



LA JUSTE MESURE Une étude des compétences mathématiques des travailleurs de la canne à sucre du Nordeste du Brésil dans le domaine de la mesure

Nadja Acioly-Regnier

► To cite this version:

Nadja Acioly-Regnier. LA JUSTE MESURE Une étude des compétences mathématiques des travailleurs de la canne à sucre du Nordeste du Brésil dans le domaine de la mesure. Psychologie. Université Paris V Descartes, 1994. Français. NNT: . tel-03503845

HAL Id: tel-03503845

<https://hal.science/tel-03503845>

Submitted on 28 Dec 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS V – RENÉ DESCARTES

THÈSE EN PSYCHOLOGIE

(ARRÊTÉ DU 23 NOVEMBRE 1988)

SOUS LA DIRECTION DE GÉRARD VERGNAUD

La juste mesure

Une étude des compétences mathématiques des travailleurs de la
canne à sucre du Nordeste du Brésil dans le domaine de la mesure

Nadja Acioly

Soutenue le 28 février 1994

LA JUSTE MESURE

Une étude des compétences mathématiques des travailleurs de la canne à sucre du Nordeste du Brésil dans le domaine de la mesure

Résumé

L'objectif de cette recherche est d'analyser le fonctionnement cognitif des sujets analphabètes ou peu scolarisés, dans le domaine de la mesure. Les travailleurs de la canne à sucre du Nordeste du Brésil semblent développer une compréhension des relations mathématiques impliquées dans des activités de mesure spécifiques du travail à partir de l'usage d'un système régional de calcul d'aire induisant des surestimations systématiques. Toutefois, cette compréhension se révèle à travers l'emploi de schèmes non précis qui peuvent surestimer plus ou moins les aires en fonction des valeurs numériques choisies pour le calcul. Vingt et un sujets de différents niveaux hiérarchiques (ouvriers et employés) ont participé à cette recherche. A partir d'une étude ethnographique préliminaire des situations pratiques de travail dans la communauté, les données ont été recueillies au cours de trois phases. La phase I, plus exploratoire, impliquait des observations naturalistes et des entretiens individuels. Ces derniers concernaient les données individuelles des sujets et les données spécifiques à la résolution de problèmes de mesure dans le travail. Les sujets devaient calculer l'aire de terrains quadrilatères et triangulaires, dont les mesures étaient proposées par eux-mêmes, comme exemples, et ensuite par le chercheur. Dans cette phase la figure géométrique correspondant aux mesures proposées n'était pas présentée par le chercheur mais sollicitée du sujet qui devait la dessiner. Dans la phase II, "d'expérimentation" plus formelle, nous avons introduit des figures géométriques de même périmètre mais de surfaces différentes, qui ont été dessinées sur un papier ou construites avec une ficelle nouée. Nous avons demandé aux sujets de: (a) calculer l'aire des quadrilatères et des triangles qui représentaient des terrains dont les mesures étaient indiquées; (b) comparer les surfaces de ces figures; et (c) doubler l'aire d'un carré et chercher la valeur numérique du nouveau carré. De plus, dans cette phase, nous avons proposé des problèmes de mesure dont le contenu était familier et non familier. Nous avons voulu analyser la portée et les limites de compétences mathématiques des sujets. La phase III a consisté en observations plus ponctuelles concernant le calcul de surface dans des activités réelles de travail, et a permis l'observation de la facette administrative de l'usine. Les résultats de la première phase révèlent l'emploi de schèmes non précis de calcul avec un choix des mesures qui surestiment les surfaces

(davantage dans le cas des ouvriers que dans le cas des employés). Dans la phase II, plus formelle, nous avons vu apparaître de nouvelles stratégies de calcul d'aire susceptibles de corriger les distorsions les plus importantes. En ce qui concerne les problèmes proposés, leur contenu semble jouer un rôle important dans les schèmes évoqués et induisent un nombre élevé de refus pour les problèmes de contenu non familier. Enfin, dans la troisième phase, les sujets compensent les distorsions résultant de l'emploi de la formule régionale par des processus de négociation. Les résultats montrent que les compétences mathématiques sont construites socialement et transmises dans des structures sociologiquement repérables.

Abstract

Mathematical understanding among sugar cane farmers

This study is aimed at analyzing the cognitive functioning of illiterate subjects or subjects with little schooling in the mathematical domain. These subjects, while working as sugar-cane planters, have to deal with mathematical computations involving the determination of the area of different plots of land, and to develop, without any direct help from school instruction, an understanding of mathematical relations. This understanding, however, is developed through the use of non-precise schemes, which, depending on the measures chosen to be included in the computation, may sub estimate or overestimate the final results. Twenty-one sugar cane workers, occupying different levels in the hierarchy of the sugar cane plantation, from cane cutters to supervisors and administrators, took part in the study. Following an ethnographic study of the work in the plantation, data were collected in three phases. In phase I subjects were individually interviewed about how they would compute the area of plots of measures spontaneously given by themselves, followed by the computation of areas of plots with measures suggested by the interviewer. In this phase, the precise shapes of the plots (quadrilaterals or triangles) were not drawn. Phase II consisted of a more formal interview in which the subject was presented, in view of drawings on paper, with the same perimeter, but different surfaces. They had to: (a) compute the area of quadrilateral and triangles representing plots of land with all measures indicated; (b) compare the surfaces of figures representing plots of land; and (c) double the area of a square. Phase III consisted of field observations and interviews to clarify some points raised by the results of previous phases, and determine the most common types of plots that workers deal with in their everyday activities. Results of the first phase show the constant use of non-precise computational schemes with choice of elements that overestimate (in the case of cane cutters) or sub estimate (in the case of supervisors and administrators) the area to be worked. In the second, more formal phase, new strategies, aimed at correcting distortions increased by the irregular shape of plots were found. Finally, in the third phase, we found that workers at all levels seem to be aware of the distortions resulting from the use of a wrong formula and that these distortions can be compensated by other social mechanisms. The choice of measures in this context may be interpreted as a result of the particular social interactions in which computations take place, thus illustrating how the development of mathematical understanding is intertwined with the cultural context involved in the situation where

problems are solved. Results are discussed in terms of methodological and conceptual issues relating culture and the development of mathematical knowledge.

Remerciements

Je remercie...

- Les femmes et les hommes qui ont acceptés d'être les sujets de cette recherche, pour les bons moments qu'ils nous ont permis de passer, ainsi que pour la "patience" avec laquelle ils acceptaient nos questions.
- Gérard Vergnaud, pour son exigence de rigueur et son ouverture à des perspectives nouvelles, ainsi que pour la disponibilité dans le suivi de toutes les étapes de cette recherche . Enfin pour les moments agréables et productifs de discussion et d'orientation de notre recherche.
- Le CNPq (Centro Nacional de Pesquisa Cientifica e tecnologica) qui a assuré le financement de mon séjour en France, ainsi que celui des enquêtes dont les résultats sont présentés ici.
- Marcia Regina Souza de Sá qui m'a aidée dans la conduite des enquêtes sur le terrain ainsi que Hulda Stadtler et Clara Santos pour le début du recueil des données, interrompu brusquement par accident de transport.
- Toutes les personnes qui ont manifesté leur confiance en acceptant de s'entretenir avec moi, surtout l'équipe de Ressources Humaines de "l'Usine Central Barreiros" que m'a ouvert les portes pour le travail. L'équipe de Ressources Humaines de l'Usina Estreliana mérite aussi toute ma gratitude pour m'avoir fait découvrir la culture de la canne à sucre et pour avoir suscité les idées qui ont conduit à la problématique de cette recherche.
- Analucia Schliemann et Alba Guerra, mes professeures à Recife, qui m'ont introduite dans le monde de la recherche.
- Le personnel du Laboratoire, notamment Pauline Le Bourhis, dont l'accueil toujours chaleureux nous a fait oublier, par moment, les difficultés liées à un travail de thèse; et à Marguerite Fabre pour sa disponibilité constante et pour l'aide à la correction de la bibliographie.
- Mes parents, dont les réponses sous forme des questions, ont permis le doute, la découverte, et ainsi d'assumer le fait de ne pas savoir.
- Jacques Caux pour la lecture attentive de ce travail.
- Sarah, Camille et Éponine pour le bruit externe continu permettant un silence interne propice au travail.
- Jean-Pierre Bellier, mon compagnon de route, pour son aide durant cette trajectoire doctorale.

Table des matières

Résumé	2
Remerciements	6
Table des matières	7
Index des tableaux, figures, illustrations et dialogues.....	11
Introduction	15
1.1. Analyse des compétences cognitives des adultes peu scolarisés ou analphabètes: aspects théoriques et méthodologiques:	16
1.1.1. <i>Généralisation d'apprentissage - universalité et spécificité des processus cognitifs</i> 19	
1.1.2. <i>Explicitation des procédures de résolution de problèmes</i>	21
1.1.3. <i>Différences culturelles entre chercheur et sujet: représentations de la situation et de la tâche</i> 25	
1.2. Bref historique sur la question culture et cognition.....	26
1.2.1. <i>Antécédents anthropologiques</i>	26
1.2.1.1. Variabilité interculturelle - relativisme culturel - variabilité intra-culturelle	27
1.2.2. <i>Culture et cognition en psychologie.....</i>	28
1.2.2.1. Rôle de la culture dans le développement cognitif.....	28
1.2.2.2. De la notion de variabilité intra-culturelle à la notion d'interaction sociale	28
1.3. Cadre théorique de cette recherche.....	31
1.3.1. <i>La théorie des champs conceptuels.....</i>	33
1.3.2. <i>La représentation</i>	35
1.3.2.1. Les composantes de la représentation	36
1.3.2.2. Les problèmes de correspondance entre les composantes de la représentation.....	37
1.3.2.3. Correspondance entre signifiant et signifié	38
1.3.2.4. Correspondance entre signifié et référent, autrement dit entre le niveau du signifié de la représentation et le monde réel.....	39
1.3.2.5. Correspondance entre différents systèmes symboliques.	40
1.3.2.6. Représentation et situation	42
1.3.3. <i>Le concept</i>	43
1.3.3.1. Le concept et l'ensemble des situations.....	44
1.3.3.2. Le concept et l'ensemble des invariants opératoires.....	45
1.3.4. <i>Compétences et conceptions.....</i>	49
1.4. Position du Problème.....	50
Chapitre 2. Quand le psychologue étudie des compétences "mathématiques": analyse des aspects conceptuels et de la dimension socioculturelle	52
2.1. Les représentations des mathématiques.....	53
2.1.1. <i>Les aspects conceptuels des représentations mathématiques</i>	56
2.1.1.1. Le concept de mesure.....	59
2.1.1.2. Mesures indirectes et notion de mesure composée.....	60
2.1.1.3. Considérations cognitives sur les mesures de surfaces	61
2.1.1.4. Les modes de travail opératoire de calcul de surface.....	62
2.1.1.5. Le processus scolaire d'enseignement des mesures.....	62

2.1.2. <i>Les aspects socioculturels des représentations mathématiques</i>	63
2.1.2.1. Les mathématiques comme discipline scientifique formelle, universelle et décontextualisée: conséquences didactiques	64
2.1.2.2. Le pouvoir des mathématiques formelles.....	65
2.1.2.3. Les mathématiques comme produit culturel: conséquences éducationnelles.....	66
2.1.2.4. La mesure dans la vie quotidienne: questions théoriques posées par l'activité pratique de la mesure.....	70
2.1.2.5. Le mesurant et l'approximation	70
2.1.2.6. Les mesures indirectes; notion de mesure composée	71
Chapitre 3 : Description du Contexte de la Recherche	72
3.1. Quelques remarques sur la région du Nordeste du Brésil	73
3.1.1. <i>Éducation</i>	75
3.1.2. <i>Travail</i>	76
3.1.3. <i>Les zones climatiques</i>	79
3.1.3.1. L'État Fédéré de Pernambuco.....	80
3.2. Quelques mots pour comprendre la situation dans les années 90.....	80
3.2.1. <i>La culture de la canne à sucre dans la région : remarques historiques sur la colonisation</i>	81
3.2.1.1. Les besoins capitalistes du marché international et les besoins contradictoires de la société semi-féodale développée dans la colonie	81
3.2.1.2. La nature du travail dans les plantations	83
3.2.1.3. La "géométrie de la colonisation agraire"	84
3.2.1.4. Remarques historiques sur l'implantation de moulins de sucre.....	85
3.2.2. <i>La culture de la canne à sucre aujourd'hui</i>	87
3.2.2.1. La structure sociale hiérarchique du milieu agricole.....	90
3.2.2.2. Les activités associées à la culture de la canne à sucre	96
3.2.2.3. Le nettoyage du terrain.....	96
3.2.2.4. Le piochage des fossés.....	98
3.2.2.5. Le fumage du terrain	98
3.2.2.6. La plantation de la canne à sucre	100
3.2.2.7. La récolte de la canne à sucre: commentaires sur les systèmes de canne attachée et de canne détachée	101
3.2.3. <i>Procédures mathématiques impliquées dans les deux systèmes de récolte</i>	102
3.2.3.1. Système de récolte de la canne à sucre attachée	102
3.2.3.2. Le système de récolte de la canne à sucre détachée.....	104
3.2.3.3. La valorisation de certaines activités dans la communauté: la division sexuelle du travail	107
3.3. Les aspects mathématiques impliqués dans les activités agricoles	108
3.3.1. <i>Le concept de mesure chez les exploitants agricoles de canne à sucre</i>	108
3.3.1.1. Les unités de mesure	108
3.3.1.2. Procédures de mesure.....	109
3.4. Calcul d'aire chez les Égyptiens primitifs et chez les travailleurs de canne à sucre du Nordeste du Brésil: quel rapport existe-t-il?.....	118
3.4.1. <i>Aspects conceptuels: la Hauteur: est-ce bien là le problème?</i>	120
3.4.2. <i>Aspects socioculturels: validation du système par la communauté</i>	121
3.5. Quelques mots pour conclure sur les objectifs de la recherche	122
Chapitre 4 : Méthodologie	124
4.1. Description des sujets	126
4.2. Recueil et analyse de données	129

4.2.1. <i>Première Phase</i>	133
4.2.1.1. Les observations naturalistes.....	133
4.2.1.2. Les entretiens individuels.....	134
4.2.1.3. Données individuelles des sujets de la recherche.....	135
4.2.1.4. Données spécifiques à la résolution de problèmes de mesure dans le travail.....	135
4.2.1.5. Système de Mesure de Surface: Exemples proposés par les sujets	136
4.2.1.6. Système de mesure de surface: exemples proposés par le chercheur	136
4.2.2. <i>Deuxième Phase</i>	138
4.2.2.1. Calcul, comparaison et duplication de surfaces quadrilatères	139
4.2.2.2. Calcul de l'aire des quadrilatères.....	142
4.2.2.3. Comparaison des surfaces quadrilatères	143
4.2.2.4. Duplication de la surface d'un carré.....	143
4.2.2.5. Les Triangles.....	144
4.2.2.6. Figures géométriques différentes, de périmètre identique.....	146
4.2.2.7. Problèmes complexes où le calcul des surfaces intervient dans la résolution.....	146
4.2.2.8. Problème de la série I.....	147
4.2.2.9. Problème de la série II (calcul de prix)	148
4.2.3. <i>Troisième phase</i>	149
4.2.3.1. Quelques observations dans le bureau de l'usine.....	149
4.2.3.2. Données recueillies auprès de la FETAPE : mesures publiées dans le Journal Officiel déterminant les normes de salaire par surface travaillée	149
4.2.3.3. Sur les terrains de l'usine: comment les calculs d'aire sont-ils effectués? Réflexions sur quelques données	149
Chapitre 5 : Résultats de la Première Phase.....	150
5.1. La chercheuse, les sujets et l'usine ("les patrons").....	150
5.2. Les rapports entre les sujets de l'échantillon de la recherche.....	152
5.3. Les connaissances mathématiques des sujets	153
5.3.1. <i>Système de calcul d'aire impliqué dans des activités de travail.</i>	153
5.3.1.1. Quadrilatères	153
5.3.1.2. Triangles	165
5.3.1.3. Utilisation des contradictions internes des formules comme élément de sous-estimation ou de surestimation par catégorie des sujets (quadrilatères et triangles)	174
5.4. Quelques premières conclusions	175
5.4.1. <i>Aspects conceptuels</i>	175
5.4.2. <i>Aspects socioculturels</i>	176
Chapitre 6 : Résultats de la Deuxième Phase	179
6.1. Calcul, comparaison et duplication de surfaces de quadrilatères	179
6.1.1. <i>Les figures sont-elles considérées dans les tâches de calcul, de comparaison et de duplication de surfaces ? Le périmètre et la surface sont-ils confondus ? Les valeurs du périmètre et de l'aire: sont-elles confondues ?</i>	181
6.1.1.1. Stratégies de calcul d'aire pour les figures de même périmètre.....	181
6.1.1.2. Comparaison des surfaces de figures de même périmètre.....	186
6.1.1.3. Duplication de la surface d'un carré et recherche de la valeur numérique des côtés de ce nouveau carré	190
6.1.2. <i>Quelles sont les argumentations des sujets lors de la constatation de différences entre l'aire calculée ou estimée et celle observée à travers un transparent quadrillé?</i>	196
6.1.3. <i>La surface des parallélogrammes et des losanges est-elle souvent surestimée? Si oui, est-ce fonction de la catégorie des sujets? l'écart à la figure prototypique?</i>	202

6.2. Calcul de surfaces triangulaires.....	204
6.2.1. <i>Stratégies de mesure de surfaces triangulaires</i>	204
6.2.2. <i>La systématique du choix du côté susceptible d'être divisé par 2</i>	207
6.2.3. <i>Performance des sujets en fonction du résultat obtenu de chaque triangle présenté et des catégories professionnelles de sujets</i>	210
6.3. Quelques conclusions: où les aspects conceptuels et socioculturels sont difficilement isolés	212
Chapitre 7 : Résultats de la deuxième phase: problèmes complexes de contenu familial et non-familier.....	215
7.1. Problèmes de la série I.....	215
7.1.1. <i>Stratégies de résolution</i>	217
7.1.1.1. Refus immédiat du problème entier	217
7.1.1.2. Stratégies de calcul de la moyenne	219
7.1.1.3. Stratégies de calcul du poids total	220
7.1.1.4. Stratégies de calcul du prix	220
7.2. Problèmes de la série II	224
7.2.1. <i>Stratégies de résolution</i>	225
7.2.1.1. Réponse immédiate sans explication pour le calcul d'aire	225
7.2.1.2. Refus immédiat	225
7.2.1.3. Refus de calculer le prix.....	225
7.2.1.4. Calcul du prix en doublant d'abord le salaire	226
7.2.1.5. Calcul du prix par multiplication de la surface obtenue par le prix de 70 cubos.....	227
7.2.2. <i>Stratégies de résolution</i>	229
7.2.2.1. Réponse immédiate sans explication pour le calcul d'aire	229
7.2.2.2. Refus immédiat	229
7.2.2.3. Calcul de l'aire par la multiplication de la longueur des côtés du drap	229
7.2.2.4. Calcul de l'aire par la mesure directe de pavage	231
7.2.2.5. Calcul de l'aire par la somme des côtés.....	232
Chapitre 8 : Résultats de la troisième Phase.....	233
8.1. Données recueillies auprès de la FETAPE: mesures publiées dans le journal officiel déterminant les normes de salaire par surface travaillée	234
8.2. Quelques observations dans les bureaux de l'usine	236
8.3. Les calculs d'aire effectivement réalisés sur les terres appartenant à l'usine.....	236
Conclusion.....	241
9.1. Conceptualisation développée hors du système scolaire et possibilités de généralisation	242
9.2. Explicitation des procédures de résolution de problèmes: le sens de quelques verbalisations, ou de leur absence.....	244
9.3. La représentation de la chercheuse et celle des sujets.	248
Références bibliographiques	251
Annexes	260

Index des tableaux

Tableau 1-1. Caractéristiques de deux styles d'apprentissage	18
Tableau 3-1 Distribution de la population du Brésil selon le type d'habitat par grandes régions (IBGE-PNAD, 1989)	75
Tableau 3-2 Indices d'analphabétisme de personnes de 7 ans et plus par type d'habitat et grandes régions (IBGE-PNAD, 1989)	75
Tableau 3-3 Taux d'analphabétisme des personnes de 7 à 17 ans au Nordeste et au Sud-Est du Brésil	76
Tableau 3-4 Mortalité des enfants et espérance de vie au Nordeste du Brésil	76
Tableau 3-5 Distribution de la population active par grandes régions, selon la nature du travail (IBGE-PNAD, 1989)	77
Tableau 4-1. caractérisation des sujets.....	127
Tableau 4-2. Age du début du travail agricole par catégorie de sujets.....	128
Tableau 4-3. Années de scolarité par catégorie de sujets.....	128
Tableau 4-4. Caractérisation des phases I et II du recueil de données	132
Tableau 4-5. Description des problèmes complexes présentés aux sujets.....	147
Tableau 5-1. Types de quadrilatères proposés spontanément par catégorie de sujets.....	154
Tableau 5-2. Types de quadrilatères proposés aux sujets par la chercheuse et stratégies de résolution.....	157
Tableau 5-3. Stratégies de calcul des surfaces des quadrilatères par catégories	160
Tableau 5-4. Stratégies de calcul des surfaces des quadrilatères par catégorie.....	162
Tableau 5-5. Types de triangles proposés par catégorie de sujets et stratégies de résolution	166
Tableau 5-6. Types de triangles proposés aux sujets par le chercheur et stratégies de résolution	168
Tableau 5-7. Stratégies de calcul de surfaces triangulaires chez les exploitants de canne à sucre du Nordeste du Brésil	169
Tableau 5-8. Choix du côté divisé par 2 pour les triangles non équilatéraux.....	170
Tableau 5-9. Choix du côté divisé par deux pour les triangles isocèles	171
Tableau 5-10. Choix du côté divisé par deux pour les triangles scalènes	172
Tableau 5-11. Comparaison du résultat de la stratégie choisie par rapport aux autres possibilités en fonction de la catégorie du sujet.....	173
Tableau 5-12. Résultat des stratégies de calcul, pour les quadrilatères et les triangles par catégories de sujets.....	175
Tableau 5-13. Choix des surfaces possibles en fonction de la stratégie utilisée par catégories de sujets	175
Tableau 6-1. Stratégies de calcul de surface selon la catégorie des sujets et la figure présentée	181
Tableau 6-2. Méthode de calcul des surfaces selon la catégorie des sujets et la figure présentée	185
Tableau 6-3. Comparaison de 4 figures géométriques de même périmètre (carré, rectangle, triangle et cercle) formées à partir d'une ficelle.....	187
Tableau 6-4. Comparaison au carré A et des losanges C et D, par catégorie de sujets.....	189
Tableau 6-5. Comparaison des parallélogrammes F et G au rectangle E par catégorie de sujets.....	189
Tableau 6-6. Stratégies de duplication du carré 4x4 selon la catégorie des sujets	193
Tableau 6-7. Surface calculée ou estimée de différentes figures par catégorie de sujets	196
Tableau 6-8. Réponses à la contradiction apportée par la mesure directe par quadrillage (carrés et losanges.....	197
Tableau 6-9. Surfaces estimées ou calculées des rectangles et des parallélogrammes, selon la catégorie de sujets ..	199
Tableau 6-10. Réponses à la contradiction apportée par la mesure directe par quadrillage (rectangles et parallélogrammes).....	199
Tableau 6-11. Stratégies, résultats et nature de réponses des employés lors de la demande de calcul d'aire des losanges et parallélogrammes	200
Tableau 6-12. Nature de l'estimation de la surface des figures selon la catégorie de sujets.....	203
Tableau 6-13. Stratégies de calcul de surfaces triangulaires selon la catégorie de sujets et le type de triangle présenté	207
Tableau 6-14. Taille du côté choisi pour être divisé par 2	208
Tableau 6-15. Taille des surfaces obtenues parmi les possibilités de la formule régionale et variantes selon la catégorie de sujets.....	209
Tableau 6-16. Surface calculée ou estimée de différents triangles selon la catégorie de sujets	210
Tableau 6-17. Nature de l'estimation de la surface de triangle selon la catégorie des sujets	210
Tableau 7-1 Contenu Familier	216
Tableau 7-2 - Contenu non familial	216

Tableau 7-3 Décomposition linéaire dans la stratégie d'un calcul de prix en langage mathématique scolaire.....	221
Tableau 7-4. Performances des sujets dans le problème familier de calcul de surface et de prix	224
Tableau 7-5. Performances des sujets dans le problème de contenu non familier de calcul de surface et de prix.....	228
Tableau 8-1 Tableau de tâches journalières minimum par régime de production:.....	235
Tableau 8-2. Stratégies de calcul d'aire des terrains dans des situations de travail	237

Index des figures

Figure 3-1 Divisions politiques et régionales du Brésil	73
Figure 3-2 Place du Brésil dans l'Amérique du Sud	74
Figure 3-3. Distribution des revenus au Brésil.....	78
Figure 3-4. États et zones agraires du Nordeste du Brésil.....	79
Figure 3-5 Carnet de Présence du Travailleur rural	94
Figure 3-6 procédure de sous-estimation - Figure 3-7 procédure de surestimation	110
Figure 3-8. Polygone dessiné et calculs effectués par un agriculteur pour montrer la procédure de calcul de l'aire d'un terrain quadrilatère	112
Figure 3-9. L'incertitude du système de calcul régional : l'exemple d'un parallélogramme non-rectangle	113
Figure 3-10. Polygone dessiné et calculs effectués par un agriculteur pour démontrer la procédure de mesure de la surface d'un terrain de forme triangulaire.....	114
Figure 3-11. Calcul de l'aire d'un triangle par la formule de Héron	115
Figure 3-12. Exercices de calculs de surfaces chez les Egyptiens	120
Figure 4-1. Type de figures abordés	131
Figure 4-2. Quadrilatères présentés dans la deuxième phase de recueil des données	140
Figure 4-3. Quadrilatères présentés dans la deuxième phase de recueil des données	140
Figure 4-4. Triangle rectangle présenté dans la phase II du recueil de données	145
Figure 4-5. Triangle I.....	146
Figure 6-1. Stratégie de calcul de l'aire du carré B	182

Index des dialogues entre la chercheuse et les sujets

Dialogue	5-1	Système de calcul d'aire impliqué dans des activités de travail.....	155
Dialogue	5-2	Système de calcul d'aire impliqué dans des activités de travail.....	155
Dialogue	5-3	Système de calcul d'aire impliqué dans des activités de travail.....	155
Dialogue	5-4	Choix du côté.....	171
Dialogue	5-5	Choix du côté.....	171
Dialogue	6-1	Stratégies de calcul d'aire pour les figures de même périmètre.....	182
Dialogue	6-2	Stratégies de calcul d'aire pour les figures de même périmètre.....	183
Dialogue	6-3	Stratégies de calcul d'aire pour les figures de même périmètre.....	184
Dialogue	6-4	Stratégies de calcul d'aire pour les figures de même périmètre.....	185
Dialogue	6-5	Stratégies de calcul d'aire pour les figures de même périmètre.....	186
Dialogue	6-6	Stratégies de calcul d'aire pour les figures de même périmètre.....	186
Dialogue	6-7	Comparaison des surfaces de figures de même périmètre.....	188
Dialogue	6-8	Comparaison des surfaces de figures de même périmètre.....	188
Dialogue	6-9	: Dialogue du Ménon - Platon	191
Dialogue	6-10	Duplication de la surface d'un carré et recherche de la valeur numérique des côtés de ce nouveau carré	193
Dialogue	6-11	Duplication de la surface d'un carré et recherche de la valeur numérique des côtés de ce nouveau carré	194
Dialogue	6-12	Duplication de la surface d'un carré et recherche de la valeur numérique des côtés de ce nouveau carré	194
Dialogue	6-13	Duplication de la surface d'un carré et recherche de la valeur numérique des côtés de ce nouveau carré	195
Dialogue	6-14	Duplication de la surface d'un carré et recherche de la valeur numérique des côtés de ce nouveau carré	195
Dialogue	6-15	Confirme une réponse antérieure et rectifie des petites erreurs - Losange	197
Dialogue	6-16	Rectifie des petites erreurs -Losange.....	197
Dialogue	6-17	Reconnaît des erreurs -Losange	198
Dialogue	6-18	Admet cette méthode mais confirme la sienne – Losange	198
Dialogue	6-19	Calcul d'aire de losanges	201
Dialogue	6-20	Calcul d'aire de parallélogrammes	201
Dialogue	6-21	Calcul d'aire de parallélogrammes	202
Dialogue	6-22	La surface des parallélogrammes et des losanges	204
Dialogue	6-23	Stratégies de mesure de surfaces triangulaires	205
Dialogue	6-24	Stratégies de mesure de surfaces triangulaires	205
Dialogue	6-25	Stratégies de mesure de surfaces triangulaires	206
Dialogue	6-26	La systématique du choix du côté.....	208
Dialogue	6-27	La systématique du choix du côté.....	209
Dialogue	6-28	La systématique du choix du côté.....	211
Dialogue	6-29	La systématique du choix du côté.....	211
Dialogue	7-1	Refus immédiat	217
Dialogue	7-2	Refus immédiat	217
Dialogue	7-3	Refus immédiat	217
Dialogue	7-4	Refus immédiat	218
Dialogue	7-5	Refus immédiat	218
Dialogue	7-6	Refus après tentative	219
Dialogue	7-7	Stratégies de calcul de la moyenne.....	219
Dialogue	7-8	Stratégies de calcul de la moyenne.....	220
Dialogue	7-9	Stratégies de calcul de la moyenne.....	220
Dialogue	7-10	Stratégies de calcul du prix	221
Dialogue	7-11	Stratégies de calcul du prix	221
Dialogue	7-12	Stratégies de calcul du prix	222
Dialogue	7-13	Stratégies de calcul du prix	223
Dialogue	7-14	Stratégies de calcul du prix	223

Dialogue	7-15 Réponse immédiate sans explication.....	225
Dialogue	7-16 Refus immédiat	225
Dialogue	7-17 Refus de calculer le prix.....	226
Dialogue	7-18 Refus de calculer le prix.....	226
Dialogue	7-19 Calcul du prix en doublant d'abord le salaire	226
Dialogue	7-20 Calcul du prix en doublant d'abord le salaire	226
Dialogue	7-21 Calcul du prix en doublant d'abord le salaire	227
Dialogue	7-22 Calcul du prix en doublant d'abord le salaire	227
Dialogue	7-23 Calcul du prix en doublant d'abord le salaire	227
Dialogue	7-24 Calcul du prix par multiplication de la surface.....	228
Dialogue	7-25 Réponse immédiate sans explication pour le calcul d'aire.....	229
Dialogue	7-26 Refus immédiat	229
Dialogue	7-27 Calcul de l'aire par la multiplication de la longueur des côtés du drap	230
Dialogue	7-28 Calcul de l'aire par la multiplication de la longueur des côtés du drap	231
Dialogue	7-29 Calcul de l'aire par la mesure directe de pavage.....	231
Dialogue	7-30 Calcul de l'aire par la somme des côtés.....	232

Index des illustrations

Photo 3.1. Zone de la mata sud de Pernambuco.....	89
Photo 3.2 Parcours des ouvriers vers le lieu de travail.....	92
Photo 3.3 Parcours des ouvriers vers le lieu de travail.....	92
Photo 3.4. Un chef d'équipe avec un groupe d'ouvrières.....	93
Photo 3.5 Nettoyage du terrain.....	97
Photo 3.6 Nettoyage du terrain.....	97
Photo 3.7 Fumage du terrain	100
Photo 3.8 Plantation de la canne à sucre	101
Photo 3.9. Cambiteiros (ouvriers chargés du transport de la canne à sucre)	103
Photo 3.10. Technique de "embolada"	105
Photo 3.11 Technique de l'"embolada"	105
Photo 3.12. Marquage du point de départ pour mesurer le terrain	109

Introduction

Cette recherche a eu pour objet d'analyser l'incidence d'un système particulier de calcul de mesure sur la compréhension et l'opérationnalité des concepts qui lui sont liés. Des travailleurs de la canne à sucre du Nordeste du Brésil constituent les sujets de cette étude; le contexte des situations de travail auxquelles ils sont confrontés en représente l'environnement. Les sujets, en général analphabètes ou peu scolarisés, acquièrent la compréhension de relations mathématiques impliquées dans des activités de mesure spécifiques du travail, sans l'aide directe du système scolaire. Cependant, cette compréhension, fondée sur des principes mathématiques erronés, se révèle a priori sous la forme de l'emploi de schèmes non précis.

Ce travail devrait permettre d'apporter des éléments d'information complémentaires sur les compétences et conceptions des adultes peu scolarisés, dans le domaine de la mesure. Les concepts abordés dans cette recherche, bien que situés dans le cadre d'une culture particulière, sont également présents dans l'enseignement formel des mathématiques. Nous tenterons de comprendre les conditions d'usage d'un système de mesure dans un contexte où les conventions pour mesurer diffèrent de façon radicale de celles du contexte scolaire. Nous postulons que l'analyse de ces conditions peut fournir des éléments nouveaux à la compréhension du concept de mesure: l'étude des niveaux de conceptualisation de complexité différente, susceptibles d'être évoqués en fonction des situations spécifiques d'un contexte, peut être utile pour alimenter la réflexion didactique. L'expérience professionnelle ne se réduit pas à la simple acquisition d'habiletés pratiques. Elle s'appuie sur une base conceptuelle. Autrement dit, nous supposons que certaines pratiques de travail induisent une forme de développement cognitif des adultes. Cette idée génère des débats théoriques importants, dans la mesure où le développement cognitif des adultes semble être "un point aveugle entre les théories du traitement de l'information et les théories ontogénétiques" (Pailhous & Vergnaud, 1989).

Ce travail ne vise pas à étudier les modes d'acquisition des compétences, mais plutôt à comprendre leur organisation à un moment donné. Nous faisons souvent référence à la notion de "niveau de conceptualisation", qui sous-entend l'idée d'un développement cognitif. La question du choix du référentiel théorique pour l'analyse et l'interprétation des données est ainsi posée.

Le modèle piagétien laisse à penser que le développement cognitif s'arrête à l'adolescence. Ceci paraît peu pertinent au regard du travail que nous nous proposons de mener. Cependant, on peut

conserver la référence à l'ontogenèse si, dans cette ontogenèse le rôle joué par les contenus des tâches dans les performances des sujets est pris en compte (Vergnaud, 1987c). Dans ce cas, le développement cognitif ne paraît une référence théorique inutile pour les adultes, mais il doit alors relever d'un modèle d'ordre partiel d'acquisition de compétences, plutôt que d'un modèle d'ordre total entre stades. Cette référence au développement sous-entend également que la conceptualisation est construite et que cette construction est fonction de processus internes au sujet, qui s'actualisent dans un contexte social leur imposant autant de limites que de conditions favorables.

Nous nous proposons d'étudier ces questions au long de ce chapitre, autant pour situer la problématique de cette recherche que les points de discussion susceptibles d'apparaître, en fonction du choix de certaines approches théoriques et méthodologiques. Nous concluons par la proposition d'un cadre théorique semblant le mieux adapté, en fonction de la nature des données de cette recherche.

1.1. Analyse des compétences cognitives des adultes peu scolarisés ou analphabètes: aspects théoriques et méthodologiques:

L'étude des compétences cognitives de sujets peu ou non scolarisés n'est pas une tâche simple. Bien au contraire, cette étude conduit souvent à des impasses déjà largement discutées dans la littérature. Plusieurs facteurs ont été évoqués comme sources d'erreur pendant l'analyse, mais la diversité des variables impliquées et l'effet de leur interaction sont loin d'être cernés. Dans cette perspective, et considérant la complexité de cette tâche, comment pourrait-on reconnaître ces compétences de façon à les analyser ? Comment les classer sans être lié par les grilles d'analyse élaborées pour les performances de sujets scolarisés ? Comment systématiser les résultats, et dépasser le niveau des exemples anecdotiques ? Comment intégrer de façon convenable la rigueur de l'expérimentation et la richesse des méthodes "naturalistes" dans le but de garantir la validité interne et écologique des recherches ? La nature épistémologique, théorique et méthodologique de ces questions, dont les réponses ne sont pas évidentes, mérite un développement.

On infère l'existence de compétences à partir de performances explicites et/ou de verbalisations de sujets sur leurs procédures. Que peut-il se passer lorsque ces performances s'éloignent à ce point de celles validées par l'éducation formelle, tout en restant cependant reconnues par un milieu social spécifique ? Que peut-il se passer quand, en plus, (et comme dans la majorité des cas), le sujet n'a

pas la possibilité de justifier clairement les procédures impliquées dans ses performances ? Notre intérêt se porte d'une façon plus ponctuelle dans cette recherche, sur les compétences mathématiques en situation de résolution de problèmes. Mais une analyse plus exhaustive des compétences cognitives impliquées s'impose.

Traditionnellement, les recherches sur le développement cognitif (voir Greenfield, 1966; Luria, 1976; Scribner et Cole, 1973; Sharp, Cole et Lave, 1979; et Rogoff, 1981) montrent que les performances des sujets scolarisés sont supérieures à celles des sujets non-scolarisés. Cependant, la nature de ces tâches, généralement fondées sur des connaissances scolaires, nous incite à la prudence quant à l'interprétation de ces résultats (voir Sharp, Cole et Lave, 1979). En revanche, les recherches sur les connaissances mathématiques¹ en situation de travail montrent les limites de la contribution de l'expérience scolaire à la résolution de certaines tâches, et suggèrent un rôle plus important de l'expérience pratique dans le développement de ce type de connaissance (voir Lave, 1977; Greenfield et Lave, 1982; Reed et Lave, 1979).

Sous-jacente à cette discussion émerge l'idée que la réussite à la résolution de problèmes dépend d'un rapport entre le type de tâche ou de situation dans lesquelles ces problèmes sont insérés, et le type d'apprentissage prédominant vécu par le sujet (à l'école ou au travail, par exemple ; voir Acioly, 1985; Acioly et Schliemann, 1986a et 1986b ; Schliemann et Acioly, 1989a et 1989b). On peut également supposer que pour bien reconnaître - et par conséquent bien analyser - des compétences cognitives de sujets peu ou non scolarisés, il est nécessaire d'intégrer d'autres considérations théoriques que celles jusqu'ici évoquées. Observons, par exemple, qu'une grande majorité de recherches ont comme but l'analyse des erreurs et des réussites des sujets, mais que l'analyse de la tâche à accomplir et de la représentation de cette tâche est plus rarement effectuée. Considérer l'idée du rapport entre la nature de la tâche et le type d'apprentissage le plus familier au sujet individuel implique une discussion préalable de points importants.

La résolution de problèmes - y compris celle des problèmes mathématiques - est une activité de l'éducation formelle scolaire, à travers des calculs écrits et la recherche de solutions exactes; mais c'est aussi une activité de l'éducation informelle, celle de la vie quotidienne, caractérisée par des calculs mentaux et des approches par estimation. Bien que cette caractérisation de l'éducation, en

¹ Parler de connaissances mathématiques au pluriel implique l'existence de plusieurs connaissances mathématiques, voire de plusieurs mathématiques. Pour une discussion plus approfondie de ce sujet, se reporter au chapitre 2.

deux extrêmes, puisse être excessivement schématique, en raison de la coexistence, dans toutes les sociétés, d'une gamme de styles formels et informels d'apprentissage, on observe que les classes les plus défavorisées s'appuient surtout sur le style informel, alors que les classes privilégiées participent, plutôt, du style formel.

Ces " styles " éducationnels présentent des caractéristiques propres, qui peuvent être considérées comme celles attribuées par Greenfield et Lave (1982) à l'éducation formelle et informelle dans leurs extrêmes². Les caractéristiques de deux styles d'apprentissage sont présentées dans le tableau 1.

Styles informels d'apprentissages	Styles formels d'apprentissages
• les apprentissages sont intégrés dans les activités de la vie quotidienne en tant que sous-produits de l'activité; • l'apprenant est le responsable direct de son apprentissage ; sa motivation est liée soit à son lien de proximité avec le "professeur" (parent, ami, voisin etc.), soit à la valeur qu'il attribue à sa production au cours de l'apprentissage; • les programmes et la pédagogie sont implicites; • l'enseignement est réalisé principalement par démonstration , observation, imitation...	• l'apprentissage est dissocié du contexte de la vie quotidienne, et constitue un but en soi • le professeur est le responsable de la transmission du savoir, l'apprentissage ayant lieu dans des immeubles destinés à cette activité, et avec du personnel spécialement formé; • les programmes et la pédagogie sont explicites; • - l'enseignement est réalisé, par présentation orale de principes généraux et l'apprentissage par des échanges verbaux et questionnements

Tableau 1-1. Caractéristiques de deux styles d'apprentissage

On peut imaginer combien cette dernière caractéristique, dans chaque type d'apprentissage, peut jouer un rôle prépondérant sur la qualité des verbalisations de sujets non scolarisés, lors d'une épreuve exigeant une forme d'explicitation des procédures de résolution de problèmes. Le

² L'aspect dichotomique est critiqué par les auteurs eux-mêmes, mais ces caractéristiques peuvent être utiles dans la discussion de notre problématique de recherche.

phénomène inverse peut se constater sur des sujets scolarisés. On réabordera ultérieurement la discussion de ce point. Prenons un exemple:

La première caractéristique opposée des deux styles d'éducation, " le contexte " du style informel et " l'absence de contexte "³ du style formel, peut donner des indications sur les variables impliquées dans la diversité des performances de sujets de différents niveaux de scolarité dans des situations différentes. La question théorique qui en découle est bien celle de la généralisation des apprentissages et de l'universalité des processus cognitifs. L'aspect méthodologique y afférent sera abordé par la suite.

1.1.1. Généralisation d'apprentissage - universalité et spécificité des processus cognitifs

On utilise ici, le terme de " généralisation " dans le sens employé par Greenfield & Lave (1982), c'est-à-dire signifiant la transposition d'une habileté, apprise dans un contexte spécifique, à des situations de résolution de problèmes nouveaux. Dans cette perspective, les études réalisées montrent les limites de la généralisation des habiletés mathématiques utilisées dans des situations spécifiques ou des contextes différents, même si les problèmes posés impliquent des opérations mathématiques connues par le sujet. Greenfield et Lave (1982) admettent que ces limites sont caractéristiques de plusieurs formes d'apprentissage, y compris de l'apprentissage scolaire, et que la généralisation se fait surtout dans des situations où les problèmes à résoudre sont proches, d'une certaine manière, des problèmes familiers.

Carraher, Carraher et Schliemann (1982), dans une recherche auprès d'enfants vendeurs de bonbons à Recife, au Brésil, observent que ceux-ci arrivent à réaliser des opérations arithmétiques dans des activités quotidiennes de travail sans pour autant pouvoir les formaliser par le calcul écrit enseigné à l'école.

Lave (1979; Cf. Greenfield et Lave, 1982), à partir de leur travail chez les tailleurs, au Liberia, et Greenfield et Childs (1977), à partir d'un travail chez les tisserands, arrivent à des conclusions similaires quant à la capacité de généralisation. Greenfield et Lave (1982) affirment que lorsque la tâche expérimentale est similaire, dans sa forme, à une tâche caractéristique des apprentissages prédominants, les tailleurs, les tisserands, comme les sujets scolarisés, sont capables de résoudre

³ On pourra suggérer que cette connaissance est aussi « contextualisée », mais dans la culture scolaire. Cette culture pourtant présente des caractéristiques plus formelles et abstraites que celles du contexte informel.

des problèmes nouveaux. En revanche, ni l'expérience scolaire, ni les habiletés acquises dans le travail ne mènent à la capacité de généraliser aux problèmes qui s'éloignent beaucoup des circonstances dans lesquelles les apprentissages se sont effectués.

Ainsi, la décontextualisation apparente du style formel scolaire ne semble pas impliquer une connaissance abstraite, générale qui pourrait être appliquée dans un quelconque contexte. Dans ce sens, Carraher et Schliemann (1986) suggèrent que l'ensemble de situations créées par l'école pour enseigner un concept peut être plus étroit ou plus large, selon la pratique pédagogique des maîtres, mais que ces situations seront toujours trop éloignées de la pratique quotidienne. Pour ces auteurs, les concepts sont associés à des formules qui consistent en représentations " abstraites " auxquelles on attribue des valeurs numériques. Ainsi, dans le contexte scolaire, le sujet apprend à faire des opérations avec des valeurs numériques, et à manipuler des formules pour calculer une inconnue particulière.

D'un point de vue théorique, ces données peuvent suggérer l'idée que les processus cognitifs sont de nature situationnelle, comme l'affirme Cole (1985), ce qui impliquerait la possibilité de trouver des sujets performants dans des contextes familiers, mais moins habiles dans d'autres contextes, même si les problèmes conservent la même structure mathématique.

Ces premiers travaux relatés peuvent permettre deux inférences:

- l'infériorité relative des performances des sujets non scolarisés, lorsqu'ils sont "testés" avec des outils fondés sur la connaissance scolaire;
- l'infériorité relative des sujets scolarisés lorsqu'ils sont "testés" dans des tâches propres à une activité de travail particulière.

Implicite dans cette affirmation, demeure la question méthodologique de la validité des outils d'analyse. Dans cette perspective, Piaget lui-même (1972) pose l'hypothèse de l'universalité des processus cognitifs, et affirme que, même au stade des opérations formelles - caractérisé par l'indépendance du contenu auquel les opérations sont liées - , il est préférable de tester les sujets dans un domaine significatif de leur expérience ou proche de leurs centres d'intérêts. Leur performance peut également être fonction d'habiletés ou de spécialisations professionnelles.

Force est de constater que le modèle explicatif le plus souvent cité pour justifier de la variabilité des performances en résolution de problème est plutôt organisé autour d'une probabilité d'adéquation entre la tâche proposée et le type d'apprentissage du sujet.

On peut admettre que ces deux variables ne représentent pourtant qu'une partie du problème. La disparité des résultats constatée nous amène à discuter *le rôle de l'explicitation* dans l'analyse des procédures de résolution de problèmes, ainsi que sa validité pour des sujets peu ou non scolarisés. On sait effectivement que, dans ce public, existent souvent de grandes difficultés d'explicitation, indépendamment d'ailleurs des performances réalisées dans des tâches de résolution de problèmes présentées dans des contextes familiers. Cette difficulté induit parfois des interprétations en termes d'absence de maîtrise du concept étudié.

Comment alors comprendre ce phénomène? Est-il réellement l'indice de "l'incompétence" des sujets, ou bien est-il la conséquence de l'action d'autres variables confondues ou dissimulées?

Nous supposons que la performance mathématique et l'explicitation des procédures de résolution dépendent d'un ensemble de variables, dont la nature de la tâche et le type d'apprentissage de base ont été les plus étudiés. Nous insisterons ici sur l'analyse des aspects de ces variables qui n'ont pas été jusqu'à maintenant discutés de façon plus approfondie.

Reprenons les deux dernières caractéristiques opposées du style formel et informel d'éducation (présence/absence de programme et de pédagogie explicites; et type d'enseignement-apprentissage: plutôt verbal dans le style formel et plutôt à base de démonstration/imitation dans le style informel).

1.1.2. Explicitation des procédures de résolution de problèmes

*"Oh! Lys Tigré, dit Alice, s'adressant à l'un deux qui se balançait gracieusement au vent, je voudrais que vous puissiez parler!
- Nous pouvons parler, dit le Lys Tigré, à qui vaut la peine qu'on lui adresse la parole." (Lewis Carroll, De l'autre côté du miroir)*

La majorité des recherches en Psychologie Cognitive utilise les verbalisations des sujets pour inférer les processus cognitifs sous-jacents, essentiellement celles inspirées par la méthode clinique piagétienne. De même, dans des activités où les verbalisations auraient pu être considérées comme

secondaires, dans le cas de performances mathématiques par exemple, l'explicitation des procédures de résolution est un élément important de l'analyse des compétences du sujet.

Un calcul réalisé, un problème résolu, sans explicitation convenable, peuvent être considérés comme le résultat d'une manipulation automatique d'algorithmes scolaires, sans maîtrise du concept sous-jacent. Le concept de théorème-en-acte permet d'interpréter autrement ce comportement: il désigne "les propriétés des relations saisies et utilisées par le sujet en situation de solution de problème, étant entendu que *cela ne signifie pas qu'il est pour autant capable de les expliciter ou de les justifier*" (Vergnaud, 1981b). Nous reviendrons sur cette perspective.

Ainsi, expliciter, et de préférence, de façon scolaire, est le gage, dans certains cas, de la maîtrise du concept. Par conséquent, ne pas expliciter peut devenir un indice d'absence de maîtrise du concept. Affirmation provocatrice, mais pas tout à fait anodine si l'on se penche sur l'interprétation de quelques résultats de recherches. On sait que pour "expliquer" les procédures de résolution d'un problème, un sujet doit mettre en œuvre des processus cognitifs d'une autre nature que ceux employés pour le résoudre, c'est-à-dire qu'il a besoin de recourir à des processus métacognitifs. Selon Bredart et Rondal (1982), Chaudron (1983) et Kolinsky (1986), cités par Gombert (1990), il faut distinguer entre, d'une part, les habiletés constatées dans des comportements spontanés et, d'autre part, les capacités fondées sur des connaissances systématiquement représentées et pouvant être délibérément appliquées. Plus qu'une différence de degré, c'est une différence qualitative dans l'activité cognitive qui semble séparer ces deux ensembles de comportements.

Si l'on considère comme valides les caractéristiques précédemment décrites concernant les différents types d'éducation (Greenfield et Lave, 1982), on s'aperçoit que l'enseignement de l'éducation formelle est réalisé le plus souvent par présentation verbale de principes généraux et l'apprentissage par échanges verbaux et questionnements.

On peut admettre que ces caractéristiques, au moins en principe, doivent renvoyer le plus souvent à l'emploi de compétences métacognitives, c'est-à-dire à une "connaissance introspective sur les états cognitifs et leurs opérations, donc à des capacités de contrôle et de planification de ses propres processus de pensée et de ses produits" (Gombert, 1990). Ainsi la facilité relative des sujets scolarisés à expliciter leurs procédures de résolution peut plutôt résulter de la conséquence du type d'apprentissage que d'un indice de la maîtrise du concept étudié.

"A contrario", l'éducation informelle, qui se caractériserait par un type d'enseignement-apprentissage fondé sur un modèle d'observation/imitation, ne concernerait qu'indirectement les capacités métacognitives. C'est surtout au niveau des habiletés que cet apprentissage s'extérioriserait. Ainsi, la demande d'explicitation de procédures de résolution de problèmes est une tâche à laquelle des sujets peu ou non scolarisés ne sont guère habitués.

On peut alors considérer la validité des stratégies de résolution de problèmes, même si elles apparaissent "bizarres" au chercheur en fonction de ses propres grilles d'analyse. De même, la demande du chercheur d'explicitier les procédures de résolution peut sembler "bizarre" à un sujet peu familiarisé avec ce type de question.

On ne demande jamais à un boulanger, par exemple, comment il a fait pour calculer le prix de ce qu'on lui a acheté... On peut, à la rigueur, contre-argumenter en cas de désaccord, ce qui peut l'amener à refaire ses calculs, mais sans qu'il doive expliciter ses stratégies de résolution.

Vergnaud (1992a) observe que la plupart de nos connaissances sont des compétences et que nos conceptions ne sont pour une bonne part qu'implicites: elles demandent à être reconstituées autant à partir des conduites du sujet qu'à partir de ses déclarations. Cet auteur remarque que ces déclarations sont parfois plus pauvres, parfois plus riches, également très contextualisées, et liées à certaines valeurs particulières des variables de situation. Dans ce sens, il ajoute que l'explicitation est toujours très partielle par rapport à l'ensemble des éléments conscients qui permettent de gérer efficacement une action, bien plus encore par rapport aux éléments inconscients sous-jacents aux automatismes que chacun de nous s'est forgé. D'après lui, le choix de ce qui est dit est en général très sélectif et parcimonieux, et en même temps très embarrassé lorsqu'il faut improviser une explication sur les raisons de telle ou telle opération.

Ainsi, l'association entre l'explicitation des procédures de résolution d'un problème et la maîtrise d'un concept d'une part et l'absence d'explicitation et la non-maîtrise du concept d'autre part, nous semble devoir être abandonnée. Nous verrons par la suite que la conceptualisation est une construction à étages et que l'important est d'en identifier le niveau plutôt que d'identifier les choses en termes d'absence ou de présence d'un concept quelconque.

Il n'est pas ici question de négliger l'importance des verbalisations, mais nous postulons que des indices de conceptualisation peuvent être également repérés sans qu'il y ait verbalisation. Toutefois, "le chercheur doit créer les conditions permettant aux sujets d'explicitier leurs connaissances

implicites (justes ou fausses), et donner ainsi du sens et des raisons à leur action" (Vergnaud, 1992b).

Notre propos sera donc de suggérer que l'explicitation des procédures de résolution de problèmes, auxquelles il est fait référence lors de l'analyse des processus cognitifs des sujets, peut être étudiée d'une manière telle, qu'elle permette de clarifier le rôle des variables comme la nature de la tâche ou le type d'éducation de base. On peut admettre en effet que ces variables jouent un rôle important, en interaction avec d'autres, pour expliquer les différences de performances et les différences d'explicitation. Ainsi s'agira-t-il de relier la performance mathématique au discours explicatif des procédures de résolution.

Dans cette perspective, les recherches dans le domaine des compétences mathématiques, malgré le recours aux verbalisations des sujets, ne se préoccupent qu'incomplètement des particularités de ces verbalisations. En raison de l'intérêt concentré sur le raisonnement mathématique, l'observation porte surtout sur le caractère justifié ou non de ces verbalisations du point de vue mathématique. Généralement, celles qui ne se réfèrent pas au raisonnement mathématique sont laissées de côté.

L'analyse des différents types de verbalisation pourrait présenter un intérêt du point de vue de la compréhension du type de raisonnement du sujet. Les recherches portent généralement sur la réussite ou l'échec, mais rarement sur la nature des erreurs.

On n'a pu en comprendre le sens qu'à partir du moment où leur analyse a été rendue possible. Pourquoi les verbalisations ne pourraient-elles pas être l'objet d'une analyse identique ? Certaines régularités dans les verbalisations, en fonction de certains types de tâche, de la situation sociale ou du statut de l'interlocuteur, par exemple, peuvent-elles exister ?

Vergnaud (1984) observe qu'il est classique de dire que le langage, utilisé dans une situation de résolution de problème, a deux fonctions corrélées: communication et représentation. Il ajoute que le langage a d'abord une fonction de communication, et l'apprentissage des mathématiques est un apprentissage fortement socialisé. Mais cette fonction de communication ne peut s'exercer utilement qu'en s'appuyant sur cette autre fonction du langage qu'est sa fonction de représentation.

- La fonction de représentation: "de quoi parle-t-on et qu'en dit-on?"
- La fonction de communication répond à la question: "qui parle à qui dans quelles circonstances? "

En relation avec ces deux fonctions, on observe une autre fonction du langage: l'aide à la pensée et à l'organisation de l'action. Cette fonction s'appuie elle-même sur la fonction de représentation, mais ce qui est alors représenté, ce sont à la fois les éléments de la situation prise en compte, l'action, et leurs relations. Le langage et les symboles mathématiques jouent donc un rôle dans la conceptualisation et l'action. Aucune de ces questions n'est indépendante de l'autre.

On ne peut négliger le rôle de l'interlocuteur en situation de résolution de problèmes. En outre, l'ensemble de ces variables peut induire des représentations différentes des problèmes en fonction du style éducationnel vécu. Les styles éducationnels sont en effet insérés dans des cultures spécifiques, et donnent un sens à l'éducation elle-même.

Nous insistons sur le fait que la culture du chercheur fait partie de la culture scolaire, et se trouve donc éloignée de celle des sujets peu scolarisés. Une analyse sérieuse des cadres théoriques et de la méthodologie employée dans ces recherches s'impose. Ces différences constituent en elles-mêmes certains des biais méthodologiques maintes fois constatés dans l'histoire de la recherche.

1.1.3. Différences culturelles entre chercheur et sujet: représentations de la situation et de la tâche

"Est-il possible par exemple de traduire dans le langage et le mode de pensée de l'anthropologue occidental ce que ressent le navigateur Pulawat? A l'inverse, peut-on traduire la pensée d'un anthropologue occidental dans le langage d'un Nuer du Nil, dont la religion a été étudiée par Edward Evans-Pritchard? (ce dernier avait fini d'interroger ses interlocuteurs sur leurs croyances religieuses; courtois, il leur demanda s'ils désiraient à leur tour poser des questions sur ses propres croyances. L'un d'eux demanda timidement quelle était cette divinité qu'il portait à son poignet et qu'il consultait à chaque fois qu'il paraissait devoir prendre une décision importante. Evans-Pritchard, catholique fervent, fut surpris par la question; il le fut tout autant par la difficulté qu'il éprouva à expliquer à ses interlocuteurs que sa montre n'était pas une divinité)" (Bruner 1991)

Concernant la deuxième caractéristique des deux styles éducationnels, le statut des sujets dans le processus enseignement-apprentissage (style formel: professeur responsable de la transmission du savoir, style informel: apprenti responsable direct pour l'apprentissage) peut jouer un rôle

important dans les différences concernant les performances observées. Un sujet non habitué au système scolaire n'a pas, en situation de recherche ou d'évaluation, la même représentation de la tâche qu'un sujet scolarisé. La nature des tâches et le type d'apprentissage de base font pourtant l'objet d'une représentation, tant chez les sujets que chez le chercheur. Cette représentation est à la fois de nature conceptuelle et de nature socioculturelle (voir Acioly et Bellier, 1992).

Que peut-il se passer lorsque des représentants de cultures différentes sont face à face dans une situation de recherche? La représentation de la tâche est-elle la même pour les deux interlocuteurs? Ces questions doivent nous amener à nous interroger sur le rôle de la culture dans le développement cognitif, dans la mesure où certains paramètres ne sont pas toujours pris en considération lors de l'élaboration d'outils d'analyse des processus cognitifs.

Lave (1988) affirme que *ce qu'on appelle cognition est un phénomène social complexe*. Les processus cognitifs n'apparaissent jamais dans un vide social; les formes qu'ils prennent ne sont jamais indépendantes de l'influence socioculturelle. En revanche, les facteurs sociaux eux-mêmes n'ont pas d'existence indépendante et distincte. Les circonstances sociales ont un impact différent sur les individus, en fonction de la façon dont ceux-ci les perçoivent et les interprètent.

Dans la vie de tous les jours, la signification que nous accordons aux faits et gestes d'autrui dépend de l'échange verbal qui a lieu avant, pendant ou après l'action. Elle dépend également de notre capacité à supposer ce que l'autre dirait dans un contexte donné. Ces questions nous amènent à une analyse plus complète des effets de la culture sur le développement cognitif, notamment à travers une brève revue historique des recherches antérieures dans ce domaine.

On observera que la plupart des recherches en Psychologie Cognitive font l'impasse sur ces questions et effleurent à peine l'étude de l'organisation des connaissances mathématiques.

1.2. Bref historique sur la question culture et cognition

1.2.1. Antécédents anthropologiques

C'est à l'anthropologie que ce travail doit certains de ses aspects: comme Levi-Strauss (1958) l'a dit des recherches de Ushiting & Child (1953), certains travaux "psychologiques" prenant pour base des données ethnographiques, ne se distinguent guère des "synthèses ethnologiques systématiques qui en constituent l'âme". Mead (1978) a également inspiré notre réflexion: n'a-t-elle pas rétrospectivement déclaré que son œuvre n'avait eu pour hypothèse générale que de mettre en

opposition l'idée de "potentialités humaines universelles" et celle d'expression, de forme revêtue et de "variabilité inter culturelle".

L'ensemble de ces recherches n'a alors qu'une préoccupation: comparer les sociétés dites primitives à celles dites modernes. Dans leur quasi-totalité, elles sont menées par des chercheurs d'une culture différente de la culture étudiée, et très rapidement sera mise en cause la validité de ces investigations anthropologiques. On soulignera la difficulté à décrire "objectivement" des valeurs ou des comportements différents. De même, de nombreuses controverses sur les méthodologies employées verront le jour, et des questions "philosophiques" animeront les discussions.

Rappelons, par exemple, le débat contradictoire entre Boas (1911) et Levy Brühl (1922), cités par Luria (1976), et dans lequel le premier, déclarant que "la pensée des cultures primitives est identique à celles de cultures modernes", que "son fonctionnement ne peut être compris qu'à travers l'étude des conditions de vie et du langage", se voit contredit par le second d'une façon péremptoire: "La pensée primitive prélogique et structurée de manière chaotique n'accepte pas les contradictions logiques: il faut donc admettre que des forces mystiques régissent des phénomènes naturels."

1.2.1.1. Variabilité interculturelle - relativisme culturel - variabilité intra-culturelle

L'introduction de l'idée de relativisme culturel bouleversera la notion même de variabilité inter culturelle. Elle représente une avancée intellectuelle importante: les coutumes et les comportements de classes ou de groupes sociaux spécifiques peuvent être interprétés en termes de "culture". Le caractère subjectif du concept de culture paraît se développer au cours des quarante dernières années. Ralph Linton, en 1947, cité par Musgrove(1982) peut éventuellement être considéré comme un précurseur lorsqu'il déclare "qu'il n'existe pas de chemin de vie inférieur ou supérieur; chaque vie se réfère à ce qui compose une culture: cette totalité doit inclure toutes les activités; que ce soit la façon de laver le linge, ou celle de conduire une voiture". Chaque société a une culture, peu importe de quoi elle se compose, et tout humain est "enculturé". Le concept de variabilité inter culturelle apparaît alors insuffisant, voire inadéquat. On lui reconnaît quelque utilité pour décrire des catégories, mais sa valeur s'en trouve limitée à l'exploration empirique. L'idée de relativisme culturel, parfois controversée par ceux qui l'accusent de constituer un "frein au progrès" va faire naître l'idée de variabilité intra-culturelle. Winch et Kuhn, en 1958 et 1962, cités par Musgrove (1982), provoquent un large et vif débat: ils défendent l'idée que la logique, la science, la rationalité, au même titre que la religion ou la morale, sont non seulement différentes d'une culture à l'autre,

mais que ce relativisme apparent existe également dans une même culture. "Ces choses doivent être analysées de l'intérieur, et comprises par ceux qui les pratiquent: la difficulté est que la logique et la rationalité sont différentes de l'un à l'autre".

1.2.2. Culture et cognition en psychologie

Dans cette section, nous abordons les questions qui relèvent des domaines touchant à la culture et à la cognition dans le cadre théorique de la psychologie

1.2.2.1. Rôle de la culture dans le développement cognitif

Nous apercevons ici les prémisses d'une idée "qui fait son chemin." La variable sociale est prise en considération, déterminante pour certains, adjuvante pour d'autres.

Pour Vygotski (1985), la culture détermine les actions médiatisées, et l'enfant ne peut faire des acquisitions qu'à travers un type particulier d'instructions et d'indices que l'adulte lui fournit au cours de leurs interactions. De même, Luria (1976) remarque que "savoir si les capacités intellectuelles d'adultes sont différentes selon les conditions culturelles" est une question depuis longtemps débattue par la psychologie. Il montre, par exemple, à travers plusieurs résultats de recherches, que chez les populations paysannes illettrées, d'Ouzbekistan et de Kirghizie, il existe une propension dominante à résoudre des tâches logiques avec des procédures d'argumentation et de déduction issues de leur expérience pratique immédiate.

Pour Piaget, les facteurs sociaux sont nécessaires à l'achèvement des structures de l'intelligence: toutefois la recherche d'explications valides universelles amène souvent la psychologie génétique piagétienne à "négliger l'analyse des effets structurants de certaines caractéristiques sociales de l'objet et du rôle du partenaire par rapport auquel l'individu adapte son comportement" (Perret-Clermont et Brossard, 1989). Dans les expérimentations piagésiennes, les interventions sociales, comme le discours d'un autre enfant (évoqué dans les contre-argumentations) ne sont pas analysées sur le plan de leurs caractéristiques sociales mais au même titre que les autres éléments de la situation problème.

1.2.2.2. De la notion de variabilité intra-culturelle à la notion d'interaction sociale

Différents courants idéologiques intégreront dès lors ces notions de variabilité intra-culturelle, non seulement dans un discours philosophique, mais aussi comme phénomène explicatif des faibles

niveaux de connaissance et de réussite dans les milieux sociaux défavorisés. Les termes de privation culturelle, de handicap socioculturel, apparaissent dans la littérature. La précarité des conditions de vie, la malnutrition, la pauvreté, le manque de stimulation langagière ou intellectuelle entrent dans le discours, comme des phénomènes explicatifs des différences entre individus de cultures différentes, et comme des causes probables de l'échec scolaire sélectif. Une part non négligeable des différences interindividuelles au sein des groupes sociaux différents, voire au sein d'un même groupe social leur est alors raisonnablement imputée. Mais déjà une autre optique voit le jour.

Considérer uniquement les manques, les lacunes d'une population semble restrictif. L'idée se fait que chaque culture ou classe sociale ne peut être analysée qu'à partir de tâches ou de problèmes significatifs pour ses membres. Apparaissent toute une série de travaux (Scribner et Cole, 1973; Lave, 1977; Greenfield et Childs, 1977; Carraher et Schliemann, 1983) qui posent le problème en ces termes.

Le rôle de l'interaction sociale dans les procédures éducatives, évaluatives et expérimentales, que la Psychologie Sociale va explorer aussi par d'autres moyens, parfois phénoménologiques, prend alors une toute autre dimension: les tâches ou problèmes significatifs ne peuvent devenir tels qu'à la condition que les enjeux en soient acceptés de part et d'autre. De manière très explicite, Perret-Clermont, Perret et Bell (1989) résument cette proposition: "Des sujets ne sont jamais confrontés à des situations ou des tâches identiques, même si elles sont sévèrement standardisées ou contrôlées." L'idée qui soutient ces travaux est que l'interaction sociale n'existe pas sans la volonté des parties en présence.

L'observation d'un nombre important de recherches d'évaluation portant sur les variations de performances de sujets de cultures différentes fait apparaître que la valeur des performances est souvent interprétable comme un biais ethnocentrique de la recherche. L'exemple le plus connu est celui des tests d'intelligence: la comparaison de résultats entre sujets de cultures ou milieux sociaux différents profite de façon significative aux sujets d'origine urbaine et de classes sociales favorisées. Notons, cependant, comme le font Perret-Clermont et Brossard (1989), qu'avant d'invoquer des relations causales entre ces deux phénomènes, il serait intéressant d'étudier plus en détail les médiateurs de cette relation.

Contrairement à un ensemble d'auteurs qui "font du milieu social une instance souvent invoquée, jamais convoquée à l'explication de certaines différences" (Bronckart, 1985), une école s'est développée autour des conceptions interactionnistes et constructivistes. Partant du constat de la variabilité des résultats en fonction de la nature de l'interaction sociale, l'accent a été mis sur l'importance des représentations que peut se faire un sujet de la tâche qu'il a à effectuer: on postule que ces représentations dépendent de la qualité de l'interaction. Différentes équipes ont orienté leurs travaux dans cette direction, soucieuses de poser le problème de la validité des recherches classiques qui ne contrôlent jamais - ou peu - les enjeux réels de la situation expérimentale du point de vue du sujet. Là où l'expérimentateur parle de "jeu", l'enfant, par exemple, peut interpréter "examen". Un autre point abordé par ces équipes est celui de la compréhension de la tâche à effectuer: la présentation d'un matériel nouveau ou d'une situation nouvelle constitue toujours pour le sujet une somme d'informations dont il est censé discerner les composantes qui lui permettront de résoudre la tâche. Les deux aspects, sociaux et cognitifs sont au moins simultanément présents, et sont eux-mêmes en interaction. Une analyse purement cognitive des données ne peut faire l'économie de cette composition, d'autant moins que le problème de l'appartenance culturelle différente des parties en présence se pose.

Dans son approche théorique, comme dans l'ensemble des paradigmes expérimentaux qu'il propose, Doise (1988) met l'accent sur l'influence des facteurs sociaux dans le développement cognitif, et il pose, de plus, le problème de l'interaction des deux champs. Dans leurs travaux, Doise & Mugny (1981) insistent sur le fait que les progrès dans le domaine de la cognition se constatent plus fréquemment dans le cadre de "conflits sociocognitifs", lorsque les deux sujets en présence peuvent se considérer comme "comparables", mais que l'un d'eux propose une solution différente de l'autre. Doise (1988) définit le conflit sociocognitif comme étant le moment où, dans une situation donnée, différentes approches cognitives d'un même problème sont produites socialement. Perret-Clermont & Brossard (1989) complètent en précisant que le progrès cognitif ne peut se faire qu'à partir de trois conditions:

- Présence chez l'enfant de certains prérequis cognitifs afin qu'il puisse bénéficier de la situation d'interaction sociale;
- Absence d'ambiguïté entre conflit et tension psychoaffective: le conflit doit rester centré sur la tâche;
- Dans une moindre mesure, préférence pour les interactions horizontales plutôt que verticales.

Gilly et Roux (1984,1988) cités par Gilly (1989) tournent leur réflexion vers les aspects procéduraux de la résolution de problème en situation d'interaction sociale: de plus, ils centrent leur intérêt sur la construction de compétences limitées. De nombreux auteurs appartenant à ce courant (Dalzon, 1988; Blaye, 1988) cités par Gilly (1989) observent deux phénomènes importants, indépendants quoique fortement liés:

- En cas d'opposition, l'efficacité du conflit dépend de son degré de saillance, ainsi que de la teneur des argumentations;
- Ils soulignent la pauvreté des échanges verbaux, ainsi que l'absence quasi permanente de coordination des réponses entre pairs: l'accord ne se réalise souvent que sur les réponses de niveau supérieur.

La démonstration expérimentale de l'interaction sociale par conflit sociocognitif n'est donc plus à rediscuter: mais nous voyons, à travers ces dernières analyses, que certaines conditions d'efficacité sont indispensables. D'après (Blaye, 1989a), les données recueillies généralement ne valident pas systématiquement les positions théoriques: Flieber (1986), qu'elle cite, conclut à l'équivalence fonctionnelle entre deux sources de contradiction, l'une sociale, l'autre physique. Le poids mis dans leur analyse sur les notions de centration (et de décentration) et le choix d'une certaine catégorie d'expériences dans lesquelles le contenu joue un rôle mineur nous paraît poser les mêmes problèmes que la non prise en compte théorique des contenus dans la théorie des stades de pensée.

Bien que constituant un cadre théorique fondamental, l'interaction sociale et le conflit sociocognitif doivent s'inscrire dans une dynamique plus large, intégrés dans un modèle que nous allons tenter de situer.

1.3. Cadre théorique de cette recherche

L'ensemble de ce débat nous semble constituer un point fondamental des théories du développement cognitif. Toutefois, quelle que puisse en être l'issue, il faut noter que ces recherches sur l'interaction sociale utilisent essentiellement des tâches piagésiennes ou certaines de leurs variantes, et des populations d'enfants. Il n'existe pas, à notre connaissance, un nombre important de recherches concernant l'intégration des aspects sociaux et cognitifs en situation de résolution de problèmes chez l'adulte. Personne ne nie l'importance de cette interaction pour comprendre les activités cognitives en situation, mais la majorité des recherches en Psychologie cognitive, ou bien

s'occupent des aspects dits conceptuels et négligent les facteurs sociaux ou bien mettent l'accent sur les aspects sociaux et n'approfondissent pas les concepts eux-mêmes.

Dans ce sens, Vergnaud (1987c) remarque que on n'a fait que commencer d'étudier les rapports entre le cognitif et le social. Il observe qu'une bonne partie du cognitif qui nous intéresse est un cognitif social (les connaissances des enfants sont des connaissances à la fois individuelles et sociales) et que le processus de construction et d'appropriation est lui-même profondément social. Cet auteur observe que les travaux sur l'interaction sociale ne constituent pas une contradiction du point de vue "constructiviste" selon lequel le sujet construit ou reconstruit ses connaissances; ils permettent toutefois de mieux préciser les conditions dans lesquelles se fait cette "construction". Cependant, il ajoute: "Je préfère, pour ma part, parler du processus d'appropriation des connaissances par le sujet, parce que les connaissances dont j'étudie l'apprentissage ont un caractère social marqué et indépendant du sujet. Un enfant ne construit pas une discipline scientifique, mais il ne l'apprend pas non plus sans un travail actif de "reconstruction", au moins partielle.

