*, 104 :149–161, 1986.
- [Tha] M. Thaddeus. The universal implosion and the multiplicative horn problem. <http://www.math.columbia.edu/thaddeus/unitary.pdf>.
- [Thu] W. Thurston. *The Geometry and Topology of Three-Manifold*. <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>.
- [Tol89] D. Toledo. Representations of surface groups in complex hyperbolic space. *J. Differ. Geom.*, 29 :125–133, 1989.
- [Vin13] A. Vince. Möbius iterated function systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 365(1) :491–509, 2013.
- [Vog86] H. Vogt. Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre. *Ann. Sci. E. N. S. 3<sup>ème</sup> série*, 1886.
- [Web93] M. Weber. *Fundamentaltbereiche komplex hyperbolischer Flächen.*, volume 254. Bonn : Univ. Bonn, 1993.
- [Wei64] A. Weil. Remarks on the cohomology of groups. *Ann. of Math. (2)*, 80 :149–157, 1964.
- [Wie78] N. Wielenberg. The structure of certain subgroups of the Picard group. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 84(3) :427–436, 1978.
- [Wil05] P. Will. Lagrangian decomposability of some two generator subgroups of  $PU(2, 1)$ . *C.R. Acad. Sci. Paris*, 340 :353–358, 2005.
- [Wil06] P. Will. *Groupes libres, groupes triangulaires et tore épointé dans  $PU(2,1)$* . Thèse de l'université Paris VI, 2006.
- [Wil07] P. Will. The punctured torus and Lagrangian triangle groups in  $PU(2,1)$ . *J. reine angew. Math.*, 602 :95–121, 2007.
- [Wil08] P. Will. Groupes triangulaires lagrangiens en géométrie hyperbolique complexe. *Actes du Séminaire Théorie Spectrale et Géométrie*, 25 :189–209, 2008.
- [Wil09] P. Will. Traces, Cross-ratios and 2-Generator Subgroups of  $PU(2,1)$ . *Canad. J. Math.*, 61(6) :189–209, 2009.
- [Wil12] P. Will. Bending Fuchsian representations of fundamental groups of cusped surfaces  $PU(2,1)$ . *J. Differential. Geom.*, 90(3) :473–520, 2012.
- [Wil16] P. Will. Two-generator groups acting on the complex hyperbolic plane. In Athanase Papadopoulos, editor, *Handbook of Teichmüller Theory*, volume 6 of IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, chapter 9, pages 275–334. Ems edition, 2016.

- [Wil17] P. Will. On spherical cr structures on 3-manifolds. In Kapovich Michael Weinkove Ben Besson Gérard, Hamenstädt Ursula, editor, *Oberwolfach report*, volume 14, pages 1925–1929. Ems edition, 2017.
- [Wol11] J. Wolf. *Spaces of constant curvature. 6th ed.* Providence, RI : AMS Chelsea Publishing, 6th ed. edition, 2011.
- [Zim15] A. Zimmer. Proper quasi-homogeneous domains in flag manifolds and geometric structures. *arXiv preprint arXiv :1507.06921*, 2015.
- [Zim17] A. Zimmer. Characterizing domains by the limit set of their automorphism group. *Adv. Math.*, 308 :438–482, 2017.