



HAL
open science

Numerical simulation of a channel swell applied to a simple sediment transport model

Cyrille Bertelle

► **To cite this version:**

Cyrille Bertelle. Numerical simulation of a channel swell applied to a simple sediment transport model. Analyse numérique [math.NA]. Université le Havre Normandie, 1991. Français. NNT : . tel-03317692

HAL Id: tel-03317692

<https://hal.science/tel-03317692>

Submitted on 19 Feb 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par
Cyrille BERTELLE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DU HAVRE

Discipline: Mathématique
Spécialité: Analyse Numérique

**SIMULATION NUMERIQUE D'UNE HOULE DE CANAL,
APPLIQUEE A UN MODELE SIMPLE DE TRANSPORT DE
SEDIMENTS**

soutenue le 16 Janvier 1991

membres du Jury:

BELOGEY Michel,	Université du Havre
CHAUCHE Jacques,	Université du Havre
DUCATEAU Charles-François,	Université R. Descartes (Paris V)
LEDUC Michel,	Université du Havre
LHUISSIER Jean-François,	Université du Havre
PAUMIER Jean-Claude,	Université J. Fourier (Grenoble)

REMERCIEMENTS

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier M. BELORGEY pour la confiance qu'il m'a accordée en m'accueillant dans son laboratoire. C'est suite à son intention d'entreprendre des études à caractère numérique que ce travail a vu le jour. Que S. PANOS, enseignant à la faculté des sciences et techniques du Havre, reçoive ici ma sympathie pour avoir provoqué ma première rencontre avec M. BELORGEY.

Ma reconnaissance va plus particulièrement à J.F. LHUISSIER qui m'a guidé tout au long de cette thèse. Il a eu une part essentielle dans bien des idées concrétisées dans ce travail et a ainsi permis de le mener à bien.

Je tiens également à remercier S. HUBERSON pour avoir suivi la fin de ce travail, en me conseillant aussi bien sur son fond que sur sa forme.

Je remercie M. LEDUC d'avoir dirigé cette thèse, de l'intérêt qu'il y a porté, ainsi que des nombreux conseils donnés, en particulier pour la rédaction de ce mémoire.

Je remercie Messieurs DUCATEAU et PAUMIER de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant de le juger.

Je remercie J. CHAUCHE d'avoir accepté de participer à ce jury, ainsi que des différents conseils qu'il m'a donnés.

J'exprime également ma sympathie envers tous les autres membres du laboratoire, non encore cités, avec qui j'ai eu l'occasion de collaborer. Les discussions et travaux fructueux résultants de cette collaboration m'ont permis d'avoir une meilleure compréhension de l'aspect physique de la mécanique des fluides.

Je remercie aussi Messieurs HERMEL et REGHEM pour avoir été souvent sollicités lors des quelques difficultés d'ordre technique que j'ai eu l'occasion de rencontrer lors de la mise en oeuvre informatique de ce travail.

TABLE DES MATIERES

AVANT-PROPOS	3
TABLE DES MATIERES	7
PRESENTATION GENERALE	13
CHAPITRE I: INTRODUCTION	19
I-1 DEVELOPPEMENT ET EVOLUTION DES ETUDES THEORIQUES, EXPERIMENTALES ET NUMERIQUES CONCERNANT LA HOULE	21
I-1-1 Approche théorique	21
I-1-2 Approche numérique	25
I-1-3 Approche expérimentale	26
I-2 LES TRAITEMENTS NUMERIQUES DE LA HOULE	29
I-2-1 Ecoulements en fluides parfaits	29
I-2-2 Etude des ondes longues	30
I-2-3 Ecoulements en fluides visqueux par les équations de Navier-Stokes	32
I-2-3-1 Méthodes de type "Marker and Cell"	32
I-2-3-2 Le code NSL du LNH/EDF	34
I-2-3-3 Formulation en vorticité et fonction de courant	35
I-3 CHOIX DE LA METHODE UTILISEE	37
CHAPITRE II: DESCRIPTION DU PROBLEME ET DE SON SCHEMA DE RESOLUTION	43
II-1 LES EQUATIONS FONDAMENTALES	43
II-1-1 Description du phénomène physique	43
II-1-2 Les équations de Navier-Stokes	45
II-1-3 Les conditions aux limites	46
II-1-3-1 Fond du canal	46
II-1-3-2 Batteur	46
II-1-3-3 Surface libre	48
II-1-3-4 Frontière latérale droite	50

