



**HAL**  
open science

# Modèles mathématiques et numériques avancés pour la simulation du polymère dans les réservoirs pétroliers

Guissel Lagnol Dongmo Nguepi

► **To cite this version:**

Guissel Lagnol Dongmo Nguepi. Modèles mathématiques et numériques avancés pour la simulation du polymère dans les réservoirs pétroliers. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2021. Français. NNT : 2021UPASG077 . tel-03518783v2

**HAL Id: tel-03518783**

**<https://hal.science/tel-03518783v2>**

Submitted on 15 Feb 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modèles mathématiques et numériques avancés pour la simulation du polymère dans les réservoirs pétroliers

*Advanced mathematical models and numerical methods  
for polymer simulation in oil reservoirs*

## Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 580,  
sciences et technologies de l'information et de la communication (STIC)  
Spécialité de doctorat : Mathématiques et informatique  
Graduate School : Informatique et sciences du numérique.  
Référent : CentraleSupélec

Thèse préparée dans l'unité de recherche **IFPEN,  
Sciences et Technologies du Numérique, 92852, Rueil-Malmaison, France,**  
sous la direction de **Quang Huy TRAN**, ingénieur de recherche HDR,  
la co-direction de **Christophe BERTHON**, professeur des universités,  
le co-encadrement de **Benjamin BRACONNIER**, ingénieur de recherche  
et le co-encadrement de **Christophe PREUX**, ingénieur de recherche, HDR.

Thèse soutenue à Rueil-Malmaison, le 13 Décembre 2021, par

**Guissel Lagnol DONGMO NGUEPI**

### Composition du Jury

|  |                           |
|--|---------------------------|
| <b>Pauline LAFITTE</b><br>Professeure des universités, CentraleSupélec                 | Présidente                |
| <b>Claire HILLAIRET-CHAINAIS</b><br>Professeure des universités, Université de Lille 1 | Rapporteur & Examinatrice |
| <b>Paul VIGNEAUX</b><br>Maître de conférences, HDR, ENS Lyon                           | Rapporteur & Examinateur  |
| <b>Bijan MOHAMMADI</b><br>Professeur des universités, Université de Montpellier        | Examinateur               |
| <b>Rodolphe TURPAULT</b><br>Professeur, ENSEIRB-Matméca                                | Examinateur               |
| <b>Quang Huy TRAN</b><br>Ingénieur de recherche, HDR, IFP Energies nouvelles           | Directeur de thèse        |



# Remerciements

Ce manuscrit marque la fin de trois années de thèse et donc marque le début d'une nouvelle aventure. Ces six semestres passés au sein du département de Mathématiques Appliquées de IFP Énergies nouvelles constituent une expérience très enrichissante, aussi bien sur le plan scientifique que sur le plan humain. Les premières lignes de ce manuscrit sont destinées à remercier les personnes qui ont contribué à faire de ce séjour une aventure exceptionnelle.

Mes premiers remerciements s'adressent à mes encadrants qui en plus de leur appui scientifique, ont tous fait preuve à mon égard d'une bienveillance. Je souhaite remercier mon directeur de thèse Quang Huy TRAN dont les nombreuses connaissances (mathématiques et littéraires) ont été très indispensables pour mener à bout ces travaux. J'aurais dû tirer davantage de connaissances auprès du "maître" et j'ose croire que l'apparition des cheveux blancs n'est aucunement dû à mes maladresses.

Pour rester dans le contexte du blanchiment des cheveux, je remercie sincèrement Benjamin BRACONNIER pour sa grande disponibilité. Merci au "gentil grand-frère" pour tous ses apports informatiques, pour ses précieux conseils sur la vie quotidienne.

Mes remerciements à Christophe PREUX, intraitables dans les aspects physiques de cette thèse. En plus des connaissances physiques, je dis merci à "l'artiste" pour les conseils en matière de communication.

Je tiens aussi à remercier Christophe BERTHON, co-directeur de cette thèse pour sa disponibilité et les déplacements mensuels effectués. Nos différents échanges m'ont permis de me faire une idée de l'utilisation de ces travaux dans des contextes autres que celui de cette thèse. Merci le "prof".

J'adresse ensuite mes remerciements aux membres du jury qui ont bien voulu apprécier ces travaux malgré le contexte sanitaire. Merci à Pauline LAFITTE d'avoir accepté de présider ce jury. Merci aux rapporteurs Claire HILLAIRET-CHAINAIS et Paul VIGNEAUX et aux examinateurs Bijan MOHAMMADI et Rodolphe TURPAULT.

Durant cette thèse, j'ai eu l'occasion de faire des connaissances qui ont d'une manière ou d'une autre contribué au bon déroulement des travaux. Je souhaite remercier Zakia BENJELLOUN-TOUIMI, chef du département de Mathématiques Appliquées qui m'a accueillie pendant cette thèse.

Je remercie tous les collègues des départements mathématiques et informatique que j'ai eu à côtoyer au bâtiment Yuccas. Je me contenterais de citer ceux avec qui j'ai eu à partager un bureau : Long, Maxence, Rime, Mouhamadou, Benali et Olivier. J'ai connu des bons moments avec vous et bon nombre de vos blagues continuent de me faire rigoler.

Mention spéciale à Sylvie P. : j'entends une voix tous les jours à 11h45 qui m'invite à aller manger. Je suis reconnaissant envers Carole G. et Sylvie H. qui ont été d'une grande aide dans tout ce qui est administratif.

Je remercie tout particulièrement le clan des doctorants qui chaque année accueille de nouveaux membres. Je commencerais par celle qui balisé le terrain : Karine, une nantaise avide de la course à pieds – promis je m'y mets "to night"-. Dans la continuité de ceux qui m'ont précédé, j'ai une pensée pour Nicolas le breton de Nantes, Bastien, Julien et Zakariae. Merci aux grandes (de cœur) maffo : Sabrina, Joëlle et Thoï. Merci aux captivants Karim, Alexis, Abdoulaye, Francesco et Alexandre.

Bien évidemment, je remercie ma famille élargie pilier de l'éducation : les fils et filles de la grande famille TIOGANG Mkemlo'oh, ceux de la famille KEANGHO Mo'oh Ndem et ceux de la famille NGUEPI DONGMOH.

# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1      | Rôle du polymère dans la récupération assistée d'hydrocarbures . . . . . | 2         |
| 1.1.1    | Procédés primaires et secondaires . . . . .                              | 2         |
| 1.1.2    | Procédés tertiaires . . . . .  | 3         |
| 1.2      | Simulation des écoulements diphasiques avec polymère injecté . . . . .   | 3         |
| 1.2.1    | Effets physiques du polymère . . . . .                                   | 5         |
| 1.2.2    | Difficultés mathématiques des modèles avec polymère . . . . .            | 6         |
| 1.2.3    | Objectifs de la thèse . . . . .  | 11        |
| 1.3      | Démarche, contributions et plan du mémoire . . . . .                     | 12        |
| 1.3.1    | Modèle simplifié et schéma classique sans IPV . . . . .                  | 12        |
| 1.3.2    | À la recherche d'une meilleure capture des fronts . . . . .              | 12        |
| 1.3.3    | Analyse d'hyperbolicité pour les lois d'IPV non triviales . . . . .      | 14        |
| 1.3.4    | Schéma de relaxation . . . . .   | 16        |
| 1.3.5    | Paramétrage des lois d'IPV et simulations . . . . .                      | 17        |
| <b>I</b> | <b>Écoulements sans volume de pore inaccessible</b>                      | <b>19</b> |
| <b>2</b> | <b>Analyse du modèle diphasique de référence</b>                         | <b>21</b> |
| 2.1      | Modèle complet 3-D . . . . .   | 22        |
| 2.1.1    | Lois fondamentales de conservation . . . . .                             | 22        |
| 2.1.2    | Lois empiriques du milieu poreux . . . . .                               | 23        |
| 2.1.3    | Lois empiriques du polymère . . . . .                                    | 26        |
| 2.2      | Modèle simplifié 1-D sans IPV . . . . .                                  | 32        |
| 2.2.1    | Construction du modèle . . . . .   | 32        |
| 2.2.2    | Hyperbolicité faible . . . . .   | 35        |
| 2.2.3    | Critères de sélection . . . . .  | 39        |
| 2.2.4    | Solution du problème de Riemann . . . . .                                | 40        |
| <b>3</b> | <b>Étude d'un schéma classique</b>                                       | <b>47</b> |
| 3.1      | Schéma de Godunov . . . . .  | 48        |
| 3.1.1    | Forme générale d'un schéma . . . . .                                     | 48        |
| 3.1.2    | Forme particulière du flux de Godunov . . . . .                          | 50        |
| 3.1.3    | Condition de stabilité . . . . .   | 52        |
| 3.2      | Simulations numériques et ordres de convergence . . . . .                | 52        |
| 3.2.1    | Simulation des problèmes de Riemann . . . . .                            | 54        |
| 3.2.2    | Ordres de convergence . . . . .  | 61        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| <b>4</b>  | <b>Vers des schémas mieux adaptés aux fronts de contact</b>     | <b>63</b>  |
| 4.1       | Montée en ordre d'approximation . . . . .                       | 64         |
| 4.1.1     | Quasi-second ordre en espace . . . . .                          | 64         |
| 4.1.2     | Second ordre en temps . . . . .                                 | 66         |
| 4.1.3     | Résultats numériques . . . . .                                  | 66         |
| 4.2       | Schéma de Glimm . . . . .                                       | 68         |
| 4.2.1     | Principe général . . . . .                                      | 69         |
| 4.2.2     | Résultats numériques . . . . .                                  | 70         |
| 4.3       | Schéma de Godunov corrigé . . . . .                             | 71         |
| 4.3.1     | Estimation de l'erreur sur la vitesse dans un contact . . . . . | 71         |
| 4.3.2     | Correction compatible avec un contact pur . . . . .             | 73         |
| 4.3.3     | Correction compatible avec plusieurs ondes . . . . .            | 77         |
| <b>II</b> | <b>Écoulements avec volume de pore inaccessible</b>             | <b>83</b>  |
| <b>5</b>  | <b>Analyse du modèle diphasique pour plusieurs lois d'IPV</b>   | <b>85</b>  |
| 5.1       | Modèle simplifié 1-D avec IPV . . . . .                         | 86         |
| 5.1.1     | Obtention du modèle . . . . .                                   | 86         |
| 5.1.2     | Conditions suffisantes d'hyperbolicité faible . . . . .         | 88         |
| 5.2       | Loi d'IPV constant . . . . .                                    | 93         |
| 5.2.1     | Origine physique . . . . .                                      | 93         |
| 5.2.2     | Régions d'hyperbolicité et d'ellipticité . . . . .              | 94         |
| 5.3       | Loi de percolation . . . . .                                    | 98         |
| 5.3.1     | Origine physique . . . . .                                      | 98         |
| 5.3.2     | Éléments propres . . . . .                                      | 99         |
| 5.3.3     | Équivalence avec le modèle sans IPV . . . . .                   | 101        |
| 5.4       | Lois de diffusion uniforme et non uniforme . . . . .            | 102        |
| 5.4.1     | Origine physique . . . . .                                      | 103        |
| 5.4.2     | Régions d'hyperbolicité et d'ellipticité . . . . .              | 105        |
| <b>6</b>  | <b>Étude du schéma de relaxation</b>                            | <b>107</b> |
| 6.1       | Construction en coordonnées lagrangiennes . . . . .             | 108        |
| 6.1.1     | Modèle relaxé et hyperbolicité . . . . .                        | 108        |
| 6.1.2     | Limite dissipative . . . . .                                    | 109        |
| 6.2       | Représentation en coordonnées eulériennes . . . . .             | 111        |
| 6.2.1     | Modèle relaxé et hyperbolicité . . . . .                        | 111        |
| 6.2.2     | Limite dissipative . . . . .                                    | 112        |
| 6.2.3     | Problème de Riemann . . . . .                                   | 116        |
| 6.3       | Modification pour le traitement du vide . . . . .               | 119        |
| 6.3.1     | Modèle relaxé à coefficients variables . . . . .                | 119        |
| 6.3.2     | Limite dissipative . . . . .                                    | 120        |
| 6.3.3     | Problème de Riemann . . . . .                                   | 122        |
| 6.4       | Implémentation et validation numérique . . . . .                | 126        |
| 6.4.1     | Mise à jour pratique . . . . .                                  | 126        |
| 6.4.2     | Convergence sur des problèmes de Riemann . . . . .              | 127        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>7</b> | <b>Paramétrage des lois d'IPV et simulations numériques</b>                    | <b>133</b> |
| 7.1      | Paramétrage des loi d'IPV en diphasique miscible . . . . .                     | 134        |
| 7.1.1    | Description des techniques expérimentales de mesure d'IPV . . . . .            | 134        |
| 7.1.2    | Modèle mathématique pour deux phases miscibles . . . . .                       | 137        |
| 7.1.3    | Lois d'IPV pour deux phases miscibles . . . . .                                | 138        |
| 7.1.4    | Simulation numérique des données expérimentales . . . . .                      | 140        |
| 7.2      | Paramétrage et simulations en diphasique pour $s_b = 0.2$ . . . . .            | 144        |
| 7.2.1    | Paramétrage des lois . . . . .   | 144        |
| 7.2.2    | Simulation diphasique des données expérimentales . . . . .                     | 149        |
| 7.2.3    | Simulation d'une extraction d'huile . . . . .                                  | 149        |
| 7.3      | Paramétrage et simulations en diphasique pour $s_b = 0.1$ . . . . .            | 152        |
| 7.3.1    | Paramétrage des lois . . . . .   | 152        |
| 7.3.2    | Simulation d'une extraction d'huile . . . . .                                  | 153        |
| 7.4      | Synthèse sur le paramétrage des lois et les simulations . . . . .              | 158        |
| <b>8</b> | <b>Conclusion</b>  | <b>161</b> |
| 8.1      | Bilan des travaux . . . . .  | 161        |
| 8.1.1    | Amélioration de la capture des fronts pour le modèle sans IPV . . . . .        | 161        |
| 8.1.2    | Zones d'ellipticité et conditions suffisantes d'hyperbolicité faible . . . . . | 162        |
| 8.1.3    | Mise au point d'un schéma de relaxation adapté à toute loi d'IPV . . . . .     | 162        |
| 8.1.4    | Paramétrage des lois d'IPV . . . . .   | 163        |
| 8.2      | Extensions possibles . . . . .   | 163        |
| 8.2.1    | À la recherche de l'ultime loi d'IPV . . . . .                                 | 163        |
| 8.2.2    | Prise en compte de l'adsorption . . . . .                                      | 164        |
| 8.2.3    | Passage en multi-dimensionnel . . . . .  | 165        |
| <b>A</b> | <b>Éléments complémentaires des simulations</b>                                | <b>167</b> |
| A.1      | Modèle d'écoulement monophasique . . . . .                                     | 167        |
| A.1.1    | Lois fondamentales de conservation . . . . .                                   | 168        |
| A.1.2    | Simulations numériques . . . . .   | 170        |
| A.2      | Apparition de singularité pour la loi uniforme . . . . .                       | 172        |
| A.3      | Paramétrage des lois d'IPV pour $s_b = 0.1$ . . . . .                          | 173        |
|          | <b>Bibliographie</b>   | <b>175</b> |



# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1.1 Rôle du polymère dans la récupération assistée d’hydrocarbures</b> | <b>2</b>  |
| 1.1.1 Procédés primaires et secondaires . . . . .                         | 2         |
| 1.1.2 Procédés tertiaires . . . . .                                       | 3         |
| <b>1.2 Simulation des écoulements diphasiques avec polymère injecté</b>   | <b>3</b>  |
| 1.2.1 Effets physiques du polymère . . . . .                              | 5         |
| 1.2.2 Difficultés mathématiques des modèles avec polymère . . . . .       | 6         |
| 1.2.3 Objectifs de la thèse . . . . .                                     | 11        |
| <b>1.3 Démarche, contributions et plan du mémoire</b>                     | <b>12</b> |
| 1.3.1 Modèle simplifié et schéma classique sans IPV . . . . .             | 12        |
| 1.3.2 À la recherche d’une meilleure capture des fronts . . . . .         | 12        |
| 1.3.3 Analyse d’hyperbolicité pour les lois d’IPV non triviales . . . . . | 14        |
| 1.3.4 Schéma de relaxation . . . . .                                      | 16        |
| 1.3.5 Paramétrage des lois d’IPV et simulations . . . . .                 | 17        |

---

*Dans ce chapitre, nous exposons les motivations de la thèse, la démarche méthodologique suivie ainsi que les principales contributions.*

*Le contexte général est d’abord décrit en §1.1, avec un aperçu des méthodes de récupération des hydrocarbures. Après avoir rappelé l’insuffisance des procédés primaires, nous mettons l’accent sur le rôle bénéfique du polymère qui, en tant que constituant essentiel des procédés tertiaires, permet d’éviter les problèmes d’instabilité hydrodynamique engendrés par l’injection de l’eau seule dans les procédés secondaires.*

*Nous passons ensuite en revue, dans §1.2, les trois effets physiques du polymère qui sont à prendre en compte dans une simulation numérique : adsorption, réduction de mobilité et volume de pores inaccessibles (IPV). Les deux premiers font perdre au modèle mathématique la propriété d’hyperbolicité stricte mais préservent l’hyperbolicité faible. Sur des lois d’IPV courantes, nous montrons que le troisième effet peut provoquer la perte de l’hyperbolicité faible et apparaît ainsi comme une ligne de démarcation dans l’échelle des difficultés. Sur la base de ce constat, nous dressons la liste des objectifs de ce travail.*

*Enfin, la dernière section §1.3 explique notre démarche méthodologique et ébauche les avancées obtenues. Les deux premières sous-sections §1.3.1–§1.3.2 concernent le modèle sans IPV, tandis que les trois dernières §1.3.3–§1.3.5 portent sur le modèle avec des lois d’IPV non triviales.*

## 1.1 Rôle du polymère dans la récupération assistée d'hydrocarbures

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la simulation dynamique de réservoir [5], dont le but est de prédire — à une échelle de quelques années en temps et de quelques kilomètres en espace — l'écoulement à travers le sous-sol d'un mélange composé d'hydrocarbures et de produits artificiellement ajoutés (eau, gaz, polymères, surfactants). Un des logiciels de référence en la matière est PumaFlow, développé par IFPEN depuis de longues années.

### 1.1.1 Procédés primaires et secondaires

On divise traditionnellement les techniques pour faire remonter les hydrocarbures en trois familles. La première est la plus naïve : il suffit de creuser au bon endroit jusqu'à ce que le pétrole soudain jaillisse ! Dans cette famille de méthodes, appelée *récupération primaire*, l'extraction repose sur la différence de pressions entre le réservoir et la surface. Cette différence de pressions diminuant rapidement, le taux de récupération s'avère assez faible : il est aux alentours de 15% pour un gisement d'huile (Figure 1.1). Cela n'est évidemment pas très rentable, compte tenu du coût d'un forage.

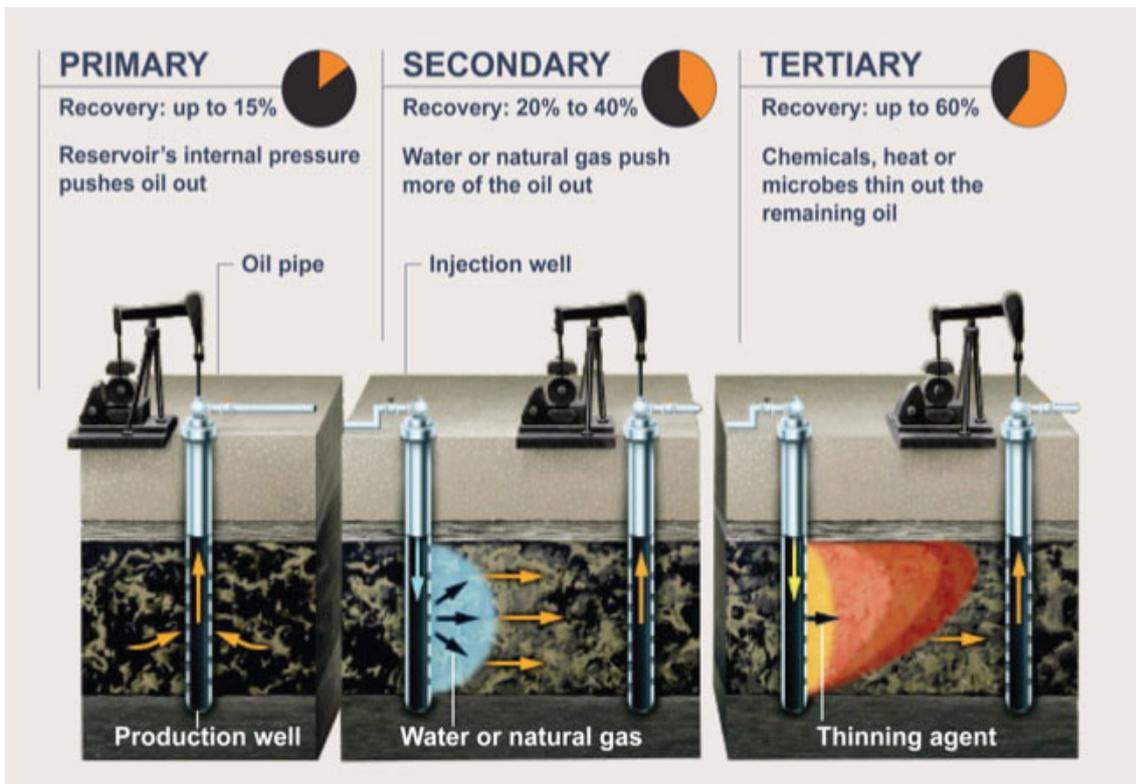


FIGURE 1.1 – Trois familles de procédés de récupération. © AP Environmental

Une idée pour faire sortir le reste des hydrocarbures consiste à injecter un fluide non miscible avec les hydrocarbures en question et surtout peu onéreux, tel que l'eau ou le gaz naturel. Ce faisant, on maintient la pression dans le gisement et draine l'huile vers

les puits de production, qui sont maintenant distincts des puits d'injection. Le taux de récupération de cette famille de méthodes, appelée *récupération secondaire*, est de l'ordre de 20% à 40%, ce qui est économiquement plus viable.

Son défaut majeur réside toutefois dans le fait que l'eau « pousse » très mal l'huile. Moins visqueuse que l'huile, l'eau a en effet tendance à être plus mobile. En voulant aller plus vite que le fluide poussé, le fluide poussant finit par percer le front de propagation, comme l'illustrent les Figures 1.2 (gauche) et 1.3 (a). Les instabilités hydrodynamiques [65, 79] ainsi créées ont la forme de « doigts », ce qui explique la dénomination de *digitations visqueuses* (en anglais : *viscous fingering*). Elles nuisent à la production, dans la mesure où l'eau arrive précocement aux puits de production.

### 1.1.2 Procédés tertiaires

Pour éviter cet écueil, les compagnies pétrolières ont recours à une troisième famille de méthodes plus sophistiquées appelée *récupération tertiaire* ou *récupération assistée* (en anglais : *enhanced oil recovery*, EOR). En plus de l'eau, on injecte des produits chimiques (polymères, surfactants, mousses) qui sont plus visqueux. Quel que soit le produit sélectionné, sa grande viscosité a l'avantage de réduire sa mobilité, d'augmenter la surface de balayage et sinon de stabiliser le front de poussée, du moins de retarder l'échéance [86]. Les Figures 1.2 (droite) et 1.3 (b) dépeignent l'amélioration obtenue. Le taux de récupération attendue se situe entre 30% et 70%, ce qui est très élevé.

S'agissant de polymère, on a le choix entre un polymère hydrosoluble de haut poids moléculaire ou un polymère hydrophobe associatif connu pour ses propriétés épaississantes. Citons quelques polymères synthétiques comme le polyacrylamide partiellement hydrolysé (HPAM), le copolymère de polyacrylamide (PAM) et le N-Vinyl-Pyrrolidone (NVP). Même fabriqué industriellement, le polymère coûte cher en raison des composantes chimiques nécessaires. Aussi, pour rentabiliser davantage le procédé, on n'injecte le polymère que pendant une durée limitée, après quoi on envoie l'eau de chasse pour pousser le polymère. Mais à ce moment-là, le rapport de mobilités entre cette eau et le front arrière du bouchon de polymère est défavorable et l'on se retrouve avec un problème de digitation similaire. Cela met en évidence la nécessité de bien ajuster la taille du bouchon de polymère.

Ajuster la taille et la concentration du bouchon en fonction du produit chimique choisi, estimer son effet sur la production du pétrole, décider sur la faisabilité de la méthode sont des tâches extrêmement ardues. L'expérience de laboratoire ne suffit pas : entre la carotte et le champ réel, le changement d'échelle semble insurmontable. C'est là qu'intervient la simulation numérique.

## 1.2 Simulation des écoulements diphasiques avec polymère injecté

Que ce soit avec ou sans polymère, la simulation de réservoir est un vaste champ d'étude [20, 21]. L'objectif ultime est de prédire la durée pendant laquelle l'huile pourra être recueillie et en quelle quantité. L'enjeu est crucial : toute incertitude dans cette étape de prédiction est susceptible de causer des pertes financières énormes. Il est par conséquent indispensable de disposer de modèles réalistes et de schémas précis. Aussi, avant d'incorporer le polymère dans les simulations numériques, il nous faut d'abord recenser tous les effets physiques du polymère qu'il est souhaitable de prendre en compte.

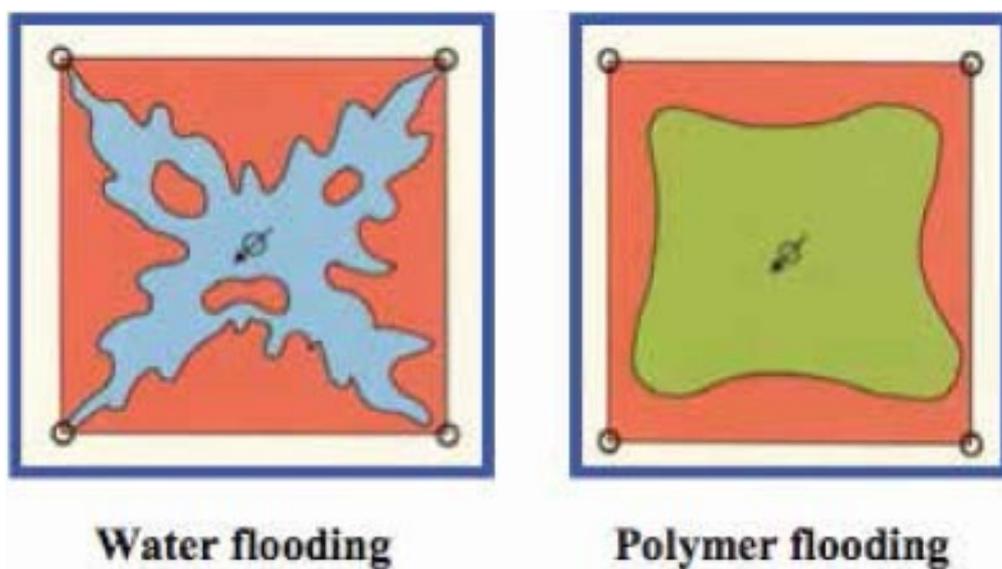


FIGURE 1.2 – Vue de dessus des fronts de poussée, avec digitations (gauche) et sans digitation (droite).

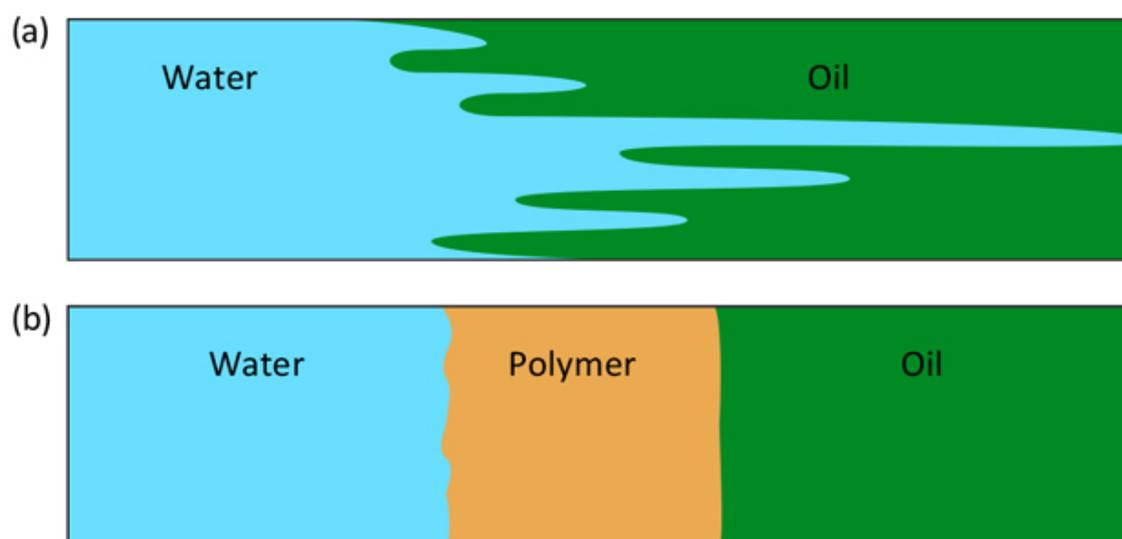


FIGURE 1.3 – Vue de profil des fronts de poussée, avec digitations (haut) et sans digitation (bas).

### 1.2.1 Effets physiques du polymère

Il y a trois effets notoires du polymère à considérer. La description « à la main » ci-dessous vise à fournir en une première intuition. Leur expression mathématique sera donnée en §1.2.2. Pour commencer, rappelons que le sous-sol est assimilé à un milieu *poreux* : grossièrement, c'est une roche solide qui comporte des petites cavités à travers lesquelles s'écoulent les fluides.

**Adsorption.** Le polymère a tendance à se déposer à la surface des pores de la roche, ce qui peut retarder le déplacement de l'huile. L'adsorption résulte de l'affinité des polymères pour de nombreuses roches (grès ou carbonate) due aux forces de van der Waals et de liaison hydrogène [81, 89, 92]. Ce sont les nombreux groupes polaires le long de la chaîne moléculaire du polymère qui viennent se fixer sur des points polaires de la surface rocheuse.

**Réduction de mobilité.** Cette adsorption a pour conséquence de « rétrécir » les pores du milieu et réduire la perméabilité de la roche (Figure 1.4). L'impact de cette réduction de perméabilité est un effet viscosifiant qui diminue la vitesse de phase dans laquelle se trouve le polymère. Généralement, on traite ces deux effets (viscosifiant et réduction de perméabilité) par le biais d'un même modèle de réduction de mobilité [29, 35, 107].

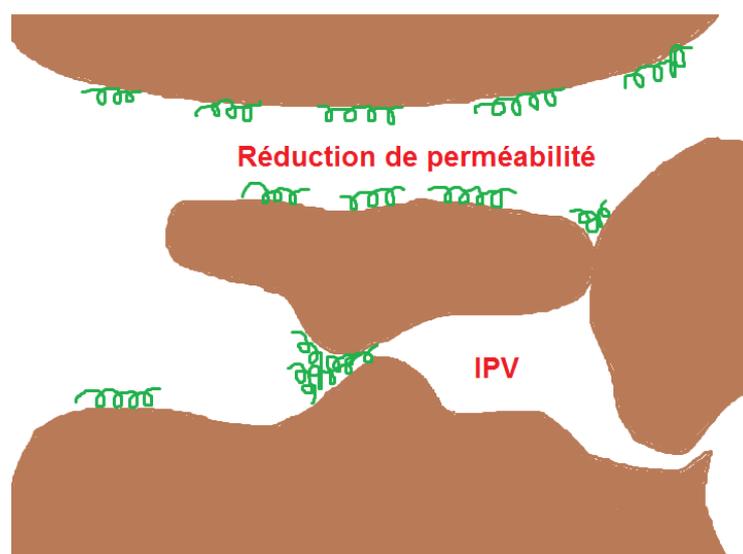


FIGURE 1.4 – Mécanismes de réduction de perméabilité et de volume de pore inaccessible.  
© Christophe Preux

**Volume de pore inaccessible.** L'expérience en laboratoire montre que quand on injecte du polymère dans une carotte initialement saturée en eau, le polymère peut arriver plus vite que l'eau à la sortie [28]. L'hypothèse est qu'en raison de leurs grosses tailles, les molécules de polymère ne peuvent pas passer librement dans tous les pores aussi bien que l'eau (Figure 1.4). Ayant moins de volume à inonder, elles voient leur vitesse augmenter. La modélisation de cet effet de volume de pore inaccessible (en anglais : *inaccessible pore volume*, IPV) fait intervenir un facteur d'accélération de la vitesse du polymère.

### 1.2.2 Difficultés mathématiques des modèles avec polymère

La modélisation de ces trois effets soulève des questions autour de l'hyperbolicité des systèmes d'équations, lesquelles ont de sérieuses répercussions sur le calcul numérique. Rappelons qu'un système d'équations de la forme

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}) = 0 \quad (1.1)$$

est qualifié de *strictement hyperbolique* si les valeurs propres de la matrice jacobienne  $\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f}(\mathbf{w})$  sont toutes réelles et distinctes [39, 66], ce qui implique l'existence d'une base de vecteurs propres. En un état  $\mathbf{w}$  où toutes les valeurs propres de  $\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f}(\mathbf{w})$  sont réelles mais où apparaît une valeur propre multiple, on distingue deux cas de figure. Si la base de diagonalisation persiste, on dit que le système est *hyperbolique*. En cas de perte de la base, on dit que la valeur propre est *résonante* et que le système est *faiblement hyperbolique*. En un état  $\mathbf{w}$  où l'une des valeurs propres de  $\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f}(\mathbf{w})$  devient complexe avec une partie imaginaire non nulle, on dit que le système est *elliptique*.

Une valeur propre réelle est aussi appelée *vitesse caractéristique* car elle représente une vitesse de propagation d'onde. L'hyperbolicité en un état donné garantit la stabilité au sens des perturbations linéarisées autour de cet état [40]. La perte de la base de vecteurs propres en un état résonant est un germe d'instabilité, dans la mesure où elle est susceptible d'amplifier les perturbations linéaires polynomialement en temps. Cela dit, l'hyperbolicité faible reste une propriété favorable et acceptable dans certains modèles de la physique comme le gaz sans pression [12, 67]. Quant à l'ellipticité d'un état, elle est vraiment désastreuse pour la stabilité : les perturbations linéaires peuvent s'amplifier exponentiellement en temps [46, 47].

**Hyperbolicité stricte du modèle sans polymère.** Revenons d'abord à un modèle d'écoulement sans polymère constitué de deux équations aux dérivées partielles

$$\partial_t(\phi \rho_o s_o) + \operatorname{div}(\rho_o \mathbf{u}_o) = \rho_o \varsigma_o, \quad (1.2a)$$

$$\partial_t(\phi \rho_w s_w) + \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{u}_w) = \rho_w \varsigma_w, \quad (1.2b)$$

représentant la conservation de l'huile ( $o$ ) et de l'eau ( $w$ ), dans lesquelles  $s_\psi$  désigne la saturation de la phase  $\psi \in \{o, w\}$ ,  $\rho_\psi$  sa densité et  $\phi$  la porosité du milieu. Les équations (1.2) sont complétées d'une part par les lois de Darcy-Muskat [26, 78]

$$\mathbf{u}_\psi = -\kappa \Lambda_\psi (\nabla p_\psi - \rho_\psi \mathbf{g}z), \quad \psi \in \{o, w\}, \quad (1.3)$$

exprimant les vitesses de filtration en fonction du gradient de pression  $\nabla p_\psi$  et de la mobilité  $\Lambda_\psi$  de chaque phase, ainsi que de la perméabilité absolue  $\kappa$  du milieu. D'autre part, elles sont suppléées par des lois phénoménologiques de fermeture donnant  $\Lambda_\psi$  en fonction de  $s_\psi$ ,  $\rho_\psi$  en fonction de  $p_\psi$ , la pression capillaire  $p_o - p_w$  en fonction de  $s_w$ , et les termes sources  $\varsigma_\psi$ . Ces lois, détaillées en §2.1.2, ne sont pas indispensables à ce qui suit.

Le modèle tridimensionnel (1.2)–(1.3) est fondamentalement de type parabolique-hyperbolique [20]. Pour mettre en exergue la partie hyperbolique, on peut faire un certain nombre d'hypothèses simplificatrices et appliquer certaines transformations classiques afin d'obtenir un prototype unidimensionnel qui en serait sa quintessence. Les hypothèses et

transformations en question sont précisées en §2.2.1. Le résultat auquel on aboutit est l'équation de conservation scalaire

$$\partial_t s + \partial_x f = 0, \quad (1.4a)$$

dans laquelle  $s$  est la nouvelle notation pour  $s_w$  et

$$f(s) = \frac{\Lambda_w(s)}{\Lambda_o(1-s) + \Lambda_w(s)} \quad (1.4b)$$

est appelé *flux fractionnaire*. Pour  $\Lambda_w(s) = s^2$  et  $\Lambda_o(1-s) = (1-s)^2$ , on retrouve l'équation de Buckley-Leverett qui est souvent citée [39, 66] comme exemple de loi de conservation hyperbolique. L'hyperbolicité stricte de (1.4) est triviale, puisque l'équation est scalaire. La seule vitesse caractéristique de (1.4) est

$$\lambda = f_s = f'. \quad (1.5)$$

**Hyperbolicité faible voire ellipticité du modèle avec polymère.** Par rapport à (1.2), la présence d'un polymère avec les effets énumérés en §1.2.1 oblige à ajouter une loi de conservation et trois lois de fermeture. Le nouveau modèle s'écrit

$$\partial_t(\phi \rho_o s_o) + \operatorname{div}(\rho_o \mathbf{u}_o) = \rho_o \varsigma_o, \quad (1.6a)$$

$$\partial_t(\phi \rho_w s_w) + \operatorname{div}(\rho_w R_m^{-1} \mathbf{u}_w) = \rho_w \varsigma_w, \quad (1.6b)$$

$$\partial_t(\phi \rho_w s_w c_w + (1-\phi) \rho_r c_r) + \operatorname{div}(\rho_w R_m^{-1} \mathbf{u}_w c_w \gamma) = \rho_w \varsigma_w c_w, \quad (1.6c)$$

où  $c_w$  désigne la fraction massique de polymère dans l'eau et les nouveaux « acteurs »  $c_r$ ,  $R_m$  et  $\gamma$  incarnent respectivement l'adsorption, la réduction de mobilité et le volume de pore inaccessible (IPV). Les lois les plus couramment utilisées sont [27, 29]

$$c_r(c_w) = C_p^{\max} \frac{b c_w}{1 + b c_w}, \quad C_p^{\max}, b \geq 0, \quad (1.7a)$$

$$R_m(c_w) = 1 + a_1 c_w + a_2 c_w^2 + a_4 c_w^{15/4}, \quad a_{1,2,4} \geq 0, \quad (1.7b)$$

$$\gamma(s_w, c_w) = 1 + \eta, \quad \eta > 0. \quad (1.7c)$$

Toutes empiriques, les lois (1.7) sont indiquées à titre d'exemple. Il est judicieux d'envisager ces trois lois de manière plus abstraite :  $c_r$  est une fonction positive et croissante de  $c_w$ ,  $R_m$  est une fonction à valeurs supérieures à 1 et croissante de  $c_w$ ,  $\gamma$  est une fonction à valeurs supérieures à 1 et décroissante en  $s_w$ .

En appliquant au système tridimensionnel (1.6) les hypothèses et les transformations qui sont détaillées en §5.1.1 et qui sont analogues à celles adoptées pour (1.2), on obtient le prototype unidimensionnel

$$\partial_t(s) + \partial_x(f) = 0, \quad (1.8a)$$

$$\partial_t(sc + \alpha) + \partial_x(fc\gamma) = 0, \quad (1.8b)$$

dans lequel le flux fractionnaire

$$f(s, c) = \frac{R_m^{-1}(c) \Lambda_w(s)}{\Lambda_o(1-s) + R_m^{-1}(c) \Lambda_w(s)} \quad (1.8c)$$

est maintenant une fonction croissante en  $s$  et décroissante en  $c$ . Quant à la fonction  $\alpha$ , elle est croissante en  $c$  et s'annule en  $c = 0$ . Pour faciliter la discussion, nous laissons pour le moment l'adsorption de côté pour nous concentrer sur l'ajout successif de  $R_m$  et de  $\gamma$ , chacun induisant à son tour une nouvelle pathologie. La réintégration d'une adsorption  $\alpha > 0$  dans l'analyse sera évoquée dans la Conclusion en §8.

▷ *Apparition d'une courbe de résonance par la réduction de mobilité.* Avec  $\alpha \equiv 0$  et  $\gamma \equiv 1$  — cette dernière égalité signifiant qu'il n'y a pas d'accélération due à l'IPV — le système (1.8) dégenère vers

$$\partial_t(s) + \partial_x(f) = 0, \quad (1.9a)$$

$$\partial_t(sc) + \partial_x(fc) = 0, \quad (1.9b)$$

avec le même flux fractionnaire  $f$  qu'en (1.8c). Ce système (1.9) appartient à la famille des systèmes de Keyfitz-Kranzer [58]. Sa particularité est que les deux valeurs propres réelles

$$\lambda_{[s]} = f_s, \quad \lambda_{[c]} = \frac{f}{s} \quad (1.10)$$

ne sont pas naturellement ordonnées. Ces deux vitesses caractéristiques se croisent sur la courbe  $sf_s - f = 0$  ou encore

$$\left(\frac{f}{s}\right)_s = 0. \quad (1.11)$$

En les états  $(s, c)$  satisfaisant (1.11), on a donc affaire à une valeur propre double qui s'avère déficiente ou *résonante* : il n'y a plus de base de vecteurs propres.

L'instabilité d'un système faiblement hyperbolique peut parfois se manifester par l'apparition de solutions de type  $\delta$ -choc sur des problèmes de Riemann. Ce n'est pas le cas ici. Isaacson et Temple [52] ont montré que les solutions du problème de Riemann pour (1.9) ne contiennent pas de  $\delta$ -choc. Par contre, il n'y a pas unicité, à moins d'imposer un critère de sélection supplémentaire. À cet égard, le comportement du système est similaire à d'autres systèmes non linéaires comme les modèles jouets d'Isaacson-Temple [50, 51], la tuyère à section variable [2, 38] et l'écoulement diphasique de Baer-Nunziato [3].

Ce comportement est favorable à la robustesse des simulations numériques. Cependant, celles-ci souffrent d'un défaut de précision sur l'onde  $\lambda_{[c]} = f/s$  qui transporte le polymère par l'équation

$$\partial_t c + \frac{f}{s} \partial_x c = 0, \quad (1.12)$$

obtenue par combinaison des équations de (1.9). Le front de cette discontinuité de contact est excessivement étalé en comparaison avec ce qu'on a l'habitude d'observer en dynamique des gaz. L'explication aux faibles ordres de convergence mesurés est à chercher dans la dépendance de  $\lambda_{[c]}$  par rapport à  $c$ , comme on le verra en §4.3.1.

▷ *Apparition d'une région d'ellipticité par l'IPV.* Avec  $\alpha \equiv 0$  et  $\gamma > 1$ , le système (1.8) devient

$$\partial_t(s) + \partial_x(f) = 0, \quad (1.13a)$$

$$\partial_t(sc) + \partial_x(fc\gamma) = 0, \quad (1.13b)$$

avec le même flux fractionnaire  $f$  qu'en (1.8c). Cette fois, on perd même les valeurs propres réelles dans certaines zones de l'espace des états  $(s, c)$  avec la plupart des lois d'IPV habituellement employées pour  $\gamma$ . L'ellipticité du système dans ces régions peut faire apparaître des phénomènes de concentration locale observés sur les simulations numériques. Le plus « étrange » est que les pics de fraction massique peuvent s'amplifier soit polynomialement soit exponentiellement, comme en témoignent les Figures 1.5–1.6 où sont tracés les profils de  $c$  en fonction de  $x$  à des instants réguliers sur un problème d'injection à l'entrée avec la loi d'IPV (1.7c). Dans notre problème, et contrairement à d'autres applications comme le gaz sans pression, ces pointes aberrantes ne correspondent à aucune réalité physique et devraient être évitées dans la mesure du possible.

Ci-dessous sont énumérées les lois d'IPV pour lesquelles il existe des zones elliptiques pour le système (1.13). Nous les avons mises en évidence de manière numérique, le calcul analytique n'étant généralement pas à notre portée.

- La loi d'IPV constant (1.7c), à savoir

$$\gamma(s, c) = 1 + \eta, \quad \eta > 0, \quad (1.14)$$

qui est de loin la plus largement utilisée par les ingénieurs réservoir pour sa simplicité. L'accumulation très rapide de polymère au voisinage d'un front de saturation, observée sur les Figures 1.5–1.6 annonce souvent l'arrêt imminent du code.

- La loi de diffusion uniforme

$$\gamma(s, c) = \begin{cases} \frac{s}{\Lambda_w(s)} \frac{\Lambda_w(s) - \Lambda_w(s_\bullet)}{s - s_\bullet} & \text{si } s_\bullet > s_b \text{ et } s > s_\bullet, \\ \frac{s}{s - s_\bullet} & \text{si } s_\bullet \leq s_b \text{ et } s > s_\bullet, \\ 0 & \text{si } s \leq s_\bullet, \end{cases} \quad (1.15)$$

où  $s_\bullet$  et  $s_b$  sont deux paramètres supposés connus. Leurs significations seront expliquées en §5.

- La loi de diffusion non uniforme

$$\gamma(s, c) = \begin{cases} \left[ 1 - \frac{s_b}{s_\bullet} \frac{\Lambda_w(s_\bullet)}{\Lambda_w(s)} \right] \frac{s}{s - s_b} & \text{si } s_\bullet > s_b \text{ et } s > s_\bullet, \\ \frac{s}{s - s_\bullet} & \text{si } s_\bullet \leq s_b \text{ et } s > s_\bullet, \\ 1 & \text{si } s \leq s_\bullet. \end{cases} \quad (1.16)$$

où  $s_\bullet$  et  $s_b$  sont les deux mêmes paramètres que précédemment. Les deux dernières lois ont été proposées par Hilden et al. [45] dans l'objectif de satisfaire un critère de stabilité de front de choc qui n'est pas équivalent à l'hyperbolicité faible.

Une exception notable doit être signalée. Il s'agit de la loi de percolation

$$\gamma(s, c) = \begin{cases} \frac{s}{s - s_\bullet} & \text{si } s_b < s < 1, \\ \frac{s}{s_b - s_\bullet} & \text{si } 0 < s < s_b, \end{cases} \quad (1.17)$$

où  $s_\bullet < s_b$  sont les deux mêmes paramètres que précédemment. Suggérée par Bartelds et al. [6], cette loi permet de garantir l'hyperbolicité faible sur tout le domaine  $(s, c) \in$

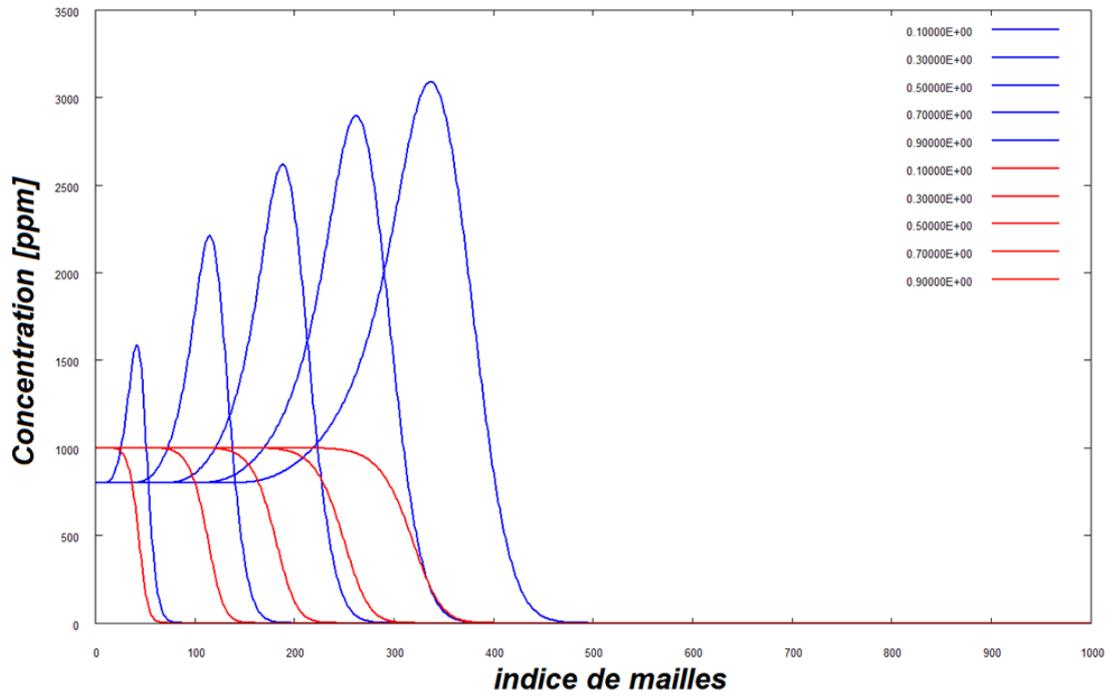


FIGURE 1.5 – Propagation d'une instabilité polynomiale en temps (bleu) pour  $c$  et propagation sans amplification pour  $s$  (rouge). © Christophe Preux

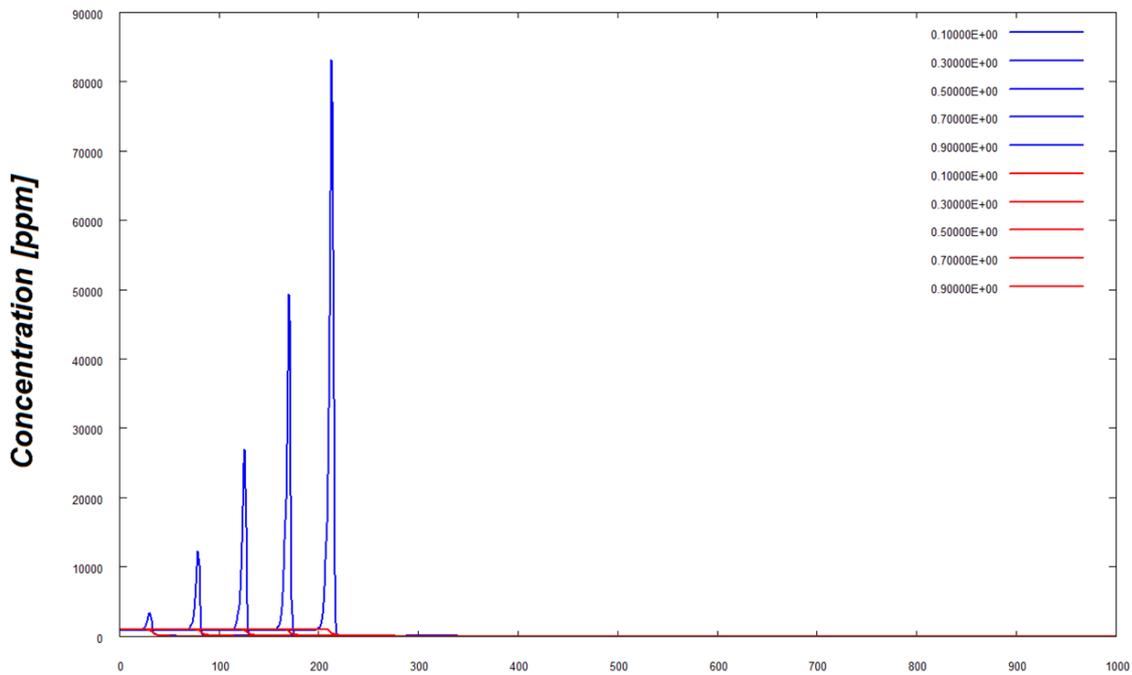


FIGURE 1.6 – Propagation d'une instabilité exponentielle en temps (bleu) pour  $c$  et propagation sans amplification pour  $s$  (rouge). © Christophe Preux

$[0, 1]^2$ . Le comportement du système (1.13) est analogue au modèle sans IPV, ce que nous démontrerons rigoureusement en §5.3 au moyen d'un simple changement de variables. La condition  $s_\bullet < s_b$  n'est malheureusement pas toujours physique et c'est justement pour s'en affranchir que les lois de diffusion uniforme et non uniforme ont été élaborées.

Ce n'est la première fois que des lois de fermeture fortement non linéaires visant un certain degré de « réalisme » finissent par porter préjudice à la stabilité du modèle global et à l'efficacité des calculs. Nous avons connaissance d'un précédent exemple à IFPEN pour la simulation des écoulements diphasiques en conduites [8]. Dans ce cas-là, le recours à un schéma de type relaxation [9] a permis de renforcer la robustesse des simulations et même de gagner en temps de calcul. Bien entendu, si la cause véritable des instabilités est l'ellipticité du modèle, un changement de schéma ne peut guère faire de miracle, en théorie. En pratique, néanmoins, la possibilité offerte par le schéma de contrôler quantitativement la diffusion numérique et de garantir la positivité de certaines grandeurs critiques est un atout permettant au code d'atténuer le mal et aux simulations de « durer plus longtemps ».

### 1.2.3 Objectifs de la thèse

À la lumière de la problématique présentée dans la section précédente, nous souhaitons contribuer à pallier les difficultés selon deux axes distincts.

**Analyse et conception des lois d'IPV.** Le premier axe concerne la modélisation elle-même. Il semble en effet que malgré d'importants moyens de recherche, les modèles d'IPV n'aient pas encore atteint le même degré de maturité que celui d'autres processus physiques. L'idéal serait de concevoir des lois d'IPV qui, tout en restant physiquement pertinentes, garantiraient automatiquement l'hyperbolicité faible du système prototype (1.13). Dans cette perspective ambitieuse qui s'annonce difficile, nous nous fixons les objectifs atteignables suivants :

1. Comprendre les lois d'IPV existantes en déterminant, analytiquement ou numériquement, leurs éventuelles régions d'ellipticité dans l'espace des phases.
2. Établir des conditions suffisantes abstraites mais pratiques pour qu'une loi d'IPV générale donne lieu à un système faiblement hyperbolique.
3. Caler les paramètres des lois d'IPV disponibles à ce jour en exploitant les données expérimentales.

**Étude et construction de schémas numériques.** Le second axe porte sur la discrétisation numérique des équations. Il s'agit de perfectionner ou de réparer certains aspects insatisfaisants des calculs avec le schéma décentré actuellement implanté dans PumaFlow, que le modèle soit bien posé ou non. Sans être nécessairement plus facile que le premier axe, cette partie est orientée vers un travail numérique plus « traditionnel ». Plus concrètement, les buts recherchés sont :

4. Raidir la capture des fronts de contact correspondant à l'onde transportant le polymère dans le modèle sans IPV.
5. Étudier un schéma alternatif au schéma décentré des ingénieurs, opérationnel pour toutes les lois d'IPV et incluant la possibilité de contrôler la diffusion numérique ainsi que la positivité de certaines variables importantes.

### 1.3 Démarche, contributions et plan du mémoire

De l'exposition des difficultés en §1.2.2, il ressort que la prise en compte de l'IPV marque une séparation naturelle dans l'échelle de complexité du problème. Aussi, indépendamment des objectifs énoncés plus haut, nous avons pris le parti de structurer ce mémoire en deux parties. La première regroupe les travaux en rapport avec le modèle sans IPV, qui est faiblement hyperbolique. La seconde est consacrée aux contributions portant sur le modèle avec IPV, qui est susceptible de contenir des zones d'ellipticité.

#### 1.3.1 Modèle simplifié et schéma classique sans IPV

Pour que le lecteur ait un aperçu du contexte et de la complexité du problème, nous commençons par introduire à la première section du chapitre §2 le modèle tridimensionnel « complet » représentatif de ceux traités par PumaFlow. Ce modèle est de la forme (1.6), avec des lois de fermeture que nous précisons au fur et à mesure en donnant des variantes aux relations (1.7) pour les trois effets du polymère.

La deuxième section du chapitre §2 synthétise toutes les propriétés théoriques connues concernant le système Keyfitz-Kranzer (1.9), que nous obtenons à partir du modèle complet en appliquant plusieurs hypothèses simplificatrices, notamment le passage à une dimension spatiale et l'absence de l'IPV. L'accent sera mis sur la résolution du problème de Riemann associé, ainsi que les critères de sélection permettant d'assurer l'unicité de la solution.

Connaissant « la » solution du problème de Riemann au sens des critères d'Isaacson-Temple [52], nous nous intéressons au chapitre §3 au très classique schéma de Godunov [41] pour le système de Keyfitz-Kranzer, qui s'écrit

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{f}(\mathbf{w}_{\text{Riem}}(0; \mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n)) - \mathbf{f}(\mathbf{w}_{\text{Riem}}(0; \mathbf{w}_{i-1}^n, \mathbf{w}_i^n))], \quad (1.18)$$

avec  $\mathbf{w} = (s, sc)^T$  et  $\mathbf{f} = (f, fc)^T$ . Ce schéma est a priori complexe à mettre en œuvre pour un système général. Pour le système considéré et avec les propriétés de signes du flux et de la vitesse, nous montrons qu'il coïncide en fait avec le schéma décentré amont de PumaFlow

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{f}(\mathbf{w}_i^n) - \mathbf{f}(\mathbf{w}_{i-1}^n)]. \quad (1.19)$$

En mesurant les ordres de convergence des résultats produits par ce schéma sur les six configurations d'onde du problème de Riemann, on s'aperçoit qu'ils ne sont pas du tout satisfaisants pour une discontinuité de contact transportant la fraction massique de polymère. L'observation de cette diffusion excessive donne corps à la difficulté qui sous-tend et motive l'objectif 4.

#### 1.3.2 À la recherche d'une meilleure capture des fronts

Dans le cadre de cet objectif 4, trois pistes d'amélioration sont explorées au chapitre §4 pour améliorer la capture des fronts de contact. La montée en ordre, qui combine une reconstruction quasi-ordre 2 en espace [103]

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \mathbf{f} \left( \mathbf{w}_i^n + \frac{\Delta x}{2} \hat{\mathbf{p}}_i^n \right) - \mathbf{f} \left( \mathbf{w}_{i-1}^n + \frac{\Delta x}{2} \hat{\mathbf{p}}_{i-1}^n \right) \right] \quad (1.20)$$

où la pente locale

$$\widehat{\mathbf{p}}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \mathfrak{L}(\mathbf{w}_i^n - \mathbf{w}_{i-1}^n, \mathbf{w}_{i+1}^n - \mathbf{w}_i^n) \quad (1.21)$$

est calculée par une fonction limiteur [94], avec un intégrateur de Heun d'ordre 2 en temps [25], apporte un gain très faible. Le schéma de Glimm [37]

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \mathbf{w}_{\text{Riem}}(a^{n+1} \Delta x / \Delta t; \mathbf{w}_{i-1}^n, \mathbf{w}_i^n), \quad (1.22)$$

avec le choix aléatoire de Colella [22] pour la suite  $a^n$ , fait beaucoup mieux en termes d'erreur d'approximation et de largeur du front. La contrepartie à cette meilleure performance est la non conservativité locale des quantités de matière, une mise en œuvre vraiment complexe et un temps d'exécution de plusieurs centaines de fois plus grand que le schéma décentré.

La troisième idée, plus originale, consiste à modifier la mise à jour de la masse de polymère  $sc$  par

$$(s)_i^{n+1} = (s)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_i^n - f_{i-1}^n], \quad (1.23a)$$

$$(sc)_i^{n+1} = (sc)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_i^n c_i^n - f_{i-1}^n c_{i-1}^n] + \mathfrak{S}_i^n (c_i^n - c_{i-1}^n)^2, \quad (1.23b)$$

où  $f_i^n = f(s_i^n, c_i^n)$  et où le facteur  $\mathfrak{S}_i^n$  est ajusté pour compenser exactement le résidu dans l'erreur sur la vitesse interstitielle

$$u = \frac{f}{s},$$

qui est un invariant de Riemann à préserver. Le prix à payer est la perte de conservativité locale sur  $sc$ . Pour estimer le résidu sur la vitesse, on insère dans le schéma (1.23) les valeurs ponctuelles

$$s_i^n = \tilde{s}(x_i, t^n), \quad c_i^n = \tilde{c}(x_i, t^n), \quad (1.24)$$

provenant d'une solution exacte  $(\tilde{s}, \tilde{c})$  supposée aussi régulière que nécessaire. En supposant que cette solution correspond à un contact pur, on a

$$\tilde{u}(x, t^n) := u(\tilde{s}(x, t^n), \tilde{c}(x, t^n)) = \bar{u} \quad (1.25)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Par développements limités autour de  $(x_i, t^n) = (i\Delta x, n\Delta t)$ , dont les détails sont fournis en §4.3.1, on obtient

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= \bar{u} \\ &- \left\{ \delta \bar{u} (1 - \delta \bar{u}) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{u_{ss} u_c^2}{u_s^2} + u_{cc} \right) + \frac{u_c (u_c - s u_{sc})}{\tilde{s} u_s} \right] - u_c \frac{\mathfrak{S}_i^n}{\tilde{s}} \right\} (\partial_x \tilde{c})^2 \Delta x^2 \\ &+ O(\Delta x^3), \end{aligned} \quad (1.26)$$

où toutes les fonctions au second membre sont évaluées en  $(x_i, t^n)$ . Ainsi, en prenant

$$\mathfrak{S}_i^n = \delta u_i^n (1 - \delta u_i^n) \left[ \frac{s_i^n}{2} \left( \frac{u_{ss} u_c}{u_s^2} + \frac{u_{cc}}{u_c} \right) + \frac{u_c - s_i^n u_{sc}}{u_s} \right], \quad (1.27)$$

on annule le terme entre les accolades de (1.26) et préserve la constance de  $u$  à un ordre supérieur. Pour le moment, le schéma (1.23), (1.27) convient seulement à un contact pur.

Pour l'étendre à un problème avec plusieurs ondes, nous proposons une nouvelle modification sous la forme

$$(s)_i^{n+1} = (s)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_i^n - f_{i-1}^n], \quad (1.28a)$$

$$(sc)_i^{n+1} = (sc)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_i^n c_i^n - f_{i-1}^n c_{i-1}^n] + \mathfrak{S}_i^n (h_i^n - h_{i-1}^n)^2, \quad (1.28b)$$

$$(sh)_i^{n+1} = (sh)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_i^n h_i^n - f_{i-1}^n h_{i-1}^n], \quad (1.28c)$$

où  $h$  est une nouvelle inconnue qui à l'instant initial coïncide avec la fraction massique du polymère, soit

$$h_i^0 = c_i^0. \quad (1.28d)$$

Le coefficient  $\mathfrak{S}_i^n$ , qui garde la même valeur qu'en (1.27), est cette fois multiplié par le saut de  $h$  et non pas le saut de  $c$ . Le rôle de la variable  $h$  est de « dupliquer »  $c$  tout en étant insensible à l'autre onde. En effet,  $h$  vérifie

$$\partial_t h + u \partial_x h = 0 \quad (1.29)$$

et ne voit que le transport linéaire à vitesse  $u(s, c)$  sans jamais interagir directement avec  $s$  et  $c$ . Les résultats obtenus avec cette correction sont très satisfaisants.

### 1.3.3 Analyse d'hyperbolicité pour les lois d'IPV non triviales

Il a été longtemps suspecté par les ingénieurs que le modèle prototype (1.13) avec les lois d'IPV courantes comme l'IPV constant (1.7c) ou les lois uniforme (1.15) et non uniforme (1.16) pouvait avoir des zones d'ellipticité, où les valeurs propres cessent d'être réelles. À part un résultat partiel de Bartelds et al. [6] pour l'IPV constant, il n'y a pas de preuve analytique ou numérique à cette assertion. Nous en apportons une confirmation numérique au chapitre §5 en visualisant les zones d'ellipticité dans le plan  $(s, c)$  pour ces trois lois. Pour la loi constante, nous parvenons en §5.2 à déterminer analytiquement la frontière exacte entre la région d'hyperbolicité et la région d'ellipticité. L'objectif 1 est ainsi atteint.

Ces avancées ont été rendues possibles grâce au passage en coordonnées lagrangiennes, qui simplifient énormément les calculs. Nous récrivons d'abord (1.13) sous la forme

$$\partial_t(s) + \partial_x(su) = 0, \quad (1.30a)$$

$$\partial_t(sc) + \partial_x(scu + q) = 0, \quad (1.30b)$$

qui ressemble davantage à l'hydrodynamique, dans laquelle la *dérivée*

$$q = (\gamma - 1)scu \quad (1.30c)$$

est une fonction de  $(s, c)$ . Nous nous plaçons ensuite dans les coordonnées  $T = t$  et  $m = \int^x s dx$ , où le système (1.30) se transforme en [87]

$$\partial_T \tau - \partial_m u = 0, \quad (1.31a)$$

$$\partial_T c + \partial_m q = 0, \quad (1.31b)$$

où  $u$  et  $q$  sont maintenant vus comme des fonctions de  $(\tau = 1/s, c)$  et représentent les véritables non-linéarités du problème. L'expression plus concise du polynôme caractéristique de la matrice jacobienne

$$\wp(\lambda) = \begin{vmatrix} -u_\tau - \lambda & -u_c \\ q_\tau & q_c - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (u_\tau - q_c)\lambda + u_c q_\tau - u_\tau q_c \quad (1.32)$$

et de son discriminant

$$\Delta = (u_\tau - q_c)^2 + 4(u_\tau q_c - u_c q_\tau) \quad (1.33)$$

facilite grandement les calculs analytiques et numériques de l'objectif 1. Elle ouvre également la voie à l'étude de l'hyperbolicité faible, ou plus exactement des conditions suffisantes permettant d'assurer  $\Delta \geq 0$ .

L'intérêt de disposer d'un ensemble de conditions suffisantes pour l'hyperbolicité faible d'une loi d'IPV abstraite, conformément à l'objectif 2, est de pouvoir fabriquer « artificiellement » des lois simples et mathématiquement convenables par morceaux et de les recoller afin d'obtenir une loi d'IPV faiblement hyperbolique sur tout le domaine, quitte à caler les divers paramètres pour rester proche des données expérimentales. Nous mettons en avant en §5.1.2 plusieurs conditions suffisantes basées sur divers réarrangements du discriminant (1.33). Elles sont résumées à la Table 1.1, où  $g = (\gamma - 1)sc$  de sorte que  $q = gu$ .

| #     | expression   | $\lambda_*$ lagrangien | $\lambda_*$ eulérien |
|-------|--|------------------------|----------------------|
| [CS0] | $u_\tau g_c - u_c g_\tau \geq 0$   | 0                      | $u$                  |
| [CS1] | $q_\tau \geq 0$  | $-u_\tau$              | $(su)_s$             |
| [CS2] | $g_\tau - gg_c \geq 0$   | $g_c u$                | $(\gamma c)_c u$     |
| [CS3] | $\gamma_s / (\gamma - 1) + \Lambda'_w / \Lambda_w + \Lambda'_o / \Lambda_o \leq 0$ |                        |                      |
| [CS4] | $\gamma_s / (\gamma - 1) + f_s / f(\cdot, c_{\max}) \leq 0$                        |                        |                      |

TABLE 1.1 – Conditions suffisantes pour l'hyperbolicité faible du système (1.31).

Certaines d'entre elles s'interprètent aussi en termes de contrôle de l'ordre de grandeur d'une vitesse caractéristique, à savoir

$$\wp(\lambda_*) \leq 0. \quad (1.34)$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, cela revient à demander l'existence d'une racine réelle inférieure à  $\lambda_*$  et d'une autre supérieure à  $\lambda_*$ . Ici, les  $\lambda_*$  apparaissent comme des vitesses lagrangiennes naturelles et « raisonnables ».

Les CS3 et CS4, qui sont des renforcements de CS1, seront à la base de deux nouvelles lois d'IPV appelées *dérive sous-linéaire* et *dérive maximale linéaire*. Quant à la CS2, elle équivaut à

$$s\gamma_s + \gamma(\gamma - 1) + c(\gamma - 1)\gamma_c \leq 0, \quad (1.35)$$

et l'intérêt de cette dernière forme est qu'elle porte directement et uniquement sur la loi d'IPV  $\gamma$ , indépendamment de  $u$ , à l'inverse des autres conditions. La CS2 sous la forme (1.35) est vérifiée avec égalité par la loi de percolation (1.17) pour  $s > s_b$ .

### 1.3.4 Schéma de relaxation

L'objectif 5, traité au chapitre §6, est avant tout pragmatique. Il vise à faire en sorte que le code puisse s'exécuter avec une plus grande robustesse sans préjuger de l'hyperbolicité faible ou non de la loi d'IPV, vue comme une « boîte noire » donnée — sinon imposée — par les ingénieurs. Pour cela, on mise sur l'effet stabilisateur de la viscosité artificielle apportée par le schéma. Toutefois, un excès de viscosité artificielle nuit à la précision des résultats, d'où l'importance de savoir distiller « juste ce qu'il faut » de dissipation numérique.

En reprenant la démarche de Baudin et al. [8, 9] pour un problème ayant la même difficulté, nous proposons d'approcher le système de départ (1.30) au niveau continu par sa version relaxée

$$\partial_t(s) + \partial_x(sU) = 0, \quad (1.36a)$$

$$\partial_t(sc) + \partial_x(scU + Q) = 0, \quad (1.36b)$$

$$\partial_t(sU) + \partial_x(sU^2) + (a^2/s^2)\partial_x s = \varepsilon^{-1}s(u(s, c) - U), \quad (1.36c)$$

$$\partial_t(sQ) + \partial_x(sQU) + b^2\partial_x c = \varepsilon^{-1}s(q(s, c) - Q), \quad (1.36d)$$

$$\partial_t(sa) + \partial_x(saU) = 0, \quad (1.36e)$$

$$\partial_t(sb) + \partial_x(sbU) = 0. \quad (1.36f)$$

Dans (1.36),

- $U$  et  $Q$  sont de nouvelles variables, considérées comme indépendantes de  $s$  et  $c$ , dont le rôle est de « relaxer »  $u$  et  $q$ .
- $\varepsilon > 0$  est un temps de relaxation vers l'équilibre, destiné à rappeler à  $U$  et  $Q$  de ne pas trop s'éloigner de  $u(s, c)$  et  $q(s, c)$  par le biais des termes sources aux seconds membres. Plus  $\varepsilon$  est petit, plus  $U$  et  $Q$  sont proches de  $u(s, c)$  et  $q(s, c)$ .
- $a > 0$  et  $b > 0$  sont des coefficients réglant la quantité de dissipation numérique à déterminer plus tard. Le choix de les prendre variables en espace-temps et non uniformes permet [11] d'éviter les difficultés dues au vide  $s = 0$ .

La partie homogène du modèle relaxé, correspondant à  $\varepsilon^{-1} = 0$ , est un système inconditionnellement hyperbolique. Ses valeurs propres

$$U - a\tau, \quad U - b\tau, \quad U, \quad U + b\tau, \quad U + a\tau$$

sont toutes linéairement dégénérées et l'on connaît tous les invariants de Riemann associés à chaque onde. Sous l'hypothèse  $a > b > 0$ , ces valeurs propres sont naturellement ordonnées et l'on est en mesure de résoudre facilement le problème de Riemann, ce qui permet d'appliquer la méthode de Godunov au système relaxé.

Le comportement du système relaxé pour  $\varepsilon \downarrow 0$  peut être appréhendé par un développement asymptotique de Chapman-Enskog. Nous montrons que le couple des deux premières composantes  $\mathbf{w} = (s, sc)^T$  de la solution de (1.36) satisfait, au premier ordre en  $\varepsilon$ , l'équation équivalente

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \varepsilon \partial_x (s \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{w}) \mathbf{D}(\mathbf{w}) \mathbf{P}(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w}), \quad (1.37a)$$

avec

$$\mathbf{P}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -cs & s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(\mathbf{w}) = \frac{1}{s^3} \begin{bmatrix} a^2 - s^4 u_s^2 - s^2 u_c q_s & -u_c (s^2 u_s + q_c) \\ -s^2 q_s (s^2 u_s + q_c) & b^2 - s^2 q_s u_c - q_c^2 \end{bmatrix}. \quad (1.37b)$$

Pour que (1.37) soit une approximation diffusive du système de départ, ce qui est garant de la stabilité, on demande [76] que la matrice  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P}$  au second membre soit une matrice de diffusion. Ainsi,  $a$  et  $b$  sont ajustés de sorte à être les « plus petits possibles » afin que  $\mathbf{D}$  possède des valeurs propres réelles positives. Les conditions ainsi obtenues sur  $a$  et  $b$  sont à imposer dans chaque cellule et à chaque pas de temps. Elles sont renforcées par un ensemble d'autres conditions à appliquer en chaque arête pour garantir la positivité des saturations et fractions massiques intermédiaires dans chaque problème de Riemann.

Des simulations numériques sont réalisées avec le schéma de relaxation et le schéma décentré. Lorsque les lois d'IPV hyperboliques sont utilisées, la confrontation avec les résultats du schéma décentré nous permet de valider le schéma de relaxation. Pour les lois d'IPV non-hyperbolique, nous confrontons les résultats des deux schémas et discutons les différences observées, en particulier au niveau des singularités.

### 1.3.5 Paramétrage des lois d'IPV et simulations

Équipés du robuste schéma de relaxation, nous abordons au chapitre §7 les simulations proprement dites. Dans le cadre de l'objectif 3, il s'agit non seulement de lancer des calculs correspondant à une loi d'IPV prescrite à l'avance, mais d'utiliser l'outil numérique pour tenter de déterminer laquelle des lois considérées jusqu'à présent est la mieux adaptée à la modélisation du polymère. Pour cela, nous nous appuyons sur des données expérimentales issues d'une expérience d'injection en laboratoire. Cette expérience étant réalisée en monophasique, une première partie du chapitre §7 portera sur l'étude comparative des lois en miscible. Nous montrons que les lois de percolation, uniforme et non-uniforme ne peuvent pas modéliser l'accélération du polymère. Un paramétrage est proposé pour les lois d'IPV constant et de dérive maximale linéaire. Les simulations sont confrontées aux données expérimentales, soulignant la qualité du paramétrage.

Nous étudions ensuite le paramétrage des lois d'IPV pour un écoulement diphasique immiscible. Pour cela, nous considérons un type de roche dont les données pétrophysiques sont représentatives des données couramment utilisées en ingénierie réservoir. Afin d'assurer un paramétrage des loi d'IPV « cohérent » avec les données expérimentales monophasique, nous supposons la saturation d'huile résiduelle nulle afin d'utiliser la relation  $\gamma(s = 1) = \gamma_{\text{exp}}$  pour effectuer le calage. Les lois d'IPV constant et de dérive maximale linéaire sont aisément paramétrées. En revanche, il ne sera pas toujours possible de paramétrer les lois de percolation, uniforme et non-uniforme. Nous traiterons le paramétrage de ces lois en fonction de la valeur de  $s_{\bullet}$  par à rapport à  $s_b$ .

