



HAL
open science

Caractères de représentations unitaires de plus haut poids via la correspondance de Howe et la formule de Rossmann-Duflo-Vergne

Allan Merino

► **To cite this version:**

Allan Merino. Caractères de représentations unitaires de plus haut poids via la correspondance de Howe et la formule de Rossmann-Duflo-Vergne. Mathématiques [math]. Université de Lorraine, 2017. Français. NNT: . tel-03351060

HAL Id: tel-03351060

<https://hal.science/tel-03351060>

Submitted on 21 Sep 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Caractères de représentations unitaires de plus haut poids via la correspondance de Howe et la formule de Rossmann-Duflo-Vergne

Thèse présentée publiquement le 8 décembre 2017

pour obtenir le grade de

Docteur en Mathématiques

par

Allan Merino

soutenue devant le jury composé de

Angela Pasquale	Directeur de thèse
Tomasz Przebinda	Codirecteur de thèse
Hung Yean Loke	Rapporteur
Hadi Salmasian	Rapporteur
Anne-Marie Aubert	Examineur
Abderrazak Bouaziz	Examineur
Salah Mehdi	Examineur
Pavle Pandzic	Examineur

Table des matières

1	Introduction	11
2	Préliminaires	17
2.1	Groupes de Lie réductifs et leurs représentations	17
2.2	Structure des algèbres de Lie complexes et représentations de plus haut poids	19
2.3	Le cas des groupes de Lie compacts	22
2.4	Théorie des caractères	23
2.4.1	Caractère d'une série discrète	25
2.4.2	Une formule de Enright	26
2.5	Théorème de dualité de Howe	28
2.5.1	La représentation de Weil	28
2.5.2	Paires duales réductives	31
2.5.3	Correspondance de Howe	32
2.6	Supergroupes de Lie et paires duales réductives	33
3	Une formule du caractère via le semi-groupe oscillatoire de Howe	37
3.1	La transformation de Cayley	37
3.2	Le semi-groupe oscillatoire	38
3.3	Une formule du caractère dans le cas d'une paire duale réductive compacte	46
3.4	Restriction de Θ à un sous-groupe maximal compact	50
3.5	Le cas $G = U(m, \mathbb{C}), G' = U(p, q, \mathbb{C}), p \leq q$	58
4	Une formule du caractère via la distribution d'entrelacement	69
4.1	La distribution d'entrelacement	69
4.2	Une formule de Rossman et Duflo-Vergne	71
4.3	Le cas $(G = U(n, \mathbb{C}), G' = U(p, q, \mathbb{C}))$, où $1 \leq n \leq p + q$	72
4.4	Quelques exemples et cas particuliers	89
4.4.1	Le cas $(G = U(1, \mathbb{C}), G' = U(p, q, \mathbb{C})), 1 \leq p \leq q$	89
4.4.2	Le cas $(G = U(n, \mathbb{C}), G' = U(q, \mathbb{C})), n \leq q$	92

4.4.3	Le cas $(G = U(n, \mathbb{C}), G' = U(p, q, \mathbb{C})), n = p + q, pq \neq 0$	94
4.4.4	Le cas $(G = U(2, \mathbb{C}), G' = U(2, 2, \mathbb{C}))$	95
5	Ouvertures	97
5.1	Une formule du caractère sur un sous-groupe de Cartan non-compact	97
5.2	Une formule du caractère pour les autres paires duales compactes	98
A	Les groupes de Lie classiques	101
A.1	Les groupes orthogonaux	101
A.2	Les groupes unitaires	101
A.3	Les groupes sympléctiques	102
B	Le cas $(G = U(1, \mathbb{C}), G' = U(p, q, \mathbb{C}))$	105
C	Le cas $(G = U(2, \mathbb{C}), G' = U(p, q, \mathbb{C}))$	111
D	Quelques calculs	117

Résumé

Le sujet de cette thèse est le caractère d'une représentation unitaire irréductible de plus haut poids (UI- PHP) du groupe $U(p,q,C)$.

Comme montré par Harish-Chandra, une représentation unitaire irréductible d'un groupe réductif réel possède un caractère, qui est une fonction localement intégrable sur le groupe. L'intégration de cette fonction avec une fonction test donne la trace de l'opérateur obtenu en appliquant la représentation à la fonction test. En outre, il existe une correspondance bijective entre les classes d'équivalences des représentations unitaires irréductibles et leurs caractères.

Si le groupe est compact, la représentation est de dimension finie et le caractère est égal à la trace de la représentation. Weyl a classifié les représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie compacts connexes et a décrit leurs caractères. Par différentiation on obtient une représentation de l'algèbre de Lie complexifiée. Une sous-algèbre de Borel possède un sous-espace propre de dimension un. Le caractère propre correspondant est le plus haut poids de la représentation. Ainsi, il existe une bijection entre les classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles et les plus haut poids.

Les classes d'équivalences des représentations unitaires irréductibles d'un groupe réductif réel sont loin d'être comprises. Harish-Chandra a introduit la notion d'une représentation irréductible admissible de plus haut poids qui n'est pas nécessairement unitaire. Chacune d'elles est déterminée par un caractère d'une sous-algèbre de Borel, également appelé le plus haut poids. Grâce aux travaux de Jacobsen et Enright-Howe-Wallach, on connaît aujourd'hui quels plus haut poids de la construction de Harish-Chandra correspondent à des représentations unitaires.

Si une représentation UIPHP d'un groupe réductif réel se réalise comme sous-représentation de l'espace des fonctions à carré intégrable sur le groupe, une formule de Harish-Chandra décrit la restriction du caractère au sous-ensemble des éléments elliptiques réguliers, c'est-à-dire l'union des classes de conjugaison passant par les points réguliers d'un sous-groupe de Cartan compact maximal.

Plus récemment, Enright a donné une formule pour la restriction du caractère au sous-ensemble des éléments elliptiques réguliers d'une représentation UIPHP arbitraire d'un groupe classique. La formule d'Enright est explicite, mais contient de nombreuses simplifications cachées. En outre, sa preuve est basée sur l'algèbre homologique plutôt que sur une méthode analytique directe comme dans la construction de Harish-Chandra.

Dans cette thèse, nous calculons la restriction du caractère d'une représentation UIPHP au sous-ensemble des éléments elliptiques réguliers de $U(p,q,C)$. Le résultat est plus explicite que celui d'Enright et nous vérifions dans quelques cas que les deux formules sont équivalentes. Vérifier l'équivalence en général n'est pas facile et nous ne le faisons pas.

Nous utilisons deux méthodes indépendantes. La première consiste à calculer une intégrale impliquant le caractère de la représentation de Weil via le théorème des résidus. C'est simple, mais le résultat manque d'une structure agréable. La deuxième méthode est de réaliser la représentation dans la correspondance de Howe, c'est-à-dire comme sous-représentation de la représentation de Weil restreinte à une paire duale avec un membre compact. Ensuite, nous combinons la description explicite de la représentation de Weil, adoptée dans ce contexte dans un article de McKee-Pasquale-Przebinda, avec une formule de Rossmann-Duflo-Vergne (également basée sur l'étude de la représentation de Weil) pour la transformée de Fourier d'une intégrale orbitale elliptique. La formule résultante est compatible avec la correspondance des orbites et ressemble à la formule de Harish-Chandra.

Summary

The topic of this thesis is the character of an irreducible unitary highest weight (IUHW) representation of the group $U(p,q,C)$.

As shown by Harish-Chandra, an irreducible unitary representation of a real reductive group has a character, which is a locally integrable function on the group. Integrating that function against a test function gives the trace of the operator obtained by applying the representation to the test function. Also, there is a bijective correspondence between the equivalence classes of irreducible unitary representations and their characters.

If the group is compact then the representation is finite dimensional and the character is equal to the trace of the representation. Weyl classified all irreducible unitary representations of compact connected Lie groups and described their characters. By taking derivatives, one obtains a representation of the complexified Lie algebra. A Borel subalgebra has a one-dimensional eigenspace. The corresponding eigencharacter is the highest weight of the representation. So, there is a bijection between equivalence classes of irreducible unitary representations and some highest weights.

The equivalence classes of irreducible unitary representations of a real reductive group are far from being understood. However Harish-Chandra introduced the notion of an irreducible admissible highest weight representation, which is not necessarily unitary. Each of them is determined by an eigencharacter of a Borel subalgebra, also called the highest weight. By the works of Jacobsen, Enright-Howe-Wallach it is clear now which highest weights in Harish-Chandra's construction correspond to unitary representations. If an IUHW representation of a real reductive group occurs as a subrepresentation of the space of the square integrable functions on the group, then a formula of Harish-Chandra describes the restriction of the character to the subset of the regular elliptic elements, i.e. the union of conjugacy classes passing through the regular points of a maximal compact Cartan subgroup.

Later Enright gave a formula for the restriction of the character to the subset of the regular elliptic elements of an arbitrary IUHW representation of a classical group. Enright's formula is explicit, but contains many hidden cancellations. Also, the proof is based on homological algebra rather than a direct analytic method as in Harish-Chandra's construction.

In this thesis we compute the restriction of the character of an IUHW representation to the subset of the regular elliptic elements of $U(p,q,C)$. The result is more explicit than Enright's and we check in a few cases that the two formulas are equivalent. Checking the equivalence in general is not easy and we do not do it.

We use two independent methods. The first one is to compute an integral involving the character of Weil representation via the Residue Theorem. It is straightforward, but the result lacks any pleasing

structure. The second method is to realize the representation in Howe's correspondence, i.e. as a subrepresentation of the Weil representation restricted to a dual pair with one member compact. Then we combine the known explicit description of the Weil representation, adopted to this context in a work of McKee-Pasquale-Przebinda, with a formula of Rossmann-Duflo-Vergne (also based on a study of the Weil representation) for the Fourier transform of an elliptic orbital integral. The resulting formula is compatible with the orbit correspondence and has close resemblance to Harish-Chandra's formula.

Remerciements

Je ne pouvais commencer cette partie sans remercier deux personnes sans qui cette thèse n'aurait pas vu le jour, à savoir Angela Pasquale, qui a toujours été d'une gentillesse extrême, qui s'est toujours montrée disponible et de bons conseils durant ma thèse, et Tomasz Przebinda, avec qui, à chacune de nos rencontres, j'ai appris et partagé beaucoup, et cela toujours dans la bonne humeur. Le sujet sur lequel vous m'avez fait travailler m'a totalement passionné, et de pouvoir bénéficier de vos connaissances durant ces quatre ans fut un véritable privilège. Pour ça et pour tout le reste, merci beaucoup !

Merci également aux rapporteurs Hadi Salmasian et Hung Yean Loke pour avoir relu ce manuscrit avec attention, et leurs suggestions et remarques très intéressantes. Je tiens également à remercier Anne-Marie Aubert, Pavle Pandzic, Abderrazak Bouaziz et Salah Mehdi pour avoir accepté de faire partie du Jury.

Je tiens aussi à remercier tous les doctorants de Metz avec qui j'ai pu, durant ces quatre années, passer de supers moments ; Pierre-Henry, avec qui nos discussions sportives ont été très enrichissantes ; Maxime, partenaire officiel de pause-café, fondamentales pour une recherche productive, Jérémy, avec qui j'ai partagé mon bureau pendant deux ans, période lors de laquelle on a pu avoir des discussions aussi drôles que spéciales, tant elles bifurquaient rapidement ; Yahya, un grand footballeur incompris qui m'a fait, après deux ans, apprécier la harissa ; Benjamin, créateur du "Random Ball" dont les règles sont tout aussi random malheureusement ; Spyros, première personne que je rencontre à être plus tête en l'air que moi ; Gaël, qui au-delà de ses histoires toujours surprenantes, m'a montré que les Toulousains ne voulaient pas admettre qu'ils avaient un petit accent bien à eux ! ; Matthieu, avec qui j'ai partagé de bons moments, et prit plaisir à courir régulièrement ; Hichem, dont les histoires me font toujours sourire ; mais aussi Simon, Gabriel, Rémy, Hédi, et d'autres que j'oublie probablement, et je m'en excuse. Un remerciement aussi à Maxime, actuellement doctorant à Paris, qui a dû subir toutes les interrogations mathématiques que j'avais durant mes deux premières années de thèse, et ce, avec une grande patience !

Je tiens aussi à remercier plus généralement les membres du laboratoire de Metz plus généralement, avec qui je me suis toujours bien entendu, et qui, lorsque j'avais des questions ou autre, ont toujours su se rendre disponible, en particulier Salah Mehdi, Tilmann Wurzbacher, Camille Laurent-Gengoux, Saïd Benayadi et Gang Liu. Je tiens particulièrement à remercier Chakib Bennis, qui m'a tout au long de ma scolarité guidé et fait aimer les mathématiques, merci pour ça.

J'ai pu tout au long de ma thèse assister à des conférences, workshops, séminaires, etc, et cela m'a permis de rencontrer des personnes formidables (je pense en particulier à Philippe, Clément, Frank et Gautam), de partager énormément, aussi bien humainement que scientifiquement, ce qui m'a conforté dans l'idée qu'au-delà de la beauté de la science et du plaisir que je prend à en apprendre jour après jour, le métier de chercheur est, malgré quelques difficultés comme dans tout, une véritable chance !

Pour finir, j'aimerais remercier mes parents, ma soeur Maureen, Xavier, et polo (mon chien), qui ont eu, indirectement, à supporter mes humeurs changeantes tout au long de la préparation de cette thèse. Merci à vous !

Chapitre 1

Introduction

Considérons $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel sympléctique de dimension finie et notons $\mathrm{Sp}(W)$ le groupe de Lie sympléctique associé. Soit $\mathfrak{sp}(W)$ l'algèbre de Lie de $\mathrm{Sp}(W)$ et fixons J une structure complexe positive compatible sur W , i.e. $J \in \mathfrak{sp}(W)$ vérifie $J^2 = -Id$ et la forme bilinéaire $\langle J \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive. Pour tout $g \in \mathrm{Sp}(W)$, fixons $J_g = J^{-1}(g - 1)$. Comme rappelé dans la section 2.5.1, $\det(J_g)_{J_g W}^{-1}$ est bien défini, et posons

$$\widetilde{\mathrm{Sp}}(W) = \{ \tilde{g} = (g, \xi) \in \mathrm{Sp}(W) \times \mathbb{C}; \xi^2 = \det(-iJ_g)_{J_g(W)}^{-1} \}$$

L'ensemble $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ est un groupe muni de la multiplication suivante

$$(g, \xi).(h, \eta) = (gh, \xi\eta C(g, h))$$

où $C : \mathrm{Sp}(W) \times \mathrm{Sp}(W) \rightarrow \mathbb{C}$ est le cocycle défini dans [2]. Le groupe $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ est appelé groupe métapléctique : c'est un revêtement double du groupe sympléctique. La représentation centrale de cette thèse est la représentation de Weil (ou métapléctique, ou oscillatoire), construite par Shale, Segal et Weil. Dans cette thèse, nous utilisons la construction présentée dans [2], que l'on rappelle rapidement ici. Soit $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ le caractère de \mathbb{R} donné par $\chi(r) = e^{2i\pi r}$. Pour tout $g \in \mathrm{Sp}(W)$, on définit $\chi_{c(g)} : (g - 1)W \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\chi_{c(g)}(u) = \chi\left(\frac{1}{4} \langle c(g)u, u \rangle\right)$$

et soit $\mu_{(g-1)W}$ la mesure de Lebesgue sur $(g - 1)W$ normalisée de manière à ce que le volume du cube unité associé à $\langle J \cdot, \cdot \rangle$ soit égal à 1. Considérons la distribution $T(\tilde{g}) \in \mathcal{S}'(W)$ définie par

$$T(\tilde{g}) = \Theta(\tilde{g})\chi_{c(g)}\mu_{(g-1)W}$$

où $\Theta(\tilde{g}) = \xi$, pour $\tilde{g} = (g, \xi)$. Soit $W = X \oplus Y$ une polarisation complète de W et notons $\mathcal{K} : \mathcal{S}'(W) \rightarrow \mathcal{S}'(X \times X)$ et $\mathrm{Op} : \mathcal{S}'(X \times X) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{S}(X), \mathcal{S}'(X))$ les isomorphismes qui étendent les applications suivantes

$$\mathcal{K}(v)(x, x') = \int_Y v(x - x' + y) \chi\left(\frac{1}{2} \langle y, x + x' \rangle\right) d\mu_Y(y) \quad (v \in \mathcal{S}(W))$$

$$\text{Op}(K)(v)(x) = \int_X K(x, x')v(x')dx' \quad (K \in \mathcal{S}(X \times X), x \in X)$$

Comme montré dans [2] et rappelé dans la section 2.5.1, l'application $\omega = \text{Op} \circ \mathcal{H} \circ T : \widehat{\text{Sp}}(\widetilde{W}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{S}(X), \mathcal{S}(X))$ est une application continue et injective et s'étend en une application

$$\omega : \widehat{\text{Sp}}(\widetilde{W}) \rightarrow \text{U}(L^2(X))$$

où $\text{U}(L^2(X))$ est le groupe des opérateurs unitaires sur $L^2(X)$. Le couple $(\omega, L^2(X))$ est la représentation de Weil de $\widehat{\text{Sp}}(\widetilde{W})$.

Pour toute paire duale réductive irréductible (G, G') (section 2.5.2), le théorème de dualité de Howe assure une correspondance bi-univoque entre certaines représentations de \widetilde{G} et \widetilde{G}' (voir [20] ou théorème 2.5.2 dans cette thèse). Cette dualité a été étudiée par de nombreux auteurs au cours des quarante dernières années, et certains résultats seront rappelés dans la section 2.5.3.

Le cadre de cette thèse est le suivant : on considère une paire duale réductive irréductible (G, G') avec G compact. Le but est ici de donner une formule pour le caractère des représentations Π' de \widetilde{G}' qui apparaissent dans la dualité. Avant de décrire les deux méthodes utilisées dans cette thèse, rappelons rapidement la notion de caractère d'une représentation admissible d'un groupe de Lie réductif (section 2.1).

Pour une représentation (Π, \mathcal{H}) admissible arbitraire d'un groupe de Lie réductif G , il apparaît clair que l'application $G \rightarrow \mathbb{C}, g \rightarrow \text{tr}(\Pi(g))$ n'est pas bien définie. Dans ce cas la définition de caractère a été introduite par Harish-Chandra dans [11]. Ce dernier, noté Θ_Π , est défini comme une distribution sur G . Plus précisément, pour toute fonction $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, on définit

$$\Theta_\Pi(\Psi) = \text{tr} \int_G \Psi(g)\Pi(g)d\mu_G(g)$$

où μ_G est une mesure de Haar sur G . Dans [13], Harish-Chandra a montré que cette distribution est donnée par une fonction sur un sous-espace partout dense de G , à savoir l'ensemble des points réguliers, noté G^{reg} .

La classification de Langlands-Knapp-Zuckermann donne une formule pour toute représentation admissible irréductible de G , mais cette formule n'est pas transparente car elle contient beaucoup de termes à simplifier. Il existe certains cas dans lesquels la fonction $\Theta_\Pi : G^{\text{reg}} \rightarrow \mathbb{C}$ est assez explicite. Dans le cas où G est compact, toute représentation irréductible de G est de dimension finie et de plus haut poids $\lambda \in \mathfrak{t}^*$, où \mathfrak{t} est une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G . Dans ce cas, le caractère Θ_Π est donné par la formule suivante (démontrée par Hermann Weyl) :

$$\Theta_\Pi(\exp(x)) = \sum_{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{t})} \frac{\text{sgn}(w)e^{w(\lambda+\rho)(x)}}{\prod_{\substack{\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \\ \langle \alpha, \lambda+\rho \rangle > 0}} (e^{\frac{\alpha(x)}{2}} - e^{-\frac{\alpha(x)}{2}})}$$

où $\mathfrak{t}^{\text{reg}}$ est l'ensemble des éléments réguliers de \mathfrak{t} , $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ un système de racines positives de \mathfrak{g} et \mathcal{W} le groupe de Weyl associé (pour plus de détails, on se référera à la section 2.4).

Une formule similaire a été prouvée dans le cas d'une représentation de la série discrète d'un groupe de Lie réductif G par Harish-Chandra. Rappelons que de telles représentations existent si et seulement si $\text{rk}(K) = \text{rk}(G)$. Soit K un sous-groupe maximal compact de G et soit \mathfrak{k} l'algèbre de Lie de K . Supposons, de plus, que (Π, \mathcal{H}) est une représentation de la série discrète de G de plus haut poids $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ où \mathfrak{t} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} qui vérifie $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$. Le caractère Θ_Π est alors donné par la formule suivante :

$$\Theta_\Pi(\exp(x)) = (-1)^{\frac{1}{2} \dim G/K} \sum_{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{k})} \frac{\text{sgn}(w) e^{w(\lambda+\rho)(x)}}{\prod_{\substack{\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \\ \langle \alpha, \lambda+\rho \rangle > 0}} (e^{\frac{\alpha(x)}{2}} - e^{-\frac{\alpha(x)}{2}})} \quad (x \in \mathfrak{t}^{\text{reg}}) \quad (1.1)$$

où $\mathcal{W}(\mathfrak{k})$ est le groupe de Weyl associé à $(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$.

Dans son article [9], Enright donne la formule du caractère d'une représentation irréductible unitaire Π de plus haut poids $\lambda - \rho$. Plus précisément en gardant les notations de la section 2.4.2, on obtient

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})} (e^{\frac{\alpha(x)}{2}} - e^{-\frac{\alpha(x)}{2}}) \Theta_\Pi(\exp(x)) = \sum_{w \in \mathcal{W}_\lambda^{\mathfrak{k}}} (-1)^{l_\lambda(w)} \Theta_{\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k})}(\exp(x)) \quad (1.2)$$

où $x \in \mathfrak{t}$ et $\Theta_{\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k})}$ est le caractère de la représentation de K de plus haut poids $\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k})$.

Regardons plus en détails les résultats de cette thèse. Bien que certains théorèmes des chapitres 3 et 4 soient valables pour tout (G, G') avec G compact et connexe, on se restreint au cas où $(G = \text{U}(n, \mathbb{C}), G' = \text{U}(p, q, \mathbb{C}))$, avec $p \leq q$.

Le contenu du chapitre 3 est le suivant. Soient \tilde{G}, \tilde{G}' les images réciproques de G et G' respectivement dans le groupe métaplectique $\widetilde{\text{Sp}}(\widetilde{W})$. Fixons Π une représentation de \tilde{G} qui apparaît dans la correspondance et soit Π' l'unique représentation de \tilde{G}' associée.

On considère le semi-groupe oscillatoire, introduit par Howe dans [18]. Rapidement, notons $W_{\mathbb{C}}$ la complexification de W et notons de nouveau $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme complexifiée. Notons $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})$ le groupe symplectique complexe associé à l'espace symplectique $(W_{\mathbb{C}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et soit $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$ le sous-ensemble de $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})$ défini par

$$\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++} = \{g \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}}); i \langle w, \bar{w} \rangle > i \langle g(w), \overline{g(w)} \rangle\}.$$

On définit $C : \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++} \times \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++} \rightarrow \mathbb{C}$ comme

$$C(g_1, g_2) = \det^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2i} (c(g_1) + c(g_2)) \right)$$

Le sous-ensemble

$$\widetilde{\text{Sp}}(W_{\mathbb{C}})^{++} = \{(g, \xi) \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++} \times \mathbb{C}; \xi^2 = \det(i(g - 1))^{-1}\}$$

est un semi-groupe avec la loi suivante

$$(g, \xi)(h, \eta) = (gh, \xi\eta C(g, h))$$

et ce dernier est appelé semi-groupe oscillatoire (voir [18] et section 3.2).

L'avantage, pour nous, de considérer ce groupe est donné dans le théorème suivant :

Théorème 1.0.1. *La fonction $\Theta : \mathrm{Sp}(\widetilde{W}_{\mathbb{C}})^{++} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe. De plus, pour toute fonction $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathrm{Sp}(\widetilde{W}))$, on a :*

$$\int_{\mathrm{Sp}(\widetilde{W})} \Theta(\tilde{g})\Psi(\tilde{g})d\tilde{g} = \lim_{\substack{\tilde{p} \rightarrow 1 \\ \tilde{p} \in \mathrm{Sp}(\widetilde{W}_{\mathbb{C}})^{++}}} \int_{\mathrm{Sp}(\widetilde{W})} \Theta(\tilde{g}\tilde{p})\Psi(\tilde{g})d\tilde{g}$$

où $\Theta : \mathrm{Sp}(\widetilde{W})^{++} \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\Theta(\tilde{g} = (g, \xi)) = \xi$ est l'extension à $\mathrm{Sp}(\widetilde{W})^{++}$ du caractère de la représentation métaplectique $(\omega, \mathcal{H} = L^2(X))$.

Ce résultat est démontré dans la section 3.2, théorème 3.2.10. On donne une formule explicite du caractère Θ sur un sous-groupe maximal compact de $\mathrm{Sp}(W)$, ce qui nous permet au final de donner une formule explicite du caractère $\Theta_{\Pi'}$ sur \widetilde{T}' , où T' est un sous-groupe de Cartan diagonal de G' .

Plus précisément, on a :

$$\Theta_{\Pi'}(\tilde{r}') = \frac{(-1)^{nq}}{(2i\pi)^n n!} \left(\prod_{a=1}^{p+q} t'_a \right)^{\frac{n}{2}} \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \sum_{w, \sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sgn}(w) \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{b=1}^n \int_{S^1} \frac{t_b^{p-n-2+w^{-1}(b)-\lambda_{w^{-1}(b)}+\sigma^{-1}(b)}}{\prod_{a=1}^p (t_b - rt'_a) \prod_{a=p+1}^{p+q} \left(t_b - \frac{1}{rt'_a} \right)} dt_b$$

On calcule alors ces intégrales explicitement dans le cas $(\mathrm{U}(1, \mathbb{C}), \mathrm{U}(p, q, \mathbb{C}))$ (annexe B) et $(\mathrm{U}(2, \mathbb{C}), \mathrm{U}(p, q, \mathbb{C}))$ (annexe C). Ces intégrales peuvent être calculées en général mais il est difficile de mettre le résultat dans une formule agréable. On procède donc avec une méthode différente dans le chapitre 4, où le caractère $\Theta_{\Pi'}$ est calculé en utilisant la distribution d'entrelacement définie dans [33]. Fixons à nouveau une représentation Π de \tilde{G} qui apparaît dans la correspondance et soit Π' l'unique représentation de \tilde{G}' associée.

Comme rappelé dans la section 3.3, pour toute fonction $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathrm{U}(p, q, \mathbb{C}))$, on a :

$$d_{\Pi} \Theta_{\Pi'}(\Psi) = \mathrm{tr}(\mathcal{P}_{\Pi \otimes \Pi'} \circ \omega(\Psi))$$

où $\mathcal{P}_{\otimes} : L^2(X) \rightarrow L^2(X)$ est la projection sur la composante $\Pi \otimes \Pi'$ -isotypique et d_{Π} est la dimension de la représentation Π . Comme démontré dans [2], chapitre 4, pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathrm{Sp}(\widetilde{W}))$, on a :

$$\int_{\mathrm{Sp}(W)} \Phi(\tilde{g})\Theta(\tilde{g})d\mu_{\mathrm{Sp}(\widetilde{W})}(\tilde{g}) = \mathrm{tr} \int_{\mathrm{Sp}(\widetilde{W})} \Phi(\tilde{g})\omega(\tilde{g})d\mu_{\mathrm{Sp}(\widetilde{W})}(\tilde{g})$$

En utilisant la forme explicite de $\mathcal{P}_{\Pi \otimes \Pi'}$, à savoir

$$\mathcal{P}_{\Pi \otimes \Pi'} = \int_{\tilde{G}} d_{\Pi} \overline{\Theta_{\Pi}(\tilde{g})} \omega(\tilde{g}) d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g})$$

on obtient que le caractère $\Theta_{\Pi'}$ est donné, en tant que distribution sur \tilde{G}' , par la formule suivante :

$$\int_{\tilde{G}} \overline{\Theta_{\Pi}(\tilde{g})} \Theta(\tilde{g}\tilde{g}') d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g})$$

Il existe une unique distribution $f_{\Pi \otimes \Pi'}$ telle que

$$\mathcal{P}_{\Pi \otimes \Pi'} = \mathrm{Op} \circ \mathcal{H}(f_{\Pi \otimes \Pi'})$$

La distribution $f_{\Pi \otimes \Pi'}$ est appelée distribution d'entrelacement dans [33]. Explicitement,

$$f_{\Pi \otimes \Pi'} = \int_{\tilde{G}} d_{\Pi} \overline{\Theta_{\Pi}(\tilde{g})} T(\tilde{g}) d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g}) \quad (1.3)$$

On pourra pour cela consulter la section 4.1. La formule (1.3) a été calculée explicitement dans [32] (voir aussi section 4.3). A l'aide d'une formule de Rossmann et de Duflo-Vergne, on obtient à une constante près une formule explicite pour le caractère $\Theta_{\Pi'}$ comme suit :

$$\Theta_{\Pi'}(h') = \sum_{\eta \in \mathcal{W}(G, \mathfrak{h}, m) / \mathcal{W}(G, \mathfrak{h})_m} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}(K', \mathfrak{h}') } \frac{\text{sgn}(\eta) \text{pr}_m(\sigma h)^{-\eta^{-1} \mu'}}{\prod_{\substack{\beta > 0 \\ \beta|_{\mathfrak{h}(m)} \neq 0}} ((\sigma h)^{\frac{\beta}{2}} - (\sigma h)^{-\frac{\beta}{2}})} \quad (1.4)$$

Ce théorème se trouve dans la section 4.3, théorème 4.3.12. La constante multiplicative qui apparaît peut être calculée explicitement. On vérifie cette formule dans trois cas : le cas $(G = \text{U}(1, \mathbb{C}), G' = \text{U}(p, q, \mathbb{C}))$, $(G = \text{U}(n, \mathbb{C}), G' = \text{U}(q, \mathbb{C}))$ et $(G = \text{U}(n, \mathbb{C}), G' = \text{U}(p, q, \mathbb{C}))$, avec $n = p + q$ (on pourra pour cela consulter la section 4.4).

Remarquons au passage que dans cette partie, nous avons considéré $n \leq p + q$. Ce cas est le plus intéressant. En effet, Kashiwara et Vergne ([23]) ont montré que si $n \geq p + q$, alors, toutes les représentations Π' de $\text{U}(\widetilde{p, q}, \mathbb{C})$ qui apparaissent dans la dualité sont dans la série discrète de $\text{U}(\widetilde{p, q}, \mathbb{C})$. Dans le cas $n = p + q$, nous avons vérifié que notre formule coïncide avec celle de Harish-Chandra dans (1.1).

Remarquons au passage que lors de tous ces calculs, on utilise le plus haut poids des représentations Π de $\text{U}(\widetilde{n}, \mathbb{C})$ (pour les poids de la correspondance, on peut consulter [34]) mais jamais les poids associés des représentations de $\text{U}(\widetilde{p, q}, \mathbb{C})$, qui sont eux aussi connus. Dans ces trois cas, notre formule coïncide aussi avec celle déterminée par Enright. On ne vérifie pas la correspondance de notre formule (1.4) et celle de Enright (voir (1.2)). En fait, si on divise le membre de droite de (1.2) par la partie non-compacte du dénominateur de Weyl qui apparaît dans le membre de gauche, de nombreuses simplifications apparaissent. Une des motivations de cette thèse est que la même méthode donne le front d'onde de la représentation Π' (voir [33]) et le caractère Π' en tant que fonction sur le groupe, comme fait ici.

Dans le chapitre 5, on donne quatre nouvelles perspectives de recherche :

- Dans un premier temps, remarquons que dans les parties précédentes, on a toujours déterminé la formule du caractère $\Theta_{\Pi'}$ pour tout élément du Cartan compact de $\text{U}(\widetilde{p, q}, \mathbb{C})$. On ouvre alors sur la possibilité d'étude du caractère sur les différents sous-groupes de Cartan de $\text{U}(p, q, \mathbb{C})$.
- Dans un second point, on donne quelques idées pour généraliser ce qui a été fait pour la paire $(\text{U}(m, \mathbb{C}), \text{U}(p, q, \mathbb{C}))$ au cas des autres paires duales réductives compactes. Pour cela, on donne dans le cas $(\text{O}(n, \mathbb{R}), \text{Sp}(2m, \mathbb{R}))$ la restriction du caractère sur un sous-groupe maximal compact du groupe sympléctique, et plus explicitement sur un tore maximal, ce qui permet d'appliquer les méthodes données dans le chapitre 3. De même, on montre rapidement que les idées du chapitre 4 s'appliquent aussi aux deux autres paires duales compactes.

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Groupes de Lie réductifs et leurs représentations

Tout au long de ce manuscrit, nous allons nous restreindre aux groupes de Lie dits réductifs. Nous allons pour cela utiliser la définition de [25] (page 140). Considérons $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}); \det(A) \neq 0\}$, où $M(n, \mathbb{R})$ correspond à l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels. L'involution de Cartan de $GL(n, \mathbb{R})$ est l'automorphisme involutif $\theta : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ défini par $\theta(g) = (g^{-1})^t$, où t dénote la transposition.

Définition 2.1.1. 1. Un groupe de Lie G est dit linéaire réductif si il est isomorphe à un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{R})$ et satisfait les deux propriétés suivantes :

- (a) $\theta(G) = G$,
- (b) G a un nombre fini de composantes connexes.

2. Un groupe de Lie G sera dit réductif si ce dernier est obtenu par un revêtement fini d'un groupe de Lie linéaire réductif.

Parmi les groupes de Lie réductifs, on trouve en particulier l'ensemble des groupes de Lie compacts et les groupes de matrices classiques.

Par la suite, \mathcal{H} désigne un espace de Hilbert complexe. On note par $\text{End}(\mathcal{H})$ l'anneau des endomorphismes continus de \mathcal{H} et par $GL(\mathcal{H})$ le sous-groupe formé par les éléments inversibles de $\text{End}(\mathcal{H})$.

Définition 2.1.2. Soient G et \mathcal{H} comme précédemment et $\pi : G \rightarrow GL(\mathcal{H})$ un homomorphisme de groupes. On dit que (π, \mathcal{H}) est une représentation si

$$G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad (g, v) \rightarrow \pi(g)v \tag{2.1}$$

est continue.

La représentation est dite irréductible s'il n'existe pas de sous-espaces propres fermés de \mathcal{H} qui soient G -invariants. La représentation sera dite unitaire si pour tout $g \in G$, $\pi(g)$ est un opérateur unitaire. On notera $U(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs unitaires sur \mathcal{H} .

Si (π_1, \mathcal{H}_1) et (π_2, \mathcal{H}_2) sont deux représentations de G , on note $\text{Hom}_G(\pi_1, \pi_2)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ tels que $A \circ \pi_1(g) = \pi_2(g) \circ A$ pour tout $g \in G$. Les représentations sont dites équivalentes s'il existe $A \in \text{Hom}_G(\pi_1, \pi_2)$ qui est inversible. Pour des représentations unitaires, on sait que deux représentations équivalentes sont aussi unitairement équivalentes, c'est-à-dire $\text{Hom}_G(\pi_1, \pi_2)$ contient une bijection isométrique. On note \hat{G} l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de G .

Considérons $(\mathfrak{g}, [., .])$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , c'est-à-dire un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'une application $[., .] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ qui est bilinéaire, anti-symétrique et qui vérifie l'identité de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (X, Y, Z \in \mathfrak{g}) \quad (2.2)$$

Une représentation de \mathfrak{g} est la donnée d'un couple (ϕ, V) où V est un espace vectoriel et $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ est un morphisme d'algèbres de Lie, c'est-à-dire une application linéaire qui satisfait

$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] = \phi(X)\phi(Y) - \phi(Y)\phi(X), \quad (X, Y \in \mathfrak{g}) \quad (2.3)$$

Pour toute algèbre de Lie \mathfrak{g} , on définit l'application $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ par :

$$\text{ad}(X)(Y) = [X, Y], \quad (X, Y \in \mathfrak{g}) \quad (2.4)$$

C'est une représentation de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g} , appelée représentation adjointe de \mathfrak{g} . Par la suite, sauf mention contraire, les représentations d'une algèbres de Lie (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}) seront sur des espaces vectoriels complexes.

Par la suite, nous considérerons une représentation (π, \mathcal{H}) d'un groupe de Lie réductif G sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . Un vecteur $v \in \mathcal{H}$ est dit \mathcal{C}^∞ si l'application $G \ni g \rightarrow \pi(g)v \in \mathcal{H}$ est \mathcal{C}^∞ . Notons \mathcal{H}^∞ l'ensemble des vecteurs \mathcal{C}^∞ de \mathcal{H} : c'est un sous-espace dense de \mathcal{H} ([43], chapitre I, section 6.2). Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G et soit $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ l'application exponentielle de G . Alors, pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $v \in \mathcal{H}^\infty$,

$$d\pi(X)v := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi(\exp(tX))v \quad (2.5)$$

existe et $d\pi(X)v \in \mathcal{H}^\infty$. De plus, $(\pi, \mathcal{H}^\infty)$ est une représentation de \mathfrak{g} ([43], chapitre I, section 6.3).

Soit K un sous-groupe maximal compact de G . La représentation (π, \mathcal{H}) de G est dite admissible si pour tout $(\lambda, V_\lambda) \in \hat{K}$, l'espace $\text{Hom}_K(\lambda, \pi|_K)$ est de dimension finie. Toute représentation irréductible unitaire est admissible (on pourra par exemple consulter [43], chapitre I, théorème 3.4.10).

Rappelons la définition de représentations de la série discrète. Fixons une mesure de Haar sur G notée μ_G . On définit

$$L^p(G, \mu_G) = \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ } \mu_G \text{-mesurables ; } \int_G |f(g)|^p d\mu_G(g) < \infty \right\}, \quad (2.6)$$

où comme d'habitude, on identifie deux fonctions qui sont égales μ_G presque partout. Rappelons que $L^2(G, \mu_G)$ possède une structure d'espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par

$$(f, h) = \int_G f(g)\overline{h(g)}d\mu_G(g).$$

La représentation régulière gauche de G est la représentation unitaire $\lambda_G : G \rightarrow U(L^2(G, \mu_G))$ définie par

$$(\lambda_G(g)f)(x) = f(g^{-1}x) \quad (f \in L^2(G, \mu_G), g, x \in G).$$

Définition 2.1.3. Une représentation (π, \mathcal{H}) de G est dans la série discrète de G s'il existe un sous-espace fermé \mathcal{H}' de $L^2(G, \mu_G)$ qui est invariant et irréductible sous l'action de $\lambda_G(G)$ tel que (π, \mathcal{H}) et $(\lambda_G, \mathcal{H}')$ sont équivalentes.

2.2 Structure des algèbres de Lie complexes et représentations de plus haut poids

La forme de Killing d'une algèbre de Lie sur \mathbb{C} est la forme bilinéaire symétrique $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$B(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y)). \quad (2.7)$$

Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite semi-simple si sa forme de Killing est non-dégénérée.

Considérons ici une algèbre de Lie semi-simple complexe et soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . Dans ce cas, \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Lie abélienne (c'est-à-dire $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \{0\}$) qui est maximale. Les éléments $\text{ad}(h), h \in \mathfrak{h}$ étant diagonalisables et commutant deux-à-deux, on peut donc les diagonaliser simultanément. Notons \mathfrak{h}^* le dual de \mathfrak{h} . Pour $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, on note :

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g}; [h, x] = \alpha(h)x (\forall h \in \mathfrak{h})\}.$$

Notons $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\alpha \in \mathfrak{h}^*; \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$. On indiquera par $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ un système de racines positives de \mathfrak{g} et Σ un système de racines simples de \mathfrak{g} associés à $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On obtient donc la décomposition triangulaire suivante :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^-} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

où $\Phi^-(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = -\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Pour les définitions des sous-algèbres de Cartan et les systèmes de racines, on peut consulter [24], chapitre II, section 2 et 4, ou [22], chapitre II, section 8 et chapitre III, sections 9 et 10.

Exemple 2.2.1. Pour tout $n \geq 2$, considérons $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{A \in M(n, \mathbb{C}); \text{tr}(A) = 0\}$. Pour tout $a, b \in [1, n]$, notons $E_{a,b} \in M(n, \mathbb{C})$ la matrice définie par $(E_{a,b})_{i,j} = \delta_{a,i}\delta_{b,j}$ où $\delta_{a,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On a

alors :

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{C}(E_{i,i} - E_{i+1,i+1}) \oplus \bigoplus_{1 \leq i \neq j \leq n} \mathbb{C}E_{i,j}.$$

Ici, $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{C}(E_{i,i} - E_{i+1,i+1})$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . Notons $h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$ et soit $e_k, k \in [1, n]$, l'élément de \mathfrak{h}^* défini par :

$$e_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_k.$$

Pour tout $i \in [1, n-1]$, $1 \leq l \neq k \leq n$, on a :

$$[h_i, E_{k,l}] = (e_k - e_l)(h_i)E_{k,l}.$$

Ainsi, on a :

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{e_i - e_j; 1 \leq i \neq j \leq n\}.$$

Un système de racine positive est donné par :

$$\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{e_i - e_j; 1 \leq i < j \leq n\}$$

et une base est donnée par :

$$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{e_i - e_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}.$$

Soit (V, π) une représentation de \mathfrak{g} . Pour tout $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, on définit les espaces V_α comme suit :

$$V_\alpha = \{v \in V; \pi(h)(v) = \alpha(h)v, (\forall h \in \mathfrak{h})\}.$$

D'après [22], un vecteur maximal (de poids λ) pour (V, π) est un vecteur non nul $v \in V_\lambda$ tel que $\pi(\eta^+)(v) = 0$, où

$$\eta^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Notons $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} (pour la construction de cette dernière, on pourra consulter [24], chapitre III, page 214). En particulier, toute représentation de \mathfrak{g} s'étend en une représentation de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ([24], chapitre III, proposition 3.3, page 215).

Définition 2.2.2. On dit que (π, V) est une représentation de plus haut poids s'il existe $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et $v \in V_\lambda$ un vecteur maximal non nul tel que $V = \pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))v$. On dit dans ce cas que π est de plus haut poids λ , et on note souvent π_λ à la place de π .

Notation 2.2.3. Notons $\mathcal{P}(\pi) = \{\alpha \in \mathfrak{h}^*; V_\alpha \neq \{0\}\}$: c'est l'ensemble des poids de la représentation.

Remarque 2.2.4. Dans le cas d'une représentation (π, V) de plus haut poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on obtient que la décomposition suivante pour V :

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{P}(\pi)} V_\alpha$$

et $\dim(V_\lambda) = 1$. Pour la preuve de ces résultats, on pourra consulter [22], chapitre VI, section 20.2, page 108.

La forme de Killing B étant non-dégénérée sur \mathfrak{h} , on identifie l'algèbre \mathfrak{h} et son dual \mathfrak{h}^* . Pour tout $\phi \in \mathfrak{h}^*$, notons t_ϕ l'unique élément de \mathfrak{h} tel que $\phi(h) = B(t_\phi, h)$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$. Pour tout $\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, notons $h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{B(t_\alpha, t_\alpha)}$. En particulier, d'après [22], section 8.3, page 37, on a $h_\alpha = -h_{-\alpha}$. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire symétrique et non-dégénérée définie sur \mathfrak{h}^* par :

$$\langle \alpha, \beta \rangle = B(h_\alpha, h_\beta) \quad (\alpha, \beta \in \mathfrak{h}).$$

Pour tout $\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, on définit la réflexion $s_\alpha : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$ comme suit :

$$s_\alpha(\beta) = \beta - 2 \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha.$$

On définit alors le groupe de Weyl \mathcal{W} comme le sous-groupe de $GL(\mathfrak{h}^*)$ engendré par les réflexions $s_\alpha, \alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Exemple 2.2.5. Dans le cas de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, le groupe de Weyl \mathcal{W} est isomorphe à \mathcal{S}_n . Ici l'action de \mathcal{W} sur \mathfrak{h} est donnée par :

$$w.(e_i - e_j) = e_{w(i)} - e_{w(j)} \quad (1 \leq i \neq j \leq n, w \in \mathcal{S}_n).$$

Définition 2.2.6. Une forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est dite algébriquement intégrale si $\lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. De plus, si $\lambda(h_\alpha) \in \mathbb{N}$ pour tout $\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{g})$, la forme linéaire sera dite dominante.

Pour toute forme $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, il existe une représentation irréductible de plus haut poids λ que l'on peut réaliser explicitement. En outre, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est algébriquement intégrale et dominante si et seulement si l'unique représentation irréductible de plus haut poids λ est de dimension finie. Pour les preuves de ces résultats, on pourra consulter [22], chapitre VI, section 20.3, pages 109 - 110, et section 21.1, page 112.

On considère la notion d'algèbre de Lie réductive donnée dans [24]. En particulier, on a $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathcal{Z}_\mathfrak{g}$, où $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est semi-simple et $\mathcal{Z}_\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g}; [X, Y] = 0, (\forall Y \in \mathfrak{g})\}$ désigne le centre de \mathfrak{g} . Pour la démonstration de ce résultat, on pourra consulter [24], corollaire 1.56, page 56.

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie réductive complexe et \mathfrak{h}' une sous-algèbre de Cartan de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. D'après l'équation (2.2), on obtient la décomposition suivante :

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{h}' \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{h}')} [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_\alpha$$

Notons $\mathfrak{h} = \mathcal{Z}_\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}'$. L'algèbre \mathfrak{h} est maximale abélienne dans \mathfrak{g} . En prolongeant les formes linéaires $\alpha \in \Phi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{h}')$ par zéro sur $\mathcal{Z}_\mathfrak{g}$, on obtient des formes linéaires sur \mathfrak{h} et la décomposition suivante :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$$

avec $\mathfrak{g}_\alpha = \{v \in \mathfrak{g} ; [h, v] = \alpha(h)v (\forall h \in \mathfrak{h})\}$ défini comme dans le cas semi-simple. L'ensemble $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est de nouveau appelé ensemble des racines de \mathfrak{g} . On étend alors naturellement la notion de représentation de plus haut poids au cas réductif.

Exemple 2.2.7. L'algèbre de Lie de $U(n, \mathbb{C})$, notée $\mathfrak{u}(n, \mathbb{C})$, est donnée par :

$$\{iE_{k,k} ; 1 \leq k \leq n\} \cup \{i(E_{k,l} + E_{l,k}) ; 1 \leq k < l \leq n\} \cup \{E_{k,l} - E_{l,k} ; 1 \leq k < l \leq n\}.$$

Notons $\mathfrak{u}(n, \mathbb{C})_{\mathbb{C}}$ l'algèbre de Lie complexifiée. Une base de $\mathfrak{u}(n, \mathbb{C})_{\mathbb{C}}$ est donnée par :

$$\{E_{k,k} ; 1 \leq k \leq n\} \cup \{E_{k,l} - E_{l,k} ; 1 \leq k < l \leq n\} \cup \{E_{k,l} + E_{l,k} ; 1 \leq k < l \leq n\}.$$

Ainsi, on a :

$$\mathfrak{u}(n, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}I_n \oplus [\mathfrak{u}(n, \mathbb{C})_{\mathbb{C}}, \mathfrak{u}(n, \mathbb{C})_{\mathbb{C}}] = \mathbb{C}I_n \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$$

Une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{u}(n, \mathbb{C})_{\mathbb{C}}$ est donnée par $\mathfrak{h} = \bigoplus_{1 \leq i \leq n-1} \mathbb{C}(E_{i,i} - E_{i+1,i+1})$. En particulier, $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}E_{i,i}$. Ainsi, les racines sont celles décrites dans l'exemple 2.2.1.

2.3 Le cas des groupes de Lie compacts

La théorie des groupes de Lie compacts est à ce jour bien connue. Les représentations de ces derniers ont tout d'abord été étudiés par Hermann Weyl.