Bruner (1991) observe que la science cognitive nous a sans aucun doute permis de mieux comprendre comment l'information se transmet et comment elle est traitée. Mais on ne peut cacher qu'elle laisse inexploités (si elle ne les a pas obscurcis) des problèmes extrêmement vastes qu'elle s'était d'abord proposé d'élucider. Cet auteur ajoute qu'en dépit de l'habitude bien installée de mener de " petites études bien nettes" et de ce que Gordon Allport a appelé la méthodolâtrie, les grandes questions psychologiques sont une fois encore soulevées: questions concernant la nature de l'esprit et de ses processus; questions sur la manière dont nous construisons nos significations et nos réalités; questions sur la façon dont l'esprit prend forme à travers l'histoire et la culture.

Chandler, (1988) affirme que "... la compréhension et la maîtrise de certaines situations sociales complexes supposent le développement de structures sociocognitives correspondantes. Il se demande pourtant "pourquoi les auteurs qui se préoccupent de structures cognitives parlent si rarement d'environnement et pourquoi les environnementalistes qui présentent une Psychologie des situations sont-ils si systématiquement muets sur les subtilités de l'esprit humain?"

Cela nous ramène au problème central: comment choisir une approche théorique qui permette de traiter les processus cognitifs et les processus sociaux par lesquels, au sein d'une communauté, ils sont créés et négociés. Nous avons évoqué précédemment les difficultés d'intégrer les aspects culturels et conceptuels dans des recherches sur des compétences mathématiques. Pour constater

cela, il suffit d'observer l'analyse faite par Saxe et Posner (1983), des forces et des faiblesses des recherches transculturelles sur le développement du nombre associées à la théorie vygotskienne ou à l'approche piagétienne. Selon ces auteurs, chacune de ces théories offre une base pour analyser les processus universaux ou culturels spécifiques de la formation des concepts numériques chez l'enfant. D'un côté, pendant que l'approche piagétienne offre une formulation sur la manière par laquelle les opérations numériques se développent, elle n'analyse pas les mécanismes par lesquels les facteurs sociaux contribuent à la formation de la pensée numérique; de l'autre côté nous pouvons observer que l'approche vygotskienne, reprise par un groupe de psychologues américains (Cole, Gay, Glick et Sharp, 1971; Cole et Scribner, 1974, Wertsch, 1979; cf. Saxe et Posner (1983)), traite l'expérience culturelle comme une construction théorique différenciée. Ces auteurs ajoutent que si cette tendance ne nie pas l'importance du concept elle n'en fait pas cependant une analyse plus approfondie.

Il nous semble que la difficulté d'une analyse de ce type peut être due au moins en partie, aux faiblesses de la théorie des stades généraux de Piaget qui nous informe insuffisamment sur le niveau de conceptualisation du sujet dans un domaine donné. La faiblesse des explications concernant les différences de compétence et concernant les décalages semble avoir conduit à l'abandon de ce cadre théorique, sans qu'il y soit substitué un cadre qui permettrait l'analyse des différents types de conceptualisation. Cela semble pourtant indispensable. Il nous semble que quelques propositions théoriques de Vergnaud peuvent contribuer à une meilleure analyse des fondements logiques de la représentation des concepts numériques.

1.3.1. La théorie des champs conceptuels

La théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990) peut être utile puisqu'elle nous donne des outils d'analyse à la fois généraux - fournissant un cadre conceptuel d'ensemble - et nous permet de les mettre en œuvre de manière opératoire dans des situations particulières sur des points précis. D'après Vergnaud, la définition de ce nouveau cadre théorique est fonction de deux constats: l'insatisfaction générale dans laquelle nous laissent les recherches psychologiques classiques sur l'apprentissage et les critiques de la théorie piagétienne sur les points suivants:

- Piaget s'est désintéressé de l'acquisition des connaissances scolaires, en cherchant plutôt à caractériser le développement des instruments généraux de pensée, relativement indépendants des connaissances scolaires;

- Piaget s'est intéressé davantage aux structures pouvant caractériser un stade donné de développement qu'à l'évolution adaptative des connaissances dans une situation ou dans un ensemble de situations où elles sont fonctionnelles;
- Piaget a séparé d'une manière exagérée la connaissance mathématique et la connaissance de la réalité physique;
- Piaget a privilégié les opérations et les structures logiques et contribué ainsi à minimiser les contenus de connaissance.

Ainsi, deux grandes questions ont donné origine à la théorie des champs conceptuels. La première concerne les choix à faire pour découper les contenus de connaissance mathématiques et en étudier de manière féconde la didactique et l'acquisition. D'autre part, la psychologie génétique nous apprend que les connaissances se développent lentement; cela est vrai pour les contenus de connaissance comme pour les instruments logiques de la pensée.

Vergnaud (1981b) observe: "Ce sont ces deux préoccupations (interconnexion des concepts et évolution psychogénétique) qui m'ont conduit à définir la notion de champ conceptuel: un champ conceptuel est un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion."

Cette théorie de la conceptualisation du réel intègre à la fois les aspects de la situation, du concept lui-même et du sujet. Le choix de ce cadre théorique se justifie par la possibilité qu'il offre:

- de repérer et d'étudier les filiations et les ruptures entre connaissances du point de vue de leur contenu conceptuel;
- d'analyser la relation entre les concepts comme connaissances explicites et les invariants opératoires qui sont implicites dans les conduites des sujets en situation;
- d'approfondir l'analyse des relations entre signifiés et signifiants.

Les points centraux de l'approche théorique étant posés, nous proposons donc l'hypothèse directrice de cette recherche. Nous supposons que ***la performance et l'explicitation des procédures de résolution de problèmes mathématiques changent en fonction de la représentation que les sujets se font de la situation.***

Il nous paraît néanmoins nécessaire de clarifier certains termes qui ont été utilisés maintes fois précédemment dans le cadre de la théorie des champs conceptuels. Il s'agit des termes

représentation, situation et concept, notions, très controversées, voire polémiques dans la littérature psychologique.

1.3.2. La représentation

La représentation du concept de représentation n'est pas uniforme, même au sein des différents courants de la psychologie. Nous n'avons pas l'intention de répertorier ici tous les sens donnés au terme représentation, exercice long et inutile. Nous prendrons seulement quelques exemples à partir du débat qui a eu lieu dans la première école d'été du CNRS sur les Sciences Cognitives pendant lequel l'utilisation "ambiguë" du terme représentation a été longuement abordée (voir Vergnaud, 1991).

Dans un débat introduit par Claude Debru sur les différents sens du terme, Gérard Vergnaud conclut qu'il existe au moins cinq sens de ce mot en Psychologie:

- sens psychologique du terme représentation: concerne la relation d'un être vivant avec son environnement. L'approche fonctionnaliste consiste à dire que cette représentation existe parce qu'elle joue un rôle. Il faut alors étudier cette fonction dans des situations où le sujet a des problèmes à résoudre; et l'on rencontre alors les problèmes d'inférence et de conceptualisation comme conditions nécessaires de l'action opératoire;
- sens sémiotique - la représentation est un système de signifiants: les signifiés représentés par ces signifiants sont nécessairement de l'ordre du conceptuel ou plus largement du cognitif et pas de l'ordre du réel matériel;
- celui de la base de connaissances retenue dans un système informatique pour traiter un domaine. Il s'opère alors une condensation entre le sens psychologique et le sens sémiotique puisqu'alors la base de connaissance prend nécessairement la forme d'un codage, et qu'elle a exclusivement ce sens dans la machine, une fois que le programmeur a terminé son travail;
- celui utilisé par les neurosciences: représentation signifie distribution spatio-temporelle de l'activation;
- représentation sociale: qui désigne le contenu des représentations partagées par une catégorie de sujets à propos d'un phénomène social, culturel, politique, économique, scientifique ou technique.

Cette énumération reflète les difficultés éventuelles de compréhension liées à l'utilisation de ce terme. Même chez des psychologues, qui admettent l'importance du concept de représentation pour

rendre compte de la conduite des sujets, on observe deux orientations divergentes lorsqu'on veut en préciser la structure. Pastré (1991) observe que: "pour les uns, (par exemple, Richard, 1990, Ehrlich, 1985), les représentations sont particulières, occasionnelles, précaires, transitoires: elles portent sur une tâche déterminée et sont remplacées par d'autres représentations une fois que la tâche est accomplie. Elles sont à distinguer des connaissances conceptuelles qui, elles, sont permanentes et non entièrement dépendantes de la tâche à réaliser. Ou encore, comme l'indique Ehrlich (1985), les représentations ont une structure circonstancielle et périssable: elles consistent en une combinaison particulière de concepts fixant une signification. Pour d'autres au contraire (Leplat, 1985, Vergnaud, 1985), les représentations sont constituées de connaissances relativement permanentes, bien qu'elles requièrent des adaptations locales." C'est dans cette deuxième orientation que nous nous situons.

Notre but n'étant pas de discuter les particularités liées à chaque sens particulier du terme, nous allons en situer le sens général pour notre recherche, de manière à rendre compte le mieux possible de nos données. Nous considérons que le rapport avec le réel, avec les signifiants et les signifiés et avec le concept lui-même sont bien résumés dans l'observation suivante de Vergnaud.

"La **représentation** ne se réduit pas à un système symbolique qui renverrait directement au monde matériel, les signifiants représentant alors directement des objets matériels. En fait, les signifiants (symboles ou signes), représentent des signifiés qui sont eux-mêmes d'ordre cognitif et psychologique". *Ainsi, la notion de représentation recouvre la notion de concept.*

1.3.2.1. Les composantes de la représentation

Vergnaud (1987d) affirme que trois niveaux d'entités doivent être considérés quand on traite de représentation: *la référence; le signifié; le signifiant.*

La référence est le monde réel, comme il apparaît au sujet au cours de son expérience. Le sujet agit dans et sur ce monde en fonction de ses "représentations" conscientes ou inconscientes.

Le niveau du signifié est, d'après lui, au cœur de la théorie de la représentation, dans le sens que c'est à ce niveau que les invariants sont reconnus, les inférences tirées, les actions générées et les prédictions faites. Ce niveau est cognitif en son essence.

Le niveau du signifiant consiste en différents systèmes symboliques qui sont organisés différemment.

Notons qu'au moins trois problèmes de correspondance doivent être discutés lorsqu'on parle de représentation:

- Correspondance entre le Signifiant et le Signifié;
- Correspondance entre le Signifié et le Référent;
- Correspondance entre les différents systèmes symboliques.

1.3.2.2. Les problèmes de correspondance entre les composantes de la représentation

"-Est-ce qu'un nom doit signifier quelque chose? demanda Alice d'un air de doute.

- Bien sûr, dit Humpty Dumpty avec un rire bref, mon nom signifie la forme que j'ai ... et une bien belle forme encore. Avec un nom comme le vôtre, vous pourriez avoir n'importe quelle forme, ou presque." (Lewis Carroll, Alice - De l'autre Côté du Miroir)

Nous voulons croire, contrairement à Humpty Dumpty, que les systèmes symboliques sont arbitraires et n'ont pas un rapport direct avec le réel, représentant déjà une entité cognitive, un signifié. Cependant, il s'agit de savoir si la seule voie d'accès au signifié existe à travers les systèmes symboliques (universels ou locaux)? Existe-t-il d'autres façons d'aborder le "réel" sans passer par ces systèmes? Comment les composantes de la représentation interagissent-elles? Quelles sont les problèmes qui en découlent pour la problématique de cette recherche?

Trois points révèlent des questions théoriques et méthodologiques fréquemment rencontrées dans les recherches sur les compétences mathématiques de sujets peu ou pas scolarisés:

- la capacité à généraliser les compétences acquises dans des situations particulières;
- les différences culturelles entre chercheur et sujets;
- la difficulté d'explicitation de procédures de résolution de problèmes.

De notre point de vue, ces questions ne peuvent être approfondies qu'à travers l'analyse des problèmes liés aux composantes de la représentation. Les différences culturelles doivent pouvoir être mieux comprises dès lors que l'on considère les problèmes de correspondance entre signifié et signifiant, ainsi que ceux concernant les différents systèmes symboliques. Le sens donné aux

signifiants langagiers n'est pas le même d'une culture à l'autre, de même que le sens des systèmes symboliques.

Les difficultés d'explicitier les procédures de résolution de problèmes utilisées et d'appliquer des compétences à des situations nouvelles, ne doit pas conduire à faire l'impasse sur l'analyse des correspondances entre signifié et référent.

L'absence d'une analyse plus approfondie des problèmes de correspondance entre les composants de la représentation peut entraîner des erreurs d'interprétation des données. Nous les aborderons dans une autre partie de ce travail.

Discipline formelle par excellence, utilisant plusieurs systèmes symboliques, les mathématiques comportent un risque important, qui consiste, lors de l'analyse des comportements des sujets, à en rester au niveau des signifiants, et à négliger le sens (le signifié) et ses rapports avec le réel.

L'absence de distinction entre signifié et signifiant, peut amener le chercheur à prendre les symboles et les opérations sur ces symboles pour l'essentiel de la connaissance et de l'activité mathématique, alors que cette connaissance et cette activité se situent principalement sur un plan conceptuel.

Comment alors identifier les composantes de la représentation et les problèmes de correspondance qui en découlent?

1.3.2.3. Correspondance entre signifiant et signifié

"Nous reconnaissons tous que les mots sont des signes, mais les poètes restent, parmi nous, les derniers à savoir que les mots ont été aussi des valeurs." (Claude Levi-Strauss, Anthropologie Structurale)

"... Je dois m'approcher du centre de la terre. Voyons: cela doit faire, je crois, quatre mille kilomètres. ...oui, c'est à peu près la distance - mais alors je me demande à quelle latitude et à quelle longitude je me trouve? (Alice n'avait aucune idée de ce que pouvait être une latitude ou une longitude, mais c'étaient de grands mots agréables à prononcer.)" (Lewis Carroll, Alice au Pays des Merveilles)

La considération des différences culturelles entre le chercheur et les sujets est nécessaire pour comprendre les enjeux réels des situations utilisées par les chercheurs notamment les différentes représentations des problèmes que peuvent se faire les sujets interrogés. Les situations problèmes représentent pour les sujets une quantité d'informations dont ils sont censés discerner les composantes qui leur permettront de les résoudre. Toutefois les composantes privilégiées ne sont pas toujours les mêmes pour le chercheur et pour les sujets. Si les symboles employés dans ces situations-problèmes sont publics et sociaux, le sens, en revanche, qui se trouve au niveau du signifié, est privé ou individuel.

Cela étant, nous postulons qu'il existe bien une base d'accord minimale entre le chercheur et les sujets interrogés, en dépit des différences culturelles. L'analyse de tous ces aspects peut permettre d'identifier les compétences mathématiques des sujets, même quand les systèmes symboliques employés ne sont pas ceux de la culture du chercheur. Mais quels sont donc les problèmes posés par la correspondance de ces deux composantes de la représentation?

Au moins deux d'entre eux doivent être considérés:

- le problème de l'uniformisation du sens (observons, par exemple, que les travailleurs de la canne à sucre appellent carré tous les quadrilatères alors que ce mot évoque chez le chercheur un quadrilatère très particulier);
- le problème de l'existence ou non d'un symbole pour exprimer une entité cognitive (il existe des sociétés primitives où les entiers dépassant quelques unités n'ont pas de nom, et à fortiori, ne peuvent être des objets de calcul. On peut encore citer les difficultés d'exprimer certaines relations complexes entre concepts mathématiques).

1.3.2.4. Correspondance entre signifié et référent, autrement dit entre le niveau du signifié de la représentation et le monde réel.

Une autre question abordée dans ce chapitre faisait référence aux difficultés d'explicitation des procédures de résolution de problèmes mathématiques rencontrées fréquemment chez des sujets analphabètes ou peu scolarisés.

Or, nous avons dit que les mathématiques ne sont pas simplement un langage. Elles sont d'abord un effort pour conceptualiser le monde réel afin d'agir sur lui. La question est de savoir si le réel peut être appréhendé à travers d'autres moyens que les systèmes symboliques ou encore si la

résolution d'un problème mathématique sans explicitation des procédures peut nous informer sur le *niveau de conceptualisation* du sujet.

De notre point de vue, les notions de concept-en-acte et de théorème-en-acte introduites par Vergnaud peuvent peut-être clarifier cette question. D'après cet auteur, les individus, en traitant des situations et en agissant, découvrent et utilisent très souvent des propriétés très puissantes qu'ils ne sont pas nécessairement capables de mettre en mots, en symboles ou en signes. Néanmoins, les concepts-en-acte sont représentationnels.

Nous admettons que les recherches sur des connaissances mathématiques acquises hors du système scolaire ne peuvent laisser de côté la question de cette correspondance. Nous avons déjà évoqué les caractéristiques de ce type d'apprentissage, qui privilégient l'observation et l'imitation, et dans lequel l'explicitation n'est pas au premier plan comme elle l'est dans le système scolaire. Ainsi, la notion de concept en acte peut nous donner des informations sur le degré de conceptualisation des sujets analphabètes ou peu scolarisés, puisque cela ne réduit pas le concept à l'emploi de systèmes symboliques spécifiques.

1.3.2.5. Correspondance entre différents systèmes symboliques.

"... vous savez, quand on ne trouve pas un mot, on dit des machins ... n'avez-vous jamais vu quelque chose comme un dessin de machins?" (Lewis Carroll)

L'utilisation de différents systèmes symboliques est très importante en mathématique, et les conséquences pour la didactique sont loin d'être négligeables. Il suffit pour cela, par exemple, d'observer les difficultés liées au passage d'un problème en langage naturel à son équivalent en langage formel mathématique, ou encore celles liées au passage de l'arithmétique à l'algèbre.

Même dans les mathématiques formelles "les différents systèmes de signifiants ne mettent pas également en évidence les différentes propriétés des relations mathématiques qu'elles symbolisent: l'algèbre se prête bien aux manipulations de symboles et à l'utilisation des opérations sur les nombres, les graphiques permettent mieux l'estimation des ordres de grandeur, la croissance, la décroissance, la continuité, etc. A l'inverse, ils ne se prêtent guère au calcul." (Vergnaud, 1981b). Ces problèmes sont à notre avis accentués lorsqu'il s'agit des mathématiques apprises hors du

système scolaire, comme c'est le cas pour les sujets analphabètes ou peu scolarisés. Nous observons parfois l'absence de certains systèmes symboliques, par exemple des algorithmes scolaires (qui peuvent rendre les calculs plus économiques) voire la non-reconnaissance des chiffres écrits. On observe aussi parfois l'utilisation de systèmes symboliques spécifiques de la culture.

Cela peut entraîner au moins deux conséquences dans des recherches avec ces publics:

- *l'absence de certains systèmes symboliques peut être interprétée comme l'absence de compétences mathématiques* et la non-considération des systèmes symboliques locaux peut conduire le chercheur à proposer des situations de recherche qui restent étrangères aux sujets interrogés. Il en découle la non-reconnaissance des compétences mathématiques des sujets si elles ne sont pas exprimées dans les systèmes symboliques usuels;
- l'utilisation de systèmes symboliques spécifiques de la culture étudiée peut être abusivement assimilée à des compétences mathématiques locales, et l'utilisation de systèmes symboliques scolaires à des compétences générales. Cette correspondance est fausse et participe d'une analyse superficielle de la correspondance entre systèmes symboliques.

La discussion des difficultés de généralisation et d'apprentissage identifiées chez les sujets analphabètes et peu scolarisés peut être développée. En effet, les mathématiques formelles nous offrent, au moins en principe, des systèmes symboliques abstraits qui peuvent être employés dans n'importe quelle situation. Elles impliquent, par exemple, une arithmétique codifiée, conventionnelle, générale, qui, correctement appliquée, permet des calculs plus économiques, principalement quand de grandes quantités sont en jeu, et dans des situations où les méthodes locales de résolution de problèmes ne peuvent être utilisées avec succès. Dans cette perspective, l'arithmétique formelle constitue un "amplificateur culturel" (Cole et Bruner, 1971), puisqu'elle amplifie les processus de pensée de ceux qui l'emploient. Cependant, si nous ne connaissons pas les systèmes symboliques locaux à intégrer au système mathématique formel, la notion de mathématique formelle comme amplificateur perd son sens. Ainsi, connaître les différents systèmes symboliques susceptibles de représenter certains aspects des concepts, étudier leur interaction éventuelle et les forces et faiblesses de chaque système constitue une tâche essentielle du chercheur.

1.3.2.6. Représentation et situation

Vergnaud (1981a), affirme que "les moyens utilisés par un enfant (ou un adulte), les chemins qu'il suit pour résoudre un problème sont profondément enracinés dans la **représentation** qu'il se fait de la situation". Rogalski (1985) signale que la signification d'une *situation* pour un sujet n'est pas (exclusivement) déterminée par son "système de représentations" ; elle peut aussi être déterminée par le contrat en jeu et par les caractéristiques contextuelles larges de la *situation*.

Les recherches en Psychologie et en Didactique des mathématiques utilisent des situations dans lesquelles la nature du contrat n'est pas toujours identifiée. Ainsi une distinction s'est avérée nécessaire à propos des *situations*; et Rogalski(1985) clarifie très bien cette question, en discutant les deux catégories suivantes:

- les situations-problèmes
- les situations didactiques.

Elles diffèrent fondamentalement par l'objectif qu'elles visent: avec les situations-problèmes, on vise l'étude de l'état ou du fonctionnement cognitif" d'un sujet (dans un domaine spécifique); avec les situations didactiques on vise l'étude de la transformation des connaissances d'un sujet (dans un domaine spécifique).

Une situation-problème, comme l'indique son nom, suppose que le sujet est mis dans une situation nouvelle pour lui, à laquelle, il doit s'adapter, ou bien qu'il doit modifier en produisant des actions matérielles ou symboliques (représentations graphiques, réponse orale ou écrite etc.); il y a à la fois nouveauté et problème à résoudre. Cette nouveauté fait référence aux acquis cognitifs du sujet: la signification du problème (et de la situation elle-même) dépend donc aussi de ces acquis antérieures.

Rogalski (1985) ajoute que de ces questions découle un problème méthodologique: la situation-problème doit avoir du sens pour le sujet et lui permettre de mettre en œuvre des représentations en rapport avec le champ conceptuel visé - faute de quoi c'est un autre problème qui est abordé par le sujet que celui étudié par l'observateur. Acioly (1989) vérifie chez certains sujets confrontés à des problèmes mathématiques contextualisés, une tendance à discuter des aspects sociaux du problème proposé, et à refuser le traitement mathématique de celui-ci.

Nous pensons cependant que cette distinction est utile mais non exhaustive. Il y a des situations qui, n'étant ni des situations-problèmes ni des situations didactiques, présentent un intérêt spécifique dans des recherches en Psychologie. Nous donnons comme exemple l'étude des connaissances des sujets en situation de travail. En fait, l'utilisation de ces situations a comme but l'étude du fonctionnement cognitif des sujets dans un domaine spécifique, mais la situation considérée n'est pas forcément nouvelle pour lui. L'influence des caractéristiques du contexte du travail est aussi importante puisque les situations étudiées sont insérées dans ce contexte et non isolées comme objet d'étude. On ne peut comprendre le fonctionnement sans analyser comment, en situation, conduites et représentations peuvent être modifiées, et sous quelles conditions cognitives et sociales.

Ces remarques justifient notre intérêt pour les aspects socioculturels des représentations. Les valeurs, les contraintes du système plus large où les situations sont insérées doivent être connues si on suppose qu'elles déterminent aussi la signification de la situation. "D'un côté, ce sont les situations qui permettent la formation de concepts; mais, de l'autre côté, ce sont des concepts qui permettent d'aborder des situations nouvelles." (Vergnaud, 1990). Revenons sur la notion de concept.

1.3.3. Le concept

Nous étudions, dans cette recherche, le fonctionnement cognitif des sujets, lors de l'accomplissement de tâches qui relèvent du concept de mesure. Nous avons déjà dit que l'expérience acquise dans des situations de travail ne se réduit pas à la pure acquisition d'habiletés pratiques, mais implique une part de conceptualisation en acte. Pour rendre leurs pratiques plus pertinentes et plus efficaces, les sujets sont amenés à conceptualiser. Ainsi, avant de discuter des spécificités du concept de mesure est-il nécessaire de clarifier ce que nous entendons par conceptualisation.

Vergnaud (1987a) affirme qu'on ne peut raisonnablement pas faire de psychologie des activités cognitives complexes sans savoir ce qu'est un concept. Pour cet auteur, il faut comprendre comment un concept peut se former et prendre ses significations, comment il peut être exprimé (car il n'y a pas de concept sans moyen de le désigner et d'en débattre), et de quels ingrédients il est composé. Il définit le concept comme un triplet de trois ensembles:

$C = (S, I, S)$

S: ensemble de situations qui donnent du sens au concept.

I: ensemble des invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte) sur lesquels repose l'efficacité des schèmes.

S: ensemble des signifiants (formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement).

S est la référence, I le signifié, S le signifiant.

Les concepts sont construits et la conceptualisation se fait d'une façon progressive à travers la découverte et la maîtrise de plusieurs sortes de concepts et de théorèmes, qui pour la plupart d'entre eux restent largement implicites. C'est ce caractère implicite qui conduit à parler de *concepts-en-acte* et de *théorèmes-en-acte* (Vergnaud, 1991) "Mais un concept implicite n'est pas tout-à-fait un concept. C'est donc un problème théorique essentiel que d'analyser les signifiants langagiers et non langagiers qui donnent au concept son caractère public, et qui permettent de débattre de sa définition, de ses propriétés, de la vérité des propositions dans lesquelles il s'inscrit." (Vergnaud, 1990)

1.3.3.1. Le concept et l'ensemble des situations

L'analyse de cet aspect de la construction du concept peut nous renvoyer encore à la problématique de la généralisation des compétences mathématiques acquises dans des situations spécifiques. D'après Vergnaud (1990), la formation d'un concept est étroitement liée aux problèmes pratiques et théoriques auxquels ce concept apporte une réponse (ou des éléments de réponse). Il faut préciser qu'un concept ne se forme jamais seul, mais en relation avec d'autres concepts, et dans des situations dont l'analyse demande toujours plusieurs autres concepts. Ainsi, situations et concepts sont en étroite interaction.

Nous pensons que le cadre théorique des "champs conceptuels" peut rendre compte de cela. D'une part, un champ conceptuel est centré sur un contenu de connaissance bien identifié, et d'autre part, il embrasse un ensemble de situations et de concepts assez vaste pour qu'il soit possible de comprendre l'utilisation qui est faite par un sujet, devant une situation nouvelle, de connaissances formées dans d'autres situations.

La notion de **champ conceptuel** en tant qu'ensemble de situations dont la maîtrise demande un certain système de concepts, de procédures et de représentations symboliques en étroite connexion nous semble pertinente pour l'analyse de cette problématique. Cette approche théorique postule,

par exemple, qu'un concept est à l'œuvre dans une variété de situations et que, dans une situation donnée, plusieurs concepts sont en jeu, ce qui conduit à rejeter l'étude de concepts isolés, identifiés à un type de situation.

Différentes situations d'apprentissage ne privilégient pas toujours les mêmes aspects du concept. Il nous semble que cela peut se traduire par différents niveaux et différentes formes de conceptualisation du réel. Cette conceptualisation peut donc se révéler locale, et ne pas permettre d'établir une relation entre tous les éléments de la situation, ni de reconnaître ces éléments dans d'autres situations.

Nous pouvons dire, par exemple, que la mesure en tant que concept se construit chez des travailleurs de canne à sucre, probablement en grande partie, dans des situations de travail. Ces situations de travail doivent privilégier certains aspects du concept qui peuvent d'une part aider à sa construction et d'autre part constituer des obstacles au passage à d'autres niveaux. Pourtant, cela n'empêche pas qu'il existe d'autres situations de la vie quotidienne qui peuvent favoriser la découverte et la maîtrise d'autres aspects du concept de mesure, aussi importants pour la conceptualisation que les situations usuelles dans le travail.

Dans ce sens, Vergnaud(1990) affirme que "ce sont les situations qui donnent du sens aux concepts mathématiques, mais que le sens n'est pas dans les situations elles-mêmes. Il n'est pas non plus dans les mots et les symboles mathématiques. Pourtant on dit qu'une représentation symbolique, qu'un mot ou qu'un énoncé mathématique ont du sens, ou plusieurs sens, ou pas de sens pour tel ou tel individu; on dit aussi qu'une situation a du sens ou n'en a pas. Le sens est ainsi une relation du sujet aux situations et aux signifiants. Plus précisément, ce sont les schèmes évoqués chez le sujet qui constituent le sens de cette situation ou de ce signifiant pour cet individu.

1.3.3.2. Le concept et l'ensemble des invariants opératoires

"...La diversité de nos opinions ne vient pas de ce que les uns sont plus raisonnables que les autres, mais seulement de ce que nous conduisons nos pensées par diverses voies, et ne considérons pas les mêmes choses" (Descartes, Le Discours de la Méthode)

Vergnaud propose que la source des concepts est à rechercher dans les invariants opératoires, et par conséquent dans les schèmes. Mais que sont ces invariants? Les invariants opératoires sont "les connaissances du sujet qui sont sous-jacentes à ses conduites, et qui sont donc partie intégrante de ses schèmes d'action." (Vergnaud, 1990).

Pour une même situation nous pouvons avoir, par exemple, deux invariants opératoires de puissance différente qui permettent des solutions plus ou moins économiques. Face à une même tâche, deux sujets peuvent mettre en œuvre des invariants opératoires différents en nature et en puissance, ce qui va se traduire par des stratégies de résolution différentes. Dans les deux cas, il existe un noyau conceptuel au niveau de la représentation. Mais la différence entre les deux types de conduites et de représentations tient au degré de conceptualisation du réel. Cette conceptualisation peut être locale, et ne pas permettre d'établir une relation entre tous les éléments de la situation; ou bien au contraire elle peut être générale, et englober toutes les données et permettant de donner une solution d'ensemble au problème et d'éviter, au niveau de la conduite, toute hésitation se traduisant par des allers et retours.

Vergnaud rattache la conceptualisation à la construction par le sujet d'invariants opératoires pour organiser l'action, et plus généralement à la notion de schème. Un schème est une totalité dynamique qui exprime l'organisation invariante de la conduite, développée par le sujet individuel pour traiter une certaine classe de situations; ou encore, un schème est une fonction temporalisée à arguments, qui permet de générer des suites différentes d'actions et de prises d'information en fonction des variables de situation (Vergnaud, 1990). Les schèmes sont directement tournés vers l'action ce qui n'empêche pas qu'ils possèdent un noyau conceptuel qu'on peut analyser. C'est ainsi que Vergnaud distingue 4 éléments dans un schème:

- des règles d'action, qu'on pourra repérer dans le comportement des sujets;
- des prédictions ou anticipations, qu'on pourra éventuellement repérer dans leurs verbalisations, ou dans d'autres aspects de la conduite;
- des inférences, c'est à dire un système d'opérations mentales permettant un calcul relationnel,
- des invariants opératoires, qui sont le noyau proprement conceptuel du schème.

Selon cet auteur, il y a dans un schème deux niveaux qu'il faut soigneusement distinguer:

- un niveau de surface qui comporte des règles d'action et des anticipations, lesquelles sont assez facilement verbalisables. Ce niveau est facilement accessible à l'observateur. Nous avons déjà discuté qu'une grande majorité des recherches en restent à l'analyse de ce niveau.
- un niveau beaucoup plus profond, à base d'invariants opératoires et du système d'opérations qui repose sur eux, et qui permet de générer les règles d'action et les anticipations. La verbalisation de ces connaissances est beaucoup plus difficile.

Le concept et l'ensemble de signifiants (langagiers et non langagiers)

*"Quand j'emploie un mot, dit Humpty Dumpty avec un certain mépris, il signifie ce que je veux qu'il signifie, ni plus ni moins.
 - la question est de savoir, dit Alice, si vous pouvez faire que les mêmes mots signifient tant de choses différentes.
 - La question est de savoir, dit Humpty Dumpty, qui est le maître - c'est tout." (Lewis Carroll, Alice - De l'autre Côté du Miroir)*

Nous savons que les signifiants langagiers et non langagiers constituent une aide à la conceptualisation et à la résolution de problèmes. Cependant nous avons déjà discuté les risques d'associer conceptualisation et langage. Cela consisterait à exclure tout élément conceptuel qui n'est pas explicite et verbalisé. Il ne faut pas oublier qu'un concept est tout d'abord un outil de connaissance et pas obligatoirement explicite. Cependant, un concept en tant qu'objet de connaissance est nécessairement explicite et donc associé à des signifiants langagiers ou symboliques. Cela pose quelques problèmes, associés soit aux signifiants représentant les concepts, soit à la compréhension et à la production de certains symbolismes mathématiques. Nous pouvons donner comme exemples les observations suivantes faites par Clero (1990) sur la géométrie:

Cet auteur observe qu'on ne reconnaît en géométrie que les seules définitions que les logiciens appellent définitions de nom, c'est-à-dire que les seules impositions de nom aux choses qu'on a clairement désignées, dans des termes parfaitement connus. Il ajoute que leur utilité et leur usage est d'éclaircir et d'abrégé le discours. D'après lui, il n'y a rien de plus aisé que de donner à une chose qu'on a clairement désignée le nom qu'on veut et qu'il faut seulement prendre garde de ne pas abuser de la liberté qu'on a d'imposer de noms, en donnant le même à deux choses différentes.

Ceci n'est pas, à notre avis, le problème le plus important. Il s'agit encore une fois d'uniformiser le sens, de savoir à quel concept ou à quels aspects du concept un mot fait référence pour différentes personnes. Pour Vergnaud le symbole n'est que la "partie directement visible de l'iceberg conceptuel"; le système symbolique n'est que la partie directement communicable du champ de connaissance qu'il représente. D'après cet auteur, le lexique et la syntaxe ne seraient rien sans la sémantique et la pragmatique qui la produisent, c'est-à-dire sans l'activité pratique et conceptuelle du sujet dans le monde réel.

Dans cette perspective, Bachelard (1967) observe: "A une même époque, sous un même mot, il y a des concepts si différents! Ce qui nous trompe, c'est que le même mot à la fois désigne et explique. La désignation est la même; l'explication est différente." Nous pouvons observer par exemple, qu'au terme "mesure de surface" correspondent des concepts qui diffèrent beaucoup pour un travailleur des plantations de canne à sucre qui l'utilise comme outil pour calculer son salaire; et pour le psychologue qui se préoccupe du fonctionnement cognitif des sujets; ou encore pour le mathématicien qui l'étudie comme un objet mathématique.

Observons quelques données sur l'évolution historique du concept de nombre, qui peuvent illustrer cette problématique.

Upinsky (1988) nous présente quelques exemples. Il observe que pour les mathématiciens grecs, les objets mathématiques sont associés à des objets et à des situations de la vie quotidienne: la droite représente la direction d'une corde tendue par l'agriculteur, le plan est perçu comme un outil de construction, le nombre représente une quantité bien palpable de pierres, d'animaux, de produits commerciaux, de soldats ou de surfaces. Cet auteur observe encore que les premières opérations ont beaucoup de mal à s'écarter de leur environnement concret et empirique; d'où la "multitude incroyable des problèmes qui se présentent à nous, sous des noms pittoresques: problème des bœufs, problème des lapins.

Oswald Spengler (1948; cf. Watzlawick, Helmick et Jackson, 1972) montre combien impensable paraissait la notion de zéro en tant que nombre, et pourquoi les grandeurs négatives n'avaient pas leur place dans la réalité du monde antique. On ne pouvait parler à cette époque du **concept de nombre** au sens qu'il a pris aujourd'hui. Dans ce sens, la découverte des grandeurs incommensurables amena une crise dans la conception grecque de la mesure des grandeurs.

L'introduction de la notation symbolique à la place de la notation numérique fait que la conception du nombre, comme mesure d'une grandeur perd son poids initial (Viète, 1591 cf. Watzlawick, Helmick et Jackson, 1972). Nous pouvons imaginer que le concept de variable, aux yeux d'un mathématicien grec, aurait eu peu de signification. En effet, contrairement au nombre qui désigne une grandeur concrète, une variable n'a pas en elle-même de signification; une variable ne prend son sens que dans sa relation à une autre variable.

Mais comme nous l'avons vu pour la représentation, ce n'est pas le seul problème. Nous parlons d'ensemble de signifiants parce que, à côté du langage naturel, il existe d'autres représentations symboliques, notamment dans une discipline comme la mathématique (graphiques, tableaux, algorithmes etc.). Nous avons évoqué précédemment, par exemple, les difficultés des enfants vendeurs au Brésil à apprendre et à utiliser les algorithmes scolaires, en dépit du fait qu'ils ont appris certaines opérations arithmétiques dans des situations de travail. Ce problème fait référence à l'interaction entre différents systèmes symboliques dont la compréhension et la production soulèvent des problèmes spécifiques: type d'apprentissage, degré de conceptualisation, etc. Parfois, des systèmes symboliques particuliers mettent l'accent sur des aspects particuliers du concept, qui sont moins clairs dans d'autres systèmes. Cette discussion nous offre des outils pour analyser le concept de mesure à travers différents systèmes symboliques: ceux du groupe culturel étudié et ceux des mathématiques formelles.

Un dernier point reste à clarifier, en fonction des buts de cette recherche.

1.3.4. Compétences et conceptions

Nous avons utilisé maintes fois l'expression compétences mathématiques. Il nous semble nécessaire de préciser ce que nous entendons par compétences, la différence éventuelle avec "conceptions" et le rapport avec le concept.

Vergnaud (1988) affirme que les compétences et les conceptions ne sont pas organisées de la même manière. Les conceptions s'expriment assez facilement avec des signifiants langagiers et d'autres systèmes symboliques. Elles sont organisées en objets, propriétés et relations, ces propriétés et relations pouvant être posées à leur tour comme objets, analysées comme telles, et susceptibles d'être mises en relation avec d'autres objets. Les systèmes symboliques permettent de désigner ces

objets, propriétés et relations. Les compétences ne trouvent pas aussi aisément une expression symbolique et c'est à travers les conduites des sujets qu'on peut les étudier avec le plus de certitude.

Cet auteur observe que les compétences ne pourraient pas s'exercer véritablement si elles ne s'appuyaient sur une connaissance vraie ou plausible du réel. Ainsi, un des objectifs scientifiques est d'analyser les compétences des sujets et d'identifier les connaissances vraies ou erronées sur lesquelles elles reposent. Conceptions et compétences sont pourtant reliées entre elles: les conceptions sont remises en cause lorsque le sujet rencontre des situations qui les contredisent; l'émergence de nouvelles conceptions est associée aux nouvelles compétences et l'émergence de nouvelles compétences est elle-même conditionnée par l'abandon de conceptions initiales.

Ainsi, à partir de ce qui a été exposé précédemment, nous pouvons mieux poser le problème de la recherche.

1.4. Position du Problème

Bruner (1991) affirme que lorsque la Psychologie se consacre principalement à la signification, elle devient inévitablement une Psychologie culturelle, et elle doit s'aventurer au-delà des ambitions traditionnelles de la science positiviste, avec ses idéaux de réductionnisme, d'explication causale et de prédiction. Il continue ainsi: "insister sur une explication en termes de "causes" nous interdit tout simplement d'essayer de comprendre comment les êtres humains interprètent leur monde et comment nous interprétons leurs actes d'interprétation."

Il s'agit donc d'analyser les compétences et les conceptions sous-jacentes à ces compétences chez les travailleurs de canne à sucre du Nordeste du Brésil, dans le domaine de la mesure. L'étude de l'usage d'un système de mesure particulier sera étudiée par l'intermédiaire de trois situations, et par la manipulation de certaines conditions de la situation pour en observer les conséquences.

Ainsi, en travaillant avec des travailleurs de canne à sucre du Nordeste du Brésil, habitués à résoudre des problèmes de mesure en situation de travail, nous nous donnons les moyens d'analyser les procédures de résolution de problèmes mathématiques et les spécificités éventuelles de ces procédures (et donc des schèmes évoqués) utilisées par chaque groupe de sujets, dans les trois situations suivantes:

- entretiens individuels (le sujet donne des exemples de problèmes mathématiques de mesure tels qu'il les rencontre en situation de travail; le chercheur lui propose des problèmes similaires, en

modifiant les valeurs numériques données. Il lui demande de proposer une manière de les résoudre), dans un contexte où le sujet est considéré comme possesseur du savoir nécessaire pour des problèmes qui lui sont familiers;

- "expérimentation" (le sujet doit résoudre des problèmes présentés par le chercheur). Cette situation est destinée à analyser des performances des sujets dans des situations où il est interrogé sur un savoir qu'il ne peut pas toujours identifier comme familier.

- observations dans le travail (le sujet résout des problèmes mathématiques dans les situations de travail)

Chapitre 2. Quand le psychologue étudie des compétences "mathématiques": analyse des aspects conceptuels et de la dimension socioculturelle

"La psychologie cognitive ne peut se passer ni de l'épistémologie spécifique des concepts et des savoir-faire, ni des conditions sociales de leur apprentissage et de leur utilisation". (Vergnaud, 1987c)".

Le fait que cette recherche ait pour objet l'étude des aspects "psychologiques" impliqués en situation de résolution de problèmes d'ordre mathématique implique nécessairement la clarification de ce que nous entendons par mathématiques. Travailler sur les **concepts** mathématiques pose en effet des difficultés non négligeables au Psychologue car la **représentation** qu'il s'en fait n'est certes pas identique à celle d'un mathématicien. Il nous faut donc approcher au plus près notre propre compréhension du concept étudié. Cela permettra au lecteur de situer notre discours dans l'ensemble des perspectives possibles concernant ce domaine.

Dieudonné (1987), affirme que la situation des mathématiques, parmi les activités humaines, est paradoxale, puisque s'il y a un consensus pour en admettre l'importance, il se perpétue en même temps une quasi-ignorance de la nature des activités de ses professionnels.

Il ajoute: "Si l'on demande : " Qu'est-ce que les mathématiques?" ou "Que fait un mathématicien?", il est rarissime d'obtenir de l'interlocuteur autre chose qu'une réponse saugrenue, tant qu'il n'a pas reçu un enseignement mathématique allant au moins jusqu'à la fin des deux premières années d'université. Même des hommes éminents d'autres sciences n'ont souvent sur le travail des mathématiciens que des notions aberrantes."

L'histoire des mathématiques nous livre, pourtant, plusieurs définitions simples. Prenons-en comme exemple, quelques-unes présentées par Upinsky (1988):

- 1 - "Dans l'antiquité, les grecs désignaient sous le nom de mathématiques "**l'ensemble des sciences** alors coordonnées", définition très éloignée de notre perception actuelle;
- 2 - selon Descartes, on ne doit "rapporter aux mathématiques que toutes les choses dans lesquelles on examine **l'ordre** ou **la mesure**";
- 3 - pour D'Alembert, c'est "la science qui a pour objet les propriétés de la **grandeur**" ;

4 - de son côté, Auguste Comte pense que le but des mathématiques est de "déterminer les **grandeurs** les unes par les autres, d'après les **relations** précises qui existent entre elles" ;

5 - Taine considère que leur rôle est de "préparer d'avance des **moules** que le physicien viendra plus tard remplir".

Cet auteur ajoute que s'il n'y a qu'un seul mot pour désigner tant de choses (ordre, mesure, grandeur, quantité et relations) c'est que les mathématiques ne sont pas plurielles, mais bien "une", par quelque endroit, qu'il s'agit justement de définir. Cette dernière remarque reflète bien certaines questions que nous avons discutées précédemment sur le rapport entre les signifiants (un seul mot) et les représentations et/ou les concepts que ces mots désignent (tant de choses).

Ainsi, au cours de ce chapitre, essaierons-nous de discuter "l'idée saugrenue" et peut-être "aberrante" que nous avons des aspects conceptuels et socioculturels impliqués dans les activités mathématiques et celles de mesure, thème central de cette recherche.

2.1. Les représentations des mathématiques

Etudier la question des représentations des mathématiques semble indispensable, dès lors qu'on aborde une étude où l'origine culturelle des chercheurs est différente de celle des sujets, et où les systèmes de valeurs et de pratiques peuvent valider des stratégies alternatives de calcul non conformes aux modèles mathématiques formels.

Les études concernant les connaissances mathématiques acquises en situation de travail en sont un bon exemple. Nous attirons l'attention, pour citer seulement deux points, dont le premier a déjà été discuté:

- l'utilisation de systèmes symboliques différents du système formel mathématique, question non négligeable dans cette discipline;
- la conceptualisation du monde réel, construite à travers les mathématiques, n'est pas la même dans des raisonnements qu'un sujet fait touchant des affaires concrètes qui lui importent, et dont la sanction par l'entourage peut être brutale, et dans des raisonnements qu'un élève fait dans la salle de classe touchant des entités éloignées de ses problèmes quotidiens, et dont la sanction peut, dans le pire des cas, être une mauvaise note.

Notons que, pour résoudre un problème mathématique dans des situations de travail, les sujets sont éventuellement amenés à réaménager leurs représentations, si le problème à résoudre fait apparaître l'insuffisance de leur conceptualisation habituelle.

Bien entendu, ceci est aussi vrai pour les élèves en situation scolaire. La différence repose, à notre avis, sur la nature du contrôle effectué dans les deux situations. Dans des situations de travail, le "réel" offre un contrôle relativement immédiat de l'opérationnalité des réponses du sujet, alors qu'en classe, les élèves voient leur méthode justifiée par des moyens formels souvent éloignés du réel.

Ainsi, la possibilité de repérer, pour une situation donnée, **les** différentes représentations que les sujets mettent en œuvre pour résoudre un problème mathématique peut nous donner des informations importantes pour comprendre leur fonctionnement cognitif et leur niveau de conceptualisation. Elles peuvent nous révéler notamment les *obstacles épistémologiques*⁴ qui empêchent certains sujets de passer à un autre type de représentation, mieux adapté et plus efficace.

Ces considérations donnent une base théorique à l'idée que pour résoudre un problème mathématique, les sujets mettent en œuvre des représentations, et que ces représentations nous informent sur leur niveau de conceptualisation. Notons cependant que, dans la littérature psychologique, la résolution de problème est souvent distinguée de la formation de concept, la première étant considérée comme une nouvelle combinaison de conduites et de procédures dépendante d'une connaissance antérieure, alors que la formation de concept est considérée comme l'émergence de nouvelles catégories, de nouvelles façons de conceptualiser le monde, avec de nouveaux objets et de nouvelles propriétés de ces objets.

D'après Vergnaud (1987b) cette distinction est incorrecte parce qu'elle sous-estime deux choses: le rôle de la résolution de problèmes dans la formation de concept et le rôle de la **représentation** et des **concepts** dans la résolution de problèmes.

Ainsi, en revenant à la problématique spécifique de cette étude, nous admettons que pour accomplir leurs tâches dans les situations de travail, les travailleurs de la canne à sucre mettent en œuvre non seulement des conduites et des procédures, mais également des **représentations**.

⁴ Concept introduit par Bachelard (1967) et développé par Brousseau (1983) pour désigner certaines conceptions valables dans un certain domaine mais qui s'avèrent contre-productives lorsqu'on veut en élargir la portée ; elles constituent ainsi un obstacle à la découverte de l'apprentissage.

Ces représentations reposent sur un *noyau conceptuel*, ainsi que sur des *caractéristiques contextuelles* des situations spécifiques.

De ce point de vue, et en ce qui concerne le noyau conceptuel, les conduites et les procédures que les sujets mettent en œuvre pendant l'accomplissement d'une tâche, font toujours référence à des "concepts". Cela est vrai même si ces connaissances sont exprimées en termes d'activités pratiques, et dans le contexte particulier de leur culture. Notons que si ces concepts ne sont pas nécessairement conscients chez les sujets, le chercheur doit en postuler l'existence pour comprendre les conduites et les procédures, et en particulier les variations systématiques qu'il peut constater.

Nous insistons sur ce point en raison de l'intérêt d'un certain nombre de recherches en Psychologie concernant l'étude de procédures. Ces recherches restent, à notre avis, très proche de l'étude du comportement observable, et évitent d'aborder d'autres éléments plus profonds sous-jacents à ces comportements. Ceci peut être dû autant à la difficulté d'étudier les processus de conceptualisation et de représentation qu'au succès de la métaphore informatique. Vergnaud (1987c) observe que ce modèle permet une étude assez fine et objective des procédures, à travers la simulation de certaines conduites lorsque le répertoire des actions possibles est limité et que le choix des actions est lié à des conditions relativement faciles à identifier. Il remarque cependant que, si beaucoup de résultats intéressants ont été obtenus grâce à l'étude des procédures et aux modèles informatiques, l'extension d'une procédure à une large classe de problèmes soulève des difficultés qui sont de l'ordre de la représentation et de la conceptualisation.

Pour notre part, nous considérons que la conceptualisation du réel et les représentations sont construites à travers différents types d'apprentissages qui privilégient certains aspects spécifiques du réel, qui sont eux-mêmes fonction de la culture particulière dans lesquelles les apprentissages prennent place.

Cela nous amène au deuxième point: les caractéristiques contextuelles des situations dans lesquelles les problèmes sont insérés. Elles nous semblent très importantes pour l'analyse des pratiques et des représentations des sujets.

Les techniques de résolution d'un problème mathématique sont liées à la culture dans laquelle elles prennent place, et différentes cultures résolvent éventuellement le "même" problème par des chemins différents, bien que les résultats puissent apparaître semblables. Cela ne veut pas dire qu'il n'existe pas de problèmes communs à plusieurs cultures, mais que les caractéristiques spécifiques

de chaque culture, pas toujours faciles à discerner, déterminent certaines pratiques spécifiques. Dans cette étude, par exemple, l'histoire sociale de la zone sucrière de Pernambuco détermine, au moins en partie, le maintien de certaines procédures conventionnelles de mesure qui cohabitent avec la connaissance des unités de mesure universelles.

Ainsi, l'interdépendance des aspects conceptuels et de la dimension socioculturelle des représentations mathématiques, nous servira de fil conducteur.

2.1.1. Les aspects conceptuels des représentations mathématiques

Les Mathématiques sont présentées comme une discipline dont l'objet premier est non la nature des entités, mais l'examen des relations entre elles (Watzlawick, Helmick & Jackson, 1972).

Nous devons admettre que seule une connaissance claire des concepts étudiés peut permettre au chercheur de comprendre les processus cognitifs mis en œuvre par un sujet dans une situation de résolution de problème. Si la nature conceptuelle des représentations n'est pas suffisante pour expliquer les processus cognitifs, elle est à l'évidence nécessaire.

Douady et Perrin Glorian, (1989) ont introduit une distinction intéressante concernant les concepts mathématiques: la distinction *outil/objet* sur laquelle se fonde ce qu'elles appellent *la dialectique outil/objet*.

- un concept est un outil lorsque l'intérêt est focalisé sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème ou pour poser des questions. Un même outil peut être adapté à plusieurs problèmes, plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème.
- un concept est un objet lorsqu'il est considéré d'un point de vue culturel, et reconnu socialement, à sa place dans l'édifice structuré des connaissances, à un certain moment du développement des connaissances.

Un nouveau concept est d'abord un outil pour résoudre des problèmes pratiques ou théoriques; puis en fonctionnant, dans l'usage social il devient un objet. Il peut alors susciter de nouveaux problèmes qui donneront naissance à de nouveaux outils.

En ce qui concerne l'apprentissage des élèves, ces auteurs considèrent que le travail des concepts intervenant comme *outils est créateur de sens*. Le travail portant sur l'*objet permet la décontextualisation*, la capitalisation du savoir. Autrement dit avant d'être des objets de connaissance, les concepts mathématiques sont d'abord des outils de connaissance. Ils ne sont pas au départ ce que nous appréhendons, mais ce par quoi nous appréhendons l'expérience, le monde réel.

Vergnaud (1990) affirme que l'opération de nominalisation est essentielle pour la transformation d'un concept outil en concept objet. Les invariants qui constituent les schèmes ne sont que des outils; même désignés par des mots ou par des signifiants, ils n'ont pas immédiatement un statut d'objet. C'est par le jeu en parallèle de la communication-représentation langagière et symbolique (en mathématique on ne peut oublier les symbolismes) et du fonctionnement cognitif en situation habituelle, que ces outils deviennent des objets.

La conceptualisation est donc considérée comme un processus qui se développe et évolue, et qui de surcroît n'aboutit pas nécessairement à une connaissance objective, dans la mesure où le sujet peut prélever des traits qui se révèlent non pertinents à l'usage, ou établir des relations dont la validité se révèle limitée. Dans cette perspective, la conceptualisation est d'abord une activité implicite, non consciente, tournée vers le résultat et non pas vers les modalités de son propre fonctionnement. Des compétences d'une autre nature sont donc nécessaires pour transformer cette connaissance-outil en connaissance-objet.

Cette distinction entre deux formes de conceptualisation, concernant les recherches sur des connaissances mathématiques, peut à certains égards être rapprochée des deux types de mathématiques, classiquement distinguées dans les institutions de recherche: les mathématiques *pures* et les mathématiques *appliquées*. D'après Dieudonné (1987), si l'on analyse ce que désignent ces noms (pures et appliquées), on arrive à la conclusion que ce sont bien deux démarches différentes de l'esprit: il vaudrait mieux, selon lui, les appeler "mathématiques" et "applications des mathématiques". Mais comment peut-on alors les définir? Douady (1986) en discutant de l'aspect objet d'un concept mathématique et du travail des mathématiciens affirme:

"Dans leurs recherches, les mathématiciens sont confrontés à des problèmes que personne ne sait résoudre. Une part importante de leur activité consiste à poser des questions, et résoudre des

problèmes. Pour ce faire, ils sont amenés à créer des outils conceptuels ... Pour les besoins de la transmission à la communauté scientifique, les concepts ainsi créés sont décontextualisés, formulés de la façon la plus générale possible. Ils s'intègrent dès lors au corps des connaissances déjà constituées, pour les étendre ou se substituer à certaines d'entre elles. Ils acquièrent le statut d'objet..."

Dieudonné (1987) en parlant des "applications" des mathématiques remarque:

"Il s'agit de prévoir le comportement de certains objets du monde sensible dans des conditions données, compte tenu de lois générales régissant ces comportements. On fabrique un modèle mathématique de la situation étudiée, en attachant aux objets matériels qu'on étudie des objets mathématiques qui sont censés les "représenter", et aux lois auxquelles ils sont soumis des relations mathématiques entre ces derniers; le problème initial est alors traduit en un problème mathématique. Si on peut le résoudre, de façon exacte ou approchée, on traduit la solution en sens inverse, ce qui "résout" le problème posé."

Dans le même sens, Upinsky (1988) attire l'attention sur les quatre degrés d'abstraction croissante des mathématiques, de l'Antiquité à nos jours. D'après cet auteur, elles constituent un cycle logique complet: parti du réel, le mathématicien s'en éloigne progressivement par l'abstraction, pour y revenir, afin d'imposer à ce réel sa solution. Observons les quatre phases:

- 1 -l'invention des êtres mathématiques: on substitue au monde des choses concrètes des êtres mathématiques artificiels - figures géométriques ou arithmétiques et définitions -. On peut ensuite oublier le réel pour calculer;
- 2 -la démonstration euclidienne: on établit les lois et les règles qui gouvernent ces êtres, en les enchaînant par des raisonnements;
- 3 - la mise en équation cartésienne: on traduit le raisonnement en termes algébriques pour donner aux calculs une régularité mécanique;
- 4 -l'application des mathématiques au réel (axiomatique): on impose aux choses concrètes les solutions tirées des équations.

Il nous semble cependant que ces mathématiques sont loin d'être similaires aux procédures rencontrées chez les sujets pour résoudre les problèmes de la vie quotidienne; serait-il donc exagéré de parler encore d'une autre application des mathématiques? Destinée à résoudre des problèmes d'ordre pratique, sans forcément connaître explicitement les lois mathématiques, les procédures introduisent parfois des "adaptations" qui amènent à une solution approchée, suffisante pour la situation. C'est de cette "mathématique" que nous nous occuperons ici.

Dans cette perspective, nous essaierons donc d'explorer avec plus de détails le concept de mesure, point central de cette recherche.

2.1.1.1. Le concept de mesure

« ...dès que l'on passe de l'espace à la mesure, on quitte le terrain du continu pour celui de discontinu » (Upinsky 1988)

Piaget, Inhelder, et Szeminska (1973) affirment que, du point de vue psychologique, l'étude du développement de la mesure présente cet intérêt exceptionnel de porter sur un mécanisme opératoire si concret que ses racines sont à chercher jusque dans la perception (estimation à vue des grandeurs etc.) et si complexe qu'il s'achève seulement entre 8 et 11 ans (selon qu'il porte sur des longueurs simples ou sur des grandeurs composées).

Considérons ici le concept de mesure dans le sens le plus large du terme, à savoir comme l'association d'un nombre à un objet. Nous traiterons ici comme mesures les longueurs, les surfaces, et les poids. Seront abordés également les prix, qui, bien que mesures non physiques, se comportent presque de la même façon; on peut les désigner par le terme de "quasi-mesures" (Vergnaud, 1981a). D'après cet auteur, l'activité pratique de la mesure pose en fait des questions théoriques d'une grande importance:

1) le problème de l'intermédiaire et du mesurant.

Il est nécessaire un instrument de mesure qui jouera le même rôle que l'opération de dénombrement des ensembles, et qui permettra d'associer un nombre à l'objet à mesurer. La fonction des instruments de mesure (mètre, etc.) est de permettre d'associer à un objet un nombre qui sera sa mesure, et de faciliter ainsi la comparaison des objets entre eux. L'utilisation d'un mesurant pose donc, en préalable, tous les problèmes liés à la composition des relations d'ordre et des relations d'égalité, comme ceux de la transitivité, par exemple.

$a > b$ et $b > c \Rightarrow a > c$;

$a = b$ et $b = c \Rightarrow a = c$;

$a < b$ et $b = c \Rightarrow a < c$;

$a > b$ et $c > d \Rightarrow a + c > b + d$; etc.

2) Le problème de l'**approximation**, qui est particulièrement important dans le cas des grandeurs continues parce qu'entre deux longueurs on peut toujours en trouver une intermédiaire. C'est ainsi que la mesure des longueurs conduit nécessairement à introduire les nombres décimaux (la virgule permet entre autres choses d'ajouter des chiffres significatifs et d'améliorer l'approximation d'une mesure sans changer d'unité). De même, le caractère approché de la mesure des longueurs et des autres grandeurs continues conduit à l'idée d'encadrement :

Exemples : $2 < x < 3$; $2,5 < x < 2,6$; $2,57 < x < 2,58$; etc.

2.1.1.2. Mesures indirectes et notion de mesure composée

La mesure d'une surface est le produit d'une mesure de longueur par une mesure de longueur et il s'agit donc d'une mesure composée réductible à une composition de mesures plus élémentaires. Un rectangle n'est pas autre chose que le résultat d'une certaine construction géométrique avec quatre segments de droites et des angles: la figure est fermée et convexe, les angles sont droits, les segments opposés sont égaux.

Il s'ensuit que la mesure de la surface du rectangle doit se déduire de la mesure des objets qui ont servi à sa construction. C'est ce que traduit la formule "aire = longueur x largeur". La mesure des angles n'intervient pas ici parce qu'ils sont droits, mais elle peut intervenir dans l'aire du parallélogramme. La formule $A = L * L$ traduit théoriquement la bidimensionnalité de l'aire. Mais on peut aussi mesurer directement certaines surfaces. Les opérations de mesure directe traitent alors les mesures spatiales comme "unidimensionnelles" (puisque aucun rapport de dimensions n'y intervient). Cette vision "unidimensionnelle" des grandeurs spatiales (surface et volume), peut rendre difficile le dépassement conceptuel exigé par l'appropriation de la bidimensionnalité.

Ainsi, la construction de la surface comme mesure passe par des étapes qui vont d'une conception unidimensionnelle à une conception bidimensionnelle, et qui évoquent des compétences variables. Toutefois, il faut signaler que l'utilisation de formules n'implique pas nécessairement une conception bidimensionnelle, et on peut trouver cette conception dans des problèmes qui ne font pas appel aux formules. Il ne faut jamais oublier que, devant une tâche, les sujets peuvent recourir à tout un arsenal de schèmes.

2.1.1.3. Considérations cognitives sur les mesures de surfaces

Il existe une grande variété de compétences concernant la surface, dont certaines n'impliquent rien de plus qu'une conception unidimensionnelle (dans laquelle on prend en compte les relations des surfaces entre elles sans référence aux autres grandeurs spatiales); alors que d'autres compétences demandent une conception bidimensionnelle, c'est-à-dire la mise en relation de la surface avec d'autres grandeurs spatiales (longueurs, angles).

Si nous parlons en termes de champs conceptuels, "la surface (comme mesure) se rattache aux champs conceptuels des quantités physiques et des opérations de mesure, de la construction des nombres positifs, de l'espace et ses modèles, aux structures additives (comme mesure simple) aux structures multiplicatives (comme produit de mesures linéaires)" (Rogalski, 1985).

Ce concept peut faire appel à des compétences diversifiées telles que le travail avec des nombres décimaux et relatifs. Observons un exemple:

Douady (1984), travaillant sur l'aire du rectangle invite les élèves à rechercher la largeur d'un rectangle de longueur 4 et d'aire 10. Il faut introduire le nombre $10/4$. Puis travaillant sur l'aire du carré, et ayant amené les élèves à rechercher le côté d'un carré d'aire 25, elle introduit le carré d'aire 27. Les enfants et l'enseignant se mettent alors à rechercher une approximation décimale de la racine carrée de 27.

D'autres conceptions sont en jeu, par exemple, lors de la comparaison de surfaces ou lors de la mesure directe des surfaces avec une unité géométrique de pavage quelconque. Ici, c'est la conception unidimensionnelle des surfaces qui est évoquée, alors que la comparaison ou le calcul d'aires en fonction de rapports de longueur mettent en jeu des conceptions bidimensionnelles. Ce type d'expérimentation permet d'identifier les filiations et ruptures à l'intérieur d'un domaine de connaissance (mesure des surfaces), qui, n'étant pas formé seul, demande l'analyse d'autres concepts associés. Ainsi, il faut considérer un ensemble assez vaste de situations et de concepts pour étudier et comprendre les filiations et ruptures conceptuels.

Les surfaces sont à l'articulation d'une part des concepts "physiques" relatifs aux propriétés des objets matériels, à leur mesure et à leurs transformations, d'autre part des concepts spatiaux, qui interviennent dans l'organisation des activités géométriques de découpage ou de pavage de l'espace et enfin des concepts numériques, qui sont nécessaires au calcul des mesures. Un double processus de mathématisation est ainsi à l'œuvre dans l'élaboration des mesures spatiales: il faut mettre en

relation des opérations au plan des objets géométriques et des opérations numériques, comme la multiplication des mesures de longueur.

Ces relations mettent en œuvre un double processus de différenciation et de coordination :

- 1) la différenciation de propriétés simultanément présentes dans un objet ou une figure (la longueur du bord/la surface intérieure)
- 2) la coordination des propriétés qualitatives (une ligne a une dimension, une surface deux) et des propriétés quantitatives, qui aboutissent aux équations-formules $S = L * L$ et aux calculs.

2.1.1.4. Les modes de travail opératoire de calcul de surface

Le "calcul" peut être *qualitatif*: ainsi, deux surfaces peuvent être comparées du point de vue de leur étendue; il peut être *semi-numérique*, une surface obtenue par regroupement de deux surfaces égales sera le "double" de chaque figure composante; il peut être *numérique*, après le choix d'une unité géométrique de pavage, on mesure l'aire par le nombre d'unités qui permet de recouvrir la figure (mesure directe), ou bien on calcule l'aire à partir d'une formule (mesure indirecte).

2.1.1.5. Le processus scolaire d'enseignement des mesures

Douady et Perrin Glorian, (1989) discutent le fait que, dans l'enseignement élémentaire en France, l'attention soit portée d'un point de vue trop statique sur la relation entre les relations numériques et les opérations concernant les "surfaces". Ces auteures observent qu'on s'intéresse rarement à l'action des transformations, et à la recherche d'invariants ou de modes de variations. Quand l'aire intervient, c'est très vite comme un produit de longueurs, avec des expressions numériques, et après qu'ont été choisies des unités de mesure.

En observant les erreurs des élèves du Cours moyen, ces auteures remarquent que l'aire est attachée à la surface et ne se dissocie pas des autres caractéristiques de cette surface:

- 1) si le périmètre d'une surface augmente, son aire aussi (et réciproquement)
- 2) si deux surfaces ont le même périmètre, elles ont la même aire (et réciproquement)

Elles observent aussi l'utilisation de formules dans des situations où elles ne sont pas valables: par exemple le produit des longueurs des côtés pour un parallélogramme ou de la mesure des trois côtés d'un triangle. Elles supposent enfin qu'un certain nombre de difficultés sont liées au traitement par

les élèves des problèmes d'aire, soit du point de vue exclusif des surfaces, soit du point de vue exclusif des nombres.

Ainsi, au sujet de l'aire, les élèves développeraient une "conception forme" liée au cadre géométrique, ou une "conception nombre" liée au cadre numérique, ou les deux, mais de façon indépendante, et ils traiteraient les problèmes sans établir de relation entre les deux points de vue. Or les problèmes d'aire mettent de façon essentielle en relation les cadres numérique et géométrique.

Dans cette recherche, nous cherchons à vérifier si des confusions entre périmètre, surface et aire peuvent survenir chez nos sujets, dont l'apprentissage de ces notions est en effet purement contextuel, sans formalisation apparente.

2.1.2. Les aspects socioculturels des représentations mathématiques

"Le réel n'est jamais "ce qu'on pourrait croire", mais il est toujours ce qu'on aurait dû penser." (Bachelard, G.)

"Face au réel, ce qu'on croit savoir clairement offusque ce qu'on devrait savoir." (Bachelard, G.)

Concevoir *les mathématiques* comme liées à des contextes sociaux spécifiques peut sembler à priori contradictoire. Traditionnellement universelles, les mathématiques sont considérées comme indépendantes de la culture. Une discussion plus approfondie peut cependant mettre en cause cette conception, ou au moins nuancer ce point de vue.

Nous pouvons distinguer, grosso modo, deux représentations plus fréquentes des mathématiques. Celle des mathématiques comme discipline formelle, universelle et décontextualisée et celle des mathématiques comme produit culturel. Les conceptions sous-jacentes à ces représentations sont très différentes, et déterminent d'une certaine façon les lignes des recherches en Psychologie et en Didactique des mathématiques.

Nous avons déjà discuté dans le premier chapitre qu'en ce qui concerne la Psychologie contemporaine, deux théories ont orienté pendant quelques années les recherches sur le développement des connaissances logico-mathématiques: la théorie piagétienne, et l'approche proposée par Vygotski et Luria. Nous avons mis l'accent sur le rôle de la culture dans chacune de

ces théories. Beaucoup plus proches de l'approche soviétique en ce qui concerne le rôle de la culture, nous proposons que les mathématiques dépendent aussi du contexte culturel, soit par sa composante scientifique, soit par la vie quotidienne. Nous postulons que le contexte scientifique est aussi une "*culture*", constituée de pratiques particulières. Comme tel, il a des valeurs qui influencent le milieu social plus large, tout en étant limité par les valeurs de la société où il s'insère. Nous illustrerons cette affirmation un peu plus loin, par quelques données historiques.

2.1.2.1. Les mathématiques comme discipline scientifique formelle, universelle et décontextualisée: conséquences didactiques

Connes, dans un dialogue avec Jean-Pierre Changeux (Changeux et Connes, 1989) remarque combien *les mathématiques* sont absolues, universelles, et donc indépendantes de toute influence culturelle. Cet auteur défend la thèse qu'il existe, indépendamment de l'homme, une réalité mathématique brute et immuable. Connes parle évidemment des objets mathématiques qui, d'après lui, sont dégagés de tous facteurs sociaux.

Dans ce sens, Dieudonné (1982) observe que les objets dont s'occupent les mathématiciens portent les mêmes noms que ceux qui entrent dans les calculs pratiques: nombres, figures géométriques et grandeurs. Il ajoute que dès l'époque de Platon, les mathématiciens ont conscience que sous ces noms, ils raisonnent sur des êtres tout à fait différents, des êtres immatériels obtenus "par abstraction" à partir d'objets accessibles à nos sens, mais qui n'en sont que des "images". En prenant l'exemple de la notion de figure géométrique il remarque combien les propriétés attribuées par les axiomes aux objets "abstraits" de la géométrie les rendent profondément différents de leurs correspondants physiques, et il souligne les difficultés qui en résultent pour définir ces objets à l'aide d'un vocabulaire approprié.

Nous ne voulons pas entrer dans la polémique qui existe sur la nature réaliste ou constructiviste des objets mathématiques. Une discussion intéressante sur ce sujet peut être trouvée dans le dialogue entre A. Connes et Jean-Pierre Changeux dans l'ouvrage "*Matière à Pensée*". Cependant, ces observations peuvent nous amener à des interrogations concernant l'objet de cette recherche:

- 1) Les mathématiques peuvent-elles être exposées seulement en termes mathématiques?
- 2) Pourrait-on discuter sur les mathématiques dans une langue naturelle qui exprimerait les mêmes notions à partir de données mal définies, et influencées par la culture?

Si les langues naturelles sont insuffisantes pour exprimer les mathématiques, comment les psychologues peuvent-ils faire pour étudier les connaissances mathématiques? Rappelons, avec Kayser (1991) "qu'on ne peut pas exiger, dans un dialogue entre disciplines, que les mots aient un sens univoque." La discussion deviendrait impossible.

Nous pouvons pourtant débattre du sens des termes que nous utiliserons dans cette recherche, ainsi que de ce qui, à notre avis, peut être une source de contradictions dans ce domaine. La discussion des rapports *outil/objet* peut s'avérer utile pour clarifier cette question. En tout état de cause, nous pensons incontournable l'idée que les objets mathématiques sont des objets abstraits et que les mathématiques ont un mode de pensée propre et un mode propre d'expression formelle.

Il faut cependant pondérer cette idée par l'idée que les mathématiques formelles appartiennent à une culture (la culture scientifique) qui a ses propres valeurs; que ces valeurs ont un pouvoir réel dans cette culture et qu'elles en régissent certains aspects, l'enseignement par exemple; enfin que cette culture scientifique subit elle aussi les effets des cultures particulières dans lesquelles les mathématiciens évoluent.

Ifrah (1985) disait qu'une invention ou une découverte ne se développe que si elle répond à la demande sociale d'une civilisation, la science fondamentale répondant, pour sa part, à une demande historique intériorisée dans la conscience des savants. En retour, mais en retour seulement, elle transforme ou bouleverse cette civilisation. Ainsi nous observons que même les mathématiques dites formelles sont conditionnées par un contexte social fort. Mais comment les mathématiques formelles sont-elles représentées dans l'actualité?

2.1.2.2. Le pouvoir des mathématiques formelles

Flato (1990) affirme "qu'on s'en exalte ou qu'on s'en satisfasse seulement, qu'on le déplore ou qu'on s'y résigne, le pouvoir des mathématiques est une réalité aujourd'hui indéniable, massive et multiforme. On parle de l'efficacité des mathématiques, mais aussi de leur empire, quand ce n'est pas de leur impérialisme." L'idée s'est en effet répandue et imposée, non sans raison, qu'une bonne connaissance des mathématiques serait la clé, et même, en définitive, la seule véritable garantie de la réussite sociale. Les mathématiques sont installées dans le rôle de critère principal de sélection sociale.

Flato (1990) observe encore que cette situation est particulièrement accentuée en France où une conception ultra-formaliste des mathématiques, héritée de la grande école Bourbaki des années 1940 et 1950 a favorisé cette tendance. Cet auteur observe que "lorsqu'on évoque le pouvoir des mathématiques, on ne parle pas seulement d'un phénomène social et culturel, on se réfère aussi à l'extraordinaire empire des mathématiques sur les autres sciences."

Bishop (1988) à partir d'une vaste étude bibliographique et de recherches auprès de cultures non occidentales, présente les mathématiques comme une culture qui joue un rôle déterminant par rapport à plusieurs sciences. Dans ce sens, Changeux (Changeux et Connes, 1989) affirme que "... les mathématiques jouent un rôle central dans la vie sociale. La culture occidentale se caractérise par une sorte de mythe des mathématiques: la croyance, peut-être issue de Pythagore, en une vertu explicative et presque transcendante des mathématiques. Pour beaucoup, décrire en termes mathématiques une structure syntaxique ou des relations de parenté paraît une "explication" suffisante."