Nous montrons que lorsque  $s_{\bullet} > s_b$ , il n'est pas possible de trouver à la fois des paramétrages pour la loi uniforme et la loi non-uniforme à données physiques fixées (la loi de percolation n'est pas définie dans ce cas). Pour des grandes valeurs d'IPV expérimental ( $\gamma_{\text{exp}} \geq 2/(1 - s_b)$ ), il n'existera pas de paramétrage. Lorsque  $s_{\bullet} < s_b$ , nous cherchons un paramétrage des lois de percolation, uniformes et non-uniformes de la même manière puisqu'elles partagent la même expression analytique pour  $s \in [s_b, 1]$ . Nous montrons que le paramétrage est impossible dès lors que  $\gamma_{\text{exp}} > 1/(1 - s_b)$ . Pour illustrer nos propos, deux études de paramétrage sont menées, l'une avec  $s_b = 0.2$  et l'autre avec  $s_b = 0.1$ . Cela permet de trouver au moins un paramétrage pour chaque loi d'IPV.

Le système mathématique n'étant pas hyperbolique pour toutes les lois d'IPV, nous utilisons exclusivement le schéma de relaxation de manière à ce que les comparaisons et discussions ne portent que sur les lois d'IPV. À l'aide de simulations diphasiques eau/huile,

nous montrons que les résultats obtenus avec les lois non-hyperboliques (IPV constant, uniforme et non-uniforme) reproduisent bien l'accélération du polymère mais présentent des singularités pour la fraction massique de polymère. Cela renforce notre intérêt pour le schéma de relaxation. Concernant les lois hyperboliques, la loi de percolation n'a pu être paramétrée que dans un seul cas; elle reproduit bien l'accélération du polymère et sa solution n'a pas de singularité. Également, la loi de dérive maximale linéaire reproduit bien l'accélération du polymère. Cependant, le polymère circule à très grande vitesse dans l'eau initialement présente dans le domaine.

Première partie

Écoulements sans volume de pore  
inaccessible



## Chapitre 2

# Analyse du modèle diphasique de référence

### Sommaire

---

|            |                                      |           |
|------------|--------------------------------------|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Modèle complet 3-D</b>            | <b>22</b> |
| 2.1.1      | Lois fondamentales de conservation   | 22        |
| 2.1.2      | Lois empiriques du milieu poreux     | 23        |
| 2.1.3      | Lois empiriques du polymère          | 26        |
| <b>2.2</b> | <b>Modèle simplifié 1-D sans IPV</b> | <b>32</b> |
| 2.2.1      | Construction du modèle               | 32        |
| 2.2.2      | Hyperbolicité faible                 | 35        |
| 2.2.3      | Critères de sélection                | 39        |
| 2.2.4      | Solution du problème de Riemann      | 40        |

---

Pour que le lecteur ait un aperçu du contexte et de la complexité de la modélisation des écoulements diphasiques en milieu poreux avec polymère, nous commençons par introduire en §2.1 le modèle tridimensionnel « complet » qui est implanté dans le logiciel PumaFlow d'IFPEN. Ce modèle est composé de trois lois fondamentales de conservation de matière, suppléées par de nombreuses lois empiriques traduisant les phénomènes physiques que souhaite représenter l'ingénieur de réservoir. Nous insisterons en particulier dans §2.1.3 sur trois effets liés à la présence d'un polymère, à savoir l'adsorption, la réduction de mobilité et le volume de pore inaccessible.

À ce modèle complet 3-D nous appliquons un certain nombre d'hypothèses explicitées en §2.2.1 et de transformations afin d'aboutir à un modèle unidimensionnel « simplifié ». Le modèle ainsi obtenu correspond à un écoulement dont la présence du polymère a pour effet de réduire la mobilité de l'eau. Il constitue le modèle diphasique de « référence » qui interviendra tout au long de la première partie. Le reste de la section §2.2 est consacré à l'analyse mathématique du modèle de référence, notamment en ce qui concerne la solution du problème de Riemann associé. Ce travail permet de préparer l'approximation numérique qui sera abordée dans les chapitres §3 et §4.

## 2.1 Modèle complet 3-D

Un milieu poreux est une matrice solide occupant un domaine spatial  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  et renfermant des petites cavités appelées *pores*. Un réservoir pétrolier est un milieu poreux dont la matrice est composée de grain de roche (Figure 2.1) et où l'on retrouve des molécules d'huile dans les pores. Dans ces travaux le milieu est caractérisé par la *porosité*  $\phi(\mathbf{x}) \in [0, 1]$  qui exprime le rapport entre le volume des pores et celui du milieu dans le voisinage du point  $\mathbf{x}$ . La porosité  $\phi(\cdot)$  est une fonction supposée connue de  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

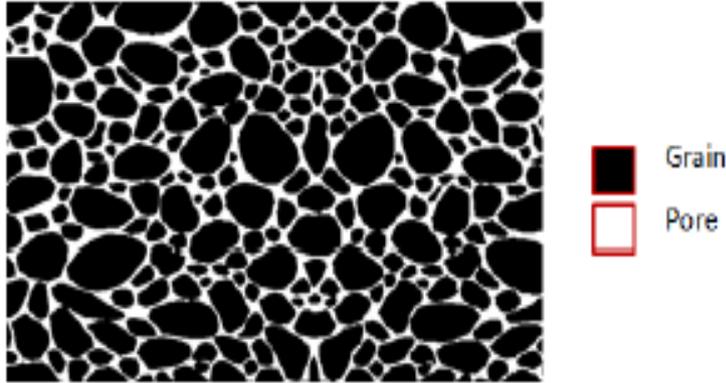


FIGURE 2.1 – Représentation 2-D d'un milieu poreux.

Un fluide présent dans la roche s'écoule à travers les pores, en fonction de ses caractéristiques propres ainsi que celles des autres fluides présents et aussi celles de la roche. Dans cette section, nous allons exposer un modèle courant [15, 59, 91] d'écoulement diphasique en milieu poreux avec polymère.

### 2.1.1 Lois fondamentales de conservation

Considérons un milieu poreux de porosité  $\phi$  dans lequel sont présentes deux phases, à savoir la phase eau référencée par l'indice  $w$  et la phase huile indexée par  $o$ . Dans chaque phase  $\psi \in \{w, o\}$ , la *saturation*  $s_\psi(\mathbf{x}, t)$  est définie comme le taux de présence volumique de la phase considérée. Les champs de saturations sont à calculer et vérifient  $s_w + s_o = 1$ . Chaque phase  $\psi \in \{w, o\}$  a sa propre densité  $\rho_\psi$  qui dépend de la pression  $p_\psi$  à travers une loi d'état  $\rho_\psi = \rho_\psi(p_\psi)$  connue.

On suppose que le polymère n'est présent que dans la phase aqueuse, sa fraction massique au sein de cette phase étant notée  $c_w$ . Comme la fraction massique du polymère injecté dans les réservoirs est en général faible, on considère que ce dernier ne modifie pas la masse volumique de l'eau. Dans ces conditions, l'écoulement est régi par les trois équations aux dérivées partielles

$$\partial_t(\phi \rho_o s_o) + \text{div}(\rho_o \mathbf{u}_o) = \rho_o \zeta_o, \quad (2.1a)$$

$$\partial_t(\phi \rho_w s_w) + \text{div}(\rho_w R_m^{-1} \mathbf{u}_w) = \rho_w \zeta_w, \quad (2.1b)$$

$$\partial_t(m_p) + \text{div}(\rho_w R_m^{-1} \mathbf{u}_w c_w \gamma) = \rho_w \zeta_w c_w, \quad (2.1c)$$

qui correspondent respectivement au bilan de masse de l'huile, de l'eau et du polymère. Au premier membre du système,  $\mathbf{u}_\psi(\mathbf{x}, t)$  est la *vitesse de filtration* de la phase  $\psi$ . La variable

$$m_p = \Phi \rho_w s_w c_w + (1 - \Phi) \rho_r c_r, \quad (2.2)$$

désigne la masse totale de polymère. La signification des quantités  $R_m$ ,  $c_r$  et  $\gamma$  qui sont liées au polymère sera expliquée plus tard. Au second membre de (2.1), les termes sources  $\varsigma_o$  et  $\varsigma_w$  modélisent l'injection et/ou la production d'huile et d'eau dans les puits.

À ces lois fondamentales de type différentiel s'ajoutent des lois de fermeture de nature algébrique qui relient les différentes grandeurs figurant dans (2.1), afin d'avoir autant d'équations que d'inconnues. Ces lois de fermeture algébriques sont toutes empiriques et reflètent les connaissances phénoménologiques relatives à chaque effet physique pris en compte. Par souci de clarté, nous allons distinguer celles du milieu poreux (§2.1.2) et celles du polymère (§2.1.3).

### 2.1.2 Lois empiriques du milieu poreux

**Vitesse de Darcy et vitesse interstitielle.** La vitesse de filtration encore appelée vitesse de Darcy de chaque phase  $\psi \in \{o, w\}$  est donnée par la loi de Darcy-Muskat [78]

$$\mathbf{u}_\psi = -\frac{\kappa \kappa_{r,\psi}}{\mu_\psi} (\nabla p_\psi - \rho_\psi \mathbf{g} z) \quad (2.3)$$

qui généralise au cas diphasique la loi expérimentale énoncée par Darcy [26] en monophasique. La formule (2.3) fait intervenir la pesanteur  $\mathbf{g}$ , la *perméabilité absolue*  $\kappa$  du milieu poreux et les *perméabilités relatives*  $\kappa_{r,\psi}$ , les viscosités  $\mu_\psi$  et les pressions  $p_\psi$  des phases. Le rapport

$$\Lambda_\psi = \frac{\kappa_{r,\psi}}{\mu_\psi}, \quad (2.4)$$

est appelé la *mobilité* de la phase  $\psi$ .

La notion de vitesse de filtration  $\mathbf{u}_\psi$  est différente de celle de *vitesse interstitielle*  $\mathbf{v}_\psi$ , qui mesure la vitesse individuelle des molécules de la phase  $\psi$  et qui est donnée par

$$\mathbf{v}_\psi = \frac{1}{s_\psi} \mathbf{u}_\psi. \quad (2.5)$$

**Perméabilités relatives.** La perméabilité absolue  $\kappa$  d'un milieu poreux caractérise son aptitude à se laisser traverser par un fluide sous l'effet d'un gradient de pression. Dans le cas d'un écoulement multiphasique, on définit la perméabilité relative d'un fluide comme le rapport entre la perméabilité mesurée pour la saturation du fluide considéré et la perméabilité du milieu définie pour un seul fluide. La perméabilité relative  $\kappa_{r,\psi}$  de la phase  $\psi$  est une fonction croissante de la saturation de la phase en question. Elle traduit l'impact de chaque phase sur l'écoulement global. Parmi les lois empiriques modélisant les perméabilités relatives, celles retenues pour cette thèse sont les lois de Brooks [16] et Corey [24]

$$\kappa_{r,w}(s_w) = \kappa_{r,w}^{\max} \left| \frac{s_w - s_b}{s_\# - s_b} \right|_{[0,1]}^{n_w}, \quad (2.6a)$$

$$\kappa_{r,o}(s_o) = \kappa_{r,o}^{\max} \left| \frac{s_o - (1 - s_\#)}{s_\# - s_b} \right|_{[0,1]}^{n_o}, \quad (2.6b)$$

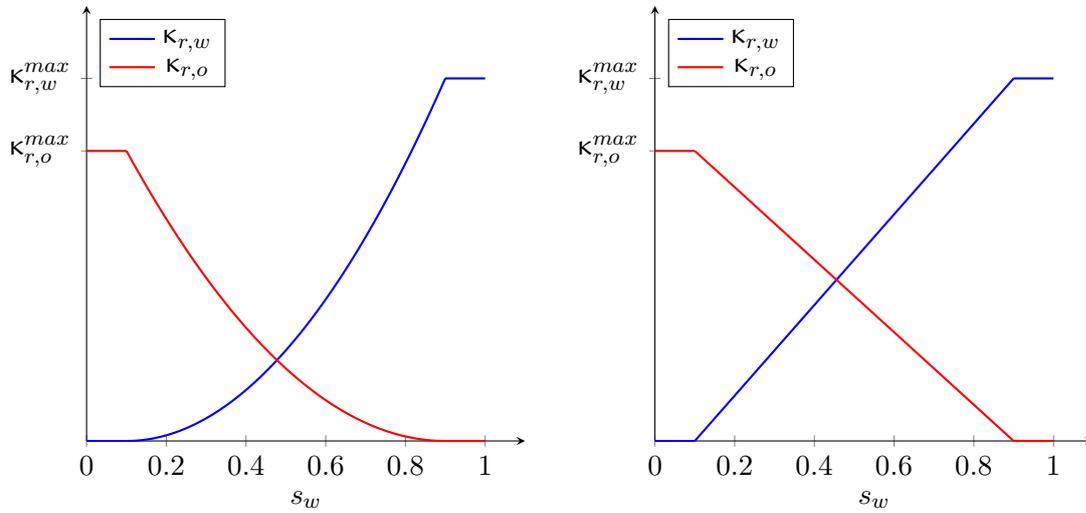


FIGURE 2.2 – Profil des perméabilités relatives avec  $s_b = 0.1 = 1 - s_{\#}$ ,  $n_o = n_w = 2$  à gauche et  $n_o = n_w = 1$  à droite.

où  $\kappa_{r,w}^{\max}$  et  $\kappa_{r,o}^{\max}$  désignent les perméabilités relatives maximales des phases eau et huile,  $n_w$  et  $n_o$  sont les exposants de Corey, et  $|\cdot|_{[0,1]}$  le prolongement constant sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Ici,  $s_b$  est la saturation en eau irréductible (souvent notée  $s_{wi}$ ), tandis que  $s_{or} = 1 - s_{\#}$  est la saturation en huile résiduelle. De ce fait, les domaines de variation physiquement admissibles pour les saturations sont

$$s_w \in [s_b, s_{\#}], \quad s_o \in [1 - s_{\#}, 1 - s_b]. \quad (2.7)$$

Sur la Figure 2.2 sont tracés deux exemples de lois de perméabilité relative. Les ingénieurs ont coutume d'appeler le cas  $n_o = n_w = 1$  (à droite) « les  $kr$  en croix ».

**Tension interfaciale et pression capillaire.** Lorsque deux fluides non miscibles sont présents dans un milieu, on observe qu'à l'interface de contact, les forces agissant sur les molécules de chacun des fluides ne sont pas identiques à celles agissant au sein de chaque phase. La Figure 2.3 illustre une interface eau/air. Pour des molécules présentes à l'intérieur de la phase eau (respectivement phase air) chaque molécule subit l'attraction de ses voisines proches et la résultante de ces forces est nulle. Cependant, si cette molécule est située proche de l'interface, la résultante des forces est une force verticale descendante pour les molécules d'eau. Cette force par unité de longueur est la *tension de surface*  $\gamma_{wo}$ .

En raison cette tension interfaciale, les fluides subissent une force de pression appelée *pression capillaire*. La Figure 2.4 matérialise le fait que pour tout tube de petit rayon placé au niveau de l'interface, sous l'effet de cette pression capillaire il apparaît une différence  $\Delta h$  entre la hauteur de l'interface dans le tube et le niveau libre. La loi de Jurin [42]

$$\Delta h = \frac{2\gamma_{wo} \cos \theta}{r \rho g} \quad (2.8)$$

stipule que la dénivellation  $\Delta h$  est proportionnelle à l'inverse du rayon  $r$  du tube et au cosinus de l'angle  $\theta$  que forment l'axe du tube capillaire et l'interface. Ainsi, comme le montre la partie gauche de la Figure 2.4, l'eau s'élève plus haut dans les tubes de plus

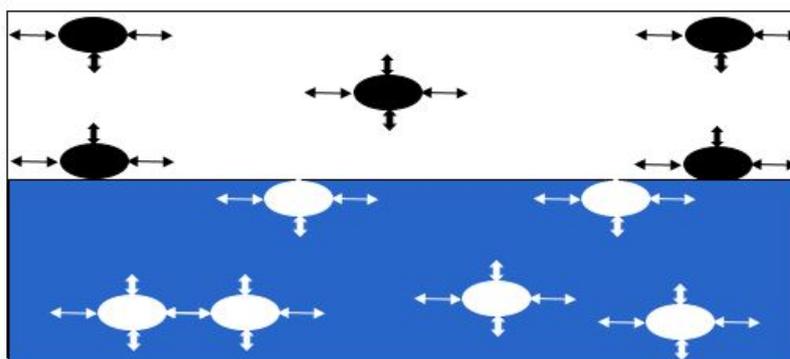
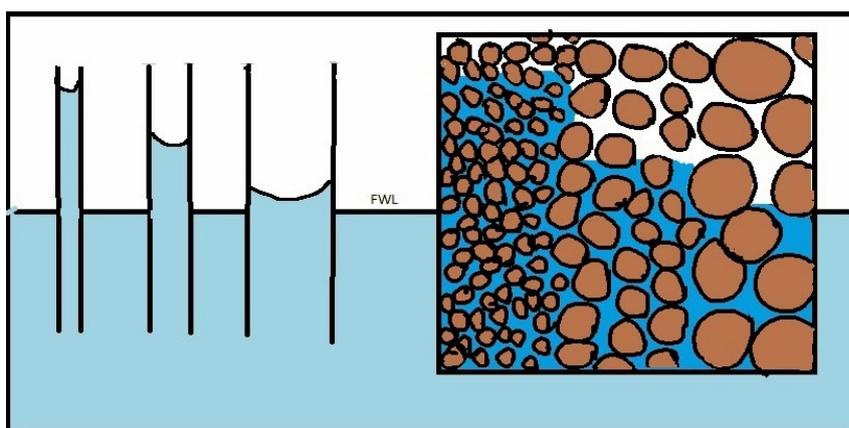


FIGURE 2.3 – Tension interfaciale.

FIGURE 2.4 – Effet de la pression capillaire © Reservoir Engineering Online <http://reservoironline.blogspot.com/2014/08/capillary-pressure.html>.

faible diamètre. Ce phénomène d'ascension capillaire est aussi observé en milieu poreux où comme l'on peut l'observer sur la partie droite de la Figure 2.4 il y a une différence de hauteur pour l'interface en fonction de la taille des pores.

L'incorporation de l'effet capillaire au sein du modèle d'écoulement diphasique s'effectue de manière macroscopique, par l'imposition de la relation algébrique

$$p_o - p_w = p_c(s_w), \quad (2.9)$$

où  $p_c(\cdot)$  est une fonction connue de  $s_w$ , appelée *loi capillaire*. Cette loi, souvent raide, peut induire des difficultés numériques [7, 18].

### 2.1.3 Lois empiriques du polymère

Les polymères utilisés sont solubles dans la phase aqueuse. Comparées à la molécule d'eau, celles des polymères sont de très grosse taille. De ce fait, différents phénomènes physiques sont observés et doivent être pris en compte. Ci-après nous décrivons les trois plus importants.

**Adsorption.** Les molécules de polymère proche de la paroi rocheuse ont une forte tendance à se fixer sur celle-ci (Figure 2.5). Cette affinité est due aux forces de van der Waals et de liaison hydrogène [81, 89, 92]. Dans la définition (2.2) de la masse totale de polymère, que nous reproduisons ci-dessous

$$m_p = \phi \rho_w s_w c_w + (1 - \phi) \rho_r c_r, \quad (2.10)$$

$\rho_r$  et  $c_r$  représentent respectivement la masse volumique de la roche et la fraction massique de polymère sur la roche (masse de polymère/masse de roche). Le produit  $(1 - \phi) \rho_r c_r$  exprime la masse de polymère adsorbé dans un volume élémentaire. Plusieurs lois modélisant l'adsorption  $c_r$  peuvent être envisagées pour le polymère. Suivant la loi d'adsorption choisie, le modèle (2.1) sera abordé de différentes manières. Parmi ces lois, citons

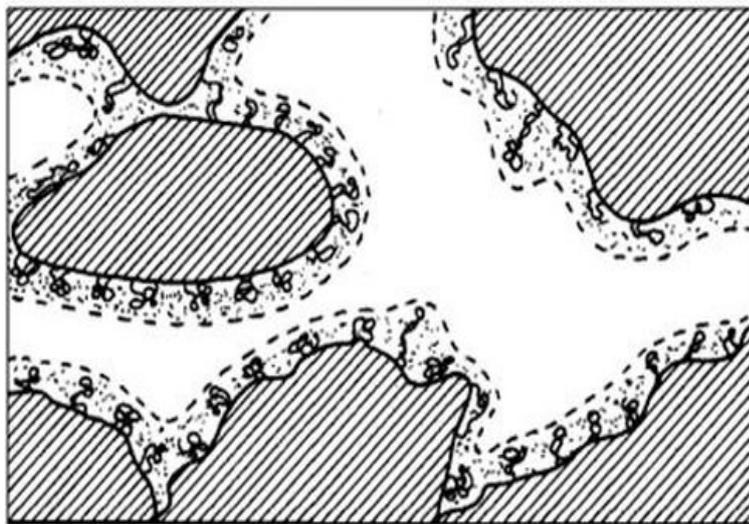


FIGURE 2.5 – Adsorption du polymère sur la paroi rocheuse © Missouri University of Science and Technology, EOR Data Group. <https://web.mst.edu/~weim/EORData/polymerEOR.html>

- La loi *isotherme de Langmuir* [27], donnée par

$$c_r(c_w) = C_p^{\max} \frac{bc_w}{1 + bc_w}, \quad (2.11)$$

où  $b > 0$  désigne le coefficient de Langmuir et  $C_p^{\max}$  la capacité maximale d'adsorption de la roche. La fonction (2.11) est une fonction strictement croissante en  $c_w$ . La Figure 2.6 représente la loi (2.11) avec des valeurs de  $C_p^{\max}$  et  $b$  tiré d'une étude expérimentale présentée dans [1]. Cette loi d'adsorption est fréquemment utilisée dans les simulations car elle est donnée par une fonction bijective, ce qui permet d'éliminer la variable de fraction massique de polymère adsorbé du système. En effet, en définissant

$$m_p = \phi \rho_w s_w c_w + (1 - \phi) \rho_r C_p^{\max} \frac{bc_w}{1 + bc_w} =: \mathcal{M}(c_w, \phi, \rho_w, s_w), \quad (2.12)$$

on peut montrer que la fonction  $\mathcal{M}$  est inversible par rapport à la fraction massique de polymère mobile  $c_w$  et son inverse  $\mathcal{M}^{-1}$  vaut

$$\begin{aligned} c_w &= \mathcal{M}^{-1}(m_p, \phi, \rho_w, s_w) \\ &:= \frac{\sqrt{(m_w/b + m_p - m_r C_p^{\max})^2 + 4m_w C_p^{\max}} - (m_w/b + m_p - m_r C_p^{\max})}{2m_w}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

avec  $m_w = \phi s_w$  et  $m_r = (1 - \phi) \rho_r$  correspondant respectivement à la masse d'eau et la masse de roche.

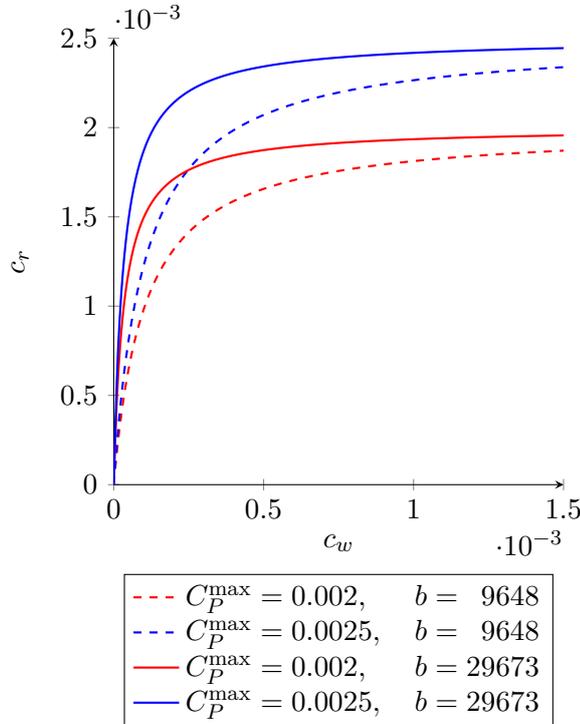


FIGURE 2.6 – Profil de l'adsorption isotherme de Langmuir.

- La loi *d'adsorption instantanée*, obtenue sous l'hypothèse que la fraction massique de polymère adsorbé est soit nulle soit égale à la capacité maximale d'adsorption de la roche. Elle est donc formulée par

$$c_r = \begin{cases} C_p^{\max} & \text{si } \phi \rho_w s_w c_w + (1 - \phi) \rho_r c_r \geq (1 - \phi) \rho_r C_p^{\max}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.14)$$

Contrairement à la loi isotherme de Langmuir, la loi instantanée n'est ni dérivable ni continue. Par conséquent, son utilisation devient moins évidente car il n'est pas possible d'éliminer du système la variable de fraction massique de polymère adsorbé sur la roche.

**Réduction de mobilité.** Lorsque l'eau est utilisée pour pousser une huile lourde, le rapport de viscosité  $\mu_o/\mu_w$  est élevé. Au-delà d'un certain seuil, on observe des *digitations* à l'interface [65, 79]. Cette instabilité peut même être analysée mathématiquement [20]. Avec du polymère dans la phase eau, le fluide obtenu possède une viscosité  $\mu_{wp}$  supérieure à celle de l'eau « pure »  $\mu_w$ . Cela implique  $\mu_o/\mu_{wp} < \mu_o/\mu_w$  et retarde l'apparition des digitations [86]. Notons

$$R_m = \frac{\Lambda_w}{\Lambda_{wp}}, \quad (2.15)$$

le rapport de mobilité entre l'eau « pure » et l'eau avec polymère. En règle générale, la fonction de réduction de mobilité est une fonction de la forme

$$R_m = \frac{R_m^{\text{tab}}(c_w, I_s, \tau)}{R_m^{\text{tab}}(0, I_s, \tau)} \left\{ 1 + \frac{c_r}{C_p^{\max}} \left[ \frac{1}{\sqrt{R_m^{\text{tab}}(0, I_s, \tau)}} - 1 \right] \right\}^{-2}, \quad (2.16)$$

où

- $R_m^{\text{tab}}$  est une fonction tabulée obtenue à partir de résultats d'expériences de laboratoire (coreflood ou viscosimètre);
- $I_s$  est la force *ionique* due à la présence des ions tels que le sel. Cette force admet comme formule analytique

$$I_s = \frac{1}{2} \sum_i c^i I_{s,i}^2, \quad (2.17)$$

où  $c^i$  est la concentration molaire de l'ion d'indice  $i$  et  $I_{s,i}$  sa charge.

- $\tau$  est la force de *cisaillement*. Cette force encore appelée force de viscosité est la force qu'une phase exerce sur les autres phases pendant son mouvement. C'est la tendance qu'a une phase à entraîner les autres dans son mouvement. Elle est modélisée par

$$\tau = \frac{|\mathbf{u}_w|}{\phi s_w} \sqrt{\frac{2\phi s_w}{\kappa \kappa_{r,w}}}. \quad (2.18)$$

Dans cette thèse la réduction de mobilité est considérée comme ne dépendant que de la fraction massique  $c_w$  de polymère dans l'eau. Sous cette hypothèse, plusieurs relations ont été proposées. En voici les plus notables.

- Les travaux de Huggins [48] débouchent sur la loi

$$R_m(c_w) = 1 + a_1 c_w + a_2 c_w^2, \quad a_{1,2} \geq 0, \quad (2.19)$$

qui est un trinôme en la fraction massique de polymère avec des coefficients  $a_i$  qui varient avec la température  $\mathcal{T}$ , la salinité  $I_s$  et le taux de cisaillement  $\tau$ .

- Flory [35] et Yuan [107] donnent la forme généralisée

$$R_m(c_w) = 1 + \sum_{i \in \mathcal{N}^*} a_i (c_w)^i, \quad a_i \geq 0. \quad (2.20)$$

- De Gennes [29] préconise la loi analytique

$$R_m(c_w) = 1 + a_1 c_w + a_2 c_w^2 + a_4 c_w^{15/4}, \quad a_{1,2,4} \geq 0, \quad (2.21)$$

représentée sur la Figure 2.7. Cette loi expérimentale est issue d'une étude en milieu non poreux (expérience en viscosimètres) mais les résultats obtenus peuvent être utilisés dans le cas d'un écoulement en milieu poreux [84].

À l'instar de nombreux modèles numériques de simulation en milieu poreux [33, 69, 90, 107], c'est cette dernière loi (2.21) qui sera retenue dans ce manuscrit. Sauf mention contraire, les valeurs des coefficients  $a_i$  sont choisies constantes, égales à

$$a_1 = 2 \cdot 10^3, \quad a_2 = 2.8 \cdot 10^6, \quad a_4 = 9 \cdot 10^{19/2}.$$

Ces valeurs résultent d'une expérience de laboratoire [29],

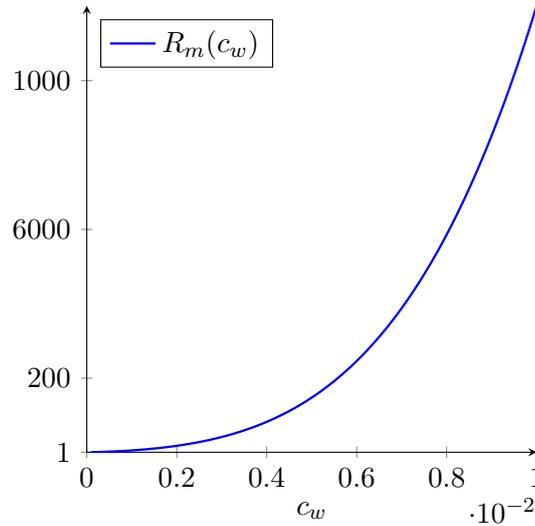


FIGURE 2.7 – Profil de la loi (2.21) de réduction de mobilité de la phase eau avec  $a_1 = 2 \cdot 10^3$ ,  $a_2 = 2.8 \cdot 10^6$  et  $a_4 = 9 \cdot 10^{19/2}$ .

**IPV (Inaccessible Pore Volume).** Lors de l'injection d'une solution constituée d'eau et de polymère dans une carotte initialement saturée en eau, on peut observer à la sortie de cette carotte la percée du polymère avant celle de l'eau dans laquelle il a été injecté (voir Figure 2.8 où PV désigne le volume poreux). Cette différence de vitesse a été constatée par Dawson et Lantz [28]. Soit  $\mathbf{u}_p$  la vitesse de Darcy du polymère. On peut donc écrire

$$\mathbf{u}_p = \gamma \frac{\mathbf{u}_w}{R_m} \quad (2.22)$$

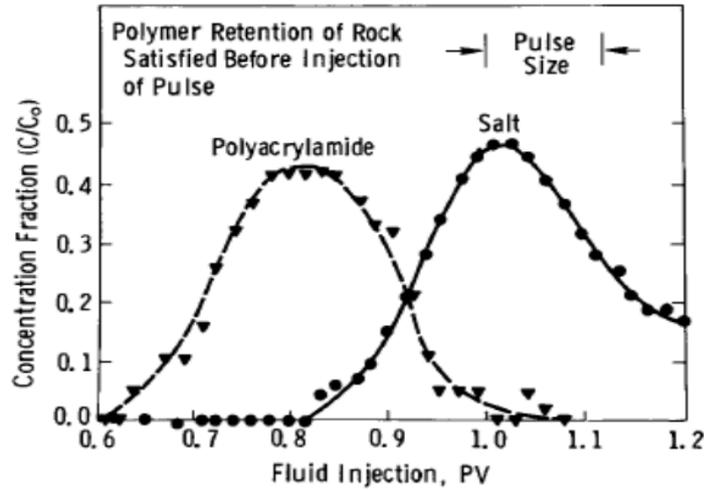


FIGURE 2.8 – Volume de pore inaccessible [106]. Le graphe présente les fractions massiques de polymère (PAM) et de sel (NaCl) dans les effluents récupérés à la sortie de la roche. La figure montre que le polymère sort en premier du milieu poreux. L'interprétation des résultats montre que la proportion de volume de pore qui n'est pas accessible au polymère est de 24%.

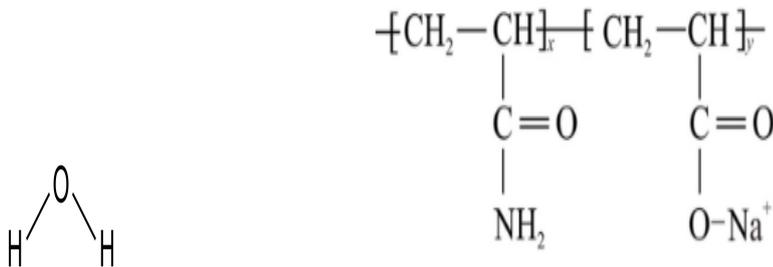


FIGURE 2.9 – Structure chimique de l'eau (gauche) et d'une séquence de Hydrolyzed Polyacrylamide (HPAM) [72] (droite).

où  $\gamma \geq 1$  désigne le facteur d'accélération du polymère vis-à-vis de la phase eau.

Sur la Figure 2.9 sont représentées la structure chimique d'une molécule d'eau et celle d'une séquence du HPAM (hydrolyzed polyacrylamide). Les molécules de polymère occupent un volume beaucoup plus important que les molécules d'eau.

Plusieurs auteurs [28,63,70,71,75,88,98] suggèrent qu'en raison de leur taille importante les molécules de polymère n'accéderaient pas à certains pores du milieu, contrairement à l'eau. Dans leurs travaux, Dawson et Lantz [28] ont représenté le milieu poreux comme étant une juxtaposition de tubes cylindriques. Ils en ont déduit que les molécules de polymère ne peuvent pas accéder à l'ensemble des cylindres dont le diamètre est inférieur à la taille du polymère. Dans ce contexte, l'appellation *Inaccessible Pore Volume* qu'ils ont introduite désigne le volume constitué par l'ensemble des cylindres de petit diamètre (relativement à la taille du polymère). Pour un milieu poreux quelconque, IPV désigne l'ensemble des volumes poreux inaccessibles au polymère (Figure 2.10). En notant  $\phi_p$  le volume poreux accessible au polymère, cette représentation conduit à

$$\gamma = \frac{\phi}{\phi_p}. \quad (2.23)$$

Cependant, la présence des pores de très petites tailles n'est pas la seule source de la différence de vitesse de filtration entre eau et polymère. Une autre cause est que le centre de gravité des molécules de polymères ne peut pas être confondu à la paroi rocheuse (Figure 2.10). On parle alors [6] de *volume de pore d'exclusion* (EPV, Exclusion Pore Volume).

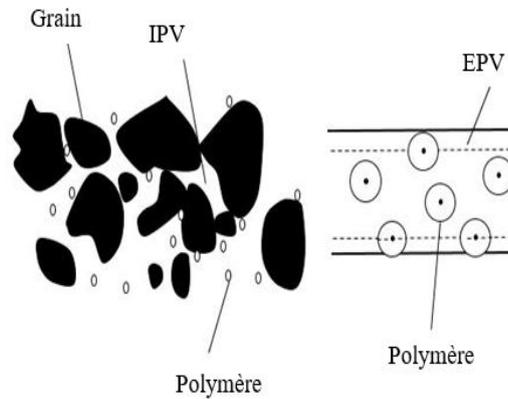


FIGURE 2.10 – Illustration des phénomènes d'IPV (gauche) et d'EPV (droite)

Les phénomènes d'IPV et d'EPV seront confondus et ramenés à la seule appellation « IPV » dans la suite du manuscrit. Ainsi, sera appelée *loi d'IPV* toute fonction  $\gamma$  censée rendre compte du facteur d'accélération. La loi (2.23) correspond à la loi d'IPV constant

$$\gamma(s_w, c_w) = 1 + \eta, \quad \eta > 0. \quad (2.24)$$

Cette loi est utilisée dans des simulateurs de réservoir. Malheureusement, les simulations avec cette loi peuvent donner des résultats physiquement non admissibles [6, 15]. L'étude

mathématiques des différentes lois présentes dans la littérature sera entreprise dans la seconde partie de ce manuscrit.

## 2.2 Modèle simplifié 1-D sans IPV

Même sans effet thermique (que nous avons délibérément omis pour alléger la présentation), le modèle complet 3-D de §2.1 est assez lourd. Cela constitue un obstacle à la compréhension des ses propriétés mathématiques, ce qui est pourtant un préalable essentiel à toute simulation numérique. Aussi, est-il naturel d'élaborer à partir du modèle complet une version réduite dont l'analyse théorique serait plus aisée.

### 2.2.1 Construction du modèle

**Hypothèses.** Pour cela, deux séries d'hypothèses simplificatrices sont adoptées. La première diminue le nombre de variables et évite les difficultés dues aux termes sources, à la pression capillaire et à la compressibilité.

1. On se place en une dimension spatiale  $x \in \mathbb{R}$  au lieu de trois. Les vitesses de filtration des phases n'ont qu'une seule composante  $u_\psi$ , celle le long de l'axe des  $x$ . Dès lors, les opérateurs  $\nabla$  et  $\text{div}$  deviennent  $\partial_x$ .
2. Il n'y a ni pesanteur, ni pression capillaire. Cela signifie que  $\mathbf{g} = 0$  et  $p_w = p_o =: p$ . De surcroît, il n'y a aucun échange avec l'extérieur via les termes sources. En d'autres termes,  $\varsigma_\psi = 0$ ,  $\psi \in \{w, o\}$ , les seconds membres de (2.1) sont nuls.
3. Les deux phases fluides sont incompressibles. Autrement dit, les densités  $\rho_\psi$  sont constantes et disparaissent, après division, dans les bilans de masse (2.1) avec seconds membres homogènes.

La deuxième série est plus discutable, puisqu'elle touche au cœur des effets physiques du polymère vus en §2.1.3.

4. Le milieu est de porosité  $\phi = 1$ . Par conséquent, il n'y a pas à prendre en compte l'adsorption ( $1 - \phi = 0$ ).
5. Les molécules d'eau et de polymère se déplacent à la même vitesse. C'est à dire que l'on néglige l'effet d'IPV en prenant  $\gamma = 1$ .

L'hypothèse 5 ne concerne que la première partie de ce manuscrit. Elle permet d'obtenir un système faiblement hyperbolique en mettant de côté l'effet d'IPV qui sera étudié dans la deuxième partie. Quant à l'effet d'adsorption, écarté par l'hypothèse 4, il fera l'objet d'un travail futur esquissé dans les perspectives en §8.

**Transformations.** Sous les hypothèses précédentes, le système (2.1) des lois de conservation devient

$$\partial_t(s_o) + \partial_x(u_o) = 0, \quad (2.25a)$$

$$\partial_t(s_w) + \partial_x(R_m^{-1}u_w) = 0, \quad (2.25b)$$

$$\partial_t(s_w c_w) + \partial_x(R_m^{-1}u_w c_w) = 0, \quad (2.25c)$$

et doit être complété par les lois de Darcy-Muskat

$$u_o = -\kappa \Lambda_o(s_o) \partial_x p, \quad (2.26a)$$

$$u_w = -\kappa \Lambda_w(s_w) \partial_x p, \quad (2.26b)$$

ainsi qu'une loi de fermeture convenable pour  $R_m(c_w)$ .

Il est judicieux [20, 21] de desserrer le couplage entre la pression  $p$  et les saturations  $s_\psi$  dans le système (2.25)–(2.26) en le reformulant sous une autre forme. En sommant les deux premières équations (2.25)–(2.26) et avec  $s_w + s_o = 1$ , il en résulte

$$\partial_x u_{\text{Tot}} = 0, \quad (2.27)$$

où

$$u_{\text{Tot}} = u_o + R_m^{-1} u_w = -\kappa [\Lambda_o(s_o) + R_m^{-1}(c) \Lambda_w(s_w)] \partial_x p \quad (2.28)$$

désigne la vitesse totale de l'écoulement. L'introduction des flux fractionnaires

$$f_o(s_o, c) = \frac{\Lambda_o(s_o)}{\Lambda_o(s_o) + \Lambda_w(s_w)/R_m(c)}, \quad (2.29a)$$

$$f_w(s_w, c) = \frac{\Lambda_w(s_w)/R_m(c)}{\Lambda_o(s_o) + \Lambda_w(s_w)/R_m(c)}, \quad (2.29b)$$

permet d'exprimer les vitesses de filtration comme

$$u_o = f_o u_{\text{Tot}}, \quad (2.30a)$$

$$R_m^{-1} u_w = f_w u_{\text{Tot}}. \quad (2.30b)$$

Le système (2.25)–(2.26) se réécrit alors sous la forme

$$\partial_x(u_{\text{Tot}}) = 0, \quad (2.31a)$$

$$\partial_t(s_w) + \partial_x(u_{\text{Tot}} f_w) = 0, \quad (2.31b)$$

$$\partial_t(s_w c_w) + \partial_x(u_{\text{Tot}} f_w c_w) = 0. \quad (2.31c)$$

La première équation (2.31a) implique que  $u_{\text{Tot}}$  ne dépend pas de  $x$ . Sa valeur  $u_{\text{Tot}} = u_{\text{Tot}}^*(t)$  fournie par (2.28) ne dépend donc que du temps  $t$ , à travers les conditions aux limites imposées.

Quitte à diviser les deux équations restantes (2.31b)–(2.31c) par  $u_{\text{Tot}}$  et à définir une autre échelle de temps  $t'$  telle que  $dt' = u_{\text{Tot}}^*(t) dt$ , on peut légitimement prendre  $u_{\text{Tot}} \equiv 1$ . Les deux dernières équations de (2.31) forment alors un système fermé

$$\partial_t(s_w) + \partial_x(f_w) = 0, \quad (2.32a)$$

$$\partial_t(s_w c_w) + \partial_x(f_w c_w) = 0. \quad (2.32b)$$

**Forme abstraite.** Pour alléger davantage les notations, nous ne précisons désormais plus les indices  $w$  pour la phase eau. Cela conduit aux notations

$$s = s_w, \quad c = c_w, \quad f(s, c) = f_w(s_w, c_w). \quad (2.33)$$

Il en découle le système

$$\partial_t(s) + \partial_x(f) = 0, \quad (2.34a)$$

$$\partial_t(sc) + \partial_x(fc) = 0, \quad (2.34b)$$

dans lequel

$$f(s, c) = \frac{R_m^{-1}(c)\Lambda_w(s)}{\Lambda_o(1-s) + R_m^{-1}(c)\Lambda_w(s)}. \quad (2.35)$$

Notons qu'en raison des hypothèses (2.6) sur les perméabilités relatives et de la forme (2.21) sur le facteur de réduction de mobilité, le flux fractionnaire  $f$  est une fonction croissante de  $s$  à  $c$  fixé, et une fonction décroissante de  $c$  à  $s$  fixé. Le système (2.34)–(2.35), qui est étudié dans la suite de ce chapitre, prend la forme abstraite

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}, \quad (2.36)$$

dans laquelle

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} s \\ sc \end{bmatrix} \in \mathcal{W} := [s_b, s_\#] \times [0, s_\#], \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f \\ fc \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

sont appelés respectivement *variables conservatives* et *flux*.

La vitesse interstitielle de la phase eau, définie en (2.5) par  $\mathbf{v}_w = s_w^{-1} \mathbf{u}_w$ , devient

$$u = \frac{f}{s}, \quad (2.38)$$

où nous avons commis un abus de notation en employant la lettre  $u$  à la place de  $v$ . Il n'y a toutefois pas de risque de confusion avec  $u_\psi$  ou  $u_{\text{Tot}}$ . La notion de vitesse interstitielle permet de transformer (2.34) en

$$\partial_t(s) + \partial_x(su) = 0, \quad (2.39a)$$

$$\partial_t(sc) + \partial_x(scu) = 0, \quad (2.39b)$$

où  $u$  est une fonction connue de  $s$  et  $c$ . L'intérêt de la forme (2.39) réside dans le fait que sa proximité avec les équations d'Euler en hydrodynamique facilite les développements théoriques à venir.

Sauf mention explicite du contraire, les exposants de Corey sont pris égaux à

$$n_w = n_o = 2, \quad (2.40)$$

valeurs pour lesquelles la fonction  $f$  vérifie les hypothèses de Buckley-Leverett [17]

1.  $f(s_b, c) \equiv 0$  et  $f(s_\#, c) \equiv 1$  ;
2.  $f_s(s, c) > 0$  pour  $(s, c) \in ]s_b, s_\#[ \times [0, 1]$  ;
3.  $f_c(s, c) < 0$  pour  $(s, c) \in ]s_b, s_\#[ \times [0, 1]$  ;
4. Pour tout  $c \in [0, 1]$ ,  $f(\cdot, c)$  possède un unique point d'inflexion  $s^I = s^I(c) \in ]s_b, s_\#[$  et est telle que  $f_{ss}(s, c) > 0$  pour  $s_b < s < s^I$  et  $f_{ss}(s, c) < 0$  pour  $s^I < s < s_\#$ .

Ici,  $f_s = \partial f / \partial s$  désigne la dérivée de  $f$  par rapport à  $s$ ,  $f_c = \partial f / \partial c$  désigne la dérivée de  $f$  par rapport à  $c$  et  $f_{ss} = \partial^2 f / \partial s^2$  désigne la dérivée seconde de  $f$  par rapport à  $s$ . Les profils des fonctions  $f$  et  $u$  en fonction de  $s$  sont représentés dans la Figure 2.11 pour deux valeurs distinctes de  $c$ .

Le système (2.34) est un cas particulier de la famille Keyfitz-Kranzer [58]. Il fait l'objet d'une abondante littérature [49, 52, 95–97] sur l'existence de solution au problème de Cauchy.

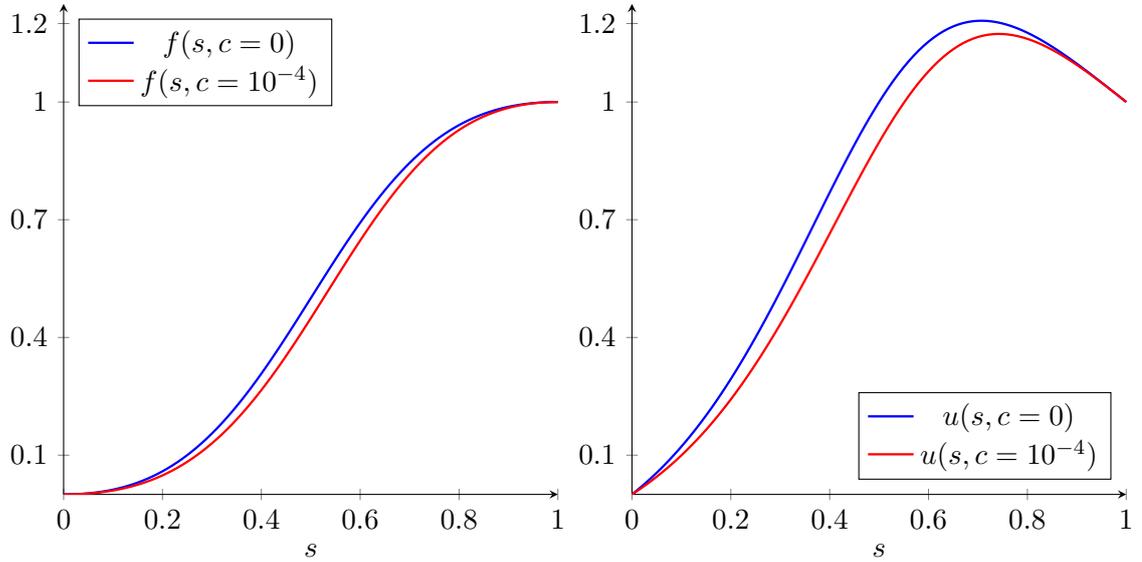


FIGURE 2.11 – Profil du flux fractionnaire (gauche) et de la vitesse (droite) avec  $s_b = 0$  et  $s_{\sharp} = 1$ .

### 2.2.2 Hyperbolicité faible

La première question à se poser concernant (2.34) est de savoir s'il est hyperbolique. Rappelons que [39, 66] pour un système abstrait de la forme (2.36), une *valeur propre* associée à un état  $\mathbf{w} \in \mathscr{W}$  donné est un zéro  $\lambda = \lambda(\mathbf{w}) \in \mathbb{C}$  a priori complexe de l'équation caractéristique

$$\det(\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f}(\mathbf{w}) - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité. Lorsqu'une valeur propre  $\lambda(\mathbf{w}) \in \mathbb{R}$  est réelle, on parle de *vitesse caractéristique* car elle correspond à une vitesse de propagation finie d'une onde dans le système. Si toutes les valeurs propres de  $\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f}(\mathbf{w})$  sont réelles et si de plus on dispose de base de vecteurs propres, alors on dit que le système est *hyperbolique* en  $\mathbf{w}$ . Si les valeurs propres de  $\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f}(\mathbf{w})$  sont réelles et distinctes deux à deux (ce qui implique l'existence d'une base de diagonalisation), on dit que le système est *strictement hyperbolique* en  $\mathbf{w}$ .

**Valeurs propres.** Les valeurs propres étant invariantes par changement de variables, on choisit de travailler avec les variables primitives  $(s, c)$  pour rendre les calculs plus abordables. Dans ce nouveau jeu de variables et sous réserve de régularité des solutions, le système (2.39) prend la forme quasi-linéaire

$$\partial_t s + (u + s u_s) \partial_x s + u_c \partial_x c = 0, \quad (2.41a)$$

$$\partial_t c + u \partial_x c = 0, \quad (2.41b)$$

avec  $u_s = \partial u / \partial s$  et  $u_c = \partial u / \partial c$ . De manière plus abstraite, on a

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{J}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (2.42)$$

en posant

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} s \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} u + su_s & su_c \\ 0 & u \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Les valeurs propres sont racines de l'équation

$$\det(\mathbf{J}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

qui s'écrit en l'occurrence

$$(u + su_s - \lambda)(u - \lambda) = 0.$$

On en tire que

$$\lambda_{[s]} = f_s = u + su_s, \quad \lambda_{[c]} = u. \quad (2.44)$$

En vertu des hypothèses précédentes sur  $f_s$  et  $u$ , les deux valeurs propres sont toutes positives. On constate néanmoins que les deux valeurs propres (2.44) ne sont pas naturellement ordonnées. Selon l'état  $\mathbf{v}$  considéré, on peut avoir  $\lambda_{[s]} \leq \lambda_{[c]}$  ou  $\lambda_{[s]} \geq \lambda_{[c]}$ .

**Vecteurs propres et résonance.** Les vecteurs propres à droite associés à  $\lambda_{[s]}$  et  $\lambda_{[c]}$  sont respectivement

$$\mathbf{r}_{[s]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{[c]} = \begin{bmatrix} u_c \\ -u_s \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

On convient d'appeler *onde s* une onde associée à la valeur propre  $\lambda_{[s]}$  et *onde c* une onde associée à la valeur propre  $\lambda_{[c]}$ . La valeur propre  $\lambda_{[c]}$  est *linéairement dégénérée* (LD), c'est-à-dire

$$\nabla \lambda_{[c]} \cdot \mathbf{r}_{[c]} = 0. \quad (2.46)$$

L'onde *c* est par conséquent une *discontinuité de contact*, qui peut être vue à la fois comme étant un choc ou une détente. L'onde *s* n'a pas une nature déterminée, car la quantité  $\nabla \lambda_{[s]} \cdot \mathbf{r}_{[s]}$  change de signe suivant la concavité du flux fractionnaire. En fait,

$$\nabla \lambda_{[s]} \cdot \mathbf{r}_{[s]} = f_{ss} \quad (2.47)$$

et l'on a

$$\nabla \lambda_{[s]} \cdot \mathbf{r}_{[s]} \begin{cases} > 0 & \text{si } s < s^I(c), \\ = 0 & \text{si } s = s^I(c), \\ < 0 & \text{si } s > s^I(c). \end{cases} \quad (2.48)$$

Lorsque  $u_s = 0$ , les valeurs propres coïncident l'une avec l'autre, c'est-à-dire  $\lambda_{[s]} = \lambda_{[c]} = u$ . Pour cette valeur propre double, les vecteurs propres (2.45) deviennent colinéaires. Par conséquent, on perd la base de vecteurs propres. On dit qu'il y a *résonance* et que le système devient *faiblement hyperbolique* en tout état de *transition* où  $u_s = 0$ .

La résonance est susceptible d'engendrer des instabilités polynomiales en  $t$  dans la solution. Regardons en effet l'analyse de stabilité au sens des perturbations linéarisées. Si l'on pose

$$\mathbf{w}(x, t) = \bar{\mathbf{w}} + \delta \mathbf{w}(x, t)$$

une solution stationnaire  $\bar{\mathbf{w}}$  de (2.36), alors au premier ordre  $\delta \mathbf{w}$  vérifie

$$\partial_t \delta \mathbf{w} + \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f}(\bar{\mathbf{w}}) \partial_x \delta \mathbf{w} = 0. \quad (2.49)$$

Une analyse de Fourier [39, 40] de (2.49) montre que si le système est hyperbolique en  $\bar{\mathbf{w}}$ , alors  $\delta\mathbf{w}$  reste borné en temps. Par contre, si le système n'est que faiblement hyperbolique en  $\bar{\mathbf{w}}$ , alors  $\delta\mathbf{w}$  s'amplifie polynomialement en temps. Ce comportement résulte d'une propriété concernant l'exponentielle d'un bloc de Jordan [46, 47]. Pour un problème de Riemann, ce type d'instabilité se manifeste souvent par l'apparition d'un  $\delta$ -choc dont l'amplitude varie polynomialement en  $t$ .

Cela dit, une analyse linéaire n'est pas toujours pertinente lorsque le système considéré est non linéaire. L'analyse dans le cas non linéaire est difficile et ne se fait qu'au cas par cas. Toutes sortes de situation peuvent se produire pour un système quelconque quant à l'effet d'une résonance. Celui de (2.36) se comporte de manière analogue à celle d'un modèle non linéaire  $2 \times 2$  d'Isaacson-Temple [50, 51] ou des modèles plus célèbres comme la tuyère à section variable [2, 38] ou Baer-Nunziato [3] : il n'y a pas de  $\delta$ -choc dans la solution du problème de Riemann ; en revanche, celle-ci peut ne pas exister ou ne pas être unique. En cela, le comportement de (2.36) diffère de celui des gaz sans pression [12, 67] ou de Burgers matriciel [56, 57, 80], où il apparaît systématiquement des  $\delta$ - ou  $\delta'$ -chocs dans la solution qui est unique.

**Partitionnement de l'espace des phases.** Pour chaque valeur de fraction massique donnée  $c \in [0, 1]$ , il existe une unique valeur de saturation  $s_T(c) \in ]0, 1[$  pour laquelle se produit la résonance, i.e.,  $u_s(s_T(c), c) = 0$  (cf. Figure 2.11). Ainsi, l'espace des phases

$$\mathcal{V} = \{(s, c) \in [s_\nu, s_\#] \times [0, 1]\} \quad (2.50)$$

peut être partitionné en trois régions :

- La courbe de résonance

$$\Gamma := \{(s, c) : s = s_T(c)\}. \quad (2.51)$$

Sur cette courbe, le système n'est pas hyperbolique. Les deux ondes coïncident  $\lambda_{[s]} = \lambda_{[c]}$  et les vecteurs propres à droite sont colinéaires.

- Le demi-espace des faibles saturations

$$\mathcal{L} := \{(s, c) : s \leq s_T(c)\}. \quad (2.52)$$

Sur  $\mathcal{L} \setminus \Gamma$ , le système est hyperbolique et l'onde  $s$  est plus rapide que l'onde  $c$ , c'est-à-dire  $\lambda_{[s]} \geq \lambda_{[c]}$ .

- Le demi-espace des fortes saturations

$$\mathcal{R} := \{(s, c) : s \geq s_T(c)\}. \quad (2.53)$$

Sur  $\mathcal{R} \setminus \Gamma$ , le système est strictement hyperbolique et l'onde  $s$  est moins rapide que l'onde  $c$ , c'est-à-dire  $\lambda_{[s]} < \lambda_{[c]}$ .

Puisque que  $f$  vérifie les hypothèses de Buckley-Leverett [17], les sous-domaines précédents (2.51) peuvent se réécrire

$$\mathcal{L} = \{(s, c) : u_s \geq 0\}, \quad (2.54a)$$

$$\mathcal{R} = \{(s, c) : u_s \leq 0\}, \quad (2.54b)$$

$$\Gamma = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}. \quad (2.54c)$$

La Figure 2.12 décrit les ensembles  $\Gamma$ ,  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$  pour une expression de réduction de mobilité donnée par  $R_m(c) = 1 + c$ . En effet, cette formule qui sera utilisée dans la construction des figures de cette section permet de mieux représenter entièrement les parties  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$ .

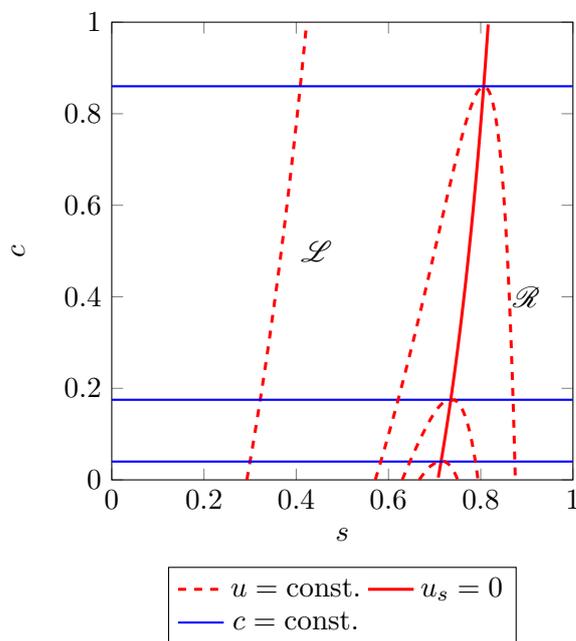


FIGURE 2.12 – Courbe de résonance, courbes d’ondes, régions  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$  pour  $s_b = 0$ ,  $n_w = 2$ ,  $n_o = 2$ ,  $s_{\ddagger} = 1$  et  $R_m(c) = 1 + c$ .

**Courbes d’onde.** Dans l’espace des phases  $\mathcal{V}$ , une courbe d’onde associée à un champ de valeur propre  $\lambda$  est l’ensemble des états connectables à un état fixé par une  $\lambda$ -détente ou un  $\lambda$ -choc admissible en un sens à préciser. La géométrie des courbes d’onde pour un système de Keyfitz-Kranzer est particulièrement simple.

Commençons par les courbes de détente, qui peuvent être caractérisées par les invariants de Riemann. Par définition, un *invariant de Riemann* associé à un champ de valeur propre  $\lambda$  est une fonction  $\phi$  de l’état telle que

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{r} = 0,$$

où  $\mathbf{r}$  est le vecteur propre à droite de  $\lambda$ . Un tel invariant de Riemann reste constant le long d’une courbe de  $\lambda$ -détente. Pour le système (2.36), chaque onde  $s$  et  $c$  admet un invariant de Riemann associé, donné par

$$\phi_{[s]} = c, \quad \phi_{[c]} = u. \quad (2.55)$$

Il suffit en effet de vérifier que  $\nabla_{\mathbf{v}} \phi_{[s]} \cdot \mathbf{r}_{[s]} = 0$  et  $\nabla_{\mathbf{v}} \phi_{[c]} \cdot \mathbf{r}_{[c]} = 0$ . Ainsi,  $c$  reste constant le long d’une courbe de  $s$ -détente et  $u$  reste constant le long d’une courbe  $c$ -détente. Comme l’onde  $c$  est LD, on peut affirmer tout de suite que les courbes d’onde associées au champ  $\lambda_{[c]} = u$  sont de la forme

$$u = \text{const.} \quad (2.56)$$

La détermination des courbes d’onde associées au champ  $\lambda_{[s]} = f_s$  est un peu plus délicate. Pour le moment, on ne connaît que les courbes de  $s$ -détente qui sont de la forme  $c = \text{const.}$  Il manque les courbes de  $s$ -choc. Notons par  $[[\cdot]]$  le saut à travers un choc. En

éliminant la vitesse  $\sigma$  des relations de Rankine-Hugoniot

$$\begin{aligned} \llbracket su \rrbracket &= \sigma \llbracket s \rrbracket, \\ \llbracket scu \rrbracket &= \sigma \llbracket sc \rrbracket, \end{aligned}$$

on obtient

$$\llbracket su \rrbracket \llbracket sc \rrbracket - \llbracket s \rrbracket \llbracket scu \rrbracket = 0.$$

Après développement des deux membres et simplification, il vient que

$$\check{s}^2 \llbracket u \rrbracket \llbracket c \rrbracket = 0, \quad (2.57)$$

où  $\check{s}$  est la moyenne géométrique des deux  $s$  de part et d'autre du choc. La solution  $\llbracket u \rrbracket = 0$  correspond à l'onde  $c$  déjà vue. L'autre solution  $\llbracket c \rrbracket = 0$  correspond donc à l'onde  $s$ . On en déduit que toutes les courbes d'onde associées au champ  $\lambda_{[s]} = f_s$  sont de la forme

$$c = \text{const.} \quad (2.58)$$

Ainsi, une particularité du système de Keyfitz-Kranzer est que les courbes de choc coïncident avec les courbes de détente pour toutes les valeurs propres, y compris celle qui n'est pas LD.

La Table 2.1 récapitule les éléments propres du système. Les deux familles de courbe d'onde sont représentées sur la Figure 2.12. On peut démontrer [52] que toute courbe  $u = \text{const}$  atteint sa valeur maximale de  $c$  en un point de la courbe de résonance  $\Gamma$ .

| Écoulement sans IPV  |                                 |        |                    |
|--|---------------------------------|--------|--------------------|
| nom de l'onde  | valeur propre                   | nature | courbe d'onde      |
| onde $s$   | $\lambda_s = u + s\partial_s u$ | –      | $c = \text{const}$ |
| onde $c$   | $\lambda_c = u$                 | LD     | $u = \text{const}$ |
| résonance en $\Gamma = \{\mathbf{v} \mid \partial_s u = 0\}$ , perte de la base de diagonalisation |                                 |        |                    |

TABLE 2.1 – Éléments propres du système (2.39).

### 2.2.3 Critères de sélection

Une autre difficulté notable du système (2.36) est l'absence de toute entropie strictement convexe. Autrement dit, il n'existe aucun couple  $(\eta, \vartheta)$  de fonctions de  $(s, sc)$ , avec  $\eta$  strictement convexe par rapport à  $\mathbf{w} = (s, sc)$ , telles que les solutions régulières de (2.39) satisfassent l'équation de conservation supplémentaire

$$\partial_t \eta(\mathbf{w}) + \partial_x \vartheta(\mathbf{w}) = 0, \quad (2.59)$$

laquelle pourrait alors servir de critère de sélection [39, 40] pour les solutions discontinues en devenant une inégalité  $\partial_t \eta + \partial_x \vartheta \leq 0$ . Certes, on peut trouver quelques couples  $(\eta, \vartheta)$  vérifiant (2.59). Malheureusement,  $\eta$  n'est pas strictement convexe et n'a de surcroît aucun sens physique.

Comme pour d'autres systèmes non linéaires résonants (modèle d'Isaacson-Temple [50, 51], tuyère à section variable [2, 38], Baer-Nunziato [3]), il n'y a pas unicité de la solution

du problème de Riemann. Cependant, Isaacson et Temple [52] ont réussi à montrer qu'il est possible de retrouver l'unicité en instaurant deux critères de sélection : la condition de Lax [60, 61] et une condition d'« entropie » supplémentaire. Cette section décrit ces deux critères de sélection. La structure de la solution correspondante sera détaillée en §2.2.4.

Soient  $\mathbf{v}_I$  et  $\mathbf{v}_{II}$  deux états de  $\mathcal{V}$ . On utilise la notation

$$\mathbf{v}_I \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{II}$$

lorsque les deux états sont reliés par une onde  $s$  et la notation

$$\mathbf{v}_I \xrightarrow{c} \mathbf{v}_{II}$$

lorsque les deux états sont reliés par une onde  $c$ .

**Condition de Lax.** La *condition d'entropie de Lax* [60, 61] porte sur la compatibilité des vitesses des ondes  $s$  et  $c$ . Soient  $\mathbf{v}_L$  et  $\mathbf{v}_R$  deux états de  $\mathcal{V}$ , séparés par une onde  $s$  et une onde  $c$ . La condition d'entropie de Lax stipule que :

- la succession d'ondes  $\mathbf{v}_L \xrightarrow{c} \mathbf{v}_I \xrightarrow{s} \mathbf{v}_R$  n'est possible que si  $\lambda_{[s]}(\mathbf{v}_I) \geq \lambda_{[c]}(\mathbf{v}_I)$  ;
- la succession d'ondes  $\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_I \xrightarrow{c} \mathbf{v}_R$  n'est possible que si  $\lambda_{[c]}(\mathbf{v}_I) \geq \lambda_{[s]}(\mathbf{v}_I)$ .

Or, la condition de Lax ne s'applique que sur les sous-domaines où le système est strictement hyperbolique, donc sur les domaines  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$  séparément. Lorsque la solution comporte une résonance, il n'est plus possible de construire et d'assurer l'unicité de la solution avec ce critère. Cela arrive par exemple pour deux états  $\mathbf{v}_L$  et  $\mathbf{v}_R$  situés de part et d'autre de  $\Gamma$ , ayant des fractions de masse de polymère et vitesses identiques.

**Condition d'Isaacson-Temple.** La *condition d'entropie d'Isaacson-Temple* [52] stipule que deux états  $\mathbf{v}_L$  et  $\mathbf{v}_R$  ne peuvent être liés par l'onde  $c$  que s'ils sont soit tous deux dans  $\mathcal{R}$ , soit tous deux dans  $\mathcal{L}$ . Seules les ondes  $s$  peuvent traverser  $\Gamma$ .

La présence du mot « entropie » dans la terminologie de cette condition, au demeurant très naturelle, est simplement due à l'usage en la matière. Le système n'admet pas d'entropie strictement convexe, comme signalé en début de section.

## 2.2.4 Solution du problème de Riemann

**Théorème 2.1** (Isaacson-Temple [52]). *Pour tout couple  $\mathbf{v}_L = (s_L, c_L)$  et  $\mathbf{v}_R = (s_R, c_R)$  appartenant à  $\mathcal{V} = [s_b, s_\#] \times [0, 1]$ , le problème de Riemann pour le système (2.34) avec la donnée initiale*

$$\mathbf{v}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{v}_R & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

*admet une unique solution vérifiant les deux critères énoncés en §2.2.3. De plus, pour tout  $t > 0$ , les fonctions  $s(x, t)$  et  $c(x, t)$  sont localement  $L^1$  en  $x$  et continues en  $t$ .*

Avant d'explicitier toutes les configurations possibles pour cette solution, il est nécessaire d'introduire quelques notations et définitions. Si  $\mathbf{v} = (s, c) \in \mathcal{V}$ , on note  $u(\mathbf{v}) = u(s, c)$  la valeur correspondante de la vitesse interstitielle. Pour tout  $c \in [0, 1]$ , on note  $u_T(c) = u(s_T(c), c)$ .

Pour tout état  $\mathbf{v}_L = (s_L, c_L) \in \mathcal{V}$ , on définit les sous-ensembles suivants :

$$\mathcal{R}_1(s_L, c_L) := \mathcal{R} \cap \{(s, c) : u(s, c) \leq u_T(c_L)\};$$

$$\mathcal{R}_2(s_L, c_L) := \mathcal{L} \cap \{(s, c) : c \geq c_L\};$$

$$\mathcal{R}_3(s_L, c_L) := (\mathcal{R}_1(s_L, c_L) \cup \mathcal{R}_2(s_L, c_L))^c = \{(s, c) : c \leq c_L\} \setminus \mathcal{R}_1(s_L, c_L);$$

$$\mathcal{L}_1(s_L, c_L) := \mathcal{R} \cap \{(s, c) : u(s, c) \leq u(s_L, c_L)\};$$

$$\mathcal{L}_2(s_L, c_L) := \mathcal{L} \cap \{(s, c) : u_T(c) \leq u(s_L, c_L)\};$$

$$\mathcal{L}_3(s_L, c_L) := (\mathcal{L}_1(s_L, c_L) \cup \mathcal{L}_2(s_L, c_L))^c = \{(s, c) : u_T(c) \geq u(s_L, c_L)\} \setminus \mathcal{L}_1(s_L, c_L).$$

Comme le montre la Figure 2.13, pour tout couple  $(s_L, c_L)$ , les familles  $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3\}$  et  $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3\}$  forment des recouvrements du domaine d'étude.

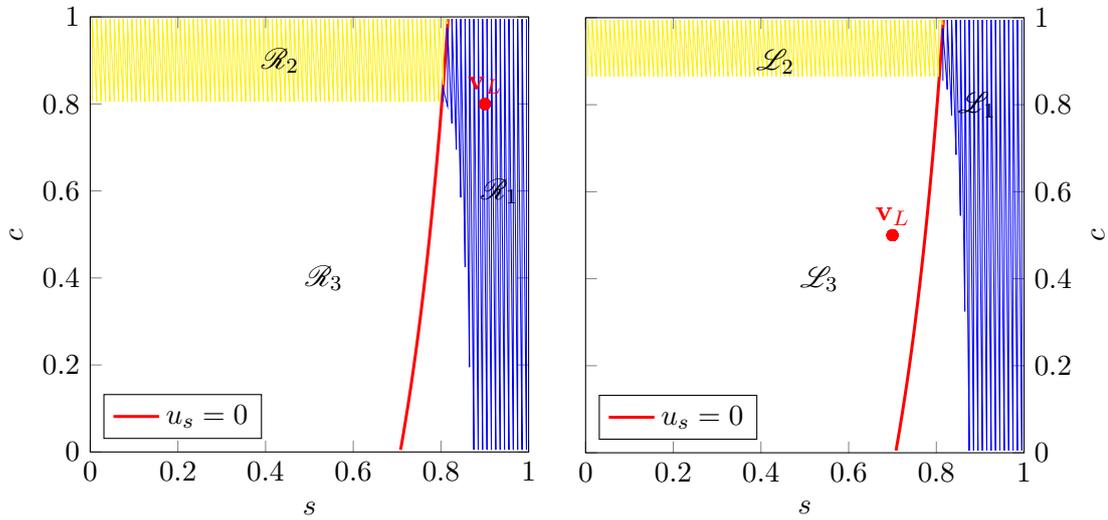


FIGURE 2.13 – Recouvrements du domaine en fonction de  $\mathbf{v}_L$ , à gauche  $\mathbf{v}_L \in \mathcal{R}$  et à droite  $\mathbf{v}_L \in \mathcal{L}$  pour  $s_b = 0$ ,  $s_{\dagger} = 1$ ,  $n_w = 2$ ,  $n_o = 2$  et  $R_m(c) = 1 + c$ .

| $\mathbf{w}_L \in$ | $\mathbf{w}_R \in$ | structure de la solution  | équations à résoudre                              |   |
|--------------------|--------------------|---|---|---|
|                    |                    |   | $\mathbf{v}_{L*} = (s_{L*}, c_L) \in \mathcal{R}$ | $\mathbf{v}_{R*} = (s_{R*}, c_L) \in \mathcal{L}$ |
| $\mathcal{R}$      | $\mathcal{R}_1$    | $\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_R$                                 | $u_{L*} = u_R$                                    | (-)   |
|                    | $\mathcal{R}_2$    | $\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_{R*} \xrightarrow{s} \mathbf{v}_R$ | $u_{L*} = u_{R*}$                                 | $s_{R*} = s_T(c_R)$                               |
|                    | $\mathcal{R}_3$    | $\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_{R*} \xrightarrow{s} \mathbf{v}_R$ | $s_{L*} = s_T(c_L)$                               | $u_{L*} = u_{R*}$                                 |
| $\mathcal{L}$      | $\mathcal{L}_1$    | $\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_R$                                 | $u_{L*} = u_R$                                    | (-)   |
|                    | $\mathcal{L}_2$    | $\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_{R*} \xrightarrow{s} \mathbf{v}_R$ | $u_{L*} = u_{R*}$                                 | $s_{R*} = s_T(c_R)$                               |
|                    | $\mathcal{L}_3$    | $\mathbf{v}_L \xrightarrow{c} \mathbf{v}_{R*} \xrightarrow{s} \mathbf{v}_R$                                 | (-)   | $u_{R*} = u_L$                                    |

TABLE 2.2 – Structure de la solution du problème de Riemann pour le système (2.39).

La Table 2.2 résume la structure de la solution du problème de Riemann et donne les équations que vérifient les états intermédiaires apparaissant dans la solution. Nous allons construire au cas par cas cette solution en précisant, pour chacune des six configurations

ci-dessus (divisées en deux groupes de trois), les ondes et les états intermédiaires qui permettent de relier  $\mathbf{v}_L$  à  $\mathbf{v}_R$ .

**Cas I :**  $\mathbf{v}_L = (s_L, c_L) \in \mathcal{R}$ . Dans ce cas de figure, la résolution du problème de Riemann s'effectue en utilisant le recouvrement du domaine par la famille  $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3\}$ .

1.  $\mathbf{v}_R = (s_R, c_R) \in \mathcal{R}_1$ .

La solution est donnée par 3 états  $\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_{L^*}$  et  $\mathbf{v}_R$ , séparés par les ondes  $s$  et  $c$  de la manière suivante

$$\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L^*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_R,$$

Comme l'illustre la Figure 2.14, dans ce cas, il n'y a pas de résonance, la solution est composée d'états qui sont tous dans  $\mathcal{R}$ . L'état  $\mathbf{v}_{L^*} = (s_{L^*}, c_L)$  vérifie donc le système

$$\begin{cases} s_{L^*} \geq s_T(c_L), \\ u(\mathbf{v}_{L^*}) = u(\mathbf{v}_R). \end{cases} \quad (2.60)$$

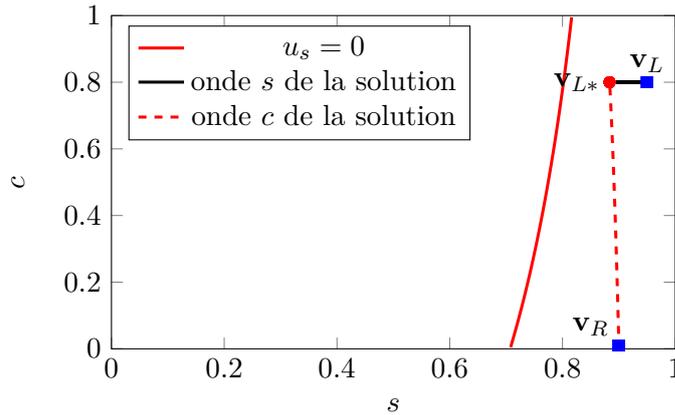


FIGURE 2.14 – Profil de la solution du problème de Riemann avec  $\mathbf{v}_L \in \mathcal{R}$  et  $\mathbf{v}_R \in \mathcal{R}_1$ .  $s_b = 0$ ,  $s_\# = 1$ ,  $n_w = 2$ ,  $n_o = 2$  et  $R_m(c) = 1 + c$ .