II-2 SCHEMA DE RESOLUTION	52
II-2-1 Traitement itératif du problème non linéaire ..	52
II-2-2 Critères de stabilité	55
CHAPITRE III: DISCRETISATION NUMERIQUE	59
III-1 DISCRETISATION DU DOMAINE	61
III-1-1 Structure du maillage de calcul	61
III-1-2 Localisation des variables sur les cellules ..	63
III-1-3 Repérage spatial sur le maillage	66
III-2 DISCRETISATION DES EQUATIONS	67
III-2-1 Intégration des équations sur les cellules de discrétisation	67
III-2-2 Calcul de u: composante horizontale de la vitesse	70
III-2-2-1 Intégration du terme d'évolution	72
III-2-2-2 Intégration des termes de convection-diffusion	72
III-2-2-3 Intégration du terme source	77
III-2-2-4 Ecriture du système linéaire obtenu	78
III-2-3 Calcul de v: composante verticale de la vitesse	80
III-2-4 Calcul de la hauteur d'eau	81
III-2-5 Calcul de la pression	84
III-2-5-1 Calcul des dérivées partielles	85
III-2-5-2 Discrétisation sur les cellules	87
III-3 TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES	92
III-3-1 Fond du canal	92
III-3-2 Batteur	93
III-3-3 Surface libre	94
III-3-4 Condition de non réflexion	96

CHAPITRE IV: ALGORITHMES DE CALCUL	99
IV-1 INTRODUCTION	101
IV-2 FERMETURE DES SYSTEMES LINEAIRES PAR LES CONDITIONS AUX LIMITES	102
IV-3 SEPARATION DES SCHEMAS IMPLICITES SUIVANT LA DIRECTION D'ESPACE	104
IV-4 RESOLUTION DES SYSTEMES TRIDIAGONAUX	107
 CHAPITRE V: EXEMPLES DE CALCUL ET VALIDATIONS PAR DES MESURES EXPERIMENTALES	111
V-1 INTRODUCTION	113
V-2 CALCUL DE CHAMPS CINEMATIQUES	113
V-3 ETUDE DE LA CINEMATIQUE DE LA HOULE EN EAU PEU PROFONDE. COMPARAISONS AVEC DES RESULTATS EXPERIMENTAUX ..	124
V-4 PREMIERS ESSAIS DE CALCUL D'ECOULEMENTS AUTOUR D'OBSTACLES: APPLICATION AU CAS DE PLAQUES HORIZONTALES IMMERGEES	133
V-4-1 Quelques repères bibliographiques	133
V-4-1-1 Réflecteurs de houle	133
V-4-1-2 Etude expérimentale du rotationnel général sur le bord de fuite	135
V-4-2 Résultats de calculs obtenus et premières conclusions	137
 CHAPITRE VI: SIMULATION DU TRANSPORT DE SEDIMENTS SOUS L'ACTION DE LA HOULE	145
VI-1 INTRODUCTION	147
VI-2 QUELQUES ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE	148
VI-2-1 Etude expérimentale sur la couche limite au fond d'un canal à houle	148
VI-2-2 Les modèles de transport de particules par des écoulements de fluides	150