On peut penser que les conclusions didactiques de ce propos résident dans une forme d'enseignement de cette discipline autant que dans un ensemble cohérent de propositions, de théorèmes, d'axiomes universels éloignés des situations pratiques. Cette position semble dénier toute valeur aux connaissances mathématiques non formalisées. Les conséquences didactiques de cette position méritent d'être discutées au regard des cultures dans lesquelles l'apprentissage informel des mathématiques se fait avant l'entrée à l'école. La négation du caractère mathématique des compétences pratiques conduit parfois à un refus réciproque de la mathématique scolaire, éventuellement perçue comme dépourvue de sens.

Ainsi, lorsque différentes pratiques coexistent dans une même société, elles témoignent de différents degrés de prestige. D'après Abreu & Bishop (1993), dans ces circonstances, l'exclusion des mathématiques non-scolaires par l'école pourrait amener l'enfant à entretenir des croyances et des attitudes susceptibles de l'empêcher de construire une passerelle entre les différentes mathématiques.

2.1.2.3. Les mathématiques comme produit culturel: conséquences éducationnelles

En parlant des objets mathématiques, bon nombre d'auteurs expriment plutôt l'opinion qu'on a affaire à des objets culturels, qui sont produits et utilisés à chaque stade du développement de la civilisation, et renouvelés au fur et à mesure que d'autres objets culturels interviennent, qui ne sont

pas nécessairement mathématiques. Si ces objets mathématiques existaient dans l'univers de manière intemporelle, comme l'imaginent Pythagore et Platon, on devrait pouvoir les rencontrer à tout moment. Les mathématiques évoluent, tant dans leur contenu que dans leur écriture et leur symbolique.

Illustrons cela d'un exemple: nous observons que les Egyptiens primitifs utilisaient déjà la diagonale d'un carré pour construire un autre carré dont l'aire était le double du premier. Meserve, (1980) observe que cela ne signifie pas que les égyptiens primitifs connaissaient le théorème de Pythagore cent ans avant l'époque de Pythagore.

Nous observons ainsi que l'histoire des mathématiques n'est pas une histoire abstraite et linéaire, comme l'on imagine parfois. Au contraire, elle est l'histoire des besoins et des préoccupations de groupes sociaux.

Notons, par exemple, que les textes provenant des premières civilisations orientales, en Egypte ou à Babylone, n'étaient pas faits de spéculations abstraites, mais de recettes, transmises par des castes de scribes spécialisés, destinées à régler les problèmes pratiques que pose une société agraire déjà très structurée. Les caractéristiques de ces recettes concernent des exemples où les données sont explicitées; ce sont des procédés de calcul sans justification, comme l'évaluation d'aires dont la forme et les dimensions sont connues, par exemple le triangle isocèle ou le triangle rectangle, le trapèze, le cercle. Il n'y a naturellement pas de "formule", au sens où nous l'entendons, qui porterait sur des données quelconques et non précisées; la généralité d'un procédé de calcul se laisse seulement deviner lorsqu'on en donne une série d'exemples dont les données varient.

En outre, l'histoire des mathématiques, malgré l'importance des inventions, est entièrement anonyme. Ifrah (1985) observe que "nous connaissons souvent les noms de ceux qui ont transmis, exploité, commenté chiffres et systèmes de numération. Mais les noms des inventeurs eux-mêmes sont souvent perdus, sans doute à jamais." Il ajoute: "Peut-être parce que les inventions remontent à une trop grande antiquité. Peut-être encore parce que ces inventions géniales ont été le fait d'hommes relativement humbles qui n'avaient pas le droit à la chronique. Peut-être enfin parce qu'elles sont le produit de pratiques collectives et qu'elles ne seraient, de façon précise, attribuables à personne. Faites par et pour des collectivités, elles n'ont pas délivré de brevets."

En ce sens et d'une façon plus ponctuelle pour le calcul, Carraher (1989) affirme que "*la mathématisation de l'objet* est en soit une activité sociale. Le calcul doit donc être réinséré dans

son contexte social pour être mieux compris... Quelqu'un fait des calculs avec un but précis, et ce but a un impact sur la façon dont le calcul est réalisé. Une façon de calculer n'est pas, en soi, supérieure à l'autre; le choix relève de la situation sociale et de la culture. La même situation sociale peut donner matière à différents choix dans des cultures diverses; et des situations sociales différentes peuvent déclencher des choix différents dans une même culture".

Dans cette perspective, Lave (1988) observe que "*l'activité mathématique* se présente de différentes manières, dans différentes situations, et que la réussite et les procédures employés peuvent changer chez un même sujet, dans des contextes différents. Vergnaud (1987c) préfère parler du "processus d'appropriation des connaissances par le sujet", parce que, d'après cet auteur, "les connaissances ont un caractère social marqué et indépendant du sujet".

Pour sa part, Fayol (1990) affirme que "la culture a nécessairement un impact en ceci qu'elle met à la disposition des individus un certain nombre d'instruments plus ou moins structurés pour effectuer telle ou telle action. En cela, elle intervient à deux niveaux, au moins. D'une part, elle impose des contraintes sur les *procédures* à utiliser. D'autre part, elle favorise ou inhibe la constitution ou l'utilisation de certains types de *représentations*.

D'Ambrosio, (1986) fait la remarque qu'il est possible de parler de la même mathématique dans n'importe quel pays du monde, avec la même notation, avec les mêmes définitions et les mêmes théories, sauf au niveau élémentaire. A ce niveau en effet, on observe l'existence de *pratiques mathématiques* qui sont différentes d'un groupe culturel à l'autre et *les mathématiques* apparaissent alors soumises à des variantes, comme le langage associé à la codification des pratiques populaires. Cet auteur remarque encore combien l'apprentissage des mathématiques se fait par un processus naturel, résultant de la vie en société et par l'exposition réciproque des individus, de la même façon que l'apprentissage de la langue maternelle.

Cette hypothèse nous conduit à attribuer aux mathématiques le caractère d'une activité "inhérente" à l'être humain, qui est pratiquée spontanément, et qui est donc déterminée par la réalité matérielle et culturelle dans laquelle l'individu est inséré.

Ainsi, nous postulons qu'il ne fait aucun doute qu'historiquement les mathématiques ont, à leur origine, des *problèmes d'ordre pratique*. Nous avons déjà donné quelques exemples illustrant que l'origine des mathématiques se situe dans la conceptualisation du réel. Nous ajoutons cependant qu'il y a dans *les mathématiques* d'autres motivations que l'application à des problèmes variés du

monde réel. Les questions évoquées précédemment, concernant les représentations des mathématiques, peuvent, à notre avis, clarifier ce débat. Il nous semble que les discordances des auteurs sont liées plutôt au fait qu'on désigne par un même mot (mathématiques) des concepts différents. Nous avons utilisé les termes mathématiques, activités mathématiques, objets mathématiques, calcul etc. en fonction de la terminologie utilisée par les différents auteurs. Ces termes sont-ils équivalents? De quoi parlons-nous dans cette recherche qui se propose d'étudier les connaissances mathématiques des sujets dans un contexte de travail?

Connes (Changeux & Connes, 1989) propose une clarification concernant ce point. Cet auteur définit assez précisément trois niveaux dans l'activité mathématique:

- 1) Le premier niveau est le niveau du calcul, pas nécessairement des opérations élémentaires. Les opérations peuvent être plus compliquées, mais peu importe. Seul compte le fait qu'accomplir ces opérations n'a pas de conséquences pratiques sur la manière dont elles sont accomplies. Une fois l'addition ou la multiplication apprises, à moins de passer à un autre niveau, on ne change pas de méthode, on l'applique sans comprendre pourquoi. Ce ne sont que des recettes qu'on applique.
- 2) Le deuxième niveau commence lorsqu'il y a interaction entre les calculs effectués et une problématique personnelle. Supposons, par exemple qu'on ait deux méthodes pour faire un calcul et qu'on obtienne deux résultats différents. On se trouve alors au deuxième niveau, parce qu'on est obligé de se poser une question, soit sur la validité de la méthode, soit sur des erreurs possibles faites pendant le calcul, soit sur la signification des calculs que l'on effectue. On doit alors tester la méthode, et donc comprendre son but et son mécanisme.
- 3) Le troisième niveau est celui de la découverte. On parvient à poser des problèmes nouveaux, à ouvrir des voies inaccessibles auparavant, et à découvrir une partie encore inexplorée de la géographie des mathématiques.

A partir de l'ensemble de ces éléments, nous pensons que considérer les *mathématiques* comme "dépendantes" de la culture peut provoquer des réticences, liées à leur caractéristique d'universalité. Cependant, ces réticences semblent moins justifiées lorsqu'on parle *des deux premiers niveaux d'activités mathématiques*: On peut admettre qu'au moins une partie de la polémique, dans ce domaine, peut être liée à la définition inadéquate de l'objet d'étude. Le psychologue est plus intéressé par les deux premiers niveaux d'activités mathématiques que par le troisième dans ses recherches sur les compétences mathématiques. Par conséquent, il ne peut oublier qu'il existe deux

grandes catégories de composantes à l'œuvre dans les activités mathématiques. La première est très dépendante de la culture en ce qu'elle privilégie des modalités de représentation et de traitement. La seconde se trouve plutôt sous la domination de facteurs cognitifs généraux sans rapport direct avec la culture" (Fayol, 1990). En ce qui concerne les articulations possibles entre les apports des contraintes culturelles et les opérations cognitives, cet auteur remarque l'absence de travaux empiriques et d'élaborations théoriques.

Nous proposons donc de reprendre l'objet plus ponctuel de la recherche lié aux connaissances mathématiques de mesure dans la vie quotidienne, en essayant de repérer les contraintes sociales et les activités cognitives impliquées dans ces activités mathématiques.

2.1.2.4. La mesure dans la vie quotidienne: questions théoriques posées par l'activité pratique de la mesure

Nous devons examiner trois registres de l'activité de mesure: le problème de l'intermédiaire et du mesurant; le problème de l'approximation; et enfin les mesures indirectes et notion de mesure composée;

Nous allons aborder chacun de ces points avec des exemples de travaux empiriques pour mieux comprendre l'interaction des aspects conceptuels et sociaux impliqués dans la construction de cette connaissance.

2.1.2.5. Le mesurant et l'approximation

Cléro (1990) affirme que la mesure appartient à toute culture, mais à des degrés de perfection qui vont du primitif au supérieur. Dans la réalité historique, telle que nous la connaissons, le développement de la culture assure des techniques de mesure, plus ou moins développées et plus ou moins précises.

Si l'on prend l'exemple particulier du concept de "mesure", on s'aperçoit que la détermination des unités conventionnelles n'implique pas seulement le choix de l'unité, mais aussi la création de *représentations* orales ou écrites intégrées à la culture. Les pratiques culturelles qui contiennent l'utilisation et la transmission de ces unités sont diverses. Et il paraît y avoir un rapport entre le choix des unités et le degré de précision demandé par l'activité, ainsi que par les dimensions de l'objet mesuré. Dans les recettes de cuisine, on utilise des cuillers pour mesurer des quantités plus petites, et des tasses pour des quantités plus grandes. Même si les dimensions des cuillers et des

tasses sont différentes d'une maison à l'autre, ce niveau de précision est suffisant pour réaliser de bonnes recettes ...(Carraher, 1989).

Leach (1973; cf. Bishop, 1988) remarque que c'est une particularité de la société scientifique de considérer que "l'échelle" (l'unité de mesure) idéale devrait être exacte et sans ambiguïté; dans d'autres milieux les gens préfèrent des unités de mesures faciles à employer. Il ajoute que le critère de la commodité peut être éventuellement contraire à celui de la précision.

Ainsi précision ne signifie pas nécessairement "évaluer très bien". Pour nous qui vivons dans une culture nettement orientée vers les sciences et les mathématiques, le besoin d'avoir des mesures toujours plus précises semble s'être infiltré dans la culture générale. Le danger est de généraliser à l'extrême cette nécessité de mesures très précises. Comme Eshiwani (1979, cf. Bishop, 1988)) le commente: "une faiblesse de personnes venues d'une tradition mathématique/scientifique est d'avoir la tendance à supposer que ce qu'ils ne peuvent pas quantifier ou mesurer est insignifiant..."

Gay et Cole (d'après Bishop, 1988) montrent combien la mesure dans la vie quotidienne peut être liée à des questions économiques et commerciales: La tasse que le négociant Kpelle utilise pour acheter du riz a le fond arrondi (rond) et soigneusement pilonné, mais la tasse utilisée pour vendre le riz n'a pas le fond arrondi. C'est la source du profit.

2.1.2.6. Les mesures indirectes; notion de mesure composée

Une des informatrices de Bishop(1988) a raconté que, dans son village à Papua, Nouvelle Guinée, quand il y avait des disputes sur les aires des jardins à cultiver, le système de mesure employé consistait à additionner la longueur et la largeur des jardins (les jardins étaient rectangulaires). Pour eux, multiplier était un système des blancs qu'ils avaient appris à l'école, mais chez eux ils se contentaient toujours d'additionner! ... Bishop ajoute que comme les jardins avaient la même forme, additionner la largeur et la longueur donne une mesure acceptable pour des buts de comparaison.

Ces exemples nous permettent de disposer d'éléments de réflexion sur deux aspects : la relative souplesse du degré d'acceptation de résultats divergents dans les activités mathématiques insérées dans des situations concrètes, la signification sociale et conceptuelle des "erreurs" mathématiques.

Chapitre 3 : Description du Contexte de la Recherche

" ... un phénomène demeure incompréhensible tant que le champ d'observation n'est pas suffisamment large pour qu'y soit inclus le contexte dans lequel le dit phénomène se produit. Ne pas pouvoir saisir la complexité des relations entre un fait et le cadre dans lequel il s'insère, entre un organisme et son milieu, fait que l'observateur bute sur quelque chose de "mystérieux" et se trouve conduit à attribuer à l'objet de son étude des propriétés que peut-être il ne possède pas" (Watzlawick, Helmick & Jackson, 1972).

L'objectif de ce chapitre est d'appréhender les variables d'origine sociale qui contribuent à l'analyse des processus cognitifs mis en œuvre en situation de résolution de problèmes. Ainsi évoquerons-nous :

- 1) certaines caractéristiques de la région où se déroule la recherche (essentiellement les aspects éducatifs et ceux liés au travail, en relation à l'objet de notre étude);
- 2) les aspects historiques de la culture de la canne à sucre dans la région, y compris la "géométrie de la colonisation agraire"⁵ ;
- 3) les outils mathématiques culturels utilisés dans la région pour résoudre des problèmes impliquant le concept de mesure.

Nous avons déjà débattu des aspects "culturels" des mathématiques, et de leur importance dans une perspective d'interprétation de données. En tenant compte de ces points, nous considérons que les objets mathématiques étudiés ici ne peuvent être abordés isolément. Pour les circonscrire, il faut les mettre en rapport avec un ensemble de processus intervenant dans le développement économique et social de la région dans laquelle ils s'insèrent. Plus précisément, les commentaires du contexte particulier de la recherche peuvent servir au lecteur comme support pour des interprétations ultérieures sur le fonctionnement cognitif des sujets.

Il n'est pas dans notre propos de faire une analyse socio-économique de la zone sucrière de Pernambuco. Freyre (1989) observait déjà que la civilisation de la canne à sucre exige une analyse

⁵ Expression utilisée par Freyre en « *Nordeste* » (1989) pour désigner les méthodes peu rigides et imprécises de la planification géométrique des colonisateurs portugais.

lente, dont la possibilité de réalisation implique une certaine ampleur scientifique. Cela signifie la réunion de plusieurs spécialistes pour un effort commun, avec toute la documentation possible: anthropologique et historique; sociologique et psychologique, géologique et botanique. En tentant de contribuer à cette analyse, nous discuterons ici quelques événements permettant **de situer** et **de comprendre** les processus cognitifs particuliers qui sont l'objet de notre étude.

3.1. Quelques remarques sur la région du Nordeste du Brésil

Le Brésil est une République fédérative qui se subdivise de façon juridique en États. Ces États ne sont pas indépendants, mais des unités politico/administratives qui participent à une Fédération. Les organismes fédéraux de développement, qui exécutent la planification économique et sociale, agissent au niveau régional, donc au niveau de plusieurs États. Le Nordeste est l'une des cinq régions du Brésil; il est constitué de neuf états. Pernambuco, (où cette recherche a été menée), est situé au Nordeste, et par conséquent sous l'influence à l'époque de la réalisation de cette recherche, de la SUDENE (Surintendance pour le développement du Nordeste). Cet organisme obéissait à une législation fédérale spécifique pour l'application des décisions dans cette région. La figure 3.1. montre la place du Brésil dans l'Amérique du Sud et la subdivision en régions.

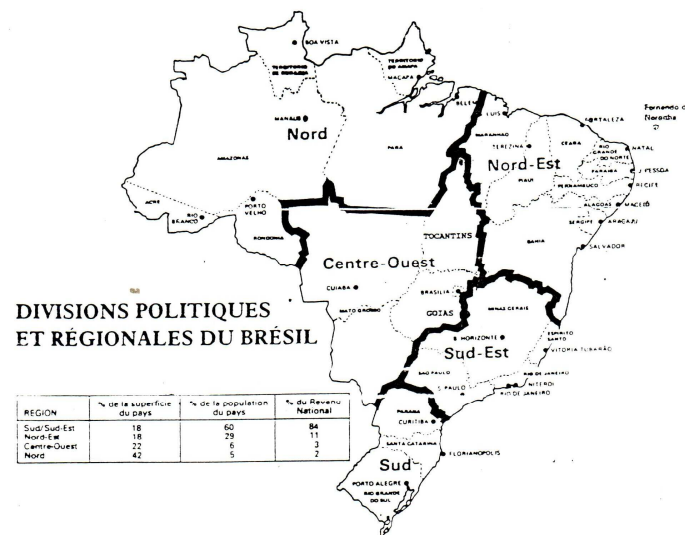


Figure 3-1 Divisions politiques et régionales du Brésil

LA PLACE DU BRÉSIL DANS L'AMÉRIQUE DU SUD



Figure 3-2 Place du Brésil dans l'Amérique du Sud

L'inégalité entre les régions est marquante et pour cette raison, nous devons aborder les caractéristiques de la région Nordeste, et celles plus spécifiques de l'Etat de Pernambuco.

Le Nordeste est historiquement le berceau du Brésil puisque première région découverte par les Portugais. Elle couvre une superficie trois fois plus étendue que celle de la France (1.542.246 Km², soit 18,2% du territoire national). Sa population, de 42.252.633 millions d'habitants, représente près d'un tiers de la population globale du Brésil (29,2%), et présente des caractéristiques qui contrastent avec celles du reste de la population du pays. La pluralité des ethnies, les fluctuations du marché international sur le prix des produits régionaux, et par conséquent la variation du pouvoir économique des habitants a marqué cette population d'une façon indéniable. Un mélange de fierté et de misère caractérise ses habitants, conséquence peut-être des réminiscences de l'aristocratie rurale, origine de la civilisation brésilienne. Nous reviendrons sur cette question. C'est aujourd'hui la région la plus pauvre du Brésil. 57,3% de la population du Nordeste habite dans la zone urbaine, contre 42,7% en zone rurale. Ce dernier pourcentage est le plus élevé de toutes les régions (voir Tableau 3.1).

Situation de domicile	Région Nord	Région Nordeste	Région Sud-Est	Région Sud	Région Centre-Ouest	Brésil
Zone Urbaine	-	57,3	85,9	67,6	74,2	74,3
Zone Rurale	-	42,7	14,1	32,4	25,8	25,7

Tableau 3-1 Distribution de la population du Brésil selon le type d'habitat par grandes régions (IBGE-PNAD, 1989)

Les contradictions dans cette région sont très marquantes, notamment entre les lois relatives à l'éducation et au travail et les taux d'analphabétisme, d'évasion scolaire et de transgression de la législation du travail. Notons quelques données statistiques illustrant ces contradictions:

3.1.1. Éducation

Au Nordeste le taux d'analphabétisme des personnes âgées de 7 ans ou plus est de 39,3% (le plus élevé parmi les régions du Brésil). Dans la zone rurale ce taux atteint 56,0% contre 27,5% dans la zone urbaine (voir tableau 3.2.).

Type d'habitat	Nord	Nordeste	Sud-Est	Sud	Centre-Ouest	Brésil
Urbaine	15,0	27,5	9,9	9,4	13,3	14,3
Rural	-	56,0	24,9	15,6	32,1	38,2
Total	-	39,3	11,9	11,4	18,0	20,1

Tableau 3-2 Indices d'analphabétisme de personnes de 7 ans et plus par type d'habitat et grandes régions (IBGE-PNAD, 1989)

Au Nordeste, pendant la période 1980/87, sur 100 élèves inscrits au CE1 (première classe de l'école primaire), 10% seulement accèdent à la troisième (fin du collège), alors qu'au Sud-Est ce pourcentage est de 24%.

Malgré l'obligation scolaire, le taux d'analphabétisme des enfants et des jeunes est assez élevé. Au Nordeste, ce taux chez les enfants et adolescents est particulièrement fort: en 1988, 68,5% pour le groupe de 7 à 9 ans contre 26,7 au Sud-Est; 35,4% pour celui des 10 à 14 ans contre 5,9 au Sud-Est et 21,9% pour les jeunes de 15 à 17 ans contre 4,0% au Sud-Est. Ces proportions révèlent que le taux d'analphabètes pour les groupes de 10 à 14 ans et de 15 à 17 ans est de 5 à 6 fois plus grand au Nordeste qu'au Sud-Est (voir ou Tableau 3.3.)

Région/Âge	7 à 9 ans	10 à 14 ans	15 à 17 ans
Nordeste	68,5	35,4	21,9
Sud-Est	26,7	5,9	4,0

Tableau 3-3 Taux d'analphabétisme des personnes de 7 à 17 ans au Nordeste et au Sud-Est du Brésil

Observons les taux de scolarité du groupe de 7 à 14 ans dans les grandes régions du pays. Les inégalités sont évidentes: Alors qu'au Sud-Est, région la plus urbanisée, 87,1% des enfants fréquentent l'école en 1987, ce pourcentage n'est que de 77,9% au Nordeste. Dans les zones rurales plus pauvres, 25% à 30% d'enfants et d'adolescents en situation de scolarité obligatoire sont en dehors du système scolaire. Ainsi sur environ 4,3 millions d'enfants et d'adolescents qui ne fréquentaient pas l'école en 1987, 52,7% habitaient les zones rurales, dont plus de la moitié (54,1%) dans le Nordeste rural.

3.1.2. Travail

La distribution des personnes actives par groupe d'âge montre qu'en 1989, le Nordeste présente le pourcentage le plus élevé de mineurs (15,9%) et de personnes âgées (6,3%) exerçant une activité, par comparaison avec les autres régions. La majorité de ces individus ont des activités agricoles. Ces données ne sont absolument pas cohérentes avec les indicateurs de mortalité des enfants et d'espoir de vie (voir tableaux 3.4.).

Cependant les personnes âgées ont plus de difficulté à participer à l'exode nordestin, pour "échapper" au milieu rural. Ce fait implique un pourcentage plus élevé de personnes âgées dans la population active du Nordeste.

Régions	Mortalité des enfants de moins d'un an pour 1000 naissances	Espoir de vie (Age)
Nord	72,31	64,17
Nordeste	121,36	51,57
Sud-Est	74,50	63,59
Sud	61,80	66,98
Centre-Ouest	70,32	64,70

Tableau 3-4 Mortalité des enfants et espérance de vie au Nordeste du Brésil

Les estimations de mortalité des enfants de 5 ans ou moins, pour les diverses régions, est alarmante: sur la totalité du pays, sur 1000 enfants nés vivants, 82 environ vont mourir avant d'avoir 5 ans,

136 au Nordeste. Dans les autres régions, la mortalité avant cet âge est d'environ 50 pour 1000, valeur déjà très élevée lorsqu'elle est comparée à celle des pays plus développés.

Le niveau d'instruction de la mère semble être déterminant sur la mortalité infantile. En 1986, alors que le taux de mortalité infantile chez les enfants de mères sans scolarité était de 100,5 pour 1000 enfants, le taux relatif pour les mères ayant accompli plus de 5 ans de scolarité tombait à 40,1 pour 1000

Le sous-développement économique persiste au Nordeste brésilien, et transparaît à travers divers indicateurs comme l'absence des garanties de la législation du travail et de la sécurité sociale, notamment dans le secteur primaire de l'économie.

La population active de cette région présente la plus faible proportion d'employés, et également la plus faible proportion d'employés avec un contrat de travail (22,8%). De plus, la proportion de travailleurs non rémunérés (12,7%) arrive juste après celle de la région Sud où les exploitations de type familial sont davantage représentées. Cette catégorie de travailleurs est surtout rencontrée dans le secteur primaire, ce qui légitime les proportions ci-dessus évoquées (voir Tableau 3.5.).

Nature du Travail	Région Nord	Région Nordeste	Région Sud-Est	Région Sud	Région Centre-Ouest	Brésil
Employés	67,5	54,5	75,0	58,3	68,2	66,0
.Avec contrat de travail	35,2	22,8	49,4	39,8	33,8	39,1
Sans contrat	32,3	31,7	25,6	18,5	34,4	26,9
Travailleur indépendant	24,0	29,8	16,9	23,1	20,4	21,9
Employeur	5,0	3,0	4,8	4,2	6,2	4,3
Non rémunéré	3,5	12,7	3,3	14,4	5,2	7,8

Tableau 3-5 Distribution de la population active par grandes régions, selon la nature du travail (IBGE-PNAD, 1989)

Le Nordeste détient la plus grande proportion de la population active dans les activités agricoles (39,5%). En ce qui concerne cette population, seuls 13,8% des employés ont un contrat de travail signé (IBGE, 1989), alors que dans les activités non agricoles ce pourcentage est de 50,8%. Le statut du travailleur rural de 1963 garantit pourtant aux ouvriers agricoles les mêmes droits que les ouvriers de zone urbaine (cf. Correia de Andrade, 1985).

Malgré leur participation à l'économie, les jeunes et les enfants travaillent dans de très mauvaises conditions. La grande majorité ne bénéficie pas de la protection due par la législation du travail. En ce qui concerne les jeunes, l'inégalité régionale est marquante:

1) Très peu ont un contrat de travail signé par l'employeur: 1,2% du groupe de 10 à 14 ans au Nordeste contre 15,4% au Sud-Est et 8,0% du groupe de 15 à 17 ans au Nordeste contre 42,0% au Sud-Est;

2) La plupart de ces jeunes travaillent 40 heures ou plus par semaine.

La rémunération des jeunes est également révélatrice de différences régionales: pour le groupe de 10 à 14 ans, plus de la moitié des enfants nordestins (56,7%) travaille sans avoir de revenu, alors qu'au Sud-Est le pourcentage est de 24,1%.

Parmi les adolescents de 15 à 17 ans, l'inégalité régionale est aussi nette: alors qu'au Sud-Est seulement 27,3% touchent moins de la moitié du SMIC (salaire minimum mensuel), au Nordeste ce pourcentage atteint à 70,8%

Observons la distribution des revenus au Brésil en fonction du salaire minimum (SM).(source IBGE). Le salaire minimum en Octobre 89 était de US\$ 80,63.

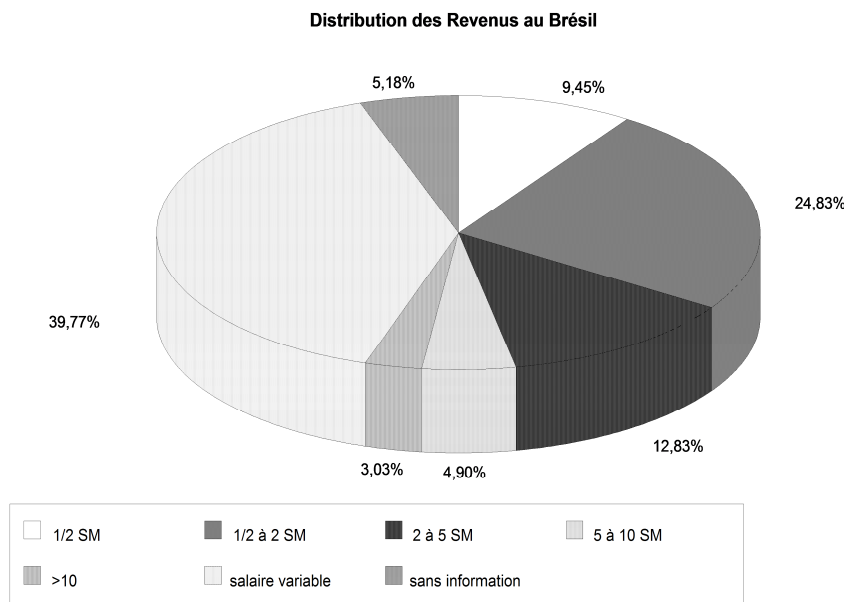


Figure 3-3. Distribution des revenus au Brésil

Ces données sont seulement destinées à permettre au lecteur d'apprécier le contexte social dans lequel vivent les sujets de cette étude. Les remarques historiques qui suivent

n'expliquent pas ces phénomènes, mais aident à comprendre l'origine et l'évolution de cette situation, dont les causes sont multiples.

3.1.3. Les zones climatiques

Dans le Nordeste, on peut distinguer schématiquement trois zones humaines et climatiques:

- le littoral humide ou Mata,
- la zone intermédiaire appelée Agreste,
- le Sertão (voir figure 3.4.).

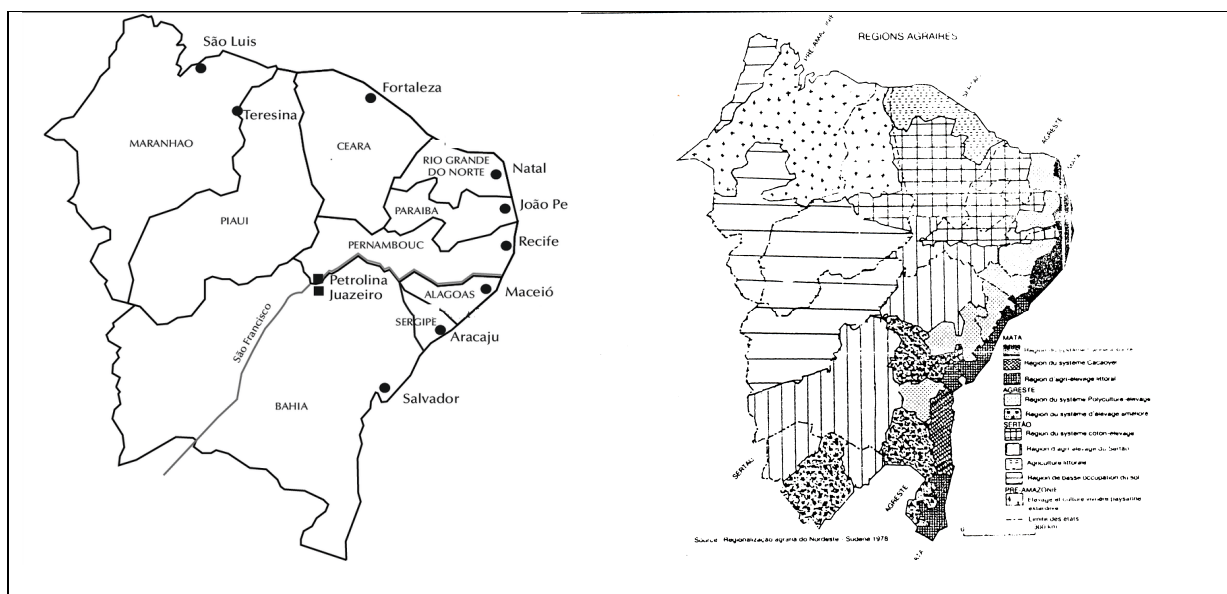


Figure 3-4. États et zones agraires du Nordeste du Brésil

Le Sertão représente un peu plus de la moitié de la superficie du Nordeste (850.000 Km²) en étant largement englobé dans le "polygone des sécheresses" qui définit les zones susceptibles de recevoir une assistance en cas de sécheresse. Dans cette zone, l'élevage bovin est associé à quelques cultures de faible rentabilité: coton, maïs, manioc et riz. L'Agreste est un domaine de polyculture familiale associé à l'élevage et orienté vers l'approvisionnement des villes du littoral. La zone sucrière, dénommée zone "da mata" (de la forêt) en souvenir des frondaisons qui la couvraient avant la déforestation, s'étend de Rio Grande do Nord jusqu'à Bahia, le long de la côte (voir carte, figure. 3.2). Cette zone est caractérisée par une monoculture de canne à sucre, depuis le début de la colonisation. Aujourd'hui, pas plus qu'à l'époque coloniale, les paysans ne peuvent pratiquer une

culture de subsistance. La loi du terrain (*lei do sítio*), selon laquelle les planteurs sont obligés de concéder deux hectares autour des maisons, n'est même plus observée.

3.1.3.1. L'État Fédéré de Pernambuco

Dans l'État Fédéré de Pernambuco également, trois zones climatiques commandent la répartition des cultures. La bande côtière, région humide d'une soixantaine de kilomètres de large est la "zona da mata", l'ancienne forêt atlantique aujourd'hui presque partout défrichée et couverte de plantations de sucre. Plus à l'est, nous trouvons l'agreste, terre de transition, faiblement arrosée, où subsistent de petites cultures. Enfin, nous atteignons le sertão, aride, victime de sécheresses, où l'élevage est présent. Dès le XVII^e siècle, le Sertão devient économiquement complémentaire de la Mata: il fournit au littoral des animaux pour faire tourner les moulins à sucre, du cuir et de la viande.

A Pernambuco, la bande côtière est elle-même divisée suivant une ligne qui passe approximativement par la capitale de l'État, Recife; au Nord de Recife, la zone da mata nord, région de collines est occupée par des plantations de dimensions moyennes. Au sud, la zone da mata sud, plus plate, est découpée en de très grands domaines. Notre recherche s'est déroulée essentiellement dans la "zona da mata" sud de Pernambuco.

Nous avons dit que l'état de Pernambuco n'est pas indépendant des autres états. Il est donc soumis aux décisions prises au niveau de la région, le Nordeste. La zone sucrière nous intéresse particulièrement.

3.2. Quelques mots pour comprendre la situation dans les années 90

Comment cette région, que l'on considérait à l'époque de l'Empire comme la plus riche de l'Amérique Latine, grâce à son fructueux commerce de coton et de canne à sucre, en est-elle arrivée à cette situation?

Certains facteurs sont bien connus. Dès la fin du XVIII^e siècle, la chute des prix du sucre et l'instabilité du prix du coton sur le marché international ainsi que l'installation des plantations de café autour de São Paulo, ont provoqué un transfert du pouvoir économique vers le Centre-Sud du Brésil. Ces facteurs externes ont marqué la crise; les compétitions inter-régionales en ont accentué le processus.

Le Nordeste s'est alors figé dans une structure archaïque et quasi féodale, où les terres demeuraient la propriété d'une minorité: 80% de terres cultivables appartiennent à 2% de la population. Dans cette situation, "... les problèmes de subsistance ne sont pas négligeables. En fonction de la nature de l'économie, basée sur une agriculture d'exportation, les défauts de la production de produits de première nécessité s'ajoutent aux afflications générées par les sécheresses, qui périodiquement attaquent la région" (Mota, 1972).

3.2.1. La culture de la canne à sucre dans la région : remarques historiques sur la colonisation

"Impossível afastar a monocultura de qualquer esforço de interpretação social e até psicológica que se empreenda do Nordeste agrário. A monocultura, a escravidão, o latifúndio - mas principalmente a monocultura - aqui é que abriram na vida, na paisagem e no caráter da gente as feridas mais profundas." (Gilberto Freyre, 1989)

Impossible d'éloigner la monoculture de n'importe quel effort d'interprétation sociale et même psychologique au Nordeste agraire. La monoculture, l'esclavage, la vaste propriété rurale - mais surtout la monoculture - ont ouvert des blessures profondes autant sur la vie, le paysage que sur le caractère des populations". (Gilberto Freyre, 1989)

3.2.1.1. Les besoins capitalistes du marché international et les besoins contradictoires de la société semi-féodale développée dans la colonie

La production de sucre fut la première activité réellement colonisatrice du Portugal au Brésil; qui obtint des résultats dans la région sucrière du Nordeste. Le sol a toujours favorisé la plantation de la canne au Nordeste. De plus, les communications avec la métropole étaient facilitées du fait de la distance moins grande entre le Nordeste et l'Europe, confortée par le régime favorable des vents, fondamental pour la navigation. Toutefois, l'implantation de la culture sucrière au Nordeste du Brésil par les Portugais a été organisée en fonction d'intérêts purement mercantiles.

Correia de Andrade (1985) observe que la prédominance d'une culture importée dans une région ne peut pas uniquement s'expliquer par le facteur climatique. Il ajoute que du point de vue naturel,

écologique, plusieurs autres cultures pouvaient occuper les surfaces aujourd'hui occupées par la canne à sucre, et que son implantation et sa pérennité ont été le résultat d'une politique coloniale portugaise dans une période où le sucre était très demandé et peu produit sur le marché européen.

Dans le même sens, Amaral Ferlini, (1984) affirme que la production de sucre dans la colonie a permis au commerce européen d'intensifier l'accumulation de capital, qui a contribué à déclencher, au XVIII^e siècle, la révolution industrielle et l'affirmation du capitalisme. Dans la colonie en revanche, se structurait, à la même époque, une société esclavagiste dont le sens était donné par la possession et le travail des esclaves, signes de l'aristocratie rurale, et non par l'idée de lucre et de productivité, typiques de la mentalité bourgeoise.

Ainsi, se dessinait, à cette époque, un mouvement général contradictoire: alors qu'au niveau européen s'esquissait une économie capitaliste profitant du bénéfice commercial de la production coloniale, en Amérique, le processus productif se détériorait dans la même colonie, sur des bases non capitalistes dans un modèle de pérennisation du pouvoir en place.

La richesse apparente des "maîtres de moulin"⁶ dissimulait en fait une misère générale. Leur gain représentait un peu plus de 5% du capital investi, à peine suffisants pour l'entretien de leur famille. La structure de cette société était patriarcale, où s'apprenaient la subordination, la passivité, l'obéissance et la soumission à l'autorité suprême du père.

Freyre, (1974) observe que "dans la zone agricole, il s'est développé, avec la monoculture absorbante, une société semi-féodale: une minorité de blancs, ou presque blancs, patriarcaux, polygames, dominaient du haut de leurs maisons de maîtres, bâties de pierre, non seulement les esclaves dans la promiscuité de leurs masures, mais encore les camarades, les agrégés, les clients dans leurs demeures de torchis et de paille, véritables vassaux des seigneurs de moulins."

D'après cet auteur, la société brésilienne, principalement à Pernambuco et dans la baie de Bahia, s'est développée sous une forme patriarcale et aristocratique, à l'ombre des grandes plantations

⁶ Expression créée par Roger Bastide dans « Maîtres et Esclaves » de Gilberto Freyre pour traduire le terme portugais « Senhor de Engenho ». Engenho implique autant la partie agricole de la plantation de la canne à sucre que la partie artisanale de la production de sucre et d'alcool.

sucrières, et non au hasard, en petits groupes instables; dans des grandes maisons de pisé ou de pierre, non dans des huttes d'aventuriers.

Il ajoute qu'à partir de 1532, la colonisation portugaise au Brésil, comme la colonisation anglaise en Amérique du Nord, mais au contraire de la colonisation espagnole et française dans les deux Amériques, se caractérisait par la domination quasi exclusive de la famille rurale ou semi-rurale.

Cet auteur observe qu'en milieu rural, où l'autorité publique était faible ou même inexistante, la grande propriété constituait le seul centre de pouvoir et de richesse. A l'ombre de la maison des seigneurs, dans une ambiance accueillante, auprès de leur autorité, tous cherchaient protection.

Le grand propriétaire, le maître de moulin, guidait la vie de tous ceux qui l'entouraient, par ses valeurs aristocratiques. Son but n'était ni le profit, ni la rationalité de l'entreprise, mais l'accumulation des esclaves et des terres, facteurs d'honneur et de pouvoir. La famille, les esclaves et même l'église lui étaient subordonnés. Entre eux, plus que de froids rapports économiques, s'était développé un réseau affectif aux liens fortement intriqués. Nous retrouvons encore aujourd'hui, dans la zone sucrière de Pernambuco, des éléments de cette dynamique de fonctionnement. Fondées sur des réseaux affectifs complexes, les relations entre les ouvriers, les employés de l'usine et "le patron" ne peuvent être comprises que dans la perspective des rapports de travail.

3.2.1.2. La nature du travail dans les plantations

Les articulations sociales, la composition ethnique, les modèles culturels, les rapports de travail et de pouvoir se sont formés autour des moulins et des plantations de canne. Bien qu'au cours de trois siècles la colonie en ait modifié les lignes générales, la production sucrière constitue toujours la matrice de la société brésilienne, surtout au Nordeste.

L'organisation de la production du sucre a été planifiée pour optimiser la production. Amaral Ferlini, (1984) observe que la production à grande échelle, pour un marché éloigné et sans rapport immédiat avec la consommation, exigeait un contingent important de travailleurs qui "acceptaient" de travailler pour d'autres, sans avoir, eux-mêmes, de motivation personnelle pour les processus de production. D'après cet auteur, l'activité productive des "engenhos" illustre le sens même du mot travail, issu du latin tripaliare, (tortures). C'était un fardeau, une souffrance, une punition, une peine, de même qu'une activité disciplinaire. Soumis à des tâches répétitives dépourvues de sens en soi, l'esclave était amené à l'épuisement et à l'aliénation.

En considérant attentivement les caractéristiques de la production coloniale, on peut mieux comprendre le transfert du travail libre des salariés à un mode de type esclavagiste: sans l'esclave, le Portugal aurait dû acheter le sucre en monnaie courante, donc avec perte de devises pour la colonie. En échangeant le sucre pour des esclaves, il bénéficiait de ce produit à un coût très bas. En Afrique, il échangeait des esclaves contre des tissus grossiers, des verreries multicolores, des miroirs, des boissons. Dans les colonies, l'échange du sucre et du tabac contre des esclaves, permettait leur transformation en monnaie dans le commerce européen. Comme les besoins de restitution de la force de travail étaient constants, les maîtres de moulins étaient obligés de consommer presque toute la production pour acheter des esclaves, s'endettant sans possibilité de capitaliser dans la colonie même.

Ainsi s'est formée, en Amérique tropicale, une société agraire et esclavagiste. Nous retrouvons encore aujourd'hui dans l'organisation du travail quelques caractéristiques de l'époque coloniale: absence de motivation personnelle pour les processus de production, relation au travail dépourvue de sens, rapports de soumission et de gratitude envers le patron.

3.2.1.3. La "géométrie de la colonisation agraire"

"La décision sur les bornes et frontières paraît, en effet, originelle; sans elle, pas d'oasis séparée du désert ni, trouant la forêt, de clairière où les paysans s'adonnent au travail d'agriculture, pas d'espace sacré ou profane, l'un de l'autre isolé par le geste des prêtres, par définition, enserrant un domaine, donc ni langage précis sur lequel s'accorder ni logique; pas de géométrie, enfin, au moins au sens de la métrique." (Michel Serres, 1993)

La colonisation a eu pour effet entre autres, de donner aux civilisations primitives une organisation, notamment par la planification des quartiers et des villes. Pour les Portugais, cet "ordre" n'était pas rigide comme pour d'autres colonisateurs européens. Il impliquait seulement le minimum nécessaire au fonctionnement.

Freyre (1989) fait référence à la "géométrie de la colonisation agraire". Pour lui, même si le Portugais n'avait pas la mystique de l'ordre comme l'Espagnol, l'Anglais ou le Hollandais, il a tout de même donné au paysage de cette partie de l'Amérique ses éléments caractéristiques de l'ordre:

blocs de construction représentant une méthode ou une forme de conquête, de gestion et de domination sur l'eau et sur les forêts.

A la différence des Hollandais qui, dans ce même Nordeste, avaient été les premiers à construire des quartiers - et même la ville de Recife - dans un plan d'urbanisation de nature géométrique, les Portugais utilisaient une géométrie "souple", capable de résoudre les problèmes pratiques, et comportant certaines imprécisions: le triangle rural - moulin de sucre, maison de maître, chapelle - s'est imposé au paysage du Nordeste, comme la première note d'ordre européenne. Le triangle rural consiste en une disposition systématique de trois constructions dans les plantations de canne à sucre. Il s'agit:

- 1) de la maison de maître (située toujours auprès d'un fleuve);
- 2) du moulin de sucre (situé du côté opposé à la maison)
- 3) de la chapelle⁷, un peu éloignée vers l'Ouest, entre le moulin et la maison de maître.

Freyre, (1989) observe, en citant "un chroniqueur", que lorsqu'on relie entre elles ces constructions, on obtient un triangle parfait. Il pense que ces triangles ont acquis une expression non seulement économique dans la vie brésilienne mais aussi une expression politique. Ces triangles sont devenus classiques, en "cassant" les lignes vierges du paysage du Nordeste, dont les bords des fleuves comportent nombre de virages. Le triangle rural a introduit dans le paysage désordonné les marques d'un nouvel ordre, ce que Gilberto Freyre appelle la "géométrie de la colonisation agraire". Même si les rivières et ruisseaux de la région se sont subordonnés au nouveau système de relations entre l'homme et le paysage, ils ne se sont pas militarisés en canaux rigides à la hollandaise (Freyre, op. cit).

3.2.1.4. Remarques historiques sur l'implantation de moulins de sucre

D'après Mont'Alegre (1974) cité par Abreu (1988), le premier "moulin" installé au Nordeste a été créé en 1535, à Olinda - Pernambuco. Aux alentours de 1590, l'état fédéré de Pernambuco avait installé déjà 66 moulins à sucre.

⁷ Il faut noter l'importance de l'église catholique dans la colonisation. Bien que le Brésil se soit formé sans que ses colonisateurs se préoccupent d'unité ou de pureté de race, pendant tout le XVI^e siècle, la colonie est restée ouverte à tous les étrangers pourvu qu'ils fussent catholiques.

L'évolution de la culture de canne à sucre, des années 1500 à l'époque actuelle, se caractérise par trois phases distinctes:

- 1) celle des moulins;
- 2) celle des centrales sucrières;
- 3) celle des distilleries ou des usines.

Au cours de la première phase, les acteurs impliqués dans la culture de la canne à sucre étaient constitués par les maîtres de moulins (grands propriétaires de terre); les exploitants de terrains de petites dimensions, sans contrat ni bail. Ceux-ci plantaient la canne à sucre, et dans la période de la récolte étaient obligés de céder un quota de la production de sucre aux maîtres de moulins; et les esclaves.

La deuxième phase a débuté au milieu du siècle dernier, avec l'installation des centrales sucrières et la concentration industrielle dans le secteur. Par cette évolution, la grande majorité des moulins locaux a été désactivée, et les maîtres de moulins ont commencé à fournir leurs cannes aux centrales sucrières.

Le projet des centrales sucrières s'inspire de l'expérience des Antilles, où les investissements dans les centrales avaient permis d'obtenir un profit allant jusqu'à 48%. En séparant l'activité de fabrication du sucre de celle de la production de la canne, les centrales sucrières antillaises libéraient le capital des charges de l'activité agricole, ce qui permettait d'intensifier le processus d'accumulation dans le secteur industriel et de garantir la subsistance économique à de nombreux petits planteurs locaux. Pernambuco est entré dans cette phase en 1884, avec l'installation de quatre centrales sucrières.

L'échec des centrales en Pernambuco est imputable à deux causes principales:

- La résistance des maîtres de moulins. Le projet des centrales sucrières remet en cause le monopole de l'ensemble de l'activité productive, qui constitue historiquement le fondement de la domination des maîtres de moulins de Pernambuco.
- L'implantation des centrales sucrières a provoqué un déséquilibre entre le perfectionnement des processus de fabrication industrielle et les méthodes de production de canne à sucre.

Pour répondre aux besoins de matière première, les centrales sucrières se sont mises à s'occuper de l'agriculture, ce qui a provoqué le passage à la troisième phase, celle des distilleries ou des usines, qui réunissent les aspects industriels et agricoles du problème.

3.2.2. La culture de la canne à sucre aujourd'hui

"Tendo cessado o corte da cana, os trabalhadores rurais guardam para a proxima safra suas foices, enquanto que a usina lança mao de sua gigantesca foice imaginaria voltada para os homens e procede ao corte dos trabalhadores . (Leite Lopes, 1978)"

Actuellement, les usines utilisent, dans leur grande majorité, deux types de matière première, celle qui leur appartient, et celle dont les exploitants agricoles sont producteurs.

Freyre (1989) observe qu'à Pernambuco la monoculture de la canne à sucre occupe 3/4 de la zone "da mata", la plus fertile de l'État. Néanmoins on ne fait attention, ni à la semence, ni aux maladies de la canne. Mises à part quelques usines modernes, on ne tire des autres usines et des "engenhos" que 6 à 8% de sucre de la canne.

La zone sucrière au Nordeste est aujourd'hui une microrégion où les plantations de sucre et les moulins se sont installés sans autre considération que celle de l'espace où cultiver la terre vierge, sans aucune considération d'ordre écologique pour cette exploitation. L'utilisation du feu pour dévaster la forêt, l'abandon des terres aux premiers signes de fatigue font penser à un système guerrier de conquête des terres à des fins purement militaires.

Ce mode d'exploitation industrielle et commerciale des terres ne subsiste qu'à l'aide d'apports politiques et économiques. En fait, ces aides sont tellement nécessaires à l'économie générale de la région, qu'aucun gouvernement ne peut risquer de libérer la région de cette monoculture. Le sucre, jadis condition de stabilité, a toujours constitué un enjeu commercial important. Son exploitation s'est, à diverses reprises, laissée contaminer par le bénéfice immédiat en utilisant parfois des solutions provisoires pour gérer les crises. Freyre (1989) rappelle que les aristocrates des plantations de sucre en arrivèrent même, à certaines époques, à rajouter du sable au sucre pour augmenter les quantités produites, et donc les profits.

Au Nordeste dans les années 90, les rendements étaient la moitié de ceux de Campos (dans l'État Fédéré de São Paulo, au Sud-Est du Brésil), et le cinquième de ceux d'Hawaï. L'industrie du sucre est devenue, dans certains endroits, une sorte d'impérialisme exotique, par la nature quasiment primitive des méthodes de culture de la canne.

Lors du premier choc pétrolier, dans les années 70 et, plus particulièrement à partir de 1975, avec l'implantation du PROALCOOL - Programme National d'Alcool, la culture de la canne à sucre s'est intensifiée à des fins de production d'éthanol, utilisée comme complément au pétrole, en guise de combustible alternatif. Voulant assurer son indépendance énergétique, le gouvernement a mis en place un programme de fabrication du carburant à partir de l'alcool tiré de la canne. Pour encourager sa culture, il surpayé la production locale par rapport aux cours mondiaux. Une décision coûteuse, alors que le Brésil disposait de pétrole et d'un potentiel hydroélectrique énorme. Ce plan a eu pour effet d'étendre la monoculture de la canne à sucre.

Dans le Pernambuco, l'augmentation du volume de la production a été essentiellement assuré par l'augmentation du nombre des journées de travail par an, y compris dans les grandes usines. La récolte ne dure environs que 150 jours, sans baisse de rendement, la production de sucre dépendant de la maturité de la canne. Si l'on dépasse la période de maturation naturelle, la teneur en saccharose de la canne tend à diminuer. Or, la majorité des usines de Pernambuco fonctionne désormais au-delà de cette période: 262 jours en 1961/62; 207 en 1962/63; 258 en 1963/64.

Contrairement à d'autres régions, la zone sucrière du Nordeste du Brésil est marquée par la récolte manuelle de la canne à sucre. La topographie de la région rend impossible l'implantation de grosses machines agricoles (voir photo 3.1.). Cette caractéristique distingue de façon claire la culture de la canne à sucre à São Paulo, par exemple, de celle développée au Nordeste du Brésil, et influence, par conséquent, certaines activités de mesure utilisées par les sujets en situation de travail.



Photo 3.1. Zone de la mata sud de Pernambuco

En ce qui concerne les habitants de la zone sucrière au Nordeste, leurs caractéristiques sont particulières. Dans leur grande majorité, ils sont soit affiliés aux usines, soit dans des usines de fabrication d'alcool et de sucre, soit dans le secteur agricole.

La plupart des habitants de cette région sont les descendants d'ouvriers agricoles, jamais sortis de "leurs" terres, qui habitent des maisons "prêtées" par l'usine. Leur taille diminue sous l'effet des carences alimentaires: Nelson Chaves parlait, il y a déjà longtemps, d'une génération de nains, dont les facultés intellectuelles seraient affectées par une malnutrition précoce.

Il existe un contrôle direct de "l'employeur" sur leur activité, car il peut recourir aux services des ouvriers à n'importe quel moment de la journée, voire de la nuit, selon ses besoins.

En général, les ouvriers devraient être les employés d'une usine, mais cette situation n'est pas la plus usuelle. Il y a à cela deux raisons principales:

- Le développement du travail temporaire clandestin à l'initiative de l'employeur, qui se dispense ainsi de cotiser pour les droits liés au travail de l'ouvrier: congés payés, sécurité sociale, etc.;

- L'inclination réciproque de l'ouvrier vers le travail temporaire clandestin: celui-ci se sent libre de travailler dans n'importe quelle usine, exprimant ainsi sa fierté de ne pas avoir de patron.

L'intervention des syndicats ruraux remet en cause cette situation. Les conséquences de l'insécurité de ce type de travail, malgré la "liberté" qu'il représente, sont dénoncées. Dans la zone sucrière, tous les ans depuis 1979, une grève générale des coupeurs de canne est déclenchée, au moment de la récolte. Le but est d'obtenir l'enregistrement des clandestins, ainsi qu'un réajustement de leur salaire sur l'inflation, et l'application de la "lei do sitio"

Les conditions d'habitation sont précaires. Une recherche menée auprès de 200 ouvriers agricoles, dans la zone da mata sud de Pernambuco, fait apparaître le constat suivant:

- 78% des sujets habitent dans les terres de la distillerie; - 41% des familles ne disposent pas de l'eau courante ni même d'un puits, et se procurent l'eau dans les fleuves qui traversent la région;
- 29% n'ont pas d'électricité;
- 49,5% n'ont pas de toilettes, et la plupart de ceux qui en possèdent disposent seulement d'un W-C installé au fond du jardin.

3.2.2.1. La structure sociale hiérarchique du milieu agricole

Parmi les groupes qui composent la "communauté" d'exploitants de canne à sucre, les différences sociales, économiques et scolaires engendrent la hiérarchie sociale du milieu agricole. On peut grossièrement distinguer, quatre grands groupes sociaux:

- les grands propriétaires ruraux ou "usiniers"⁸ (qui détiennent les terres et les distilleries implantées dans le milieu agricole);
- les petits et moyens "producteurs", qui fournissent la canne à sucre aux premiers. Il s'agit de petits propriétaires, ou de non-propriétaires qui entretiennent les terres des autres, (selon diverses formes de bail);
- les "employés": salariés de l'usine;
- les ouvriers: travailleurs journaliers.

Les deux derniers, sujets principaux de notre étude, méritent ici une description plus approfondie. Reprenons la hiérarchie générale pour mieux comprendre le statut social des ouvriers:

⁸ Terme utilisé aux Antilles Françaises pour désigner les propriétaires des usines sucrières.

Premier niveau:

A la base de cette pyramide, on trouve les ouvriers journaliers, qui s'occupent en général du travail de la terre et de la coupe de la canne au moment de la récolte. Payés au prorata de leur production, ils se répartissent en deux catégories: ceux qui sont employés par une usine et ceux qui sont employés de façon provisoire pendant l'époque de la récolte (travailleurs saisonniers ou migrants saisonniers).

Les premiers sont attachés au domaine agricole, et sont logés par l'usine avec toute leur famille. Il existe, dans ce cas, une certaine fierté d'avoir un contrat de travail; l'expression utilisée c'est d'être "fichado" .

Les seconds expriment une certaine "indifférence" vis-à-vis de la "sécurité" d'un contrat de travail, et disent préférer leur indépendance, travailler où ils veulent, et surtout ne pas avoir de patron.

A ce niveau, existent aussi des "statuts" sociaux différenciés, intergroupes, caractérisés par le type d'activité réalisée, la productivité, l'attitude et la dépendance vis-à-vis du patron.

La première caractéristique sera abordée de manière plus approfondie, lors de la discussion sur les activités agricoles et sur la position attribuée à chacun dans la communauté.

La deuxième caractéristique, la productivité, est signe de courage et de force physique. En outre, la récompense économique est là: plus on travaille, plus on gagne. Il est usuel dans la communauté, de distinguer les ouvriers dont la production moyenne quotidienne dépasse plus de trois tonnes.

La troisième caractéristique est liée au conflit existant entre savoirs "formel" et "informel". Les ouvriers, habituellement analphabètes, essaient de comprendre les procédures mathématiques impliquées dans les activités de travail, pour mieux contrôler le calcul de leur salaire. Ils expriment cette question de la manière suivante: "je suis analphabète, mais je ne suis pas con" ou encore "je ne sais même pas signer mon nom, mais pour calculer personne ne me trompe". Les sujets se distinguent dans la communauté par cette qualité.

Certains ouvriers travaillent à titre temporaire et perçoivent une commission sur les travailleurs qu'ils rassemblent pour un patron dans des moments où le besoin de main-d'œuvre est le plus important.

Les ouvriers font d'habitude plusieurs kilomètres pour arriver au lieu de travail. Parfois à pied, ils affluent par les routes avec leurs outils sur les épaules. Même quand ils sont en groupe, ils se parlent peu; la marche est solitaire (voir photos 3.2. et 3.3.).



Photo 3.2 Parcours des ouvriers vers le lieu de travail



Photo 3.3 Parcours des ouvriers vers le lieu de travail

Deuxième niveau⁹

Dans le groupe des employés, au niveau hiérarchique le plus bas, se trouvent les *chefs d'équipe ou contremaîtres*. Il s'agit d'anciens ouvriers journaliers, qui ont évolué dans la hiérarchie, et qui sont perçus dans la communauté comme les représentants du patron. (Voir photo 3.4.). Leur appartenance au groupe social d'origine, et les intérêts de l'usine qu'ils défendent, provoquent des conflits difficiles à gérer.



Photo 3.4. Un chef d'équipe avec un groupe d'ouvrières

Ils sont responsables de la supervision des ouvriers journaliers, et contrôlent la présence et l'absence sur le lieu de travail ainsi que le processus de production.

Ces données sont consignées dans un cahier mentionnant le nom des ouvriers, la dénomination de la plantation, la semaine de travail et les productions journalières (voir figure 3.2.). Le côté droit est réservé aux empreintes digitales des ouvriers analphabètes, qui attestent de cette façon leur présence au travail. Ainsi, pour occuper la fonction de chef d'équipe, il faut savoir (un "peu") lire, écrire et compter.

⁹ A partir de ce niveau, les sujets se qualifient comme des « employés ». Ils se différencient des ouvriers par le salaire fixe et le contrat de travail.

Cartão de Ponto de Trab. Rural

NOME _____

NÚMERO _____

ENGENHO _____

SEMANA _____

Dom.

Sab.

6.ª

5.ª

4.ª

3.ª

2.ª

Imp. Digital

REGISTROS					Ass do Apontador
Dias da Semana	Início	Término	SERVIÇO	PROD.	
1.ª					
2.ª					
3.ª					
4.ª					
5.ª					
6.ª					
Sab.					
Dom.					

Tarefa cumprida equivale a jornada de 8 horas

Encontra-se em meu poder uma via deste cartão de ponto.

_____, ____/____/____

Assinatura ou impressão digital do trabalhador

Figure 3-5 Carnet de Présence du Travailleur rural

Ils ont également pour tâche de mesurer la surface travaillée par l'ouvrier journalier; de peser la canne à sucre; de faire les calculs des salaires des ouvriers(voir description plus détaillée dans les différents systèmes de récolte).

Troisième Niveau

Les contrôleurs opèrent un contrôle *quantitatif* des activités des précédents. Ils vérifient les calculs des chefs d'équipe, et visitent périodiquement le terrain pour vérifier les procédures utilisées par le chef d'équipe pour mesurer les surfaces, peser la canne, et calculer le salaire des ouvriers journaliers.

Responsables du contrôle *qualitatif* du travail sur le terrain en coordonnant le travail de plusieurs chefs d'équipe, ils peuvent être sollicités par les surveillants pour effectuer des contrôles ponctuels des régisseurs de zone.

Ils sont les adjoints des fiscaux et des régisseurs dans la hiérarchie agricole. D'un côté ils peuvent être subordonnés aux régisseurs en faisant le contrôle des chefs d'équipe; d'un autre côté ils peuvent être supérieurs à ces mêmes régisseurs, en contrôlant leur travail sous les ordres des fiscaux.

Quatrième Niveau

A ce niveau, se trouve le "***régisseur de zone***", responsable du fonctionnement et de la production de deux "parcelles", et est installé dans une "centrale administrative" qui relie les deux parcelles. Il assure le transport de la canne jusqu'aux camions et dispose, dans certaines usines, d'une Jeep pour se déplacer lorsque les conditions d'accès sont difficiles.

Les chefs d'équipe et les régisseurs sont souvent armés, et se déplacent à cheval, ce qui est un signe d'autorité, mais aussi une forme de protection contre les bagarres, fréquentes dans cette région.

Cinquième niveau

Nous y trouvons les surveillants de domaines, responsables de cinq à six centrales administratives (sedes).

Sixième niveau

Nous y trouvons le gérant agricole qui coordonne le département technique et tout le travail agricole.

Septième Niveau

Où opère le surintendant agricole.

Huitième Niveau

Avec le directeur agricole.

Neuvième niveau

Au sommet de la pyramide enfin se situe l'"*usinier*".

3.2.2.2. Les activités associées à la culture de la canne à sucre

Les principales activités de la partie agricole du processus de production de sucre sont le nettoyage du terrain, le piochage des fossés, le fumage, la plantation et la récolte. Ces activités sont toujours réalisées par l'ouvrier journalier, sur une surface de terrain déterminée, calculée de façon individuelle pour l'estimation de son salaire. Un ouvrier peut toucher son salaire en travaillant sur des aires qui vont de 50 à 200 unités carrées. Les variations sont dues à la qualité du terrain, de la canne ou du type d'herbe qui rendent le travail plus ou moins difficile. L'ordre chronologique des activités, dont le point culminant est la récolte de canne à sucre, est constitué des phases suivantes.

3.2.2.3. Le nettoyage du terrain

Il s'agit tout d'abord de nettoyer les feuilles et le reste de la canne à sucre coupée pendant la récolte précédente (voir photo 3.5. et 3.6.). Ensuite, il faut enlever une couche superficielle de terre, faite d'herbes et de racines agglomérées. Ce travail est réalisé d'habitude par des femmes et des enfants. Le "salaire" est fonction du type de terrain et d'herbe existant. Notons l'explication du gérant agricole sur ce sujet:

"Tout cela dépend de la convention du Syndicat avec les entreprises, du type d'herbe à nettoyer ou de canne à couper. Nous avons un tableau. Par exemple, pour nettoyer le terrain, si l'herbe est très résistante, la surface à nettoyer est plus petite que celle où il y a de l'herbe "molle", comme "ils" (les ouvriers) disent. Aussi quand le terrain est dur et sec, cela peut varier de 50 jusqu'à 200 unités carrées. Dans un terrain comme celui-ci (photo 3.6.) , on donne une surface d'environ 70 à 80 unités carrés, parce que c'est un terrain fermé dans une plantation de sucre. Mais dans l'autre terrain là-bas (photo 3.5.), on donne 100 unités carrées parce que l'herbe est facile à arracher. Dans les terrains proches de la route, l'herbe pousse toujours plus vite parce qu'il y a plus de lumière et d'eau. Alors, quand on distribue le terrain à nettoyer, on mesure 5 de large de la route

et 20 en montant. Ce sont les mêmes 100 unités, mais si on mesurait 10 par 10, ils auraient plus à travailler. C'est le syndicat qui a réussi à négocier cette clause. En plus, si le terrain est vraiment au bord de la route, on fait 25 par 4".



Photo 3.5 Nettoyage du terrain



Photo 3.6 Nettoyage du terrain

3.2.2.4. Le piochage des fossés

Activité manuelle, le piochage permet l'écoulement de l'eau de pluie et ainsi d'éviter les dommages causés à la plantation. L'ouvrier, avec une houe, pioche la terre en creusant des fossés qui traversent le terrain. L'opération est parfois pénible, en particulier dans les terres lourdes ou caillouteuses, et sur les terrains en pente.

3.2.2.5. Le fumage du terrain

Pour les agriculteurs, bien fumer, est le principal facteur de qualité de la canne à sucre. Malgré cela, plusieurs problèmes liés à la crise économique rendent difficile cette opération. Observons les remarques du gérant agricole de l'usine étudiée.

"Nos plantations de sucre manquent de ressources techniques. La crise économique, les problèmes administratifs sont tellement grands que cette année (1991) nous avons fumé seulement 25% de la surface, et ça c'est un crime. Avec la crise, personne n'a d'argent. Alors on vit comme ça, on plante de la canne comme Dieu a planté des patates, celles qui veulent bien pousser poussent ..."

Les conséquences de l'absence de fumage sont importantes sur la productivité. Notons encore les observations du gérant agricole:

"Regarde: on plante la canne à sucre. La première année est l'année de plus grande production; après la récolte, elle pousse encore; elle peut rester même 20 années, mais à chaque année la quantité de cannes est plus petite. Alors on dit première feuille, (canne de première année); deuxième feuille (canne de deuxième année) etc. Les ouvriers emploient une autre terminologie. Quand la canne est bien traitée elle donne 80 tonnes de canne par hectare dans la première année; dans la deuxième, ça tombe à 60; dans la troisième à 50; en moyenne bien sûr! Dans la quatrième ça tombe à 40 et dans la cinquième à 30. Au-dessous de ça, c'est déjà "antiéconomique". Je donne l'exemple ici d'une usine très bien organisée avec des cannes bien traitées. On va voir la moyenne; ça fait 260 (il fait l'addition des 5 années) ça ferait 52 tonnes par hectare. Pour avoir ça dans cette région de Pernambuco il faudrait une usine très bien organisée. Cette année on a réussi à avoir 30 tonnes par hectare."

L'épandage dans la plantation se fait de la façon suivante:

- les engrais contenus dans des sacs d'environ 50 kg, sont distribués dans des espèces de paniers, transportés par les ouvrières jusqu'aux plantations. Sur le terrain, seules les femmes remplissent

cette tâche car le mouvement pour fumer, la façon de porter le panier paraît aux hommes des mouvements efféminés. Ils affirment qu'il s'agit d'un travail de femme ou d'homosexuel et se fâchent si quelqu'un le leur propose.

Notons quelques détails techniques sur le fumage, donnés par le gérant agricole :

"Regarde: un agronome ou quelqu'un qui connaît la terre, prend un échantillon du sol, l'amène au laboratoire et en fonction du type de canne trouve ce qu'il faut comme engrais. Par exemple, ici on a trouvé pour la canne plante (celle de première année) un mélange de 12% de nitrates; 24% de phosphates et 18% de potasse; 500 Kg par hectare. Nous qui comprenons le langage agronomique, nous savons que toute formule d'engrais est faite pour 1000 Kg. Alors on sait qu'il faut mettre 6% de 1000 de Nitrates; 12% de 1000 de phosphates et 9% de 1000 de potasse ... alors 12% de 1000 signifie 120 Kg; 24 % de 1000 signifie 240 et 12% signifie 120 Kg. Alors ça fait, ici pour les plantations, 60 Kg de Nitrates; 120 Kg de phosphates et 90 Kg de Potasse. Nous achetons la formule par 1000 Kg, chaque sac contient 50 Kg. Alors on dit: on met 500 Kg par hectare, alors 10 sacs de 50 Kg. Et pour parler comme on parle ici, un sac dans 2 contas (1 conta = 484 m² et un hectare vaut à peu près 20 contas). Alors on mesure, et les femmes viennent avec un petit verre de 20 grammes; chaque plante vaut un verre; tout est très bien distribué. (voir photo 3.7.). Quand la canne est de deuxième ou de troisième année on met 25 grammes par pied de canne. Comme les engrais sont achetés en compositions toute faites, les ouvrières ne connaissent pas ces détails, elles exécutent simplement les consignes."



Photo 3.7 Fumage du terrain

3.2.2.6. La plantation de la canne à sucre

La canne à sucre se renouvelle à peu près tous les cinq ans, en fonction du traitement du sol et de la plante. Les plants (morceaux de canne) sont disposés dans ces fossés, en respectant une petite distance l'un de l'autre, afin de garantir la qualité de la canne à sucre et une utilisation optimale du terrain. Des procédures spéciales sont utilisées lorsque la canne est plantée dans la ligne de plus grande pente, pour la protéger des orages. On plante toujours la canne en ligne (voir photo 3.8.).



Photo 3.8 Plantation de la canne à sucre

3.2.2.7. La récolte de la canne à sucre: commentaires sur les systèmes de canne attachée et de canne détachée

La récolte de la canne à sucre est une des activités les plus importantes du milieu agricole. D'elle dépend toute la fabrication de l'alcool et du sucre de la région. De plus, rappelons-le, c'est la seule activité qui demande une main d'œuvre temporaire, la main d'œuvre permanente n'étant pas suffisante dans certaines phases du cycle de culture.

La récolte implique une grande diversité de calculs mathématiques liés aux différents systèmes de récolte adoptés dans la région. La récolte est plutôt manuelle, pour les raisons déjà expliquées, et est réalisée à travers deux systèmes: *Le système de la canne attachée et le système de la canne détachée.*

Dans les deux systèmes, la canne peut être brûlée ou non, avant d'être coupée. Ce facteur intervient également dans le prix payé à l'ouvrier. La canne non brûlée est payée plus chère, car elle est plus difficile à couper. Souvent, les ouvriers présentent des blessures aux bras et aux mains, après avoir coupé la canne non brûlée, en raison du contact avec les feuilles.

3.2.3. Procédures mathématiques impliquées dans les deux systèmes de récolte

Nous abordons ici des questions touchant au domaine des mathématiques

3.2.3.1. Système de récolte de la canne à sucre attachée

Il s'agit de couper les cannes et de les attacher en faisceaux. En les coupant, les ouvriers laissent les cannes sur le terrain. À la fin de la journée, ou plus précisément de la tâche (qui peut finir à 11 heures du matin ou se prolonger jusqu'à 17 heures environ), ils les attachent en faisceau d'environ 10 Kg.

Les calculs liés au poids des faisceaux et de leur moyenne sont souvent objet de disputes entre le chef d'équipe et les ouvriers. Il existe une convention qui stipule que chaque faisceau doit contenir 10 cannes coupées. La canne coupée par morceaux (un tiers supérieur de la canne, qui contient moins de sucre et deux tiers inférieurs, qui contiennent plus de sucre). Un faisceau contient donc 20 morceaux de canne, 10 petits et 10 grands correspondant à 10 cannes entières, même s'il ne s'agit pas des mêmes cannes. Les ouvriers essaient plusieurs manières de "tromper le chef d'équipe" (ce qui peut se retourner contre lui).

Voyons quelques exemples donnés par le surintendant agricole:

"L'ouvrier est très malin. Parfois il met à l'intérieur d'un faisceau des petits morceaux, et autour les plus beaux morceaux de la canne. Comme ça, les faisceaux sont très beaux. Mais comme tout chef d'équipe a déjà été coupeur de canne, il connaît ces astuces. Alors pour faire la moyenne, soit il les prend et les découvre, soit il prend les plus petits faisceaux. Alors l'ouvrier dit qu'il vole pour l'usine. Parfois, à la place de 20 morceaux, l'ouvrier en met 18 ou 17; alors le chef se méfie parce que les faisceaux sont fins. C'est là que les disputes commencent."

Les faisceaux sont ensuite transportés par des animaux, (d'habitude des ânes), qui sont harnachés par un système en bois, dénommé "cambito", destiné à recevoir la charge de la canne (voir photo 3.9.). Celle-ci est alors amenée dans des endroits accessibles aux camions, qui la transportent jusqu'à la distillerie.