2.  $\mathbf{v}_R = (s_R, c_R) \in \mathcal{R}_2$ .

La solution est constituée de 4 états  $\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_{L^*}, \mathbf{v}_{R^*}$  et  $\mathbf{v}_R$ , séparés par les ondes  $s$  et  $c$  de la manière suivante

$$\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L^*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_{R^*} \xrightarrow{s} \mathbf{v}_R,$$

et les états  $\mathbf{v}_{L^*} = (s_{L^*}, c_L)$  et  $\mathbf{v}_{R^*} = (s_{R^*}, c_R)$  vérifient le système d'équations

$$\begin{cases} u(\mathbf{v}_{L^*}) = u(\mathbf{v}_{R^*}), \\ \mathbf{v}_{L^*} \in \mathcal{R}, \\ s_{R^*} = s_T(\mathbf{v}_R). \end{cases} \quad (2.61)$$

Dans ce cas, il y a résonance comme le montre la Figure 2.15. La solution est constituée des états  $\mathbf{v}_L$  et  $\mathbf{v}_{L^*}$  qui sont dans  $\mathcal{R}$ , de l'état  $\mathbf{v}_R$  qui est dans  $\mathcal{L}$  et de l'état  $\mathbf{v}_{R^*}$  qui est résonant et permet de relier  $\mathbf{v}_R \in \mathcal{L}$  à  $\mathbf{v}_{L^*} \in \mathcal{R}$  ;

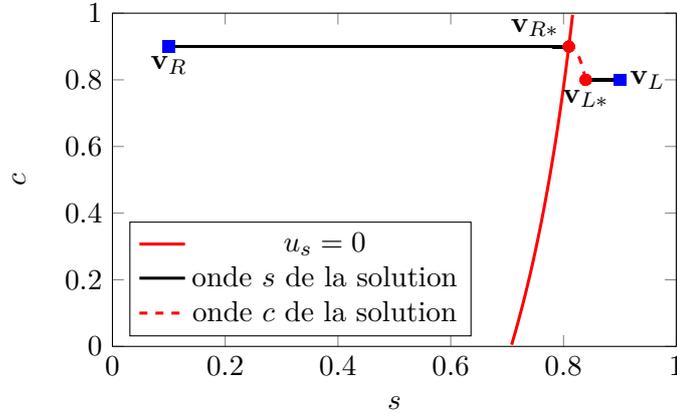


FIGURE 2.15 – Profil de la solution du problème de Riemann avec  $\mathbf{v}_L \in \mathcal{R}$  et  $\mathbf{v}_R \in \mathcal{R}_2$ .  $s_b = 0$ ,  $s_{\#} = 1$ ,  $n_w = 2$ ,  $n_o = 2$  et  $R_m(c) = 1 + c$ .

3.  $\mathbf{v}_R = (s_R, c_R) \in \mathcal{R}_3$ .

La solution est constituée de 4 états  $\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_{L*}, \mathbf{v}_{R*}$  et  $\mathbf{v}_R$ , séparés par les ondes  $s$  et  $c$  de la manière suivante

$$\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_{R*} \xrightarrow{s} \mathbf{v}_R,$$

et les états  $\mathbf{v}_{L*} = (s_{L*}, c_L)$  et  $\mathbf{v}_{R*} = (s_{R*}, c_R)$  vérifient le système

$$\begin{cases} u(\mathbf{v}_{L*}) = u(\mathbf{v}_{R*}), \\ \mathbf{v}_{R*} \in \mathcal{L}, \\ s_{L*} = s_T(\mathbf{v}_L). \end{cases} \quad (2.62)$$

Dans ce cas, l'état  $\mathbf{v}_R$  peut appartenir à  $\mathcal{R}$  ou à  $\mathcal{L}$  et, il y a résonance comme le montre la Figure 2.16. La solution est constituée des états  $\mathbf{v}_L$  et  $\mathbf{v}_R$ , de l'état  $\mathbf{v}_{R*}$  qui est dans  $\mathcal{L}$  et de l'état  $\mathbf{v}_{L*}$  qui est résonant et permet de relier  $\mathbf{v}_L$  à  $\mathbf{v}_{R*}$ .

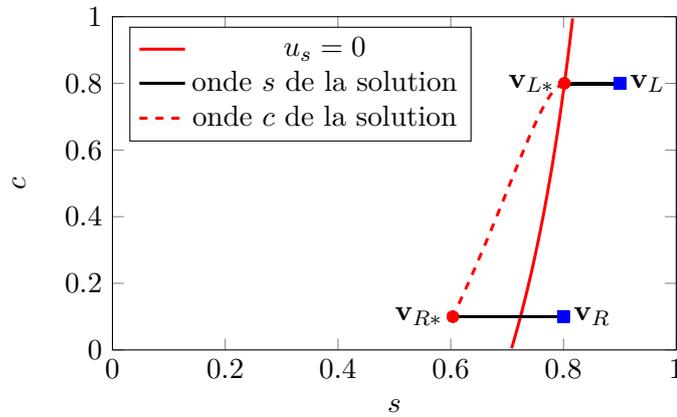


FIGURE 2.16 – Profil de la solution du problème de Riemann avec  $\mathbf{v}_L \in \mathcal{R}$  et  $\mathbf{v}_R \in \mathcal{R}_3$ .  $s_b = 0$ ,  $s_{\#} = 1$ ,  $n_w = 2$ ,  $n_o = 2$  et  $R_m(c) = 1 + c$ .

**Cas II :**  $\mathbf{v}_L = (s_L, c_L) \in \mathcal{L}$ . Dans ce cas de figure, la résolution du problème de Riemann s'effectue en utilisant le recouvrement du domaine par la famille  $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3\}$ .

1.  $\mathbf{v}_R = (s_R, c_R) \in \mathcal{L}_1$ .

La solution est donnée par 3 états  $\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_{L^*}$  et  $\mathbf{v}_R$ , séparés par les ondes  $s$  et  $c$  de la manière suivante :

$$\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L^*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_R,$$

et l'état  $\mathbf{v}_{L^*} = (s_{L^*}, c_L) \in \mathcal{R}$  vérifie

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{L^*} \in \mathcal{R}, \\ u(\mathbf{v}_{L^*}) = u(\mathbf{v}_R). \end{cases} \quad (2.63)$$

La Figure 2.17 illustre la solution dans le plan  $(s, c)$ .

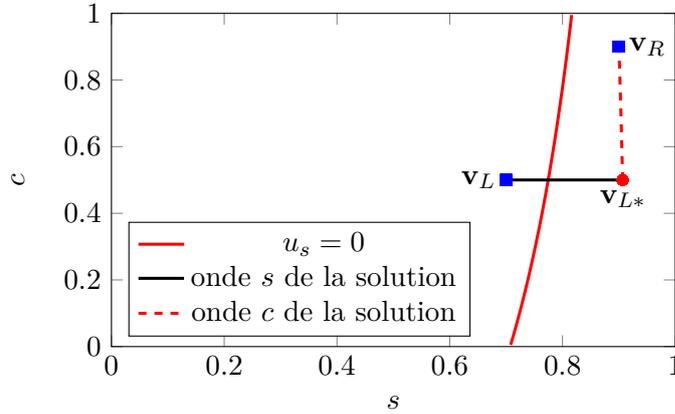


FIGURE 2.17 – Profil de la solution du problème de Riemann avec  $\mathbf{v}_L \in \mathcal{L}$  et  $\mathbf{v}_R \in \mathcal{L}_1$ .  $s_b = 0$ ,  $s_{\#} = 1$ ,  $n_w = 2$ ,  $n_o = 2$  et  $R_m(c) = 1 + c$ .

2.  $\mathbf{v}_R = (s_R, c_R) \in \mathcal{L}_2$ .

La solution est constituée de 4 états  $\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_{L^*}, \mathbf{v}_{R^*}$  et  $\mathbf{v}_R$ , séparés par les ondes  $s$  et  $c$  de la manière suivante

$$\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L^*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_{R^*} \xrightarrow{s} \mathbf{v}_R,$$

et les états  $\mathbf{v}_{L^*} = (s_{L^*}, c_L)$  et  $\mathbf{v}_{R^*} = (s_{R^*}, c_R)$  vérifient le système

$$\begin{cases} u(\mathbf{v}_{L^*}) = u(\mathbf{v}_{R^*}), \\ \mathbf{v}_{L^*} \in \mathcal{R}, \\ s_{R^*} = s_T(\mathbf{v}_R). \end{cases} \quad (2.64)$$

La Figure 2.18 illustre la solution dans le plan  $(s, c)$ .

3.  $\mathbf{v}_R = (s_R, c_R) \in \mathcal{L}_3$ .

La solution est donnée par 3 états  $\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_{R^*}$  et  $\mathbf{v}_R$ , séparés par les ondes  $s$  et  $c$  de la manière suivante

$$\mathbf{v}_L \xrightarrow{c} \mathbf{v}_{R^*} \xrightarrow{s} \mathbf{v}_R,$$

et l'état  $\mathbf{v}_{R^*} = (s_{R^*}, c_R)$  vérifie le système

$$\begin{cases} u(\mathbf{v}_{R^*}) = u(\mathbf{v}_L), \\ \mathbf{v}_{R^*} \in \mathcal{L}. \end{cases} \quad (2.65)$$

La Figure 2.19 illustre la solution dans le plan  $(s, c)$ .

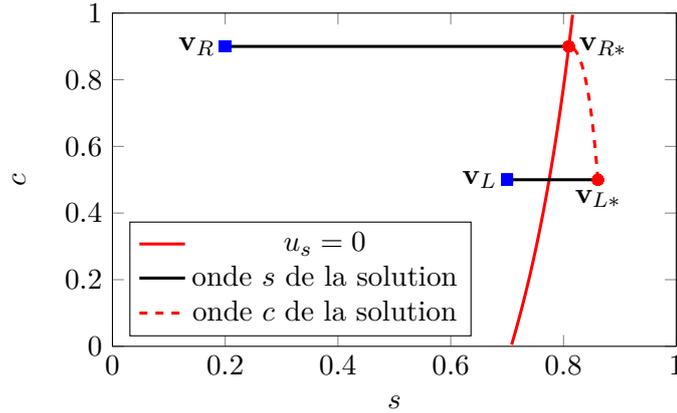


FIGURE 2.18 – Profil de la solution du problème de Riemann avec  $\mathbf{v}_L \in \mathcal{L}$  et  $\mathbf{v}_R \in \mathcal{L}_2$ .  $s_b = 0$ ,  $s_{\sharp} = 1$ ,  $n_w = 2$ ,  $n_o = 2$  et  $R_m(c) = 1 + c$ .

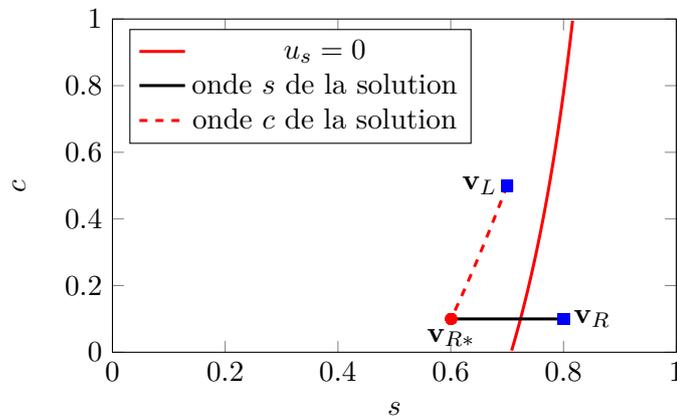


FIGURE 2.19 – Profil de la solution du problème de Riemann avec  $\mathbf{v}_L \in \mathcal{L}$  et  $\mathbf{v}_R \in \mathcal{L}_3$ .  $s_b = 0$ ,  $s_{\sharp} = 1$ ,  $n_w = 2$ ,  $n_o = 2$  et  $R_m(c) = 1 + c$ .

L'analyse mathématique du modèle (2.34) a permis de faire ressortir les particularités dudit modèle. Le modèle suscité est faiblement hyperbolique et nécessite un critère de sélection [52] pour assurer l'unicité de la solution du problème de Riemann associé. Le chapitre §3 présente le comportement d'un schéma numérique face à ces spécificités.



## Chapitre 3

# Étude d'un schéma classique

### Sommaire

---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>3.1 Schéma de Godunov</b> . . . . .                               | <b>48</b> |
| 3.1.1 Forme générale d'un schéma . . . . .                           | 48        |
| 3.1.2 Forme particulière du flux de Godunov . . . . .                | 50        |
| 3.1.3 Condition de stabilité . . . . .                               | 52        |
| <b>3.2 Simulations numériques et ordres de convergence</b> . . . . . | <b>52</b> |
| 3.2.1 Simulation des problèmes de Riemann . . . . .                  | 54        |
| 3.2.2 Ordres de convergence . . . . .                                | 61        |

---

Dans ce chapitre, nous étudions une première méthode pour la résolution numérique du modèle simplifié 1-D introduit précédemment en §2.2. Il s'agit du schéma de Godunov, dont les fondements sont rappelés en §3.1. Ce schéma très classique est a priori complexe à mettre en œuvre pour un système général. Pour le système considéré, nous montrons en §3.1.2 qu'il coïncide en fait avec le schéma décentré bien connu et apprécié des ingénieurs pour sa facilité d'implémentation.

Nous évaluons ensuite expérimentalement dans §3.2 la qualité d'approximation du schéma de Godunov sur six problèmes de Riemann représentant les six configurations de solution examinées en §2.2.4. Pour cela, une étude systématique de convergence est mise en place afin de mesurer les ordres de convergence numérique dans chaque cas. Il apparaît en §3.2.2 que si la performance du schéma de Godunov est conforme aux attentes sur les détenteurs, elle laisse beaucoup à désirer sur les chocs et les contacts. Cela motivera la recherche d'un meilleur schéma au chapitre §4.

## 3.1 Schéma de Godunov

### 3.1.1 Forme générale d'un schéma

Pour simplifier la présentation, nous supposons que le domaine de calcul est la droite infinie  $\mathbb{R}$ . Cela nous dispense d'évoquer les conditions aux limites qui sont certes nécessaires dans les simulations réalistes, notamment avec injection à l'entrée, mais qui ne posent pas de difficulté particulière.

**Discrétisation en espace et en temps.** Ce domaine est décomposé en cellules indexées par  $i \in \mathbb{Z}$  de même longueur égale à  $\Delta x > 0$ . La cellule correspondant à l'indice  $i$  est notée  $K_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , avec

$$x_{i+1/2} - x_{i-1/2} = \Delta x.$$

Les points  $x_{i-1/2}$  et  $x_{i+1/2}$  sont appelés les *bords* de la cellule  $K_i$ , tandis que le point

$$x_i = \frac{1}{2}(x_{i-1/2} + x_{i+1/2})$$

est appelé le *centre* de  $K_i$ .

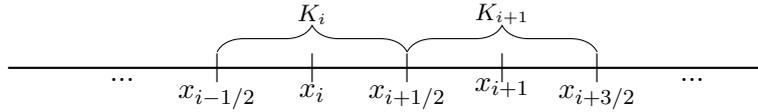


FIGURE 3.1 – Exemple d'un maillage régulier unidimensionnel.

Soit  $\Delta t > 0$  le pas de temps, que nous supposons constant pour rendre la présentation plus aisée mais qui peut être rendu variable sans difficulté au cours du temps. On définit les instants  $t^n = n\Delta t$  pour  $n \in \mathbb{N}$  auxquels on souhaite calculer une approximation de la solution  $\mathbf{w}$ . Il est clair que

$$t^{n+1} - t^n = \Delta t.$$

À ce stade, il y a deux philosophies possibles. Dans la vision des *différences finies* [68], on cherche une approximation

$$\mathbf{w}_i^n \approx \mathbf{w}(x_i, t^n) \quad (3.1)$$

des valeurs ponctuelles de la solution  $\mathbf{w}$  aux abscisses  $x_i$  et aux instants  $t^n$ . Dans celle des *volumes finis* [34], on cherche une approximation

$$\mathbf{w}_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{w}(x, t^n) dx \quad (3.2)$$

des moyennes spatiales de  $\mathbf{w}$  sur  $K_i$  aux instants  $t^n$ . L'approche des volumes finis a l'avantage de reproduire au niveau discret un bilan de conservation locale qui a lieu au niveau continu. C'est pour cette propriété de conservativité qu'elle a souvent la préférence des ingénieurs et que nous allons la retenir dans la suite. Néanmoins, il faut garder à l'esprit que la vision des différences finies peut s'avérer fort utile pour d'autres objectifs, par exemple quand il s'agira de chercher l'équation équivalente ou de monter en ordre.

**Volumes finis et conservativité discrète.** Réécrivons l'équation (2.31) sous la forme

$$\operatorname{div}_{t,x} \left[ \begin{array}{c} \mathbf{w} \\ \mathbf{f}(\mathbf{w}) \end{array} \right] = 0. \quad (3.3)$$

En intégrant cette divergence espace-temps sur  $K_i \times [t^n, t^{n+1}]$  et en appliquant la formule de Green, on obtient le bilan de matière de la cellule  $K_i$  sur la durée d'un pas de temps, à savoir

$$\begin{aligned} \int_{K_i} \mathbf{w}(x, t^{n+1}) dx - \int_{K_i} \mathbf{w}(x, t^n) dx \\ + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{w}(x_{i+1/2}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{w}(x_{i-1/2}, t)) dt = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Le bilan (3.4) s'exprime encore par

$$\Delta x (\widehat{\mathbf{w}}_i^{n+1} - \widehat{\mathbf{w}}_i^n) + \Delta t (\widehat{\mathbf{f}}_{i+1/2}^{n+1/2} - \widehat{\mathbf{f}}_{i-1/2}^{n+1/2}) = 0, \quad (3.5a)$$

en ayant défini les moyennes exactes

$$\widehat{\mathbf{w}}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{K_i} \mathbf{w}(x, t^n) dx, \quad \widehat{\mathbf{f}}_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{w}(x_{i+1/2}, t)) dt \quad (3.5b)$$

en espace pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et en temps pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Un schéma de type volumes finis s'inspire de la relation (3.5a) en décrétant que

$$\Delta x (\mathbf{w}_i^{n+1} - \mathbf{w}_i^n) + \Delta t (\mathfrak{F}_{i+1/2}^n - \mathfrak{F}_{i-1/2}^n) = 0, \quad (3.6a)$$

où le *flux numérique* à l'interface  $i + 1/2$

$$\mathfrak{F}_{i+1/2}^n \approx \widehat{\mathbf{f}}_{i+1/2}^{n+1/2} \quad (3.6b)$$

est une approximation à trouver de  $\widehat{\mathbf{f}}_{i+1/2}^{n+1/2}$ . C'est dans la définition du flux numérique  $\mathfrak{F}_{i+1/2}^n$  que réside la différence entre les schémas. Quelle que soit la définition de ce flux numérique, on voit que la relation (3.6a) s'interprète comme un bilan de conservation locale analogue à (3.5a), laquelle est satisfaite par la solution exacte. En pratique, on écrit le schéma (3.6a) sous la forme

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathfrak{F}_{i+1/2}^n - \mathfrak{F}_{i-1/2}^n), \quad (3.7)$$

qui est appelée *formule de mise à jour*.

Pour fabriquer effectivement un flux numérique, il faut se donner d'autres paradigmes. Le cadre le plus fréquemment rencontré est celui des flux à *deux points*, dans lequel le flux sur le bord  $i + 1/2$

$$\mathfrak{F}_{i+1/2}^n = \mathfrak{F}(\mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n) \quad (3.8)$$

est une fonction des deux états dans les deux cellules adjacentes  $i$  et  $i + 1$ . Il reste à prescrire la fonction à deux arguments  $\mathfrak{F}$  pour obtenir une approximation convenable de la solution. À cette fin, une condition essentielle est la *consistance* du flux, qui requiert que

$$\mathfrak{F}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \mathbf{f}(\mathbf{w}) \quad (3.9)$$

pour tout état  $\mathbf{w} \in \mathscr{W}$ . La condition (3.9) assure que le flux numérique retombe bien sur le flux de départ lorsque les deux états de part et d'autre de l'arête sont identiques.

### 3.1.2 Forme particulière du flux de Godunov

Le schéma de Godunov est une méthode de résolution numérique introduite par Godunov [41]. Historiquement, c'est le premier schéma qui exploite des informations physiques fines issues des problèmes de Riemann locaux.

**Procédure de construction.** Soient deux états  $(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) \in \mathcal{W}^2$ . Nous avons vu en §2.2.4 que le problème de Riemann associé au système (2.36) avec la donnée initiale

$$\mathbf{w}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{w}_R & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

admet une solution unique vérifiant le critère de Lax et celui d'Isaacson-Temple. De plus, cette solution est *autosemblable*, c'est-à-dire qu'elle ne dépend que du rapport  $x/t$ . On convient de la noter

$$\mathbf{w}(x, t; \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) = \mathbf{w}_{\text{Riem}}(x/t; \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R). \quad (3.10)$$

Le schéma de Godunov est un schéma de type volumes finis (3.7) avec un flux numérique à deux points (3.8) égal à

$$\mathfrak{F}_{i+1/2}^{n,G} = \mathfrak{F}^G(\mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n) := \mathbf{f}(\mathbf{w}_{\text{Riem}}(0; \mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n)). \quad (3.11)$$

Autrement dit, c'est le flux de départ évalué en la valeur de  $\mathbf{w}$  sur l'interface du problème de Riemann dans lequel les valeurs constantes de  $\mathbf{w}$  à l'instant  $n$  de part et d'autre de l'arête  $i + 1/2$  sont prises comme donnée initiale.

La formule (3.11) provient d'un raisonnement en trois étapes que nous rappelons ci-dessous, car elle sera utile au chapitre §4 pour le schéma de Glimm. Pour passer de l'instant  $n$  à l'instant  $n + 1$ , la procédure est la suivante.

1. Considérer la solution  $\mathbf{w}(\cdot, t^n)$  comme une fonction constante par morceaux, égale à  $\mathbf{w}_i^n$  sur  $]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ ;
2. Résoudre le problème de Riemann à chaque interface  $x_{i+1/2}$  avec  $\mathbf{w}_i^n$  comme valeur à gauche et  $\mathbf{w}_{i+1}^n$  comme valeur à droite;
3. Moyenner la solution obtenue à  $t^n + \Delta t$  (qui est une succession d'états constants ou de détentés sur des intervalles de longueurs plus petites que  $\Delta x$ ) sur chaque cellule  $K_i$  pour obtenir la valeur de  $\mathbf{w}_i^{n+1}$ .

L'étape 3 n'est valide que pour un pas de temps  $\Delta t$  suffisamment petit pour que les ondes de deux problèmes de Riemann en deux arêtes voisines n'interagissent pas. Nous y reviendrons en §3.1.3 à propos de la condition de stabilité.

L'équivalence entre cette procédure et les formules (3.7), (3.11) découle d'un calcul semblable à celui que nous avons fait en §3.1.1 pour établir le bilan de conservation locale (3.5a). Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages [40, 66] pour la démonstration.

**Équivalence avec le schéma décentré dans ce cas.** Regardons de plus près la formule de mise à jour

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathfrak{F}^G(\mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n) - \mathfrak{F}^G(\mathbf{w}_{i-1}^n, \mathbf{w}_i^n)] \quad (3.12a)$$

$$= \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{f}(\mathbf{w}_{\text{Riem}}(0; \mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n)) - \mathbf{f}(\mathbf{w}_{\text{Riem}}(0; \mathbf{w}_{i-1}^n, \mathbf{w}_i^n))] \quad (3.12b)$$

du schéma de Godunov pour le système (2.34). À cause des propriétés de  $f$ , les vitesses d'ondes  $u = f/s$  et  $f_s$  sont toutes positives. Il en est de même pour celle d'un éventuel  $s$ -choc. De ce fait, toutes les ondes d'un problème de Riemann vont « à droite », ce qui implique

$$\mathbf{w}_{\text{Riem}}(0; \mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n) = \mathbf{w}_i^n. \quad (3.13)$$

En définitive, le flux numérique associé au schéma de Godunov pour le modèle (2.34) s'écrit

$$\mathfrak{F}_{i+1/2}^{n,G} = \mathbf{f}(\mathbf{w}_i^n). \quad (3.14)$$

Ce flux numérique est identique au flux

$$\mathfrak{F}_{i+1/2}^{n,D} = \mathbf{f}(\mathbf{w}_i^n) \quad (3.15)$$

du schéma *décentré amont* d'un système strictement hyperbolique à valeurs propres positives. Cette heureuse coïncidence rend particulièrement aisée l'implémentation du schéma de Godunov pour ce système.

Composante par composante, la formule de mise à jour

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{f}(\mathbf{w}_i^n) - \mathbf{f}(\mathbf{w}_{i-1}^n)] \quad (3.16)$$

s'écrit

$$(s)_i^{n+1} = (s)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(s_i^n, c_i^n) - f(s_{i-1}^n, c_{i-1}^n)], \quad (3.17a)$$

$$(sc)_i^{n+1} = (sc)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [c_i^n f(s_i^n, c_i^n) - c_{i-1}^n f(s_{i-1}^n, c_{i-1}^n)]. \quad (3.17b)$$

**Calcul de la fraction massique de polymère.** Les formules (3.17) permettent d'actualiser  $s_i^{n+1}$  et  $(sc)_i^{n+1}$ . Néanmoins, on a aussi besoin de connaître  $c_i^{n+1}$  pour préparer l'itération en temps suivante. Si  $s_i^{n+1} \neq 0$ , on peut effectuer la division

$$c_i^{n+1} = \frac{(sc)_i^{n+1}}{s_i^{n+1}}. \quad (3.18)$$

Si  $s_i^{n+1} = 0$ , un traitement spécial s'impose. On commence par remarquer qu'une conséquence des équations du système (2.34) est

$$\partial_t c + u \partial_x c = 0. \quad (3.19)$$

On obtient (3.19) en multipliant (2.34a) par  $c$ , en retranchant le produit à (2.34b) et en divisant la différence par  $s$ . L'idée est alors de discrétiser directement cette équation de transport de  $c$  à la place de la formule (3.17b). La discrétisation de (3.19) se fait par décentrage amont en s'appuyant sur la positivité des vitesses. Cela conduit à

$$c_i^{n+1} = c_i^n - u_{i-1}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (c_i^n - c_{i-1}^n). \quad (3.20)$$

Une fois  $c_i^{n+1}$  obtenu, on fait le produit  $s_i^{n+1} c_i^{n+1}$  pour avoir  $(sc)_i^{n+1}$ . Le prix à payer est une perte de conservativité dans la maille  $i$  pour  $sc$ .

### 3.1.3 Condition de stabilité

En §3.1.2, nous avons dit que le pas de temps  $\Delta t$  devait être choisi « suffisamment petit ». Nous allons exprimer cette limite de manière quantitativement plus précise, ce qui débouchera sur une condition de stabilité habituellement appelée *condition CFL* (Courant-Friedrichs-Lewy).

Commençons par le cas d'un système général dans lequel les vitesses d'onde intervenant dans le problème de Riemann sur l'arête  $x_{i+1/2}$  peuvent être de signe quelconque. (Figure 3.2). Pour que les ondes créées par le problème de Riemann à l'interface  $x_{i+1/2}$  n'entrent pas en interaction avec celles des problèmes aux interfaces  $x_{i-1/2}$  et  $x_{i+3/2}$ , il suffit d'imposer que les ondes issues de l'interface  $x_{i+1/2}$  ne traversent pas les centres  $x_i$  et  $x_{i+1}$ . Autrement dit, elles peuvent parcourir une distance maximale égale à  $\Delta x/2$ , c'est-à-dire

$$\Delta t \max\{|\lambda_{[s]}|_{i+1/2}^n, |\lambda_{[c]}|_{i+1/2}^n\} < \frac{1}{2}\Delta x, \quad (3.21)$$

où  $|\lambda_{[s]}|_{i+1/2}^n$  et  $|\lambda_{[c]}|_{i+1/2}^n$  sont des majorants des valeurs absolues des vitesses des deux types d'ondes pouvant apparaître en  $i + 1/2$ . La condition (3.21) peut être légèrement renforcée en

$$\Delta t \max\{|\lambda_{[s]}|_i^n, |\lambda_{[c]}|_i^n, |\lambda_{[s]}|_{i+1}^n, |\lambda_{[c]}|_{i+1}^n\} < \frac{1}{2}\Delta x, \quad (3.22)$$

Pour que (3.22) soit satisfaite en toutes les arêtes  $i + 1/2$  du domaine, il suffit que

$$\Delta t \max_{i \in \mathbb{Z}} \max\{|\lambda_{[s]}|_i^n, |\lambda_{[c]}|_i^n\} < \frac{1}{2}\Delta x, \quad (3.23)$$

soit

$$\Delta t \max_{i \in \mathbb{Z}} \max\{|f_s(s_i^n, c_i^n)|, |u(s_i^n, c_i^n)|\} < \frac{1}{2}\Delta x, \quad (3.24)$$

Dans le cas spécifique du modèle (2.34), les vitesses d'ondes sont toutes positives (Figure 3.3). Ainsi, pour s'assurer que les ondes créées par le problème de Riemann à l'interface  $x_{i+1/2}$  n'entrent pas en interaction avec les ondes issues des problèmes aux interfaces  $x_{i-1/2}$  et  $x_{i+3/2}$ , il suffit d'imposer que les ondes issues de  $x_{i+1/2}$  ne traversent pas l'interface  $x_{i+3/2}$ . Les ondes peuvent maintenant parcourir une distance maximale égale à  $\Delta x$ , soit deux fois plus grande. Par un raisonnement analogue au précédent, on arrive à la condition

$$\Delta t \max_{i \in \mathbb{Z}} \max\{|f_s(s_i^n, c_i^n)|, |u(s_i^n, c_i^n)|\} < \Delta x. \quad (3.25)$$

Le pas de temps peut être pris deux fois plus grand.

## 3.2 Simulations numériques et ordres de convergence

Cette section est consacrée à l'étude du comportement du schéma de Godunov (3.7), (3.14). Dans un premier temps, on calcule numériquement la solution de différents problèmes de Riemann et compare les résultats obtenus aux solutions exactes construites en §2.2.4. Maîtrisant la solution exacte du problème de Riemann, on effectue ensuite une convergence en maillage pour des ondes simples afin de mesurer l'erreur commise par rapport à la solution exacte et ainsi déterminer l'ordre effectif du schéma. Les résultats

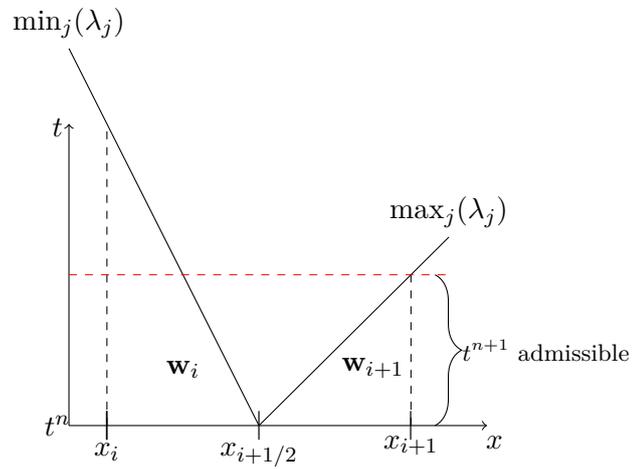


FIGURE 3.2 – Calcul du pas de temps : condition CFL pour un modèle avec des ondes positives et négatives

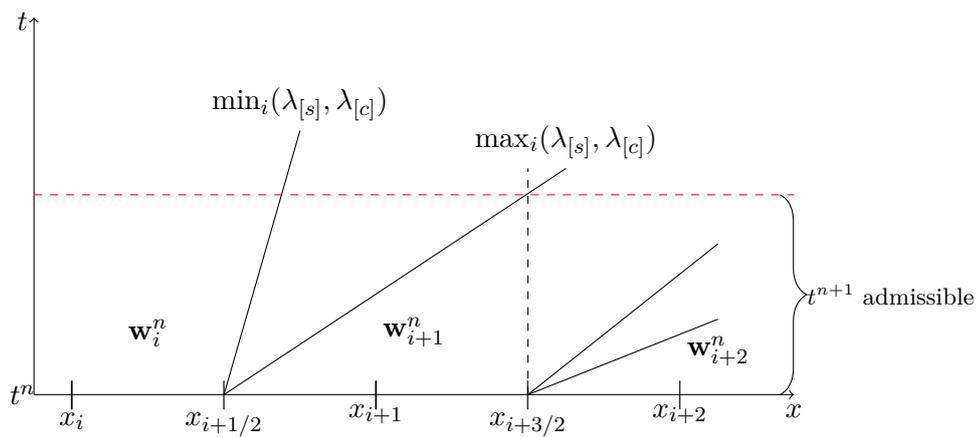


FIGURE 3.3 – Calcul du pas de temps : condition CFL adaptée au modèle (2.34)

présentés dans ce chapitre ont tous été obtenus avec la loi de réduction de mobilité présentée dans la section §2.1.

Pour fermer le système, il est imposé une condition de Dirichlet en  $x = 0$  et une condition de Neumann homogène en  $x = 1$ . La condition de Dirichlet en  $x = 0$  ne fait pas « rebondir » les ondes vers l'intérieur, dans la mesure où toutes les vitesses d'onde sont positives. Afin d'éviter l'influence de la condition de Neumann en  $x = 1$ , la discontinuité initiale est placée suffisamment loin, en  $x = 0.1$  (Figure 3.4).

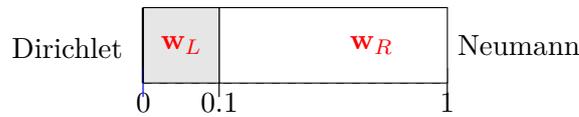


FIGURE 3.4 – Configuration initiale et conditions aux bords.

### 3.2.1 Simulation des problèmes de Riemann

Reprenons dans le même ordre les différents cas de figure énumérés dans la preuve du théorème (2.1). Les figures ci-après illustrent les résultats du schéma de Godunov pour un domaine de longueur  $L = 1$ , à l'instant  $t = 0.4$ . À l'instant initial, nous avons une configuration représentée à la Figure 3.4. Ceci revient à simuler le problème

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}) = 0 \quad (3.26a)$$

avec la donnée initiale

$$\mathbf{w}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_L & \text{si } x < 0.1, \\ \mathbf{w}_R & \text{si } x > 0.1. \end{cases} \quad (3.26b)$$

Les résultats ci-dessous ont été obtenus avec une valeur de la CFL égale à 0.25. Pour présenter les différentes configurations, il est plus commode de revenir aux variables primitives  $\mathbf{v} = (s, c)$ .

**I.**  $\mathbf{v}_L = (s_L, c_L) \in \mathcal{R}$

1.  $\mathbf{v}_R = (s_R, c_R) \in \mathcal{R}_1$ . Afin d'observer le comportement du schéma (3.16) pour

$$\mathbf{v}_L \in \mathcal{R}, \quad \mathbf{v}_R \in \mathcal{R}_1, \quad (3.27)$$

on simule le problème de Riemann (3.26) avec les données initiales

$$\mathbf{v}_L = (0.99, 10^{-4}), \quad \mathbf{v}_R = (0.99, 10^{-3}). \quad (3.28)$$

La solution est une succession de 2 ondes (voir §2.2.4) dont la configuration est

$$\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L^*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_R.$$

L'état intermédiaire  $\mathbf{v}_{L^*}$  est solution de

$$\begin{cases} c_{L^*} = c_L, \\ u(\mathbf{v}_{L^*}) = u(\mathbf{v}_R), \\ \mathbf{v}_{L^*} \in \mathcal{R}, \end{cases} \quad (3.29)$$

soit  $\mathbf{v}_{L^*} = (0.9905, 10^{-4})$ . Pour être plus précis, comme le montre la Figure 3.5,

- l'onde  $\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L^*}$  est un choc en  $x = 0.12$ ;
- l'onde  $\mathbf{v}_{L^*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_R$  est un contact en  $x = 0.516$ .

Pour cette simulation du problème de Riemann (3.28), le schéma de Godunov converge vers la solution mais reste très diffusif au niveau de l'onde de contact.

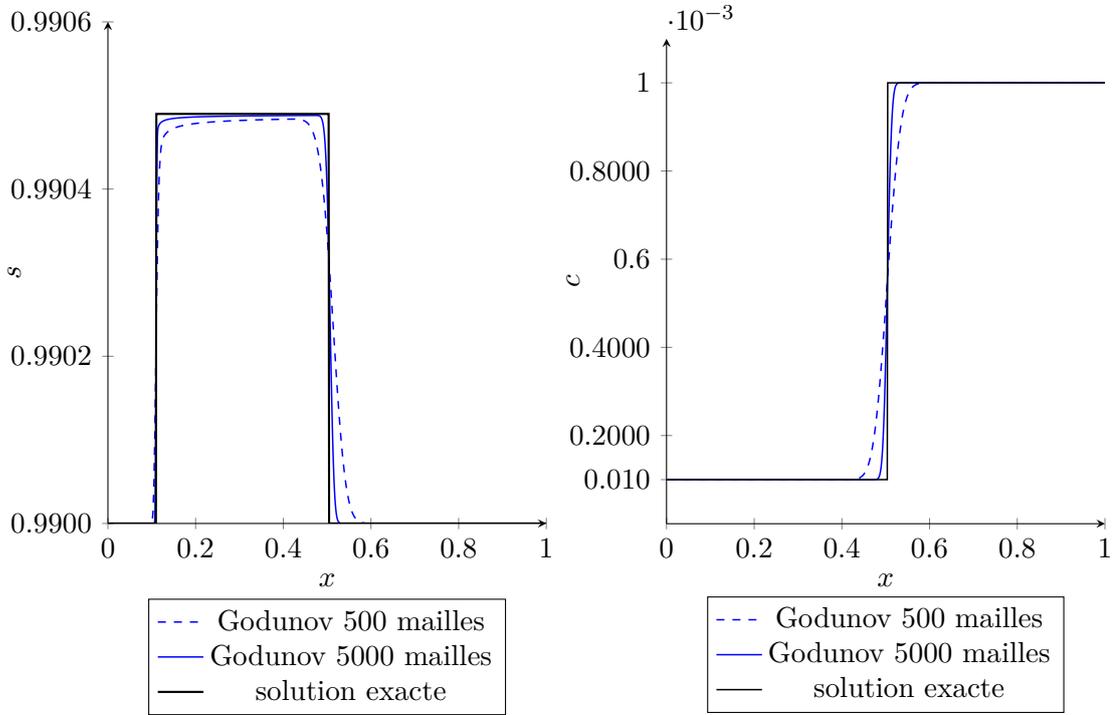


FIGURE 3.5 – Profils de saturation en eau  $s$  (à gauche) et de fraction massique  $c$  (à droite) obtenus au temps  $T = 0.4$  avec 500 et 5000 mailles pour le problème (3.28).

2.  $\mathbf{v}_R = (s_R, c_R) \in \mathcal{R}_2$ . Afin d'observer le comportement du schéma de Godunov dans la configuration

$$\mathbf{v}_L \in \mathcal{R}, \quad \mathbf{v}_R \in \mathcal{R}_2, \quad (3.30)$$

on simule le problème de Riemann (3.26) avec les données initiales

$$\mathbf{v}_L = (1, 10^{-4}), \quad \mathbf{v}_R = (0.5, 10^{-3}). \quad (3.31)$$

Rappelons que la solution est une succession de 3 ondes (voir §2.2.4 et Table 2.2) dont la configuration est

$$\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L^*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_{R^*} \xrightarrow{s} \mathbf{v}_R.$$

Les états intermédiaires  $\mathbf{v}_{L^*}$  et  $\mathbf{v}_{R^*}$  sont solutions des équations

$$\begin{cases} c_{L^*} = c_L, \\ u(\mathbf{v}_{L^*}) = u(\mathbf{v}_{R^*}), \\ \mathbf{v}_{L^*} \in \mathcal{R}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} c_{R^*} = c_R, \\ s_{R^*} = s_T(\mathbf{v}_R), \end{cases} \quad (3.32)$$

soit  $\mathbf{v}_{L^*} = (0.9583, 10^{-4})$  et  $\mathbf{v}_{R^*} = (0.9535, 10^{-3})$ . Pour être plus précis, comme le montre la Figure 3.6,

- l'onde  $\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L^*}$  est une détente s'étalant sur  $x \in [0, 1; 0.19]$ ;
- l'onde  $\mathbf{v}_{L^*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_{R^*}$  est un contact en  $x = 0.517$ ;
- l'état  $\mathbf{v}_{R^*}$  est résonant ;
- l'onde  $\mathbf{v}_{R^*} \xrightarrow{s} \mathbf{v}_R$  est constituée d'une détente s'étalant sur  $x \in [0, 52; 0.9]$  et d'un choc en  $x = 0.9$ .

Pour cette simulation du problème de Riemann avec données initiales (3.31), le schéma converge vers la solution mais a du mal à capter l'état  $\mathbf{v}_{L^*}$  et reste très diffusif au niveau de l'onde de contact.

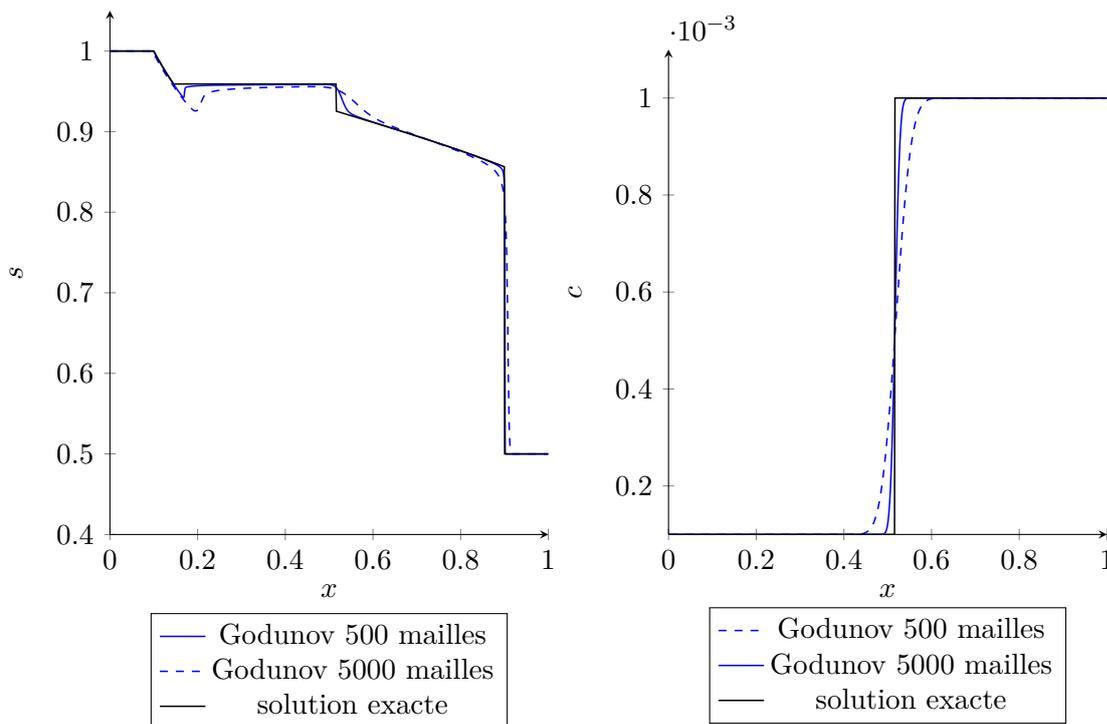


FIGURE 3.6 – Profils de saturation en eau  $s$  (à gauche) et de fraction massique  $c$  (à droite) obtenus au temps  $T = 0.4$  avec 500 et 5000 mailles pour le problème (3.31).

3.  $\mathbf{v}_R = (s_R, c_R) \in \mathcal{R}_3$ . Afin d'observer le comportement du schéma (3.16) pour

$$\mathbf{v}_L \in \mathcal{R}, \quad \mathbf{v}_R \in \mathcal{R}_3, \quad (3.33)$$

on simule le problème de Riemann avec les données initiales

$$\mathbf{v}_L = (1, 10^{-3}), \quad \mathbf{v}_R = (0.71, 0.0). \quad (3.34)$$

La solution est une succession de 3 ondes (voir §2.2.4) dont la configuration est

$$\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L^*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_{R^*} \xrightarrow{s} \mathbf{v}_R.$$

Les états intermédiaires  $\mathbf{v}_{L^*}$  et  $\mathbf{v}_{R^*}$  sont solutions des équations

$$\begin{cases} c_{L^*} = c_L, \\ s_{L^*} = s_T(\mathbf{v}_L), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} c_{R^*} = c_R, \\ u(\mathbf{v}_{R^*}) = u(\mathbf{v}_{L^*}), \\ \mathbf{v}_{R^*} \in \mathcal{L}, \end{cases} \quad (3.35)$$

soit  $\mathbf{v}_{L^*} = (0.92539, 0.001)$  et  $\mathbf{v}_{R^*} = (0.52109, 0)$ . Pour être plus précis, comme le montre la Figure 3.7,

- l'onde  $\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L^*}$  est une détente s'étalant sur  $x \in [0.1, 0.516]$ ;
- l'état  $\mathbf{v}_{L^*}$  est résonant ;
- l'onde  $\mathbf{v}_{L^*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_{R^*}$  est un contact en  $x = 0.516$ ;
- l'onde  $\mathbf{v}_{R^*} \xrightarrow{s} \mathbf{v}_R$  est un choc en  $x = 0.767$ .

Pour la simulation du problème de Riemann (3.34), le schéma numérique converge vers la solution mais reste très diffusif au niveau de l'onde de contact.

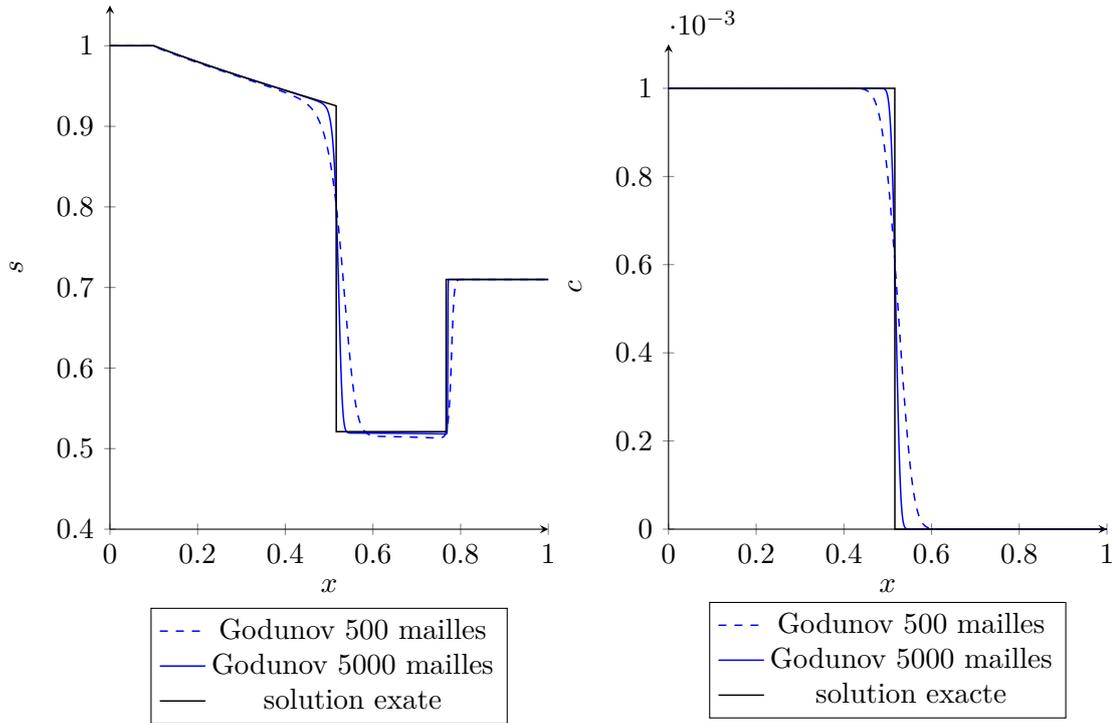


FIGURE 3.7 – Profils de saturation en eau  $s$  (à gauche) et de fraction massique  $c$  (à droite) obtenus au temps  $T = 0.4$  avec 500 et 5000 mailles pour le problème (3.34).

## II. $\mathbf{v}_L = (s_L, c_L) \in \mathcal{L}$

1.  $\mathbf{v}_R = (s_R, c_R) \in \mathcal{L}_1$ . Afin d'observer le comportement du schéma (3.16) pour

$$\mathbf{v}_L \in \mathcal{R}, \quad \mathbf{v}_R \in \mathcal{L}_1, \quad (3.36)$$

les données initiales choisies sont

$$\mathbf{v}_L = (0.7, 0.0), \quad \mathbf{v}_R = (0.99, 10^{-3}). \quad (3.37)$$

La solution est une succession de 2 ondes (voir §2.2.4) dont la configuration est

$$\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L^*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_R.$$

Bien que les deux états initiaux soient de part et d'autre de la zone de résonance, cet état intermédiaire  $\mathbf{v}_I$  n'est pas résonant et est solution de

$$\begin{cases} c_{L^*} = c_L, \\ u(\mathbf{v}_{L^*}) = u(\mathbf{v}_R), \\ \mathbf{v}_{L^*} \in \mathcal{R}, \end{cases} \quad (3.38)$$

soit  $\mathbf{v}_{L^*} = (0.9905, 0.0)$ . Pour être plus précis, comme le montre la Figure 3.8,

- l'onde  $\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L^*}$  est un choc en  $x = 0,3145$ ;
- l'onde  $\mathbf{v}_{L^*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_R$  est un contact en  $x = 0.5044$ .

Pour cette simulation du problème de Riemann (3.37), le schéma converge vers la solution mais reste très diffusif au niveau de l'onde de contact.

On retrouve un comportement similaire au cas I-1.

2.  $\mathbf{v}_R = (s_R, c_R) \in \mathcal{L}_2$ . Afin d'observer le comportement du schéma pour

$$\mathbf{v}_L \in \mathcal{L}, \quad \mathbf{v}_R \in \mathcal{L}_2, \quad (3.39)$$

on simule le problème de Riemann avec pour données initiales

$$\mathbf{v}_L = (0.7, 0.0), \quad \mathbf{v}_R = (0.5, 10^{-3}). \quad (3.40)$$

La solution est une succession de 3 ondes (voir §2.2.4) dont la configuration est

$$\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L^*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_{R^*} \xrightarrow{s} \mathbf{v}_R.$$

Les états intermédiaires  $\mathbf{v}_{L^*}$  et  $\mathbf{v}_{R^*}$  sont solutions des équations

$$\begin{cases} c_{L^*} = c_L, \\ u(\mathbf{v}_{L^*}) = u(\mathbf{v}_{II}), \\ \mathbf{v}_{L^*} \in \mathcal{R}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} c_{R^*} = c_R, \\ s_{R^*} = s_T(\mathbf{v}_R), \end{cases} \quad (3.41)$$

soit  $\mathbf{v}_{L^*} = (0.9595, 0.0)$  et  $\mathbf{v}_{R^*} = (0.9253, 10^{-3})$ . Pour être plus précis, comme le montre la Figure 3.9,

- l'onde  $\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{L^*}$  est un choc en  $x = 0.3365$ ;
- l'onde  $\mathbf{v}_{L^*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_{R^*}$  est un contact en  $x = 0.516$ ;
- l'état  $\mathbf{v}_{R^*}$  est résonant;
- L'onde  $\mathbf{v}_{R^*} \xrightarrow{s} \mathbf{v}_R$  est une succession détente-choc.

Pour cette simulation du problème de Riemann (3.40), le schéma converge vers la solution mais reste très diffusif au niveau de l'onde de contact.

On retrouve un comportement similaire au cas I-2.

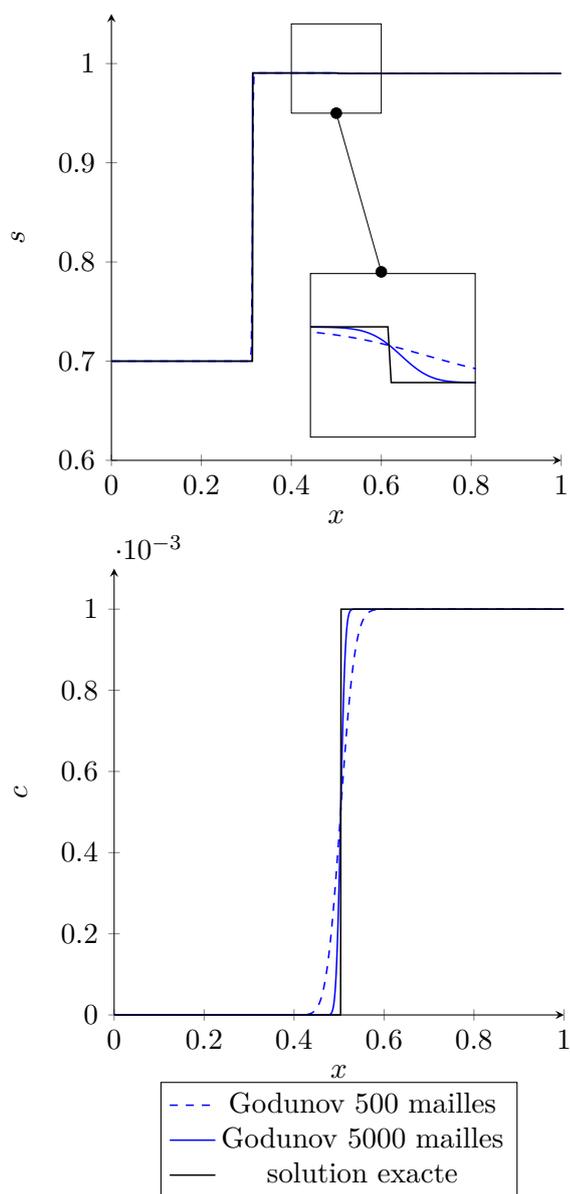


FIGURE 3.8 – Profils de saturation en eau  $s$  (haut) et de fraction massique  $c$  (bas) obtenus au temps  $T = 0.4$  avec 500 et 5000 mailles pour le problème (3.37).

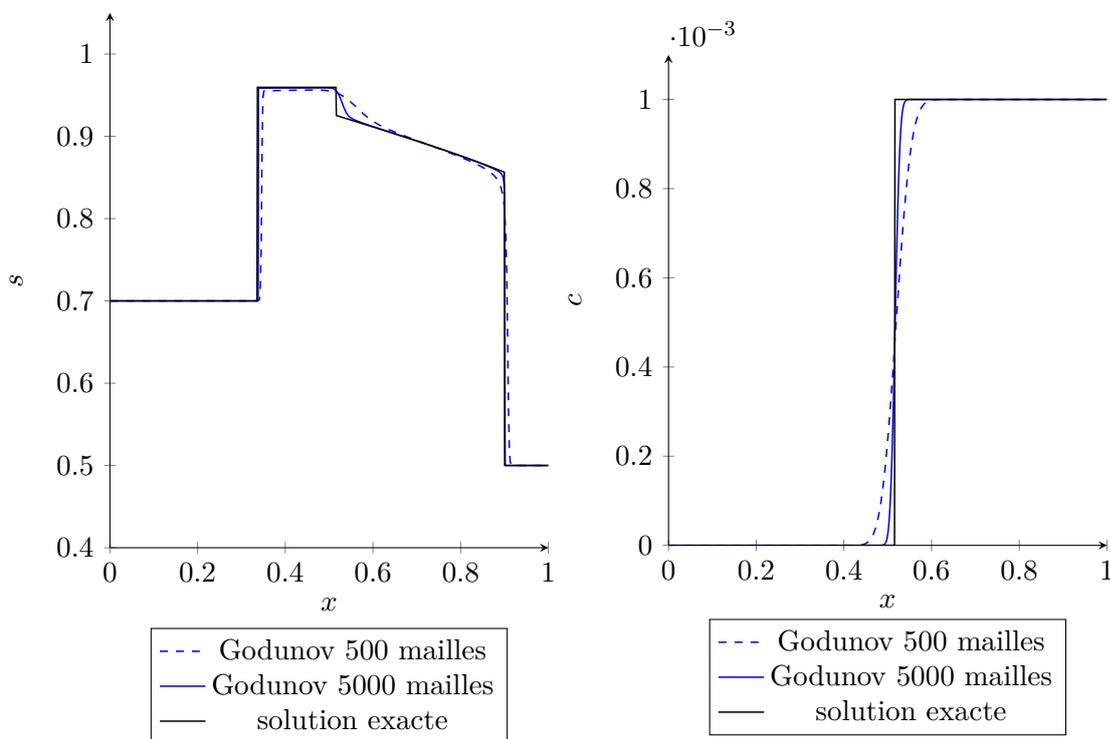


FIGURE 3.9 – Profils de saturation en eau  $s$  (à gauche) et de fraction massique  $c$  (à droite) obtenus au temps  $T = 0.4$  avec 500 et 5000 mailles pour le problème (3.40).

3.  $\mathbf{v}_R = (s_R, c_R) \in \mathcal{L}_3$ . Afin d'observer le comportement du schéma pour

$$\mathbf{v}_L \in \mathcal{L}, \quad \mathbf{v}_R \in \mathcal{L}_3, \quad (3.42)$$

le problème de Riemann (3.26) avec pour données initiales

$$\mathbf{v}_L = (0.5, 10^{-3}), \quad \mathbf{v}_R = (0.8, 0.0), \quad (3.43)$$

est simulé. La solution est une succession de 2 ondes (voir §2.2.4) dont la configuration est

$$\mathbf{v}_L \xrightarrow{c} \mathbf{v}_{R^*} \xrightarrow{s} \mathbf{v}_R.$$

L'état intermédiaire  $\mathbf{v}_{R^*}$  est solution des équations

$$\begin{cases} c_{R^*} = c_R, \\ u(\mathbf{v}_{R^*}) = u(\mathbf{v}_L), \\ \mathbf{v}_{R^*} \in \mathcal{L}, \end{cases} \quad (3.44)$$

soit  $\mathbf{v}_{R^*} = (0.2260, 10^{-4})$ . Pour être plus précis, comme le montre la Figure 3.10,

- l'onde  $\mathbf{v}_L \xrightarrow{s} \mathbf{v}_{R^*}$  est un contact en  $x = 0.2155$ ;
- l'onde  $\mathbf{v}_{R^*} \xrightarrow{c} \mathbf{v}_R$  est constituée d'une détente s'étalant sur  $x \in [0.3785, 0.7634]$  et d'un choc en  $x = 0.7634$ .

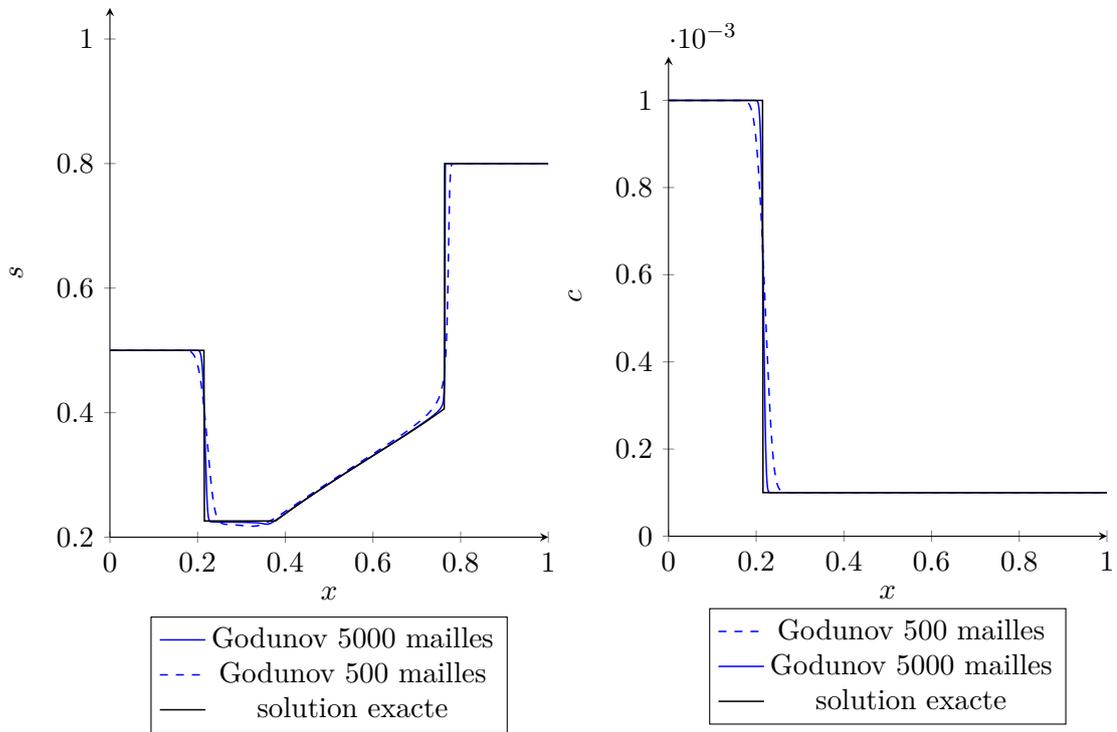


FIGURE 3.10 – Profils de saturation en eau  $s$  (à gauche) et de fraction massique  $c$  (à droite) obtenus au temps  $T = 0.4$  avec 500 et 5000 mailles pour le problème (3.43).

Pour cette simulation du problème de Riemann (3.43), le schéma converge vers la solution mais reste très diffusif au niveau de l'onde de contact.

Ce cas de figure révèle des comportements identiques au cas I-3.

### 3.2.2 Ordres de convergence

La mauvaise approximation observée dans les zones de contact suscite une interrogation légitime sur l'ordre de convergence du schéma (3.16) pour les ondes simples. Pour répondre à cette question, trois problèmes de Riemann correspondant chacun à une onde simple ont été isolés. Pour ces différents problèmes de Riemann et pour différents nombres de cellules

$$1/\Delta x \in \{800, 1600, 3200, 6400, 12800\}$$

sont effectués tour à tour des simulations, le calcul de la norme de l'erreur commise par rapport à la solution exacte et une régression linéaire du logarithme de l'erreur en fonction du logarithme de la longueur des mailles. L'ordre de convergence sera pris comme étant le coefficient de ladite régression.

La Table 3.1 ci-dessous résume les ordres de convergence obtenus dans la norme  $\ell^2$

$$\|\chi\| = \left( \sum_{i=1}^{\text{Ncell}} |\chi(\mathbf{v}_i)|^2 \Delta x \right)^{1/2}, \quad (3.45)$$

où  $\text{Ncell}$  désigne le nombre de cellules qui forment le maillage.

Dans (3.45),  $\chi$  désigne la différence entre la valeur approchée et la valeur exacte pour chaque quantité mesurée, en l'occurrence  $s$ ,  $sc$  ou  $u$ . Le signe  $-$  indique les cas pour lesquels

| Variable | contact | détente | choc |
|----------|---------|---------|------|
| $s$      | 0.24    | 0.66    | 0.50 |
| $u$      | 0.51    | 0.63    | 0.50 |
| $sc$     | 0.24    | –       | –    |

TABLE 3.1 – Ordres de convergence pour différentes ondes et sur différentes variables.

le calcul de l'ordre n'est pas nécessaire, dû au fait que la fraction massique  $c$  est constante dans les détente et les chocs.

Face à ces ordres de convergence peu satisfaisants dans la première colonne, il est indispensable de mettre en œuvre des schémas numériques plus performants pour la capture des fronts de contact. Cela fait l'objet du chapitre §4.

## Chapitre 4

# Vers des schémas mieux adaptés aux fronts de contact

### Sommaire

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>4.1</b> | <b>Montée en ordre d'approximation</b>                | <b>64</b> |
| 4.1.1      | Quasi-second ordre en espace                          | 64        |
| 4.1.2      | Second ordre en temps                                 | 66        |
| 4.1.3      | Résultats numériques                                  | 66        |
| <b>4.2</b> | <b>Schéma de Glimm</b>                                | <b>68</b> |
| 4.2.1      | Principe général                                      | 69        |
| 4.2.2      | Résultats numériques                                  | 70        |
| <b>4.3</b> | <b>Schéma de Godunov corrigé</b>                      | <b>71</b> |
| 4.3.1      | Estimation de l'erreur sur la vitesse dans un contact | 71        |
| 4.3.2      | Correction compatible avec un contact pur             | 73        |
| 4.3.3      | Correction compatible avec plusieurs ondes            | 77        |

---

Les essais numériques à la fin du chapitre §3 attestent d'un faible ordre de convergence du schéma de Godunov, notamment pour les discontinuités de contact qui transportent le polymère. Dans ce chapitre, nous allons explorer trois pistes d'amélioration pour la capture des discontinuités de contact.

La première, présentée en §4.1, consiste à monter en ordre d'approximation. En espace, nous appliquons une reconstruction limitée MUSCL pour atteindre l'ordre 2 dans les zones régulières et « raidir » les fronts. En temps, nous employons le schéma de Heun pour obtenir formellement l'ordre 2. Les résultats sont quelque peu décevants.

La deuxième, exposée en §4.2, est le schéma de Glimm. À l'origine un outil théorique pour démontrer l'existence des solutions, le schéma de Glimm a été revisité ces dernières années en tant que méthode effective de calcul. Les bons résultats sont au rendez-vous. Le prix à payer est toutefois la perte de conservativité et le temps de calcul.

La troisième, formalisée en §4.3, est notre contribution originale dans laquelle nous introduisons un terme correctif dans la mise à jour de la quantité de polymère. Cette correction non conservative est ajustée de sorte à assurer que la vitesse reste constante à travers un contact, à une erreur d'ordre 3 près. Sa calibration passe par le calcul de l'équation équivalente sur la vitesse.

## 4.1 Montée en ordre d'approximation

Il est connu [39, 66] qu'un schéma décentré amont est du premier ordre en espace et en temps au sens de l'équation équivalente. Aussi, la première idée est-elle naturellement de chercher à élever l'ordre théorique d'approximation.

### 4.1.1 Quasi-second ordre en espace

En espace, nous allons appliquer la technique MUSCL (Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws) proposée par van Leer [100–103]. Utilisée dans de nombreuses applications dont la simulation de réservoir [13, 14, 73, 85], elle permet d'atteindre formellement le deuxième ordre en espace dans les régions où la solution est régulière. Au voisinage d'une discontinuité de la solution, elle dégénère vers le premier ordre afin de ne pas générer d'oscillations qui peuvent provoquer l'arrêt des calculs. C'est pourquoi il convient de qualifier cette technique de *quasi-ordre 2* en espace.

Reprenons la procédure de construction du schéma de Godunov décrite en §3.1. Dans la première étape, au lieu de travailler avec une fonction constante par cellule, l'idée est de partir d'une fonction affine par morceaux définie dans la cellule  $i$  par

$$\widehat{\mathbf{w}}_i^n(x) = \mathbf{w}_i^n + (x - x_i)\widehat{\mathbf{p}}_i^n, \quad x \in K_i, \quad (4.1)$$

où  $\widehat{\mathbf{p}}_i^n$  représente une pente à calculer. Il y a deux « candidats » évidents pour  $\widehat{\mathbf{p}}_i^n$  : ce sont les approximations par différences finies

$$\mathbf{p}_{i-1/2}^n := \frac{1}{\Delta x}(\mathbf{w}_i^n - \mathbf{w}_{i-1}^n), \quad \mathbf{p}_{i+1/2}^n := \frac{1}{\Delta x}(\mathbf{w}_{i+1}^n - \mathbf{w}_i^n). \quad (4.2)$$

Pour passer automatiquement du second ordre dans les zones régulières au premier ordre dans les zones discontinues, il est essentiel de prendre

$$\widehat{\mathbf{p}}_i^n = \mathfrak{L}(\mathbf{p}_{i-1/2}^n, \mathbf{p}_{i+1/2}^n), \quad (4.3)$$

où la fonction à deux arguments  $\mathfrak{L}$  est appelée *fonction limiteur*. Cette fonction, qui agit composante par composante, retourne 0 si les deux arguments sont de signes contraires, ce qui assure qu'en présence d'un extremum local, on ne reconstruit pas et reste avec une fonction constante. Lorsque les deux arguments sont de même signe, la fonction  $\mathfrak{L}$  retourne une « moyenne » des deux, de sorte à préserver une forme de stabilité (comme le principe du maximum pour l'advection scalaire linéaire). Il y a un grand nombre de fonctions limiteurs possibles. Nous en énumérerons quelques exemples.

Dans la deuxième étape, on résout le problème de Riemann sur chaque arête  $x_{i+1/2}$  avec, comme états gauche et droit, les valeurs reconstruites en cette abscisse à partir des cellules  $i$  et  $i + 1$ , à savoir

$$\widehat{\mathbf{w}}_{i+1/2}^{n,-} := \widehat{\mathbf{w}}_i^n(x_{i+1/2}) = \mathbf{w}_i^n + \frac{\Delta x}{2}\widehat{\mathbf{p}}_i^n, \quad \widehat{\mathbf{w}}_{i+1/2}^{n,+} := \widehat{\mathbf{w}}_{i+1}^n(x_{i+1/2}) = \mathbf{w}_{i+1}^n - \frac{\Delta x}{2}\widehat{\mathbf{p}}_{i+1}^n.$$

En lieu et place de la troisième étape de moyennage, on insère directement ces valeurs dans la formule pour obtenir le flux. Ainsi, on obtient finalement un flux à quatre points

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{i+1/2}^{n,M} &= \mathfrak{F}^M(\mathbf{w}_{i-1}^n, \mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n, \mathbf{w}_{i+2}^n) := \mathfrak{F}^G(\widehat{\mathbf{w}}_{i+1/2}^{n,-}, \widehat{\mathbf{w}}_{i+1/2}^{n,+}) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{w}_{\text{Riem}}(0; \widehat{\mathbf{w}}_{i+1/2}^{n,-}, \widehat{\mathbf{w}}_{i+1/2}^{n,+})) \end{aligned} \quad (4.4)$$

et le schéma final devient

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathfrak{F}_{i+1/2}^{n,M} - \mathfrak{F}_{i+1/2}^{n,M}] \quad (4.5a)$$

$$= \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathfrak{F}^M(\mathbf{w}_{i-1}^n, \mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n, \mathbf{w}_{i+2}^n) - \mathfrak{F}^M(\mathbf{w}_{i-2}^n, \mathbf{w}_{i-1}^n, \mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n)]. \quad (4.5b)$$

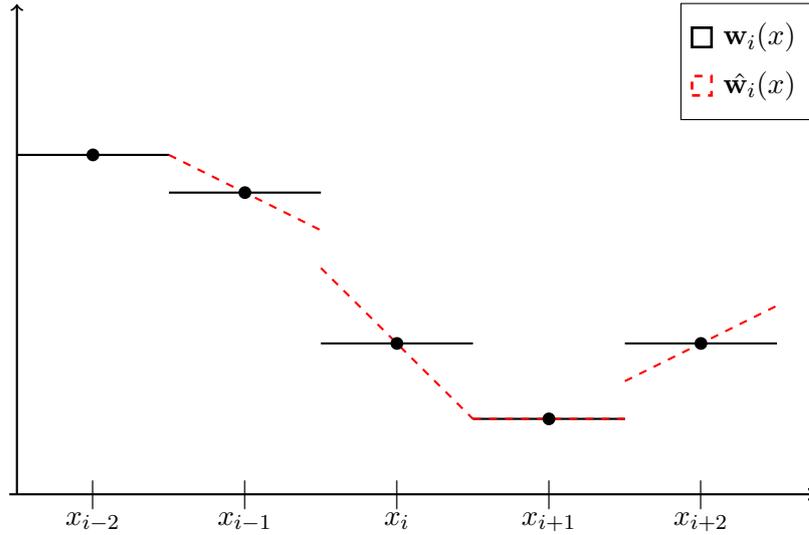


FIGURE 4.1 – Reconstruction de pentes MUSCL par le limiteur *minmod*.

Dans ce travail, nous avons retenu le limiteur *minmod* donné par

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } ab > 0 \text{ et } |a| \leq |b|, \\ b & \text{si } ab > 0 \text{ et } |a| \geq |b|, \\ 0 & \text{si } ab \leq 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . D'autres limiteurs existent, les deux plus fréquemment utilisés étant le limiteur *van Leer*

$$\text{VanLeer}(a, b) = \begin{cases} 2ab/(a+b) & \text{si } ab > 0, \\ 0 & \text{si } ab \leq 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

ou le limiteur *Superbee*

$$\text{Superbee}(a, b) = \begin{cases} \max(\min(2a, b), \min(a, 2b)) & \text{si } a > 0 \text{ et } b > 0, \\ \min(\max(2a, b), \max(a, 2b)) & \text{si } a < 0 \text{ et } b < 0, \\ 0 & \text{si } ab \leq 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

On peut démontrer [94] que pour une équation d'advection scalaire linéaire, ces limiteurs préservent le principe du maximum de la solution. Pour un système non linéaire quelconque, l'analyse est plus difficile et la démarche devient plus heuristique.

### 4.1.2 Second ordre en temps

Outre l'accroissement de l'ordre de l'approximation spatiale, nous tentons d'élever l'ordre de l'approximation temporelle par le schéma de Heun, qui est également très largement utilisé dans les codes industriels. Ce schéma, qui s'interprète comme une méthode de Runge-Kutta [25], est originellement destinée aux équations différentielles ordinaires. Néanmoins, sa transposition à notre problème est immédiate. Elle comporte trois étapes, chacune desquelles devant être réalisée en balayant tout le domaine  $i \in \mathbb{Z}$  avant de passer à la suivante :

$$\mathbf{w}_i^* = \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathfrak{F}^M(\mathbf{w}_{i-1}^n, \mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n, \mathbf{w}_{i+2}^n) - \mathfrak{F}^M(\mathbf{w}_{i-2}^n, \mathbf{w}_{i-1}^n, \mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n)]; \quad (4.9a)$$

$$\mathbf{w}_i^{**} = \mathbf{w}_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathfrak{F}^M(\mathbf{w}_{i-1}^*, \mathbf{w}_i^*, \mathbf{w}_{i+1}^*, \mathbf{w}_{i+2}^*) - \mathfrak{F}^M(\mathbf{w}_{i-2}^*, \mathbf{w}_{i-1}^*, \mathbf{w}_i^*, \mathbf{w}_{i+1}^*)]; \quad (4.9b)$$

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{w}_i^n + \mathbf{w}_i^{**}). \quad (4.9c)$$

La contrepartie d'une augmentation de l'ordre de l'approximation temporelle est qu'elle est susceptible d'introduire ou d'amplifier les oscillations dans la solution [53].