VI-3 ETUDE NUMERIQUE	153
VI-3-1 Modélisation du transport de particules	153
VI-3-2-1 Bilan des forces prises en compte	153
VI-3-2-2 Calcul effectif des forces	154
VI-3-2-3 Système différentiel décrivant le transport d'une particule	156
VI-3-2 Implémentation numérique: couplage avec le code de simulation de la houle	157
VI-3-2-1 Schéma de discrétisation en temps du système différentiel	158
VI-3-2-2 Suivi spatial et temporel de la particule sur le maillage de calcul de l'écoulement du fluide	
VI-4 RESULTATS	162
VI-4-1 Trace de trajectoires de particules fluides ...	162
VI-4-2 Trace de trajectoires de particules pesantes. Importance relative des différentes forces	165
VI-4-2-1 Validation du schéma de convection	165
VI-4-2-2 Etude des différentes forces prises en compte	167
VI-4-3 Conclusion	172
 CHAPITRE VII: MISE EN OEUVRE INFORMATIQUE	 173
VII-1 INTRODUCTION	175
VII-2 MATERIEL UTILISE	177
VII-3 LA REPRESENTATION GRAPHIQUE DES RESULTATS	179
VII-4 ORGANISATION DES DIFFERENTS PROGRAMMES ET UTILITAIRES	180
VII-5 EXEMPLES DE DEROULEMENTS DE SESSIONS DE CALCULS ...	182
 CHAPITRE VIII: CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	 185
 NOTATIONS	 191
 BIBLIOGRAPHIE	 199

PRESENTATION GENERALE

L'utilisation de l'informatique pour résoudre des problèmes de nature scientifique n'est pas un fait nouveau. Historiquement, le premier langage de programmation évolué: le FORTRAN (FORMULA TRANslating), créé en 1954, a été "destiné à exprimer facilement la résolution des problèmes de calcul numérique"¹. Grâce à ce langage, les scientifiques ont alors utilisé l'informatique de manière intensive. De nombreuses bibliothèques de programmes ont alors vu le jour et c'est la raison pour laquelle le FORTRAN reste toujours le langage de référence dans le domaine scientifique, malgré ses aspects un peu vétustes vis à vis des nouveaux concepts informatiques de la programmation.

Le travail que nous présentons ici a pour objectif principal de fournir un outil informatique numérique lié à une simulation d'un phénomène physique -la houle- afin de permettre la confrontation avec des mesures expérimentales. La démarche scientifique suscitée par ce développement informatique, en corrélation avec des investigations expérimentales servant de tests au code développé, correspond au processus de modélisation décrit par Walliser, d'après Astolfi et Develay [116]:



Le processus de modélisation (d'après Walliser, 1977).

La motivation qui nous a conduit à nous intéresser à la simulation de la houle en tant que phénomène physique, résulte du

¹ définition donnée dans le premier manuel consacré au FORTRAN par I.B.M., d'après Brodyus: "Fortran IV", Dunod [115].

fait que ce dernier a depuis longtemps été perçu comme une onde de surface. En effet, dans le domaine de la construction navale, il s'agissait essentiellement d'étudier les problèmes d'avancement des carènes et donc seules les forces superficielles étaient à prendre en compte.

Avec l'essor de l'industrie pétrolière, les constructions de plates-formes et les transports par pipe-lines ont nécessité une meilleure connaissance de l'écoulement en profondeur. Cette demande a suscité de nombreuses recherches sur les études d'écoulements autour de corps cylindriques d'axes horizontaux ou verticaux, à différentes profondeurs dans l'eau.

D'autre part, les constructions de grande envergure sur fonds marins (ports, ponts, etc...) ont créé un besoin de connaissance des phénomènes de transports sédimentaires sous l'action de la houle.

L'ensablement des digues ou des constructions posées sur les fonds marins, provoquant parfois des transports solides et des remaniements sédimentaires allant jusqu'à la modification de la géophysique des côtes, est à l'origine de phénomènes qui sont souvent difficilement appréhendés et assez mal prédits. La seule étude scientifique qui soit actuellement fiable, consiste à reproduire le site réel sur des modèles physiques réduits de grande taille afin de minimiser les problèmes de similitudes. Ces études, nécessitant des installations considérables, sont très coûteuses.

Pour cette raison, un regain d'intérêt, favorisé par les performances croissantes des ordinateurs, se dirige vers les études théoriques et numériques. Ces investigations sont encore à l'état de recherche. La première étape de nos travaux, dans cette voie, consiste alors à pouvoir décrire et simuler correctement l'écoulement complexe qui est celui de la houle.

Le chapitre 1 donne les motivations qui nous ont poussés à entreprendre ce travail, tout en se positionnant par rapport aux études existantes concernant la houle, tant sur le plan théorique que sur le plan expérimental numérique et informatique.