Photo 3.9. Cambiteiros (ouvriers chargés du transport de la canne à sucre)

La procédure suivie pour déterminer la production, et par conséquent le salaire de l'ouvrier est fonction d'une estimation du poids total coupé pendant la journée. Cette estimation est effectuée à partir de la moyenne du poids de quelques faisceaux, multipliée par la totalité de faisceaux. Nous avons observé que le chef d'équipe pouvait aller jusqu'à dix faisceaux pour le calcul de la moyenne.

Observons les remarques du surintendant agricole sur ce système:

" Dans le système de canne attachée, l'ouvrier fait un tapis. Suppose qu'il ait attaché 200 faisceaux. Le chef arrive, il prend les plus petits et il en pèse 10, par exemple. Suppose que ça fasse 120 Kg, alors la moyenne des faisceaux est 12. Il va multiplier 12 par 200 faisceaux pour trouver le poids. Dans la vie quotidienne pour compter 200 faisceaux c'est un boulot infernal. Alors l'ouvrier met 9 faisceaux sur le terrain et un faisceau debout. Le chef d'équipe regarde de façon superficielle et choisit les dix plus petits. On leur dit de faire ça parce que rien n'est exact. La balance est de 20 Kg, mais c'est une "balance approchée", elle n'est pas juste. Alors 18,5 Kg on dit 18, toujours pour l'usine parce qu'il y a les cannes qui vont tomber sur la route et tout ça."

En général, la procédure de calcul du salaire est la suivante:

Le chef d'équipe :

- choisit des faisceaux de canne apparemment moins lourds;

- pèse chaque faisceau avec une balance manuelle; additionne les poids obtenus et fait la moyenne des poids;
- "compte" la quantité de faisceaux que l'ouvrier a coupés pendant la journée;
- fait le calcul de la production de l'ouvrier, en multipliant la quantité de faisceaux par la moyenne du poids;
- enfin multiplie la valeur attribuée au poids par le poids obtenu. Il obtient ainsi le salaire. Dans l'ensemble la production journalière varie entre 500 et 1500 Kg par jour de canne attachée. La production normale, pour un salaire est 1200 Kg.

L'ouvrier journalier accompagne attentivement chacune de ces étapes. La production de chaque journée est notée par le chef d'équipe, et contrôlée par le "conférant". Le but de cette démarche est de tenir le registre de présence et de production quotidienne de l'ouvrier pour calculer la production hebdomadaire. Les ouvriers sont payés à la fin de chaque semaine. Les calculs sont enregistrés sur un cahier (figure 3.2.), dans lequel l'ouvrier signe ou laisse ses empreintes digitales pour enregistrer sa présence au travail.

3.2.3.2. Le système de récolte de la canne à sucre détachée

Ce système consiste à distribuer la canne sur le terrain comme un tapis, après l'avoir coupée. Il impose un travail sur terrain plat, qui permet l'accès des camions. L'utilisation d'animaux n'est pas nécessaire. Dans certains cas, ce système est également utilisé dans des terrains en pente. Comme l'accès des véhicules, parfois même des animaux, est difficile, on recourt à la technique dite "embolada". Elle consiste à faire rouler la canne ou les feuilles jusqu'à un endroit accessible (voir photo 3.10. et 3.11.).

Observons les remarques du surintendant agricole sur ce système:

" On utilise le système de canne détachée lorsque le terrain est plat, c'est logique. Mais au Nordeste, pour survivre, on trouve aussi des moyens pour couper la canne détachée dans des terrains en pente. L'ouvrier coupe, on mesure comme ça, et après les ouvriers poussent la canne vers le bas, vers les routes. On utilise la "embolada" pour tenter d'éviter la faillite complète. Quand l'ouvrier coupe la canne détachée il coupe 2400 Kg pour un salaire; la canne attachée, c'est 1200 Kg. On paye deux fois plus. Comment on fait pour peser? L'ouvrier fait un tapis de disons 100 mètres. Le chef arrive et mesure une braça (unité carrée), il attache les cannes qui étaient disposées

sur la braça. Disons la braça fait par exemple 10 Kg; il a coupé 100 braças; ça fait 1000 Kg. Ce n'est pas assez pour toucher son salaire; il manque 1400 Kg pour compléter. Il peut faire plus s'il veut."



Photo 3.10. Technique de "embolada"



Photo 3.11 Technique de l'"embolada"

Ce système de récolte comporte deux sous-catégories:

1) Dans la première sous-catégorie¹⁰, le salaire de l'ouvrier est calculé à partir d'un rapport entre une certaine somme d'argent et une surface de terrain prédéterminée par le chef d'équipe (x cubos, par exemple). Dans ce cas, les étapes suivies par le chef d'équipe pour déterminer la production de l'ouvrier sont:

- la définition de la surface qui va correspondre au salaire¹¹ ;
- la mesure de la surface;
- le produit du salaire correspondant à l'unité de surface par la surface de canne coupée.

Dans ce système, on ne pèse pas la canne. Le poids est déduit à partir de la distribution de la canne à sucre sur le terrain.

2) *La deuxième sous-catégorie intègre le poids d'une façon directe, comme facteur intervenant dans le calcul du salaire.*

Les étapes suivies par le chef d'équipe sont alors :

- peser la canne distribuée sur une braça carrée (4,84 mètres carrés) choisie par lui;
- estimer la production totale, en multipliant ce poids par le nombre total de braças carrées.
- multiplier le poids de la totalité de la production par le prix attribué à chaque Kg ou à chaque tonne ...

Rappelons que dans le cas de la première procédure de calcul du salaire (système de la canne attachée), la mesure de surface ne semble pas intervenir. Ce sont les prix, et les poids moyens qui jouent un rôle décisif.

Dans la deuxième procédure (canne détachée, première sous-catégorie) ce sont la surface travaillée et le prix attribué à une unité de surface qui déterminent le calcul du salaire. Le poids n'intervient pas.

La troisième procédure (canne détachée, deuxième sous-catégorie) intègre le poids à l'unité de mesure de surface, la surface totale et le prix d'une unité déterminée de poids. Cette procédure intègre donc les trois variables: prix, mesure de surface et poids.

¹⁰ Cette sous-catégorie n'a pas été étudiée dans cette recherche.

¹¹ La surface du terrain qui correspond au salaire peut changer en fonction des caractéristiques du terrain ou de la canne. Elle est d'habitude de 100 cubos, mais dans certains cas, il est possible de lui attribuer les valeurs de 60, 80 ou 120 cubos (cubo = 4,84 mètres carrés).

Cette diversité de procédures nous permettra d'étudier les compétences de sujets confrontés à des situations non usuelles, bien qu'appartenant à la même culture.

3.2.3.3. La valorisation de certaines activités dans la communauté: la division sexuelle du travail

Certains travaux étaient jadis réservés spécifiquement à l'homme ou à la femme. Actuellement, et malgré sa présence dans presque toutes les activités agricoles, la femme réalise souvent les tâches les moins valorisées par la "communauté", comme par exemple : la plantation; le fumage et le nettoyage du terrain.

Ces activités sont essentiellement réservées aux femmes et aux enfants, dans certains cas aux hommes âgés, ou qui ont des problèmes de santé. Le travail féminin a toujours un rôle secondaire. Elles coupent la canne, mais ne peuvent faire les faisceaux. Le contrôle des calculs et des salaires est réservé aux hommes (chef d'équipe, mari etc.). En ce qui concerne les enfants, leur "contrat" de travail est particulier: bien que n'ayant officiellement pas le droit de travailler, ils sont parfois utilisés comme main d'œuvre économique d'appoint, en tant qu'apprentis. Les productions quotidiennes les plus faibles sont celles des enfants et des femmes qui travaillent souvent ensemble, en complément.

Le statut de l'ouvrier s'exprime également par la fonction ou le type de tâches qui lui sont confiées, en fonction de sa compétence ou de sa productivité.

Les hommes sont tous occupés au moment de la récolte, ceux qui ne sont pas "licenciés" en fin de récolte sont engagés pour des activités auxiliaires (secondaires) dans les distilleries (aide aux ouvriers de la fabrication pendant l'époque du broyage de la canne). Sinon ils peuvent trouver d'autres activités agricoles: nettoyage du terrain; plantation, piochage des fossés. Mais ces tâches ne sont pas appréciées ni valorisées dans la communauté en tant qu'activités masculines. Ils acceptent toutefois de les réaliser. Le fumage est la seule activité refusée systématiquement par les hommes.

Pour travailler, les femmes portent un voile sur la tête, qui, d'après elles, les protège du soleil. Elles portent parfois des pantalons (qui appartiennent à leurs maris) pour protéger leurs jambes des blessures des feuilles de canne à sucre. Elles s'habillent quand elles le peuvent avec des jupes ou des robes pour d'après elles s'affirmer comme femmes (voir photos). Ces remarques, apparemment

dépourvues d'intérêt, peuvent nous aider à comprendre un peu plus les valeurs de cette population et, par conséquent, mieux interpréter leur comportement.

3.3. Les aspects mathématiques impliqués dans les activités agricoles

Nous abordons ici plus spécifiquement la dimension mathématique dans ces activités humaines.

3.3.1. Le concept de mesure chez les exploitants agricoles de canne à sucre

Les activités de mesure de terrain (soit pour le nettoyer, soit pour estimer la quantité de canne à sucre) dont le but est de calculer la "paye" des ouvriers journaliers, sont des pratiques faisant partie de la tradition historique de ce groupe: en fonction, d'une part des particularités de la topographie de la zone sucrière du Nordeste du Brésil (difficulté de mécanisation) et, d'autre part des aspects pratiques des procédures de mesure, certaines traditions se sont maintenues dans cette région.

Un indice du maintien de cette tradition est l'emploi d'unités de mesure spécifiquement régionales, malgré l'existence des unités de mesure universelles comme le mètre, le mètre carré, l'hectare etc. Il est probable que ce choix se justifie, au moins en partie, par la nature même de l'objet à mesurer: les dimensions d'un terrain demandent une unité de mesure linéaire plus grande que le mètre.

Nous nous contenterons de décrire quelques unités de mesure, ainsi que les procédures habituelles de mesure de surface. Nous discuterons ensuite de la justesse de ces procédures, et des facteurs impliqués dans ces démarches.

3.3.1.1. Les unités de mesure

L'unité de mesure linéaire est la "braça", qui équivaut à 2,20 m, soit, d'après les ouvriers, l'équivalent de deux bras ouverts. Il semblerait que les origines de cette unité remontent à l'unité de longueur *brasse* (1,829 m), utilisée pour exprimer la hauteur d'eau. Les marins anglais emploient encore la brasse (fathon) de 6 pieds, soit 1,83 m. Dans la zone sucrière, la "braça" correspond à une perche de 2,20 m, *sans aucune subdivision*, et dont les paysans se servent lors des activités de mesure des terrains.

L'unité de mesure de surface est le "*cubo*", qui correspond à la *braça carrée* (carré de 2,20 m de chaque côté). Les paysans utilisent l'expression "*cubar*" pour mesurer le terrain.

La "conta" correspondant à un carré de dix braças de chaque côté (22 m), elle est l'équivalent de 100 cubos (10x10) ou 484 mètres carrés (22x22). La "conta" est donc l'équivalent d'environ 1/20 de l'hectare ($10\,000 : 484 = 20,66$ contas).

3.3.1.2. Procédures de mesure

1) Mesure linéaire

Elle est utilisée lors de la quantification des dimensions de chaque côté d'un terrain dont il est nécessaire de connaître la surface. L'ouvrier marque le point de départ, en faisant par exemple un nœud avec les feuilles de la canne à sucre (voir Photo 3.12. Marquage du point de départ pour mesurer le terrain).

La procédure consiste à poser la braça par terre, et à la tourner ensuite sur elle-même, autant de fois que c'est nécessaire. D'habitude, l'ouvrier responsable de cette activité de mesure du terrain est le chef d'équipe. Il tient la braça par le milieu et la manie, en comptant la quantité de braças existant sur chacun des côtés du terrain. En principe, il s'arrête lorsque le côté atteint 10 braças; (cela correspond, s'il s'agit d'un terrain carré, à une conta). Cette surface représente la surface optimale travaillée chaque jour par un coupeur de canne.



Photo 3.12. Marquage du point de départ pour mesurer le terrain

Cette activité, menée par un chef d'équipe, est observée attentivement par les ouvriers journaliers. Ceux-ci se méfient souvent de lui, car il peut les tromper par des procédures qui augmenteraient l'espace réel du terrain à travailler, en maintenant constants la mesure de base (conta) et le salaire.

Une des façons de tromper l'ouvrier journalier consiste à déplacer la perche de façon que le point final de la première braça ne corresponde pas au début de la deuxième: le point de départ de l'unité de mesure suivante est alors espacé du point d'aboutissement de la précédente. Cette procédure permet au chef d'équipe de sous-évaluer la quantité de travail effectué par l'ouvrier (voir figure 3.3.).

On peut aussi diminuer l'espace réel du terrain à travailler, en maintenant constante la mesure de base (conta). Cette démarche permet à l'ouvrier journalier de travailler moins pour gagner le même salaire. Dans ce cas, les avantages sont partagés entre le chef d'équipe et l'ouvrier. Cette procédure, contrairement à la précédente, consiste à faire tourner la perche de façon que le début de la deuxième unité de mesure empiète sur la première. Le même terrain est comptabilisé deux fois.(voir figure 3.4)

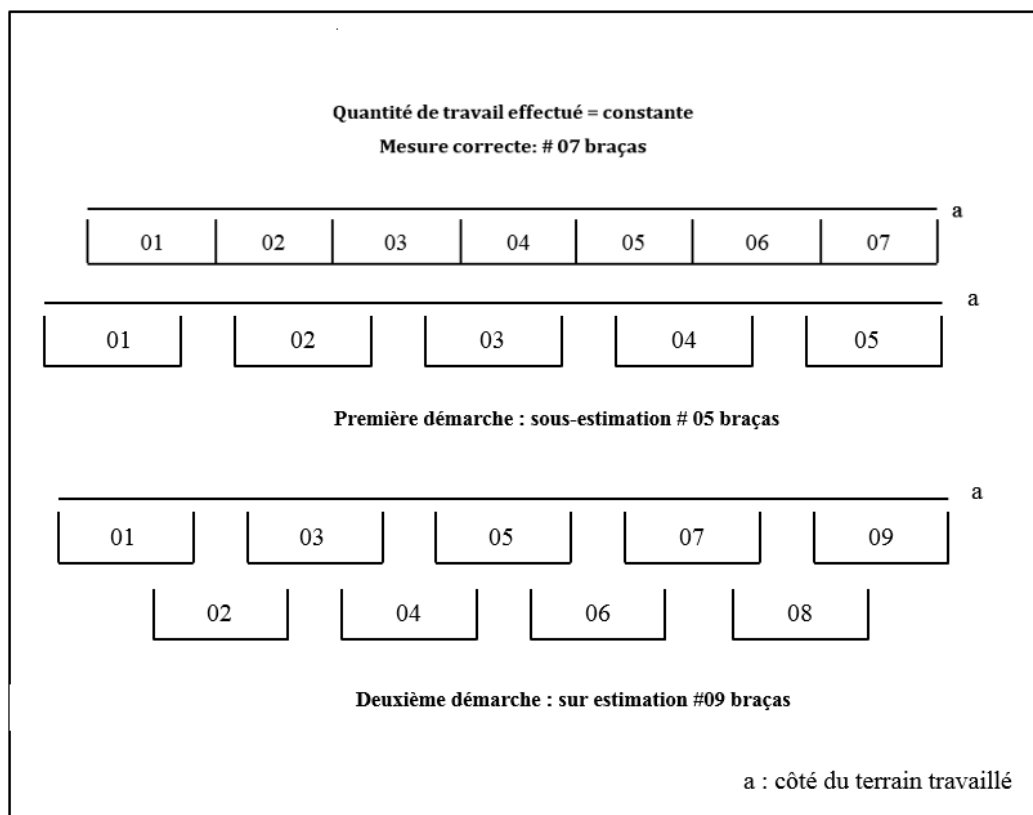


Figure 3-6 procédure de sous-estimation - Figure 3-7 procédure de surestimation

Les procédures utilisées relèvent bien de deux registres:

- l'un cognitif, par la maîtrise d'un système de mesure;
- l'autre social: la procédure change en fonction de l'interlocuteur.

2) Mesure de surface

D'une manière générale, la plupart des activités concernant la canne à sucre impliquent la mesure de la surface des terrains.

On appelle "*tâche*" le travail réalisé dans une surface équivalente à une "conta" (100 cubos ou 484 mètres carrés). Le travail d'une telle surface par jour représente le salaire minimum d'un ouvrier, mais il peut augmenter son salaire en travaillant davantage.

Rappelons que si une certaine somme d'argent correspond au travail d'une surface de terre préétablie, un changement est possible en fonction des caractéristiques du terrain, (plus ou moins difficile à travailler). Cette question provoque plusieurs types de négociations: Quand, par exemple, le terrain est dur à travailler, ou quand la canne à sucre est plantée de façon très dense, le chef d'équipe peut diminuer la surface à travailler par l'ouvrier, en lui donnant 80 cubos à la place de 100, tout en payant pour 100 cubos. L'inverse peut aussi se produire: quand la canne est distribuée sur un terrain de façon très éparse, le chef d'équipe peut attribuer une superficie plus grande qu'une conta, tout en maintenant le salaire pour 100 cubos.

Force est de constater le flou qui relie la mesure des surfaces et la rétribution. Il existe toujours une adaptation possible en fonction de situations particulières. En raison de ces "incertitudes", des situations de conflit ne sont pas rares.

Observons maintenant quelques procédures de mesure de surface utilisées par les exploitants et les ouvriers agricoles de canne à sucre. Elles ont été constatées et décrites par nous-mêmes dans deux communautés paysannes de la zone de la Mata sud de Pernambuco et rejoignent les données discutées par Abreu, (1988) qui a mené des recherches sur ces mêmes sujets.

3) Mesure de surface des terrains quadrilatères

Les sujets semblent mesurer les surfaces de terrains quadrilatères comme n'importe quel rectangle; ils calculent les moyennes des côtés opposés deux à deux, et multiplient les deux résultats entre eux.

Abreu, (1988) remarque que l'agriculteur semble transformer un terrain dont les côtés sont différents en un terrain dont les côtés opposés seraient égaux. Cet auteur cite un des sujets qui expliquait sa procédure en disant que "le côté plus grand prêle au plus petit". Dans la procédure de mesure de surface en usage chez les agriculteurs, le sujet considère l'opération au plan numérique (multiplication de mesures), mais semble négliger l'opération au plan de l'objet, relative à la construction du quadrilatère particulier traité.

Cette remarque peut être observée avec l'exemple suivant, cité par Abreu (1988):

Expérimentateur: ...si vous deviez calculer l'aire d'un terrain, comment vous feriez? Est-ce que vous pouvez me montrer (dessiner sur le papier)

Sujet: sur une conta de canne à nettoyer, 10 braças par 10 braças, ça fait 100 cubos. Alors, je fais comme ça (dessine le polygone de la figure 3.5.). Ce côté a 12 braças, celui-là 14, c'est le copain de celui-ci. Celui-là fait 10; le copain de 10 a 12 braças. C'est dur à faire. Alors je ferais comme ça, $12 + 14$, ça fait 26, donc 13 (ça signifie que la moitié de 26, c'est 13). $10 + 12$ ça fait 22, la moitié c'est 11. (Parle bas: $1 \times 1,1$; $1 \times 3,3$; $1 \times 1,1$; c'est 3,4,1). Ce terrain fait 143 cubos.

Expérimentateur: 143 cubos ?! Et combien de contas il y a ?

Sujet: Il y en a une et 43 cubos.

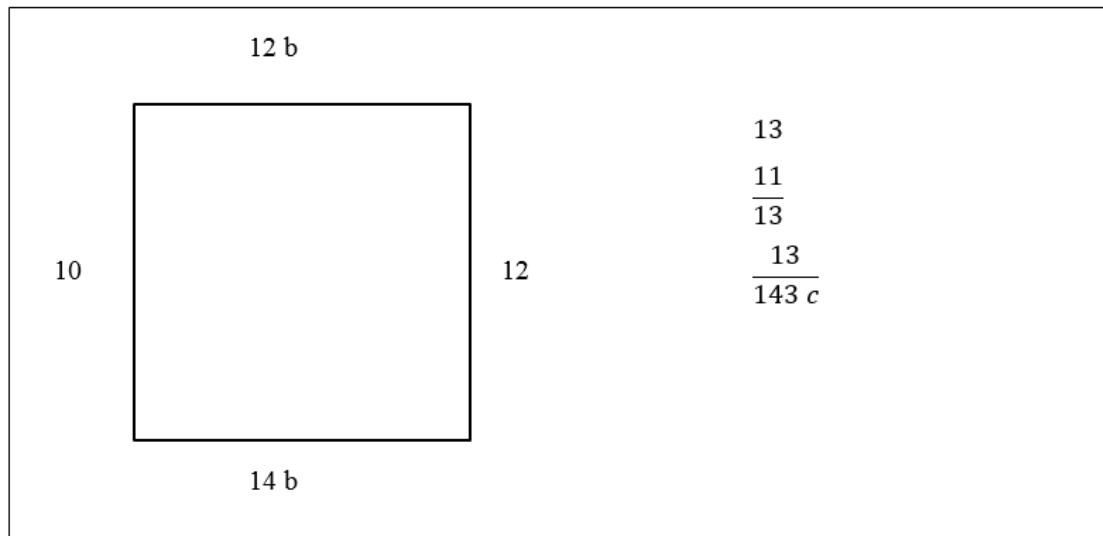


Figure 3-8. Polygone dessiné et calculs effectués par un agriculteur pour montrer la procédure de calcul de l'aire d'un terrain quadrilatère

Le dessin ne tient pas compte de la forme réelle du terrain dont la surface doit être mesurée: les
Le dessin ne tient pas compte de la forme réelle du terrain dont la surface doit être mesurée :
– les côtés sont dessinés comme étant égaux, avec des angles droits.

L'exemple d'un parallélogramme montre bien l'incertitude de la méthode utilisée par les exploitants de canne à sucre (voir figure 3.6.). La surface d'un parallélogramme est normalement calculée en

faisant le produit de la base par la hauteur. En sachant que les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux, la hauteur sera la perpendiculaire menée d'un point à l'autre des bases (côtés opposés pris à volonté).

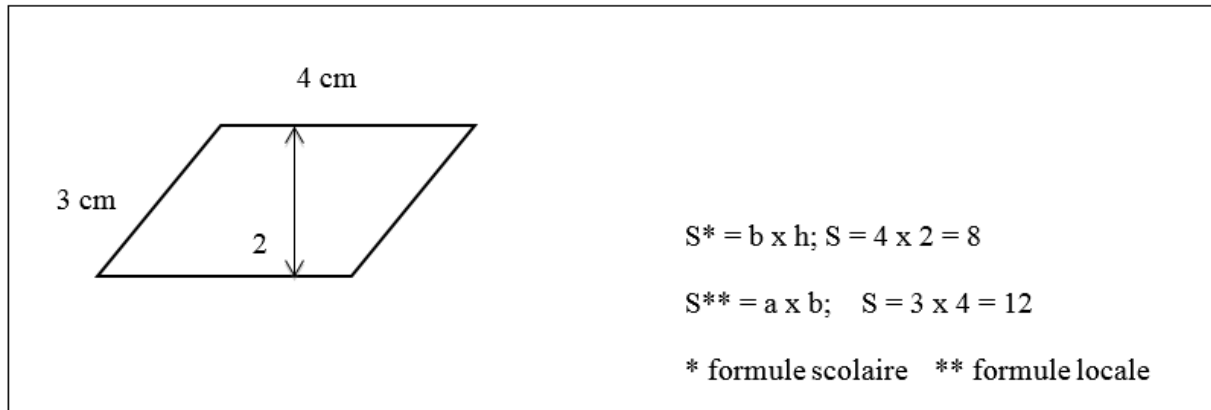


Figure 3-9. L'incertitude du système de calcul régional : l'exemple d'un parallélogramme non-rectangle

D'après les travailleurs de la canne à sucre, la surface de ce quadrilatère serait le produit des moyennes des côtés opposés deux à deux. Comme dans le cas du parallélogramme les côtés opposés sont égaux, il n'y a pas de différence entre la surface de cette figure et celle d'un rectangle dont les côtés auraient les mêmes dimensions. Nous pouvons déjà remarquer d'une façon encore superficielle que la méthode "régionale" entraîne généralement une surestimation de la surface.

Si on prend l'exemple du losange, nous vérifions qu'il est un parallélogramme dont les quatre côtés sont égaux et dont les diagonales sont perpendiculaires.

Dans ce cas, en utilisant la formule des paysans, la mesure de la surface est équivalente à la mesure de la surface d'un carré, puisque les angles ne sont jamais considérés.

Notons que la surestimation des surfaces implique, en principe, une perte pour l'usine. L'ouvrier travaille sur un terrain qui est surestimé; il est donc payé plus qu'il n'a travaillé.

4) Mesure de surface des terrains triangulaires

Les sujets calculent la surface de terrains triangulaires, comme s'il s'agissait de rectangles, dont un côté serait égal à zéro. Abreu (1988) montre que, pour calculer des aires triangulaires, les agriculteurs suivent les étapes suivantes en supposant que sont appelés côtés opposés ceux qui ne sont pas le côté choisi comme base :

- additionner les mesures de deux côtés opposés et calculer la moitié de ce résultat (moyenne);

- calculer la moitié de la mesure du troisième côté
- multiplier ces deux résultats.

Elle propose un exemple qui clarifie cette procédure (voir Figure 3-10)

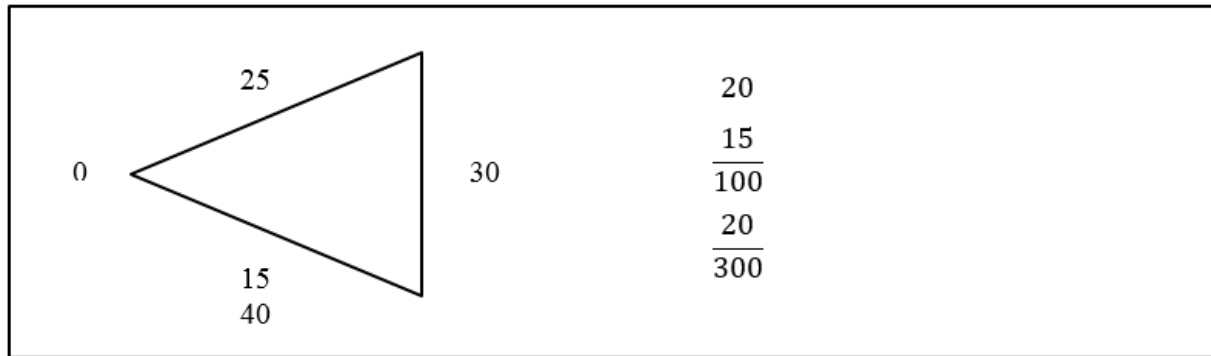


Figure 3-10. Polygone dessiné et calculs effectués par un agriculteur pour démontrer la procédure de mesure de la surface d'un terrain de forme triangulaire

Sujet: ça y est. Le triangle! Ici, je vais mesurer ce terrain, ici, ça fait 30 braças; ici ça fait 25; ici, en bas, ça fait 15; et ici, à la fin, ça fait zéro. Maintenant, je dois savoir combien de cubos je dois faire. [Premier pas] Ici 5+5, ça fait 10; 10 je retiens 1, 3, ça fait 4; c'est-à-dire, ça fait 40 braças. 40 braças divisé, la moitié, ça veut dire que c'est 20 braças. [Deuxième pas] Maintenant ici, ces 30 braças, je dois diviser, 15 ici (base); 15 ici (sommet). [Troisième pas] Alors, 5x0,0; 5x2,10; 1x0,0 et 1x2,2. Zéro et trois, ça veut dire 30 ...30 cubos ... 300 cubos.

On observe également que pour les triangles et les quadrilatères, la procédure de mesure des surfaces employée par les agriculteurs ne constitue qu'une opération arithmétique (multiplication de deux nombres). Ils négligent les aspects géométriques de la construction de l'objet (type de triangle ou de quadrilatère).

Nous insisterons sur ce point, et ferons l'analyse des conséquences de l'emploi de cette méthode dans l'exemple des mesures de surface de triangles.

On voit, par exemple, que le calcul de l'aire du triangle ABC, (figure 3.8.) en utilisant la formule de Héron (qui n'exige pas de connaître la hauteur), donne les résultats suivants:

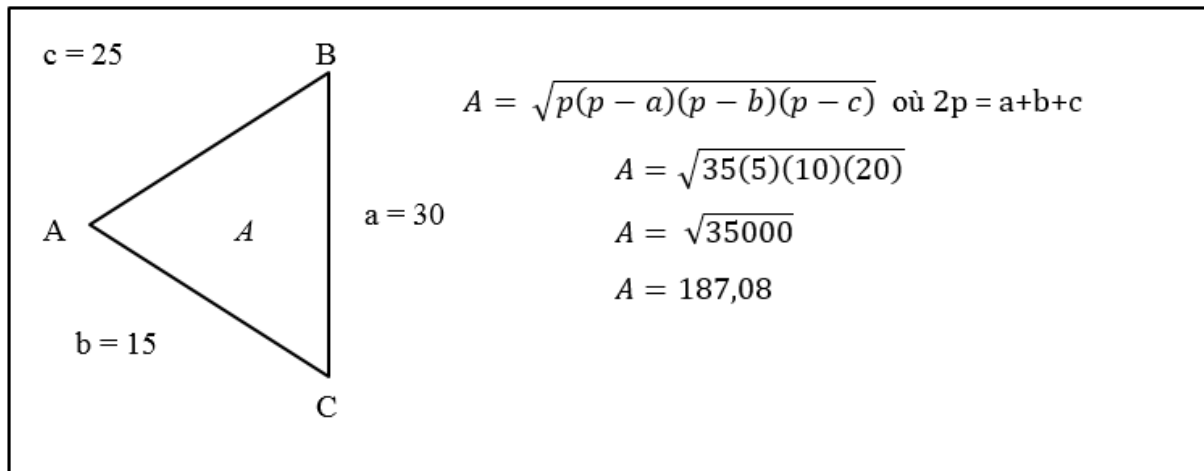


Figure 3-11. Calcul de l'aire d'un triangle par la formule de Héron

Par la formule approchée, utilisée par les agriculteurs :

$$A = \frac{b+c}{2} \times \frac{a+0}{2}$$

En prenant comme base a: $A = \frac{15+25}{2} \times \frac{30+0}{2}$ on obtient 300

En prenant comme base c: $A = \frac{15+30}{2} \times \frac{25+0}{2}$ on obtient 281,50

En prenant comme base b: $A = \frac{25+30}{2} \times \frac{15+0}{2}$ on obtient 206,08

Dans cet exemple, on voit que la majoration est d'autant plus grande que l'on prend comme base le plus grand des trois côtés du triangle. Ainsi, l'exemple présenté ici (Abreu, 1988), par lequel le sujet a choisi le côté le plus grand comme base, nous conduit à mener une investigation plus systématique de cette question. Pour clarifier un peu plus cette question, et en utilisant des unités de mesures qui nous sont plus familières (mètre, mètre carré), réitérons la mesure de surface de l'exemple antérieur. Utilisons la formule de Héron et la formule "régionale", en prenant comme base le côté le plus grand.

Pour convertir les valeurs de braça (2,20 m) en mètres

$$a = 30 \times 2,20 = 66 \text{ m}$$

$$b = 15 \times 2,20 = 33 \text{ m}$$

$$c = 25 \times 2,20 = 55 \text{ m}$$

$$\text{Formule de Héron: } A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ où } 2p = a + b + c$$

$$A = \sqrt{77(11)(44)(22)} \quad p = \frac{154}{2} = 77$$

$$A = \sqrt{819896} \quad A = 905,48 \text{ mètres carrés}$$

$$\text{Formule "régionale": } A = \frac{b+c}{2} \times \frac{a+0}{2} = 44 \times 33 = 1452 \text{ mètres carrés}$$

La différence entre la surface calculée à partir de la "formule scolaire" et celle de la "formule locale", est de **546,52 mètres carrés**. La surestimation est considérable, puisque le terrain qu'un ouvrier exploite chaque jour est une conta, (484 mètre carrés). Nous nous devons alors de comprendre les raisons de l'utilisation de ces procédures, qui à l'évidence ne favorisent pas le patron.

Abreu (1988) a travaillé avec des sujets en leur demandant qu'ils lui expliquent leurs méthodes pour mesurer le terrain. On peut se demander comment, dans la vie quotidienne et en situation réelle de travail, les sujets choisissent le côté qui sera pris comme base. L'explicitation de ce point nécessitera une exploration plus approfondie.

Abreu (1988) et Abreu et Carraher (1988) font la comparaison entre la formule paysanne et la formule scolaire. Ils affirment que l'utilisation de la moyenne des côtés à la place de la hauteur, amène à une surestimation des surfaces; mais cette surestimation ne compromet pas les résultats et ajoutent qu'en fonction de la finalité de ces calculs, cette surestimation n'est pas importante. Ces auteurs insistent aussi sur la fonctionnalité de la formule "locale" qui ferait l'économie de la difficulté liée à la mesure de la hauteur, indispensable à la formule scolaire.

Nous pensons cependant que la difficulté à mesurer la hauteur peut avoir pour origine autant des problèmes pratiques de mesure sur un terrain plein de canne à sucre qu'une méconnaissance de cette grandeur qui, dans l'histoire des mathématiques, n'a pas toujours été identifiée.

Brousseau (1983) fait référence aux obstacles d'origine proprement épistémologique, qui correspondent à ceux qui sont vraiment identifiables dans l'histoire des mathématiques et dont la trace est retrouvée dans les modèles spontanés des élèves. Il considère que certaines difficultés d'apprentissage en mathématique se rapprochent des obstacles attestés par l'histoire.

Vergnaud (1992a) observe que l'analyse des compétences et des tâches auxquelles elles répondent ne peut pas être dissociée de l'épistémologie des savoirs de référence. Cet auteur ajoute que cela ne signifie pas que le développement des compétences chez un sujet reproduit l'histoire mais que la

connaissance d'un domaine de connaissances et de son épistémologie est indispensable pour l'analyse des compétences et leur organisation au cours de l'apprentissage. Il affirme que ni Piaget, ni Vygotski, ni la plupart des psychologues et des formateurs aujourd'hui n'ont reconnu suffisamment ce point.

Cette question renvoie aux aspects conceptuels de la mesure des surfaces. En ce qui concerne les aspects socioculturels, nous pensons que ce système de mesure peut être maintenu avec toutes les contradictions qu'il comporte parce qu'il y a des conditions spécifiques d'acceptation sociale de ces erreurs.

Pour ces raisons, et à ce moment de la recherche, il nous paraît important de poser quelques questions sur l'origine de ce système de mesure:

En effet, nous n'avons pas trouvé d'écrits sur l'implantation de ce système au Brésil. Les travailleurs de la canne à sucre prétendent que "depuis toujours ça a été comme ça", mais ils n'en connaissent pas les origines. Pourtant, quelques membres de la FETAPE (Fédération des travailleurs agricoles de Pernambuco) prétendent que les Portugais ont introduit ce système, mais qu'ils ne connaissent pas plus de détails. Il nous paraît probable que les Portugais ont véhiculé ce système, mais cela ne nous avance pas beaucoup. Ainsi, nous sommes-nous posé quelques questions:

Dans quelle mesure le système de calcul des surfaces est-il particulier à la culture de la canne à sucre du Nordeste du Brésil?

Existe-t-il des indices de cette mathématique dans des cultures plus primitives?

L'intérêt de ces questions réside dans le fait de ne pas considérer comme spécifiques d'une culture particulière des pratiques rencontrées aussi dans d'autres contextes¹², d'aller plus loin qu'une simple description "folklorique" de certaines procédures de résolution de problèmes, et d'identifier des situations contextuelles semblables et des conditions d'acceptation sociale qui puissent donner lieu à ce type de pratique.

Nous nous sommes demandé, en l'occurrence, comment les cultures primitives calculaient les surfaces des terrains en fonction de leurs besoins pratiques et des moyens mathématiques de l'époque. Nous en avons recherché les traces dans l'une de ces cultures, dont les nécessités pratiques

¹² Observons que les États de Rio de Janeiro et de São Paulo le système de calcul des surfaces est le système habituel, ainsi que les unités de mesure.

obligeaient ses habitants à se familiariser avec les calculs de surface. Nous avons déjà évoqué les inondations qui effaçaient les limites des champs, obligeant les Égyptiens primitifs à rétablir ces limites chaque année, cela n'étant possible qu'à la condition que soient connues exactement les dimensions de ces champs. Comment opéraient donc ces peuples? Quels sont les témoignages historiques sur ce sujet?

3.4. Calcul d'aire chez les Égyptiens primitifs et chez les travailleurs de canne à sucre du Nordeste du Brésil: quel rapport existe-t-il?

Erman et Ranke, (1952) observent que les mathématiques en Égypte, semblent en être restées, dans leur ensemble, au degré de développement qu'elles avaient atteint sous l'Ancien Empire. Pour expliquer ce phénomène, ces auteurs établissent un rapport entre le développement des mathématiques et le degré d'exigence sociale que représentent des réponses plus précises. Ils observent que même si la solution donnée par les mathématiques de l'époque était approximative, elle satisfaisait autant l'administration du Nouvel Empire que celle de l'Ancien Empire. Dans le domaine de la géométrie, ces auteurs se montrent quand même surpris par l'absence d'un développement plus important, puisque la destruction par l'inondation d'un si grand nombre de limites de terre remplaçait chaque année les Égyptiens devant des problèmes de calcul de surface, ce qui aurait dû entraîner un plus grand développement.

Les observations de Serres (1989) peuvent fournir des éléments de compréhension à ce phénomène: cet auteur observe que "même l'évaluation par les harpédonaptes¹³ des champs cultivables, dont la crue du Nil a effacé ou renversé les bornes, cherche à clore les contentieux entre voisins par la force de l'État et à rétablir dans l'intégrité le cadastre, soit l'assiette de la taxe. Cette géométrie première ne mesure pas n'importe quelle terre, mais balance plutôt l'avoir et le devoir, et ses erreurs constantes d'approximation vont toujours dans le même sens: l'intérêt du pharaon ou du plus fort."

Ces remarques font allusion à des conditions socioculturelles d'acceptation de procédures fausses de mesures de surfaces. Mais en quoi consiste ce système de mesures, et pourquoi sont-elles conceptuellement fausses?

Erman et Ranke (1952) nous proposent une bonne description du système de calcul de surface égyptien et des raisons des erreurs qu'il entraîne. D'après ces auteurs, "tous leurs calculs de surface

¹³ Fonctionnaires royaux chargés de mesurer les terres, autrement dits arpenteurs ou géomètres (Serres, 1993).

sont fondés sur celui de la surface du rectangle, qu'ils ont déterminée exactement comme étant égale au produit de deux côtés adjacents. Mais, fait bien surprenant, ils perdent de vue que tous *les quadrilatères dont les côtés opposés sont égaux* ne peuvent pas être résolus de cette manière. Et comme, d'autre part, ils assimilent tout triangle à un rectangle, dont un des côtés serait égal à la base du triangle et dont l'autre serait égal à la moitié d'un autre côté du triangle, ils ont reporté cette erreur également sur le calcul du triangle. Pour les Égyptiens, la surface du triangle isocèle est donc égale à la moitié du produit de la base par un des côtés égaux... Le calcul de la surface du trapèze se ressent également de cette erreur, parce qu'on devait multiplier un côté oblique par la demi-somme des deux côtés parallèles. On le voit, l'erreur fondamentale de ces géomètres de l'antiquité consiste dans le fait qu'ils ne sont jamais parvenus à acquérir la notion de "hauteur"; c'est un des côtés obliques qui tient lieu de hauteur."

La figure 3.9. présente une page du Papyrus Rhind qui propose des exercices de calcul des surfaces de différentes formes, chacun avec une présentation et un algorithme de solution (Erman & Ranke, 1952 et Serres, 1989). Analysons ces observations.

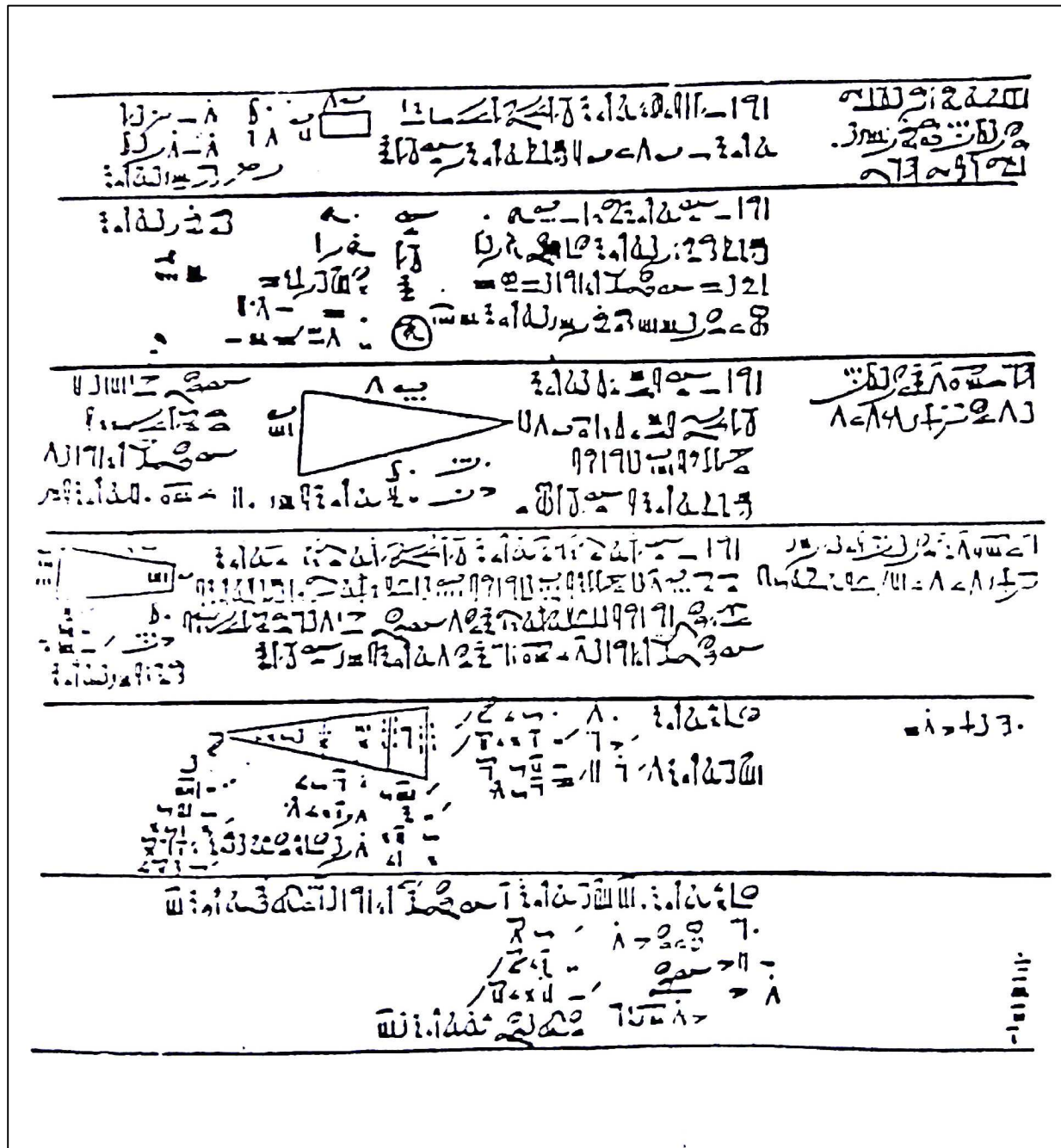


Figure 3-12. Exercices de calculs de surfaces chez les Egyptiens

3.4.1. Aspects conceptuels: la Hauteur: est-ce bien là le problème?

Observons les deux formules utilisées pour le calcul de la surface des triangles:

Formule égyptienne: $S = \frac{base}{2} \times a$ dans laquelle a représente la mesure de l'un des côtés

Formule nordestine: $S = \frac{base}{2} \times \frac{a+b}{2}$ où a et b sont deux côtés du triangle

Nous voyons donc que la différence entre formule scolaire, formule égyptienne et formule nordestine repose sur la façon de calculer la hauteur: hauteur réelle dans la formule scolaire; un des côtés obliques pour la formule égyptienne et moyenne de deux côtés obliques pour la nordestine.

La hauteur est la perpendiculaire abaissée sur la base ou sur la base prolongée à partir du sommet de l'angle opposé. Selon le type de triangle l'estimation est plus ou moins juste. Plus la moyenne de deux côtés (dans le cas de la formule nordestine) ou un des côtés obliques (dans le cas de la formule égyptienne) s'approche de la hauteur plus l'estimation de l'aire est juste. Cela signifie que, pour la formule égyptienne, l'approximation sera de plus en plus juste si le côté choisi comme hauteur forme un angle droit ou presque droit avec la base. Dans la formule nordestine il faudrait que les deux côtés dont on fait la moyenne soient les plus proches possibles de la perpendiculaire à la base.

3.4.2. Aspects socioculturels: validation du système par la communauté

Maurice Loi, dans l'avant-propos du livre *Penser les mathématiques* (1982) observe: "L'homme qui vit dans un monde pauvre en mathématiques n'a pas la raison formée comme celui qui vit au contact de la rigueur et de l'élégance des modes de raisonnement mathématique..." Nous pensons, pour notre part, que la culture détermine le type d'approximation souhaitable dans les mesures. Nous avons évoqué, dans le chapitre précédent, la recherche d'absence d'ambiguïté, donc d'exactitude dans les mesures, comme caractéristique des sociétés scientifiques. Dans des cultures non scientifiques, cette recherche est beaucoup plus souple. Ainsi, la précision dépendrait des caractéristiques de civilisations.

Dans la plupart des thèmes abordés dans ce chapitre, un point semble se répéter et attirer l'attention: les contradictions et les incertitudes présentes dès le début de la culture de la canne à sucre dans le Nordeste du Brésil. De plus, les comportements liés aux tentatives de résolution de ces contradictions, ou de tolérance de ces incertitudes sont connus. Illustrons-les par trois exemples:

- 1) Pour augmenter les quantités de sucre produites, il est possible soit de rajouter du sable au sucre, soit d'augmenter le nombre de journées de travail par an, dépassant ainsi la période de maturation naturelle de la canne, et en diminuant la teneur de saccharose de la récolte.

2) Les systèmes de calcul des surfaces peuvent être utilisés soit pour agrandir, soit pour diminuer la mesure de la surface au profit de l'ouvrier ou de l'usiner;

3) Systèmes de pesage de la canne: - choix de faisceaux plus petits par le chef d'équipe pour calculer la moyenne, - construction par l'ouvrier de faisceaux n'ayant pas la quantité de cannes demandée.

La culture de la canne à sucre s'effectue dans le cadre d'une micro-société entre les membres de laquelle s'organisent des échanges quant aux savoirs, notamment aux savoirs mathématiques. Si l'on admet que les processus cognitifs n'apparaissent jamais dans un vide social, et que les formes qu'ils prennent ne sont jamais indépendantes de l'influence socioculturelle, nous supposons alors que ces situations imposent des contraintes quant aux procédures à utiliser, rendant prioritaire l'utilisation de certains types de représentation.

Si nous pouvons imaginer que cette communauté puisse supporter les contradictions internes du système de mesure, il nous semble cependant difficile que l'usine puisse intégrer les pertes systématiques dues à la surestimation de la surface des terrains travaillés par les ouvriers. Nous devons cependant examiner avec quelle fréquence les triangles interviennent dans les calculs puisque c'est à leur propos que les surestimations sont les plus importantes.

3.5. Quelques mots pour conclure sur les objectifs de la recherche

Nous avons insisté sur l'importance des données sociales pour comprendre les processus cognitifs des sujets dans des situations de résolution de problème. Ces informations doivent nous permettre de mieux situer nos sujets: soumis à des conditions de vie précaire, avec un faible niveau de scolarité, ils vivent au quotidien des situations d'inégalité et de contradiction marquantes. Même les "mathématiques" dans les situations de travail ont un caractère flou, car elles sont tributaires de circonstances particulières. Comment les sujets interagissent-ils avec ce système "mathématique"? Existe-t-il des régularités?

Si nous supposons que les facteurs sociaux contraignent les procédures cognitives, nous admettons réciproquement que les facteurs sociaux sont aussi perçus selon des dimensions cognitives. C'est dans cette interaction complexe que nous essayons de nous situer, avec la vigilance qu'une telle position demande.

Nous nous proposons donc d'étudier dans une double perspective conceptuelle et socioculturelle les aspects suivants:

- comprendre le système de mesure "régional" en fonction du contexte pragmatique de la situation et des concepts mathématiques sous-jacents;
- étudier les schèmes évoqués chez les sujets en fonction des situations sociales ou des problèmes mathématiques particuliers;
- vérifier la régularité des schèmes évoqués, et la destination du bénéfice des choix tant au niveau social qu'au niveau cognitif.

Chapitre 4 : Méthodologie

Par leur nature ou par la problématique qu'elles abordent, certaines recherches présentent des risques méthodologiques non négligeables tant en ce qui concerne *leur validité interne (précision de l'expérience)* que *leur validité externe ou écologique (pertinence hors du laboratoire)*.

Le recours à une approche exclusive faite soit d'expérimentations, soit d'observations, peut comporter quelques risques: impasse sur des aspects contextuels prégnants dans le cas de l'expérimentation, danger de travailler sur des variables mélangées dans celui de l'observation ethnographique.

Nombre d'auteurs reconnaissent les limites de la méthode expérimentale pour traiter de certains sujets. Nous insistons sur ce point puisque "l'impérialisme" de cette approche, pendant toute une époque de la Psychologie, a engendré la méfiance pour les autres approches, considérées comme non scientifiques. Cette tendance subsiste encore aujourd'hui, et la valeur des travaux scientifiques ne présentant pas une analyse quantitative exhaustive, ou un traitement statistique sophistiqué est souvent amoindrie. Quelques observations des psychologues nous offrent pourtant des éléments de réflexion sur l'approche méthodologique que nous avons choisie.

Bruner (1991) observe que "vers la fin de sa vie, Wundt a, le premier, reconnu combien ce nouveau style, celui du "laboratoire" pouvait être contraignant; et en formulant l'idée d'une "psychologie culturelle", il nous exhortait à adopter une approche plus historique et interprétative pour comprendre les produits culturels de l'homme." Bruner, (1991) lui-même, s'approprie cette idée, qu'il assortit de la question suivante: "Les interprétations plausibles ne sont-elles pas préférables aux explications causales, particulièrement lorsque pour parvenir à l'explication causale nous sommes contraints de rendre artificiel ce que nous étudions au point qu'il est difficile d'y reconnaître une représentation de la vie humaine?"

Dans ce sens, Abdi (1987) remarque que "les tentatives de comprendre le comportement ne sauraient toutes se réduire à l'expérimentation" et que "certains problèmes ne peuvent trouver de réponses expérimentales que ce soit pour des raisons éthiques, pratiques, théoriques ou autres". Il ajoute que "les variables indépendantes et dépendantes, tout comme les méthodes du laboratoire, semblent parfois - à tout le moins - artificielles comparées à la richesse et à la complexité des faits observables." D'après cet auteur, l'étude des faits dans une situation naturelle ne peut pas

s'empêcher de considérer "toutes" les variables impliquées, pour observer les effets de chacune et les effets de leurs interactions.

De même, les ethnométhodologues font l'hypothèse que les phénomènes quotidiens se déforment lorsqu'on les examine à travers "la grille de la description scientifique". Ils affirment que la réalité sociale est constamment créée par les acteurs, qu'elle n'est pas une donnée préexistante qui puisse être captée par une seule technique de recueil de données (Coulon, 1987). Ainsi, nous supposons que les "données" ne sont pas "données"; elles sont construites. Cette construction dépend autant des informations quantitatives et qualitatives des procédures utilisées par les sujets que de réflexions sur la présence du chercheur au milieu des sujets dans une situation quotidienne et des circonstances où les informations sont données.

En parlant plus spécifiquement des situations de travail, Hoc (1991) observe que ces situations ne sont pas seulement un lieu d'application de connaissances élaborées dans des laboratoires, elles constituent aussi un lieu d'élaboration de connaissances nouvelles, impossibles à obtenir dans des situations trop simples. Il ajoute que des théories parfaitement satisfaisantes dans des situations simples peuvent se révéler d'une validité écologique fort limitée (et, donc, d'une pertinence réduite) lorsqu'on les applique à des situations complexes.

C'est dans cette perspective que nous allons conduire cette recherche, sans négliger cependant les risques que ce choix implique. Observons-en quelques-uns:

Il nous semble qu'un des travers des études non-expérimentales réside dans le fait qu'elles proposent une description détaillée de faits observables, dont la compréhension reste limitée au contexte particulier de l'étude. Mais les résultats de quelques recherches "expérimentales" ne sont-ils pas également limités au contexte de l'étude? Le chapitre 1 propose d'alimenter le débat sur ce sujet.

Nous postulons que le risque le plus important consiste à tirer des conclusions générales à partir des recherches faisant appel à un seul type de méthodologie, notamment dans certaines problématiques de recherche.

Toutefois, nous nous refusons à employer les formules en vogue comme "des processus dynamiques interactifs, en constante interaction réciproque individu-situation ..." (Magnusson, 1981 cité par Chandler, 1988) pour dire que nous intégrons un peu de ceci et un peu de cela.

Rapportée à notre objet d'étude, les connaissances mathématiques, la tendance observée des recherches les plus récentes compose avec plusieurs approches méthodologiques.

On observe une combinaison d'entretiens individuels classiques, de démarches de type clinique piagétienne, associées soit à des expérimentations classiques, soit à des méthodes d'observation participante, soit encore à des observations ethnographiques (Cole et Scribner, 1974; Lave, 1977; Greenfield et Childs, 1977; Scribner, 1984; Schliemann, 1984, 1986; Carraher, 1986; Acioly, 1985; Lima, 1985; Lave, 1989).

Cette combinaison de méthodes est recherchée notamment dans des études portant sur les processus cognitifs de résolution de problèmes auprès de populations spécifiques, lorsque les conditions sont telles que les paradigmes expérimentaux habituels pourraient s'avérer stériles. Dans cette recherche, nous essaierons, comme Greenfield & Lave (1982) de croiser la "rigueur" des méthodes de laboratoire avec la "richesse" de méthodes "naturalistes".

Pour cette raison, le lecteur peut avoir l'impression de se trouver submergé par une quantité de détails (dans la description des sujets, par exemple), dont il pourrait se dispenser s'ils n'étaient pas utilisés ultérieurement comme support des interprétations. Le nombre de sujets étudiés, les approches méthodologiques employées permettent seulement d'arriver à certaines hypothèses qui pourront être approfondies ultérieurement.

4.1. Description des sujets

Vingt et un sujets âgés de vingt à soixante et un ans ont participé à la première phase de la recherche; parmi eux quinze ouvriers agricoles (trois femmes et douze hommes), deux chefs d'équipe, deux contrôleurs et deux régisseurs de zone (pour une description plus détaillée de ces occupations, voir chapitre 3). Ces mêmes sujets ont participé à la phase II, sauf l'un des ouvriers qui a été licencié entre les deux phases du recueil des données. (voir tableau 4.1. pour la caractérisation des sujets).

Sujets	moyenne d'âge	mariés	célibataires	séparés/ veufs	homme	femme	catholiques	protestants	Sans religion
ouvriers	36	11	2	2	12	3	10	2	3
chefs d'équipe	45	2	—	—	2	—	1	1	—
contrôleurs	48	2	—	—	2	—	1	1	—
régisseurs	55	2	—	—	2	—	2	—	—
Total	40	17	2	2	18	3	14	4	3

Tableau 4-1. Caractérisation des sujets

La majorité de ces sujets (17 sur 21) sont mariés ou vivent en concubinage. Observons qu'il est courant dans la région, de rencontrer des couples séparés et des familles avec des enfants de pères ou de mères différents. Ainsi, les sujets mentionnent souvent un nombre élevé d'enfants (6 à 17) qui comptabilisent en vérité leurs propres enfants, les enfants de leurs maris ou femmes, les enfants du couple actuel.

La moyenne d'âge augmente en fonction du niveau dans la hiérarchie agricole: 36 ans pour les ouvriers, 45 ans pour les chefs d'équipe; 48 ans pour les contrôleurs et 55 ans pour les régisseurs de zone.

Malgré l'augmentation du nombre d'églises protestantes dans la région, la majorité des sujets se disent catholiques (14 sur 21), contre 4 protestants et 3 qui affirment ne pas avoir de religion particulière et seulement croire en Dieu. Malgré leur appartenance" à l'église catholique, nos sujets pratiquent souvent des rites afro-brésiliens, lors d'une maladie, par exemple.

Cet élément est lié à la précarité des conditions d'assistance médicale: lorsque quelqu'un tombe malade, il faut d'abord prévenir le régisseur de zone, pour qu'il appelle l'usine, qui s'engage à envoyer une voiture pour emmener le malade à l'hôpital. La lenteur de la procédure décourage une grande partie de la population, qui recourt à cette démarche uniquement dans les cas très graves. En outre, on n'est jamais sûr de trouver un médecin à l'hôpital. Les gens "préfèrent" donc chercher des "guérisseurs" dans la communauté, et se soigner avec des herbes et des prières. Les contradictions religieuses ne semblent pas poser problème.

La religion officielle du Brésil est le catholicisme. Même s'ils se disent catholiques, beaucoup n'ont pas réellement de religion. L'absence d'église catholique dans les villages est souvent comblée par la présence d'une église évangéliste, à valeurs très rigides. Une ouvrière nous a expliqué que le seul

loisir dans le village était d'aller à la messe, qui n'a plus lieu depuis que le prêtre a fini ses études et ne vient plus au village.

Tous les sujets sont nés dans la région, et la plupart n'ont jamais quitté leur campagne. La majorité des sujets (17 sur 21) a commencé à travailler dans des activités agricoles sucrières avant l'âge de 11 ans, 2 sujets ont commencé à travailler à l'âge de 12 ans et deux autres à l'âge de 14 ans (voir tableau 4.2.). La majorité des sujets a donc dû intégrer très tôt les activités liées au travail et à la scolarité dans la vie quotidienne (voir tableau 4.3.).

Age/Ans	ouvriers	chefs d'équipe	contrôleurs	régisseurs	Total
7	1			1	2
8	4	1	1		6
9	4				4
10	4	1			5
12	1		1		2
14	1			1	2
Total	15	2	2	2	21

Tableau 4-2. Age du début du travail agricole par catégorie de sujets

Années d'école	ouvriers	chefs d'équipe	contrôleurs	régisseurs	Total
0	6	1		1	8
1	2	1	1		4
2	1			1	2
3	2		1		3
4	1				1
5	3				3
Total	15	2	2	2	21

Tableau 4-3. Années de scolarité par catégorie de sujets

Si on quantifie les années de scolarité pour chacun de ces sujets (tableau 4.3.) on observe que 8 parmi 21 ne sont jamais allés à l'école; 4 ont suivi 1 an d'école et 2 deux ans. Quelques sujets affirment qu'ils ont suivi l'école pendant 3, 4 ou même 5 ans; ils déclarent n'y avoir rien appris (sauf à signer leur nom), et que "les calculs, ils les ont appris en travaillant". Aucun sujet ne mentionne avoir appris les mesures de surface à l'école. Ils connaissent pourtant les unités de mesure, mètre, kilomètre, hectare et les noms de leurs sous-multiples, qu'ils ne maîtrisent toutefois que de manière

incertaine. En règle générale, ils savent tous additionner, soustraire, multiplier, mais rarement diviser. Seulement deux sujets dans tout l'échantillon affirment lire un journal de temps en temps, quand les produits qu'ils achètent au magasin sont emballés dedans.

Nous avons constaté de la part des ouvriers agricoles, le refus d'utiliser le papier/crayon, notamment lorsque nous leur suggérions de dessiner la figure dont ils avaient donné la valeur des côtés. Ils disaient: "Non, on va salir votre papier", ils dessinaient alors par terre avec leurs doigts ou avec une baguette en bois ou un caillou.

4.2. Recueil et analyse de données

Le but de cette recherche est d'analyser la "compréhension" que les sujets présentent d'un système de mesure de surface "local", ainsi que leurs compétences et conceptions sous-jacentes. Nous avons voulu analyser les effets que l'usage d'un système de mesure de surface particulier pouvait avoir sur la compréhension et l'opérationnalité du concept correspondant.

La chercheuse était accompagnée, dans les trois phases, d'une assistante de recherche, chargée essentiellement de:

- noter des signes non verbaux des sujets;
- discuter les résultats partiels de la recherche et
- d'assurer des éventuels retours sur le terrain pour clarifier des points particuliers, après le départ du chercheur en France.

Nous avons précédemment évoqué que "l'opérationnalité d'un concept doit être éprouvée à travers des situations variées, et que le chercheur doit analyser une grande variété de conduites et de schèmes pour comprendre en quoi consiste, du point de vue cognitif, tel ou tel concept ..." Vergnaud (1990). Ainsi, nous allons étudier ici le concept de mesure non seulement dans une situation isolée mais nous allons le situer dans un ensemble de situations qui doivent être complémentaires et se servir de contrôle mutuel. Ceci justifie la diversité de tâches proposées aux sujets.

Nous avons élaboré trois phases de recueil de données qui impliquent différents types d'analyse :

- Phase I :**
1. *observations naturalistes;*
 2. *entretiens individuels concernant les données individuelles des sujets et les données spécifiques à la résolution de problèmes de mesure dans le travail.*

Phase II - entretiens cliniques du type piagétien (résolution de problèmes de mesure de surface proposés par le chercheur).

Phase III - Retour sur le terrain pour des observations plus ponctuelles concernant le calcul de surface de terrains (surtout les triangulaires) et l'observation de la facette administrative de l'usine.

Nous privilégions dans les trois situations:

- les aspects conceptuels: les données spécifiques à la résolution de problèmes de la phase I et II,
- les aspects socioculturels: les observations naturalistes des phases I et III et les données individuelles de la phase I.

Les phases I et II proposent des situations problèmes différentes. Nous spécifierons les types de problèmes abordés et clarifierons les buts de chaque classe de situations-problèmes. Un schéma des types de problèmes abordés est présenté dans la figure 4.1.

La phase III et les observations naturalistes de la phase I ne comportent pas de situations-problèmes.

Les situations-problèmes ont été construites pour mettre en valeur certains acquis cognitifs des sujets dans le domaine de la mesure. Le tableau 4.4. présente les objectifs de chaque situation-problème (la tâche) ainsi que les *hypothèses*.

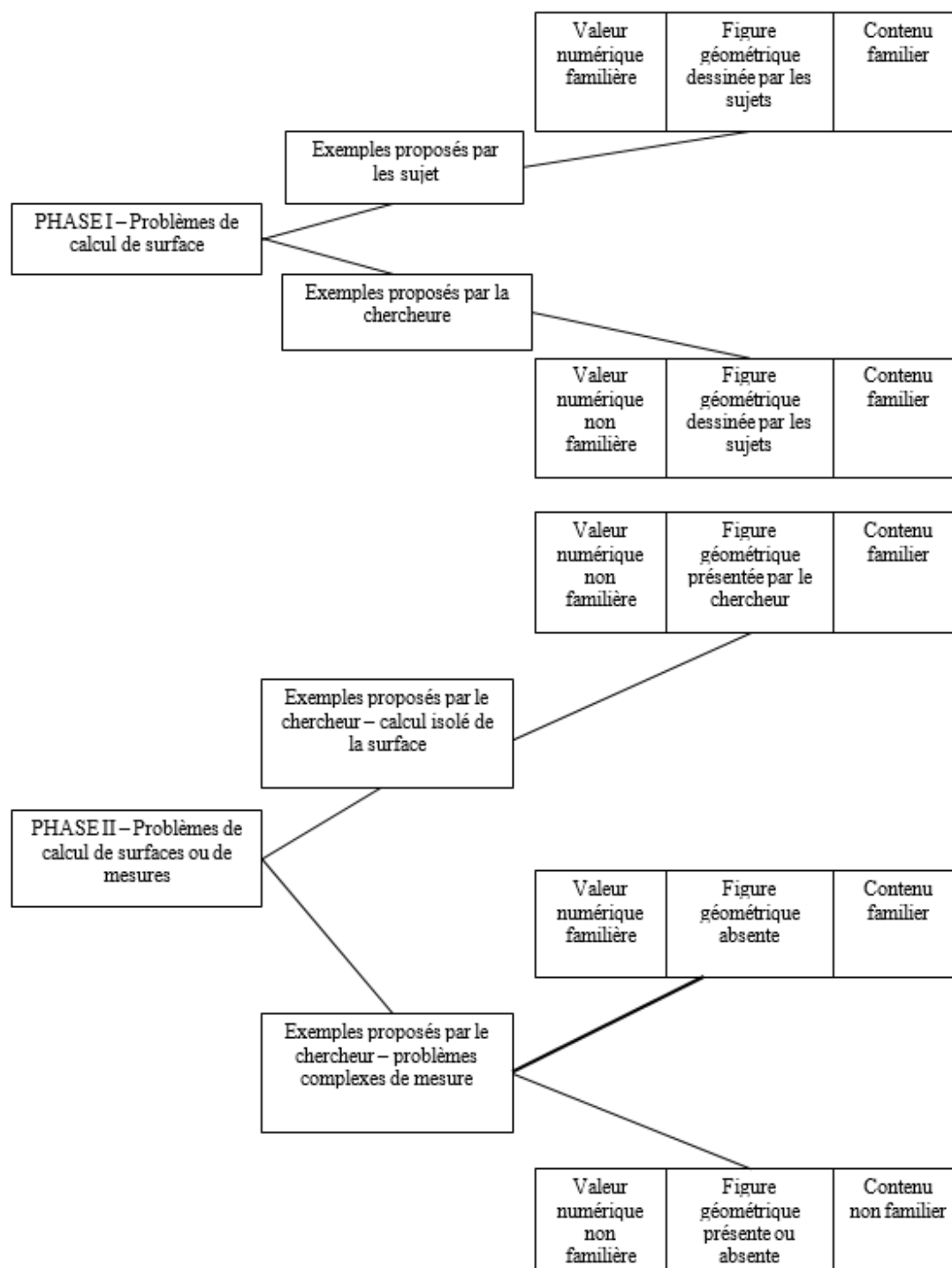


Figure 4-1. Type de figures abordés

Phases/ Figures	Problème	Exemples proposés	Objectifs	Hypothèses
<i>Phase I Calcul isolé de la surface</i>	-	-		-
Quadrilatères	Calcul d'aire	Par les sujets	identifier les exemples et les formules les plus usuels	-
		Par le chercheur	identifier les procédures employées lors des exemples peu familiers	L'émergence d'autres stratégies
Triangles	Calcul d'aire	Par les sujets	identifier les exemples et les formules les plus usuels	-
		Par le chercheur	identifier les procédures employées lors des exemples peu familiers	L'émergence d'autres stratégies
<i>Phase II a- problèmes complexes de mesure où le calcul de la surface peut intervenir</i>	-	-	analyser les limites et le pouvoir : - de la généralisation et de l'interprétation de problèmes complexes	Les compétences sont limitées au contexte familial d'apprentissage; des difficultés de compréhension des énoncés empêchent l'usage de procédures connues
<i>Phase II b Calcul isolé de la surface</i>	-	-	Observer la différenciation et la coordination des aspects numériques et géométriques de la mesure de surface	L'introduction de la figure géométrique induit l'émergence de formules qui intègrent les aspects numériques et géométriques de la surface
Quadrilatères <i>Phase II b</i>	Calcul d'aire de figures de périmètre identique	Par le chercheur	vérifier si l'aire et périmètre sont confondus	L'aire et le périmètre peuvent être confondus lors de l'emploi de la formule locale
	Comparaison de surfaces de périmètre identique	Par le chercheur	vérifier si surface et périmètre sont confondus	Surface et périmètre ne sont pas confondus.
	Recherche de la valeur numérique du côté d'un carré dont la surface a été doublé	Par le chercheur	vérifier la solidité des conceptions bidimensionnelles lors d'une demande inverse de celle habituelle; vérifier l'approximation	La demande inverse entraîne des échecs
Triangles <i>Phase II b</i>	Calcul d'aire	Par le chercheur	vérifier l'existence de variantes des formules en fonction du type de triangle; choix du côté susceptible d'être divisé par 2; variables conceptuelles impliquées dans l'éventuelle surestimation des surfaces	l'émergence d'autres formules
Figures géométriques différentes de périmètre identique - <i>Phase II b</i>	Comparaison de surfaces	Par le chercheur	vérifier si surface et périmètre sont confondus	Surface et périmètre ne sont pas confondus.

Tableau 4-4. Caractérisation des phases I et II du recueil de données

Chaque phase a un objectif particulier. La phase I, plus exploratoire, ne permet pas d'approfondir certains aspects conceptuels, qui ont donc été repris avec plus de finesse dans la phase II. Cependant, cette dernière phase comporte elle-même des absences notables en ce qui concerne les aspects socioculturels. La phase III a permis de combler ces lacunes. Les différentes phases, ont pour but de cerner de plus en plus précisément le concept de mesure de surface, point central de cette recherche.

Les différents niveaux d'analyse de notre travail se traduisent par l'utilisation d'un certain éventail de méthodes :

- comparaison de réponses individuelles à diverses situations-problèmes, proposées lors d'entretiens individuels;
- étude de procédures au niveau d'un sujet ou d'un groupe de sujets;
- comparaison de réponses de groupes de sujets.

Les entretiens ont toujours été conduits par deux personnes (la chercheuse elle-même et une assistante de recherche avec formation en Psychologie Cognitive). Ces entretiens ont été enregistrés et transcrits intégralement. Cette méthode devait permettre de limiter le risque de déformation causé par la présence d'un seul observateur, et donc de repérer certains comportements non verbaux au moment de la présentation de situations-problèmes.

Dans les trois phases deux aspects principaux ont retenu notre attention:

- 1) les aspects conceptuels, à savoir le type de raisonnement, la nature des procédures employées ... et
- 2) les aspects socioculturels, à savoir les différentes possibilités d'usage des formules en fonction du statut des personnes interrogées (surestimation plus grande ou plus petite en fonction de la position hiérarchique, par exemple).

4.2.1. Première Phase

4.2.1.1. Les observations naturalistes

Ces observations nous ont permis de clarifier, parmi d'autres choses, la structure hiérarchique des activités de l'agriculture au sein de trois usines de fabrication de canne à sucre et d'alcool, au Nordeste du Brésil. Elles nous ont permis également de comprendre certaines activités intellectuelles impliquées dans la culture de la canne à sucre et les compétences mathématiques

impliquées dans ces activités. Elles se sont déroulées à trois moments différents: le premier, pendant l'année 1985, où le chercheur travaillait dans le Département de Ressources Humaines d'une usine, ce qui permettait un accès direct au terrain. Le deuxième, pendant l'année 1990 sur les terres d'une usine de la zone de la mata nord et enfin le troisième en 1991 et 1992; ce sont ces données plus approfondies recueillies au cours de cette dernière expérience qui sont présentées ici. La première et la troisième usine sont situées dans la zone de la mata sud de Pernambuco et présentent des caractéristiques similaires. Dans ces dernières, la chercheuse était identifiée d'une certaine façon au patron, puisqu'il était entrée sur le terrain par son intermédiaire. Lors de la deuxième enquête, la chercheuse était plutôt identifiée aux travailleurs puisque son arrivée sur le terrain avait été rendue possible grâce à l'intervention d'un leader de la communauté. Certaines différences ont été observées dans les trois phases, mais l'absence de données systématiques plus approfondies nous empêche de mener une analyse complète de cette différence de statut.

L'intérêt de cette démarche réside dans le fait qu'elle permet de mieux connaître le contexte socio-économique et d'explicitier, le mieux possible, les caractéristiques de chaque situation. Nous pensons comme Geertz (1962, cf. Carraher, 1989) que les outils développés culturellement dans un domaine quel qu'il soit ne sont pas annexes, mais bien constitutifs de l'activité mentale pendant la résolution de problème.