### 4.1.3 Résultats numériques

La Figure 4.3 montre une comparaison entre le schéma de Godunov classique (qu'on appelle dorénavant l'*ordre 1*) et le schéma de Godunov avec montée en ordre spatio-temporel décrite plus haut (qu'on appelle dorénavant l'*ordre 2* par commodité). Le problème de Riemann résolu ici est le problème (3.34). On observe que le schéma Godunov d'ordre 2 approche mieux la solution exacte que le schéma de Godunov d'ordre 1.

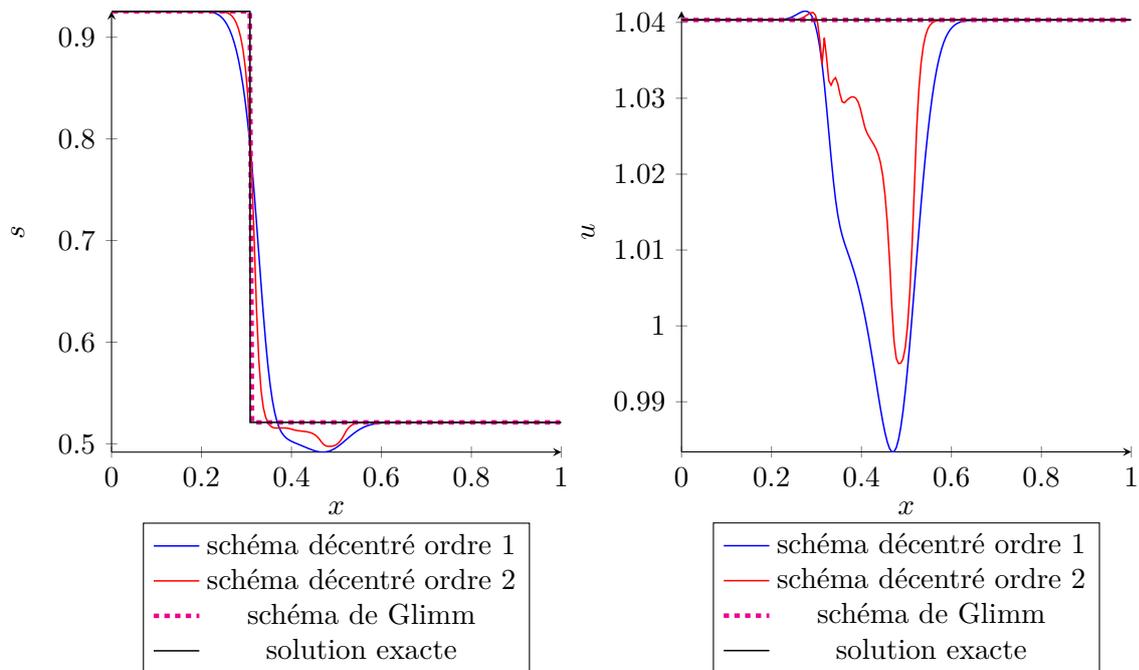


FIGURE 4.2 – Saturation en eau  $s$  (à gauche) et vitesse  $u$  (à droite) pour la reconstruction MUSCL et schéma de Glimm au temps  $T = 0.2$ , avec 200 mailles pour le problème (4.10).

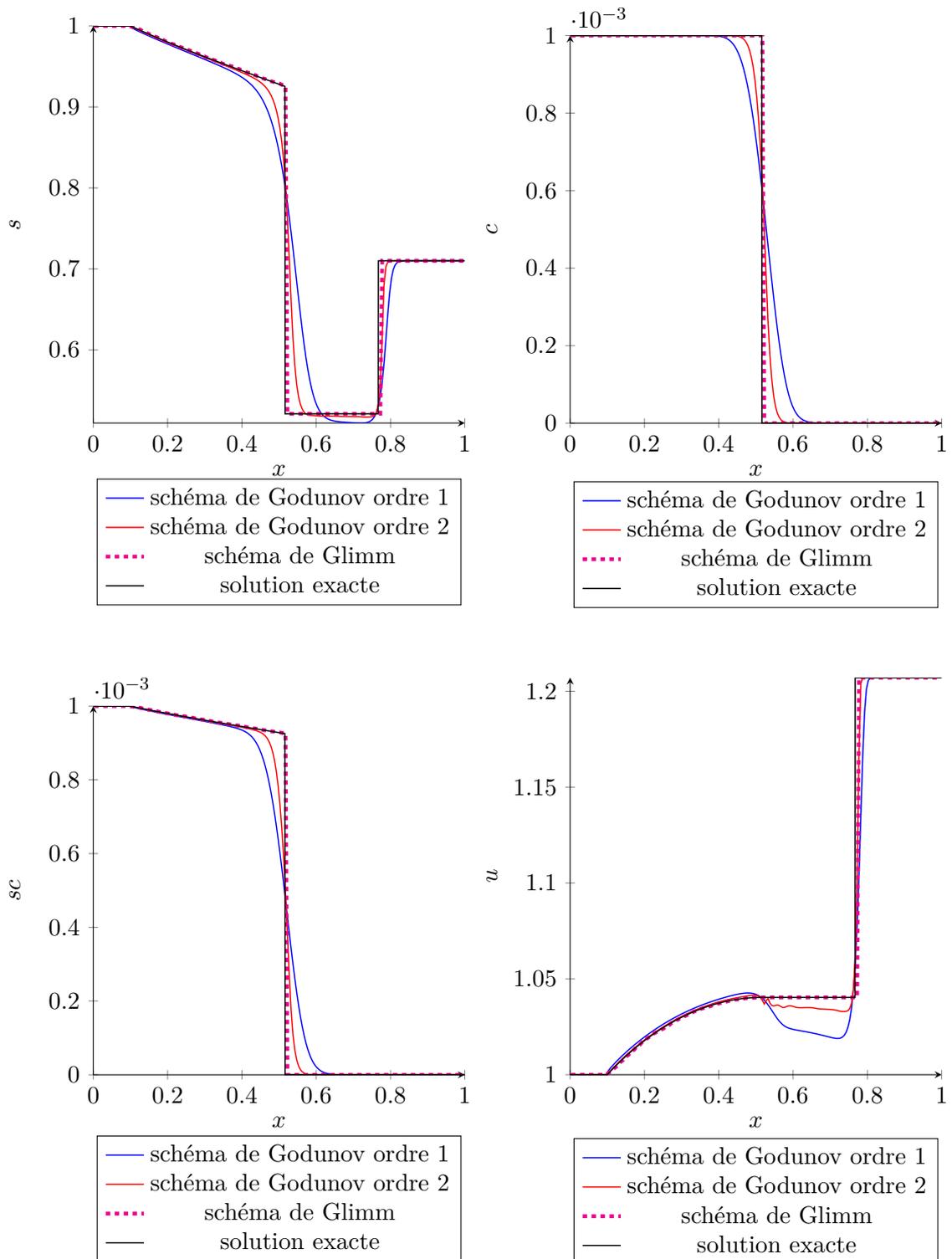


FIGURE 4.3 – De gauche à droite et de haut en bas : profils de saturation en eau  $s$ , de la fraction massique de polymère  $c$ , de la quantité de polymère  $sc$  et de vitesse  $u$  pour la reconstruction MUSCL et schéma de Glimm au temps  $T = 0.4$ , avec 200 mailles pour le problème (3.34).

Cependant, en isolant l'onde de contact présente dans la solution, c'est à dire en résolvant le problème de Riemann avec

$$\mathbf{v}_L = (0.9254398415, 10^{-3}), \quad \mathbf{v}_R = (0.52108515228, 0.0), \quad (4.10)$$

on constate que les deux schémas d'ordre 1 et d'ordre 2 respectent mal la conservation de l'invariant de Riemann pour cette onde : la vitesse interstitielle  $u$  ne reste pas constante (Figure 4.2). Les différents ordres de convergence obtenus par la formule (3.45) sont :

— dans le contact

| Variable | ordre1 | MUSCL |
|----------|--------|-------|
| $s$      | 0.24   | 0.33  |
| $u$      | 0.51   | 0.67  |
| $sc$     | 0.24   | 0.33  |

TABLE 4.1 – Ordres de convergence dans une onde de contact

— dans le choc

| Variable | ordre1 | MUSCL |
|----------|--------|-------|
| $s$      | 0.50   | 0.50  |
| $u$      | 0.50   | 0.50  |
| $sc$     | -      | -     |

TABLE 4.2 – Ordres de convergence dans une onde de choc

— dans la détente

| Variable | ordre1 | MUSCL |
|----------|--------|-------|
| $s$      | 0.66   | 0.86  |
| $u$      | 0.63   | 0.85  |
| $sc$     | -      | -     |

TABLE 4.3 – Ordres de convergence dans une onde de détente.

Pour des systèmes strictement hyperboliques de lois de conservation, les ordres de convergence attendus [11, 30, 36] sont compris entre 0,65 et 0,8 pour le schéma d'ordre 1 et entre 0,85 et 0,99 pour le schéma d'ordre 2. De ce fait, les résultats présentés dans les Tables 4.1, 4.2 et 4.3 sont en dessous des attentes. Les ingrédients MUSCL et Heun apportent certes un gain sur l'ordre de convergence, mais celui-ci reste faible. En conclusion, il nous faut un autre remède.

## 4.2 Schéma de Glimm

La deuxième voie que nous envisageons dans l'espoir de mieux capter les discontinuités de contact est le schéma de Glimm. Historiquement, Glimm [37] a conçu ce schéma comme un outil théorique permettant de démontrer l'existence des solutions d'un système hyperbolique. Colella [22] a eu l'idée de le tester numériquement et a montré qu'il donnait

de bons résultats sur certains systèmes. Des travaux récents de Chalons et Coquel [19] et de Coquel et al. [23] ont remis en scène le schéma de Glimm, en utilisation combinée avec d'autres schémas.

### 4.2.1 Principe général

Comme pour le schéma de Godunov, le schéma de Glimm requiert la connaissance de la solution du problème de Riemann associé au système.

**Procédure de construction.** En §3.1, nous avons décomposé le schéma de Godunov en trois étapes. Le schéma de Glimm reprend à l'identique les deux premières étapes. C'est dans la troisième étape qu'il est différent. Voici les trois étapes du schéma de Glimm, à comparer avec la procédure de construction du schéma de Godunov :

1. Considérer la solution  $\mathbf{w}(\cdot, t^n)$  comme une fonction constante par morceaux, égale à  $\mathbf{w}_i^n$  sur  $]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ ;
2. Résoudre le problème de Riemann à chaque interface  $x_{i+1/2}$  avec  $\mathbf{w}_i^n$  comme valeur à gauche et  $\mathbf{w}_{i+1}^n$  comme valeur à droite;
3. Au lieu de moyenner la solution obtenue à  $t^n + \Delta t$  sur chaque cellule  $K_i$ , prendre comme  $\mathbf{w}_i^{n+1}$  un des états intermédiaires qui apparaissent à l'intérieur de la cellule  $K_i$ , et ce de manière aléatoire.

Dans le schéma de Godunov, c'est le fait de moyenner sur chaque cellule dans l'étape 3 qui donne naissance à la diffusion. En sélectionnant un état aléatoirement, on peut espérer réduire la diffusion.

Précisons maintenant ce que signifie « choisir aléatoirement » un état intermédiaire. Soit  $\{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite aléatoire à valeurs dans  $[0, 1]$ . Alors, l'étape 3 s'exprime plus rigoureusement par

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \begin{cases} \mathbf{w}_{\text{Riem}}(a^{n+1} \Delta x / \Delta t; \mathbf{w}_i^n, \mathbf{w}_{i+1}^n) & \text{si } a^{n+1} < 1/2, \\ \mathbf{w}_{\text{Riem}}((1 - a^{n+1}) \Delta x / \Delta t; \mathbf{w}_{i-1}^n, \mathbf{w}_i^n) & \text{si } a^{n+1} > 1/2, \end{cases} \quad (4.11)$$

où la notation  $\mathbf{w}_{\text{Riem}}$  introduite en (3.10) désigne la solution du problème de Riemann. Dans le cas du système (2.34) où toutes les ondes sont à vitesse positive, la formule (4.11) peut se simplifier en

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \mathbf{w}_{\text{Riem}}(a^{n+1} \Delta x / \Delta t; \mathbf{w}_{i-1}^n, \mathbf{w}_i^n). \quad (4.12)$$

Ainsi, le résultat au temps final dépend donc de la suite  $\{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  adoptée. Cela peut paraître surprenant, mais on peut montrer que, sous la condition CFL, le schéma de Glimm admet une convergence stochastique [37] pour les systèmes hyperboliques linéaires. La convergence pour un système non linéaire est établie par Liu [74] sous l'hypothèse d'une suite  $\{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  à faible discrétance. Bien évidemment, le schéma de Glimm ne peut pas s'exprimer sous la forme conservative (3.7). Il n'y a pas de flux numérique, et par conséquent pas de conservation au niveau discret.

**Génération de la suite aléatoire.** Colella [22] recommande l'usage de la suite de van der Corput [99] de base 2 pour  $\{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Introduite en 1935, la suite de van der Corput de base  $\mathbf{b}$ , où  $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^*$ , est une suite à valeurs dans  $]0, 1[$  dont le terme de rang  $n \in \mathbb{N}^*$  est calculé de la manière suivante :

- on représente l'entier  $n$  en base  $\mathbf{b}$

$$n = \sum_{k=0}^m \alpha_k \mathbf{b}^k, \quad \alpha_k \in \{0, 1, \dots, \mathbf{b} - 1\}; \quad (4.13a)$$

- on inverse l'ordre les chiffres  $\alpha_k$  et les met après la virgule pour obtenir le réel

$$a^n = \sum_{k=0}^m \alpha_k \mathbf{b}^{-k-1}. \quad (4.13b)$$

Bien que déterministe, cette suite est quasi-aléatoire à faible discrédance.

## 4.2.2 Résultats numériques

Les Figures 4.2 et 4.3 attestent d'une meilleure approximation pour le schéma de Glimm. Les discontinuités sont résolues sur au plus 3 points. Des résultats de bonne qualité peuvent être obtenus avec un petit nombre de mailles. Cette observation se généralise aux différents problèmes de Riemann comme le montre la Figure 4.4. Les données initiales du problème de Riemann simulé ici (Figure 4.4) sont

$$(s, c)(x, t = 0) = \begin{cases} (1, 10^{-4}) & \text{si } x < 0.1, \\ (0.2, 0) & \text{si } x > 0.1, \end{cases} \quad (4.14)$$

et les profils sont représentés à l'instant  $T = 0.4$ . Dans cette Figure 4.4, les profils de saturation et de fraction massique de polymère sont représentés pour le schéma de Godunov de premier, le schéma de Godunov du second ordre et le schéma de Glimm. Des trois schémas, seul le schéma de Glimm permet de distinguer la discontinuité de contact sur la base de la seule observation du profil de saturation en eau.

Bien entendu, le schéma de Godunov classique reste moins précis que le schéma de Godunov avec montée en ordre. En norme  $L^2$ , l'erreur d'approximation de la saturation en eau est de  $0.262 \cdot 10^{-1}$ , ce qui correspond à une amélioration de 26,8% par rapport à l'erreur du schéma Godunov qui est  $0.358 \cdot 10^{-1}$ . Le schéma de Godunov quant à lui donne la meilleure approximation avec une erreur de  $0.217 \cdot 10^{-2}$ .

En somme, le schéma de Glimm donne de meilleurs résultats que le schéma de Godunov avec ou sans reconstruction MUSCL. Les discontinuités sont résolues avec au plus 3 points mais il n'y a aucune oscillation. Cependant, il souffre de trois défauts majeurs :

- La non conservation des quantités de matière. Le bilan de masse de la variable  $s$  pour le schéma de Glimm est de  $-0.21$  tandis que les schémas de Godunov classique et du second ordre ont respectivement  $-5.55 \cdot 10^{-17}$  et  $2.77 \cdot 10^{-16}$ .
- Sa mise en œuvre repose de manière cruciale sur la connaissance de la solution des problèmes de Riemann. Cela ne sera malheureusement plus possible pour les modèles plus complexes considérés dans la seconde partie du manuscrit.
- Un temps d'exécution relativement long. Les temps d'exécution ou temps CPU (en seconde) pour le problème (4.14) sont de  $5.45 \cdot 10^{-2}$  pour le schéma de Godunov,  $6.49 \cdot 10^{-2}$  pour le schéma du second ordre contre 4.96 pour le schéma de Glimm.

C'est pour ces deux dernières raisons qu'il nous faut fermer cette piste [31] et examiner une dernière.

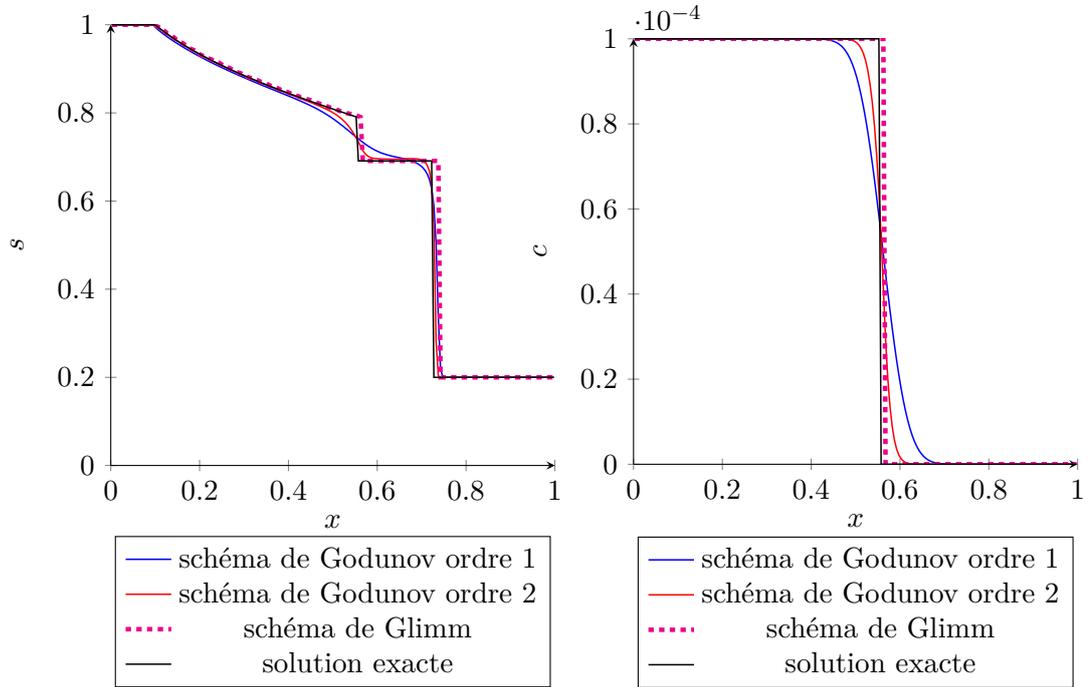


FIGURE 4.4 – Profils de la saturation en eau  $s$  (gauche) et de la fraction massique de polymère  $c$  (droite) obtenus avec 200 cellules, à  $T = 0.4$ .

### 4.3 Schéma de Godunov corrigé

Une observation minutieuse des résultats de simulation avec les schémas de Godunov d'ordre 1 et d'ordre 2 révèle que l'excès de diffusion au voisinage d'un contact est toujours intimement corrélée avec une violation de la constance de  $u$ . Il est raisonnable d'émettre l'hypothèse que la mauvaise approximation des contacts serait due à l'incapacité des schémas de type volumes finis à préserver l'invariant de Riemann de l'onde  $c$ . L'idée est alors de renforcer la constance de la vitesse  $u$  à travers une onde de contact en annulant le résidu qui lui est associé.

#### 4.3.1 Estimation de l'erreur sur la vitesse dans un contact

Dans cette perspective, il faut d'abord être capable de quantifier ce résidu en vitesse. Plus exactement, il s'agit de le représenter comme un terme continu, dans le même esprit qu'une équation équivalente. Une fois cette représentation identifiée, un terme correctif adéquat peut être apporté.

Commençons par rappeler que le système physique

$$\partial_t(s) + \partial_x(su) = 0, \quad (4.15a)$$

$$\partial_t(sc) + \partial_x(scu) = 0, \quad (4.15b)$$

est discrétisé par le schéma décentré

$$(s)_i^{n+1} = (s)_i^n - \delta[(s)_i^n u(s_i^n, c_i^n) - (s)_{i-1}^n u(s_{i-1}^n, c_{i-1}^n)], \quad (4.16a)$$

$$(sc)_i^{n+1} = (sc)_i^n - \delta[(sc)_i^n u(s_i^n, c_i^n) - (sc)_{i-1}^n u(s_{i-1}^n, c_{i-1}^n)], \quad (4.16b)$$

où nous avons posé  $\delta = \Delta t / \Delta x$  pour alléger les écritures.

Considérons un problème de Riemann dont la solution est constituée d'une seule onde  $c$  de contact, dont l'invariant de Riemann associé est la vitesse interstitielle  $u$ . Dans ces conditions, la discrétisation (4.16) se réduit à

$$(s)_i^{n+1} = (s)_i^n - \delta \bar{u} [(s)_i^n - (s)_{i-1}^n], \quad (4.17a)$$

$$(sc)_i^{n+1} = (sc)_i^n - \delta \bar{u} [(sc)_i^n - (sc)_{i-1}^n], \quad (4.17b)$$

avec  $\bar{u} = u(s_{i-1}^n, c_{i-1}^n) = u(s_i^n, c_i^n)$ . Des relations (4.17), on déduit que la valeur mise à jour de la vitesse est

$$u_i^{n+1} = u(s_i^{n+1}, c_i^{n+1}) = u \left( s_i^n - \delta \bar{u} [s_i^n - s_{i-1}^n], \frac{(sc)_i^n - \delta \bar{u} [(sc)_i^n - (sc)_{i-1}^n]}{s_i^n - \delta \bar{u} [s_i^n - s_{i-1}^n]} \right). \quad (4.18)$$

Nous souhaitons disposer d'un développement limité de l'écart entre cette valeur et  $\bar{u}$ .

Pour ce faire, nous allons insérer dans (4.18) les valeurs ponctuelles

$$s_i^n = \tilde{s}(x_i, t^n), \quad c_i^n = \tilde{c}(x_i, t^n), \quad (4.19)$$

provenant d'une solution exacte  $(\tilde{s}, \tilde{c})$  supposée aussi régulière que nécessaire. Comme cette solution correspond à un contact pur, elle vérifie

$$\tilde{u}(x, t^n) := u(\tilde{s}(x, t^n), \tilde{c}(x, t^n)) = \bar{u} \quad (4.20)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Par conséquent,

$$\partial_x \tilde{u} = \partial_{xx} \tilde{u} = 0, \quad (4.21)$$

où les arguments  $(x, t^n)$  ont été omis pour simplifier. Grâce à la règle de dérivation composée, la propriété (4.21) s'écrit

$$u_s \partial_x \tilde{s} + u_c \partial_x \tilde{c} = 0, \quad (4.22a)$$

$$u_s \partial_{xx} \tilde{s} + u_c \partial_{xx} \tilde{c} + u_{ss} (\partial_x \tilde{s})^2 + 2u_{sc} \partial_x \tilde{s} \partial_x \tilde{c} + u_{cc} (\partial_x \tilde{c})^2 = 0. \quad (4.22b)$$

Ces identités seront utiles par la suite.

Passons maintenant au développement limité de (4.18). Avec les valeurs ponctuelles (4.19), un développement à l'ordre 2 de  $\tilde{s}$  et  $\tilde{c}$  autour du point  $(x_i, t^n)$  fournit

$$(s)_{i-1}^n = \tilde{s} - \Delta x \partial_x \tilde{s} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \partial_{xx} \tilde{s} + O(\Delta x^3), \quad (4.23a)$$

$$(sc)_{i-1}^n = \tilde{sc} - \Delta x \partial_x \tilde{sc} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \partial_{xx} \tilde{sc} + O(\Delta x^3), \quad (4.23b)$$

où il est entendu que toutes les fonctions figurant au second membre sont évaluées en  $(x_i, t^n)$ . En reportant les développements (4.23) dans les formules (4.17), il vient que

$$(s)_i^{n+1} = \tilde{s} - \bar{u} \Delta t \left[ \partial_x \tilde{s} - \frac{\Delta x}{2} \partial_{xx} \tilde{s} + O(\Delta x^2) \right], \quad (4.24a)$$

$$(sc)_i^{n+1} = \tilde{sc} - \bar{u} \Delta t \left[ \partial_x \tilde{sc} - \frac{\Delta x}{2} \partial_{xx} \tilde{sc} + O(\Delta x^2) \right]. \quad (4.24b)$$

Le quotient de ces deux relations conduit au développement limité pour la fraction massique de polymère

$$c_i^{n+1} = \tilde{c} - \delta\bar{u}\partial_x\tilde{c}\Delta x + \frac{\delta\bar{u}}{2\tilde{s}}[\tilde{s}\partial_{xx}\tilde{c} + 2(1 - \delta\bar{u})\partial_x\tilde{s}\partial_x\tilde{c}]\Delta x^2 + O(\Delta x^3). \quad (4.25)$$

Munis de (4.23) et (4.25), nous sommes en mesure d'obtenir un développement limité de (4.18). Les calculs mènent à

$$u_i^{n+1} = \bar{u} - \delta\bar{u}[u_s\partial_x\tilde{s} + u_c\partial_x\tilde{c}]\Delta x + R\Delta x^2 + O(\Delta x^3). \quad (4.26a)$$

avec

$$R = \frac{\delta\bar{u}}{2} \left\{ 2\partial_x\tilde{s}\partial_x\tilde{c} \left[ \frac{u_c}{\tilde{s}} + \delta\bar{u} \left( u_{s,c} - \frac{u_c}{\tilde{s}} \right) \right] + u_s\partial_{xx}\tilde{s} + u_c\partial_{xx}\tilde{c} + \delta\bar{u}[u_{s,s}(\partial_x\tilde{s})^2 + u_{cc}(\partial_x\tilde{c})^2] \right\}. \quad (4.26b)$$

En vertu de (4.22a), le facteur de  $\Delta x$  dans (4.26a) est nul. À l'aide de (4.22b), le facteur  $R$  de  $\Delta x^2$  défini en (4.26b) peut être transformé en une expression plus succincte, si bien qu'on obtient finalement

$$u_i^{n+1} = \bar{u} - \delta\bar{u}(1 - \delta\bar{u}) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{u_{ss}u_c^2}{u_s^2} + u_{cc} \right) + \frac{u_c(u_c - su_{sc})}{su_s} \right] (\partial_x\tilde{c})^2 \Delta x^2 + O(\Delta x^3). \quad (4.27)$$

On aurait pu se servir différemment de (4.22b) pour transformer le résidu en une expression contenant  $(\partial_x\tilde{s})^2$  ou  $(\partial_x\tilde{s}\tilde{c})^2$  au lieu de  $(\partial_x\tilde{c})^2$ . Cela aurait donné lieu à des corrections alternatives au niveau discret. Nous les avons expérimentées, avec des résultats comparables. C'est pourquoi elles ne sont pas présentées ici. L'intérêt de l'écriture (4.27) avec  $(\partial_x\tilde{c})^2$  est qu'elle offre une explication théorique aux observations numériques. En effet, le coefficient de  $(\partial_x\tilde{c})^2$  fait intervenir les dérivées partielles  $u_c$ ,  $u_{cc}$  et  $u_{sc}$ . Plus la dépendance par rapport à  $c$  est forte, plus ce coefficient devient important et plus il dégrade la qualité d'approximation de la vitesse. C'est notamment le cas lorsque l'on considère les perméabilités des phases et la réduction de mobilité non linéaire.

### 4.3.2 Correction compatible avec un contact pur

**Première modification.** Nous proposons de modifier les formules de mise à jour (3.7) par

$$(s)_i^{n+1} = (s)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(s)_i^n u_i^n - (s)_{i-1}^n u_{i-1}^n], \quad (4.28a)$$

$$(sc)_i^{n+1} = (sc)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(sc)_i^n u_i^n - (sc)_{i-1}^n u_{i-1}^n] + \mathfrak{S}_i^n (c_i^n - c_{i-1}^n)^2, \quad (4.28b)$$

où  $\mathfrak{S}_i^n$  sera ajusté pour compenser exactement le résidu dans l'erreur sur la vitesse. Avant de prescrire la bonne valeur de  $\mathfrak{S}_i^n$ , il convient de discuter de la forme de la correction (4.28).

L'ajout de  $\mathfrak{S}_i^n (c_i^n - c_{i-1}^n)^2$  fait perdre au schéma sa propriété de conservation locale. Au départ, il y avait trois possibilités : (i) mettre le terme de correction sur l'équation de saturation en eau  $s$ ; (ii) mettre le terme de correction sur l'équation de conservation

de la masse du polymère  $sc$ ; (iii) équilibrer la correction sur ces deux équations. Puisque l'objectif principal du modèle est la récupération d'hydrocarbures, la conservation de l'huile est une priorité absolue. Par la relation de fermeture  $s_o + s_w = 1$ , cela revient à privilégier la conservation de l'eau. C'est pourquoi le terme de correction est appliqué uniquement sur l'équation du polymère. Ce choix est d'autant plus judicieux que le terme de correction ne devrait agir que sur les discontinuités de contact qui transportent  $c$ .

En partant de (4.28), nous pouvons refaire toute l'analyse d'erreur de §4.3.1 en tenant compte cette fois de la présence de  $\mathfrak{S}_i^n$  dans les développements limités. Les calculs ne sont pas difficiles, quoiqu'un peu fastidieux. Pour la fraction massique de polymère, on a

$$\begin{aligned} c_i^{n+1} &= \tilde{c} - \delta\bar{u} \partial_x \tilde{c} \Delta x \\ &+ \frac{\delta\bar{u}}{2\tilde{s}} \left[ \tilde{s} \partial_{xx} \tilde{c} + 2(1 - \delta\bar{u}) \partial_x \tilde{s} \partial_x \tilde{c} - \frac{\mathfrak{S}_i^n}{\tilde{s}} (\partial_x \tilde{c})^2 \right] \Delta x^2 \\ &+ O(\Delta x^3), \end{aligned} \quad (4.29)$$

où toutes les fonctions au second membre sont évaluées en  $(x_i, t^n)$ . Pour la vitesse, on obtient

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= \bar{u} \\ &- \left\{ \delta\bar{u}(1 - \delta\bar{u}) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{u_{ss} u_c^2}{u_s^2} + u_{cc} \right) + \frac{u_c(u_c - s u_{sc})}{\tilde{s} u_s} \right] - u_c \frac{\mathfrak{S}_i^n}{\tilde{s}} \right\} (\partial_x \tilde{c})^2 \Delta x^2 \\ &+ O(\Delta x^3). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Pour « tuer » le terme entre accolades, il faut prendre pour  $\mathfrak{S}_i^n$  une approximation consistante de

$$\delta\bar{u}(1 - \delta\bar{u}) \left[ \frac{\tilde{s}}{2} \left( \frac{u_{ss} u_c}{u_s^2} + \frac{u_{cc}}{u_c} \right) + \frac{u_c - \tilde{s} u_{sc}}{u_s} \right].$$

Ainsi, le choix naturel est

$$\mathfrak{S}_i^n = \delta u_i^n (1 - \delta u_i^n) \left[ \frac{s_i^n}{2} \left( \frac{u_{ss} u_c}{u_s^2} + \frac{u_{cc}}{u_c} \right) + \frac{u_c - s_i^n u_{sc}}{u_s} \right], \quad (4.31)$$

toutes les fonctions restantes au second membre étant évaluées en  $(x_i, t^n)$ . Avec ce choix, on préserve la constance de la vitesse à travers une onde de contact à un terme d'ordre 3 près, c'est-à-dire

$$u_i^{n+1} = \bar{u} + O(\Delta x^3), \quad (4.32)$$

lorsque le problème est un contact pur.

**Résultats numériques.** Le problème de Riemann considéré est du même type que ceux traités au chapitre §3, avec une interface située à  $x = 0.1$  dans le domaine  $[0, 1]$ . Pour simuler un contact pur, les états initiaux sont

$$(s_L, c_L) = (0.742449164, 0.0001), \quad (s_R; c_R) = (0.621238793, 0).$$

Les résultats présentés à la Figure 4.5 correspond à un maillage uniforme constitué de 500 cellules. Ils font clairement ressortir la qualité d'approximation supérieure du schéma de Godunov corrigé (4.28), (4.31). Une analyse de l'ordre de convergence sur différentes

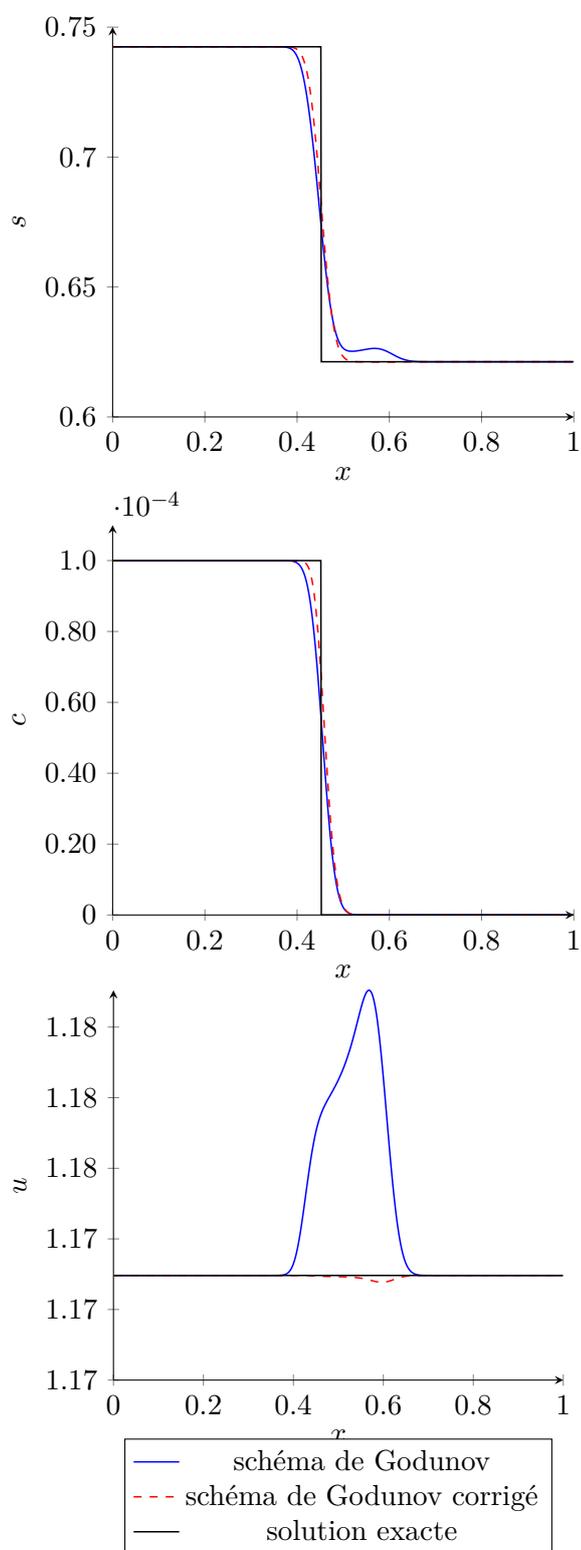


FIGURE 4.5 – De haut en bas : profils de saturation en eau  $s$ , de la fraction massique de polymère  $c$  et de vitesse  $u$  obtenus avec 500 cellules pour le schéma de Godunov et le schéma de Godunov corrigé dans un contact.

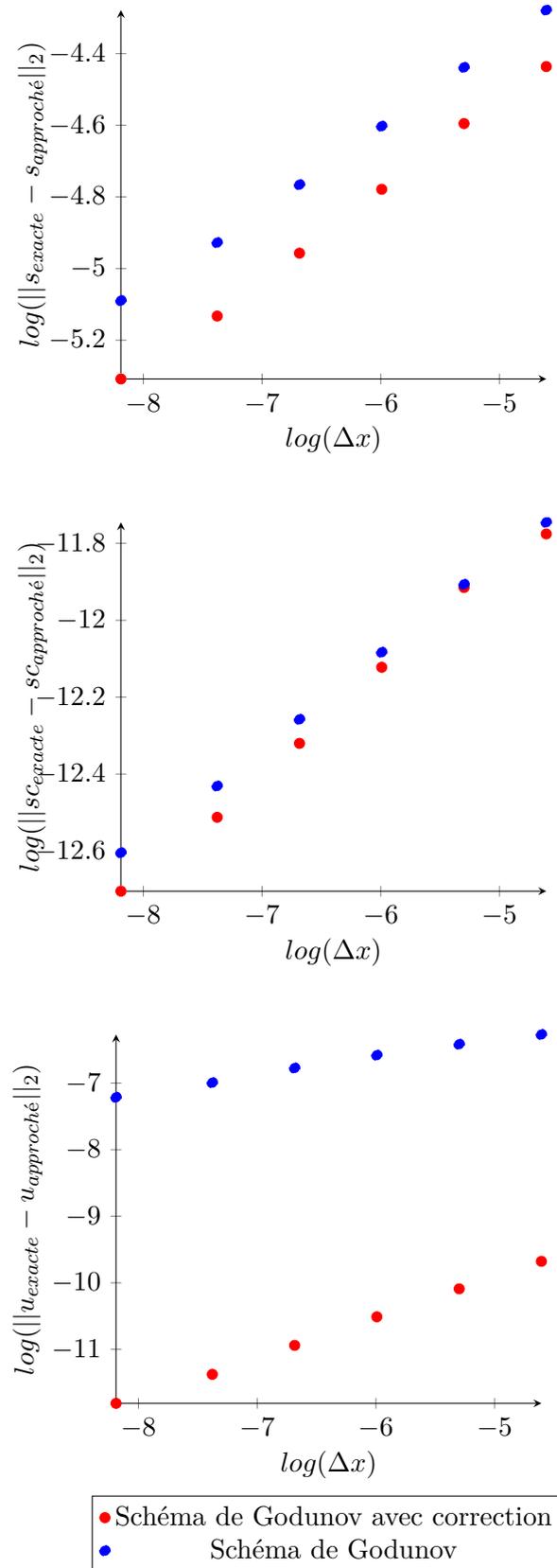


FIGURE 4.6 – De haut en bas : erreurs en base logarithme de saturation en eau  $s$ , de la masse de polymère  $sc$  et de vitesse  $u$  pour le schéma de Godunov et le schéma corrigé pour les données initiales obtenus avec 100, 200, 400, 800, 1600 et 3200 cellules.

| variable | schéma de Godunov | schéma corrigé |
|----------|-------------------|----------------|
| $s$      | 0.234             | 0.253          |
| $sc$     | 0.248             | 0.271          |
| $u$      | 0.260             | 0.612          |

TABLE 4.4 – Comparatif des ordres de convergence pour le schéma de Godunov et le schéma de Godunov corrigé dans un contact pur.

variables a été ensuite effectuée avec une famille de maillages constitués de 100, 200, 400, 800, 1600 et 3200 cellules. Elle est résumée à la Table 4.4 et sur la Figure 4.6.

L'amélioration apportée par le terme de correction pour la discontinuité de contact est nettement visible. Cependant, cela n'est pas toujours le cas pour tous les problèmes de Riemann. Le schéma (4.28) ne modifie pas le schéma de Godunov lorsque la solution du problème de Riemann est une onde  $s$  (Figure 4.7). Pour les problèmes de Riemann dont la solution est une succession d'ondes, certains problèmes ne seront pas résolus correctement. Par exemple, dans le cas donné par  $(s_L, c_L) = (0.7, 0)$  et  $(s_R, c_R) = (0.5, 0.001)$ , la Figure 4.8 montre que le terme de correction ajoute des ondes de choc non physiques. Même si une attention particulière a été portée à l'élaboration du terme de correction, des problèmes persistent. En fait, le terme de correction est écrit avec  $(\partial_x c)^2$  pour être efficace vis-à-vis d'une discontinuité de contact. Malheureusement, à l'instant initial de la simulation, il n'y a pas d'ondes simples : la discontinuité de contact, les ondes de choc et de détente sont situées au même endroit. Ainsi, le terme de correction affecte l'onde de choc et cela explique l'étrange comportement observé. D'autres formes pour le terme de correction en  $(\partial_x s)^2$  et  $(\partial_x sc)^2$  ont été testées, mais le problème persiste. Il s'agit donc d'un problème sérieux que nous allons résoudre dans la section suivante.

### 4.3.3 Correction compatible avec plusieurs ondes

**Deuxième modification.** Pour surmonter la difficulté due aux ondes multiples, nous envisageons une nouvelle modification du schéma sous la forme

$$(s)_i^{n+1} = (s)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(s)_i^n u(s_i^n, c_i^n) - (s)_{i-1}^n u(s_{i-1}^n, c_{i-1}^n)], \quad (4.33a)$$

$$(sc)_i^{n+1} = (sc)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(sc)_i^n u(s_i^n, c_i^n) - (sc)_{i-1}^n u(s_{i-1}^n, c_{i-1}^n)] + \mathfrak{S}_i^n (h_i^n - h_{i-1}^n)^2, \quad (4.33b)$$

$$(sh)_i^{n+1} = (sh)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(sh)_i^n u(s_i^n, c_i^n) - (sh)_{i-1}^n u(s_{i-1}^n, c_{i-1}^n)], \quad (4.33c)$$

où  $h$  est une nouvelle inconnue qui à l'instant initial coïncide avec la fraction massique du polymère, soit

$$h_i^0 = c_i^0, \quad (4.33d)$$

et qui obéit aux mêmes conditions aux limites. Le coefficient  $\mathfrak{S}_i^n$ , qui garde la même valeur qu'en (4.31), est cette fois multiplié par le saut de  $h$  et non pas le saut de  $c$ .

Pour comprendre la motivation de (4.33), considérons le système continu

$$\partial_t(s) + \partial_x(su) = 0, \quad (4.34a)$$

$$\partial_t(sc) + \partial_x(scu) = 0, \quad (4.34b)$$

$$\partial_t(sh) + \partial_x(shu) = 0, \quad (4.34c)$$

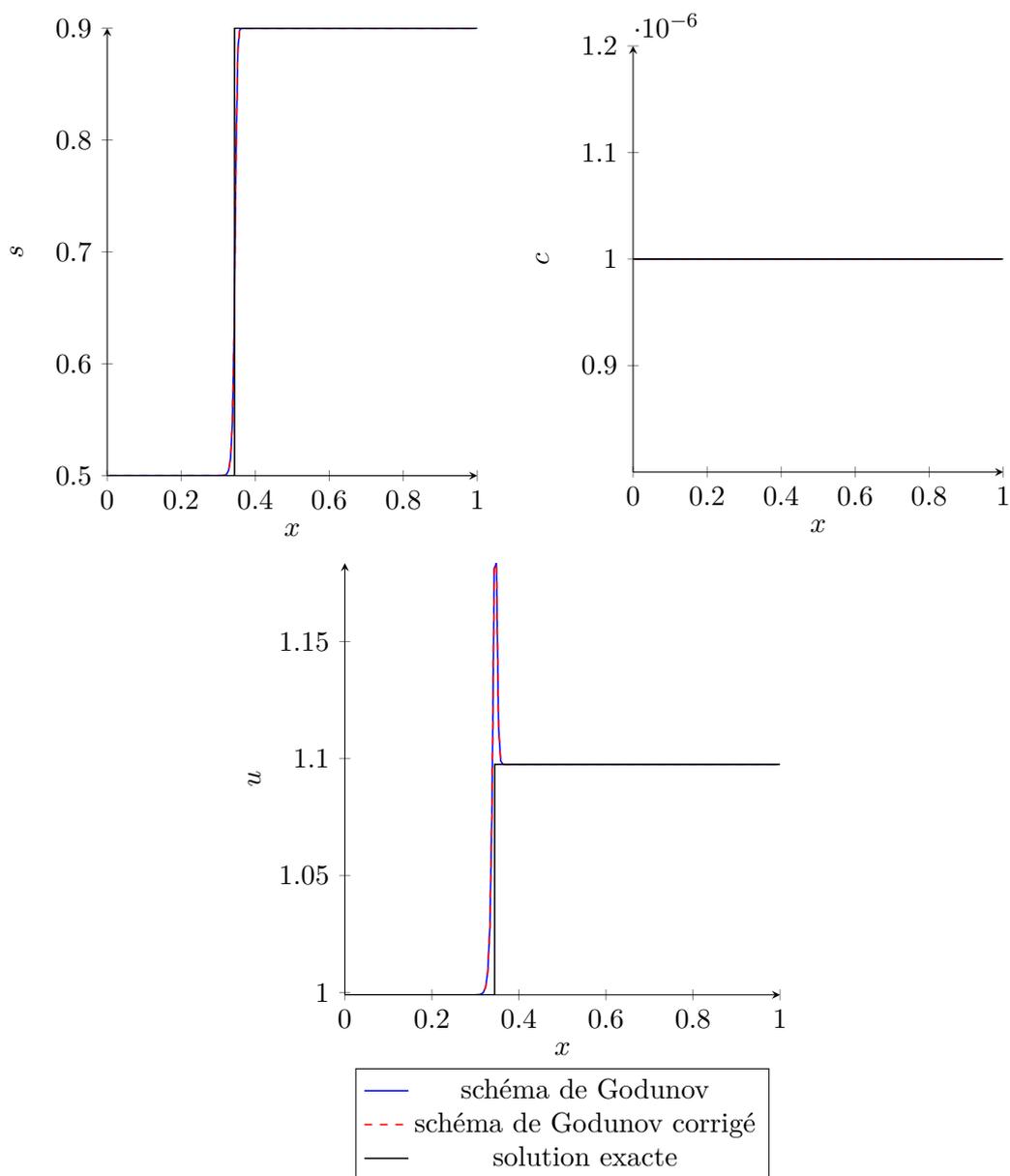


FIGURE 4.7 – De haut en bas : profils de saturation en eau  $s$ , de la fraction massique de polymère  $c$  et de vitesse  $u$  obtenus avec le schéma de Godunov et le schéma de Godunov corrigé dans un choc. Maillage constitué de 500 cellules.

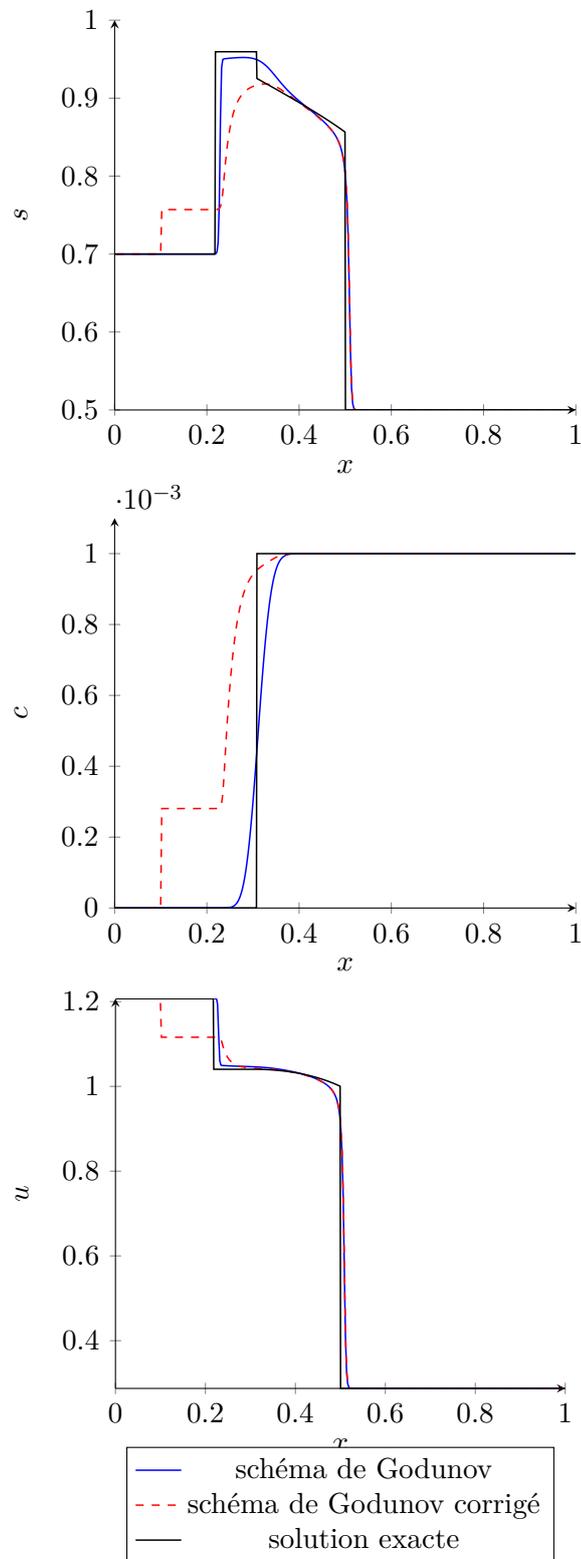


FIGURE 4.8 – De haut en bas : profils de saturation en eau  $s$ , de la fraction massique de polymère  $c$  et de vitesse  $u$  pour les schémas de Godunov et schéma Godunov corrigé pour les données initiales  $(s_L, c_L) = (0.7, 0)$  et  $(s_R, c_R) = (0.5, 0.001)$  avec 400 cellules.

avec la même vitesse interstitielle  $u = u(s, c)$  que dans le problème originel. Le système (4.34) modélise l'écoulement en milieu poreux d'une eau dans laquelle, en plus du polymère, l'on retrouve un *traceur* de fraction massique  $h$  qui a la même condition initiale que  $c$ , à savoir

$$h(x, t = 0) = c(x, t = 0). \quad (4.34d)$$

Le scalaire passif  $h$  n'agit pas sur la vitesse  $u$  et n'a pas d'impact sur les variables  $s$  et  $c$ . En retranchant à (4.34c) le produit de (4.34a) avec  $h$ , on obtient

$$\partial_t h + u \partial_x h = 0 \quad (4.35)$$

après division par  $s$ . Autrement dit,  $h$  est transporté par le champ de vitesse  $u = u(s, c)$ , imitant au passage le comportement de  $c$  dont on sait qu'il vérifie

$$\partial_t c + u \partial_x c = 0.$$

Le transport de  $h$  est linéaire, tandis que celui de  $c$  est non linéaire sauf au voisinage d'une discontinuité de contact où il devient linéaire. Ainsi,  $h$  apparaît comme une « copie » de  $c$  dans laquelle on ne verrait que les variations de  $c$  à travers des contacts. Par conséquent, les variations spatiales non nulles en  $h$  détectent uniquement l'onde  $c$  et ignorent l'onde  $s$ .

Le schéma de Godunov pour le système (4.34) s'écrit

$$(s)_i^{n+1} = (s)_i^n - \delta[(s)_i^n u(s_i^n, c_i^n) - (s)_{i-1}^n u(s_{i-1}^n, c_{i-1}^n)], \quad (4.36a)$$

$$(sc)_i^{n+1} = (sc)_i^n - \delta[(sc)_i^n u(s_i^n, c_i^n) - (sc)_{i-1}^n u(s_{i-1}^n, c_{i-1}^n)], \quad (4.36b)$$

$$(sh)_i^{n+1} = (sh)_i^n - \delta[(sh)_i^n u(s_i^n, c_i^n) - (sh)_{i-1}^n u(s_{i-1}^n, c_{i-1}^n)]. \quad (4.36c)$$

On applique maintenant à la deuxième équation une modification semblable à (4.28b), dans laquelle  $(c_i - c_{i-1})^2$  est remplacé par  $(h_i - h_{i-1})^2$ , pour obtenir (4.33b).

**Résultats numériques.** Les simulations de différents problèmes de Riemann montrent que dans le pire des cas, le nouveau schéma est très proche du schéma de Godunov et donc converge (Figure 4.9). Dans le reste des cas, on observe une réelle amélioration comme en témoigne la Figure 4.10. Cependant, comme pour la première correction, la deuxième correction ne conserve pas non plus la quantité de polymère (Table 4.5)

| Nombre de cellules | Schéma de Godunov   |                     | Godunov avec correction |                      |
|--------------------|---------------------|---------------------|-------------------------|----------------------|
|                    | $s$                 | $sc$                | $s$                     | $sc$                 |
| 400                | $-1 \cdot 10^{-32}$ | $-1 \cdot 10^{-32}$ | $-1 \cdot 10^{-32}$     | $-5.3 \cdot 10^{-2}$ |
| 800                | $-1 \cdot 10^{-32}$ | $-2 \cdot 10^{-32}$ | $-1 \cdot 10^{-32}$     | $-4.2 \cdot 10^{-2}$ |
| 1600               | $-7 \cdot 10^{-33}$ | $-3 \cdot 10^{-32}$ | $-1 \cdot 10^{-33}$     | $-2.9 \cdot 10^{-2}$ |
| 3200               | $-1 \cdot 10^{-32}$ | $-3 \cdot 10^{-32}$ | $-1 \cdot 10^{-32}$     | $-1.8 \cdot 10^{-2}$ |

TABLE 4.5 – Comparatif de la conservation des quantités d'eau et de polymère.

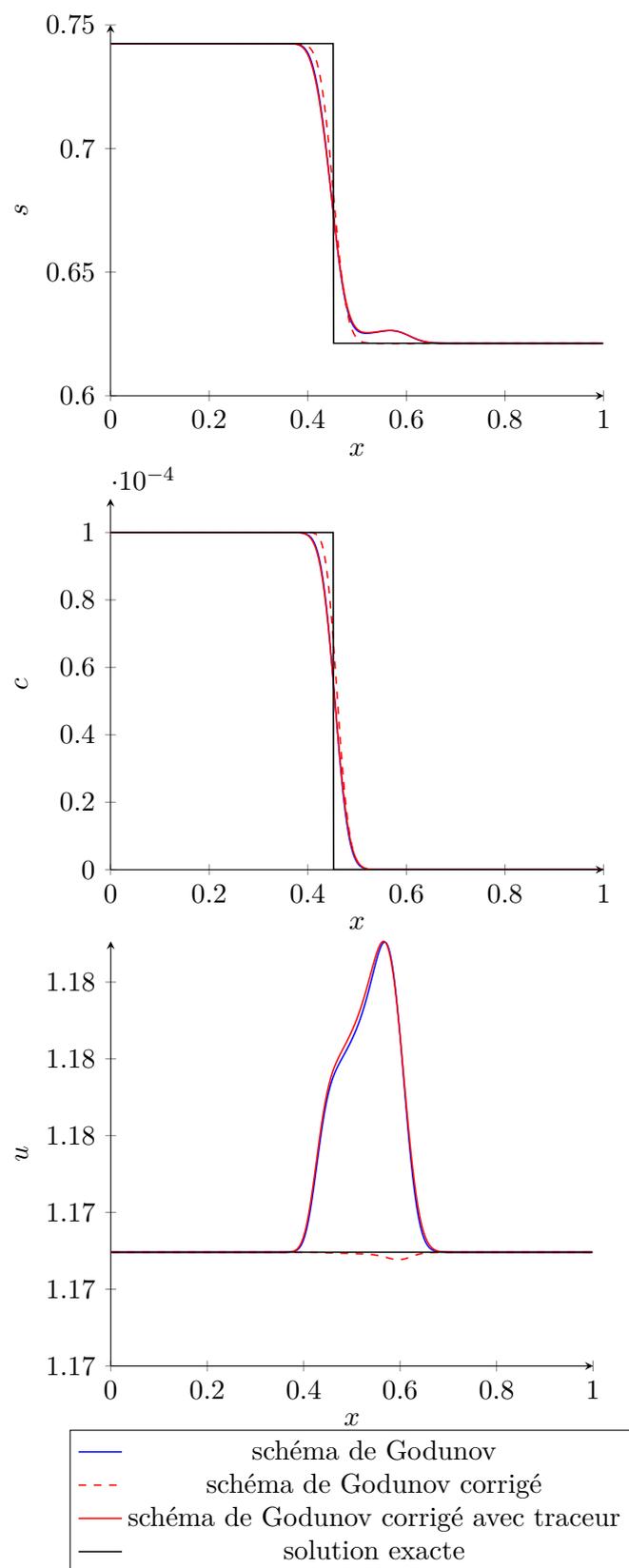


FIGURE 4.9 – De haut en bas : profils de saturation en eau  $s$ , de la fraction massique de polymère  $c$  et de vitesse  $u$  pour le schéma corrigé avec traceur dans un contact pur. Simulations faites avec 500 cellules.

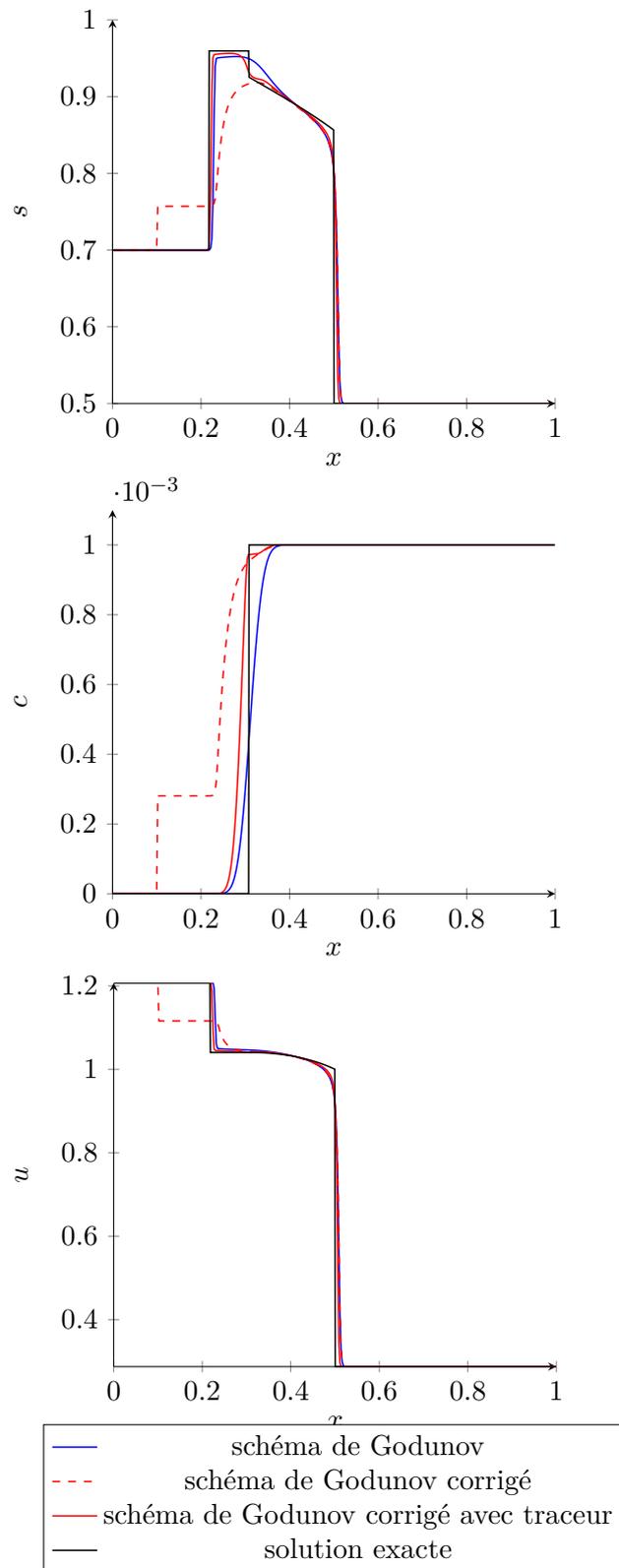


FIGURE 4.10 – De haut en bas : profils de saturation en eau  $s$ , de la fraction massique de polymère  $c$  et de vitesse  $u$  pour le schéma de Godunov et schéma corrigé pour les données initiales  $(s_L, c_L) = (0.7, 0)$  et  $(s_R, c_R) = (0.5, 0.001)$  avec 400 cellules.

Deuxième partie

Écoulements avec volume de pore  
inaccessible



## Chapitre 5

# Analyse du modèle diphasique pour plusieurs lois d'IPV

### Sommaire

---

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>5.1</b> | <b>Modèle simplifié 1-D avec IPV</b>              | <b>86</b>  |
| 5.1.1      | Obtention du modèle                               | 86         |
| 5.1.2      | Conditions suffisantes d'hyperbolicité faible     | 88         |
| <b>5.2</b> | <b>Loi d'IPV constant</b>                         | <b>93</b>  |
| 5.2.1      | Origine physique                                  | 93         |
| 5.2.2      | Régions d'hyperbolicité et d'ellipticité          | 94         |
| <b>5.3</b> | <b>Loi de percolation</b>                         | <b>98</b>  |
| 5.3.1      | Origine physique                                  | 98         |
| 5.3.2      | Éléments propres                                  | 99         |
| 5.3.3      | Équivalence avec le modèle sans IPV               | 101        |
| <b>5.4</b> | <b>Lois de diffusion uniforme et non uniforme</b> | <b>102</b> |
| 5.4.1      | Origine physique                                  | 103        |
| 5.4.2      | Régions d'hyperbolicité et d'ellipticité          | 105        |

---

La prise en compte d'une loi d'IPV, qui fait l'objet de la seconde partie de ce manuscrit, a pour principale difficulté une éventuelle perte de l'hyperbolicité faible, laquelle débouche sur des valeurs propres complexes et engendre des instabilités exponentielles. Aussi, commençons-nous en §5.1 par l'analyse d'un modèle simplifié 1-D avec IPV, pour lequel nous énonçons en toute généralité des conditions suffisantes pour l'hyperbolicité faible.

Les sections suivantes sont consacrées à l'étude de quatre lois d'IPV couramment utilisées en simulation de réservoir. Pour la loi d'IPV constant, dont on sait qu'il existe des zones d'ellipticité, nous parvenons en §5.2 à les déterminer complètement.

Pour la loi de percolation de Bartelds et al. [6], nous montrons en §5.3 non seulement qu'elle assure l'hyperbolicité faible, mais aussi que le modèle d'écoulement qui lui est associé est mathématiquement équivalent à celui de Keyfitz-Kranzer du cas sans IPV par le biais d'un changement de variables.

Plus récemment proposées par Hilden et al. [45], les lois de diffusion uniforme et non-uniforme introduites sont traitées en §5.4. Nous établissons l'existence de zones elliptiques pour ces deux lois.

## 5.1 Modèle simplifié 1-D avec IPV

### 5.1.1 Obtention du modèle

**En coordonnées eulériennes.** En repartant du modèle complet 3-D de §2.1, qui est constitué du système des trois équations aux dérivées partielles (2.1) et des lois de fermetures algébriques, nous appliquons les hypothèses suivantes :

1. On se place en une dimension spatiale  $x \in \mathbb{R}$  au lieu de trois. Les vitesses de filtration des phases n'ont qu'une seule composante  $u_\psi$ , celle le long de l'axe des  $x$ . Dès lors, les opérateurs  $\nabla$  et  $\text{div}$  deviennent  $\partial_x$ .
2. Il n'y a ni pesanteur, ni pression capillaire. Cela signifie que  $\mathbf{g} = 0$  et  $p_w = p_o =: p$ . De surcroît, il n'y a aucun échange avec l'extérieur via les termes sources. En d'autres termes,  $\varsigma_\psi = 0$ ,  $\psi \in \{w, o\}$ , les seconds membres de (2.1) sont nuls.
3. Les deux phases fluides sont incompressibles. Autrement dit, les  $\rho_\psi$  sont constantes et disparaissent, après division, dans les bilans de masse (2.1) avec seconds membres homogènes.
4. Le milieu est de porosité  $\phi = 1$ . Par conséquent, il n'y a pas à prendre en compte l'adsorption ( $1 - \phi = 0$ ).

Ces quatre hypothèses sont les mêmes qu'en §2.2.1. Seule la cinquième concernant l'IPV n'a pas été retenue ici.

Dans ces conditions, les lois de conservation (2.1) deviennent

$$\partial_t(s_o) + \partial_x(u_o) = 0, \quad (5.1a)$$

$$\partial_t(s_w) + \partial_x(R_m^{-1}u_w) = 0, \quad (5.1b)$$

$$\partial_t(s_w c_w) + \partial_x(R_m^{-1}u_w c_w \gamma) = 0, \quad (5.1c)$$

auxquelles sont introduites les notions de flux fractionnaires et l'égalité  $s_w + s_o = 1$ . En omettant les indices pour la phase eau  $w$  et en reprenant à l'identique les calculs ayant conduit au modèle (2.34), on obtient le système

$$\partial_t(s) + \partial_x(f) = 0, \quad (5.2a)$$

$$\partial_t(sc) + \partial_x(fc\gamma) = 0, \quad (5.2b)$$

où  $f$  désigne le flux fractionnaire (2.35). Ce modèle, présent dans la littérature [6, 83], servira de référence dans la partie §II. En introduisant la vitesse interstitielle

$$u = \frac{f}{s}, \quad (5.3)$$

on peut transformer le système (5.2) en

$$\partial_t(s) + \partial_x(su) = 0, \quad (5.4a)$$

$$\partial_t(sc) + \partial_x(scu + q) = 0, \quad (5.4b)$$

où

$$q = (\gamma - 1)scu \quad (5.4c)$$

désigne la *dérive* du polymère.

L'écriture sous la forme abstraite

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}, \quad (5.5)$$

est semblable à celle de la partie §I mais avec cette fois-ci

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} s \\ sc \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} f \\ fc\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ fc + q \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

**En coordonnées lagrangiennes.** Pour se prononcer sur l'hyperbolicité faible d'un système de lois de conservation de la forme (2.36) il faut savoir si la matrice jacobienne  $\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f}$  admet des valeurs propres toutes réelles. La réponse à cette question peut faire intervenir des calculs très lourds suivant la loi  $\gamma$  choisie. La nature hyperbolique ou non d'un modèle est indépendante du changement de variables. Un cadre plus favorable à l'analyse du modèle (5.4) est celui obtenu en passant en coordonnées lagrangiennes [87, 105].

Détaillons les étapes qui y conduisent. De la première équation de (5.4), vue comme une condition de Schwarz sur les dérivées croisées, on déduit l'existence d'une fonction  $m(x, t)$ , appelée *abscisse lagrangienne*, telle que

$$\partial_x m = s, \quad \partial_t m = -su. \quad (5.7)$$

L'idée est alors d'utiliser  $m$  comme variable « spatiale » à la place de  $x$ . Plus rigoureusement, cela revient à effectuer le changement de variables

$$(x, t) \longleftrightarrow (m, T), \quad \text{avec } T = t.$$

Soit  $\partial_t A + \partial_x B = 0$  une loi de conservation écrite en  $(x, t)$ . Pour l'exprimer en  $(m, T)$ , on utilise les relations suivantes

$$\partial_t = (\partial_t T) \partial_T + (\partial_t m) \partial_m = \partial_T - su \partial_m \quad (5.8a)$$

$$\partial_x = (\partial_x T) \partial_T + (\partial_x m) \partial_m = s \partial_m \quad (5.8b)$$

qui découlent des formules de dérivation composée. On obtient aisément

$$\partial_T A + s(\partial_m B - u \partial_m A) = 0, \quad (5.9)$$

avec un léger abus de notation consistant à voir maintenant  $(A, B)$  comme des fonctions de  $(m, T)$ .

En appliquant (5.9) à  $(A, B) = (s, su)$ , puis à  $(A, B) = (sc, scu + q)$ , on obtient

$$\partial_T(s) - su \partial_m(s) + s \partial_m(su) = 0, \quad (5.10a)$$

$$\partial_T(sc) - su \partial_m(sc) + s \partial_m(scu + q) = 0. \quad (5.10b)$$

Lorsque  $s \neq 0$ , on peut diviser les deux membres de (5.10a) par  $-s^2$  pour arriver à une équation d'évolution sur

$$\tau = \frac{1}{s}. \quad (5.11)$$

De même, en retranchant à (5.10b) le produit de (5.10a) par  $c$ , puis en divisant par  $s$ , on obtient une équation d'évolution sur  $c$ . Après simplifications algébriques, le nouveau système s'écrit

$$\partial_T \tau - \partial_m u = 0, \quad (5.12a)$$

$$\partial_T c + \partial_m q = 0, \quad (5.12b)$$

où  $u$  et  $q$  doivent être maintenant perçus comme des fonctions de  $(\tau, c)$ .

Le système lagrangien (5.12) met en évidence le fait que les véritables non-linéarités du modèle sont  $u$  et  $q$ , alors que dans le système de départ (5.4), les termes convectifs non linéaires  $su$  et  $scu$  sont dus à la représentation eulérienne. Cette observation est fondamentale dans l'élaboration du schéma de relaxation au chapitre §6. En posant

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \tau \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} -u \\ q \end{bmatrix}, \quad (5.13a)$$

on peut mettre le modèle lagrangien (5.12) sous la forme abstraite

$$\partial_T \mathbf{y} + \partial_m \mathbf{h}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}. \quad (5.13b)$$

La question de l'hyperbolicité faible peut maintenant être abordée en cherchant les valeurs propres de la matrice jacobienne en lagrangien

$$\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{h}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} -u_\tau & -u_c \\ q_\tau & q_c \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

qui est a priori moins complexe.

### 5.1.2 Conditions suffisantes d'hyperbolicité faible

Même en coordonnées lagrangiennes, la technicité du modèle ne permet pas d'exhiber une condition nécessaire et suffisante d'hyperbolicité faible (assurant que les valeurs propres sont réelles). C'est la raison pour laquelle nous devons nous contenter de quelques conditions suffisantes « raisonnables ». Des travaux partiellement similaires ont déjà été menés par Bartelds et al. [6] en coordonnées eulériennes. Le cadre lagrangien simplifie néanmoins les opérations et permet d'entrevoir d'autres pistes.

Le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne (5.14) est le trinôme

$$\wp(\lambda) = \det(\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{h}(\mathbf{y}) - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 + (u_\tau - q_c)\lambda + u_c q_\tau - u_\tau q_c, \quad (5.15)$$

qui admet pour discriminant

$$\Delta = (u_\tau - q_c)^2 + 4(u_\tau q_c - u_c q_\tau). \quad (5.16)$$

Les valeurs propres de  $\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{h}$  sont réelles si et seulement si  $\Delta \geq 0$ . Les conditions suffisantes ci-après reposent sur divers réarrangements algébriques du discriminant. Elles s'interprètent aussi parfois en termes de contrôle de l'ordre de grandeur d'une vitesse caractéristique, ce qui est la procédure habituelle pour la conception des modèles de trafic routier [4, 62, 109]. Avant de détailler les conditions suffisantes, rappelons que

$$f \geq 0, \quad f_s \geq 0, \quad f_c \leq 0, \quad u \geq 0, \quad u_c \leq 0. \quad (5.17)$$

**Condition suffisante 0.** On impose que le deuxième terme dans la somme du discriminant (5.16) est positif, c'est-à-dire

$$u_\tau q_c - u_c q_\tau \geq 0. \quad [\text{CS0}] \quad (5.18)$$

Bien que peu pratique, cette condition est la plus immédiate. Elle est équivalente à

$$\wp(0) \leq 0, \quad (5.19)$$

au vu de (5.15). Comme le trinôme  $\wp$  tend vers  $+\infty$  pour  $\lambda \rightarrow \pm\infty$ , cela revient à dire par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il admet (au sens large) une racine inférieure à 0 et une racine supérieure à 0. En revenant en eulérien, cela signifie que  $\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{f}$  admet deux valeurs propres réelles situées de part et d'autre de

$$u + \tau \cdot 0 = u.$$

**Condition suffisante 1.** En combinant le produit  $4u_{\tau}q_c$  avec premier terme de (5.16), on obtient

$$\Delta = (u_{\tau} + q_c)^2 - 4u_cq_{\tau}. \quad (5.20)$$

Il s'ensuit qu'une condition suffisante pour assurer  $\Delta \geq 0$  est  $u_cq_{\tau} \leq 0$ , ou encore

$$q_{\tau} \geq 0 \quad [\text{CS1}]. \quad (5.21)$$

En revenant à une fonction  $q(s, c)$ , cela équivaut à

$$q_s \leq 0 \quad [\text{CS1}]. \quad (5.22)$$

Autrement dit, il suffit que  $q$  décroisse en  $s$  à  $c$  fixé. Comme  $\wp(-u_{\tau}) = u_cq_{\tau}$ , la CS1 est équivalente à

$$\wp(-u_{\tau}) \leq 0. \quad (5.23)$$

Le trinôme  $\wp$  tendant vers  $+\infty$  pour  $\lambda \rightarrow \pm\infty$ , cela revient à dire par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il admet (au sens large) une racine inférieure à  $-u_{\tau}$  et une racine supérieure à  $-u_{\tau}$ . En revenant en eulérien, cela signifie que  $\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{f}$  admet deux valeurs propres réelles situées de part et d'autre de

$$u - \tau u_{\tau} = u + su_s = (su)_s = f_s.$$

**Condition suffisante 2.** Un découpage plus « subtil » du discriminant  $\Delta$  peut être accompli en introduisant la quantité

$$g = (\gamma - 1)sc, \quad (5.24)$$

de sorte que  $q = gu$ . L'expression (5.20) du discriminant devient

$$\Delta = (u_{\tau} + g_cu + gu_c)^2 - 4u_c(g_{\tau}u + gu_{\tau}). \quad (5.25)$$

Grâce à l'identité  $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta$  avec  $\alpha = u_{\tau} + g_cu$  et  $\beta = gu_c$ , on obtient après simplification

$$\Delta = (u_{\tau} + g_cu - gu_c)^2 - 4uu_c(g_{\tau} - gg_c). \quad (5.26)$$

Puisque  $u \geq 0$  et  $u_c \leq 0$ , il suffit d'imposer

$$g_{\tau} - gg_c \geq 0. \quad (5.27)$$

En y reportant  $g = (\gamma - 1)c/\tau$  et avec

$$g_\tau = \gamma_\tau c/\tau - (\gamma - 1)c/\tau^2, \quad (5.28a)$$

$$g_c = \gamma_c c/\tau + (\gamma - 1)/\tau, \quad (5.28b)$$

on aboutit après calculs à

$$\tau\gamma_\tau - \gamma(\gamma - 1) - c(\gamma - 1)\gamma_c \geq 0 \quad [\text{CS2}]. \quad (5.29)$$

En revenant à une fonction  $\gamma(s, c)$ , l'inégalité ci-dessus devient

$$s\gamma_s + \gamma(\gamma - 1) + c(\gamma - 1)\gamma_c \leq 0 \quad [\text{CS2}]. \quad (5.30)$$

L'intérêt de la CS2 est qu'elle porte directement et uniquement sur la loi d'IPV  $\gamma(s, c)$ , indépendamment de  $u(s, c)$ , à l'inverse des conditions précédentes. En remarquant que  $\wp(g_c u) = uu_c(g_\tau - gg_c)$ , on voit que la CS2 dans la forme (5.27) équivaut à

$$\wp(g_c u) \leq 0. \quad (5.31)$$

Par un argument identique qu'avant, cela revient à stipuler que le trinôme  $\wp$  admet (au sens large) une racine inférieure à  $g_c u$  et une racine supérieure  $g_c u$ . En revenant en eulérien, cela signifie que  $\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f}$  admet deux valeurs propres réelles situées de part et d'autre de

$$u + \tau g_c u = u + \tau((\gamma - 1)sc)_c u = (\gamma c)_c u.$$

Une sous-famille de solutions de la CS2 sous la forme (5.30) peut être obtenue en imposant séparément

$$(\gamma - 1)\gamma_c \leq 0, \quad (5.32a)$$

$$s\gamma_s + \gamma(\gamma - 1) \leq 0. \quad (5.32b)$$

Pour résoudre l'inéquation (5.32b), on définit la fonction  $\psi = s(1 - 1/\gamma)$ . La relation (5.32b) devient alors

$$\psi_s = 1 - \frac{1}{\gamma} + s \frac{\gamma_s}{\gamma^2} = \frac{s\gamma_s + \gamma(\gamma - 1)}{\gamma^2} \leq 0. \quad (5.33)$$

Par conséquent, il suffit que  $\psi$  soit une fonction décroissante en  $s$ . Soit  $\sigma(s, c)$  une fonction arbitraire décroissante en  $s$ . En prenant  $\psi = \sigma$ , on en tire que

$$\gamma(s, c) = \frac{s}{s - \sigma(s, c)}. \quad (5.34)$$

Pour que  $\gamma$  soit bien défini et prenne des valeurs supérieures à 1, il faut demander

$$0 \leq \sigma(s, c) < s. \quad (5.35)$$

Comme  $\gamma \geq 1$ , la condition (5.32a) implique

$$\gamma_c = \frac{s\sigma_c}{[s - \sigma(s, c)]^2} \leq 0, \quad (5.36)$$

où  $\sigma_c \leq 0$ . En résumé,  $\gamma$  est de la forme (5.34) avec une fonction arbitraire  $\sigma$  décroissante en  $s$  et en  $c$ , vérifiant (5.35). Deux cas particuliers de cette sous-famille de solutions sont à mentionner :

▷  $\sigma \equiv 0$ . Alors, on retrouve la loi sans IPV

$$\gamma \equiv 1. \quad (5.37)$$

étudiée en §I;

▷  $\sigma \equiv s_\bullet$ . Alors, on obtient la loi de percolation

$$\gamma = \frac{s}{s - s_\bullet}. \quad (5.38)$$

qui est étudiée en §5.3. Les simulations du chapitre §7 montrent que cette loi ne peut être utilisée que pour des grandes valeurs de  $s_b$ , ce qui ne satisfait pas les attentes des ingénieurs.