Considérons (π, \mathcal{H}) une représentation continue de G dans un espace de Hilbert \mathcal{H} . Notons μ_G la mesure de Haar normalisée sur G . D'après [43], page 28, toute représentation de G est unitarisable, c'est-à-dire qu'il existe un produit scalaire (\cdot, \cdot) sur \mathcal{H} pour lequel tous les opérateurs $\pi(g)$ soient unitaires. De plus, toute représentation irréductible (π, \mathcal{H}) de G est de dimension finie ([43], chapitre I, page 26). Un autre théorème important dans le cas des groupes compacts est le théorème de Peter-Weyl : celui-ci affirme que toute représentation irréductible d'un groupe compact G apparaît dans la décomposition de la représentation régulière gauche un nombre de fois égal à sa dimension. Plus précisément, on a :

$$L^2(G, \mu_G) = \bigoplus_{(\sigma, V_\sigma) \in \hat{G}} d_\sigma V_\sigma$$

avec $d_\sigma = \dim_{\mathbb{C}}(V_\sigma)$. Pour une preuve de ce résultat, on pourra consulter [24], chapitre IV, théorème 4.20, page 245.

Considérons à présent G un groupe de Lie compact et connexe, et soit T un tore (maximal) dans G , c'est-à-dire un sous-groupe compact, connexe et abélien (maximal dans le sens où il n'existe pas de sous-groupe compact, connexe et abélien contenant strictement T). Notons \mathfrak{g}_0 et \mathfrak{t}_0 les algèbres de Lie G et T respectivement et soient \mathfrak{g} et \mathfrak{t} leurs complexifications. D'après [24], corollaire 4.25, page 249, \mathfrak{g}_0 est réductive. De plus, d'après [24], proposition 4.30, page 252, \mathfrak{t} est une sous-algèbre de Cartan maximale de \mathfrak{g} .

Supposons que (π, \mathcal{H}) est une représentation irréductible de G . La différentielle de π , notée $d\pi$ (définie dans l'équation (2.5)), est donc une représentation de \mathfrak{g}_0 qui s'étend par complexification à une représentation de \mathfrak{g} . Cette représentation étant irréductible, on obtient une représentation de plus haut poids.

Une forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est dite analytiquement intégrale si pour tout $H \in \mathfrak{t}_0$ tel que $\exp(H) = 1$, on a $\lambda(H) \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Toute forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ analytiquement intégrale est algébriquement intégrale. Au vu de la définition 2.2.6, on définit alors naturellement la notion de forme analytiquement intégrale dominante.

Remarque 2.3.1. Pour tout $g \in G$, soit $C_g \in \text{Aut}(G)$ donné par $C_g(h) = ghg^{-1}$. On définit alors l'application

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}_0), \quad \text{Ad}(g) = (dC_g)_e \quad (2.8)$$

On obtient une représentation de G dans \mathfrak{g}_0 , appelée représentation adjointe. Cette dernière s'étend en une représentation de G dans \mathfrak{g} . La différentielle de cette application, notée ad , définie de \mathfrak{g}_0 à valeurs dans $\text{End}(\mathfrak{g})$, est donnée par $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y]$, $X \in \mathfrak{g}_0$, $Y \in \mathfrak{g}$. Cette dernière s'étend, par complexification, en une représentation de \mathfrak{g} (définie dans l'équation (2.4)).

D'après [24], chapitre IV, page 254, pour tout $\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$, il existe des caractères $\xi_\alpha : T \rightarrow S^1$ tels que

$$\text{Ad}(t)(X) = \xi_\alpha(t)X, \quad X \in \mathfrak{g}_\alpha, t \in T. \quad (2.9)$$

Ici, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$. Par différentiation de (2.9), on obtient que la différentielle du caractères ξ_α est $\alpha|_{\mathfrak{t}_0}$. En particulier, on a $\alpha|_{\mathfrak{t}_0} \in i\mathbb{R}$.

Comme démontré dans [24], proposition 4.58, page 264, la définition 2.3 est équivalente à la suivante : $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ est analytiquement intégrale si et seulement si il existe un caractère multiplicatif $\xi_\lambda : T \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $\xi_\lambda(\exp(H)) = e^{\lambda(H)}$. L'ensemble des classes d'équivalences de représentations unitaires de G est décrit par le théorème suivant (voir par exemple [24], théorème 5.5, page 279).

Théorème 2.3.2 (Théorème du plus haut poids). *Soit G un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal dans G , \mathfrak{g} et \mathfrak{t} les algèbres de Lie complexifiées de G et T respectivement. Il y a une correspondance bijective entre les classes d'équivalences de représentations irréductibles (π, \mathcal{H}) de G et les formes linéaires analytiquement intégrales dominantes λ , la correspondance étant que λ est le plus haut poids de π .*

2.4 Théorie des caractères

Nous allons ici rappeler la notion de caractère d'une représentation d'un groupe de Lie G . Soit (V, π) une représentation de G de dimension finie. Le caractère de π , noté Θ_π , est une fonction de G à valeurs complexes définie par :

$$\Theta_\pi(g) = \text{tr}(\pi(g)), \quad (g \in G).$$

Une des propriétés des caractères est que ce sont des fonctions centrales, c'est-à-dire $\Theta_\pi(gag^{-1}) = \Theta_\pi(a)$ pour tout $a, g \in G$.

Il est clair que la notion de caractère définie comme précédemment ne s'étend pas au cas des représentations de dimension infinie. Pour rappeler la définition de caractère donnée par Harish-Chandra (on pourra par exemple consulter [11]), on a besoin d'introduire la notion de représentation quasi-simple. Soient G un groupe de Lie semisimple connexe, Z le centre de G , et \mathcal{Z} le centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G .

Définition 2.4.1. Une représentation (π, \mathcal{H}) de G est dite quasi-simple s'il existe des homomorphismes η et χ de Z et \mathcal{Z} respectivement, à valeurs complexes, telle que $\pi(\xi)(v) = \eta(\xi)v$ et $\pi(z)(x) = \chi(z)x$ pour tout $\xi \in Z, z \in \mathcal{Z}, v \in \mathcal{H}$ et $x \in \mathcal{H}^\infty$.

En particulier, toute représentation irréductible admissible est quasi-simple ([41], proposition 0.3.19, page 21).

Considérons $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ l'ensemble des fonctions de G à valeurs dans \mathbb{C} , infiniment différentiables et dont le support est contenu dans un sous-ensemble compact de G . Fixons (π, \mathcal{H}) une représentation de G . On définit l'opérateur $\pi(\phi)$ comme suit :

$$\pi(\phi) := \int_G \phi(g)\pi(g)d\mu_G(g), \quad \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$$

Dans [11], chapitre 5, il est prouvé que pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, $\pi(\phi)$ est un opérateur à trace. Dans [11], chapitre 5, Harish-Chandra a prouvé que

$$\mathcal{C}_c^\infty(G) \ni \phi \rightarrow \text{tr } \pi(\phi) \in \mathbb{C} \tag{2.10}$$

est une distribution (au sens de Laurent Schwartz).

Pour $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ et $a \in G$, définissons $\phi^a \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ par $\phi^a(x) = \phi(axa^{-1})$, $x \in G$. Comme démontré dans [11], chapitre 5, page 11,

$$\pi(\phi^a) = \pi(a^{-1})\pi(\phi)\pi(a)$$

En particulier, on obtient que $\text{tr } \pi(\phi^a) = \text{tr } \pi(\phi)$.

Soit G' l'ensemble des points réguliers de G (voir [13]). L'ensemble G' est un sous-ensemble ouvert et partout dense de G .

Théorème 2.4.2. Soit (π, \mathcal{H}) une représentation irréductible quasi-simple de G et soit son caractère. Il existe alors une fonction Θ_π sur G' telle que pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, on a

$$\int_G \phi(g)\Theta_\pi(g)d\mu_G(g) = \text{tr } \int_G \phi(g)\pi(g)d\mu_G(g).$$

On pourra consulter [13], théorème 2, page 477.

2.4.1 Caractère d'une série discrète

Avant de rappeler la formule d'Harish-Chandra pour les représentations de la série discrète, rappelons rapidement la formule de Weyl pour le caractère d'une représentation irréductible d'un groupe de Lie compact connexe.

Fixons G un groupe de Lie compact et connexe et soit T un tore maximal de G . Fixons $\Phi^+ = \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ un système de racines positives et soit (π, V_π) une représentation irréductible de G de plus haut poids $\lambda \in \mathfrak{t}^*$. D'après [24], chapitre V, théorème 5.113, page 338, le caractère de π est donné sur le tore T par la formule suivante :

$$\Theta_\pi(t) = \frac{\sum_{\omega \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\omega) \xi_{\omega(\lambda+\rho)-\rho}(t)}{\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - \xi_{-\alpha}(t))} \quad (2.11)$$

où $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$, \mathcal{W} est le groupe de Weyl associé à (\mathfrak{g}, Φ) et $\text{sgn}(\omega)$ est la signature de ω . L'équation (2.11) se réécrit comme suit

$$\Theta_\pi(\exp(x)) = \frac{\sum_{\omega \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\omega) e^{\omega(\lambda+\rho)}(x)}{\prod_{\alpha \in \Phi^+} (e^{\frac{\alpha(x)}{2}} - e^{-\frac{\alpha(x)}{2}})} \quad (2.12)$$

Passons à présent au cas connexe non compact. D'après [14], page 90, théorème 13, le groupe G possède des séries discrètes si et seulement si $\text{rk}(G) = \text{rk}(K)$ où K est un sous-groupe maximal compact de G (ou bien G possède un sous-groupe de Cartan compact) et où $\text{rk}(G)$ est la dimension d'une sous-algèbre de Cartan de G .

Exemple 2.4.3. Considérons $G = \text{U}(p, q, \mathbb{C})$ et soit $K = \text{U}(p, \mathbb{C}) \times \text{U}(q, \mathbb{C})$ le sous-groupe maximal compact de G (voir annexe A). On a :

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} it_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & it_{p+q} \end{pmatrix} ; t_1, \dots, t_{p+q} \in \mathbb{R} \right\}$$

Ainsi, le groupe G possède une série discrète.

Considérons G un groupe de Lie semi-simple connexe qui possède des séries discrètes. Soit $T \subseteq K$ un sous-groupe de Cartan pour K (et donc pour G). Soit π une série discrète de G . Soit $\mathfrak{t}, \mathfrak{k}$ et \mathfrak{g} les algèbres de Lie complexifiées de T, K et G respectivement. D'après [12], théorème 3, page 289 et [14], théorème 16, page 96, il existe $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ tel que le caractère Θ_π de π soit donné par :

$$\Theta_\pi(\exp(x)) = (-1)^{\frac{1}{2} \dim G/K} \sum_{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{k})} \frac{\text{sgn}(w) e^{w\lambda(x)}}{\prod_{\substack{\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \\ \langle \alpha, \mathfrak{t} \rangle > 0}} (e^{\frac{\alpha(x)}{2}} - e^{-\frac{\alpha(x)}{2}})} \quad (2.13)$$

2.4.2 Une formule de Enright

Dans cette partie, nous allons rappeler l'un des résultats de [9], à savoir une formule du caractère d'une représentation irréductible unitaire de plus haut poids (dans cette partie, G est un groupe de Lie simple et K est tel que (G, K) soit une paire hermitienne symétrique).

Pour se faire, nous allons adapter les résultats au cas $G = U(p, q, \mathbb{C})$ et $K = U(p, \mathbb{C}) \times U(q, \mathbb{C})$. Posons $n = p + q$. De nouveau, notons \mathfrak{g}_0 et \mathfrak{k}_0 les algèbres de Lie respectives de G et K . Soient \mathfrak{t}_0 une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{k}_0 . En particulier, \mathfrak{t}_0 est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 . Soit $\mathfrak{t}, \mathfrak{k}, \mathfrak{g}$ les algèbres de Lie complexifiées de $\mathfrak{t}_0, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{g}_0$. Ici, on va considérer \mathfrak{t} définie comme suit :

$$\mathfrak{t} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}H_i$$

où $H_i = E_{i,i}$.

Dans notre cas, on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. D'après l'exemple 2.2.7, on a :

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm(e_i - e_j); 1 \leq i < j \leq n\}$$

De même, on a

$$\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \{\pm(e_i - e_j); 1 \leq i < j \leq p\} \cup \{\pm(e_i - e_j); p+1 \leq i < j \leq n\} \quad (2.14)$$

Soit $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{e_i - e_j; 1 \leq i < j \leq p\}$ l'ensemble des racines positives et $\Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \cap \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$.

Les éléments de $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ sont appelées racines compactes de \mathfrak{g} .

Notons $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ le groupe de Weyl associé à \mathfrak{g} , c'est-à-dire le sous-groupe de $GL(\mathfrak{t}^*)$ engendré par les réflexions $s_\alpha, \alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. De même, notons $\mathcal{W}(\mathfrak{k}) = \mathcal{W}(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ le groupe de Weyl compact, c'est-à-dire le sous-groupe de Weyl \mathcal{W} engendré par les $s_\alpha, \alpha \in \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$. D'après [22], chapitre III, section 12.2, page 66, on a $\mathcal{W} \approx \mathcal{S}_{p+q}$. L'action de \mathcal{S}_{p+q} sur \mathfrak{t}^* est donnée par :

$$\sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^{p+q} h_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{p+q} h_i e_{\sigma(i)}$$

Les éléments de $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \{e_i - e_j; 1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq n\}$ sont les racines positives non compactes de \mathfrak{g} .

Soit $\rho = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})} \alpha \right)$ et soit $\rho(\mathfrak{k}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})} \alpha \right)$. Dans notre cas, on a :

$$\rho = \sum_{a=1}^n \frac{n-2a+1}{2} e_a \quad \rho(\mathfrak{k}) = \sum_{a=1}^p \frac{p-2a+1}{2} e_a + \sum_{a=1}^q \frac{q-2a+1}{2} e_{p+a} \quad (2.15)$$

Notons par \mathcal{W}^\dagger l'ensemble suivant :

$$\mathcal{W}^\dagger = \{w \in \mathcal{W}; w\rho \text{ est } \Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})\text{-dominant}\}$$

Plus précisément, on a :

$$\mathcal{W}^\dagger = \{w \in \mathcal{W} ; (w\rho)_1 > \dots > (w\rho)_p \text{ et } (w\rho)_{p+1} > \dots > (w\rho)_n\}$$

D'après [9], section 2, page 28, on a la décomposition suivante :

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathfrak{f}) \cdot \mathcal{W}^\dagger \quad (2.16)$$

avec $\mathcal{W}(\mathfrak{f}) \cap \mathcal{W}^\dagger = \{Id\}$. Pour tout $w \in \mathcal{W}$, notons \bar{w} la projection de w sur \mathcal{W}^\dagger correspondant à la décomposition (2.16) de \mathcal{W} .

Exemple 2.4.4. Fixons $G = U(2, 2, \mathbb{C})$ et $K = U(2, \mathbb{C}) \times U(2, \mathbb{C})$.

Dans ce cas, $\mathcal{W} \cong \mathcal{S}_4$ et $\mathcal{W}(\mathfrak{f}) \cong \{Id, (12), (34), (12)(34)\}$. Dans ce cas, on obtient :

$$\mathcal{W}^\dagger \cong \{Id, (23), (132), (234), (13)(24), (1342)\}$$

De plus, on a $(123) \in \mathcal{W}$ et $(123) = (12)(23)$, avec $(12) \in \mathcal{W}(\mathfrak{f})$ et $(23) \in \mathcal{W}^\dagger$. Ainsi, $\overline{(123)} = (23)$.

A présent, pour une forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{t}^*$, on définit \mathcal{W}_λ , sous-groupe de \mathcal{W} , comme le sous-groupe engendré par l'identité et les réflexions s_α satisfaisant aux conditions suivantes :

1. $\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi^+(\mathfrak{f}, \mathfrak{t})$ et $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{N}^*$,
2. Si $\beta \in \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi^+(\mathfrak{f}, \mathfrak{t})$ et $\langle \lambda, \beta \rangle = 0$, alors $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$.

Posons à présent $\Phi_\lambda(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ le sous-ensemble de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ constitué des éléments β tels que $s_\beta \in \mathcal{W}_\lambda$, et soit $\Phi_\lambda(\mathfrak{f}) = \Phi_\lambda(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \cap \Phi(\mathfrak{f}, \mathfrak{t})$. De même, on définit naturellement $\Phi_\lambda^+(\mathfrak{f}) = \Phi_\lambda(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \cap \Phi^+(\mathfrak{f}, \mathfrak{t})$.

Exemple 2.4.5. 1. Considérons $\lambda = \sum_{a=1}^{p+q} \lambda_a e_a$, avec $\lambda_i \in \mathbb{N}^*$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\lambda_i > \lambda_j, i > j$. Pour tout $1 \leq a \leq p$ et $p+1 \leq b \leq p+q$, on a $\langle \lambda, e_a - e_b \rangle = \lambda_a - \lambda_b \in \mathbb{N}^*$. De plus, pour tout $\beta \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$, on a $\langle \lambda, \beta \rangle \neq 0$. Ainsi, $\mathcal{W}_\lambda = \langle s_\beta ; \beta \in \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi^+(\mathfrak{f}, \mathfrak{t}) \rangle$. Remarquons dans ce cas que $\mathcal{W}_\lambda = \mathcal{W}$. En effet, pour tout $a < b \in [1, p]$, on a $(ab) = (ac)(bc)(ac)$ pour tout $c \in [p+1, p+q]$. Ainsi, \mathcal{W}_λ contient toutes les transpositions de \mathcal{S}_{p+q} , et ces dernières engendrent le groupe symétrique \mathcal{S}_{p+q} . De la même manière, si $\lambda = \sum_{i=1}^{p+q} \lambda_i e_i$ avec $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{p+q}$, alors $\mathcal{W}_\lambda = \{Id\}$.

2. Prenons $G = U(4, \mathbb{C})$ et $K = U(2, 2, \mathbb{C})$, et soit $\lambda = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$. Alors, on a $\langle \lambda, e_1 - e_3 \rangle = \langle \lambda, e_2 - e_4 \rangle = 0$ et $\langle \lambda, e_1 - e_4 \rangle = 2$. Or, on a $\langle \lambda, e_1 - e_3 \rangle = 0$ et $\langle e_1 - e_3, e_1 - e_4 \rangle = 1$. Ainsi, $\mathcal{W}_\lambda = \{Id\}$.

Avant d'énoncer le théorème, notons $\mathcal{W}_\lambda(\mathfrak{f}) = \mathcal{W}_\lambda \cap \mathcal{W}(\mathfrak{f})$ et soit $\mathcal{W}_\lambda^\dagger$ défini par :

$$\mathcal{W}_\lambda^\dagger = \{w \in \mathcal{W}_\lambda ; w\rho \text{ est } \Phi_\lambda^+(\mathfrak{f})\text{-dominant}\}$$

Alors, d'après [9], chapitre 2, page 29, on a :

$$\mathcal{W}_\lambda = \mathcal{W}_\lambda(\mathfrak{f}) \times \mathcal{W}_\lambda^\dagger$$

Théorème 2.4.6 (Enright, [9]). *Soit π une représentation de G de plus haut poids λ . Pour tout $x \in \mathfrak{t}^{\text{reg}}$, on a :*

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})} (e^{\frac{\alpha(x)}{2}} - e^{-\frac{\alpha(x)}{2}}) \Theta_{\pi}(\exp(x)) = \sum_{w \in \mathscr{W}_{\lambda}^{\mathfrak{k}}} (-1)^{l_{\lambda}(w)} \Theta_{\mathfrak{k}}(\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k})) \quad (2.17)$$

où $\Theta_{\mathfrak{k}}(\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k}))$ est le caractère de la représentation de K de plus haut poids $\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k})$ et $l_{\lambda}(w)$ dénote la fonction longueur sur \mathscr{W}_{λ} définie par $\Phi^+(\mathfrak{k})$.

Quelques commentaires concernant cette formule. Tout d'abord, pour tout $w = \sum_{i=1}^{p+q} w_i e_i \in \mathbb{C}^{p+q}$, notons $p_1(w)$ le vecteur de \mathbb{C}^{p+q} défini par $p_1(w) = \sum_{i=1}^p w_i e_i$ et soit $p_2 : \mathbb{C}^{p+q} \rightarrow \mathbb{C}^q$ définie par $p_2(w) = \sum_{i=p+1}^{p+q} w_i e_i$. Or, toute représentation irréductible de K est donnée par le produit tensoriel de représentations irréductibles de $K_1 = \text{U}(p, \mathbb{C})$ et $K_2 = \text{U}(q, \mathbb{C})$. Ainsi, on a :

$$\Theta_{\mathfrak{k}}(\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k})) = \Theta_{\mathfrak{k}_1}(p_1(\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k}))) \Theta_{\mathfrak{k}_2}(p_2(\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k})))$$

où $\Theta_{\mathfrak{k}_1}(p_1(\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k})))$ (resp. $\Theta_{\mathfrak{k}_2}(p_2(\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k})))$) est le caractère de la représentation de K_1 (resp. K_2) de plus haut poids $p_1(\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k}))$ (resp. $\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k})$).

En utilisant la formule du caractère de Weyl (équation (2.11)), on obtient :

$$\Theta_{\mathfrak{k}_1}(p_1(\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k}))) (p_1(x) = (x_1, \dots, x_p)) = \sum_{s_1 \in \mathscr{W}(\mathfrak{k}_1)} \text{sgn}(s_1) \frac{e^{s_1(p_1(\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k})) + \rho(\mathfrak{k}_1))}}{\prod_{\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{t}_1)} (e^{\frac{\alpha(p_1(x))}{2}} - e^{-\frac{\alpha(p_1(x))}{2}})}$$

Ainsi, (2.17) se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} & \prod_{\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})} (e^{\frac{\alpha(x)}{2}} - e^{-\frac{\alpha(x)}{2}}) \Theta_{\pi}(\exp(x)) \\ &= \sum_{w \in \mathscr{W}_{\lambda}^{\mathfrak{k}}} (-1)^{l_{\lambda}(w)} \left(\sum_{s_1 \in \mathscr{W}(\mathfrak{k}_1)} \text{sgn}(s_1) e^{s_1(p_1(\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k})) + \rho(\mathfrak{k}_1))} \right) \left(\sum_{s_2 \in \mathscr{W}(\mathfrak{k}_2)} \text{sgn}(s_2) e^{s_2(p_2(\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k})) + \rho(\mathfrak{k}_2))} \right) \\ &= \sum_{w \in \mathscr{W}_{\lambda}^{\mathfrak{k}}} (-1)^{l_{\lambda}(w)} \left(\sum_{s_1 \in \mathscr{W}(\mathfrak{k}_1)} \sum_{s_2 \in \mathscr{W}(\mathfrak{k}_2)} \text{sgn}(s_1) \text{sgn}(s_2) e^{s_1(p_1(\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k})) + \rho(\mathfrak{k}_1)) + s_2(p_2(\bar{w}\lambda - \rho(\mathfrak{k})) + \rho(\mathfrak{k}_2))} \right) \\ &= \sum_{w \in \mathscr{W}_{\lambda}^{\mathfrak{k}}} (-1)^{l_{\lambda}(w)} \sum_{s \in \mathscr{W}} \text{sgn}(s) e^{s(\bar{w}\lambda)} \end{aligned}$$

2.5 Théorème de dualité de Howe

2.5.1 La représentation de Weil

Fixons $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel sympléctique de dimension finie. On supposera toujours par la suite qu'une forme sympléctique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non-dégénérée.

Nous allons à présent rappeler la construction d'une représentation centrale dans cette thèse : la représentation de Weil, aussi appelée représentation métaplectique, représentation oscillatoire ou représentation de Segal - Shale - Weil. Le groupe métaplectique, noté $\widetilde{\text{Sp}}(W)$, est un revêtement à deux feuillets non trivial du groupe symplectique. Ce dernier peut être vu comme l'unique extension centrale non triviale de $\text{Sp}(W)$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (voir [2], corollaire 4.21). Dans cette section, nous allons rappeler la construction de la représentation de Weil donnée dans [2] (on pourra aussi consulter [33]). Une construction plus "classique" mais moins explicite, utilisant le théorème de Stone Von-Neumann, peut par exemple se trouver dans les articles [44], [17] ou [27].

Soit J une structure complexe positive compatible sur W . Plus précisément, $J \in \mathfrak{sp}(W)$, on a $J^2 = -Id$ et la forme bilinéaire symétrique $\beta = \langle J, \cdot \rangle$ est définie positive. Pour tout $g \in \text{Sp}(W)$, on note $J_g = J^{-1}(g - 1)$. Notons J_g^* l'adjoint de J_g par rapport à la forme $\langle J, \cdot \rangle$. Plus précisément, on a $J_g^* = Jg^{-1}(1 - g)$. En effet, pour tout $u, v \in W$, on a :

$$\begin{aligned} \beta(J_g u, v) &= \langle J(J_g u), v \rangle = \langle (g - 1)u, v \rangle = \langle u, (g^{-1} - 1)v \rangle \\ &= \langle u, JJ^{-1}(g^{-1} - 1)v \rangle = - \langle Ju, J^{-1}(g^{-1} - 1)v \rangle = \langle Ju, J(g^{-1} - 1)v \rangle \\ &= \beta(u, Jg^{-1}(1 - g)v). \end{aligned}$$

Ainsi, on a clairement que $\text{Im}(J_g)^\perp = \text{Ker}(J_g^*)$, et donc $\text{Im}(J_g) = \text{Ker}(J_g^*)^\perp = \text{Ker}(J_g)^\perp$, avec \perp l'orthogonal par rapport à la forme β . On peut alors regarder la restriction de J_g à $J_g W$, ce qui définit une application inversible. Cela nous permet donc de considérer le déterminant de la restriction $J_g : J_g(W) \rightarrow J_g(W)$, que l'on dénotera par la suite $\det(J_g)_{J_g(W)}^{-1}$. On définit alors le groupe de Weil, comme suit :

$$\widetilde{\text{Sp}}(W) = \{ \tilde{g} = (g, \xi) \in \text{Sp}(W) \times \mathbb{C} ; \xi^2 = \det(-iJ_g)_{J_g(W)}^{-1} \}$$

La multiplication dans le groupe de Weil est donnée comme suit :

$$(g, \xi) \cdot (h, \eta) = (gh, \xi\eta C(g, h)).$$

où $C : \text{Sp}(W) \times \text{Sp}(W) \rightarrow \mathbb{C}$ est le cocycle défini dans [2], proposition 4.13, page 1546. Plus précisément, en utilisant de nouveau [2], on obtient, d'après le lemme 4.17, page 1550, pour tous $g_1, g_2 \in \text{Sp}(W)$

$$|C(g_1, g_2)| = \sqrt{\frac{|\det(J_{g_1})_{J_{g_1}W} \det(J_{g_2})_{J_{g_2}W}|}{|\det(J_{g_1 g_2})_{J_{g_1 g_2}W}|}}.$$

Notation 2.5.1. Pour tout \mathbb{R} -espace vectoriel V de dimension finie, notons $\mathcal{S}(V)$ l'espace de Schwarz associé à V , muni de la topologie usuelle, et soit $\mathcal{S}^*(V)$ l'espaces des distributions tempérées sur V .

Considérons à présent une polarisation complète de notre espace W , à savoir $W = X \oplus Y$, avec X et Y deux sous-espaces isotropes maximaux, et soit χ le caractère non trivial de \mathbb{R} défini par $\chi(r) = e^{2i\pi r}$. Considérons la mesure de Lebesgue sur W , que l'on normalise de manière à ce que la mesure du cube

unité par rapport à la forme β soit 1. De même, on normalisera la mesure de Lebesgue sur tout sous-espace vectoriel W de façon à ce que la mesure unité par rapport à β soit 1. Pour tout élément $g \in \text{Sp}(W)$, on associe l'élément $t(g) \in \mathcal{S}^*(W)$ défini par :

$$t(g) = \chi_{c(g)} \mu_{(g-1)W}$$

où $\chi_{c(g)} : (g-1)W \rightarrow \mathbb{C}$ est défini par $\chi_{c(g)}(u) = \chi\left(\frac{1}{4} < c(g)u, u >\right)$. De même, pour tout $\tilde{g} \in \widetilde{\text{Sp}(W)}$, on définit $T(\tilde{g}) \in \mathcal{S}^*(W)$ par

$$T(\tilde{g}) = \Theta(\tilde{g})t(g)$$

avec Θ la fonction de $\widetilde{\text{Sp}(W)}$ dans \mathbb{C} définie par

$$\Theta(\tilde{g}) = \xi, \quad (\tilde{g} = (g, \xi)). \quad (2.18)$$

Rappelons rapidement la définition et quelques propriétés de la convolution twistée \natural ([2], partie 4.5, page 59). Pour deux fonctions $\Phi, \eta \in \mathcal{S}(W)$, on définit $\Phi \natural \eta$ comme suit :

$$\Phi \natural \eta(w) = \int_W \Phi(u) \eta(w-u) \chi\left(\frac{1}{2} < u, w >\right) d\mu_W(u), \quad (w \in W).$$

On obtient directement que $\Phi \natural \eta \in \mathcal{S}(W)$. On peut étendre cette convolution à certaines classes de distributions. Pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{S}(W)$ et tout $g \in \text{Sp}(W)$, la convolution twistée $t(g) \natural \Phi$ donnée par

$$t(g) \natural \Phi(w) = \int_{(g-1)W} \chi_{c(g)}(u) \Phi(w-u) \chi\left(\frac{1}{2} < u, w >\right) d\mu_{(g-1)W}(u),$$

est une fonction continue. En outre, d'après [2], proposition 44, page 51, l'application $\mathcal{S}(W) \ni \Phi \rightarrow t(g) \natural \Phi \in \mathcal{S}(W)$ est bien définie et continue.

Comme démontré dans [2], lemme 58, page 60, l'application $T : \widetilde{\text{Sp}(W)} \rightarrow \mathcal{S}^*(W)$ est injective et continue. En utilisant [2], lemme 57, page 59, on obtient que pour tout $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in \widetilde{\text{Sp}(W)}$,

$$T(\tilde{g}_1 \tilde{g}_2) = T(\tilde{g}_1) \natural T(\tilde{g}_2) \quad (2.19)$$

A présent, on introduit la transformée de Weyl. Notons \mathcal{K} l'application de $\mathcal{S}(W)$ dans $\mathcal{S}(X \times X)$ définie par :

$$\mathcal{K}(f)(x, x') = \int_Y f(x - x' + y) \chi\left(\frac{1}{2} < y, x + x' >\right) d\mu_Y(y)$$

Cette application est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques, qui s'étend en un isomorphisme

$$\mathcal{K} : \mathcal{S}^*(W) \rightarrow \mathcal{S}^*(X \times X) \quad (2.20)$$

Pour finir, on définit l'application Op , de $\mathcal{S}(X \times X)$ dans $\text{Hom}(\mathcal{S}(X), \mathcal{S}(X))$ par :

$$\text{Op}(K)v(x) = \int_X K(x, x')v(x')d\mu_X(x')$$

De nouveau, cette application s'étend en une application

$$\text{Op} : \mathcal{S}^*(X \times X) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{S}(X), \mathcal{S}^*(X)) \quad (2.21)$$

qui, de plus, est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques (pour plus de détails, on pourra consulter [2], partie 4.8, page 56). Considérons alors $\omega = \text{Op} \circ \mathcal{K} \circ T$. Plus précisément, on a :

$$\omega : \widetilde{\text{Sp}}(W) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{S}(X), \mathcal{S}^*(X))$$

Pour tout $\tilde{g} \in \widetilde{\text{Sp}}(W)$ et $\Phi \in \mathcal{S}(W)$, on a $T(\tilde{g})\natural\Phi \in \mathcal{S}(W)$. Ce qui implique donc que $\omega(\tilde{g})(\mathcal{S}(X)) \subseteq \mathcal{S}(X)$. On obtient alors $\omega : \widetilde{\text{Sp}}(W) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{S}(X), \mathcal{S}(X))$. De plus, d'après (2.19), l'application ω vérifie $\omega(\tilde{g}_1\tilde{g}_2) : \omega(\tilde{g}_1)\omega(\tilde{g}_2)$ pour tous $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in \widetilde{\text{Sp}}(W)$. Comme expliqué dans [2], section 4.7, l'application $\mathcal{S}(W) \ni \Phi \rightarrow t(g)\natural\Phi \in \mathcal{S}(W)$ s'étend en une isométrie de $L^2(W)$, et on obtient alors par extension une représentation $\omega : \widetilde{\text{Sp}}(W) \rightarrow U(L^2(X))$ (voir [2], théorème 60, page 62). La représentation unitaire $(\omega, L^2(X))$ est la représentation de Weil.

On peut montrer que le caractère de ω est Θ , d'où pour toute fonction $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\widetilde{\text{Sp}}(W))$, on a :

$$\int_{\widetilde{\text{Sp}}(W)} \Theta(\tilde{g})\Psi(\tilde{g})d\mu_{\widetilde{\text{Sp}}(W)}(\tilde{g}) = \text{tr} \int_{\widetilde{\text{Sp}}(W)} \Psi(\tilde{g})\omega(\tilde{g})d\mu_{\widetilde{\text{Sp}}(W)}(\tilde{g}) \quad (2.22)$$

Pour ce résultat, on pourra consulter [2], théorème 4.27, page 1555.

2.5.2 Paires duales réductives

Rappelons ici la notion de paires duales réductives et leur classification. Dans cette partie, nous utiliserons globalement les références suivantes : [20] (section 5), [27] (Lecture 5) et [1] (section 5). Une classification plus générale des paires duales dans les groupes de Lie classiques peut se trouver dans [39].

Soit $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel sympléctique réel de dimension finie et soit $\text{Sp}(W)$ le groupe sympléctique associé. Une paire duale réductive dans $\text{Sp}(W)$ est la donnée d'un couple de sous-groupes (G, G') de $\text{Sp}(W)$ tels que :

1. G (resp. G') est le centralisateur de G' (resp. G) dans $\text{Sp}(W)$,
2. l'action de G et G' sur W est complètement réductive.

Soit (G, G') une paire duale réductive dans $\text{Sp}(W)$. S'il existe deux sous-espaces non nuls W_1 et W_2 de W tels que $W = W_1 \oplus W_2$, orthogonaux par rapport à la forme sympléctique et invariants sous l'action de G, G' , alors la paire duale sera dite réductible. Dans ce cas, la restriction de la forme sympléctique à W_1 (resp. W_2) est sympléctique, et (G_1, G'_1) forme une paire duale dans $\text{Sp}(W_1)$, avec $G_1 = G|_{W_1}$. On dit dans ce cas que (G, G') est somme directe des (G_i, G'_i) , $i = 1, 2$. Si cette décomposition n'existe pas, la paire duale sera dite irréductible.

Toute paire duale est somme directe de sous-paires duales irréductibles, et ces dernières peuvent être décrites comme suit. Il existe deux types de paires duales réductives irréductibles : le type I correspond

aux paires duales dont l'action de $G.G'$ sur l'espace sympléctique W est irréductible, les autres paires sont dites de type II.

Pour les paires duales réductives irréductibles de type I, il existe une algèbre de division D sur \mathbb{R} munie d'une involution ι , deux D -modules V et V' , munis respectivement d'une forme ι -hermitienne $(.,.)$ et d'une forme ι -anti-hermitienne $(.,.)'$ tels que $W \approx V \otimes_D V'$. De plus, G et G' s'identifient respectivement aux groupes d'isométrie des formes $(.,.)$ et $(.,.)'$, et on a

$$\langle u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2 \rangle = \text{tr}_{D/\mathbb{R}}((u_1, u_2).(v_1, v_2)'), \quad u_1, u_2 \in V, v_1, v_2 \in V'.$$

Pour les paires duales de type II, la situation est légèrement différente : il existe deux sous-espaces isotropes maximaux X et Y invariants sous l'action de $G.G'$ tels que $W = X \oplus Y$, une algèbre de division D sur \mathbb{R} munie d'une involution ι , un D -module à droite X_1 et un D -module à gauche X_2 tels que $X \approx X_1 \otimes_D X_2$ de manière à ce que G s'identifie à $\text{GL}_D(X_1)$ et G' à $\text{GL}_D(X_2)$.

Une classification explicite pour les paires de type I est donnée par :

- $(\text{O}(p, q, \mathbb{R}), \text{Sp}(2n, \mathbb{R})) \subseteq \text{Sp}(2n(p + q), \mathbb{R})$
- $(\text{U}(p, q, \mathbb{C}), \text{U}(r, s, \mathbb{C})) \subseteq \text{Sp}(2(p + q)(r + s), \mathbb{R})$
- $(\text{O}(m, \mathbb{C}), \text{Sp}(2n, \mathbb{C})) \subseteq \text{Sp}(4nm, \mathbb{R})$
- $(\text{Sp}(p, q, \mathbb{H}), \text{O}^*(2n, \mathbb{H})) \subseteq \text{Sp}(4n(p + q), \mathbb{R})$

et pour les paires de type II :

- $(\text{GL}(n, \mathbb{R}), \text{GL}(m, \mathbb{R})) \subseteq \text{Sp}(2nm, \mathbb{R})$
- $(\text{GL}(n, \mathbb{C}), \text{GL}(m, \mathbb{C})) \subseteq \text{Sp}(4nm, \mathbb{R})$
- $(\text{GL}(n, \mathbb{H}), \text{GL}(m, \mathbb{H})) \subseteq \text{Sp}(8nm, \mathbb{R})$.

2.5.3 Correspondance de Howe

Soit $(W, \langle \dots \rangle)$ un espace vectoriel sympléctique réel, $\widetilde{\text{Sp}}(\widetilde{W})$ le groupe métapléctique et $(\omega, \mathcal{H} = L^2(X))$ la représentation métapléctique. De plus, notons $\mathcal{H}^\infty (= S(X))$ l'ensemble des vecteurs \mathcal{C}^∞ de ω . Pour tout sous-groupe H de $\text{Sp}(W)$, notons \widetilde{H} l'image réciproque de H dans $\widetilde{\text{Sp}}(\widetilde{W})$. Notons alors $\mathcal{R}(\widetilde{H})$ l'espace des classes infinitésimalement équivalentes (voir [41], page 16) de représentations continues, irréductibles et admissibles de \widetilde{H} dans un espace vectoriel localement convexe, et soit $\mathcal{R}(\widetilde{H}, \omega^\infty)$ l'ensemble des représentations de $\mathcal{R}(\widetilde{H})$ qui se réalisent comme un quotient de \mathcal{H}^∞ .

Soit (G, G') une paire duale réductive irréductible dans $\text{Sp}(W)$ et soient $\widetilde{G}, \widetilde{G}'$ les images réciproques dans $\widetilde{\text{Sp}}(\widetilde{W})$ de G et G' respectivement. Fixons $\Pi \in \mathcal{R}(\widetilde{G}, \omega)$. Ainsi, Π peut se réaliser comme un quotient de \mathcal{H}^∞ , mais ce de plusieurs manières. Ainsi, il existe des espaces fermés \mathcal{N}_i tels que $\Pi \approx \mathcal{H}^\infty / \mathcal{N}_i$. Considérons $\mathcal{N} = \bigcap_i \mathcal{N}_i$. Alors, \mathcal{H}^∞ est un \widetilde{G} -module. Mais, cet espace possède également une structure de \widetilde{G}' -module. Ainsi, $\mathcal{H}^\infty / \mathcal{N}$ est un $\widetilde{G}.\widetilde{G}'$ -module (et donc un $\widetilde{G} \times \widetilde{G}'$ -module) ; il existe donc $\Pi' \in \mathcal{R}(\widetilde{G}')$ tel que $\mathcal{H} / \mathcal{N} \approx \Pi \otimes \Pi'$.

Théorème 2.5.2 (R. Howe). *L'espace $\mathcal{R}(\tilde{G}, \tilde{G}')$ est le graphe d'une bijection entre $\mathcal{R}(\tilde{G}, \omega)$ et $\mathcal{R}(\tilde{G}', \omega)$.*

2.6 Supergroupes de Lie et paires duales réductives

Afin de comprendre les orbites de l'action de $G.G'$ sur l'espace vectoriel sympléctique W , il est pratique d'utiliser la réalisation d'une paire duale réductive en tant que supergroupe de Lie. On utilisera cela dans la section 4.3.

Commençons cette section par quelques définitions assez générales. Plus de détails peuvent se trouver dans [30], [38], [5] ou [40]. Considérons ici un corps commutatif \mathbb{K} de caractéristique nulle.

Définition 2.6.1. Un \mathbb{K} -espace vectoriel V est dit \mathbb{Z}_2 -gradué s'il existe deux sous-espaces vectoriels $V_{\bar{0}}$ et $V_{\bar{1}}$ de V tels que $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$.

Une algèbre (A, \cdot) est dite \mathbb{Z}_2 -graduée si A est \mathbb{Z}_2 -graduée en tant qu'espace vectoriel sur \mathbb{K} et si de plus, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$, $A_\alpha \cdot A_\beta \subseteq A_{\alpha+\beta}$. Une telle algèbre est appelée superalgèbre.

Une superalgèbre de Lie est une superalgèbre $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}, [., .])$ qui vérifie, pour tout $A \in \mathfrak{g}_\alpha, B \in \mathfrak{g}_\beta, C \in \mathfrak{g}_\gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_2$, les relations suivantes :

1. $[A, B] = -(-1)^{\alpha\beta}[B, A]$,
2. $(-1)^{\alpha\gamma}[A, [B, C]] + (-1)^{\alpha\beta}[B, [C, A]] + (-1)^{\beta\gamma}[C, [A, B]] = 0$.

Exemple 2.6.2. Soit $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ un espace vectoriel \mathbb{Z}_2 -gradué. Pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, on définit :

$$\text{End}(V)_{\bar{0}} = \{X \in \text{End}(V) ; X(V_\alpha) \subseteq V_\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}_2\} \quad (2.23)$$

$$\text{End}(V)_{\bar{1}} = \{X \in \text{End}(V) ; X(V_\alpha) \subseteq V_{\alpha+\bar{1}}, \alpha \in \mathbb{Z}_2\} \quad (2.24)$$

Alors, $\text{End}(V) = \text{End}(V)_{\bar{0}} \oplus \text{End}(V)_{\bar{1}}$ muni du crochet $[., .]$ défini par

$$[A, B] = AB - (-1)^{\alpha\beta}BA \quad (A \in \text{End}(V)_{\bar{\alpha}}, B \in \text{End}(V)_{\bar{\beta}})$$

est une superalgèbre de Lie.

Définition 2.6.3. Une représentation d'une superalgèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [., .])$ est la donnée d'un couple (V, π) , où V est un espace vectoriel \mathbb{Z}_2 -gradué et $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ tel que $\pi(\mathfrak{g}_\alpha) \subseteq \text{End}(V)_\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}_2$, et qui vérifie :

$$\pi([X, Y]) = [\pi(X), \pi(Y)] \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

Exemple 2.6.4. Soit $(\mathfrak{g}, [., .])$ une superalgèbre de Lie. L'application $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}), \text{ad}(X)(Y) = [X, Y], X, Y \in \mathfrak{g}$ est une représentation de \mathfrak{g} , appelée représentation adjointe.

Rappelons la définition de supergroupe de Lie (ou paire de Harish-Chandra). Pour plus de détails, on pourra consulter [30], section 3.3.

Définition 2.6.5. Une paire de Harish-Chandra est la donnée d'un couple $(G, \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1)$ où G est un groupe de Lie et \mathfrak{g} une superalgèbre tel que :

1. \mathfrak{g}_0 est l'algèbre de Lie de G ,
2. On a une action lisse de G sur \mathfrak{g} tel que la différentielle de cette représentation coïncide avec la représentation adjointe de \mathfrak{g} restreinte à \mathfrak{g}_0 .

Rappelons à présent les idées de [35], section 2. Soit D une algèbre à division sur \mathbb{R} et soient V_0 et V_1 deux espaces vectoriels sur D . Posons $V = V_0 \oplus V_1$ et soit s l'élément de $\text{End}(V)$ défini comme suit :

$$s(v_0 + v_1) = v_0 - v_1 \quad (v_0 \in V_0, v_1 \in V_1)$$

Les équations (2.23) et (2.24) se réécrivent comme suit :

$$\text{End}(V)_0 = \{X \in \text{End}(V) ; sX = Xs\} \quad (2.25)$$

$$\text{End}(V)_1 = \{X \in \text{End}(V) ; sX = -Xs\} \quad (2.26)$$

Posons $\text{GL}(V)_0 = \text{GL}(V) \cap \text{End}(V)_0$. On obtient le lemme suivant :

Lemme 2.6.6. *Le couple $(\text{GL}(V)_0, \text{End}(V))$ muni de l'action lisse $\text{Ad} : \text{GL}(V)_0 \rightarrow \text{End}(V)$ définie par*

$$\text{Ad}(g)(X) = gXg^{-1} \quad (g \in G, X \in \text{End}(V)),$$

est une paire de Harish-Chandra.

Notons $\{.,.\} : \text{End}(V)_1 \times \text{End}(V)_1 \rightarrow \text{End}(V)_0$ la forme définie par :

$$\{x, y\} = xy + yx \quad (2.27)$$

Lemme 2.6.7. *Pour tout $X, Y \in \text{End}(V)_1$ et $g \in \text{GL}(V)_0$, on a*

$$\{\text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y\} = \text{Ad}(g)\{X, Y\}$$

Considérons sur $\text{End}(V)$ la forme $\langle ., . \rangle$ définie par :

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}_{D/\mathbb{R}}\{sX, Y\} \quad (X, Y \in \text{End}(V)) \quad (2.28)$$

D'après la section 2.5.2, pour toute paire duale irréductible (G, G') de type I , il existe une algèbre à division D sur \mathbb{R} , une involution ι sur D , un espace hermitien $(V, (.,.))$ et un espace anti-hermitien $(V', (.,.))'$ tel que G s'identifie au groupe d'isométrie de la forme $(V, (.,.))$, noté $G(V, (.,.))$, et G' à $G(V', (.,.))'$. Pour conserver les notations de [35], notons $V_0 = V$, $\tau_0 = (.,.)$ la forme ι -hermitienne sur V_0 , $V_1 = V'$ et soit $\tau_1 = (.,.)'$ la forme ι -anti-hermitienne sur V_1 . Considérons τ la forme définie sur V par $\tau = \tau_0 \oplus \tau_1$, c'est-à-dire

$$\tau(u_0 + u_1, v_0 + v_1) = \tau_0(u_0, v_0) + \tau_1(u_1, v_1)$$

On a alors :

$$\tau(u, v) = \iota(\tau(v, su)) \quad (u, v \in V)$$

Posons :

$$\mathfrak{g}(V, \tau)_{\bar{0}} = \{X \in \text{End}(V)_{\bar{0}}; \tau(Xu, v) = \tau(u, -Xv), u, v \in V\}$$

$$\mathfrak{g}(V, \tau)_{\bar{1}} = \{X \in \text{End}(V)_{\bar{1}}; \tau(Xu, v) = \tau(u, sXv), u, v \in V\}$$

$$G(V, \tau)_0 = \{g \in \text{GL}(V)_0; \tau(g(u), g(v)) = \tau(u, v), u, v \in V\}$$

Théorème 2.6.8. $G(V, \tau)_0$ est un sous-groupe de $\text{GL}(V)_0$ dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}(V, \tau)_{\bar{0}}$.

De plus, $\{\mathfrak{g}(V, \tau)_{\bar{1}}, \mathfrak{g}(V, \tau)_{\bar{1}}\} \subseteq \mathfrak{g}(V, \tau)_{\bar{0}}$ où $\{.,.\}$ est la forme définie dans l'équation (2.27), et le groupe $G(V, \tau)_0$ préserve les sous-espaces $\mathfrak{g}(V, \tau)_{\bar{0}}$ et $\mathfrak{g}(V, \tau)_{\bar{1}}$.

En outre, la restriction à $\mathfrak{g}(V, \tau)_{\bar{1}}$ de la forme $\langle ., . \rangle$ définie dans l'équation (2.28) est sympléctique, et

$$\text{Ad} : G(V, \tau)_0 \rightarrow \text{Sp}(\mathfrak{g}(V, \tau)_{\bar{1}}, \langle ., . \rangle)$$

envoie les groupes

$$G_0 = \{g \in G(V, \tau)_0; g|_{V_{\bar{1}}} = 1\}$$

$$G_1 = \{g \in G(V, \tau)_1; g|_{V_{\bar{0}}} = 1\}$$

injectivement sur une paire duale réductive irréductible de type I dans $\text{Sp}(\mathfrak{g}(V, \tau)_1, \langle ., . \rangle)$. En particulier, G s'identifie à G_0 , G' à G_1 et W à $\mathfrak{g}(V, \tau)_{\bar{1}}$.