Le chapitre 2 décrit le problème physique que nous souhaitons résoudre. Sa formulation mathématique, abordée par la suite, repose essentiellement sur les équations de Navier-Stokes ainsi

que sur la formulation des conditions aux limites. Nous décrivons ensuite le schéma de résolution adopté permettant notamment de traiter les non-linéarités des équations par un algorithme itératif.

Le chapitre 3 décrit le code de calcul proprement dit, en donnant les techniques de discrétisation du domaine et des équations fondamentales utilisées.

Le chapitre 4 présente d'une manière plus technique les algorithmes spécifiques utilisés dans le solveur des équations discrétisées.

Au chapitre 5, quelques exemples directs portant sur des simulations de houle sont donnés. Les champs cinématiques obtenus avec différentes conditions (type de batteur, hauteur d'eau) sont présentés. Des comparaisons avec des mesures précises effectuées en eau peu profonde sont étudiées et commentées. Une étude assez simple concernant des écoulements autour de structures est décrite et comparée avec différents travaux expérimentaux et numériques existants. Cette étude critique permet de connaître les possibilités, les limitations et les développements possibles pouvant être effectués, pour ce type d'étude, à partir du code existant.

Le chapitre 6 porte sur l'utilisation du code pour l'étude du transport de sédiments sous l'action de la houle. Après nous être placés parmi les études actuelles, nous présentons une mise en équation simple pour étudier le transport de particules, la mise en oeuvre numérique correspondante, ainsi que les résultats de calcul obtenus.

Le chapitre 7 décrit les aspects plus techniques liés à la mise en oeuvre informatique des différents programmes développés. Des précisions sur le matériel utilisé et les temps de calcul requis sont données.

Finalement, le chapitre 8 tire les conclusions et présente quelques perspectives envisageables à partir des travaux déjà effectués.

Chapitre 1:

INTRODUCTION

I-1 DEVELOPPEMENTS ET EVOLUTIONS DES ETUDES THEORIQUES, EXPERIMENTALES ET NUMERIQUES CONCERNANT LA HOULE.

La houle, en tant que phénomène naturel, fascine un grand nombre d'observateurs, allant du navigateur au scientifique. La naissance de la houle est généralement due à l'action des vents ou à une dépression météorologique unique. Dans le premier cas, à sa création, une complexité importante régit de nombreux phénomènes qui diffèrent par leur longueur d'onde, leur sens de propagation et leur amplitude. A une distance plus éloignée de la perturbation originale, les phénomènes s'organisent pour aboutir, au loin, à un phénomène propre de houle, assimilable à une onde cylindrique monochromatique: la période est unique et le profil sensiblement sinusoïdal. Dans le cas d'une création due à une dépression météorologique unique, on peut avoir directement un phénomène essentiellement monochromatique qui se modifie assez peu en espace et en temps.

L'étude des houles cylindriques monochromatiques reste donc le point essentiel de ces observations, sachant qu'un écoulement complexe peut souvent se traduire par des superpositions de houles élémentaires.

I-1-1 APPROCHE THEORIQUE

De nombreuses tentatives de modélisations, à partir de ces observations, ont donné lieu à diverses formulations mathématiques depuis le siècle dernier. Elles sont essentiellement basées sur l'hypothèse que le fluide est parfait ou que l'écoulement est irrotationnel. On trouve, à ce sujet, des études bibliographiques précises dans Larras [1], Bonnefille [2], Susbielles et Bratu [3] et des exposés plus synthétiques dans Lebas [4] et Jarno [5].

La description est basée sur les grandeurs suivantes caractérisant le phénomène:

- \bar{H} : profondeur d'eau moyenne
- λ : longueur d'onde
- ΔH : hauteur des vagues, creux à crêtes
- T: période
- c: célérité

Les grandeurs sans dimensions suivantes permettent d'effectuer une classification des différents types de houle, en suivant la figure 1.1, extraite de Larras [1]:

$\Delta H/\lambda$: la cambrure

$\Delta H/\bar{H}$: la hauteur relative de la vague

\bar{H}/λ : cette grandeur permet de distinguer les houles au large des houles à l'approche du rivage.