**Condition suffisante 3.** Cette condition vise à élargir le champ de construction des lois d'IPV. Il s'agit en réalité d'un renforcement de la CS1, où l'on tente de séparer  $\gamma$  et  $u$ . Dans (5.22), injectons  $q = (\gamma - 1)fc$  et

$$q_s = c[\gamma_s f + (\gamma - 1)f_s]. \quad (5.39)$$

Comme  $c \geq 0$ , il vient que

$$\gamma_s f + (\gamma - 1)f_s \leq 0. \quad (5.40)$$

Puisque  $\gamma \geq 1$  et  $f \geq 0$ , cela revient à

$$\frac{\gamma_s}{\gamma - 1} + \frac{f_s}{f} \leq 0. \quad (5.41)$$

De l'expression (2.35) pour  $f$ , il résulte que

$$f_s = \frac{R_m^{-1}(c)[\Lambda'_w(s)\Lambda_o(1-s) + \Lambda_w(s)\Lambda'_o(1-s)]}{[\Lambda_o(1-s) + R_m^{-1}(c)\Lambda_w(s)]^2}. \quad (5.42)$$

d'où

$$\frac{f_s}{f} = \left[ \frac{\Lambda'_w(s)}{\Lambda_w(s)} + \frac{\Lambda'_o(1-s)}{\Lambda_o(1-s)} \right] \cdot \left[ 1 + R_m^{-1}(c) \frac{\Lambda_w(s)}{\Lambda_o(1-s)} \right]^{-1}. \quad (5.43)$$

Comme toutes les fractions apparaissant dans (5.43) sont positives, on a la majoration

$$\frac{f_s}{f} \leq \frac{\Lambda'_w(s)}{\Lambda_w(s)} + \frac{\Lambda'_o(1-s)}{\Lambda_o(1-s)}. \quad (5.44)$$

Pour assurer (5.41), il suffit donc d'exiger

$$\frac{\gamma_s(s)}{\gamma(s) - 1} + \frac{\Lambda'_w(s)}{\Lambda_w(s)} + \frac{\Lambda'_o(1-s)}{\Lambda_o(1-s)} \leq 0 \quad [\text{CS3}]. \quad (5.45)$$

Le premier membre de cette CS3 n'est autre que la dérivée logarithmique par rapport à  $s$  de la fonction

$$(s, c) \mapsto [\gamma(s, c) - 1] \frac{\Lambda_w(s)}{\Lambda_o(1-s)}.$$

Cette fonction, qu'on va nommer  $\Xi$ , doit donc être décroissante en  $s$  à  $c$  fixé. Ainsi, toute solution de la CS3 (5.45) est de la forme

$$\gamma(s, c) = 1 + \Xi(s, c) \frac{\Lambda_o(1-s)}{\Lambda_w(s)}, \quad (5.46)$$

où  $\Xi(s, c)$  est une fonction arbitraire qui est positive et décroissante en  $s$ .

Par exemple, on peut prendre  $\Xi(s, c) = \Xi$ , une constante positive. La loi correspondante

$$\gamma(s) = 1 + \Xi \frac{\Lambda_o(1-s)}{\Lambda_w(s)} \quad (5.47)$$

est appelée *loi de dérive sous linéaire*, dans la mesure où la dérive

$$q(s, c) = (\gamma(s) - 1)f(s, c)c \leq (\gamma(s) - 1) \frac{\Lambda_o(1-s)}{\Lambda_w(s)} c \leq \left[ (\gamma - 1) \frac{\Lambda_o(1-\cdot)}{\Lambda_w} \right] (s_b) c$$

est majorée par une fonction linéaire en  $c$  pour  $s \geq s_b$ . Les observations faites en laboratoires montrent que la fonction  $\gamma$  doit vérifier  $\gamma(s = s_{\#}) > 1$ . Or, de par la définition de  $\Lambda_o$ , on a

$$\Xi \frac{\Lambda_o(1-s_{\#})}{\Lambda_w(s_{\#})} = 0. \quad (5.48)$$

Cette loi ne peut donc pas permettre de reproduire les observations expérimentales présentées dans la section §7.2 où  $\gamma(s_{\#}) = 1.21$ .

**Condition suffisante 4.** Dans le but de construire une loi d'IPV capable de satisfaire  $\gamma(s_{\#}, c) > 1$ , reprenons l'équation (5.43) dans laquelle on remarque que le terme

$$\left[ 1 + R_m^{-1}(c) \frac{\Lambda_w(s)}{\Lambda_o(1-s)} \right]^{-1}$$

est décroissant avec la fraction massique  $c$ . Il vient que pour une fraction massique  $c_{\max}$  donnée, on a

$$\frac{f_s(s, c)}{f(s, c)} \leq \frac{f_s(s, c_{\max})}{f(s, c_{\max})} \quad \text{pour } c \leq c_{\max}. \quad (5.49)$$

Au vu de la relation (5.41), on conclut que pour une fraction massique maximale  $c_{\max}$  donnée, le modèle d'écoulement est faiblement hyperbolique pour des fraction massiques plus petites que  $c_{\max}$  si

$$\frac{\gamma_s}{\gamma - 1} + \frac{f_s}{f}(\cdot, c_{\max}) \leq 0 \quad [\text{CS4}]. \quad (5.50)$$

La relation ci-dessus est assez proche de la CS3, à la différence que le premier membre de cette CS4 la dérivée logarithmique par rapport à la saturation  $s$ , à  $c$  fixé, de la fonction

$$(s, c) \mapsto [\gamma(s, c) - 1]f(s, c_{\max}).$$

Les solution de la condition (5.50) sont de la forme

$$\gamma(s, c) = 1 + \frac{\Xi(s, c)}{f(s, c_{\max})}, \quad (5.51)$$

où  $\Xi(s, c)$  est une fonction arbitraire positive et décroissante en  $s$ . Pour simuler l'écoulement de polymère dans le chapitre §7, on se propose de considérer la loi d'IPV d'expression générale

$$\gamma(s) = 1 + \frac{\Xi}{f(s, c_{\max})}, \quad c \in [0, c_{\max}], \quad (5.52)$$

où  $\Xi$  est une constante qui sera fixée en fonction des données expérimentales. Avec cette loi, appelée *loi de dérive maximale linéaire* dans la mesure où

$$q(s, c_{\max}) = (\gamma(s) - 1)f(s, c_{\max})c_{\max} = \Xi c_{\max}$$

est linéaire en  $c_{\max}$ , il est possible de reproduire les données de laboratoire. Cependant elle n'est pas adaptée pour des simulations avec une faible saturation en eau. En effet, le modèle (5.2) associé à cette loi possède au moins une valeur propre qui tend vers l'infini lorsque  $s$  tend vers  $s_b$ .

## 5.2 Loi d'IPV constant

La loi d'IPV constant

$$\gamma(s, c) = 1 + \eta, \quad \eta > 0, \quad (5.53)$$

est la plus fréquemment utilisée par les ingénieurs de réservoir pour prendre en compte l'effet d'accélération du polymère.

### 5.2.1 Origine physique

La raison en est que généralement ils ne disposent pas de mesure ou d'information suffisamment précise pour confectionner des lois plus complexes. En effet, la méthode la plus courante pour mesurer l'IPV consiste à injecter une solution d'eau avec un traceur (un colorant ou un sel par exemple) et un polymère dans une carotte saturée d'eau. En mesurant, l'écart de temps entre les percées du polymère et du traceur, on arrive à déterminer un IPV moyen. C'est cet IPV moyen qui est utilisé pour les simulations. En règle général, l'IPV moyen est supérieure à 1. On aboutit ainsi à la loi (5.53).

Il existe deux principales modélisations conduisant à la loi d'IPV constant. La première consiste à supposer grossièrement que la vitesse des molécules de polymère est proportionnelle à la vitesse de la phase eau, avec un coefficient de proportionnalité strictement supérieur à 1. Il s'ensuit que

$$\partial_t(s) + \partial_x(su) = 0, \quad (5.54a)$$

$$\partial_t(sc) + \partial_x(sc(1 + \eta)u) = 0, \quad (5.54b)$$

avec  $\eta$  constante strictement positive.

Dans la seconde modélisation, présentée en §2.1.3, on suppose qu'il existe une partie du volume poreux dans laquelle le polymère ne peut pas se déplacer (Figure 2.10). Soit  $\alpha_p \in [0, 1]$  la proportion de pore inaccessible au polymère. La quantité  $\phi_p$  définie par

$$\phi_p = (1 - \alpha_p)\phi, \quad (5.55)$$

représente alors la porosité vue par les molécules de polymère. Les lois de conservation de la quantité de matière pour l'eau et le polymère s'écrivent

$$\partial_t(\phi s) + \partial_x(su) = 0, \quad (5.56a)$$

$$\partial_t(\phi(1 - \alpha_p)sc) + \partial_x(scu) = 0. \quad (5.56b)$$

Avec l'hypothèse de simplification sur la porosité ( $\phi = 1$ ), le système (5.56) se ramène à

$$\partial_t(s) + \partial_x(su) = 0, \quad (5.57a)$$

$$\partial_t((1 - \alpha_p)sc) + \partial_x(scu) = 0. \quad (5.57b)$$

Les modèles (5.54) et (5.57) sont mathématiquement équivalents car  $\alpha_p$  étant une constante, (5.57) est équivalent à

$$\partial_t(s) + \partial_x(su) = 0, \quad (5.58a)$$

$$\partial_t(sc) + \partial_x\left(sc\frac{1}{1 - \alpha_p}u\right) = 0. \quad (5.58b)$$

Il suffit donc de prendre

$$\eta = \frac{1}{(1 - \alpha_p)} - 1. \quad (5.59)$$

## 5.2.2 Régions d'hyperbolicité et d'ellipticité

Dans l'espace des phases  $\mathcal{V}$ , le modèle d'écoulement diphasique avec polymère (5.2) associé à la loi d'IPV (5.53) contient des régions d'*ellipticité* où les deux valeurs propres de la matrice jacobienne  $\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{f}$  sont complexes conjugués. Elles sont matérialisées en noir sur la Figure 5.1, obtenue avec les paramètres

$$\gamma \equiv 1.25, \quad s_b = 0.1, \quad s_{\#} = 1, \quad (s, c) \in [s_b, s_{\#}] \times [0, 10^{-2}]$$

et les coefficients de réduction de mobilité

$$a_1 = 2 \cdot 10^3, \quad a_2 = 2.8 \cdot 10^6, \quad a_4 = 9 \cdot 10^{19/2}.$$

Sur la Figure 5.1, on constate que cette région comporte deux parties « connexes » dont l'une englobe la courbe  $u_s = 0$ . Expérimentalement, ces zones s'agrandissent quand  $\eta$  augmente.

**Ellipticité sur la courbe  $u_s = 0$  pour  $\eta > 0$  suffisamment petit.** Jusqu'à présent, le seul résultat théorique pour le modèle (5.12) combiné avec la loi d'IPV (5.53) est dû à Bartelds et al. [6] : en les états se trouvant sur la courbe  $u_s = 0$  (qui était la courbe de résonance pour le modèle sans IPV), le modèle est elliptique lorsque  $\eta > 0$  est suffisamment petit.

On le démontre en remplaçant  $u_\tau = -s^2 u_s$  par 0 et  $q$  par  $\eta cu/\tau$  dans le discriminant (5.20) pour obtenir

$$\Delta = (u_\tau + qc) - 4u_c q_\tau = \eta^2 (cu/\tau)_c^2 - 4\eta u_c (cu/\tau)_\tau.$$

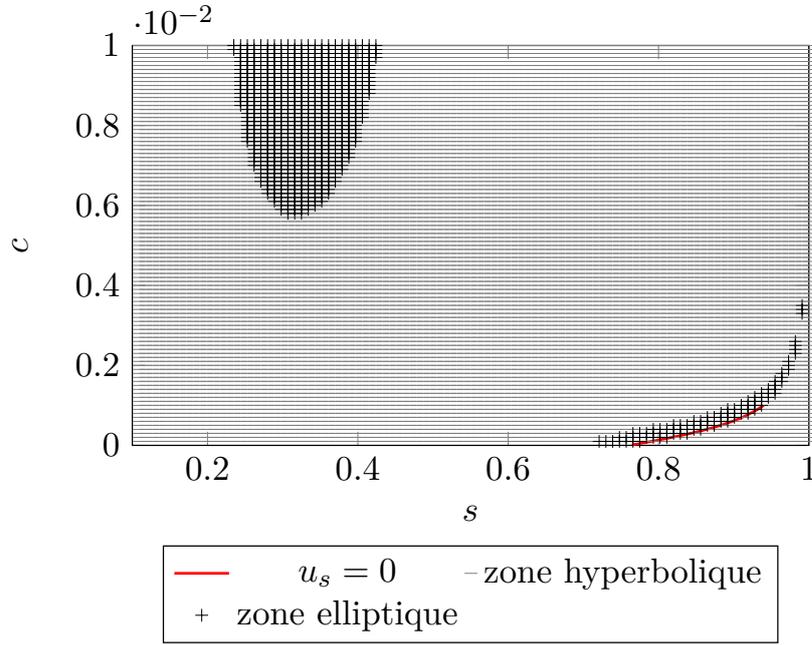


FIGURE 5.1 – IPV constant : zone hyperbolique et zone elliptique avec  $\gamma \equiv 1.25$ ,  $s_b = 0.1$ ,  $s_{\#} = 1$  et les coefficients de réduction de mobilité  $a_1 = 2 \cdot 10^3$ ,  $a_2 = 2.8 \cdot 10^6$ ,  $a_4 = 9 \cdot 10^{19/2}$ .

Quand  $\eta \downarrow 0$ , le premier terme en  $\eta^2$  est dominé par le second terme en  $\eta$ . Autrement dit, pour  $\eta > 0$  suffisamment petit,  $\Delta$  aura le signe de  $-u_c(cu/\tau)_\tau$ . En vertu des propriétés (5.17), ce signe est aussi celui de

$$(u/\tau)_\tau = (su)_\tau = f_\tau = -s^2 f_s < 0,$$

d'où la stricte négativité du discriminant.

Ce résultat est profondément insatisfaisant, dans la mesure où il ne fournit pas d'autres états elliptiques et n'aide en rien à mieux cerner les états hyperboliques.

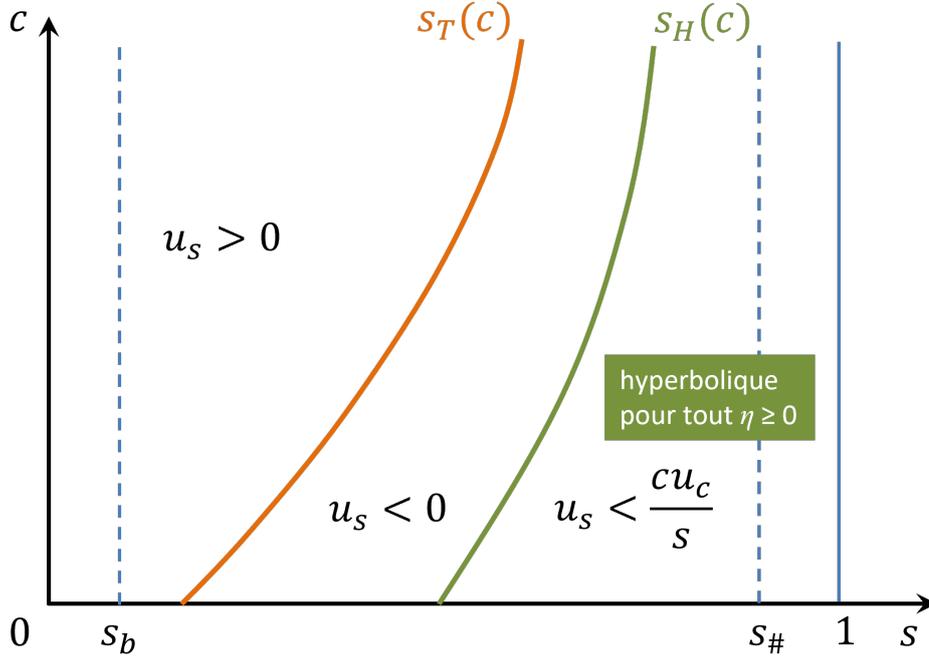
**Hyperbolicité dans la région  $su_s < cu_c$  pour tout  $\eta > 0$ .** Une première amélioration peut être obtenue à l'aide de la CS0 (5.18). En effet, comme  $q = gu$ , cette condition s'écrit également

$$u_\tau g_c - u_c g_\tau \geq 0. \quad (5.60)$$

Or,  $g = \eta sc$  implique  $g_\tau = -\eta c/\tau^2$  et  $g_c = \eta/\tau$ . Pour la loi d'IPV constant, la CS0 devient

$$\eta \frac{\tau u_\tau + cu_c}{\tau^2} \geq 0,$$

soit  $\tau u_\tau + cu_c = -su_s + cu_c \geq 0$ . La condition  $su_s \leq cu_c$  garantit donc  $\Delta \geq 0$ . Pour  $su_s < cu_c$ , schématisé sur la Figure 5.2, l'inégalité stricte  $\Delta > 0$  entraîne l'existence de deux valeurs propres réelles distinctes, d'où l'hyperbolicité au sens de l'existence d'une base de vecteurs propres.

FIGURE 5.2 – IPV constant : région d'hyperbolicité uniforme en  $\eta > 0$ .

**Frontière entre région hyperbolique et région elliptique.** Mais on peut accomplir beaucoup mieux en établissant une condition nécessaire et suffisante d'hyperbolicité (faible) pour chaque  $\eta > 0$ . Pour cela, on va étudier le signe du discriminant

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (u_\tau + q_c)^2 - 4u_c q_\tau \\
 &= (-s^2 u_s + q_c)^2 + 4u_c s^2 q_s \\
 &= [-s^2 u_s + \eta s (cu)_c]^2 + 4u_c s^2 \eta c (su)_s \\
 &= s^2 \{ [-su_s + \eta(u + cu_c)]^2 + 4\eta cu_c (u + su_s) \} \\
 &= (su)^2 \left\{ \left[ -\frac{su_s}{u} + \eta \left( 1 + \frac{cu_c}{u} \right) \right]^2 + 4\eta \frac{cu_c}{u} \left( 1 + \frac{su_s}{u} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Soient

$$\omega = -\frac{su_s}{u} \in \mathbb{R}, \quad \vartheta = -\frac{cu_c}{u} > 0$$

les quantités réduites associées à un point  $(s, c)$ . En particulier,  $\omega$  mesure l'écart par rapport à la ligne de transition  $u_s = 0$ . Si  $\omega < 0$ , on est à gauche ; si  $\omega > 0$ , on est à droite. Alors,

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta}{(su)^2} &= [\omega + \eta(1 - \vartheta)]^2 - 4\eta\vartheta(1 - \omega) \\
 &= \omega^2 + 2(1 + \vartheta)\omega\eta + (1 - \vartheta)^2\eta^2 - 4\vartheta\eta \\
 &=: \mathcal{Q}_\vartheta(\omega, \eta)
 \end{aligned}$$

est une forme quadratique de  $(\omega, \eta)$  à  $\vartheta$  fixé. Dans le plan  $(\omega, \eta)$ , on peut montrer que la conique  $\mathcal{Q}_\vartheta(\omega, \eta) = 0$  est une hyperbole de centre

$$(\omega_c, \eta) = \left( \frac{1 + \vartheta}{2}, -\frac{1}{2} \right) \quad (5.61)$$

et de directions asymptotiques

$$\frac{\eta}{\omega} = -\frac{1}{(1 \pm \sqrt{\vartheta})^2}. \quad (5.62)$$

Une seule des branches se trouve dans le demi-plan  $\eta \geq 0$ , distinguée en orange sur la Figure 5.3. Elle est d'une part tangente horizontalement à la droite  $\eta = 0$  en  $(\omega_h, \eta_h) = (0, 0)$ ; d'autre part, elle est tangente verticalement à la droite  $\omega = \eta$  en  $(\omega_v, \eta) = (\eta, \eta/(1 - \eta))$ .

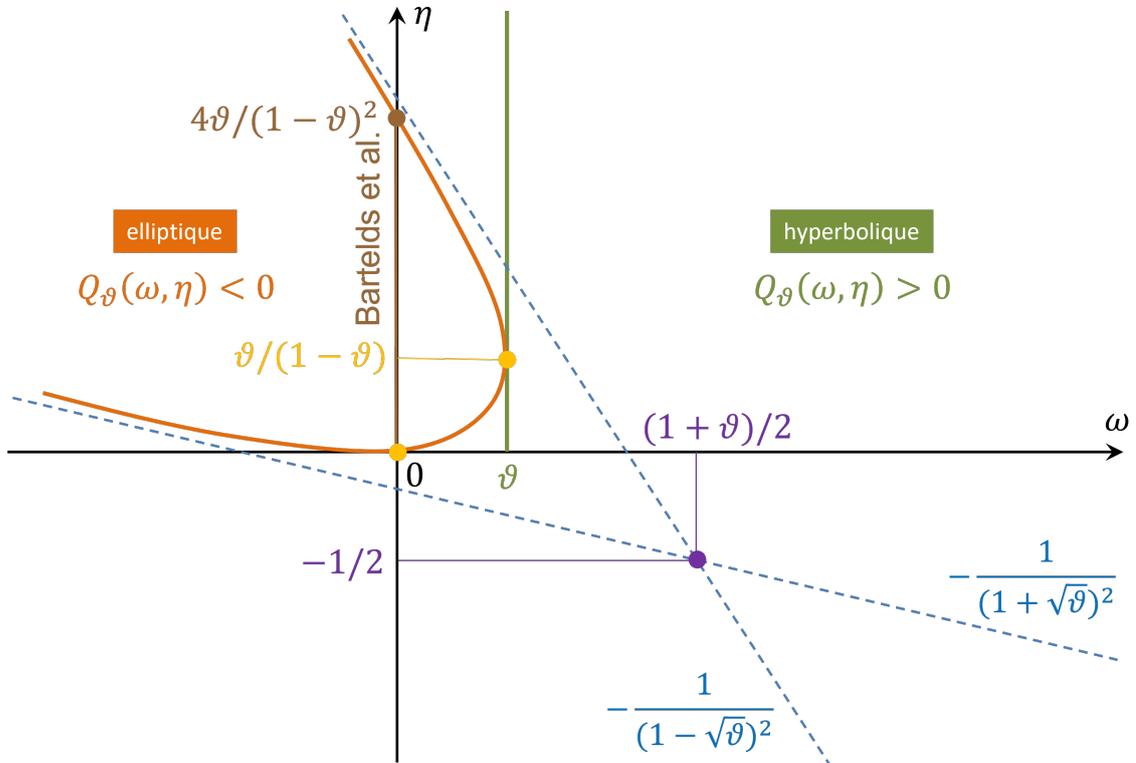


FIGURE 5.3 – IPV constant : frontière entre hyperbolique et elliptique dans le plan  $(\omega, \eta)$ .

La région d'ellipticité  $\mathcal{Q}_\vartheta(\omega, \eta) < 0$  coïncide avec la partie du plan délimitée par cette branche d'hyperbole et se trouvant strictement au-dessus d'elle. On voit sur la Figure 5.3 qu'elle contient le segment

$$\omega = 0, \quad 0 < \eta < \frac{4\vartheta}{(1 - \vartheta)^2},$$

qui correspond au résultat de Bartelds et al.

La région d'hyperbolicité  $\mathcal{Q}_\vartheta(\omega, \eta) > 0$  prend un peu plus de temps à décrire. C'est la partie complémentaire de la région d'hyperbolicité et de l'arc d'hyperbole dans le demi-plan  $\eta \geq 0$ . Elle contient la droite  $\eta = 0$  privée du point de tangence  $(0, 0)$  et la demi-droite

$\omega = \vartheta$ ,  $\eta \geq 0$  privée du point de tangence  $(\vartheta, \vartheta/(1 - \vartheta))$ . En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\vartheta(\omega, 0) &= \omega^2 && \geq 0, && \forall \omega \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{Q}_\vartheta(\vartheta, \eta) &= [\vartheta - (1 - \vartheta)\eta]^2 && \geq 0, && \forall \eta \geq 0. \end{aligned}$$

Lorsque  $\omega > \vartheta$ , l'état qui correspond à  $(\omega, \eta)$  est hyperbolique pour tout  $\eta > 0$ . On retrouve la région d'hyperbolicité  $su_s < cu_c$  ci-dessus. Mais cette fois, on a une précision supplémentaire : c'est la plus grande région d'hyperbolicité qui soit uniforme en  $\eta$ . En effet, dès que  $\omega < \eta$ , c'est-à-dire  $su_s > cu_c$ , il n'est plus possible de se déplacer librement le long d'une demi-droite verticale sans tomber à un moment ou un autre dans la région d'ellipticité. La droite  $\omega = \vartheta$  coupe l'arc d'hyperbole en deux points d'ordonnées  $\eta_m$  et  $\eta_M$ . L'hyperbolicité n'est assurée que pour  $\eta \leq \eta_m$  ou  $\eta \geq \eta_M$ .

### 5.3 Loi de percolation

La loi de percolation a été introduite par Barthelds et al. [6] afin d'assurer l'hyperbolicité du modèle (5.4). Cette loi d'IPV est donnée par

$$\gamma(s, c) = \frac{s}{s - s_\bullet}, \quad \text{pour } s_\bullet < s_b \leq s \leq 1, \quad (5.63)$$

où le paramètre  $s_\bullet$  représente la saturation minimale qu'il faut avoir pour que le polymère puisse circuler.

Même si, physiquement, la saturation  $s$  ne peut pas descendre en dessous de  $s_b$ , en pratique cela peut arriver par des arrondis ou suite à une mise à jour du schéma numérique. Afin de gagner en robustesse, on va étendre la définition de la loi de percolation à tout l'intervalle de saturation  $[0, 1]$  par

$$\gamma(s, c) = \begin{cases} \frac{s}{s - s_\bullet} & \text{si } s_b < s < 1, \\ \frac{s - s_\bullet}{s_b - s_\bullet} & \text{si } 0 < s < s_b. \end{cases} \quad (5.64)$$

Son allure générale est représentée sur la Figure 5.4.

#### 5.3.1 Origine physique

Les hypothèses conduisant à la loi de percolation sont énumérées ci-dessous. Les détails de ces calculs sont donnés par Bartelds et al. [6]. L'idée est de considérer que l'écoulement est constitué de trois phases qui sont :

- La phase huile indicée  $o$  et de saturation  $s_o$  ;
- Une première phase eau indicée  $w1$  et de saturation  $s_{w1}$ . Cette phase correspond à la saturation en eau dans laquelle il n'y a pas de polymère et se déplace à la vitesse  $u_{w1}$  ;
- Une seconde phase indicée  $w2$  et de saturation  $s_{w2}$ . Cette phase correspond à la saturation en eau dans laquelle il y a présence de polymère et se déplaçant à la vitesse  $u_{w2}$ .

Avec ces définitions, la saturation totale en eau est la somme de  $s_{w1}$  et  $s_{w2}$  ( $s = s_{w1} + s_{w2}$ ) et la saturation  $s_{w1}$  est majorée par  $s_\bullet$ . Sachant que grâce au phénomène de pression capillaire les fluides se déplacent de préférence dans des pores de petite section, Bartelds

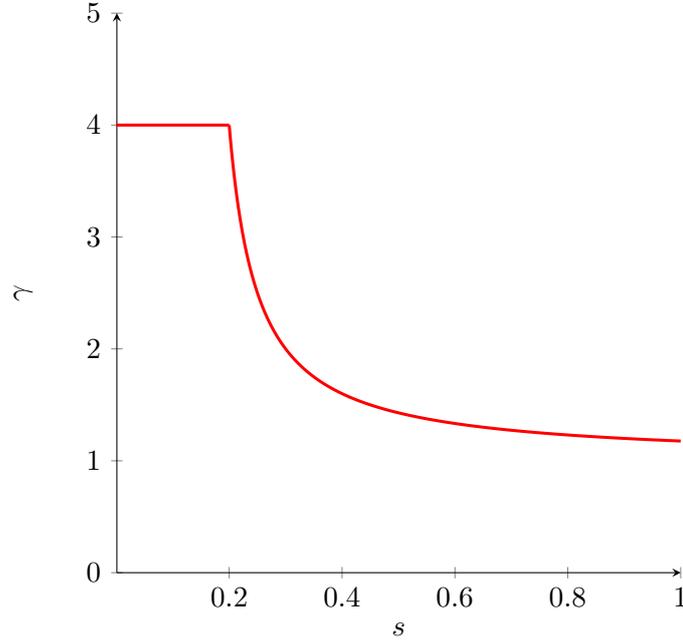


FIGURE 5.4 – Profil de la loi de percolation pour  $s_{\bullet} = 0.15$  et  $s_b = 0.2$ .

et al. [6] concluent qu'il faut une saturation en eau supérieure à  $s_{\bullet}$  pour que le polymère puisse se mouvoir. La phase  $s_{w1}$  est en quelque sorte « prioritaire » sur la phase  $s_{w2}$ .

$$s_{w2} = \max(0, s - s_{\bullet}). \quad (5.65)$$

Ils définissent ensuite le facteur d'accélération  $\gamma$  par

$$\gamma = \frac{su}{s_{w2}u_{w2}}, \quad (5.66)$$

ce qui représente le rapport entre le flux d'eau total et le flux d'eau avec polymère. Si un écoulement est caractérisé par  $s_{\bullet} \leq s_b$ , alors la phase  $s_{w1}$  reste donc immobile — voir l'expression des perméabilités relatives en §2.1.2 — et  $s_{w2} = s - s_{\bullet}$ . Par conséquent on aura  $u = u_{w2}$ , soit

$$\gamma = \frac{s}{s - s_{\bullet}}. \quad (5.67)$$

### 5.3.2 Éléments propres

Pour montrer que le modèle mathématique (5.2) associé à la loi de percolation étendue (5.64) est faiblement hyperbolique, faisons appel aux conditions suffisantes d'hyperbolicité vues en §5.1.2. En effet, il suffit de vérifier qu'une des conditions suffisantes d'hyperbolicité est satisfaite sur chaque intervalle de définition et de s'assurer que le raccordement en  $s_b$  se passe bien (i.e., s'assurer que le produit  $\gamma scu$  est dérivable en  $s_b$ ).

- Pour  $s \in [0, s_b[$  : dans cet intervalle, on a  $\Lambda_w(s) = 0$ , soit  $q \equiv 0$ . Cela entraîne

$$q_s \equiv 0. \quad (5.68)$$

Il en résulte que la CS1 (5.22) est satisfaite avec égalité.

- Pour  $s \in ]s_b, 1]$  : dans cet intervalle, on peut vérifier que  $\gamma(s, c) = s/(s - s_\bullet)$  implique les deux relations

$$\gamma_c = 0, \quad (5.69a)$$

$$s\gamma_s + \gamma(\gamma - 1) = 0. \quad (5.69b)$$

Il en résulte que la CS2 (5.30) est satisfaite avec égalité.

- Pour  $s = s_b$  : on a  $f(s_b, c) = 0$ . Par suite,

$$q_s(s_b, c) = [\gamma(s_b, c) - 1]cf_s(s_b, c). \quad (5.70)$$

Pour  $s < s_b$ , on a  $q_s \equiv 0$  par (5.68). Pour avoir un raccord différentiable, il faut donc avoir  $f_s(s_b, c) = 0$  pour  $s > s_b$ . En prenant la limite quand  $s \rightarrow s_b^+$  de l'expression (5.42) pour  $f_s$ , on vérifie aisément que  $f_s(s_b, c) = 0$  pour les coefficients de Corey tels que

$$a_w > 1. \quad (5.71)$$

Le modèle (5.2) associé à la loi (5.64) est donc au moins faiblement hyperbolique sur tout le domaine des saturations  $[0, 1]$ . Intéressons-nous aux valeurs propres et aux vecteurs propres pour  $s \geq s_b$ , qui ne sont pas étudiés dans l'article de Bartelds et al. [6]. Pour cela, on considère la forme quasi-linéaire en eulérien dans les variables  $\mathbf{v} = (s, c)$ , à savoir

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{J}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (5.72)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{v}) &= \begin{bmatrix} (su)_s & su_c \\ \frac{1}{s}q_s & u + \frac{1}{s}q_c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (su)_s & su_c \\ \frac{c}{s}((\gamma - 1)su)_s & u + ((\gamma - 1)cu)_c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (su)_s & su_c \\ \frac{c}{s}(\gamma - 1)((su)_s - \gamma u) & u + (\gamma - 1)(cu)_c \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

La dernière égalité provient de  $\gamma_s = -\gamma(\gamma - 1)/s$  et  $\gamma_c = 0$ . Sans former le polynôme caractéristique, on connaît déjà une valeur propre de  $\mathbf{J}(\mathbf{v})$ . En effet, on vient de voir par (5.69) que la CS2 est vérifiée avec égalité. Or, on a vu en (5.31) que l'égalité  $g_\tau - gg_c = 0$ , qui est une autre façon d'exprimer la CS2, est équivalente à  $\wp(g_c u) = 0$ . Cela signifie que  $g_c u$  est une valeur propre en lagrangien. Le retour en eulérien fournit donc  $(\gamma c)_c u = \gamma u$  comme valeur propre en eulérien. Par la trace de  $\mathbf{J}(\mathbf{v})$ , on en déduit que l'autre valeur propre en eulérien est égale à  $(su)_s + u + (\gamma - 1)(cu)_c - \gamma u = (su)_s + (\gamma - 1)cu_c$ .

En résumé, les valeurs propres de  $\mathbf{J}(\mathbf{v})$  sont

$$\lambda_{[s]} = u + \gamma su_s + (\gamma - 1)(cu_c - su_s), \quad \lambda_{[c]} = \gamma u. \quad (5.74)$$

Elles sont associées aux vecteurs propres

$$\mathbf{r}_{[s]} = \begin{bmatrix} s \\ (\gamma - 1)c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{[c]} = \begin{bmatrix} su_c \\ (\gamma - 1)u - su_s \end{bmatrix}. \quad (5.75)$$

Le champ  $\lambda_{[c]}$  est linéairement dégénéré, tandis que le champ  $\lambda_{[s]}$  peut changer de nature. Les invariants de Riemann associés à ces champs sont

$$\phi_{[s]} = \gamma c, \quad \phi_{[c]} = \gamma u. \quad (5.76)$$

Comme cela a été le cas pour la loi sans IPV, la coïncidence  $\lambda_{[s]} = \lambda_{[c]}$  des valeurs propres se produit sur la courbe de transition

$$su_s + (\gamma - 1)(cu_c - u) = 0.$$

Dans ce cas, les vecteurs propres deviennent colinéaires  $\mathbf{r}[c] = u_c \mathbf{r}[s]$  et la base de vecteurs propres est perdue. Le modèle est donc faiblement hyperbolique et comporte une courbe de résonance.

Par analogie au système (2.34), l'onde associée à la valeur propre  $\lambda_{[s]}$  est appelée *onde s*, tandis que l'*onde c* est celle associée à la valeur propre  $\lambda_{[c]}$ . Même si ces appellations peuvent sembler inappropriées au premier abord, elles sont justifiées par une connexion plus profonde entre le modèle sans IPV et celui avec percolation.

### 5.3.3 Équivalence avec le modèle sans IPV

L'analogie de comportement entre le modèle avec percolation et celui sans IPV pose la question de savoir s'il existe un lien plus intime entre ces deux modèles. Nous allons y répondre par l'affirmative en exhibant un changement de variables permettant de passer de l'un à l'autre. Ce changement de variables semble constituer une nouveauté.

**Théorème 5.1.** *Le changement de variables*

$$\mathbf{S} = s/\gamma, \quad (5.77a)$$

$$\mathbf{C} = \gamma c, \quad (5.77b)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{S}, \mathbf{C}) = f(s, c) \quad (5.77c)$$

permet de faire passer le modèle (5.2) avec la loi de percolation (5.63) vers le modèle de Keyfitz-Kranzer (2.34) sans IPV

$$\partial_t(\mathbf{S}) + \partial_x(\mathbf{F}) = 0, \quad (5.78a)$$

$$\partial_t(\mathbf{S}\mathbf{C}) + \partial_x(\mathbf{F}\mathbf{C}) = 0, \quad (5.78b)$$

et vice-versa. L'équivalence entre les deux systèmes a lieu aussi bien pour les solutions régulières que pour les solutions discontinues.

DÉMONSTRATION. On commence par remarquer que la loi de percolation (5.64) vérifie l'identité

$$s - s_\bullet = \frac{s}{\gamma}, \quad (5.79)$$

qui sera très utile. Ainsi, pour les solutions régulières, on a

$$\partial_t(\mathbf{S}) = \partial_t\left(\frac{s}{\gamma}\right) = \partial_t(s - s_\bullet) = \partial_t(s) = -\partial_x(f) = -\partial_x(\mathbf{F}), \quad (5.80)$$

ce qui établit (5.78a). On a également

$$\partial_t(\mathbf{SC}) = \partial_t\left(\frac{s}{\gamma}c\right) = \partial_t(sc) = -\partial_x(\gamma fc) = -\partial_x(\mathbf{FC}), \quad (5.81)$$

ce qui justifie (5.78b). Le passage dans l'autre sens repose sur des calculs analogues. Ainsi, les deux systèmes sont équivalents pour des solutions régulières.

Pour traiter le cas des solutions discontinues, considérons un choc pur entre deux états  $(s_L, c_L)$  et  $(s_R, c_R)$  du système avec percolation. Ces états vérifient les relations de Rankine-Hugoniot

$$[[f]] = \sigma[[s]], \quad (5.82a)$$

$$[[\gamma fc]] = \sigma[[sc]], \quad (5.82b)$$

où  $[[\cdot]] = \cdot_R - \cdot_L$  désigne la valeur du saut. En faisant à nouveau appel à (5.79), on a

$$\left[ \left[ \frac{s}{\gamma} \right] \right] = [[s]]. \quad (5.83)$$

Il en découle que

$$[[\mathbf{F}]] = [[f]] = \sigma[[s]] = \sigma \left[ \left[ \frac{s}{\gamma} \right] \right] = [[\mathbf{S}]] \quad (5.84a)$$

et

$$[[\mathbf{FC}]] = [[f\gamma c]] = \sigma[[sc]] = \sigma \left[ \left[ \frac{s}{\gamma}c \right] \right] = \sigma[[\mathbf{SC}]]. \quad (5.84b)$$

Les égalités (5.84) constituent les relations de Rankine-Hugoniot pour le système (5.78), ce qui est le résultat désiré.  $\square$

Grâce à ce changement de variable, il est assez aisé de résoudre le problème de Riemann associé au modèle (5.2) muni de la loi de percolation (5.64).

## 5.4 Lois de diffusion uniforme et non uniforme

Terminons ce chapitre avec les lois d'IPV récemment suggérées par Hilden et al. [45] sur la base d'une description microscopique sous-jacente, notamment le modèle de diffusion uniforme

$$\gamma(s, c) = \begin{cases} \frac{s}{\Lambda_w(s)} \frac{\Lambda_w(s) - \Lambda_w(s_\bullet)}{s - s_\bullet} & \text{si } s_\bullet > s_b \text{ et } s > s_\bullet, \\ \frac{s}{s - s_\bullet} & \text{si } s_\bullet \leq s_b \text{ et } s > s_\bullet, \\ 0 & \text{si } s \leq s_\bullet, \end{cases} \quad (5.85)$$

et le modèle de diffusion non-uniforme

$$\gamma(s, c) = \begin{cases} \left[ 1 - \frac{s_b}{s_\bullet} \frac{\Lambda_w(s_\bullet)}{\Lambda_w(s)} \right] \frac{s}{s - s_b} & \text{si } s_\bullet > s_b \text{ et } s > s_\bullet, \\ \frac{s}{s - s_\bullet} & \text{si } s_\bullet \leq s_b \text{ et } s > s_\bullet, \\ 1 & \text{si } s \leq s_\bullet. \end{cases} \quad (5.86)$$

Les deux lois sont illustrées à la Figure 5.5.

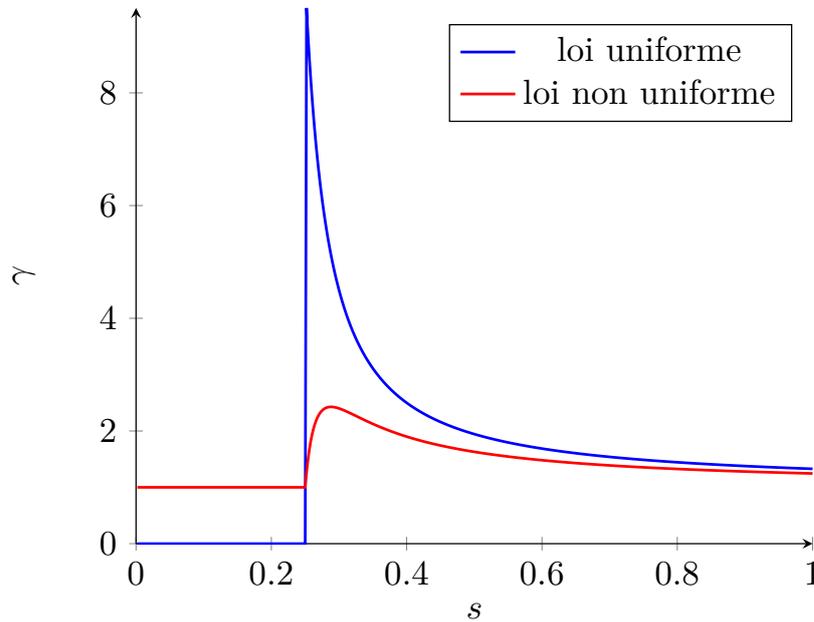


FIGURE 5.5 – Profil des lois de diffusion uniforme et de diffusion non uniforme pour  $s_{\bullet} = 0.25$  et  $s_{\flat} = 0.2$

#### 5.4.1 Origine physique

Les lois (5.85)–(5.86) ont été proposées par Hilden et al. [45] dans l’optique de s’affranchir de la condition  $s_{\bullet} < s_{\flat}$  utilisée dans la construction de la loi de percolation. Cette dernière condition est en effet peu satisfaisante physiquement. En imposant  $s_{\bullet} < s_{\flat}$ , on sous-entend que la saturation en eau minimale pour que l’eau puisse se mouvoir est inférieure à la saturation en eau minimale pour que le polymère puisse se mouvoir. De plus cette condition contraint  $s_{\flat}$  à être relativement grand pour approcher des résultats expérimentaux.

Notons d’ailleurs que ces lois (5.85)–(5.86) se ramènent à la loi de percolation lorsque  $s_{\bullet} < s_{\flat}$ . Dans cette modélisation le milieu poreux est réduit à un ensemble de pores cylindriques de diamètres différents.

**Diffusion uniforme.** La loi de diffusion uniforme (5.85) est issue de l’hypothèse selon laquelle la fraction massique de polymère est identique dans les cylindres à travers lesquels le polymère peut se mouvoir, quels que soient leurs diamètres. Ceci se traduit par

$$sc = \tilde{c}(s - s_{\bullet}), \quad (5.87)$$

où  $\tilde{c}$  est la fraction massique de polymère dans un tube.

L’équation (5.87) est introduite dans le terme de la dérivée en espace du bilan de masse de polymère et par identification il en résulte que

$$\gamma = \frac{s}{\Lambda_w(s)} \frac{\Lambda_w(s) - \Lambda_w(s_{\bullet})}{s - s_{\bullet}}. \quad (5.88)$$

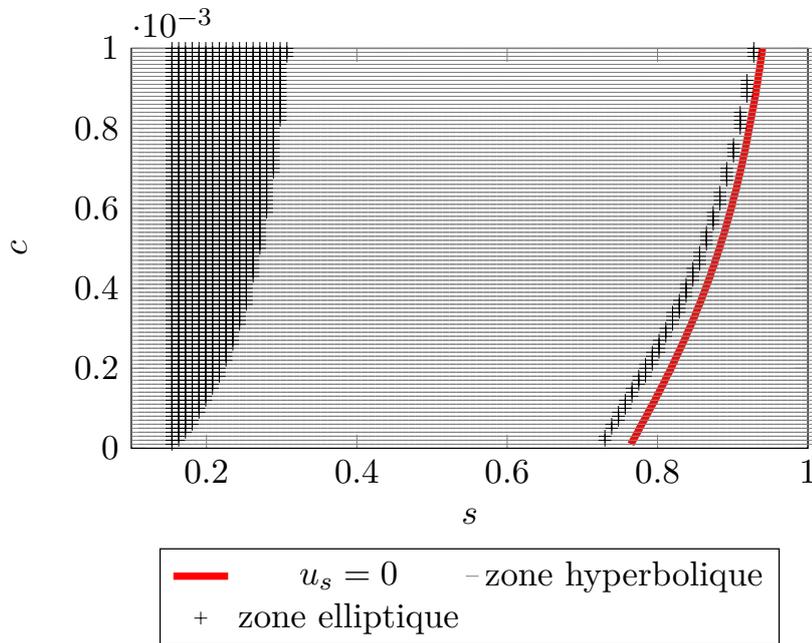


FIGURE 5.6 – Loi d'IPV uniforme : zone hyperbolique et zone elliptique avec  $\gamma \equiv 1.25$ ,  $s_b = 0.1$ ,  $s_{\#} = 1$ ,  $s_{\bullet} = 0.15$  et les coefficients de réduction de mobilité  $a_1 = 2 \cdot 10^3$ ,  $a_2 = 2.8 \cdot 10^6$ ,  $a_4 = 9 \cdot 10^{19/2}$ .

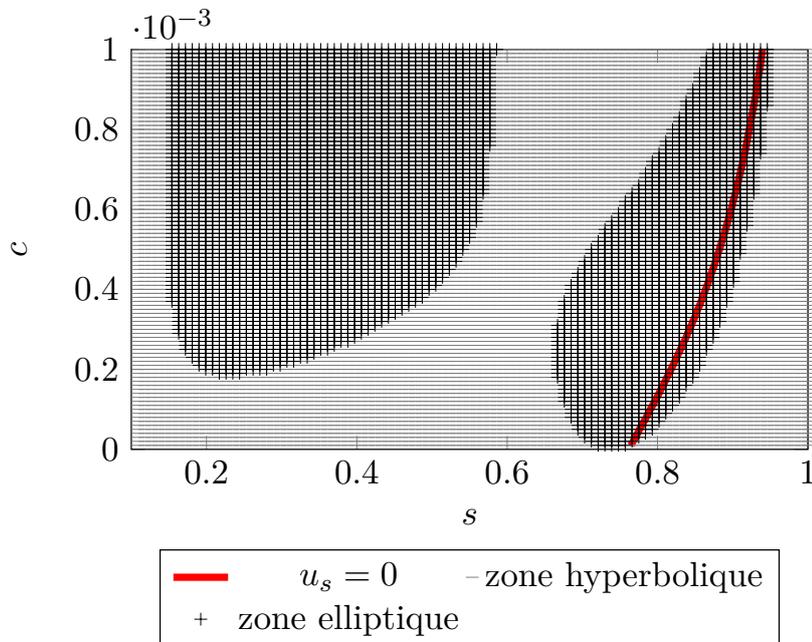


FIGURE 5.7 – Loi d'IPV non uniforme : zone hyperbolique et zone elliptique avec  $\gamma \equiv 1.25$ ,  $s_b = 0.1$ ,  $s_{\#} = 1$ ,  $s_{\bullet} = 0.15$  et les coefficients de réduction de mobilité  $a_1 = 2 \cdot 10^3$ ,  $a_2 = 2.8 \cdot 10^6$ ,  $a_4 = 9 \cdot 10^{19/2}$ .

**Diffusion non uniforme.** La loi de diffusion non uniforme (5.86) reprend quasiment le même principe que la loi uniforme. La différence entre les deux constructions vient du fait que pour la loi de diffusion non uniforme la fraction massique de polymère varie d'un tube à un autre en fonction de son diamètre. Il existe donc une fonction de pondération  $\hat{c}$  qui dépend du rayon du cylindre.

### 5.4.2 Régions d'hyperbolicité et d'ellipticité

Dans la mise en œuvre des lois (5.85) et (5.86), l'hyperbolicité n'est pas ce que recherchent les auteurs, qui préfèrent se focaliser sur un critère de stabilité de choc n'ayant pas de lien clair avec l'hyperbolicité proprement dite.

Lorsque  $s_{\bullet} \leq s_b$ , ces deux lois se confondent à la loi de percolation et lorsque  $s_{\bullet} > s_b$ , ces lois se ramènent à des expressions ne vérifiant aucune des conditions suffisantes d'hyperbolicité énoncées. Les résultats numériques présentés dans les Figures 5.6 et 5.7 font ressortir des zones de valeurs propres complexes conjugués pour les deux lois. Le critère de stabilité imposé par les auteurs ne permet donc pas d'assurer l'hyperbolicité du modèle. Pour chacune de ces 2 lois, la zone des valeurs propres complexes admet une configuration semblable à celle obtenue avec la loi d'IPV constant ; l'ensemble des états à valeurs propres complexes est constitué de deux régions disjointes dont l'une flirte avec la courbe  $u_s = 0$  et l'autre est située dans la zone des faibles saturations.



# Chapitre 6

## Étude du schéma de relaxation

### Sommaire

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>6.1 Construction en coordonnées lagrangiennes</b> | <b>108</b> |
| 6.1.1 Modèle relaxé et hyperbolicité                 | 108        |
| 6.1.2 Limite dissipative                             | 109        |
| <b>6.2 Représentation en coordonnées eulériennes</b> | <b>111</b> |
| 6.2.1 Modèle relaxé et hyperbolicité                 | 111        |
| 6.2.2 Limite dissipative                             | 112        |
| 6.2.3 Problème de Riemann                            | 116        |
| <b>6.3 Modification pour le traitement du vide</b>   | <b>119</b> |
| 6.3.1 Modèle relaxé à coefficients variables         | 119        |
| 6.3.2 Limite dissipative                             | 120        |
| 6.3.3 Problème de Riemann                            | 122        |
| <b>6.4 Implémentation et validation numérique</b>    | <b>126</b> |
| 6.4.1 Mise à jour pratique                           | 126        |
| 6.4.2 Convergence sur des problèmes de Riemann       | 127        |

---

Le schéma décentré est actuellement implanté dans le logiciel industriel PumaFlow, quelle que soit la loi d'IPV considérée. Certes, il est acceptable pour un modèle faiblement hyperbolique, c'est-à-dire sans IPV ou avec la loi de percolation. Or, le chapitre §5 montre qu'il faut s'attendre à de plus grandes difficultés avec des lois d'IVP plus réalistes, en raison des zones d'ellipticité. Aussi, notre objectif est-il à présent de proposer un schéma qui soit adapté à toute loi d'IPV.

Pour cela, nous suivons la philosophie de relaxation pour mettre en avant un modèle relaxé qui approche le modèle (5.4) au niveau continu. Ce modèle relaxé est conçu en deux étapes : d'abord en passant en coordonnées lagrangiennes (§6.1), puis en revenant aux coordonnées eulériennes (§6.2). L'avantage du nouveau modèle réside dans le fait qu'il permet de s'affranchir des lois de fermetures. De surcroît, la dégénérescence linéaire de tous ses champs propres facilite la résolution du problème de Riemann. Une extension supplémentaire s'avère nécessaire en §6.3 pour traiter les problèmes avec des saturations en eau nulle.

En §6.4, nous comparons le schéma de relaxation avec le schéma décentré sur des problèmes de Riemann pour quelques lois d'IPV, avec des mesures d'ordre de convergence lorsque cela est possible [32].

## 6.1 Construction en coordonnées lagrangiennes

Face au degré supérieur de difficulté qu'est l'apparition des zones d'ellipticité dans certaines lois d'IPV vues au chapitre précédent, il semble pertinent de disposer d'un schéma alternatif au schéma décentré dans lequel on peut contrôler finement la dissipation numérique ainsi que la positivité de certaines grandeurs physiquement critiques comme la saturation. Historiquement initiée par Jin et Xin [54] et Suliciu [93], l'approche par relaxation est connue pour remplir ce cahier des charges. C'est vers elle que notre regard va se tourner dans ce chapitre.

Reprenons l'expression lagrangienne (5.12) du modèle diphasique avec IPV, à savoir

$$\partial_T \tau - \partial_m u = 0, \quad (6.1a)$$

$$\partial_T c + \partial_m q = 0, \quad (6.1b)$$

où  $m$  désigne l'abscisse lagrangienne,  $T = t$  le temps,  $\tau = 1/s$  l'inverse de la saturation d'eau,  $u = u(\tau, c)$  la vitesse interstitielle et  $q = (\gamma - 1)cu/\tau$  la dérive du polymère. Le système (6.1) se met sous la forme abstraite

$$\partial_T \mathbf{y} + \partial_m \mathbf{h}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad (6.2a)$$

avec

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \tau \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} -u \\ q \end{bmatrix}. \quad (6.2b)$$

La source de toutes les difficultés du système se trouve dans les fonctions  $u(\tau, c)$  et  $q(\tau, c)$ . L'idée fondamentale de la relaxation est de remplacer ces fonctions par des variables  $U$  et  $Q$  qui évoluent de manière « indépendante » des contraintes imposées par les lois de fermeture, sans toutefois trop s'éloigner des valeurs qu'elles devraient prendre !

### 6.1.1 Modèle relaxé et hyperbolicité

À la place de (6.1), nous proposons de considérer le système agrandi suivant, que nous appelons *modèle relaxé* et qui s'écrit

$$\partial_T(\tau) - \partial_m(U) = 0, \quad (6.3a)$$

$$\partial_T(c) + \partial_m(Q) = 0, \quad (6.3b)$$

$$\partial_T(U) - \partial_m(a^2\tau) = \varepsilon^{-1}(u(\tau, c) - U), \quad (6.3c)$$

$$\partial_T(Q) + \partial_m(b^2c) = \varepsilon^{-1}(q(\tau, c) - Q), \quad (6.3d)$$

ou sous la forme condensée

$$\partial_T \mathbf{Y} + \partial_m \mathbf{H}(\mathbf{Y}) = \varepsilon^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{Y}), \quad (6.4a)$$

avec

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \tau \\ c \\ U \\ Q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} -U \\ Q \\ -a^2\tau \\ b^2c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u(\tau, c) - U \\ q(\tau, c) - Q \end{bmatrix}. \quad (6.4b)$$

Dans (6.3),  $U$  et  $Q$  sont deux nouvelles fonctions de  $(T, m)$  dont l'évolution est régie par (6.3c)–(6.3d). Dans ces dernières équations apparaissent les *coefficients* de relaxation

$a > 0$  et  $b > 0$ , qui sont homogènes à des vitesses lagrangiennes et qui seront à régler plus tard. Au second membre de (6.3), il apparaît les termes de rappel  $u(\tau, c) - U$  et  $q(\tau, c) - Q$ , destinés à ramener  $U$  et  $Q$  vers leurs valeurs à l'équilibre  $u(\tau, c)$  et  $q(\tau, c)$ . Ce rappel se fait par l'intermédiaire d'un processus de relaxation caractérisé par le paramètre  $\varepsilon$ . Ce paramètre ( $\varepsilon$ ) est un réel positif et désigne le temps caractéristique du processus de relaxation. Plus  $\varepsilon$  est petit, plus le temps de relaxation est court et plus vite les variables  $U$  et  $Q$  doivent revenir à l'équilibre.

Le modèle relaxé (6.3) peut être divisé en deux sous-systèmes : l'un en les inconnues  $(\tau, U)$  composé de la première et de la troisième équations, i.e.,

$$\begin{aligned}\partial_T(\tau) - \partial_m(U) &= 0, \\ \partial_T(U) - \partial_m(a^2\tau) &= \varepsilon^{-1}(u(\tau, c) - U),\end{aligned}$$

l'autre en les inconnues  $(c, Q)$  composé de la deuxième et quatrième équations, i.e.,

$$\begin{aligned}\partial_T(c) + \partial_m(Q) &= 0, \\ \partial_T(Q) + \partial_m(b^2c) &= \varepsilon^{-1}(q(\tau, c) - Q).\end{aligned}$$

Le couplage entre ces deux sous-systèmes, qui se fait à travers les termes sources, disparaît lorsque  $\varepsilon^{-1} = 0$  (ou  $\varepsilon \rightarrow +\infty$ ). Chaque sous-système apparaît comme la relaxation de Jin-Xin [54] d'une équation scalaire. La conséquence en est que le nombre d'équations dans le modèle relaxé est le double de celui du modèle de départ. Contrairement au cas du  $p$ -système qui correspond à la dynamique des gaz lagrangienne, il n'est ici pas possible d'appliquer la technique de relaxation de Suliciu [93] pour n'avoir que trois équations au lieu de quatre.

La partie homogène du système (6.4), obtenue en fixant  $\varepsilon^{-1} = 0$  (ou  $\varepsilon \rightarrow +\infty$ ), possède une structure extrêmement simple. On peut montrer que le système  $\partial_T \mathbf{Y} + \partial_m \mathbf{H}(\mathbf{Y}) = \mathbf{0}$  est strictement hyperbolique, les quatre valeurs propres de  $\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{H}(\mathbf{Y})$  étant distinctes si  $a \neq b$  et toutes étant linéairement dégénérées (LD). La Table 6.1 récapitule les valeurs propres du système, la nature de l'onde et les invariants de Riemann associés. Grâce à cette dégénérescence linéaire, le problème de Riemann associé au modèle relaxé peut être résolu analytiquement, ce qui à son tour permettra d'appliquer le schéma de Godunov facilement.

| Valeur propre | Nature du champ | Invariants de Riemann |
|---------------|-----------------|-----------------------|
| $a$           | LD              | $c, U - a\tau, Q$     |
| $-a$          | LD              | $c, U + a\tau, Q$     |
| $b$           | LD              | $\tau, Q - b\tau, U$  |
| $-b$          | LD              | $\tau, Q + b\tau, U$  |

TABLE 6.1 – Éléments propres de la partie homogène du système (6.3).

### 6.1.2 Limite dissipative

À présent que les éléments propres du système (6.3) sont connus, il est nécessaire de montrer qu'il approche « correctement » le système (6.1). Pour cela, on va effectuer un

développement de Chapman-Enskog au premier ordre en  $\varepsilon$  et regarder le comportement des solutions du système relaxé (6.3) lorsque  $\varepsilon \downarrow 0$ .

En injectant la forme a priori

$$U = u(\tau, c) + \varepsilon U^1, \quad (6.5a)$$

$$Q = q(\tau, c) + \varepsilon Q^1, \quad (6.5b)$$

dans les deux dernières équations (6.3c)–(6.3d), on déduit les expressions des termes correctifs d'ordre 1, à savoir

$$-U^1 = u_\tau \partial_T \tau + u_c \partial_T c - a^2 \partial_m \tau, \quad (6.6a)$$

$$-Q^1 = q_\tau \partial_T \tau + q_c \partial_T c + b^2 \partial_m c. \quad (6.6b)$$

Puisque  $\partial_T \tau = \partial_m u$  et  $\partial_T c = -\partial_m q$ , la règle de dérivation composée entraîne

$$-U^1 = (-a^2 + u_\tau^2 - u_c q_\tau) \partial_m \tau + (u_\tau u_c - u_c q_c) \partial_m c, \quad (6.7a)$$

$$-Q^1 = (u_\tau q_\tau - q_\tau q_c) \partial_m \tau + (b^2 - q_c^2 + u_c q_\tau) \partial_m c, \quad (6.7b)$$

ce qui permet d'écrire

$$U = u + \varepsilon [(a^2 - u_\tau^2 + u_c q_\tau) \partial_m \tau + (u_c q_c - u_c u_\tau) \partial_m c], \quad (6.8a)$$

$$Q = q + \varepsilon [(q_\tau q_c - u_\tau q_\tau) \partial_m \tau + (q_c^2 - u_c q_\tau - b^2) \partial_m c]. \quad (6.8b)$$

En reportant ces valeurs dans les deux premières équations (6.3a)–(6.3b) et en passant au second membre les termes en  $\varepsilon$ , on obtient

$$\partial_T(\tau) - \partial_m(u) = \varepsilon \partial_m [(a^2 - u_\tau^2 + u_c q_\tau) \partial_m \tau + (u_c q_c - u_c u_\tau) \partial_m c], \quad (6.9a)$$

$$\partial_T(c) + \partial_m(q) = -\varepsilon \partial_m [(q_\tau q_c - u_\tau q_\tau) \partial_m \tau + (q_c^2 - u_c q_\tau - b^2) \partial_m c]. \quad (6.9b)$$

Ainsi, au premier ordre en  $\varepsilon$  dans un voisinage de 0, les deux premières composantes  $\mathbf{y} = (\tau, c)$  de la solution  $\mathbf{Y} = (\tau, c, U, Q)$  du système de relaxation (6.4) sont solutions du système approché

$$\partial_T \mathbf{y} + \partial_m \mathbf{h}(\mathbf{y}) = \varepsilon \partial_m (\mathbf{D}(\mathbf{y}) \partial_m \mathbf{y}), \quad (6.10a)$$

avec

$$\mathbf{D}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} a^2 - u_\tau^2 + u_c q_\tau & u_c q_c - u_c u_\tau \\ u_\tau q_\tau - q_\tau q_c & b^2 - q_c^2 + u_c q_\tau \end{bmatrix}. \quad (6.10b)$$

Pour que le modèle de départ soit la limite dissipative pour  $\varepsilon \downarrow 0$  du système de relaxation (6.3), on exige heuristiquement [76] que la matrice  $\mathbf{D}(\mathbf{y})$  soit une matrice de diffusion. Pour cela, il faut que ses deux valeurs propres soient réelles et positives. Cela est possible si  $a$  et  $b$  sont choisis assez grands, en supposant que les quantités  $u_c, u_\tau, q_c$  et  $q_\tau$  soient bornées. Le calcul précis des valeurs admissibles de  $a$  et  $b$  est possible, mais nous l'exposerons uniquement pour le modèle eulérien en §6.2.2.

## 6.2 Représentation en coordonnées eulériennes

En partant du modèle relaxé en coordonnées lagrangiennes (6.3), on va s'efforcer de revenir en coordonnées eulériennes pour obtenir un modèle relaxé de (5.4). La règle de passage [87] du lagrangien vers l'eulérien est la suivante. Si

$$\partial_T A + \partial_m B = C \quad (6.11a)$$

est une loi de conservation en lagrangien, alors son expression en eulérien est

$$\partial_t(sA) + \partial_x(sAU + B) = sC. \quad (6.11b)$$

Il est important de noter que c'est la vitesse relaxée  $U$  qui a été utilisée à la place de la vitesse à l'équilibre  $u$ .

### 6.2.1 Modèle relaxé et hyperbolicité

L'application de la règle (6.11) au système (6.3) débouche sur

$$\partial_t(s) + \partial_x(sU) = 0, \quad (6.12a)$$

$$\partial_t(sc) + \partial_x(scU + Q) = 0, \quad (6.12b)$$

$$\partial_t(sU) + \partial_x(sU^2 - a^2/s) = \varepsilon^{-1}s(u(s, c) - U), \quad (6.12c)$$

$$\partial_t(sQ) + \partial_x(sQU + b^2c) = \varepsilon^{-1}s(q(s, c) - Q). \quad (6.12d)$$

où l'on a fait valoir le fait que  $a$  et  $b$  sont des constantes indépendantes de  $x$ . Sous forme abstraite, ce système s'écrit

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \varepsilon^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{W}), \quad (6.13a)$$

avec

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} s \\ sc \\ sU \\ sQ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} sU \\ scU + Q \\ sU^2 - a^2/s \\ sQU + b^2c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u(s, c) - U \\ q(s, c) - Q \end{bmatrix}. \quad (6.13b)$$

Dans le système (6.12), les inconnues  $U$  et  $Q$  font toujours office de variables relaxées pour la vitesse  $u(s, c)$  et la dérive  $q(s, c)$ . Les coefficients  $a > 0$  et  $b > 0$ , le paramètre  $\varepsilon > 0$  ainsi que les termes de rappel au second membre jouent un rôle analogue que dans le modèle relaxé lagrangien (6.3). Ce premier système de relaxation n'est pas adapté aux saturations nulles ( $s = 0$ ). En §6.3, on proposera une variante pour surmonter ce problème.

Pour étudier l'hyperbolicité de la partie homogène du système précédent, obtenue en prenant  $\varepsilon^{-1} = 0$  (ou  $\varepsilon \rightarrow +\infty$ ), il est plus commode de travailler avec les variables primitives ( $s, c, U, Q$ ). Un calcul facile montre que cette partie homogène peut s'exprimer sous la forme non conservative

$$\partial_t \mathbf{V} + \mathbf{K}(\mathbf{V}) \partial_x \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (6.14a)$$

avec

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} s \\ c \\ U \\ Q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}(\mathbf{V}) = \begin{bmatrix} U & 0 & s & 0 \\ 0 & U & 0 & 1/s \\ a^2/s^2 & 0 & U & 0 \\ 0 & b^2/s & 0 & U \end{bmatrix}. \quad (6.14b)$$

Le calcul des éléments propres de  $\mathbf{K}(\mathbf{V})$  est immédiat. Pour les quatre valeurs propres, on trouve

$$\lambda_{[\pm a]} = U \pm \frac{a}{s}, \quad \lambda_{[\pm b]} = U \pm \frac{b}{s}, \quad (6.15)$$

et pour les vecteurs propres à droite respectifs, on a

$$\mathbf{r}_{[\pm a]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm a/s^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{[\pm b]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \pm b \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Ce système est linéairement dégénéré puisque tous ces champs propres vérifient

$$\mathbf{r}_{[\pm a]} \cdot \nabla_{\mathbf{V}} \lambda_{[\pm a]} = \mathbf{r}_{[\pm b]} \cdot \nabla_{\mathbf{V}} \lambda_{[\pm b]} = 0. \quad (6.17)$$

Les autres invariants de Riemann pour chaque champ de valeur propre peuvent aussi être complètement déterminés. Les propriétés du modèle relaxé (6.12) sont résumées dans la Table 6.2.

| Valeur propre | Nature du champ | Invariants de Riemann |
|---------------|-----------------|-----------------------|
| $U + a/s$     | LD              | $c; Q; U + a/s$       |
| $U - a/s$     | LD              | $c; Q; U - a/s$       |
| $U + b/s$     | LD              | $s; U; Q - bc$        |
| $U - b/s$     | LD              | $s; U; Q + bc$        |

TABLE 6.2 – Éléments propres de la partie homogène du système (6.12).

### 6.2.2 Limite dissipative

Il nous faut maintenant préciser les conditions sous lesquelles le système original (5.4) est bien une limite dissipative du système relaxé (6.12) lorsque  $\varepsilon \downarrow 0$ . Après avoir établi l'équation équivalente exprimant le comportement au premier ordre en  $\varepsilon$  de l'approximation par relaxation, nous aborderons la question du choix des coefficients  $a$  et  $b$ .

**Analyse de Chapman-Enskog.** En injectant la forme a priori

$$U = u(s, c) + \varepsilon U^1, \quad (6.18a)$$

$$Q = q(s, c) + \varepsilon Q^1, \quad (6.18b)$$

dans les deux dernières équations (6.12c)–(6.12d), on obtient

$$\partial_t(su) + \partial_x(su^2) - (a^2/s^2) \partial_x(s) = -sU^1, \quad (6.19a)$$

$$\partial_t(sq) + \partial_x(suq) + b^2 \partial_x(c) = -sQ^1. \quad (6.19b)$$

On veut exprimer les correcteurs du premier ordre  $U^1$  et  $Q^1$  en fonction des dérivées spatiales uniquement. Pour se débarrasser des dérivées temporelles dans (6.19), on doit au préalable combiner les équations

$$\partial_t s + u \partial_x s + s u_s \partial_x s + s u_c \partial_x c = 0, \quad (6.20a)$$

$$\partial_t c + u \partial_x c + (q_s/s) \partial_x s + (q_c/s) \partial_x c = 0, \quad (6.20b)$$

qui résultent de (5.4a)–(5.4b) pour avoir les équations d'évolution de  $su$  et  $sq$ . Laissant le détails de ces calculs au lecteur, nous fournissons ci-dessous le résultat

$$\partial_t(su) + \partial_x(su^2) + (s^2u_s^2 + u_cq_s)\partial_x s + (s^2u_su_c + u_cq_c)\partial_x c = 0, \quad (6.21a)$$

$$\partial_t(sq) + \partial_x(suq) + (s^2q_su_s + q_cq_s)\partial_x s + (s^2q_su_c + q_c^2)\partial_x c = 0, \quad (6.21b)$$

dans lequel les dérivées partielles en  $s$  sont à  $c$  fixé et les dérivées partielles en  $c$  sont à  $s$  fixé. Après extraction de  $\partial_t(su)$  et  $\partial_t(sq)$ , les relations (6.19) deviennent

$$-sU^1 = (a^2/s^2 - s^2u_s^2 - u_cq_s)\partial_x s + (-s^2u_su_c - u_cq_c)\partial_x c, \quad (6.22a)$$

$$-sQ^1 = (-s^2q_su_s - q_cq_s)\partial_x s + (b^2 - s^2q_su_c - q_c^2)\partial_x c, \quad (6.22b)$$

ce qui se traduit matriciellement par

$$\begin{bmatrix} -U^1 \\ -Q^1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}(\mathbf{w}) \partial_x \begin{bmatrix} s \\ c \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

avec

$$\mathbf{E}(\mathbf{w}) = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} a^2/s^2 - s^2u_su_s - u_cq_s & -s^2u_su_c - u_cq_c \\ -s^2q_su_s - q_cq_s & b^2 - s^2q_su_c - q_cq_c \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Les valeurs de  $U^1$  et  $Q^1$  ont été exprimées en fonction de  $\partial_x s$  et  $\partial_x c$ . Il faut maintenant les obtenir en fonction de  $\partial_x \mathbf{w}$ . À cette fin, on invoque la relation

$$\partial_x \begin{bmatrix} s \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c/s & 1/s \end{bmatrix} \partial_x \begin{bmatrix} s \\ sc \end{bmatrix}, \quad (6.25)$$

pour avoir

$$\begin{bmatrix} -U^1 \\ -Q^1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}(\mathbf{w}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c/s & 1/s \end{bmatrix} \partial_x \begin{bmatrix} s \\ sc \end{bmatrix}. \quad (6.26)$$

Pour simplifier les notations, on définit la matrice

$$\mathbf{P}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -cs & s \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

qui est inversible et dont la matrice inverse est donnée par

$$\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1/s \end{bmatrix}. \quad (6.28)$$

L'équation (6.26) exprime les valeurs de  $U^1$  et de  $Q^1$  en fonction de  $\partial_x(s)$  et  $\partial_x(sc)$ . Le développement (6.18) couplé aux deux premières équations (6.12a)–(6.12b) donne

$$\partial_t(s) + \partial_x(su) = \varepsilon \partial_x(s(-U^1)), \quad (6.29a)$$

$$\partial_t(sc) + \partial_x(scu + q) = \varepsilon \partial_x(sc(-U^1) + (-Q^1)), \quad (6.29b)$$

qui peut s'écrire sous la forme matricielle

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \varepsilon \partial_x \left( s \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{w}) \mathbf{E}(\mathbf{w}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c/s & 1/s \end{bmatrix} \partial_x \begin{bmatrix} s \\ sc \end{bmatrix} \right) \quad (6.30)$$

$$= \varepsilon \partial_x \left( s \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{w}) \mathbf{E}(\mathbf{w}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c/s & 1/s \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{w}) \mathbf{P}(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w} \right). \quad (6.31)$$

En définissant la matrice

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{w}) &= \mathbf{E}(\mathbf{w}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c/s & 1/s \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{w}) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{w}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/s^2 \end{bmatrix} \mathbf{P}(\mathbf{w}) \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{E}(\mathbf{w}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/s^2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

on obtient le système équivalent

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \varepsilon \partial_x (s \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{P}(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w}). \quad (6.33a)$$

Un dernier calcul à partir de (6.32) permet de déterminer

$$\mathbf{D}(\mathbf{w}) = \frac{1}{s^3} \begin{bmatrix} a^2 - s^4 u_s^2 - s^2 u_c q_s & -u_c (s^2 u_s + q_c) \\ -s^2 q_s (s^2 u_s + q_c) & b^2 - s^2 q_s u_c - q_c^2 \end{bmatrix}. \quad (6.33b)$$

Pour que le modèle de départ soit une limite dissipative du modèle relaxé lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, on exige heuristiquement [76] que  $s \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{P}(\mathbf{w})$  soit une matrice de diffusion. Ceci revient à imposer à  $\mathbf{D}(\mathbf{w})$  d'être une matrice de diffusion. Pour cela, on demande que les deux valeurs propres de  $\mathbf{D}(\mathbf{w})$  soient positives, propriété connue sous le vocable de *condition sous-caractéristique de Whitham*.