Fixons $(G = G(V), G' = G'(V'))$ une paire duale réductive irréductible de type I dans $\text{Sp}(W)$, et soit (S, \mathfrak{s}) le supergroupe de Lie associé. Par construction, \mathfrak{s} est une sous-superalgèbre de Lie de $\text{End}(V \oplus V')$.

Pour tout $x \in \mathfrak{s}$, notons $S.x$ l'orbite de x via l'action adjointe de S sur \mathfrak{s} :

$$S.x = \{ \text{Ad}(s)x; s \in S \}$$

Définition 2.6.9 ([28], chapitre 4). Un élément $x \in \mathfrak{s}$ est dit semi-simple si ce dernier est semi-simple en tant qu'élément de $\text{End}(V \oplus V')$.

Un élément semi-simple $x \in \mathfrak{s}_{\bar{1}}$ est dit régulier si $\dim(S.x) \geq \dim(S.y)$ pour tout élément y semi-simple de $\mathfrak{s}_{\bar{1}}$.

Pour tout élément $x \in \mathfrak{s}_{\bar{1}}$, notons ${}^x\mathfrak{s}_{\bar{1}}$ l'anticommutant de x dans $\mathfrak{s}_{\bar{1}}$ défini comme suit :

$${}^x\mathfrak{s}_{\bar{1}} = \{y \in \mathfrak{s}_{\bar{1}}; \{x, y\} = 0\}$$

Le double anticommutant de x dans $\mathfrak{s}_{\bar{1}}$, noté ${}^{x\mathfrak{s}_{\bar{1}}}\mathfrak{s}_{\bar{1}}$, est donné par :

$${}^{x\mathfrak{s}_{\bar{1}}}\mathfrak{s}_{\bar{1}} = \bigcap_{y \in {}^x\mathfrak{s}_{\bar{1}}} {}^y\mathfrak{s}_{\bar{1}}$$

Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_{\bar{1}}$ de $\mathfrak{s}_{\bar{1}}$ est définie comme le double anticommutant d'un élément semi-simple régulier $x \in \mathfrak{s}_{\bar{1}}$.

Chapitre 3

Une formule du caractère via le semi-groupe oscillatoire de Howe

3.1 La transformation de Cayley

Soit $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel sympléctique réel et soit $\text{Sp}(W)$ le groupe sympléctique défini comme suit :

$$\text{Sp}(W) = \{g \in \text{GL}(W) ; \langle g(u), g(w) \rangle = \langle u, w \rangle \ (\forall u, w \in W)\}$$

L'algèbre de Lie sympléctique, notée $\mathfrak{sp}(W)$, est donnée par :

$$\mathfrak{sp}(W) = \{X \in \text{End}(W) ; \langle Xu, v \rangle + \langle u, Xv \rangle = 0 \ (\forall u, v \in W)\}$$

Pour tout $X \in \text{End}(W)$ tel que $\det(X - 1) \neq 0$, on définit la transformation de Cayley, notée $c(X)$, par :

$$c(X) = (X + 1)(X - 1)^{-1}$$

Notons $\mathfrak{sp}^c(W)$ et $\text{Sp}^c(W)$ les sous-ensembles de $\mathfrak{sp}(W)$ et $\text{Sp}(W)$ respectivement définis par :

$$\mathfrak{sp}^c(W) = \{X \in \mathfrak{sp}(W) ; \det(X - 1) \neq 0\} \quad \text{et} \quad \text{Sp}^c(W) = \{g \in \text{Sp}(W) ; \det(g - 1) \neq 0\}.$$

Lemme 3.1.1. *Pour tout $X \in \mathfrak{sp}^c(W)$, on a $c(X) \in \text{Sp}^c(W)$. De plus, $c^2(X) = X$.*

Démonstration. Pour tout $X \in \mathfrak{sp}^c(W)$ et $u, v \in W$, on a :

$$\begin{aligned} \langle c(X)u, c(X)v \rangle &= \langle (X + 1)(X - 1)^{-1}u, (X + 1)(X - 1)^{-1}v \rangle = - \langle (X - 1)^{-1}u, (X - 1)(X + 1)(X - 1)^{-1}v \rangle \\ &= - \langle (X - 1)^{-1}u, (X + 1)v \rangle = \langle (X - 1)(X - 1)^{-1}u, v \rangle \\ &= \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

et

$$\det(c(X) - 1) = \det((X + 1)(X - 1)^{-1} - 1) = \det((X + 1)(X - 1)^{-1} - (X - 1)(X - 1)^{-1}) = \det(2(X - 1)^{-1}) \neq 0$$

Ainsi, $c(X) \in \mathrm{Sp}^c(W)$. On peut alors définir $c(c(X))$. Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned} c^2(X) &= (c(X) + 1)(c(X) - 1)^{-1} = ((X + 1)(X - 1)^{-1} + 1)((X + 1)(X - 1)^{-1} - 1)^{-1} \\ &= ((X + 1)(X - 1)^{-1} + (X - 1)(X - 1)^{-1})((X + 1)(X - 1)^{-1} - (X - 1)(X - 1)^{-1})^{-1} \\ &= 2X(X - 1)^{-1}(2(X - 1)^{-1})^{-1} = X \end{aligned}$$

□

A présent, considérons $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ le groupe métaplectique et soit $\mathrm{pr} : \widetilde{\mathrm{Sp}}(W) \rightarrow \mathrm{Sp}(W)$ l'application associée au revêtement. D'après [33], chapitre 3, lemme 3.5, page 65, il existe une application analytique $\tilde{c} : \mathfrak{sp}^c(W) \rightarrow \mathrm{Sp}^c(W)$ pour laquelle le schéma suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & \widetilde{\mathrm{Sp}}^c(W) \\ & \nearrow \tilde{c} & \downarrow \mathrm{pr} \\ \mathfrak{sp}^c(W) & \xrightarrow{c} & \mathrm{Sp}^c(W) \end{array}$$

On remarque que $\mathrm{pr}(\tilde{c}(0)) = -1$. Soit (G, G') une paire duale réductive dans $\mathrm{Sp}(W)$ et soit (\tilde{G}, \tilde{G}') la paire duale associée dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$. Comme mentionné dans [33], section 3, page 65, on a $c(g^c) \subseteq G^c$. Ici, G est un sous-espace de $\mathrm{End}_D(V)$, où D est une algèbre à division sur \mathbb{R} et V un D -espace, et $G^c = \{g \in G ; \det(g - 1) \neq 0\}$.

De plus, si G est compact, alors, le domaine de la transformée de Cayley contient \mathfrak{g} ([33], lemme 3.5, page 65).

3.2 Le semi-groupe oscillatoire

Nous allons ici rappeler la définition du semi-groupe oscillatoire défini par Howe dans [18]. Fixons $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel symplectique réel de dimension finie. Notons $W_{\mathbb{C}}$ la complexification de W . Pour tout $w \in W_{\mathbb{C}}$, on a $w = a + ib$, avec $a, b \in W$. Notons \bar{w} le conjugué de w par rapport à W , c'est-à-dire $\bar{w} = a - ib$. Notons de nouveau $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'extension de la forme symplectique à $W_{\mathbb{C}}$.

Lemme 3.2.1. *Sur $W_{\mathbb{C}}$, on définit la forme $H : W_{\mathbb{C}} \times W_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ par :*

$$H(w, w') = i \langle w, \bar{w}' \rangle \quad (3.1)$$

Alors, H est hermitienne.

Démonstration. Soient $w, w' \in W_{\mathbb{C}}$. Alors, il existe $x, x', y, y' \in \mathfrak{sp}(W)$ tels que $w = x + iy$ et $w' = x' + iy'$. On a :

$$\langle w, \bar{w}' \rangle = \langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle + i(\langle y, x' \rangle - \langle x, y' \rangle)$$

et

$$\langle w', \bar{w} \rangle = -(\langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle + i(\langle y, x' \rangle - \langle x, y' \rangle))$$

Ainsi,

$$H(w', \bar{w}) = i \langle w', \bar{w} \rangle = -i(\langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle + i(\langle y, x' \rangle - \langle x, y' \rangle)) = H(w, \bar{w}')$$

De plus, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $H(w, \lambda w') = i \langle w, \bar{\lambda} \bar{w}' \rangle = \bar{\lambda} H(w, w')$.

□

On définit le sous-ensemble $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$ de $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})$ comme suit :

$$\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++} = \{g \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}}); H(w, w) > H(g(w), g(w)), \forall w \in W_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}\} \quad (3.2)$$

Notons $\text{sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$ le sous-ensemble de $\text{End}(W_{\mathbb{C}})$ défini par :

$$\text{sp}(W_{\mathbb{C}})^{++} = \{z = x + iy; x, y \in \text{sp}(W), \det(z - 1) \neq 0, \langle yw, w \rangle > 0, w \in W \setminus \{0\}\}$$

Lemme 3.2.2. Soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \text{sp}(W)$ et tel que $\det(z - 1) \neq 0$. Alors,

$$H(w, w) > H(c(z)w, c(z)w) \quad (\forall w \in W_{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$$

si et seulement si

$$\langle yw, w \rangle > 0 \quad (\forall w \in W \setminus \{0\}).$$

Par conséquent, $c(\text{sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}) = \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$. En particulier, $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$ est le domaine de la transformée de Cayley.

Démonstration. Fixons $z = x + iy$, avec $x, y \in \text{sp}(W)$. On a $H(c(z)w, c(z)w) = H(\overline{c(z)}^{-1} c(z)w, w)$ et donc $H(w, w) > H(c(z)w, c(z)w) \Leftrightarrow H((1 - \overline{c(z)}^{-1} c(z))w, w) > 0$. Or, on a :

$$\begin{aligned} 1 - \overline{c(z)}^{-1} c(z) &= 1 - \left((\bar{z} + 1)(\bar{z} - 1)^{-1} \right)^{-1} (z + 1)(z - 1)^{-1} \\ &= 1 - (\bar{z} - 1)(\bar{z} + 1)^{-1} (z + 1)(z - 1)^{-1} \\ &= 1 - (\bar{z} + 1)^{-1} (\bar{z} - 1)(z + 1)(z - 1)^{-1} \\ &= (\bar{z} + 1)^{-1} (\bar{z} + 1)(z - 1)(z - 1)^{-1} - (\bar{z} + 1)^{-1} (\bar{z} - 1)(z + 1)(z - 1)^{-1} \\ &= (\bar{z} + 1)^{-1} ((\bar{z} + 1)(z - 1) - (\bar{z} - 1)(z + 1))(z - 1)^{-1} \end{aligned}$$

Or, $(\bar{z} + 1)(z - 1) - (\bar{z} - 1)(z + 1) = 4iy$. Ainsi, $1 - \overline{c(z)}^{-1} c(z) = 4i(\bar{z} + 1)^{-1}y(z - 1)^{-1}$. Ainsi, pour tout $w \in W_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} H(w, w) > H(c(z)w, c(z)w) &\Leftrightarrow H((1 - \overline{c(z)}^{-1} c(z))w, w) > 0 \\ &\Leftrightarrow 4iH((\bar{z} + 1)^{-1}y(z - 1)^{-1}w, w) > 0 \\ &\Leftrightarrow -4 \langle (\bar{z} + 1)^{-1}y(z - 1)^{-1}w, \bar{w} \rangle > 0 \\ &\Leftrightarrow -4 \langle y(z - 1)^{-1}w, (-\bar{z} + 1)^{-1}\bar{w} \rangle > 0 \\ &\Leftrightarrow 4 \langle yw', \bar{w}' \rangle > 0 \end{aligned}$$

avec $w' = (z - 1)^{-1}w$. Using the fact that $\langle yw', \bar{w}' \rangle \in \mathbb{R}_+^*$, by writting $w' = w'_1 + iw'_2$, we get :

$$\langle yw', \bar{w}' \rangle = \langle y(w'_1), w'_1 \rangle + \langle y(w'_2), w'_2 \rangle .$$

□

Proposition 3.2.3. *L'ensemble $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$ est un sous-semi-groupe de $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})$, ne contenant pas l'identité, mais stable par l'opération $g \rightarrow \bar{g}^{-1}$. De plus, on a :*

$$\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++} \text{Sp}(W) = \text{Sp}(W) \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++} \subseteq \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++} \quad (3.3)$$

et l'ensemble $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++} \cup \text{Sp}(W)$ est un sous-semi-groupe de $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})$.

Démonstration. Soient $g, g' \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$. Clairement, $gg' \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})$. De plus, pour tout $w \in W_{\mathbb{C}}$, on a :

$$H(gg'w, gg'w) < H(g'w, g'w) < H(w, w)$$

Ainsi, $gg' \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$, d'où la structure de semi-groupe.

Clairement, $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$ est fermé par rapport à $z \rightarrow -\bar{z}$ et $\overline{c(z)}^{-1} = c(-\bar{z})$. Donc, si $g \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$, on a $\bar{g}^{-1} \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$.

Soient $g \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$ et $h \in \text{Sp}(W)$. Pour tout $w \in W_{\mathbb{C}}$, on a $\overline{h(w)} = h(\bar{w})$ et :

$$H(gh(w), \overline{gh(w)}) < H(h(w), \overline{h(w)}) = i \langle h(w), \overline{h(w)} \rangle = i \langle h(w), h(\bar{w}) \rangle = H(w, w).$$

D'où l'égalité (3.3).

□

Corollaire 3.2.4. *Le groupe $\text{Sp}(W)$ est contenu dans la fermeture de $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$.*

Démonstration. Pour tout $g \in \text{Sp}(W)$, on a :

$$g = -c(0)g = \lim_{y \rightarrow 0, \langle y, y \rangle > 0} -c(iy)g$$

et d'après le lemme 3.2.2, on a $c(iy) \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$, et donc $c(iy)g \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$ d'après la proposition 3.2.3.

□

Remarque 3.2.5. Considérons une matrice $A \in \text{M}(n, \mathbb{R})$ symétrique et définie positive. On a alors $A = O^T D O$, avec $O \in \text{O}(n, \mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $d_i > 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi X^T A X} dX &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi X^T O^T D O X} dX = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi (O X)^T D O X} dX \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi Y^T D Y} dY = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi \sum_{i=1}^n d_i Y_i^2} dY \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi d_i Y_i^2} dY_i = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{d_i}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi Z_i} dZ_i \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{d_i}} = \det^{-\frac{1}{2}}(D) \end{aligned}$$

Pour $B = B^T$, considérons l'intégrale suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi X^T (A+iB)X} dX \quad (3.4)$$

Etant donné que $|e^{-\pi X^T (A+iB)X}| = |e^{-\pi X^T A X}|$, il vient alors que l'intégrale (3.4) est convergente d'après la remarque précédente. Remarquons d'ailleurs que l'application

$$A + iB \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi X^T (A+iB)X} dX$$

est holomorphe, et donc on étend l'application $\det^{-\frac{1}{2}}$ sur les éléments de la forme $A + iB$, A symétrique et définie positive et B symétrique par

$$\det^{-\frac{1}{2}}(A + iB) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi X^T (A+iB)X} dX$$

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme sympléctique sur W . On a $\langle w_1, w_2 \rangle = w_2^T J w_1$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. Remarquons que $Y \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) \Leftrightarrow JY \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$. Ainsi, pour tout $Z = X + iY \in \mathfrak{sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$, et $w \in W$, on a :

$$\chi_{X+iY}(w) = e^{i\frac{\pi}{2}\langle (X+iY)w, w \rangle} = e^{i\frac{\pi}{2}w^T J(X+iY)w} = e^{-\frac{\pi}{2}w^T (JY - iJX)w}$$

et donc :

$$\int_W \chi_{X+iY}(w) dw = \int_W e^{-\frac{\pi}{2}w^T (JY - iJX)w} dw = \det^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}(JY - iJX)\right)$$

(ce déterminant est bien défini étant donné que $\langle Y, \cdot \rangle > 0$ car $X + iY \in \mathfrak{sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$). En utilisant le fait que $\det(J) = 1$, on a

$$\int_W \chi_{X+iY}(w) = \det^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2i}(X + iY)\right)$$

Notons pour la suite

$$\text{chc}(X + iY) = \det^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2i}(X + iY)\right) \quad (3.5)$$

Remarquons que $\text{chc}(X + iY)$ est l'unique racine carrée du déterminant de $\frac{1}{2i}(X + iY)$ qui est positif pour $X = 0$.

On définit à présent le revêtement de $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$, noté $\widetilde{\text{Sp}}(W_{\mathbb{C}})^{++}$, comme suit :

$$\widetilde{\text{Sp}}(W_{\mathbb{C}})^{++} = \{(g, \xi); g \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}, \xi^2 = \det(i(g - 1))^{-1}\}$$

et soit $C : \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++} \times \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++} \rightarrow \mathbb{C}$ donné par :

$$C(g_1, g_2) = \det^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2i}(c(g_1) + c(g_2))\right)$$

Lemme 3.2.6. $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$ est connexe.

Démonstration. D'après [18], page 115, tout élément $g \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$ est de la forme

$$g = up \quad (u \in \text{Sp}(W), p \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++})$$

où p vérifie $p = \bar{p}^{-1}$ et possède des valeurs propres positives. Remarquons au passage que $p = c(z)$ avec $z = x + iy \in \text{sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$. De l'égalité $p = \bar{p}^{-1}$, on obtient que $c(z) = c(-\bar{z})$, c'est-à-dire $x = 0$. Plus précisément, on a d'après [18], page 81, équation (14.4), que pour tout $Y \in \text{sp}(W)$ tel que $\langle Y, \cdot \rangle$ est définie positive sur W , il existe $g \in \text{Sp}(W)$ tel que

$$g \begin{pmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{pmatrix} g^{-1}$$

avec $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ une matrice diagonale aux entrées strictement positives. Ainsi,

$$p = c(iY) = c\left(g \begin{pmatrix} 0 & -iD \\ iD & 0 \end{pmatrix} g^{-1}\right) = gc \left(\begin{pmatrix} 0 & -iD \\ iD & 0 \end{pmatrix} \right) g^{-1}.$$

Puisque p a des valeurs propres positives, $c \left(\begin{pmatrix} 0 & -iD \\ iD & 0 \end{pmatrix} \right)$ a des valeurs propres positives, ce qui signifie $\frac{d_j+1}{d_j-1} > 0$ pour $j = 1, \dots, n$. Ainsi, $d_j > 1$ pour tous $j = 1, \dots, n$. Or, $\{D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n); d_j > 1\}$ est connexe. De même, $\text{Sp}(W)$ est connexe. Ainsi, le semi-groupe $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$ est connexe. □

Lemme 3.2.7. *L'ensemble $\text{Sp}(\widetilde{W}_{\mathbb{C}})^{++}$ muni de la multiplication suivante*

$$(g_1, \xi_1) \cdot (g_2, \xi_2) = (g_1 g_2, \xi_1 \xi_2 C(g_1, g_2))$$

est un semi-groupe.

Démonstration. Soient $(g_1, \xi_1), (g_2, \xi_2) \in \text{Sp}(\widetilde{W}_{\mathbb{C}})^{++}$. On a

$$\begin{aligned} c(g_1) + c(g_2) &= (g_1 + 1)(g_1 - 1)^{-1} + (g_2 + 1)(g_2 - 1)^{-1} \\ &= (g_1 - 1)^{-1} ((g_1 + 1)(g_2 - 1) + (g_1 - 1)(g_2 + 1)) (g_2 - 1)^{-1} \end{aligned}$$

Or, $(g_1 + 1)(g_2 - 1) + (g_1 - 1)(g_2 + 1) = 2(g_1 g_2 - 1)$, ainsi :

$$\begin{aligned} \xi_1^2 \xi_2^2 C(g_1, g_2)^2 &= \det(i(g_1 - 1))^{-1} \det(i(g_2 - 1))^{-1} \det^{-1}(-i(g_1 - 1)^{-1}(g_1 g_2 - 1)(g_2 - 1)^{-1}) \\ &= \det(i(g_1 g_2 - 1)) \end{aligned}$$

Ainsi, le produit $(g_1, \xi_1) \cdot (g_2, \xi_2) \in \text{Sp}(\widetilde{W}_{\mathbb{C}})^{++}$. Montrons à présent l'associativité. Cela revient à montrer que C est un cocycle, c'est-à-dire que pour tout $g_1, g_2, g_3 \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$, on a :

$$C(g_1, g_2)C(g_1 g_2, g_3) = C(g_2, g_3)C(g_1, g_2 g_3)$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}
& (C(g_1, g_2)C(g_1g_2, g_3))^{-2} \\
&= \det \left(\frac{1}{i}(g_1 - 1))^{-1}(g_1g_2 - 1)(g_2 - 1)^{-1} \right) \det \left(\frac{1}{i}(g_1g_2 - 1))^{-1}(g_1g_2g_3 - 1)(g_3 - 1)^{-1} \right) \\
&= \det \left(-(g_1 - 1))^{-1}(g_2 - 1))^{-1}(g_3 - 1))^{-1}(g_1g_2g_3 - 1) \right)
\end{aligned}$$

De même,

$$(C(g_2, g_3)C(g_1, g_2g_3))^{-2} = \det \left(-(g_1 - 1))^{-1}(g_2 - 1))^{-1}(g_3 - 1))^{-1}(g_1g_2g_3 - 1) \right)$$

et donc $(C(g_1, g_2)C(g_1g_2, g_3))^{-2} = (C(g_2, g_3)C(g_1, g_2g_3))^{-2}$. Ainsi,

$$(g_1, g_2, g_3) \rightarrow \frac{C(g_1, g_2)C(g_1g_2, g_3)}{C(g_2, g_3)C(g_1, g_2g_3)}$$

est holomorphe et de carré égal à 1. Comme $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$ est connexe, cette dernière est constante. Or, pour tout $g_j = c(iy_j), \langle y_j, \cdot \rangle > 0$, on a

$$C(g_1, g_2) = \det^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2i}(c(c(iy_1)) + c(c(iy_2))) \right) = \det^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \right) > 0$$

De même, dans ce cas $C(g_1g_2, g_3), C(g_2, g_3)$ et $C(g_1, g_2g_3)$ sont positifs. On en déduit alors que

$$C(g_1, g_2)C(g_1g_2, g_3) = C(g_2, g_3)C(g_1, g_2g_3)$$

□

Notons $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^+ = \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++} \cup \text{Sp}(W)$ et soit $\widetilde{\text{Sp}}(W_{\mathbb{C}})^+$ le sous-ensemble de $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^+ \times \mathbb{C}$ défini par :

$$\widetilde{\text{Sp}}(W_{\mathbb{C}})^+ = \widetilde{\text{Sp}}(W_{\mathbb{C}})^{++} \cup \widetilde{\text{Sp}}(W)$$

Lemme 3.2.8. *Les deux cocycles définis sur $\text{Sp}(W)$ et $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++}$ s'étendent en une fonction continue $C : \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^+ \times \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^+ \rightarrow \mathbb{C}$.*

Démonstration. Notons $C' : \text{Sp}(W) \times \text{Sp}(W) \rightarrow \mathbb{C}$ le cocycle défini dans [2], proposition 4.13, page 1546, et soit $C : \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++} \times \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++} \rightarrow \mathbb{C}$. Montrons que ces deux fonctions coïncident sur un sous-espace dense, à savoir pour des éléments $(g_1, g_2) \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^+ \times \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^+$ qui vérifient

$$\det(g_1 - 1) \det(g_2 - 1) \det(g_1g_2 - 1) \neq 0. \quad (3.6)$$

Pour tout $(g_1, g_2) \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^+ \times \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^+$ vérifiant (3.6), on a $|\det(\tilde{L})| = 1$. De même, d'après [2], notation 2.6, page 1507, on a $\tilde{q}_{g_1, g_2} : W \times W \rightarrow \mathbb{C}$ est donné par :

$$\tilde{q}_{g_1, g_2}(w, w') = \frac{1}{2} (\langle c(g_1)w, w' \rangle + \langle c(g_2)w, w' \rangle)$$

et donc, comme rappelé dans les sections 4.2 et 4.3 de [2], et en notant B_{g_1, g_2} la matrice de q_{g_1, g_2} , on obtient :

$$\begin{aligned}\gamma(\tilde{q}_{g_1, g_2}) &= \int_W \chi\left(\frac{1}{2} \langle c(g_1)w, w \rangle + \langle c(g_2)w, w \rangle\right) dw = \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{it}{2} w^T B_{g_1, g_2} w} dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-\frac{\pi}{2i} w^T B_{g_1, g_2} w} dw = \det^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2i} B_{g_1, g_2}\right) \\ &= \text{chc}(c(g_1) + c(g_2))\end{aligned}$$

Ainsi, $C(g_1, g_2) = C'(g_1, g_2)$. □

Corollaire 3.2.9. *La multiplication sur $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^+$ définie par :*

$$(g, \xi).(h, \eta) = (gh, \xi\eta C(g, h))$$

défini une structure de semi-groupe sur $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^+$. De plus, l'application

$$\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^+ \ni (g, \xi) \rightarrow (\bar{g}^{-1}, \bar{\xi}) \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^+$$

est une involution sur $\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^+$.

Théorème 3.2.10. *La fonction $\Theta : \widehat{\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})}^{++} \ni (g, \xi) \rightarrow \xi \in \mathbb{C}$ est holomorphe, qui s'étend en une fonction $\Theta : \widehat{\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ qui satisfait à la relation*

$$\frac{\Theta(\tilde{g}_1 \tilde{g}_2)}{\Theta(\tilde{g}_1) \Theta(\tilde{g}_2)} = C(g_1, g_2) \quad (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in \widehat{\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})}^+) \quad (3.7)$$

De plus, pour $g_1, g_2 \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^+$ tels que $\det(g_1 - 1) \det(g_2 - 1) \neq 0$, on a :

$$C(g_1, g_2) = \det^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2i}(c(g_1) + c(g_2))\right) = \text{chc}(c(g_1) + c(g_2)) \quad (3.8)$$

Pour finir, pour toute fonction $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\widehat{\text{Sp}(W)})$, on a :

$$\int_{\widehat{\text{Sp}(W)}} \Theta(\tilde{g}) \Psi(\tilde{g}) d\mu_{\widehat{\text{Sp}(W)}}(\tilde{g}) = \lim_{\substack{\tilde{p} \rightarrow 1 \\ \tilde{p} \in \widehat{\text{Sp}(W)}^{++}}} \int_{\widehat{\text{Sp}(W)}} \Theta(\tilde{p}\tilde{g}) \Psi(\tilde{g}) d\mu_{\widehat{\text{Sp}(W)}}(\tilde{g}) \quad (3.9)$$

Démonstration. La première partie de l'énoncé est claire. Montrons l'équation (3.9). Montrons tout d'abord que la limite existe. Pour cela, supposons que le support de Ψ est contenu dans l'image de $\tilde{c}(0)\tilde{c}$.

On a :

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{\text{Sp}(W)}} \Theta(\tilde{p}\tilde{g}) \Psi(\tilde{g}) d\tilde{g} &= \int_{\widehat{\text{Sp}(W)}} \Theta(\tilde{p}\tilde{c}(0)\tilde{g}) \Psi(\tilde{c}(0)\tilde{g}) d\tilde{g} \\ &= \int_{\text{supp } \Psi} \Theta(\tilde{p}\tilde{c}(0)\tilde{g}) \Psi(\tilde{c}(0)\tilde{g}) d\tilde{g} \\ &= \int_{\text{sp}(W)} \Theta(\tilde{p}\tilde{c}(0)\tilde{c}(x)) \Psi(\tilde{c}(0)\tilde{c}(x)) j(x) dx \\ &= \int_{\text{sp}(W)} \Theta(\tilde{c}(iy)\tilde{c}(x)) \Psi(\tilde{c}(0)\tilde{c}(x)) j(x) dx\end{aligned}$$

où $\tilde{p}\tilde{c}(0) = \tilde{c}(iy)$ avec $y \in \mathfrak{sp}(W)$ et $\langle y, \cdot \rangle > 0$. Donc, $y \rightarrow 0$ lorsque $\tilde{p} \rightarrow 1$. Or, d'après l'équation (3.7)

$$\Theta(\tilde{c}(iy)\tilde{c}(x)) = \Theta(\tilde{c}(iy))\Theta(\tilde{c}(x))\text{chc}(x + iy).$$

Notons ici $\psi(x) = \Theta(\tilde{c}(x))\Psi(\tilde{c}(x))j(x)$, $x \in \mathfrak{sp}(W)$. Notons au passage que $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathfrak{sp}(W))$. On a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{sp}(W)} \text{chc}(x + iy)\psi(x)dx &= \int_{\mathfrak{sp}(W)} \int_W \chi_{x+iy}(w)\psi(x)dw dx \\ &= \int_W \int_{\mathfrak{sp}(W)} \chi_x(w)\chi_{iy}(w)\psi(x)dx dw \\ &= \int_W \chi_{iy}(w) \int_{\mathfrak{sp}(W)} \chi_x(w)\psi(x)dx dw \end{aligned}$$

En notant $\tau : W \rightarrow \mathfrak{sp}(W)^*$ l'application définie par

$$\tau(w)(x) = \langle x(w), w \rangle \quad (w \in W, x \in \mathfrak{sp}(W)^*)$$

on obtient que

$$\int_{\mathfrak{sp}(W)} \chi_x(w)\psi(x)dx = \int_{\mathfrak{sp}(W)} \psi(x)e^{2i\pi\tau(w)(x)}dx = \hat{\psi}\left(\frac{1}{4}\tau(w)\right)$$

où $\hat{\psi}$ est la transformée de Fourier de ψ sur $\mathfrak{sp}(W)$. Ainsi,

$$\int_{\mathfrak{sp}(W)} \text{chc}(x + iy)\psi(x)dx = \int_W \chi_{iy}(w)\hat{\psi}\left(\frac{1}{4}\tau(w)\right)dw$$

Or, pour tout $w \in W$, on a

$$\chi_{iy}(w) = e^{\frac{2i\pi}{4}\langle iy(w), w \rangle} = e^{-\frac{\pi}{2}\langle yw, w \rangle} < 1$$

car $\langle yw, w \rangle > 0$ pour tout $w \in W$ non nul. Finalement, on obtient :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathfrak{sp}(W)} \text{chc}(x + iy)\psi(x)dx = \int_W \hat{\psi}\left(\frac{1}{4}\tau(w)\right)dw$$

En utilisant le fait que $\lim_{y \rightarrow 0} \Theta(\tilde{c}(iy)) = \Theta(\tilde{c}(0))$ existe, on obtient :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathfrak{sp}(W)} \Theta(\tilde{c}(iy))\text{chc}(x + iy)\psi(x)dx = \int_W \hat{\psi}\left(\frac{1}{4}\tau(w)\right)dw$$

Donc la limite existe. Calculons à présent cette limite. Pour cela, pour tout $x \in \mathfrak{sp}(W)$, notons B la matrice de la forme bilinéaire $\langle x, \cdot \rangle$. Remarquons au passage que la matrice de la forme bilinéaire $\langle J, \cdot \rangle$ est la matrice identité. Pour tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} \text{chc}(x + itJ) &= \int_W \chi_{x+itJ}(w)dw = \int_W e^{\frac{i\pi}{2}\langle (x+itJ)w, w \rangle} dw \\ &= \int_W e^{\frac{i\pi}{2}\langle (x+itJ)w, w \rangle} dw = \int_W e^{\frac{i\pi}{2}w^t(B+itI)w} dw \\ &= \int_W e^{\frac{-\pi}{2}w^t(-iB+tI)w} dw = \det^{-\frac{1}{2}}(2(-iB + tI)) \end{aligned}$$

Or, les valeurs propres de x sont réelles, ainsi, on a pour tout $t > 0$

$$|\det(-iB + tI)| > |\det(iB)|$$

c'est-à-dire

$$|\det(-iB + tI)|^{-\frac{1}{2}} < |\det(iB)|^{-\frac{1}{2}}$$

Ainsi,

$$|\text{chc}(x + itJ)| \leq |\text{chc}(x)|$$

La fonction chc étant localement intégrable, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\text{sp}(W)} \text{chc}(x + itJ)\psi(x)dx = \int_{\text{sp}(W)} \text{chc}(x)\psi(x)dx$$

On obtient alors bien que la limite est égale au membre de gauche de l'équation (3.9)

□

3.3 Une formule du caractère dans le cas d'une paire duale réductive compacte

Soit $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel sympléctique réel et (G, G') une paire duale dans $\text{Sp}(W)$. Fixons $\mu_{\tilde{G}}$ et $\mu_{\tilde{G}'}$ des mesures de Haar sur \tilde{G} et \tilde{G}' respectivement tels que $\mu_{\tilde{G}}(\tilde{G}) = 1$.

Lemme 3.3.1. *Pour tout $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\tilde{G}')$, on a :*

$$\Theta_{\Pi'}(\Psi) = \text{tr} \int_{\tilde{G}'} \int_{\tilde{G}} \overline{\Theta_{\Pi}(\tilde{g})} \omega(\tilde{g}\tilde{g}') \Psi(\tilde{g}') d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g}) d\mu_{\tilde{G}'}(\tilde{g}')$$

Démonstration. La projection orthogonale de l'espace de Hilbert de la représentation de Weil dans sa composante Π -isotypique

$$L^2(X) \rightarrow L^2(X)_{\Pi}$$

peut se réaliser comme

$$\omega_{|\tilde{G}}(d_{\Pi} \overline{\Theta_{\Pi}}) = \int_{\tilde{G}} d_{\Pi} \overline{\Theta_{\Pi}}(\tilde{g}) \omega(\tilde{g}) d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g}).$$

Comme la composante isotypique est isomorphe à $V_{\Pi} \otimes V_{\Pi'}$ en tant que $\tilde{G} \times \tilde{G}'$ -module, on a

$$\text{tr}(\omega(d_{\Pi} \overline{\Theta_{\Pi}}) \omega(\Psi)) = \text{tr}(Id_{V_{\Pi}} \otimes \Pi'(\Psi)) = d_{\Pi} \Theta_{\Pi'}(\Psi).$$

Donc,

$$\Theta_{\Pi'}(\Psi) = \text{tr}(\omega(\overline{\Theta_{\Pi}}) \omega(\Psi)).$$

□

Théorème 3.3.2. Pour toute fonction $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\tilde{G}')$,

$$\Theta_{\Pi'}(\Psi) = \lim_{\substack{\tilde{p} \rightarrow 1 \\ \tilde{p} \in \text{Sp}(\widetilde{W}_C)^{++}}} \int_{\tilde{G}'} \int_{\tilde{G}} \overline{\Theta_{\Pi}(\tilde{g})} \Theta(\tilde{g}\tilde{g}'\tilde{p}) \Psi(\tilde{g}') d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g}) d\mu_{\tilde{G}'}(\tilde{g}').$$

Ainsi, en terme de distributions, on a :

$$\Theta_{\Pi'}(\tilde{g}') = \lim_{\substack{\tilde{p} \rightarrow 1 \\ \tilde{p} \in \text{Sp}(\widetilde{W}_C)^{++}}} \int_{\tilde{G}} \overline{\Theta_{\Pi}(\tilde{g})} \Theta(\tilde{g}\tilde{g}'\tilde{p}) d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g}).$$

Démonstration. Fixons $\tilde{p} \in \text{Sp}(\widetilde{W}_C)^{++}$. Alors,

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{G}'} \int_{\tilde{G}} \overline{\Theta_{\Pi}(\tilde{g})} \omega(\tilde{g}\tilde{g}'\tilde{p}) \Psi(\tilde{g}') d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g}) d\mu_{\tilde{G}'}(\tilde{g}') \\ &= \left(\int_{\tilde{G}'} \int_{\tilde{G}} \overline{\Theta_{\Pi}(\tilde{g})} \omega(\tilde{g}\tilde{g}') \Psi(\tilde{g}') d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g}) d\mu_{\tilde{G}'}(\tilde{g}') \right) \omega(\tilde{p}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

En utilisant le même argument que pour montrer l'équation (150) dans [2], ajouté au lemme (6.1) de [33], on montre qu'il existe $\psi \in \mathcal{S}(W)$ tel que

$$\left(\int_{\tilde{G}'} \int_{\tilde{G}} \overline{\Theta_{\Pi}(\tilde{g})} T(\tilde{g}\tilde{g}') \Psi(\tilde{g}') d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g}) d\mu_{\tilde{G}'}(\tilde{g}') \right) (\phi) = \int_W \psi(w) \phi(w) dw \quad (\phi \in \mathcal{S}(W)).$$

De la même manière, il existe $\psi_{\tilde{p}} \in \mathcal{S}(W)$ telle que

$$\left(\int_{\tilde{G}'} \int_{\tilde{G}} \overline{\Theta_{\Pi}(\tilde{g})} T(\tilde{g}\tilde{g}'\tilde{p}) \Psi(\tilde{g}') d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g}) d\mu_{\tilde{G}'}(\tilde{g}') \right) (\phi) = \int_W \psi(w) \phi_{\tilde{p}}(w) dw \quad (\phi \in \mathcal{S}(W)).$$

Or, d'après [2], équation (148), la trace de (3.10) est donnée par

$$\psi_{\tilde{p}}(0) = \psi_{\natural} \left(\Theta(\tilde{p}) \chi_{c(\tilde{p}')} \right) (0) = \int_W \psi(w) \Theta(\tilde{p}) \chi_{c(\tilde{g}')} (w) dw.$$

De nouveau, d'après [2], lemme 4.25, on a

$$\lim_{\substack{\tilde{p} \rightarrow 1 \\ \tilde{p} \in \text{Sp}(\widetilde{W}_C)^{++}}} T(\tilde{p}) = T(1) = \delta_0 \in \mathcal{S}^*(W).$$

Ainsi, on obtient

$$\lim_{\substack{\tilde{p} \rightarrow 1 \\ \tilde{p} \in \text{Sp}(\widetilde{W}_C)^{++}}} \psi_{\tilde{p}'}(0) = \psi(0).$$

Mais, on a :

$$\begin{aligned} \psi_{\tilde{p}}(0) &= \text{tr} \int_{\tilde{G}'} \int_{\tilde{G}} \overline{\Theta_{\Pi}(\tilde{g})} \omega(\tilde{g}\tilde{g}'\tilde{p}) \Psi(\tilde{g}') d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g}) d\mu_{\tilde{G}'}(\tilde{g}') \\ &= \int_{\tilde{G}'} \int_{\tilde{G}} \overline{\Theta_{\Pi}(\tilde{g})} \Theta(\tilde{g}\tilde{g}'\tilde{p}) \Psi(\tilde{g}') d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g}) d\mu_{\tilde{G}'}(\tilde{g}'). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le lemme 3.3.1, on a :

$$\Theta_{\Pi'}(\Psi) = \text{tr} \int_{\tilde{G}'} \int_{\tilde{G}} \overline{\Theta_{\Pi}(\tilde{g})} \omega(\tilde{g}\tilde{g}') \Psi(\tilde{g}') d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g}) d\mu_{\tilde{G}'}(\tilde{g}') = \psi(0)$$

ce qui montre le résultat annoncé. \square

A présent, considérons G connexe. Notons au passage que \tilde{G} n'est pas nécessairement connexe.

Pour tout $g \in G$, notons $\{\tilde{g}_1, \tilde{g}_2\} = \text{pr}^{-1}(\{g\})$. En particulier, \tilde{e}_1 est l'élément neutre de \tilde{G} et \tilde{e}_2 est un élément centrale d'ordre 2. De plus, pour tout $g \in G$, on a $\tilde{g}_1 = \tilde{e}_2 \tilde{g}_2$.

Pour tout $\tilde{p} \in \text{Sp}(\widetilde{W}_{\mathbb{C}})^{++}$ et $\tilde{g}' \in \tilde{G}'$, on définit $F_{\tilde{p}, \tilde{g}'} : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$F_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(\tilde{g}) = \overline{\Theta_{\Pi}(\tilde{g})} \Theta(\tilde{g} \tilde{p} \tilde{g}') \quad (\tilde{g} \in \tilde{G}).$$

Lemme 3.3.3. *Pour tout $g \in G$, on a :*

$$\Theta_{\Pi}(\tilde{g}_1) = -\Theta_{\Pi}(\tilde{g}_2)$$

Démonstration. On sait que $\tilde{g}_1 = \tilde{e}_2 \tilde{g}_2$. Or, \tilde{e}_2 appartient au centre de \tilde{G} . En particulier, $\pi(\tilde{e}_2)$ est un opérateur d'entrelacement pour la représentation π . En particulier, d'après Schur, $\pi(\tilde{e}_2) = c \text{Id}$, $c \in \mathbb{C}$. Or, $\tilde{e}_2^2 = \tilde{e}_1$, ainsi, $c^2 = 1$. Or, d'après [31], π est une représentation *genuine*, et donc $c = -1$. Ainsi, $\pi(\tilde{e}_2) = -\text{Id}$. D'où le résultat. □

Corollaire 3.3.4. *Pour tout $g \in G$, on a :*

$$F_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(\tilde{g}_1) = F_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(\tilde{g}_2)$$

Ainsi, la fonction $\tau_{\tilde{p}, \tilde{g}'} : G \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par :

$$\tau_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(\text{pr}(\tilde{g})) = F_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(\tilde{g}) \quad (\tilde{g} \in \tilde{G})$$

est bien définie

Notons μ_G et $\mu_{\tilde{G}}$ les mesures de Haar normalisées sur G et \tilde{G} respectivement.

Proposition 3.3.5. *Pour tout $\tilde{p} \in \text{Sp}(\widetilde{W}_{\mathbb{C}})^{++}$ et $\tilde{g}' \in \tilde{G}'$, on a :*

$$\int_{\tilde{G}} F_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(\tilde{g}) d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g}) = 2 \int_G \tau_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(g) d\mu_G(g)$$

Remarque 3.3.6 (Remarque avant preuve). Rappelons tout d'abord un résultat de [42], appendice 4, lemme A.4.2.11, page 328. Soit M_1, M_2 deux variétés différentielles \mathcal{C}^∞ connexes. Soit ω une forme volume sur M_2 et $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ un revêtement à n -feuilles. Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(M_2)$, on a :

$$n \int_{M_2} f \omega = \int_{M_1} (f \circ \phi) \phi^* \omega \quad (3.11)$$

où $\phi^* \omega$ est le pull-back de ω par ϕ .

Ce théorème se généralise au cas des variétés ayant un nombre fini de composantes connexes. Par exemple, supposons M_2 connexe et $M_1 = M_1^{(1)} \cup \dots \cup M_1^{(k)}$ ayant k -composantes connexes. Alors, pour tout $j = 1, \dots, k$, $\phi_{M_1^{(j)}} : M_1^{(j)} \rightarrow M_2$ est un revêtement à n_j -feuilletés, avec $\sum_{j=1}^k n_j = n$.

Ainsi, en appliquant l'équation (3.11) à chacune des composantes $M_1^{(j)}$, $1 \leq j \leq k$, on obtient :

$$n \int_{M_2} f \omega = \sum_{j=1}^k n_j \int_{M_2} f \omega = \sum_{j=1}^k \int_{M_1^{(j)}} (f \circ \phi) \phi^* \omega = \int_{M_1} (f \circ \phi) \phi^* \omega$$

Pour voir le lien entre l'intégrale par rapport à une forme volume et la mesure de Haar, on pourra consulter [42], section 2.5 et appendice 4.

Démonstration. On applique l'équation (3.11) avec $M_2 = G$, $M_1 = \tilde{G}$, $f = \tau_{\tilde{p}, \tilde{g}'}$.

□

Fixons T un tore maximale dans G . On rappelle que dans la section 3.3, on a fixé la normalisation de la mesure de Haar de \tilde{G} comme $\mu_{\tilde{G}}(\tilde{G}) = 1$. On choisit aussi la normalisation de la mesure $\mu_{\tilde{T}}(\tilde{T}) = 1$. Ceci fixe les normalisations des mesures de Haar de G et T comme $\mu_G(G) = \mu_T(T) = \frac{1}{2}$.

Etant donné que les groupes G et T sont compacts, ils sont unimodulaires et donc, d'après [24], chapitre VIII, théorème 8.36, page 538, il existe une mesure borélienne G -invariante sur l'espace homogène G/T , notée $\mu_{G/T}$, tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, on ait :

$$\int_G f(g) d\mu_G(g) = \int_{G/T} \left(\int_T f(gt) d\mu_T(t) \right) d\mu_{G/T}(gT)$$

De plus, la mesure $\mu_{G/T}$ est unique à une constante près. Selon les normalisations choisies, on a $\mu_{G/T}(G/T) = 1$.

Notons $G'^{++} = \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++} \cap G'_{\mathbb{C}}$ et soit \tilde{G}'^{++} l'image réciproque de G'^{++} dans $\text{Sp}(\tilde{W}_{\mathbb{C}})^{++}$.

Lemme 3.3.7. *Pour tout $\tilde{p} \in \tilde{G}'^{++}$ et $\tilde{g}' \in \tilde{G}'$, la fonction $\tau_{\tilde{p}, \tilde{g}'}$ est centrale.*

Démonstration. Pour tout $\alpha, g \in G$, on a :

$$\begin{aligned} \tau_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(\alpha g \alpha^{-1}) &= \tau_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(\text{pr}(\tilde{\alpha}) \text{pr}(\tilde{g}) \text{pr}(\tilde{\alpha}^{-1})) = \tau_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(\text{pr}(\tilde{\alpha} \tilde{g} \tilde{\alpha}^{-1})) \\ &= F_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(\tilde{\alpha} \tilde{g} \tilde{\alpha}^{-1}) = \overline{\Theta_{\Pi}(\tilde{\alpha} \tilde{g} \tilde{\alpha}^{-1})} \Theta(\tilde{p} \tilde{\alpha} \tilde{g} \tilde{\alpha}^{-1} \tilde{g}') \\ &= \overline{\Theta_{\Pi}(\tilde{g})} \Theta(\tilde{\alpha} \tilde{p} \tilde{g} \tilde{g}' \tilde{\alpha}^{-1}) = \overline{\Theta_{\Pi}(\tilde{g})} \Theta(\tilde{p} \tilde{g} \tilde{g}') \\ &= F_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(\tilde{g}) = \tau_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(g) \end{aligned}$$

□

Lemme 3.3.8. *Le caractère $\Theta_{\Pi'}$ est alors donné, pour tout élément régulier $\tilde{g}' \in \tilde{G}'$ par la formule suivante :*

$$\Theta_{\Pi'}(\tilde{g}') = \lim_{\substack{\tilde{p} \rightarrow 1 \\ \tilde{p} \in \tilde{G}'}} \frac{1}{|\mathcal{W}(G, T)|} \int_T \tau_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(t) |D(t)|^2 d\mu_T(t) \quad (3.12)$$

Démonstration. D'après la formule d'intégration de Weyl (on pourra consulter [24], chapitre VIII, théorème 8.60, page 550), on a :

$$\int_G \tau_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(g) d\mu_G(g) = \frac{1}{|\mathcal{W}(G, T)|} \int_T \left(\int_{G/T} \tau_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(gtg^{-1}) d\mu_{G/T}(gT) \right) |D(t)|^2 d\mu_T(t).$$

En utilisant le lemme 3.3.7, on obtient

$$\int_T \left(\int_{G/T} \tau_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(gtg^{-1}) d\mu_{G/T}(gT) \right) |D(t)|^2 d\mu_T(t) = \mu_{G/T}(G/T) \int_T \tau_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(t) |D(t)|^2 d\mu_T(t).$$

On conclue alors en utilisant le théorème 3.3.2. □

Remarque 3.3.9. Supposons que \tilde{G} soit connexe. Soit T un tore maximal de G et soit $\tilde{T} = \text{pr}^{-1}(T)$. Notons de nouveau $\mu_{\tilde{G}}$ et $\mu_{\tilde{T}}$ les mesures de Haar normalisées de \tilde{G} et \tilde{T} respectivement. Soit $\mu_{\tilde{G}/\tilde{T}}$ l'unique mesure sur \tilde{G}/\tilde{T} tel que, pour tout $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\tilde{G})$, on ait :

$$\int_{\tilde{G}} f(\tilde{g}) d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g}) = \int_{\tilde{G}/\tilde{T}} \left(\int_{\tilde{T}} f(\tilde{g}\tilde{t}) d\mu_{\tilde{T}}(\tilde{t}) \right) d\mu_{\tilde{G}/\tilde{T}}(\tilde{g}\tilde{T})$$

De nouveau, pour tout $\tilde{p} \in \tilde{G}'^{++}$ et $\tilde{g}' \in \tilde{G}'$, on a :

$$\int_{\tilde{G}} F_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(\tilde{g}) d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g}) = \frac{1}{|\mathcal{W}(\tilde{G}, \tilde{T})|} \int_{\tilde{T}} F_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(\tilde{t}) d\mu_{\tilde{T}}(\tilde{t})$$

Et de nouveau, en utilisant la proposition 3.3.5 en remplaçant G par T , on obtient :

$$\int_{\tilde{T}} F_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(\tilde{t}) d\mu_{\tilde{T}}(\tilde{t}) = 2 \int_T \tau_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(t) d\mu_T(t)$$

et on retrouve bien la formule du caractère de l'équation (3.12).