Ces données ont été développées dans le chapitre 3, comme support de certaines de nos interprétations.

4.2.1.2. Les entretiens individuels

Nous avons recherché, dans cette première phase, à établir un rapport plus proche avec les sujets pour rendre plus fiable la collecte de données. Celle-ci exigeait non seulement un rapport de confiance entre sujets et chercheur, mais aussi une relative disponibilité de la part des sujets pour participer aux différentes étapes de l'étude qui devaient se dérouler ensuite.

Ainsi avons-nous opté, pour commencer, par des entretiens individuels dont les thèmes touchaient le mode de vie dans les plantations de canne à sucre, thème appelant de la part des sujets un intérêt particulier. Malgré la méfiance initiale, nous avons pu entendre des commentaires qui attestaient leur désir de communiquer: "Venez, on va vous raconter la misère dans laquelle on vit!" ou "Il faut qu'on vous dise tout ce qui se passe ici. Peut-être ils vont nous écouter, là-bas, en France!"

Ces entretiens portaient sur deux thèmes:

- données individuelles des sujets;
- données spécifiques à la résolution de problèmes de mesure dans le travail (voir guide d'entretien ANNEXE I)

4.2.1.3. Données individuelles des sujets de la recherche

Ces entretiens intégraient des questions sur l'histoire de vie des sujets, permettant de repérer certains indices sur des variables impliquées dans les performances mathématiques différentes.

Pour cela, nous avons exploré sept catégories d'informations :

- 1 - des données personnelles (âge, état civil, lieu de naissance, etc.);
- 2 - l'habitation;
- 3 - les loisirs;
- 4 - la santé;
- 5 - l'éducation;
- 1 - la vision d'autres groupes sociaux;
- 2 - le travail.

Ces données ont ensuite permis la caractérisation des sujets, servant ainsi de support pour d'ultérieures interprétations des résultats.

4.2.1.4. Données spécifiques à la résolution de problèmes de mesure dans le travail

Les entretiens visaient aussi à identifier les activités dans lesquelles les sujets avaient besoin des mathématiques pour accomplir certaines tâches, et les difficultés spécifiques qu'ils éprouvaient; ainsi qu'à comprendre le système de mesure de surface utilisé dans la région, le système de pesage, le système de calcul du salaire, les différents systèmes de récolte, etc. (voir Guide, ANNEXE I)

Les mesures de surface ont été choisies comme notion à approfondir, puisque les autres notions (moyenne de poids, proportionnalité du système des engrais, etc.) n'étaient pas tellement partagées par tous les membres de la communauté. De plus, elles faisaient apparaître certains aspects contradictoires du système de calcul d'aire (voir chapitre 3).

4.2.1.5. Système de Mesure de Surface: Exemples proposés par les sujets

La vérification du système de calcul de surface a pu se faire grâce à des exemples de terrains quadrilatères et triangulaires proposés par les sujets, dont les valeurs numériques des côtés étaient attribuées par eux-mêmes. Ensuite, nous leur avons demandé de les dessiner, puis de calculer les aires de ces terrains.

Par cette démarche, nous recherchions d'une part à identifier les valeurs numériques plus usuelles données dans les exemples, puis à vérifier si les opérations numériques et géométriques du calcul d'aire étaient intégrées dans les formules utilisées (si la formule employée pour le calcul d'aire changeait en fonction du type de figure géométrique dessinée et/ou si celle-là changeait en fonction des valeurs numériques attribuées aux côtés). Enfin, il était nécessaire de vérifier s'il existait un biais systématique dans le choix de valeurs numériques attribuées aux côtés des figures.

Dans cette première phase, nous n'avons pas souhaité alimenter la contre-argumentation. Nous n'étions présents qu'au titre de chercheurs demandeurs d'un savoir qui leur appartenait. Pour cette raison, les protocoles qui illustrent cette phase ne contiennent pas d'échanges verbaux très riches entre chercheur et sujet.

4.2.1.6. Système de mesure de surface: exemples proposés par le chercheur

Nous avons également introduit nous-mêmes certains problèmes dans la première phase, puisqu'il nous semblait que pour certaines combinaisons de nombres, les démarches de calcul d'aire devenaient plus difficiles. En outre, nous postulions que les procédures des sujets s'appuyaient sur des valeurs particulières de variables numériques.

En modifiant les valeurs numériques proposées par les sujets, nous cherchions à faire échouer les procédures "locales", ce qui pouvait induire l'utilisation d'autres types de procédures, plus ou moins efficaces, ou des procédures d'une autre nature.

Ainsi, nous proposons aux sujets des valeurs numériques différentes pour les côtés des quadrilatères et des triangles donnés comme exemples, en leur demandant qu'ils nous dessinent les terrains qui leur correspondaient. (voir guide d'entretien ANNEXE I).

Cela nous permettait d'identifier:

- **Pour les quadrilatères**, l'existence d'une systématique quelconque dans le choix de valeurs numériques attribuées aux côtés adjacents ou opposés de ces figures, quand les valeurs ne permettaient pas la construction de rectangles. Il ne faut pas oublier que le calcul de la surface par la formule locale dépend d'une multiplication des moyennes des côtés opposés, qui, dans ce cas, sont choisis par le sujet. Ce choix entraîne une surestimation plus grande ou plus petite de l'aire;
- **Pour les triangles**, l'existence d'une systématique quelconque dans le choix de valeurs numériques attribuées aux côtés des triangles (nous avons vu que, si le côté choisi pour être divisé par deux est le plus grand parmi les trois, on obtiendra la plus grande surestimation possible par la formule locale).

Dans cette partie du travail nous faisons essentiellement appel aux aspects numériques liés au calcul d'aire; ce qui nous importait alors était de comprendre comment les sujets manipulent les valeurs numériques pour calculer une aire. Bien entendu, l'existence d'une systématique dans l'attribution de valeurs aux côtés laisse penser qu'il existe des conceptions géométriques sous-jacentes qui peuvent orienter ce choix. Ainsi cette démarche avait aussi pour but de vérifier si le changement des valeurs numériques des côtés influençait le type de figure géométrique dessinée, et par conséquent la procédure utilisée; elle constituait le premier mode de la vérification de la coordination entre les aspects géométriques et numériques pour le calcul d'aire.

Pour les mêmes raisons que dans les exemples donnés par les sujets, nous n'avons pas proposé de contre-argumentation spécifique.

Les observations naturalistes et les entretiens individuels ont permis de classer, à partir d'informations récoltées auprès des sujets:

- *les connaissances mathématiques utilisées pour résoudre des problèmes liés aux activités de la canne à sucre ;*
- *les difficultés rencontrées par les sujets pour les résoudre;*
- *les problèmes typiques et les valeurs numériques les plus usitées;*
- *les procédures de résolution de problèmes employées, détectées au travers d'exemples donnés par les sujets, et d'exemples modifiés par le chercheur.*

4.2.2. Deuxième Phase

Cette phase s'est déroulée après l'analyse des données recueillies par les observations naturalistes et les entretiens. Elle a consisté à proposer des problèmes élaborés dans le but de clarifier certains points n'ayant pas été clarifiés lors de la première phase (voir guide d'entretien, ANNEXE II).

Pour ce faire, nous avons utilisé une méthode d'entretien construite sur des contre-argumentations. Ces entretiens de type clinique, tels que Piaget les a développés, ont été utilisés car nous pensons, comme Vergnaud (1981b) qu'il s'agit d'une méthode essentielle pour analyser les difficultés conceptuelles et les procédures par lesquelles les sujets traitent une situation donnée ; pour éprouver la solidité des conceptions des sujets (grâce à l'utilisation de la contradiction) et pour analyser l'évolution des procédures et des conceptions en situation.

Ces entretiens permettent de mieux faire la part entre les conduites vraiment significatives d'une conception, et les réponses anecdotiques. Ce type d'outil méthodologique est indispensable à ce stade de la recherche.

Dans la phase I, les aspects numériques du calcul d'aire avaient été privilégiés. La représentation, par le dessin des quadrilatères et des triangles n'avaient pas permis de conclure que les aspects géométriques du calcul d'aire avaient été pris en considération par les sujets.

Cela nous avait amené à introduire dans la phase II des figures géométriques de façon à observer la relation et le poids effectif des aspects numériques et géométriques. De manière à proposer des situations familières, les figures étaient présentées comme des terrains à mesurer.

D'une façon générale les problèmes isolés de calcul de surface prenaient la forme de différents quadrilatères et triangles dessinés sur du papier.

Pour les quadrilatères, deux carrés et deux losanges de même périmètre, et un rectangle et deux parallélogrammes dont les côtés étaient de valeur numérique identique, donc de même périmètre, étaient présentés. Nous demandions aux sujets de comparer et de calculer la surface des quadrilatères. Nous leur demandions également de trouver la valeur numérique du côté d'un carré dont la surface était deux fois celle d'un carré présenté précédemment.

Concernant les triangles, nous leur demandions simplement de calculer l'aire de deux triangles scalènes (rectangle et non rectangle).

Nous leur présentions également d'autres figures géométriques (carré, rectangle, cercle et triangle) de même périmètre, formées à partir d'une ficelle nouée. Dans ce cas, nous leur demandions simplement de comparer ces figures, qu'ils devaient considérer comme des terrains à travailler.

Comme nous le verrons par la suite, cette deuxième phase devait également nous permettre de vérifier la maîtrise du concept de mesure lorsque la demande de calcul n'apparaît pas isolée. Nous avons ainsi élaboré des problèmes contextualisés où le calcul de surface n'était parfois qu'une étape pour la résolution. Dans ce cas, les sujets devaient comprendre quelles étaient les opérations nécessaires à la résolution du problème, et non pas répondre simplement à une demande de calcul isolée. Ces problèmes étaient présentés sous forme d'énoncés différents ou semblables de ceux de la situation de travail des sujets. Le but était de vérifier leur capacité à généraliser.

Comme dans la première phase, les sujets ne disposaient pas d'outils de mesure. Ils ne pouvaient calculer les aires qu'à partir des longueurs des côtés, qui leur étaient données, et ceci parce que dans leur travail quotidien ils utilisent cette stratégie de calcul des surfaces. Cela pouvait également nous permettre de repérer des remarques particulières liées à la présentation de figures non familières.

Pour alimenter la contre-argumentation, nous utilisons un transparent quadrillé permettant une mesure directe de la surface des quadrilatères.

Toutes les contre-argumentations présentées faisaient référence aux contradictions du système "local" de mesure. Nous ne souhaitons pas introduire de notions scolaires étrangères aux sujets, car cela aurait pu rendre le dialogue impossible, à cause de leur méconnaissance de ce système.

4.2.2.1. Calcul, comparaison et duplication de surfaces quadrilatères

Les figures 4.2. et 4.3. représentent les quadrilatères utilisés dans cette situation.

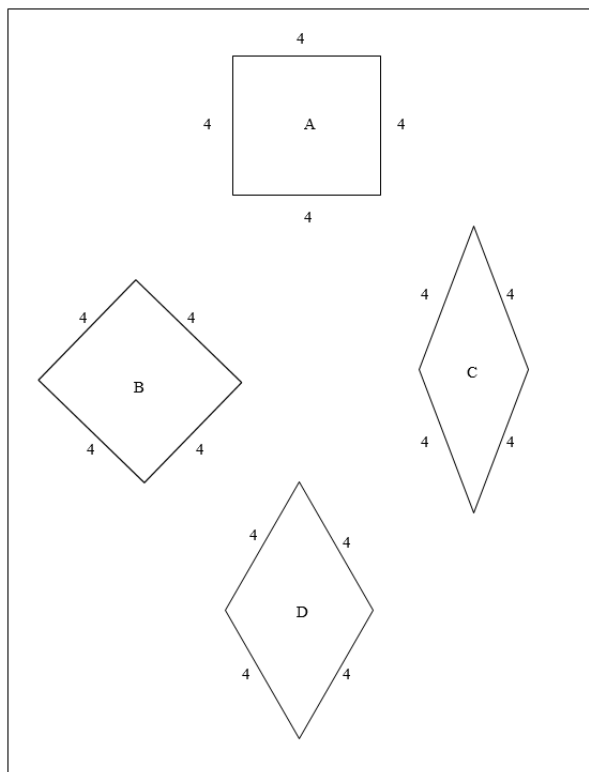


Figure 4-2. Quadrilatères présentés dans la deuxième phase de recueil des données

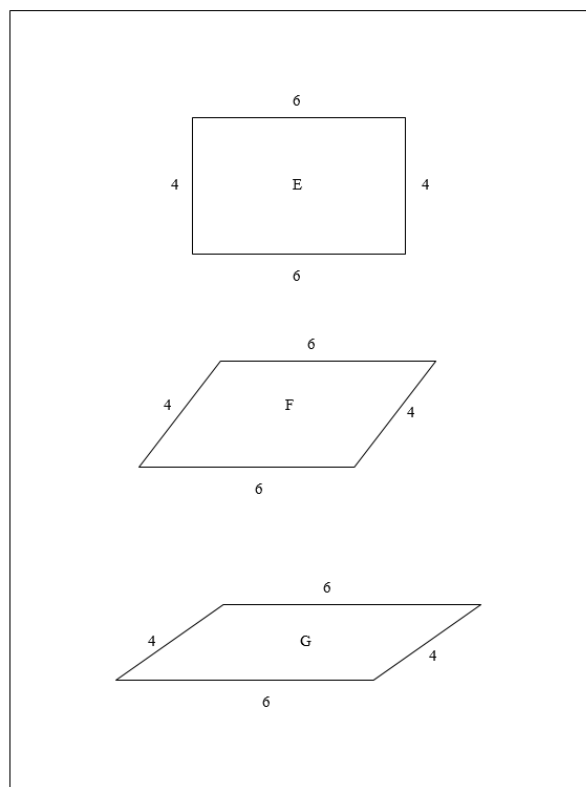


Figure 4-3. Quadrilatères présentés dans la deuxième phase de recueil des données

L'ordre de présentation des problèmes était:

- 1) calcul de l'aire de tous les quadrilatères;
- 2) comparaison des surfaces des carrés et des losanges entre eux et du rectangle avec les parallélogrammes;
- 3) présentation de nos contre-argumentations par utilisation du transparent quadrillé pour mesurer directement la surface¹⁴, et par utilisation d'une autre stratégie de calcul indirect pour tester la solidité de leurs conceptions (proposition pour faire les moyennes avec des côtés différents de ceux proposés par le sujet);
- 4) calcul du côté d'un carré dont l'aire est deux fois celle du carré A.

Le calcul d'aire était proposé avant la comparaison des surfaces, de manière à ne pas attirer prématurément l'attention des sujets sur cet aspect. Cet ordre devait permettre d'analyser l'évolution des procédures et des conceptions en situation. Nous n'intervenons qu'après le calcul d'aire de toutes les surfaces quadrilatères.

Observons les aires des figures calculées par les formules scolaires:

Carrés A et B : $S = c \times c$ (côté $\times$ côté) $\rightarrow S = 4 \times 4 = 16$ braças carrées

Losange C : $S = \frac{D \times d}{2} \rightarrow S = \frac{7,5 \times 2}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$ braças carrées

Losange D : $S = \frac{D \times d}{2} \rightarrow S = \frac{7 \times 3}{2} = \frac{21}{2} = 10,5$ braças carrées

(D et d sont respectivement la grande et la petite diagonale)

La formule classique régionale donnerait le résultat de 16 braças carrées d'aire pour les quatre figures.

Rectangle E : $S = c \times c$ (côté $\times$ côté) $\rightarrow S = 4 \times 6 = 24$ braças carrées (ici un des côtés est la base et l'autre la hauteur, ce qui correspond à la formule B * H)

Parallélogramme F : $S = B \times H \rightarrow S = 6 \times 3,5 = 21$ braças carrées

Parallélogramme G : $S = B \times H \rightarrow S = 6 \times 2 = 12$ braças carrées

¹⁴ Il faut observer le caractère approximatif de cette mesure quand les figures géométriques sont des losanges ou des parallélogrammes.

Avec la formule classique locale, on obtiendrait 24 braças carrées pour ces trois dernières figures. Observons que pour les losanges la notion de diagonale semble être absente dans la formule locale; pour les parallélogrammes, il s'agit de celle de hauteur.

La présentation de ces quadrilatères de même périmètre, mais de surfaces et d'aire différentes devaient nous permettre de repérer :

- si le concept d'aire et de périmètre étaient confondus¹⁵ ;
- si ceux de surface et périmètre étaient également confondus;
- si des stratégies nouvelles pouvaient apparaître au moment où nous proposons la figure géométrique;
- la nature des stratégies utilisées pour trouver la valeur numérique d'un côté du carré dont la surface est deux fois celle d'un des carrés présentés précédemment.

Nous recherchions également soit à déceler d'autres éléments indiquant des stratégies conduisant à la surestimation des surfaces, soit à confirmer les hypothèses que nous avons émises lors de l'analyse des données de la première phase.

4.2.2.2. Calcul de l'aire des quadrilatères

Avec le calcul d'aire, nous souhaitons également évaluer les conceptions bidimensionnelles des sujets. Pour cela ils devaient mettre en relation la surface présentée avec d'autres grandeurs spatiales (longueurs des côtés, angles), de façon à différencier et à intégrer les aspects géométriques et numériques. Chaque figure était présentée de façon isolée.

Nous posons comme hypothèse que l'introduction de la figure géométrique provoquerait des modifications dans le choix de la formule classique employée dans la première phase: d'autres stratégies pouvaient être évoquées et surface, aire et périmètre ne seraient plus alors confondus.

Enfin, cette situation-problème devait pouvoir nous donner des indices sur les aspects conceptuels (maîtrise des aspects bidimensionnels de la mesure de surface), et sur les aspects socioculturels (usage systématique des formules à cause de son caractère avantageux, par exemple)

¹⁵ Il faut noter que les valeurs numériques des côtés des carrés et des losanges ont été mal choisis. La valeur 4 pour les côtés implique que l'aire et le périmètre ont la même valeur. Les entretiens cliniques de type piagétien ont permis cependant de clarifier la procédure de résolution et ainsi si la valeur 16 correspond au périmètre ou à l'aire.

4.2.2.3. Comparaison des surfaces quadrilatères

Considérant qu'il existe une grande variété de compétences concernant la surface, nous cherchions également à repérer celles qui font appel à une conception unidimensionnelle (dans laquelle on prend en compte les relations des surfaces sans référence aux autres grandeurs spatiales). Dans cette situation-problème, où des surfaces devaient être comparées (éventuellement grâce à une mesure directe avec le quadrillage), nous ne faisons appel ni aux mesures des angles ni aux rapports de longueurs des côtés, même si les valeurs numériques des côtés étaient présentées.

Nous leur demandions entre autres choses de choisir le terrain (représenté par ces figures) grâce auquel ils allaient gagner le plus d'argent. Les raisons de leur choix étaient ensuite discutées. Nous posions l'hypothèse que cette conception unidimensionnelle, plus simple que la bidimensionnelle, serait acquise par la plupart des sujets. Bien entendu nous étions attentifs aussi aux variables socioculturelles susceptibles de jouer un rôle dans les réponses des sujets.

4.2.2.4. Duplication de la surface d'un carré

"Dans le dialogue du Menon, Socrate veut faire découvrir à un jeune esclave inculte le moyen de construire un carré dont l'aire est double de celle d'un carré donné ABCD. Le garçon répond d'abord qu'il suffit de doubler le côté, et Socrate lui montre que l'aire du nouveau carré serait non pas deux fois, mais quatre fois plus grande que celle de ABCD. Il l'amène alors à construire le carré A'B'C'D' dont le côté est égal à la diagonale de ABCD." (Rapporté par Dieudonné, 1987)

Cette situation, utilisée dans le cadre de démonstrations, nous semble suffisamment riche pour explorer d'autres aspects de la mesure de surface. Que cherchions-nous à étudier?

Nous demandions aux sujets de trouver la valeur numérique des côtés d'un carré dont l'aire était le double de celle du carré A (4×4). Il fallait donc doubler l'aire de ce carré, et calculer la valeur du côté du nouveau carré.

Cette demande n'était pas habituelle. En principe, les sujets connaissent les valeurs des côtés pour calculer l'aire. Ici, ils doivent calculer le côté, connaissant l'aire grâce à une "opération mathématique" inverse et en principe inconnue. Par cette démarche, nous souhaitions vérifier la

solidité de leurs conceptions bidimensionnelles, puisque l'application correcte des formules ne nous donnait pas cette assurance.

En outre, nous recherchions l'émergence d'une autre compétence à laquelle la mesure des surfaces peut faire appel: le calcul avec des nombres décimaux. Les questions relatives à l'approximation nous semblaient particulièrement importantes auprès de cette population en raison de l'absence de sous-multiples dans l'unité de mesure linéaire, ainsi qu'à cause de l'abandon quasi systématique des mesures décimales dans les calculs de la vie quotidienne. Les sujets arrondissent souvent ces nombres. Ainsi en introduisant le carré d'aire 32, nous voulions amener les sujets à rechercher une approximation décimale de la racine carrée de 32. Bien entendu, ces sujets n'ont aucune connaissance formelle de la racine carrée; nous voulions repérer les stratégies utilisées pour aborder ce problème, et intégrer cette compétence spécifique.

Concernant les quadrilatères, les sujets devaient mener deux types de travail opératoire: **qualitatif**, lors de la comparaison de l'étendue de deux surfaces (ici dénommées terrains) et **numérique** au moment de calculer l'aire des différents quadrilatères (mesure indirecte), de même que lors de la comparaison de leurs résultats aux résultats obtenus grâce à un transparent quadrillé (mesure directe), ainsi qu'au moment de trouver la valeur numérique du côté d'un carré deux fois plus grand qu'un carré donné dont on connaissait les valeurs numériques des côtés.

4.2.2.5. Les Triangles

Concernant les triangles, nous proposons aux sujets de calculer leur aire connaissant les valeurs numériques des côtés (mesure indirecte). Nous cherchions à faire appel aux conceptions bidimensionnelles des sujets, ainsi qu'à vérifier si les aspects géométriques et numériques étaient différenciés et intégrés.

Dans cette situation également, les figures géométriques étaient présentées comme des terrains dont il fallait calculer la surface. Les problèmes proposés avaient un contenu familier, même si les valeurs numériques attribuées aux côtés n'étaient pas communes aux situations de travail.

Elle devait nous permettre d'explorer:

- si la formule de calcul de surface apparue dans la première phase était maintenue;
- si les variantes éventuelles apparaissaient en fonction du type de triangle présenté (plus ou moins éloigné du triangle prototypique de 10 unités de longueur de côté);

- si la présentation d'une figure entraînait des différences dans les formules;
- des hypothèses sur les variables conceptuelles et socioculturelles impliquées dans l'éventuelle surestimation des surfaces.

Les figures 4.4. et 4.5. présentent les triangles proposés:

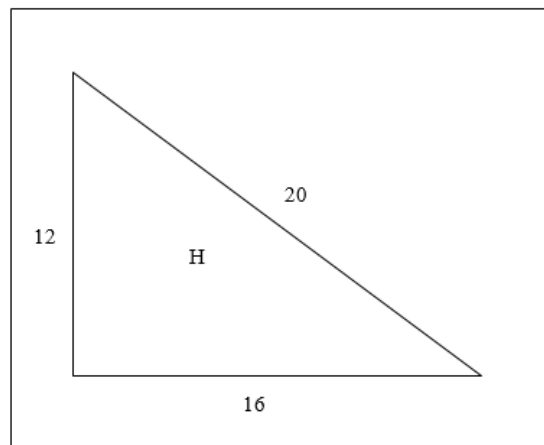


Figure 4-4. Triangle rectangle présenté dans la phase II du recueil de données

Observons les possibilités d'aire susceptibles d'être obtenues à travers l'usage de la formule "locale":

$$1) A = \frac{20+0}{2} \times \frac{12+16}{2} = 10 \times 14 = 140$$

$$2) A = \frac{16+0}{2} \times \frac{12+20}{2} = 8 \times 16 = 128$$

$$3) A = \frac{12+0}{2} \times \frac{16+20}{2} = 6 \times 18 = 108$$

La différence entre la plus grande et la plus petite surestimation est de 32 unités.

Notons l'aire obtenue à travers la formule correcte: $A = \frac{B \times H}{2} = \frac{16 \times 12}{2} = 96$ unités carrées

La différence entre l'aire obtenue par la formule correcte et la troisième possibilité de la formule locale est encore de 12 unités (108 - 96).

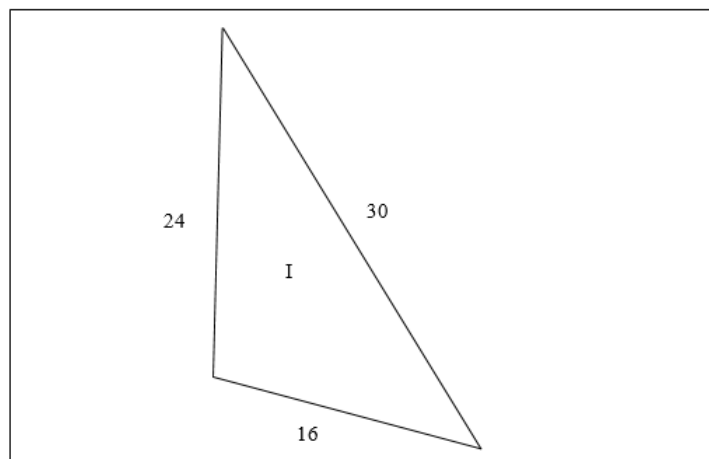


Figure 4-5. Triangle I

4.2.2.6. Figures géométriques différentes, de périmètre identique

Nous avons voulu vérifier, par l'intermédiaire d'une autre situation-problème, la solidité des conceptions unidimensionnelles des sujets. Nous leur avons proposé des figures géométriques différentes d'un quadrilatère, sans qu'aucune valeur numérique ne soit affichée. Les sujets devaient comparer les surfaces, sans faire appel aux mesures des angles ou aux rapports des côtés entre eux. Pour cela, nous utilisons une ficelle nouée pour former des figures géométriques différentes de même périmètre. (Vinh Bang et Lunzer, 1965). Nous avons construit ainsi un carré, un rectangle, un triangle ou un cercle et nous demandions, dans le cas où ces figures représenteraient des terrains à travailler:

- 1) celle qu'ils auraient préféré travailler;
- 2) celle qui leur permettrait de gagner le plus d'argent.

Par cette démarche, nous cherchions à vérifier si surface et périmètre étaient confondus, et à étudier de plus près les critères de comparaison des surfaces; ainsi que les critères de choix.

Bien entendu le mode de travail était *qualitatif*, puisqu'il s'agissait de comparer l'étendue de surfaces différentes sans information sur les mesures.

4.2.2.7. Problèmes complexes où le calcul des surfaces intervient dans la résolution

Il s'agit de problèmes, dans lesquels le calcul d'aire constitue parfois l'une des étapes. Ces problèmes de contenus plus ou moins familiers (voir tableau 4.5) impliquaient finalement un calcul de prix.

Problèmes de contenu familier	Problèmes de contenu non-familier
Un chef d'équipe, à la fin de la journée, a pesé trois faisceaux de canne pour calculer le salaire d'un ouvrier. Le premier faisceau pèse 10 kilos, le deuxième 12 kilos et le troisième 11 kilos. L'ouvrier a coupé 300 faisceaux. On paye cette canne 450 cruzeiros la tonne; combien l'ouvrier va-t-il recevoir?	Un paysan avait une bananeraie et vendait ses bananes au prix de 370 cruzeiros la tonne. Le paysan et le négociant qui voulaient acheter les bananes, se sont mis d'accord pour faire une moyenne de 3 paquets de bananes pour calculer le prix à payer. Les poids de trois paquets choisis étaient de 1; 3 et 2 Kg et il y avait 700 paquets. Combien a-t-il reçu du négociant ?
Un chef d'équipe avait déterminé qu'un coupeur de canne gagnerait le "salaire" pour une surface de 70 cubos (bras carrés). Il a mesuré le terrain qui avait comme côtés, 14; 20; 8 et 10 bras. Le salaire était de 370 cruzeiros. Combien le coupeur de canne allait-il toucher?	Une femme qui faisait des draps a décidé d'en faire avec des dentelles de points différents. Elle a fait une commande de morceaux de dentelles à une dentellière. Pour chaque carré de 70 cm de côté, la dentellière demandait 500 cruzeiros. Le drap mesurait 1,40 mètre de largeur par 2,10 de longueur. Combien la dame a-t-elle dépensé?

Tableau 4-5. Description des problèmes complexes présentés aux sujets

Analysons les notions impliquées dans chacun de ces problèmes:

4.2.2.8. Problème de la série I

Notions impliquées:

Contenu familier	Contenu non familier
a) moyenne de poids; b) multiplication des unités différentes: poids x quantité poids x prix	a) moyenne de poids; b) multiplication des unités différentes: poids x quantité poids x prix

Certaines évidences des observations naturalistes nous ont amenée à étudier la notion de moyenne chez ces sujets, d'une façon plus systématique. Le fait que la multiplication avec des unités différentes soit la source d'erreurs fréquentes dans les domaines scolaires nous a amenée à mener une investigation particulière autant dans des situations familières que dans des situations non familières. Nous avons cherché alors à identifier les procédures de résolution, ainsi que les obstacles épistémologiques les plus saillants.

4.2.2.9. Problème de la série II (calcul de prix)

Avec le problème de contenu non familier, nous voulions insister sur la maîtrise des notions de périmètre et de surface. Le problème de contenu familier était conçu plutôt pour contrôler l'usage d'une procédure observée dans la vie quotidienne, et qui consiste à calculer le salaire quand l'unité de surface prise comme base pour le salaire n'est pas la plus usuelle, et analyser les démarches utilisées quand le terrain à travailler est plus grand que cette unité.

Nous avons essayé de construire des situations-problèmes proches les unes des autres au niveau mathématique, de contenus cependant différents. Nous ne souhaitons pas nous plonger dans la question de l'isomorphisme des problèmes. Nous admettons que les problèmes de la série I sont plus proches au niveau de la structure mathématique, mais les valeurs numériques sont différentes. Avec les autres situations-problèmes, nous voulions également introduire des modifications au niveau mathématique, afin de clarifier certains points. Observons par exemple les problèmes de la série II:

Dans celui de contenu familier, nous avons donné l'aire de 70 cubos, qui représentait le salaire. Dans la situation-problème de contenu non familier nous avons utilisé la même valeur numérique, représentant maintenant la longueur des côtés d'un carré et non plus son aire. Des situations conflictuelles comme celles-là devraient être utilisées pour vérifier la maîtrise des notions d'aire, de longueur et de surface. Nous avons toujours contre-argumenté en fonction des réponses des sujets. Les contre-argumentations introduisaient toujours un doute sur leur façon de résoudre les problèmes, selon que cette façon était adaptée ou fausse. La présentation des problèmes était contrôlée. Étaient présentés au sujet n° 1 les problèmes familiers n° 1, n° 2, ensuite les non familiers n° 1, et n° 2. Le sujet suivant avait d'abord le problème familier n° 2 et ainsi de suite.

Nous recherchions d'une façon générale:

- 1) à analyser la portée et les limites des connaissances mathématiques développées en dehors du système scolaire;
- 2) à observer les démarches arithmétiques utilisées pour traiter des valeurs habituelles ou non habituelles;
- 3) à observer les raisonnements des sujets lorsque le choix des procédures dépend de l'interprétation d'un problème.

4.2.3. Troisième phase

Ces observations nous ont permis d'analyser des données complémentaires.

La phase I était exploratoire et ne permettait pas d'approfondir certains aspects conceptuels qui ont donc été repris pendant la phase II. Celle-ci comportait cependant plusieurs lacunes en ce qui concerne les aspects socioculturels. D'où la phase III.

Un point restait cependant obscur. Nous aurions compris que certaines sociétés maintiennent certaines procédures mathématiques fausses, si elles leur apportaient du profit. Nous avons pensé que si le système de calcul régional aboutissait à une perte pour l'usine, ce déficit devait apparaître dans le contrôle administratif et comptable. Si des signes de cette perte n'apparaissaient pas, il nous fallait repérer les éléments permettant une compensation éventuelle. Nous avons analysé cela en trois moments.

4.2.3.1. Quelques observations dans le bureau de l'usine

Ces observations nous ont permis d'examiner les conditions de contrôle du poids de la canne arrivée à l'usine, de manière à repérer les effets des pertes de l'usine dues aux calculs erronés des surfaces

4.2.3.2. Données recueillies auprès de la FETAPE¹⁶ : mesures publiées dans le Journal Officiel déterminant les normes de salaire par surface travaillée

Dans cette enquête nous avons voulu connaître d'autres conditions (plus officielles) concernant les pratiques de calculs de surfaces sur le terrain.

4.2.3.3. Sur les terrains de l'usine: comment les calculs d'aire sont-ils effectués? Réflexions sur quelques données

Pendant les phases précédentes, nous étions surtout dans des situations d'entretien individuel avec les sujets. Les observations naturalistes de la Phase I permettaient surtout de comprendre les caractéristiques les plus générales de la situation. Nous avons voulu analyser les stratégies de calcul de surface dans des situations réelles de travail

¹⁶ FETAPE : Fédération des Travailleurs de l'Agriculture de l'état de Pernambuco.

Chapitre 5 : Résultats de la Première Phase

Ce chapitre comprend dans un premier temps une brève analyse des rapports établis entre les sujets de la recherche et le chercheur, et décrit la nature des relations sociales prédominantes entre les divers membres de la communauté étudiée. Il tente ensuite, à travers quelques données spécifiques de la mesure de surface, et par des exemples de terrains quadrilatères et triangulaires (proposés par les sujets ou par le chercheur) de présenter une première analyse.

De manière générale, il vise à décrire et à interpréter certains phénomènes cognitifs particuliers aux travailleurs de la canne à sucre du Nordeste du Brésil.

Dans ces conditions, le chercheur peut être amené à émettre des hypothèses sur le sens de ce qui a été vécu au fil du temps passé auprès des sujets, à partir des données recueillies lors des entretiens, à partir des résultats aux problèmes proposés ou à travers les observations. La méthodologie utilisée mérite d'être commentée.

Seront donc abordés les points suivants:

5.1. Les sujets, le chercheur et l'usine ("les patrons");

5.2. les rapports entre les sujets de différents niveaux hiérarchiques;

5.3. les connaissances mathématiques:

5.3.1. la maîtrise du système de calcul des surfaces (quadrilatères et triangles) impliqué dans les activités de travail;

- les contradictions internes du système;
- l'utilisation de ces contradictions en fonction de la catégorie hiérarchique des sujets.

5.4. Quelques premières conclusions.

5.1. La chercheuse, les sujets et l'usine ("les patrons")

Leite Lopes (1978), dans un travail réalisé auprès d'ouvriers d'une usine sucrière, fait une remarque assez révélatrice de la problématique de ce type de recherche: ou l'on entre dans les territoires de l'usine sans l'accord de l'usinier et son administration, et l'on prend le risque de l'interruption de la recherche par l'interdiction du patron, ou l'on entre dans l'usine avec l'accord de l'usinier; mais alors comment obtenir des ouvriers la confiance nécessaire pour les entretiens avec un chercheur

identifié au patron? Il ajoute, triste compensation pour le chercheur, que ce dilemme initial de la recherche ne l'empêche pas de saisir quelques éléments de la nature des usines!

Les problèmes rencontrés pendant la recherche sont devenus partie intégrante d'elle-même. Les entretiens avec les "patrons" de l'usine, qui nous ont permis d'accéder aux sujets et donc de recueillir des données, ne peuvent être séparés des données elles-mêmes.

Il s'agissait d'accéder à la base de la hiérarchie complexe des usines sucrières du Nordeste, et d'assurer à la fois la qualité de nos données et la continuité de la recherche. Par sa nature, elle impliquait des allers-retours (étapes successives) et nécessitait de bons rapports à tous les niveaux hiérarchiques.

Par sa structure, elle est constituée d'un travail de terrain mené à trois moments différents, au cours desquels le chercheur a dû interférer avec les sujets sur la base de statuts différents:

- dans un premier temps, le chercheur était lui-même employé de l'usine, bien qu'identifié au patron;
- dans un deuxième, le chercheur est entré dans les plantations de canne -à sucre grâce à un membre de la communauté;
- Enfin le chercheur a pu accéder à l'usine par l'intermédiaire des "patrons", mais comme quelqu'un d'extérieur à l'usine.

Dans ce troisième moment, le chercheur a pu entrer dans l'usine au côté du patron, et a été donc identifié à "l'usinier". Les premiers entretiens portant sur la vision des ouvriers agricoles et des employés, de l'usine de leur vie, de leur travail, des conditions de santé et d'habitation, et de ce qu'ils pensent du patron ont bien mis en évidence cette méfiance.

Tous les ouvriers donnent des réponses stéréotypées sur l'usinier, du type: "on ne le voit pas, on ne peut pas dire!". En revanche, les employés, représentants du patron, et en contact direct avec les ouvriers ont reçu de ceux-ci des remarques souvent désagréables: "L'usinier, on ne sait pas, il n'est pas là tous les jours. Mais ceux qu'il met à sa place (les employés), ils veulent toujours nous rabaisser pour faire plaisir au patron ... ils ont oublié qu'ils viennent de la merde, comme nous!"

Cette attitude de méfiance initiale à notre égard a paru faire place progressivement à des comportements de confiance; nous étions alors reconnues comme personnes extérieures à l'usine et porteur d'un espoir: "on peut parler et dénoncer certaines choses", ont-il pu nous dire parfois.

Les sujets nous ont semblé marqués par leur solitude, dans un coin perdu, malgré la télévision unique, (dans l'un des villages), qui les relie au monde. Ils nous ont donné l'impression d'être des hommes, femmes et enfants en situation de survie, en attente d'un espoir presque oublié que "quelque chose" peut encore se passer, avec en outre le souvenir du silence imposé pendant les longues années de dictature militaire. Les sujets semblent infantilisés par le paternalisme d'un système qui dépose leurs espoirs chez un père distrait, qui ne les voit pas ou qui les oublie souvent: Dieu; l'usinier, le chercheur aussi bien.

5.2. Les rapports entre les sujets de l'échantillon de la recherche

Un des aspects le plus marquant de cette recherche reste la distinction nette, chargée de composantes affectives fortes, entre employés et ouvriers : les ouvriers sont des journaliers alors que les employés sont ceux qui ont un salaire fixe. Il existe une sorte de haine, pas toujours dissimulée, des ouvriers pour les employés, comme s'ils exprimaient leur révolte contre ceux qui, appartenant à leur classe, sont maintenant du côté du patron.

De la part des employés, et surtout du chef d'équipe, transparaît une sorte de fierté honteuse liée au poste occupé. Chargé de responsabilités, celui-ci touche en effet une paye presque similaire à celle de l'ouvrier, tout en travaillant un temps double, sans pouvoir donc augmenter son salaire.

L'analyse de Fromm (1963), dans "La Peur de la Liberté" sur le conflit des classes nous renvoie à ce phénomène: Il écrit: "Dans la lutte longue et continue pour la liberté, les classes qui luttent contre l'oppression à des moments déterminés, une fois obtenue la victoire, s'alignent aux côtés des ennemis de la liberté pour défendre les nouveaux privilèges."

L'analyse, même superficielle, de ces relations pourra être utile lors de l'interprétation de certaines procédures utilisées par ces sujets. Pour comprendre la dynamique du processus social, il est nécessaire de comprendre celle des processus psychologiques des individus, et réciproquement, pour bien comprendre ceux-ci, il faut les apprécier à la lumière de la culture qui les construit.

Ainsi, essayerons-nous de comprendre les processus cognitifs impliqués dans le calcul des surfaces chez ces sujets, en utilisant les données culturelles discutées antérieurement.

5.3. Les connaissances mathématiques des sujets

"... l'arithmétique peut bien être l'affaire des cités démocratiques, car elle enseigne les rapports d'égalité, mais la géométrie seule doit être enseignée dans les oligarchies puisqu'elle démontre les proportions dans l'inégalité." (principe grec cité par Michel Foucault dans L'ordre du discours, 1971)

La première partie de cette recherche avait pour but de permettre aux sujets de montrer ce qu'ils connaissaient des mathématiques en situation de travail. A partir d'exemples donnés par eux-mêmes dans des situations où ils devaient utiliser leurs connaissances mathématiques, le chercheur leur proposait certaines modifications des exemples donnés, de façon à voir les limites de ces connaissances.

5.3.1. Système de calcul d'aire impliqué dans des activités de travail.

Lors de cette phase, nous avons demandé aux sujets des exemples de terrains en formes de quadrilatères et de triangles, avec consigne de calculer leur aire. D'autres exemples ont été proposés ensuite, avec des données numériques différentes de celles proposées par les sujets. Dans les deux situations, le dessin du terrain, dont les valeurs des côtés étaient connues, a été demandé.

5.3.1.1. Quadrilatères

1) Exemples donnés par les sujets

Les types de quadrilatères proposés par les sujets selon leur catégorie se trouvent dans le Tableau 5.1.

Longueur des côtés ¹⁷	Ouvriers	Chefs d'équipe	Contrôleurs	Régisseurs	Total	%
10,10,10,10	12	1	-	-	13	30,9
10,10,20,20	5	-	-	1	6	14,3
10,10,15,15	4	-	-	-	4	9,5
10,10,12,12	3	-	-	-	3	7,1
10,10,6,6	2	-	-	-	2	4,8
10,10,5,5	2	-	-	-	2	4,8
10,10,7,7	1	-	-	-	1	2,3
10,10,8,8	1	-	-	-	1	2,3
10,10,9,9	1	-	-	-	1	2,3
10,10,11,12 *	-	1	-	-	1	2,3
10,10,25,25	1	-	-	-	1	2,3
12,12,8,8	-	-	1	-	1	2,3
13,13,7,8 *	-	-	1	-	1	2,3
40,40,90,90	-	-	1	-	1	2,3
20,20,15,15	-	-	-	1	1	2,3
15,15,14,12 *	1	-	-	-	1	2,3
20,20,20,20	1	-	-	-	1	2,3
15,15,8,8	1	-	-	-	1	2,3
Total	35	2	3	2	42	100,0

* *quadrilatères non-parallélogrammes*

Tableau 5-1. Types de quadrilatères proposés spontanément par catégorie de sujets

Remarquons d'abord certains points :

- Dix-huit quadrilatères, dont les côtés ont des valeurs différentes, ont été donnés comme exemples. Parmi eux, treize parallélogrammes, deux carrés et trois quadrilatères non-parallélogrammes. Dans ce cas, deux exemples ont été donnés par un chef d'équipe et un contrôleur respectivement et le troisième par un coupeur de canne. Nous n'avons pas trouvé de raisons particulières pour expliquer cela. (le coupeur de canne a trois ans d'école et sait signer et compter). Le même quadrilatère a été parfois évoqué plus d'une fois, par des sujets différents. On totalise ainsi quarante-deux quadrilatères.
- Tous les quadrilatères ont été dessinés comme des rectangles, quelles que soient les valeurs attribuées aux côtés;
- L'exemple le plus usuel, le carré équivalent à cent cubos (dix braças carrées, représente l'équivalent du salaire journalier, c'est-à-dire, la surface travaillée habituellement par un ouvrier

¹⁷ Unité de mesure linéaire : braça

dans la journée, pendant la récolte). Douze parmi quinze ouvriers interviewés ont proposé cet exemple (seul ou parmi d'autres). Un chef d'équipe a également donné ce type d'exemple. Au total treize des vingt et un sujets l'ont proposé. Il s'agit d'un stéréotype fort.

– Seuls deux coupeurs de canne sur quinze ont donné comme exemples de quadrilatère de côtés de valeur différente de 10 (l'un des deux a donné deux exemples de ce type; il s'agit d'un homme de cinquante-six ans qui est allé huit jours à l'école, ne sait ni lire ni écrire, mais qui se vante de savoir faire les calculs). Observons l'un de ces deux exemples:

Sujet: *un carré de quinze par huit ça fait Cent vingt;*

Chercheuse: *comment vous avez fait?*

Sujet: *facile, on fait dix fois huit, quatre-vingts et cinq fois huit, quarante. Cent vingt.*

Dialogue 5-1 Système de calcul d'aire impliqué dans des activités de travail

Aucun contrôleur ne donne d'exemple de côté 10 et, dans cette catégorie de sujets, sont apparues des valeurs plus élevées (40 par 90). Il faut noter que le sujet travaillait parfois avec ces valeurs.

Un des chefs d'équipe a donné l'exemple usuel "10 par 10" et l'autre un quadrilatère avec deux des côtés de valeur 10 et les deux autres différents, ce qui l'a conduit à travailler avec des nombres décimaux (le seul sujet à évoquer des décimaux et à réussir les calculs dans tout l'échantillon).

– Les seuls exemples impliquant un travail avec des décimaux ont donc été donnés par ce chef d'équipe, et par un contrôleur : les exemples ont donné lieu à des réussites par le premier mais pas par le deuxième, qui a abandonné la valeur 0,5. Observons leurs protocoles :

Sujet 1: (chef d'équipe) *10,10,11,12; ça fait onze et demi, multiplié par dix, cent quinze*

Chercheuse : *comment vous avez fait?*

Sujet : *ici on a dit onze et ici douze; on va dire onze et demi, par dix; cent quinze.*

Dialogue 5-2 Système de calcul d'aire impliqué dans des activités de travail

Sujet 2: (contrôleur) *13,13,7,8. Sept fois treize, ça fait quatre-vingt-onze*

Chercheuse : *pourquoi 7?*

Sujet: *ici, c'est vrai, c'est sept et demi, mais on ne compte pas*

Chercheuse : *pourquoi?*

Sujet: *ça complique; dans notre travail, on laisse toujours tomber*

Dialogue 5-3 Système de calcul d'aire impliqué dans des activités de travail

– Parmi les dix-huit exemples donnés, onze contiennent un côté de mesure 10. Cette valeur est citée dans trente-cinq des quarante-deux exemples donnés par les vingt et un sujets (83,3%).

- - Le deuxième exemple le plus usuel (six parmi vingt et un sujets, y compris un régisseur) est le quadrilatère 20 par 10, l'équivalent de deux contas;
- - Le troisième est 15 par 10 (quatre sujets), l'équivalent d'une conta et demie.

2) Stratégies de calcul d'aire pour des quadrilatères

- - La mémoire prototypique (au sens prêté au terme par Rosch, 1973 et 1975) est à l'évidence un facteur important dans l'évocation des quadrilatères et des valeurs numériques: les surfaces des carrés de côté égal à 10 sont bien connues des sujets, et constituent donc les exemples prototypiques les plus usuels. De même, les rectangles jouent un rôle prototypique par rapport à l'ensemble des quadrilatères.
- - La formule "régionale" pour le calcul de la surface des quadrilatères est la multiplication d'un côté par l'autre quand les côtés opposés ont les mêmes valeurs numériques, que ce quadrilatère soit ou non un rectangle;
- - quand les côtés opposés ont des valeurs différentes, (trois cas sur quarante-deux), la stratégie la plus courante est la multiplication de leurs moyennes, ce qui implique l'assimilation de cette stratégie à la précédente.

3) Exemples de quadrilatères proposés par la chercheure

Après les exemples proposés par les sujets, le chercheur donnait à son tour, des exemples de quadrilatères, dont les côtés avaient des valeurs différentes des exemples déjà donnés par les sujets. Ces valeurs étaient, en général, modifiées en fonction des exemples proposés par les sujets. Ce fait explique la diversité des valeurs numériques attribuées aux côtés.

Il s'agissait pour nous d'offrir une diversité d'exemples afin d'apprécier la généralité des procédures de résolution et la maîtrise du système de mesure et de calcul, adopté dans la région.

Ainsi, a-t-on donné des valeurs numériques très différentes, demandé de dessiner les quadrilatères correspondants, puis de calculer leur surface.(voir tableau 5.2.)

Longueur des côtés	Catégorie de sujets	Résumé de la stratégie de résolution
20,20,12,12	chef d'équipe: 1	$240.20*10=200; 20*2=40; 200+40=240$
20,20,25,25	chef d'équipe: 1	$500.20*25=500$
15,15,8,8	ouvriers: 3 contrôleur: 1	a) $120.8*5=40; 8*10=80.80+40=120$ b)refus: 2 ouvriers
15,15,10,10	contrôleur: 1	150. Une braça par 15 est égal a 150
35,35,5,5	régisseur: 1	$175.5*35$
8,8,6,6	ouvrier: 1	refus
8,8,13,13	ouvrier: 1	$10*8=80; 3*8=24.80+24=104$
8,8,5,5	ouvrier: 2	refus
8,8,10,10	ouvrier: 2	a) $80.8*10=80$.b)refus
7,7,10,10	ouvrier: 1	$70.7*10$
8,8,4,4	ouvrier: 1	refus
8,8,11,11	ouvrier: 1	90. On enlève 1 en bas ($11-1=10$) et on ajoute au 8; c'est comme $9*10$
8,8,7,7	ouvrier: 1	$3*8=24; 4*8=32; 32+24=56$ (erreur)
15,15,5,5	ouvrier: 1	$75.5*5=25; 10*5=50; 50+25=75$
9,9,7,7	ouvrier: 1	$63.7*9=63$
8,8,12,12	ouvrier: 1	$12+12=24$, la moitié est 12. $8+8=16$, la moitié, $8.8*12=96; (8*10=80; 2*8=16; 80+16=96)$
18,18,8,7	ouvrier: 1	22, attends, c'est 100... $117.8+7=15$, on fait 7 la moitié. $7*8=48$ (erreur); $7*10=70; 118$.
15,15,5,3	ouvrier: 1	60. $4*15; 5+3=8$, la moitié 4, on enlève une braça d'ici(5) et on la met en 3
13,13,8,9	ouvrier: 1	$13+13=26$, la moitié $13.8+9=17$; on fait par 8 parce que 0,5 on perd. $8*10=80; 3*8=24; 104$
13,13,4,2	ouvrier: 1	(transforme en 13,13,3,3 et calcule $10*5=50$)le 13 prête 2 au 3; ça fait 5 et reste 1; vers 50; $10*5$
16,16,5,3	ouvrier: 1	(transforme en 15,15,5,5) ça fait 100, parce que celui c'est pareil qu'un carré de 10
24,24,5,10	ouvrier: 1	$5+10=15$, la moitié c'est $7.7*24=$ $(7*20=140)+(7*4=28)=168$
7,7,5,3	contrôleur: 1	$28.5+3=8$, la moitié est 4 et on multiplie 4 par 7
11,15,17,13	chef d'équipe: 1	180. On multiplie 11 et 15,26, la moitié,13.13 et 17,30, la moitié, $15.15*13=(10*15)+(3*15)=195$
12,19,15,9	chef d'équipe: 1	$9+15=24$; la moitié est 12; $12*15=(10*15)+(2*15)=180$ plus la moitié de 15 que c'est 7,187.(en fait 186) $(15=31/2; 31=19+12)$
9,8,4,3	contrôleur: 1	17...8 et 4... $8*4=32.9+8=17$, on laisse comme 8(la moitié) et 4 et 3, on laisse comme 4
15,17,6,9	contrôleur: 1	$32,16(32=15+17); 15(6+9)$ la moitié c'est 7. On doit multiplier: $7*15=105$; par 16=112
22,27,13,19	régisseur: 1	$13+19=32$...ça fait 16(la moitié); $22+27=49,24$ la moitié(il commence a calculer $16*24$ et donne le résultat avant de finir)384
25,30,15,20	ouvrier: 1	refus
25,20,10,15	ouvrier: 1	$10+25=35$, la moitié c'est 17. Non, je ne sais pas faire (refus)
8,7,3,2	ouvrier: 1	$2*8=16$. Il faut être pair: 2 et 2;8 et 8

Tableau 5-2. Types de quadrilatères proposés aux sujets par la chercheuse et stratégies de résolution

Quelques points notables :

- En tout, trente et un quadrilatères, dont les côtés ont des valeurs numériques différentes, ont été présentés. Le même quadrilatère a été parfois évoqué plus d'une fois par des sujets différents :
 - seize de ces quadrilatères sont des parallélogrammes de dimensions diverses;
 - sept représentent des figures géométriques à deux côtés égaux, et dont les autres côtés sont de dimensions différentes;
 - huit quadrilatères représentent des formes géométriques dont les quatre côtés ont des dimensions différentes.
- La représentation par le dessin de tous ces quadrilatères a toujours été un rectangle, indépendamment de la valeur des côtés.

Observons que dans ce moment de la recherche, nous faisons appel essentiellement aux aspects numériques liés aux calculs d'aire. Cela justifie la non systématique du type de quadrilatères présentés (a,a,b,b ; a,a,b,c et a,b,c,d).

Des commentaires plus détaillés de quelques-unes des stratégies seront réalisés ultérieurement.

4) Stratégies de calcul d'aire des exemples modifiés

Avec les exemples modifiés, sont apparues non seulement quelques variantes des stratégies traditionnelles de mesure de surface; mais aussi :

- des erreurs de calcul;
- des réponses approchées;
- et des manifestations de refus (par incompétence déclarée).

La manipulation de chiffres non usuels a pu constituer un facteur déterminant. Citons pour preuve, la décomposition de valeurs non habituelles en quantités familières, employées d'habitude pour procéder à des calculs.

Par exemple, la multiplication par 10 et par 5 a été souvent utilisée.

- 15×8 devient: $8 \times 5 = 40$; $8 \times 10 = 80$ et $40 + 80 = 120$.
- Trois *erreurs de calcul numérique* ont été observées :

a) une addition: $32 + 24 = 51$

b) une multiplication: $7 \times 8 = 48$

c) une multiplication avec décimale: $12 \times 15,5 = 10 \times 15 = 150$; $2 \times 15 = 30$; "plus la moitié de 15, c'est 7; donc 187".

– Le *refus* par incompétence déclarée est apparu assez systématiquement chez les ouvriers, sept fois avec des parallélogrammes et deux fois avec d'autres quadrilatères (voir tableau 5.3.). Aucun refus n'a toutefois été observé lorsque l'exemple était donné par le sujet lui-même.

– Pour les parallélogrammes, la stratégie de calcul adoptée a toujours été celle de la multiplication des côtés opposés.

Cependant, une variante est apparue: celle du remplacement préalable d'un parallélogramme de mesures malaisées (8 par 11) par un autre, plus familier, de surface connue (9 par 10). Le sujet argumentait alors sur le caractère voisin des deux parallélogrammes.

– Pour les *quadrilatères non-parallélogrammes*, la stratégie générale consiste à calculer la surface en multipliant les moyennes des côtés opposés. Pour cela les sujets opèrent deux transformations illicites:

a) ils "transforment" ces figures en *parallélogrammes*, en prenant la moyenne des côtés opposés;

b) ils "transforment" ces *parallélogrammes* en rectangles ou en carrés, et cherchent en outre à obtenir au moins un côté de valeur 10 (pour se ramener à des surfaces connues).

c) éventuellement ils "transforment" directement la figure géométrique donnée en rectangle par compensation des valeurs des côtés. (voir tableau 5.3.)

Stratégie de résolution par figure géométrique	Exemples donnés par les sujets	Exemples proposés aux sujets	Total
<i>Carrés .</i>			
<i>Réponse automatique correspondant à la multiplication de deux côtés</i>	14	-	14
<i>Sous-total</i>	14	-	14
<i>Parallélogrammes</i>			
.Mesure de surface par multiplication des côtés opposés	25	14	39
.Transformation antérieure en rectangle plus familier par compensation des valeurs des côtés	-	-	1
.Refus	-	7	7
<i>Sous-total</i>	25	22	47
<i>Non parallélogrammes</i>			
Mesure de surface par multiplication des côtés opposés			
.Transformation explicite de ces figures en <i>parallélogrammes</i> , avec la moyenne des côtés opposés	3	10	13
.Transformation postérieure en un <i>parallélogrammes</i> plus familier par compensation des valeurs des côtés	-	2	2
.Transformation directe de la figure donnée en <i>parallélogrammes</i> par compensation des valeurs des côtés	-	1	1
.Refus			
<i>Sous-total</i>	3	15	18
TOTAL	42	37	79

Tableau 5-3. Stratégies de calcul des surfaces des quadrilatères par catégories

Ces pratiques nous conduisent à discuter la généralité de la méthode "régionale", qui n'apparaît pas ici totalement systématique.

5) Contradictions internes du système de Calcul régional

Analysons l'exemple suivant :

le quadrilatère (16,16,5,3) : La formule régionale donnerait comme résultat une surface de 16×4 ; 4 étant la moyenne de 3 et 5, la surface serait donc de **64** braças carrées. Observons ce qui se passe quand le sujet résout le problème avec une variante de cette formule: après avoir transformé ce quadrilatère en *parallélogramme* 16 par 4 (par la moyenne des côtés opposés), il affirme sa similitude avec le *parallélogramme* 15 par 5. Il dit: "le côté 16 prête 1 au côté 4". Dans ce cas, la surface devient alors de **75** braças carrés. Après cette transformation, le sujet affirme que le *parallélogramme* 15 par 5 est proche du carré 10 par 10 - "le côté 15 prête 5 au côté 5" - la surface du quadrilatère 16,16,5,3 devient alors, d'après le sujet, de **100** braças carrées. Si on observe la différence des surfaces proposées par les trois procédures, on peut se demander si cette différence des surfaces calculées 64, 75 et 100 est vraiment acceptable dans le travail au quotidien sur le terrain. Qu'en est-il des procédures de calcul des surfaces de terrains quadrilatères dont les quatre côtés sont différents ?

Dans ce cas, quel est le critère utilisé pour choisir les côtés susceptibles d'être additionnés entre eux pour en calculer la moyenne? Quelle est la différence réelle entre les surfaces ainsi calculées? À qui profite la différence? Est-elle liée à une catégorie de sujets, à leur niveau hiérarchique?

Rappelons que les valeurs ont été suggérées sans figure géométrique correspondante. Les sujets devaient dessiner les figures à notre demande, en attribuant leurs valeurs aux côtés; ils faisaient alors la moyenne des côtés opposés. Tous les dessins représentaient des rectangles, indépendamment de la valeur des côtés proposée.

Regardons de plus près le résultat des choix spontanés des côtés susceptibles d'être additionnés, et ses conséquences: (voir tableau 5.4.)

Quadrilatère*	Sujet	Stratégie choisie	stratégie possible 1	stratégie possible 2
11,15,17,13	chef d'équipe	11+15=26; 26/2=13 17+13=30; 30/2=15 13*15=195	15+17=32; 32/2=16 13+11=24; 24/2=12 16*12=192	13+15=28; 28/2=14 17+11=28; 28/2=14 14*14=196
12,19,15,9	chef d'équipe	15+9=24;24/2=12 19+12=31; 31/2=15 15*12=180;180+7 ("la moitié de 15)=187 erreur, en fait 186	15+19=34; 34/2=17 9+12=21; 21/2=10,5 17*10,5=178,5	15+12=27; 27/2=13,5 19+9=28; 28/2=14 13,5*14=189
9,8,4,3	contrôleur	9+8=17;17/2="8" 4+3=7;7/2="4" 8*4=32	9+4=13;13/2=6,5 8+3=11;11/2=5,5 6,5*5,5=35,7	9+3=12;12/2=6 8+4=12;12/2=6 6*6=36
15,17,6,9	contrôleur	15+17=32; 32/2=16 6+9=15;15/2="7" 7*16=112	15+6=21; 21/2=10,5 17+9=26;26/2=13 10,5*13=136,5	15+9=24;24/2=12 17+6=23; 23/2=11,5 12*11,5=138
22,27,13,19	régisseur	13+19=32; 32/2=16 22+27=49; 49/2=24 16*24=384	13+27=40; 40/2=20 22+19=41; 41/2=20,5 20*20,5=410	13+22=35; 35/2=17,5 19+27=46; 46/2=23 17,5*23=402,5
25,30,15,20	ouvrier	refus	-	-
25,20,10,15	ouvrier	10+25=35; 35/2=17,5 je ne sais pas. Refus 15+20=35; 35/2=17,5 17,5*17,5=306,2	10+20=30; 30/2=15 15+25=40; 40/2=20 20*15=300	10+15=25; 25/2=12 refus 20+25=45; 45/2=22,5 22,5*12= 270
8,7,3,2	ouvrier	transforma en 2,2,8,8 par compensation des côtés 2*8=16	a)8+7=15; 15/2=7,5 3+2=5;5/2=2,5 7,5*2,5=18,7 b)8+3=11; 11/2=5,5 7+2=9;9/2=4,5 5,5*4,5=24,7	c)8+2=10; 10/2=5 7+3=10;10/2=5 5*5=25

* L'ordre de présentation des valeurs numériques sur le tableau n'est pas celui présenté par le chercheur aux sujets. Ceux-ci dessinaient les figures et attribuaient les valeurs numériques aux côtés selon leur choix.

Tableau 5-4. Stratégies de calcul des surfaces des quadrilatères par catégorie

– Chez les ouvriers, on observe dans les 8 exemples proposés :

- Deux refus: le premier sans aucune tentative de résolution, et le deuxième avec un début de transformation du quadrilatère en parallélogramme par la somme des côtés opposés et leur division par 2. On observe que dans ce cas le choix des côtés additionnés conduit à la plus grande surface possible parmi tous les résultats envisageables.
- Un calcul de surface par transformation du quadrilatère de quatre côtés différents en un parallélogramme dont la surface calculée devient plus petite que celle obtenue par les autres variantes de calcul (c'est le seul cas d'ouvrier ayant choisi une stratégie amenant

à une plus petite surestimation de la surface, les autres ayant tous choisi des variantes conduisant à la plus grande surestimation).

- Chez les *chefs d'équipe*, les choix ont toujours penché dans le sens d'une surface de valeur intermédiaire (voir tableau 5.4);
- Chez les *contrôleurs* et les *régisseurs de zone*, enfin, leur choix les a toujours guidés vers un calcul de surface inférieur aux possibilités offertes par les différentes variantes (voir tableau 5.4.).

6) Utilisation des contradictions internes en fonction des intérêts particuliers à chaque catégorie de sujets

Malgré l'absence de données plus abondantes pouvant permettre une discussion approfondie de cette question, quelques hypothèses plus qu'anecdotiques méritent d'être émises. Elles sont liées au rapport existant entre le niveau hiérarchique et l'estimation de la surface des terrains. Les régisseurs et les contrôleurs (supérieurs dans la hiérarchie) choisissent les côtés qui conduisent à la surface la plus petite. Est-ce l'indice d'une conscience des résultats possibles et de leur rôle social, qui serait de protéger l'usine? Les chefs d'équipe, qui sont les représentants de l'usine en contact direct avec les ouvriers choisissent le calcul qui donne un résultat intermédiaire! Cette "coïncidence" est-elle due à une condition sociale, ou simplement au choix de valeurs plus simples qu'on additionne puisqu'on divise par deux?

Les données observées ne permettent pas de conclure que le choix de la stratégie employée soit conditionné par la recherche de la facilité par les sujets dans les opérations arithmétiques. Certaines variantes des stratégies de calcul, consistant en une transformation des quadrilatères non usuels en *parallélogrammes* connus aurait pourtant permis de repérer un indice confirmant cette hypothèse.

Un autre point attire notre attention: La variante consistant à modifier le *parallélogramme* par compensation des valeurs des côtés (stratégie non encore observée) est utilisée par trois sujets, tous ouvriers. Tous les cas de refus ont été constatés chez les ouvriers; ceux-ci ont tous donné des exemples de quadrilatères dont la surface était probablement connue. Ces informations peuvent conduire à l'hypothèse que cette stratégie est un moyen de transformer les calculs. Toutefois, rien n'empêche d'analyser ces résultats du point de vue de la surface obtenue.

Analysons par exemple les conséquences de certaines de ces stratégies:

- **Premier exemple:** le rectangle 11 par 8 proposé à un ouvrier. D'après la formule régionale, la surface de ce rectangle serait de 88 (multiplication des côtés opposés: 8×11). Le sujet

nous explique cependant que la surface de ce rectangle est de 90 parce que le rectangle est équivalent à un rectangle 9 par 10. Il explique: "le 1 du 11 peut aller vers le 8 et ça fait 10 × 9". Observons que la différence entre les deux surfaces est de 2 braças carrés en faveur de l'ouvrier.

- **Deuxième exemple:** le quadrilatère 13,13,4,2 proposé à un ouvrier. La formule régionale permettrait d'obtenir une surface de 39 braças carrées de surface: $13 \times 3=39$ où 3 est la moyenne des côtés 4 et 2. Le sujet trouve une surface d'environ 50" en disant qu'après avoir transformé le quadrilatère d'origine en rectangle 13 par 3, "c'est pareil qu'un rectangle 10 et 5; le 13 prête 2 au côté 3; ça fait 5; il reste 1 (des 11); mais ça fait vers 50". Ici voyons-nous apparaître une réponse approchée qui surestime également la surface de 11 braças carrés.
- **Troisième exemple:** nous reprenons ici le quadrilatère 16,16,5,3 proposé à un ouvrier et déjà discuté antérieurement. La formule régionale permettrait d'obtenir une surface de 64 braças carrés, c'est-à-dire $16 \times 4=64$; où 4 est la moyenne des côtés 5 et 3. Le sujet, après avoir transformé le quadrilatère donné en rectangle 16 par 4 à travers la procédure régionale, le transforme encore en rectangle 15 par 5, en disant "c'est pareil que 10 par 10, le côté 15 prête 5 au côté 5". Ainsi transforme-t-il encore le rectangle 15 par 5 en carré de côté 10. Reprenons le calcul des surfaces des trois quadrilatères évoqués par le sujet :

$$a) 16,16,4,4. 16 \times 4=64$$

$$b) 15,15,5,5. 15 \times 5=75$$

$$c) 10,10,10,10. 10 \times 10=100$$

La différence en faveur de l'ouvrier est de 36 braças carrés

- **Quatrième exemple:** Le quadrilatère 8,7,3,2. proposé à un ouvrier. Cet exemple a déjà été évoqué lors de l'analyse des quadrilatères dont les quatre côtés étaient différents. En fait, le sujet transforme ce quadrilatère en rectangle 2 par 8 en argumentant qu'il faut que les côtés soient pairs. La surface est beaucoup plus petite que celle qu'on pourrait obtenir par d'autres stratégies. Cet exemple est le seul exemple chez les ouvriers qui conduit à la surface la plus petite. Tous les autres montrent des variantes conduisent à des surfaces plus grandes. Cet exemple nous incite ainsi à la prudence dans ce qui concerne une interprétation précipitée des résultats.

Nous observons que sur cinq exemples de stratégies de calcul des surfaces (y compris celle du simple choix des côtés à additionner lorsqu'il y a 4 côtés différents), quatre aboutissent à augmenter la surface des quadrilatères donnés.

Quelles suppositions pouvons-nous émettre ?

- ces stratégies sont-elles l'indice de la non-systématisation des procédures de la vie quotidienne, ou au contraire l'indice d'une maîtrise "inconsciente" du système de calcul et des tentatives de le manipuler?
- ces stratégies sont-elles simplement socioculturelles?
 - a) survivre à la misère (en surestimant la surface pour gagner plus, de la part des ouvriers)?
 - b) éviter le chômage et conserver leur emploi dans l'usine orientant les contrôleurs ou les régisseurs à sous-estimer la surface des terrains?
 - c) trouver un équilibre entre les fonctions de représentant du patron et d'appartenance à la classe des ouvriers en contact direct avec eux pour les chefs d'équipe en choisissant la surface intermédiaire parmi les possibles?
- ou plus simplement conceptuelles?
 - a) pour traiter des figures non rectangulaires;
 - b) parce que les sujets raisonnent sur la compensation des surfaces de la même façon que sur la compensation des dimensions périmétriques, c'est-à-dire par compensation additive.

Nous ne nous pouvons pas nous permettre de donner une réponse à ces questions, mais l'analyse d'autres données pourrait les clarifier ultérieurement. Le choix de l'une ou l'autre de ces interprétations est en effet difficile, puisque l'existence de multiples variables modifie l'interprétation des observations recueillies. Ce point fera l'objet d'un développement ultérieur.

5.3.1.2. Triangles

1) Exemples donnés par les sujets

- Sept triangles, dont les côtés ont des valeurs données par les sujets ; parmi ceux-ci, un triangle équilatéral (évoqué seize fois), cinq triangles isocèles, et un dernier impossible (20,20,80)¹⁸ .

¹⁸ un des côtés est plus grand que la somme des deux autres

- Des vingt-deux exemples donnés par les sujets, seize sont des triangles équilatéraux 10,10,10 (voir tableau 5.5.). Dix ouvriers parmi quinze ont donné cet exemple et, de fait, tous les employés ont choisi ce seul exemple.
- Les cinq autres exemples sont des triangles isocèles, donnés également par les ouvriers.

Longueur des côtés	Catégorie de sujets	Stratégie de résolution
10,10,15	ouvrier: 1	refus
5,5,6	ouvrier: 1	refus
7,7,10	ouvrier: 1	10 ici, ça devient 5 parce qu'en haut c'est 0.(angle opposé au côté 10) Alors, $7*5=35$.
15,15,20	ouvrier: 1	20, on divise; parce que là c'est 0 (angle opposé au côté 20)10 ici, 10 ici; $10*15=150$
20,20,80*	ouvrier: 1	on divise, la moitié, c'est $40*20=800$
20,20,10	ouvrier: 1	c'est $100.20+20=40$. Non, c'est 200; attends, un triangle, le côté 0, $10/2=5; 5*20=100.100$.
10,10,10	ouvriers: 10 chefs d'équipe: 2 contrôleurs 2 régisseurs: 2	a) $50.5*10=50$ - 7 ouvriers du village A; 2 chefs d'équipe; 2 contrôleurs; 2 régisseurs b) 50, parce qu'on sait; parce que le chef d'équipe a dit - 3 ouvriers du village B.

* triangle inexistant

Tableau 5-5. Types de triangles proposés par catégorie de sujets et stratégies de résolution

2) Stratégies de calcul d'aire des triangles

Triangle équilatéral 10,10,10

- L'activation de la mémoire prototypique semble être la raison principale du choix du triangle 10,10,10. Seuls trois sujets parmi 16, ont donné la réponse "correcte" sans expliquer leur procédure de résolution. Ils proposaient comme justificatif des réponses du type: "parce qu'on sait ..." (tableau 5.5.)
- La procédure explicitée était la suivante :
 - diviser un des côtés du triangle par 2, en considérant que l'angle opposé représente un côté de valeur 0; la division par 2 correspond à la moyenne des côtés (à partir d'un triangle dessiné, apparemment équilatéral);
 - dessiner le rectangle 5,5,10,10;
 - multiplier les côtés 5 et 10.

Triangles isocèles

- Deux refus chez les ouvriers (tous les deux analphabètes) sont apparus pour les triangles 10,10,15 et 5,5,6. On peut penser que le refus est davantage dû à la méconnaissance des procédures régionales de mesure de surface qu'aux calculs réalisés, puisque les valeurs sont relativement faciles à manipuler.
- Les trois autres exemples, donnés aussi par des ouvriers, sont tous traités comme des rectangles, après transformation préalable selon la procédure déjà mentionnée. Le côté choisi, pour être divisé par 2, est celui dont la valeur numérique est différente des deux autres. Cela induit une surestimation plus importante de la surface.
- Le triangle 20,20,80, proposé par un ouvrier analphabète, est traité comme un véritable triangle, malgré l'impossibilité de sa construction.
- La seule stratégie apparue est celle du calcul de la surface par multiplication de la moyenne des côtés opposés des rectangles, et par la transformation explicite (avec des dessins) des triangles en rectangles (voir tableau 5.7. pour comparaison avec les exemples proposés aux sujets).