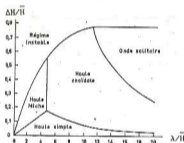


fig. 1.1: Classification des modèles de houle

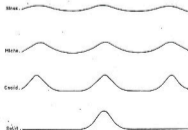


fig 1.2: Représentation de la surface libre

La figure 1.2, extraite du même ouvrage représente les formes de surface libre correspondant aux modèles cités.

Cette classification est basée sur des approches mathématiques différentes d'un unique phénomène physique. Les vagues arrivant du large sur une plage sont décrites successivement par les modèles suivants:

- 1) houle simple sinusoïdale
- 2) houle de Miche
- 3) houle cnéidale
- 4) onde solitaire
- 5) déferlement instable

Nous donnons ci-dessous, les fondements des modèles de houles les plus usuels. On retrouve, parmi eux, une partie de ceux cités dans la figure 1.1:

■ La houle de Gerstner est fondée sur une description Lagrangienne des particules fluides. Ces dernières ont un mouvement de rotation autour d'un centre fixe.

■ La houle sinusoïdale d'Airy ou de Stokes au premier ordre (notée houle simple dans la figure 1.1) est construite sur l'hypothèse que l'écoulement du fluide est irrotationnel (les particules d'eau ne subissent pas alors de rotation sur elles-mêmes). Cette description est Eulérienne et peut s'appliquer à des houles correspondant à différentes hauteurs d'eau. On peut facilement tracer les champs cinématiques obtenus comme sur la figure 1.3, extraite de Susbielles et Bratu [3].

■ Dans la houle de Miche, les coordonnées horizontales et verticales des particules fluides et la pression sont développées en séries de puissances successives de la hauteur des vagues H jusqu'au deuxième ordre.

Ces différents modèles permettent ainsi de tracer les trajectoires des particules fluides comme cela est fait sur la figure 1.4, extraite de Larras [1]. Sur cette figure, les trajectoires représentées correspondent à la transition des houles sinusoïdales au large (figure du haut) vers les houles cnéidales à l'approche du rivage (figure du bas).

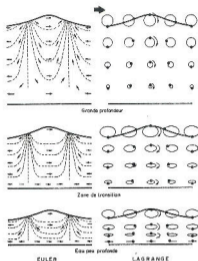


figure 1.3: Description des houles sinusoïdales

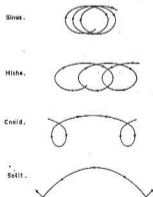


figure 1.4: Trajectoires des particules fluides dans la houle

Parallèlement à ces théories s'efforçant de donner des descriptions de houles naturelles, avec certaines hypothèses de régularité, des études expérimentales ont été menées en canal à houle afin d'approcher le problème d'une manière différente.

Pour décrire ces houles de laboratoires, sensiblement différentes par leur nature des houles naturelles, Fontanet [6] a développé une solution au deuxième ordre d'approximation concernant la houle cylindrique générée par un batteur plan. Il s'agit ici d'une application de la méthode d'approximation de Miche dont la complexité en rend l'usage difficile. Notons, par ailleurs, que de nombreux calculs similaires basés sur des développements analytiques, avaient été menés par Biesel [101].

En conclusion, ces différentes théories analytiques sont capables de représenter des écoulements de houle simple, mais ils sont difficilement exploitables pour l'étude d'écoulements complexes autour d'obstacles ou sur les fonds marins, en particulier lorsque la viscosité joue un rôle important.

I-1-2 APPROCHE NUMERIQUE

Grâce au développement de l'informatique et à l'augmentation de la puissance de calcul offerte par les ordinateurs modernes, une nouvelle approche de la houle par des résolutions numériques a vu le jour et constitue maintenant un outil puissant pour résoudre les problèmes s'y rapportant. Parallèlement aux efforts importants déployés dans le domaine de l'aérodynamique, des codes numériques se sont développés sur la base de l'hypothèse d'un fluide parfait, incompressible et irrotationnel. Ce type de calcul permet d'obtenir des résultats intéressants pour l'étude de phénomènes complexes situés à proximité de la surface libre, notamment pour le déferlement des vagues et l'interaction avec des corps de grande dimension flottants ou traversant la surface libre. Il ne peut pas, par contre, par sa nature, permettre d'étudier des phénomènes liés à la viscosité et la turbulence associée, comme on en rencontre autour des obstacles immergés et sur les fonds marins.