On va alors regarder la restriction de ce caractère sur les points réguliers de \tilde{T}' , c'est la raison pour laquelle on va à présent s'intéresser à la restriction du caractère de la représentation de Weil à un sous-groupe maximal compact.

3.4 Restriction de Θ à un sous-groupe maximal compact

Fixons J une structure complexe postive sur W , c'est-à-dire un élément de $\text{End}(W)$ qui vérifie $J^2 = -Id$ et tel que la forme $\langle J., . \rangle > 0$. On note alors $W_{\mathbb{C}}$ l'espace vectoriel complexifié via J , et considérons la décomposition associée :

$$W_{\mathbb{C}} = W_{\mathbb{C}}^+ \oplus W_{\mathbb{C}}^-$$

où $W_{\mathbb{C}}^+$ (resp. $W_{\mathbb{C}}^-$) est l'espace propre associé à la valeur propre i (resp. $-i$) de J .

Lemme 3.4.1. *La forme H (définie dans l'équation (3.1)) restreinte à $W_{\mathbb{C}}^+$ (resp. $W_{\mathbb{C}}^-$) est définie positive (resp. définie négative).*

Démonstration. Fixons $w \in W_{\mathbb{C}}^+$. On a alors :

$$\begin{aligned} H(w, w) &= i \langle w, \bar{w} \rangle = \langle J(w), \bar{w} \rangle \\ &= \langle J(\operatorname{Re}(w)), \operatorname{Re}(w) \rangle + \langle J(\operatorname{Im}(w)), \operatorname{Im}(w) \rangle - i \langle J(\operatorname{Re}(w)), \operatorname{Im}(w) \rangle + i \langle J(\operatorname{Im}(w)), \operatorname{Re}(w) \rangle \end{aligned}$$

Or, on a

$$\langle J(\operatorname{Im}(w)), \operatorname{Re}(w) \rangle = \langle J^2(\operatorname{Im}(w)), J(\operatorname{Re}(w)) \rangle = - \langle \operatorname{Im}(w), J(\operatorname{Re}(w)) \rangle = \langle J(\operatorname{Re}(w)), \operatorname{Im}(w) \rangle$$

Ainsi, étant donné que $\operatorname{Re}(w), \operatorname{Im}(w) \in W$ et $\langle J, \cdot \rangle > 0$, on a

$$H(w, w) = \langle J(\operatorname{Re}(w)), \operatorname{Re}(w) \rangle + \langle J(\operatorname{Im}(w)), \operatorname{Im}(w) \rangle > 0$$

□

Considérons $\operatorname{GL}(W_{\mathbb{C}}^+)$ le groupe linéaire associé à l'espace $W_{\mathbb{C}}^+$ et soit $\operatorname{GL}(W_{\mathbb{C}}^+)^{++}$ défini par :

$$\operatorname{GL}(W_{\mathbb{C}}^+)^{++} = \{h \in \operatorname{GL}(W_{\mathbb{C}}^+) \mid H(w, w) > H(hw, hw), 0 \neq w \in W_{\mathbb{C}}^+\}$$

De plus, notons $(\operatorname{Sp}(W_{\mathbb{C}}^+))^{++}$ l'ensemble des éléments de $\operatorname{Sp}(W_{\mathbb{C}}^+)^{++}$ qui commutent avec J .

Lemme 3.4.2. *L'application :*

$$\psi : (\operatorname{Sp}(W_{\mathbb{C}}^+))^{++} \ni g \rightarrow g|_{W_{\mathbb{C}}^+} \in \operatorname{GL}(W_{\mathbb{C}}^+)$$

est bien définie et bijective.

Démonstration. Soit $g \in (\operatorname{Sp}(W_{\mathbb{C}}^+))^{++}$ et soit $w \in W_{\mathbb{C}}^+$. On a $g(w) \in W_{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire $g(w) = g(w)^+ + g(w)^-$, avec $g(w)^+ \in W_{\mathbb{C}}^+$ et $g(w)^- \in W_{\mathbb{C}}^-$. On a :

$$Jg(w) = J(g(w)^+ + g(w)^-) = ig(w)^+ - ig(w)^-$$

et

$$gJ(w) = g(iw) = ig(w) = ig(w)^+ + ig(w)^-$$

c'est-à-dire $g(w)^- = 0$, et donc $g(W_{\mathbb{C}}^+) \subseteq g(W_{\mathbb{C}}^+)$ (resp. $g(W_{\mathbb{C}}^-) \subseteq g(W_{\mathbb{C}}^-)$).

Ainsi, l'application ψ est bien définie. En utilisant la non-dégénérescence de la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $W_{\mathbb{C}}^+ \times W_{\mathbb{C}}^-$, pour tout $h \in \operatorname{GL}(W_{\mathbb{C}}^+)$, il existe un unique élément de $\operatorname{GL}(W_{\mathbb{C}}^-)$, noté h^{\sharp} , défini par

$$\langle hw^+, w^- \rangle = \langle w^+, h^{\sharp}w^- \rangle \quad (w^+ \in W_{\mathbb{C}}^+, w^- \in W_{\mathbb{C}}^-)$$

Montrons l'injectivité de ψ . Fixons $g \in \operatorname{Sp}(W_{\mathbb{C}})^J$ et notons $h = g|_{W_{\mathbb{C}}^+}$. Pour tout $w^+ \in W_{\mathbb{C}}^+$ et $w^- \in W_{\mathbb{C}}^-$, on a

$$\langle gw^+, w^- \rangle = \langle w^+, g^{-1}w^- \rangle = \langle w^+, (h^{\sharp})^{-1}w^- \rangle$$

et donc $g|_{W_{\mathbb{C}}^-} = (h^\sharp)^{-1}$. D'où l'injectivité.

A présent, fixons $h \in \text{GL}(W_{\mathbb{C}}^+)^{++}$ et soit $g \in \text{GL}(W_{\mathbb{C}})$ défini par

$$g(w^+ + w^-) = hw^+ + (h^\sharp)^{-1}w^- \quad (w^+ \in W_{\mathbb{C}}^+, w^- \in W_{\mathbb{C}}^-)$$

Pour tout $w_1^+, w_2^+ \in W_{\mathbb{C}}^+, w_1^-, w_2^- \in W_{\mathbb{C}}^-$, on a

$$\begin{aligned} \langle g(w_1^+ + w_1^-), g(w_2^+ + w_2^-) \rangle &= \langle hw_1^+ + (h^\sharp)^{-1}w_1^-, hw_2^+ + (h^\sharp)^{-1}w_2^- \rangle \\ &= \langle hw_1^+, (h^\sharp)^{-1}w_2^- \rangle + \langle (h^\sharp)^{-1}w_1^-, hw_2^+ \rangle + \langle hw_1^+, hw_2^+ \rangle \\ &\quad + \langle (h^\sharp)^{-1}w_1^-, (h^\sharp)^{-1}w_2^- \rangle \\ &= \langle w_1^+, h^\sharp(h^\sharp)^{-1}w_2^- \rangle + \langle h^\sharp(h^\sharp)^{-1}w_1^-, w_2^+ \rangle + \langle w_1^+, w_2^+ \rangle + \langle w_1^-, w_2^- \rangle \\ &= \langle w_1^+, w_2^- \rangle + \langle w_1^-, w_2^+ \rangle + \langle w_1^+, w_2^+ \rangle + \langle w_1^-, w_2^- \rangle \\ &= \langle w_1^+ + w_1^-, w_2^+ + w_2^- \rangle \end{aligned}$$

Ainsi, $g \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^J$. Reste à montrer que $g \in (\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++})^J$, c'est-à-dire

$$H(w^-, w^-) > H(gw^-, gw^-) \quad (w^- \in W_{\mathbb{C}}^-).$$

Etant donné que l'application $W_{\mathbb{C}}^+ \ni w \rightarrow \bar{w} \in W_{\mathbb{C}}^-$ est un isomorphisme, il est équivalent de montrer

$$H(\bar{w}^+, \bar{w}^+) > H(g\bar{w}^+, g\bar{w}^+) \quad (w^+ \in W_{\mathbb{C}}^+).$$

Soit l'application $\text{GL}(W_{\mathbb{C}}^-) \ni h \rightarrow \bar{h} \in \text{GL}(W_{\mathbb{C}}^+)$ définie par

$$\bar{h}(\bar{w}) = \bar{h}w \quad (w \in W_{\mathbb{C}}^-)$$

et notons, pour tout $h \in \text{GL}(W_{\mathbb{C}}^+)$,

$$h^* = \bar{h}^\sharp.$$

Pour tout $w_1^+, w_2^+ \in W_{\mathbb{C}}^+$, on a :

$$H(hw_1^+, w_2^+) = i \langle hw_1^+, \bar{w}_2^+ \rangle = i \langle w_1^+, h^\sharp \bar{w}_2^+ \rangle = i \langle w_1^+, \overline{h^* w_2^+} \rangle = H(w_1^+, h^* w_2^+).$$

Ainsi, d'après le théorème de décomposition pôlaire pour $\text{GL}(W_{\mathbb{C}}^+)$ par rapport à la forme H , on a $h = kq$, avec $k^* = k^{-1}$ et $q^* = q$ avec q positif. Puisque $h \in \text{GL}(W_{\mathbb{C}}^*)$ et $k^* = k^{-1}$, on a

$$H(qw^+, qw^+) < H(w^+, w^+) \quad (w^+ \in W_{\mathbb{C}}^+ \setminus \{0\}).$$

ou de manière équivalente, en utilisant $q = q^*$,

$$H(q^{-1}w^+, q^{-1}w^+) > H(w^+, w^+) \quad (w^+ \in W_{\mathbb{C}}^+ \setminus \{0\})$$

En remarquant que $(h^\sharp)^{-1} = (h^{-1})^\sharp$, on obtient pour que pour tout élément non nul $w^- \in W_{\mathbb{C}}^-$, on a

$$\begin{aligned}
H(gw^-, gw^-) &= H((h^\sharp)^{-1}w^-, (h^\sharp)^{-1}w^-) = \overline{H((h^\sharp)^{-1}w^-, (h^\sharp)^{-1}w^-)} \\
&= -H(\overline{(h^\sharp)^{-1}w^-}, \overline{(h^\sharp)^{-1}w^-}) = -H(\overline{(h^{-1})^\sharp w^-}, \overline{(h^{-1})^\sharp w^-}) \\
&= -H((h^{-1})^* \bar{w}^-, (h^{-1})^* \bar{w}^-) = -H(kq^{-1} \bar{w}^-, kq^{-1} \bar{w}^-) \\
&= -H(q^{-1} \bar{w}^-, q^{-1} \bar{w}^-) < -H(\bar{w}^-, \bar{w}^-) = \overline{H(w^-, w^-)} \\
&= H(w^-, w^-)
\end{aligned}$$

Ainsi, $g \in (\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++})^J$, d'où la surjectivité de ψ .

□

Lemme 3.4.3. Pour tout $g \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^J$, on a

$$\det(g - 1)_{W_{\mathbb{C}}^-} = \det(g^{-1} - 1)_{W_{\mathbb{C}}^+}$$

(où $\det(g - 1)_{W_{\mathbb{C}}^+}$ correspond au déterminant de l'endomorphisme $(g - 1)$ restreint à $W_{\mathbb{C}}^+$).

Démonstration. Notons $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de $W_{\mathbb{C}}^+$ et $\{f_1, \dots, f_n\}$ une base de $W_{\mathbb{C}}^-$ de manière à ce que l'on ait $\langle e_i, f_j \rangle = \delta_{i,j}$. On a :

$$g(f_i) = \sum_{j=1}^n \langle e_j, g(f_i) \rangle f_j \quad \text{et} \quad g^{-1}(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle g^{-1}(e_j), f_i \rangle e_i$$

Puisque $\langle e_j, g(f_i) \rangle = \langle g^{-1}(e_j), f_i \rangle$, on conclut que

$$\det(g - 1)_{W_{\mathbb{C}}^-} = \det(\langle (g - 1)(f_i), e_j \rangle) = \det(\langle (g^{-1} - 1)(e_j), f_i \rangle) = \det(g^{-1} - 1)_{W_{\mathbb{C}}^+}$$

□

Lemme 3.4.4. Pour tout $g_1, g_2 \in (\text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++})^J$, on a :

$$C(g_1, g_2) = \det(1 - g_1)_{W_{\mathbb{C}}^+} \det(1 - g_1 g_2)_{W_{\mathbb{C}}^+}^{-1} \det(1 - g_2)_{W_{\mathbb{C}}^+}$$

Démonstration. Pour tout $g \in \text{Sp}(W_{\mathbb{C}})^J$, on a

$$\begin{aligned}
\det(g - 1) &= \det(g - 1)_{W_{\mathbb{C}}^+} \det(g - 1)_{W_{\mathbb{C}}^-} = \det(g - 1)_{W_{\mathbb{C}}^+} \det(g^{-1} - 1)_{W_{\mathbb{C}}^+} \\
&= \det(g - 1)_{W_{\mathbb{C}}^+} \det(g^{-1})_{W_{\mathbb{C}}^+} \det(1 - g)_{W_{\mathbb{C}}^+} \\
&= (-1)^{\dim(W_{\mathbb{C}}^+)} \det(g - 1)_{W_{\mathbb{C}}^+}^2 \det(g^{-1})_{W_{\mathbb{C}}^+}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tous $g_1, g_2 \in (\mathrm{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++})^J$, on a

$$\begin{aligned}
C(g_1, g_2)^2 &= \det^{-1} \left(\frac{1}{2i} (c(g_1) + c(g_2)) \right) = \det^{-1} \left(\frac{1}{i} (g_1 - 1)^{-1} (g_1 g_2 - 1) (g_2 - 1)^{-1} \right) \\
&= (-i)^{\dim(W_{\mathbb{C}})} (-1)^{\dim(W_{\mathbb{C}}^+)} \det(g_1 - 1)_{W_{\mathbb{C}}^+}^2 \det(g_1 g_2 - 1)_{W_{\mathbb{C}}^+}^{-2} \det(g_2 - 1)_{W_{\mathbb{C}}^+}^2 \\
&= (-i)^{2 \dim(W_{\mathbb{C}}^+)} (-1)^{\dim(W_{\mathbb{C}}^+)} \left(\det(1 - g_1)_{W_{\mathbb{C}}^+} \det(1 - g_1 g_2)_{W_{\mathbb{C}}^+}^{-1} \det(1 - g_2)_{W_{\mathbb{C}}^+} \right)^2 \\
&= \left(\det(1 - g_1)_{W_{\mathbb{C}}^+} \det(1 - g_1 g_2)_{W_{\mathbb{C}}^+}^{-1} \det(1 - g_2)_{W_{\mathbb{C}}^+} \right)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$C(g_1, g_2) = \pm \det(1 - g_1)_{W_{\mathbb{C}}^+} \det(1 - g_1 g_2)_{W_{\mathbb{C}}^+}^{-1} \det(1 - g_2)_{W_{\mathbb{C}}^+}$$

Etant donné que $(\mathrm{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++})^J$, il suffit alors de regarder cela en un point particulier. Pour tout $t > 1$, on a :

$$C(c(itJ), c(itJ)) = \det \left(\frac{1}{2i} (c(c(itJ)) + c(c(itJ))) \right) = \det(tJ) > 0$$

Pour tout $w \in W_{\mathbb{C}}^+$, on a $itJ(w) = -tw$. Ainsi, $(itJ - 1)w = (-1 - t)w$. Ainsi, on a :

$$c(itJ)w = (1 + itJ)(itJ - 1)^{-1}(w) = \frac{1 - t}{-1 - t}w$$

et donc on a :

$$(1 - c(itJ))w = 1 - \frac{1 - t}{-1 - t}w = \frac{2}{t + 1}w \quad \text{et} \quad (1 - c(itJ)^2)w = \frac{4t}{(t + 1)^2}w$$

Finalement, on obtient

$$\det(1 - c(itJ))_{W_{\mathbb{C}}^+} > 0 \quad \text{et} \quad \det(1 - c(itJ)^2)_{W_{\mathbb{C}}^+} > 0$$

Ainsi, pour $g_1 = g_2 = c(itJ)$, on a

$$C(g_1, g_2) = \det(1 - g_1)_{W_{\mathbb{C}}^+} \det(1 - g_1 g_2)_{W_{\mathbb{C}}^+}^{-1} \det(1 - g_2)_{W_{\mathbb{C}}^+}$$

D'où le résultat annoncé. □

Notons

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{GL}}(W_{\mathbb{C}}^+) &= \{(h, \xi); h \in \mathrm{GL}(W_{\mathbb{C}}^+), \xi^2 = \det(h)\} \\
\widetilde{\mathrm{GL}}(W_{\mathbb{C}}^+)^{++} &= \{(h, \xi); h \in \widetilde{\mathrm{GL}}(W_{\mathbb{C}}^+), H(hw, hw) < H(w, w), w \in W_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}\}
\end{aligned}$$

Lemme 3.4.5. *L'ensemble $\widetilde{\mathrm{GL}}(W_{\mathbb{C}}^+)$ est un groupe muni de la multiplication suivante*

$$(h, \xi).(g, \eta) = (hg, \xi\eta) \quad ((h, \xi), (g, \eta) \in \widetilde{\mathrm{GL}}(W_{\mathbb{C}}^+))$$

De plus, $\widetilde{\mathrm{GL}}(W_{\mathbb{C}}^+)^{++}$ est un sous-semi-groupe de $\widetilde{\mathrm{GL}}(W_{\mathbb{C}}^+)$. Finalement, l'application

$$\psi : (\mathrm{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++})^J \ni (g, \xi) \rightarrow (g|_{W_{\mathbb{C}}^+}, \xi \det(1 - g)_{W_{\mathbb{C}}^+}) \in \widetilde{\mathrm{GL}}(W_{\mathbb{C}}^+)^{++} \quad (3.13)$$

est un isomorphisme de semi-groupes.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned}
(\xi \det(1 - g)_{W_{\mathbb{C}}^+})^2 &= \xi^2 \det(1 - g)_{W_{\mathbb{C}}^+}^2 = \det(i(g - 1))^{-1} \det(1 - g)_{W_{\mathbb{C}}^+}^2 \\
&= (-i)^{\dim(W_{\mathbb{C}})} \det(g - 1)_{W_{\mathbb{C}}^+}^{-1} \det(g^{-1} - 1)_{W_{\mathbb{C}}^+}^{-1} \det(1 - g)_{W_{\mathbb{C}}^+}^2 \\
&= (-i)^{\dim(W_{\mathbb{C}})} (-1)^{\dim(W_{\mathbb{C}}^+)} \det(1 - g)_{W_{\mathbb{C}}^+}^{-1} \det(g^{-1} - 1)_{W_{\mathbb{C}}^+}^{-1} \det(1 - g)_{W_{\mathbb{C}}^+}^2 \\
&= \det(g^{-1} - 1)_{W_{\mathbb{C}}^+}^{-1} \det(1 - g)_{W_{\mathbb{C}}^+} \\
&= \det(g)_{W_{\mathbb{C}}^+} \det(1 - g)_{W_{\mathbb{C}}^+}^{-1} \det(1 - g)_{W_{\mathbb{C}}^+} \\
&= \det(g)_{W_{\mathbb{C}}^+}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(\xi \det(1 - g)_{W_{\mathbb{C}}^+})^2 = \det(g)_{W_{\mathbb{C}}^+} \quad (3.14)$$

Ainsi, l'application ψ est bien définie.

Fixons $(g, \xi), (h, \eta) \in (\mathrm{Sp}(W_{\mathbb{C}})^{++})^J$. D'un côté, on a :

$$\psi((g, \xi).(h, \eta)) = \psi(gh, \xi\eta C(g, h)) = ((gh)_{W_{\mathbb{C}}^+}, \xi\eta C(g, h) \det(1 - gh)_{W_{\mathbb{C}}^+})$$

et d'autre part,

$$\psi((g, \xi))\psi((h, \eta)) = (g_{W_{\mathbb{C}}^+} h_{W_{\mathbb{C}}^+}, \xi\eta \det(1 - g)_{W_{\mathbb{C}}^+} \det(1 - h)_{W_{\mathbb{C}}^+})$$

On obtient l'égalité en utilisant le lemme 3.4.4. □

Le sous-ensemble $\mathrm{Sp}(W)^J \subseteq \mathrm{Sp}(W)$ est un sous-groupe maximal compact de $\mathrm{Sp}(W)$. En considérant $\mathrm{Sp}(W)^J$ comme un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(W_{\mathbb{C}})$, notons

$$U_J = (\mathrm{Sp}(W)^J)_{|_{W_{\mathbb{C}}}} \subseteq \mathrm{GL}(W_{\mathbb{C}}^+)$$

Remarquons au passage que U_J coïncide avec le groupe d'isométrie de la forme hermitienne $H_{|_{W_{\mathbb{C}}^+}}$.

De nouveau, le sous-groupe U_J est contenu dans la fermeture de $\mathrm{GL}(W_{\mathbb{C}}^+)^{++}$. Notons

$$\widetilde{U}_J = \{(h, \xi); h \in U_J, \xi^2 = \det(h)\}$$

Lemme 3.4.6. *L'ensemble $\widetilde{U}_J \cup \mathrm{GL}(\widetilde{W}_{\mathbb{C}}^+)^{++}$ est un semi-groupe avec la multiplication définie par*

$$(g, \xi).(h, \eta) = (gh, \xi\eta) \quad ((g, \xi), (h, \eta) \in \widetilde{U}_J \cup \mathrm{GL}(\widetilde{W}_{\mathbb{C}}^+)^{++})$$

De plus, l'application

$$(\mathrm{Sp}(\widetilde{W}_{\mathbb{C}}^+)^{++})^J \cup \mathrm{Sp}(\widetilde{W})^J \ni (g, \xi) \rightarrow (g_{|_{W_{\mathbb{C}}^+}}, \xi \det(1 - g)_{W_{\mathbb{C}}^+}) \in \mathrm{GL}(\widetilde{W}_{\mathbb{C}}^+)^{++} \cup \widetilde{U}_J \quad (3.15)$$

est bien définie et est un isomorphisme de semi-groupe.

Théorème 3.4.7. *En utilisant l'isomorphisme donné par l'équation (3.15), la restriction du caractère Θ à $(\text{Sp}(\widetilde{W}_{\mathbb{C}}^+)^{++})^J \cup \text{Sp}(\widetilde{W})^J$ est donnée par*

$$\Theta(\tilde{k}) = \lim_{\substack{\tilde{h} \rightarrow \tilde{k} \\ \tilde{h} \in \text{GL}(\widetilde{W}_{\mathbb{C}}^+)^{++}}} \Theta(\tilde{h}) = \lim_{\substack{\tilde{h} \rightarrow \tilde{k} \\ \tilde{h} \in \text{GL}(\widetilde{W}_{\mathbb{C}}^+)^{++}}} \frac{\xi}{\det(1 - h)} \quad (\tilde{h} = (h, \xi))$$

Remarque 3.4.8. L'égalité du théorème 3.4.7 en terme de distributions est une conséquence du théorème 3.3.2.

Démonstration. Par définition, on a $\Theta((g, \xi)) = \xi$. Or, d'après l'équation (3.14), on a :

$$(\xi \det(1 - g)_{W_{\mathbb{C}}^+})^2 = \det(g)_{W_{\mathbb{C}}^+}$$

c'est-à-dire, par abus de notation,

$$\xi = \frac{\sqrt{\det(g)_{W_{\mathbb{C}}^+}}}{\det(1 - g)_{W_{\mathbb{C}}^+}}$$

□

Remarque 3.4.9. L'application

$$W \ni w \rightarrow \frac{1}{2}(1 - iJ)w \in W_{\mathbb{C}}^+ \quad (3.16)$$

est bien définie, et est, de plus, un \mathbb{R} -isomorphisme entre W et $W_{\mathbb{C}}^+$. En effet, on a

$$J\left(\frac{1}{2}(1 - iJ)w\right) = \frac{1}{2}(Jw - J(iJ(w))) = \frac{1}{2}(Jw + iw) = i\left(\frac{1}{2}(1 - iJ)w\right)$$

De même, on a

$$\begin{aligned} H\left(\frac{1}{2}(1 - iJ)w, \frac{1}{2}(1 - iJ)w'\right) &= i \left\langle \frac{1}{2}(1 - iJ)w, \overline{\frac{1}{2}(1 - iJ)w'} \right\rangle \\ &= \frac{i}{4} \langle w, w \rangle - \frac{1}{4} \langle w, J(w) \rangle + \frac{1}{4} \langle J(w), w \rangle + \frac{i}{4} \langle Jw, Jw \rangle \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$H\left(\frac{1}{2}(1 - iJ)w, \frac{1}{2}(1 - iJ)w'\right) = \frac{1}{2}(\langle J(w), w \rangle + i \langle w, w \rangle) \quad (3.17)$$

Ainsi, considérons W comme un \mathbb{C} -espace vectoriel où la multiplication par i est définie par l'action de J . Notons H_J la forme définie sur W dans l'équation (3.17), c'est-à-dire

$$H_J(w, w') = H\left(\frac{1}{2}(1 - iJ)w, \frac{1}{2}(1 - iJ)w'\right)$$

Cette forme est hermitienne et définie positive. De plus, via l'équation (3.16), le sous-groupe $GL(W_{\mathbb{C}}^+)$ s'identifie à $GL_{\mathbb{C}}(W)$. Notons

$$\begin{aligned} GL_{\mathbb{C}}(W)^{++} &= \{k \in GL_{\mathbb{C}}(W); H_J(kw, kw) < H_J(w, w), w \in W \setminus \{0\}\} \\ U &= \{k \in GL_{\mathbb{C}}(W); H_J(kw, kw) = H_J(w, w), w \in W\} \\ \widetilde{GL}_{\mathbb{C}}(\widetilde{W})^{++} &= \{(k, \xi); k \in GL_{\mathbb{C}}(W)^{++}, \xi^2 = \det(k)\} \\ \widetilde{U} &= \{(k, \xi); k \in U, \xi^2 = \det(k)\} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient l'identification suivante

$$\widetilde{GL}(\widetilde{W}_{\mathbb{C}}^+)^{++} \cup \widetilde{U}_J = \widetilde{GL}_{\mathbb{C}}(\widetilde{W})^{++} \cup \widetilde{U}$$

où de nouveau, la structure de semi-groupe du membre de droite est donnée par la multiplication point par point. De plus, en utilisant cette identification et le corollaire 3.4.7, on obtient

$$\Theta((k, \xi)) = \frac{\xi}{\det(1 - k)} \quad ((k, \xi) \in \widetilde{GL}_{\mathbb{C}}(\widetilde{W})^{++} \cup \widetilde{U}) \quad (3.18)$$

Exemple 3.4.10. Considérons $W = \mathbb{C}^n$ le \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $2n$ muni de la forme symplectique suivante

$$\langle w, w' \rangle = 2 \operatorname{Im}(\bar{w}'^t w)$$

Notons $J \in GL(W)$ défini par $J(w) = iw$. De nouveau, W est vu comme un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n où la multiplication par i est donné par l'action de J . Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} H_J(w, w') &= \frac{1}{2}(\langle J(w), w' \rangle + i \langle w, w' \rangle) = \frac{1}{2}(2 \operatorname{Im}(\bar{w}'^t Jw) + 2i \operatorname{Im}(\bar{w}'^t w)) \\ &= \frac{1}{2}(2 \operatorname{Im}(i\bar{w}'^t w) + 2i \operatorname{Im}(\bar{w}'^t w)) = \operatorname{Re}(\bar{w}'^t w) + i \operatorname{Im}(\bar{w}'^t w) = \bar{w}'^t w \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} GL_{\mathbb{C}}(W) &= GL(n, \mathbb{C}) \\ GL_{\mathbb{C}}(W)^{++} &= \{k \in GL(n, \mathbb{C}); \bar{k}^t k < 1\} \\ U &= U(n, \mathbb{C}) \\ \widetilde{U} &= \{(k, \xi); k \in U(n, \mathbb{C}), \xi^2 = \det(k)\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

De même, on a $GL_{\mathbb{C}}(W)^{++} = \{(k, \xi); k \in GL_{\mathbb{C}}(W)^{++}, \xi^2 = \det(k)\}$.

Ainsi, pour tout $(k, \sqrt{\det(k)}) \in GL_{\mathbb{C}}(W)^{++}$, on a

$$\Theta((k, \sqrt{\det(k)})) = \frac{\sqrt{\det(k)}}{\det(1 - k)}$$

De même, en tant que distribution sur \tilde{U} , on a :

$$\Theta((k, \sqrt{\det(k)}) = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r > 0}} \frac{\sqrt{\det(rk)}}{\det(1 - rk)}$$

Regardons à présent la valeur de ce caractère sur le sous-groupe de Cartan diagonal T de U

$$T = \{t = \text{diag}(t_1, \dots, t_n); t_j \in \mathbb{S}^1, 1 \leq i \leq n\}$$

et soit

$$\tilde{T} = \{\tilde{t} = (t, \xi) \mid t \in T, \xi^2 = \det(t)\}$$

Ainsi, en tant que distribution sur \tilde{T} , on a la formule suivante

$$\Theta(\tilde{t} = (t, \xi)) = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \frac{\sqrt{\det(\text{diag}(rt_1, \dots, rt_n))}}{\det(1 - \text{diag}(rt_1, \dots, rt_n))}$$

Or, on a $\det(\text{diag}(rt_1, \dots, rt_n)) = \prod_{i=1}^n (rt_i)$ et $\det(1 - \text{diag}(rt_1, \dots, rt_n)) = \prod_{i=1}^n (1 - rt_i)$. Finalement, on a

$$\Theta(\tilde{t}) = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \frac{\sqrt{\prod_{i=1}^n (rt_i)}}{\prod_{i=1}^n (1 - rt_i)} \quad (\tilde{t} = (t, \xi) \in \tilde{T}) \quad (3.20)$$

3.5 Le cas $G = U(m, \mathbb{C})$, $G' = U(p, q, \mathbb{C})$, $p \leq q$

Appliquons les résultats de la section précédente à la paire duale $G = U(m, \mathbb{C})$, $G' = U(p, q, \mathbb{C})$, $p \leq q$ (voir l'annexe A). Notons

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

où I_p est la matrice identité dans $M(p, \mathbb{C})$. Notons $W = M((p+q) \times m, \mathbb{C})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel muni de la forme suivante :

$$\langle w, w' \rangle = \text{Im}(\bar{w}'^t I_{p,q} w)$$

Cette forme est bilinéaire, anti-symétrique et non-dégénérée. Ainsi, notons $\text{Sp}(W)$ le groupe d'isométries de $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On va alors plonger G et G' dans $\text{Sp}(W)$. Pour cela, notons

$$\Psi_1 : G' \ni g' \rightarrow \Psi_1(g') \in \text{GL}(W), \quad \Psi_1(g')(w) = g'w, w \in W$$

Lemme 3.5.1. *L'application Ψ_1 est un morphisme de groupes injectif. De plus, pour tout $g' \in G'$ et $w, w' \in W$, on a :*

$$\langle \Psi_1(g')w, \Psi_1(g')w' \rangle = \langle w, w' \rangle$$

Démonstration. L'application Ψ_1 est clairement un morphisme injectif. Pour tout $g' \in G'$ et $w, w' \in W$, on a

$$\langle \Psi_1(g')w, \Psi_1(g')w' \rangle = \text{Im}(\overline{g'w'} I_{p,q} g'w) = \text{Im}(\bar{w}' \bar{g}' I_{p,q} g'w) = \text{Im}(\bar{w}' I_{p,q} w) = \langle w, w' \rangle$$

□

De la même manière, notons

$$\Psi_2 : G \ni g \rightarrow \Psi_2(g) \in \text{GL}(W), \quad \Psi_2(g')(w) = wg^{-1}, w \in W$$

On définit la forme $J \in \text{GL}(W)$ par

$$J(w) = iI_{p,q}w$$

On peut vérifier que J est une structure complexe définie positive sur W .

Lemme 3.5.2. Soit B un sous-groupe de Cartan de $\text{Sp}(W)^J$ et soit $\widetilde{B}_{\mathbb{C}}^{++} = B_{\mathbb{C}} \cap \widetilde{\text{Sp}}(W_{\mathbb{C}})^{++}$. Soient $t, t' \in B_{\mathbb{C}}^{++}$ ayant comme valeurs propres t_j et t'_j respectivement sur l'espace $W_{\mathbb{C}}^+$. D'après l'équation (3.19), on a $|t_j| < 1, |t'_j| < 1$ pour tous j . Notons \tilde{t} et \tilde{t}' des éléments fixés dans $\widetilde{B}_{\mathbb{C}}^{++}$. D'après l'équation (3.18)

$$\Theta(\tilde{t}) = \frac{\left(\prod_{j=1}^n t_j\right)^{\frac{1}{2}}}{\prod_{j=1}^n (1-t_j)} \quad \Theta(\tilde{t}') = \frac{\left(\prod_{j=1}^n t'_j\right)^{\frac{1}{2}}}{\prod_{j=1}^n (1-t'_j)}$$

Alors,

$$\Theta(\tilde{t}\tilde{t}') = \frac{\left(\prod_{j=1}^n t_j\right)^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^n t'_j\right)^{\frac{1}{2}}}{\prod_{j=1}^n (1-t_j t'_j)}$$

Démonstration. D'après l'équation (3.8), on a :

$$\Theta(\tilde{t}\tilde{t}') = \Theta(\tilde{t})\Theta(\tilde{t}') \text{chc}(c(t) + c(t'))$$

Or,

$$\Theta(\tilde{t})\Theta(\tilde{t}') \text{chc}(c(t) + c(t')) = \frac{\left(\prod_{j=1}^n t_j\right)^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^n t'_j\right)^{\frac{1}{2}}}{\prod_{j=1}^n (1-t_j) \prod_{j=1}^n (1-t'_j)} \text{chc}(c(t) + c(t'))$$

Ainsi, il faut montrer que

$$\text{chc}(c(t) + c(t')) = \frac{\prod_{j=1}^n (1-t_j)(1-t'_j)}{\prod_{j=1}^n (1-t_j t'_j)}$$

Or, pour $z, z' \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^{++}$, on a

$$\Theta(\widetilde{\exp}(z)) = \frac{\prod_{j=1}^n e^{\frac{iz_j}{2}}}{\prod_{j=1}^n (1 - e^{iz_j})}$$

$$\Theta(\widetilde{\exp}(z')) = \frac{\prod_{j=1}^n e^{\frac{iz'_j}{2}}}{\prod_{j=1}^n (1 - e^{iz'_j})}$$

$$\Theta(\widetilde{\exp}(z)\widetilde{\exp}(z')) = \Theta(\widetilde{\exp}(z + z')) = \frac{\prod_{j=1}^n e^{\frac{i(z_j+z'_j)}{2}}}{\prod_{j=1}^n (1 - e^{i(z_j+z'_j)})}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{chc}(c(\exp(z)) + c(\exp(z'))) &= \frac{\Theta(\widetilde{\exp}(z)\widetilde{\exp}(z'))}{\Theta(\widetilde{\exp}(z))\Theta(\widetilde{\exp}(z'))} = \frac{\prod_{j=1}^n e^{\frac{i(z_j+z'_j)}{2}}}{\prod_{j=1}^n (1 - e^{i(z_j+z'_j)})} \frac{\prod_{j=1}^n (1 - e^{iz_j})}{\prod_{j=1}^n e^{\frac{iz_j}{2}}} \frac{\prod_{j=1}^n (1 - e^{iz'_j})}{\prod_{j=1}^n e^{\frac{iz'_j}{2}}} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^n (1 - e^{iz_j})(1 - e^{iz'_j})}{\prod_{j=1}^n (1 - e^{iz_j}e^{iz'_j})} \end{aligned}$$

□

On considère :

$$T = \{\text{diag}(t_1, \dots, t_m); t_i \in \mathbb{S}^1\} \subseteq U(m, \mathbb{C}) \quad (3.21)$$

$$T' = \{\text{diag}(t_1, \dots, t_{p+q}); t_i \in \mathbb{S}^1\} \subseteq U(p, q, \mathbb{C}) \quad (3.22)$$

$$(T'_{\mathbb{C}})^{++} = \{\text{diag}(t_1, \dots, t_{p+q}); |t_i| < 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq p, |t_i| > 1 \text{ pour } p < i \leq p+q\} \quad (3.23)$$

Pour alléger les notations, notons tt' l'action de $\Psi_2(t)\Psi_1(t')$ sur W . Plus précisément, pour tout $E_{a,b} \in W$, on a :

$$(tt')E_{a,b} = t'_a t_b^{-1} E_{a,b}$$

Par définition de J , on a :

$$J(E_{a,b}) = \begin{cases} iE_{a,b} & \text{si } 1 \leq a \leq p \\ -iE_{a,b} & \text{si } a > p \end{cases}$$

Ainsi, on obtient que les valeurs propres de tt' sont $\{t'_a t_b^{-1}; 1 \leq a \leq p, 1 \leq b \leq m\} \cup \{\overline{t'_a t_b^{-1}}; p+1 \leq a \leq p+q, 1 \leq b \leq m\}$. Finalement, en utilisant l'équation (3.18), on a

$$\begin{aligned}
\Theta(\widetilde{tt'}) &= \frac{\left(\prod_{a=1}^p \prod_{b=1}^m t'_a t_b^{-1} \prod_{a=p+1}^{p+q} \prod_{b=1}^m \overline{t'_a t_b^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}}}{\prod_{a=1}^p \prod_{b=1}^m (1 - t'_a t_b^{-1}) \prod_{a=p+1}^{p+q} \prod_{b=1}^m (1 - \overline{t'_a t_b^{-1}})} \\
&= \frac{\left(\prod_{a=1}^p (t'_a)^m \prod_{b=1}^m (t_b^{-1})^p \prod_{a=p+1}^{p+q} (\overline{t'_a})^m \prod_{b=1}^m (\overline{t_b^{-1}})^q \right)^{\frac{1}{2}}}{\prod_{a=1}^p \prod_{b=1}^m (1 - t'_a t_b^{-1}) \prod_{a=p+1}^{p+q} \prod_{b=1}^m (1 - \overline{t'_a t_b^{-1}})} \\
&= \frac{\left(\prod_{a=1}^p (t'_a)^m \prod_{a=p+1}^{p+q} (\overline{t'_a})^m \prod_{b=1}^m t_b^{q-p} \right)^{\frac{1}{2}}}{\prod_{a=1}^p \prod_{b=1}^m (1 - t'_a t_b^{-1}) \prod_{a=p+1}^{p+q} \prod_{b=1}^m (1 - \overline{t'_a t_b^{-1}})} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

En particulier, on a pour tout $\tilde{t}' \in \widetilde{T}'$, on a :

$$\Theta(\tilde{t}') = \frac{\left(\prod_{a=1}^p (t'_a)^m \prod_{a=p+1}^{p+q} (\overline{t'_a})^m \right)^{\frac{1}{2}}}{\prod_{a=1}^p \prod_{b=1}^m (1 - t'_a) \prod_{a=p+1}^{p+q} \prod_{b=1}^m (1 - \overline{t'_a})}$$

Corollaire 3.5.3. Pour tout $\tilde{t} \in \widetilde{T}$ et $\tilde{t}' \in (\widetilde{T}')^{++}$, on a :

$$\Theta(\tilde{t}\tilde{t}') = \frac{\left(\prod_{a=1}^p (t'_a)^m \prod_{a=p+1}^{p+q} (\overline{t'_a})^m \right)^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{b=1}^m t_b^{q-p} \right)^{\frac{1}{2}}}{\prod_{a=1}^p \prod_{b=1}^m (1 - t'_a t_b^{-1}) \prod_{a=p+1}^{p+q} \prod_{b=1}^m (1 - \overline{t'_a t_b^{-1}})} = \frac{(-1)^{mq} \prod_{b=1}^m t_b^p \left(\prod_{a=1}^{p+q} t'_a \right)^{\frac{m}{2}} \left(\prod_{b=1}^m t_b^{\frac{q-p}{2}} \right)}{\prod_{a=1}^p \prod_{b=1}^m (t_b - t'_a) \prod_{a=p+1}^{p+q} \prod_{b=1}^m \left(t_b - \frac{1}{t'_a} \right)} \tag{3.25}$$

Démonstration. D'après (3.24) et le lemme 3.5.2, on a

$$\Theta(\tilde{t}\tilde{t}') = \frac{\left(\prod_{a=1}^p t'_a \prod_{a=p+1}^{p+q} \overline{t'_a} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\prod_{b=1}^m t_b^{q-p} \right)^{\frac{1}{2}}}{\prod_{a=1}^p \prod_{b=1}^m (1 - t'_a t_b^{-1}) \prod_{a=p+1}^{p+q} \prod_{b=1}^m (1 - \overline{t'_a t_b^{-1}})} = \frac{\left(\prod_{a=1}^p t'_a \prod_{a=p+1}^{p+q} \overline{t'_a} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\prod_{b=1}^m t_b^{\frac{q-p}{2}} \right)}{\prod_{a=1}^p \prod_{b=1}^m (1 - t'_a t_b^{-1}) \prod_{a=p+1}^{p+q} \prod_{b=1}^m (1 - \overline{t'_a t_b^{-1}})}$$

Or

$$\begin{aligned}
\prod_{a=1}^p \prod_{b=1}^m (1 - t'_a t_b^{-1}) \prod_{a=p+1}^{p+q} \prod_{b=1}^m (1 - \overline{t'_a t_b^{-1}}) &= \prod_{a=1}^p \prod_{b=1}^m t_b^{-1} (t_b - t'_a) \prod_{a=p+1}^{p+q} \prod_{b=1}^m \overline{t'_a} ((\overline{t'_a})^{-1} - t_b) \\
&= (-1)^{mq} \prod_{b=1}^m t_b^{-p} \prod_{a=p+1}^{p+q} (\overline{t'_a})^m \prod_{a=1}^p \prod_{b=1}^m (t_b - t'_a) \prod_{a=p+1}^{p+q} \prod_{b=1}^m \left(t_b - \frac{1}{t'_a} \right)
\end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

En utilisant [23] (voir aussi l'appendice de [34]), les plus haut poids des représentations de $U(\widetilde{m}, \mathbb{C})$ qui apparaissent dans la correspondance de Howe sont les λ de la forme :

$$\lambda = \sum_{a=1}^m \frac{q-p}{2} e_a - \sum_{a=1}^r \nu_a e_{m+1-a} + \sum_{a=1}^s \mu_a e_a, \quad (3.26)$$

où $0 \leq r \leq p$, $0 \leq s \leq q$, $r+s \leq m$, et des entiers $\nu_1, \dots, \nu_r, \mu_1, \dots, \mu_s$ qui vérifient $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_r > 0$ et $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_s > 0$. Le poids λ peut se noter aussi comme suit :

$$\lambda = \sum_{a=1}^m \left(\frac{q-p}{2} + \lambda_a \right) e_a \quad (3.27)$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$ avec au plus q des nombres λ_i positifs et p négatifs.

Comme dans l'équation (2.15), on a :

$$\rho = \sum_{a=1}^m \frac{m-2a+1}{2} e_a.$$

Pour tout $w \in \mathcal{W}$, on a :

$$w(\lambda + \rho) = w \left(\sum_{a=1}^m \left(\frac{q-p+m-2a+1}{2} + \lambda_a \right) e_a \right) = \sum_{a=1}^m \left(\frac{q-p+m-2a+1}{2} + \lambda_a \right) e_{w(a)}$$

Pour tout $(x_1, \dots, x_m) \in [0, 2\pi]^m$,

$$\widetilde{\xi}_{w(\lambda+\rho)}(\widetilde{\exp}(x = \text{diag}(ix_1, \dots, ix_m))) = e^{\left(\sum_{a=1}^m \frac{q-p+m-2a+1}{2} e_{\sigma(a)} \right) (ix_1, \dots, ix_m)} = \prod_{i=1}^m t_{w(a)}^{\frac{q-p+m-2a+1}{2} + \lambda_a}$$

où $t_k = e^{ix_k}$. De même, on a :

$$\begin{aligned} D(\widetilde{t} = \widetilde{\exp}(x)) &= \prod_{\alpha > 0} (e^{\frac{\alpha}{2}(x)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(x)}) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (e^{\frac{e_i - e_j}{2}(x)} - e^{-\frac{e_i - e_j}{2}(x)}) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq m} (t_i^{\frac{1}{2}} t_j^{-\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}} t_j^{\frac{1}{2}}) = \prod_{i=1}^m t_i^{-\frac{m-1}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (t_i - t_j) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Dans notre cas T correspond à l'ensemble des matrices diagonales d'ordre m à coefficients dans S^1 . On identifie ainsi T avec $(S^1)^m$. Via cette identification on a :

Lemme 3.5.4.

$$d\mu_T(t_1, \dots, t_m) = \frac{1}{2} \bigotimes_{i=1}^m d\mu_{S^1}(t_i).$$

La mesure de Haar normalisée de S^1 est donnée par :

$$d\mu_{S^1}(t) = \frac{dt}{2i\pi t}$$

où dt dénote la différentielle complexe.