3) Exemples proposés de triangles par la chercheure

Quinze triangles de côtés différents ont été proposés comme exemples aux sujets, quatre d'entre eux plus d'une fois. Trois de ces triangles étaient isocèles et neuf scalènes. Trois ne pouvaient être représentés puisque l'un des côtés était égal à ou plus grand que la somme des deux autres. Le tableau 5.6. contient ces exemples, ainsi qu'un résumé des stratégies de résolution mises en œuvre.

longueur des côtés	catégorie de sujets	stratégie de résolution
9,7,8	chef d'équipe: 1 - stratégie a ouvriers: 3	a)on fait un triangle, 8 de chaque côté; après un "carré":4,4,8,8. Alors 32 b)on enlève d'ici(8) et on met là(9).Et ça fait 7,7,10. Moitié de 10 est 5 fois 7...10*5=50, on enlève 3, ça fait 32 et quelque c)9+8=17; la moitié c'est 8, on perd 0,5.8*3=24 d)24 braças. Ici c'est 7, on fait 3; on perd 0,5 et ici on prend 8.8*3=24
15,8,9	ouvriers: 3	a)refus: 2 b)on fait 7*9 parce que 15 signifie que c'est 7 en bas, 7 en haut. 7*9=63. On fait semblant que 15 ça fait 14. Alors de 15 reste 1 qu'on mets ici (8);alors ça fait 9,9,7,7.
8,8,12	ouvriers: 3	a)refus: 2 b)la moitié c'est 6.6*8...5*8...5*10. Je fais et après j'enlève: 6*10=60; j'enlève 12(6*2);48.
10,10,8	ouvriers: 2	a)4*10=40 b)refus
13,12,10	ouvrier: 1	a)je mettrais les 3(du côté de longueur 13) avec les 2 (le 2 de 12); alors ça serait aussi 75 (référence à un autre triangle de côtés 15,10,10)
10,10,15	ouvrier: 1	a)75 braças; Si c'était 10,10,10, ça serait 50; si on mets plus 5 ici (15) ça fait 2,5 ici (en bas) et 2,5 ici(en haut); multiplié par 10 est égale 25+50=75
8,5,12	ouvrier: 1	a)8+5=13; la moitié c'est 6; ici c'est 12, la moitié c'est 6 aussi. On multiplie 6*6=36
8,5,10	ouvrier: 1	a)8+5=13; la moitié c'est 6,5; ça fait 30 (6*5) parce que lui (chef d'équipe) ne multiplie pas 0,5. Le 10 doit prêter au côté du haut parce qu'il est mort.
9,15,7	chef d'équipe: 1	a)9+15=24; la moitié c'est 12. Alors 7, je multiplie:3*12=36. Il manque le demi(7/2=3,5; il prend 3)0,5*12=6; ça fait 42
7,6,9	contrôleur: 1	a)9+7=16; la moitié c'est 8 et 8*3=24 (3=6/2)
13,17,20	contrôleur: 1	a)150.13+17=30, la moitié est 15; la moitié de 20 est 10; ça fait 150.
9,14,18	contrôleur: 1	a)on abandonne le côté plus grand (18).Pour tous les triangles le côté plus grand est perdu; on multiplie les deux petits: 9*14=136
8,4,20*	régisseur: 1	a)on prend le 20; la moitié c'est 10; alors 12 (8+4);la moitié c'est 6.6*10=60
8,23,15*	régisseur: 1	a)15;23+8...on fait par ces deux-là. On abandonne la partie plus grande (23) (il multiplie par écrit 8*75; il semble que 75 c'est 7,5, la moitié de 15. Il trouve 604 comme résultat) Alors ça fait vers 60
9,22,45*	régisseur: 1	a)on multiplie 22*9 et on abandonne le plus grand (il fait la multiplication par écrit et trouve 198)

*Ces triangles ne peuvent pas exister

Tableau 5-6. Types de triangles proposés aux sujets par le chercheur et stratégies de résolution

4) Stratégies de calcul d'aire des triangles

Apparaissent alors des stratégies de résolution de calcul des surfaces non encore explicitées par les sujets (voir tableau 5.7. pour comparer avec les exemples donnés par les sujets) :

- On observe évidemment la stratégie classique dans la région, c'est-à-dire la multiplication de la moyenne des côtés opposés en ramenant le triangle à un rectangle, mais on observe aussi:
- l'abandon du côté le plus grand du triangle, et la multiplication des deux autres côtés, et aussi

– l'abandon du côté le plus grand et la multiplication du plus petit par la moitié du côté intermédiaire (tableau 5.6. et 5.7.).

Il faut noter que cette dernière stratégie a été employée deux fois sur trois pour les triangles qui ne pouvaient pas être construits. C'est le même sujet (un régisseur) qui utilise deux fois cette stratégie.

La stratégie visant à abandonner le côté plus grand et à multiplier les deux autres a été employée par un contrôleur pour le triangle scalène 9,14,18.

Toutefois, on doit remarquer que ces mêmes sujets ont employé la formule classique locale pour le triangle équilatéral de côtés 10, qu'ils ont donné comme exemple.

Nous pouvons évoquer l'hypothèse que ces triangles particuliers ont activé des schèmes différents chez ces sujets.

Pour quelles raisons ces stratégies ne sont-elles apparues que dans cette situation? Les valeurs attribuées aux côtés ont-elles joué un rôle? Sont-elles un indice que ces valeurs représentaient pour les sujets des triangles très éloignés du prototype (10,10,10) et pour cela l'emploi de la formule classique serait inadapté ? Observons dans le tableau 5.7. les stratégies utilisées dans les deux situations.

Stratégies de résolution	exemples donnés par les sujets	exemples proposés aux sujets	TOTAL
Mesure de surface par multiplication de la moyenne des côtés opposés de rectangles :			
• Transformation explicite de triangles en rectangles	20	11	31
• Transformation préalable des triangles scalènes en triangles isocèles ou équilatéraux, par "compensation" des valeurs des côtés	0	4	4
SOUS-TOTAL	20	15	35
Abandon du côté plus grand et multiplication des deux autres côtés	0	2	2
Abandon du côté plus grand et multiplication du plus petit par la moitié du côté intermédiaire	0	1	1
SOUS-TOTAL	0	3	3
Refus	2	5	7
TOTAL	22	23	45

Tableau 5-7. Stratégies de calcul de surfaces triangulaires chez les exploitants de canne à sucre du Nordeste du Brésil

Les triangles donnés comme exemples avaient en général des côtés de valeurs connues par les sujets, ou de surfaces usuelles. Il nous semble qu'à partir du moment où les valeurs s'éloignent de celles traitées habituellement, les sujets cherchent éventuellement d'autres solutions. La formule traditionnelle employée pour les surfaces triangulaires conduit à des erreurs parfois non négligeables: Il faut cependant remarquer que ces "nouvelles" stratégies ne sont apparues que trois fois, chez un régisseur et chez un contrôleur.

Essayons de voir si le choix du côté divisé par deux présente un caractère systématique ou non (voir tableau 5.8.).

5) La systématique du choix du côté susceptible d'être divisé par 2

On observe une nette préférence pour le côté le plus grand (12), pour le côté situé en bas (14), et pour les côtés de valeur numérique paire (12). Il en résulte une nette préférence pour le côté plus grand, pair et situé en bas. Nous pouvons penser que le choix du côté pair peut être dû à une facilitation de la division par deux. On ne peut pas pour l'instant, avec ces seules données, émettre des hypothèses sur les raisons du choix du côté situé en bas et de celui de plus grande longueur. Rappelons que ce sont les sujets qui attribuent les valeurs numériques aux triangles qu'ils dessinent. Cela peut induire le côté situé en bas pris comme base. En ce qui concerne les triangles isocèles, observons cependant que le côté choisi pour être divisé par deux est toujours le côté différent, même quand il est impair. Observons cela dans le tableau 5.9.

Côté choisi			Exemples donnés par les sujets	Exemples proposés aux sujets	Total
Plus grand	en bas	Pair	3	7	10
		Impair	0	1	1
	oblique	Pair	0		
		Impair	0	1	1
SOUS-TOTAL			3	9	12
Intermédiaire	oblique	Impair	0	1	1
Plus petit	en bas	Pair	0	1	1
		Impair	0	2	2
	oblique	Pair	1	0	1
		Impair	0	2	2
SOUS-TOTAL			1	5	6
TOTAL			4	15*	19

* Des vingt-trois exemples de triangles non équilatéraux proposés aux sujets, il y a eu cinq refus, un triangle scalène qui a été transformé en triangle équilatéral et deux exemples où il y a eu une simple multiplication de deux côtés.

Tableau 5-8. Choix du côté divisé par 2 pour les triangles non équilatéraux

Côté choisi/ <i>Type de Triangle</i>		Côté différent de deux autres	Côté pair	Côté impair	TOTAL
Exemples donnés par les sujets	<i>Isocèles</i>	4	4	0	4
Exemples proposés par le chercheur	<i>Isocèles</i>	3	2	1	3
	<i>scalène transformé en isocèle</i>	3	2	1	3

Tableau 5-9. Choix du côté divisé par deux pour les triangles isocèles

Observons que dans la totalité des exemples donnés par les sujets, le côté choisi pour être divisé par deux est pair et différent des deux autres. Pour les triangles isocèles proposés par le chercheur, ou les triangles scalènes également proposés par le chercheur et transformés par les sujets en triangles isocèles, le côté différent est celui choisi pour être divisé par deux, dont 4 sur les 6 côtés choisis pairs. Observons les triangles isocèles dont les côtés choisis pour être divisés par deux sont impairs. Triangle 10,10,15. Le sujet nous explique sa procédure de résolution :

Sujet (ouvrier) : ça fait 75 braças. Si c'était 10,10,10 ça serais 50; si on met plus 5 ici (15) ça fait 2,5 ici (en bas) et 2,5 ici (en haut); multiplié par 10 est égale 25 plus 50, 75.

Dialogue 5-4 Choix du côté...

Il nous semble, dans ce cas, que le choix du côté impair est dû à une possibilité de ramener le calcul à celui du triangle connu de côtés 10 et à une multiplication par 10.

L'autre exemple de choix de côté impair pour être divisé par deux est le triangle scalène 13,12,10 transformé en triangle isocèle 15,10,10. Observons l'explication du sujet.

Sujet (ouvrier) : je mettrais les 3 (du côté de longueur 13) avec les 2 (le 2 du côté 12); alors ça serait aussi 75 (référence au triangle antérieur 10,10,15).

Dialogue 5-5 Choix du côté...

Cela rend plausible l'hypothèse que le côté choisi pour être divisé par 2 est de préférence celui de valeur numérique paire. Ces deux exemples présentent des indices de facilitation de calcul. Nous observons également la recherche d'une multiplication par dix. Analysons plus en détail, maintenant, ce choix lors de la présentation de triangles scalènes traités comme tels. Parmi les 9

triangles ainsi considérés, 5 ont le côté pair choisi pour être divisé par 2, et 4 le côté impair. Le tableau 5.10. présente ces données.

Triangles	Côté pair	Côté impair	Total
9,7,8	0	2	2
8,5,12	1	0	1
8,5,10	1	0	1
9,15,7	0	1	1
7,6,9	1	0	1
13,17,20	1	0	1
8,4,20	1	0	1
8,23,15	0	1	1
Total	5	4	9

Tableau 5-10. Choix du côté divisé par deux pour les triangles scalènes

Il n'apparaît pas une tendance claire pour le choix du côté du triangle susceptible d'être divisé par deux. Les triangles 8,4,20 et 9,15,7 sont évidemment exclus de cette analyse, puisque leurs côtés sont tous pairs ou tous impairs. Il ne s'agit donc pas d'un choix du sujet.

Il faut pourtant observer que la stratégie employée pour le triangle 8,23,15, tout en étant très particulière, puisque ce triangle est impossible. Elle est probablement induite par les valeurs numériques proposées. C'est à notre avis la condition qui détermine le choix de ce côté (qui est aussi le côté intermédiaire) susceptible d'être divisé par 2.

Nous ne trouvons pas cependant de raisons particulières pour le choix du côté 7 (opéré par deux sujets) dans le triangle 9,7,8. Si nous pensions à une plus grande facilité de calculs, le côté pair (8) devrait être celui choisi. Nous observons pourtant que les sujets ne cherchent pas à éviter un travail avec des décimaux ... puisqu'ils les abandonnent lors de calculs.

Nous ne pouvons pas aller plus loin dans nos interprétations concernant ces premières données.

Nous avons déjà vu que le choix du côté susceptible d'être divisé par deux détermine à lui seul une plus grande, ou une plus petite surestimation de la surface lorsque la formule classique régionale est utilisée. Lorsque les trois côtés sont différents, on obtient trois résultats possibles, auxquels peuvent se rajouter éventuellement les résultats générés par les stratégies liées aux variantes de cette formule. Le tableau 5.11. présente la valeur de la surface obtenue selon chaque stratégie.

Triangles	Sujet	Stratégie choisie	Stratégie possible 1	Stratégie possible 2	Stratégie possible 3
9,22,45 *	régisieur	22*9=198 abandon du côté plus grand	45/2=22,5 ; 22+9=31; 31/2=15,5 22,5*15,5=348,8	22/2=11; 9+45=54;54/2=27 11*27=297	9/2=4,5;22+45=67; 67/2=33,5 4,5*33,5=150,7
8,23,15 *	régisieur	8*75(75=7,5 la moitié de 15)abandon du côté le plus grand. réponse: vers 60	23/2=11,5;15+8=23; 23/2=11,5; 11,5*11,5=132,2	15/2=7,5;23+8=31 31/2=15,5 7,5*15,5=116,2	8/2=4;23+15=38; 38/2=19;19*4=76
8,4,20 *	régisieur	20/2=10;8+4=12; 12/2=6;6*10=60	8/2=4;20+4=24; 24/2=12;12*4=48	4/2=28+20=28; 28/2=14;14*2=28	
9,14,18	contrôleur	9*14=136; abandon du côté plus grand (erreur de calcul, 136 à la place de 126)	18/2=9;14+9=23; 23/2=11,5, 11,5*9=103,5	14/2=7;9+18=27; 27/2=13,5; 7*13,5=94,5	9/2=4,5;14+18=32; 32/2=16; 16*4,5=72
13,17,20	contrôleur	13+17=30;30/2=15 20/2=10; 15*10=150	17/2=8,5;13+20=33; 33/2=16,5; 16,5*8,5=140,2	13/2=6,5;17+20=37; 37/2=18,5; 18,5*6,5=120,2	
7,6,9	contrôleur	9+7=16;16/2=8; 6/2=3;3*8=24	9+6=15;15/2=7,5; 7/2=3,5;7,5*3,5=26,2	9/2=4,5;7+6=13; 13/2=6,5; 4,5*6,5=29,2	
9,15,7	chef d'équipe	9+15=24;24/2=12; 7/2=3,5;3*12=36; 0,5*12=6;36+6=42	9+7=16;16/2=8; 15/2=7,5; 7,5*8=60	15+7=22;22/2=11; 9/2=4,5; 11*4,5=49,5	
9,7,8	chef d'équipe	a) transforme en 8,8,8, b)8/2=4;c)8+8=16, 16/2=8;d)8*4=32	9/2=4,5; 8+7=15;15/2=7,5; 4,5*7,5=33,7	8/2=4; 7+9=16;16/2=8; 8*4=32	7/2=3,5; 9+8=17;17/2=8,5; 3,5*8,5=29,7
9,7,8	ouvrier	a)transforme en 7,7,10;b)10/2=5 c)5*7=32 et quelque	9/2=4,5; 8+7=15;15/2=7,5; 4,5*7,5=33,7	8/2=4; 7+9=16;16/2=8; 8*4=32	7/2=3,5; 9+8=17;17/2=8,5; 3,5*8,5=29,7
9,7,8	ouvrier	9+8=17;17/2=8; 7/2=3;3*8=24	9/2=4,5;8+7=15; 15/2=7,5; 4,5*7,5=33,7	8/2=4;7+9=16; 16/2=8;8*4=32	son stratégie avec le 0,58,5*3,5=29,7
9,7,8	ouvrier	7/2=3 8+9=17;17/2=8; 8*3=24	9/2=4,5; 8+7=15;15/2=7,5; 4,5*7,5=33,7	8/2=4; 7+9=16;16/2=8; 8*4=32	son stratégie avec le 0,5 8,5*3,5=29,7
15,8,9	3 ouvriers dont 2 refus	a)transforme en 9,9,14 b)14/2=7; c)7*9=63	15/2=7,5; 8+9=17;17/2=8,5; 8,5*7,5=63,8	9/2=4,5;8+15=23; 23/2=11,5; 4,5*11,5=51,8	8/2=4;15+9=24; 24/2=12; 12*4=48
8,8,12	3 ouvriers dont 2 refus	12/2=6; 6*8=60 6*10=60;60-12=48	8/2=4;12+8=20; 20/2=104*10=40		
10,10,8	2 ouvriers dont 1 refus	8/2=4; 4*10=40	10/2=5;10+8=18; 18/2=9;9*5=45		
13,12,10	ouvrier	a)transforme en 10,10,15; b)15/2=7,5;c)7,5*10=75	13/2=6,5;12+10=22 22/2=1111*6,5=71,5	12/2=6;13+10=23; 23/2=11,5; 11,5*6=69	10/2=5;13+12=25; 25/2=12,5; 12,5*5=62,5
10,10,15	ouvrier	Si c'était de 10 ça serait 50; plus 5 ça fait 2,5 multiplié par 10 est égale a 25; 25+50=75	10/2=5; 25/2=12,5; 12,5*5=62,5		
8,5,12	ouvrier	8+5=13;13/2=6; 12/2=6;6*6=36	8+5=13;13/2=6,5; 12/2=6;6*6,5=39	8/2=4;5+12=17; 17/2=8,5;8,5*4=34	5/2=2,5;8+12=20; 20/2=10;2,5*10=5
8,5,10	ouvrier	8+5=13;13/2=6,5 10/2=5;5*6=30	8+5=13;13/2=6,5; 10/2=5;6,5*5=32,5	8/2=4;10+5=15; 15/2=7,5;4*7,5=30	5/2=2,5;10+8=18; 18/2=9;9*2,5=22,5

* Triangles inexistantes

Tableau 5-11. Comparaison du résultat de la stratégie choisie par rapport aux autres possibilités en fonction de la catégorie du sujet

Des huit exemples proposés aux employés il ressort que :

- Trois réponses privilégient la surface la plus petite parmi les possibles; parmi ces 3, une procédure évite un calcul avec des nombres décimaux (si le sujet choisissait le côté 7 ou 9 pour diviser par 2, dans le triangle de côtés 7,6,9, il serait confronté à une multiplication de décimaux);
- Deux réponses privilégient une surface intermédiaire, et évitent le calcul avec des nombres décimaux;
- Trois réponses privilégient la surface la plus grande et évitent ainsi le calcul avec des nombres décimaux, et/ou permettent aussi une multiplication par 10.

On observe également que les trois premiers exemples proposés (9, 22, 45), (8, 23, 15) et (8, 4, 20) ne peuvent représenter des triangles puisque la mesure de l'un des côtés est supérieure ou égale à la somme de celle des deux autres. Malgré cela, les sujets (2 régisseurs de zone) les acceptent comme des triangles, les dessinent comme des triangles équilatéraux, et calculent leur surface. C'est peut-être un effet du "contrat" établi implicitement entre les sujets et le chercheur: il leur fallait montrer comment ils calculaient une surface, et ne s'interrogeaient pas sur le problème de savoir si le triangle pouvait exister. Cependant nous observons dans deux exemples sur trois, l'emploi de variantes de la formule classique locale pour ces exemples. Ces variantes amènent à des surfaces intermédiaires ou plus petites parmi les possibles.

Sur les dix exemples proposés aux ouvriers, cinq donnent des stratégies conduisant à la plus grande surface.

La stratégie régionale, rappelons-le, conduit déjà à une surestimation de la surface, surtout lorsqu'il s'agit de triangles; en outre la surestimation peut venir d'une autre stratégie.

5.3.1.3. Utilisation des contradictions internes des formules comme élément de sous-estimation ou de surestimation par catégorie des sujets (quadrilatères et triangles)

L'existence de nombreuses variables ne nous permet pas de discerner l'influence de la catégorie sociale sur le choix des stratégies, et nous conduit à étudier de manière plus complète leurs performances générales. Les tendances globales des différentes catégories des sujets sont présentées dans le tableau 5.12.

Sujets	<i>quadrilatère surface plus grande</i>	<i>quadrilatère surface intermédiaire</i>	<i>Quadrila tère surface plus petite</i>	TOTAL	<i>triangle surface plus grande</i>	<i>triangle surface intermédiaire</i>	<i>triangle surface plus petite</i>	TOTAL
Ouvriers	4	-	1	5	10	-	4	14
chefs	-	2	-	2	-	1	1	2
contrôleurs	-	-	2	2	2	-	1	3
régisseurs	-	-	1	1	1	1	1	3
Total	4	2	4	10	13	2	7	22

Tableau 5-12. Résultat des stratégies de calcul, pour les quadrilatères et les triangles par catégories de sujets

Pour les quadrilatères, on observe une nette tendance de la part des ouvriers à choisir la plus grande surface: quatre fois sur cinq. Les employés choisissent des surfaces intermédiaires ou plus petites: cinq fois sur cinq. Pour les triangles, cette tendance est moins marquée: les ouvriers choisissent dix fois sur quatorze la surface la plus grande, et les employés cinq fois sur huit les surfaces intermédiaires ou plus petites.

Observons les résultats sans considérer la figure géométrique impliquée (voir tableau 5.13.)

Sujets	Surface plus grande	surface intermédiaire	Surface plus petite	Total
Ouvriers	14	-	5	19
Chefs d'équipe	-	3	1	4
Contrôleurs	2	-	3	5
Régisseurs	1	1	2	4
Total	17	4	11	32

Tableau 5-13. Choix des surfaces possibles en fonction de la stratégie utilisée par catégories de sujets

Pour les ouvriers, 14 réponses sur 19 privilégient des surfaces plus grandes, alors que 10 réponses sur 13 des employés privilégient des surfaces plus petites ou intermédiaires. La phase II devrait permettre de clarifier ces questions, une réponse définitive semblant prématurée en regard de la non prise en compte des variables confondues.

5.4. Quelques premières conclusions

5.4.1. Aspects conceptuels

– Les sujets utilisent de façon quasi systématique la formule régionale de mesure de surfaces induisant une seule opération numérique, mais laissant de côté les raisonnements sur les figures:

- Tous les quadrilatères ont été représentés par le dessin comme des rectangles et traités comme tels;
 - Tous les triangles ont été dessinés comme des triangles équilatéraux et traités comme des rectangles ayant un côté de mesure nulle;
 - les sujets n'ont pas détecté que certaines valeurs numériques empêchaient la construction de triangle (il faut cependant observer que des variantes de la formule classique sont apparues avec ces triangles, ce qui peut suggérer une certaine prise en compte des propriétés de la figure).
- le refus de calculer (par incompetence déclarée) est apparu surtout dans des exemples proposés par le chercheur, et toujours chez les ouvriers;
 - le travail avec des nombres décimaux a été le plus souvent évité. Il ne faut pas oublier que l'unité de mesure utilisée (braça) n'a pas de sous-multiple.
 - Le niveau de scolarité ne paraît pas engendrer de grandes variations des performances des sujets.

5.4.2. Aspects socioculturels

- Il existe certaines évidences concernant l'effet de la position hiérarchique et la "surestimation" ou la "sous-estimation" des mesures des surfaces:
 - Les employés les "surestiment" moins souvent et utilisent des variantes de la stratégie régionale;
 - Les ouvriers les "surestiment" davantage. N'oublions pas qu'en surestimant la surface, les ouvriers peuvent gagner plus.
- Comme la formule régionale conduit déjà à une surestimation des surfaces, ce qui implique une perte pour l'usine, on peut aussi considérer que:
 - L'usine n'est pas une entreprise rigoureuse, son mode de gestion peut intégrer ces variations:

Le pouvoir oligarchique existant maintient un type de relations paternalistes contradictoires: "dans les plantations rien n'est exact: on perd aujourd'hui, on gagne demain". N. Martins (1990) écrit : "L'activité sucrière de Pernambuco ressemble plutôt à un conglomérat de pratiques autoritaires obscures et imprécises qui se prolongent de la simple administration à la gestion, à la fabrique et à la production de sucre et d'alcool, jusqu'à de l'agriculture..."

– Les contradictions internes du système de calcul ne semblent pas troubler les sujets. Ces contradictions font partie intégrante de leur vie, et sont chargées de conflits non résolus.

Ces résultats semblent enfin montrer que les sujets répondent aux contradictions du système de calcul des surfaces comme aux contradictions sociales; elles sont attribuées au destin, aux origines: "depuis toujours ça a été comme ça".

Martins (1990) affirme que l'attraction exercée par les plantations de canne à sucre n'est pas due aux bénéfices financiers qu'elle est susceptible de représenter, mais à la fascination que l'exercice arbitraire du pouvoir sur quelques milliers ou quelques centaines d'hectares semble exercer sur l'imaginaire oligarchique. Il ajoute: "... si on se limite au cas de Pernambuco, on est obligé d'admettre que l'usine sucrière est loin de pouvoir être identifiée à une entreprise capitaliste dont l'existence physique serait modelée par la concurrence et la compétitivité du marché; ou que l'usinier local serait considéré comme le représentant typique des bourgeois qui ont fait avancer la révolution industrielle en Europe ou aux États Unis."

Nous considérons ainsi que quelques critiques méthodologiques s'imposent, et nos premières conclusions nous obligent à une investigation plus systématique de certains aspects.

Observons que lors de la proposition de valeurs numériques différentes de celles proposées par les sujets, d'autres stratégies de calcul de surface sont apparues. On peut se demander si d'autres conditions de la situation ne pourraient pas être l'occasion d'autres schèmes de résolution.

Sans représentation de la figure géométrique réelle, tous les sujets ont traité les quadrilatères comme des rectangles et les triangles comme des triangles équilatéraux, y compris ceux qui ne pouvaient pas exister. On peut en conclure qu'ils ne traitent les figures qu'au plan numérique. Mais cette conclusion est peut-être prématurée. Il nous semble important de vérifier les procédures de calcul d'aire lors de la présentation, par le chercheur, de figures géométriques autres que les rectangles et les triangles équilatéraux. Nous pensons que ces données pourraient contribuer à confirmer ou à infirmer les hypothèses émises lors de l'analyse de données de la première phase.

En résumé, nous avons décrit, dans ce chapitre, les difficultés que nous avons rencontrées sur le terrain lors du recueil des données de cette phase. La question s'est posée notamment de la place du chercheur: "du côté du "patron" ou du côté des ouvriers. L'analyse des rapports établis entre les sujets de différents niveaux hiérarchiques permet de donner du sens à certaines interprétations que

nous présentons ultérieurement. L'analyse des compétences mathématiques des sujets, à propos de la maîtrise du système régional de calcul des surfaces, a été effectuée à partir des réponses des sujets à des situations de résolution de problèmes proposées soit par les sujets eux-mêmes, soit par le chercheur. Nous avons décrit également les problèmes prototypiques et les valeurs numériques les plus usitées, ainsi que les procédures de calcul d'aire concernant les terrains triangulaires et les quadrilatères. Nous avons ainsi analysé les contradictions internes du système de calcul régional, ainsi que la possibilité d'utilisation de ces contradictions. Certains résultats semblent révéler un rapport entre le niveau hiérarchique des sujets et la surestimation plus ou moins élevée des aires. Bien que nous abordions séparément les aspects conceptuels et socioculturels, les variables d'origine sociale ont guidé, de façon prioritaire, nos interprétations sur le fonctionnement cognitif des sujets.

Chapitre 6 : Résultats de la Deuxième Phase

Dans le chapitre précédent, nous avons pu constater qu'à partir du moment où nous avons proposé des exemples de "terrains" dont les côtés avaient des valeurs numériques peu habituelles, un certain nombre de stratégies nouvelles de calcul étaient apparues; de plus, quelques contradictions du système avaient pu être mises en évidence.

Certaines questions relatives au système de mesure régional, à sa maîtrise et à ses contradictions n'ont pas pu être clarifiées avec les seules données de cette phase. Il semble évident aussi que, pour comprendre les procédures utilisées par les sujets, il est nécessaire d'analyser une variété plus large de conduites et de schèmes, de manière à comprendre la nature de la maîtrise de ce système, d'un point de vue social et cognitif.

Ainsi allons-nous approfondir, dans ce chapitre, certaines particularités du système régional de calcul de surface, ainsi que certains aspects de la conceptualisation implicite dans les schèmes utilisés par les sujets. Nous analyserons trois grandes classes de situations qui seront décomposées en plusieurs sous-classes au fur et à mesure de leur analyse:

- la résolution des problèmes ponctuels relatifs aux surfaces quadrilatères et triangulaires;
- la résolution de problèmes complexes relevant des situations habituelles du travail et impliquant un calcul de surface, de moyenne (de poids) et de prix;
- la résolution de problèmes complexes non familiers qui mettent en jeu ces mêmes variables.

Nous allons analyser maintenant la première classe de situations problèmes, à savoir la résolution des problèmes ponctuels relatifs aux surfaces quadrilatères et triangulaires.

6.1. Calcul, comparaison et duplication de surfaces de quadrilatères

Pendant la première phase de recueil de données, nous avons pu observer que les sujets calculaient les surfaces des quadrilatères à partir de la multiplication de deux de leurs côtés, leur représentation prototypique de la figure étant celle du rectangle.

Nous avons observé que le schème de calcul de surface quadrilatère efficace pour une classe de situations bien définies (carrés et rectangles) a été appliqué par la grande majorité des sujets à tous les quadrilatères. Du point de vue de la théorie des champs conceptuels, nous avons voulu vérifier si ce schème, appliqué par les sujets à une classe trop large, est mis en défaut à partir de

l'introduction d'un élément nouveau (dans ce cas, la figure géométrique). Nous recherchions si "le sujet décompose le schème usuel en éléments distincts susceptibles d'être recomposés de manière différente pour les diverses sous-classes de situations, éventuellement par adjonction d'éléments cognitifs supplémentaires (Vergnaud,1984 et 1990)".

Nous avons proposé des quadrilatères différents, dont les côtés avaient la même valeur numérique et le même périmètre. Nous avons donc présenté, deux carrés (figures A et B) et deux losanges (figures C et D) de côtés égaux, un rectangle (figure E) et deux parallélogrammes (figures F et G) de côtés similaires. Les surfaces de ces figures devaient être comparées et calculées. Une autre consigne consistait à doubler la surface du carré présenté et à rechercher la valeur numérique des côtés. Les résultats pour les aires calculées par les sujets étaient toujours comparés aux résultats d'une mesure directe à travers un transparent quadrillé effectuée par le chercheur avec le sujet.

Les figures A et B consistaient en des carrés identiques de côté 4, placés différemment sur le papier. Il faut noter que nous avons utilisé le centimètre comme unité de mesure sur le papier mais que nous disions qu'il s'agissait d'un terrain dont les unités de mesure régionales s'expriment en "braça". Le losange C, de côté 4, avait 7,5 unités carrées d'aire. La figure D est un losange de côté 4 ayant comme aire, 10,5 unités carrées.

La figure E est un rectangle de côtés 6 et 4, ainsi comme les parallélogrammes F et G, le premier a 21 unités carrées de surface, et le deuxième a 12 unités carrées. (voir chapitre 4)

Nous proposons encore un carré, un rectangle, un cercle et un triangle formés avec une ficelle de 16 cm de périmètre, dont les surfaces devaient être comparées entre elles. Nous demandions simplement de comparer les surfaces, et non de calculer leurs aires.

Ces démarches devaient nous permettre d'émettre des hypothèses sur les questions suivantes:

- 1) (6.1.1) Les figures sont-elles considérées dans les tâches de comparaison, de duplication et de calcul de surfaces ? Le périmètre et la surface sont-ils confondus ? Les valeurs des périmètre et aire: sont-elles confondues ?
- 2) (6.1.2) Quelles sont les argumentations des sujets lors de la constatation de différences entre l'aire calculée ou estimée et celle observée à travers un transparent quadrillé ?
- 3) (6.1.3) La surface des parallélogrammes et des losanges est-elle souvent surestimée? Si oui, est-ce fonction de l'écart à la figure prototypique? la catégorie des sujets ?

6.1.1. Les figures sont-elles considérées dans les tâches de calcul, de comparaison et de duplication de surfaces ? Le périmètre et la surface sont-ils confondus ? Les valeurs du périmètre et de l'aire: sont-elles confondues ?

" ... sur le plan technique, à l'image originelle des Babyloniens - qui ont une approche numérique - et des Égyptiens - qui lui préfèrent la géométrie -, toutes les écoles mathématiques avanceront à cloche-pied en privilégiant soit l'abstraction du nombre, soit celle de la figure." (Upinsky, 1988)

Nous essayerons d'émettre quelques hypothèses en réponse à ces questions à partir de l'analyse de la performance des sujets dans trois épreuves:

- calcul d'aires de figures de même périmètre;
- comparaison de surfaces de même périmètre;
- recherche de la valeur numérique des côtés d'un carré dont la surface devrait être doublée.

6.1.1.1. Stratégies de calcul d'aire pour les figures de même périmètre

Observons plus en détail ces stratégies en fonction de la figure présentée.

Carrés et Losanges

Le tableau 6.1. montre les stratégies de calcul de surface de carrés et losanges selon la catégorie de sujets.

Figures/ Sujets	Carré A		Carré B		Losange C		Losange D	
	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier
Multiplication de deux côtés	6	5	5	8	-	6	-	6
Somme des côtés	-	4	-	-	-	-	-	-
Longueur d'un côté	-	1	-	1	-	1	-	1
Transformation en quatre triangles et un carré	-	-	1	1	1	1	-	1
Transformation en deux triangles	-	-	-	-	5	2	5	2
Refus	-	4	-	4	-	4	1	4
Total	6	14	6	14	6	14	6	14

Tableau 6-1. Stratégies de calcul de surface selon la catégorie des sujets et la figure présentée

Figures : Carrés

Stratégie : Multiplication de deux côtés

EMPLOYÉS: Observons que tous les employés utilisent la multiplication de deux côtés pour calculer la surface du carré A, et 5 sur 6 pour calculer la surface du carré B. La position du carré B semble troubler un seul des employés, qui cherche une autre stratégie pour calculer l'aire. Il estime que le carré B est plus petit et suggère de le découper en 4 triangles et un carré au milieu. Observons son explication :

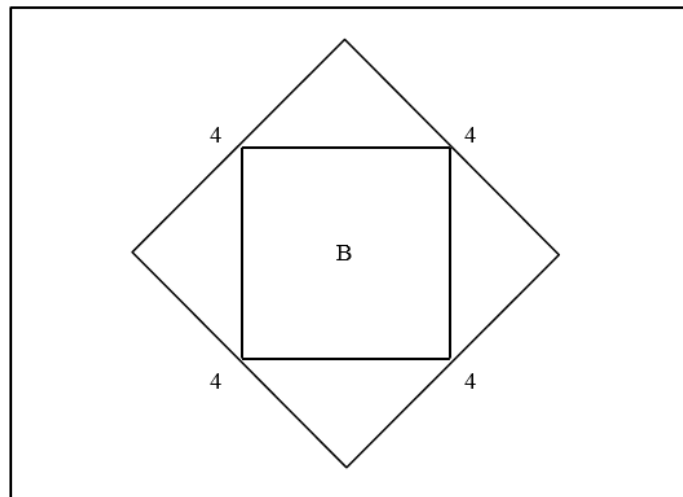


Figure 6-1. Stratégie de calcul de l'aire du carré B

Sujet (contrôleur) : ah ... ici ... il faut couper parce qu'on ne peut pas mesurer comme ça. On fait un carré au milieu et deux triangles de chaque côté.

Chercheuse : Pourquoi on ne peut pas faire 4x4?

Sujet : Parce qu'ici il va manquer de la surface, c'est moins que 16. Je pourrais calculer, mais je suis fatigué ... mais c'est sûr que c'est moins que 16

Dialogue 6-1 Stratégies de calcul d'aire pour les figures de même périmètre

OUVRIERS: Les ouvriers utilisent 5 fois sur 14 la multiplication de deux côtés pour calculer la surface du carré A et 8 fois sur 14 pour le carré B.

Stratégie : Somme des côtés

On observe que 4 ouvriers utilisent la somme des côtés (en calculant ainsi le périmètre) pour calculer la surface du carré A. Il ne faut pas oublier que dans cet exemple, surface et périmètre ont

la même valeur (16). Ainsi la stratégie qui consiste à additionner les côtés dans le carré A pourrait également être une multiplication. Parfois pour multiplier, les sujets additionnent, donc 4×4 , devient $4+4=8$; $8+8=16$.

Observons ces deux exemples pour le carré A :

Sujet: (ouvrier) : ça fait 16. $4+4,8$; et $8+8,16$
 Sujet: (ouvrier) : 16. 4 et 4,8; 8 et 4,12; 12 et 4, 16

Dialogue 6-2 Stratégies de calcul d'aire pour les figures de même périmètre

Ainsi, on ne peut pas affirmer qu'il s'agisse d'une confusion entre périmètre et surface, puisque pour le calcul de la surface du carré B et des losanges, ces sujets abandonnent cette stratégie. Il nous semble que, dans ce cas, il s'agit plutôt d'une multiplication (4×4) faite de façon additive ($4+4+4+4$) = (4×4). Observons que l'utilisation de la multiplication des côtés pour calculer la surface du carré B peut avoir été influencée par leur connaissance du résultat de la multiplication, acquise lors de la somme des côtés du carré A.

Stratégie: Longueur d'un côté

Un ouvrier donne systématiquement comme réponse la longueur d'un des côtés, de même pour les carrés que pour les losanges.

Figures : Losanges

Pour calculer la surface du *losange C*:

- les **employés** utilisent deux stratégies:
 - - transformation du losange en deux triangles (5 fois) et
 - - transformation du losange en 4 triangles et un carré (1 fois).
- Les **ouvriers**:
 - multiplient deux de ses côtés (6 fois sur 14);
 - transforment en deux triangles (2 fois)
 - transforment en 4 triangles et un carré (1 fois).
 - refusent de calculer (4 fois)

Pour calculer la surface du *losange D*:

- les **employés**:
 - transforment le losange en deux triangles (5 fois sur 6),
 - refusent de réaliser le calcul (1 fois sur 6).
- Les **ouvriers**:
 - multiplient deux de ses côtés (6 fois sur 14);
 - transforment en deux triangles (2 fois);
 - transforment le losange en 1 carré et 4 triangles (1 fois).
 - 4 sujets refusent systématiquement de calculer la surface en argumentant leur incapacité.

Stratégie : Multiplication des côtés

Observons que la stratégie qui consiste à multiplier les côtés, absente chez les employés pour le calcul de surfaces des losanges, persiste chez 6 ouvriers sur 14.

Stratégie : Transformation en 4 triangles et un carré

La stratégie qui consiste à transformer le losange en 4 triangles et un carré au milieu n'a jamais été utilisée avec des calculs, mais toujours comme l'explication de la méthode à utiliser, accompagnée d'une estimation de la surface.

Stratégie : Transformation du losange en 2 triangles

La majorité des employés (5 sur 6) et 2 ouvriers ont utilisé cette stratégie. Observons alors les explications d'un employé et d'un ouvrier ayant décomposé les losanges en deux triangles :

Pour le losange C

Sujet (chef d'équipe): <i>Celui-ci, on ne peut pas faire comme les autres (carrés). On doit couper un bec d'un côté et un bec de l'autre. ça ne peut pas faire 16. Ce n'est pas un terrain carré. On le divise au milieu et on fait deux triangles. Au milieu (diagonale) ça fait 2 ... vers 2. La moitié, 1 (2+0=2; 2/2=1). 1x4=4 (4+4=8; 8/2=4). deux triangles ça fait 8 et non 16</i> Chercheuse: <i>alors tu as découpé le terrain en deux triangles et tu as mesuré les deux triangles comme tu m'avais expliqué avant. Mais comment sais-tu qu'au milieu ça fait 2?</i> Sujet: <i>comme ça! en regardant, c'est à peu près la moitié des côtés.</i>

Dialogue 6-3 Stratégies de calcul d'aire pour les figures de même périmètre

Pour le losange D

Sujet (ouvrier) : *On fait aussi deux triangles. C'est plus petit que les carrés A et B. Celui-ci (triangle) a deux côtés égaux à 4 et au milieu ... disons 3. La moitié, 1,5 ($3+0=3$; $3/2=1,5$) ça fait ... 4 ($4+4=8$; $8/2=4$) 4 et 1,5 ... ça fait 4 et 2; ça fait 6. Donc deux triangles ça fait 12; vers 12 et non 16.*

Chercheuse : *je n'ai pas compris là. 4 et 1,5 ça fait 6 ...*

Sujet : *4 une fois, ça fait 4; et après la moitié parce que c'est 1,5; ça fait 2; alors 2 et 4? 6. Deux triangles, 12.*

Dialogue 6-4 Stratégies de calcul d'aire pour les figures de même périmètre

Rectangles et Parallélogrammes

Le tableau 6.2. présente les stratégies utilisées pour le calcul ou l'estimation des surfaces des rectangles et parallélogrammes

Figures/ Sujets	Rectangle E		Parallélogramme F		Parallélogramme G	
	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier
Multiplication de deux côtés	6	8	0	6	0	6
Multiplication par somme de 6, quatre fois	0	1	0	0	0	1
Transformation en deux triangles et un carré	0	0	6	3	6	3
Somme des côtés	0	1	0	1	0	1
Refus	0	4	0	4	0	4
Total	6	14	6	14	6	14

Tableau 6-2. Méthode de calcul des surfaces selon la catégorie des sujets et la figure présentée

Figures : Rectangles

Pour mesurer la surface du rectangle E, tous les employés, et huit ouvriers sur quatorze utilisent la **multiplication des côtés**.

La **somme des côtés** apparaît deux fois chez les ouvriers. On admet que l'un des deux ouvriers utilise la somme pour multiplier, puisqu'il additionne 6, quatre fois et abandonne cette stratégie ensuite. Seul un ouvrier semble confondre systématiquement périmètre et surface.

Quatre des quatorze ouvriers **refusent** de mesurer, en argumentant ne pas savoir le faire.

Figures : Parallélogrammes

Pour la mesure des surfaces des *parallélogrammes F et G*, aucun employé n'utilise la **multiplication des côtés**, cependant 6 ouvriers sur 14 continuent à utiliser cette stratégie. La stratégie qui consiste à *découper le parallélogramme en deux triangles latéraux et un*

quadrilatère au milieu est utilisée par tous les employés et par trois ouvriers sur quatorze. Observons quelques exemples de cette stratégie :

Parallélogramme F

Sujet (contrôleur) : Alors c'est pareil ici ... $6 \times 4, 24$... ah non ... il faut le couper. On fait deux triangles et un carré au milieu. Un carré de ... disons 3 de chaque côté, ça fait 9 ($3 \times 3 = 9$; surface du carré). Ensuite, deux triangles, dont deux des côtés fait 3 et un fait 4; ça fait 6 chacun ($3 \times 2 = 6$; où 3 est la moyenne de deux côtés de valeur 3 et 2 est le côté 4 divisé par 2). Alors deux triangles, 12 plus 9 du carré ça fait 21.

(Observons que c'est la seule réponse exacte du groupe)

Dialogue 6-5 Stratégies de calcul d'aire pour les figures de même périmètre

Parallélogramme G

Sujet (ouvrier) : C'est comme l'autre; On fait deux triangles et un carré au milieu. Alors le carré a 3 d'un côté et 2 de l'autre, ça fait 6.

Chercheuse : Pourquoi 2 d'un côté?

Sujet : Il est plus bas que l'autre (parallélogramme F); alors c'est 2 à peu près... Ensuite, les deux triangles ... les côtés sont quatre, trois et deux. $3 + 4 = 7$, moitié, 3,5. $3,5 \times 1 = 3,5$ (1 est égal au côté 2 additionné à 0 et divisé par 2, formule régionale de mesure de triangle). Deux triangles ça fait 7 et $7 + 6 = 13$.

Dialogue 6-6 Stratégies de calcul d'aire pour les figures de même périmètre

À partir de l'analyse des stratégies de calcul de surface on observe que :

- les employés changent de stratégies de calcul en fonction du quadrilatère présenté (carré ou losanges et rectangles ou parallélogrammes)
- six ouvriers sur quatorze continuent à utiliser la stratégie de multiplication de côtés pour les carrés et losanges;
- seuls trois ouvriers sur quatorze traitent différemment carrés et losanges et rectangle et parallélogrammes, en utilisant des stratégies différentes de calcul de surface;
- seul un ouvrier confond systématiquement surface et périmètre.

6.1.1.2. Comparaison des surfaces de figures de même périmètre

À partir de l'analyse des réponses à la tâche de comparaison des surfaces (figures formées par une ficelle de même périmètre et les quadrilatères discutés antérieurement) nous pouvons constater que:

EMPLOYÉS – 5 employés sur 6 affirment qu'il y a une différence entre les losanges et les carrés et entre le rectangle et les parallélogrammes;

- Pour eux, les surfaces des "terrains" formés par une ficelle sont différentes et le cercle a la plus grande surface;
- Il nous semble donc que les figures sont considérées et qu'il n'y a pas de confusion entre surface et périmètre.

OUVRIERS – Seulement 2 ouvriers sur 14 admettent que les surfaces des losanges sont différentes de celle du carré et 3 ouvriers sur 14 affirment la différence entre les surfaces du rectangle et des parallélogrammes présentés;

- Pour les "terrains" formés par une ficelle, 9 ouvriers sur 14 admettent la différence des surfaces, bien que les raisons données ne soient pas convenables. Leur évaluation est plutôt liée à la facilité de travailler ou de mesurer le terrain, le carré étant la figure jugée la plus grande par la majorité des sujets (voir tableau 6.3);
- Toutefois quelques confusions entre surface et périmètre peuvent être évoquées puisque 4 sujets affirment la similitude entre les terrains formés par la ficelle, sous prétexte qu'ils ont le même contour".

Observons plus en détails les performances des sujets.

Figures formées par une ficelle

Le tableau 6.3. présente les performances des sujets dans cette épreuve.

Questions	Tous les terrains ont-ils la même quantité de canne à sucre?			Quel terrain en a le plus?				Pourquoi?				
	Oui	Non	Refus	Cercle	Carré	Pareil	Refus	Plus droit	Occupe plus de place	Plus facile à mesurer, à travailler	Le contour ne change pas	Refus
Employé	0	6	0	6	0	0	0	0	6	0	0	0
Ouvrier	4	9	1	1	8	4	1	2	2	5	4	1
Total	4	15	1	7	8	4	1	2	8	5	4	1

Tableau 6-3. Comparaison de 4 figures géométriques de même périmètre (carré, rectangle, triangle et cercle) formées à partir d'une ficelle

Lors de la demande de comparaison des surfaces de "terrains" formés par une ficelle (donc de même périmètre), aucun employé n'affirme la similitude des surfaces, et tous affirment que c'est le terrain circulaire qui possède la plus grande quantité de canne à sucre.

Observons un exemple:

Sujet (*employé*) : *Le cercle occupe plus de place, a plus de canne.*
 Chercheure : *Je ne comprends pas. Le contour c'est le même!*
 Sujet : *Mais les terrains changent. Le plus facile à mesurer est le carré; le plus petit, le triangle et le plus grand le cercle. Il faut le couper pour mesurer.*

Dialogue 6-7 Comparaison des surfaces de figures de même périmètre

Neuf ouvriers sur quatorze affirment la différence entre les "terrains". Malgré cela, la majorité (huit sur quatorze) affirme que la plus grande surface est celle du carré et 7 sur 8 justifient cette réponse par des raisons de facilité à travailler ou à mesurer le terrain. Seul 1 ouvrier affirme que le cercle occupe la plus grande surface.

Quatre ouvriers admettent la similitude des surfaces de même périmètre, et un refuse à évaluer. Il faut observer qu'il s'agit de quatre ouvriers qui affirmaient systématiquement ne pas savoir calculer les surfaces, dont un continue à additionner les côtés du rectangle E et des parallélogrammes F et G. Cet ouvrier confond d'une façon claire surface et périmètre. Observons l'explication d'un des ouvriers qui affirme la similitude de surfaces entre les figures présentées:

Sujet (*ouvrière*) : *C'est pareil ... le contour ne change pas*
 Chercheure : *Mais il me semble qu'il y en a quelques-uns qui sont quand même plus grands, qu'on allait couper plus de canne. Regarde le cercle par exemple ...*
 Sujet : *Non! on a l'impression, mais ils sont tous pareils.*

Dialogue 6-8 Comparaison des surfaces de figures de même périmètre

Quadrilatères dessinés sur un papier

Carrés et losanges ont été comparés

Nous avons demandé aux sujets d'évaluer la ressemblance des quadrilatères (dits terrains) pour lesquels la tâche de calcul des surfaces a déjà été discutée. Le tableau 6.4. présente les résultats de cette évaluation.

Figures/ sujets	Carré B		Losange C		Losange D	
Jugement	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier
Similaire à A	5	9	-	8	-	8
Différente de A	1	5	6	2	6	2
"Incapacité" de juger	-	-	-	4	-	4
Total	6	14	6	14	6	14

Tableau 6-4. Comparaison au carré A et des losanges C et D, par catégorie de sujets

Le même carré orienté différemment sur le papier a conduit un employé sur six et cinq ouvriers sur quatorze à parler de différences entre les deux "terrains".

Tous les employés cependant ont considéré comme différents les losanges C et D et le carré A. Cette conception est confirmée par le fait qu'ils n'ont jamais employé la simple multiplication des côtés pour calculer la surface des losanges.

Huit ouvriers sur quatorze ont parlé de similitude entre les losanges C et D et le carré A. Cette donnée rejoint le fait que six ouvriers utilisent la multiplication de côtés pour calculer la surface des losanges, et deux autres utilisent les mêmes stratégies pour calculer la surface des carrés. Seulement 2 ouvriers sur 14 admettent une différence entre les losanges C et D et le carré A.

Rectangles et Parallélogrammes ont été comparés

Nous avons demandé d'évaluer la similitude entre le rectangle E et les parallélogrammes F et G, dont les côtés ont les mêmes valeurs numériques.

Le tableau 6.5. présente les réponses en fonction de la catégorie de sujets.

Figures/Sujets	Parallélogramme F		Parallélogramme G	
Jugement	Employés	Ouvriers	Employés	Ouvriers
Similaire au rectangle E	1	7	1	7
Différente du rectangle E	5	3	5	3
"Incapacité" de juger	-	4	-	4
Total	6	14	6	14

Tableau 6-5. Comparaison des parallélogrammes F et G au rectangle E par catégorie de sujets

- Un employé sur six parle de similitude des terrains, ainsi que 7 ouvriers sur 14;
- cinq employés sur six, et seulement trois ouvriers sur quatorze parlent de différences entre les terrains;
- quatre ouvriers affirment ne pas pouvoir se prononcer sur la différence ou sur la similitude.

Remarque

De façon générale:

- les employés considèrent les figures comme différentes (cinq fois sur six pour les parallélogrammes et six fois sur six pour les losanges);
- les ouvriers, seulement deux fois sur quatorze pour les losanges et trois fois sur quatorze pour les parallélogrammes.

6.1.1.3. Duplication de la surface d'un carré et recherche de la valeur numérique des côtés de ce nouveau carré

"Tout à coup, l'espace montre des longueurs que le calcul ne comprend plus. Si tu ne peux calculer, montre donc: cette parole de Socrate, plus habile ou profonde qu'il ne paraît, indique exactement la bifurcation entre l'arithmétique et la géométrie." (Serres, M. , 1989)

Cette épreuve semble, au moins en principe, troubler tous les sujets, de telle façon que les premières réponses impliquent toujours ou un changement de figure (transformation du carré en rectangle) ou la duplication des côtés (ce qui implique de doubler le périmètre mais non la surface). Les contre-argumentations amènent à quelques changements.

Pour mieux comprendre ces réponses, revenons quelques instants au problème de la duplication du carré, exposé dans le Ménon de Platon, en mettant l'accent sur ce qui nous intéresse plus particulièrement dans cette recherche. Observons quelques fragments du dialogue de Platon.

"... Socrate: Or, supposons que ce côté-ci soit long de deux pieds, celui-là de deux pieds aussi, ... de combien de pieds devra être l'espace entier? ... combien est-ce, deux fois deux pieds? Fais le calcul et réponds.
Le serviteur: Quatre pieds, Socrate.
Socrate: Mais ne pourrait-il y avoir un autre espace qui serait le double de celui-ci, pareil à lui, d'autre part ayant, exactement comme celui-ci, toutes ses lignes égales?
Le serviteur: Oui.
Socrate: Or, de combien de pieds serait-il?
Le serviteur: De huit pieds.
Socrate: Traçons donc quatre lignes égales, en partant de celle-là, ne serait-ce pas là l'espace que tu assures être un espace de huit pieds?
Le serviteur: Hé! absolument.

Socrate: Mais est-ce que dans cet espace, il n'y a pas les quatre espaces que voici, dont chacun est égal à celui que nous avons dit être de quatre pieds?

Le serviteur: Oui.

Socrate: Mais combien fait son aire? N'est-elle pas quatre fois aussi grande?

Le serviteur: Comment ne le serait-elle pas?

Socrate: Et l'espace qui est quatre fois aussi grand est-il un espace double?

Le serviteur: Non, par Zeus.

Socrate: Mais, dis-moi, de combien de fois est-il plus grand?

Le serviteur: Il est quatre fois plus grand

...

Socrate: ... En outre, dis-moi, cette ligne-ci, n'était-elle pas de deux pieds et celle-ci de quatre?

Le serviteur: Oui.

Socrate: Il faut donc que la ligne de l'espace de huit pieds soit plus grande que celle-ci, qui est de deux pieds, mais plus petite que celle de quatre pieds.

Le serviteur: Il le faut

Socrate: Essaie donc de me dire quelle grandeur elle a d'après toi.

Le serviteur: Elle a trois pieds.

...

Socrate: Or s'il y a trois pieds dans ce sens et trois pieds dans cet autre, n'arrive-t-on pas, pour l'espace entier, à trois fois trois pieds?

Le serviteur: Évidemment

Socrate: Et trois fois trois pieds, combien cela fait-il de pieds?

Le serviteur: Neuf pieds

Socrate: Et de combien de pieds fallait-il que fût l'espace double?

Le serviteur: De huit

Socrate: Ce n'est donc pas non plus encore en partant de la ligne de trois pieds que se construit l'espace de huit.

Le serviteur: Certes non!

Socrate: Eh bien! en partant de quelle ligne? essaie de nous répondre avec exactitude. Et, si tu ne veux pas dire le nombre, fais-nous voir cependant en partant de laquelle.

...

Socrate: En partant de quelle ligne se construit-il?

Le serviteur: En partant de celle-ci

Socrate: N'est-ce pas à partir de celle qui va d'un coin à l'autre du carré?

Le serviteur: Oui

Socrate: Cette ligne, les savants l'appellent "diagonale". Par conséquent, si son nom est "diagonale", alors serviteur de Ménon, ce serait en partant de la diagonale que se construit l'espace double."

Dialogue 6-9 : Dialogue du Ménon - Platon

Analysons un peu ces fragments du Dialogue de Platon et leur intérêt pour cette recherche. Observons que le serviteur fait deux fautes:

- il double le côté du carré et trouve 16 comme aire, alors qu'il devrait trouver 8, le double de 4;
- il choisit alors 3 comme côté (entre 2 et 4) et trouve 9 comme aire.

Ainsi, il suit les côtés du carré en nombres entiers. Toutefois que se passe-t-il après cet échec? Socrate modifie sa question, il ne demande plus la mesure des côtés, mais la ligne à travers laquelle cet espace double pourrait être construit.

Serres (1989) fait des observations intéressantes sur les raisons de cet échec: Il observe: " La conduite de la discussion a bifurqué soudain de l'arithmétique à la géométrie: ***Si tu préfères ne pas faire de calculs, montre donc!*** Socrate triche, à l'évidence. Il a demandé la longueur du côté. L'esclave loyal, répond quatre ou trois pieds. On requiert de lui une mesure, il donne une quantité: mais quand vient la diagonale comme côté du carré doublé, on ne parle plus que de qualité: sur quelle ligne le carré de surface double se construit-il? Sur celle-ci. Interrogatifs et démonstratifs ont désormais quitté la quantification pour qualifier ce qu'on montre ... Il a bien trouvé le côté, mais ne l'a pas mesuré. Socrate triche: il sait qu'il ne trouvera pas l'exacte longueur. ... Les deux erreurs par excès avaient eu lieu en mesurant le côté du carré au moyen de nombres entiers: l'esclave compte quatre et trouve seize, revient à trois et aboutit à neuf. Premier essai sur le pair et deuxième par l'impair, deux tirs trop longs. Le nombre cherché ne sera donc ni ce pair ni cet impair."

Souvenons-nous du but de cette tâche dans la recherche:

- vérifier la solidité des conceptions bidimensionnelles de la surface à travers un problème dont la teneur ne serait pas habituelle;
- vérifier le travail avec des nombres décimaux.

Nous n'allons donc pas travailler avec le concept de diagonale, mais nous allons insister sur les aspects quantitatifs de la longueur des côtés tout en conservant la figure géométrique demandée (le carré). Nous recherchions par cette démarche à insister sur les forces et les faiblesses des compétences mathématiques des sujets.

Analysons plus en détails leurs réponses:

Nous avons demandé de doubler la surface du carré A (dite terrain) de façon à avoir un carré deux fois plus grand. Nous avons analysé les premières solutions données au problème et la solution présentée après la contre-argumentation du chercheur. Le tableau 6.6. montre ces résultats par catégorie de sujets.

Sujets/ Solutions	Ouvriers		Employés	
	Première Solution	Solution Finale	Première Solution	Solution Finale
Duplication du côté*	8	6	5	-
Transformation en rectangle	1	2	1	3
Carré de côté avec décimale entre 5 et 6	-	2	-	3
10,10,15,15	1	-	-	-
12x4 ($2 \times 4 = 8; 8 + 4 = 12$, deux côtés de 12 et un de 4)	1	1	-	-
Refus	3	3	-	-
Total	14	14	6	6

Tableau 6-6. Stratégies de duplication du carré 4x4 selon la catégorie des sujets

Nous observons que la duplication des côtés a été la stratégie la plus utilisée en tant que première solution. huit ouvriers sur quatorze et cinq employés sur six l'ont utilisée. Nous pouvons observer ici que nos sujets présentent le même type de réponse que le serviteur dans le Ménon. En fait, nous pourrions attribuer ce raisonnement à une confusion initiale (treize cas sur vingt) entre périmètre et aire. Il faut remarquer cependant que sept sujets sur treize ayant utilisé cette stratégie ont été sensibles à la contre-argumentation du chercheur, et ont changé de stratégie. Cependant, 6 sujets, tous ouvriers, persistent à doubler le côté pour doubler l'aire.

La stratégie la plus répandue après contre-argumentation consiste à transformer le carré 8x8 en rectangle 4x8. observons un exemple:

Sujet (*ouvrier*): 8 et 8
 Chercheure: *ça fait combien?*
 Sujet: 64
 Chercheure: *Et celui-ci?*
 Sujet: 4x4, 16
 Chercheure: *C'est le double?*
 Sujet: *Non, attends ... 4 et 8 ça fait 32 donc 2 fois plus que 16*
 Chercheure: *Mais ce n'est pas un carré !*
 Sujet: *Mais c'est le seul moyen*

Dialogue 6-10 Duplication de la surface d'un carré et recherche de la valeur numérique des côtés de ce nouveau carré

Il nous semble que ce type d'erreur, qui semble négliger l'aspect géométrique (refus de la demande de maintenir le carré), peut être compris comme une forme d'évitement du travail avec les nombres non entiers.

Deux ouvriers donnent comme réponse finale des nombres décimaux entre cinq et six. Voyons cette démarche:

Sujet: (ouvrier) *Pour avoir deux fois plus; il faut avoir huit de chaque côté*
 Chercheure: *Mais le carré 4x4 faisait seize comme surface*
 Sujet: *Huit ça fait soixante-quatre*
 Chercheure: *Ce n'est pas deux fois plus!*
 Sujet: *non, quatre fois plus*
 Chercheure: *Et alors?*
 Sujet: *Vers cinq... attends ... ça fait vingt-cinq. Six, ça fait trente-six. C'est entre cinq et six. C'est cinq et quelque, mais je ne sais pas le dire exactement.*

Dialogue 6-11 Duplication de la surface d'un carré et recherche de la valeur numérique des côtés de ce nouveau carré

Observons un employé qui utilise aussi cette procédure:

Sujet: (contrôleur) *Huit de chaque côté*
 Chercheure: *Mais huit de chaque côté ça fait combien?*
 Sujet: *Trente-deux*
 Chercheure: *Trente-deux? Un carré?*
 Sujet: *Ah non! je me suis trompé! ça fait soixante-quatre; trente-deux on peut pas ... ou on laisse avec trente ou on augmente à trente-quatre ...trente-six ... Cinq d'un côté et six de l'autre, trente. six de chaque côté, trente-six.*
 Chercheure: *Ah non! Je veux un carré deux fois plus grand que celui-ci!*
 Sujet: *A cinq ça fait vingt-cinq, c'est peu. Six, ça fait trente-six, c'est trop. Si on met cinq et demi ... c'est peu ... alors cinq virgule sept (5,7) ...sept fois sept, quarante-neuf. C'est pas assez ...vingt-cinq plus quarante-neuf ça fait vingt-neuf virgule neuf (29,9). Alors huit fois huit, soixante-quatre (teste 5,8), plus vingt-cinq, trente et un virgule quatre. On ne va pas se disputer pour ça; trente et un virgule quatre ... Trente-deux (rigole).*

Dialogue 6-12 Duplication de la surface d'un carré et recherche de la valeur numérique des côtés de ce nouveau carré

Observons que le sujet, en faisant le produit de deux décimaux (deux longueurs) semble considérer la décimale comme un entier. Brousseau (1983) observe que les raisonnements intuitifs vont être guidés par ce modèle erroné d'assimilation aux naturels, qui est renforcé par des opérations que l'on effectue de mémoire, sans comprendre. Il illustre par l'exemple que de tête, le produit de deux décimaux, guidé par cette conception erronée, implique de calculer le produit de la partie entière et celui de la "partie décimale" et de récoler les morceaux. Il attribue ce type d'erreur au fait d'attacher les décimaux à des mesures. Il remarque: " Dans ces cas, ce qui compte le plus, c'est la partie entière; la partie décimale fait ce qu'elle peut."

Observons les autres stratégies présentes dans cette tâche :

– La transformation du carré 4x4 en rectangle 4x8 a été utilisée comme solution initiale par un ouvrier et un employé.

- Trois refus sont apparus chez les ouvriers.
- Une réponse sans explication logique apparente apparaît comme première solution pour un ouvrier, qui la change après contre-argumentation, en une réponse impliquant le double des côtés du carré.

Observons:

Sujet (ouvrier) : *10,10,15,15 c'est plus!*
 Chercheure: *2 fois plus?*
 Sujet: *Oui*
 Chercheure: *ça fait combien?*
 Sujet: *150*
 Chercheure: *C'est 2 fois plus?*
 Sujet: *Non!*
 Chercheure: *Et alors Zé?*
 Sujet: *8 de chaque côté; ça fait 2 fois plus.*
 Chercheure: *Combien ça fait de surface un carré de 8 de côté?*
 Sujet: *Je ne sais pas, mais c'est 2 fois plus!*
 Chercheure: *A Passagem Velha (engenho voisin), un collègue à toi m'a dit que ce n'était pas possible 8 de côté parce que ça fait 64 de surface et 64 n'est pas 2 fois plus que 16.*
 Sujet: *Chacun sa méthode, mais 8 de côté ça fait 2 fois plus grand le carré.*

Dialogue 6-13 Duplication de la surface d'un carré et recherche de la valeur numérique des côtés de ce nouveau carré

Une autre réponse isolée apparaît chez un ouvrier, et se maintient comme réponse finale, même après contre-argumentation. Observons:

Sujet (ouvrier) : *Ici, ça fait 16 (carré 4x4). 16+16,32... ça fait 12x4=48*
 Chercheure : *Pourquoi?*
 Sujet : *2x4=8; j'ajoute 8 à deux des côtés*
 Chercheure : *Je ne comprends pas. D'abord ça ne fait pas 32 et en plus ce n'est pas un carré!*
 Sujet : *Ce n'est pas grave, mais 2 fois plus c'est comme ça.*
 Chercheure : *Mais non! c'est grave Damião; je voulais un carré bien joli...*
 Sujet : *(rigole) tu voulais, mais ce n'est pas possible, mais je t'assure que comme ça c'est bon!*

Dialogue 6-14 Duplication de la surface d'un carré et recherche de la valeur numérique des côtés de ce nouveau carré

Observons que pour la duplication du carré 4x4, le sujet qui confondait aire et périmètre, lors de la comparaison des surfaces et calcul d'aires, double les côtés en argumentant que c'est le double de la surface du carré 4x4, puisque celui-ci fait $4+4+4+4=16$ et celui-là $8+8+8+8=32$ et $32=2 \times 16$. Il

nous semble que c'est le seul cas où nous pouvons être sûr d'une confusion nette entre aire et périmètre.

6.1.2. Quelles sont les argumentations des sujets lors de la constatation de différences entre l'aire calculée ou estimée et celle observée à travers un transparent quadrillé?

"... en mathématique ce n'est jamais le résultat en soi que l'on demande, c'est la méthode officielle! en mathématique, le fond, c'est la forme, laquelle est la preuve de la justesse du résultat (Upinsky, 1988)."

Nous avons voulu vérifier la réaction des sujets lors d'une comparaison des résultats du calcul de surface obtenu à travers "leur méthode" et ceux obtenus avec un transparent quadrillé. Cette méthode nous a paru plus simple puisque les résultats pouvaient être observés directement sans passer par des formules, étrangères aux sujets.

Carrés et Losanges

Les valeurs des surfaces calculées ou estimées sont présentées au tableau 6.7. On observe une diversité de réponses qui arrivent parfois à être trois fois supérieures à la valeur réelle.

Figures/ Sujets	Carré A (surface = 16)*		Carré B (surface = 16)*		Losange C (surface = 7,5)*		Losange D (surface = 10,5)*	
	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier
16	6	7	5	7	3	5	-	5
24	-	2	-	1	-	2	-	2
4	-	1	-	1	-	1	-	1
Moins que 16	-	-	1	1	1	-	2	-
8	-	-	-	-	2	2	-	-
20	-	-	-	-	-	-	1	-
12	-	-	-	-	-	-	3	2
Refus	-	4	-	4	-	4	-	4
Total	6	14	6	14	6	14	6	14

* surface calculée par la formule scolaire.

Tableau 6-7. Surface calculée ou estimée de différentes figures par catégorie de sujets

Les réactions à la contradiction apportée par la mesure directe, avec le transparent quadrillé sont:

- la rectification des erreurs;
- la confirmation des réponses;
- l'admission de la justesse des deux méthodes de mesures de surface qui donnent pourtant des résultats très différents.

Le tableau 6.8. montre les réactions des sujets.

Type de réponses	Réponses qualitative ou quantitativement correctes		Réponses incorrectes	
Sujets	Confirme sa réponse antérieure	Rectifie des petites erreurs	Reconnaît des erreurs	Admet cette méthode mais confirme la sienne
Employés	-	3	1	2
Ouvriers*	2	-	1	7
Total	2	3	2	9

* 4 ouvriers ont refusé de calculer la surface

Tableau 6-8. Réponses à la contradiction apportée par la mesure directe par quadrillage (carrés et losanges)

Observons quelques-unes de ces réponses :

Confirme sa réponse antérieure et rectifie des petites erreurs- Losange D

Sujet (employé) [il compte les petits carrés] Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf. Alors, dix, onze, par là. Tu vois? Ça ne fait pas seize !

Chercheuse: Tu as dit que ça faisait moins que seize.

Sujet: oui, parce que ce n'est pas droit, le terrain. Alors avec n'importe quelle méthode c'est toujours ça le résultat, ça sera toujours plus petit.

Dialogue 6-15 Confirme une réponse antérieure et rectifie des petites erreurs - Losange

Rectifie des petites erreurs - Losange C

Sujet (ouvrier) [il compte les petits carrés] Un, deux, trois, quatre entiers [rigole] tu imagines ta méthode pour mesurer les terrains de canne? Si on s'amuse à ça, à la fin on serait crevé [rigole]. Alors quatre ..., ces deux morceaux là, ça fait cinq; ces deux autres là, on dit six et tout le reste, ça doit faire sept cubos, par là...

Chercheuse: Tu as dit que ça faisait huit c'est ça?

Sujet: oui, je n'ai pas voulu me casser la tête; mais tu vois, j'avais raison; c'est beaucoup plus petit que l'autre (le carré); ça doit faire entre sept et huit parce que ta méthode est difficile avec le terrain tordu; mais c'est à peu près ça, tu vois?

Dialogue 6-16 Rectifie des petites erreurs -Losange

Reconnaît des erreurs - Losange D -

Sujet: *(employé) [il compte les petits carrés] Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf. Ben, dix, je ne sais pas, onze ou douze; c'est ça?*

Chercheuse: *il paraît, mais tu m'avais dit que ça faisait vingt, c'est ça?*

Sujet: *Ben, oui, attends, je coupe en deux triangles; attends-je ne me souviens plus. J'ai dit vers cinq au milieu (petite diagonale) alors, ça fait deux et demi-fois quatre; ça fait dix et deux triangles ça fait vingt.*

Chercheuse: *Alors ce n'est pas le même résultat?*

Sujet: *tu m'embêtes! attends, ça ne peut pas être vingt; c'est déjà plus petit que le carré d'avant. Oui, oui, elle est bonne ta méthode; ça doit être ça; j'ai dû me tromper.*

Dialogue 6-17 Reconnaît des erreurs -Losange

Admet cette méthode mais confirme la sienne - Losange C

Sujet (régisseur) *[Il compte les petits carrés à l'aide du transparent] C'est vrai que comme ça on dirait que les losanges sont plus petits. Mais pour calculer bien, il faut faire comme moi je l'ai fait.*

Chercheuse: *Mais vous voyez bien que le résultat n'est pas bon...*

Sujet: *Mais oui ... chacun sa méthode. Ici on travaille comme ça.*

Dialogue 6-18 Admet cette méthode mais confirme la sienne – Losange

Un point à remarquer nous semble être le type de fonctionnement cognitif d'une grande partie des sujets. Neuf sur seize sujets admettent la possibilité d'avoir des méthodes valables de calcul de surface qui conduisent cependant à des résultats très différents. Cette procédure permet apparemment d'accepter certaines contradictions mathématiques sans déclencher un conflit qui les pousserait à les clarifier. Nous observons une priorité aux conventions sociales et non à la réalité mathématique.

Rectangles et Parallélogrammes

Le tableau 6.9. montre les valeurs de différentes surfaces estimées ou calculées par catégorie de sujets.

Figures/ Sujets	Rectangle E (surface = 24)		Parallélogramme F (surface = 21)		Parallélogramme G (surface = 12)	
Surface obtenue	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier
24	6	7	3	5	3	5
26	-	-	1	1	-	-
19	-	-	-	-	1	-
21	-	-	1	1	-	-
16	-	-	-	-	1	1
moins que 24	-	-	1	-	1	-
20	-	2	-	2	-	2
13	-	-	-	-	-	1
50	-	1	-	1	-	1
Refus	-	4	-	4	-	4
Total	6	14	6	14	6	14

Tableau 6-9. Surfaces estimées ou calculées des rectangles et des parallélogrammes, selon la catégorie de sujets

On observe que tous les employés et sept ouvriers sur quatorze trouvent 24 unités carrées comme surface du rectangle E, surface calculée par la multiplication de côtés. On trouve aussi la valeur de 24 unités pour les parallélogrammes F et G. Il faut remarquer pourtant que les employés trouvent ce résultat par d'autres méthodes que la multiplication de côtés. Observons un exemple:

Sujet: (régisseur) On fait comme ça: On le coupe et on fait deux triangles et un carré au milieu. Admettons, un carré de 4, ça fait 16. Ensuite plus 2 triangles de deux côtés 4 et d'un côté égal à 2; ça fait 4×1 égal à 4; les deux triangles, 8. Plus 16 du carré, 24.

Le tableau 6.10. présente les réactions à la contradiction selon la catégorie de sujets.

Type de réponses	Réponses qualitative ou quantitativement correctes		Réponses incorrectes	
Sujets	Confirme réponse antérieure	Rectifie des petites erreurs	Reconnaît des erreurs	Admet cette méthode mais confirme la sienne
Employés	1	2	1	2
Ouvriers	2	-	1	7
Total*	3	2	2	9

*4 ouvriers ont refusé de calculer

Tableau 6-10. Réponses à la contradiction apportée par la mesure directe par quadrillage (rectangles et parallélogrammes)

On observe que 9 sujets sur 15 admettent deux méthodes de calcul de surface qui conduisent pourtant à des résultats très différents.