**Choix des coefficients de relaxation  $a$  et  $b$ .** On peut satisfaire la condition sous-caractéristique de Whitham en choisissant convenablement les coefficients  $a$  et  $b$ . La méthode que nous adoptons s'inspire directement de celle préconisée par Baudin et al. [8, 9] sur un problème analogue.

Commençons par attribuer des noms aux éléments de la matrice  $\mathbf{D}(\mathbf{w})$  en la mettant sous la forme

$$\mathbf{D}(\mathbf{w}) = \frac{1}{s^3} \begin{bmatrix} \hat{\omega} & J \\ K & \hat{\beta} \end{bmatrix}. \quad (6.34a)$$

avec

$$\hat{\omega} = a^2 - s^4 u_s^2 - s^2 u_c q_s, \quad (6.34b)$$

$$J = -u_c (s^2 u_s + q_c), \quad (6.34c)$$

$$K = -s^2 q_s (s^2 u_s + q_c), \quad (6.34d)$$

$$\hat{\beta} = b^2 - s^2 q_s u_c - q_c^2. \quad (6.34e)$$

Le polynôme caractéristique de  $s^3 \mathbf{D}(\mathbf{w})$  est

$$\wp_{s^3 \mathbf{D}(\mathbf{w})}(z) = z^2 - (\hat{\omega} + \hat{\beta})z + \hat{\omega} \hat{\beta} - JK, \quad (6.35)$$

et son discriminant vaut

$$\Delta_{s^3 \mathbf{D}(\mathbf{w})} = (\hat{\omega} + \hat{\beta})^2 - 4(\hat{\omega} \hat{\beta} - JK) = (\hat{\omega} - \hat{\beta})^2 - JK. \quad (6.36)$$

Un ensemble de conditions suffisantes pour que la matrice  $s^3 \mathbf{D}(\mathbf{w})$  admette des valeurs propres toutes réelles et positives est

$$(\hat{\omega} - \hat{\beta})^2 - 4\theta \geq 0, \quad (6.37a)$$

$$\hat{\omega} \hat{\beta} - \theta \geq 0, \quad (6.37b)$$

$$\hat{\omega} + \hat{\beta} \geq 0, \quad (6.37c)$$

en ayant posé

$$\theta = |JK|. \quad (6.37d)$$

En effet, la première condition (6.37a) implique  $\Delta_{\mathfrak{s}^3\mathbf{D}(\mathbf{w})} \geq 0$ . La deuxième condition (6.37b) implique la positivité du produit des racines. La troisième condition (6.37c) équivaut à la positivité de leur somme. La résolution du système (6.37) se fait en trois étapes :

1. *Résolution de  $\hat{\omega} + \hat{\beta} \geq 0$ .* Dans le repère orthonormé  $(O, \hat{\omega}, \hat{\beta})$ , la courbe  $\hat{\omega} + \hat{\beta} = 0$  désigne la seconde bissectrice (représentée en noir sur la Figure 6.1). Dans ce plan, les couples  $(\hat{\omega}, \hat{\beta})$  qui satisfont (6.37) doivent appartenir au demi-plan supérieur délimité par la droite  $\hat{\omega} = -\hat{\beta}$ .
2. *Résolution de  $\hat{\omega}\hat{\beta} - \theta \geq 0$ .* La famille des points vérifiant  $\hat{\omega}\hat{\beta} - \theta = 0$ , est une hyperbole (représentée en rouge sur la Figure 6.1) dont le centre et les asymptotes sont l'origine et les axes du repère. L'ensemble des points  $(\hat{\omega}, \hat{\beta})$  tels que  $\hat{\omega}\hat{\beta} - \theta \geq 0$  et  $\hat{\omega} + \hat{\beta} \geq 0$  correspond au premier quadrant.
3. *Résolution de  $(\hat{\omega} - \hat{\beta})^2 - 4\theta \geq 0$ .* Dans le plan  $(\hat{\omega}, \hat{\beta})$ , les couples qui satisfont  $(\hat{\omega} - \hat{\beta})^2 - 4\theta = 0$  décrivent les droites d'équations  $\hat{\beta} = \hat{\omega} \pm 2\sqrt{\theta}$ . Ces deux droites (représentées en bleu sur la Figure 6.1) sont parallèles à la première bissectrice et ont pour ordonnées à l'origine  $\pm 2\sqrt{\theta}$ . L'ensemble des points  $(\hat{\omega}, \hat{\beta})$  qui satisfont  $(\hat{\omega} - \hat{\beta})^2 - 4\theta \geq 0$  est l'extérieur de la bande délimitée par ces deux droites.

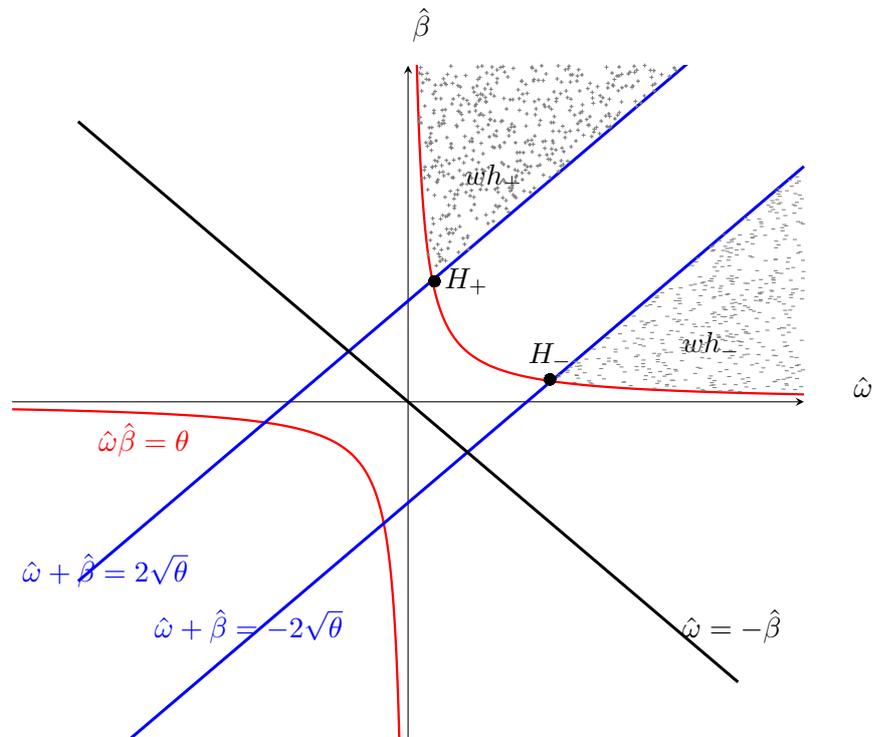


FIGURE 6.1 – Représentation graphique des conditions de Whitham.

Les points

$$H_- = ((\sqrt{2} + 1)\sqrt{\theta}, (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\theta}), \quad H_+ = ((\sqrt{2} - 1)\sqrt{\theta}, (\sqrt{2} + 1)\sqrt{\theta})$$

ont leurs coordonnées toutes positives et appartiennent à l'intersection entre l'hyperbole  $\widehat{\omega}\widehat{\beta} - \theta = 0$  avec respectivement les droites d'équations  $\widehat{\beta} = \widehat{\omega} - 2\sqrt{\theta}$  et  $\widehat{\beta} = \widehat{\omega} + 2\sqrt{\theta}$ . On définit les régions

$$wh_- = \{(\widehat{\omega}, \widehat{\beta}) \mid \widehat{\omega} \geq (\sqrt{2} + 1)\sqrt{\theta}, \widehat{\beta} \leq \widehat{\omega} - 2\sqrt{\theta}, \widehat{\omega}\widehat{\beta} - \theta \geq 0\}, \quad (6.38a)$$

$$wh_+ = \{(\widehat{\omega}, \widehat{\beta}) \mid \widehat{\beta} \geq (\sqrt{2} + 1)\sqrt{\theta}, \widehat{\beta} \geq \widehat{\omega} + 2\sqrt{\theta}, \widehat{\omega}\widehat{\beta} - \theta \geq 0\}. \quad (6.38b)$$

Alors, l'union  $wh_- \cup wh_+$  caractérise complètement (6.37).

Cela dit, on ne peut pas prendre n'importe quel point  $(\widehat{\omega}, \widehat{\beta}) \in wh_- \cup wh_+$ . Encore faut-il pouvoir inverser les relations (6.34b) et (6.34e) pour trouver  $a$  et  $b$ . Cette inversion étant

$$a = \sqrt{\widehat{\omega} + s^4 u_s^2 + s^2 u_c q_s}, \quad b = \sqrt{\widehat{\beta} + s^2 q_s u_c + q_c^2}, \quad (6.39)$$

les quantités dont on veut extraire la racine carrée doivent être positives. Il faut donc choisir  $\widehat{\omega}$  et  $\widehat{\beta}$  suffisamment grands. Par exemple, on peut partir du point  $H_-$  et se déplacer le long de la ligne bleue d'en bas, jusqu'à obtenir

$$\widehat{\omega} = (\sqrt{2} + 1)\sqrt{\theta} + \mathfrak{G}, \quad \widehat{\beta} = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\theta} + \mathfrak{G}, \quad (6.40a)$$

avec

$$\mathfrak{G} = \max \{0, s^2 |u_c q_s| - s^4 u_s^2, s^2 |q_s u_c| - q_c^2\}. \quad (6.40b)$$

Le choix d'opter pour  $H_-$  au lieu de  $H_+$  est également motivé par une autre contrainte. En effet, on s'astreint à prendre les coefficients de manière que

$$a > b > 0, \quad (6.41)$$

si bien que les ondes du système relaxé soient naturellement ordonnées par  $\lambda_{[-a]} < \lambda_{[-b]} < \lambda_{[+b]} < \lambda_{[+a]}$ , c'est-à-dire

$$U - \frac{a}{s} < U - \frac{b}{s} < U + \frac{b}{s} < U + \frac{a}{s}. \quad (6.42)$$

Lorsque les formules (6.39) retournent des coefficients avec  $a \leq b$ , on peut augmenter artificiellement  $a$  pour satisfaire (6.41). Par (6.39), cela revient à augmenter  $\widehat{\omega}$  à  $\widehat{\beta}$  fixé, ce qui géométriquement signifie qu'on se déplace horizontalement vers la droite dans le plan  $(\widehat{\omega}, \widehat{\beta})$ . En partant d'un point de la droite bleue du bas, on est garanti d'arriver dans la région  $wh_-$ , qui est admissible. Quant au choix (6.41) en lui-même, il se « justifie » par le fait que pour le modèle sans IPV en lagrangien, les ondes de vitesses  $\pm b$  relaxent l'onde de vitesse 0, tandis que celles de vitesses  $\pm a$  relaxent l'onde de vitesse  $-u_\tau$ .

Les conditions (6.37), (6.39)–(6.40) seront à imposer concrètement dans chaque cellule du domaine de calcul.

### 6.2.3 Problème de Riemann

En vue d'appliquer le schéma de Godunov à la partie homogène du système relaxé (6.12), il faut savoir résoudre le problème de Riemann qui lui est associé. Cette tâche sera particulièrement aisée. Considérons le problème

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = 0 \quad (6.43a)$$

avec la donnée initiale

$$\mathbf{W}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{W}_L & \text{si } x \leq 0, \\ \mathbf{W}_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (6.43b)$$

où, pour préciser les composantes,

$$\mathbf{W}_L = \begin{bmatrix} s_L \\ s_L c_L \\ s_L U_L \\ s_L Q_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_R = \begin{bmatrix} s_R \\ s_R c_R \\ s_R U_R \\ s_R Q_R \end{bmatrix}, \quad (6.44)$$

**Solution explicite.** Il est plus commode d'expliciter la solution de (6.43) avec les variables primitives  $\mathbf{V} = (s, c, U, Q)$ . Sous l'hypothèse (6.42) sur l'ordonnancement des ondes, la structure de la solution dans le plan  $(x, t)$  est esquissée sur la Figure 6.2. Au niveau algébrique, on exprime pour chaque onde l'égalité des trois invariants de Riemann qui lui sont associés. En résolvant le système d'équations ainsi obtenu, on obtient tous les états intermédiaires ainsi que la vitesse effective des ondes. Dans le cas de (6.43) et avec la condition (6.41), la solution est unique, autosemblable et donnée par

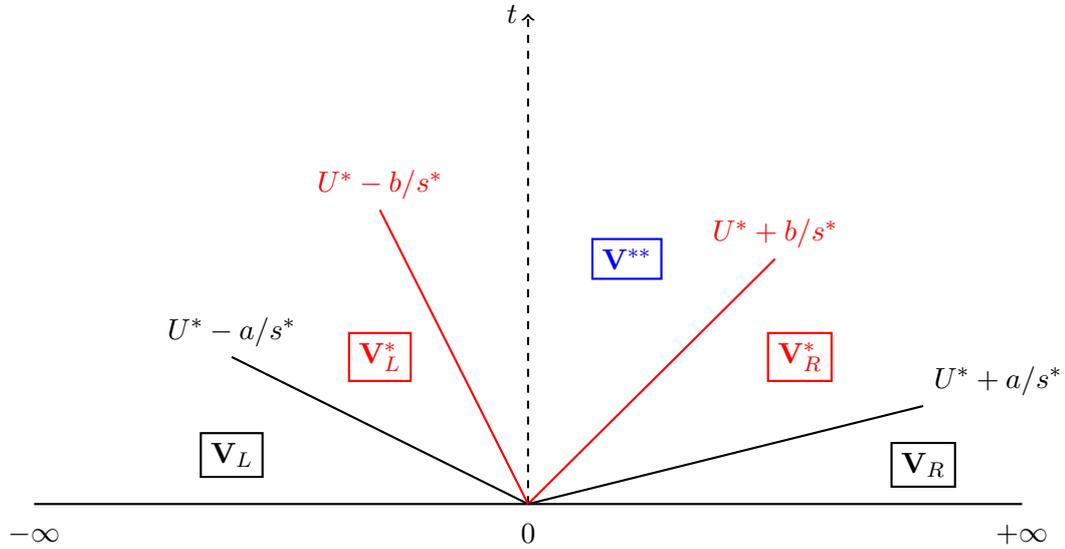


FIGURE 6.2 – Solution du problème de Riemann pour le modèle de relaxation (6.12).

$$\mathbf{V}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{V}_L & \text{si } -\infty < x/t < U^* - a/s^*, \\ \mathbf{V}_L^* & \text{si } U^* - a/s^* < x/t < U^* - b/s^*, \\ \mathbf{V}^{**} & \text{si } U^* - b/s^* < x/t < U^* + b/s^*, \\ \mathbf{V}_R^* & \text{si } U^* + b/s^* < x/t < U^* + a/s^*, \\ \mathbf{V}_R & \text{si } U^* + a/s^* < x/t < +\infty, \end{cases} \quad (6.45a)$$

où

$$\mathbf{V}_L = \begin{bmatrix} s_L \\ c_L \\ U_L \\ Q_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_L^* = \begin{bmatrix} s^* \\ c_L \\ U^* \\ Q_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^{**} = \begin{bmatrix} s^* \\ c^* \\ U^* \\ Q^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_R^* = \begin{bmatrix} s^* \\ c_R \\ U^* \\ Q_R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_R = \begin{bmatrix} s_R \\ c_R \\ U_R \\ Q_R \end{bmatrix}, \quad (6.45b)$$

les quatre valeurs  $s^*$ ,  $c^*$ ,  $U^*$  et  $Q^*$  qui composent ces états intermédiaires étant

$$\frac{1}{s^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s_L} + \frac{1}{s_R} \right) + \frac{U_R - U_L}{2a}, \quad (6.46a)$$

$$c^* = \frac{c_L + c_R}{2} - \frac{Q_R - Q_L}{2b}, \quad (6.46b)$$

$$U^* = \frac{U_L + U_R}{2} + \frac{a}{2} \left( \frac{1}{s_R} - \frac{1}{s_L} \right), \quad (6.46c)$$

$$Q^* = \frac{Q_L + Q_R}{2} - b \frac{c_R - c_L}{2}. \quad (6.46d)$$

Ces dernières résultent de la conservation des invariants de Riemann

$$U_L - \frac{a}{s_L} = U^* - \frac{a}{s^*}, \quad U^* + \frac{a}{s^*} = U_R + \frac{a}{s_R}, \quad (6.47a)$$

$$Q_L + bc_L = Q^* + bc^*, \quad Q^* - bc^* = Q_R - bc_R. \quad (6.47b)$$

**Contrôles de positivité.** Si les deux états gauche et droit correspondent à des saturations non nulles ( $s > 0$ ), il est physiquement souhaitable que la saturation intermédiaire  $s^*$  soit strictement positive. La condition  $s^* > 0$  est d'ailleurs un pré-requis pour avoir l'ordonnancement (6.42) si  $a > b$ , puisqu'en vertu des invariants de Riemann celui-ci équivaut à

$$U^* - \frac{a}{s^*} < U^* - \frac{b}{s^*} < U^* + \frac{b}{s^*} < U + \frac{a}{s^*}. \quad (6.48)$$

À partir (6.46a), on peut garantir que  $1/s^* > 0$  en prenant  $a$  suffisamment grand, à savoir

$$a > \frac{|U_R - U_L|}{\tau_L + \tau_R} = \left| \frac{U_R - U_L}{\tau_R - \tau_L} \right| \left| \frac{\tau_R - \tau_L}{\tau_L + \tau_R} \right|. \quad (6.49)$$

De même, il est souhaitable de préserver la positivité de la concentration intermédiaire  $c^*$ . Par (6.46b), on peut garantir que  $c^* \geq 0$  en prenant  $b$  suffisamment grand, à savoir

$$b \geq \frac{|Q_R - Q_L|}{c_L + c_R} = \left| \frac{Q_R - Q_L}{c_R - c_L} \right| \left| \frac{c_R - c_L}{c_L + c_R} \right|. \quad (6.50)$$

Les *contrôles de positivité* (6.49)–(6.50) sont à imposer sur chaque arête du domaine de calcul, en plus des conditions (6.37), (6.39)–(6.40) en chaque cellule.

**Difficulté avec le vide.** Si l'un des états gauche ou droit correspond au « vide » en eau ( $s = 0$ ), il y a une difficulté avec le problème de Riemann qui ne peut malheureusement pas être surmontée dans le cadre du modèle (6.12). Par exemple, considérons le problème de Riemann avec

$$s_L > 0, \quad s_R = 0 = s_b,$$

et plaçons nous dans deux configurations.

1.  $a > 0$  ou  $b > 0$ . Alors une des valeurs propres  $U_R \pm a/s_R$  et  $U_R \pm b/s_R$  de l'état droit est infinie. La condition CFL (3.25) ne peut être satisfaite que pour un pas de temps  $\Delta t$  nul.
2.  $a = 0$  et  $b = 0$ . On suppose que lorsque  $s$  tend vers 0,  $a$  et  $b$  tendent aussi vers 0 de telle sorte que  $\lim_{s \downarrow 0} a/s$  et  $\lim_{s \downarrow 0} b/s$  soient finis. Alors, les valeurs propres  $U_R \pm a/s_R$  et  $U_R \pm b/s_R$  sont finies, mais par (6.46) on a  $s^* = 0$ , ce qui est assez gênant. Le plus gênant est toutefois que le modèle (5.4) n'est plus nécessairement une limite dissipative de (6.12) : il n'y a aucune raison pour que les conditions (6.37) soient vérifiées en  $\mathbf{w}_L$ . Même en se passant de ces conditions suffisantes et en regardant directement la matrice  $\mathbf{D}(\mathbf{w}_L)$  définie en (6.33b), il existe des états  $\mathbf{w}_L$  pour lesquels les valeurs propres de  $\mathbf{D}(\mathbf{w}_L)$  sont toutes négatives avec  $a = b = 0$ . Par exemple, avec  $s_L = 1 = s_\#$ , on a  $u_c = 0$ ,  $u_s = -1$  et à ce moment-là

$$\mathbf{D}(\mathbf{w}_L) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -q_s(-1 + q_c) & -q_c^2 \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

a pour valeurs propres  $-1$  et  $-q_c^2$ .

Il est donc crucial d'amender le schéma de relaxation si l'on souhaite simuler les cas avec saturations nulles.

## 6.3 Modification pour le traitement du vide

Les difficultés examinées ci-dessus sont essentiellement dus à ce que les coefficients  $a$  et  $b$  sont uniformes dans tout le domaine. L'idée est alors de rendre ces coefficients variables en espace, de sorte qu'ils s'annulent en même temps que  $s$  tout en assurant que les rapports  $a/s$  et  $b/s$  restent finis. Nous allons transposer au système (2.34) une technique qui a été mise au point par Bouchut [11] dans d'autres contextes.

### 6.3.1 Modèle relaxé à coefficients variables

En remplacement du modèle relaxé à coefficients uniformes (6.12), on considère le modèle relaxé dit à *coefficients variables* qui s'écrit

$$\partial_t(s) + \partial_x(sU) = 0, \quad (6.52a)$$

$$\partial_t(sc) + \partial_x(scU + Q) = 0, \quad (6.52b)$$

$$\partial_t(sU) + \partial_x(sU^2) + a^2/s^2 \partial_x s = \varepsilon^{-1} s(u(s, c) - U), \quad (6.52c)$$

$$\partial_t(sQ) + \partial_x(sQU) + b^2 \partial_x c = \varepsilon^{-1} s(q(s, c) - Q), \quad (6.52d)$$

$$\partial_t(sa) + \partial_x(saU) = 0, \quad (6.52e)$$

$$\partial_t(sb) + \partial_x(sbU) = 0. \quad (6.52f)$$

Dans ce nouveau système,  $a$  et  $b$  apparaissent comme des fonctions inconnues de  $(x, t)$ . Leurs équations d'évolution (6.52e)–(6.52f) se combinent avec (6.52a) pour donner

$$\partial_t a + U \partial_x a = 0, \quad (6.53a)$$

$$\partial_t b + U \partial_x b = 0, \quad (6.53b)$$

lorsque  $s > 0$ . Autrement dit, ces nouvelles grandeurs sont transportées à la vitesse  $U$ . Il est important de noter que dans (6.52c)–(6.52d), les facteurs  $a^2$  et  $b^2$  se trouvent à l'extérieur des dérivées en espace. Parce qu'ils ne sont plus uniformes, le système (6.52) n'est plus sous forme conservative : la notion de flux n'existe plus, du moins pour les équations (6.52c)–(6.52d). Cela dit, signalons qu'il est possible de retrouver une forme conservative par transformation non linéaire. En combinant (6.53) avec (6.52c)–(6.52d), on obtient

$$\partial_t \left( \frac{sU}{a^2} \right) + \partial_x \left( \frac{sU^2}{a^2} - \frac{1}{s} \right) = 0, \quad (6.54a)$$

$$\partial_t \left( \frac{sQ}{b^2} \right) + \partial_x \left( \frac{sQu}{b^2} + c \right) = 0. \quad (6.54b)$$

Pour étudier le système (6.52), il est plus agréable de l'exprimer sous la forme quasi-linéaire en variables primitives, c'est-à-dire

$$\partial_t \mathbf{V} + \mathbf{K}(\mathbf{V}) \partial_x \mathbf{V} = \varepsilon^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{V}), \quad (6.55a)$$

avec

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} s \\ c \\ U \\ Q \\ a \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}(\mathbf{V}) = \begin{bmatrix} U & 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 & 1/s & 0 & 0 \\ a^2/s^2 & 0 & U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2/s & 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{V}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u(s, c) - U \\ q(s, c) - Q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.55b)$$

Sous cette forme, il est facile de montrer que la partie homogène de (6.55a), qui correspond à  $\varepsilon^{-1} = 0$  ou  $\varepsilon \rightarrow +\infty$ , est hyperbolique avec dégénérescence linéaire de tous ses champs. Ses éléments propres sont synthétisés dans la Table 6.3.

| Valeur propre | Nature du champ | Invariants de Riemann |
|---------------|-----------------|-----------------------|
| $U$ (double)  | LD              | $s; c; U; Q$          |
| $U + a/s$     | LD              | $c; Q; U + a/s; a; b$ |
| $U - a/s$     | LD              | $c; Q; U - a/s; a; b$ |
| $U + b/s$     | LD              | $s; U; Q - bc; a; b$  |
| $U - b/s$     | LD              | $s; U; Q + bc; a; b$  |

TABLE 6.3 – Éléments propres de la partie homogène du système (6.52).

### 6.3.2 Limite dissipative

Comme pour le modèle relaxé à coefficients uniformes, cherchons une équation équivalente reflétant le comportement de l'approximation (6.52) au premier ordre en  $\varepsilon \downarrow 0$ .

**Analyse de Chapman-Enskog.** En injectant la forme a priori

$$U = u(s, c) + \varepsilon U^1, \quad (6.56a)$$

$$Q = q(s, c) + \varepsilon Q^1, \quad (6.56b)$$

dans (6.52c)–(6.52d), on obtient les mêmes expressions pour les correcteurs  $U^1$  et  $Q^1$  qu'en (6.19), à savoir

$$\partial_t(su) + \partial_x(su^2) - (a^2/s^2) \partial_x(s) = -sU^1, \quad (6.57a)$$

$$\partial_t(sq) + \partial_x(suq) + b^2 \partial_x(c) = -sQ^1. \quad (6.57b)$$

Cela est dû au fait que les coefficients  $a^2$  et  $b^2$  sont devant les dérivées  $\partial_x$ . Par conséquent, le reste des calculs se déroulent exactement comme en §6.2.2 et l'on arrive au même développement que (6.33a)–(6.33b), à savoir

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \varepsilon \partial_x (s \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{P}(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w}), \quad (6.58a)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{w}) &= \frac{1}{s^3} \begin{bmatrix} a^2 - s^4 u_s^2 - s^2 u_c q_s & -u_c (s^2 u_s + q_c) \\ -s^2 q_s (s^2 u_s + q_c) & b^2 - s^2 q_s u_c - q_c^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s} \begin{bmatrix} (a/s)^2 - (s u_s)^2 - u_c q_s & -u_c (u_s + q_c/s^2) \\ -q_s (s^2 u_s + q_c) & (b/s)^2 - q_s u_c - (q_c/s)^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.58b)$$

La dernière transformation en (6.58b) vise à mettre en évidence les quantités  $a/s$  et  $b/s$  qui doivent être bien déterminées pour  $s \downarrow 0$ .

**Choix des coefficients  $a$  et  $b$ .** Pour ajuster  $a/s$  et  $b/s$  de sorte que  $\mathbf{D}(\mathbf{w})$  ait toutes ses valeurs propres réelles et positives, le plus naturel est de procéder comme en §6.2.2 après avoir renormalisé par  $s^2$ . En d'autres termes, on commence par nommer les éléments de la matrice

$$\mathbf{D}(\mathbf{w}) = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} \hat{\omega} & J \\ K & \hat{\beta} \end{bmatrix}, \quad (6.59a)$$

avec

$$\hat{\omega} = (a/s)^2 - (s u_s)^2 - u_c q_s, \quad (6.59b)$$

$$J = -u_c (u_s + q_c/s^2), \quad (6.59c)$$

$$K = -q_s (s^2 u_s + q_c), \quad (6.59d)$$

$$\hat{\beta} = (b/s)^2 - q_s u_c - (q_c/s)^2. \quad (6.59e)$$

L'étude du polynôme caractéristique de  $s \mathbf{D}(\mathbf{w})$  mène aux conditions suffisantes analogues à (6.37), c'est-à-dire

$$(\hat{\omega} - \hat{\beta})^2 - 4\theta \geq 0, \quad (6.60a)$$

$$\hat{\omega} \hat{\beta} - \theta \geq 0, \quad (6.60b)$$

$$\hat{\omega} + \hat{\beta} \geq 0, \quad (6.60c)$$

avec  $\theta = |JK|$ . La résolution de (6.60) se fait avec la même méthode, conduisant à la solution

$$\widehat{\omega} = (\sqrt{2} + 1)\sqrt{\theta} + \mathfrak{G}, \quad \widehat{\beta} = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\theta} + \mathfrak{G}, \quad (6.61a)$$

avec

$$\mathfrak{G} = \max \{0, |u_c q_s| - (s u_s)^2, |q_s u_c| - (q_c/s)^2\}, \quad (6.61b)$$

à partir de quoi on retrouve  $a/s$  et  $b/s$  par

$$\frac{a}{s} = \sqrt{\widehat{\omega} + (s u_s)^2 + u_c q_s}, \quad \frac{b}{s} = \sqrt{\widehat{\beta} + q_s u_c + (q_c/s)^2}, \quad (6.62)$$

quitte à augmenter  $a/s$  a posteriori pour le rendre supérieur à  $b/s$ .

Pour que la procédure ci-dessus soit bien définie, il faut que chacune des quantités

$$s u_s, \quad s^2 u_s, \quad q_s u_c, \quad q_s q_c, \quad (q_c/s)^2, \quad q_c/s^2$$

ait une limite finie quand  $s \downarrow 0$ . Il est facile de voir que c'est le cas pour les quatre premières. C'est aussi le cas pour la cinquième, car

$$\frac{q_c}{s} = \left(\frac{q}{s}\right)_c = ((\gamma - 1)cu)_c.$$

Pour la dernière, il peut y avoir un problème. Puisque

$$\frac{q_c}{s^2} = \left(\frac{q}{s^2}\right)_c = \left((\gamma - 1)c\frac{u}{s}\right)_c,$$

on aura une limite finie si  $u/s$  n'explose pas quand  $s \downarrow 0$ . Or, par définition,  $f$  contient du  $(s - s_b)^{n_w} = s^{n_w}$  où  $n_w$  est l'exposant de Corey de l'eau. Il s'ensuit que  $u = f/s$  est en  $s^{n_w - 1}$  et  $u/s$  est en  $s^{n_w - 2}$ . Ainsi, il est nécessaire que

$$n_w \geq 2. \quad (6.63)$$

Dans le cas  $n_w < 2$ , comme pour les « *kr* en croix », la procédure indiquée n'est pas valide. Nous proposons une approximation simple qui ne vérifie plus exactement la condition sous-caractéristique mais qui assure le caractère borné des quantités  $a/s$  et  $b/s$ . Elle consiste à demander seulement la stricte positivité des termes diagonaux de la matrice de diffusion, c'est-à-dire  $\widehat{\omega} > 0$  et  $\widehat{\beta} > 0$ . Les coefficients sont alors

$$\frac{a}{s} > (s u_s)^2 + |u_c q_s|, \quad \frac{b}{s} > \left(\frac{q_c}{s}\right)^2 + |q_s u_c|, \quad (6.64)$$

avec une augmentation éventuelle de  $a/s$  pour le rendre supérieur à  $b/s$ .

### 6.3.3 Problème de Riemann

En vue d'appliquer le schéma de Godunov à la partie homogène du système relaxé (6.52), il faut savoir résoudre le problème de Riemann qui lui est associé. Soient

$$\mathbf{V}_L = \begin{bmatrix} s_L \\ c_L \\ U_L \\ Q_L \\ a_L \\ b_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_R = \begin{bmatrix} s_R \\ c_R \\ U_R \\ Q_R \\ a_R \\ b_R \end{bmatrix}, \quad (6.65)$$

les états gauche et droit constituant la donnée initiale

$$\mathbf{V}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{V}_L & \text{si } x \leq 0, \\ \mathbf{V}_R & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (6.66)$$

**Solution explicite.** Sous les hypothèses  $(a/s)_L > (b/s)_L$  et  $(a/s)_R > (b/s)_R$ , la solution du problème de Riemann de (6.52), représentée dans le plan  $(x, t)$  par la Figure 6.3, est donnée par

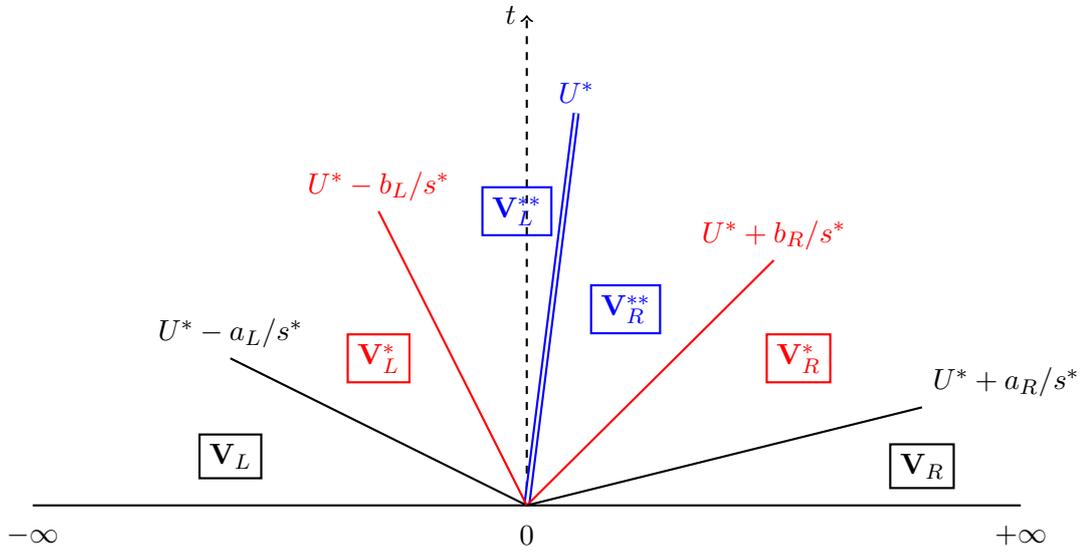


FIGURE 6.3 – Solution du problème de Riemann pour le modèle de relaxation (6.52)

$$\mathbf{V}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{V}_L & \text{si } -\infty < x/t < U^* - a/s^*, \\ \mathbf{V}_L^* & \text{si } U^* - a/s^* < x/t < U^* - b/s^*, \\ \mathbf{V}_L^{**} & \text{si } U^* - b/s^* < x/t < U^*, \\ \mathbf{V}_R^{**} & \text{si } U^* < x/t < U^* + b/s^*, \\ \mathbf{V}_R^* & \text{si } U^* + b/s^* < x/t < U^* + a/s^*, \\ \mathbf{V}_R & \text{si } U^* + a/s^* < x/t < +\infty, \end{cases} \quad (6.67a)$$

où

$$\mathbf{V}_L^* = \begin{bmatrix} s^* \\ c_L \\ U^* \\ Q_L \\ a_L \\ b_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_L^{**} = \begin{bmatrix} s^* \\ c^* \\ U^* \\ Q^* \\ a_L \\ b_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_R^{**} = \begin{bmatrix} s^* \\ c^* \\ U^* \\ Q^* \\ a_R \\ b_R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_R^* = \begin{bmatrix} s^* \\ c_R \\ U^* \\ Q_R \\ a_R \\ b_R \end{bmatrix}, \quad (6.67b)$$

les quatre quantités  $s^*$ ,  $c^*$ ,  $U^*$  et  $Q^*$  qui composent ces états intermédiaires étant

$$\frac{1}{s^*} = \frac{a_L/s_L + a_R/s_R}{a_L + a_R} + \frac{U_R - U_L}{a_L + a_R}, \quad (6.68a)$$

$$c^* = \frac{b_L c_L + b_R c_R}{b_L + b_R} - \frac{Q_R - Q_L}{b_L + b_R}, \quad (6.68b)$$

$$U^* = \frac{a_R U_L + a_L U_R}{a_L + a_R} + \frac{a_L a_R}{a_L + a_R} \left( \frac{1}{s_R} - \frac{1}{s_L} \right), \quad (6.68c)$$

$$Q^* = \frac{b_R Q_L + b_L Q_R}{b_L + b_R} - \frac{b_L b_R (c_R - c_L)}{b_L + b_R}. \quad (6.68d)$$

Ces dernières résultent de la conservation des invariants de Riemann

$$U_L - \frac{a_L}{s_L} = U^* - \frac{a_L}{s^*}, \quad U^* + \frac{a_R}{s^*} = U_R + \frac{a_R}{s_R}, \quad (6.69a)$$

$$Q_L + b_L c_L = Q^* + b_L c^*, \quad Q^* - b_R c^* = Q_R - b_R c_R. \quad (6.69b)$$

Lorsque  $a_L = a_R = a$ , les formules (6.68) dégèrent vers (6.46). En vue de l'implémentation pratique, il est utile de réécrire (6.68) sous une forme qui fait apparaître les rapports

$$\omega = \frac{a}{s}, \quad \beta = \frac{b}{s}. \quad (6.70)$$

On montre sans difficulté que

$$s^* = \frac{\omega_L s_L + \omega_R s_R}{\omega_L + \omega_R + (U_R - U_L)}, \quad (6.71a)$$

$$c^* = \frac{\beta_L s_L c_L + \beta_R s_R c_R - (Q_R - Q_L)}{\beta_L s_L + \beta_R s_R}, \quad (6.71b)$$

$$U^* = \frac{\omega_R s_R U_L + \omega_L s_L U_R - \omega_L \omega_R (s_R - s_L)}{\omega_L s_L + \omega_R s_R}, \quad (6.71c)$$

$$Q^* = \frac{\beta_R s_R Q_L + \beta_L s_L Q_R - \beta_L s_L \beta_R s_R (c_R - c_L)}{\beta_L s_L + \beta_R s_R}. \quad (6.71d)$$

**Contrôles de positivité.** Si les deux états gauche et droit correspondent à des saturations non nulles ( $s > 0$ ), il est physiquement souhaitable que la saturation intermédiaire  $s^*$  soit strictement positive. La condition  $s^* > 0$  est d'ailleurs un pré-requis pour avoir l'ordonnancement

$$U^* - \frac{a_L}{s^*} < U^* - \frac{b_L}{s^*} < U^* + \frac{b_L}{s^*} < U^* + \frac{a_L}{s^*}. \quad (6.72)$$

À partir de (6.71a), on peut garantir que  $s^* > 0$  en prenant  $(\omega_L, \omega_R)$  suffisamment grand, à savoir

$$\omega_L + \omega_R > |U_R - U_L|. \quad (6.73)$$

Cette condition, qui couple les  $\omega$  de deux cellules voisines, est à rapprocher de (6.49).

De même, il est souhaitable de préserver la positivité de la fraction massique intermédiaire  $c^*$ . Par (6.71b), on peut garantir que  $c^* \geq 0$  en prenant  $(\beta_L, \beta_R)$  suffisamment grands, à savoir

$$(s c)_L \beta_L + (s c)_R \beta_R \geq |Q_R - Q_L|. \quad (6.74)$$

Cette condition, qui couple les  $\beta$  de deux cellules voisines, est à rapprocher de (6.50). Les contrôles de positivité (6.73)–(6.74) sont à imposer sur chaque arête du domaine de calcul, en plus des conditions (6.60)–(6.62) en chaque cellule.

**Comportement avec un ou deux états vides.** Dans le cas où les données du problème de Riemann comportent un seul état « vide », par exemple

$$s_L > 0, \quad s_R = 0 = s_b,$$

les formules (6.71) restent bien définies et l'on trouve

$$s^* = \frac{\omega_L s_L}{\omega_L + \omega_R + (U_R - U_L)}, \quad c^* = c_L - \frac{Q_R - Q_L}{\beta_L s_L}, \quad (6.75a)$$

$$U^* = U_R + \omega_R, \quad Q^* = Q_R. \quad (6.75b)$$

La positivité de  $s_*$  et  $c_*$  peut être renforcée de manière analogue à ce qui précède.

Dans le cas où les deux états sont vides, i.e.,

$$s_L = s_R = 0 = s_b,$$

la discussion est plus longue. D'abord, grâce à la condition (6.73), le dénominateur de (6.71a) est strictement positif. Cela implique

$$s^* = 0. \quad (6.76)$$

Ensuite, lorsque  $(s_L, s_R) \rightarrow (0, 0)$ , la limite de  $U^*$  en (6.68c) dépend du rapport  $s_R/s_L$  (comme on le voit en divisant numérateur et dénominateur par  $s_L$ ). Ainsi,  $U^*$  est mal défini quand les deux états sont vides. Mais on verra en §6.4.1 que les quantités dont on a réellement besoin pour le schéma de relaxation sont  $sU$  et  $scU$  en  $x/t = 0$  d'un problème de Riemann. Au cas où l'état en  $x/t = 0$  serait  $\mathbf{V}_L^{**}$  ou  $\mathbf{V}_R^{**}$ , remarquons que le produit

$$s^* U^* = \frac{\omega_L s_L (U_R + \omega_R) + \omega_R s_R (U_L - \omega_L)}{\omega_L + \omega_R + (U_R - U_L)} \quad (6.77)$$

admet la limite bien définie

$$(sU)^* = 0 \quad (6.78)$$

sous la condition (6.73). Dans la même veine, la limite de  $c^*$  en (6.68b) est également mal définie pour  $(s_L, s_R) \rightarrow (0, 0)$ , avec le risque même d'être infinie si  $Q_R - Q_L \neq 0$ . On verra en §6.4.1 que dans le schéma de relaxation, les données du problème de Riemann sont toujours à l'équilibre. En particulier,  $Q_L = q(s_L, c_L)$  et  $Q_R = q(s_R, c_R)$ , ce qui implique qu'à la limite  $Q_L = Q_R = 0$ . La possibilité que  $c^* \rightarrow \infty$  étant exclue, il reste que sa limite dépend du rapport  $s_R/s_L$ . Là encore, il faut se rappeler qu'on a en fait besoin de  $(scU)^* = (sU)^* c^*$ . Même si  $c^*$  est indéterminé, tant qu'il reste borné, son produit avec un terme qui tend vers 0 admet 0 comme limite. Ainsi,

$$(scU)^* = 0. \quad (6.79)$$

Enfin, la limite de  $Q^*$  en (6.68d) pour  $(s_L, s_R) \rightarrow (0, 0)$  est bien définie comme

$$Q^* = 0, \quad (6.80)$$

à condition que  $Q_L$  et  $Q_R$  soient à l'équilibre, i.e.,  $Q_L = q(s_L, c_L)$  et  $Q_R = q(s_R, c_R)$ .

Il peut être objecté que la connaissance de  $U^*$  est nécessaire pour déterminer quel état parmi  $\mathbf{V}_L$ ,  $\mathbf{V}_L^*$ ,  $\mathbf{V}_L^{**}$ ,  $\mathbf{V}_R^{**}$ ,  $\mathbf{V}_R^*$  et  $\mathbf{V}_R$  se trouve sur l'interface  $x/t = 0$ . Certes, mais si le but est d'évaluer les flux  $sU$  et  $scU + Q$  sur cette interface, la procédure suivante permet de s'en passer :

- Si  $U_L - (a/s)_L > 0$ , alors les deux flux recherchés sont  $s_L U_L = 0$  et  $s_L c_L U_L + Q_L = 0$ . De même, si  $U_R + (a/s)_R < 0$ , alors les deux flux recherchés sont  $s_R U_R = 0$  et  $s_R c_R U_R + Q_R = 0$ .
- Si  $U_L - (a/s)_L < 0$  et  $U_R + (a/s)_R > 0$ , on remarque par (6.67b) que les quatre états possibles  $\mathbf{V}_L^*$ ,  $\mathbf{V}_L^{**}$ ,  $\mathbf{V}_R^{**}$ ,  $\mathbf{V}_R^*$  ont tous les mêmes valeurs en saturation et vitesse, à savoir  $s = s^*$  et  $U = U^*$ . De ce fait, le flux en  $sU$  sera  $(sU)^* = 0$  en vertu de (6.78). Les valeurs de concentrations peuvent être  $c_L$ ,  $c_*$  et  $c_R$ . Comme ces nombres sont finis (et bien que  $c^*$  puisse être indéterminé), leur produits avec  $(sU)^*$  s'annulent nécessairement et le flux en  $scU + Q$  sera également 0.

En conclusion, dans le cas  $s_L = s_R = 0 = s_b$ , tous les flux dont nous avons besoin sont nuls de manière naturelle et non-ambiguë, en dépit de l'indétermination de certaines grandeurs intermédiaires dans la solution du problème de Riemann.

## 6.4 Implémentation et validation numérique

### 6.4.1 Mise à jour pratique

Nous sommes maintenant en mesure de décrire une itération en temps du schéma de relaxation à coefficients variables, en insistant sur les calculs qui sont minimalement nécessaires pour la mise en œuvre pratique. À l'instant  $t^n$ , on dispose de  $\mathbf{w}_i^n = (s_i^n, s_i^n c_i^n)$  pour  $i \in \mathbb{Z}$ . Le passage de  $n$  à  $n + 1$  s'effectue en deux étapes.

**Étape 1 : projection sur la variété d'équilibre ( $\varepsilon = 0$ ).** On calcule les états étendus

$$\mathbf{V}_i^n = (s_i^n, c_i^n, U_i^n, Q_i^n, a_i^n, b_i^n)$$

dans lesquels les variables de relaxation sont à l'équilibre, c'est-à-dire

$$U_i^n := u(s_i^n, c_i^n), \quad Q_i^n := q(s_i^n, c_i^n), \quad (6.81)$$

et les coefficients  $(a_i^n, b_i^n)$  déterminés pour satisfaire les conditions sous-caractéristiques (6.60)–(6.62) en chaque cellule  $i$  et les conditions de positivité (6.73)–(6.74) en chaque arête  $i + 1/2$ . En calculant  $(U_i^n, Q_i^n, a_i^n, b_i^n)$  à partir de  $(s_i^n, c_i^n)$ , on écrase les valeurs éventuellement plus anciennes pour ces quantités et force le système à revenir à l'équilibre.

Formellement, les formules (6.81) correspondent à  $\varepsilon = 0$ . Plus précisément, en multipliant (6.52c)–(6.52d) par  $\varepsilon$  puis en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient

$$0 = s(u(s, c) - U), \quad 0 = s(q(s, c) - Q). \quad (6.82)$$

**Étape 2 : évolution libre ( $\varepsilon = +\infty$ ).** On résout la partie homogène du système relaxé (6.52) avec les données  $\mathbf{V}_i^n$  qui viennent d'être définies. Cette étape correspond à  $\varepsilon^{-1} = 0$  ou  $\varepsilon = +\infty$ .

En chaque arête  $i + 1/2$ , on considère le problème de Riemann avec  $\mathbf{V}_i^n$  comme état gauche et  $\mathbf{V}_{i+1}^n$  comme état droit. De la solution explicitée en (6.67)–(6.68), on extrait les quantités  $sU$  et  $scU + Q$  qui se trouvent à l'interface, c'est-à-dire en la variable réduite  $x/t = 0$  du problème de Riemann. Désignons par

$$\mathfrak{F}_{i+1/2}^{n, \text{Rel}} = \left[ \begin{array}{c} sU \\ scU + Q \end{array} \right]_{\text{Riem}} (x/t = 0; \mathbf{V}_i^n, \mathbf{V}_{i+1}^n) \quad (6.83)$$

la valeur extraite de cette opération. Les composantes de (6.83) ont toujours un sens, y compris quand  $s_i^n = s_{i+1}^n = 0$  comme mentionné plus haut. Il est important de voir que les valeurs de  $U$  et  $Q$  entrant dans la définition de  $\mathfrak{F}_{i+1/2}^{n,\text{Rel}}$  sont autorisées à être « hors équilibre », à savoir différentes de  $u(s, c)$  et  $q(s, c)$  de l'état intermédiaire concerné. Autrement dit, à part dans les valeurs initiales  $\mathbf{V}_i^n$  et  $\mathbf{V}_{i+1}^n$  du problème de Riemann, la fonction flux de départ  $\mathbf{f}(\cdot)$  n'intervient pas dans la structure de (6.83).

Nous venons ainsi de définir le flux de relaxation pour le problème de départ. Il reste à mettre à jour les variables qui nous intéressent par

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathfrak{F}_{i+1/2}^{n,\text{Rel}} - \mathfrak{F}_{i-1/2}^{n,\text{Rel}}). \quad (6.84)$$

Il n'est pas utile de mettre à jour les autres variables conservatives que sont  $sU$ ,  $sQ$ ,  $sa$  et  $sb$ , puisque de toute façon les quantités  $U$ ,  $Q$ ,  $a$  et  $b$  seront « brutalement » remplacées à l'étape 1 du pas de temps suivant.

### 6.4.2 Convergence sur des problèmes de Riemann

Notre but est maintenant de vérifier numériquement que, sur des problèmes de Riemann, le schéma décentré et le schéma de relaxation proposé en §6.4.1 convergent vers la solution exacte, laquelle est connue pour deux lois d'IPV :  $\gamma \equiv 1$  (sans IPV) et  $\gamma = s/(s - s_\bullet)$  (percolation). Après cette étude de convergence, nous illustrons sur une simulation le phénomène de concentration due à la loi d'IPV constant. L'apparition de cette singularité dans les solutions obtenues avec les deux schémas montre qu'elle est inhérente à l'ellipticité du modèle et non pas un défaut du schéma décentré. Les résultats numériques plus complets seront fournis au chapitre §7.

**Données pétrophysiques et caractéristiques de maillage.** On considère une expérience de laboratoire dans laquelle on injecte de l'eau et du polymère dans une carotte fortement saturée en huile ( $1 - s \gg s$ ) à l'instant initial. Le domaine a une longueur  $L = 1$  et est découpé en 200 cellules uniformes. On a donc  $\Delta x = 0.005$ . La discontinuité à  $t = 0$  est initialisée en  $x = 0.1$ . La carotte correspond donc aux abscisses vérifiant  $x \in [0.1, 1]$ . On suppose que cette carotte a une saturation en eau irréductible  $s_b = 0.1$  et une saturation en huile résiduelle  $s_{or} = 1 - s_\# = 0$ . Les états du problème de Riemann sont

$$(s, c)(x, t = 0) = \begin{cases} (1, 10^{-4}) & \text{si } x < 0.1, \\ (0.2, 0) & \text{si } x > 0.1. \end{cases} \quad (6.85)$$

Les résultats présentés ci-après sont obtenus avec des coefficients de Corey  $n_w = n_o = 2$  et la réduction de mobilité (2.21) avec les coefficients  $a_1 = 2 \cdot 10^3$ ,  $a_2 = 2,8 \cdot 10^6$  et  $a_4 = 9 \cdot 10^{19/2}$ .

**Écoulement sans IPV.** La Figure 6.4 compare le schéma de relaxation et le schéma de Godunov lorsque  $\gamma \equiv 1$ . La solution est une succession de trois ondes qui sont :

1. Une détente qui s'étale sur l'intervalle  $[0.1, 0.555]$ . Dans cet intervalle, on observe une décroissance de la saturation en eau et la fraction massique de polymère est constante. L'onde de détente est bien approchée.

2. La discontinuité de contact est localisée à la fin de la détente, c'est-à-dire en  $x = 0.555$ . Il n'y a pas apparition d'un état constant entre la fin de la détente et la discontinuité de contact car l'état séparant ces deux ondes est résonant.
3. L'onde de choc est localisée en  $x = 0.725$ . Cette discontinuité est assez bien approchée.

La solution approchée obtenue par le schéma de Godunov et celle obtenue avec le schéma de relaxation sont quasiment identiques.

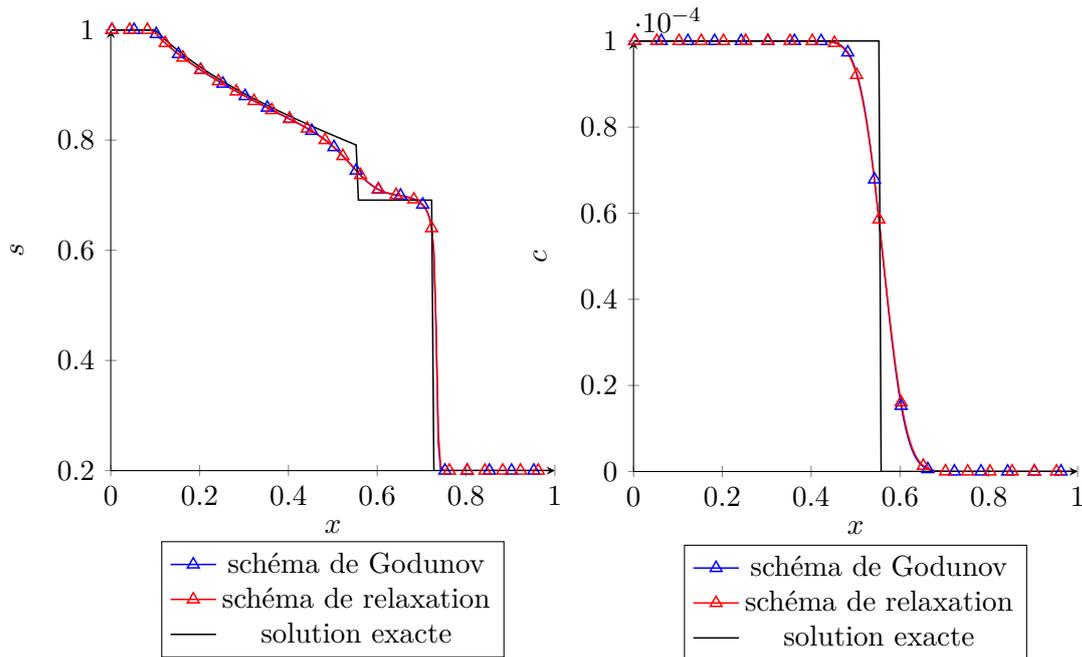


FIGURE 6.4 – Écoulement sans IPV : profil de la saturation  $s$  (gauche) et de la fraction massique  $c$  (droite) pour le schéma de relaxation obtenu avec  $s_b = 0.1$ ,  $\mathbf{v}_L = (1, 10^{-4})$ ,  $\mathbf{v}_R = (0.2, 0)$  et 200 cellules.

Le schéma de relaxation affiche un comportement identique au schéma de Godunov. La discontinuité de contact est moins bien approchée que les ondes de choc et de détente.

**Écoulement avec loi de percolation.** La Figure 6.5 compare le schéma de relaxation et le schéma de Godunov lorsque

$$\gamma(s) = \frac{s}{s - s_\bullet}, \quad s_\bullet = 0.05, \quad s \in [0.1, 1]. \quad (6.86)$$

La solution est une succession de trois ondes :

1. Une détente qui s'étale sur l'intervalle  $[0.1, 0.585]$ . Dans cet intervalle on observe une décroissance de la saturation en eau tout comme celle de la fraction massique de polymère.
2. La discontinuité de contact est localisée à la fin de la détente, c'est-à-dire en  $x = 0.585$ . Il n'apparaît aucun état constant entre la fin de la détente et la discontinuité de contact, car l'état séparant ces deux ondes est résonant.

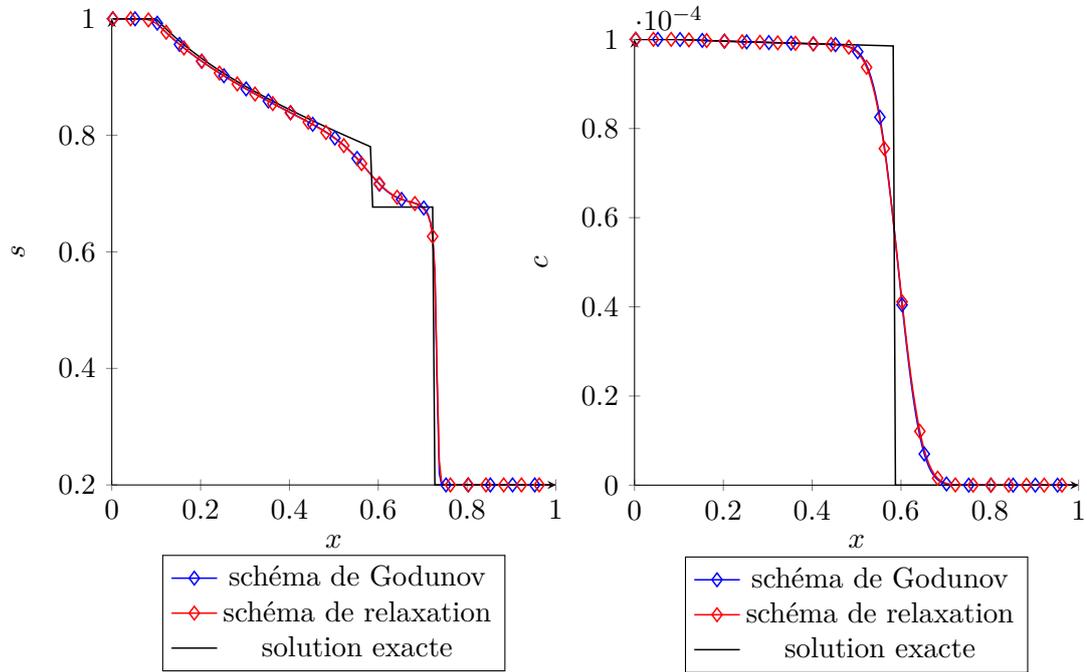


FIGURE 6.5 – Loi de percolation : profil de la saturation  $s$  (gauche) et de la fraction massique  $c$  (droite) pour le schéma de relaxation obtenu avec  $s_{\bullet} = 0.05$ ,  $s_b = 0.1$ ,  $\mathbf{v}_L = (1, 10^{-4})$ ,  $\mathbf{v}_R = (0.2, 0)$  et 200 cellules.

3. L'onde de choc est localisée en  $x = 0.725$ .

Dans les simulations représentées ci-dessus (Figure 6.4 et Figure 6.5), les solutions approximatives obtenues avec les deux schémas sont quasiment identiques, que ce soit pour la saturation en eau ou pour la fraction massique de polymère. Ces solutions approximatives restent très diffusives dans la zone de contact. Les différentes erreurs obtenues avec et sans montée en ordre sont récapitulées dans la Table 6.4. Celle-ci atteste d'erreurs très proches entre le schéma de Godunov et le schéma de relaxation. Ces résultats sont en adéquation avec les courbes représentées dans les Figures 6.4 et 6.5.

| Loi d'IPV | schéma de Godunov     |                       | schéma de relaxation  |                       |
|-----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
|           | ordre 1               | ordre 2               | ordre 1               | ordre 2               |
| sans      | $0.358 \cdot 10^{-1}$ | $0.262 \cdot 10^{-1}$ | $0.365 \cdot 10^{-1}$ | $0.259 \cdot 10^{-1}$ |
| percol.   | $0.313 \cdot 10^{-1}$ | $0.142 \cdot 10^{-1}$ | $0.324 \cdot 10^{-1}$ | $0.223 \cdot 10^{-1}$ |

TABLE 6.4 – Erreurs d'approximation de  $\mathbf{v}$  en norme  $L^2$  pour le schéma de relaxation et le schéma de Godunov avec  $s_{\bullet} = 0.05$ ,  $s_b = 0.1$ ,  $\mathbf{v}_L = (1, 10^{-4})$ ,  $\mathbf{v}_R = (0.2, 0)$  et 200 cellules

**Ordres de convergence.** Pour calculer l'ordre de convergence du schéma de relaxation dans les ondes simples, on isole les différentes ondes présentes dans les deux Figures précédentes. La Table 6.5 résume les états initiaux pour chaque onde et chacune des deux lois d'IPV.

| IPV     | états        | $c$ -contact                      | $s$ -choc      | $s$ -détente                      |
|---------|--------------|-----------------------------------|----------------|-----------------------------------|
| sans    | $(s_L, c_L)$ | $(0.79105, 10^{-4})$              | $(0.69105, 0)$ | $(1, 10^{-4})$                    |
|         | $(s_R, c_R)$ | $(0.69105, 0)$                    | $(0.2, 0)$     | $(0.79105, 10^{-4})$              |
|         |              | C-contact                         | S-choc         | S-détente                         |
| percol. | $(s_L, c_L)$ | $(0.7805, 0.98519 \cdot 10^{-4})$ | $(0.67689, 0)$ | $(1, 10^{-4})$                    |
|         | $(s_R, c_R)$ | $(0.67689, 0)$                    | $(0.2, 0)$     | $(0.7805, 0.98519 \cdot 10^{-4})$ |

TABLE 6.5 – Données initiales correspondant à des problèmes de Riemann dont la solution est une onde simple.

La méthode de calcul de l'ordre de convergence reste celle présentée en §3.2.2 : pour un jeu de variables initiales, on calcule le logarithme de  $\log \varepsilon_{L^2}(X)$  en fonction de  $\log \Delta x$  pour chaque discrétisation. L'ordre de convergence est la pente de la droite obtenue par la régression linéaire. Les valeurs obtenues sont données dans la Table 6.6. Le symbole – indique que le calcul de l'ordre pour la valeur n'est pas pertinent : il s'agit des valeurs constantes avec des variations de l'ordre du zéro machine  $10^{-16}$ . Les valeurs détaillées dans cette Table certifient que le schéma de relaxation converge vers la solution exacte du problème de Riemann d'écoulements sans IPV ou avec loi de percolation.

| IPV     | variable | contact |       | choc    |       | détente |       |
|---------|----------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|
|         |          | ordre 1 | MUSCL | ordre 1 | MUSCL | ordre 1 | MUSCL |
| sans    | $s$      | 0.24    | 0.33  | 0.50    | 0.50  | 0.66    | 0.86  |
|         | $u$      | 0.51    | 0.67  | 0.50    | 0.50  | 0.63    | 0.85  |
|         | $sc$     | 0.24    | 0.33  | –       | –     | –       | –     |
|         |          | contact |       | choc    |       | détente |       |
|         |          | ordre 1 | MUSCL | ordre 1 | MUSCL | ordre 1 | MUSCL |
| percol. | $s$      | 0.24    | 0.32  | 0.53    | 0.53  | 0.75    | 0.92  |
|         | $u$      | 0.32    | 0.39  | 0.54    | 0.54  | 0.83    | 0.92  |
|         | $sc$     | 0.24    | 0.32  | –       | –     | 0.76    | 0.92  |

TABLE 6.6 – Ordres de convergence du schéma de relaxation dans les ondes simples.

**Loi d'IPV constant.** Comparé au schéma décentré, le schéma de relaxation est très sophistiqué. Basé sur un modèle d'approximation inconditionnellement hyperbolique, il est doté de nombreuses propriétés théoriques favorables. Nous venons de montrer sa convergence numérique vers la solution exacte des problèmes de Riemann associés à un système faiblement hyperbolique. Le schéma de relaxation peut donc être utilisé comme une « référence » pour savoir si, pour des systèmes exhibant des zones d'ellipticité, les singularités observées lors des simulations avec le schéma décentré sont dues au modèle physique ou à un défaut du schéma.

La première interrogation est de savoir si le schéma de relaxation fait apparaître un phénomène de concentration locale ressemblant à un  $\delta$ -choc dans le profil de fraction massique de polymère pour des écoulements modélisés par la loi d'IPV constant. La Figure

6.6 montre que c'est le cas : le schéma de relaxation trouve aussi un pic de fraction massique du polymère pour le problème de Riemann avec données initiales (6.85). Une fois rassurés sur la qualité du schéma décentré, nous produirons des résultats numériques plus exhaustifs au chapitre suivant.

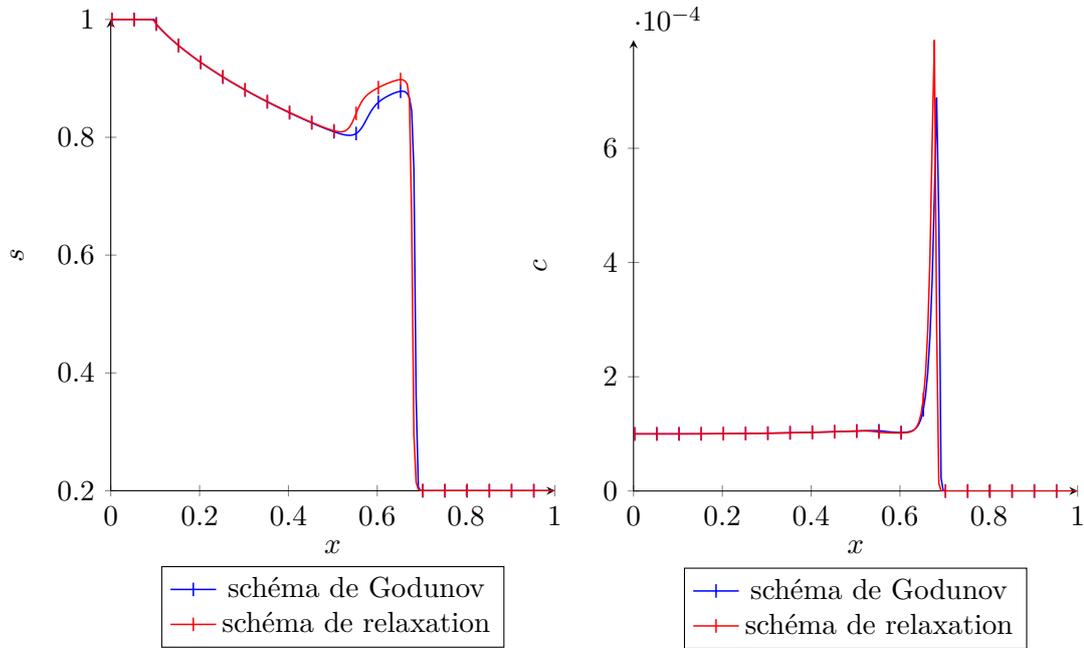


FIGURE 6.6 – IPV constant : profil de la saturation  $s$  (gauche) et de la fraction massique  $c$  (droite) pour le schéma de relaxation obtenu avec  $\gamma \equiv 1.5$ ,  $s_{\bullet} = 0.05$ ,  $s_b = 0.1$ ,  $\mathbf{v}_L = (1, 10^{-4})$ ,  $\mathbf{v}_R = (0.2, 0)$  et 200 cellules.

Jusqu'ici les paramètres utilisés pour les simulations sont choisis sans aucune base expérimentale. Dans le chapitre suivant, on s'appuie sur des valeurs observables expérimentalement pour fixer les paramètres des différentes lois. Une fois ces paramètres choisis, les différentes simulations numériques sont faites pour déterminer si l'une des lois d'IPV présentées serait mieux adaptée que d'autres aux simulations d'écoulement du polymère dans les réservoirs pétroliers.



## Chapitre 7

# Paramétrage des lois d'IPV et simulations numériques

### Sommaire

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>7.1 Paramétrage des loi d'IPV en diphasique miscible</b>                     | <b>134</b> |
| 7.1.1 Description des techniques expérimentales de mesure d'IPV                 | 134        |
| 7.1.2 Modèle mathématique pour deux phases miscibles                            | 137        |
| 7.1.3 Lois d'IPV pour deux phases miscibles                                     | 138        |
| 7.1.4 Simulation numérique des données expérimentales                           | 140        |
| <b>7.2 Paramétrage et simulations en diphasique pour <math>s_b = 0.2</math></b> | <b>144</b> |
| 7.2.1 Paramétrage des lois  | 144        |
| 7.2.2 Simulation diphasique des données expérimentales                          | 149        |
| 7.2.3 Simulation d'une extraction d'huile                                       | 149        |
| <b>7.3 Paramétrage et simulations en diphasique pour <math>s_b = 0.1</math></b> | <b>152</b> |
| 7.3.1 Paramétrage des lois  | 152        |
| 7.3.2 Simulation d'une extraction d'huile                                       | 153        |
| <b>7.4 Synthèse sur le paramétrage des lois et les simulations</b>              | <b>158</b> |

---

*Le but de ce chapitre est de tester et confronter les lois d'IPV décrite au chapitre §5. Nous commençons par paramétrer ces lois d'IPV à partir de données expérimentales. Les seules données à notre disposition ont été obtenues avec un écoulement monophasique. Nous réduisons notre modèle pour un écoulement diphasique miscible afin de pouvoir modéliser cet écoulement monophasique. Sous cette hypothèse, les différentes lois d'IPV sont étudiées mathématiquement et certaines sont paramétrées. Des simulations sont réalisées pour reproduire l'expérience. Étant donné que la plupart des lois d'IPV ne sont pas hyperboliques, nous utilisons exclusivement le schéma de relaxation.*

*Ensuite, nous considérons un écoulement diphasique non-miscible eau/huile et des données pétrophysiques de roche classique. Pour le paramétrage des lois d'IPV, nous supposons que la saturation d'huile résiduelle est nulle afin de pouvoir être consistant avec les données expérimentales monophasiques. Les paramétrages sont réalisés pour deux valeurs courantes de saturation irréductible d'eau. Nous montrons qu'il n'est pas toujours possible de paramétrer certaines lois. Des simulations de l'extraction d'huile d'une carotte par injection d'eau et de polymère sont réalisées en utilisant le schéma de relaxation. Les résultats obtenus avec les différentes lois d'IPV sont discutés.*

## 7.1 Paramétrage des loi d'IPV en diphasique miscible

Le but de cette section est de déterminer les paramètres des lois d'IPV précédemment introduites dans le chapitre §5 en utilisant des résultats expérimentaux publiés. En l'absence, à notre connaissance, de résultats expérimentaux de mesure de l'accélération du polymère dans un contexte diphasique eau/huile avec des données complètes (perméabilités relatives, saturation d'eau irréductible, saturation d'huile résiduelle), nous proposons d'utiliser des résultats obtenus pour un écoulement monophasique. Les expériences concernées consistent à injecter, avec un débit constant, une eau contenant du polymère et du sel (jouant le rôle de traceur) dans une carotte contenant une eau « pure ». En analysant les concentrations de polymère et de sel à la sortie de la carotte au cours du temps, il est possible d'observer une percée précoce du polymère par rapport au sel. En effet, comme le sel est une molécule de petite taille, il accède à tout le volume poreux et se déplace donc à la vitesse de la phase eau : il n'est pas accéléré comme le polymère. Ainsi, en mesurant l'écart entre les temps de percée du polymère et le temps de percée du sel, il est possible de déduire l'IPV.

Après un bref rappel sur les techniques expérimentales de mesure d'IPV, nous montrons qu'il n'est pas aisé d'effectuer le « calage » d'IPV même en monophasique. Le paramétrage de certaines lois d'IPV décrites dans le chapitre §5 n'est pas possible dans un contexte monophasique. Dans le cadre de cette thèse, nous souhaitons tout de même paramétrer les lois décrites dans le chapitre §5. Nous proposons de modéliser cet écoulement monophasique à l'aide d'un modèle d'écoulement diphasique miscible, pratique courante en ingénierie réservoir. Nous étudions notre modèle mathématique et les différentes loi d'IPV. Dans ce contexte, nous verrons que la loi de percolation n'est pas définie et que la loi uniforme et non uniforme ne permettent pas de reproduire l'accélération du polymère. Seules les lois d'IPV constant et de dérive maximale linéaire seront paramétrées. Nous simulons les données expérimentales avec ces deux lois et comparons aux résultats expérimentaux de fractions massiques de polymère et de sel.

### 7.1.1 Description des techniques expérimentales de mesure d'IPV

Les données expérimentales requièrent de nombreux essais de laboratoire qui peuvent être très complexes et coûteux : ceci explique l'absence d'expérience de mesure d'IPV en diphasique. Pour estimer l'IPV d'un échantillon rocheux, la procédure « minimaliste » se déroule en deux étapes : le calcul de la porosité d'une part, et l'injection des fluides et l'interprétation des données observées à la sortie d'autre part.

**Calcul de la porosité.** Il existe diverses méthodes permettant de déterminer la porosité d'une roche. Certaines d'entre elles sont énumérées dans [82] et chacune d'elles fournit une caractérisation partielle de la porosité de la roche. Certaines méthodes sont basées sur l'imagerie [10, 44, 64, 77], notamment le balayage à l'aide d'un scanner. L'utilisation d'un scanner permet de mesurer la porosité de la roche et d'observer la répartition des pores comme le montre la Figure 7.1 ci-dessous.

Une autre méthode consiste à injecter un fluide dans la roche préalablement *vidée et séchée* [43, 104]. Cette technique est applicable à d'autres types de milieux poreux, notamment le bois [108]. La principale condition à satisfaire est celle d'injecter une phase non mouillante, généralement du mercure (on parle de porosité mercure) dans le milieu

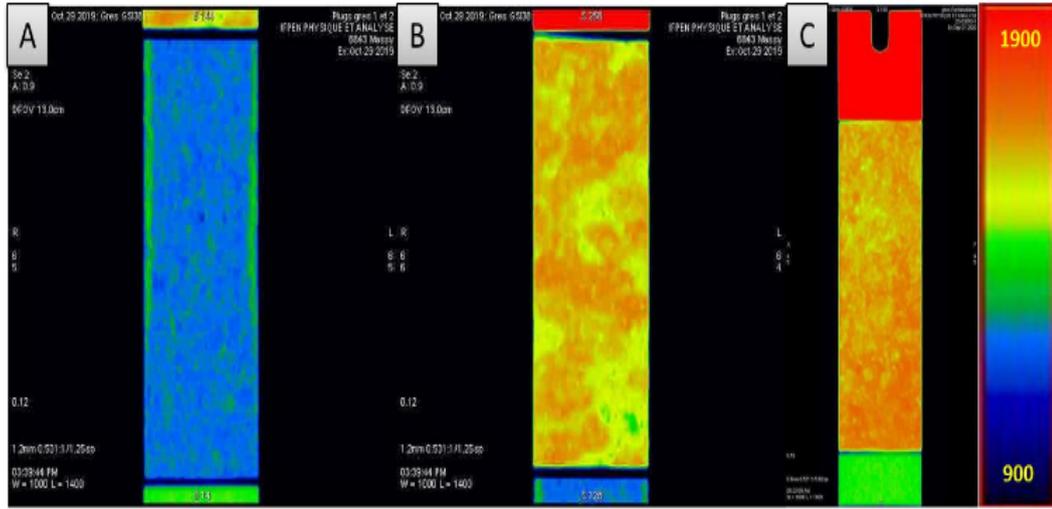


FIGURE 7.1 – Images obtenues par scanner [43] pour trois échantillons de roche (A),(B) et (C). La roche (A) est la plus homogène des trois et présente une porosité de 23%. La roche (B) a une porosité qui varie de 10.5% à 12.5%. La roche (C) a une porosité qui varie de 8.7% à 11%.

poreux. Le volume poreux correspond au volume du fluide que peut contenir la roche. Cette dernière méthode ne renseigne pas sur la répartition des pores dans la roche.

**Injection du fluide et observations à la sortie de la carotte.** Une fois la porosité connue, on sature tout d'abord le milieu en eau. C'est à dire on injecte de l'eau jusqu'à ce que celle-ci remplisse tous les pores de la roche. Ensuite cette eau présente dans la roche est poussée en injectant une solution d'eau contenant du polymère et du sel à une extrémité tout en enregistrant les données observées à la sortie. Les données de sortie sont généralement représentées en fonction du volume poreux (PV) – par exemple, pour une roche de  $20\text{cm}^3$  et ayant une porosité de 24%, on a  $1\text{PV} = 4.8\text{cm}^3$  – injecté à un moment donné (voir Figure 7.2).