Dans le même temps, un effort considérable a été déployé au niveau des techniques de résolution numérique des équations de Navier-Stokes et de leurs validations mathématiques (voir Tenam [10] et Girault, Raviart [11]). Ces travaux ont suscité un grand nombre d'implémentations dans des domaines variés. La houle présente, pour sa part, une difficulté supplémentaire quant à son traitement numérique, due à la présence de la surface libre dont les déformations ne peuvent être négligées. Depuis plusieurs années, les écoulements à surface libre sont le sujet de nombreuses recherches. Néanmoins, les traitements numériques de la houle, validés par des mesures expérimentales et utilisant une résolution des équations de Navier-Stokes, restent encore en nombre peu élevés.

La houle est un phénomène instationnaire, dans lequel interviennent deux ordres de grandeurs pour les vitesses, à savoir, les vitesses des particules fluides et la célérité de l'onde générée. Afin de rendre compte de ces deux grandeurs avec suffisamment de précision, les simulations numériques sont nécessairement coûteuses, comme on le verra plus loin, et la méthode utilisée, pour être efficace, doit être conditionnée par les études ultérieures à effectuer, suivant que l'on s'intéresse aux phénomènes de déformation de la surface libre, de transports de sédiments ou d'écoulements autour d'obstacles.

Par ailleurs, afin de vérifier la validité des codes de calcul, et de s'assurer que le modèle mathématique utilisé à la base est capable de représenter les phénomènes physiques mis en oeuvre, il est primordial d'effectuer des comparaisons entre des résultats de calculs et des mesures expérimentales. En raison des difficultés à obtenir ces dernières, le traitement numérique de la houle, avec prédiction des vitesses dans la masse fluide, a longtemps été écarté.

I-1-3 APPROCHE EXPERIMENTALE

La connaissance expérimentale du champ cinématique induit par la propagation de la houle a longtemps été un problème insoluble. En raison du mouvement orbital des particules, tout appareillage

de mesure dans le fluide provoquait nécessairement une perturbation importante de l'écoulement. Il a fallu attendre les récentes techniques optiques basées sur l'utilisation du laser et, en particulier, la Vélocimétrie Doppler Laser pour effectuer des mesures sans modifier de manière notable l'écoulement. Dans cette technique expérimentale, deux faisceaux issus d'un même laser se croisent et créent ainsi un réseau de franges d'interférences lumineuses. Le fluide est supposé contenir des particules de masse relative négligeable qui se déplacent en suivant l'écoulement. Une particule, passant dans le système de franges, va renvoyer une énergie lumineuse au passage sur une frange claire. La fréquence de l'émission lumineuse est reçue par un photo-multiplieur capable d'informer un système d'acquisition relié à un micro-ordinateur. La vitesse de la particule peut alors être calculée grâce à ces informations.

La description de cette technique optique est décrite en détail dans les manuels TSI [118], et dans Adrian [117, 119].

À la suite de l'évaluation des vitesses des particules, un traitement statistique doit avoir lieu. En effet, les particules passant dans le réseau de franges doivent être sélectionnées car certaines d'entre elles peuvent avoir, par leur masse, un déplacement sensiblement différent de celui des particules d'eau. Le système de traitement sur la chaîne de mesure enregistre alors un certain nombre de vitesses de particules sélectionnées et, suite à un traitement statistique, donne une vitesse moyenne et une fluctuation moyenne de l'écoulement du fluide.

Cette technique de mesure, permet donc, depuis plusieurs années, d'effectuer des mesures précises de vitesses d'écoulements stationnaires. En raison du traitement statistique employé, elle devient plus délicate à utiliser pour l'étude d'écoulements instationnaires ou périodiques, comme celui de la houle. En effet, dans le cas de la houle, un système extérieur doit alors être capable de déclencher les acquisitions à des phases précises de la houle afin d'effectuer les calculs statistiques dans le même intervalle de phase. Une instrumentation spécifique et un traitement approprié des données (détaillées dans Vasselin [9]) doivent alors être mis en oeuvre.