Proposition 3.5.5. Pour tout $\tilde{r}' \in \widetilde{T}'^{\text{reg}}$, on a :

$$\Theta_{\Pi'}(\tilde{r}') = \frac{(-1)^{mq + \frac{(m-1)m}{2}} \left(\prod_{a=1}^{p+q} t'_a \right)^{\frac{m}{2}}}{(2i\pi)^m m!} \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \sum_{w \in \mathcal{W}} \text{sgn}(w) \int_{S^1} \cdots \int_{S^1} \frac{\prod_{b=1}^m t_b^{p-m-1} \prod_{a=1}^m t_{w(a)}^{a-\lambda_a} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (t_i - t_j)}{\prod_{a=1}^p \prod_{b=1}^m (t_b - r t'_a) \prod_{a=p+1}^{p+q} \prod_{b=1}^m \left(t_b - \frac{1}{r t'_a} \right)} \prod_{k=1}^m dt_k. \quad (3.29)$$

Démonstration. D'après la formule (3.12), on a

$$\Theta_{\Pi'}(\tilde{r}') = \lim_{\tilde{p} \rightarrow 1} \frac{1}{|\mathcal{W}(G, T)|} \int_T \tau_{\tilde{p}, \tilde{g}'}(t) |D(t)|^2 d\mu_T(t)$$

où $\tau_{\tilde{p}, \tilde{r}'}(t = \pi(\eta(\tilde{t})) = \overline{\Theta_{\Pi}(\tilde{t})} \Theta(\tilde{t} \tilde{p} \tilde{r}')$. En utilisant la formule du caractère de Weyl, on obtient :

$$\Theta_{\Pi'}(\tilde{r}') = \lim_{\tilde{p} \rightarrow 1} \frac{1}{|\mathcal{W}(G, T)|} \int_T \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \overline{\xi_{\sigma(\lambda+\rho)}(\tilde{t})} \right) \Theta(\tilde{t} \tilde{p} \tilde{r}') D(t) d\mu_T(t)$$

Or, on a

$$\overline{\xi_{\sigma(\lambda+\rho)}(\tilde{t})} = \prod_{i=1}^m t_{w(a)}^{-\frac{q-p+m-2a+1}{2} - \lambda_a}$$

En utilisant la formule du caractère (3.25), on obtient :

$$\begin{aligned} \Theta_{\Pi'}(\tilde{r}') &= \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ 0 < r < 1}} \frac{1}{n!} \int_T \left(\sum_{w \in \mathcal{W}} \prod_{i=1}^m t_{w(a)}^{-\frac{q-p+m-2a+1}{2} - \lambda_a} \right) \Theta(\tilde{t} \tilde{p} \tilde{r}') D(t) d\mu_T(t) \\ &= \frac{(-1)^{mq} \left(\prod_{a=1}^{p+q} t'_a \right)^{\frac{m}{2}}}{n!} \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \sum_{w \in \mathcal{W}} \text{sgn}(w) \int_{S^1} \cdots \int_{S^1} \frac{\prod_{b=1}^m t_b^{p-m} \prod_{a=1}^m t_{w(a)}^{a-\lambda_a} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (t_i - t_j)}{\prod_{a=1}^p \prod_{b=1}^m (t_b - r t'_a) \prod_{a=p+1}^{p+q} \prod_{b=1}^m \left(t_b - \frac{1}{r t'_a} \right)} \prod_{k=1}^m d\mu_{S^1}(t_k) \\ &= \frac{(-1)^{mq} \left(\prod_{a=1}^{p+q} t'_a \right)^{\frac{m}{2}}}{n!} \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \sum_{w \in \mathcal{W}} \text{sgn}(w) \int_{S^1} \cdots \int_{S^1} \frac{\prod_{b=1}^m t_b^{p-m-1} \prod_{a=1}^m t_{w(a)}^{a-\lambda_a} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (t_i - t_j)}{\prod_{a=1}^p \prod_{b=1}^m (t_b - r t'_a) \prod_{a=p+1}^{p+q} \prod_{b=1}^m \left(t_b - \frac{1}{r t'_a} \right)} \prod_{k=1}^m \frac{dt_k}{2i\pi} \end{aligned}$$

□

Pour référence pour la suite, on rappelle la formule du déterminant de Vandermonde

$$\prod_{1 \leq i < j \leq m} (t_j - t_i) = \sum_{\beta \in \mathcal{S}_m} \text{sgn}(\beta) \prod_{i=1}^m t_{\beta(i)}^{i-1}. \quad (3.30)$$

On a :

$$\prod_{1 \leq i < j \leq m} (t_j - t_i) = (-1)^{\frac{(m-1)m}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (t_i - t_j)$$

Corollaire 3.5.6. Pour tout $\tilde{r}' \in \widetilde{T}'^{\text{reg}}$, on a :

$$\Theta_{\Pi'}(\tilde{r}') = K(t') \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r' < 1}} \sum_{w \in \mathcal{W}} \sum_{\beta \in \mathcal{S}_m} \text{sgn}(w) \text{sgn}(\beta) \int_{S^1} \dots \int_{S^1} \frac{\prod_{b=1}^m t_b^{p-m-1} \prod_{a=1}^m t_{w(a)}^{a-\lambda_a} \prod_{a=1}^m t_{\beta(a)}^{a-1}}{\prod_{a=1}^p \prod_{b=1}^m (t_b - rt'_a)^{p+q} \prod_{a=p+1}^m \prod_{b=1}^m \left(t_b - \frac{1}{rt'_a}\right)} \prod_{k=1}^m dt_k \quad (3.31)$$

avec $K(t') = \frac{(-1)^{mq + \frac{(m-1)m}{2}} \left(\prod_{a=1}^{p+q} t'_a\right)^{\frac{m}{2}}}{(2i\pi)^m m!}$, qui se réécrit comme suit :

$$\Theta_{\Pi'}(\tilde{r}') = K(t') \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r' < 1}} \sum_{w \in \mathcal{W}} \sum_{\beta \in \mathcal{S}_m} \text{sgn}(w) \text{sgn}(\beta) \prod_{b=1}^m \int_{S^1} \frac{t_b^{p-m-2+w^{-1}(b)-\lambda_{w^{-1}(b)}+\beta^{-1}(b)}}{\prod_{a=1}^p (t_b - rt'_a)^{p+q} \prod_{a=p+1}^m \left(t_b - \frac{1}{rt'_a}\right)} dt_b \quad (3.32)$$

Lemme 3.5.7. Considérons $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$ tels que $|a_i| < 1$ pour tout $i \in [1, p]$. De même, considérons $a_{p+1}, \dots, a_{p+q} \in \mathbb{C}$ tels que $|a_i| > 1$ pour tout $i \in [p+1, p+q]$. Supposons de plus $a_i \neq a_j, i \neq j$. Alors, on a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{S^1} \frac{t^k}{\prod_{i=1}^{p+q} (t - a_i)} dt = \begin{cases} \sum_{h=1}^p \frac{a_h^k}{\prod_{j \neq h} (a_h - a_j)} & \text{si } k \geq 0 \\ - \sum_{h=p+1}^{p+q} \frac{a_h^k}{\prod_{j \neq h} (a_h - a_j)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Commençons par le cas où $k \geq 0$. Il existe alors $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_{p+1}, \dots, \beta_{p+q}$ tels que

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{p+q} (t - a_i)} = \sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i}{t - a_i} + \sum_{i=p+1}^{p+q} \frac{\beta_i}{t - a_i}.$$

Ainsi, on a :

$$\int_{S^1} \frac{t^k}{\prod_{i=1}^{p+q} (t - a_i)} dt = \sum_{i=1}^p \alpha_i \int_{S^1} \frac{t^k}{t - a_i} dt + \sum_{i=p+1}^{p+q} \beta_i \int_{S^1} \frac{t^k}{t - a_i} dt.$$

Or, pour tout $i \in [p+1, p+q]$, on a :

$$\int_{S^1} \frac{t^k}{t - a_i} dt = 0.$$

De même, pour tout $i \in [1, p]$, on a :

$$\int_{S^1} \frac{t^k}{t - a_i} dt = 2i\pi a_i^k.$$

Ainsi, on obtient :

$$\int_{S^1} \frac{t^k}{\prod_{i=1}^{p+q} (t - a_i)} dt = 2i\pi \sum_{j=1}^p \alpha_j a_j^k$$

Comme $a_h \neq a_u, h \neq u$, alors, on obtient directement que pour tout $i \in [[1, p]]$, on a :

$$\alpha_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+q} (a_i - a_j)}.$$

Ainsi, pour $k \geq 0$, on obtient :

$$\int_{S^1} \frac{t^k}{\prod_{i=1}^{p+q} (t - a_i)} dt = 2i\pi \sum_{j=1}^p \frac{a_j^k}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p+q} (a_i - a_j)}$$

Considérons à présent $k < 0$ et soit $u = -k > 0$. On cherche alors à calculer :

$$\int_{S^1} \frac{dt}{t^u \prod_{i=1}^{p+q} (t - a_i)}.$$

Il existe des constantes $\gamma_1, \dots, \gamma_u, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_{p+1}, \dots, \beta_{p+q}$ tels que :

$$\frac{1}{t^u \prod_{i=1}^{p+q} (t - a_i)} = \sum_{i=1}^u \frac{\gamma_i}{t^i} + \sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i}{t - a_i} + \sum_{i=p+1}^{p+q} \frac{\beta_i}{t - a_i}. \quad (3.33)$$

Ainsi, on obtient :

$$\int_{S^1} \frac{dt}{t^u \prod_{i=1}^{p+q} (t - a_i)} = \sum_{i=1}^u \gamma_i \int_{S^1} \frac{dt}{t^i} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \int_{S^1} \frac{dt}{t - a_i} + \sum_{i=p+1}^{p+q} \beta_i \int_{S^1} \frac{dt}{t - a_i}$$

Ainsi, on obtient :

$$\int_{S^1} \frac{dt}{t^u \prod_{i=1}^{p+q} (t - a_i)} = 2i\pi\gamma_1 + 2i\pi \sum_{j=1}^p \alpha_j.$$

En multipliant l'égalité 3.33 par t et en faisant tendre t vers l'infini, on obtient :

$$0 = \gamma_1 + \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} \beta_i.$$

On obtient alors :

$$\int_{S^1} \frac{dt}{t^u \prod_{i=1}^{p+q} (t - a_i)} = -2i\pi \sum_{j=p+1}^{p+q} \beta_j.$$

Comme précédemment, vu que $a_h \neq a_u, h \neq u$, alors, on obtient directement que pour tout $i \in [[p+1, p+q]]$, on a :

$$\beta_i = \frac{a_i^k}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+q} (a_i - a_j)}.$$

D'où le résultat annoncé. □

Remarque 3.5.8. En utilisant les notations de l'équation (3.26) pour λ , l'équation (3.29) se réécrit comme suit :

$$\Theta_{\Pi'}(\tilde{t}) = K(t') \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \sum_{w \in \mathcal{W}} \text{sgn}(w) \int_{S^1} \dots \int_{S^1} \frac{\prod_{b=1}^m t_b^{p-m-1} \prod_{a=1}^m t_{w(a)}^a \prod_{a=1}^r t_{w(m+1-a)}^{y_a} \prod_{a=1}^s t_{w(a)}^{-\mu_a} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (t_i - t_j)}{\prod_{a=1}^p \prod_{b=1}^m (t_b - r t'_a) \prod_{a=p+1}^{p+q} \prod_{b=1}^m \left(t_b - \frac{1}{r t'_a}\right)} \prod_{k=1}^m dt_k \quad (3.34)$$

Exemple 3.5.9. 1. Commençons par le cas où les deux membres sont compacts ($G = \text{U}(2, \mathbb{C}), G' = \text{U}(0, 2, \mathbb{C})$). Soit $\Theta_{\Pi'}$ le caractère de la représentation Π' de $\widetilde{\text{U}(2, \mathbb{C})}$ associée à $\Pi \in \mathcal{R}_\omega(\widetilde{\text{U}(2, \mathbb{C})})$. On va calculer ce caractère de deux manières différentes dans le cas $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$. Tout d'abord, d'après la formule de Weyl (équation (2.11)), on a :

$$\Theta_{\Pi'}(\tilde{t}) = \sum_{w \in \mathcal{W}(\text{u}(2, \mathbb{C}))} \frac{\text{sgn}(w) \widetilde{\xi}_{\lambda+\rho}(\tilde{t})}{\prod_{\alpha \in \Phi^+(\text{u}(2, \mathbb{C}))} \widetilde{\xi}_{\frac{\alpha}{2}}(\tilde{t}) - \widetilde{\xi}_{-\frac{\alpha}{2}}(\tilde{t})} = \frac{t_1^{\frac{3}{2}+\lambda_1} t_2^{\frac{1}{2}} - t_1^{\frac{1}{2}} t_2^{\frac{3}{2}+\lambda_1}}{t_1^{\frac{1}{2}} t_2^{-\frac{1}{2}} - t_1^{-\frac{1}{2}} t_2^{\frac{1}{2}}}$$

ce qui se réécrit comme suit :

$$\Theta_{\Pi'}(\tilde{t}) = \frac{t_1^{2+\lambda_1} t_2 - t_1 t_2^{2+\lambda_1}}{t_1 - t_2} \quad (3.35)$$

A présent, d'après l'annexe C, on obtient que dans ce cas, le caractère est donné par la formule suivante :

$$\Theta_{\Pi'}(\tilde{t}) = t_1 t_2 \left(\sum_{i=1}^2 \frac{t_i^{-1}}{\prod_{h \neq i} (t_h - t_i)} \right) \left(\sum_{i=1}^2 \frac{t_i^{-1-\lambda_1}}{\prod_{h \neq i} (t_h - t_i)} \right)$$

Or, on a

$$\sum_{i=1}^2 \frac{t_i^{-1}}{\prod_{h \neq i} (t_h - t_i)} = \frac{t_1^{-1} - t_2^{-1}}{t_1 - t_2} = -(t_1 t_2)^{-1}$$

Ainsi, on a :

$$\Theta_{\Pi'}(\tilde{t}) = \sum_{i=1}^2 \frac{t_i^{-1-\lambda_1}}{\prod_{h \neq i} (t_h - t_i)} = -\frac{t_1^{-1-\lambda_1} - t_2^{-1-\lambda_1}}{t_1 - t_2} \quad (3.36)$$

Or, l'équation (3.35) au point \tilde{t}^{-1} donne :

$$\frac{t_1^{-2-\lambda_1} t_2^{-1} - t_1^{-1} t_2^{-2-\lambda_1}}{t_1^{-1} - t_2^{-1}} = \frac{t_1^{-2-\lambda_1} t_2^{-1} - t_1^{-1} t_2^{-2-\lambda_1}}{t_1^{-1} t_2^{-1} (t_2 - t_1)} = -\frac{t_1^{-1-\lambda_1} - t_2^{-1-\lambda_1}}{t_1 - t_2}$$

Ainsi, la formule de l'équation (3.36) nous donne le caractère de la représentation contragrédiente de Π' .

2. En utilisant [26], si $m \geq p + q$, alors Π' est dans la série discrète de $U(p, q, \mathbb{C})$. Considérons alors le cas ($G = U(2, \mathbb{C}), G' = U(1, 1, \mathbb{C})$) et soit λ défini par $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 = 0$. D'après l'annexe C, cas 4, on obtient, pour tout $\tilde{t} \in \tilde{T}'$

$$\Theta_{\Pi'}(\tilde{t}') = \frac{t_1 t_2 t_2^{-1-\lambda_1}}{t_2 - t_1} = \frac{t_1 t_2^{-\lambda_1}}{t_2 - t_1}$$

A présent, vérifions cela à l'aide la formule de l'équation (2.17). En utilisant [34], le poids λ' de la représentation Π' est donné par $\lambda' = -e_1 + (1 + \lambda_1)e_2$. D'après l'équation (2.13), on a :

$$\Theta_{\Pi'}(\tilde{t}) = \frac{t_1^{-\frac{1}{2}} t_2^{\frac{1}{2} + \lambda_1}}{t_1^{\frac{1}{2}} t_2^{-\frac{1}{2}} - t_1^{-\frac{1}{2}} t_2^{\frac{1}{2}}} = \frac{t_2^{1+\lambda_1}}{t_1 - t_2}$$

ce qui donne, en appliquant cette dernière au point \tilde{t}^{-1} :

$$\Theta_{\Pi'}(\tilde{t}^{-1}) = \frac{t_2^{-1-\lambda_1}}{t_1^{-1} - t_2^{-1}} = \frac{t_1 t_2^{-\lambda_1}}{t_2 - t_1}.$$

On trouve donc le caractère de la représentation contragrédiente de Π' , comme dans l'exemple précédent.

3. Considérons le cas ($G = U(2, \mathbb{C}), G' = U(2, 2, \mathbb{C})$). Considérons le poids $\lambda = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, avec $\lambda_1, \lambda_2 > 2$. D'après C, le caractère $\Theta_{\Pi'}$ est donné par :

$$\Theta_{\Pi'}(\tilde{t}') = -t_1 t_2 t_3 t_4 \frac{t_3^{-\lambda_1} t_4^{1-\lambda_2} - t_3^{1-\lambda_2} t_4^{-\lambda_1}}{\prod_{\substack{1 \leq h < k \leq 4 \\ (h,k) \neq (1,2)}} (t_h - t_k)} \quad (\tilde{t}' \in \tilde{T}'^{\text{reg}}) \quad (3.37)$$

En reprenant les notations de la section 2.4.2, on a

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi^+(\mathfrak{f}, \mathfrak{t})} (e^{\frac{\alpha(x)}{2}} - e^{-\frac{\alpha(x)}{2}}) = (t_1 t_2 t_3 t_4)^{-1} (t_1 - t_3)(t_1 - t_4)(t_2 - t_3)(t_2 - t_4)$$

On a alors :

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi^+(\mathfrak{f}, \mathfrak{t})} (e^{\frac{\alpha(x)}{2}} - e^{-\frac{\alpha(x)}{2}}) \Theta_{\Pi'}(\widetilde{\exp}(x)) = \frac{t_3^{-\lambda_1} t_4^{1-\lambda_2} - t_3^{1-\lambda_2} t_4^{-\lambda_1}}{t_4 - t_3} \quad (3.38)$$

Comparons à présent avec la formule donnée dans l'équation (2.17). D'après [34], $\lambda' = -e_1 - e_2 + (1 + \lambda_1)e_3 + (1 + \lambda_2)e_4$. En particulier, on a :

$$\lambda' + \rho = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + \left(\frac{1}{2} + \lambda_1\right)e_3 + \left(-\frac{1}{2} + \lambda_2\right)e_4$$

On a $\mathscr{W}_{\lambda' + \rho} = \{Id\}$. Ainsi, le deuxième membre de (2.17) se réduit à $\Theta_{\mathfrak{f}}(\lambda' + \rho - \rho(\mathfrak{f}))$.

Puisque

$$\lambda' + \rho - \rho(\mathfrak{f}) = \lambda' + \rho - \left(\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_4\right) = \lambda_1 e_3 + \lambda_2 e_4$$

$\Theta_{\mathfrak{t}}(\lambda' + \rho - \rho(\mathfrak{f}))$ est le caractère du produit tensoriel de la représentation triviale de $U(2, \mathbb{C})$ (correspondant aux deux premiers indices 1 et 2) et de la représentation de $U(2, \mathbb{C})$ (correspondant aux derniers indices 3 et 4) de plus haut poids $\lambda_{U(2)} = \lambda_1 e_3 + \lambda_2 e_4$. On obtient

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mathfrak{t}}(\lambda' + \rho - \rho(\mathfrak{f})) &= \Theta_{U(2)}(\lambda_{U(2)}) = \frac{\sum_{w \in \mathcal{S}_2} \text{sgn}(w) e^{w(\lambda_{U(2)} + \rho(U(2)))}}{t_3^{\frac{1}{2}} t_4^{-\frac{1}{2}} - t_3^{-\frac{1}{2}} t_4^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{t_3^{\lambda_1 + \frac{1}{2}} t_4^{\lambda_2 - \frac{1}{2}} - t_3^{\lambda_2 - \frac{1}{2}} t_4^{\lambda_1 + \frac{1}{2}}}{(t_3 t_4)^{-\frac{1}{2}} (t_3 - t_4)} \\
&= \frac{t_3^{\lambda_1 + 1} t_4^{\lambda_2} - t_3^{\lambda_2} t_4^{\lambda_1 + 1}}{t_3 - t_4} \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Si on applique (3.38) en \tilde{t}^{-1} au lieu de \tilde{t} , on trouve

$$\frac{t_3^{\lambda_1} t_4^{-1 + \lambda_2} - t_3^{-1 + \lambda_2} t_4^{\lambda_1}}{t_3^{-1} - t_4^{-1}} = \frac{t_3^{1 + \lambda_1} t_4^{\lambda_2} - t_3^{\lambda_2} t_4^{\lambda_1 + 1}}{t_4 - t_3}$$

Notre formule coïncide donc avec celle de Enright si on remplace Π' par sa contragrédiente.

Remarque 3.5.10. Comme on l'a observé dans tous les exemples, la représentation Π' obtenue par la méthode développée dans ce chapitre est la contragrédiente de la représentation à laquelle on s'attend dans la correspondance des plus haut poids dans la dualité de Howe. Ceci peut être expliqué par la façon avec laquelle G' a été plongé dans $\text{Sp}(W)$.

Chapitre 4

Une formule du caractère via la distribution d'entrelacement

4.1 La distribution d'entrelacement

Commençons tout d'abord par définir la distribution d'entrelacement introduite dans [33]. Pour cela, fixons (G, G') une paire duale réductive dans $\mathrm{Sp}(W)$, et soient Π et Π' deux éléments de $\mathcal{R}_\omega(\tilde{G})$ et $\mathcal{R}_\omega(\tilde{G}')$ respectivement. D'après le théorème 2.5.2, il existe un sous-espace fermé \mathcal{N} de $S(X)$ tel que $\Pi \otimes \Pi' \approx S(X)/\mathcal{N}$. Notons Π^* la représentation contragrédiente de Π . On a alors

$$(\Pi \otimes \Pi')^* \approx (S(X)/\mathcal{N})^* \approx \mathrm{Ann}(\mathcal{N}) = \{f \in S^*(X); f(v) = 0, (\forall v \in \mathcal{N})\} \subseteq S^*(X)$$

Quitte à prendre Π^* à la place de Π initialement, on peut réaliser $\Pi \otimes \Pi'$ dans $S^*(X)$. Ainsi, d'après le théorème 2.5.2, à une constante près, il existe un unique élément $\Gamma \in \mathrm{Hom}(S(X), S^*(X))$ tel que

$$\Gamma \circ \omega(\tilde{g}\tilde{g}') = \Pi(\tilde{g}) \otimes \Pi'(\tilde{g}') \circ \Gamma \quad (\tilde{g} \in \tilde{G}, \tilde{g}' \in \tilde{G}')$$

En utilisant les équations 2.20 et 2.21, il existe un unique élément $f_{\Pi \otimes \Pi'} \in S^*(W)$ tel que $\Gamma = \mathrm{Op} \circ \mathcal{K}(f_{\Pi \otimes \Pi'})$. La distribution $f_{\Pi \otimes \Pi'}$ est appelée distribution d'entrelacement dans [33].

Comme démontré dans [33], lemme 5.4, page 71, dans le cas où G est compact, la distribution d'entrelacement $f_{\Pi \otimes \Pi'}$ est donnée par la formule suivante :

$$f_{\Pi \otimes \Pi'} = \int_{\tilde{G}} \overline{\Theta_\Pi(\tilde{g})} T(\tilde{g}) d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g}) \quad (4.1)$$

Supposons à présent G compact. On définit $\tau_{g'}$ l'application de W dans g'^* par

$$\tau_{g'}(w)(x') = \frac{1}{4} \langle x'(w), w \rangle, \quad (w \in W, x' \in g').$$

Le pullback de $\tau_{g'}$, de $S(g'^*)$ dans $S(W)$, et donné par $\psi \rightarrow \psi \circ \tau_{g'}$, est bien défini et continu. On obtient alors par dualisation l'application $(\tau_{g'})_*$, de $S^*(W)$ dans $S^*(g'^*)$, définie comme suit :

$$(\tau_{g'})_*(f)(\psi) = f(\psi \circ \tau_{g'}), \quad (f \in S^*(W), \psi \in S(g'^*)).$$

De nouveau, soit $\tilde{c} : \mathfrak{sp}(W) \rightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}(W)}$ un relèvement fixé de $c : \mathfrak{sp}(W) \rightarrow \mathrm{Sp}(W)$. Comme défini dans [33], équation (3.10), notons $j_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\int_{\tilde{G}} \Psi(\tilde{g}) d\mu_{\tilde{G}}(\tilde{g}) = \int_{\mathfrak{g}} \Psi(\tilde{c}(x)) j_{\mathfrak{g}}(x) dx$$

pour toute fonction $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\tilde{G})$ dont le support est contenu dans l'image de \tilde{c} . Notons $\tilde{c}_- : \mathfrak{sp}(W) \rightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}(W)}$ l'application définie par :

$$\tilde{c}_-(x) = \tilde{c}(x)\tilde{c}(0)^{-1} \quad (x \in \mathfrak{sp}(W)).$$

Donc, $\tilde{c}_-(0) = 1$.

Rappel 4.1.1 ([16], théorème 6.1.2). Soit f une application de X_1 dans X_2 (deux ouverts de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m respectivement) \mathcal{C}^∞ telle que $f'(x)$ est surjective pour tout x dans X_1 . Alors, il existe une unique application f^* de $\mathcal{D}'(X_2) \rightarrow \mathcal{D}'(X_1)$ telle que $f^*u = u \circ f$ pour tout $u \in \mathcal{C}_0(X_2)$.

Notons de nouveau $\Theta_{\Pi'} \in \mathcal{D}'(\tilde{G}')$ le caractère de $\Pi' \in \mathcal{R}_\omega(\tilde{G}')$. Notons $\mathcal{F} : \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \rightarrow \mathrm{S}(\mathfrak{g}')$ la transformée de Fourier définie par :

$$\mathcal{F}(\psi)(x) = \int_{\mathfrak{g}^*} \psi(\xi) \chi(\xi(x)) \quad (\psi \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*), x \in \mathfrak{g}')$$

et soit $\mathcal{F}^* : \mathrm{S}^*(\mathfrak{g}') \rightarrow \mathrm{S}^*(\mathfrak{g}^*)$ l'application duale. Soit $\tilde{c}_-^* : \mathcal{D}'(\widetilde{\mathrm{Sp}^c(W)}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathfrak{sp}^c(W))$ le pullback de \tilde{c}_- . Ainsi, $\tilde{c}_-^* \Theta_{\Pi'} \in \mathcal{D}'(\mathfrak{sp}^c(W))$.

Théorème 4.1.2 ([33], théorème 6.7, page 81). *Pour toute fonction φ dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^c)$, on a :*

$$\frac{1}{\mathrm{ch}_{\mathfrak{g}'}} \tilde{c}_-^* \Theta_{\Pi'}(\varphi) = K \mathcal{F}^*((\tau_{\mathfrak{g}'})_*(f_{\Pi \otimes \Pi'}))(\varphi)$$

où $\mathrm{ch}_{\mathfrak{g}'}(x') = |\det_{\mathbb{R}}(1 - x')|^{\frac{d'}{2}}$, avec $d' = \dim_{\mathbb{D}}(V')$, $x' \in \mathfrak{g}'$, et K une constante.

Comme vu dans le lemme (3.3.1), on a

$$\Theta_{\Pi'}(\Psi) = \mathrm{tr}(\omega(\overline{\Theta_{\Pi}})\omega(\Psi))$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\tilde{G}')$. Donc,

$$\begin{aligned} \Theta_{\Pi'}(\Psi) &= \mathrm{tr}(\omega(\overline{\Theta_{\Pi}})\omega(\Psi)) = \mathrm{tr}(\mathrm{Op} \circ \mathcal{H}(T(\overline{\Theta_{\Pi}})) \circ \mathrm{Op} \circ \mathcal{H}(T(\Psi))) \\ &= T(\overline{\Theta_{\Pi}}) \natural T(\Psi)(0) = \int_W T(\overline{\Theta_{\Pi}})(w) T(\Psi)(-w) dw \\ &= \int_W T(\overline{\Theta_{\Pi}})(w) T(\Psi)(w) dw \end{aligned} \quad (4.2)$$

où la dernière égalité est justifiée car les gaussiennes sont paires. On remarque que les deux dernières équations sont formelles, étant donnée que $T(\overline{\Theta_{\Pi}})$ est une distribution, et pas nécessairement une fonction. Toutefois, on a bien que $T(\Psi) \in \mathrm{S}(W)$. La formule (4.2) est le point clé pour démontrer le théorème 4.1.2. D'après (4.1), on obtient :

$$\Theta_{\Pi'}(\Psi) = \int_W T(\overline{\Theta_{\Pi}})(w) T(\Psi)(w) dw = f_{\Pi \otimes \Pi'}(T(\Psi)) \quad (4.3)$$

4.2 Une formule de Rossman et Duflo-Vergne

Nous rappelons ici un résultat de Duflo-Vergne ([8] concernant la transformée de Fourier d'une orbite co-adjointe G_λ , amélioration d'un résultat de Rossmann ([37]), car λ ici n'est pas nécessairement régulier. Considérons G un groupe de Lie semi-simple connexe réel et K un sous-groupe maximal compact de G tel que $\text{rk}(K) = \text{rk}(G)$. Soit $T \subseteq K \subseteq G$ un tore maximal de G . Notons Ad^* la représentation co-adjointe de G , c'est-à-dire $\text{Ad}^* : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}^*)$ donnée par :

$$\text{Ad}^*(g)(f)(x) = f(\text{Ad}(g)(x)) \quad (f \in \mathfrak{g}^*, x \in \mathfrak{g}, g \in G)$$

où Ad est la représentation définie dans l'équation (2.8).

Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire, symétrique, non-dégénérée et G -invariante sur \mathfrak{g} . Via la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on peut identifier \mathfrak{h} avec \mathfrak{h}^* . Plus précisément, pour tout $\lambda, X \in \mathfrak{t}$, notons

$$\lambda(X) = \langle \lambda, X \rangle$$

Pour toute forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, notons $G_\lambda = \text{Ad}^*(G)(\lambda)$ l'orbite associée à λ via Ad^* . Pour plus de détails concernant les orbites co-adjointes, et en particulier leurs structures de variétés sympléctiques, on pourra consulter [6]. De plus, notons $d\beta_\lambda$ la mesure de Liouville sur G_λ . Comme dans [3], chapitre 7, section 5, on définit la transformée de Fourier de l'orbite G_λ , notée F_{G_λ} , par

$$F_{G_\lambda}(X) = \int_{G_\lambda} e^{i\langle f, X \rangle} d\beta_\lambda \quad (X \in \mathfrak{g}). \quad (4.4)$$

Notons $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de \mathfrak{g} avec $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie du tore T (voir [21]) et soit $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{t}_\mathbb{C})$ le système de racine associé à \mathfrak{t} . Considérons $\Phi_\lambda = \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{t}_\mathbb{C}); (\mathfrak{g}_\mathbb{C})_\alpha \subseteq \mathfrak{p}_\mathbb{C}\}$ et soit $P_\lambda = \{\alpha \in \Phi; \langle \lambda, iH_\alpha \rangle > 0\}$.

D'après [4], page 170, la mesure de Liouville est donnée à une constante près par

$$F_{G_\lambda}(X) = \prod_{\alpha \in P_\lambda} \langle i\alpha, \lambda \rangle \int_{G/G^\lambda} e^{i\langle g\lambda, X \rangle} d(gG^\lambda) \quad (4.5)$$

où G^λ est le stabilisateur de λ sous l'action de G , c'est-à-dire

$$G^\lambda = \{g \in G; \text{Ad}^*(g)(\lambda) = \lambda\}$$

En utilisant l'équation (4.5) et [8], chapitre 7, section 5, théorème 7.29, page 232, on obtient :

Théorème 4.2.1 (Formule de Duflo-Vergne).

$$\prod_{\alpha \in P_\lambda} \langle i\alpha, \lambda \rangle \int_{G/G^\lambda} e^{i\langle g\lambda, X \rangle} d\bar{g} = (-1)^{n(\lambda)} \sum_{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) / \mathcal{W}(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})^\lambda} \frac{e^{i\langle w\lambda, X \rangle}}{\prod_{\alpha \in P_\lambda} \langle w\alpha, X \rangle} \quad (4.6)$$

où $n(\lambda)$ correspond au nombre de racines non compactes de P_λ et $\mathcal{W}(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})^\lambda$ le stabilisateur de λ sous l'action du groupe de Weyl compact, c'est-à-dire

$$\mathcal{W}(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})^\lambda = \{\sigma \in \mathcal{W}(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}); \sigma(\lambda) = \lambda\}.$$

Fixons $(., .)$ une forme bilinéaire, symétrique, non-dégénérée et invariante sur \mathfrak{g} . On identifie $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ via la forme $(., .)$. L'équation (4.6) se réécrit alors comme suit :

$$\prod_{\alpha \in P_{\lambda}} i\alpha(t) \int_{G/G'} e^{i(gt,s)} d\bar{g} = (-1)^{n(\lambda)} \sum_{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) / \mathcal{W}(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})'} \frac{e^{(s, wt)}}{\prod_{\alpha \in P_t} w\alpha(s)} \quad (4.7)$$

où $s \in \mathfrak{t}^{\text{reg}}$, $t \in \mathfrak{t}$ et $P_t = \{\alpha \in \Phi \mid i\alpha(t) > 0\}$.

4.3 Le cas $(G = \text{U}(n, \mathbb{C}), G' = \text{U}(p, q, \mathbb{C}))$, où $1 \leq n \leq p + q$

Intéressons-nous à la paire duale $(G, G') = (\text{U}(n, \mathbb{C}), \text{U}(p, q, \mathbb{C}))$. Posons $V_{\bar{0}} = \mathbb{C}^n$ muni de la forme $(., .)_0$ définie par :

$$(u_0, v_0)_0 = \bar{v}_0^t u_0$$

et soit $V_{\bar{1}} = \mathbb{C}^{p+q}$ muni de la forme suivante :

$$(u_1, v_1)_1 = \bar{v}_1^t iI_{p,q} u_1.$$

Posons $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ muni de

$$\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \right) = \bar{v}_0^t u_0 + \bar{v}_1^t iI_{p,q} u_1.$$

Notons (S, \mathfrak{s}) le supergroupe associé à la paire duale $(\text{U}(n, \mathbb{C}), \text{U}(p, q, \mathbb{C}))$ (voir la section 2.6). On a :

$$\mathfrak{s}_{\bar{1}} = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}; (Xu, v) = (u, sXv) (\forall u, v \in V) \right\}$$

où $s \in \text{End}(V)_{\bar{0}}$ est défini par $s(v_0 + v_1) = v_0 - v_1$.

Lemme 4.3.1.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{s}_{\bar{1}} \Leftrightarrow C = -iI_{p,q} \bar{B}^t.$$

Démonstration. Pour tous $u_0, v_0 \in V_{\bar{0}}, u_1, v_1 \in V_{\bar{1}}$, on a :

$$\left(X \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \right) = \bar{v}_0^t B u_1 + \bar{v}_1^t iI_{p,q} C u_0$$

et

$$\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, sX \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \right) = \bar{v}_1^t \bar{B}^t u_0 - \bar{v}_0^t \bar{C}^t iI_{p,q} u_1.$$

En prenant $v_0 = 0$, on obtient l'égalité

$$\bar{v}_1^t iI_{p,q} C u_0 = \bar{v}_1^t \bar{B}^t u_0.$$

Ainsi, $C = -iI_{p,q} \bar{B}^t$.

□

Comme démontré dans [28], section 4, et rappelé dans [32], section 4, il existe dans ce cas $\min(p, n) - \max(n - q, 0) + 1$ sous-espaces de Cartan dans $\mathfrak{s}_{\bar{1}}$ (voir la définition 2.6.9). Nous allons les caractériser ici. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\max(n - q, 0) \leq m \leq \min(p, n)$ et fixons

$$u = e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Pour tout $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$, on définit :

$$B_{(m)} = \text{diag}(uw_1, \dots, uw_m) \in \mathbf{M}(m, \mathbb{C})$$

$$B_{[n-m]} = \text{diag}(\bar{u}w_{m+1}, \dots, \bar{u}w_n) \in \mathbf{M}(n - m, \mathbb{C})$$

et soit B la matrice de $\mathbf{M}(n \times (p + q), \mathbb{C})$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} B_{(m)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{[n-m]} \end{pmatrix}$$

On définit la matrice X de $\mathfrak{s}_{\bar{1}}$ comme suit

$$X(w_1, \dots, w_n) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -iI_{p,q}\bar{B}^t & 0 \end{pmatrix}$$

Notons alors $\mathfrak{h}_{\bar{1},m}$ l'ensemble formé par les matrices $X(w_1, \dots, w_n)$, $(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Plus précisément, notons

$$u_{j,m} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \text{diag}(0, \dots, 0, u, 0, \dots, 0) & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } j = 1, \dots, m \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{diag}(0, \dots, 0, \bar{u}, 0, \dots, 0) \end{pmatrix} & \text{si } j = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

En d'autres termes, on a :

$$\mathfrak{h}_{\bar{1},m} = \sum_{j=1}^n \mathbb{R}u_{j,m}$$

Pour tout $B \in \mathbf{M}(n \times (p + q), \mathbb{C})$, notons B^* la matrice de $\mathbf{M}((p + q) \times n, \mathbb{C})$ définie par $B^* = -iI_{p,q}\bar{B}^t$. Pour tout $X = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{s}_{\bar{1}}$, notons $\tau(X) = X^2_{|_{\mathfrak{v}_0}} \in \mathfrak{g}$ et $\tau'_{|_{\mathfrak{v}_1}}(X) = X^2 \in \mathfrak{g}'$. En particulier,

$$\tau\left(\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}\right) = BB^* \quad \tau'\left(\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}\right) = B^*B.$$

En particulier, pour tout $w = \sum_{j=1}^n w_j u_{j,m}$, on obtient :

$$\tau(w) = -i \text{diag}(w_1^2, \dots, w_m^2, -w_{m+1}^2, \dots, -w_n^2)$$

et

$$\tau'(w) = -i \begin{pmatrix} \text{diag}(w_1^2, \dots, w_m^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{diag}(-w_{m+1}^2, \dots, -w_n^2) \end{pmatrix}.$$

Notons J_j la matrice définie par :

$$J_j = \text{diag}(0, \dots, 0, -i, 0, \dots, 0)$$

où $-i$ appartient à la j -ème ligne. En notant \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' les algèbres de Cartan diagonales de \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' respectivement, on obtient l'injection suivante :

$$\mathfrak{h} \ni \sum_{i=1}^n y_i J_i \rightarrow \sum_{i=1}^m y_i J_i + \sum_{i=m+1}^{p+q} y_i J_{p+q-n+i} \in \mathfrak{h}' \quad (4.8)$$

Notons

$$\mathfrak{h}'(m) = \sum_{i=1}^m \mathbb{R}J_i + \sum_{i=m+1}^n \mathbb{R}J_{p+q-n+i} \subseteq \mathfrak{h}'$$

Lemme 4.3.2. Notons $\mathfrak{z}'(m)$ le centralisateur de $\mathfrak{h}'(m)$ dans \mathfrak{g}' , c'est-à-dire :

$$\mathfrak{z}'(m) = \{x \in \mathfrak{g}' ; [x, y] = 0 (\forall y \in \mathfrak{h}'(m))\}$$

et soit $Z'(m)$ le centralisateur de $\mathfrak{h}'(m)$ dans G' . On a :

$$Z'(m) = \left\{ g' \in G' ; g' = \begin{pmatrix} \text{diag}(d_1, \dots, d_m) & 0 & 0 \\ 0 & X' & 0 \\ 0 & 0 & \text{diag}(d_{m+1}, \dots, d_n) \end{pmatrix}, d_i \in \mathbb{C}, X' \in \text{GL}(p+q-n, \mathbb{C}) \right\}$$

A présent, on va fixer quelques notations. Pour tout $y = \sum_{i=1}^n y_i J_i \in \mathfrak{h}$, notons $\mathscr{W}(G, \mathfrak{h})$ le groupe qui permute les $y_i, 1 \leq i \leq n$. Pour tout $y' = \sum_{i=1}^{p+q} y'_i J_i \in \mathfrak{h}'$, notons $\mathscr{W}(G_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}')$ le groupe qui permute les $y'_i, 1 \leq i \leq p+q$ et soit $\mathscr{W}(K', \mathfrak{h}')$ le groupe permutant séparément $y'_i, 1 \leq i \leq p$ et $y'_i, p+1 \leq i \leq p+q$. Pour tout $m \in [|\max(n-q, 0), \min(p, n)|]$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i J_i \in \mathfrak{h}$, notons $\mathscr{W}(G, \mathfrak{h})_m$ le sous-groupe de $\mathscr{W}(G, \mathfrak{h})$ qui permute séparément $y_i, 1 \leq i \leq m$ et $y_i, m+1 \leq i \leq n$, et pour tout $y' \in \mathfrak{h}'$, notons $\mathscr{W}(K', \mathfrak{h}')_m$ le sous-groupe de $\mathscr{W}(K', \mathfrak{h}')$ qui permute séparément $y'_i, 1 \leq i \leq m$ et $y'_{p+q+m-n+i}, 1 \leq i \leq n-m$.

Notons :

$$\pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{z}'(m)} = \prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha_{\mathfrak{h}'(m)} \neq 0}} \alpha \quad (4.9)$$

et

$$\pi_{\mathfrak{z}'(m)/\mathfrak{h}'} = \prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha_{\mathfrak{h}'(m)} = 0}} \alpha \quad (4.10)$$

Pour conclure, pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$ ou \mathfrak{g}' , notons B la forme bilinéaire définie par

$$B(x, y) = \operatorname{Re} \operatorname{tr}(xy) \quad (4.11)$$

Notons que la forme B est G (resp. G' -invariante) et non-dégénérée sur \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' . D'après [32], équation (181), on a :

$$B(x, y) = -\frac{\pi}{2} \sum_j x_j y_j$$

En gardant les notations de [32], notons G^\sharp le revêtement de \tilde{G} défini dans la section 2. Notons H^\sharp l'image réciproque de \tilde{H} via ce revêtement, et soit H_0^\sharp la composante connexe en l'élément neutre de H^\sharp . Comme mentionné dans [32], pour tout $\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, il existe un caractère multiplicatif $\xi_\alpha^\sharp : H_0^\sharp \rightarrow \mathbb{C}$ tel que sa différentielle soit exactement la forme linéaire $\frac{\alpha}{2}$, c'est-à-dire que la forme linéaire $\frac{\alpha}{2}$ est analytiquement intégrale pour H^\sharp . Notons $c_-^\sharp : \mathfrak{h} \rightarrow H_0^\sharp$ un relèvement de $\tilde{c}_- : \mathfrak{h} \rightarrow \tilde{H}$ associé au revêtement $G^\sharp \rightarrow \tilde{G}$. Pour tout $x \in \mathfrak{h}$ et toute forme $\mu \in \mathfrak{h}$ analytiquement intégrale pour G^\sharp , définissons $c_-(x)^\mu$ la quantité suivante :

$$c_-(x)^\mu = \xi_\mu^\sharp(c_-^\sharp(x)) \quad (4.12)$$

D'après [32], corollaire 38, page 47, $T(\overline{\Theta_\pi})(\phi)$ est dans ce cas donné par :

$$T(\overline{\Theta_\pi})(\phi) = \int_{\mathfrak{h}} c_-(x)^{-\mu'} \operatorname{ch}(x)^{p+q-n-1} \int_{\mathfrak{h} \cap \tau(W)} e^{i\pi B(x,y)} f_\phi(y) dy dx \quad (\phi \in \mathcal{S}(W)) \quad (4.13)$$

où $\mu = \nu + \rho$, avec ν le plus haut poids de π , μ' la forme linéaire définie par $\mu'_j = \mu_{n+1-j}$, $1 \leq j \leq n$ (on pourra consulter [36]), et f_ϕ est la fonction définie dans [32], définition 10, page 19, dont on va rappeler la construction à présent.

Pour tout $w \in \mathfrak{h}_{1,m}^{\operatorname{reg}}$, on définit f_ϕ au point $\tau(w)$ comme suit :

$$f_\phi(\tau(w)) = C_{\mathfrak{h}_{1,m}} \pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{z}'(m)}(\tau'(w)) \int_{G'/Z'(m)} \phi(g'w) d(g'Z'(m)) \quad (4.14)$$

où $C_{\mathfrak{h}_{1,m}}$ est une constante de valeur absolue 1 définie dans [32], lemme 8, page 17. Plus précisément, la constante $C_{\mathfrak{h}_{1,m}}$ est définie de manière à ce que l'on ait, pour tout $w \in \mathfrak{h}_{1,m}^{\operatorname{reg}}$ l'inégalité suivante :

$$C_{\mathfrak{h}_{1,m}} \pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{h}'(\tau'(w))} \pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{z}'(m)}(\tau(w)) > 0$$

A priori, la constante dépend de m . Or, pour $w = \sum_{k=1}^n w_k u_{k,m}$, on montre, en utilisant [32], lemme 6, que l'on a

$$\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\tau(w)) \pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{z}'(m)}(\tau'(w)) = \pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\tau(w))^2 \prod_{j=1}^m (iw_j^2)^{p+q-n} \prod_{j=m+1}^n (-iw_j^2)^{p+q-n}$$

Finalement, on obtient :

$$C_{\mathfrak{h}_{1,m}} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} i^{n(p+q-n)}$$

et donc cette constante est indépendante de m .

En vue de sa définition (4.14), f_ϕ a son support dans $\mathfrak{h} \cap \tau(W)$. On peut donc réécrire (4.13) comme

$$T(\overline{\Theta}_\pi)(\phi) = \int_{\mathfrak{h}} c_-(x)^{-\mu'} \operatorname{ch}(x)^{p+q-n-1} \int_{\mathfrak{h}} e^{i\pi B(x,y)} f_\phi(y) dy dx \quad (4.15)$$

On va maintenant appliquer (4.14) à une fonction ϕ spécifique, qui nous permettra d'utiliser le résultat de Duflo-Vergne, équation (4.6).

Le lemme suivant est facile à montrer.

Lemme 4.3.3. *Pour tout régulier $y' \in \mathfrak{h}'(m) \subseteq \mathfrak{h}'$, on a :*

$$Z'(m) = \{g' \in G' ; \operatorname{Ad}(g')y' = y'\}$$

De la même manière, on a :

$$\mathscr{W}(K', \mathfrak{h}')^{y'} = \mathscr{W}(K', \mathfrak{h}')^{\mathfrak{h}'(m)}$$

Théorème 4.3.4. *Pour tout $y \in \mathfrak{h}'(m)^{\operatorname{reg}}$ régulier et $y' \in \mathfrak{h}'^{\operatorname{reg}}$, on a :*

$$\pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{z}'(m)}(y) \int_{G'/Z'(m)} e^{iB(y',g'y)} d(g'Z'(m)) = (-i)^{\frac{1}{2} \dim(\mathfrak{g}'/\mathfrak{z}'(m))} (-1)^{n(\mathfrak{h}'(m))} \sum_{\sigma \in \mathscr{W}(K', \mathfrak{h}')/\mathscr{W}(K', \mathfrak{h}')^{\mathfrak{h}'(m)}} \frac{e^{iB(y',\sigma y)}}{\pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{z}'(m)}(\sigma^{-1}y')} \quad (4.16)$$

où $n(\mathfrak{h}'(m))$ est le nombre de racine positives non compactes qui ne s'annulent pas sur $\mathfrak{h}'(m)$.

Démonstration. De nouveau, notons $P_y = \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}', \mathfrak{t}'); i\alpha(y) > 0\}$, et soit $n(y)$ le nombre de racines non compactes de P_y . D'après la formule (4.6), et en utilisant le lemme 4.3.3

$$\prod_{\alpha \in P_y} i\alpha(y) \int_{G'/Z'(m)} e^{iB(y',g'y)} d(g'Z'(m)) = (-1)^{n(y')} \sum_{\sigma \in \mathscr{W}(K', \mathfrak{h}')/\mathscr{W}(K', \mathfrak{h}')^{\mathfrak{h}'(m)}} \frac{e^{iB(y',\sigma y)}}{\prod_{\alpha \in P_y} \alpha(\sigma^{-1}(y'))}$$

On veut réécrire cette formule en termes du système de racines que l'on a fixé.