Le tableau 6.11. présente une vision globale des stratégies et réponses des employés, les erreurs éventuelles et quelques fragments d'entretiens après le comptage des carrés à travers le transparent quadrillé.

quadrilatères	Losange C (Aire = 7,5)**		losange D (Aire = 10,5)**		Parallélogramme F (Aire = 21)**		Parallélogramme G (Aire = 12)**		Nature des réponses		
	Stratégie	résultat	stratégie	résultat	stratégie	résultat	stratégie	résultat	Erreur N=4	réponses correctes N=4	Refus N=4
Régisseur : Orestes	couper en 2 triangles	16	couper en 2 triangles	20	couper en deux triangles et un quadrilatère	24	couper en deux triangles et un quadrilatère	24	4	-	-
Régisseur : Natalicio	couper en deux triangles	16	couper en 2 triangles	12	couper en deux triangles et un quadrilatère	24	couper en deux triangles et un quadrilatère	24	3	1	-
Contrôleur : Zé	couper en 4 triangles et un quadrilatère.	moins que 16*	couper en deux triangles	moins que 16*	couper en deux triangles et un quadrilatère	21	couper en deux triangles et un quadrilatère	16*	-	4	-
Contrôleur : Oziano	couper en 2 triangles	16	Refus	Refus	couper en deux triangles et un quadrilatère	moins que 24*	couper en deux triangles et un quadrilatère	moins que 24*	1	2	1
Chef : Amaro	couper en 2 triangles	8	couper en deux triangles	12	couper en deux triangles et un quadrilatère	26	couper en deux triangles et un quadrilatère	19*	1	3	-
Chef : Israël	couper en 2 triangles	8	couper en deux triangles	12	couper en deux triangles et un quadrilatère	24	couper en deux triangles et un quadrilatère	24	2	2	-

*Nous avons considéré ces réponses comme "correctes", malgré la dispersion des valeurs, parce qu'elles semblent tenir compte de différences d'aire entre les figures.

** Aire calculée par la formule scolaire.

Tableau 6-11. Stratégies, résultats et nature de réponses des employés lors de la demande de calcul d'aire des losanges et parallélogrammes

L'utilisation de stratégies différentes pour les losanges et parallélogrammes aboutit parfois aux mêmes valeurs numériques que pour le carré et le rectangle. L'emploi d'autres stratégies laisse à penser que les aspects géométriques et numériques sont intégrés. Mais les résultats numériques des aires trouvées, montrent qu'ils acceptent que l'aire soit semblable. Nous pensons que plus que les aspects conceptuels, ce sont plutôt les contraintes et le consensus sociaux qui déterminent cela.

Quelques exemples à titre d'illustration:

Losange C

Sujet (régisseur) - *Celui-ci, on fait deux triangles, on est obligé de couper au milieu. On mesure cette partie (diagonale horizontale); on dit ... ça fait 4 à peu près, la moitié est 2. Alors 2×4 , 8 et deux triangles, 16.*

Chercheuse: *Mais alors, c'est pareil que le carré?*

Sujet: *non, parce qu'il faut le couper, mais c'est le même 16.*

Chercheuse: *Mais. Orestes, si on regarde avec les petits carrés (référence au transparent quadrillé, nous comptons les unités carrées de façon approximative)*

Sujet: *C'est vrai que comme ça, on pense quand même que c'est plus petit (le losange), on dirait 8 par là. Mais on laisse tomber ça*

Chercheuse: *Mais vous voyez bien que ce n'est pas le résultat?!*

Sujet: *Mais oui je vois, mais chacun sa méthode, ici on ne doit pas faire autrement.*

Chercheuse: *pourquoi?*

Sujet: *C'est notre façon de travailler.*

Dialogue 6-19 Calcul d'aire de losanges

Parallélogramme F

Sujet (régisseur) - *Pour cuber (calculer la surface), c'est le même 24; mais quand on le coupe c'est pas pareil. On est obligé de faire 2 triangles et un carré au milieu. On fait un carré de 4, ça fait 16 et 2 triangles de 4,4 et 2. Alors ça fait $1 \times 4,4$; deux triangles ça fait 8. 8 plus 16, 24.*

Chercheuse: *on va voir avec ça? (transparent quadrillé), on imagine que les petits carrés sont des cubos ...*

Sujet: *Ah oui, bon ... on ne va pas arriver parce que le terrain est tordu*

Chercheuse: *On peut essayer de voir à peu près combien ça va faire?*

Sujet: *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 complets ... on va dire que ceux-ci (partie inférieure du parallélogramme qui correspondait à la moitié des unités carrées aperçues par le transparent), ça fait 1 les deux moitiés, 2 et 3; plus 15 fait 18, plus 1 ici du haut (partie supérieure gauche) 19; celui-ci (partie supérieure droite) avec ce morceau encore 1, ça fait 20; je dirais 20 à peu près ...*

Chercheuse: *Mais vous affirmez que ça fait 24?*

Sujet: *Oui, parce que ce n'est pas la même méthode; on doit le couper pour mesurer mais ça fait quand même 24*

Chercheuse: *Mais vous avez compté et ça faisait à peu près 20*

Sujet: *Oui, mais on ne peut pas faire comme ça avec les terrains, tout est plein de canne, alors on fait comme je vous ai dit.*

Dialogue 6-20 Calcul d'aire de parallélogrammes

Seul un sujet semble être sensible à la contre-argumentation faite à partir de l'aire obtenue grâce au transparent quadrillé. Cela ne change toutefois pas beaucoup les résultats.

Parallélogramme F

Sujet (chef d'équipe) - *C'est pareil; ça fait les mêmes 24. On peut couper deux triangles de chaque côté, mais c'est 24 aussi (le chercheur propose de tester ses résultats à travers le transparent quadrillé, et le sujet vérifie aussi les résultats qu'il avait donné pour les losanges) Comme je disais ce n'est pas pareil ici (losanges C et D), ça fait vers 8 et 12 et non 16; mais là (parallélogramme F) ... je me suis trompé, il faut calculer. Disons ici, (le quadrilatère du milieu) doit faire 16*

Chercheuse: *Pourquoi?*

Sujet: *Parce qu'on sait, un carré de 4 c'est égal à 16*

Chercheuse: *Mais comment vous savez qu'ici on a un carré de 4 bras de côté?*

Sujet: *C'est l'expérience. Après deux triangles de 2,4 et 3; 4+3 est égale 7, moitié est 3,5 et 3,5*1 (où 1 est la moitié de 2, un des côtés) 3,5. Les deux triangles est égale 7 plus 16, 23*

Chercheuse: *Attendez, je n'ai rien compris*

Sujet: *Il faut faire vite*

Chercheuse: *Attendez, parce que je n'ai pas d'expérience. Vous m'avez dit un carré de 4 au milieu ça fait 16, ça va; alors des 6 de chaque côté reste 2?*

Sujet: *Oui*

Chercheuse: *Qui est un des côtés du triangle?*

Sujet: *Oui, ah! je me suis trompé, il y a 4,4 et 2; alors 4*1 est égal à 4; 2 triangles, ça fait 8 plus 16, 24. Tu vois j'avais raison au début, avec tes petits carrés, moi je me suis trompé*

Chercheuse: *Mais vous étiez d'accord que ça ne pouvait pas faire 24?*

Sujet: *Non, oui mais ce n'est pas toujours pareil, pour ceux-là (losanges C et D) c'est bon, mais pour les autres ça ne marche pas.*

Dialogue 6-21 Calcul d'aire de parallélogrammes

6.1.3. La surface des parallélogrammes et des losanges est-elle souvent surestimée? Si oui, est-ce fonction de la catégorie des sujets? l'écart à la figure prototypique?

Le tableau 6.12. montre la performance des sujets en isolant les résultats exacts ou très proches, les résultats surestimés et ceux sous-estimés. On a laissé comme une catégorie à part, les réponses "moins que 16" pour les losanges et "moins que 24" pour les parallélogrammes, à cause de leur caractère vague.

Estimation/Sujets	Résultat exact ou très proche*		Surestimation		Sous-estimation		Moins que 16 (losanges) ou moins que 24 (parallélogrammes)	
	Employé (N=6)	Ouvrier (N=10)	Employé (N=6)	Ouvrier (N=10)	Employé (N=6)	Ouvrier (N=10)	Employé (N=6)	Ouvrier (N=10)
Carré A	6	7	-	2	-	1	-	-
Carré B	5	7	-	1	1	2	-	-
losange C	2	2	3	7	-	1	1	-
losange D	3	2	1	7	-	1	2	-
Rectangle E	6	7	-	1	-	2	-	-
Parallélogramme F	1	3	4	7	-	-	1	-
Parallélogramme G	-	1	5	9	-	-	1	-

Tableau 6-12. Nature de l'estimation de la surface des figures selon la catégorie de sujets

* Comme réponses proches, on a considéré les réponses ayant des intervalles jusqu'à 1 unité et demie en plus ou en moins de la réponse exacte, en l'occurrence :

<i>8 pour 7,5</i>	<i>12 pour 10,5</i>	<i>20 pour 21</i>	<i>13 pour 12</i>
-------------------	---------------------	-------------------	-------------------

Observons que les sujets surestiment plus qu'ils ne sous-estiment¹⁹ les surfaces. Les employés surestiment dans 30,9% des cas, et sous-estiment dans seulement 2,4% des cas. Les ouvriers surestiment dans 48,6% des cas et sous-estiment dans 10,0%. Il faut signaler en outre que trois sur quatre des réponses considérées comme proches de la réponse exacte sont en fait supérieures à celle-ci.

C'est surtout quand la forme du "terrain" s'éloigne du modèle prototypique qu'on observe les plus fortes surestimations. Prenons l'exemple du losange C. Le losange C, le plus éloigné du carré et de la plus petite surface, présente trois surestimations sur six chez les employés et sept sur dix chez les ouvriers. Le parallélogramme G, le plus éloigné du rectangle, présente une surestimation de 5 sur 6 chez les employés et de 9 sur 10 chez les ouvriers. Si on ajoute la réponse approchée 12, rencontrée à la place de 10,5 et moins que 24 (trop vague) on trouve 100% de surestimation. Même pour les employés qui semblent s'apercevoir de la différence entre les figures, et qui cherchent plus souvent de nouvelles stratégies de mesure de surface, la surestimation est encore élevée (30,9% des cas).

¹⁹ observons ce que nous désignons ici par sous-estimation la plus petite estimation parmi les possibilités offertes par la formule locale. Rappelons que celle-ci implique déjà une surestimation lors de la comparaison aux résultats des aires calculées par la formule scolaire.

Observons le discours d'un chef d'équipe après qu'il eut calculé les surfaces de tous les terrains quadrilatères puis confronté ses résultats avec ceux obtenus par le comptage des carrés d'un transparent quadrillé.

Sujet (*chef d'équipe*) : *Tu vois que ce n'est pas pareil! Ici (losanges et parallélogrammes) il faut couper, sinon ce n'est pas positif!!!*

Chercheur: *Oui Amaro, mais il me semble que même comme ça tu calcules toujours la surface de terrains un peu plus grande...*

Sujet: (*rigole beaucoup*) *Si on voit avec les petits carrés oui. En fait c'est comme s'ils étaient des cubos (unité carrée régionale).*

Chercheur: *Alors, Amaro, il y a toujours quelques cubos de plus dans tes calculs.*

Sujet: (*encore en rigolant*) *ce n'est pas grave!!! Comme ça on est sûr de ne tromper personne ... parce que ... tu sais ... l'usine gagne toujours!*

Dialogue 6-22 La surface des parallélogrammes et des losanges

6.2. Calcul de surfaces triangulaires

Pour clarifier certaines procédures lors de l'utilisation de la formule régionale de mesure de surfaces triangulaires, on a proposé aux sujets deux triangles scalènes dont la surface devait être calculée, l'un des deux étant rectangle (voir méthodologie).

Nous avons voulu vérifier:

- Les types de stratégies utilisées;
- Les raisons, systématiques ou non, du choix du côté susceptible d'être divisé par deux;
- La performance des sujets en fonction de la présence de la figure et du type du triangle présenté (plus proche ou plus éloigné de la figure prototypique)

Nous postulons que le triangle rectangle H est le plus proche du prototype de triangle évoqué par les sujets (triangle équilatéral).

6.2.1. Stratégies de mesure de surfaces triangulaires

La stratégie qui consiste à multiplier la moyenne de deux des côtés du triangle par la moitié du troisième côté a été la stratégie la plus utilisée (voir chapitre 3). Tous les employés y ont eu recours pour le triangle rectangle H, et cinq sur six pour le triangle I. Un seul employé a utilisé une nouvelle stratégie consistant à décomposer le triangle I en deux autres. D'après lui ce type de triangle ne permet pas l'utilisation de la formule régionale classique. Observons son argumentation:

Sujet (*chef d'équipe*). *On va faire comme ça: Je vais faire que le côté 30 reste avec 24 bras* parce qu'avec ce côté grand (30) le résultat ne sera pas positif. Alors on laisse deux côtés avec 24 bras et on fait un autre triangle ici. On fait vers 24, 24 et 8 de côté les 2 triangles. On dit comme ça à peu près. Alors 24×4 est égal à 96. 2 triangles ça fait 192.

Chercheuse: *Mais comme vous m'avez expliqué avant, il fallait faire $24 + 30 = 54$; $54/2 = 27$; ensuite le côté 16, on prend la moitié ça fait 8. Alors 27 fois 8; 216.*

Sujet: *Ah! mais ça dépend du type de triangle. Quand les côtés sont très différents faire comme ça ce n'est pas du bon boulot! On peut le faire quand on sait qu'un ouvrier a besoin ... mais pas toujours, parce que sinon l'usine découvre.**

Chercheuse: *et pourquoi vous avez pris le côté 16 pour diviser par 2?*

Sujet: *parce que son côté opposé est zéro!*

Chercheuse: *Et si je dis que ce côté-là est zéro (angle opposé au côté 30)?*

Sujet: *Ce n'est pas positif, on ne fait pas comme ça*

Chercheuse: *Pourquoi?*

Sujet: *Parce que ce n'est pas du bon boulot!*

Dialogue 6-23 Stratégies de mesure de surfaces triangulaires

Nous pouvons reconnaître dans le discours du sujet, de façon assez claire, une forme de lucidité quant à la possibilité d'altérer les résultats.

Un des employés, malgré l'utilisation de la formule régionale classique, observe que pour bien calculer la surface du "triangle I" il devrait faire autrement. Observons son discours:

Sujet (*contrôleur*) $24 + 30$, 54. 54, moitié 27. 27×8 égale à 216 (8 est la moitié de 16)

Chercheuse: *Est-ce que je peux faire comme ça: 30 moitié 15 ...*

Sujet: *Non, jamais. Et je dis 216 parce que je fais comme ça, mal rangé, tordu parce que sinon il faut le couper et alors ça diminue la surface. Alors ça peut être vers 170 à cause du côté 30 qui est très long; mais ici on peut calculer comme ça (formule régionale classique).*

Chercheuse: *Pourquoi 170?*

Sujet: *Je dis comme ça parce qu'il faut calculer, on dit vers 170.*

Chercheuse: *Et tu fais comment dans le travail?*

Sujet: *Pour être correct il faut couper; mais on peut laisser comme ça, ça dépend de la quantité de terrain comme celui-ci, de l'ouvrier ...**

Dialogue 6-24 Stratégies de mesure de surfaces triangulaires

Il semble qu'apparaisse ici un contrat implicite. Tout se passe comme si les sujets se disaient: "il faut donner une réponse, montrer qu'on sait faire, même si la réponse n'est pas bonne". Nous imaginons que ce type de procédure ne peut pas exister dans des situations de travail où les conditions réelles exercent une fonction de contrôle.

Toutefois, les ouvriers ont utilisé aussi des variantes de cette stratégie. Observons quelques exemples:

Triangle rectangle H

Sujet (ouvrier) : 12, 20 et 16. 20 et 16 est 36. Il faut diviser par les deux ... 18. et 18 fois 12 ... 180 ... 216

Chercheuse: *Comment tu as fait?*

Sujet: 18 fois 10, 180 et 2 ça fait 36, 216.

Chercheuse: *Tu ne pouvais pas additionner le 12 et le 16?*

Sujet: *non!*

Chercheuse: *Pourquoi?*

Sujet: *Parce que c'est comme ça. Il faut additionner 20 et 16!*

Chercheuse: *Pourquoi je ne peux pas prendre 20 et 12?*

Sujet: (rigole) *Tu ne pouvais pas*

Chercheuse: *mais explique moi pourquoi je ne pouvais pas!*

Sujet: *Le chef d'équipe ne permet pas!**

Chercheuse: *Mais je voudrais savoir pourquoi?*

Sujet: *Je ne sais pas ... il faut prendre les plus grands!*

Dialogue 6-25 Stratégies de mesure de surfaces triangulaires

***Remarque:** il faut observer dans le discours des sujets, et plutôt parmi les employés, des indices permettant de repérer des considérations d'ordre social déterminant le choix de l'une ou de l'autre stratégie, bénéficiant parfois à l'ouvrier, parfois à l'usine.

Le tableau 6.13. présente les stratégies de calcul de surface en fonction du triangle et de la catégorie de sujets.

Il faut noter:

- le nombre élevé de refus chez les ouvriers;
- l'emploi presque systématique de la formule régionale chez les employés;
- la présence de variantes de stratégies (une fois chez les employés et cinq fois chez les ouvriers).

Figures/Sujets Stratégies	Figure H - Triangle rectangle		Figure I - Triangle scalène	
	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier
Multiplication de la moyenne de 2 des côtés par la moitié du troisième	6	3	5	5
Multiplication de la moyenne de 2 côtés par le troisième	-	2	-	-
Abandon du côté intermédiaire et multiplication de la moitié du côté plus petit par le plus grand côté	-	1	-	-
Abandon du côté plus grand et multiplication de la moitié du côté plus petit par le côté intermédiaire	-	-	-	2
.Transformation en 2 triangles "isocèles" .multiplication de la moyenne de 2 côtés égaux par la moitié du 3ème .somme des 2 valeurs	-	-	1	-
Somme des côtés	-	1	-	1
Refus	-	7	-	6
Total	6	14	6	14

Tableau 6-13. Stratégies de calcul de surfaces triangulaires selon la catégorie de sujets et le type de triangle présenté

6.2.2. La systématique du choix du côté susceptible d'être divisé par 2

Pendant la première phase de recueil de données, le choix du côté *susceptible* d'être divisé par 2 semblait en rapport avec la catégorie des sujets. Les ouvriers choisissaient le côté le plus grand, les régisseurs et contrôleurs, le côté plus petit, et les chefs d'équipe le côté intermédiaire. Cela implique des résultats plus grands, intermédiaires ou plus petits. Quelques hypothèses d'ordre social ont déjà été émises sur le sujet.

Nous avons voulu vérifier la systématique de ce choix, et la lucidité éventuelle des sujets à ce sujet.

Le tableau 6.14. présente les résultats obtenus :

Figures/Sujets	Figure H - Triangle rectangle		Figure I - Triangle Scalène	
	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier
Plus grand	-	1	-	1
Plus petit	6	4	6	6
Intermédiaire	-	1	-	1
Autres*	-	2	-	1
Refus	-	6	-	5
Total	6	14	6	14

*Cette donnée correspond à d'autres stratégies qui ne consistaient pas à diviser un des côtés du triangle par 2

Tableau 6-14. Taille du côté choisi pour être divisé par 2

On observe que tous les employés choisissent le côté plus petit pour le diviser par deux, ce qui implique qu'on trouve la surface plus petite parmi les possibilités susceptibles d'être obtenues.

Les ouvriers, eux aussi, concentrent leur choix sur le côté plus petit, contrairement à ce qui avait été observé précédemment. Il nous semble que l'introduction de la figure géométrique rapproche la situation de recherche de la situation de travail. Dans cette situation, nous avons une condition qui offre le contrôle supplémentaire de la représentation visuelle.

Observons quelques exemples dont les explicitations de procédures peuvent être utiles à la discussion:

Sujet (*chef d'équipe*) : $30+24$ est égal à 54; moitié 27. 16, moitié 8. 8×27 , 216
 Chercheure: Je pourrais prendre 16 et 30 pour additionner?
 Sujet: Tu pourrais, mais tu ne devrais pas ...
 Chercheure: Tu additionnes toujours les côtés plus grands?
 Sujet: J'additionne toujours ceux que je pense être le plus correct!
 Chercheure: Avec un triangle de 4, 3 et 6 de côtés?
 Sujet: $6+4$, 10 moitié est 5. 3, moitié est 1,5 mais on laisse comme 1. Alors 5×1 , 5.

Dialogue 6-26 La systématique du choix du côté...

Sujet (ouvrier) : *Un triangle comme ça ... 16,12 et 20. On fait 6 multiplié par 20. 5 ça fait 100; 120.*
 Chercheure: *Comment vous avez fait?*
 Sujet: *parce qu'on calcule par le côté plus petit. On calcule par les 12 braças parce que si on calcule par les 20 braças ça va faire plus et le chef d'équipe ne calcule pas comme ça ... moi, j'ai envie qu'il fasse comme ça quand je suis en train de travailler ...*
 Chercheure: *Ah ça je veux comprendre*
 Sujet: *(rigole beaucoup) c'est la vie ça ... la moitié de 12 est 6, n'est-ce pas? 6 par 20 est 120.*
 Chercheure: *Et le côté 16?*
 Sujet: *Il va se promener un peu, ce n'est pas grave ...*
 Chercheure: *J'ai rien compris Zé...*
 Sujet: *Disons si on calcule 20 par 16, ça va faire plus de 120. J'ai très envie que le chef d'équipe fasse comme ça quand il mesure mon terrain...*
 Chercheure: *Et comment il fait?*
 Sujet: *il prend toujours le côté plus petit; on prend sa moitié et multiplie par l'autre?*
 Chercheure: *Quel autre?*
 Sujet: *le 16 et on laisse le plus grand se promener.*

Dialogue 6-27 La systématique du choix du côté...

Nous observons dans ces commentaires des indices montrant:

- que l'aire change en fonction du côté susceptible d'être divisé par deux;
- du sens du profit;
- des conventions sociales qui induisent une utilisation particulière de la souplesse des pratiques locales.

Observons dans le tableau 6.15. les estimations des ouvriers et des employés :

Figures/ Sujets	Triangle Rectangle H		Triangle I		Total	
	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier
Plus petite	5	3	5	4	10	7
Intermédiaire	-	1	-	1	-	2
Plus grande	1	3	1	3	2	6
Refus	-	7	-	6	-	13
Total	6	14	6	14	12	28

Tableau 6-15. Taille des surfaces obtenues parmi les possibilités de la formule régionale et variantes selon la catégorie de sujets

Dans cette phase, contrairement à la première phase de recueil des données, la différence de résultats en fonction de la catégorie de sujets est moins évidente. Il est vrai que les résultats des calculs réalisés par les employés sont circonscrits à de plus petites surfaces. Cependant les résultats des ouvriers ne sont pas concentrés dans les surfaces les plus grandes, comme on pouvait l'attendre.

6.2.3. Performance des sujets en fonction du résultat obtenu de chaque triangle présenté et des catégories professionnelles de sujets

Figures/Sujets	Triangle Rectangle H Surface = 96		Triangle Scalène I Surface = 192	
	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier
216	-	2	3	2
140	1	1	-	-
108	5	2	-	-
120	-	1	-	-
43	-	1	-	-
192	-	-	2	2
300	-	-	1	1
220	-	-	-	1
70	-	-	-	1
222	-	-	-	1
Refus	-	7	-	6
Total	6	14	6	14

Tableau 6-16. Surface calculée ou estimée de différents triangles selon la catégorie de sujets

estimation/ Sujets	Surface proche de celle obtenue par la formule scolaire		Surestimation*		Sous-estimation		Refus	
	Employé (N=6)	Ouvrier (N=14)	Employé (N=6)	Ouvrier (N=14)	Employé (N=6)	Ouvrier (N=14)	Employé (N=6)	Ouvrier (N=14)
Triangles								
Rectangle H	-	-	6	6	-	1	-	7
Scalène I	2	2	4	5	-	1	-	6
Total	2 (N=12)	2 (N=28)	10 (N=12)	11 (N=28)	- (N=12)	2 (N=28)	- (N=12)	13 (N=28)

*Il faut noter que cinq employés sur six, et deux ouvriers sur quatorze, trouvent la surface la plus petite parmi les possibilités de la formule régionale. Le résultat obtenu dépasse cependant encore de 12 unités la surface calculée par formule scolaire (108 pour 96).

Tableau 6-17. Nature de l'estimation de la surface de triangle selon la catégorie des sujets

Le triangle scalène I, plus éloigné du triangle prototypique des sujets, induit quatre réponses très proches du résultat obtenu par la formule scolaire. Les résultats concernant le triangle rectangle s'éloignent beaucoup de celui obtenu par la formule scolaire. Observons quelques démarches:

Seul un sujet (chef d'équipe) propose de couper le triangle, et le fait pour obtenir la "vraie" surface. Deux autres résultats dérivent d'une erreur dans le calcul arithmétique.

Sujet (contrôleur) : $24+30$, 54, la moitié 27. Alors 24×16 (fait la multiplication par écrit 24×16 .
 Il prend alors le 24 à la place de 27) ça fait 384
 Chercheure: Je ne pourrais pas additionner $16+24$?
 Sujet: Non, pas du tout.
 Chercheure: Mais tout à l'heure vous avez multiplié par la moitié du plus petit ...
 Sujet: Ah?! oui ... je me suis trompé, c'est 24×8 , donc c'est la moitié de 384, 192.

Dialogue 6-28 La systématique du choix du côté...

Ce résultat a été obtenu aussi à travers l'abandon du côté le plus grand et par la multiplication du côté intermédiaire par la moitié du plus petit. Observons:

Sujet (ouvrier) Alors 16, 24 et 30 ... 190!
 Chercheure: 190?
 Sujet: 192!
 Chercheure: comment vous avez fait?
 Sujet: ... 8 d'ici (moitié de 16), mais celui-ci (30) on laisse tomber!
 Chercheure: vous avez laissé tomber le 30?
 Sujet: Oui ... alors 16, la moitié c'est 8. 8 par 24 fait 192. On laisse toujours le plus grand de côté
 Chercheure: je ne comprends pas, à Passagem Velha (engenho voisin) un collègue à toi m'a expliqué qu'il fallait faire la moitié de 30 et après multiplier par la moitié de la somme des autres côtés?!
 Sujet: Ah ça serait très bien (rigole beaucoup) si moi je trouvais un chef d'équipe dont je saurais qu'il fait comme ça!
 Chercheure: Pourquoi comme ça c'est mieux?
 Sujet: On va gagner sans travailler! ils vont payer un terrain qu'on n'a pas travaillé ... ce n'est pas mal parce qu'on travaille d'habitude sans gagner; on gagne une misère ... vous pouvez donner cette idée au patron! (rigole)

Dialogue 6-29 La systématique du choix du côté...

Observons que le sujet arrive à la réponse correcte parce qu'il a utilisé en fait la "formule scolaire". Autrement dit: il a multiplié la moitié de la base (le côté le plus petit du triangle) par le côté intermédiaire, qui dans ce triangle a une mesure proche de la hauteur. (Il s'agit presque d'un angle droit). Nous nous sommes posé la question des raisons pour lesquelles cette stratégie n'est pas apparue avec le triangle rectangle H.

6.3. Quelques conclusions: où les aspects conceptuels et socioculturels sont difficilement isolés

Le premier point qui attire notre attention réside dans la manière dont les compétences mathématiques sont réparties dans la communauté. Le savoir mathématique régional ne semble pas être partagé de façon identique par tous ses membres. Nous pouvions nous attendre à cela: les élèves s'approprient et maîtrisent plus ou moins aisément et plus ou moins rapidement des connaissances diffusées dans le système scolaire; on ne voit pas pourquoi il en serait différemment chez ces sujets. Cependant, nous observons que la répartition est liée à certaines conditions:

- Le sexe: les femmes qui ont participé à cette recherche refusent systématiquement, par incompetence déclarée, de résoudre les problèmes de cette phase. Rappelons qu'une des trois femmes ayant participé à cette recherche a été licenciée entre la première et la deuxième phase du recueil de données. Il semble que le savoir mathématique dans la communauté soit réservé aux hommes.

- Le statut du travailleur: les employés, en général, semblent connaître et employer des stratégies de calcul de surface de différentes natures pour le traitement d'autres quadrilatères que les rectangles et le carré, et pour certains triangles. Seuls trois ouvriers parmi les quatorze emploient des stratégies différentes pour les quadrilatères non rectangles. Pour les triangles, cependant, la grande majorité des employés (six sur six pour le triangle scalène rectangle H et cinq sur six pour le triangle scalène I) emploient la formule classique régionale. Des stratégies nouvelles sont apparues une fois chez les employés et deux fois chez les ouvriers.

En observant isolément les stratégies utilisées par les employés pour les quadrilatères, on pourrait conclure qu'ils prennent en compte la figure géométrique, les conduisant à utiliser une autre stratégie de calcul d'aire. Si nous analysons toutefois ces procédures, les résultats obtenus et les explications des sujets, nous observons que l'emploi de ces stratégies peut être, dans la grande majorité des cas, lié aux consignes données par le patron: "Quand le terrain est comme ça (losange, par exemple) on doit le couper en deux triangles." Tout se passe comme si l'aire obtenue était la même que celle résultant de l'usage de la formule classique, le conflit n'apparaissant pas pour une certaine partie des employés. Le caractère a-systématique des procédures utilisées retient notre attention: à part un des sujets, tous les autres employés, trouvent des aires égales ou plus grandes

pour les losanges et parallélogrammes que pour le carré et le rectangle. Cela peut être dû au caractère formel de la situation de recherche.

Certaines conceptions des sujets ont pu être repérées à travers la reconnaissance d'obstacles de natures différentes. Cette phase témoigne de l'existence de situations où les schèmes erronés sont autant révélateurs de la présence d'obstacles que d'un savoir en voie de constitution. Dans cette phase deux notions semblent constituer des obstacles épistémologiques constatés dans l'histoire de l'évolution des concepts mathématiques: la notion de hauteur et la notion de diagonale.

- la notion de hauteur: les formules employées évitent le recours à la notion de hauteur. Nous avons vu cependant apparaître quelques rudiments de cette notion, notamment lorsque les sujets découpent un parallélogramme en deux triangles et un rectangle au milieu. En faisant cela, ils tracent en fait la hauteur. Cependant cette notion ne paraît pas être intégrée comme telle pour le calcul d'aire.

- la notion de diagonale: cette notion n'a jamais été évoquée lors de la demande de la recherche de la valeur des côtés d'un carré dont la surface a été doublée. Cependant ils utilisent la petite diagonale du losange pour calculer son aire, par son découpage en deux triangles.

Nous avons pu constater encore, à travers les réponses des sujets, un obstacle d'une autre nature. Les difficultés associées au travail avec des nombres décimaux semblent constituer un obstacle socioculturel lorsque le nombre est associé à une mesure. Le travail systématique avec des mesures de grandeurs semble induire chez certains sujets des conceptions erronées sur les décimaux. Le contexte socioculturel paraît ici amplifier les difficultés liées à ces obstacles, voir les pérenniser. Les situations conflictuelles habituelles (conflit de connaissances, contradictions...) ne semblent pas générer des déséquilibres importants, amenant les sujets à intégrer les informations et à modifier le champ conceptuel susceptible de prendre en charge et d'expliquer ces informations. Le franchissement de ces obstacles semble rendu plus difficile.

Les réactions aux situations proposées dans cette phase, qui comportaient quelques conflits, mettent en évidence cette problématique. Ainsi, avons-nous observé combien la coordination des aspects arithmétiques et géométriques dépendent des éléments de la situation.

Dans la première phase les sujets emploient systématiquement la formule régionale de calcul d'aire, semblant négliger les aspects géométriques de ce calcul. Des variantes de ces schèmes, mettant en

relation des opérations au plan des objets géométriques et des opérations numériques ont été employées surtout dans cette phase, lorsque les situations mettaient en évidence ces deux aspects.

Nous pouvons conclure à l'existence d'un savoir local où la figure géométrique est prise en compte pour le calcul des aires (plus clairement pour les quadrilatères). Cela se traduit par la présence de variantes de la formule classique régionale, condition révélatrice du savoir mathématique local. Nous supposons que le maintien de l'emploi de la formule classique locale révèle, peut-être, l'absence de ces compétences chez certains sujets (la majorité des ouvriers). Observons que lors de la comparaison de surfaces quadrilatères, la grande majorité des ouvriers jugent similaires les surfaces des figures de même périmètre. Lors de la comparaison de figures de même périmètre, la majorité des ouvriers (neuf sur quatorze) nient la similitude des aires, mais attribuent la plus grande aire au carré pour des raisons pratiques de travail.

Dans ce chapitre, nous avons analysé les données recueillies dans une situation plus formelle au cours de laquelle des aspects ponctuels de la mesure sont abordés, et permettent d'approfondir certaines questions conceptuelles. Cette analyse complète les résultats du chapitre précédent et permet d'en nuancer les "conclusions". L'introduction dans cette phase de figures géométriques dessinées sur le papier a permis d'approfondir l'analyse des relations entre les aspects numériques et géométriques. Les quadrilatères et les triangles sont traités séparément. Pour les premiers, nous avons analysé:

- les stratégies concernant des figures différentes de même périmètre;
- les réponses obtenues aux demandes de comparaison;
- les réponses obtenues lors de la duplication de la surface d'un carré et de la recherche de la valeur numérique des côtés de ce nouveau carré.

En ce qui concerne les triangles, nous avons analysé les stratégies de calcul en fonction du type de triangle présenté et des catégories professionnelles des sujets. Ces analyses permettent de mieux comprendre le rapport entre stratégie de calcul, catégorie des sujets et écart à la figure prototypique. Nous avons vu apparaître de nouvelles stratégies de calcul, susceptibles de corriger les distorsions les plus graves.

Chapitre 7 : Résultats de la deuxième phase: problèmes complexes de contenu familial et non-familier

Nous avons également cherché à analyser, dans la phase II, les raisonnements des sujets lors de la présentation de problèmes impliquant l'identification et la maîtrise de plusieurs opérations concernant différents aspects du concept de mesure (calculs de surface, de prix, de moyenne de poids,). Ces notions interviennent dans des situations dites "complexes", non pas sous une forme isolée, décontextualisée.

Ainsi, pour résoudre ces problèmes, les sujets devaient effectuer un choix judicieux parmi les données proposées, ainsi que les opérations à leur appliquer. Présentés en langage simple, ces problèmes font référence à des situations qui ne sont pas purement numériques. Des problèmes de conceptualisation spécifique se posent.

7.1. Problèmes de la série I

Ces problèmes abordaient les notions de:

- *Moyenne de poids; calcul du poids total, et calcul du prix* à payer à partir du poids total et du prix par tonne.

Performance des sujets dans les problèmes de moyenne de poids et de calcul de prix

Tableau 7-1 Contenu Familier

Un paysan avait une bananeraie et vendait ses bananes au prix de 370 cruzeiros la tonne. Le paysan et le négociant qui voulait acheter les bananes, se sont mis d'accord pour faire une moyenne de 3 paquets de bananes pour calculer le prix à payer. Les poids des trois paquets choisis étaient de 1; 3 et 2 Kg et il y avait 700 paquets. Combien a-t-il reçu du négociant?						
Notions/ Sujets	Moyenne des régimes		Calcul du Poids Total		Calcul du Prix	
Stratégies	Ouvrier	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier	Employé
Refus	12	2	13	2	13	2
Moyenne: Choix du plus petit poids seulement	-	-	-	-	-	-
Moyenne: système de compensation des poids aboutissement à la moyenne correcte	1	2	-	-	-	-
Moyenne: somme des poids des échantillons (oubli de la division par 3)	1	2	-	-	-	-
Poids total: multiplication de la moyenne de poids par le nombre de paquets	-	-	1	2	-	-
Poids total: multiplication de la somme du poids des échantillons par le nombre des paquets	-	-	-	2	-	-
Prix: multiplication directe par le prix de la tonne	-	-	-	-	-	3
Prix: calcul du prix des kilos qui excèdent la tonne et somme des deux	-	-	-	-	1	1
Total	14	6	14	6	14	6

Tableau 7-2 - Contenu non familier

Un chef d'équipe, à la fin de la journée, a pesé trois faisceaux de canne pour calculer le salaire d'un ouvrier. Le premier faisceau pèse 10 kilos, le deuxième 12 kilos et le troisième 11 kilos. L'ouvrier a coupé 300 faisceaux. On paye cette canne 450 cruzeiros la tonne; combien l'ouvrier va-t-il recevoir?						
Notions/ Sujets	Moyenne des faisceaux		Calcul du Poids Total		Calcul du Prix	
Stratégies	Ouvrier	Employé	Ouvrier	Employé	Ouvrier	Employé
Refus	6	2	6	2	6	2
Moyenne: Choix du plus petit poids seulement	6	-	-	-	-	-
Moyenne: système de compensation des poids - aboutissement à la moyenne correcte	2	3	-	-	-	-
Moyenne: somme des poids des échantillons (oubli de la division par 3)	-	1	-	-	-	-
Poids Total: multiplication de la moyenne de poids par le nombre de faisceaux	-	-	8	3	-	-
Poids Total : multiplication de la somme des poids des échantillons par le nombre de faisceaux	-	-	-	1	-	-
Prix: multiplication directe par le prix de la tonne	-	-	-	-	-	4
Prix: calcul du prix des kilos qui excèdent la tonne et somme des deux	-	-	-	-	8	-
Total	14	6	14	6	14	6

7.1.1. Stratégies de résolution

Le premier point attirant notre attention est le nombre de refus dans ces deux problèmes, notamment son augmentation lorsque le problème est de contenu non familier. De plus, les stratégies employées pour le calcul de la moyenne, du poids total et du prix méritent d'être discutées. Observons quelques fragments de protocoles et les verbalisations qui accompagnent le refus ou la stratégie de résolution.

7.1.1.1. Refus immédiat du problème entier

Les sujets justifient leur refus par leur incompétence et le manque d'expérience professionnelle et scolaire.

1) Pour le problème de contenu familier

Sujet (*chef d'équipe*) *Je ne sais pas, parce que je n'ai jamais pesé des faisceaux!*
Chercheuse: *Mais vous êtes chef d'équipe, vous faites ça, non?*
Sujet: *Oui, mais je travaille en mesurant les terrains, pour fumer, planter... Je n'ai jamais travaillé avec la récolte et le poids.*

Dialogue 7-1 Refus immédiat

Sujet (*ouvrier*) *Si tu donnais ces calculs à mon fils qui sait lire, il ne pourrait pas le faire ... imagine moi qui suis presque analphabète.*
Chercheuse: *Mais tu fais ça tous les jours, non?*
Sujet: *Non, non, ce problème est compliqué, je sais pas le faire.*
Chercheuse: *Quelle est la différence avec ceux de ton travail habituel?*
Sujet: *C'est pas pareil.*

Dialogue 7-2 Refus immédiat

2) Pour le problème de contenu non familier

Sujet (*chef d'équipe*) : *[avant que le chercheur finisse de poser le problème] Ah! ma fille... banane, je mange, quand il y a de l'argent pour acheter, parce qu'ici on trouve que de la canne...*
Chercheuse: *Mais attends... attends...laisse-moi finir, peut-être que...*
Sujet: *Ce n'est pas la peine. On ne sait pas faire ça. Chaque culture a ses secrets...*
Chercheuse: *Et s'il s'agissait de canne à sucre, trois faisceaux de canne?*
Sujet: *Impossible, ce poids n'est pas de la canne à sucre, on ne peut pas le faire...*

Dialogue 7-3 Refus immédiat

Sujet (*chef d'équipe*) : *[après présentation du problème] maintenant? c'est moi qui veux apprendre [rigole beaucoup]*
 Chercheure: *Allez! dis-moi, comment tu fais?*
 Sujet: *Je n'aime pas parler quand je ne suis pas sûr!*
 Chercheure: *Mais, imagine, si on parlait seulement quand on avait des certitudes...*
 Sujet: *[rigole] mais ce n'est pas de ma compétence ; je ne peux pas...*

Dialogue 7-4 Refus immédiat

Sujet: (*ouvrier*) *C'est trop long à faire; il faut avoir de la patience; je ne vais pas me casser la tête maintenant. Ces calculs, je peux les faire qu'à la maison*
 Chercheure: *Tu ne veux pas essayer? S'il avait un paquet de 1 Kg, l'autre de 2 Kg et l'autre de 3 Kg...*
 Sujet: *6 kilos; combien de paquets?*
 Chercheure: *700*
 Sujet: *Ah! il faut faire à la maison. Ce sont des calculs pour ceux qui ont fait de la comptabilité... et moi, j'ai rien fait moi*
 Chercheure: *mais si, regarde s'il s'agissait de la canne à sucre, tu fais ça tous les jours*
 Sujet: *Oui, mais avec les bananes ce n'est pas pareil*
 Chercheure: *Pourquoi?*
 Sujet: *Chaque profession a sa façon de fonctionner*

Dialogue 7-5 Refus immédiat

Ainsi, le refus nous paraît lié notamment au côté artificiel des problèmes. Ils n'ont pu être résolus que par les sujets qui avaient accepté cet artifice.

Bien entendu, la nature du contenu (familier ou non) semble avoir eu un effet supplémentaire sur le refus. Toutefois, ceux dont le contenu restait familier leur ont malgré tout semblé éloignés de leur pratique quotidienne.

En outre, il nous semble que certains sujets ont perçu ces problèmes comme étant des problèmes scolaires. Nous avons pu observer, pour la première fois dans la recherche, des références au milieu scolaire.

Nous avons observé un refus après une tentative sans succès de faire la moyenne des paquets pour le problème non familier. Observons le protocole :

Sujet (ouvrier) :... deux kilos, un et trois; ça fait six kilos
 Chercheure: oui
 Sujet: oui c'est ça qu'on doit faire, la moyenne, il faut ... non je ne sais pas le faire, les calculs sont compliqués

Dialogue 7-6 Refus après tentative

7.1.1.2. Stratégies de calcul de la moyenne

Nous n'avons pas l'intention d'approfondir ici ce concept. Son analyse reste pourtant superficielle, et comme un élément parmi d'autres de la compréhension de la situation-problème. Cependant, nous postulons que des analyses plus approfondies peuvent faire l'objet de recherches ultérieures.

1) Choix du poids d'un des échantillons seulement, le plus petit

Cette stratégie est surtout apparue dans la résolution des problèmes de contenu familier. Elle semblait constituer un reflet de la pratique quotidienne, dans laquelle les faisceaux devraient avoir 10 kilos. Six ouvriers ont employé cette stratégie et deux employés, après avoir trouvé la moyenne correcte, ont utilisé cette valeur pour les calculs. Pour cette raison les employés ne sont pas comptabilisés dans cette stratégie dans le tableau 7.1.. Observons quelques protocoles.

Sujet: (contrôleur) dix; douze et onze kilos. Trois faisceaux, ça fait onze chacun. On fait à dix kilos parce que c'est la norme dans les plantations. L'ouvrier perd, c'est sûr; mais il sait qu'il doit faire des faisceaux de dix kilos.

Sujet (ouvrier) : Il faut peser des faisceaux de dix kilos; on perd le reste
 Chercheure: Mais avec des faisceaux de douze; dix et onze kilos, comment tu fais?
 Sujet: Je fais comme ici. Ici, si on fait un faisceau de quinze kilos c'est comme s'il était de dix kilos
 Chercheure: Mais imagine si tu étais dans une autre usine.
 Sujet: Partout c'est pareil, on fait comme dans la réalité, ce n'est pas la peine de rêver.

Dialogue 7-7 Stratégies de calcul de la moyenne

2) Système de compensation des poids des échantillons aboutissant à une moyenne correcte

Cette stratégie est apparue cinq fois pour le problème de contenu familier et trois fois pour le problème de contenu non familier. Elle consistait à déplacer une unité du poids plus lourd et à l'ajouter au poids plus léger.

Sujet (régisseur) : Ici, on travaille comme ça, l'ouvrier doit faire des faisceaux de dix kilos
 Chercheure: Disons que cela se passait dans une autre usine et l'ouvrier avait fait des faisceaux de dix, de douze et de onze kilos
 Chercheure: On ajoute, ça fait, trente-trois; attends; douze prête un au faisceau de dix kilos, ça fait onze chaque faisceau. Mais je vais faire à dix même parce que c'est plus correct.

Dialogue 7-8 Stratégies de calcul de la moyenne

3) Somme des poids des échantillons

Cette stratégie est apparue une fois chez un employé pour le problème de contenu familial et trois fois pour le problème de contenu non familial.

Sujet (contrôleur) un; deux et trois ça fait six de moyenne.
 Chercheure: Je ne comprends pas très bien; c'est comme ça qu'on fait la moyenne? Par exemple s'il s'agissait de trois faisceaux de canne à sucre?
 Sujet: chaque chose à sa place! Tu me demandes ici la moyenne des paquets des bananes, je te dis: c'est facile: un kilo plus deux kilos et encore trois, ça fait six.

Dialogue 7-9 Stratégies de calcul de la moyenne

Observons que le même sujet a pourtant utilisé le système de compensation de valeurs pour trouver la moyenne du problème familial.

7.1.1.3. Stratégies de calcul du poids total

Multiplication de la moyenne ou de la somme des poids par le nombre de paquets ou des faisceaux

Cette stratégie a été la seule employée. Trois employés ont fait l'opération par écrit, par terre. Cette étape n'a pas semblé poser de difficultés particulières aux sujets. La multiplication de deux unités différentes ("moyenne de poids" * quantité de faisceaux/régimes) pour aboutir au poids total, n'a pas semblé poser de problèmes particuliers aux sujets.

7.1.1.4. Stratégies de calcul du prix

1) Multiplication directe du poids total par le prix de la tonne (quantité de tonnes)

Cette stratégie a été employée par des employés dans les deux problèmes. Il faut noter que le poids total obtenu en kilos est transformé en tonnes avant la multiplication. Observons un protocole:

Sujet (régisseur) : *Il a fait trois cents faisceaux et on paye à quatre cent cinquante [fait l'opération par écrit 450×3 et trouve 1350] Il va gagner mille trois cent cinquante cruzeiros; trois tonnes.*

Dialogue 7-10 Stratégies de calcul du prix

2) Calcul séparé du prix des tonnes et des kilos supplémentaires et somme des deux

Cette stratégie a surtout été employée par les ouvriers (huit fois pour le problème de contenu familial et le seul ouvrier qui a résolu le problème de contenu non familial l'a employée). Un seul employé l'a utilisé lors de la résolution du problème non familial. Observons le protocole de ce dernier.

Problème non familial

Sujet (contrôleur) : *Combien de paquets il y avait?*
 Chercheure : *Sept cents*
 Sujet : *Dis-moi une chose; c'était quoi les poids des paquets?*
 Chercheure : *Un; trois et deux kilos*
 Sujet : *Sept cents paquets... trois cent soixante-dix, la tonne... quatre cent vingt kilos*
 Chercheure : *comment t'as fait*
 Sujet : *[rigole pour avoir fait rapidement] trois paquets, six kilos; j'ai multiplié par 700...*
 Chercheure : *je sais pas, c'est comme ça que tu fais?*
 Sujet : *attends, attends, t'as raison... chaque paquet reste avec une moyenne de deux; on prête un, au paquet d'un kilo... un kilo du paquet qui a trois kilos ... alors sept cents paquets ... ça fait mille quatre cents kilos... trois cent soixante-dix la tonne ... trois cent soixante-dix plus quatre cents kilos. Alors cinq cents kilos ça fait cent quatre-vingt-cinq; quatre cents ...; cent kilos ça fait trente-sept ... cent quatre-vingt-cinq moins trente sept...cent quarante-huit. Cent quarante-huit plus trois cent soixante-dix...cinq cent dix-huit c'est ça; et oui, je n'en perds pas une [rigole beaucoup]*

Dialogue 7-11 Stratégies de calcul du prix

Il faut remarquer ici l'utilisation de la décomposition linéaire :

Rappelons les propriétés d'une fonction linéaire :

$$f(\alpha A + \beta B) = \alpha f(A) + \beta f(B)$$

$$f(1400) = f(1000 + 400) = f(1000) + f(400) = f(1000) + f(500 - 100)$$

$$= f(1000) + f(500) - f(100)$$

$$f(1000) = 370$$

$$f(500) = f\left(\frac{1}{2} \times 1000\right) = \frac{1}{2} f(1000) = \frac{370}{2} = 185$$

$$f(100) = f\left(\frac{1}{10} \times 1000\right) = \frac{1}{10} f(1000) = \frac{370}{10} = 37$$

$$f(1400) = 370 + (185 - 37) = 370 + 148 = 518$$

Tableau 7-3 Décomposition linéaire dans la stratégie d'un calcul de prix en langage mathématique scolaire

Problème familial

Sujet: *(ouvrier) douze; onze et dix kilos; ça fait onze. Trois cents faisceaux de onze kilos ça fait trois mille trois cents; trois tonnes et trois cents kilos. Trois tonnes, ça fait ...; quatre cent cinquante; ...; neuf cents; mille trois cent cinquante... et trois cents kilos. C'est facile, c'est pareil sans un zéro. Alors mille trois cent cinquante plus cent trente-cinq, ça fait mille quatre cent quatre-vingt-cinq cruzeiros.*

Dialogue 7-12 Stratégies de calcul du prix

Nous observons que le concept de moyenne apparaît de façon quelque peu particulière chez les sujets. Le contenu du problème semble jouer un rôle dans les schèmes évoqués. La stratégie consistant à additionner simplement les poids est surtout apparue dans le problème de contenu non familial. Mais, dans ce problème, nous nous demandions si cette stratégie ne serait pas une fonction des valeurs attribuées aux poids. Ces valeurs étaient beaucoup plus petites que celles habituellement utilisées par les ouvriers. Par cette stratégie, les sujets semblent tenter de rapprocher le problème de leur expérience personnelle; ce comportement est souvent observé au cours de cette recherche.

La stratégie consistant à choisir le poids le plus petit ou le poids habituel de référence dans la communauté est apparue seulement dans les problèmes familiaux. Nous avons observé des sujets qui, ayant choisi le résultat correspondant à la moyenne réelle, remplacent ce résultat par celui accepté par la communauté. La raison est double: respecter les habitudes de la communauté et rendre les calculs plus faciles (multiplication par 10).

En ce qui concerne le calcul correct de la moyenne, nous observons des procédures de compensation: la plus grande valeur cède une unité à la plus petite valeur, de façon que les trois chiffres deviennent égaux. Nous n'avons observé aucune addition et division explicite pour le calcul de la moyenne.

Des différences d'attitudes importantes interviennent lorsqu'on passe d'un contenu familial à un contenu non familial. Le protocole ci-dessous, du *même sujet* illustre bien ce constat:

Problème familial

Sujet (ouvrier) : Attends; il a coupé 300 faisceaux ... à 12?
Chercheuse: à 11; 12 et 10 kilos
Sujet: 11; 12 et 10 ... 11; 12 et 10 il (le chef d'équipe) fait par 11 disons
Chercheuse: Mais comment il fait?
Sujet: Parce que moi je coupe de la canne et je le sais; mais la plupart du temps il ne fait pas comme ça. Il veut laisser à 10 kilos(référence aux consignes qu'ils ont de faire des faisceaux de 10 Kg); alors si on se dispute beaucoup il dit: ça va, j'en ai pesé un de 12, je laisse à 11
Chercheuse: mais pourquoi dans ce cas il va choisir le 11?
Sujet: il ne va jamais choisir celui-là. On pense qu'on a le droit, parce qu'il y en avait un de 10, mais il en y avait aussi un autre de 12... Mais, lui, il va choisir le plus léger. Par exemple, il trouve un faisceau de 12; il ne s'arrête pas; il continue à peser jusqu'à qu'il rencontre un plus petit, il pèse 5, 6, si c'est possible. Lorsqu'il trouve un plus petit, il s'arrête et va calculer le salaire pour le plus petit.
Chercheuse: et pourquoi t'as dit 11?
Sujet: parce que c'est celui du milieu, parfois il peut faire comme ça; mais d'habitude il fait avec celui de 10 kilos; c'est à dire; 300 faisceaux ça fait 3 tonnes; à 450 cruzeiros; ça fait, 900... 1350 cruzeiros.
Chercheuse: et toi comment il faut faire pour être correct avec l'ouvrier?
Sujet: à 11; ça fait..., 300 faisceaux...; 3 tonnes et 300 kilos. Alors, 1350 plus ...45; 90; 135; 1485 cruzeiros
Chercheuse: comment t'as fait?
Sujet: Une tonne est 450; 100 kilos est 45; 300 kilos, ça fait 45 plus 45; ça fait 90; plus 45 ça fait 135; plus 1350, 1485.

Dialogue 7-13 Stratégies de calcul du prix

Problème non familial

Sujet (ouvrier) Ah; celui-ci je ne peux pas; je n'ai jamais travaillé avec des bananes de ma vie
Chercheuse: mais, tu as déjà fait un problème avec des faisceaux de canne. Ils se ressemblent non?
Sujet: Non, ces histoires de bananes sont plus difficiles, je ne sais pas
Chercheuse: Et si à la place de bananes je dis qu'il s'agit de canne à sucre
Sujet: Tu rigoles toi, tu as déjà vu des faisceaux de 1 kilo? [rigole beaucoup]
Chercheuse: non, mais si on faisait semblant
Sujet: il y a des choses qu'on ne peut même pas faire, même pour faire semblant; c'est impossible. Ces problèmes il faut poser à ceux qui connaissent bien le sujet, parce que moi je réponds tout ce que tu veux de la canne à sucre. Je suis né ici; mon père aussi, il a travaillé comme chef d'équipe pendant toute sa vie, c'est pour ça que je connais bien les astuces des chefs d'équipe; parce qu'il y a des ouvriers que ne savent pas. Alors je peux t'expliquer plein de choses; mais ces histoires de bananes, ce n'est pas pour moi.

Dialogue 7-14 Stratégies de calcul du prix

7.2. Problèmes de la série II

Le premier problème de la série II abordait les notions de:

1- Calcul d'une **surface** et calcul d'un **prix** relatif à cette surface en fonction d'un prix par unité de surface. Ce problème, de contenu familier, présentait cependant des données numériques de valeurs non habituelles. Ce problème avait pour but de tester les conceptions bidimensionnelles de mesure lors de l'introduction d'autres variables.

Le tableau 7.4. présente les performances des sujets.

Un chef d'équipe avait déterminé qu'un coupeur de canne gagnerait le "salaire" pour une surface de 70 cubos (braças carrées). Il a mesuré le terrain qui avait comme côtés, 14; 20; 8 et 10 braças. Le salaire était de 370 cruzeiros. Combien le coupeur de canne allait-il toucher?				
Notions/ Surface	Calcul de la Surface		Calcul du Prix	
Stratégies	Ouvrier	Employé	Ouvrier	Employé
Refus	8	0	10	2
Surface: multiplication de la moyenne des côtés 14+20 et 8+10	5	6	0	0
Prix: le double du salaire de base avec abandon des unités en plus	0	0	1	1
Prix: le double du salaire de base plus la valeur équivalente des unités en plus	0	0	3	1
Prix: multiplication de la surface par le prix de 70 cubos	0	0	0	1
Prix: double du salaire de base plus le nombre d'unités de surface restantes	0	0	0	1
Réponse immédiate sans explication	1	0	0	0
Total	14	6	14	6

Tableau 7-4. Performances des sujets dans le problème familier de calcul de surface et de prix

7.2.1. Stratégies de résolution

7.2.1.1. Réponse immédiate sans explication pour le calcul d'aire

Sujet (ouvrier) : *Je pense que c'est à peu près deux, trois fois le salaire; mais je ne sais pas expliquer pourquoi!*

Dialogue 7-15 Réponse immédiate sans explication...

Ce sujet refuse de continuer à résoudre le problème; il nous semble que ses réponses sont la conséquence de la discussion qu'il avait eue avec un des contrôleurs. Celui-ci se vantait de sa performance, et essayait d'expliquer les problèmes qu'il avait résolus. Cet ouvrier se mit alors à répéter certaines réponses sans savoir les justifier.

7.2.1.2. Refus immédiat

Aucun employé n'a refusé de commencer à résoudre le problème, mais huit ouvriers sur quatorze ont refusé de résoudre ce problème en affichant leur incompetence.

Sujet (ouvrier) : *Celui-ci ni Jésus Christ descendant du ciel peut me permettre de résoudre cela. C'est un problème pour les patrons. Nous, on veut faire notre tâche et être payé pour ça.*
Chercheur: *Mais imagine que tu sois dans une situation comme celle-là!*
Sujet: *Aucun risque; parce que j'aime des choses correctes. Quand le chef d'équipe essaie de venir avec les histoires de la convention (référence aux normes établies pour le paiement de certains terrains non habituels), on dit tous ici: on va faire un accord c'est mieux comme ça. On ne va pas se casser la tête.*

Dialogue 7-16 Refus immédiat

7.2.1.3. Refus de calculer le prix

Pour le calcul du prix, deux employés ont déclaré ne pas savoir le faire, ainsi que 10 ouvriers. Quelle difficulté illustre donc ce calcul?

Sujet (*chef d'équipe*) : *[essaye de calculer l'aire]...10 plus 8, 18; moitié ça fait 9. 14 plus 20, 34; la moitié fait 17... Je suis malade, j'ai mal à l'oeil!*
 Chercheure: *Qu'est-ce que vous avez?*
 Sujet: *Je me suis blessé avec la feuille de la canne.*
 Chercheure: *Il faut vous soigner!*
 Sujet: *Oui, oui!*
 Chercheure: *Mais vous m'avez dit...*
 Sujet: *Non, je ne sais pas.*
 Chercheure: *Mais c'est bien ce qui vous m'avez dit.*
 Sujet: *Ah ... eh oui, alors j'ai dit 9 et 17; ça fait ... 153; [multiplie les moyennes des côtés opposés]*
 Chercheure: *Oui?!*
 Sujet: *370 cruzeiros, 70 cubos... Non , si je n'étais pas malade, je pourrais le faire.*

Dialogue 7-17 Refus de calculer le prix

Sujet (*régisseur*) : *[après avoir trouvé la surface du terrain] 70 cubos est 370 cruzeiros. Ah, je sais pas le faire. Ici on fait toujours avec 100 cubos.*

Dialogue 7-18 Refus de calculer le prix

Si les stratégies de calcul de surface ne nous apportent pas de données nouvelles, les stratégies de calcul du prix méritent d'être développées.

7.2.1.4. Calcul du prix en doublant d'abord le salaire

1) Double du salaire et abandon de la valeur équivalente des unités en plus

Sujet (*chef d'équipe*) : *153, c'est plus de deux fois le salaire. 740, plus 13 cubos; ça doit faire huit cents et quelque. Mais, on laisse tomber, dans le travail, on laisse tomber et on ajoute un autre jour.*

Dialogue 7-19 Calcul du prix en doublant d'abord le salaire

2) Double du salaire et addition de la valeur équivalente des unités en plus

Sujet (*contrôleur*) : *153; ça fait deux salaires plus 13. Alors 370; ...740, deux salaires... 140 cubos ça fait 740. Bon, 35 cubos ça fait 185 [moitié de 370]; ... 17 cubos environ 90 ; 8 environ 45; 4 cubos environ 12 cruzeiros [le sujet fait des moitiés successives et fait une erreur pour la moitié de 45]. Alors; 12 fois 3 est 36. [en fait il multiplie la valeur approximée de 4 cubos par 3 pour trouver la valeur approximée de 12 (3*4) cubos]. Alors; 740 plus 36 ça fait 776 cruzeiros; il va toucher vers 780 cruzeiros.*

Dialogue 7-20 Calcul du prix en doublant d'abord le salaire

Observons la même stratégie employée par un ouvrier qui ne fait pas d'erreur de calcul.

Sujet (ouvrier) : *Je ne sais pas.*
 Chercheure: *Tu ne veux pas essayer?*
 Sujet: *C'est dur! On a l'habitude de faire par 100 cubos... attends ...370 ; 70 et 70, 140, ça fait 740 par là*
 Chercheure: *Mais ce n'est pas 140, tu m'as dit 153 ... c'est ça?*
 Sujet: *Tu m'embêtes... alors; 70 cubos, 340 cruzeiros; 35 cubos ça fait 185; 17 cubos ça fait 92 ... 8 cubos ça fait 46 cruzeiros; 4 cubos ça fait 23. Ben 23 fois 3, ça fait 69; on dit 70 d'accord? Alors 740 plus 70 ça fait 810 cruzeiros.*

Dialogue 7-21 Calcul du prix en doublant d'abord le salaire

Observons le même principe de résolution de problème avec une variante.

Sujet (ouvrier) [après avoir trouvé l'aire de 153 cubos] *Deux salaires plus 13 cubos; c'est combien le salaire?*
 Chercheure: *370 cruzeiros*
 Sujet: *Le plus difficile c'est de calculer 13 cubos ... Ben; 7 cubos ça fait 37 cruzeiros; alors 14 ça fait 74 cruzeiros; alors 74 plus deux salaires; 740 plus 74 on va avoir 814 cruzeiros*
 Chercheure: *T'as trouvé le prix de 14 cubos; tu pourrais calculer le prix de 13 cubos?*
 Sujet: *Non, non, on n'est pas radin comme ça; là ça va, 13 ou 14; là je ne me dispute pas.*

Dialogue 7-22 Calcul du prix en doublant d'abord le salaire

3) Double du salaire et addition du nombre d'unités en plus

Sujet (ouvrier) *153 c'est deux salaires; 70 plus 70 cubos, 140; plus 13 cubos; ...ça fait 740 cruzeiros; 370 plus 370; plus 13 braças, ça fait 754 cruzeiros...*
 Chercheure: *Je n'ai pas compris.*
 Sujet: *13 cubos ça fait 14 cruzeiros!*
 Chercheure: *comment tu sais?*
 Sujet: *C'est 70 cubos; on ajoute 7 plus 7; ça fait 14. Alors 740 plus 14 est 754 cruzeiros. Je dis comme ça, mais je ne sais pas expliquer.*

Dialogue 7-23 Calcul du prix en doublant d'abord le salaire

7.2.1.5. Calcul du prix par multiplication de la surface obtenue par le prix de 70 cubos

Cette stratégie n'a été employée que par un employé, dont la multiplication n'a pas été clarifiée.

Sujet (<i>employé</i>) : 153 cubos fois 370 cruzeiros.
153
<u>370</u>
11850
<u>4593</u>
566,1
Alors ça fait 566 cruzeiros et 10 centimes.
Chercheuse: Je n'ai pas compris la multiplication, comment t'as fait?
Sujet: comme tout le monde; le résultat est celui-là; j'en suis sûr!

Dialogue 7-24 Calcul du prix par multiplication de la surface...

Le deuxième problème de la série II abordait le calcul d'un prix relatif à un périmètre, en fonction d'un prix donné par une unité de longueur. Ce problème visait à analyser les notions de périmètre et de surface à travers un problème complexe. Le contenu non familier du problème permet d'analyser les possibilités de généralisation d'apprentissage d'une situation à l'autre.

Le tableau 7.5. présente les performances des sujets.

Une femme qui faisait des draps a décidé d'en faire avec des dentelles de points différents. Elle a fait une commande de morceaux de dentelles à une dentellière . Pour chaque carré de 70 cm <i>de côté</i> , la dentellière demandait 500 cruzeiros. Le drap mesurait 1,40 mètres de largeur par 2,10 de longueur. Combien la dame a-t-elle dépensé?				
Notions/ Sujets	Calcul de la surface ou de la quantité d'unités carrées par surface		Calcul du Prix	
Stratégies	Ouvrier	Employé	Ouvrier	Employé
Refus	13	3	12	3
Surface: multiplication d'un côté par l'autre	0	2	0	0
Surface: mesure directe de pavage	1	0	0	0
Surface: somme des côtés	0	1	0	0
Prix: multiplication du prix de l'unité carré par l'aire trouvée à travers la multiplication des côtés	0	0	0	2
Prix: multiplication du prix de l'unité carré par le total d'unités carrés trouvées	0	0	1	1
Prix: réponse immédiate sans explication	0	0	1	0
Total	14	6	14	6

Tableau 7-5. Performances des sujets dans le problème de contenu non familier de calcul de surface et de prix

7.2.2. Stratégies de résolution

7.2.2.1. Réponse immédiate sans explication pour le calcul d'aire

Il s'agit du même ouvrier qui a donné une réponse immédiate sans explication au problème précédent. Il annonce un prix immédiatement après le problème posé, sans pourtant expliquer comment il avait trouvé ce résultat. Il semble qu'il ait entendu les réponses de certains collègues sans comprendre le raisonnement employé pour la résolution. Observons sa réponse:

Sujet (*ouvrier*) : 2000 *cruzeiros*
Chercheur: *comment t'as fait?*
Sujet: *Un mètre quarante plus deux mètre dix ça fait quatre mètres.*
Chercheur: *Quatre mètres. Comment t'as trouvé?*
Sujet: *Je ne sais pas expliquer; mais je sais que c'est deux mille.*

Dialogue 7-25 Réponse immédiate sans explication pour le calcul d'aire

7.2.2.2. Refus immédiat

Dans ce problème, douze ouvriers sur quatorze (un a donné une réponse immédiate sans calcul) et trois employés sur six ont refusé de répondre. Le contenu du problème apparaît ici comme le responsable majeur de l'impossibilité d'adhérer au contrat établi. Aucun de ces sujets n'admet une possible similitude avec les problèmes qu'ils résolvent dans la vie quotidienne. Observons le commentaire ci-dessous, semblant bien illustrer ce point :

Sujet (*employé*) : *[après présentation du problème] C'est comme je vous ai dit. Ces histoires de mesure; parfois on pense que c'est pareil mais ce n'est pas vrai. C'est un problème de couture ça!*
Chercheur: *Mais imaginez que le drap soit un terrain et les carrés de dentelle soient des cubos...*
Sujet: *Non, on peut pas. Parce que, je vais vous dire: ici c'est 70 cm. Une braça, c'est pas ça. Elle fait 2,20 m et un terrain de 1,40 m par 2,10 m, on ne peut même pas imaginer*
Chercheur: *Vous ne pourriez pas faire comme s'il s'agissait d'un terrain?*
Sujet: *Non, parce que chaque chose a ses secrets; la couture les siens, et la canne, les siens.*

Dialogue 7-26 Refus immédiat

7.2.2.3. Calcul de l'aire par la multiplication de la longueur des côtés du drap

Deux employés ont utilisé cette stratégie par calcul écrit. Nous observons chez l'un des deux une perte de la valeur numérique réelle en fonction du travail avec des décimaux. Observons que cette

stratégie induisait une erreur puisque l'unité carrée qui a été donnée n'était pas d'un mètre
Observons les deux protocoles.

Chercheuse: *C'est le dernier, je ne vais plus t'embêter*

Sujet (employé) *Non, tu sais que j'aime ça, jusqu'à maintenant, je les ai faits tous [rigole fier].
Je n'ai rien perdu.*

Chercheuse *[présente le problème]*

Sujet: *Attends, laisse-moi écrire [il écrit par terre 21*14 et trouve 294]*

21

. 14

294

C'est quoi le prix?

Chercheuse: *500 cruzeiros pour chaque carré de 70 cm de côté*

Sujet: *Ici, c'est deux mètres et quatre-vingt-quatorze. Chaque 70 cm fait 500 cruzeiros... Quatre fois sept, vingt huit...c'est 500. Je vais voir si c'est ça; je ne veux pas rater celui-ci; Ben, on va dire que ça fait 3 mètres OK? 2,94 m, on va pas se bagarrer [rigole]. Alors, chaque 70 cm c'est 500 cruzeiros; trois mètres est ... attends. Je fais ça tout de suite ... chaque 70 cm, 500 cruzeiros; 3 mètres; ... deux mètres quatre-vingt-quatorze ... quatre fois sept, vingt huit; c'est quatre fois cinq cents. Alors mille, deux mille. C'est deux mille et quelque; il manque les quatorze ou vingt comme on veut ... je veux le faire ... j'ai envie. 70 cm; la moitié est 35; la moitié de 35 est 17 avec 2,80 m ça fait 2,97 m pour trois cm on ne se dispute pas; t'es d'accord. Alors; 70 cm ça fait 500 cruzeiros. 35 cm ça va faire 250 cruzeiros; 17 cm ça fait 125 cruzeiros et plus les deux mille que j'ai trouvé, moi je dis que ça fait deux mille cent vingt et cinq cruzeiros. Je suis bon non?*

Chercheuse: *Je ne sais pas parce que hier, à Passagem Velha (plantation voisine) un collègue à toi a fait autrement et maintenant je ne sais plus qui a raison.*

Sujet: *comment il a fait?*

Chercheuse: *Il a fait un carré comme le drap avec un côté de 2,10m et l'autre de 1,40m. Alors il a dit que cela faisait deux morceaux de 70 cm dans la largeur qui faisait un mètre et quarante; et il a mis trois morceaux de dentelle dans la longueur qui faisait deux mètres dix. Après il a compté les morceaux et ça faisait 6 et il a multiplié par 500 cruzeiros. Et il m'a dit qu'elle devait payer trois mille cruzeiros.*

Sujet: *Ah non! c'est trop! sauf si on veut voler; parce qu'ici on mesure deux mètres dix par un mètre quarante; ça fait deux mètres quatre-vingt-quatorze. Alors ça fait quatre fois les soixante-dix centimètres; ça fait deux mètres quatre-vingts, plus la moitié de la moitié de soixante dix cm ça fait deux mètres quatre vingt dix-sept par là. Tout ça ça fait deux mille cent vingt et cinq cruzeiros. C'est ça qui est correct. Ce mec qui a dit ça il a rien compris [rigole beaucoup]. Veux-tu que je te prouve d'une autre façon qu'il a tort?*

Chercheuse: *Oui*

Sujet: *On va faire par le prix du mètre: soixante-dix cm est cinq cents cruzeiros; plus trente cm. Trente et cinq cm est deux cent cinquante cruzeiros; on va dire que le mètre est vers 700 cruzeiros. On multiplie sept cents par deux mètres quatre vingt quatorze et on voit que ce n'est pas ça. Si c'était trois mètre à sept cents cruzeiros; trois fois sept, vingt et un. Deux mille et cent; c'est très loin de trois mille [rigole beaucoup].*

Dialogue 7-27 Calcul de l'aire par la multiplication de la longueur des côtés du drap

Le sujet suivant illustre bien l'emploi des opérations arithmétiques et une perte du sens même du problème. Observons qu'il trouve des résultats numériques, tout en étant incapable d'expliquer ce qu'ils signifient et de contrôler les erreurs produites.