Depuis quelques années déjà, un savoir-faire s'est développé

et quelques laboratoires dont le Laboratoire de Mécanique des Fluides du Havre ont mis au point des méthodes fiables et précises de mesures dans la houle par ce procédé optique.

1-2 LES TRAITEMENTS NUMERIQUES DE LA HOULE

1-2-1 ECOULEMENTS EN FLUIDE PARFAIT

Suivant l'hypothèse des fluides parfaits, un certain nombre de codes numériques ont été développés. Les effets visqueux sont négligés et donc, puisque le fluide est considéré incompressible, l'écoulement est irrotationnel. Le problème se formule avec le potentiel de vitesse. Grâce à ces hypothèses, on réduit le nombre d'inconnues du problème qui passe de trois (les deux composantes de vitesse et la pression) à une (le potentiel de vitesse). De plus, l'équation à traiter est une équation de Laplace dont le traitement numérique est bien connu. Cette méthode permet notamment d'étudier l'interaction avec de grandes structures pour lesquelles on considère que la viscosité a une action moindre que la surface libre elle-même. C'est, par exemple, le cas en off-shore pétrolier où la vitesse de déplacement des grandes structures flottantes est faible. C'est ainsi que de nombreux codes de diffraction-radiation ont été développés. On se contentera de relever, en ce qui nous concerne, une étude faite par Landel [13] et Guével et al. [14] décrivant une génération de houle par un flotteur oscillant et un système d'amortissement de houle formé d'une plaque immergée. On notera, également, les travaux de Molin [16] qui sont basés, en théorie potentielle, sur des développements asymptotiques au deuxième ordre du potentiel de vitesse et de l'élévation de la surface libre afin de traiter avec précision les non-linéarités qu'elle engendre.

Par ailleurs, toujours sous l'hypothèse de fluide non visqueux, Longuet-Higgins et Cokelet [17] développent une méthode numérique permettant de traiter des cas de déformations importantes de surface libre, à la limite du déferlement. Il s'agit ici d'une méthode où intervient un suivi de la surface libre discrétisée par des particules marquées dont le mouvement est étudié. Une équation intégrale est résolue, à chaque pas de temps, pour donner la dérivée normale à la surface libre du potentiel de vitesse. Cette méthode nécessite un lissage du profil

de la surface libre, en raison de l'apparition d'instabilités qui sont supposées se dissiper, dans la réalité, par la viscosité. Cette méthode, faisant marque de référence, a été reprise et complétée par de nombreux auteurs.

Parmi ceux-ci, Cointe [18] décrit la mise en oeuvre d'une simulation numérique d'un canal à houle: le code SINBAD. Comme dans Longuet-Higgins et Cokelet, sa méthode se décompose en une résolution d'une équation intégrale et d'un système d'équations d'évolutions permettant de déplacer des marqueurs situés sur la surface libre. La formulation diffère cependant par le fait que les équations sont formulées avec une fonction définie comme étant la liaison cinématique d'incompressibilité et d'irrotationalité. Ce code, développé à l'IFP, est utilisé pour étudier les problèmes d'interaction de la houle avec les corps traversant la surface libre (point de départ de l'étude de la tenue en mer de plate-formes pétrolières).

En conclusion, bien que ces méthodes, basées sur une hypothèse d'écoulement potentiel, permettent de réduire le nombre d'inconnues à déterminer, la viscosité et les phénomènes qui s'y rapportent ne peuvent pas être pris en compte.

1-2-2 L'ETUDE DES ONDES LONGUES

Une autre approche, visant également à réduire le nombre de variables de calcul, consiste à faire une hypothèse sur la répartition verticale de la pression ou des vitesses. Ainsi, plusieurs modèles s'apparentent à la théorie de l'eau peu profonde dont les deux hypothèses fondamentales sont:

- La profondeur est faible par rapport à la longueur d'onde
- Les mouvements verticaux des particules sont faibles par rapport aux mouvements horizontaux.