Pour tout $\eta \in \mathscr{W}(G, \mathfrak{h})$, on note de nouveau η l'élément de $\mathscr{W}(G'_\mathbb{C}, \mathfrak{h}')$ que l'on obtient lorsque l'on identifie \mathfrak{h} avec $\mathfrak{h}'(m) \subseteq \mathfrak{h}'$ selon (4.8). Il agit donc trivialement sur le complément orthogonal de $\mathfrak{h}'(m)$ dans \mathfrak{h}' . Fixons alors η tel que

$$(\eta y)_1 > \dots > (\eta y)_n$$

Ainsi, on a

$$\prod_{\alpha \in P_{\eta y}} \alpha(y) = \pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{z}'(m)}(y)$$

Or, on a

$$P_{\eta y} = \eta P_y$$

et

$$\prod_{\alpha \in P_{\eta'}} \alpha(y) = \text{sgn}(\eta) \prod_{\alpha \in P_y} \alpha(y)$$

Ainsi,

$$\prod_{\alpha \in P_y} i\alpha(y) = \text{sgn}(\eta) \prod_{\alpha \in P_{\eta'}} i\alpha(y) = i^{\frac{1}{2} \dim(\mathfrak{g}'/\mathfrak{z}'(m))} \pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{z}'(m)}(y)$$

On obtient alors

$$\pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{z}'(m)}(y) \int_{G'/Z'(m)} e^{iB(y',g'y)} d(g'Z'(m)) = (-i)^{\frac{1}{2} \dim(\mathfrak{g}'/\mathfrak{z}'(m))} (-1)^{n(y)} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}(K',\mathfrak{h}')/\mathcal{W}(K',\mathfrak{h}')^{\mathfrak{h}'(m)}} \frac{e^{iB(y',\sigma y)}}{\pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{z}'(m)}(\sigma^{-1}y')}$$

Comme $y \in \mathfrak{h}'(m)^{\text{reg}}$, on a

$$\{\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}'); \alpha(y) \neq 0\} = \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}'); \alpha|_{\mathfrak{h}'(m)} \neq 0\}.$$

De même, si α est tel que $\alpha(y) \neq 0$, alors $-\alpha(y') \neq 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} n(y) &= \#(P_y \cap (\Phi(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}') \setminus \Phi(\mathfrak{f}', \mathfrak{h}')))) = \frac{1}{2} \#(\{\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}'); \alpha(y') \neq 0\} \cap (\Phi(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}') \setminus \Phi(\mathfrak{f}', \mathfrak{h}'))) \\ &= \#(\{\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}'); \alpha|_{\mathfrak{h}'(m)} \neq 0\} \cap (\Phi(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}') \setminus \Phi(\mathfrak{f}', \mathfrak{h}'))) = n(\mathfrak{h}'(m)) \end{aligned}$$

Donc, $(-1)^{n(y)} = (-1)^{n(\mathfrak{h}'(m))}$, d'où le résultat annoncé. □

Remarque 4.3.5. Ici, on a :

$$\begin{aligned} n(\mathfrak{h}'(m)) &= \#\{e_i - e_j; 1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq p+q\} - \#\{e_i - e_j; m+1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq p+q-n+m\} \\ &= pq - (p-m)(q+m-n) \end{aligned}$$

On va maintenant choisir la fonction ϕ dans (4.14). Pour $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(G' \cdot \mathfrak{h}'^{\text{reg}})$, on définit

$$\phi(w) = \int_{\mathfrak{g}'} \chi_{x'}(w) \psi(x') dx' \quad (w \in W). \quad (4.17)$$

Pour tout $y \in \tau(\mathfrak{h}_{\bar{1},m})$, on obtient, d'après la formule d'intégration de Weyl,

$$\begin{aligned} &\pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{z}'(m)}(y) \int_{G'/Z'(m)} \int_{\mathfrak{g}'} e^{iB(y',g'y)} \psi(y') dy' d(g'Z'(m)) \\ &= \frac{1}{|\mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')|} \int_{\mathfrak{h}'} \left(\pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{z}'(m)}(y) \int_{G'/Z'(m)} e^{iB(y',g'y)} d(g'Z'(m)) \right) \psi^{G'/H'}(y') |\pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{h}'}(y')|^2 dy' \end{aligned}$$

où $\psi^{G'/H'} : \mathfrak{h}'^{\text{reg}} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par :

$$\psi^{G'/H'}(y') = \int_{G'/H'} \psi(\text{Ad}(g')(y')) d(g'H'). \quad (4.18)$$

D'après l'équation (4.16), on obtient :

$$\begin{aligned} & \pi_{g'/z'(m)}(y) \int_{G'/Z'(m)} \int_{g'} e^{iB(y',g'y)} \psi(y') dy' d(g'Z'(m)) \\ &= \frac{(-i)^{\frac{1}{2} \dim(g'/z'(m))} (-1)^{n(b'(m))}}{|\mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')|} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')/\mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')^{b'(m)}} \int_{\mathfrak{h}'} \frac{e^{iB(y',\sigma y)}}{\pi_{g'/z'(m)}(\sigma^{-1}y')} \psi^{G'/H'}(y') |\pi_{g'/b'}(y')|^2 dy' \end{aligned}$$

Or,

$$\pi_{g'/z'(m)}(\sigma(y)) = \text{sgn}(\sigma) \pi_{g'/z'(m)}(y) \quad (\sigma \in \mathcal{W}(G, \mathfrak{h}))$$

Par invariance de $\psi^{G'/H'}$ et de la forme $(., .)$ sous l'action de $\mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')$, on obtient l'égalité suivante :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')/\mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')^{b'(m)}} \int_{\mathfrak{h}'} \frac{e^{iB(y',\sigma y)}}{\pi_{g'/z'(m)}(\sigma^{-1}y')} \psi^{G'/H'}(y') |\pi_{g'/b'}(y')|^2 dy' = \frac{|\mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')|}{|\mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')^{b'(m)}|} \int_{\mathfrak{h}'} \frac{e^{iB(y',y)}}{\pi_{g'/z'(m)}(y')} \psi^{G'/H'}(y') |\pi_{g'/b'}(y')|^2 dy'$$

En utilisant

$$|\pi_{g'/b'}(y')|^2 = \pi_{g'/b'}(y') \overline{\pi_{g'/b'}(y')} = \pi_{g'/z'(m)}(y') \overline{\pi_{z'(m)/b'}(y')} \overline{\pi_{g'/b'}(y')}$$

on obtient finalement :

$$f_\phi(y) = C_m (-1)^{n(b'(m))} \int_{\mathfrak{h}'} e^{-inB(y',y)} \pi_{z'(m)/b'}(y') \overline{\pi_{g'/b'}(y')} \psi^{G'/H'}(y') dy' \quad (4.19)$$

avec

$$C_m = \frac{(-1)^{n(n-1)} i^{n(p+q-n)} (-i)^{(p+q)^2 - (p+q-n)^2 - n}}{(p-m)!(q-n+m)!}$$

Notons \mathcal{A}_ψ la fonction sur $\mathfrak{h}'^{\text{reg}}$ définie par :

$$\mathcal{A}_\psi(y) = \pi_{g'/b'}(y) \psi^{G'/H'}(y) \quad (y \in \mathfrak{h}'^{\text{reg}})$$

Remarque 4.3.6. La fonction f_ϕ est la restriction à $\mathfrak{h}'(m)$ de la transformée de Fourier de la fonction

$$C_m (-1)^{n(b'(m))} \pi_{z'(m)/b'} \mathcal{A}_\psi$$

Lemme 4.3.7. Pour tout $\sigma \in \mathcal{W}(G', \mathfrak{h}')_m$ et $y \in \tau'(\mathfrak{h}'_{1,m}^{\text{reg}})$, on a

$$f_\phi(\eta y) = \text{sgn}_{g'/b'}(\eta) f_\phi(y)$$

Avant d'établir une formule explicite du caractère, considérons la distribution

$$\int_{\mathfrak{h}} c_{-}(x)^{-\mu'} \text{ch}(x)^{p+q-n-1} e^{iB(x,y)} dx$$

qui apparaît dans (4.13). D'après [32], lemme 33, équation (161), page 42, on a :

$$c_{-}(x)^{-\mu'} \text{ch}(x)^{p+q-n-1} = \prod_{j=1}^n (1 + ix_j)^{-a_j} (1 - ix_j)^{-b_j}$$

où $a_j = \mu'_j - \frac{p+q-n-1}{2}$ et $b_j = -\mu'_j - \frac{p+q-n-1}{2}$.

Ainsi,

$$\int_{\mathfrak{b}} c_-(x)^{-\mu'} \text{ch}(x')^{p+q-n-1} e^{iB(x,y)} dx = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} (1+ix_j)^{-a_j} (1-ix_j)^{-b_j} e^{-ix_j y_j} dx_j$$

La deuxième membre de (4.15) est une intégrale multiple et chacune des intégrales simples est de la forme :

$$\int_{\mathbb{R}} (1+ix_j)^{-a_j} (1-ix_j)^{-b_j} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\pi x_j y_j} dx_j f(y_j) dy_j \quad (4.20)$$

où $f(y_j) = f_\phi(y_1, \dots, y_j, \dots, y_n)$.

Rappelons alors les idées [32], Appendice C, concernant le calcul de cette intégrale. Commençons par quelques notations. Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, considérons les polynômes de la variable réelle $P_{a,b,2}$ et $P_{a,b,-2}$ définis par :

$$P_{a,b,2}(\xi) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{b-1} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)}{k!(b-1-k)!} 2^{-a-k} \xi^{b-1-k} & \text{si } b \geq 1 \\ 0 & \text{si } b \leq 0 \end{cases}$$

$$P_{a,b,-2}(\xi) = \begin{cases} (-1)^{a+b-1} \sum_{k=0}^{a-1} \frac{b(b+1)\dots(b+k-1)}{k!(a-1-k)!} 2^{-b-k} \xi^{a-1-k} & \text{si } a \geq 1 \\ 0 & \text{si } a \leq 0. \end{cases}$$

Par convention, fixons $a(a+1)\dots(a+k-1) = 1$ pour $k = 0$. Clairement, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$P_{a,b,-2}(\xi) = P_{a,b,2}(-\xi).$$

Posons alors $P_{a,b}$ le polynôme de la variable réel défini par :

$$P_{a,b}(\xi) = 2\pi(P_{a,b,2}(\xi)1_{\mathbb{R}^+}(\xi) + P_{a,b,-2}(\xi)1_{\mathbb{R}^-}(\xi)),$$

où \mathbb{R}^+ est la droite réelle positive, $\mathbb{R}^- = -\mathbb{R}^+$ et 1_A dénote la fonction indicatrice de l'ensemble A . De même, on définit le polynôme $Q_{a,b}$ par :

$$Q_{a,b}(iy) = 2\pi \begin{cases} 0 & \text{si } a+b \geq 1 \\ \sum_{k=b}^{-a} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)}{k!} 2^{-a-k} (1-iy)^{k-b} & \text{si } -a > b-1 \geq 0 \\ \sum_{k=a}^{-b} \frac{b(b+1)\dots(b+k-1)}{k!} 2^{-b-k} (1-iy)^{k-a} & \text{si } -b > a-1 \geq 0 \\ (1+iy)^{-a} (1-iy)^{-b} & \text{si } a \leq 0 \text{ et } b \leq 0. \end{cases}$$

En utilisant [32], appendice C, proposition C.1, page 82, on obtient que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\int_{\mathbb{R}} (1+ix_j)^{-a_j} (1-ix_j)^{-b_j} e^{-ix_j \xi} dx_j = P_{a_j, b_j}(\xi) e^{-|\xi|} + Q_{a_j, b_j}\left(-\frac{d}{d\xi}\right) \delta_0(\xi). \quad (4.21)$$

Avant d'énoncer le théorème principal de ce chapitre, intéressons-nous au support des polynômes P_{a_j, b_j} , $1 \leq j \leq n$. On a

$$a_j = \mu'_j - \frac{p+q-n-1}{2} = \lambda_{n+1-j} + j - p$$

et

$$b_j = -\mu'_j - \frac{p+q-n-1}{2} = -\lambda_{n+1-j} - j - q + n + 1.$$

On a $a_j + b_j = -p - q + n + 1$. Or, $n \leq p + q$, c'est-à-dire $a_j + b_j \leq 1$, et donc, pour tout $j \in [1, n]$, la condition $a_j \geq 1$ et $b_j \geq 1$ est impossible. En particulier, pour $1 \leq j \leq n$, on a les trois cas suivants :

$$\text{supp } P_{a_j, b_j} = \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0} & \text{si et seulement si } \mu'_j \leq -\frac{p+q-n+1}{2} \\ \mathbb{R}_{\leq 0} & \text{si et seulement si } \mu'_j \geq \frac{p+q-n+1}{2} \\ \emptyset & \text{sinon .} \end{cases} \quad (4.22)$$

Plus généralement, on obtient la proposition suivante :

Proposition 4.3.8. *Notons*

$$m_{\min} = \begin{cases} \max\{j \geq 1 ; j \leq -\lambda_{n+1-j} - q + n\} & \text{si } -\lambda_n \geq q + 1 - n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$m_{\max} = \begin{cases} \min\{j \geq 1 ; j \geq -\lambda_{n+1-j} + p + 1\} - 1 & \text{si } -\lambda_n \leq -p \\ n & \text{sinon .} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\text{supp} \int_{\mathfrak{h}} c_-(x)^{-\mu} \text{ch}(x)^{p+q-n-1} e^{iB(x,y)} dx = \bigcap_{m'=m_{\min}}^{m_{\max}} \tau(\mathfrak{h}_{\bar{1}, m'}) \quad (4.23)$$

Remarque 4.3.9 (Remarque avant preuve). De manière équivalente, on peut définir m_{\min} et m_{\max} comme suit :

$$m_{\min} = \begin{cases} \max\{j \geq 1 ; \mu'_j \leq -\frac{1}{2}(p+q-n+1)\} & \text{si } \mu'_1 \leq -\frac{1}{2}(p+q-n+1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$m_{\max} = \begin{cases} \min\{j \geq 1 ; \mu'_j \geq \frac{1}{2}(p+q-n+1)\} - 1 & \text{si } \mu'_n \geq \frac{1}{2}(p+q-n+1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Soit $i > j$, on a

$$\mu'_i - \mu'_j = (\lambda_{n+1-i} - \lambda_{n+1-j}) + (i - j) > 0$$

Ainsi, $(\mu'_i)_i$ est croissante. D'après l'équation (4.22), pour tout $j < m_{\min}$, on a $\text{supp}(P_{a_j, b_j}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$. De même, pour tout $j > m_{\max}$, $\text{supp}(P_{a_j, b_j}) = \mathbb{R}_{\leq 0}$ et si $j \in]m_{\min}, m_{\max}[$, alors $\text{supp}(P_{a_j, b_j}) = \{0\}$. Or, d'après [32], lemme 9 (et aussi équation (69)), on obtient

$$\bigcap_{m'=m_{\min}}^{m_{\max}} \tau(\mathfrak{h}_{\bar{1}, m'}) = \left\{ \sum_{i=1}^n y_i J_i ; y_1, \dots, y_{m_{\min}-1} \geq 0 = y_{m_{\min}} = \dots = y_{m_{\max}} = 0 \geq y_{m_{\max}+1} \dots, y_n \right\}$$

D'où l'égalité annoncée. □

Fixons à présent $m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$ et considérons la décomposition de \mathfrak{h}' suivante

$$\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}'(m) \oplus \mathfrak{h}'(m)^\perp \quad (4.24)$$

où $\mathfrak{h}'(m)^\perp$ est l'orthogonal de $\mathfrak{h}'(m)$ par rapport à la forme bilinéaire (\cdot, \cdot) . Considérons pr la projection de \mathfrak{h}' sur $\mathfrak{h}'(m)$, c'est-à-dire

$$\text{pr}_m(y' + y'') = y' \quad (y' \in \mathfrak{h}'(m), y'' \in \mathfrak{h}'(m)^\perp) \quad (4.25)$$

De plus, considérons $\rho_{\mathfrak{h}'(m)}$ la forme linéaire de \mathfrak{h}'^* définie par

$$\rho_{\mathfrak{h}'(m)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha|_{\mathfrak{h}'(m)} = 0}} \alpha \quad (4.26)$$

Pour finir, considérons $\mathscr{W}(G, \mathfrak{h}, m)$ le sous-groupe de $\mathscr{W}(G, \mathfrak{h})$ défini par

$$\mathscr{W}(G, \mathfrak{h}, m) = \left\{ \eta \in \mathscr{W}(G, \mathfrak{h}) ; \bigcap_{m'=m_{\min}}^{m_{\max}} \tau(\mathfrak{h}_{\bar{1}, m'}) \subseteq \eta \tau(\mathfrak{h}_{\bar{1}, m}) \right\} \quad (4.27)$$

Lemme 4.3.10. *Le groupe $\mathscr{W}(G, \mathfrak{h})_m$ est le sous-groupe de $\mathscr{W}(G, \mathfrak{h})$ formé par les éléments qui laissent $\tau(\mathfrak{h}_{\bar{1}, m})$ invariant. Par conséquent, $\mathscr{W}(G, \mathfrak{h})_m$ est un sous-groupe de $\mathscr{W}(G, \mathfrak{h}, m)$.*

Remarque 4.3.11. D'après (4.22), le support de la distribution

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + ix_j)^{-a_j} (1 - x_j)^{-b_j} e^{-i\pi x_j y_j} dx_j \quad (y_j \in \mathbb{R})$$

est toujours contenu dans une demi-droite $[0, \infty[$ ou $] - \infty, 0]$. Ainsi, l'équation (4.21) peut s'écrire comme suit

$$\int_0^\infty P_{a_j, b_j}(y_j) e^{-\pi y_j} f(y_j) dy_j + Q_{a_j, b_j} \left(\pi \frac{d}{dy_j} \right) f(y_j) \Big|_{y_j=0}$$

ou bien comme

$$\int_{-\infty}^0 P_{a_j, b_j}(y_j) e^{-\pi y_j} f(y_j) dy_j + Q_{a_j, b_j} \left(\pi \frac{d}{dy_j} \right) f(y_j) \Big|_{y_j=0}$$

Les polynômes P_{a_j, b_j} et Q_{a_j, b_j} peuvent être nuls, mais pas simultanément (le caractère étant non nul).

Intéressons-nous maintenant au cas où $P_{a_j, b_j} = 0$. D'après [32], lemme 16, on a

$$\lim_{y_j \rightarrow 0^+} Q_{a_j, b_j} \left(\pi \frac{d}{dy_j} \right) f(y_j) = \lim_{y_j \rightarrow 0^-} Q_{a_j, b_j} \left(\pi \frac{d}{dy_j} \right) f(y_j)$$

Enonçons à présent le théorème central de cette section.

Théorème 4.3.12. *Le caractère $\Theta_{\Pi'}$ de $\Pi' \in \mathcal{R}_\omega(\tilde{G}')$ est donné, à une constante près, par la formule suivante :*

$$\Theta_{\Pi'}(h') = \sum_{\eta \in \mathcal{W}'(G, \mathfrak{h}, m) / \mathcal{W}'(G, \mathfrak{h})_m} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}'(K', \mathfrak{h}')} \frac{\text{sgn}(\eta) \text{pr}_m(\sigma h)^{-\eta^{-1}\mu'}}{\prod_{\substack{\beta > 0 \\ \beta|_{\mathfrak{h}(m)} \neq 0}} ((\sigma h)^{\frac{\beta}{2}} - (\sigma h)^{-\frac{\beta}{2}})} \quad (4.28)$$

Démonstration. D'après les équations (4.15) et (4.23), on a pour tout $m \in [|m_{\min}, m_{\max}|]$ l'égalité

$$T(\overline{\Theta_{\Pi}})(\phi) = \int_{\mathfrak{h}} c_-(x)^{-\mu'} \text{ch}(x)^{p+q-n-1} \int_{\mathcal{W}'(G, \mathfrak{h})\tau(\mathfrak{h}_{\bar{1}, m})} e^{i\pi B(x, y)} f_\phi(y) dy dx \quad (4.29)$$

En effet, pour tout $m \in [|m_{\min}, m_{\max}|]$, on a :

$$\bigcap_{m'=m_{\min}}^{m_{\max}} \tau(\mathfrak{h}_{\bar{1}, m'}) \subseteq \tau(\mathfrak{h}_{\bar{1}, m}) \subseteq \mathcal{W}'(G, \mathfrak{h})\tau(\mathfrak{h}_{\bar{1}, m})$$

On a alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{h}} c_-(x)^{-\mu'} \text{ch}(x)^{p+q-n-1} \int_{\mathcal{W}'(G, \mathfrak{h})\tau(\mathfrak{h}_{\bar{1}, m})} e^{i\pi B(x, y)} f_\phi(y) dy dx \\ &= \sum_{\eta_0 \in \mathcal{W}'(G, \mathfrak{h}, m) / \mathcal{W}'(G, \mathfrak{h})_m} \int_{\mathfrak{h}} c_-(x)^{-\mu'} \text{ch}(x)^{p+q-n-1} \int_{\tau(\mathfrak{h}_{\bar{1}, m})} e^{i\pi B(x, \eta_0(y))} f_\phi(\eta_0(y)) dy dx \\ &= \sum_{\eta_0 \in \mathcal{W}'(G, \mathfrak{h}, m) / \mathcal{W}'(G, \mathfrak{h})_m} \text{sgn}(\eta_0) \int_{\mathfrak{h}} c_-(x)^{-\mu'} \text{ch}(x)^{p+q-n-1} \int_{\tau(\mathfrak{h}_{\bar{1}, m})} e^{i\pi B(\eta_0^{-1}(x), y)} f_\phi(y) dy dx \\ &= \sum_{\eta_0 \in \mathcal{W}'(G, \mathfrak{h}, m) / \mathcal{W}'(G, \mathfrak{h})_m} \text{sgn}(\eta_0) \int_{\mathfrak{h}} c_-(\eta_0(x))^{-\mu'} \text{ch}(\eta_0(x))^{p+q-n-1} \int_{\tau(\mathfrak{h}_{\bar{1}, m})} e^{i\pi B(x, y)} f_\phi(y) dy dx \\ &= \sum_{\eta_0 \in \mathcal{W}'(G, \mathfrak{h}, m) / \mathcal{W}'(G, \mathfrak{h})_m} \text{sgn}(\eta_0) \int_{\mathfrak{h}} c_-(x)^{-\eta_0^{-1}\mu'} \text{ch}(x)^{p+q-n-1} \int_{\tau(\mathfrak{h}_{\bar{1}, m})} e^{i\pi B(x, y)} f_\phi(y) dy dx \quad (4.30) \end{aligned}$$

Au vu du support de f_ϕ , on a

$$\int_{\tau(\mathfrak{h}_{\bar{1}, m})} e^{i\pi B(x, y)} f_\phi(y) dy = \int_{\mathfrak{h}} e^{i\pi B(x, y)} f_\phi(y) dy$$

On remarque aussi que \mathfrak{h} est identifiée avec son image $\mathfrak{h}'(m)$ dans \mathfrak{h}' . Par conséquent, l'équation (4.30) devient :

$$\sum_{\eta_0 \in \mathcal{W}'(G, \mathfrak{h}, m) / \mathcal{W}'(G, \mathfrak{h})_m} \text{sgn}(\eta_0) \int_{\mathfrak{h}'(m)} c_-(x)^{-\eta_0^{-1}\mu'} \text{ch}(x)^{p+q-n-1} \int_{\mathfrak{h}'(m)} e^{i\pi B(x, y)} f_\phi(y) dy dx \quad (4.31)$$

En utilisant la remarque 4.3.6, on obtient donc que (4.31) se réécrit comme suit

$$\begin{aligned}
& \sum_{\eta_0 \in \mathcal{W}(G, \mathfrak{b}, m) / \mathcal{W}(G, \mathfrak{b})_m} \operatorname{sgn}(\eta_0) \int_{\mathfrak{b}} c_-(x)^{-\eta_0^{-1} \mu'} \operatorname{ch}(x)^{p+q-n-1} \int_{\tau(\mathfrak{b}_1, m)} e^{i\pi B(x, y)} \mathcal{F}_{\mathfrak{b}'}(\pi_{\mathfrak{z}'(m)/\mathfrak{b}'} \mathcal{A}_\psi)(y) dy dx \\
&= \sum_{\eta_0 \in \mathcal{W}(G, \mathfrak{b}, m) / \mathcal{W}(G, \mathfrak{b})_m} \operatorname{sgn}(\eta_0) \int_{\mathfrak{b}'(m)} c_-(x)^{-\eta_0^{-1} \mu'} \operatorname{ch}(x)^{p+q-n-1} \int_{\mathfrak{b}'(m)} e^{i\pi B(x, y)} \mathcal{F}_{\mathfrak{b}'}(\pi_{\mathfrak{z}'(m)/\mathfrak{b}'} \mathcal{A}_\psi) \Big|_{\mathfrak{b}'(m)}(y) dy dx \\
&= \sum_{\eta_0 \in \mathcal{W}(G, \mathfrak{b}, m) / \mathcal{W}(G, \mathfrak{b})_m} \operatorname{sgn}(\eta_0) \int_{\mathfrak{b}'(m)} c_-(x)^{-\eta_0^{-1} \mu'} \operatorname{ch}(x)^{p+q-n-1} \mathcal{F}_{\mathfrak{b}'(m)}^{-1} \mathcal{F}_{\mathfrak{b}'}(\pi_{\mathfrak{z}'(m)/\mathfrak{b}'} \mathcal{A}_\psi) \Big|_{\mathfrak{b}'(m)}(y) dy dx \\
&= \sum_{\eta_0 \in \mathcal{W}(G, \mathfrak{b}, m) / \mathcal{W}(G, \mathfrak{b})_m} \operatorname{sgn}(\eta_0) \int_{\mathfrak{b}'(m)} c_-(x')^{-\eta_0^{-1} \mu'} \operatorname{ch}(x')^{p+q-n-1} \int_{\mathfrak{b}'(m)^\perp} (\pi_{\mathfrak{z}'(m)/\mathfrak{b}'} \mathcal{A}_\psi)(x' + y') dy' dx' \\
&= \sum_{\eta_0 \in \mathcal{W}(G, \mathfrak{b}, m) / \mathcal{W}(G, \mathfrak{b})_m} \operatorname{sgn}(\eta_0) \int_{\mathfrak{b}'(m)} c_-(x')^{-\eta_0^{-1} \mu'} \operatorname{ch}(x')^{p+q-n-1} \int_{\mathfrak{b}'(m)^\perp} \pi_{\mathfrak{z}'(m)/\mathfrak{b}'}(y') \mathcal{A}_\psi(x' + y') dy' dx' \quad (4.32)
\end{aligned}$$

On va maintenant choisir la fonction $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(G' \cdot \mathfrak{b}'^{\operatorname{reg}})$ à partir de laquelle on construit ϕ selon (4.17). On rappelle que $G'^c \subseteq G'$ est le domaine de la transformée de Cayley. Soit $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\widetilde{G}')$ avec support dans $\widetilde{G}'^c \subseteq \widetilde{G}'$ et soit $j_{\mathfrak{g}'}$ le Jacobien de $c : \mathfrak{g}'^c \rightarrow G'^c$. On rappelle que pour $\tilde{c} : \mathfrak{g}'^c \rightarrow \widetilde{G}'^c$, on a posé $\tilde{c}_-(x') = \tilde{c}(x')\tilde{c}(0)^{-1}$. On définit alors :

$$\psi(x') = \Theta(\tilde{c}(x')) j_{\mathfrak{g}'}(x') \Psi(\tilde{c}(x')) \quad (x' \in \mathfrak{g}'^c) \quad (4.33)$$

Avec ce choix de Ψ , l'intégrale (4.32) devient

$$\sum_{\eta_0 \in \mathcal{W}(G, \mathfrak{b}, m) / \mathcal{W}(G, \mathfrak{b})_m} \operatorname{sgn}(\eta_0) \int_{\mathfrak{b}'} c_-(\operatorname{pr}_m(x))^{-\eta_0^{-1} \mu'} \operatorname{ch}(\operatorname{pr}_m(x))^{p+q-n-1} \pi_{\mathfrak{z}'(m)/\mathfrak{b}'}(x) \pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{b}'}(x) \Psi^{G'/H'}(x) dx, \quad (4.34)$$

où pr_m est comme dans (4.25). On doit maintenant réécrire cette intégrale en tant qu'intégrale sur \widetilde{H}' . On procède alors comme suit. Pour tout $x = \sum_{j=1}^{p+q} x_j J_j = \sum_{i=1}^{p+q} z_i E_{j, j}$, avec $z_j = -ix_j$, on a :

$$\prod_{\alpha > 0} (c_-(x)^{\frac{\alpha}{2}} - c_-(x)^{-\frac{\alpha}{2}}) = \prod_{1 \leq i < j \leq p+q} (c_-(z_i)^{\frac{1}{2}} c_-(z_j)^{-\frac{1}{2}} - c_-(z_i)^{-\frac{1}{2}} c_-(z_j)^{\frac{1}{2}})$$

Or,

$$c(z_i) = \frac{z_i + 1}{z_i - 1} = \frac{(z_i + 1)^2}{(z_i + 1)(z_i - 1)} = \frac{(z_i + 1)^2}{z_i^2 - 1}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\prod_{1 \leq i < j \leq p+q} (c_-(z_i)^{\frac{1}{2}} c_-(z_j)^{-\frac{1}{2}} - c_-(z_i)^{-\frac{1}{2}} c_-(z_j)^{\frac{1}{2}}) &= \prod_{1 \leq i < j \leq p+q} \left(\frac{z_i + 1}{(z_i^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \frac{z_j - 1}{(z_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{z_i - 1}{(z_i^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \frac{z_j + 1}{(z_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq p+q} \frac{2(z_j - z_i)}{(1 - z_i^2)^{\frac{1}{2}} (1 - z_j^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p+q} 2(z_j - z_i)}{\prod_{k=1}^{p+q} (1 - z_k^2)^{\frac{p+q-1}{2}}}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\prod_{\alpha>0} (c_-(x)^{\frac{\alpha}{2}} - c_-(x)^{-\frac{\alpha}{2}}) = 2^{\frac{(p+q-1)(p+q)}{2}} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p+q} (z_j - z_i)}{\prod_{k=1}^{p+q} (x_k^2 + 1)^{\frac{p+q-1}{2}}} = (2i)^{\frac{(p+q-1)(p+q)}{2}} \frac{\pi_{g'/b'}(x)}{\prod_{k=1}^{p+q} (x_k^2 + 1)^{\frac{p+q-1}{2}}}$$

De même, on a :

$$\frac{\pi_{g'/\delta'}(m)(x)}{\text{ch}(\text{pr}_m(x))^{p+q-n-1} \Theta(\tilde{c}(x))} = (2i)^{\frac{(p+q-n-1)(p+q-n)}{2} - \frac{(p+q-1)(p+q)}{2}} \prod_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha_{b'(m)} \neq 0}} (c_-(x)^{\frac{\alpha}{2}} - c_-(x)^{-\frac{\alpha}{2}})$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha_{b'(m)} \neq 0}} (c_-(x)^{\frac{\alpha}{2}} - c_-(x)^{-\frac{\alpha}{2}}) &= \frac{\prod_{\alpha>0} (c_-(x)^{\frac{\alpha}{2}} - c_-(x)^{-\frac{\alpha}{2}})}{\prod_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha_{b'(m)} = 0}} (c_-(x)^{\frac{\alpha}{2}} - c_-(x)^{-\frac{\alpha}{2}})} \\ &= \frac{(2i)^{\frac{(p+q-1)(p+q)}{2}} \pi_{g'/b'}(x) \prod_{k=m+1}^{p+q-n+m} (1 + x_k^2)^{p+q-n-1}}{(2i)^{\frac{(p+q-n-1)(p+q-n)}{2}} \prod_{k=1}^{p+q} (x_k^2 + 1)^{\frac{p+q-1}{2}} \pi_{\delta'(m)/b'}(x)} \\ &= \frac{(2i)^{\frac{(p+q-1)(p+q)}{2}} \pi_{g'/\delta'}(m)(x) \prod_{k=m+1}^{p+q-n+m} (x_k^2 + 1)^{-\frac{n}{2}}}{(2i)^{\frac{(p+q-n-1)(p+q-n)}{2}} \prod_{k=1}^m (x_k^2 + 1)^{\frac{p+q-1}{2}} \prod_{k=p+q-n+m+1}^{p+q} (1 + x_k^2)^{\frac{p+q-1}{2}}} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \text{ch}(x) &= |\det_{\mathbb{R}}(x - 1)|^{\frac{1}{2}} = \prod_{i=1}^{p+q} \det \left(x_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \prod_{i=1}^{p+q} \det \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ -x_i & 1 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} = \prod_{i=1}^{p+q} (1 + x_i^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

et $\Theta(\tilde{c}(x)) = \text{ch}(x)^n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{ch}(\text{pr}_m(x))^{p+q-n-1} \Theta(\tilde{c}(x)) &= \prod_{i=1}^m (1 + x_i^2)^{\frac{p+q-n-1}{2}} \prod_{i=p+q-n+m+1}^{p+q} (1 + x_i^2)^{\frac{p+q-n-1}{2}} \prod_{i=1}^{p+q} (1 + x_i^2)^{\frac{n}{2}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^m (1 + x_i^2)^{\frac{p+q-1}{2}} \prod_{i=p+q-n+m+1}^{p+q} (1 + x_i^2)^{\frac{p+q-1}{2}}}{\prod_{i=m+1}^{p+q-n+m} (1 + x_i^2)^{-\frac{n}{2}}} \end{aligned}$$

En utilisant cela, on obtient avec des constantes C, C' qui ne dépendent pas de m ,

$$\begin{aligned}
& \text{ch}(\text{pr}_m(x))^{p+q-n-1} \pi_{\mathfrak{z}'(m)/\mathfrak{b}'}(x) \pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{b}'}(x) \Theta(\tilde{c}(x)) \\
&= C \frac{\pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{b}'}(x)^2}{\pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{z}'(m)}(x)} \text{ch}(\text{pr}_m(x))^{p+q-n-1} \Theta(\tilde{c}(x)) \\
&= C' \frac{\left| \prod_{\alpha>0} (c_-(x)^{\frac{\alpha}{2}} - c_-(x)^{-\frac{\alpha}{2}}) \right|^2}{\prod_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha_{\mathfrak{b}'(m)} \neq 0}} (c_-(x)^{\frac{\alpha}{2}} - c_-(x)^{-\frac{\alpha}{2}})} \prod_{k=1}^{p+q} (1+x_k^2)^{p+q-1}
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $j_{\mathfrak{g}}(x) = \text{ch}(x)^{-2(p+q)}$ et $j_{\mathfrak{b}}(x) = \text{ch}(x)^{-2}$, on obtient $\prod_{k=1}^{p+q} (1+x_k^2)^{p+q-1} = (j_{\mathfrak{g}})^{-1} j_{\mathfrak{b}}(x)$. Ainsi, l'équation (4.34) devient :

$$\begin{aligned}
& T(\overline{\Theta_{\Pi}})(\phi) \\
&= C_m \sum_{\eta_0 \in \mathcal{W}'(G, \mathfrak{b}, m) / \mathcal{W}'(G, \mathfrak{b})_m} \text{sgn}(\eta_0) \int_{\mathfrak{b}'} c_-(\text{pr}_m(x))^{-\eta_0^{-1} \mu'} \text{ch}(\text{pr}_m(x))^{p+q-n-1} \pi_{\mathfrak{z}'(m)/\mathfrak{b}'}(x) \pi_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{b}'}(x) \Psi^{G'/H'}(\tilde{c}_-(x)) dx \\
&= C'(m) \sum_{\eta_0 \in \mathcal{W}'(G, \mathfrak{b}, m) / \mathcal{W}'(G, \mathfrak{b})_m} \text{sgn}(\eta_0) \int_{\mathfrak{b}'} c_-(\text{pr}_m(x))^{-\eta_0^{-1} \mu'} \frac{\left| \prod_{\alpha>0} (c_-(x)^{\frac{\alpha}{2}} - c_-(x)^{-\frac{\alpha}{2}}) \right|^2}{\prod_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha_{\mathfrak{b}'(m)} \neq 0}} (c_-(x)^{\frac{\alpha}{2}} - c_-(x)^{-\frac{\alpha}{2}})} (j_{\mathfrak{g}})^{-1} j_{\mathfrak{b}}(x) \Psi^{G'/H'}(\tilde{c}_-(x)) dx
\end{aligned}$$

avec

$$C'(m) = C_m C'$$

On obtient finalement :

$$T(\overline{\Theta_{\Pi}})(\phi) = \int_{\overline{H}'} C'(m) \sum_{\eta_0 \in \mathcal{W}'(G, \mathfrak{b}, m) / \mathcal{W}'(G, \mathfrak{b})_m} \frac{\text{sgn}(\eta_0) \text{pr}_m(h)^{-\eta_0^{-1} \mu'}}{\prod_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha_{\mathfrak{b}'(m)} \neq 0}} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}})} \left| \prod_{\alpha>0} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) \right|^2 \Psi^{G'/H'}(h) dh \quad (4.35)$$

En utilisant l'invariance de $\left| \prod_{\alpha>0} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) \right|^2 \Psi^{G'/H'}(h)$ sous l'action de $\mathcal{W}'(K', \mathfrak{b}')$, on a :

$$\left| \prod_{\alpha>0} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) \right|^2 \Psi^{G'/H'}(h) = \frac{1}{|\mathcal{W}'(K', \mathfrak{b}')|} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}'(K', \mathfrak{b}')} \left| \prod_{\alpha>0} ((\sigma h)^{\frac{\alpha}{2}} - (\sigma h)^{-\frac{\alpha}{2}}) \right|^2 \Psi^{G'/H'}(h)$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
& T(\overline{\Theta_{\Pi}})(\phi) \\
&= \frac{C'(m)}{|\mathcal{W}'(K', \mathfrak{b}')|} \int_{\overline{H}'} \sum_{\eta_0 \in \mathcal{W}'(G, \mathfrak{b}, m) / \mathcal{W}'(G, \mathfrak{b})_m} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}'(K', \mathfrak{b}')} \frac{\text{sgn}(\eta_0) \text{pr}_m(h)^{-\eta_0^{-1} \mu'}}{\prod_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha_{\mathfrak{b}'(m)} \neq 0}} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}})} \left| \prod_{\alpha>0} ((\sigma h)^{\frac{\alpha}{2}} - (\sigma h)^{-\frac{\alpha}{2}}) \right|^2 \Psi^{G'/H'}(\sigma h) dh \\
&= \frac{C'(m)}{|\mathcal{W}'(K', \mathfrak{b}')|} \int_H \sum_{\eta_0 \in \mathcal{W}'(G, \mathfrak{b}, m) / \mathcal{W}'(G, \mathfrak{b})_m} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}'(K', \mathfrak{b}')} \frac{\text{sgn}(\eta_0) \text{pr}_m(\sigma^{-1} h)^{-\eta_0^{-1} \mu'}}{\prod_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha_{\mathfrak{b}'(m)} \neq 0}} ((\sigma^{-1} h)^{\frac{\alpha}{2}} - (\sigma^{-1} h)^{-\frac{\alpha}{2}})} \left| \prod_{\alpha>0} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) \right|^2 \Psi^{G'/H'}(h) dh
\end{aligned}$$

On obtient alors, à partir de la formule d'intégration de Weyl et grâce au théorème de Harish-Chandra que le caractère $\Theta_{\Pi'}(h)$ est donné, à une constante près, par la formule suivante

$$\sum_{\eta \in \mathcal{W}'(G, \mathfrak{h}, m) / \mathcal{W}'(G, \mathfrak{h})_m} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}'(K', \mathfrak{h}')} \frac{\text{sgn}(\eta) \text{pr}_m(\sigma h)^{-\eta^{-1}\mu'}}{\prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha|_{\mathfrak{h}(m)} \neq 0}} ((\sigma h)^{\frac{\alpha}{2}} - (\sigma h)^{-\frac{\alpha}{2}})}$$

□

Corollaire 4.3.13. *Le caractère $\Theta_{\Pi'}$ de Π' est donné par la formule suivante :*

$$\prod_{\alpha > 0} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) \Theta_{\Pi'}(h) = C \sum_{\eta \in \mathcal{W}'(G, \mathfrak{h}, m) / \mathcal{W}'(G, \mathfrak{h})_m} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}'(Z'(m), \mathfrak{h}')} \sum_{\tau \in \mathcal{W}'(K', \mathfrak{h}')} \text{sgn}(\eta \sigma \tau) \text{pr}_m(\tau h)^{-\eta^{-1}\mu'} (\tau h)^{\sigma \rho_{\mathfrak{h}'(m)}} \quad (4.36)$$

Démonstration. D'après [24], chapitre V, section 6, page 319, on a

$$\prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha|_{\mathfrak{h}(m)} \neq 0}} ((\sigma h)^{\frac{\alpha}{2}} - (\sigma h)^{-\frac{\alpha}{2}}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{W}'(Z'(m), \mathfrak{h}')} \text{sgn}(\sigma) h^{\sigma \rho_{\mathfrak{h}'(m)}}$$

□

A présent, on va s'intéresser à la constante C qui apparaît dans la formule (4.36). Pour cela, utilisons les résultats et notations de [14], chapitre III, section 41, page 97. On fixe $a \in \mathcal{C}_c^\infty(\tilde{G}')$ \tilde{K}' -invariante à droite telle que

$$\int_{\tilde{G}'} a = 1$$

Par suite, pour simplifier, on notera $\mathcal{W}' = \mathcal{W}'(K', \mathfrak{h}')$. Notons

$$\Delta_0(h) = \prod_{\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{t}', \mathfrak{h}')} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) \quad (4.37)$$

$$\Delta_+(h) = \prod_{\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}') \setminus \Phi^+(\mathfrak{t}', \mathfrak{h}')} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) \quad (4.38)$$

En particulier,

$$\Delta(h) = \Delta_0(h) \Delta_+(h) = \prod_{\alpha > 0} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) \quad (4.39)$$

Pour toute fonction $\beta \in \mathcal{C}_c^\infty(\tilde{H}'^{\text{reg}})$, on définit $f_\beta \in \mathcal{C}_c^\infty(\tilde{G}'_{\tilde{H}'})$ comme suit

$$f_\beta(h^x) = a(x) \Delta_0(h)^{-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}'} \text{sgn}(\sigma) \beta(h^\sigma) \quad (h \in \tilde{H}'^{\text{reg}}, x \in \tilde{G}')$$

(ici, $\tilde{G}'_{\tilde{H}'}$ correspond à l'ensemble des \tilde{G}' -orbites de \tilde{H}'^{reg} et $h^x = x h x^{-1}$). De même, on définit la fonction $g_\beta \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{K}')$ par

$$g_\beta(h^k) = \Delta_+(h) \Delta_0(h)^{-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}'} \text{sgn}(\sigma) \beta(h^\sigma) \quad (k \in \tilde{K}')$$

Notons $m = \frac{1}{2} \dim G'/H'$ et $m_0 = \frac{1}{2} \dim K'/H'$, et soit $q = m - m_0$. Par la suite, on identifiera une représentation $\Pi_\gamma \in \hat{K}'$ avec son plus haut poids γ . D'après [2], page 97, on a

$$\Theta_{\Pi'}(f_\beta) = (-1)^q \sum_{\gamma \in \hat{K}'} m(\gamma) \int_{\bar{K}'} g_\beta(k) \Theta_\gamma(k) dk$$

où $m(\gamma)$ dénote la multiplicité de γ dans $\Theta_{\Pi'}$. Cette dernière se réécrit comme suit

$$\begin{aligned} \Theta_{\Pi'}(f_\beta) &= (-1)^q \sum_{\gamma \in \hat{K}'} m(\gamma) \int_{\bar{K}'} g_\beta(k) \Theta_\gamma(k) dk \\ &= (-1)^q \sum_{\gamma \in \hat{K}'} \frac{m(\gamma)}{|\mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')|} \int_{\bar{H}'} g_\beta(h) \Theta_\gamma(h) |\Delta_0(h)|^2 dh \\ &= (-1)^q \sum_{\gamma \in \hat{K}'} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\sigma) \frac{m(\gamma)}{|\mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')|} \int_{\bar{H}'} \Delta_+(h) \Delta_0(h)^{-1} \beta(h^\sigma) \Theta_\gamma(h) |\Delta_0(h)|^2 dh \\ &= (-1)^m \sum_{\gamma \in \hat{K}'} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\sigma) \frac{m(\gamma)}{|\mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')|} \int_{\bar{H}'} \Delta_+(h) \beta(h^\sigma) \Theta_\gamma(h) \Delta_0(h) dh \end{aligned}$$

L'équation (4.36) se réécrit comme suit

$$\Theta_{\Pi'}(h) = \frac{CP(h)}{\Delta(h)}$$

avec $P(h) = \sum_{\eta \in \mathcal{W}(G, \mathfrak{h}, m)} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}(Z'(m), \mathfrak{h}')} \sum_{\tau \in \mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')} \text{sgn}(\eta\sigma\tau) \text{pr}_m(\tau h)^{-\eta^{-1}\mu'}(\tau h)^{\sigma\rho_{\mathfrak{h}'}(m)}$.

Or, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\bar{G}'} f_\beta(g) \Theta_{\Pi'}(g) dg &= \frac{1}{|\mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')|} \int_{\bar{H}'} f_\beta(h) \Theta_{\Pi'}(h) |\Delta(h)|^2 dg \\ &= \frac{C}{|\mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')|} \int_{\bar{H}'} f_\beta(h) \frac{P(h)}{\Delta(h)} |\Delta(h)|^2 dg \\ &= \frac{C}{|\mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')|} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\sigma) \int_{\bar{H}'} \Delta(h)^{-1} \beta(h^\sigma) P(h) \frac{|\Delta(h)|^2}{\Delta(h)} dh \\ &= \frac{C(-1)^m}{|\mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')|} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\sigma) \int_{\bar{H}'} P(h) \beta(h^\sigma) dh. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient l'égalité suivante :

$$C(-1)^m \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\sigma) \int_{\bar{H}'} P(h) \beta(h^\sigma) dh = (-1)^m \sum_{\gamma \in \hat{K}'} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\gamma) m(\gamma) \int_{\bar{H}'} \Delta_+(h) \beta(h^\sigma) \Theta_\gamma(h) \Delta_0(h) dh. \quad (4.40)$$

Cette égalité est valable pour toute fonction $\beta \in \mathcal{C}_c^\infty(\widetilde{H}'^{\text{reg}})$. Ainsi, considérons $\beta(h) = \frac{h^{-(\lambda+\rho)}}{\Delta_+(h)}$, où λ est le plus haut poids de Π' . Or, pour ce β en particulier, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma \in \widetilde{K}'} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\sigma) m(\gamma) \int_{\widetilde{H}'} \Delta_+(h) \beta(h^\sigma) \Theta_\gamma(h) \Delta_0(h) dh &= \sum_{\gamma \in \widetilde{K}'} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\sigma) m(\gamma) \int_{\widetilde{H}'} h^{-(\lambda+\rho)} \Theta_\gamma(h) \Delta_0(h) dh \\
&= \sum_{\gamma \in \widetilde{K}'} m(\gamma) \int_{\widetilde{H}'} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\sigma) h^{-(\lambda+\rho)} \right) \Theta_\gamma(h) \Delta_0(h) dh \\
&= \sum_{\gamma \in \widetilde{K}'} m(\gamma) \int_{\widetilde{H}'} \overline{\Theta_\lambda(h)} \Theta_\gamma(h) |\Delta_0(h)|^2 dh \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Or, d'après [24], chapitre IV, section 2, corollaire 4.10, page 241, on a

$$\int_K \overline{\Theta_\lambda(k)} \Theta_\gamma(k) dk = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \eta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En utilisant la formule d'intégration de Weyl, on obtient

$$\int_{\widetilde{H}'} \overline{\Theta_\lambda(h)} \Theta_\gamma(h) |\Delta_0(h)|^2 dk = \begin{cases} |\mathcal{W}| & \text{si } \lambda = \eta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.42)$$

D'après [19], théorème 9, (iii), page 555, il existe un unique \widetilde{K}' -type de multiplicité 1 et de plus haut poids λ . Ainsi, on obtient :

$$|\mathcal{W}| = C \int_{\widetilde{H}'} P(h) \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\sigma) h^{-\sigma(\lambda+\rho)} \right) \frac{dh}{\Delta_+(h)}$$

Finalement, on a :

$$C^{-1} = \frac{1}{|\mathcal{W}|} \int_{\widetilde{H}'} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\sigma) h^{-\sigma(\lambda+\rho)} \right) \frac{P(h)}{\Delta_+(h)} dh \quad (4.43)$$

Remarque 4.3.14. Supposons à présent que Π' est dans la série discrète.

Dans ce cas, on a $P(h) = \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\sigma) h^{\sigma(\lambda+\rho)}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
C^{-1} &= \frac{1}{|\mathcal{W}|} \int_{\bar{H}'} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\sigma) h^{-\sigma(\lambda+\rho)} \right) \frac{P(h)}{\Delta_+(h)} dh \\
&= \frac{1}{|\mathcal{W}|} \int_{\bar{H}'} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\sigma) h^{-\sigma(\lambda+\rho)} \right) \left(\sum_{\tau \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\tau) h^{\tau(\lambda+\rho)} \right) \frac{1}{\Delta_+(h)} dh \\
&= \frac{1}{|\mathcal{W}|} \int_{\bar{H}'} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\sigma) \frac{h^{-\sigma(\lambda+\rho)}}{\Delta_0(h)} \right) \left(\sum_{\tau \in \mathcal{W}} \text{sgn}(\tau) \frac{h^{\tau(\lambda+\rho)}}{\Delta(h)} \right) \frac{\overline{\Delta_0(h)} \Delta(h)}{\Delta_+(h)} dh \\
&= \frac{1}{|\mathcal{W}|} \int_{\bar{H}'} \overline{\Theta_\lambda(h)} \left((-1)^{\frac{1}{2} \dim(G'/K')} \Theta_{\Pi'}(h') \right) |\Delta_0(h)|^2 dh \\
&= (-1)^{\frac{q}{2}} \int_{\bar{K}'} \overline{\Theta_\lambda(k)} \Theta_{\Pi'}(k) dk \\
&= (-1)^{\frac{q}{2}}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

où dans (4.44) on a utilisé la formule du caractère (2.13). Ainsi, on obtient $C = (-1)^{\frac{q}{2}}$, comme l'on devait obtenir.