Sujet (*employé*) : *On fait deux mètres dix par un et quarante [fait l'opération par écrit]*

$$\begin{array}{r} 210 \\ .14 \\ \hline 840 \\ 210 \\ \hline 3940 \end{array}$$

Sujet: *Trois mille neuf cent quarante. C'est combien le prix?*

Chercheuse: *Cinq cents cruzeiros chaque morceau de soixante-dix centimètres de côté.*

Sujet: *Cinq cents chaque morceau de soixante-dix centimètres de côté. [Fait l'opération suivante]*

$$\begin{array}{r} 3940 \\ .70 \\ \hline 27680 \end{array}$$

Sujet: *Vingt sept mille six cent quatre vingt cruzeiros*

Chercheuse: *Je n'ai pas très bien compris. C'est quoi trois mille neuf cent quarante?*

Sujet: *C'est le drap*

Chercheuse: *Comment le drap?*

Sujet: *Je ne sais pas expliquer, mais c'est ça. Elle doit payer vingt sept mille six cent quatre vingt cruzeiros.*

Dialogue 7-28 Calcul de l'aire par la multiplication de la longueur des côtés du drap

7.2.2.4. Calcul de l'aire par la mesure directe de pavage

Sujet (*ouvrier*) : *Alors, c'était un mètre quarante par deux mètres dix?*

Chercheuse: *Oui.*

Sujet: *Alors ça fait six morceaux à cinq cents cruzeiros, ça fait trois mille.*

Chercheuse: *Comment t'as fait?*

Sujet: *Un mètre quarante, on prend deux morceaux dans la largeur et deux mètres dix on peut mettre trois morceaux dans la longueur, n'est-ce pas? [rigole] Maintenant, je veux faire de la couture si je suis licencié [rigole].*

Chercheuse: *Eh oui, mais tu vas faire de la couture et moi je reste avec des problèmes parce que tu as compliqué ma tête. Hier j'étais à Tetugal [plantation voisine] et un collègue à toi m'a dit que pour résoudre ce problème il fallait multiplier un mètre quarante par deux mètres dix et ...*

Sujet [*interrompt avant la fin*] *Mais non, il est con celui-là [rigole] c'est faux. Tu peux rester avec ta tête tranquille, parce que c'est moi qui ai bien résolu le problème. Il a calculé la surface. Mais là tu m'avais dit que les morceaux avaient soixante dix centimètres de côté et non soixante dix centimètres carrés. Alors? Deux morceaux de soixante dix centimètre de côté ça fait un mètre quarante et trois ça fait deux mètres dix. On dit deux morceaux d'un côté et trois de l'autre, ça fait six et six morceaux à cinq cent cruzeiros ça fait trois mille. C'est comme ça et pas autrement.*

Dialogue 7-29 Calcul de l'aire par la mesure directe de pavage

7.2.2.5. Calcul de l'aire par la somme des côtés

Cette stratégie a été employée par un régisseur. Observons son raisonnement :

Sujet (employé) : [après présentation du problème] Cinq cent cruzeiros pour chaque morceau?
Chercheuse: Oui
Sujet: Deux mètres dix par un mètre quarante, ça fait trois mètres cinquante le drap.
Chercheuse: Comment t'as fait?
Sujet: Deux mètres dix plus un mètre quarante ça fait trois mètres cinquante. Alors chaque morceau de soixante dix ça fait cinq cent cruzeiros; **ça fait trois mille cinq cents cruzeiros**
Chercheuse: Je ne comprends pas
Sujet: Soixante dix fois cinq cents ne font pas trois mille cinq cents; ... non, **trente cinq mille?**
Chercheuse: Mais attends pourquoi t'as multiplié soixante dix par cinq cents?
Sujet: Elle va gagner trois cent cinquante cruzeiros.
Chercheuse: Explique moi comment t'as fait.
Sujet: Soixante-dix centimètres est cinq cents cruzeiros. Alors trois mètres et demi; ça fait cinq morceaux
Chercheuse: Comment ça?
Sujet: Trente et cinq partagé en sept, c'est cinq, donc cinq fois soixante-dix; ... non cinq fois cinq cents cruzeiros ça fait deux mille cinq.

Dialogue 7-30 Calcul de l'aire par la somme des côtés

En résumé, nous avons analysé, dans ce chapitre, la portée et les limites des connaissances mathématiques développées en dehors du système scolaire, ainsi que des raisonnements des sujets lorsque le choix des procédures dépend de l'interprétation d'un problème. La notion de moyenne apparaît de façon quelque peu particulière chez les sujets, puisque obtenue à travers la compensation des valeurs numériques. Le poids des normes culturelles s'impose fortement puisqu'il induit certains sujets à abandonner les réponses obtenues par le calcul, au profit de la valeur admise socialement. Le contenu des problèmes semble jouer un rôle important dans les schèmes évoqués. Cela se révèle essentiellement par le nombre plus élevé de refus dans les problèmes non familiers.

Chapitre 8 : Résultats de la troisième Phase

Ce chapitre a pour objet d'analyser les données complémentaires à celles des phases précédentes, dans la mesure où nous cherchions à étudier les compétences des sujets en fonction de plusieurs variantes situationnelles.

La phase I, plus exploratoire, n'avait pas permis d'approfondir certains aspects conceptuels, qui avaient donc été repris pendant la phase II. Cette dernière comportait toutefois quelques lacunes, notamment en ce qui concerne les conditions d'acceptation d'un système de calcul de surface qui, pris de façon isolée, pénalise le propriétaire de l'usine.

Nous avons antérieurement abordé la question des conditions socioculturelles contribuent à valider certaines procédures mathématiques, même lorsque celles-ci sont fausses. Nous avons pu décrire comment certains paramètres de la situation de recherche (présentation de la figure géométrique, par exemple) amenaient quelques sujets à recourir à des variantes de la stratégie classique de calcul de surface. De même des consignes sociales particulières (de l'usine) ont amené certains travailleurs rencontrés à corriger d'eux-mêmes les surestimations les plus importantes issues des formules régionales de calcul d'aire appliquées aux "terrains" non habituellement travaillés.

Un point reste toutefois obscur: certaines sociétés maintiennent des procédures mathématiques fausses, en raison du profit sous-jacent qu'elles permettent. Nous avons vu que chez les Egyptiens primitifs les erreurs constantes d'approximation allaient toujours dans le même sens, à savoir celui de l'intérêt du pharaon ou du plus fort. Dans le cas qui nous intéresse ici, nous n'avons pourtant pas pu identifier de bénéfice pour l'usine de l'usage de la formule régionale. Bien entendu, nous n'analysons ici qu'un sous-ensemble (système de calcul d'aire) de l'ensemble des procédures qui caractérisent les usines sucrières au Nordeste du Brésil. Toutes les procédures identifiées conduisent pourtant à une surestimation (plus ou moins importante) des aires calculées, ce qui devrait conduire, en principe, à une perte économique pour l'usine. Cela paraît contradictoire avec le discours des personnes interrogées, y compris du gérant agricole, qui nous a répété à plusieurs reprises: "l'usine gagne toujours". On peut en effet surestimer l'aire et surestimer les mesures de longueur et le prix payé aux ouvriers.

Ainsi, nous avons pensé que si ce système devait amener une perte pour l'usine, ce déficit devait apparaître dans le contrôle administratif et comptable. S'il n'apparaissait pas, il nous fallait tenter de repérer les éléments permettant la compensation.

Une autre explication possible pouvait résider dans les conditions de l'entretien, et du contrat ainsi établi. Nous nous sommes posé à ce moment la question de savoir si les procédures observées par nous étaient réellement celles employées dans les situations de travail quotidien.

Nous avons alors envisagé de nous adresser à la Fédération des Travailleurs de l'Agriculture de l'état de Pernambuco (FETAPE), afin d'obtenir des renseignements sur d'éventuels textes officiels concernant les calculs d'aire et les formes de salaires.

Ainsi, dans ce chapitre, nous aborderons successivement:

- 8.1. les données recueillies auprès de la FETAPE: mesures publiées dans le journal officiel déterminant les normes de salaire par surface travaillée;
- 8.2. Quelques observations dans les bureaux de l'usine;
- 8.3. Les calculs d'aire effectivement réalisés sur les terres appartenant à l'usine.

8.1. Données recueillies auprès de la FETAPE: mesures publiées dans le journal officiel déterminant les normes de salaire par surface travaillée

Tous les ans depuis 1979, une grève générale des coupeurs de canne est déclenchée, au moment de la récolte. Les revendications sont diverses mais quelques-unes reviennent régulièrement:

- réajustement des salaires sur l'inflation;
- application de la "loi du terrain" (voir chapitre 3);
- déplacements par car;
- actualisation du tableau de tâches, etc.

Cette dernière revendication mérite particulièrement notre attention, en raison des caractéristiques de ce tableau. Les mesures prises par le Tribunal Régional du Travail en 1991, en réponse à ces revendications, figurent dans un document précis. Son texte présente les caractéristiques d'attribution des salaires pour des terrains variables. Il doit permettre d'assurer aux ouvriers un salaire juste, en fonction de la diversité des situations de travail qu'ils peuvent rencontrer dans cette activité. Les formules classiques de calcul d'aire ne peuvent pas rendre compte, pour eux, de ces

différences. Ce texte est constitué d'un ensemble de cas particuliers de terrains ainsi que des salaires correspondants. Nous rencontrons ainsi le même caractère de recettes mathématiques que celui des anciens Égyptiens.

1) Nettoyage du terrain (par nature de végétation, mato signifiant herbe):

[salaire de base: pour le travail sur une conta]

mato grosso et de gancho - 0,50 conta (50 cubos),

mato de talho et de capoeira - 1,00 conta (100 cubos),

mato fino (1,50 contas (150 cubos),

mato de espano em aleluia et mentrasto - 2,00 contas (200 cubos).

2) Plantation: [salaire de base: pour le travail sur cinq contas]

- dans des terrains accidentés où le bœuf ne peut pas aller: 3,00 contas (300 cubos),

- dans des terrains en pente - 4,00 contas (400 cubos)

...

3) Fumage: [salaire de base: pour le travail sur dix contas]

- dans des terrains accidentés où le bœuf ne peut pas aller: 6,00 contas (600 cubos),

- dans des terrains en pente - 8,00 contas (800 cubos)

...

4) Récolte - pesage des faisceaux

canne brûlée attachée:

- moins de 5 kilos le faisceau - accord avec l'ouvrier; s'il n'y a pas d'accord, en fonction de la paye journalière ;

- de 5 à 8 kilos - 1000 kilos pour une paye journalière

- plus de 8 kilos - 1200 kilos pour une paye journalière

Tableau 8-1 Tableau de tâches journalières minimum par régime de production:

Ces exemples nous donnent des informations sur les systèmes de compensation qui existent en fonction des variations du terrain où les tâches sont effectuées, ou encore des variations du poids des faisceaux de canne à sucre réalisés par les ouvriers. Le texte officiel justifie et légalise, dans certains cas, l'accord entre les chefs d'équipe et les ouvriers.

Toutefois, si la quantité de travail en fonction de la difficulté de la tâche semble compensée par l'attribution de terrains de taille variée, un point reste à clarifier: la plupart des exemples donnés nécessitent un calcul d'aire. Nous n'avons pas trouvé dans ce texte, de consignes pour l'application de variantes de la formule locale lorsque les terrains ne sont pas des rectangles, des carrés ou encore des triangles proches du triangle prototypique ici analysé. Nous postulons que cela ne peut se réaliser sans une perte réelle pour l'usine, que dans les conditions suivantes:

- 1) Dans les plantations de canne à sucre, les terrains attribués aux ouvriers pour la réalisation des tâches peuvent le plus souvent être mesurés par la formule régionale sans grandes surestimations. Il s'agit des terrains prototypiques.
- 2) Pour les terrains qui s'éloignent des prototypes, des variantes des stratégies sont appliquées. Ces variantes sont acquises à travers des consignes verbales de la communauté;
- 3) Parfois des accords entre les ouvriers et les chefs d'équipe rendent inutiles le calcul de l'aire de ces terrains.

8.2. Quelques observations dans les bureaux de l'usine

Nous avons effectué des observations ponctuelles dans le bureau de l'usine, pour examiner les conditions de contrôle du poids de la canne arrivée à l'usine, de manière à repérer les éventuelles pertes en fonction des calculs de surface.

Les camions chargés de canne à sucre sont pesés deux fois avec et sans leur charge. La différence est faite et l'employé responsable du contrôle vérifie l'estimation de poids faite à l'avance pour chaque terrain et le poids réel. Il nous en informe, et nous constatons que le poids réel est toujours supérieur à celui estimé dans les terres.

8.3. Les calculs d'aire effectivement réalisés sur les terres appartenant à l'usine.

Lors des phases précédentes, nous nous intéressions essentiellement aux situations individuelles de résolution de problème, les observations naturalistes de la Phase I permettant surtout de comprendre les caractéristiques plus larges de la situation.

Nous avons déjà évoqué comment les procédures de résolution de problèmes changent en fonction de la représentation que les sujets se font de la situation. Nous avons postulé dans le chapitre précédent que certaines stratégies ne pouvaient pas apparaître dans la pratique quotidienne. Nous

allons analyser par conséquent les stratégies de calcul de surface dans des situations réelles de travail.

Notre présence auprès des sujets dans la situation de travail modifie déjà le contexte naturel. En plus, nous étions toujours accompagnées, dans cette phase, d'une personne de l'administration de l'usine. Ceci étant dit, nous avons préféré "observer" sans prévenir, à un certain moment de la journée, où les chefs d'équipe mesuraient les terrains pour les attribuer aux ouvriers.

Bien entendu, cela avait pour inconvénient une perte éventuelle d'informations issues des échanges verbaux entre ouvriers et chefs d'équipe, susceptibles d'indiquer des modifications par rapport aux stratégies usuelles.

Pour ces raisons nous avons sélectionné des équipes de travail au hasard, et non pas les sujets ayant participé aux deux autres phases de la recherche, qui connaissaient déjà les objectifs de la recherche. Le tableau 8.1. présente les terrains que nous avons pu observer, et les stratégies de calcul de surface. Nous avons observé trois chefs d'équipe qui coordonnaient 21, 23 et 24 groupes d'ouvriers.

Stratégies de calcul d'aire des terrains							
Types de terrain		Formule classique		multiplication de 2 côtés plus petits des triangles		Accord sans mesure	Total
		aux dépens de l'ouvrier	aux dépens de l'usine	aux dépens de l'ouvrier	aux dépens de l'usine		
Quadrilatères	carrés 10x10	30	3	-	-	-	33
	rectangles 10x20	16	2	-	-	-	18
	rectangles 10x15	15	4	-	-	-	19
Triangles	Mesures inconnues	-	-	-	-	6	6*
	14,10, 10	1	-	-	-	-	1
	15,10, 10	-	-	-	1	-	1
Total		52	9**	-	1**	6	68

*Des six triangles dont les mesures étaient inconnues, quatre ont été estimés par le chef d'équipe comme ayant cinquante cubos (moitié d'une conta) et deux estimés comme ayant cent cubos (une conta)

**Huit sur dix mesures qu'impliquaient des préjudices pour l'usine correspondaient aux tâches réalisées par des femmes.

Tableau 8-2. Stratégies de calcul d'aire des terrains dans des situations de travail

Nous n'avons pas constaté l'attribution d'autres quadrilatères que des "rectangles" aux ouvriers pour leur travail quotidien. Cela laisse penser que les chefs d'équipe essayent de rapprocher le plus possible les terrains des formes prototypiques pour lesquelles la formule régionale peut être appliquée avec le moins d'erreur.

Nous avons pu constater l'existence de démarches qui bénéficient autant à l'usine qu'à l'ouvrier, ainsi que des accords entre les chefs d'équipe et les ouvriers.

Les calculs aux dépens de l'ouvrier s'effectuent surtout à travers la mesure des côtés des terrains. Dans la région on appelle cette technique le "saut du chat". Cela consiste à déplacer la braça, de telle façon que les longueurs des côtés mesurés soient plus petites que les longueurs réelles, de telle sorte que l'aire obtenue soit plus petite que l'aire réelle. Le chef d'équipe déplace la perche de façon que le point final de la première braça ne corresponde pas au début de la deuxième. Le point de départ de l'unité de mesure suivante est toujours espacé du point d'aboutissement de la précédente. L'ouvrier va ainsi travailler sur une aire plus grande que celle pour laquelle il est payé. Nous observons cinquante-deux cas en soixante-huit mesures observées.

Les calculs aux dépens de l'usine apparaissent dans deux situations:

- dans le cas où le chef d'équipe tourne la braça de telle façon que le début de la deuxième unité de mesure empiète sur la première. Cela permet à l'ouvrier de travailler moins pour le même salaire;
- à travers le choix des côtés du terrain devant être multipliés pour le calcul d'aire, lorsqu'il s'agit d'un terrain triangulaire.

Nous observons dix cas sur soixante-huit mesures observées. Dans ces dix mesures, il s'agissait pour huit d'entre eux de terrains travaillés par des ouvrières. Rappelons que les chefs d'équipe nous informaient, pendant la deuxième phase de recueil de données, qu'ils faisaient profiter de temps en temps certains ouvriers de cette tricherie. Ils ajoutaient qu'ils ne pouvaient pas faire cela systématiquement parce que l'usine pouvait découvrir la supercherie. Certains travailleurs nous ont dit que les chefs d'équipe protégeaient les femmes, pour deux raisons:

- ils reconnaissaient qu'elles passaient beaucoup plus de temps que les hommes pour réaliser le même travail, car elles avaient moins de force physique;
- ils avaient avec elles des rapports affectifs plus proches ... Observons que tous les chefs d'équipe sont des hommes.

Pour les terrains triangulaires, les calculs aux dépens de l'usine n'apparaissent pas à travers la mesure des côtés, mais plutôt dans le choix des côtés qui sont multipliés pour le calcul d'aire. Le cas le plus exceptionnel est celui d'un triangle 15,10,10, travaillé par une ouvrière, qui a touché un salaire correspondant au travail pour 100 cubos (multiplication de deux côtés de valeur 10). Par la formule "régionale" on obtient une aire de 75 cubos ($10 * 7,5$); où 10 est la moyenne de deux côtés 10 et 7,5 la moitié de 15.

Les accords établis entre les ouvriers et les chefs d'équipe sont importants. Ils ont été réalisés lorsqu'il s'agissait de terrains de forme triangulaires. Nous n'avons pas pu observer les mesures réelles et donc nous ne pouvons pas dire s'ils étaient surestimés ou sous-estimés. Toutefois, l'aire estimée de ces terrains a toujours été de cinquante cubos (moitié d'une conta) pour les terrains plus petits et de cent cubos (une conta) pour les terrains plus grands. Cela rend plus facile le calcul du salaire journalier. Ces accords semblent être le résultat d'un consensus social. Le surintendant agricole qui nous accompagnait nous en a informée:

« Les ouvriers n'aiment pas travailler sur des triangles parce qu'ils perdent toujours si on calcule avec la méthode de l'usine. Alors l'ouvrier dit: "le chef d'équipe est un voleur". Mais ce n'est pas ça; il doit protéger l'usine parce que sinon à la fin de la semaine si on s'aperçoit d'une différence en faveur de l'ouvrier, le chef d'équipe est licencié et doit retourner à son poste de coupeur de canne. »

Ces données semblent nous offrir des éléments complémentaires pour la compréhension de l'usage du système régional de calcul d'aire: les aspects cognitifs et mathématiques semblent à certains moments complètement dépendants du consensus socioculturel. Cela rend plus explicite le fragment de discours du surintendant agricole lors d'un de nos retours sur les plantations.

W. (En rigolant) : *« Quand tu m'avais dit que tu travaillais en "mathématique cognitive" je savais que ça poserait un problème sérieux, parce que dans l'usine tout est différent des méthodes habituelles. Les méthodes techniques sont trop compliquées dans les plantations. Dans les plantations il faut une chose rapide. ... Je suis né dans les plantations et je ne sais pas qui a inventé cette méthode; ... mais une chose est sûre, celui qui l'a inventée a voulu favoriser l'usine; c'est toujours comme ça. On sait bien comment il faut faire dans chaque situation. Tous les ouvriers, mais surtout les chefs d'équipe le savent. Parfois, si on ne le fait pas, c'est parce qu'on sait que dans la totalité c'est possible de faire des cadeaux à certains ouvriers qui le méritent. Comme d'habitude l'usine gagne toujours, ça fait partie des choses qu'on peut faire. En outre, il n'y a pas*

une formule unique pour tous les terrains comme dans les méthodes techniques. T'as bien vu que pour les triangles on ne fait pas toujours pareil. Cela dépend de beaucoup de choses. Alors comprendre tout ça avec la "mathématique cognitive" je ne sais pas si c'est possible. »

Ce chapitre permet une compréhension plus large du fonctionnement cognitif des sujets à la lumière de certaines considérations socioculturelles. Nous avons décrit quelques instructions officielles concernant le calcul des salaires en fonction du type de tâches effectuées et du type de terrain travaillé. Nous avons observé que le texte officiel justifie et légalise, dans certains cas, l'accord entre les chefs d'équipe et les ouvriers en ce qui concerne l'estimation de l'aire des terrains. Les observations dans les bureaux de l'usine ne présentent aucun indice que le "patron" subirait des préjudices liés au mode de calcul utilisé dans les plantations. Enfin, dans les calculs d'aire effectivement réalisés dans des situations effectives de travail, les travailleurs de la canne à sucre semblent gérer les distorsions résultant de l'emploi de la formule régionale par des processus de négociation largement contingents (dépendant des rapports sociaux locaux). D'une manière générale, ces résultats confirment que les procédures de résolution de problèmes changent en fonction de la représentation que les sujets se font de la situation.

Conclusion

Cette recherche relève du domaine de recherches que constituent les rapports entre "*Culture et Cognition*". Dans cette perspective, l'analyse des processus cognitifs prend son sens par rapport au fonctionnement de la culture dans laquelle ils sont observés. Ainsi, les réponses des sujets sont analysées selon les valeurs et les représentations spécifiques de la culture à laquelle ils appartiennent.

Lieu privilégié de contradictions où les règles culturelles et la rationalité semblent constamment s'affronter, le contexte de cette recherche se caractérise par l'expression de paradoxes faisant ressortir des aspects particuliers du fonctionnement cognitif des sujets. Bien que soumis au poids de la norme sociale, ils font preuve d'une souplesse relative dans les schèmes qu'ils emploient; on constate aussi des variations intra-individuelles et interindividuelles non négligeables.

La méthodologie employée croise l'observation ethnographique, l'entretien clinique de type piagétien et "l'expérimentation" un peu plus formalisée. Cette méthodologie nous a semblé mieux adaptée à la détection de ces contradictions. Les différentes situations exploitées nous ont ainsi permis de repérer la complexité de certains raisonnements "mathématiques" développés en situation de travail. Ces raisonnements dépendent à la fois de certains aspects conceptuels et des "règles sociales". Autrement dit, nous avons repéré des invariants sur lesquels les variables culturelles interviennent fortement et leur confèrent des significations particulières. Les procédures de résolution de problèmes et leur explicitation changent en fonction de la représentation que les sujets se font de la situation.

L'analyse de quelques-unes de ces représentations nous fait avancer dans la compréhension des questions évoquées lors du premier chapitre concernant les compétences mathématiques des publics peu scolarisés. Il s'agit principalement des difficultés de généralisation des compétences acquises hors du système scolaire et des difficultés d'explicitation des procédures et de leurs raisons. A cela s'ajoutent les différences culturelles entre le chercheur et les sujets, différences qui peuvent être responsables de certains effets concernant les représentations des sujets à l'égard des situations proposées, parfois inhabituelles pour eux.

Il ne nous apparaît pas utile de répéter ici les conclusions partielles des chapitres précédents. Nous sommes confrontés à un ensemble d'effets: relations interpersonnelles, relations intergroupes,

structure socioculturelle, caractéristiques du fonctionnement cognitif individuel. Nous pouvons nous intéresser à l'un ou l'autre de ces aspects, mais une perspective d'ensemble s'impose. Il nous paraît donc nécessaire, dans cette conclusion, de confronter ces phénomènes, d'observer comment ils interagissent. Ainsi, nos résultats sont-ils analysés ici dans une perspective plus large, dans laquelle les normes de la culture étudiée constituent une clef essentielle pour comprendre:

- les processus cognitifs des sujets, leur degré de conceptualisation et leurs possibilités de généralisation;
- le sens des quelques verbalisations recueillies, ou de leur absence;
- le décalage entre la signification attribuée aux situations par le chercheur et par les sujets.

9.1. Conceptualisation développée hors du système scolaire et possibilités de généralisation

L'idée que certaines pratiques de travail induisent des formes de développement cognitif ne paraît plus discutable aujourd'hui. On peut admettre également que les habiletés pratiques s'appuient sur une base conceptuelle qui s'actualise dans le contexte des activités de travail.

Toutefois, les particularités des conceptualisations résultant de l'interaction des processus cognitifs individuels avec les habitus d'un milieu spécifique sont moins étudiées.

Nous avons observé des procédures locales de résolution de problèmes très éloignées de celles validées par l'éducation formelle, et qui restent cependant reconnues et même recommandées par un milieu social spécifique. Nous avons observé également des surgénéralisations, c'est-à-dire, des phénomènes d'application de raisonnements particuliers à des classes de situations où ces raisonnements ne sont plus valables.

L'argument consistant à attribuer les difficultés relatives à la généralisation à l'aspect "situationnel" des épreuves proposées et à la faible scolarisation des sujets semble insoutenable, dans la mesure où les sujets scolarisés présentent eux aussi ces difficultés. La dichotomie entre connaissance concrète, informelle, situationnelle d'une part et connaissance abstraite, formelle et générale d'autre part, ne nous paraît pas la plus utile pour comprendre ces phénomènes.

Nous avons également observé plusieurs indices d'une conceptualisation implicite, tournée vers le résultat de l'activité et non pas vers l'activité cognitive elle-même. C'est ainsi que le concept de mesure se manifeste à travers des compétences variées.

Ces compétences nous sont révélées à travers l'usage des différentes procédures de traitement des situations proposées, lesquelles semblent tenir compte non seulement du contenu du problème, mais aussi de l'interlocuteur (chercheur) et des pratiques sociales admises localement. Autrement dit, les sujets mettent en œuvre des invariants opératoires différents en nature et en puissance, ce qui se traduit par des stratégies différentes. Ces invariants dépendent à la fois du degré de conceptualisation du réel propre à chaque sujet et des variations des situations.

Dans cette recherche, nous avons constaté à plusieurs reprises:

- l'application d'un schème à une classe trop large de situations: tous les quadrilatères sont traités comme des rectangles;
- l'application d'un schème à une classe plus étroite que celle à laquelle il pourrait en fait être appliqué efficacement: par exemple, le refus de répondre lorsque les situations ne sont pas familières;
- la mise en place de nouveaux schèmes lorsque les précédents ne peuvent plus supporter le déséquilibre: lorsque les formes géométriques et les valeurs numériques sortent des limites habituelles, et donnent jour aux contradictions;
- le maintien d'une réponse erronée indépendamment de l'acquisition d'un nouveau schème que les sujets semblent avoir intégré. Dans ce cas, le déséquilibre probablement engendré par les contradictions paraît restauré par un compromis d'ordre social.

Les limites imposés par la culture semblent en fait agir conformément à la perspective vigotskyenne:

- l'appropriation des objets culturels ne peut se faire indépendamment des relations interindividuelles et de la culture qui imprègne ces relations;
- la signification conceptuelle de ces objets ne peut être séparée de leur signification culturelle.

Le concept de médiation sociale, qui traverse toute l'œuvre de Vygotski, peut nous aider à comprendre la nature de ces processus:

- les connaissances humaines sont sociales et transmises dans des structures sociologiquement repérables: les situations de travail, dans notre cas;
- l'apprentissage individuel se fait pour une large part avec l'aide d'autrui.

Il s'agit ensuite de comprendre pourquoi cette conceptualisation s'est révélée locale, ne concernant que l'aire des terrains, et ne permettant pas à nos sujets de reconnaître ces éléments dans d'autres situations.

Le nombre élevé de refus dans les problèmes non familiers peut être interprété comme une difficulté de généralisation et comme un caractère fortement "localisé" des compétences mathématiques de nos sujets.

Nous considérons que ce refus traduit la difficulté d'un individu à intégrer la situation proposée comme un problème pour lui;

- soit d'un point de vue conceptuel: le problème est ressenti comme hors de sa portée;
- soit d'un point de vue socioculturel: le problème n'apparaît ni plausible ni significatif.

Les commentaires des sujets révèlent que les problèmes complexes sont la plupart du temps considérés par eux comme étant hors de leur portée, ou sans importance.

Vergnaud (1992b) observe que "... le sens n'est pas dans les situations elles-mêmes." "... ce sont les schèmes évoqués chez le sujet par une situation ou par un signifiant qui constituent le sens de cette situation ou de ce signifiant pour cet individu." Ainsi, parler de la signification d'une situation-problème pour un sujet implique que cette situation et les signifiants associés, fassent appel à des schèmes qui puissent être repérables.

Ainsi, pour identifier si les situations-problèmes sont perçues comme de vrais problèmes pour nos sujets, l'analyse des situations et des schèmes est essentielle, au même titre que la prise en compte des signifiants et du discours.

9.2. Explicitation des procédures de résolution de problèmes: le sens de quelques verbalisations, ou de leur absence

Bruner (1991) observe: "Nous étions des psychologues pétris d'une tradition qui met au centre l'individu. Pourtant, les systèmes symboliques que les gens utilisent pour construire des significations sont déjà en place; ils sont déjà "là", profondément enracinés dans la culture et dans le langage..."

Bruner ajoute: "*Une psychologie sensible à la dimension culturelle (...) s'appuie (et doit s'appuyer) non seulement sur ce que les gens font réellement, mais aussi sur ce qu'ils disent qu'ils font, et sur ce qu'ils disent des raisons qui les ont poussés à faire ce qu'ils ont fait.*"

Or, les difficultés présentées par des publics peu scolarisés pour expliciter leurs procédures de résolution de problèmes sont bien connues. Il en est de même des problèmes qui en découlent pour l'analyse des processus cognitifs. Ceci concerne notamment les compétences mathématiques, puisque leur justesse doit normalement s'appuyer sur une justification. C'est pourquoi, d'ailleurs, nous avons dissocié conceptualisation et langage de manière à ne pas exclure les éléments conceptuels qui ne sont pas explicites et verbalisés.

La distinction entre conceptions et compétences permet de résoudre au moins partiellement ce problème. Vergnaud (1992a) observe que les premières s'expriment assez facilement avec des signifiants langagiers et symboliques. En revanche, les compétences ne trouvent pas aussi aisément une expression et c'est à travers les conduites des sujets qu'il faut les étudier.

On peut ainsi repérer et valider des compétences en l'absence de verbalisation. Cela représente déjà, à notre avis, une grande avancée. Toutefois, comme les compétences s'appuient sur une connaissance vraie ou plausible du réel, nous devons chercher à identifier ces connaissances.

Vergnaud (1992a) propose une reconstitution des conceptions implicites à partir des conduites des sujets et de ses verbalisations. Toutefois, l'analyse des protocoles verbaux des sujets peu scolarisés ne fournit souvent que peu d'informations, que le chercheur va pourtant essayer d'interpréter, selon son propre modèle théorique. Dans d'autres situations ces informations sont un peu plus riches. On peut notamment se demander "dans quelle mesure ces verbalisations permettent de remonter aux processus cognitifs mis en œuvre par un sujet dans la tâche étudiée" (Caron-Pargue et Caron, 1989). Toutefois on peut se demander également si une analyse des variables de situations peuvent nous offrir des moyens de comprendre les raisons de ces différences. Existe-t-il des modalités susceptibles d'entraîner des représentations différentes et ainsi des modes d'explicitation et de résolution différents?

Rappelons la position qui est la nôtre : essayer de comprendre les processus cognitifs mis en œuvre par un sujet, dans des situations sociales particulières de résolution de problèmes. Pour permettre cela, il est nécessaire de connaître les éléments et les relations impliqués dans la situation, dont le discours est un des composants.

Vergnaud (1992b) observe qu' "on ne peut théoriser sur l'apprentissage des mathématiques ni à partir du seul symbolisme, ni à partir des situations seulement. Il faut considérer le sens des situations et des symboles. La clef est de considérer l'action du sujet en situation, et l'organisation de sa conduite. D'où l'importance accordée au concept de schème."

Haroche, Henry & Pêcheux (1971, cf Borel, 1974) remarquent que tout discours, même théorique, est une pratique qui produit du sens et cette production est historiquement déterminée et agissante au sein des conflits de positions idéologiques (attitudes et représentations), lesquels manifestent l'ensemble des rapports sociaux de production dans une société donnée.

Ainsi, nous postulons que l'analyse du sens des verbalisations (même lorsque celles-ci ne se réfèrent pas exactement au raisonnement mathématique) peut offrir des éléments additionnels d'interprétation.

Pourtant, un problème s'impose: peut-on discuter les verbalisations? De quel point de vue, dans quelle perspective? Quels sont les aspects du discours qui nous intéressent dans une recherche de cette nature?

La réponse n'est pas simple, puisque les instruments d'analyse, impliquent une connaissance non négligeable de ce domaine, en raison non seulement du nombre important des études réalisées sur le discours, mais aussi de la nécessité de créer des instruments nouveaux qui permettraient une analyse convenable des problèmes spécifiques soulevés par cette recherche.

Nous ne pouvons pas faire ici l'analyse approfondie des verbalisations des sujets. La traduction du portugais en français des verbalisations des sujets, et les différences culturelles, rendent difficile la reconstitution du sens de certaines expressions. Nous voudrions seulement attirer l'attention sur certains aspects de la recherche.

Dans les quatre chapitres de résultats, nous nous sommes efforcée de décrire de la façon la plus fidèle possible les procédures des sujets étudiés, en apportant de temps en temps quelques commentaires interprétatifs sur la compréhension de chaque situation-problème. Nous avons privilégié pour cela l'entretien clinique de type piagétien, qui consiste à chercher les justifications des réponses observées. Notre intention était de montrer comment les sujets se font une idée de la norme dans leur culture. Ceci nous a permis de donner du sens aux verbalisations qui traitent des exceptions par rapport aux normes.

Nous avons observé que lorsqu'il s'agit de situations ordinaires, perçues comme conformes aux normes, les réponses s'imposent d'elles-mêmes et n'exigent pas d'explications particulières. En revanche, lorsque des situations non habituelles (valeurs numériques, figure géométrique, contenu du problème) sont présentées, et surtout lorsque des schèmes non habituels sont évoqués, nous observons des explications d'une autre nature. Elles consistent presque toujours en une justification comportant la description d'un monde possible où l'exception rencontrée peut éventuellement faire sens, avoir une "signification". Les sujets évoquent par exemple les conditions dans lesquelles les différences de procédures peuvent s'expliquer par les circonstances de la réalité, lesquelles permettent de rendre compte d'interprétations différentes.

Ainsi, les verbalisations ou (leur absence) nous ont-elles permis de détecter les conceptions sous-jacentes aux compétences. La mesure semble bien être conçue comme l'association d'un nombre à un objet, mais le processus de cette association est assez particulier. Ce nombre peut être le résultat:

- soit d'un accord verbal entre les interlocuteurs;
- soit d'une mesure réelle à travers un instrument de mesure local. Mais même dans ces cas, le caractère erroné de la mesure (saut du chat, par exemple) peut être admis comme une règle sociale.

Le concept de mesure et l'évaluation de sa plausibilité semblent être associés au salaire, lequel a d'abord une signification sociale.

Vergnaud (1990) observe que la fonction de communication du langage, notamment en mathématique, ne peut s'exercer utilement qu'en s'appuyant sur cette autre fonction du langage qu'est sa fonction de représentation. D'après cet auteur, cette fonction est triple:

- représentation des éléments pertinents de la situation,
- représentation de l'action,
- représentation des relations entre l'action et la situation.

L'activité langagière exprime aussi d'autres éléments importants, comme l'implication du sujet dans la tâche ou dans le jugement émis, ses sentiments, son estimation de la plausibilité d'une hypothèse ou d'une conclusion, ou encore la relation de ces éléments entre eux.

Bril et Lehalle (1988) observent: "pour que la communication verbale soit socialement adaptée, il ne suffit pas de maîtriser le code linguistique, il faut également que l'échange verbal soit approprié au contexte et à l'interlocuteur."

9.3. La représentation de la chercheuse et celle des sujets.

Nous ne pouvons pas négliger notre propre rôle en tant qu'interlocuteur, même si nous avons été attentive à ne pas introduire dans les entretiens les connaissances scolaires qui n'avaient pas été évoquées par les sujets. Nous étions de toutes façons des représentants de la culture scolaire.

Nous avons esquissé dans le deuxième chapitre nos propres représentations des mathématiques. Cela nous semblait indispensable dans une étude où l'origine culturelle du chercheur est différente de celle des sujets, et où les systèmes de valeurs et de pratiques peuvent valider socialement des stratégies alternatives de calcul non conformes au modèle mathématique.

Bien que nous ayons étudié les compétences mathématiques acquises hors du système scolaire, un parallèle avec les mathématiques scolaires s'impose. Existe-t-il des prémisses de base régissant les différences entre mathématique scolaire et non scolaire, et dans quelle mesure nos résultats clarifient-ils cette question? Comment les sujets de cette recherche se représentent-ils les problèmes "mathématiques" présentés?

D'après Moscovici (1984, cf. Abreu & Bishop, 1993) les mathématiques scolaires peuvent être perçues comme une forme de représentation sociale, organisée autour des lois d'un univers réifié. D'un autre côté, les mathématiques non scolaires peuvent être perçues comme une forme de représentation sociale organisée autour des lois d'un univers consensuel. Ces diverses organisations sociales ont un impact sur le fonctionnement psychologique. D'après cet auteur, ces deux univers sont structurés selon des lois différentes. L'univers réifié respecte les lois de la logique et de la vérification empirique. L'univers consensuel respecte les lois d'un accord mutuel dérivé de l'usage et des conséquences.

Il n'est pas déplacé de revenir maintenant sur la mesure et sur sa signification sociale et historique. Cela permettra peut-être de resituer l'ensemble de nos observations et de mieux comprendre le fonctionnement cognitif de nos sujets.

Serres,(1993) observe qu' "en français comme dans les langues gréco-latines, le mot mesure désigne exactitude, précision et justesse dans le rapport que les choses elles-mêmes entretiennent avec une règle donnée, mais, en même temps, une modération, toute humaine, que l'on souhaite voir paraître dans les dispositions officielles ou juridiques, et, peut-être, avant tout, une sorte de moyenne, milieu, axe ou centre d'où l'on aperçoit, d'un côté, les avantages et les désagréments, de

l'autre, comme le bilan d'une justice." Cet auteur ajoute : "... nous ne sûmes pas toujours, que je sache, de géométrie dans l'espace. Nous inventions donc mille ruses, cent dispositifs, astuces, tours et finesses pour nous tirer d'affaire. ... Pour exprimer cette intelligence vitale de base, les Grecs usaient, précisément, d'un mot de la même famille que mesure: Métis, ruse fine qui se faufile parmi des risques impossibles, imposée par la force des choses et la puissance des hommes et qui passe, débrouillarde, entre deux écueils... l'astuce qui permet de se tirer d'affaire permet au faible, parfois, de damer le pion au fort, à commander... en paraissant obéir, comme il arrive qu'on fasse devant les puissants."

Cette perspective historique sur les origines de la géométrie nous amène à réfléchir sur les phénomènes rencontrés dans cette recherche. Les stratégies de calcul des sujets ne révèlent-elles pas parfois des astuces, visant à contourner les contradictions du système régional de calcul d'aire? Ne révèlent-elles pas des accords implicites qui constituent la "loi" de la communauté?

Serres (1993), encore, observe qu' "avant le consensus savant sur la précision de la découpe ou la nécessité de la démonstration, un contrat juridique s'impose et met d'abord tous les gens concernés d'accord. ...revenus sur le terrain devenu chaotique, les harpédonaptes les redistribuent et donc font renaître le droit, effacé. Celui-ci réapparaît en même temps que la géométrie; ou plutôt, les deux naissent avec la notion de limite, de bord et de définition, avec la pensée analytique. Le droit précède la science, et, peut-être, l'engendre; ou plutôt: une origine commune, abstraite et sacrée, les rassemble."

Dans cette recherche, l'intérêt social et le poids d'une habitude partagée prédominent sur l'intérêt personnel des travailleurs. Nous observons ainsi un compromis social dans le sens où le conçoit Nordon (1993). Cet auteur distingue "le consensus du compromis: dans un compromis, les différences sont reconnues mais chaque partie fait des concessions; dans un consensus, les différences sont niées." Cet auteur ajoute que "même dans un domaine d'apparence aussi neutre que les mathématiques, accepter un consensus, c'est aider l'ordre établi à se perpétuer."

Dans cette communauté de travailleurs de la canne à sucre, nous avons constaté à plusieurs reprises que les différences et contradictions ne sont pas niées, mais intégrées dans une forme de fonctionnement cognitif qui semble considérer ces différences. De plus, nous avons trouvé des indices d'une conceptualisation mathématique qui est parfois inhibée ou refoulée par la pression sociale. Les conceptions sous-jacentes aux compétences intègrent ces deux aspects et semblent

exprimer à la fois le poids du réel et la "légèreté" des mathématiques. Nous trouvons des indices de ces phénomènes en plusieurs moments de notre enquête: par exemple certains sujets trouvent la moyenne exacte mais lui substituent la valeur admise régionalement. De même, certains sujets admettent la différence entre l'aire des quadrilatères de même périmètre mais n'en calculent pas moins la même aire à l'aide du système de calcul régional.

Nous avons proposé aux sujets des situations-problèmes comportant une quantité d'informations dont ils étaient censés pouvoir discerner les composantes. La remarque évidente ici est que les composantes privilégiées ne sont pas les mêmes pour le chercheur et pour les sujets.

Ainsi, nos sujets semblent guidés par un ensemble de normes (sociales et mathématiques), et par des procédures interprétatives permettant de rendre compte des écarts par rapport aux normes, procédures qui font référence à des modèles bien définis de valeurs. Les situations-problèmes proposées sont représentées en fonction de ces normes, alors que ces normes n'existent pas pour le chercheur.

Le chercheur, guidée elle-aussi par un autre ensemble de normes et intéressée par des compétences "mathématiques" s'est vue confrontée également au problème de devoir développer des compétences "sociales" adaptées. Largement implicites, ces compétences supposent elles-aussi des conceptualisations sous-jacentes sur les catégories d'interlocuteurs et les rapports de pouvoir et d'influence. Vergnaud (1992b) observe qu'on reconnaît mieux le rôle du cognitif dans les rapports avec les objets et les phénomènes physiques qu'avec les objets et les phénomènes sociaux."

L'analyse des compétences mathématiques requiert, bien entendu, une analyse des opérations de pensée nécessaires au traitement d'une situation donnée. Toutefois, lorsqu'elles sont acquises dans une culture, comme celle étudiée dans cette recherche, on doit tenir compte des compétences sociales qui sont développées par ailleurs et qui sont parfois en conflit avec elles, et avec lesquelles il leur faut composer. Il nous semble pertinent de se poser la question du type de compétence assurant la meilleure adaptation à l'environnement social.

Ainsi, nous essayons de réaliser, en tant que chercheur une reconstruction "rationnelle" du fonctionnement cognitif des sujets.

Ce que nous oublions peut-être parfois, c'est que, comme l'affirme Serres (1993), « **avant d'être rationnels, nous étions intelligents** » .

Références bibliographiques

- Abdi, H. (1987). *Introduction au traitement statistique des données expérimentales*. Grenoble : PUG.
- Abreu, G. de (1988a). *O uso da matemática na agricultura: o caso dos produtores de cana-de-açúcar*. (Mémoire de Mestrado inédit). Université Fédérale de Pernambuco, Brésil.
- Abreu, G. de et Bishop, A. (1993). "Do children bring "home mathematics" to their understanding of the "school mathematics". *Proceedings of Twelfth Biennial Meetings of the International Society for the Study of Behavioral Development (ISSBD)*, Recife, Brésil.
- Abreu, G. de et Carraher, D.W. (1988b) The Mathematics of Brazilian Sugar Cane Farmers. *Proceedings of the Sixth International Congress on Mathematical Education*, Budapest, Hongrie.
- Acioly, N.M. (1985). *A Lógica Matemática no Jogo do Bicho: compreensão ou utilização de regras?* (Mémoire de de Mestrado inédit). Université Fédérale de Pernambuco, Brésil.
- Acioly, N.M. (1989). *Interaction sociale: variable négligeable dans des situations de recherche? Une étude clinique sur le pourcentage et la proportionnalité*. (Mémoire de D.E.A. inédit). Paris : Université René Descartes.
- Acioly, N.M. et Bellier, J.P. (1992). Insertion sociale et professionnelle: rôle de l'employeur dans les métiers de la vigne en basse Bourgogne . *Actes centre-est*, 4, 28-37.
- Acioly, N.M. et Schliemann, A.D. (1986a). Intuitive Mathematics and Schooling in a Lottery Game. *Proceedings of the 10th PME Conference* (p. 223-228). Londres, Angleterre.
- Acioly, N.M. et Schliemann, A.D. (1986b). Escolarização e conhecimento matemático desenvolvido no contexto do jogo do bicho. *Cadernos de Pesquisa*, 61, 42-57.
- Amaral Ferlini, V.L. (1984) *A Civilização do Açúcar* . São Paulo : Ed.Brasiliense.
- Bachelard, G. (1967) *La Formation de l'Esprit Scientifique*. Paris : Librairie Philosophique J. Vrin.
- Bishop, A. (1979) Visualising and Mathematics in a Pre-technological Culture . *Educational Studies in Mathematics*, 10 (2), 135-146.
- Bishop, A. (1988). *Mathematical Enculturation. A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Cambridge : Kluwer Academic Publishers.
- Blaye, A. (1989a). Interactions sociales et constructions cognitives: présentation critique de la thèse du conflit sociocognitif. Dans Bednarz, N. et Garnier, C. (dir.), *Construction des savoirs, obstacles et conflits* (p. 183-194). Ottawa : Ed. Agence d'Arc.
- Blaye, A. (1989b). Nature et effets dans des situations de résolution de problèmes entre paires.

- Dans Bedn rz, N. et Garnier, C. (dir.), *Construction des Savoirs, obstacles et conflits* (p. 206-214). Ottawa : Ed. Agence d'Arc.
- Borel, M. J. (1974). Introduction à une étude de l'argumentation : raisons et situation d'interlocution. *Revue Européenne de Sciences Sociales*, 32, 65 – 93.
- Bril, B. et Lehalle, H. (1988). *Le Développement Psychologique est-il Universel? Approches interculturelles*, Paris : PUF.
- Bronckart, J.P. (1985). *Le Fonctionnement des discours*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, 4 (2), 165 – 198.
- Brousseau, G. (1986) . Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 33-115.
- Bruner, J. (1991). ... *Car la culture donne forme à l'esprit : de la révolution cognitive à la psychologie culturelle*. Paris : Eshel.
- Caron, J. (1983). *Les régulations du discours*. Paris : PUF.
- Caron-Pargue, J. et Caron, J. (1989). Processus psycholinguistiques et analyse des verbalisations dans une tâche cognitive. *Archives de Psychologie*, 57, 3-32.
- Carraher, T.N. (1986). From drawings to building: working with mathematics scales. *International Journal of Behavioral Development*, 9, 527-544.
- Carraher, T.N. (1989). *Sociedade e Inteligência*. São Paulo : Cortez Editora.
- Carraher, T.N.; Carraher, D.W. et Schliemann, A.D. (1982). Na vida dez, na escola, zero; os contextos culturais da aprendizagem da matemática. *Cadernos de Pesquisa*, 42, 79-86.
- Carraher, T.N. et Schliemann, A.D. (1983). Fracasso Escolar: uma questao social. *Cadernos de Pesquisa*, 45, 3-19.
- Carraher, T.N., et Schliemann, A.D. (1988). Culture, Arithmetic and Mathematical Models. *Cultural Dynamics*, 1(2), 180–194.
- Carroll, L. (1985). *Alice au pays des merveilles et De l'autre côté du miroir*. Paris : Gründ.
- Chandler, M. J. (1988) Structures sociales et cognition sociale. Dans Hinde R.A., Perret-Clermont A.N. et Stevenson-Hinde J. (Dir.), *Relations Interpersonnelles et Développement des Savoirs* (p. 363-378), Fribourg : Delval.
- Changeux, J.P. et Connes, A. (1989). *Matière à Pensée*. Paris : Odile Jacob.

- Chevallard, Y. (1990). On mathematics Education and Culture: Critical Afterthoughts. *Educational Studies in Mathematics*, 21 (1), 3-27.
- Cléro, J. P. (1990). *Epistémologie des Mathématiques*. Paris : Nathan.
- Cole, M. et Bruner, J. (1971). Cultural differences and inferences about psychological processes. *American Psychologist*, 26 , 867-76.
- Cole, M. et Scribner, S. (1974). *Culture and Thought, a Psychological introduction*. New York : John Wiley et Sons.
- Cole, M. (1985). Mind as a cultural achievement: implications for IQ testing. Dans Eisner, E. (Dir.), *Learning and Teaching, the ways of knowing* (p. 218-249), Chicago : National Society for the Study of Education.
- Connors, J. (1990). When Mathematics meets Anthropology: Need for Interdisciplinary Dialogue. *Educational Studies in Mathematics*, 21 (5), 461-469.
- Coquin-Viennot (1989). Le discours justificatif en Mathématique: l'implication du locuteur selon la représentation du référent. *Proceedings of the 13th PME Conference*, (p. 188-195). Paris, France.
- Correia de Andrade, M. (1985). *Classes Sociais e Agricultura no Nordeste*. Recife : Editora Massangana.
- Coulon, A. (1987). *L'ethnométhodologie*. Paris : PUF.
- D'Ambrosio, U. (1986). *Da realidade à ação: reflexões sobre a educação e matemática*. São Paulo : Sumus Editorial.
- Dieudonné, J. (1982). Mathématiques vides et mathématiques significatives. Dans Apéry, R., Caveing, M., Descles, J.-P. et Dieudonné, J. (Dir.) *Penser les Mathématiques* (p.15-38). Paris : Editions du Seuil.
- Dieudonné, J. (1987). *Pour L'Honneur de L'Esprit Humain. Les mathématiques aujourd'hui*. Paris : Hachette.
- Doise, W. (1988). Régulations sociales des opérations cognitives. Dans Hinde R.A., Perret-Clermont A.N. et Stevenson-Hinde J. (Dir.), *Relations Interpersonnelles et Développement des Savoirs* (p. 363-378), Fribourg : Delval.
- Doise, W. et Mugny (1981). *Le Développement Social de L'Intelligence*. Paris : Inter Edition.
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques* (Thèse de doctorat d'état), Université Paris VII.
- Douady, R. (1986). Jeux de Cadres et Dialectique Outil-Objet. *Recherches en Didactique des*

Mathématiques, 7, (2), 5-31.

- Douady, R. et Perrin Glorian, M.J. (1989) Un Processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20, (4), 387 -424.
- Erman, A. et Ranke, H. (1952). *La civilisation égyptienne*. Paris : Payot.
- Fayol, M. (1990). *L'Enfant et le Nombre. Du comptage à la résolution de problèmes*. Paris : Delachaux et Niestlé.
- Flato, M. (1990). *Le Pouvoir des Mathématiques*. Paris : Hachette.
- Foucault, M. (1971). *L'ordre du discours*. Paris : Gallimard.
- Freyre, G. (1989). *Nordeste*. Rio de Janeiro : Editora Record.
- Freyre, G. (1974). *Maîtres et Esclaves. La formation de la société brésilienne*. Paris : Gallimard.
- Fromm, E. (1963). *La Peur de la Liberté*. Paris : Buchet-Chastel.
- Garnier, C.; Bednarz, N. et Ulanovskaya, I. (1991). *Après Vygotski et Piaget: perspectives sociale et constructiviste. Ecoles russe et occidentale*. Bruxelles : De Boeck.
- Geertz, C. (1978). *A Interpretação das Culturas*. Rio de Janeiro : Zahar Editores.
- Gerdes, P. (1988). On Culture, Geometrical Thinking and Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 19 (2), 137-162.
- Gerdes, P. (1988). On Possible Uses of Traditional Angolan Sand Drawings in the Maths Classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 19 (1), 3-22.
- Gerdes, P. (1981). Changing Mathematics Education in Mozambique. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (4), 455-477.
- Gilly, M. (1989). A propos de la théorie du conflit socio-cognitif et des mécanismes psychosociaux des constructions cognitives: perspectives actuelles et modèles explicatifs. Dans Bednarz, N. et Garnier, C. (dir.), *Construction des savoirs, obstacles et conflits* (p. 162-182). Ottawa : Ed. Agence d'Arc.
- Gombert, J.E. - (1990). *Le Développement Métalinguistique*. Paris : PUF.
- Greenfield, P. (1966). On culture and conservation. J. Bruner, R. Olver et P. Greenfield (Dir.), *Studies in Cognitive Development* (p. 225-256). New York : John Wiley.
- Greenfield, P. et Childs, C. (1977). Weaving, color terms, and pattern representation: cultural influences and cognitive development among the zinacantecos of Southern Mexico. *International Journal of Psychology*, 11, 23-48.

- Greenfield, P. et Lave, J. (1982). Cognitive aspects of informal education. Dans Wagner D. et Stevenson H. (Dir.), *Cultural perspectives on Child Development* (p.181-207). San Francisco: Freeman.
- Hoc, J.M. - (1991). L'ergonomie cognitive: un champ pluridisciplinaire dans les sciences cognitives. Dans Vergnaud, G. (Dir.), *Les Sciences Cognitives en débat* (p. 41-56). Paris : Editions du CNRS.
- Ifrah, G. (1985). *Les Chiffres ou l'histoire d'une grande invention*. Paris : Robert Laffont.
- Kaiser, D. (1991). La représentation des connaissances en intelligence artificielle Dans Vergnaud, G. (Dir.), *Les Sciences Cognitives en débat*. Paris : Editions du CNRS.
- Lave, J. (1977). Cognitive consequences of traditional apprenticeship training in Africa. *Anthropology and Educational Quarterly*, 7, 177-180.
- Lave, J. (1988). *Cognition in Practice*. New-York : Cambridge University Press.
- Lave, J. (1989). The acquisition of culture and the practice of understanding, in J. Stigler, R. Shweder, and G. Herdt (Dir.), *The Chicago Symposia on human development*. Cambridge, U.K. : Cambridge University Press.
- Leite Lopes, J.S. (1978). *O Vapor do Diabo: o trabalho dos operarios do açúcar*. Rio de Janeiro : Paz e Terra.
- Lévi-Strauss, C. (1958). *Anthropologie Structurale*. Paris : Plon.
- Lima, N.C. (1985). *Aritmética na Feira*. (Thèse de maîtrise inédite), Universidade Federal de Pernambuco, Recife , Brésil.
- Linhart, R. (1980). *Le Sucre et la Faim*. Paris : Editions de Minuit.
- Loi, M. (1982). Avant-propos Dans Apéry, R., Caveing, M., Descles, J.-P. et Dieudonné, J. (Dir.) *Penser les Mathématiques* (p.7-14). Paris : Editions du Seuil.
- Luria, (1976). *Cognitive Development*. Cambridge : Harvard University Press
- Mead, M. (1978) - The evocation of psychologically relevant reponses in ethnological field work. Dans Spindler G. D. (Dir.), *The making of psychological anthropology* (p. 89-139). Berkeley : University of California Press.
- Meserve, B. E. (1980). The History of Mathematics as a Pedagogical Tool. Dans, Zweng, M., Green, T., Kilpatrick, J., Pollak, H. et Suydam, M. (Dir.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* . Bâle : Birkhäuser.
- Mota, C.G. (1972). *Nordeste 1817: estruturas e argumentos*. São Paulo : Perspectiva.

- Musgrove, F. (1982). Culture, relativism and the curriculum. Dans Musgrove, F., *Education and Anthropology* (p. 114-143). New York : John Wiley.
- N. Martins, P.H. (1990). Agonia e desintegração do poder canavieiro em Pernambuco. Mesa redonda sobre: a economia canavieira - dinâmica e tendências de integração na economia regional e nacional. *Seminário sobre a socioeconomia de Pernambuco*. FIPE. Transcription personnelle.
- Nordon, D. (1993). *Les mathématiques pures n'existent pas*. Arles : Actes Sud.
- Nunes, B.O. et al (1985). Uma experiência de trabalho no meio rural. *Psicologia, Ciência e Profissão* 5 (2), 27-31.
- Nunes, T., Schliemann, A.D., et Carraher, D.W. (1993) - *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge, U.K. : Cambridge University Press.
- Pailhous, J. et Vergnaud, G. (1989). *Adultes en reconversion*. Paris : la Documentation Française.
- Pastré, P. (1991) *Essai pour introduire le concept de didactique professionnelle: rôle de la conceptualisation dans la conduite de machines automatisées*. (Thèse de doctorat) Université Paris V.
- Perret-Clermont, A.N. et Brossard, A. (1989). L'intrication des processus cognitifs et sociaux dans les interactions. Dans Hinde R.A., Perret-Clermont A.N. et Stevenson-Hinde J. (Dir.), *Relations Interpersonnelles et Développement des Savoirs* (p. 441-465), Fribourg : Delval.
- Perret-Clermont, A.N., Perret, J.F. et Bell, N. (1989, février) The social construction of meaning and cognitive activity in elementary school children. Paper presented at the *Conference on Socially Shared Cognition*. University of Pittsburg, Etats-Unis.
- Piaget, J. (1972) Intellectual evolution from adolescence to adulthood . *Human Development*, 15, 1-12.
- Piaget, J., Inhelder, B. et Szeminska, A. (1973). *La géométrie spontanée de l'enfant*. Paris : PUF.
- Reed, H.J. et Lave, J. (1979). Arithmetics as a tool for investigations relations between culture and cognition. *American Anthropologist*, 6, 568-582.
- Rogalski, J. (1985). *Acquisition de la bidimensionalité (combinatoire, espace, mesure) chez les élèves d'âge scolaire et préscolaire* (Thèse de Doctorat d'Etat) Université Paris VII.
- Rogoff, B. (1981). Schooling and the development of cognitive skills. Dans Triands, H.C. et Heron, A. (Dir.) *Handbook of Crosscultural Psychology Volume 4. Developmental Psychology* (p. 233-294) Boston: Allyn et Bacon.

- Rosch, E. H. (1973). On the internal structure of perceptual and semantic categories. Dans T. H. Moore (Dir.), *Cognitive development and the acquisition of language* (p. 111-144). New York : Academic Press.
- Rosch, E. H. (1975). Cognitive representations of semantic categories. *Journal of Experimental Psychology*, 104, 192-233.
- Sales, I.C.; Ferro, J.A.S. et Carvalho, M.N.C. (1986). Metodologia de Aprendizagem da participação e de organização de pequenos produtores. *Documento produzido para o programa de treinamento SUDENE/PNUD/BIRD, para o curso sobre processos de organização de pequenos produtores rurais*. Recife, Brésil.
- Saxe, G.B. et Moylan, T. (1982). The Development of Measurement Operations among the Oksapmin of Papua New Guinea. *Child Development*, 53, 1242- 1248.
- Saxe, G.B. et Posner, J. (1983) The Development of Numerical Cognition: Cross-Cultural Perspectives. Dans Ginsburg, H. P. (Dir.) *The Development of Mathematical Thinking* (p. 291-317). New York : Academic Press.
- Schliemann, A.D. (1984). Mathematics among carpentry apprentices: implication for school teaching. Dans Damerow, P., Dunckley, M., Nebres, B. et Werry, B. (Dir.) *Mathematics for all* (p. 92-95) Paris : UNESCO.
- Schliemann, A.D. (1986). Escolarização formal versus experiência prática na resolução de problemas: um estudo com marceneiros e aprendizes de marcenaria. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 2 (3), 233-244.
- Schliemann, A.D. et Acioly, N.M. (1989a). Mathematical knowledge Developed at Work: the contribution of practice versus the contribution of schooling. *Cognition and Instruction*, 3, 185-221.
- Schliemann, A.D. & Acioly, N.M. (1989). Numbers and operations in everyday problem solving. Dans Keitel, C., Bishop, A., Damerow, P. et Gerdes, P. (Dir.) *Mathematics, Education, and Society* (p. 126-128). Paris, UNESCO.
- Scribner, S. et Cole, M. (1973). Cognitive consequences of formal and informal education. *Science*, 182, 553-559.
- Scribner, S. (1984). Studying working intelligence. Dans Rogoff, B. et Lave, J. (Dir.), *Everyday Cognition: it's development in social context* (p. 9-40). Cambridge, MA : Harvard University press.
- Serres, M. (1989). *Eléments d'Histoire des Sciences*. Paris : Bordas.
- Serres, M. (1993) *Les Origines de la Géométrie*. Paris : Flammarion.
- Sharp, D., Cole, M., & Lave, C. (1978). Education and cognitive development: The evidence from

experimental research. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 44(1-2), 1-112.

Upinsky, A.-A. (1988). *Clefs pour les mathématiques*. Paris : Seghers.

Vergnaud, G. (1981a). *L'enfant, La Mathématique et La Réalité*. New York : Peter Lang.

Vergnaud, G. (1981b). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(2), 215-232.

Vergnaud, G. (1983a). Why is an epistemological perspective a necessity for research in mathematics education. Dans Carss, M. (Dir.), *Proceedings of the fifth annual meeting of PME*, (p. 2-20). Bâle : Birkhäuser.

Vergnaud, G. (1983b) Didactique du concept de volume. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(1), 9-25.

Vergnaud, G. (1984, Avril). Didactics as a content-oriented approach to research on the learning of physics, mathematics and natural language. *Proceedings of the 68th Annual Meeting of the American Educational Research Association*. New Orleans, Etats-Unis.

Vergnaud, G. (1987a). Psychologie et didactique: quels enseignements théoriques et méthodologiques pour la recherche en Psychologie. Colloque La Psychologie Scientifique et ses applications. Clermont-Ferrand.

Vergnaud, G. (1987b) - Problem solving and concept development in the learning of mathematics - E.A.R.L.I. Second Meeting, Tübingen

Vergnaud, G. (1987c) - Questions vives de la Psychologie du développement cognitif - Colloque d'Aix-en-Provence

Vergnaud, G. (1987d). Chapitre de conclusion. Dans Janvier, C. (Dir.), *Problems of Representation in the teaching and Learning of Mathematics*, (p.). Londres : Lawrence Erlbaum associates.

Vergnaud, G. (1988a). L'Élève face à la tâche: problèmes à résoudre, difficultés à surmonter. *European Journal of Psychology of Education*, N° hors série, 15-21.

Vergnaud, G. (1988b). Theoretical Frameworks and empirical facts in the psychology of mathematics education. Dans Hirst, A. et Hirst, K. *Proceedings of the sixth International Congress in Mathematical Education*, (p. 29-49). Budapest, Hongrie.

Vergnaud, G. (1990) - La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), 133-170.

- Vergnaud, G. (1991). Morphismes fondamentaux dans les processus de conceptualisation. Dans Vergnaud, G. (Dir.) *Les Sciences Cognitives en débat*. Paris : Editions du CNRS.
- Vergnaud, G. et al. (1992a) Approches didactiques en formation d'adultes. *Éducation Permanente*, 111, 7-257.
- Vergnaud, G. (1992b, juin). Didactique et psychologie cognitive. *Rapport de synthèse et de discussion pour le colloque Formation et apprentissage des adultes peu qualifiés des 24 et 25 juin 1992 organisé par le Ministère de la recherche et de l'espace*.
- Vignaux, G. (1976). *L'Argumentation: essai d'une logique discursive*. Genève : Librairie Droz.
- Vinh, B. et Lunzer, E. (1965). *Conservations Spatiales*. Paris : PUF.
- Vygotski (1985). *Pensée et Langage*. Paris : Messidor/Editions Sociales.
- Watzlawick, P., Helmick, J.B. et Jackson, D. (1972). *Une Logique de la Communication*. Paris : Editions du Seuil.
- Watzlawick, P. (1978). *La Réalité de la Réalité. Confusion, désinformation, communication*. Paris : Éditions du Seuil.

Annexes

ANNEXE I

GUIDE D'ENTRETIEN - PREMIERE PHASE

1. DONNEES PERSONNELLES

Nom: _____ Religion: _____

Age: _____ Sexe: _____ Occupation: _____

Lieu de naissance: (à la campagne ou en ville?) _____

Adresse: _____

Conditions socio-economico-financières:

- pendant l'enfance: _____

- pendant l'âge adulte: _____

Etat civil: _____

Conjoint: nom: _____

âge : _____ profession: _____

années d'école: _____

Obs: _____

Enfants: Prénom Travail? Profession? Etudiant? Classe?

_____	_____	_____	_____	_____
_____	_____	_____	_____	_____
_____	_____	_____	_____	_____
_____	_____	_____	_____	_____
_____	_____	_____	_____	_____

Dans le cas d'interruption des études, pourquoi?

2. HABITATION

Logement: Propriétaire() de l'usine() loué()

Prix du loyer: _____ Pourcentage du salaire: _____

Quelles sont les avantages/désavantages de ce type de logement?

Type du logement:

W-C: oui() non() où? à l'intérieur de la maison() dans le jardin()

Egouts() Eau de robinet () eau de puits()

Electricité: oui() non()

La maison a une parcelle donnée par l'usine pour la culture de subsistance?

Obs: _____

3. LOISIR

Accès aux moyens de communication:

- Journal? (Lequel? quelle partie? sports? politique?)
- T.V.? (Accès à quelles chaînes?)
- Depuis quand possède poste de radio e T.V.? Comment a acheté?
- Emissions que regarde: Pourquoi?
- Observe de différences dans la vie avant et après la T.V.?

Qu'est-ce que vous faites du temps libre? (football, domino, cachaça, club, dance)

Solliciter une description de leur journée.

Quel est le loisir destiné aux femmes et aux enfants?

4. SANTE

L'usine a un service d'assistance médical?

Est-il satisfaisant? Paye-t-on la consultation? Les médicaments?

Quelles sont les maladies les plus fréquentes? Pour les hommes, femmes, enfants?

Quand quelqu'un tombe malade, le salaire est suffisant pour couvrir les dépenses? Faut-il emprunter de l'argent? Dans ces cas vous vous adressez à des "chamans"?

5. EDUCATION

Vous êtes allé à l'école? _____ Pour combien de temps? _____

Qu'est-ce que vous avez appris là-bas? _____

Comment vous avez appris à l'école? _____

Les calculs que vous devez faire au travail, qui vous avez appris?

L'école a aidé?

L'école était loin de la maison? Pourquoi vous avez abandonné?

6. VISION D'AUTRES GROUPES SOCIAUX

Comment vous trouvez le travail dans l'usine?

Vous avez envie de travailler là-bas?

Qu'est-ce qu'il faut pour monter dans la hiérarchie de l'usine?

Qu'est-ce que vous pensez de l'usinier? et des employés autres?

7. TRAVAIL

Journée de Travail: Début _____ h Fin _____ h

Salaires: _____ Occupations antérieures _____? _____

Pourquoi vous avez changé? _____

Vous êtes "fichado"? _____ Si non, pourquoi? _____

Vous avez des vacances? _____

Vous êtes licencié entre deux récoltes? _____

Vous pouvez décrire une journée de travail: _____

8. QUESTIONS SPECIFIQUES DE LA RESOLUTION DE PROBLEMES MATHÉMATIQUES

Quelles sont les activités de travail où vous devez faire des calculs?

Comment est réalisé le contrôle de la fréquence par rapport à la paye?

Comment vous résolvez ces problèmes et quelles sont les difficultés qui vous vous êtes confrontées?

Comment vous calculez la taille d'un terrain, le poids de la canne et

votre salaire?

Quel est la différence de couper la canne attachée ou détachée?

Quand il s'agit d'une canne de bonne qualité vous touchez le même salaire?

Comment est la méthode de pesage de la canne?

Quel est la moyenne de poids que vous coupez dans la journée?

9. PROBLEMES SPECIFIQUES

Prob. 1. Comment vous calculez l'aire d'un terrain "carré"? Donnez-nous un exemple. (Solliciter qu'il quantifie cet exemple. Il doit fournir des valeurs numériques aux côtés). En fonction de l'exemple donné attribuer d'autres valeurs numériques aux côtés.

Prob. 2. Comment vous calculez l'aire d'un terrain triangulaire? Donnez-nous un exemple. (Solliciter qu'il quantifie cet exemple. Il doit fournir des valeurs numériques aux côtés). En fonction de l'exemple donné attribuer d'autres valeurs numériques aux côtés.

Prob. 3. Qu'est-ce qu'une braça? un cubo? une conta?

Prob. 4. Quel est le prix de la tonne de la canne coupée? Le prix change si la canne est brûlée ou non? Quel est la différence? Comment vous préférez la couper: brûlée, attachée, détachée? Existe-t-il des avantages économiques? Donnez-nous un exemple

Prob. 5. Comment vous faites pour calculer votre production journalière?

Prob. 6. Vous savez combien faut-il de canne à sucre pour faire un kilo de sucre et un litre d'alcool?

Prob. 7. Vous connaissez le processus de fabrication du sucre et de l'alcool?

ANNEXE II

GUIDE D'ENTRETIEN - DEUXIEME PHASE

Quadrilatères

1. Pourriez-vous calculer l'aire d'un terrain comme celui-ci? (Présenter la figure A)
2. Et pour des terrains comme ceux-là, comment feriez-vous? (Présenter le carré de la figure B et les losanges des figures C et D, un plus proche et l'autre plus éloigné du carré présenté précédemment)
3. Et pour un terrain comme celui-ci, comment feriez-vous pour calculer la surface? (Présenter le rectangle de la figure E)
4. Et pour des terrains comme ceux-là? (présenter des parallélogrammes dont les côtés ont les mêmes dimensions que celles du rectangle du problème précédent, figures F et G).

Remarque:

Les quatre problèmes ont pour but de vérifier si l'aspect de la construction de la figure peut être assimilé par les sujets, s'ils sont conscients que des figures dont les côtés ont des dimensions similaires peuvent avoir des surfaces et des aires différentes. Les contre-argumentations prévues ont été réalisées après la présentation des quatre problèmes. On contre-argumentait surtout dans le cas des mesures de surfaces identiques pour les différents quadrilatères présentés. Le contenu des contre-argumentations prévues se rapportait à la différence réelle d'aire estimée à travers un transparent quadrillé ou alors à l'emploi de la formule régionale avec une manipulation différente des valeurs numériques des côtés que celle choisie par le sujet.

5. Quel est le terrain que vous préférez travailler pour gagner plus d'argent (comparaison entre carrés et losanges et entre rectangles et parallélogrammes);
6. Ces terrains (carrés et losanges et entre rectangles et parallélogrammes) sont différents ou pareils? Pourquoi? Ils ont la même quantité de bras?
7. A partir de tout ce qu'on a discuté, pourriez-vous me dire combien de bras pourrait avoir les côtés d'un carré deux fois plus grand que celui-ci (figure A)? Un carré dont la surface serait deux fois plus grande, pour gagner deux fois plus?

Triangles

1. Pourriez-vous calculer maintenant la surface d'un terrain comme celui-ci? (Présenter le triangle rectangle de côtés 16, 12 et 20 - Figure H)

contre-argumentations:

- demander la raison du choix du côté;
- prendre comme "base" (le côté à être divisé par 2) les autres côtés non choisis par le sujet, et en utilisant sa propre formule, vérifier la différence de surface obtenue;

a) $20 \div 2 \times 12 \div 2 = 10 \times 6 = 60$ (base: côté = 20)

b) $16 \div 2 \times 20 \div 2 = 8 \times 10 = 80$ (base: côté = 16)

c) $12 \div 2 \times 20 \div 2 = 6 \times 10 = 60$ (base: côté = 12)

2. Et un terrain comme celui-ci? (Présenter triangle de la figure 1, dont les mesures des côtés sont 30, 16 et 24)

Contre-argumentation en fonction des contradictions internes de la formule des exploitants de canne à sucre:

a) demander les raisons pour lesquelles il a choisi un côté comme base;

b) changer le côté et observer les différences de surface.

a) $15 \times 20 = 300$ (base = 30)

b) $12 \times 23 = 276$ (base = 24)

c) $8 \times 27 = 216$ (base = 16)

Présentation de figures différentes (carré, rectangle, triangle, cercle) formées à partir d'une ficelle nouée (même périmètre)

1. Ces terrains sont pareils ou différents? Pourquoi?

2. Vous allez gagner toujours la même quantité d'argent en travaillant dans les quatre? Pourquoi?

Problèmes complexes de contenu non-familier et familier

Problèmes de contenu familier	Problèmes de contenu non-familier
Un chef d'équipe, à la fin de la journée, a pesé trois faisceaux de canne pour calculer le salaire d'un ouvrier. Le premier faisceau pèse 10 kilos, le deuxième 12 kilos et le troisième 11 kilos. L'ouvrier a coupé 300 faisceaux. On paye cette canne 450 cruzeiros la tonne; combien l'ouvrier va-t-il recevoir?	Un paysan avait une bananeraie et vendait ses bananes au prix de 370 cruzeiros la tonne. Le paysan et le négociant qui voulait acheter les bananes, se sont mis d'accord pour faire une moyenne de 3 paquets de bananes pour calculer le prix à payer. Les poids de trois paquets choisis étaient de 1; 3 et 2 Kg et il y avait 700 paquets. Combien a-t-il reçu du négociant?
Un chef d'équipe avait déterminé qu'un coupeur de canne gagnerait le "salaire" pour une surface de 70 cubos (bras carrés). Il a mesuré le terrain qui avait comme côtés, 14; 20; 8 et 10 bras. Le salaire était de 370 cruzeiros. Combien le coupeur de canne allait-il toucher?	Une femme qui faisait des draps a décidé d'en faire avec des dentelles de points différents. Elle a fait une commande de morceaux de dentelles à une dentellière. Pour chaque carré de 70 cm de côté, la dentellière demandait 500 cruzeiros. Le drap mesurait 1,40 mètres de largeur par 2,10 de longueur. Combien la dame a-t-elle dépensé?