Les résultats représentés à la Figure 7.2 sont obtenus en injectant dans un premier temps une quantité égale à  $1\text{PV}$  d'une solution d'eau contenant du polymère et du sel, ensuite on injecte une solution d'eau ne contenant ni sel ni polymère.

Comme mentionné au chapitre §2, l'IPV modélise le rapport de vitesse entre le polymère et un traceur (ici, le sel). On observe à la Figure 7.2 que la percée du polymère est en avance par rapport à celle du sel. Ces données ont été obtenues avec une fraction massique de polymère injecté  $c_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ . Cependant les fronts de polymère et du sel ne sont pas « franc et net » du a priori, à une diffusion des produits (polymère ou sel) dans l'eau. Les ingénieurs considèrent alors que le front est localisé à  $c/c_0 = 0.5$ . La Figure 7.3 illustre le calcul de l'IPV expérimental  $\gamma_{\text{exp}}$ .

Le front de polymère est estimé en  $\text{PV}_{\text{pol}} = 0.83$  et celui du traceur en  $\text{PV}_{\text{sel}} = 1.01$ . Le polymère se déplace donc à une vitesse de  $1/0.83 = 1.20$  et le sel à une vitesse de  $1/1.01 = 0.99$ . Par conséquent on a

$$\gamma_{\text{exp}} = \frac{1/\text{PV}_{\text{pol}}}{1/\text{PV}_{\text{sel}}} = 1.21. \quad (7.1)$$

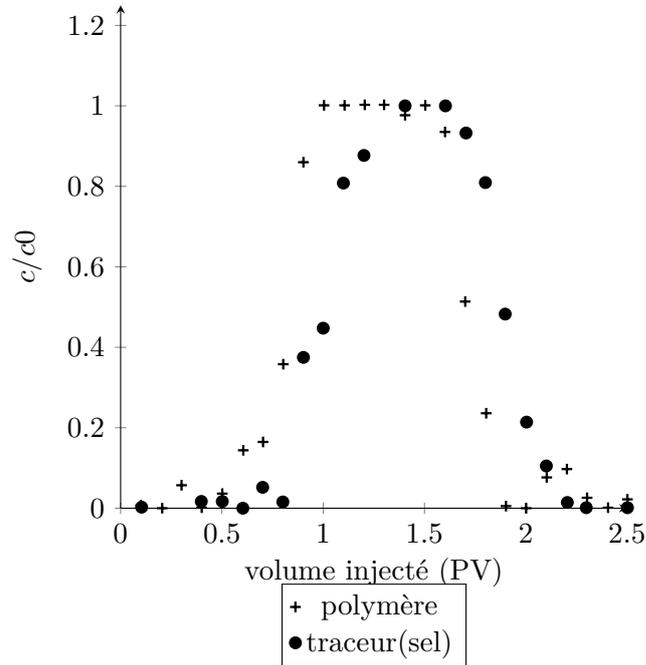


FIGURE 7.2 – Mesures expérimentales de fractions massiques normalisées de polymère et de traceur(sel) observées à la sortie d'une carotte initialement saturée en eau et dans laquelle on injecte un bouchon d'eau de 1PV contenant du polymère et du traceur(sel).

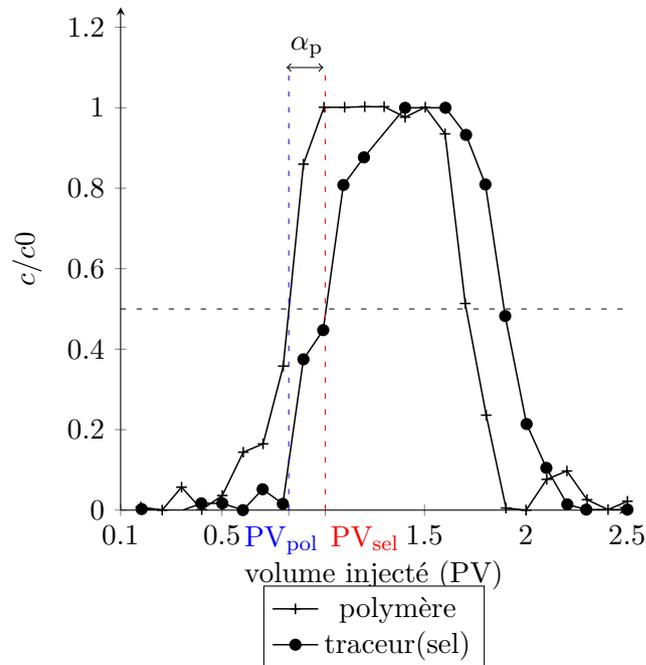


FIGURE 7.3 – Mesure du temps de retard en sortie de carotte du front de traceur(sel) par rapport au front de polymère.

Pour qu'une loi puisse être utilisée par des ingénieurs, il faut a minima qu'elle satisfasse les observations expérimentales. Il est donc capital d'observer le comportement des lois d'IPV face à ces observations faites en écoulement monophasique.

### 7.1.2 Modèle mathématique pour deux phases miscibles

Le paramétrage de certaines lois d'IPV décrites dans le chapitre §5 n'est pas possible dans un contexte monophasique. En effet, la plupart des lois nécessitent soit la saturation irréductible de l'eau  $s_b$ , soit la saturation résiduelle de l'huile  $1 - s_{\#}$ , soit les mobilités ou les perméabilités relatives des phases. Or, dans un contexte monophasique, certaines de ces grandeurs ne peuvent pas être déterminées, ou sont tout simplement dénuées de sens physique. Cela explique l'utilisation quasi exclusive de l'IPV constant par les ingénieurs réservoir : il n'y a pas de données expérimentales suffisantes pour motiver l'utilisation d'une autre loi.

En ingénierie de réservoir, il est courant d'utiliser un modèle diphasique, donc initialement prévu pour modéliser deux phases distinctes, pour modéliser un écoulement monophasique. L'écoulement monophasique est alors traité comme un écoulement diphasique dont les deux phases ont les mêmes propriétés pétrophysiques. Cela permet aux ingénieurs réservoir de pouvoir modéliser une seule phase et, parfois, de pouvoir suivre l'évolution dans le temps d'une partie du fluide. Par exemple, dans notre cas d'injection d'eau dans une carotte contenant de l'eau, il est courant de modéliser l'eau injectée et l'eau initialement présente dans la carotte comme deux phases prétendument différentes. La variable de saturation permet alors de suivre la progression de l'eau injecté dans la carotte.

Pour continuer à utiliser notre modèle diphasique dans un contexte monophasique comme le font les ingénieurs réservoirs, nous allons considérer que l'« huile » a les mêmes propriétés pétrophysiques que l'eau. Pour rester cohérent avec le reste du document, nous continuerons à indexer par  $o$  les grandeurs relatives à cette phase fictive, même s'il s'agit en réalité d'eau. Pour attribuer les mêmes propriétés pétrophysiques aux deux phases fictives, on utilise des perméabilités relatives et une pression capillaire (négligée dans notre thèse) particulières : on annule la pression capillaire et on prend des perméabilités « en croix ». Pour modéliser ces perméabilités relatives en utilisant les formules analytiques de Corey, il faut prendre les exposants de Corey  $n_w = n_o = 1$ , les maximums de perméabilité relative  $\kappa_{r,w}^{\max} = \kappa_{r,o}^{\max} = 1$  et la saturation d'eau (respectivement d'huile) irréductible (respectivement résiduelle) nulle. Ce qui se traduit par

$$s_b = 0 \quad \text{et} \quad s_{\#} = 1. \quad (7.2)$$

En utilisant ces propriétés pétrophysiques, les deux phases considérées sont alors dites *miscibles* : tous les effets de capillarité entre les phases sont annulés. Notons également que, dans ce cas, nous supposons que les densités des phases sont égales. Le modèle s'écrit donc

$$\partial_t(s) + \partial_x(f) = 0, \quad (7.3a)$$

$$\partial_t(sc) + \partial_x(\gamma cf) = 0, \quad (7.3b)$$

où l'équation (7.3a) correspond à l'équation de conservation de la phase d'« eau », l'équation (7.3b) correspond à la conservation de la masse de polymère. Le flux fractionnaire est

une fonction convexe (Figure 7.4) définie par

$$f(s, c) = \frac{s}{s + R_m(c)(1 - s)}. \quad (7.4)$$

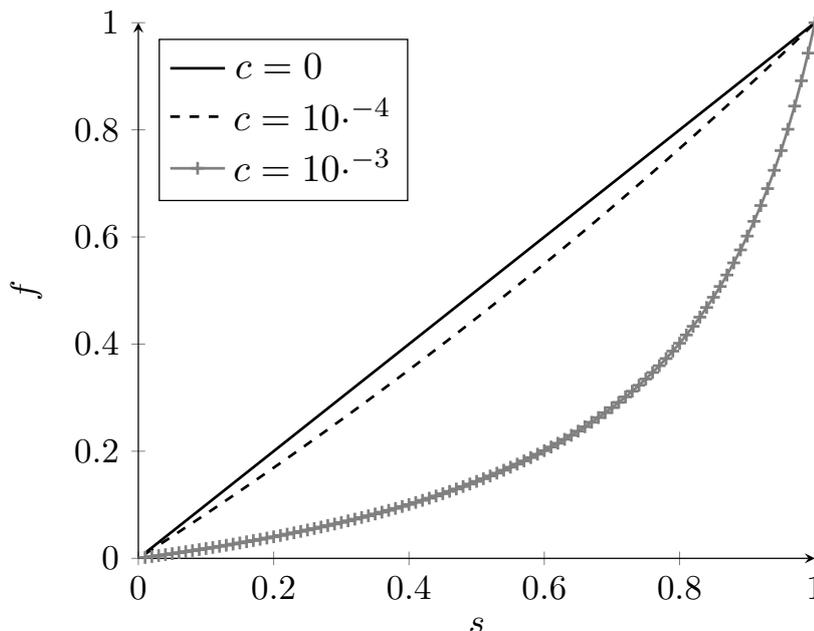


FIGURE 7.4 – Flux fractionnaire de l'eau à différentes fractions massiques de polymère pour un écoulement diphasique miscible.

REMARQUE 7.1. Le modèle (7.3) sans IPV ( $\gamma \equiv 1$ ) est faiblement hyperbolique. En variables primitives  $(s, c)$ , sa jacobienne admet deux valeurs propres réelles qui sont

$$\lambda_1 = f_s = \frac{R_m}{(s + R_m(1 - s))^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{f}{s}, \quad (7.5)$$

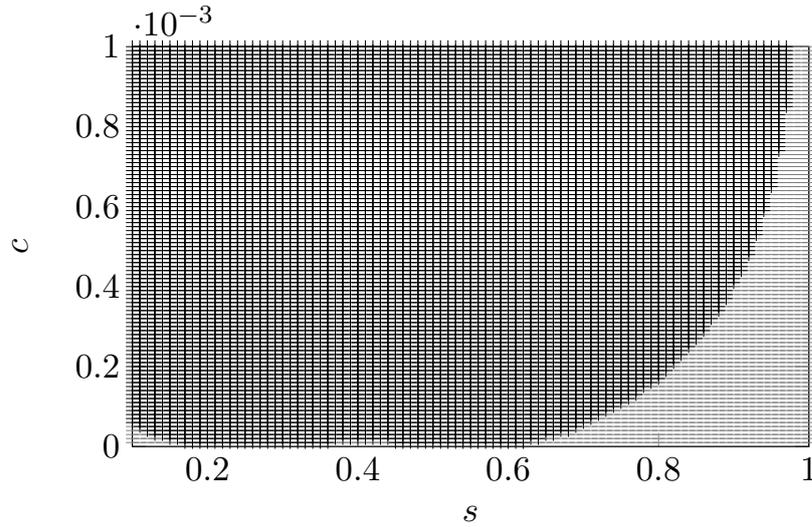
avec perte de la base de vecteurs propres lorsque  $c = 0$ .  $\square$

### 7.1.3 Lois d'IPV pour deux phases miscibles

Dans cette sous-section, nous étudions les unes après les autres, les lois d'IPV dans le cadre d'un écoulement diphasique miscible. L'étude des lois de percolation, uniforme et non-uniformes est déclinée suivant la valeur de  $s_\bullet$  :

- si  $s_\bullet < s_b$ , les lois de percolation, uniforme et non-uniforme ont la même expression analytique pour  $s \in [s_b, 1]$ . L'étude de ces trois lois sera groupée ;
- $s_\bullet > s_b$ , la loi de percolation n'est pas définie. Les lois uniformes et non-uniformes sont différentes, nous étudierons ces deux lois de manière séparées ;
- $s_\bullet = s_b$ , la loi de percolation n'est pas définie. Les lois uniforme et non-uniforme ont la même expression analytique pour  $s \in [s_b, 1]$ , leur étude sera groupée.

**Loi d'IPV constant.** La loi d'IPV constant est bien définie pour des phases miscibles puisqu'elle ne nécessite aucune des propriétés pétrophysiques propres aux phases. Pour deux phases miscibles, le modèle (7.3) associé à la loi d'IPV constant admet toujours des régions où les valeurs propres sont complexes. La Figure 7.5 représente ces régions elliptiques. Le modèle n'est donc pas hyperbolique pour cette loi d'IPV.



- zone hyperbolique + zone elliptique

FIGURE 7.5 – Zone hyperbolique et zone elliptique pour le modèle diphasique miscible avec l'IPV constant  $\gamma \equiv 1.21$  et les coefficient de réduction de mobilité  $a_1 = 2 \cdot 10^3$ ,  $a_2 = 2.8 \cdot 10^6$ ,  $a_4 = 9 \cdot 10^{19/2}$ .

**Lois de percolation, uniforme et non-uniforme avec  $s_\bullet < s_b = 0$ .** Les lois de percolation, uniforme et non-uniforme ne sont pas définies puisqu'une valeur  $s_\bullet < 0$  n'est pas physiquement admissible.

**Loi de diffusion uniforme avec  $s_\bullet > s_b = 0$ .** La loi d'IPV uniforme est donnée par

$$\gamma(s) = \frac{s}{\Lambda_w(s)} \frac{\Lambda_w(s) - \Lambda_w(s_\bullet)}{s - s_\bullet},$$

et pour des phases miscibles, elle se simplifie de la manière suivante

$$\gamma(s) \equiv 1.$$

Il est donc impossible de modéliser l'accélération du polymère avec la loi uniforme lorsque les phases sont miscibles.

**Loi de diffusion non-uniforme avec  $s_\bullet > s_b = 0$ .** La loi non-uniforme est donnée par

$$\gamma(s) = \left[ 1 - \frac{s_b}{s_\bullet} \frac{\Lambda_w(s_\bullet)}{\Lambda_w(s)} \right] \frac{s}{s - s_b}.$$

Puisque  $s_b = 0$ , la loi devient

$$\gamma(s) \equiv 1.$$

Il est donc impossible de modéliser l'accélération du polymère avec la loi non-uniforme lorsque les phases sont miscibles.

**Lois de diffusion uniforme et non-uniforme avec  $s_\bullet = s_b$ .** Pour  $s_\bullet = s_b$ , les lois uniforme et non-uniforme sont données par

$$\gamma(s) = \frac{s}{s - s_\bullet}.$$

Pour des phases miscibles, nous devons imposer que la saturation irréductible de l'eau est nulle, *i. e.*  $s_b = 0$  et ce qui contraint à imposer  $s_\bullet = 0$ . Nous en déduisons que ces lois deviennent

$$\gamma(s) \equiv 1.$$

Il est donc impossible de modéliser l'accélération du polymère avec les lois uniforme et non-uniforme lorsque les phases sont miscibles.

**Loi de dérive maximale linéaire.** On se propose de considérer la loi de dérive maximale linéaire (5.52)

$$\gamma(s) = 1 + \frac{\Xi}{f(s, c_{\max})}, \quad (7.6)$$

où  $\Xi$  est une constante à déterminer et  $c_{\max}$  est une valeur constante de fraction massique de polymère qui doit être supérieure aux valeurs de fraction massique observées dans les expériences et dans les simulations. Pour deux phases miscibles, cette loi devient

$$\gamma(s) = 1 + \Xi \left\{ 1 + R_m(c_{\max}) \left[ \frac{1}{s} - 1 \right] \right\}. \quad (7.7)$$

Cette loi permet de modéliser l'accélération du polymère, en prenant  $\Xi = \gamma_{\text{exp}} - 1$  par exemple, on retrouve  $\gamma(s = 1) = \gamma_{\text{exp}}$ . D'après l'étude faite en §1.3.3, nous savons que cette loi rend le modèle hyperbolique pour  $c \in [0, c_{\max}]$ .

De toutes les lois étudiées dans ce document, seules les lois d'IPV constant et de dérive maximale linéaire nous permettent de reproduire une accélération du polymère en écoulement diphasique miscible.

#### 7.1.4 Simulation numérique des données expérimentales

Les expériences à reproduire consistent à injecter, avec un débit constant, une eau contenant du polymère et du sel dans une carotte contenant une eau « pure ». En analysant les concentrations de polymère et de sel à la sortie de la carotte au cours du temps, il est possible d'observer une percée précoce du polymère par rapport au sel. En effet, comme le sel est une molécule de petite taille, il accède à tous le volume poreux et se déplace donc à la vitesse de la phase eau : il n'est pas accéléré comme le polymère. Ainsi, en mesurant l'écart entre le temps de percée du polymère et le temps de percée du sel, il est possible de déduire l'IPV.

Pour simuler cette expérience, nous avons adimensionné le système. Nous considérons que le domaine de simulation est de longueur  $L = 1$  et est discrétisé à l'aide de 200

mailles. Dans la carotte, nous injectons de l'eau contenant du polymère et du sel. Nous noterons  $c_{\text{sel}}$  la fraction massique de sel. Le sel n'est pas traité dans les modèles exposés dans ce document. Nous utilisons un modèle comportant une équation supplémentaire pour l'advection du sel dans la phase eau ; nous supposons que le sel n'a pas d'effet sur l'écoulement. Le modèle utilisé est détaillé dans l'annexe §A. Nous supposons que le fluide est injecté à la vitesse totale  $u_{\text{Tot}} = 1$ . Ainsi l'équivalent d'un volume poreux (IPV temps adimensionné en ingénierie pétrolière) est injecté en une durée  $T = 1$ . Les résultats expérimentaux étant données à l'aide de ce temps adimensionnel (PV), nous pouvons directement les confronter à nos résultats numériques.

Dans la carotte, nous considérons la donnée initiale homogène

$$(s, c, c_{\text{sel}})(x, t = 0) = (1, 0, 0), \quad x \in [0, 1]. \quad (7.8)$$

À gauche du domaine, nous considérons la condition limite de Dirichlet

$$(s, c, c_{\text{sel}})(x < 0, t) = \begin{cases} (1, 2 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}) & \text{si } t \in [0, T[, \\ (1, 0, 0) & \text{si } t \geq T, \end{cases} \quad (7.9)$$

qui correspond à l'injection de l'eau chargée en sel et en polymère à un débit constant à travers cette face de la carotte suivie d'une injection d'eau de chasse (sans sel ni polymère). À droite du domaine, pour  $x > 1$ , nous considérons une condition limite de Neumann homogène qui permet de modéliser une sortie libre à cette face. À la frontière  $x = 1$ , nous récupérerons les données de saturation et de fractions massiques de polymère et de sel afin de les comparer aux résultats expérimentaux en sortie de carotte.

D'un point de vue mathématique, ce modèle de simulation est équivalent au problème de Riemann avec la condition initiale (en omettant le sel) donnée en variables primitives

$$(s, c)(x, t = 0) = \begin{cases} (s_L, c_L) = (1, 2 \cdot 10^{-3}) & \text{si } x < 0, \\ (s_R, c_R) = (1, 0) & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (7.10)$$

Pour ce problème de Riemann, les saturations sont égales de part et d'autre de l'interface,  $s_L = s_R = 1$ , et de ce fait les flux fractionnaires à gauche et à droite de l'interface sont égaux également  $f_L = f_R = 1$ . En effet, pour  $s = 1$  le flux fractionnaire ne dépend pas de la fraction massique de polymère et vaut toujours 1, d'après la formule (7.4). La solution physique du problème de Riemann satisfera  $s(x, t) = 1$ . La fraction massique de polymère est solution du problème de Riemann

$$\partial_t c + \partial_x \gamma(s = 1, c)c = 0, \quad (7.11a)$$

$$c(x, t = 0) = \begin{cases} c_L & \text{si } x \leq 0, \\ c_R & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (7.11b)$$

Les lois d'IPV énumérées dans le chapitre §5 dépendent uniquement de la saturation en eau  $s$ . Par conséquent, le problème (7.11) ci-dessus associé aux lois connues est un problème de transport linéaire de la fraction massique  $c$ . En d'autres termes, pour reproduire le front de polymère de la Figure 7.3, ces lois d'IPV doivent vérifier

$$\gamma(1) = \gamma_{\text{exp}}. \quad (7.12)$$

**Loi d'IPV constant.** Pour reproduire le front de polymère avec la loi d'IPV constant, il faut imposer  $\gamma(1) = \gamma_{\text{exp}}$ . Or par hypothèse  $\gamma$  est constante. On a donc

$$\gamma = 1.21. \quad (7.13)$$

**Loi de dérive maximale linéaire.** Pour reproduire le front de polymère avec la loi de dérive maximale linéaire, il faut imposer  $\gamma(1) = \gamma_{\text{exp}}$ . Avec l'expression de la loi donnée en (5.52), il suffit de prendre  $\Xi = \gamma_{\text{exp}} - 1$ . On obtient donc l'expression

$$\gamma(s) = 1 + 0.21 \left\{ 1 + R_m(c_{\text{max}}) \left[ \frac{1}{s} - 1 \right] \right\}. \quad (7.14)$$

Les lois d'IPV constant et de dérive maximale linéaire paramétrées pour deux phases miscibles sont représentées sur la Figure 7.6. La loi d'IPV constant prend la valeur constante  $\gamma_{\text{exp}}$  sur tout le domaine et la loi de dérive maximale linéaire, représentée avec  $c_{\text{max}} = 3 \cdot 10^{-3}$ , est décroissante et vaut  $\gamma_{\text{exp}}$  en  $s = 1$ .

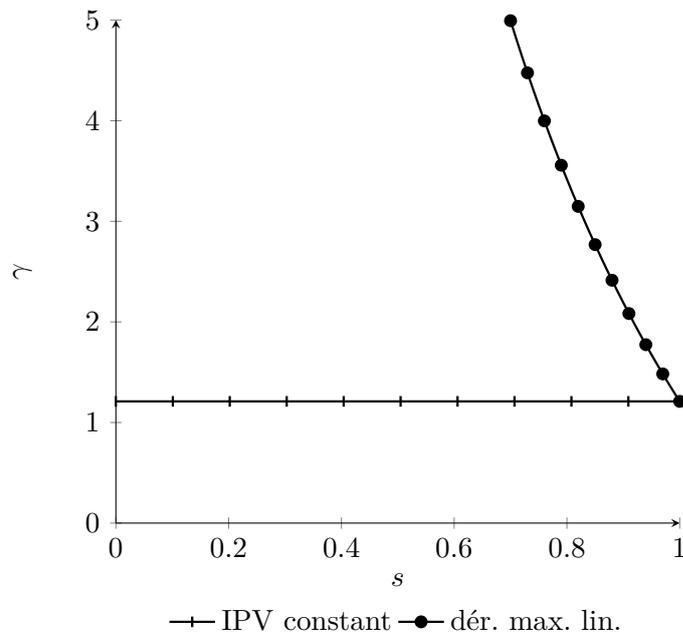


FIGURE 7.6 – Loi d'IPV constant et de dérive maximale linéaire (dér. max. lin.) paramétrées pour des phases miscibles et une accélération du polymère caractérisée par  $\gamma_{\text{exp}} = 1.21$ .

La Figure 7.7 présente les résultats de sortie de carotte pour un maillage constitué de 200 cellules. Les courbes de fraction massique de polymère obtenus avec les deux lois sont confondues. Pour obtenir ces résultats, nous avons considéré (voir sous-section §7.1.1) que le front est localisé à  $c/c_0 = 0.5$ . Cette règle tacite est utilisée par les ingénieurs réservoirs pour calculer expérimentalement la valeur de l'IPV. Cependant on observe sur la Figure 7.7 que notre modèle produit des fronts (avant et arrière) plus raides que ceux des données expérimentales. Ces différences peuvent être expliquées par l'absence de certains phénomènes physiques dans notre modèle. Entre autres phénomènes, on peut citer :

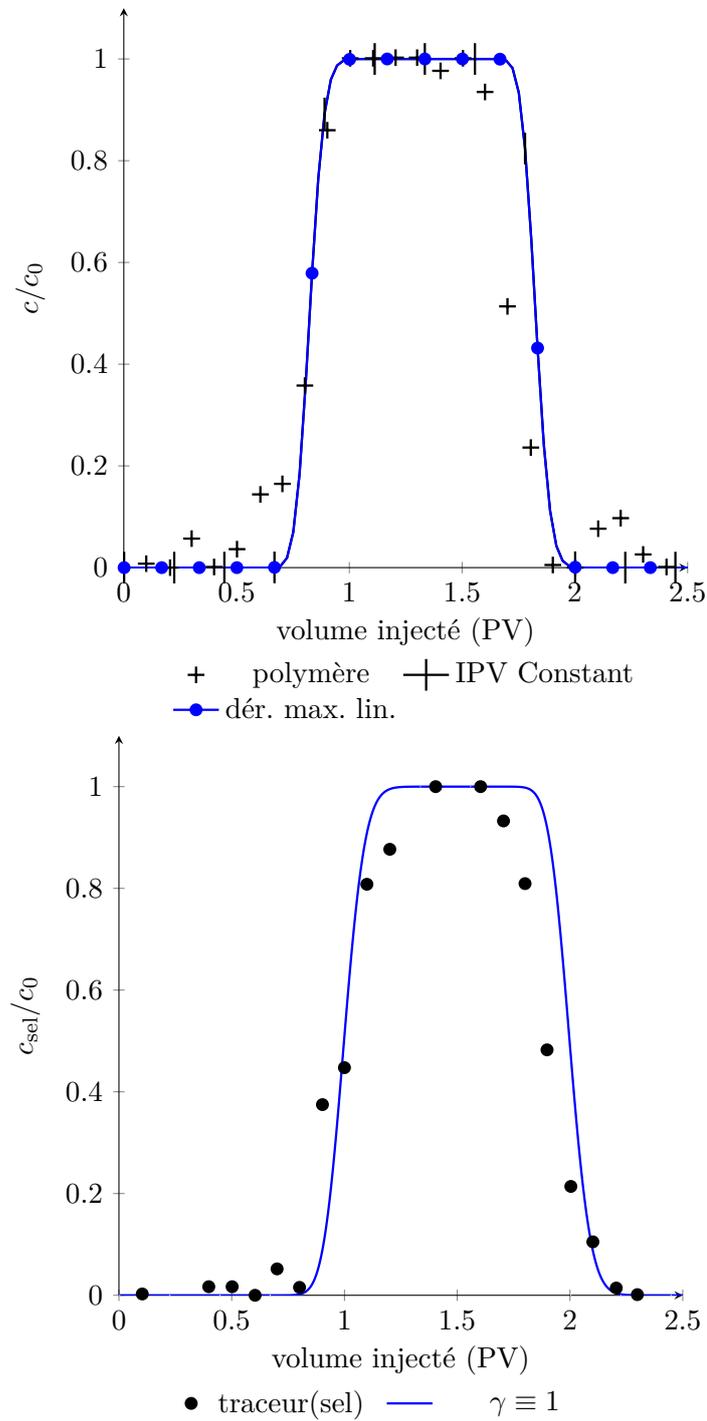


FIGURE 7.7 – Fractions massiques normalisées de polymère (haut) et de sel (bas) en sortie de carotte obtenues expérimentalement et par simulations numériques. Les simulations numériques sont réalisées avec les lois d'IPV constant et de dérive maximale linéaire.

- ▷ *Diffusion du polymère.* Elle caractérise l'échange de molécules de polymère qui a lieu spontanément entre deux masses d'eau possédant des fractions massiques de polymère différentes afin d'uniformiser ces fractions massiques. Afin de pouvoir mesurer les fractions massiques en sortie de carotte, l'expérience est réalisée à faible débit. Ceci explique la diffusion importante observée dans les résultats.
- ▷ *Hétérogénéité de la porosité.* Dans la construction de notre modèle, l'hypothèse d'une porosité constante a été émise. D'un point de vue expérimental, la carotte parmi les plus homogènes en porosité et en perméabilité a été choisie. Malgré tout, cette carotte ne sera pas parfaitement homogène et cette faible hétérogénéité peut amener à des fronts de polymères légèrement diffus.

L'impact des deux phénomènes sus-cités est grandissant avec la taille du domaine et la durée d'écoulement. En faisant abstraction de ce manque de raideur du front expérimentale, les lois d'IPV constant et de dérive maximale linéaire approchent bien le front avant de polymère observé en laboratoire. La valeur approchée du facteur d'accélération  $\gamma$  est  $\gamma_{\text{sim}} = 1.209$ . Comparée à  $\gamma_{\text{exp}} = 1.21$ , nous pouvons dire que notre paramétrage est habile.

## 7.2 Paramétrage et simulations en diphasique pour $s_b = 0.2$

### 7.2.1 Paramétrage des lois

Dans la section précédente, nous avons montré que les lois de percolation, uniforme et non-uniforme ne peuvent pas reproduire les données expérimentales obtenues avec un écoulement monophasique. Seules les lois d'IPV constant et de dérive maximale linéaire permettent de reproduire ces données. Notre objectif étant d'analyser et de comparer le comportement des différentes lois d'IPV décrites dans le chapitre §5 en respectant au mieux la physique, nous allons considérer un écoulement diphasique dans un type de roche donnée (les perméabilités relatives et les points limites seront fixés a priori) et nous tenterons de paramétrer nos lois d'IPV de manière à ce qu'elles soient consistantes avec les données expérimentales monophasiques.

Notre étude commence donc par le choix d'une roche et donc par le choix de propriétés pétrophysiques. Nous considérons un modèle de roche couramment utilisé en ingénierie réservoir. Nous utilisons les lois analytiques de Corey (2.6) pour les perméabilités relatives avec les exposants  $n_w = n_o = 2$ . Nous supposons également que les perméabilités relatives maximales sont  $\kappa_{r,o}^{\max} = \kappa_{r,w}^{\max} = 1$  et que l'eau et l'huile ont la même viscosité  $\mu_w = \mu_o = 1$ . Afin de pouvoir imposer facilement une relation de compatibilité à nos lois diphasiques et nos données monophasiques, nous imposerons  $s_{\#} = 1$ . Même si ce choix peut paraître arbitraire, il se justifie en ingénierie réservoir car les courbes de perméabilités relatives sont habituellement extrapolées linéairement en dehors de leur point limite (le  $\kappa_{r,w}$  est prolongé linéairement sur  $[s_{\#}, 1]$  de manière à avoir  $\kappa_{r,w}(s_{\#}) = \kappa_{r,w}^{\max}$  et  $\kappa_{r,w}(1) = 1$  et le  $\kappa_{r,o}$  est prolongé linéairement sur  $[0, s_b]$  de manière à avoir  $\kappa_{r,o}(0) = 1$  et  $\kappa_{r,o}(s_b) = \kappa_{r,o}^{\max}$ ). Concernant la saturation irréductible, nous supposons  $s_b = 0.2$ .

La méthodologie pour assurer la compatibilité de nos lois diphasiques avec les données expérimentales monophasiques est la suivante : nous proposons de reproduire les résultats monophasiques avec notre modèle diphasique. Il faudra donc paramétrer les lois d'IPV en diphasique, et plus précisément déterminer le paramètre  $s_{\bullet}$ . Pour cela, considérons le

problème de Riemann pour  $\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}) = 0$  avec la donnée initiale

$$(s, c)(x, t = 0) = \begin{cases} (1, c_L) & \text{si } x \leq 0, \\ (1, c_R) & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (7.15)$$

Tout comme pour le modèle monophasique, la solution physique de ce problème vérifie  $s(x, t) = 1$  (indépendamment de  $s_b$  et  $s_\bullet$ ) et la fraction massique de polymère est une solution du problème de Riemann

$$\partial_t c + \partial_x \gamma(s = 1, c) c = 0, \quad (7.16a)$$

$$c(x, t = 0) = \begin{cases} c_L & \text{si } x \leq 0, \\ c_R & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (7.16b)$$

On retrouve la conclusion (7.11) faite dans le cas monophasique, à la différence que cette fois la fonction  $\gamma$  dépend de  $s_b$  et/ou  $s_\bullet$ . En particulier, nous proposons de chercher des valeurs de  $s_\bullet$  pour les lois de percolation, uniforme et non-uniforme de manière à avoir

$$\gamma(1) = \gamma_{\text{exp}}. \quad (7.17)$$

Le paramétrage des lois de percolation, uniforme et non-uniformes est décliné suivant la valeur de  $s_\bullet$ . Lorsque nous cherchons

- $s_\bullet < s_b$ , les lois de percolation, uniforme et non-uniforme ont la même expression analytique pour  $s \in [s_b, 1]$ . Le paramétrage s'effectue de la même manière pour ces trois lois ;
- $s_\bullet > s_b$ , la loi de percolation n'est pas définie. Les lois uniformes et non-uniformes sont différentes. Nous paramétrons ces deux lois de manière séparées ;
- $s_\bullet = s_b$ , la loi de percolation n'est pas définie et les lois uniforme et non-uniforme ont la même expression analytique pour  $s \in [s_b, 1]$ . Le paramétrage sera le même pour ces deux lois.

**IPV constant.** Comme la loi d'IPV constant ne dépend pas des perméabilités relatives et de leur points limites pour la roche considérée, le paramétrage de cette loi est identique au cas monophasique traité dans la section précédente. On trouve facilement

$$\gamma = \gamma_{\text{exp}}. \quad (7.18)$$

**Lois de percolation, uniforme et non-uniforme avec  $s_\bullet < s_b$ .** Lorsque  $s > s_b$ , les lois sont définie par

$$\gamma = \frac{s}{s - s_\bullet}. \quad (7.19)$$

En imposant  $\gamma(1) = \gamma_{\text{exp}}$ , on détermine analytiquement l'unique valeur  $s_\bullet = (\gamma_{\text{exp}} - 1)/\gamma_{\text{exp}}$ . Cette valeur n'est potentiellement pas admissible puisqu'elle peut être en contradiction avec notre hypothèse  $s_\bullet < s_b$ . En effet, comme la fonction

$$[1, +\infty) \ni \gamma_{\text{exp}} \mapsto s_\bullet = \frac{\gamma_{\text{exp}} - 1}{\gamma_{\text{exp}}} \in [0, 1)$$

est strictement croissante, on montre que pour notre valeur de saturation irréductible d'eau  $s_b = 0.2$ , il sera impossible de paramétrer la loi de percolation si l'IPV expérimental excède  $\gamma_{\text{exp}}^{\text{limite}} = 1.25$ . Dans notre cas  $\gamma_{\text{exp}} = 1.21$ , nous pouvons paramétrer la loi en prenant  $s_\bullet = 0.173$ .

**Loi de diffusion uniforme avec  $s_{\bullet} > s_b$ .** Pour la loi uniforme et lorsque  $s_{\bullet} > s_b$ ,  $s_{\bullet}$  doit satisfaire l'équation

$$\frac{1 - \Lambda_w(s_{\bullet})}{1 - s_{\bullet}} = \gamma_{\text{exp}}. \quad (7.20)$$

Pour nos paramètres de perméabilités relatives, la fonction

$$(s_b, 1) \ni s_{\bullet} \mapsto \frac{1 - \Lambda_w(s_{\bullet})}{1 - s_{\bullet}} \in \left( \frac{1}{1 - s_b}, \frac{2}{1 - s_b} \right)$$

est une fonction continue, strictement croissante et bijective (voir la Figure 7.8). La croissance stricte de cette fonction assure l'unicité de la solution. L'existence d'une solution dépend de la valeur de  $s_b$ . Dans notre cas, pour  $s_b = 0.2$ , il n'est pas possible de trouver une solution à l'équation (7.20). La loi uniforme ne peut être appliquée.

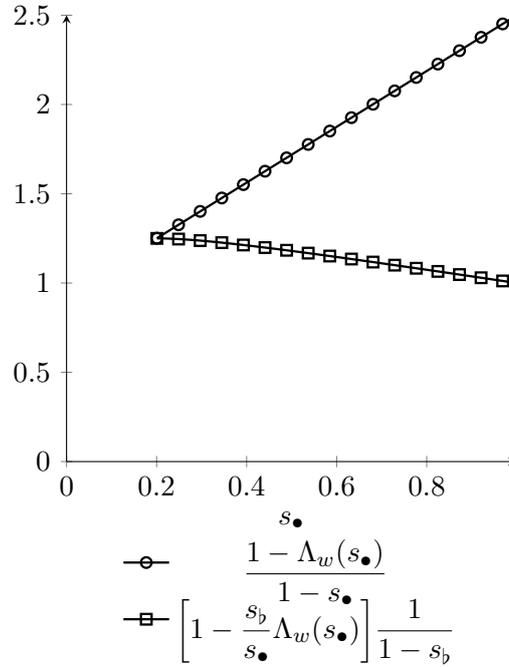


FIGURE 7.8 – Courbes des fonctions  $s_{\bullet} \mapsto \frac{1 - \Lambda_w(s_{\bullet})}{1 - s_{\bullet}}$  et  $s_{\bullet} \mapsto \left[ 1 - \frac{s_b}{s_{\bullet}} \Lambda_w(s_{\bullet}) \right] \frac{1}{1 - s_b}$  avec  $s_b = 0.2$  et les exposant de Corey  $n_o = n_w = 2$ .

**Loi de diffusion non-uniforme avec  $s_{\bullet} > s_b$ .** Pour la loi non-uniforme et lorsque  $s_{\bullet} > s_b$ ,  $s_{\bullet}$  doit satisfaire l'équation

$$\left[ 1 - \frac{s_b}{s_{\bullet}} \Lambda_w(s_{\bullet}) \right] \frac{1}{1 - s_b} = \gamma_{\text{exp}}. \quad (7.21)$$

Pour nos paramètres de perméabilités relatives, la fonction

$$(s_b, 1] \ni s_{\bullet} \mapsto \left[ 1 - \frac{s_b}{s_{\bullet}} \Lambda_w(s_{\bullet}) \right] \frac{1}{1 - s_b} \in \left( 1, \frac{1}{1 - s_b} \right]$$

est une fonction continue, strictement décroissante et bijective (voir la Figure 7.8). La stricte monotonie assure l'unicité de la solution. L'existence d'une solution dépend de la valeur de  $s_b$ . Dans notre cas, pour  $s_b = 0.2$ , on trouve la valeur  $s_\bullet = 0.4$ .

**Lois de diffusion uniforme et non-uniforme avec  $s_\bullet = s_b$ .** Ce cas très particulier ne peut être considéré que si la saturation irréductible  $s_b$  et la mesure expérimentale  $\gamma_{\text{exp}}$  vérifient la relation

$$\gamma_{\text{exp}} = \frac{1}{1 - s_b}. \quad (7.22)$$

Dans notre cas ( $s_b = 0.2$ ), nous avons  $1/(1 - s_b) = 1.25 \neq \gamma_{\text{exp}} = 1.21$ . Le paramétrage  $s_\bullet = s_b$  ne convient pas.

**Loi de dérive maximale linéaire.** La loi de dérive maximale linéaire est donnée par (5.52). Le paramétrage de cette loi est identique au paramétrage effectué pour des fluides miscibles réalisés dans la sous-section précédente. Nous trouvons  $\Xi = \gamma_{\text{exp}} - 1$ .

REMARQUE 7.2. Sous l'hypothèse  $s_\bullet > s_b$ , les fonctions à inverser pour les lois uniforme (7.20) et non-uniforme (7.21) ont des images disjointes ; il ne sera pas possible de paramétrer ces deux lois à la fois pour une accélération du polymère et une saturation irréductible données.  $\square$

REMARQUE 7.3. Physiquement,  $s_\bullet$  représente la saturation d'eau minimale au-delà de laquelle le polymère peut circuler dans les pores, pour les lois de percolation, uniforme et non-uniforme. La valeur de  $s_\bullet$  est donc unique pour une roche donnée. Or dans notre cas, nous avons réussi à paramétrer la loi de percolation et la loi non-uniforme avec des valeurs de  $s_\bullet$  différentes. En réalité, seul l'un de ces deux paramétrages devrait être retenu mais les données expérimentales dont nous disposons sont insuffisantes et ne permettent pas de les discriminer.  $\square$

La Table 7.1 synthétise le travail de paramétrage des lois d'IPV effectué dans cette section. Les différentes lois d'IPV avec les données de cette Table sont représentées dans la Figure 7.9. Comme on pouvait s'y attendre, toutes les courbes se coupent en  $s = 1$ .

- La loi non-uniforme est constante et égale à 1 sur  $[0.2, 0.4]$  et prend des valeurs supérieures à 1 sur le reste du domaine. Par conséquent ; avec cette loi on devrait observer une accélération du polymère pour des saturations d'eau supérieures à 0.4. Comparativement aux loi de percolation et dérive maximale linéaire, la loi non-uniforme est majorée par une valeur relativement faible.
- La loi de percolation est strictement décroissante sur  $[s_b, 1]$  et reste finie sur cet intervalle. Elle modélise donc de fortes accélérations du polymère au voisinage de la saturation en eau irréductible. Notons que malgré ces fortes valeurs, la quantité  $\gamma c f$  est nulle en  $s_b$ .
- La loi de dérive maximale linéaire est décroissante avec la saturation en eau. Sa décroissance est beaucoup plus forte que celle de la loi de percolation. La loi de dérive maximale linéaire tend vers l'infini au voisinage de  $s_b$ , cependant nous avons

$$\lim_{s \rightarrow s_b} (\gamma - 1) c f = \frac{c R_m(c_{\text{max}})}{R_m(c)}, \quad (7.23)$$

ce qui nous permet d'affirmer que le modèle reste bien défini au voisinage de  $s_b$  malgré les valeurs infinies de  $\gamma$ .

| Paramétrage des lois d'IPV avec $s_b = 0.2$ et $\gamma_{\text{exp}} = 1.21$ |  |  |   |
|---|--|--|---|
| Loi d'IPV   | expression sur $[\max(s_\bullet, s_b), 1]$ | paramètres   | valeurs   |
| constant  | $\gamma = \text{const.}$                   | $\gamma = \gamma_{\text{exp}}$   | $\gamma = 1.21$   |
| $s_\bullet < s_b$   | percolation                                | $\frac{s}{s - s_\bullet}$  | $s_\bullet = \frac{\gamma_{\text{exp}} - 1}{\gamma_{\text{exp}}}$ |
|   | uniforme                                   |  |   |
|   | non-uniforme                               |  |   |
| $s_\bullet > s_b$   | percolation                                | pas définie  | -   |
|   | uniforme                                   | $\frac{s}{\Lambda_w(s)} \frac{\Lambda_w(s) - \Lambda_w(s_\bullet)}{s - s_\bullet}$                   | $s_\bullet$ : résoudre (7.20)                                     |
|   | non-uniforme                               | $\left[1 - \frac{s_b}{s_\bullet} \frac{\Lambda_w(s_\bullet)}{\Lambda_w(s)}\right] \frac{s}{s - s_b}$ | $s_\bullet$ : résoudre (7.21)                                     |
| $s_\bullet = s_b$   | percolation                                | pas définie  | -   |
|   | uniforme                                   | $\frac{s}{s - s_\bullet}$  | $s_\bullet = \frac{\gamma_{\text{exp}} - 1}{\gamma_{\text{exp}}}$ |
|   | non-uniforme                               |  | $s_\bullet = s_b$   |
| Loi de dérive maximale linéaire   | $\gamma = 1 + \Xi/f _{c=c_{\text{max}}}$   | $\Xi = \gamma_{\text{exp}} - 1$  | $\Xi = 0.21$  |

TABLE 7.1 – Résultat du paramétrage des lois d'IPV pour  $s_b = 0.2$  afin de reproduire l'accélération du polymère mesurée expérimentalement en monophasique.

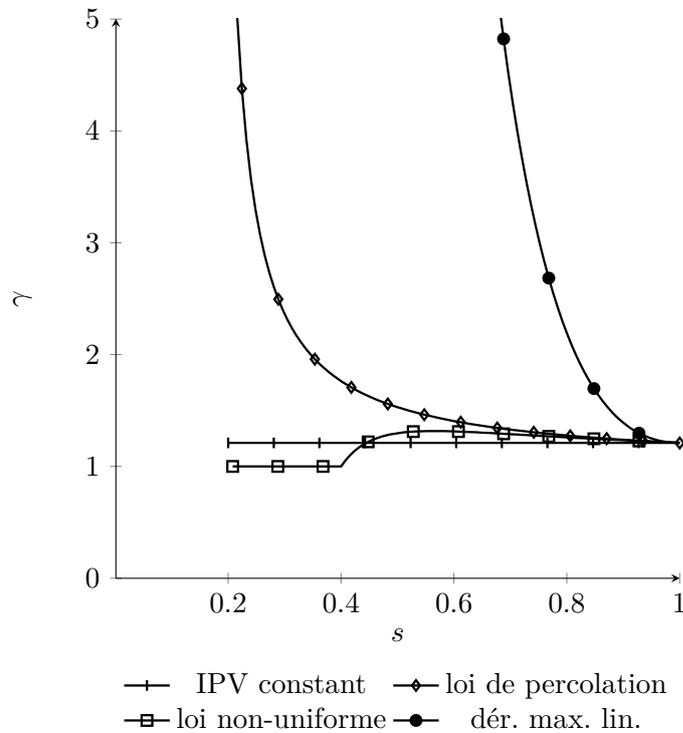


FIGURE 7.9 – Loi d'IPV constant, de percolation, non-uniforme et de dérive maximale linéaire paramétrées selon la Table 7.1.

### 7.2.2 Simulation diphasique des données expérimentales

L'expérience simulée est identique à celle présentée dans la section précédente, à savoir injecter avec un débit constant une eau contenant du polymère et du sel dans une carotte contenant une eau « pure ». Cette fois, le modèle utilisé pour la simulation est le modèle diphasique (5.2). Pour simuler cette expérience, nous reprenons la configuration détaillée en §7.1.4. La différence vient de l'utilisation de perméabilités relatives diphasiques caractéristiques de l'eau et de l'huile (donc non miscibles) pour réaliser la simulation. Cela a permis la calibration et l'utilisation des lois d'IPV de percolation, uniforme et non-uniforme.

La Figure 7.10 compare les données de fractions massiques de polymère et de sel à la frontière  $x = 1$ . Les données des simulations faites avec le modèle diphasique eau/huile sont identiques à celles obtenues dans la section §7.1.4 avec le modèle miscible. On en conclut que le modèle diphasique couplé aux lois d'IPV avec les paramètres résumés dans la Table 7.1 approche bien les données expérimentales.

Les résultats numériques obtenus avec cette simulation montrent que toutes les lois d'IPV utilisées sont adaptées à la simulation du polymère. En réalité, cette simulation met principalement en évidence le phénomène d'IPV. L'effet de la réduction de mobilité n'est pas clairement observable sur cette simulation, car elle ne met en jeu qu'une seule phase injectée à débit constant. Physiquement, la réduction de mobilité impacte le gradient de pression nécessaire à maintenir le débit constant. Cela n'est pas modélisé par le système d'équations. Pour aller plus loin dans l'analyse, il nous faut faire des simulations d'expériences comportant les deux phases eau et huile. De cette manière, nous pourrions observer à la fois les effets de réduction de mobilité et de volume de pore inaccessible.

### 7.2.3 Simulation d'une extraction d'huile

Les résultats présentés dans ce paragraphe ont pour but de reproduire le comportement de l'injection d'un bouchon de polymère dans un réservoir pétrolier. En effet, de par le coût financier élevé du polymère, les compagnies d'extraction pétrolière optimisent la quantité de produit utilisé si bien que le polymère est injecté pendant une durée limitée. Ainsi, dans un premier temps, l'eau injectée lors de l'extraction de l'huile contient du polymère et par la suite, est injectée une eau dite *de chasse* (sans polymère).

Pour simuler l'extraction, on considère une carotte de longueur adimensionnée  $L = 1$ , avec le puits injecteur localisé en  $x = 0$  et le puits producteur en  $x = 1$ . À l'instant initial, la carotte est saturée en huile, ce qui nous emmène à opter pour les données initiales

$$(s, c)(x, t = 0) = (1, s_b) \quad x \in [0, 1]. \quad (7.24)$$

Au niveau du puits injecteur, on injecte de l'eau, on a donc une saturation  $s = 1$ . Cette injection se fait dans un premier temps avec une présence du polymère et par la suite sans aucun polymère. Par conséquent, les valeurs sont imposées au puits injecteur ( $x = 0$ ). Cela correspond à la condition de Dirichlet

$$(s, c, \gamma)(x = 0, t) = \begin{cases} (1, 2 \cdot 10^{-3}) & \text{si } t \in [0, T[, \\ (1, 0) & \text{si } t \geq T. \end{cases} \quad (7.25)$$

À droite du domaine ( $x > 1$ ), on se considère au puits producteur. La sortie libre des fluides est caractérisée par une condition de Neumann homogène.

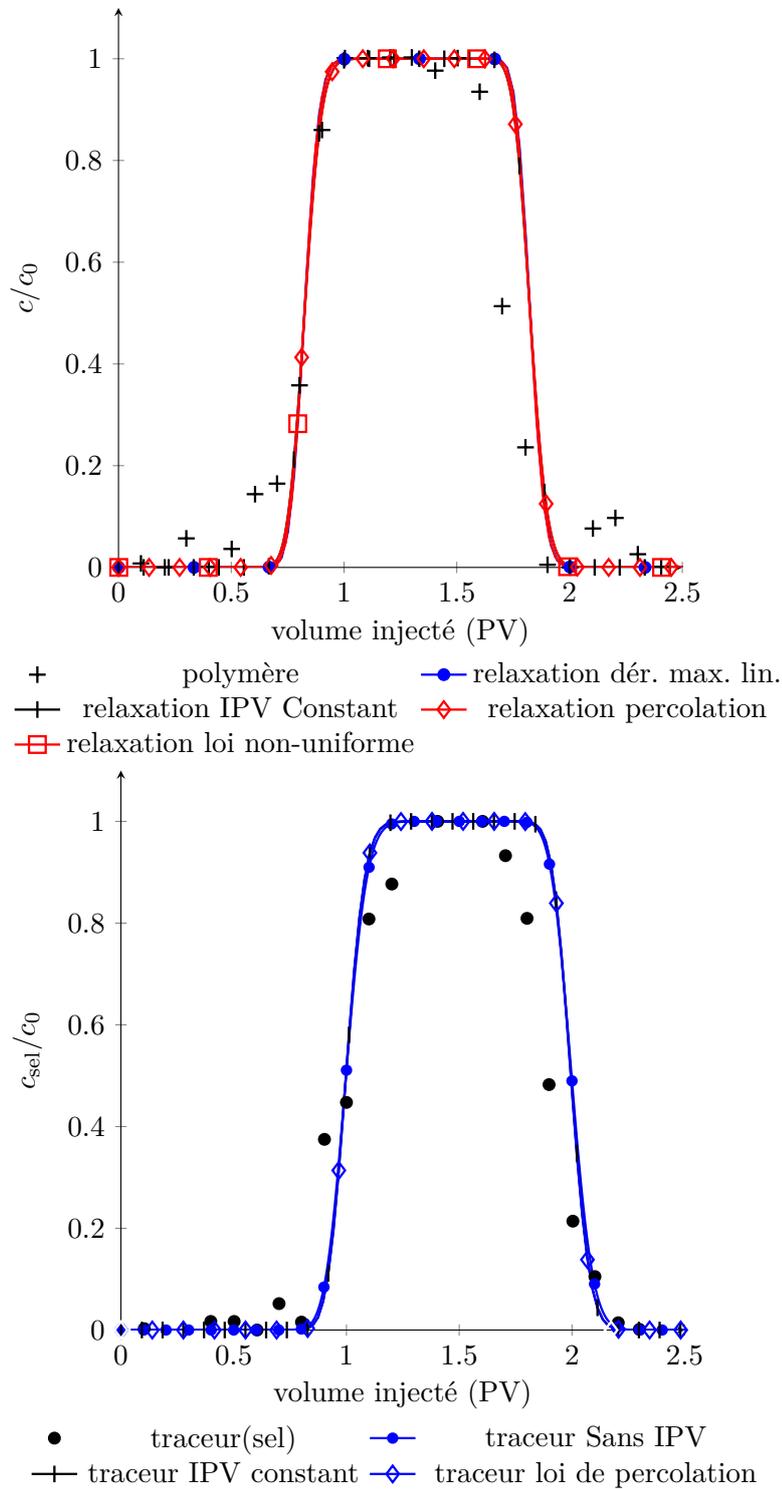


FIGURE 7.10 – Fractions massiques de polymère et de sel à la sortie de la carotte en fonction du temps issues de données expérimentales monophasiques et de simulations par un modèle d'écoulement diphasique eau/huile.

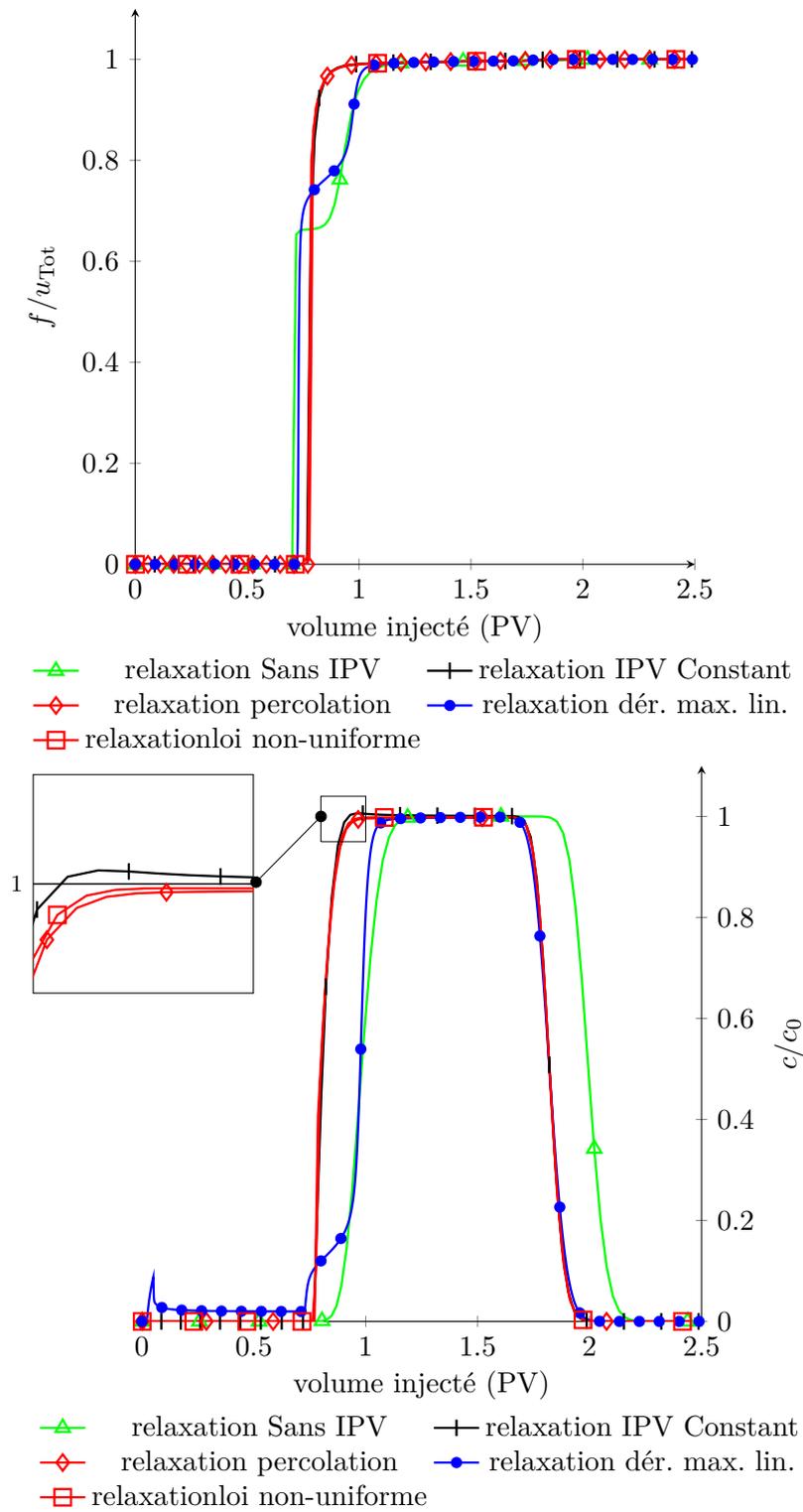


FIGURE 7.11 – Flux d'eau et fraction massique de polymère observés à la sortie de la carotte pour une simulation eau/huile avec la loi d'IPV constant, la loi de percolation et écoulement sans IPV. Maillage de 200 cellules,  $s_b = 0.2$  et  $c_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ .

La Figure 7.11 illustre le flux d'eau normalisé et la fraction massique de polymère (normalisée par la fraction massique de polymère à l'injection) observés à la sortie du domaine. La simulation est réalisée avec un maillage de 200 cellules et une fraction massique de polymère  $c_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ . Les résultats avec  $\gamma \equiv 1$  montrent une sortie d'eau qui possède deux discontinuités. La première discontinuité est en avance sur le polymère et correspond à l'eau initialement présente dans la roche qui a été poussée par l'eau injectée. La seconde coïncide avec le front de polymère. Le polymère injecté se déplace donc à la même vitesse que l'eau.

**Loi d'IPV constant.** Avec cette loi d'IPV, les molécules de polymère circulent dans l'eau qui était initialement présente dans la carotte. En regardant précisément les courbes de la Figure 7.11, on observe que la simulation avec la loi d'IPV constant donne des fractions massiques de polymère légèrement supérieures à la fraction massique d'injection  $c_0$ . En effet, dans les Figures 7.11, le rapport  $c/c_0$  est légèrement supérieur à 1. Nous avons également observé que cette valeur croît en raffinant le maillage et donne un profil comme celui de la Figure 6.6. Le pic de fraction massique n'est a priori pas borné. Ce pic n'apparaît pas pour des simulations avec la loi de percolation, la loi non-uniforme et la loi de dérive maximale linéaire.

**Loi de percolation.** Le flux d'eau en sortie de carotte obtenu avec cette loi d'IPV et la loi d'IPV constant ont des courbes relativement proches. Comparée à la loi d'IPV constant, la loi de percolation permet de rendre le modèle (5.2) hyperbolique. Les résultats de simulations ne présentent pas de singularité.

**Loi de diffusion non-uniforme.** Les résultats obtenus sont en conformité avec ceux présentés dans les travaux de Hilden [45]. La simulation ne fait pas apparaître de singularité dans le profil de la fraction massique de polymère.

**Loi de dérive maximale linéaire.** La loi  $\gamma = 1 + \Xi/f(s, c = c_{\max})$  a un front d'eau en avance par rapport aux autres lois d'IPV. Ce front est légèrement en retard sur le front d'eau obtenu avec l'écoulement sans IPV. Concernant la fraction massique de polymère, la loi de dérive maximale linéaire ne fait pas apparaître de pic de concentration. Le polymère se déplace dans l'eau immobile initialement présente dans la carotte. Dans la pratique, le phénomène de diffusion peut amener le polymère à circuler dans l'eau immobile. Mais cette circulation se fait à une très faible vitesse. La percée instantanée que l'on observe en Figure 7.11 est donc un défaut pour la loi d'IPV.

## 7.3 Paramétrage et simulations en diphasique pour $s_b = 0.1$

### 7.3.1 Paramétrage des lois

Dans la section §7.2, nous avons utilisé le modèle diphasique (5.2) pour reproduire des données expérimentales et simuler une extraction d'huile. Cependant, l'hypothèse  $s_b = 0.2$  n'a pas permis de faire des simulations avec la loi uniforme. Dans cette section, on suppose que la roche possède une saturation d'eau irréductible  $s_b = 0.1$ . Le choix de cette saturation d'eau irréductible permet de reproduire les données expérimentales avec les lois d'IPV

constant, uniforme et de dérive maximale linéaire, mais il n'est pas possible de paramétrer la loi de percolation et la loi non-uniforme.

Nous avons donc repris des calculs de paramétrage de loi de la section §7.2 avec la valeur  $s_b = 0.1$ . Les résultats de ce paramétrage sont condensés dans la Table 7.2. Seules les lois d'IPV constant, uniforme et de dérive maximale linéaire peuvent être utilisées pour reproduire les observations expérimentales. Ces trois lois sont représentées dans la Figure 7.12 avec les paramètres permettant de reproduire les données.

| Paramétrage des lois d'IPV avec $s_b = 0.1$ et $\gamma_{\text{exp}} = 1.21$ |              |  |   |                    |
|---|--------------|--|---|--------------------|
| Loi d'IPV   |              | expression sur $[\max(s_\bullet, s_b), 1]$   | paramètres  | valeurs            |
| constant  |              | $\gamma = \text{const.}$   | $\gamma = \gamma_{\text{exp}}$                                    | $\gamma = 1.21$    |
| $s_\bullet < s_b$   | percolation  | $\frac{s}{s - s_\bullet}$  | $s_\bullet = \frac{\gamma_{\text{exp}} - 1}{\gamma_{\text{exp}}}$ | pas de solution    |
|   | uniforme     |  |   |                    |
|   | non-uniforme |  |   |                    |
| $s_\bullet > s_b$   | percolation  | pas définie  | -   | -                  |
|   | uniforme     | $\frac{s}{\Lambda_w(s)} \frac{\Lambda_w(s) - \Lambda_w(s_\bullet)}{s - s_\bullet}$                   | $s_\bullet$ : résoudre (7.20)                                     | $s_\bullet = 0.18$ |
|   | non-uniforme | $\left[1 - \frac{s_b}{s_\bullet} \frac{\Lambda_w(s_\bullet)}{\Lambda_w(s)}\right] \frac{s}{s - s_b}$ | $s_\bullet$ : résoudre (7.21)                                     | pas de solution    |
| $s_\bullet = s_b$   | percolation  | pas définie  | -   | -                  |
|   | uniforme     | $\frac{s}{s - s_\bullet}$  | $s_\bullet = \frac{\gamma_{\text{exp}} - 1}{\gamma_{\text{exp}}}$ | pas de solution    |
|   | non-uniforme |  | $s_\bullet = s_b$   | solution           |
| Loi de dérive maximale linéaire   |              | $\gamma = 1 + \Xi/f _{c=c_{\text{max}}}$   | $\Xi = \gamma_{\text{exp}} - 1$                                   | $\Xi = 0.21$       |

TABLE 7.2 – Résultat du paramétrage des lois d'IPV pour  $s_b = 0.1$  afin de reproduire l'accélération du polymère mesurée expérimentalement en monophasique.

Pour reproduire les données expérimentales, nous reprenons la configuration détaillée en §7.1.4. La différence vient de l'utilisation de perméabilités relatives diphasiques caractéristiques de l'eau et de l'huile dans une carotte de saturation en eau irréductible  $s_b = 0.1$ . La Figure 7.13 compare les données de fractions massiques de polymère et de sel à la sortie de la carotte. Les observations faites sont identiques à celles obtenues dans les sous-sections §7.1.4 et §7.2.2. La loi uniforme, la loi d'IPV constant et de dérive maximale linéaire avec les paramètres résumés dans la Table 7.2 approchent bien les données expérimentales (sous l'hypothèse que le front de polymère est localisé au point vérifiant  $c/c_0 = 0.5$ ).

### 7.3.2 Simulation d'une extraction d'huile

On s'intéresse à l'injection d'un bouchon de polymère dans une carotte initialement saturée en huile ( $s = s_b$ ). Le fait que la carotte soit initialement saturée en huile se traduit par les données initiales

$$(s, c)(x, t = 0) = (1, s_b), \quad x \in [0, 1], \quad (7.26)$$

avec  $s_b = 0.1$  dans notre cas. Pour simuler l'extraction de l'huile présente dans la carotte, on se considère avec une carotte de longueur adimensionnée  $L = 1$ , avec le puits injecteur

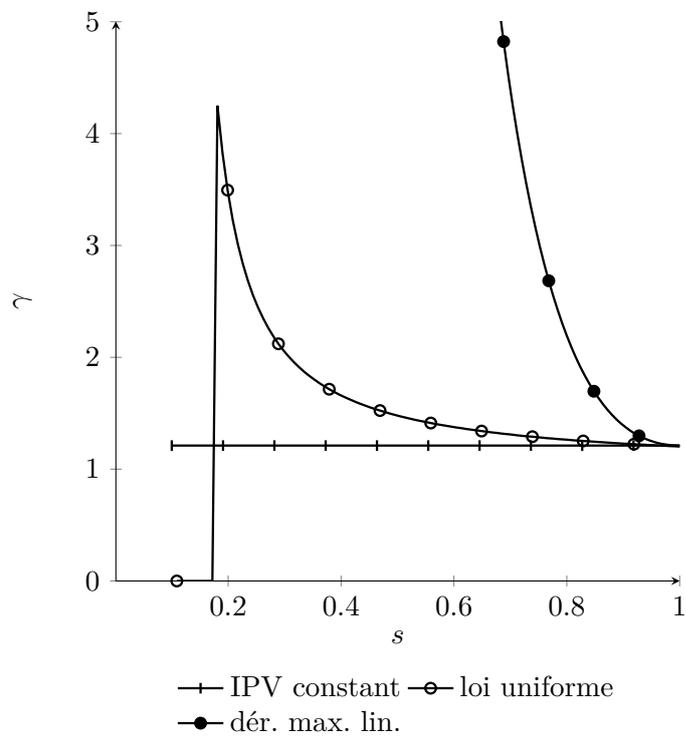


FIGURE 7.12 – Loi d'IPV constant, loi uniforme et de dérive maximale linéaire avec  $s_b = 0.1$  et les valeurs des paramètres de la Table 7.2. Loi de dérive maximale linéaire est tracée avec  $c_{\max} = 10^{-3}$ .

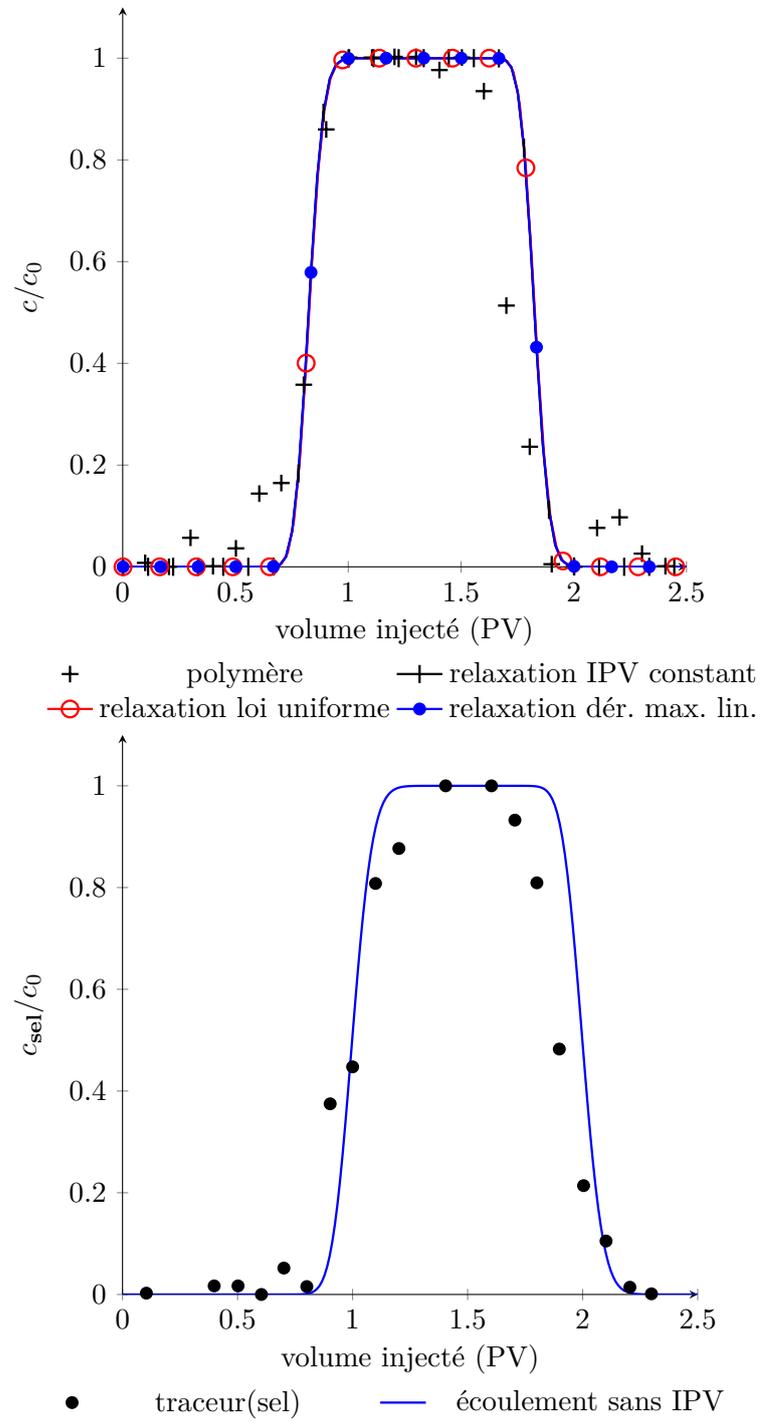


FIGURE 7.13 – Fractions massiques de polymère et de sel à la sortie de la carotte en fonction du temps issues de données expérimentales monophasiques et de simulations par un modèle d'écoulement diphasique eau/huile avec  $s_b = 0.1$ ,  $s_{\bullet} = 0.18$ .

localisé en  $x = 0$  et le puits producteur en  $x = 1$ . Les valeurs au puits d'injection ( $x = 0$ ) sont traduites par la condition de Dirichlet

$$(s, c, \gamma)(x = 0, t) = \begin{cases} (1, 2 \cdot 10^{-3}) & \text{si } t \in [0, T[, \\ (1, 0) & \text{si } t \geq T. \end{cases} \quad (7.27)$$

Au puits producteur ( $x = 1$ ), on impose la condition de Neumann homogène. La Figure 7.14 représente les données de la prévision du schéma numérique. Il s'agit ici des données de production obtenues avec une discrétisation par un maillage de 200 cellules.

**Loi d'IPV constant.** Avec cette loi d'IPV, on observe en  $PV = 0.9$  un front d'eau raide, avec un saut du flux  $\llbracket f \rrbracket = 1$ . D'un point de vue de physique, cela veut dire qu'après une injection de  $0.9PV$ , la totalité de l'huile présente dans la carotte aura été extraite. Ce comportement est lié à l'apparition d'un pic de fraction massique de polymère au niveau du front d'eau. La courbe de fraction massique de polymère de la Figure 7.14 fait ressortir ce pic : le rapport  $c/c_0$  atteint des valeurs supérieures à 3.

**Loi uniforme.** Le comportement de cette loi est quasiment identique à celui de la loi d'IPV constant. On retrouve un et seul front d'eau en  $PV = 0.89$  avec un saut du flux  $\llbracket f \rrbracket = 1$  et un pic de fraction massique de polymère. La loi uniforme fait donc apparaître une singularité localisée. Le maximum du rapport  $c/c_0$  est supérieur à celui obtenu avec la loi d'IPV constant.

**Loi de dérive maximale linéaire.** La loi  $\gamma = 1 + \Xi/f(s, c_{\max})$  affiche un comportement identique à celui obtenu avec  $s_p = 0.2$ , que ce soit pour la saturation d'eau ou la fraction massique de polymère.

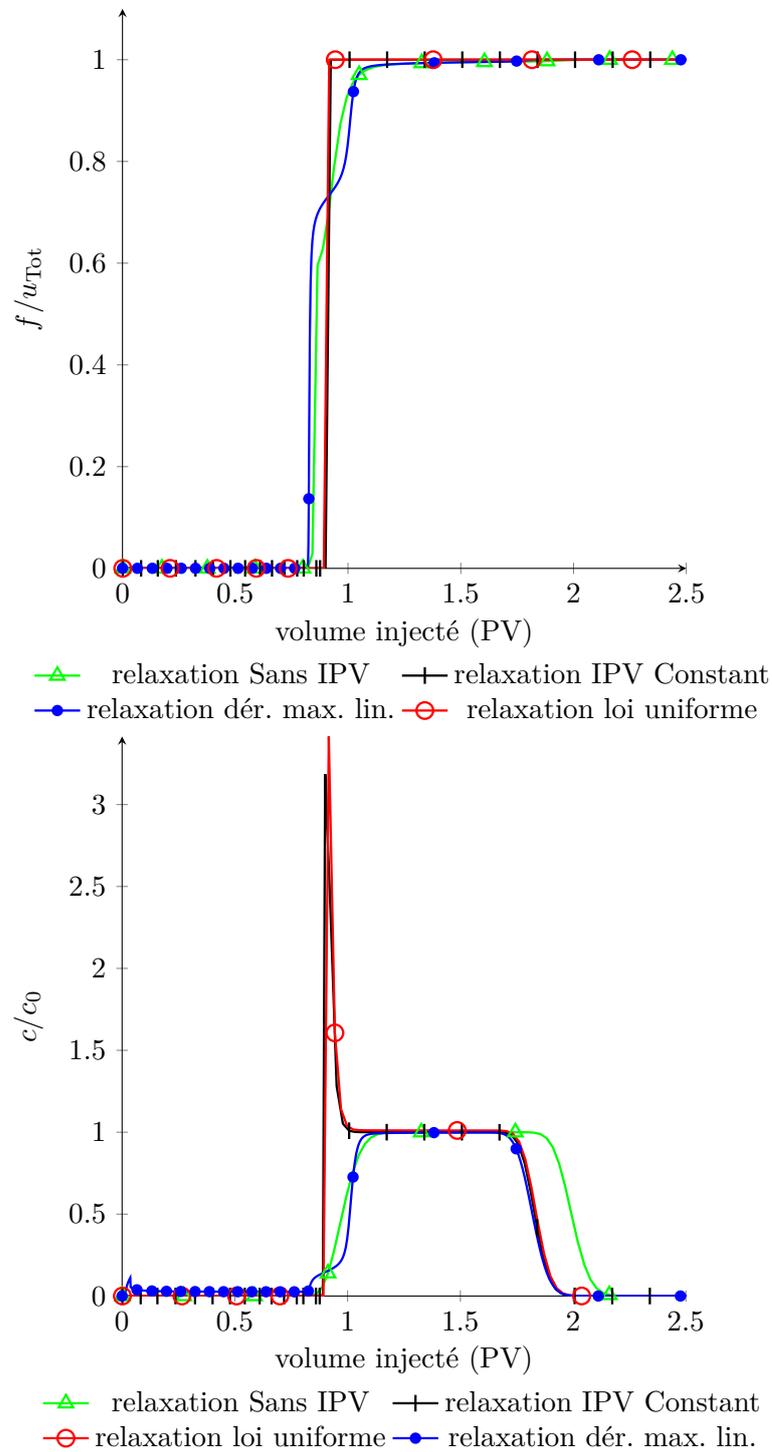


FIGURE 7.14 – Flux d'eau normalisé et fraction massique de polymère normalisée observés à la sortie de la carotte pour une simulation eau/huile avec la loi d'IPV constant, écoulement sans IPV, loi uniforme et loi de dérive maximale linéaire. Maillage de 200 cellules,  $s_b = 0.1$  et  $c_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ .

## 7.4 Synthèse sur le paramétrage des lois et les simulations

Résumons dans cette brève section les différentes propriétés et les comportements de chaque loi d'IPV utilisée dans nos simulations.

**Loi d'IPV constant.** Cette loi d'IPV a permis de reproduire des données issues d'une expérience faite en écoulement monophasique. Elle peut être paramétrée quelle que soit la valeur de la saturation irréductible  $s_b$  de la roche. Cependant le modèle (5.2) couplé à cette loi n'est pas hyperbolique et les simulations numériques peuvent faire apparaître des pics de fraction massique de polymère. La singularité créée avec  $s_b = 0.1$  (Figure 7.14) a une amplitude supérieure à celle obtenue avec  $s_b = 0.2$  (7.11). On conjecture que l'amplitude du pic de fraction massique croît d'autant plus vite que la quantité d'eau initialement présente dans la carotte est faible.

**Loi de percolation.** Avec la loi de percolation, le modèle diphasique (5.2) est faiblement hyperbolique. Les valeurs propres sont réelles mais on peut avoir une perte de la base de vecteurs propres. Malgré la perte de la base propre, la solution exacte du problème de Riemann ne possède pas de singularité. Cependant cette loi ne permet pas de reproduire les données expérimentales avec le modèle diphasique miscible. Pour des écoulements diphasiques non-miscibles, il n'est pas toujours possible de la paramétrer lorsque  $s_b$  est faible. En particulier, nous avons montré que pour  $s_b = 0.1$  et  $\gamma_{\text{exp}} = 1.21$  (voir annexe §A), la loi ne peut être paramétrée. Son utilisation est donc restreinte.

**Loi de diffusion uniforme (avec  $s_\bullet > s_b$ ).** Avec cette loi, le modèle diphasique (5.2) n'est pas hyperbolique. Les valeurs propres du système peuvent être complexes pour des valeurs de saturation et de fraction massique de polymère physiquement admissibles. Cette loi dégénère en  $\gamma \equiv 1$  pour des écoulements diphasiques miscibles. Il n'est pas toujours possible de la paramétrer afin de reproduire les données expérimentales. Parmi nos exemples, cela n'a été possible qu'avec le modèle diphasique pour lequel  $s_b = 0.1$ . Dans la sous-section §7.3.2, la simulation faite avec cette loi crée une singularité localisée.

**Loi de diffusion non-uniforme (avec  $s_\bullet > s_b$ ).** Avec cette loi, le modèle diphasique (5.2) n'est pas hyperbolique. Les valeurs propres du système peuvent être complexes pour des valeurs de saturation et de fraction massique de polymère physiquement admissibles. Tout comme la loi de percolation et la loi uniforme, cette loi dégénère en  $\gamma \equiv 1$  dans les cas d'un écoulement diphasique miscible. Il n'est pas toujours possible de paramétrer cette loi. Durant notre étude, la loi n'a pas pu être paramétrée pour reproduire les données expérimentales avec le modèle diphasique si  $s_b = 0.1$ . Pour  $s_b = 0.2$ , la loi a pu être paramétrée (voir la section §7.2) et les résultats de la simulation ne présentent pas de singularité. Cependant cette absence de singularité n'est pas effective sur tous les problèmes de Riemann. Dans l'annexe §A.2, nous donnons un exemple de simulation comportant une singularité sur la fraction massique de polymère. Les données initiales paraissent pourtant habituelles, la saturation présente un léger saut et la fraction massique de polymère est constante.

**Loi de dérive maximale linéaire.** Avec la loi d'IPV  $\gamma = 1 + \Xi/f(s, c_{\text{max}})$ , les valeurs propres du modèle (5.2) sont réelles. Cette loi peut être paramétrée pour reproduire les

---

données expérimentales avec le modèle diphasique miscible. Elle est aussi paramétrable pour le modèle (5.2) et cela quelque soit la valeur de  $s_p$ . Les simulations faites avec cette loi ne créent pas de singularité mais le polymère circule à très grande vitesse dans l'eau initialement présente dans la carotte.



# Chapitre 8

# Conclusion

## Sommaire

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>8.1 Bilan des travaux</b>   | <b>161</b> |
| 8.1.1 Amélioration de la capture des fronts pour le modèle sans IPV        | 161        |
| 8.1.2 Zones d'ellipticité et conditions suffisantes d'hyperbolicité faible | 162        |
| 8.1.3 Mise au point d'un schéma de relaxation adapté à toute loi d'IPV     | 162        |
| 8.1.4 Paramétrage des lois d'IPV   | 163        |
| <b>8.2 Extensions possibles</b>  | <b>163</b> |
| 8.2.1 À la recherche de l'ultime loi d'IPV                                 | 163        |
| 8.2.2 Prise en compte de l'adsorption                                      | 164        |
| 8.2.3 Passage en multi-dimensionnel  | 165        |

---

## 8.1 Bilan des travaux

La simulation du polymère dans les réservoirs pétroliers répond à un enjeu économique réel. Elle se heurte à un certain nombre d'obstacles que nous avons tenté de lever dans cette thèse. En continuité avec les travaux de [13, 15], nous avons cherché à approfondir l'analyse mathématique des lois de fermeture physiques et à élaborer de nouveaux schémas numériques pour un modèle prototype d'écoulement diphasique. Ci-dessous nous mettons en avant les résultats qui nous paraissent les plus saillants.

### 8.1.1 Amélioration de la capture des fronts pour le modèle sans IPV

Sans IPV, le modèle étudié dans la première partie du manuscrit coïncide avec le système de Keyfitz-Kranzer [58]. Au niveau théorique, les difficultés dues à la résonance de ce dernier sont « bénignes » et ont été complètement résolues par Isaacson et Temple [52]. En particulier, l'unicité de la solution du problème de Riemann peut être restaurée à l'aide d'un critère de sélection supplémentaire. Nous avons fait une étude exhaustive de l'article [52] et en avons présenté une synthèse en §2.2.

Au niveau numérique, en revanche, il est apparu une difficulté peu connue concernant l'excès de diffusion dans la capture des ondes de contact par le schéma décentré amont actuellement implanté dans le code d'IFPEN, qui est en l'occurrence aussi le schéma de Godunov. Après avoir essayé la montée en ordre spatio-temporelle et le schéma de Glimm,

qui sont des remèdes classiques, nous avons préconisé une approche plus originale en §4.3. Elle consiste en une correction non conservative de la discrétisation du bilan de polymère, la correction étant calibrée à partir d'une équation équivalente qui quantifie l'erreur du schéma sur la vitesse. Les simulations effectuées attestent d'une meilleure précision non seulement dans les problèmes à onde pure mais aussi ceux à plusieurs ondes.

### 8.1.2 Zones d'ellipticité et conditions suffisantes d'hyperbolicité faible

Dans la seconde partie du manuscrit, nous avons établi quelques conditions suffisantes sur la loi d'IPV afin d'assurer l'hyperbolicité faible du modèle prototype. La clef pour obtenir les conditions CS0–CS4 en §5.1.2, résumées à la Table 1.1, réside dans le passage en coordonnées lagrangiennes.

Les trois premières, à savoir CS0–CS2, sont naturelles en ce sens qu'elles peuvent être interprétées en termes de contrôle des vitesses caractéristiques par rapport à une vitesse prescrite à l'avance, comme c'est le cas dans les modèles de trafic routier. Les conditions CS0–CS2 nous ont également permis de mieux comprendre et d'aborder l'étude théorique de deux lois d'IPV omniprésentes dans la littérature, à savoir :

- *Loi d'IPV constant*  $\gamma = 1 + \eta$ , très utilisée par les ingénieurs réservoir. Jusqu'à présent, l'existence d'une zone elliptique n'a été rigoureusement démontrée que pour  $\gamma = 1 + \eta$ , avec  $\eta > 0$  suffisamment petit. De manière analytique, nous avons déterminé la frontière exacte entre les zones d'hyperbolicité et d'ellipticité. Ce résultat semble nouveau, du moins à notre connaissance.
- *Loi de percolation*  $\gamma = s/(s - s_\bullet)$  pour  $s > s_b > s_\bullet$ , conduit elle aussi à un modèle faiblement hyperbolique. Notre contribution a été de montrer que, par un changement de variables approprié, le modèle avec la loi de percolation est équivalent au modèle sans IPV, ce qui règle la question du problème de Riemann. Bien que ce résultat ne soit pas difficile, il ne semble pas connu au sein de la communauté.

Grâce aux deux dernières conditions CS3–CS4, nous avons bâti deux nouvelles lois d'IPV garantissant l'hyperbolicité faible du modèle sur une portion de l'espace des phases (comme c'est le cas avec les lois précédentes). Il s'agit de :

- *Loi de dérive sous-linéaire*  $\gamma = 1 + \Xi \Lambda_o(1 - s)/\Lambda_w(s)$  pour  $s_\bullet < s \leq 1$ , qui est très simple mais ne permet pas d'avoir  $\gamma(s = 1) > 1$ . Or, les observations faites en laboratoire imposent cette condition.
- *Loi de dérive maximale linéaire*  $\gamma = 1 + \Xi/f(\cdot, c_{\max})$  pour  $s_b < s \leq 1$  et  $0 \leq c \leq c_{\max}$ , qui pallie le défaut de la loi précédente mais qui a l'inconvénient de tendre vers l'infini en  $s = s_b$ . Elle reproduit toutefois les données expérimentales quelle que soit la valeur de  $s_b$ .

### 8.1.3 Mise au point d'un schéma de relaxation adapté à toute loi d'IPV

Le schéma de relaxation du chapitre §6 constitue un effort pour coexister en pratique avec les instabilités « malignes » intrinsèques aux zones d'ellipticité, faute de pouvoir faire disparaître ces dernières dans le modèle. La justification de cet espoir repose sur la propriété d'hyperbolicité stricte de la partie homogène du système relaxé au niveau continu. Conformément à l'esprit de la relaxation, le problème de Riemann se résout facilement grâce à la dégénérescence linéaire des valeurs propres. Ici, le point délicat est de s'assurer du caractère dissipatif de l'approximation par le choix des coefficients  $a$  et  $b$ ,

lequel choix doit également garantir la positivité de certaines grandeurs critiques. Nous avons pu remplir ce cahier des charges en nous inspirant des travaux de Baudin [8, 9].

De nos différentes simulations, il ressort que pour  $\gamma \equiv 1$  tout comme la loi de percolation, le schéma de relaxation et le schéma décentré convergent vers la solution exacte. On retient aussi que les deux schémas donnent des résultats équivalents pour le modèle avec IPV constant. La présence du pic est donc à imputer au modèle et non pas au schéma. La loi de dérive maximale linéaire fait disparaître ce pic et reproduit les données de laboratoire obtenues en monophasique. Seulement, cette nouvelle loi laisse le polymère circuler à très grande vitesse dans l'eau immobile.

#### 8.1.4 Paramétrage des lois d'IPV

La tentative de « calage » du chapitre §7, qui a demandé un travail de nature plus terre à terre, montre qu'il n'est finalement pas possible de retenir une loi d'IPV particulière pour la simulation : chacune d'elles possède des avantages et des défauts. En fonction des données pétrophysiques de la roche, l'ingénieur réservoir devra sélectionner la loi qui, selon lui, est la plus appropriée. Le schéma de relaxation constitue l'outil de simulation le plus robuste pour résoudre ces problèmes mathématiques et physiques mal posés.

## 8.2 Extensions possibles

En prolongement des travaux de ce mémoire, nous livrons quelques réflexions succinctes sur les axes de recherche qui pourraient être recommandés dans le futur.

### 8.2.1 À la recherche de l'ultime loi d'IPV

Nous restons convaincus que dans la conception des lois d'IPV, il faut placer l'hyperbolicité (faible) du modèle au cœur des préoccupations. Face aux limites de la loi d'IPV constant, la loi de dérive maximale linéaire  $\gamma = 1 + \Xi/f(\cdot, c_{\max})$  ne comble pas toutes les attentes. La difficulté se situe au niveau de la valeur prise par  $q = fc\gamma$  au voisinage de  $s_b$ .

**Idée générale.** Pour empêcher le polymère de circuler dans l'eau immobile ( $s \leq s_b$ ), une première idée consiste à définir un point  $s'_\bullet \in (s_b, 1)$  et ne considérer la loi de dérive maximale linéaire que sur l'intervalle  $(s'_\bullet, 1]$ . On extrapole ensuite sur  $[0, s'_\bullet]$  par une fonction  $\hat{\gamma}$ . La Figure 8.1 illustre une extrapolation par une fonction affine. L'extrapolation peut s'effectuer avec toute famille de fonction, à condition de respecter les critères suivants :

1. Le raccord doit être au moins  $\mathcal{C}^1$  en  $s'_\bullet$  ;
2. Le produit  $fc\gamma$  doit rester bien définie sur  $[0, s'_\bullet]$ , être  $\mathcal{C}^1$  sur ce même intervalle et être nul sur  $[0, s_b]$  ;
3. Les valeurs propres du modèle (5.2), suppléé par la loi d'IPV  $\hat{\gamma}$ , doivent être réelles lorsque  $s \in [0, s'_\bullet]$ .

Prise de manière isolée, chacune des conditions énumérées est facile à satisfaire. La difficulté de l'exercice réside dans la satisfaction simultanée de toutes les conditions.

**Exemple du prolongement affine.** Considérons le prolongement affine de la loi de dérive maximale linéaire, illustré par la Figure 8.1. On suppose  $s_b$  connu (car caractéristique de la roche). On cherche le triplet  $(s'_\bullet, B_1, B_2)$  tel que la fonction  $\hat{\gamma}(s) = B_1s + B_2$  soit un prolongement admissible. Les paramètres  $s'_\bullet$ ,  $B_1$  et  $B_2$  doivent alors vérifier

$$B_1s'_\bullet + B_2 = 1 + \frac{\gamma_{\text{exp}} - 1}{f(s'_\bullet, c_{\text{max}})}, \quad (8.1a)$$

$$B_1 = -\frac{(\gamma_{\text{exp}} - 1)f_s(s'_\bullet, c_{\text{max}})}{f(s'_\bullet, c_{\text{max}})^2}. \quad (8.1b)$$

L'équation (8.1a) assure la continuité du raccord et l'équation (8.1b) sa différentiabilité.

Sur l'intervalle  $[s'_\bullet, 1]$ , on montre que le système est hyperbolique car la loi de dérive maximale linéaire est construite en résolvant la CS4. Sur l'intervalle  $[0, s_b]$ , le système (5.2) est hyperbolique car on a  $q = fc\gamma = 0$  et la CS1  $q_s \leq 0$  est donc vérifiée. La complication se produit pour le choix de  $s'_\bullet$  de sorte à satisfaire la condition d'hyperbolicité sur l'intervalle  $[s_b, s'_\bullet]$ .

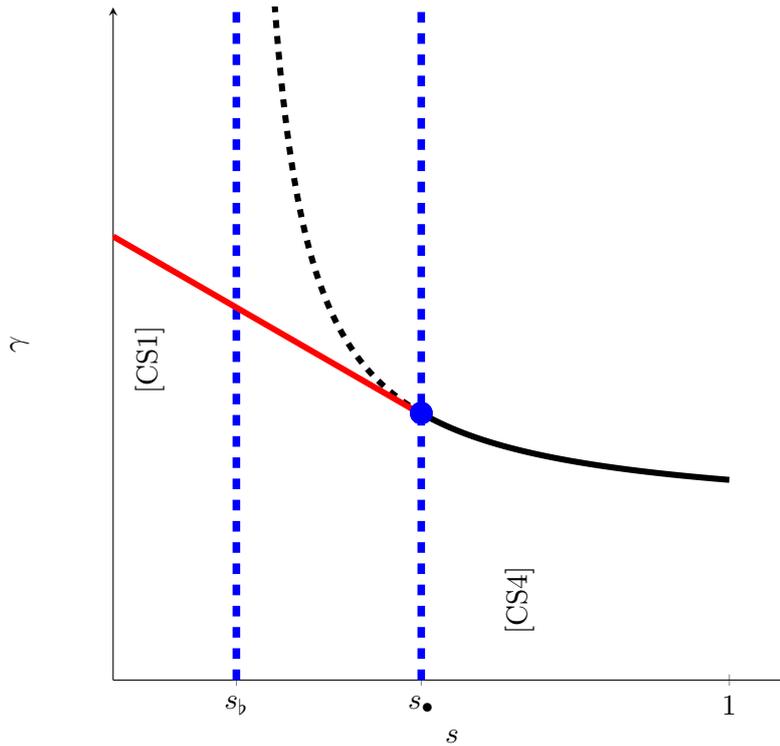


FIGURE 8.1 – Idée de construction d'une loi d'IPV hyperbolique.

## 8.2.2 Prise en compte de l'adsorption

Comme évoqué au chapitre §2, la présence de polymère dans la phase aqueuse fait apparaître les phénomènes physiques que sont la réduction de mobilité, l'IPV et l'adsorption. Le modèle (5.2) étudié dans cette thèse rend compte de la réduction de mobilité et

de l'IPV. Une fois les « bonnes » lois d'IPV trouvées, une suite logique est la réintégration de l'adsorption. Un modèle simplifié pour cela est

$$\partial_t(s) + \partial_x(su) = 0, \quad (8.2a)$$

$$\partial_t(sc + \alpha) + \partial_x(scu + q) = 0, \quad (8.2b)$$

où  $\alpha$  est une fonction positive croissante de  $c$ .

Il convient d'abord de s'assurer que les lois d'IPV convenables pour (5.2) continuent à garantir l'hyperbolicité faible pour (8.2). Notons que l'analyse d'hyperbolicité du système (8.2) avec adsorption ( $\alpha > 0$ ) mais sans IPV ( $q = 0$ ) a été faite par Johansen et Winther [55], qui ont montré par un calcul direct que les valeurs propres sont égales à  $(su)_s$  et  $u/(1 + \tau\alpha'(c))$ . Cela signifie que l'adsorption « ralentit » l'une des ondes. Le calcul n'est évidemment plus possible à la main avec IPV ( $q \neq 0$ ), mais par passage en coordonnées lagrangiennes il est possible d'élaborer des conditions suffisantes d'hyperbolicité faible analogues à celles de §5.1.2.

Il importe ensuite de construire un schéma de relaxation pour le nouveau modèle (8.2). Pour cela, remarquons que par le changement de variable

$$z = c + \tau\alpha(c), \quad (8.3)$$

qui est inversible en  $c$  à  $\tau = s^{-1}$  fixé, le système (8.2) s'exprime sous la forme

$$\partial_t(s) + \partial_x(s\hat{u}) = 0, \quad (8.4a)$$

$$\partial_t(sz) + \partial_x(sz\hat{u} + \hat{q}) = 0, \quad (8.4b)$$

avec

$$\hat{u}(s, z) = u(s, c(s, z)), \quad (8.5a)$$

$$\hat{q}(s, z) = q(s, c(s, z)) - \alpha(c(s, z))u(s, c(\tau, z)). \quad (8.5b)$$

Autrement dit, le système avec adsorption (8.2) se ramène formellement au système sans adsorption (5.2), ce qui permet de « dérouler la mécanique » de la relaxation. Il reste toutefois à examiner si le changement de variable proposé est coûteux en temps CPU.

### 8.2.3 Passage en multi-dimensionnel

Pour se rapprocher d'un calcul de réservoir plus réaliste, il est important de passer à un cas 2-D ou 3-D, même avec un modèle relativement simplifié. Plusieurs aspects doivent alors être pris en considération. Au niveau mathématique, la condition  $\text{div } \mathbf{u}_{\text{Tot}} = 0$  ne permet plus d'éliminer  $\mathbf{u}_{\text{Tot}}$  du modèle et le système comporte par conséquent une équation supplémentaire. Toutefois, la discrétisation numérique ne pose a priori pas de difficulté particulière, dans la mesure où l'on peut compter sur les problèmes de Riemann 1-D pour évaluer les flux par face requis par la méthode des volumes finis.

Au niveau physique, la complication principale provient de la réduction de mobilité  $R_m$ . En effet, celle-ci ne dépend plus seulement de la fraction massique  $c$ , mais aussi du cisaillement ainsi que de l'adsorption [84]. Dès lors, la question est de savoir si ce plus fort couplage aura un impact sur la construction du schéma numérique.



## Annexe A

# Éléments complémentaires des simulations

### Sommaire

---

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>A.1</b> | <b>Modèle d'écoulement monophasique</b>                       | <b>167</b> |
| A.1.1      | Lois fondamentales de conservation                            | 168        |
| A.1.2      | Simulations numériques  | 170        |
| <b>A.2</b> | <b>Apparition de singularité pour la loi uniforme</b>         | <b>172</b> |
| <b>A.3</b> | <b>Paramétrage des lois d'IPV pour <math>s_b = 0.1</math></b> | <b>173</b> |

---

### A.1 Modèle d'écoulement monophasique

Dans cette annexe, on s'intéresse à la modélisation d'un écoulement monophasique et unidimensionnel avec polymère. L'objectif est de montrer que les simulations faites avec le flux fractionnaire

$$f(s, c) = \frac{s}{s + R_m(c)(1 - s)}, \quad (\text{A.1})$$

et les états initiaux

$$(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = ((1, c_L), (1, c_R)) \quad (\text{A.2})$$

sont en adéquation avec un modèle d'écoulement d'eau proprement construit. En effet pour simuler l'expérience de laboratoire dans la section §7.1, nous avons considéré le modèle

$$\partial_t(s) + \partial_x(f) = 0, \quad (\text{A.3a})$$

$$\partial_t(sc) + \partial_x(fc\gamma) = 0, \quad (\text{A.3b})$$

$$\partial_t(sc_{\text{sel}}) + \partial_x(fc_{\text{sel}}) = 0, \quad (\text{A.3c})$$

avec le flux fractionnaire  $f$  défini par l'équation (A.1). La discrétisation du système ci-dessus s'est faite par le système

$$(s)_i^{n+1} = (s)_i^n - \delta[(s)_i^n u(s_i^n, c_i^n) - (s)_{i-1}^n u(s_{i-1}^n, c_{i-1}^n)], \quad (\text{A.4a})$$

$$(sc)_i^{n+1} = (sc)_i^n - \delta[(sc)_i^n u(s_i^n, c_i^n) - (sc)_{i-1}^n u(s_{i-1}^n, c_{i-1}^n)], \quad (\text{A.4b})$$

$$(sc_{\text{sel}})_i^{n+1} = (sc_{\text{sel}})_i^n - \delta[(sc_{\text{sel}})_i^n u(s_i^n, c_i^n) - (sc_{\text{sel}})_{i-1}^n u(s_{i-1}^n, c_{i-1}^n)], \quad (\text{A.4c})$$

avec  $\delta = \Delta t / \Delta x$ .

### A.1.1 Lois fondamentales de conservation

Considérons un milieu poreux de porosité  $\phi$  dont les pores sont tous saturés en eau. On indexe par  $w1$  la phase d'eau contenant initialement du polymère et du sel et par  $w2$  la phase d'eau dans laquelle il n'y a pas de polymère à l'instant initial.

Soit  $c_\psi$  la fraction de polymère dans la phase  $\psi$ . On suppose que le polymère circule librement d'une phase à une autre. La fraction massique de polymère en un point donné ne dépend pas des saturations  $s_{w1}$  et  $s_{w2}$ . Ce qui nous permet d'écrire

$$c = c_{w1} = c_{w2}. \quad (\text{A.5})$$

Contrairement au polymère, le sel n'est qu'un traceur. En d'autres termes, on émet l'hypothèse selon laquelle les molécules de sel restent dans la phase  $s_{w1}$  et se déplacent à la même vitesse que celle-ci.

Si on considère que le facteur d'accélération  $\gamma$  est une fonction de la saturation d'eau totale, on a les lois de conservations

$$\partial_t(\phi\rho_{w1}s_{w1}) + \text{div}(\rho_{w1}\mathbf{u}_{w1}/R_m) = 0, \quad (\text{A.6a})$$

$$\partial_t(\phi\rho_{w2}s_{w2}) + \text{div}(\rho_{w2}\mathbf{u}_{w2}/R_m) = 0, \quad (\text{A.6b})$$

$$\partial_t(m_p) + \text{div}((\rho_{w1}\mathbf{u}_{w1}c_\gamma + \rho_{w2}\mathbf{u}_{w2}c_\gamma)/R_m) = 0, \quad (\text{A.6c})$$

$$\partial_t(s_{w1}c_{\text{sel}}) + \text{div}(\rho_{w1}\mathbf{u}_{w1}c_{\text{sel}}/R_m) = 0, \quad (\text{A.6d})$$

pour un écoulement sans terme source. Dans cette équation  $m_p$  désigne la masse de polymère,  $c_{\text{sel}}$  la fraction massique de sel,  $\rho_\psi$  et  $\mathbf{u}_\psi$  dénotent respectivement la densité et la vitesse de filtration de la phase  $\psi$ .

La fonction  $\gamma$  renvoie à l'accélération du polymère. Dans le cadre de cette construction de, le milieu est saturé en eau. Par conséquent  $\gamma = \gamma(s = 1, \cdot)$ . Or nous utilisons et cherchons des lois d'IPV qui ne dépendent que de la saturation d'eau. On peut donc considérer  $\gamma = \text{const}$ .

**Mobilités des phases.** La vitesse de filtration de chaque phase  $\psi \in \{w1, w2\}$  est donnée par la loi de Darcy-Muskat [78]

$$\mathbf{u}_\psi = -\frac{\kappa\kappa_{r,\psi}}{\mu_\psi}(\nabla p_\psi - \rho_\psi\mathbf{g}z), \quad (\text{A.7})$$

où  $\mathbf{g}$  est la pesanteur,  $\kappa$  la perméabilité du milieu poreux et  $\kappa_{r,\psi}$  les perméabilités relatives. Dans le contexte d'un écoulement eau/eau, les viscosités  $\mu_\psi$  et les pressions  $p_\psi$  des phases sont égales. Le rapport

$$\Lambda_\psi = \frac{\kappa_{r,\psi}}{\mu_\psi}, \quad (\text{A.8})$$

désigne la *mobilité* de la phase  $\psi$ .

L'eau est le seul fluide présent dans le milieu poreux. Sous l'hypothèse que le polymère est présent en faible quantité, les deux phases possèdent propriétés physiques similaires et leurs saturations varient dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Les lois de Brooks [16] et Corey [24]

$$\kappa_{r,w1}(s_{w1}) = \kappa_{r,w1}^{\max} \left| \frac{s_{w1} - s_b}{s_\# - s_b} \right|_{[0,1]}^{n_{w1}}, \quad (\text{A.9a})$$

$$\kappa_{r,w2}(s_{w2}) = \kappa_{r,w2}^{\max} \left| \frac{s_{w2} - s_b}{s_\# - s_b} \right|_{[0,1]}^{n_{w2}}, \quad (\text{A.9b})$$

présentées dans le chapitre §2 se ramènent à

$$\kappa_{r,w1}(s_{w1}) = s_{w1}, \quad (\text{A.10a})$$

$$\kappa_{r,w2}(s_{w2}) = s_{w2}, \quad (\text{A.10b})$$

car les perméabilités maximales sont  $\kappa_{r,w1}^{\max} = \kappa_{r,w2}^{\max} = 1$ , les exposants de Corey  $n_{w1} = n_{w2} = 1$  et les saturations  $s_{w1}$  et  $s_{w2}$  peuvent prendre n'importe quelle valeur sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

**Modèle d'écoulement monophasique incompressible unidimensionnel.** Considérons un écoulement incompressible et unidimensionnel. Le modèle (A.6) devient

$$\partial_t(s_{w1}) + \partial_x(R_m^{-1}u_{w1}) = 0, \quad (\text{A.11a})$$

$$\partial_t(s_{w2}) + \partial_x(R_m^{-1}u_{w2}) = 0, \quad (\text{A.11b})$$

$$\partial_t((s_{w1} + s_{w2})c) + \partial_x(\gamma R_m^{-1}c(u_{w1} + u_{w2})) = 0, \quad (\text{A.11c})$$

$$\partial_t(s_{w1}c_{\text{sel}}) + \partial_x(R_m^{-1}u_{w1}c_{\text{sel}}) = 0, \quad (\text{A.11d})$$

où  $R_m(c)$  désigne la fonction de réduction de mobilité et les vitesses de Darcy sont données par les expressions

$$u_{w1} = -\kappa\Lambda_{w1}(s_{w1})\partial_x p, \quad (\text{A.12a})$$

$$u_{w2} = -\kappa\Lambda_{w2}(s_{w2})\partial_x p. \quad (\text{A.12b})$$

En sommant les équations de (A.11)–(A.12) et avec  $s_{w1} + s_{w2} = 1$ , il en résulte

$$\partial_x u_{\text{Tot}} = 0, \quad (\text{A.13})$$

où

$$u_{\text{Tot}} = R_m^{-1}u_{w2} + R_m^{-1}u_{w1} = -\kappa[R_m^{-1}(c)\Lambda_{w1}(s_{w1}) + R_m^{-1}(c)\Lambda_{w2}(s_{w2})]\partial_x p \quad (\text{A.14})$$

désigne la vitesse totale de l'écoulement. L'introduction des flux fractionnaires

$$f_{w1}(s_{w1}, c) = \frac{\Lambda_{w1}(s_{w1})/R_m(c)}{\Lambda_{w1}(s_{w1})/R_m(c) + \Lambda_{w2}(s_{w2})/R_m(c)} = s_{w1}, \quad (\text{A.15a})$$

$$f_{w2}(s_{w2}, c) = \frac{\Lambda_{w2}(s_{w2})/R_m(c)}{\Lambda_{w1}(s_{w1})/R_m(c) + \Lambda_{w2}(s_{w2})/R_m(c)} = s_{w2}, \quad (\text{A.15b})$$

permet d'exprimer les vitesses de filtration comme

$$R_m^{-1}u_{w1} = f_{w1}u_{\text{Tot}}, \quad (\text{A.16a})$$

$$R_m^{-1}u_{w2} = f_{w2}u_{\text{Tot}}. \quad (\text{A.16b})$$

Le système (A.11)–(A.12) se réécrit alors sous la forme

$$\partial_x(u_{\text{Tot}}) = 0, \quad (\text{A.17a})$$

$$\partial_t(s_{w1}) + \partial_x(u_{\text{Tot}}f_{w1}) = 0, \quad (\text{A.17b})$$

$$\partial_t(c) + \partial_x(\gamma c) = 0, \quad (\text{A.17c})$$

$$\partial_t(s_{w1}c_{\text{sel}}) + \partial_x(u_{\text{Tot}}f_{w1}c_{\text{sel}}) = 0. \quad (\text{A.17d})$$

La première équation (A.17a) implique que  $u_{\text{Tot}}$  ne dépend pas de  $x$ . Sa valeur  $u_{\text{Tot}} = u_{\text{Tot}}^*(t)$  fournie par (A.14) ne dépend donc que du temps  $t$ , à travers les conditions aux limites imposées.

Quitte à diviser les deux équations restantes (A.17b)–(A.17c) par  $u_{\text{Tot}}$  et à définir une autre échelle de temps  $t'$  telle que  $dt' = u_{\text{Tot}}^*(t) dt$ , on peut légitimement prendre  $u_{\text{Tot}} \equiv 1$ . Les deux dernières équations de (A.17) forment alors un système fermé

$$\partial_t(s_{w1}) + \partial_x(s_{w1}) = 0, \quad (\text{A.18a})$$

$$\partial_t(c) + \partial_x(\gamma c) = 0, \quad (\text{A.18b})$$

$$\partial_t(c_{\text{sel}}) + \partial_x(c_{\text{sel}}) = 0. \quad (\text{A.18c})$$

Le système ci-dessus modélise un écoulement monophasique avec polymère et sel. Les valeurs propres de ce système linéaire sont

$$\lambda_{[s_{w1}]} = 1, \quad \lambda_{[c]} = \gamma, \quad \lambda_{[c_{\text{sel}}]} = 1$$

et leurs vecteurs propres à droite sont

$$\mathbf{r}_{[s_{w1}]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{[c]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{[c_{\text{sel}}]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

Le modèle (A.18) est donc strictement hyperbolique et tous ses champs sont linéairement dégénérés. La solution du problème de Riemann est constituée de trois discontinuités de contact. Les discontinuités associées à  $\lambda_{[s_{w1}]}$  et  $\lambda_{[c_{\text{sel}}]}$  se déplacent à la même vitesse. La discontinuité de contact est associée à l'onde  $\lambda_{[c]}$ , se déplace à la vitesse  $\gamma$ .

### A.1.2 Simulations numériques

Comparons les résultats obtenus avec le modèle diphasique miscible présenté en section §7.1 à ceux obtenus avec le modèle (A.18) avec  $\gamma(1) = \gamma_{\text{exp}}$ . Le schéma utilisé pour discrétiser le modèle (A.6) est le schéma décentré amont. Cette discrétisation est adaptée au système (A.6) car les valeurs propres de ce dernier sont toutes positives.

**Données d'injection.** Pour simuler l'expérience décrite dans la sous-section §7.1.1, nous considérons un système adimensionné. Nous considérons que le domaine de simulation est de longueur  $L = 1$ . Dans la carotte, nous injectons à la vitesse totale  $u_{\text{Tot}} = 1$  de l'eau contenant du polymère et du sel. Ainsi, l'équivalent d'un volume poreux (1PV temps adimensionné en ingénierie pétrolière) est injecté sur une durée de  $T = 1$ . Cela se traduit par la condition limite de Dirichlet

$$(s_{w1}, c, c_{\text{sel}})(x < 0, t) = \begin{cases} (1, 2 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}) & \text{si } t \in [0, T[, \\ (0, 0, 0) & \text{si } t \geq T, \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

à gauche du domaine. Á l'instant initial, nous considérons que la carotte est saturée par de l'eau « pure ».

$$(s_{w1}, c, c_{\text{sel}})(x, t = 0) = (0, 0, 0), \quad x \in [0, 1]. \quad (\text{A.21})$$

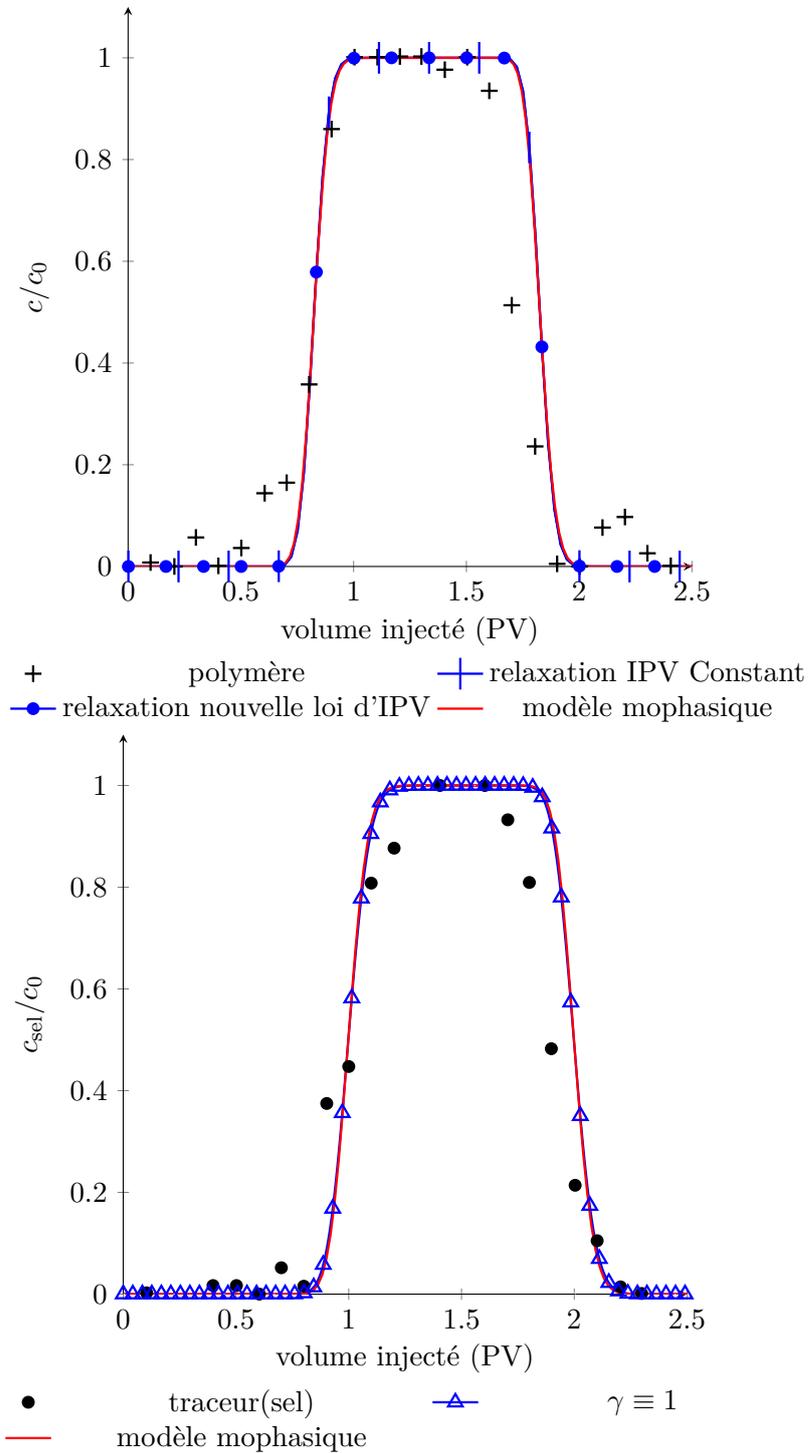


FIGURE A.1 – Fractions massiques normalisées de polymère (haut) et de sel (bas) en sortie de carotte obtenues expérimentalement et par simulations numériques. Les simulations numériques sont réalisées avec les lois d'IPV constant et de dérive maximale linéaire.

**Observations en sortie carotte.** Les résultats présentés à la Figure A.1 sont les valeurs en sortie de carotte pour un maillage constitué de 200 cellules. Les courbes de fraction massique de polymère et de sel obtenues avec les deux modèles sont confondues. Les résultats présentés dans la sous-section §7.1.4 sont donc pertinents.

## A.2 Apparition de singularité pour la loi uniforme

Dans le chapitre §5, la Figure 5.7 montre l'existence des régions elliptiques pour la loi de diffusion non-uniforme. Cependant, la simulation faite avec cette loi d'IPV dans le chapitre §7 (Figure 7.11 ne présente pas de singularité. En effet, cette loi a été conçue dans le but d'avoir une stabilité des chocs au voisinage de  $s_b$ . Il existe tout de même des états initiaux pour lesquels le problème de Riemann fait apparaître une singularité de type concentration locale sur la fraction massique du polymère, comme l'illustre la Figure A.2 avec les données initiales

$$(s, c)(x, t = 0) = \begin{cases} (0.45, 2 \cdot 10^{-3}) & \text{si } x < 0, \\ (0.42, 2 \cdot 10^{-3}) & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

et à l'instant  $t = 0.4$ .

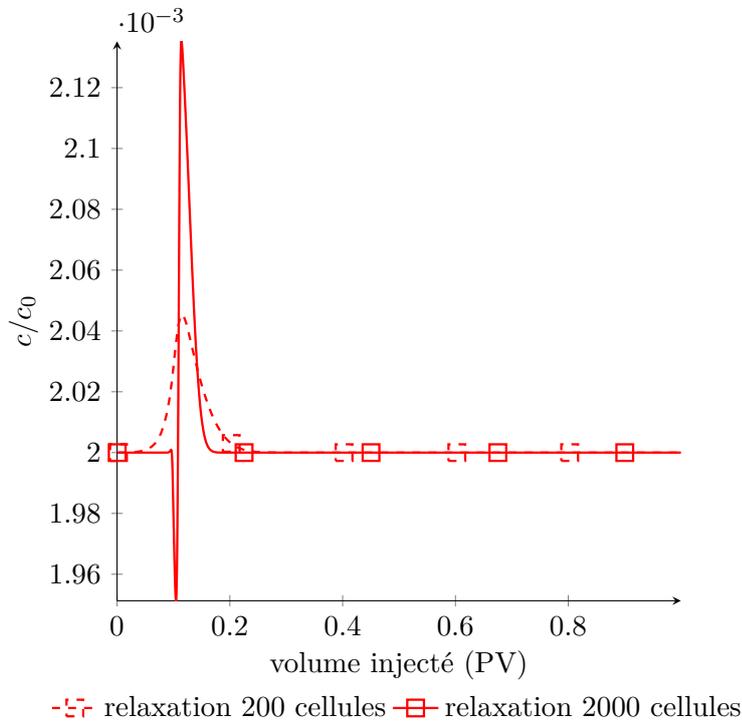


FIGURE A.2 – Pic de fraction massique de polymère généré avec la loi non-uniforme à l'instant  $t = 0.4$ . Maillages de 200 et 2000 cellules.

### A.3 Paramétrage des lois d'IPV pour $s_b = 0.1$

Dans la section §7.3, nous avons résumé (Table 7.2) le paramétrage des différentes lois pour reproduire les données expérimentales. Dans cette annexe, nous détaillons les différentes étapes de paramétrage des lois lorsque  $s_b = 0.1$  et  $\gamma_{\text{exp}} = 1.21$ . Les autres données pétrophysiques de la roche sont :

- les perméabilités des phases sont données par les lois analytiques de Corey (2.6) avec des exposants  $n_w = n_o = 2$ ;
- les perméabilités relatives maximales sont  $\kappa_{r,o}^{\text{max}} = \kappa_{r,w}^{\text{max}} = 1$ ;
- la saturation en huile résiduelle est nulle, on a donc  $s_{\#} = 1$ .

On reprend de manière très succincte les étapes détaillées dans la section §7.2.

Une fois de plus, soulignons que le modèle (5.2) n'a pas été construit pour des écoulements eau/eau. En §7.2, nous avons déterminé des valeurs de  $s_{\bullet}$  pour reproduire les données de laboratoire avec les lois de percolation et non-uniforme. Dans la suite de cette section, on cherche de nouveau à paramétrer les différentes lois d'IPV de manière à avoir

$$\gamma(1) = \gamma_{\text{exp}}. \quad (\text{A.23})$$

Cette fois la condition  $s_b = 0.1$  va induire la possibilité de faire des simulations avec la loi uniforme.

**Loi d'IPV constant.** La loi d'IPV constant ne dépend que des données expérimentales. Le fait de considérer une autre valeur de  $s_b$  ne modifie pas cette loi. On a

$$\gamma = \gamma_{\text{exp}}. \quad (\text{A.24})$$

**Loi de percolation.** La loi de percolation est définie par

$$\gamma = \frac{s}{s - s_{\bullet}}, \quad s_b < s_{\bullet}. \quad (\text{A.25})$$

En imposant  $\gamma(1) = \gamma_{\text{exp}}$ , on détermine analytiquement l'unique valeur

$$s_{\bullet} = \frac{\gamma_{\text{exp}} - 1}{\gamma_{\text{exp}}} = 0.173.$$

Cette valeur ne satisfait pas la condition  $s_b < s_{\bullet}$ . La loi de percolation ne peut donc pas être utilisée pour reproduire les données de laboratoire.

**Loi de diffusion uniforme ( $s_{\bullet} > s_b$ ).** Si  $s_{\bullet} \leq s_b$ , la loi de diffusion uniforme se ramène à la loi de percolation et il n'est pas possible de reproduire les données expérimentales. Lorsque  $s_{\bullet} > s_b$ , le paramètre d'écoulement  $s_{\bullet}$  doit satisfaire l'équation

$$\frac{1 - \Lambda_w(s_{\bullet})}{1 - s_{\bullet}} = \gamma_{\text{exp}}. \quad (\text{A.26})$$

Nous avons montré dans la section §7.2 que l'équation ci-dessus admet au maximum une solution. Dans le cas  $s_b = 0.1$ , l'unique solution de cette équation est  $s_{\bullet} = 0.18$ .

**Loi non-uniforme.** Comme la loi uniforme, l'expression de la loi de diffusion non uniforme dépend du signe de  $s_{\bullet} - s_b$ . Lorsque  $s_{\bullet} < s_b$ , la loi coïncide avec la loi de percolation et ne peut donc pas être paramétrée de manière à avoir  $\gamma(1) = 1.21$  avec  $s_b = 0.1$ . Si on suppose que  $s_{\bullet} > s_b$ , les données de laboratoire peuvent être reproduites si  $s_{\bullet}$  satisfait l'équation

$$\left[1 - \frac{s_b}{s_{\bullet}} \Lambda_w(s_{\bullet})\right] \frac{1}{1 - s_b} = \gamma_{\text{exp}}, \quad s_b < s_{\bullet}. \quad (\text{A.27})$$

À  $s_b \in ]0, 1[$  fixé, cette équation admet au plus une solution. L'existence d'une solution dépend de la valeur de  $s_b$ . Dans notre cas, pour  $s_b = 0.1$ , l'équation ci-dessus n'admet pas de solution.

**Loi de dérive maximale linéaire.** La loi d'expression

$$\gamma(s) = 1 + \frac{\Xi}{f(s, c_{\text{max}})}, \quad (\text{A.28})$$

possède deux paramètres. Le paramètre  $\Xi$  est une constante à déterminer et  $c_{\text{max}}$  est une valeur constante de fraction massique du polymère. De ces deux paramètres, seul  $\Xi$  conditionne la valeur de  $\gamma(1)$ . La valeur de  $c_{\text{max}}$  influence la vitesse de décroissance de  $\gamma$ . Dans notre contexte, nous choisissons  $c_{\text{max}} = 3 \cdot 10^{-3}$  et  $\Xi = \gamma_{\text{exp}} - 1$ .

# Bibliographie

- [1] M. ALI AND H. MAHMUD, *The effects of concentration and salinity on polymer adsorption isotherm at sandstone rock surface*, IOP Conference Series : Materials Science and Engineering, 78 (2015), p. 012038, <https://doi.org/10.1088/1757-899X/78/1/012038>.
- [2] N. ANDRIANOV AND G. WARNECKE, *On the solution to the Riemann problem for the compressible duct flow*, SIAM J. Appl. Math., 64 (2004), pp. 878–901, <https://doi.org/10.1137/S0036139903424230>.
- [3] N. ANDRIANOV AND G. WARNECKE, *The Riemann problem for the Baer-Nunziato two-phase flow model*, J. Comput. Phys., 195 (2004), pp. 434–464, <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.10.006>.
- [4] A. AW AND M. RASCLE, *Resurrection of “second order” models of traffic flow*, SIAM J. Appl. Math., 60 (2000), pp. 916–938, <https://doi.org/10.1137/S0036139997332099>.
- [5] K. AZIZ AND A. SETTARI, *Petroleum Reservoir Simulation*, Applied Science Publishers, London, 1979.
- [6] G. A. BARTELDs, J. BRUINING, AND J. MOLENAAR, *The modeling of velocity enhancement in polymer flooding*, Transp. Porous Media, 26 (1997), pp. 75–88, <https://doi.org/10.1023/A:1006563532277>.
- [7] S. BASSETTO, *Vers une prise en compte plus robuste et précise des effets capillaires lors de simulations d’écoulements multiphasiques en milieux poreux*, thèse de doctorat, Université de Lille 1, 2021.
- [8] M. BAUDIN, *Méthodes de relaxation pour la simulation des écoulements polyphasiques dans les conduites pétrolières*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2003, <https://hal-ifp.archives-ouvertes.fr/tel-01583001>.
- [9] M. BAUDIN, C. BERTHON, F. COQUEL, R. MASSON, AND Q. H. TRAN, *A relaxation method for two-phase flow models with hydrodynamic closure law*, Numer. Math., 99 (2005), pp. 411–440, <https://doi.org/10.1007/s00211-004-0558-1>.
- [10] B. BISWAL, P.-E. ØREN, R. J. HELD, S. BAKKE, AND R. HILFER, *Modeling of multiscale porous media*, Image Anal. Stereol., 28 (2011), pp. 23–34, <https://doi.org/10.5566/ias.v28.p23-34>.
- [11] F. BOUCHUT, *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser, Basel, 2004.

- [12] F. BOUCHUT, S. JIN, AND X. LI, *Numerical approximation of pressureless and isothermal gas dynamics*, SIAM J. Numer. Anal., 41 (2003), pp. 135–158, <https://doi.org/10.1137/S0036142901398040>.
- [13] B. BRACONNIER, É. FLAURAUD, AND Q. L. NGUYEN, *Efficient scheme for chemical flooding simulation*, Oil Gas Sci. Technol., 69 (2014), pp. 585–601, <https://doi.org/10.2516/ogst/2013189>.
- [14] B. BRACONNIER, C. PREUX, F. DOUARCHE, AND B. BOURBIAUX, *MUSCL scheme for single well chemical tracer test simulation, design and interpretation*, in Oil Gas Sci. Technol. Topic Issue : Numerical methods and HPC, A. Anciaux-Sedrakian and Q. H. Tran, eds., vol. 74, EDP Sciences, 2019, ch. 10, <https://doi.org/10.2516/ogst/2018090>.
- [15] B. BRACONNIER, C. PREUX, É. FLAURAUD, Q.-H. TRAN, AND C. BERTHON, *An analysis of physical models and numerical schemes for polymer flooding simulations*, Comput. Geosci., 21 (2017), pp. 1267–1279, <https://doi.org/10.1007/s10596-017-9637-0>.
- [16] R. H. BROOKS AND A. T. COREY, *Hydraulic properties of porous media and their relation to drainage design*, Trans. ASAE, 7 (1964), pp. 26–28, <https://doi.org/10.13031/2013.40684>.
- [17] S. E. BUCKLEY AND M. C. LEVERETT, *Mechanism of fluid displacement in sands*, Trans. AIME, 146 (1942), pp. 107–116, <https://doi.org/10.2118/942107-G>.
- [18] C. CANCÈS, *Two-phase flows in heterogeneous porous media : modeling and analysis of the flows of the effects involved by the discontinuities of the capillary pressure*, thèse de doctorat, Université de Provence Aix-Marseille I, 2008, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00335506>.
- [19] C. CHALONS AND F. COQUEL, *Modified Suliciu relaxation system and exact resolution of isolated shock waves*, Math. Mod. Meth. Appl. Sci., 24 (2014), pp. 937–971, <https://doi.org/10.1142/S0218202513500723>.
- [20] G. CHAVENT AND J. JAFFRÉ, *Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation : Single Phase, Multiphase and Multicomponent Flows through Porous Media*, vol. 17 of Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [21] Z. CHEN, *Reservoir Simulation : Mathematical Techniques in Oil Recovery*, vol. 77 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 2007.
- [22] P. COLELLA, *Glimm’s method for gas dynamics*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 3 (1982), pp. 76–110, <https://doi.org/10.1137/0903007>.
- [23] F. COQUEL, S. JIN, J.-G. LIU, AND L. WANG, *Entropic sub-cell shock capturing schemes via Jin-Xin relaxation and Glimm front sampling for scalar conservation laws*, Math. Comp., 87 (2018), pp. 1083–1126, <https://doi.org/10.1090/mcom/3253>.
- [24] A. T. COREY, *Mechanics of heterogenous fluids in porous media*, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, 1977.
- [25] M. CROUZEIX AND A. L. MIGNOT, *Analyse numérique des équations différentielles*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1984.

- [26] H. P. G. DARCY, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, Victor Dalamont, 1856.
- [27] A. DATTA-GUPTA, G. A. POPE, K. SEPERHRNOORI, AND R. L. THRASHER, *A symmetric, positive definite formulation of a three-dimensional micellar/polymer simulator*, SPE Reserv. Eng., 1 (1986), pp. 622–632, <https://doi.org/10.2118/13504-PA>.
- [28] R. DAWSON AND R. B. LANTZ, *Inaccessible pore volume in polymer flooding*, SPE Journal, 12 (1972), pp. 448–452, <https://doi.org/10.2118/3522-PA>.
- [29] P.-G. DE GENNES, *Scaling Concepts in Polymer Physics*, Cornell University Press, Ithaca, 1979.
- [30] V. DESVEAUX AND C. BERTHON, *An entropy preserving MOOD scheme for the Euler equations*, Int. J. Finite Vol., 11 (2014), pp. 1–39, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01115334>.
- [31] G. L. DONGMO NGUEPI, B. BRACONNIER, C. PREUX, Q. H. TRAN, AND C. BERTHON, *Glimm and finite volume schemes for polymer flooding model with and without inaccessible pore volume law*, in ECMOR XVII Conference Proceedings, September 14-17, European Association of Geoscientists & Engineers, 2020, pp. 1–21, <https://doi.org/10.3997/2214-4609.202035090>.
- [32] G. L. DONGMO NGUEPI, B. BRACONNIER, C. PREUX, Q.-H. TRAN, AND C. BERTHON, *A relaxation method for the simulation of possibly non-hyperbolic polymer flooding models with inaccessible pore volume effect*, in Finite Volumes for Complex Applications IX - Methods, Theoretical Aspects, Examples, R. Klöforn, E. Keilegavlen, F. A. Radu, and J. Fuhrmann, eds., Cham, 2020, Springer International Publishing, pp. 445–453, [https://doi.org/10.1007/978-3-030-43651-3\\_41](https://doi.org/10.1007/978-3-030-43651-3_41).
- [33] J. EBAGA-OLOLO AND B. H. CHON, *Prediction of polymer flooding performance with an artificial neural network : A two-polymer-slug case*, Energies, 10 (2017), p. 844, <https://doi.org/10.3390/en10070844>.
- [34] R. EYMARD, T. GALLOUËT, AND R. HERBIN, *Finite volume methods*, in Techniques of Scientific Computing (Part 3), P. G. Ciarlet and J.-L. Lions, eds., vol. VII of Handbook of Numerical Analysis, North-Holland, Elsevier, Amsterdam, 2000, pp. 713–1018, [https://doi.org/10.1016/S1570-8659\(00\)07005-8](https://doi.org/10.1016/S1570-8659(00)07005-8).
- [35] P. J. FLORY, *Principles of Polymer Chemistry*, Cornell University Press, Ithaca, New York, 1953.
- [36] T. GALLOUËT, J.-M. HÉRARD, AND N. SEGUIN, *Some recent finite volume schemes to compute Euler equations using real gas EOS*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 39 (2002), pp. 1073–1138, <https://doi.org/10.1002/flid.346>.
- [37] J. GLIMM, *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, Commun. Pure Appl. Math., 18 (1965), pp. 697–715, <https://doi.org/10.1002/cpa.3160180408>.
- [38] P. GOATIN AND P. G. LEFLOCH, *The Riemann problem for a class of resonant nonlinear systems of balance laws*, Ann. Inst. H. Poincaré. Analyse non linéaire, 21 (2004), pp. 881–902, <https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2004.02.002>.
- [39] E. GODLEWSKI AND P.-A. RAVIART, *Hyperbolic systems of conservation laws*, vol. 3–4 of Mathématiques et Applications, Ellipses, Paris, 1991.

- [40] E. GODLEWSKI AND P.-A. RAVIART, *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, vol. 118 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [41] S. K. GODUNOV, *A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics*, Mat. Sb., 47 (1959), pp. 271–306, <http://mi.mathnet.ru/eng/msb4873>.
- [42] É. GUYON, J.-P. HULIN, AND L. PETIT, *Hydrodynamique physique*, Savoir Actuels, EDP Sciences, Les Ulis, 2021, <https://doi.org/10.1051/978-2-7598-0893-9>.
- [43] M. HAMOUMA, *Compréhension et maîtrise des phénomènes d'interactions surfactant-polymères. Application à la stratégie d'injection de formulations en EOR chimique*, thèse de doctorat, Université Paris Sciences et Lettres, 2020, <https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-03144151>.
- [44] J. M. HAYNES, *Stereological analysis of pore structure*, Matér. Construct., 6 (1973), pp. 175–179, <https://doi.org/10.1007/BF02479030>.
- [45] S. HILDEN, H. NILSEN, AND X. RAYNAUD, *Study of the well-posedness of models for the inaccessible pore volume in polymer flooding*, Transp. Porous Media, 114 (2016), pp. 65–86, <https://doi.org/10.1007/s11242-016-0725-8>.
- [46] M. W. HIRSCH, S. SMALE, AND R. L. DEVANEY, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, Academic Press, San Diego, California, 2004.
- [47] R. A. HORN AND C. R. JOHNSON, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 2013, <http://www.cambridge.org/9780521548236>.
- [48] M. L. HUGGINS, *Solutions of long chain compounds*, J. Chem. Phys., 9 (1941), p. 440, <https://doi.org/10.1063/1.1750930>.
- [49] E. L. ISAACSON, *Global Solution of a Riemann Problem for a Non-strictly Hyperbolic System of Conservation Laws Arising in Enhanced Oil Recovery*, Enhanced Oil Recovery Institute, University of Wyoming, 1989.
- [50] E. L. ISAACSON AND B. TEMPLE, *Nonlinear resonance in systems of conservation laws*, SIAM J. Appl. Math., 52 (1992), pp. 1260–1278, <https://doi.org/10.1137/0152073>.
- [51] E. L. ISAACSON AND B. TEMPLE, *Convergence of the  $2 \times 2$  Godunov method for a general resonant nonlinear balance law*, SIAM J. Appl. Math., 55 (1995), pp. 625–640, <https://doi.org/10.1137/S0036139992240711>.
- [52] E. L. ISAACSON AND J. B. TEMPLE, *Analysis of a singular hyperbolic system of conservation laws*, J. Diff. Eqs, 65 (1986), pp. 250–268, [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(86\)90037-9](https://doi.org/10.1016/0022-0396(86)90037-9).
- [53] A. ISERLES, *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*, Cambridge University Press, USA, 1996.
- [54] S. JIN AND Z. XIN, *The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions*, Commun. Pure Appl. Math, 48 (1995), pp. 235–277, <https://doi.org/10.1002/cpa.3160480303>.
- [55] T. JOHANSEN AND R. WINTHER, *The solution of the Riemann problem for a hyperbolic system of conservation laws modeling polymer flooding*, SIAM J. Math. Anal., 19 (1988), pp. 541–566, <https://doi.org/10.1137/0519039>.

- [56] K. T. JOSEPH, *Explicit generalized solutions to a system of conservation laws*, Proc. Indian Acad. Sci., 109 (1999), pp. 401–409, <https://doi.org/10.1007/BF02838000>.
- [57] K. T. JOSEPH AND M. R. SAHOO, *Vanishing viscosity approach to a system of conservation laws admitting  $\delta''$  waves*, Commun. Pure Appl. Anal., 12 (2013), pp. 2091–2118, <https://doi.org/10.3934/cpaa.2013.12.2091>.
- [58] B. L. KEYFITZ AND H. C. KRANZER, *A system of non-strictly hyperbolic conservation laws arising in elasticity theory*, Arch. Rat. Mech. Anal., 72 (1980), pp. 219–241, <https://doi.org/10.1007/BF00281590>.
- [59] L. W. LAKE, *Enhanced Oil Recovery*, Prentice Hall, 1989.
- [60] P. D. LAX, *Shock waves and entropy*, in Contributions to Nonlinear Functional Analysis, E. H. Zarantonello, ed., Academic Press, 1971, pp. 603–634, <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-775850-3.50018-2>.
- [61] P. D. LAX, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, vol. 11 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1973.
- [62] J.-P. LEBACQUE, S. MAMMAR, AND H. HAJ-SALEM, *The Aw-Rascle and Zhang’s model : Vacuum problems, existence and regularity of the solutions of the Riemann problem*, Transp. Res. Part B, 41 (2007), pp. 710–721, <https://doi.org/10.1016/j.trb.2006.11.005>.
- [63] J. LECOURTIER AND G. CHAUVETEAU, *Propagation of polymer slugs through porous media*, in SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, Texas, September 1984, <https://doi.org/10.2118/13034-MS>.
- [64] J. E. LEMONS AND W. C. RICHARDSON, *Quantitative stereological investigations of porous alumina implant biomaterials*, J. Dental Res., 55 (1976), pp. 111–114, <https://doi.org/10.1177/00220345760550010201>.
- [65] R. LENORMAND, E. TOUBOUL, AND C. ZARCONI, *Numerical-models and experiments on immiscible displacements in porous-media*, J. Fluid Mech., 189 (1988), pp. 165–187, <https://doi.org/10.1017/S0022112088000953>.
- [66] R. J. LEVEQUE, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [67] R. J. LEVEQUE, *The dynamics of pressureless dust clouds and delta waves*, J. Hyperb. Differ. Eq., 01 (2004), pp. 315–327, <https://doi.org/10.1142/S0219891604000135>.
- [68] R. J. LEVEQUE, *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations : steady-state and time-dependent problems*, SIAM, Philadelphia, 2007.
- [69] Z. LI, *Modeling and Simulation of Polymer Flooding Including the Effects of Fracturing*, phd dissertation, University of Texas at Austin, 2015, <https://repositories.lib.utexas.edu/handle/2152/33513>.
- [70] W. C. LIAUH, J. L. DUDA, AND E. E. KLAUS, *Investigation of the inaccessible pore volume phenomena*, in AIChE Symp. Series, vol. 78, Houston, Texas, April 1982, Pennsylvania State University, <https://www.osti.gov/biblio/6682183>.

- [71] E. C.-T. LIN, *A Study of Micellar/Polymer Flooding Using a Compositional Simulator*, phd dissertation, University of Texas at Austin, 1981, <https://doi.org/10.26153/tsw/7542>.
- [72] W. LITTMAN, *Polymer flooding*, J. Polym. Sci. Part C : Polymer Letters, 27 (1989), pp. 215–215, <https://doi.org/10.1002/pol.1989.140270607>.
- [73] J. LIU, M. DELSHAD, G. A. POPE, AND K. SEPEHRNOORI, *Application of higher-order flux-limited methods in compositional simulation*, Transp. Porous Media, 16 (1994), pp. 1–29, <https://doi.org/10.1007/BF01059774>.
- [74] T. P. LIU, *The deterministic version of the Glimm scheme*, Commun. Math. Phys., 57 (1977), pp. 135–148, <https://doi.org/10.1007/BF01625772>.
- [75] T. LOTSCH, T. MULLER, AND G. PUSCH, *The effect of inaccessible pore volume on polymer coreflood experiments*, in SPE Oilfield and Geothermal Chemistry Symposium, Phoenix, Arizona, March 1985, Society of Petroleum Engineers, <https://doi.org/10.2118/13590-MS>.
- [76] A. MAJDA AND R. L. PEGO, *Stable viscosity matrices for systems of conservation laws*, J. Diff. Eqs, 56 (1985), pp. 229–262, [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(85\)90107-X](https://doi.org/10.1016/0022-0396(85)90107-X).
- [77] S. MAZUMDER, D. SEN, AND A. K. PATRA, *Characterization of porous materials by small-angle scattering*, Pramana, 63 (2004), pp. 165–173, <https://doi.org/10.1007/BF02704063>.
- [78] M. MUSKAT, *The flow of homogeneous fluids through porous media*, International Series in Physics, McGraw-Hill, New York, 1937.
- [79] B. NOETINGER, V. ARTUS, AND L. RICARD, *Dynamics of the water-oil front for two-phase, immiscible flow in heterogeneous porous media. 2- Isotropic media*, Transp. Porous Med., 56 (2004), pp. 305–328, <https://doi.org/10.1023/B:TIPM.0000026086.75908.ca>.
- [80] E. Y. PANOV AND V. M. SHELKOVICH,  *$\delta'$ -shock waves as a new type of solutions to systems of conservation laws*, J. Diff. Eqs, 228 (2006), pp. 49–86, <https://doi.org/10.1016/j.jde.2006.04.004>.
- [81] E. PEFFERKORN, L. NABZAR, AND A. CARROY, *Adsorption of polyacrylamide to kaolinite : Correlation between clay structure and surface properties*, J. Colloid Interf. Sci., 106 (1985), pp. 94–103, [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(85\)90384-4](https://doi.org/10.1016/0021-9797(85)90384-4).
- [82] P. PINOT, *Détermination de la porosité de roches calcaires : méthode et incertitude de mesure*, Rev. Franç. Métrol., 37 (2015), pp. 37–53, <https://doi.org/10.1051/rfm/2015004>.
- [83] G. A. POPE, *The application of fractional flow theory to enhanced oil recovery*, SPE Journal, 20 (1980), pp. 191–205, <https://doi.org/10.2118/7660-PA>.
- [84] C. PREUX AND I. MALINOUSKAYA, *Reservoir simulation model calibration methodology with polymer flooding based on laboratory experiments*, J. Petrol. Sci. Eng., 181 (2019), p. 106176, <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.06.040>.
- [85] N. SAAD, G. A. POPE, AND K. SEPEHROORI, *Application of higher-order methods in compositional simulation*, SPE Reserv. Engin., 5 (1990), pp. 623–630, <https://doi.org/10.2118/18585-PA>.

- [86] P. SAFFMAN AND G. TAYLOR, *The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid*, Proc. R. Soc. A, 245 (1958), pp. 312–329, <https://doi.org/10.1098/rspa.1958.0085>.
- [87] D. SERRE, *Systèmes de Lois de Conservation I. Hyperbolicité, Entropies, Ondes de Choc*, Collection Fondations, Diderot Éditeur Arts et Sciences, Paris, 1996.
- [88] B. N. SHAH, G. LAWRENCE, P. WILLHITE, AND D. W. GREEN, *The effect of inaccessible pore volume on the flow of polymer and solvent through porous media*, in SPE Annual Fall Technical Conference and Exhibition, Houston, Texas, October 1978, Society of Petroleum Engineers, <https://doi.org/10.2118/7586-MS>.
- [89] S. SHAH, S. A. HEINLE, AND J. E. GLASS, *Water-soluble polymer adsorption from saline solutions*, in SPE Oilfield and Geothermal Chemistry Symposium, Phoenix, Arizona, 1985, <https://doi.org/10.2118/13561-MS>.
- [90] A. SHARMA, M. DELSHAD, C. HUH, AND G. A. POPE, *A practical method to calculate polymer viscosity accurately in numerical reservoir simulators*, in SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Denver, Colorado, 2011, <https://doi.org/10.2118/147239-MS>.
- [91] K. S. SORBIE, *Polymer-Improved Oil Recovery*, Springer Science, New York, 1991, <https://doi.org/10.1007/978-94-011-3044-8>.
- [92] T. STUTZMANN AND B. SIFFERT, *Contribution to the adsorption mechanism of acetamide and polyacrylamide on to clays*, Clays Clay Miner., 25 (1977), pp. 392–406, <https://doi.org/10.1346/CCMN.1977.0250604>.
- [93] I. SULICIU, *On modelling phase transitions by means of rate-type constitutive equations. shock wave structure*, Int. J. Engin. Sci., 28 (1990), pp. 829–841, [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(90\)90028-H](https://doi.org/10.1016/0020-7225(90)90028-H).
- [94] P. K. SWEBY, *High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal., 21 (1984), pp. 995–1011, <https://doi.org/10.1137/0914082>.
- [95] B. TEMPLE, *Global solution of the Cauchy problem for a class of  $2 \times 2$  nonstrictly hyperbolic conservation laws*, Adv. Appl. Math., 3 (1982), pp. 335–375, [https://doi.org/10.1016/S0196-8858\(82\)80010-9](https://doi.org/10.1016/S0196-8858(82)80010-9).
- [96] B. TEMPLE, *Systems of conservation laws with coinciding shock and rarefaction curves*, Contemp. Math, 17 (1983), p. 151.
- [97] B. TEMPLE, *Systems of conservation laws with invariant submanifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., 280 (1983), pp. 781–795, <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1983-0716850-2>.
- [98] S. P. TRUSHENSKI, *Micellar flooding : sulfonate-polymer interaction*, in Improved Oil Recovery by Surfactant and Polymer Flooding, D. O. Shah and R. S. Schechter, eds., Academic Press, New York, 1977, pp. 555–575, <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-641750-0.50022-0>.
- [99] J. VAN DER CORPUT, *Verteilungsfunktionen i-ii*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., 38 (1935), pp. 1058–1066, <https://ci.nii.ac.jp/naid/10021037215/en/>.
- [100] B. VAN LEER, *Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme*, J. Comput. Phys., 14 (1974), pp. 361–370, [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(74\)90019-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(74)90019-9).

- [101] B. VAN LEER, *Towards the ultimate conservative difference scheme. III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow*, J. Comput. Phys., 23 (1977), pp. 263–275, [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(77\)90094-8](https://doi.org/10.1016/0021-9991(77)90094-8).
- [102] B. VAN LEER, *Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection*, J. Comput. Phys., 23 (1977), pp. 276–299, [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(77\)90095-X](https://doi.org/10.1016/0021-9991(77)90095-X).
- [103] B. VAN LEER, *Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method*, J. Comput. Phys., 32 (1979), pp. 101–136, [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1).
- [104] J. WADE, G. MARTIN, AND D. LONG, *An assessment of powder pycnometry as a means of determining granule porosity*, Pharm. Technol., 20 (2013), pp. 257–265, <https://doi.org/10.3109/10837450.2013.860550>.
- [105] D. H. WAGNER, *Equivalence of the Euler and Lagrangian equations of gas dynamics for weak solutions*, J. Diff. Eqs, 68 (1987), pp. 118–136, [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(87\)90188-4](https://doi.org/10.1016/0022-0396(87)90188-4).
- [106] G. P. WILLHITE AND J. G. DOMINGUEZ, *Mechanisms of polymer retention in porous media*, in Improved Oil Recovery by Surfactant and Polymer Flooding, D. O. Shah and R. S. Schechter, eds., Academic Press, 1977, pp. 511–554, <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-641750-0.50021-9>.
- [107] C. YUAN, M. DELSHAD, AND M. F. WHEELER, *Modeling multiphase non-Newtonian polymer flow in IPARS parallel framework*, Networks Heter. Media, 5 (2010), pp. 583–602, <https://doi.org/10.3934/nhm.2010.5.583>.
- [108] M. ZAUER, A. PFRIEM, AND A. WAGENFÜR, *Toward improved understanding of the cell-wall density and porosity of wood determined by gas pycnometry*, Wood Sci. Technol., 47 (2013), pp. 1197–1211, <https://doi.org/10.1007/s00226-013-0568-1>.
- [109] H. M. ZHANG, *A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior*, Transp. Res. Part B, 36 (2002), pp. 275–290, [https://doi.org/10.1016/S0191-2615\(00\)00050-3](https://doi.org/10.1016/S0191-2615(00)00050-3).



**Titre :** Modèles mathématiques et numériques avancés pour la simulation du polymère dans les réservoirs pétroliers

**Mots clés :** systèmes faiblement hyperboliques, résonance, volume de pore inaccessible, adsorption, schéma de Glimm, schéma de Godunov, schéma de relaxation

**Résumé :** Une technique efficace pour accroître la production d'un champ pétrolier consiste à y injecter un mélange d'eau et de polymère. La viscosité du polymère réduit en effet la mobilité de l'eau, qui pousse alors mieux l'huile, d'où un taux d'extraction plus élevé. La simulation numérique d'un tel procédé de récupération d'hydrocarbures revêt donc d'une importance capitale. Or, malgré des décennies de recherche, la modélisation des écoulements avec polymère en milieu poreux et sa résolution numérique demeurent un sujet difficile.

D'une part, les modèles habituellement employés par les ingénieurs de réservoir présentent, au mieux, des singularités de type résonance qui les rend faiblement hyperboliques. Ce défaut donne lieu à certaines complications mais reste acceptable. Au pire, quand on veut incorporer l'effet du volume de pore inaccessible (IPV), les modèles deviennent non hyperboliques, ce qui aggrave les instabilités numériques susceptibles d'apparaître.

D'autre part, les schémas numériques classiques ne conduisent pas à des résultats satisfaisants. Sans IPV, la diffusion excessive autour de l'onde de contact fait perdre les informations pertinentes. Avec IPV, l'existence des valeurs propres complexes crée des instabilités exponentielles au niveau continu qu'il faut traiter au niveau discret sous peine d'arrêt prématuré du code.

L'objectif de cette thèse est de remédier à ces difficultés. Au niveau des modèles, nous analysons plusieurs lois d'IPV et établissons une équivalence entre deux d'entre elles. Nous proposons de surcroît des conditions suffisantes raisonnables sur la loi d'IPV en vue de l'hyperbolicité faible du système d'écoulement. Au niveau des schémas pour le problème sans IPV, nous préconisons une correction afin d'améliorer la précision des discontinuités de contact. Pour le problème avec IPV, nous élaborons une méthode de relaxation qui garantit la stabilité des calculs quelle que soit la loi IPV.

**Title :** Advanced mathematical models and numerical methods for polymer simulation in oil reservoirs

**Keywords :** weakly hyperbolic systems, resonance, inaccessible pore volume, adsorption, Glimm scheme, Godunov scheme, relaxation scheme

**Abstract :** An effective technique to increase production in an oil field is to inject a mixture of water and polymer. The viscosity of polymer reduces the mobility of water, which then pushes oil better, resulting in a higher extraction rate. The numerical simulation of such an enhanced oil recovery is therefore of paramount importance. However, despite decades of research, the modeling of polymer flows in porous media and its numerical resolution remains a difficult subject.

On the one hand, the models traditionally used by reservoir engineers exhibit, in the best case, resonance-like singularities that make them weakly hyperbolic. This defect gives rise to some complications but remains acceptable. In the worst case, when we wish to incorporate the effect of the inaccessible pore volume (IPV), the models become non-hyperbolic, which exacerbates the numerical instabilities that are likely to appear.

On the other hand, classical numerical schemes do not yield satisfactory results. Without IPV, the excessive diffusion around the contact wave causes the most relevant information to be lost. With IPV, the existence of complex eigenvalues generates exponential instabilities at the continuous level that must be addressed at the discrete level to avoid a premature stop of the code.

The objective of this thesis is to remedy these difficulties. Regarding models, we analyze several IPV laws and show an equivalence between two of them. Furthermore, we propose reasonable sufficient conditions on the IPV law to enforce weak hyperbolicity of the flow system. Regarding schemes for the problem without IPV, we advocate a correction to improve the accuracy of contact discontinuities. For the problem with IPV, we design a relaxation method that guarantees the stability of the calculations for all IPV laws.