4.4 Quelques exemples et cas particuliers

4.4.1 Le cas $(G = \text{U}(1, \mathbb{C}), G' = \text{U}(p, q, \mathbb{C}), 1 \leq p \leq q)$

Regardons à présent quelques exemples. Regardons tout d'abord le cas $(G = \text{U}(1, \mathbb{C}), G' = \text{U}(p, q, \mathbb{C}), 1 \leq p \leq q)$. Dans ce cas, on a

$$m_{\min} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_1 \leq -q \\ 0 & \text{si } \lambda_1 > -q \end{cases}$$

$$m_{\max} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_1 \geq p \\ 2 & \text{si } \lambda_1 < p \end{cases}$$

Ainsi, pour choix de m , on obtient les trois cas suivants :

$$m = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_1 \leq -q \\ 0 \text{ ou } 1 & \text{si } -q < \lambda_1 < p \\ 0 & \text{si } \lambda_1 \geq p \end{cases} \tag{4.45}$$

D'après l'équation (4.28), on obtient que le caractère $\Theta_{\Pi'}$ est donné par la formule suivante

$$\Theta_{\Pi'}(h) = C \sum_{\sigma \in \mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')} \frac{\text{pr}_m(\sigma h)^{-\mu'}}{\prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha|_{\mathfrak{h}'(m)} \neq 0}} ((\sigma h)^{\frac{\alpha}{2}} - (\sigma h)^{-\frac{\alpha}{2}})}$$

où C est une constante.

Commençons par le cas $m = 1$. Pour tout $h = \text{diag}(h_1, \dots, h_{p+q})$, on a $\text{pr}_1(h) = h_1$. De même, on obtient :

$$\{\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}'); \alpha_{|\mathfrak{h}'(1)} \neq 0\} = \{e_1 - e_j; 2 \leq j \leq p+q\}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha_{|\mathfrak{h}'(1)} \neq 0}} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) &= \prod_{k=2}^{p+q} (h_1^{\frac{1}{2}} h_k^{-\frac{1}{2}} - h_1^{-\frac{1}{2}} h_k^{\frac{1}{2}}) = \prod_{k=2}^{p+q} h_1^{-\frac{1}{2}} h_k^{-\frac{1}{2}} (h_1 - h_k) \\ &= h_1^{-\frac{p+q-1}{2}} \prod_{k=2}^{p+q} h_k^{-\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{p+q} (h_1 - h_k) = h_1^{-\frac{p+q-2}{2}} \prod_{k=2}^{p+q} h_k^{-\frac{1}{2}} \prod_{k=2}^{p+q} (h_1 - h_k) \end{aligned}$$

On a alors d'après (4.28)

$$\Theta_{\Pi'}(h) = C \sum_{\sigma \in \mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')} \frac{h_{\sigma(1)}^{\frac{p+q}{2} - \mu' - 1} \prod_{k=1}^{p+q} h_k^{\frac{1}{2}}}{\prod_{k=2}^{p+q} (h_{\sigma(1)} - h_{\sigma(k)})}$$

Lemme 4.4.1. *On a l'égalité suivante*

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')} \frac{h_{\sigma(1)}^{\frac{p+q}{2} - \mu' - 1}}{\prod_{k=2}^{p+q} (t_{\alpha(1)} - t_{\alpha(k)})} = (p-1)!q! \sum_{b=1}^p \frac{h_b^{\frac{p+q}{2} - \mu' - 1}}{\prod_{\substack{a=1 \\ a \neq b}}^{p+q} (h_b - h_a)} \quad (4.46)$$

Démonstration. On a :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')} \frac{h_{\sigma(1)}^{\frac{p+q}{2} - \mu' - 1}}{\prod_{k=2}^{p+q} (h_{\sigma(1)} - h_{\sigma(k)})} = \sum_{k=1}^p \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{W}(K', \mathfrak{h}') \\ \sigma(1)=k}} \frac{h_k^{\frac{p+q}{2} - \mu' - 1}}{\prod_{j=2}^{p+q} (h_k - h_{\sigma(j)})}$$

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $\sigma \in \mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')$ tel que $\sigma(1) = k$, on a $\sigma(\{2, \dots, p+q\}) = \{1, \dots, p+q\} \setminus \{k\}$, et donc

$$\prod_{j=2}^{p+q} (h_k - h_{\sigma(j)}) = \prod_{\substack{a=1 \\ a \neq k}}^{p+q} (h_k - h_a)$$

et donc :

$$\sum_{k=1}^p \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{W}(K', \mathfrak{h}') \\ \sigma(1)=k}} \frac{h_k^{\frac{p+q}{2} - \mu' - 1}}{\prod_{j=2}^{p+q} (h_k - h_{\sigma(j)})} = (p-1)!q! \sum_{b=1}^p \frac{h_b^{\frac{p+q}{2} - \mu' - 1}}{\prod_{\substack{a=1 \\ a \neq b}}^{p+q} (h_b - h_a)}$$

□

Finalement, à une constante près, on obtient que le caractère $\Theta_{\Pi'}(h)$ est donné par la formule suivante :

$$\Theta_{\Pi'}(h) = \prod_{k=1}^{p+q} h_k^{\frac{1}{2}} \sum_{b=1}^p \frac{h_b^{\frac{p+q}{2} - \mu' - 1}}{\prod_{\substack{a=1 \\ a \neq b}}^{p+q} (h_b - h_a)} \quad (4.47)$$

Considérons à présent le cas $m = 0$. Dans ce cas, on a $\text{pr}_0(h) = h_{p+q}$ et

$$\{\alpha \in \Phi^+(g', b'); \alpha_{h'(0) \neq 0}\} = \{e_k - e_{p+q}; 1 \leq k \leq p+q-1\}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha_{h'(0) \neq 0}}} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) &= \prod_{k=1}^{p+q-1} (h_k^{\frac{1}{2}} h_{p+q}^{-\frac{1}{2}} - h_k^{-\frac{1}{2}} h_{p+q}^{\frac{1}{2}}) = \prod_{k=1}^{p+q-1} h_{p+q}^{-\frac{1}{2}} h_k^{-\frac{1}{2}} (h_k - h_{p+q}) \\ &= h_{p+q}^{-\frac{p+q-1}{2}} \prod_{k=1}^{p+q-1} h_k^{-\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^{p+q-1} (h_k - h_{p+q}) = h_{p+q}^{-\frac{p+q-2}{2}} \prod_{k=1}^{p+q-1} h_k^{-\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^{p+q-1} (h_k - h_{p+q}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\Theta_{\Pi'}(h) = C \sum_{\alpha \in \mathcal{W}'(K', b')} \frac{h^{\frac{p+q}{2} - \mu' - 1} \prod_{k=1}^{p+q} h_j^{\frac{1}{2}}}{\prod_{k=1}^{p+q-1} (h_{\sigma(k)} - h_{\sigma(p+q)})} \quad (4.48)$$

Lemme 4.4.2.

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{W}'(K', b')} \frac{h^{\frac{p+q}{2} - \mu' - 1}}{\prod_{k=1}^{p+q-1} (t_{\sigma(k)} - t_{\sigma(p+q)})} = p!(q-1)! \sum_{b=p+1}^{p+q} \frac{h_b^{\frac{p+q}{2} - \mu' - 1}}{\prod_{\substack{a=1 \\ a \neq b}}^{p+q} (h_b - h_a)}$$

Finalement, le caractère $\Theta_{\Pi'}(h)$, est donné, à une constante près, par la formule :

$$\Theta_{\Pi'}(h) = Cp!(q-1)! \prod_{k=1}^{p+q} h_j^{\frac{1}{2}} \sum_{b=p+1}^{p+q} \frac{h_b^{\frac{p+q}{2} - \mu' - 1}}{\prod_{\substack{a=1 \\ a \neq b}}^{p+q} (h_b - h_a)} \quad (4.49)$$

Proposition 4.4.3. Pour tout $\lambda_1 \in [|-q+1, p-1|]$, on a :

$$\sum_{b=p+1}^{p+q} \frac{h_b^{\frac{p+q}{2} - \mu' - 1}}{\prod_{\substack{a=1 \\ a \neq b}}^{p+q} (h_b - h_a)} = - \sum_{b=1}^p \frac{h_b^{\frac{p+q}{2} - \mu' - 1}}{\prod_{\substack{a=1 \\ a \neq b}}^{p+q} (h_b - h_a)} \quad (4.50)$$

Remarque 4.4.4 (Avant preuve). La proposition précédente se reformule comme suit : pour tout $k \in [0, p+q-2]$, on a l'égalité

$$\sum_{b=p+1}^{p+q} \frac{h_b^k}{\prod_{\substack{a=1 \\ a \neq b}}^{p+q} (h_b - h_a)} = - \sum_{b=1}^p \frac{h_b^k}{\prod_{\substack{a=1 \\ a \neq b}}^{p+q} (h_b - h_a)} \quad (4.51)$$

Démonstration. Multiplions l'équation (4.51) par $\prod_{1 \leq i < j \leq p+q} (h_i - h_j)$. Ainsi, (4.51) se réécrit comme suit :

$$\sum_{b=p+1}^{p+q} (-1)^{b-1} h_b^k \prod_{\substack{1 \leq a < c \leq p+q \\ b \neq a, b \neq c}} (h_a - h_c) = - \sum_{b=1}^p (-1)^{b-1} h_b^k \prod_{\substack{1 \leq a < c \leq p+q \\ b \neq a, b \neq c}} (h_a - h_c)$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{b=1}^{p+q} (-1)^{b-1} h_b^k \prod_{\substack{1 \leq a < c \leq p+q \\ b \neq a, b \neq c}} (h_a - h_c) = 0$$

Pour tout $k \in [0, p+q-2]$, considérons M^k la matrice définie par

- $M_{i,j}^k = h_i^{j-1}$ si $j \leq k$
- $M_{i,k+1}^k = M_{i,k+2}^k = t_i^k$
- $M_{i,j}^k = t_i^{j-2}$ si $j > k+2$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & h_1 & \dots & h_1^{k-1} & h_1^k & h_1^k & h_1^{k+1} & \dots & h_1^{p+q-2} \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & h_{p+q} & \dots & h_{p+q}^{k-1} & h_{p+q}^k & h_{p+q}^k & h_{p+q}^{k+1} & \dots & h_{p+q}^{p+q-2} \end{pmatrix}$$

Les $(k+1)^e$ et $(k+2)^e$ colonnes étant identiques, on a $\det(M^k) = 0$ pour tout $k \in [0, p+q-2]$. Or, en développant ce déterminant par rapport à la $(k+1)^e$ -colonne, on obtient

$$0 = \det(M_k) = (-1)^k \sum_{b=1}^{p+q} (-1)^{b-1} h_b^k \prod_{\substack{1 \leq a < c \leq p+q \\ b \neq a, b \neq c}} (h_a - h_c)$$

□

Cet exemple montre que, même si on peut calculer le caractère en choisissant un sous-espace de Cartan, les formules que l'on obtient pour des Cartans différents sont en fait les mêmes. Ceci est une vérification directe sur un exemple particulier de ce que le théorème 4.3.12 affirme en général.

4.4.2 Le cas $(G = \mathrm{U}(n, \mathbb{C}), G' = \mathrm{U}(q, \mathbb{C})), n \leq q$

Dans ce cas, on a $m = 0$. De plus, $\mathscr{W}(G, \mathfrak{h}, 0) = \mathscr{W}(G, \mathfrak{h})_0 = \mathscr{W}(G, \mathfrak{h})$. Ainsi, on a :

$$\Theta_{\mathrm{II}}(h) = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}(G', \mathfrak{h}')} \frac{\mathrm{pr}_0(\sigma h)^{-\mu'}}{\prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha|_{\mathfrak{h}'(0)} \neq 0}} ((\sigma h)^{\frac{\alpha}{2}} - (\sigma h)^{-\frac{\alpha}{2}})} = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}(G', \mathfrak{h}')} \frac{\mathrm{pr}_0(\sigma h)^{-\mu'}}{\prod_{\alpha > 0} ((\sigma h)^{\frac{\alpha}{2}} - (\sigma h)^{-\frac{\alpha}{2}})} \prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha|_{\mathfrak{h}'(0)} = 0}} ((\sigma h)^{\frac{\alpha}{2}} - (\sigma h)^{-\frac{\alpha}{2}})$$

Or, pour tout $\sigma \in \mathscr{W}(K', \mathfrak{h}')$, on a

$$\prod_{\alpha > 0} ((\sigma h)^{\frac{\alpha}{2}} - (\sigma h)^{-\frac{\alpha}{2}}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{\alpha > 0} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}})$$

De même, on a

$$\{\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}') \mid \alpha|_{\mathfrak{h}'(0)} = 0\} = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i < j \leq q-n\}$$

Ainsi,

$$\prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha|_{\mathfrak{h}'(0)} = 0}} ((\sigma h)^{\frac{\alpha}{2}} - (\sigma h)^{-\frac{\alpha}{2}}) = \prod_{1 \leq i < j \leq q-n} (h_{\sigma(i)}^{\frac{1}{2}} h_{\sigma(j)}^{-\frac{1}{2}} - h_{\sigma(i)}^{-\frac{1}{2}} h_{\sigma(j)}^{\frac{1}{2}}) = \prod_{k=1}^{q-n} h_{\sigma(k)}^{-\frac{q-n-1}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq q-n} (h_{\sigma(i)} - h_{\sigma(j)})$$

et

$$\mathrm{pr}_0(h)^{-\mu'} = \prod_{a=q-n+1}^q h_a^{-\mu'_{a-q+n}}$$

Finalement, à une constante près, on obtient

$$\prod_{\alpha>0} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) \Theta_{\Pi'}(h) = \sum_{\sigma \in \mathcal{W}(G', \mathfrak{b}')} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{a=q-n+1}^q h_{\sigma(a)}^{-\mu'_{a-q+n}} \prod_{k=1}^{q-n} h_{\sigma(k)}^{-\frac{q-n-1}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq q-n} (h_{\sigma(i)} - h_{\sigma(j)}) \quad (4.52)$$

Or, on a

$$\prod_{1 \leq i < j \leq q-n} (h_{\sigma(i)} - h_{\sigma(j)}) = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{\{1, \dots, q-n\}}} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{a=1}^{q-n} h_{\sigma\tau(a)}^{a-1}$$

où $\mathcal{S}_{\{1, \dots, q-n\}}$ est le sous-groupe de $\mathcal{W}(K', \mathfrak{b}')$ qui stabilise les points $\{q-n+1, \dots, q\}$. Ainsi, pour tout $\tau \in \mathcal{S}_{\{1, \dots, q-n\}}$, on a :

$$\prod_{a=q-n+1}^q h_{\sigma(a)}^{-\mu'_{a-q+n}} = \prod_{a=q-n+1}^q h_{\sigma\tau(a)}^{-\mu'_{a-q+n}}$$

et

$$\prod_{k=1}^{q-n} h_{\sigma(k)}^{-\frac{q-n-1}{2}} = \prod_{k=1}^{q-n} h_{\sigma\tau(k)}^{-\frac{q-n-1}{2}}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha>0} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) \Theta_{\Pi'}(h) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{W}(G', \mathfrak{b}')} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{a=q-n+1}^q h_{\sigma(a)}^{-\mu'_{a-q+n}} \prod_{k=1}^{q-n} h_{\sigma(k)}^{-\frac{q-n-1}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq q-n} (h_{\sigma(i)} - h_{\sigma(j)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{W}(G', \mathfrak{b}')} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{\{1, \dots, q-n\}}} \mathrm{sgn}(\sigma\tau) \prod_{a=q-n+1}^q h_{\sigma\tau(a)}^{-\mu'_{a-q+n}} \prod_{k=1}^{q-n} h_{\sigma\tau(k)}^{-\frac{q-n-1}{2}} \prod_{a=1}^{q-n} h_{\sigma\tau(a)}^{a-1} \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{\{1, \dots, q-n\}}} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}(G', \mathfrak{b}')} \mathrm{sgn}(\sigma\tau) \prod_{a=q-n+1}^q h_{\sigma\tau(a)}^{-\mu'_{a-q+n}} \prod_{k=1}^{q-n} h_{\sigma\tau(k)}^{-\frac{q-n-1}{2}} \prod_{a=1}^{q-n} h_{\sigma\tau(a)}^{a-1} \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{\{1, \dots, q-n\}}} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}(G', \mathfrak{b}')} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{a=q-n+1}^q h_{\sigma(a)}^{-\mu'_{a-q+n}} \prod_{k=1}^{q-n} h_{\sigma(k)}^{-\frac{q-n-1}{2}} \prod_{a=1}^{q-n} h_{\sigma(a)}^{a-1} \\ &= (q-n)! \sum_{\sigma \in \mathcal{W}(G', \mathfrak{b}')} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{a=q-n+1}^q h_{\sigma(a)}^{-\mu'_{a-q+n}} \prod_{k=1}^{q-n} h_{\sigma(k)}^{-\frac{q-n-1}{2}} \prod_{a=1}^{q-n} h_{\sigma(a)}^{a-1} \\ &= (q-n)! \sum_{\sigma \in \mathcal{W}(G', \mathfrak{b}')} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{a=q-n+1}^q h_{\sigma(a)}^{-\frac{q-n+1}{2} + a + \lambda_{-a+q+1}} \prod_{k=1}^{q-n} h_{\sigma(k)}^{-\frac{q-n-1}{2}} \prod_{a=1}^{q-n} h_{\sigma(a)}^{a-1} \end{aligned}$$

Ainsi, à une constante près, on obtient la formule suivante :

$$\prod_{\alpha>0} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) \Theta_{\Pi'}(h) = \sum_{\omega \in \mathcal{W}(G', \mathfrak{b}')} (\omega h)^\zeta \quad (4.53)$$

avec $\zeta = \sum_{a=1}^q \left(-\frac{q-n+1}{2} + a\right) e_a + \sum_{a=q-n+1}^q \lambda_{-a+q+1} e_a = \sum_{a=1}^q \left(-\frac{q-n+1}{2} + a\right) e_a + \sum_{a=1}^q \lambda_{-a+q+1} e_a$, en posant $\lambda_{n+1} = \dots = \lambda_q = 0$.

Notons $\zeta'_a = \zeta_{q+1-a}$. On a alors :

$$\zeta'(a) = \sum_{a=1}^q \left(-\frac{q-n+1}{2} + q+1-a \right) e_a + \sum_{a=1}^q = \lambda_a e_a = \sum_{a=1}^q \left(\frac{q+n+1}{2} - a + \lambda_a \right) e_a$$

ainsi, en notons ν' le plus haut poids de Π' , on obtient d'après [34] que $\zeta' = \nu' + \rho(q)$.

4.4.3 Le cas $(G = \mathrm{U}(n, \mathbb{C}), G' = \mathrm{U}(p, q, \mathbb{C})), n = p + q, pq \neq 0$

Dans ce cas, on a $m = p$. Il vient alors que

$$\mathscr{W}(G, \mathfrak{h}, p) = \{ \eta \in \mathscr{W}(G, \mathfrak{h}) ; \tau(\mathfrak{h}_{\bar{1}, p}) \subseteq \eta \tau(\mathfrak{h}_{\bar{1}, p}) \} = \mathscr{W}(G, \mathfrak{h})_p$$

d'où $\mathscr{W}(G, \mathfrak{h}, m) / \mathscr{W}(G, \mathfrak{h})_m$ est trivial et la première somme dans (4.28) ne donne aucune contribution.

Ainsi, on obtient :

$$\Theta_{\Pi'}(h) = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}(K', \mathfrak{h}')} \frac{\mathrm{pr}_p(\sigma h)^{-\mu'}}{\prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha|_{\mathfrak{h}'(p)} \neq 0}} ((\sigma h)^{\frac{\alpha}{2}} - (\sigma h)^{-\frac{\alpha}{2}})}$$

Or, $\mathfrak{h}'(p) = \mathfrak{h}'$ et donc $\mathrm{pr}_p = \mathrm{Id}$. Ainsi,

$$\Theta_{\Pi'}(h) = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}(K', \mathfrak{h}')} \mathrm{sgn}(\sigma) \frac{(\sigma h)^{-\mu'}}{\prod_{\alpha > 0} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}})}$$

On a $\mu = \nu + \rho$, où ν est le plus haut poids de Π . D'après [34]

$$\mu_j = \left(\frac{q-p}{2} + \lambda_j \right) + \left(\frac{n+1}{2} - j \right)$$

Ainsi,

$$\mu'_j = \mu_{n+1-j} = \left(\frac{q-p}{2} + \lambda_{n+1-j} + \frac{p+q+1}{2} - (p+q+1-j) \right) = -p - \frac{1}{2} + j + \lambda_{n+1-j}$$

Le plus haut poids ν' de Π' est donné par :

$$\nu' = - \sum_{a=1}^p \frac{n}{2} e_a + \sum_{a=p+1}^{p+q} \frac{n}{2} e_a + \sum_{a=1}^q \lambda_a e_{p+a} + \sum_{a=1}^p \lambda_{q+a} e_a$$

et donc

$$\nu' + \rho = \sum_{a=1}^p \left(-a + \frac{1}{2} + \lambda_{a+q} \right) e_a + \sum_{a=p+1}^{p+q} \left(n - a + \frac{1}{2} + \lambda_{a-p} \right) e_a$$

Notons $\eta \in \mathcal{W}(K', \mathfrak{h}')$ défini par $\eta(j) = p + 1 - j$ pour tout $j \in [[1, p]]$ et $\eta(p + j) = n + 1 - j$ pour tout $j \in [[1, q]]$. Pour tout $1 \leq j \leq p$, on a :

$$(\eta\mu')_j = \mu_{p+1-j} = -p - \frac{1}{2} + (p + 1 - j) + \lambda_{n+1-(p+1-j)} = \frac{1}{2} - j + \lambda_{q+j}$$

et pour tout $p + 1 \leq j \leq p + q$, on a :

$$(\eta\mu')_j = \mu'_{n+p+1-j} = -p - \frac{1}{2} + (n + p + 1 - j) + \lambda_{n+1-(n+p+1-j)} = n + \frac{1}{2} - j + \lambda_{j-p}$$

et donc $\eta\mu' = \nu' + \rho(p + q)$. On retrouve bien la formule du caractère de Harish-Chandra dans le cas d'une série discrète.

4.4.4 Le cas ($G = \mathrm{U}(2, \mathbb{C}), G' = \mathrm{U}(2, 2, \mathbb{C})$)

Dans cette section, considérons $\lambda_2 \geq 1$. Dans ce cas, on a $m_{\min} = 0$ et $m_{\max} = 1$. Fixons $m = 0$. Le caractère $\Theta_{\Pi'}$ est alors donné par la formule suivante à une constante près

$$\Theta_{\Pi'}(h) = \sum_{\eta \in \mathcal{W}(G, \mathfrak{h}, 0) / \mathcal{W}(G, \mathfrak{h})_0} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_2} \mathrm{sgn}(\eta) \frac{\mathrm{pr}_0^{-\eta^{-1}\mu'}(\sigma h)}{\prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha|_{\mathfrak{h}'(0)} \neq 0}} ((\sigma h)^{\frac{\alpha}{2}} - (\sigma h)^{-\frac{\alpha}{2}})}$$

On a alors

$$\mathcal{W}(G, \mathfrak{h}, 0) = \{\eta \in \mathcal{W}(G, \mathfrak{h}) ; \bigcap_{m'=0}^1 \tau(\mathfrak{h}_{1, m'}) \subseteq \eta\tau(\mathfrak{h}_{1, 0})\}$$

Or, on a

$$\tau(\mathfrak{h}_{1, 0}) \cap \tau(\mathfrak{h}_{1, 1}) = \{-y_1 J_1 - y_2 J_2 \mid y_1, y_2 \geq 0\} \cap \{y_1 J_1 - y_2 J_2 \mid y_1, y_2 \geq 0\} = \{-y_2 J_2 \mid y_2 \geq 0\}$$

Ainsi, $\mathcal{W}(G, \mathfrak{h}, 0) = \mathcal{W}(G, \mathfrak{h}) = \mathcal{S}_2$. De plus, $\mathcal{W}(G, \mathfrak{h})_0 = \mathcal{S}_2$.

De même, pour tout $h = (h_1, h_2, h_3, h_4)$, on a

$$\mathrm{pr}_0(h)^{-\mu'} = h_3^{-\mu'_1} h_4^{-\mu'_2}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha > 0} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) \Theta_{\Pi'}(h) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_2} \mathrm{sgn}(\sigma) h_{\sigma(3)}^{-\mu'_1} h_{\sigma(4)}^{-\mu'_2} ((\sigma h)^{\frac{e_1 - e_2}{2}} - (\sigma h)^{\frac{e_2 - e_1}{2}}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_2} \mathrm{sgn}(\sigma) h_{\sigma(3)}^{-\mu'_1} h_{\sigma(4)}^{-\mu'_2} (h_{\sigma(1)}^{\frac{1}{2}} h_{\sigma(2)}^{-\frac{1}{2}} - h_{\sigma(1)}^{-\frac{1}{2}} h_{\sigma(2)}^{\frac{1}{2}}) \\ &= 2 \prod_{i=1}^4 h_i^{-\frac{1}{2}} \left(h_1 h_3^{\frac{1}{2} - \mu'_1} h_4^{\frac{1}{2} - \mu'_2} - h_2 h_3^{\frac{1}{2} - \mu'_1} h_4^{\frac{1}{2} - \mu'_2} - h_1 h_3^{\frac{1}{2} - \mu'_1} h_4^{\frac{1}{2} - \mu'_2} + h_2 h_3^{\frac{1}{2} - \mu'_1} h_4^{\frac{1}{2} - \mu'_2} \right) \\ &= 2 \prod_{i=1}^4 h_i^{-\frac{1}{2}} \left((h_1 - h_2) \left(h_3^{\frac{1}{2} - \mu'_1} h_4^{\frac{1}{2} - \mu'_2} - h_3^{\frac{1}{2} - \mu'_2} h_4^{\frac{1}{2} - \mu'_1} \right) \right) \end{aligned}$$

avec $(\mu'_1, \mu'_2) = (\mu_2, \mu_1)$. En utilisant la proposition C.0.1, on obtient :

$$\prod_{\alpha>0} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) \Theta_{\Pi'}(h = \widetilde{\exp(x)}) = \prod_{i=1}^4 h_i^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mu \in A^{3,4}} \text{sgn}(\mu) \sum_{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{f})} \text{sgn}(w) e^{iw(\mu\lambda)(x)}$$

avec $\lambda = e_2 - \lambda_1 e_3 + (1 - \lambda_2) e_4$. Ici, on a $A^{3,4} = \{Id, (1, 2)\}$ et $\mathcal{W}(\mathfrak{f}) = \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_2$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha>0} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) \Theta_{\Pi'}(h) &= \prod_{i=1}^4 h_i^{-\frac{1}{2}} \left(h_2 h_3^{-\lambda_1} h_4^{1-\lambda_2} - h_1 h_3^{-\lambda_1} h_4^{1-\lambda_2} - h_2 h_4^{-\lambda_1} h_3^{1-\lambda_2} + h_1 h_4^{-\lambda_1} h_3^{1-\lambda_2} \right) \\ &= - \prod_{i=1}^4 h_i^{-\frac{1}{2}} \left((h_1 - h_2) \left(h_3^{-\lambda_1} h_4^{1-\lambda_2} - h_3^{1-\lambda_2} h_4^{-\lambda_1} \right) \right) \end{aligned}$$

Ceci montre que les formules pour $\Theta_{\Pi'}(h)$ que l'on trouve avec la méthode des résidus dans le chapitre 3, équation (3.32) et celle du chapitre 4, équation (4.28) coïncident.

Chapitre 5

Ouvertures

5.1 Une formule du caractère sur un sous-groupe de Cartan non-compact

Dans les chapitres 4 et 3, on a déterminé la formule du caractère $\Theta_{\Pi'}$ des représentations $\Pi' \in \mathcal{R}_\omega(\widetilde{U(p, q, \mathbb{C})})$ sur le sous-groupe de Cartan compact de $\widetilde{U(p, q, \mathbb{C})}$.

Pour garder les notations et conventions de [15], on va supposer que $p \geq q \geq 1$. Il existe alors $q + 1$ sous-groupes de Cartan H_0, H_1, \dots, H_q de $U(p, q, \mathbb{C})$ qui ne sont pas conjugués dans $U(p, q, \mathbb{C})$ (dans le sens qu'il n'existe pas d'automorphismes intérieurs ϕ de $U(p, q, \mathbb{C})$ tel que $\phi(H_i) = H_j, 0 \leq i \neq j \leq q$).

Pour tout $0 \leq k \leq q$, considérons

$$H_k^+(t_1, \dots, t_k) : \begin{pmatrix} Id_{p-k} & & & & & & & & & 0 \\ & \text{ch}(t_k) & & & & & & & & \text{sh}(t_k) \\ & & \text{ch}(t_{k-1}) & & & & & & & \text{sh}(t_{k-1}) \\ & & & \ddots & & & & & \ddots & \\ & & & & \text{ch}(t_1) & \text{sh}(t_1) & & & & \\ & & & & \text{sh}(t_1) & \text{ch}(t_1) & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \text{ch}(t_{k-1}) \\ & & & & & & & & & \text{ch}(t_{k-1}) \\ & & & & & & & & & \text{ch}(t_k) \\ 0 & & & & & & & & & Id_{q-k} \end{pmatrix}$$

et

$$H_k^-(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \theta_1, \dots, \theta_k, \phi_1, \dots, \phi_k) = \text{diag}(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \dots, e^{i\varphi_{p-k}}, e^{i\theta_k}, \dots, e^{i\theta_1}, e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_k}, e^{i\phi_{q-k}}, \dots, e^{i\phi_1})$$

où $t_i, \phi_i, \varphi_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq k, \text{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $\text{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

Notons $H_k^+ = \{H_k^+(t_1, \dots, t_k); t_i \in \mathbb{R}\}$ et $H_k^- = \{H_k^-(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \theta_1, \dots, \theta_k, \phi_1, \dots, \phi_k); \phi_i, \varphi_i \in \mathbb{R}\}$. Alors, H_k^+ et H_k^- sont des sous-groupes de G et $H_k = H_k^- H_k^+$ est un sous-groupe de Cartan maximal.

Probleme 5.1.1. *Peut-on déterminer explicitement la restriction de $\Theta_{\Gamma'}$ à chacun des sous-groupes de Cartan maximaux de $U(p, q, \mathbb{C})$?*

5.2 Une formule du caractère pour les autres paires duales compactes

Dans cette thèse, on s'est principalement intéressé à la paire $(G = U(n, \mathbb{C}), G' = U(p, q, \mathbb{C}))$, bien que de nombreux résultats énoncés restent valides dans le cas général.

Dans le chapitre 3, on a exprimé le caractère $\Theta_{\Gamma'}$ par une formule intégrale (voir le théorème 3.3.2). Par suite, en utilisant la formule d'intégration de Weyl, on a ramené cette intégrale sur un tore maximal de G , et en donnant une formule explicite du caractère Θ sur un sous-groupe maximal compact, on a obtenu une formule explicite de $\Theta_{\Gamma'}(\tilde{t})$, avec $\tilde{t} \in \tilde{T}'$, où T' est le sous-groupe de Cartan compact de G' .

Nous allons à présent donner une formule explicite de la restriction du caractère Θ à des sous-groupes de Cartan compacts dans le cas $(G = O(m, \mathbb{R}), G' = \text{Sp}(2n, \mathbb{R}))$. Pour cela, on va distinguer deux cas, à savoir m pair et m impair.

Premièrement, prenons $(G = O(2m, \mathbb{R}), G' = \text{Sp}(2n, \mathbb{R}))$. Dans ce cas, considérons

$$W = M(2n \times 2m, \mathbb{R})$$

le \mathbb{R} -espace vectoriel muni de la forme bilinéaire suivante :

$$\langle w, w' \rangle = w'^t(-J)w$$

où $J = \text{diag}(j, \dots, j) \in M(2n, \mathbb{R})$ et j est la matrice de $M(2, \mathbb{R})$ définie par $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Notons

$$\Psi_1 : \text{Sp}(2n, \mathbb{R}) \ni g \rightarrow \Psi_1(g) \in \text{GL}(W), \quad \Psi_1(g)(w) = gw, w \in W$$

et

$$\Psi_2 : O(2m, \mathbb{R}) \ni g \rightarrow \Psi_2(g) \in \text{GL}(W), \quad \Psi_2(g)(w) = wg^{-1}, w \in W.$$

On montre facilement que Ψ_1 et Ψ_2 sont des morphismes de groupes injectifs. De plus, l'endomorphisme $J \in \text{GL}(W)$ défini par

$$J(w) = Jw \quad (w \in W)$$

est une structure complexe définie positive sur W . Notons

$$T = \{\text{diag}(\exp(\theta_1 j), \dots, \exp(\theta_m j)); \theta_a \in \mathbb{R}, 1 \leq a \leq m\}$$

$$T' = \{\text{diag}(\exp(\theta'_1 j), \dots, \exp(\theta'_n j)); \theta'_a \in \mathbb{R}, 1 \leq a \leq n\}$$

les sous-groupes de Cartan compacts de G et G' respectivement. Or, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(\theta j) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On identifie alors T et T' avec

$$T = \{\text{diag}(t_1, \dots, t_m); t_a = e^{i\theta_a}, \theta_a \in \mathbb{R}, 1 \leq a \leq m\}$$

$$T' = \{\text{diag}(t'_1, \dots, t'_m); t'_a = e^{i\theta'_a}, \theta'_a \in \mathbb{R}, 1 \leq a \leq n\}$$

De la même manière que dans la section 3.5, on obtient que les valeurs propres de tt' , $t \in T, t' \in T'$ sont de la forme

$$\{t_a t'_b; 1 \leq a \leq m, 1 \leq b \leq n\} \cup \{t_a^{-1} t'_b; 1 \leq a \leq m, 1 \leq b \leq n\}$$

Ainsi, d'après l'équation (3.18), on obtient

$$\Theta(\widetilde{tt'}) = \frac{\left(\prod_{a=1}^m \prod_{b=1}^n t_a t'_b t_a^{-1} t'_b \right)^{\frac{1}{2}}}{\prod_{a=1}^m \prod_{b=1}^n ((1 - t_a t'_b)(1 - t_a^{-1} t'_b))} = \frac{\prod_{b=1}^n t_b^m}{\prod_{a=1}^m \prod_{b=1}^n ((1 - t_a t'_b)(1 - t_a^{-1} t'_b))}$$

où $t'_b = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ 0 < r < 1}} r t'_b$.

De la même manière, on montre que si $G = \text{O}(2m + 1, \mathbb{R})$, on a :

$$\Theta(\widetilde{tt'}) = \frac{\left(\prod_{b=1}^n t_b \prod_{a=1}^m \prod_{b=1}^n t_a t'_b t_a^{-1} t'_b \right)^{\frac{1}{2}}}{\prod_{b=1}^n (1 - t_b) \prod_{a=1}^m \prod_{b=1}^n ((1 - t_a t'_b)(1 - t_a^{-1} t'_b))} = \frac{\prod_{b=1}^n t_b^m \left(\prod_{b=1}^n t_b \right)^{\frac{1}{2}}}{\prod_{b=1}^n (1 - t_b) \prod_{a=1}^m \prod_{b=1}^n ((1 - t_a t'_b)(1 - t_a^{-1} t'_b))}$$

De même, les arguments utilisés dans le chapitre 4 peuvent s'appliquer pour les autres paires duales réductives irréductibles compactes. En effet, $T(\overline{\Theta_{\Pi}})(\phi)$ a été calculé explicitement pour ces paires duales dans [32], et la formule de Rossmann-Duflo-Vergne s'écrit pour les autres paires duales compactes.

Annexe A

Les groupes de Lie classiques

A.1 Les groupes orthogonaux

Ici, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le groupe orthogonal $O(n, \mathbb{F})$ comme suit :

$$O(n, \mathbb{F}) = \{g \in GL(n, \mathbb{F}) ; gg^t = I_n\}.$$

Plus généralement, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on définit le groupe $O(p, q, \mathbb{F})$ comme suit :

$$O(p, q, \mathbb{F}) = \{g \in GL(p + q, \mathbb{F}) ; g^t I_{p,q} g = I_{p,q}\}$$

où $I_{p,q}$ est la matrice de $GL(p + q, \mathbb{F})$ définie par $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$.

Considérons à présent E un espace vectoriel sur \mathbb{F} de dimension n muni d'une forme bilinéaire, symétrique et non dégénérée, notée B . On définit $O(E)$, sous-groupe de $GL(E)$, comme suit :

$$O(E) = \{g \in GL(E) ; b(g(x), g(y)) = b(x, y), (\forall x, y \in E)\}$$

D'après [10], chapitre 1, lemme 1.1.2, page 4, on a les deux cas suivants :

1. Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, alors il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E telle que $b(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$. En particulier, d'après [10], proposition 1.1.4, page 6, $O(E)$ est isomorphe à $O(n, \mathbb{C})$.
2. Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, il existe des entiers $p, q \geq 0$ tels que $n = p + q$ et une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E tel que $b(e_i, e_j) = \varepsilon_i \delta_{i,j}$ où $\varepsilon_i = 1$ si $i \leq p$ et $\varepsilon_i = -1$ si $i \geq p + 1$. En particulier, d'après [10], proposition 1.1.4, page 6, $O(E)$ est isomorphe à $O(p, q, \mathbb{R})$.

On pourra aussi consulter [7] pour une construction détaillée des groupes orthogonaux (chapitre V).

A.2 Les groupes unitaires

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le groupe unitaire $U(n, \mathbb{C})$ comme suit

$$U(n, \mathbb{C}) = \{g \in GL(n, \mathbb{C}) ; g^* g = I_n\}$$

Plus généralement, pour $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p + q = n$, on définit le groupe $U(p, q, \mathbb{C})$ par :

$$U(p, q, \mathbb{C}) = \{g \in GL(p + q, \mathbb{C}) ; g^* I_{p,q} g = I_{p,q}\}$$

On utilise ici la définition de [7], chapitre VI, section 4. Soit E un espace vectoriel complexe. Une forme sesquilinéaire B sur E est une application $B : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ qui satisfait pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in E$ les propriétés suivantes :

1. $B(x_1 + x_2, y) = B(x_1, y) + B(x_2, y)$
2. $B(x, y_1 + y_2) = B(x, y_1) + B(x, y_2)$
3. $B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y)$
4. $B(x, \mu y) = \bar{\mu} B(x, y)$

Pour toute forme sesquilinéaire B , notons B^* la forme définie par $B^*(x, y) = \overline{B(y, x)}$, $x, y \in E$. La forme sesquilinéaire B est dite hermitienne (resp. anti-hermitienne) si $B^* = B$ (resp. $B^* = -B$).

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n muni d'une forme hermitienne B . On définit $U(E)$, sous-groupe de $GL(E)$, par :

$$U(E) = \{g \in GL(E) ; B(g(x), g(y)) = B(x, y), (\forall x, y \in E)\}$$

D'après [10], il existe deux entiers positifs p et q tels que $n = p + q$ et une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E qui vérifie $B(e_i, e_j) = \varepsilon_i \delta_{i,j}$, avec $\varepsilon_i = 1$ si $i \leq p$ et $\varepsilon_i = -1$ si $i \geq p + 1$. En particulier, en utilisant [10], chapitre I, proposition 1.1.8, page 8, le groupe $U(E)$ est isomorphe à $U(p, q, \mathbb{C})$.

D'après [29], les groupes unitaires sont connexes (chapitre 5, section 3).

A.3 Les groupes sympléctiques

Tout d'abord, posons $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le groupe sympléctique $Sp(2n, \mathbb{F})$ comme suit :

$$Sp(2n, \mathbb{F}) = \{X \in GL(2n, \mathbb{F}) ; X^t J X = J\}$$

où J est la matrice de $M(2n, \mathbb{F})$ définie par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Un espace vectoriel sympléctique est la donnée d'un couple $(E, \langle \dots \rangle)$ où E est un \mathbb{F} -espace vectoriel et $\langle \dots \rangle$ une forme bilinéaire, anti-symétrique et non-dégénérée, appelé produit scalaire sympléctique. Notons $Sp(E)$ l'ensemble des automorphismes de E qui laissent invariants la forme $\langle \dots \rangle$, c'est-à-dire :

$$Sp(E) = \{g \in GL(E) ; \langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle, (\forall x, y \in E)\}$$

D'après [7], théorème III.3 (base sympléctique), l'espace vectoriel est de dimension paire sur \mathbb{F} . Posons $2n = \dim_{\mathbb{F}}(E)$.

De plus, de nouveau d'après le théorème III.3, il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}\}$ qui vérifie les relations suivantes :

- $\langle e_i, e_{n+i} \rangle = 1, i \in \{1, \dots, n\}$
- $\langle e_{i+n}, e_i \rangle = -1, i \in \{1, \dots, n\}$
- $\langle e_j, e_k \rangle = 0$ sinon

En particulier, d'après [10], chapitre I, proposition 1.1.6, page 7, $\text{Sp}(E)$ est isomorphe à $\text{Sp}(2n, \mathbb{F})$.

Définissons à présent le groupe sympléctique quaternionique. La construction est différente que celle faite pour le cas réel ou complexe, l'une des raisons est qu'une forme bilinéaire anti-symétrique sur \mathbb{H} est nécessairement nulle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\text{SpU}(n)$ le groupe sympléctique unitaire comme suit :

$$\text{SpU}(n) = \{g \in \text{GL}(n, \mathbb{H}); g^*g = I_n\}$$

Plus généralement, pour tout entiers positifs p et q tels que $n = p + q$, on définit le $\text{SpU}(p, q)$ par

$$\text{SpU}(p, q) = \{g \in \text{GL}(p + q, \mathbb{H}); g^*I_{p,q}g = I_{p,q}\}$$

Soit E un espace vectoriel (à droite) sur \mathbb{H} . Une forme sesquilinéaire sur E est une application $B : E \times E \rightarrow \mathbb{H}$ telle que pour tout $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in E$ et $q \in \mathbb{H}$, on ait :

- $B(x, yq) = B(x, y)q$
- $B(xq, y) = q^*B(x, y)$
- $B(x_1 + x_2, y) = B(x_1, y) + B(x_2, y)$
- $B(x, y_1 + y_2) = B(x, y_1) + B(x, y_2)$
- $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$

On appelle produit scalaire quaternionien sur espace vectoriel à droite E sur \mathbb{H} une forme sesquilinéaire, notée B telle que $B(x, x)$ soit strictement positif pour tout vecteur x non nul de E .

Pour tout espace vectoriel E de dimension n muni d'un produit scalaire quaternionien $\{.,.\}$, on définit $\text{SpU}(E)$ le groupe des automorphismes de la forme B par :

$$\text{SpU}(E) = \{g \in \text{GL}(E); B(g(x), g(y)) = B(x, y) (\forall x, y \in E)\}$$

Dans ce cas, il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E tel que $\{e_i, e_j\} = \varepsilon_i \delta_{i,j}$, où $\varepsilon_i = 1$ si $i \leq p$ et -1 sinon. En particulier, le groupe $\text{SpU}(E)$ est isomorphe à $\text{SpU}(p, q)$.

Annexe B

Le cas $(G = U(1, \mathbb{C}), G' = U(p, q, \mathbb{C}))$

Commençons cette annexe par une proposition.

Proposition B.0.1. *En utilisant la formule 3.32 et le lemme 3.5.7 le caractère $\Theta_{\Pi'_k}$ de la représentation Π'_k de $U(p, q, \mathbb{C})$ est donné, pour tout $\tilde{t}' \in \widetilde{T}'$, par :*

$$\Theta_{\Pi'_k}(\tilde{t}') = \begin{cases} \prod_{i=1}^{p+q} t_i^{\frac{1}{2}} \sum_{h=1}^p \frac{t_h^{p-(k+1)}}{\prod_{h \neq j} (t_h - t_j)} & \text{si } p \geq k + 1 \\ - \prod_{i=1}^{p+q} t_i^{\frac{1}{2}} \sum_{h=p+1}^{p+q} \frac{t_h^{p-(k+1)}}{\prod_{h \neq j} (t_h - t_j)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque B.0.2. Ici, on change volontairement les notations. Le groupe $U(1, \mathbb{C})$ n'est rien autre que le groupe S^1 , qui est abélien. En particulier, on a $\hat{S}^1 \approx \mathbb{Z}$. Ici, k correspond donc à λ_1 .

Comme dans [37], pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on définit l'application p comme suit :

$$p(x) = \det^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sinh(\text{ad}(x/2))}{\text{ad}(x/2)} \right)$$

Lemme B.0.3. *Pour tout $x \in \mathfrak{t}'^{\text{reg}}$, on a :*

$$p(x) = \prod_{\alpha \in \Phi^+} \frac{e^{\alpha(x/2)} - e^{-\alpha(x/2)}}{\alpha(x/2)} = \frac{2^{|\Phi^+|}}{\prod_{\alpha \in \Phi^+} \alpha(x)} \prod_{\alpha \in \Phi^+} (e^{\alpha(x/2)} - e^{-\alpha(x/2)})$$

où $\Phi^+ = \Phi^+(\mathfrak{g}', \mathfrak{t}')$.

Démonstration. Soit Ψ l'application de $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ définie par $\Psi(x) = \frac{\sinh(x)}{x}$. Cette fonction se prolonge en une application de \mathbb{C} à valeurs dans \mathbb{C} , de nouveau notée Ψ . Plus particulièrement, on a :

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$$

Pour $X \in \text{End}(\mathbb{C}^{p+q})$, notons

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k X^{2k}}{(2k+1)!}$$

Ainsi, pour tout $X \in \text{GL}(\mathbb{C}^{p+q})$, on a $E(X) = \frac{\sinh(X)}{X}$.

Pour tout $x \in \mathfrak{t}$ et $v \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Phi^+$, on a :

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha(x/2))v &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha(x/2)^{2k}}{(2k+1)!}(v) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \text{ad}(x/2)^{2k}(v)}{(2k+1)!} \\ &= E(\text{ad}(x/2))(v) \end{aligned}$$

De même, pour tout $w \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Phi^-$ et $y \in \mathfrak{t}$, on a :

$$\frac{\sinh(\text{ad}(x/2))}{\text{ad}(x/2)}(w) = \Psi(-\alpha(x/2))w$$

On obtient alors le résultat en utilisant la parité de Ψ . □

Corollaire B.0.4. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathfrak{t}'^{\text{reg}}$, on a :

$$p(x)\Theta_{\Pi'_k}(\widetilde{\exp}(x)) = \begin{cases} \frac{2^{\frac{(p+q-1)(p+q)}{2}} \prod_{i=1}^{p+q} t_i^{-\frac{p+q-2}{2}}}{\prod_{\alpha>0} \alpha(x)} \sum_{h=1}^p (-1)^{h+1} t_h^{p-(k+1)} \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq p+q \\ i \neq h, j \neq h}} (t_i - t_j) & \text{si } p \geq k+1 \\ -\frac{2^{\frac{(p+q-1)(p+q)}{2}} \prod_{i=1}^{p+q} t_i^{-\frac{p+q-2}{2}}}{\prod_{\alpha>0} \alpha(x)} \sum_{h=p+1}^{p+q} (-1)^{h+1} t_h^{p-(k+1)} \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq p+q \\ i \neq h, j \neq h}} (t_i - t_j) & \text{si } p < k+1 \end{cases}$$

Démonstration. En reprenant l'équation 3.28, on obtient

$$p(x) = \frac{\prod_{i=1}^{p+q} t_i^{-\frac{p+q-1}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq p+q} (t_i - t_j)}{\prod_{\alpha>0} \alpha(x)}$$

De même, pour tout $h \in [1, p+q]$, on a :

$$\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p+q} (t_i - t_j)}{\prod_{k \neq h} (t_h - t_k)} = (-1)^{h-1} \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq p+q \\ i, j \neq h}} (t_i - t_j)$$

On conclue alors en utilisant la proposition B.0.1. □

Remarque B.0.5. Simplifions le terme $\prod_{\substack{1 \leq a < b \leq p+q \\ a \neq i, b \neq i}} (t_a - t_b)$. Pour tout $k \in [1, p+q-1]$, posons

$$\tilde{t}_k = \begin{cases} t_k & \text{si } k < i \\ t_{k+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient alors $\prod_{\substack{1 \leq a < b \leq p+q \\ a \neq i, b \neq i}} (t_a - t_b) = \prod_{1 \leq a < b \leq p+q-1} (\tilde{t}_a - \tilde{t}_b)$. Or, en utilisant la formule de Vandermonde, on

obtient :

$$\prod_{1 \leq a < b \leq p+q-1} (\tilde{t}_b - \tilde{t}_a) = \det(\tilde{M}),$$

où $\tilde{M} = (\tilde{M}_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p+q-1}$ et $\tilde{M}_{i,j} = \tilde{t}_i^{j-1}$. Ainsi, en utilisant la formule du déterminant, on obtient :

$$\begin{aligned} \det(\tilde{M}) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q-1}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{a=1}^{p+q-1} \tilde{M}_{\sigma(a),a} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q-1}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{a=1}^{p+q-1} \tilde{t}_{\sigma(a)}^{a-1} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q-1}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{a=1}^{p+q-1} \tilde{t}_a^{\sigma^{-1}(a)-1} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q-1}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{a=1}^{i-1} \tilde{t}_a^{\sigma^{-1}(a)-1} \prod_{a=i}^{p+q-1} \tilde{t}_a^{\sigma^{-1}(a)-1} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q-1}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{a=1}^{i-1} t_a^{\sigma^{-1}(a)-1} \prod_{a=i}^{p+q-1} t_{a+1}^{\sigma^{-1}(a)-1} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q-1}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{a=1}^{i-1} t_a^{\sigma^{-1}(a)-1} \prod_{a=i+1}^{p+q} t_a^{\sigma^{-1}(a-1)-1} \end{aligned}$$

Lemme B.0.6. Pour tout $i \in [1, p+q]$, on a :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q-1}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{a=1}^{i-1} t_a^{\sigma^{-1}(a)-1} \prod_{a=i+1}^{p+q} t_a^{\sigma^{-1}(a-1)-1} = \sum_{\mu \in \mathcal{S}_{p+q}^i} \text{sgn}(\mu) \prod_{a=1}^{i-1} t_{\mu(a)}^{a-1} \prod_{a=i+1}^{p+q} t_{\mu(a)}^{a-2} \quad (\text{B.1})$$

Etant donné que

$$\prod_{\substack{1 \leq a < b \leq p+q \\ a \neq i, b \neq i}} (t_a - t_b) = (-1)^{\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}} \prod_{\substack{1 \leq a < b \leq p+q \\ a \neq i, b \neq i}} (t_b - t_a) = (-1)^{p+q-1} (-1)^{\frac{(p+q-1)(p+q)}{2}} \prod_{\substack{1 \leq a < b \leq p+q \\ a \neq i, b \neq i}} (t_b - t_a)$$

on obtient le corollaire suivant :

Corollaire B.0.7. Pour tout $x \in \mathfrak{t}'^{\text{reg}}$, on obtient :

$$p(x) \Theta_{\Pi_k'}(\widehat{\text{exp}}(x)) = \begin{cases} \frac{(-1)^{p+q-1} (-2)^{\frac{(p+q-1)(p+q)}{2}} \prod_{i=1}^{p+q} t_i^{-\frac{p+q-2}{2}}}{\prod_{\alpha > 0} \alpha(x)} \sum_{h=1}^p \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q}^h} \text{sgn}(\sigma) (-1)^{h+1} t_h^{p-(k+1)} \prod_{a=1}^{h-1} t_{\sigma(a)}^{a-1} \prod_{a=h+1}^{p+q} t_{\sigma(a)}^{a-2} & \text{si } p \geq k+1 \\ \frac{(-1)^{p+q} (-2)^{\frac{(p+q-1)(p+q)}{2}} \prod_{i=1}^{p+q} t_i^{-\frac{p+q-2}{2}}}{\prod_{\alpha > 0} \alpha(x)} \sum_{h=p+1}^{p+q} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q}^h} \text{sgn}(\sigma) (-1)^{h+1} t_h^{p-(k+1)} \prod_{a=1}^{h-1} t_{\sigma(a)}^{a-1} \prod_{a=h+1}^{p+q} t_{\sigma(a)}^{a-2} & \text{sinon} \end{cases}$$

où \mathcal{S}_{p+q}^h est le stabilisateur du point h sous l'action naturelle de \mathcal{S}_{p+q} sur $\{1, \dots, p+q\}$.

Proposition B.0.8. *Supposons ici $p < k + 1$. Fixons $A^{p+1} = \{\mu_k, 1 \leq k \leq [\mathcal{S}_{p+q}^1 : (\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q)^{p+1}]\}$ un système de représentants des classes à droite. On obtient alors*

$$\sum_{h=p+1}^{p+q} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q}^h} \operatorname{sgn}(\sigma) (-1)^{h+1} t_h^{p-(k+1)} \prod_{a=1}^{h-1} t_{\sigma(a)}^{a-1} \prod_{a=h+1}^{p+q} t_{\sigma(a)}^{a-2} = (-1)^p \sum_{\mu \in A^{p+1}} \operatorname{sgn}(\mu) \sum_{\omega \in \mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q} \operatorname{sgn}(\omega) e^{i\omega(\mu\lambda)(x)} \quad (\text{B.2})$$

avec $\lambda = \sum_{i=1}^p (i-1)e_i + (p-(k+1))e_{p+1} + \sum_{i=p+2}^{p+q} (i-2)e_i$.

Démonstration. La preuve de cette proposition est similaire à celle de la proposition C.0.1. □

Notons $\xi = -\sum_{i=1}^{p+q} \frac{p+q-2}{2} e_i$. Ainsi,

Corollaire B.0.9. *Pour tout $x \in \mathfrak{t}'_0^{\text{reg}}$, on a*

$$p(x)\Theta_{\Pi'_k}(\widetilde{\exp}(x)) = \frac{(-1)^{q-1} (-2)^{\frac{(p+q-1)(p+q)}{2}}}{\prod_{\alpha>0} \alpha(x)} \sum_{\mu \in A^{p+1}} \operatorname{sgn}(\mu) \sum_{\omega \in \mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q} \operatorname{sgn}(\omega) e^{i\omega(\mu\lambda)(x)}$$

où λ est défini comme dans la proposition B.0.8

Remarque B.0.10. 1. λ est \mathcal{S}_{p+q} -régulier,

2. $(\forall \mu \in A^{p+1}), \mu\lambda + \xi$ est \mathcal{S}_{p+q} -régulier,

En utilisant les équations (4.4) et (4.6), on obtient le corollaire suivant :

Corollaire B.0.11. *Pour tout $x \in \mathfrak{t}'_0^{\text{reg}}$, on a, à une constante près,*

$$p(x)\Theta_{\Pi'_k}(\widetilde{\exp}(x)) = K \sum_{\mu \in A^{p+1}} \operatorname{sgn}(\mu) F_{G_{\mu\lambda}}(x)$$

où $F_{G_{\mu\lambda}}$ est défini dans la section 4.2 et où λ est défini comme dans la proposition B.0.8.

Proposition B.0.12. *Considérons le cas $p \geq k + 1$ et soit $A^1 = \{\mu_k, 1 \leq k \leq [\mathcal{S}_{p+q}^1 : (\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q)^1]\}$ un système de représentants des classes à droite. On a :*

$$\sum_{h=1}^p \sum_{\sigma \in \mathcal{S}^h} \operatorname{sgn}(\sigma) (-1)^{h+1} t_h^{p-(k+1)} \prod_{a=1}^{h-1} t_{\sigma(a)}^{a-1} \prod_{a=h+1}^{p+q} t_{\sigma(a)}^{a-2} = \sum_{\mu \in A^1} \operatorname{sgn}(\mu) \sum_{w \in \mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q} \operatorname{sgn}(w) e^{iw(\mu\lambda)(x)} \quad (\text{B.3})$$

avec $\lambda = (p-(k+1))e_1 + \sum_{a=2}^{p+q} (a-2)e_a$.

Démonstration. De nouveau, la preuve de cette proposition est similaire à celle de la proposition C.0.1. □

On distingue alors deux cas.

Le cas $k < -q + 1$

Remarque B.0.13. Dans ce cas, on a :

1. λ est \mathcal{S}_{p+q} -régulier,
2. $(\forall \mu \in A^1), \mu\lambda + \xi$ est \mathcal{S}_{p+q} -régulier.

De nouveau, on obtient :

Corollaire B.0.14. Pour tout $x \in \mathfrak{t}'_0^{\text{reg}}$, on obtient, à une constante près,

$$p(x)\Theta_{\Pi'_k}(\widetilde{\exp}(x)) = K' \sum_{\mu \in A^1} \text{sgn}(\mu) F_{G_{\mu\lambda}}(x).$$

Le cas $k \in [-q + 1, p - 1]$

Le stabilisateur de λ dans \mathcal{S}_{p+q} , noté $\mathcal{S}_{p+q}^\lambda$, est donné par :

$$\mathcal{S}_{p+q}^\lambda = \{Id, (1, p - k + 1)\}.$$

Pour tout $\mu \in \mathcal{S}_{p+q}^1$, on a :

$$\mathcal{S}_{p+q}^{\mu\lambda} = \{Id, (\mu(1), \mu(p - k + 1))\} = \{Id, (1, \mu(p - k + 1))\}.$$

Notons A_k^1 le sous-ensemble de A^1 défini par :

$$A_k^1 = \{\mu \in A^1 \mid \mu(p - k + 1) \in \{2, \dots, p\}\}.$$

D'après le corollaire D.0.10, on obtient le lemme suivant :

Lemme B.0.15. Pour tout $\mu \in A^1$, on a :

$$\sum_{\omega \in \mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q} \text{sgn}(\omega) e^{i\omega(\mu\lambda + \xi)(x)} = 0 \Leftrightarrow \mu \in A_k^1$$

Corollaire B.0.16. Pour $k \in [-q + 1, p - 1]$, on a :

$$p(x)\Theta_{\Pi'_k}(\widetilde{\exp}(x)) = \frac{(-1)^{p+q-1} (-2)^{\frac{(p+q-1)(p+q)}{2}}}{\prod_{\alpha > 0} \alpha(x)} \sum_{\mu \in A^1 \setminus A_k^1} \text{sgn}(\mu) \sum_{\omega \in \mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q} \text{sgn}(\omega) e^{i\omega(\mu\lambda + \xi)(x)}$$

Annexe C

Le cas ($G = \mathrm{U}(2, \mathbb{C}), G' = \mathrm{U}(p, q, \mathbb{C})$)

Comme montré dans l'équation (3.32), pour tout $\tilde{\tau} \in \tilde{T}'^{\mathrm{reg}}$ le caractère $\Theta_{\Pi'}$ de $\Pi' \in \mathcal{R}_\omega(\tilde{G}')$ est donné par :

$$\Theta_{\Pi'}(\tilde{\tau}) = \frac{(-1)^{mq + \frac{(m-1)m}{2}} \left(\prod_{a=1}^{p+q} t'_a \right)^{\frac{m}{2}}}{(2i\pi)^m m!} \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \sum_{w \in \mathcal{W}} \sum_{\beta \in \mathcal{S}_m} \mathrm{sgn}(w) \mathrm{sgn}(\beta) \prod_{b=1}^m \int_{S^1} \frac{t_b^{p-m-2+w^{-1}(b)-\lambda_{w^{-1}(b)}+\beta^{-1}(b)}}{\prod_{a=1}^p (t_b - rt'_a) \prod_{a=p+1}^{p+q} \left(t_b - \frac{1}{rt'_a} \right)} dt_b.$$

Considérons à présent $m = 2$, et notons I la quantité suivante :

$$I = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \sum_{w \in \mathcal{S}_2} \sum_{\beta \in \mathcal{S}_2} \mathrm{sgn}(w) \mathrm{sgn}(\beta) \left(\int_{S^1} \frac{t_1^{p-4+w^{-1}(1)-\lambda_{w^{-1}(1)}+\beta^{-1}(1)}}{\prod_{a=1}^p (t_1 - rt'_a) \prod_{a=p+1}^{p+q} \left(t_1 - \frac{1}{rt'_a} \right)} dt_1 \right) \left(\int_{S^1} \frac{t_2^{p-4+w^{-1}(2)-\lambda_{w^{-1}(2)}+\beta^{-1}(2)}}{\prod_{a=1}^p (t_2 - rt'_a) \prod_{a=p+1}^{p+q} \left(t_2 - \frac{1}{rt'_a} \right)} dt_2 \right)$$

On obtient :

$$I = 2 \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ 0 < r < 1}} \left(\int_{S^1} \frac{t_1^{p-2-\lambda_1}}{X(t_1)} dt_1 \int_{S^1} \frac{t_2^{p-\lambda_2}}{X(t_2)} dt_2 - \int_{S^1} \frac{t_1^{p-1-\lambda_2}}{X(t_1)} dt_1 \int_{S^1} \frac{t_2^{p-1-\lambda_1}}{X(t_2)} dt_2 \right)$$

avec $X(t) = \prod_{a=1}^p (t - rt'_a) \prod_{a=p+1}^{p+q} \left(t - \frac{1}{rt'_a} \right)$.

On utilise à présent le lemme 3.5.7 pour déterminer explicitement les intégrales en question. On va donc distinguer plusieurs cas (dans lesquels l'écriture $h \neq i$ signifie $h \in \{1, \dots, p+q\}$ et $h \neq i$) :

1. $p - 2 - \lambda_1 \geq 0$ et $p - 1 - \lambda_2 \geq 0$

$$\begin{aligned} I &= 2(2i\pi)^2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{t_i^{p-2-\lambda_1} t_j^{p-\lambda_2} - t_i^{p-1-\lambda_2} t_j^{p-1-\lambda_1}}{\prod_{h \neq i} (t'_i - t'_h) \prod_{h \neq j} (t'_j - t'_h)} \\ &= 2(2i\pi)^2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{t_i^{p-2-\lambda_1} t_j^{p-1-\lambda_2} (t'_j - t'_i)}{\prod_{h \neq i} (t'_i - t'_h) \prod_{h \neq j} (t'_j - t'_h)} \end{aligned}$$

2. $p - 1 - \lambda_1 < 0$ et $p - \lambda_2 < 0$

$$\begin{aligned} I &= 2(2i\pi)^2 \sum_{i=p+1}^{p+q} \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{t_i'^{p-2-\lambda_1} t_j'^{p-\lambda_2} - t_i'^{p-1-\lambda_2} t_j'^{p-1-\lambda_1}}{\prod_{h \neq i} (t_i' - t_h') \prod_{h \neq j} (t_j' - t_h')} \\ &= 2(2i\pi)^2 \sum_{i=p+1}^{p+q} \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{t_i'^{p-2-\lambda_1} t_j'^{p-1-\lambda_2} (t_j' - t_i')}{\prod_{h \neq i} (t_i' - t_h') \prod_{h \neq j} (t_j' - t_h')} \end{aligned}$$

3. $p - 2 - \lambda_1 \geq 0$ et $p - \lambda_2 < 0$

$$\begin{aligned} I &= -2(2i\pi)^2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{t_i'^{p-2-\lambda_1} t_j'^{p-\lambda_2} - t_i'^{p-1-\lambda_1} t_j'^{p-1-\lambda_2}}{\prod_{h \neq i} (t_i' - t_h') \prod_{h \neq j} (t_j' - t_h')} \\ &= -2(2i\pi)^2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{t_i'^{p-2-\lambda_1} t_j'^{p-1-\lambda_2} (t_j' - t_i')}{\prod_{h \neq i} (t_i' - t_h') \prod_{h \neq j} (t_j' - t_h')} \end{aligned}$$

4. $p - 1 - \lambda_1 < 0$ et $p - 1 - \lambda_2 \geq 0$

$$\begin{aligned} I &= -2(2i\pi)^2 \sum_{i=p+1}^{p+q} \sum_{j=1}^p \frac{t_i'^{p-2-\lambda_1} t_j'^{p-\lambda_2} - t_i'^{p-1-\lambda_1} t_j'^{p-1-\lambda_2}}{\prod_{h \neq i} (t_i' - t_h') \prod_{h \neq j} (t_j' - t_h')} \\ &= 2(2i\pi)^2 \sum_{i=p+1}^{p+q} \sum_{j=1}^p \frac{t_i'^{p-2-\lambda_1} t_j'^{p-1-\lambda_2} (t_j' - t_i')}{\prod_{h \neq i} (t_i' - t_h') \prod_{h \neq j} (t_j' - t_h')} \end{aligned}$$

5. $p - 1 - \lambda_1 = 0$ (donc $p - 2 - \lambda_1 = -1$)

(a) $p - 1 - \lambda_2 \geq 0$

$$I = 2(2i\pi)^2 \left(- \sum_{i=p+1}^{p+q} \sum_{j=1}^p \frac{t_i'^{-1} t_j'^{p-\lambda_2}}{\prod_{h \neq i} (t_i' - t_h') \prod_{h \neq j} (t_j' - t_h')} - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{t_j'^{p-1-\lambda_2}}{\prod_{h \neq i} (t_i' - t_h') \prod_{h \neq j} (t_j' - t_h')} \right)$$

(b) $p - \lambda_2 < 0$

$$I = 2(2i\pi)^2 \left(\sum_{i=p+1}^{p+q} \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{t_i'^{-1} t_j'^{p-\lambda_2}}{\prod_{h \neq i} (t_i' - t_h') \prod_{h \neq j} (t_j' - t_h')} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{t_j'^{p-1-\lambda_2}}{\prod_{h \neq i} (t_i' - t_h') \prod_{h \neq j} (t_j' - t_h')} \right)$$

(c) $p - \lambda_2 = 0$ (donc $(p - 1 - \lambda_2) = -1$)

$$I = 2(2i\pi)^2 \left(- \sum_{i=p+1}^{p+q} \sum_{j=1}^p \frac{t_i'^{-1}}{\prod_{h \neq i} (t_i' - t_h') \prod_{h \neq j} (t_j' - t_h')} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{t_j'^{-1}}{\prod_{h \neq i} (t_i' - t_h') \prod_{h \neq j} (t_j' - t_h')} \right)$$

6. $p - \lambda_2 = 0$ (donc $p - 1 - \lambda_2 = -1$)

(a) $p - 2 - \lambda_1 \geq 0$

$$I = 2(2i\pi)^2 \left(\sum_{i=1}^p \sum_{\substack{j=1 \\ h \neq i}}^p \frac{t_i^{p-2-\lambda_1}}{\prod_{h \neq i} (t_i - t_h) \prod_{h \neq j} (t_j - t_h)} + \sum_{i=1}^p \sum_{\substack{j=p+1 \\ h \neq i}}^{p+q} \frac{t_i^{p-1-\lambda_1} t_j^{-1}}{\prod_{h \neq i} (t_i - t_h) \prod_{h \neq j} (t_j - t_h)} \right)$$

(b) $p - 1 - \lambda_1 < 0$

$$I = 2(2i\pi)^2 \left(- \sum_{i=p+1}^{p+q} \sum_{\substack{j=1 \\ h \neq i}}^p \frac{t_i^{p-2-\lambda_1}}{\prod_{h \neq i} (t_i - t_h) \prod_{h \neq j} (t_j - t_h)} - \sum_{i=p+1}^{p+q} \sum_{\substack{j=p+1 \\ h \neq i}}^{p+q} \frac{t_i^{p-1-\lambda_1} t_j^{-1}}{\prod_{h \neq i} (t_i - t_h) \prod_{h \neq j} (t_j - t_h)} \right)$$

Dans le cadre de $U(p, q, \mathbb{C})$, pour garder les notations du chapitre 4, on a :

$$\prod_{\alpha > 0} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) = \prod_{1 \leq i < j \leq p+q} (h_i^{\frac{1}{2}} h_j^{-\frac{1}{2}} - h_i^{-\frac{1}{2}} h_j^{\frac{1}{2}}) = \prod_{k=1}^{p+q} h_k^{-\frac{p+q-1}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq p+q} (h_i - h_j)$$

Fixons alors $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 3$. Ainsi, pour tout $h = \widetilde{\exp}(x)$, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha > 0} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) \Theta_{\Pi'}(h) &= - \prod_{i=1}^{p+q} h_i \sum_{\substack{i,j=p+1 \\ i \neq j}}^{p+q} \frac{h_i^{p-2-\lambda_1} h_j^{p-1-\lambda_2} (h_i - h_j)}{\prod_{a \neq i} (h_i - h_a) \prod_{b \neq j} (h_j - h_b)} \\ &= - \prod_{i=1}^{p+q} h_i \left(\sum_{\substack{i,j=p+1 \\ i < j}}^{p+q} \frac{h_i^{p-2-\lambda_1} h_j^{p-1-\lambda_2} (h_i - h_j)}{\prod_{a \neq i} (h_i - h_a) \prod_{b \neq j} (h_j - h_b)} + \sum_{\substack{i,j=p+1 \\ j < i}}^{p+q} \frac{h_i^{p-2-\lambda_1} h_j^{p-1-\lambda_2} (h_i - h_j)}{\prod_{a \neq i} (h_i - h_a) \prod_{b \neq j} (h_j - h_b)} \right) \end{aligned}$$

i.e. $\prod_{\alpha > 0} (h^{\frac{\alpha}{2}} - h^{-\frac{\alpha}{2}}) \Theta_{\Pi'}(h)$ est donné par la formule suivante :

$$p(x) \Theta_{\Pi'}(\widetilde{\exp}(x)) = K(x) \left(\sum_{\substack{i,j=p+1 \\ i < j}}^{p+q} (-1)^{i+j} h_i^{p-2-\lambda_1} h_j^{p-1-\lambda_2} \prod_{\substack{1 \leq a < b \leq p+q \\ a \neq i, b \neq j}} (h_a - h_b) + \sum_{\substack{i,j=p+1 \\ j < i}}^{p+q} (-1)^{i+j-1} h_i^{p-2-\lambda_1} h_j^{p-1-\lambda_2} \prod_{\substack{1 \leq a < b \leq p+q \\ a \neq i, b \neq j}} (h_a - h_b) \right)$$

$$\text{avec } K(x) = \frac{2^{\frac{(p+q-1)(p+q)}{2}}}{\prod_{\alpha > 0} \alpha(x)} \prod_{i=1}^{p+q} h_i^{\frac{p+q-3}{2}}.$$

Proposition C.0.1. *On a :*

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i,j=p+1 \\ i < j}}^{p+q} (-1)^{i+j} h_i^{p-2-\lambda_1} h_j^{p-1-\lambda_2} \prod_{\substack{1 \leq a < b \leq p+q \\ a \neq i, b \neq j}} (h_a - h_b) + \sum_{\substack{i,j=p+1 \\ j < i}}^{p+q} (-1)^{i+j-1} h_i^{p-2-\lambda_1} h_j^{p-1-\lambda_2} \prod_{\substack{1 \leq a < b \leq p+q \\ a \neq i, b \neq j}} (h_a - h_b) \\ &= (-1)^{q-1} \sum_{\mu \in A^{p+1, p+q}} \text{sgn}(\mu) \sum_{\omega \in \mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q} \text{sgn}(\omega) e^{i\omega(\mu\lambda)(x)}. \end{aligned}$$

avec $\lambda = \sum_{i=1}^p (i-1)e_i + (p-2-\lambda_1)e_{p+1} + \sum_{i=p+2}^{p+q-1} (i-2)e_i + (p-1-\lambda_2)e_{p+q}$ et où $A^{p+1, p+q}$ est un système de représentations des classes à droites de $\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q / (\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q)^{p+1, p+q}$.

Remarque C.0.2. Remarquons tout d'abord que, pour $i < j$, on a :

$$\frac{\prod_{1 \leq a < b \leq p+q} h(a-h_b)}{\prod_{a \neq i} (h_i - h_a) \prod_{b \neq j} (h_j - h_b)} = \frac{(-1)^{i+j}}{h_j - h_i} \prod_{\substack{1 \leq a < b \leq p+q \\ a \neq i, b \neq j}} (h_a - h_b)$$

De plus, en utilisant la formule de Vandermonde, que pour $p+1 \leq i < j \leq p+q$, on a

$$\prod_{\substack{1 \leq a < b \leq p+q \\ a \neq i, b \neq j}} (h_a - h_b) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q}^{i,j}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{a=1}^{i-1} h_{\sigma(a)}^{a-1} \prod_{a=i+1}^{j-1} h_{\sigma(a)}^{a-2} \prod_{a=j+1}^{p+q} h_{\sigma(a)}^{a-3}$$

où $\mathcal{S}_{p+q}^{i,j}$ est le stabilisateur des points i, j sous l'action naturelle de \mathcal{S}_{p+q} . Ainsi, pour $p+1 \leq i < j \leq p+q$ et $\sigma \in \mathcal{S}_{p+q}^{i,j}$, définissons $A_{i,j,\sigma}$ par

$$A_{i,j,\sigma} = (-1)^{i+j} \text{sgn}(\sigma) h_i^{p-2-\lambda_1} h_j^{p-1-\lambda_2} \prod_{a=1}^{i-1} h_{\sigma(a)}^{a-1} \prod_{a=i+1}^{j-1} h_{\sigma(a)}^{a-2} \prod_{a=j+1}^{p+q} h_{\sigma(a)}^{a-3}$$

De la même manière, si $j < i$, notons

$$A_{i,j,\sigma} = (-1)^{i+j-1} \text{sgn}(\sigma) h_i^{p-2-\lambda_1} h_j^{p-1-\lambda_2} \prod_{a=1}^{j-1} h_{\sigma(a)}^{a-1} \prod_{a=j+1}^{i-1} h_{\sigma(a)}^{a-2} \prod_{a=i+1}^{p+q} h_{\sigma(a)}^{a-3}$$

Démonstration. On divise la preuve en plusieurs étapes :

1. On montre que pour tout $p+1 \leq i \neq j \leq p+q$ et $\sigma \in \mathcal{S}_{p+q}^{i,j}$, il existe $\omega \in \mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q$ et $\mu \in \mathcal{S}_{p+q}^{p+1,p+q}$ tels que

$$\begin{aligned} A_{i,j,\sigma} &= \text{sgn}(\mu) \text{sgn}(\omega) e^{i\omega(\mu\lambda)(x)} = \text{sgn}(\mu) \text{sgn}(\omega) \prod_{a=1}^{p+q} h_{\omega\mu(a)}^{\lambda_a} \\ &= \text{sgn}(\mu) \text{sgn}(\omega) \prod_{a=1}^p h_{\omega\mu(a)}^{a-1} h_{\omega\mu(p+1)}^{p-2-\lambda_1} \prod_{a=p+2}^{p+q-1} h_{\omega\mu(a)}^{a-2} h_{\omega\mu(p+q)}^{p-1-\lambda_2} \end{aligned}$$

Supposons sans perte de généralité $i < j$. On obtient alors le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega\mu(k) = \sigma(k), k \leq p \\ \omega\mu(p+1) = \sigma(i) = i \\ \omega\mu(b) = \sigma(b-1), p+2 \leq b \leq i \\ \omega\mu(c) = \sigma(c), i+1 \leq c \leq j-1 \\ \omega\mu(d) = \sigma(d+1), j \leq d \leq p+q-1 \\ \omega\mu(p+q) = \sigma(j) = j \end{array} \right.$$

Posons $\alpha = (p+1, p+2, \dots, i)(j, j+1, \dots, p+q)^{-1}$. Ainsi, pour i, j, σ fixés, on cherche $\omega \in \mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q$ et $\mu \in \mathcal{S}_{p+q}^{p+1,p+q}$ tels que

$$\omega\mu\alpha = \sigma$$

c'est-à-dire

$$\omega = \sigma\alpha^{-1}\mu^{-1}$$

Pour cela, soit $\{a_1, \dots, a_p\}$ tels que $\sigma\alpha^{-1}(\{a_1, \dots, a_p\}) = \{1, \dots, p\}$. On définit μ^{-1} sur $[[1, p]]$ par

$$\mu^{-1}(i) = a_i$$

De même, $\mu^{-1}(p+1) = p+1$ et $\mu^{-1}(p+q) = p+q$. Pour finir, fixons $\{b_{p+2}, \dots, b_{p+q-1}\}$ tels que $\sigma\alpha^{-1}(\{b_{p+2}, \dots, b_{p+q-1}\}) = \{p+2, \dots, p+q-1\}$ et on définit μ^{-1} sur $[[p+2, p+q-1]]$ par $\mu^{-1}(i) = b_i$. On a alors $\mu \in \mathcal{S}_{p+q}^{p+1, p+q}$ et ω définit par $\sigma\alpha^{-1}\mu^{-1} \in \mathcal{W}(\mathbb{F})$ par construction. De même, on a :

$$\text{sgn}(\omega) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\mu) \text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\mu) (-1)^{i-p-1} (-1)^{p+q-j} = (-1)^{q-1} (-1)^{i+j} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\mu)$$

On procède de la même manière dans le cas $i > j$.

2. On montre que l'on peut choisir $\mu \in A^{p+1, p+q}$. On a initialement fixé un système de représentant initialement $\{\mu_i\}$ pour $A^{p+1, p+q}$. Soit (ω, μ) le couple obtenu précédemment. Il existe un unique μ_i tel que $[\mu_i] = [\mu]$. Ainsi, il existe $\sigma_i \in (\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q)^{p+1, p+q}$ tel que $\mu = \sigma_i \mu_i$. Ainsi, on a

$$\sigma = \omega\mu\alpha = \omega(\sigma_i \mu_i)\alpha = (\omega\sigma_i)\mu_i\alpha$$

et $\omega\sigma_i \in \mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q$.

3. Le nombre d'éléments dans la somme de gauche est égale à

$$|\{p+1 \leq i \neq j \leq p+q\}| |\mathcal{S}_{p+q-2}| = q(q-1)(p+q-2)!$$

et pour le membre de droite, on obtient :

$$\frac{|\mathcal{S}_{p+q}^{p+1, p+2}|}{|(\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q)^{p+1, p+2}|} |\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q| = \frac{(p+q-2)!}{p!(q-2)!} p!q! = q(q-1)(p+q-2)!$$

4. Pour finir, on montre facilement que si l'on a deux triplets $(i, j, \sigma) \neq (i', j', \sigma')$ tels que $A_{i, j, \sigma} = A_{i', j', \sigma'}$, alors, il existe $(\omega, \mu) \neq (\omega', \mu') \in (\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q) \times A^{p+1, p+q}$ tels que $\text{sgn}(\omega) \text{sgn}(\mu) e^{i\omega(\mu\lambda)(x)} \neq \text{sgn}(\omega') \text{sgn}(\mu') e^{i\omega'(\mu'\lambda)(x)}$

Ce qui conclue la preuve. □

Annexe D

Quelques calculs

Soit G un groupe de Lie réel réductif, K un sous-groupe maximal compact avec $\text{rk}(G) = \text{rk}(K)$ et soit T un tore maximal tel que $T \subseteq K \subseteq G$. Considérons $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ le groupe de Weyl de G et soit $\mathcal{W}(\mathfrak{k}) = \mathcal{W}(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ le groupe de Weyl compact associé à K .

Proposition D.0.1. Soient μ et μ' dans \mathcal{W} tel qu'il existe $\sigma \in \mathcal{W}(\mathfrak{k})$ tel que $\mu = \sigma\mu'$. Alors,

$$\text{sgn}(\mu) \sum_{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{k})} \text{sgn}(w) e^{iw(\mu\lambda)(x)} = \text{sgn}(\mu') \sum_{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{k})} \text{sgn}(w) e^{iw(\mu'\lambda)(x)}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\mu) \sum_{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{k})} \text{sgn}(w) e^{iw(\mu\lambda)(x)} &= \text{sgn}(\mu) \sum_{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{k})} \text{sgn}(w) e^{iw(\sigma\mu'\lambda)(x)} \\ &= \text{sgn}(\mu) \sum_{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{k})} \text{sgn}(w) e^{i(w\sigma)(\mu'\lambda)(x)} \\ &= \text{sgn}(\mu) \sum_{\tau \in \mathcal{W}(\mathfrak{k})} \text{sgn}(\tau\sigma^{-1}) e^{i\tau(\mu'\lambda)(x)} \quad (\tau = w\sigma) \\ &= \text{sgn}(\mu) \text{sgn}(\sigma) \sum_{\tau \in \mathcal{W}(\mathfrak{k})} \text{sgn}(\tau) e^{i\tau(\mu'\lambda)(x)} \\ &= \text{sgn}(\mu') \sum_{\tau \in \mathcal{W}(\mathfrak{k})} \text{sgn}(\tau) e^{i\tau(\mu'\lambda)(x)} \end{aligned}$$

□

Proposition D.0.2. Soit $\sigma \in \mathcal{W}(\mathfrak{k})$. Alors :

$$\sum_{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{k})} \text{sgn}(w) e^{iw\lambda(x)} = \text{sgn}(\sigma) \sum_{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{k})} \text{sgn}(w) e^{iw(\sigma\lambda)(x)}$$

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathcal{W}(\mathfrak{t})$. On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\omega \in \mathcal{W}(\mathfrak{t})} \operatorname{sgn}(\omega) e^{i\omega(\sigma\lambda)(x)} &= \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\omega \in \mathcal{W}(\mathfrak{t})} \operatorname{sgn}(\omega) e^{i(\omega\sigma)\lambda(x)} \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\alpha \in \mathcal{W}(\mathfrak{t})} \operatorname{sgn}(\alpha\sigma^{-1}) e^{i\alpha\lambda(x)} \quad (\alpha = \omega\sigma) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{W}(\mathfrak{t})} \operatorname{sgn}(\alpha) e^{i\alpha\lambda(x)} \end{aligned}$$

□

Corollaire D.0.3. Soit $\sigma \in \mathcal{W}(\mathfrak{t})$ tel que $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ et $\sigma(\lambda) = \lambda$. Alors, pour tout $x \in \mathfrak{t}$, on a :

$$\sum_{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{t})} \operatorname{sgn}(w) e^{iw\lambda(x)} = 0.$$

Lemme D.0.4. Soient A et A' deux systèmes de représentants des classes à droite de $\mathcal{W} / \mathcal{W}(\mathfrak{t})$. Alors :

$$\sum_{\mu \in A} \operatorname{sgn}(\mu) \sum_{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{t})} \operatorname{sgn}(w) e^{iw(\mu\lambda)(x)} = \sum_{\mu \in A'} \operatorname{sgn}(\mu) \sum_{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{t})} \operatorname{sgn}(w) e^{iw(\mu\lambda)(x)}.$$

Démonstration. Soit $A = \{\mu_i\}$ et $A' = \{\mu'_i\}$. Pour tout i , il existe $\sigma_i \in \mathcal{W}(\mathfrak{t})$ tel que $\mu'_i = \sigma_i \mu_i$. En utilisant la proposition D.0.2, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{\mu_i \in A} \operatorname{sgn}(\mu_i) \sum_{\omega \in \mathcal{W}(\mathfrak{t})} \operatorname{sgn}(\omega) e^{i\omega(\mu_i\lambda)(x)} &= \sum_{\mu_i \in A} \operatorname{sgn}(\mu_i) \operatorname{sgn}(\sigma_i) \sum_{\omega \in \mathcal{W}(\mathfrak{t})} \operatorname{sgn}(\omega) e^{i\omega(\sigma_i \mu_i \lambda)(x)} \\ &= \sum_{\mu'_i \in A'} \operatorname{sgn}(\mu'_i) \sum_{\omega \in \mathcal{W}(\mathfrak{t})} \operatorname{sgn}(\omega) e^{i\omega(\mu'_i \lambda)(x)} \end{aligned}$$

□

De la proposition D.0.1, on obtient :

Corollaire D.0.5. Soit A un système de représentant des classes à droite de $\mathcal{W} / \mathcal{W}(\mathfrak{t})$. Alors :

$$\sum_{\mu \in \mathcal{W}} \operatorname{sgn}(\mu) \sum_{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{t})} \operatorname{sgn}(w) e^{iw(\mu\lambda)(x)} = [\mathcal{W} : \mathcal{W}(\mathfrak{t})] \sum_{\mu \in A} \operatorname{sgn}(\mu) \sum_{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{t})} \operatorname{sgn}(w) e^{iw(\mu\lambda)(x)}.$$

Définition D.0.6. Soit λ une forme linéaire dans \mathfrak{t} .

1. La forme linéaire λ sera dite \mathcal{W} -régulière s'il n'existe pas d'élément $\sigma \in \mathcal{W}$ ($\sigma \neq Id$) tel que $\sigma(\lambda) = \lambda$.
2. La forme linéaire λ sera dite $\mathcal{W}(\mathfrak{t})$ -régulière s'il n'existe pas d'élément $\sigma \in \mathcal{W}(\mathfrak{t})$ ($\sigma \neq Id$) tel que $\sigma(\lambda) = \lambda$.

Remarque D.0.7. Toute forme linéaire \mathscr{W} -régulière est \mathscr{W} (f)-régulière. La réciproque est fautive. Prenons $G = U(2, 2, \mathbb{C})$ et soit $\lambda = e_1 + 2e_2 + e_3 + 3e_4$. Alors, pour $\sigma \in \mathcal{S}_4$, on a $\sigma(\lambda) = \lambda$ si et seulement si $\sigma \in \{Id, (1, 3)\}$. Ainsi, λ n'est pas \mathcal{S}_4 -régulière mais $(1, 3) \notin \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_2$. Ainsi, λ est $\mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_2$ -régulière.

Théorème D.0.8. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n$. Alors :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\sigma) X_{\sigma(1)}^{\lambda_1} \dots X_{\sigma(n)}^{\lambda_n} = 0 \ (\forall X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{C}^n) \Leftrightarrow (\exists i \neq j \in [1, n]) \mid \lambda_i = \lambda_j.$$

Notation D.0.9. Par la suite, pour $X = (X_1, \dots, X_n)$, on notera $V(X)$ la matrice (de Vandermonde) carrée d'ordre n suivante :

$$V(X) = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 & \dots & X_1^{n-1} \\ 1 & X_2 & X_2^2 & \dots & X_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_n & X_n^2 & \dots & X_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

de déterminant

$$\det(V(X)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_j - X_i).$$

Démonstration. Commençons par remarquer, en utilisant la définition standard du déterminant, que

$$\sum_{\omega \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\omega) X_{\omega(1)}^{\lambda_1} \dots X_{\omega(n)}^{\lambda_n} = \det(Q(X))$$

avec

$$Q(X) = \det \begin{pmatrix} X_1^{\lambda_1} & X_1^{\lambda_2} & \dots & X_1^{\lambda_n} \\ X_2^{\lambda_1} & X_2^{\lambda_2} & \dots & X_2^{\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n^{\lambda_1} & X_n^{\lambda_2} & \dots & X_n^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Si il existe $i \neq j$ tel que $\lambda_i = \lambda_j$, alors, on a deux colonnes identiques dans $Q(X)$, donc le déterminant est nul pour tout X .

Réciproquement, supposons que Q est le polynôme nul.

Posons alors $X_1 = 1, X_2 = X, X_3 = X^2, \dots, X_n = X^{n-1}, X \in \mathbb{R}$. On obtient alors :

$$0 = Q(1, X, X^2, \dots, X^{n-1}) = \det(V(X^{\lambda_1}, X^{\lambda_2}, \dots, X^{\lambda_n})) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X^{\lambda_j} - X^{\lambda_i})$$

Notons $P_{i,j}(X) = X^{\lambda_j} - X^{\lambda_i}$. Comme Q a une infinité de racine, il existe $i, j \in [1, n]$ tel que $P_{i,j}$ ait une infinité de racines, i.e. $X^{\lambda_j} - X^{\lambda_i}$. Finalement, $\lambda_i = \lambda_j$. □

A présent, regardons un résultat que l'on utilisera pour $U(p, q, \mathbb{C})$.

Pour tout $X = (X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{p+q}) \in \mathbb{C}^{p+q}$, et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{p+q}) \in \mathbb{N}^{p+q}$, on obtient :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q} \text{sgn}(\sigma) X_{\sigma(1)}^{\lambda_1} \dots X_{\sigma(p+q)}^{\lambda_{p+q}} = \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \text{sgn}(\sigma) X_{\sigma(1)}^{\lambda_1} \dots X_{\sigma(p)}^{\lambda_p} \right) \left(\sum_{\tau \in \mathcal{S}_q} \text{sgn}(\tau) X_{\tau(p+1)}^{\lambda_{p+1}} \dots X_{\tau(p+q)}^{\lambda_{p+q}} \right).$$

Ainsi, d'après le théorème précédent, on obtient :

Corollaire D.0.10.

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q} \text{sgn}(\sigma) X_{\sigma(1)}^{\lambda_1} \dots X_{\sigma(p+q)}^{\lambda_{p+q}} = 0 \quad (\forall X = (X_1, \dots, X_{p+q}) \in \mathbb{C}^{p+q}) \Leftrightarrow \lambda \text{ est } \mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_q \text{-singulier} \quad (\text{D.1})$$

Bibliographie

- [1] Jeffrey Adams. The theta correspondence over \mathbb{R} . In *Harmonic analysis, group representations, automorphic forms and invariant theory*, volume 12 of *Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap.*, pages 1–39. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.
- [2] Anne-Marie Aubert and Tomasz Przebinda. A reverse engineering approach to the Weil representation. *Cent. Eur. J. Math.*, 12(10) :1500–1585, 2014.
- [3] Nicole Berline, Ezra Getzler, and Michèle Vergne. *Heat kernels and Dirac operators*. Grundlehren Text Editions. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Corrected reprint of the 1992 original.
- [4] Abderrazak Bouaziz. Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives. *Invent. Math.*, 115(1) :163–207, 1994.
- [5] Shun-Jen Cheng and Weiqiang Wang. *Dualities and representations of Lie superalgebras*, volume 144 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [6] David H. Collingwood and William M. McGovern. *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*. Van Nostrand Reinhold Mathematics Series. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.
- [7] René Deheuvels. *Formes quadratiques et groupes classiques*. Presses Universitaires de France, Paris, 1981. Mathématiques. [Mathematics].
- [8] Michel Duflo and Michèle Vergne. Orbites coadjointes et cohomologie équivariante. In *The orbit method in representation theory (Copenhagen, 1988)*, volume 82 of *Progr. Math.*, pages 11–60. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [9] Thomas J. Enright. Analogues of Kostant’s u-cohomology formulas for unitary highest weight modules. *J. Reine Angew. Math.*, 392 :27–36, 1988.
- [10] Roe Goodman and Nolan R. Wallach. *Symmetry, representations, and invariants*, volume 255 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Dordrecht, 2009.
- [11] Harish-Chandra. Representations of semisimple Lie groups. III. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 76 :234–253, 1954.
- [12] Harish-Chandra. Discrete series for semisimple Lie groups. I. Construction of invariant eigendistributions. *Acta Math.*, 113 :241–318, 1965.

- [13] Harish-Chandra. Invariant eigendistributions on a semisimple Lie group. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 119 :457–508, 1965.
- [14] Harish-Chandra. Discrete series for semisimple Lie groups. II. Explicit determination of the characters. *Acta Math.*, 116 :1–111, 1966.
- [15] Takeshi Hirai. The Plancherel formula for $SU(p, q)$. *J. Math. Soc. Japan*, 22 :134–179, 1970.
- [16] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Distribution theory and Fourier analysis, Reprint of the second (1990) edition [Springer, Berlin ; MR1065993 (91m :35001a)].
- [17] Roger Howe. Dual pairs in physics : harmonic oscillators, photons, electrons, and singletons. In *Applications of group theory in physics and mathematical physics (Chicago, 1982)*, volume 21 of *Lectures in Appl. Math.*, pages 179–207. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.
- [18] Roger Howe. The oscillator semigroup. In *The mathematical heritage of Hermann Weyl (Durham, NC, 1987)*, volume 48 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 61–132. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [19] Roger Howe. Remarks on classical invariant theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 313(2) :539–570, 1989.
- [20] Roger Howe. Transcending classical invariant theory. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(3) :535–552, 1989.
- [21] Jing-Song Huang and Pavle Pandžić. *Dirac operators in representation theory*. Mathematics : Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2006.
- [22] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9.
- [23] M. Kashiwara and M. Vergne. On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials. *Invent. Math.*, 44(1) :1–47, 1978.
- [24] Anthony W. Knap. *Lie groups beyond an introduction*, volume 140 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, second edition, 2002.
- [25] Toshiyuki Kobayashi. Restrictions of unitary representations of real reductive groups. In *Lie theory*, volume 229 of *Progr. Math.*, pages 139–207. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2005.
- [26] Jian-Shu Li. Singular unitary representations of classical groups. *Invent. Math.*, 97(2) :237–255, 1989.
- [27] Jian-Shu Li. Minimal representations & reductive dual pairs. In *Representation theory of Lie groups (Park City, UT, 1998)*, volume 8 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 293–340. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [28] M. McKee, A. Pasquale, and T. Przebinda. Semisimple orbital integrals on the symplectic space for a real reductive dual pair. *J. Funct. Anal.*, 268(2) :278–335, 2015.

- [29] Rached Mneimné and Frédéric Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Collection Méthodes. [Methods Collection]. Hermann, Paris, 1986.
- [30] Karl-Hermann Neeb and Hadi Salmasian. Lie supergroups, unitary representations, and invariant cones. In *Supersymmetry in mathematics and physics*, volume 2027 of *Lecture Notes in Math.*, pages 195–239. Springer, Heidelberg, 2011.
- [31] V. Protsak and T. Przebinda. On the occurrence of admissible representations in the real Howe correspondence in stable range. *Manuscripta Math.*, 126(2) :135–141, 2008.
- [32] T. Przebinda, A. Pasquale, and M. McKee. Weyl calculus and dual pairs. In *arXiv :1405.2431v2*, pages 1–100. 2015.
- [33] Tomasz Przebinda. Characters, dual pairs, and unipotent representations. *J. Funct. Anal.*, 98(1) :59–96, 1991.
- [34] Tomasz Przebinda. The duality correspondence of infinitesimal characters. *Colloq. Math.*, 70(1) :93–102, 1996.
- [35] Tomasz Przebinda. Local geometry of orbits for an ordinary classical Lie supergroup. *Cent. Eur. J. Math.*, 4(3) :449–506, 2006.
- [36] Tomasz Przebinda. The character and the wave front set correspondence in the stable range. In *arXiv :1602.08401*, pages 1–19. 2016.
- [37] Wulf Rossmann. Kirillov’s character formula for reductive Lie groups. *Invent. Math.*, 48(3) :207–220, 1978.
- [38] Manfred Scheunert. *The theory of Lie superalgebras*, volume 716 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979. An introduction.
- [39] Matthias Schmidt. Classification and partial ordering of reductive Howe dual pairs of classical Lie groups. *J. Geom. Phys.*, 29(4) :283–318, 1999.
- [40] V. S. Varadarajan. *Supersymmetry for mathematicians : an introduction*, volume 11 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York ; American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [41] David A. Vogan, Jr. *Representations of real reductive Lie groups*, volume 15 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, Boston, Mass., 1981.
- [42] Nolan R. Wallach. *Harmonic analysis on homogeneous spaces*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1973. Pure and Applied Mathematics, No. 19.
- [43] Nolan R. Wallach. *Real reductive groups. I*, volume 132 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.
- [44] André Weil. Sur certains groupes d’opérateurs unitaires. *Acta Math.*, 111 :143–211, 1964.