Les équations de Saint Venant s'obtiennent, par exemple, en supposant que la pression est hydrostatique et que les accélérations verticales sont négligeables devant celle de la pesanteur. Par intégration sur la hauteur d'eau, on obtient alors des équations où les seules inconnues sont l'élévation de la surface libre et la vitesse horizontale moyenne du fluide sur la

hauteur d'eau. Ces équations ont été abondamment utilisées dans des résolutions numériques (voir Navon [19]).

Dans les équations de Boussinesq, la pression n'est plus hydrostatique et le fluide est irrotationnel. La vitesse horizontale est encore moyennée sur la verticale. Par contre, on prend en compte les effets non-linéaires et dispersifs. Considérant un repère mobile se déplaçant à la célérité de l'onde, on obtient (voir Mei [20]) les équations de Korteweg-De Vries. En prenant en compte les effets de courbure des lignes de courant, on obtient les équations de Serre (voir Seabra Santos [21]).

L'équation de Korteweg-De Vries est résolue, entre autres, par Bona et al. [22], avec un schéma numérique explicite, inconditionnellement stable et d'ordre quatre en temps et en espace. L'intégration en temps est faite par une méthode de prédicteur-correcteur (schéma de Moulton).

Par ailleurs, Temperville [23] résoud la même équation par une méthode d'inverse scattering. Il présente des applications concernant l'étude de solitons générés par un batteur piston de mouvement sinusoïdal.

Chubarov et Shukin [24] étudient la discrétisation par différences finies des modèles de propagation des ondes longues par les équations de Boussinesq et de Korteweg-De Vries.

Chapalain et Temperville [25] présentent une résolution numérique des équations de Boussinesq à partir d'un schéma aux différences finies proposé par Pérégrine [60]. Les équations résolues prennent en compte le frottement sur le fond, ce qui permet d'aborder les problèmes relatifs aux transports de sédiments (ceux-ci seront repris au chapitre 6 de ce mémoire).

**1-2-3 CALCUL D'ÉCOULEMENTS DE FLUIDES VISQUEUX PAR LA RÉSOLUTION
DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES****1-2-3-1 MÉTHODES DE TYPE "MARKER AND CELL"**

Une des premières résolutions numériques des équations de Navier-Stokes sur des domaines dont certaines frontières pouvaient être des surfaces libres, a été la méthode "Marker and Cell", développée par Harlow et Welch [26]. Les équations sont écrites en formulation vitesse-pression. Les discrétisations se font en différences finies. On construit, dans cette méthode, un maillage Eulérien d'un domaine discrétisé qui est formé de cellules contenant ou ne contenant pas du fluide. Puis on superpose à ce maillage des marqueurs, assimilés à des particules fluides.

Dans une première étape, on résout les équations de conservation de la quantité de mouvement, par un calcul explicite sur le maillage Eulérien.

Dans la deuxième étape, on résout l'équation de Poisson en pression, obtenue en calculant la divergence des équations de quantité de mouvement. La nouvelle pression permet d'ajuster les vitesses.

La dernière étape consiste alors à déplacer les marqueurs, à partir des vitesses calculées. On actualise alors les cellules du maillage en indiquant si elles contiennent ou non du fluide.

Cette méthode utilise le principe des maillages décalés (maillage MAC) où les différentes inconnues du problème ne sont pas localisées aux mêmes positions. Les avantages bien connus de cette technique ont été repris très souvent dans de nombreux autres schémas numériques.

Par la suite, plusieurs autres codes numériques ont été développés sur des bases similaires, au laboratoire de Los Alamos (SOLA, SOLA-SURF, et leurs variantes), à l'université de Stanford (SUMMAC) et à l'université de TOKYO (TUMMAC). Borleteau et al. [27] utilisent ce dernier code pour simuler, en fluide réel, le comportement d'un pont flottant bidimensionnel et le comparer avec les prédictions obtenues grâce à un modèle en fluide parfait.

La plus récente de ces implémentations: SOLA-VOF permet de résoudre les équations de Navier-Stokes exprimées en coordonnées cartésiennes ou cylindriques. L'équation de conservation de la masse prend en compte une éventuelle compressibilité du fluide.

Celle-ci diffère de la méthode originale MAC de Harlow et Welch du fait qu'elle n'utilise pas directement de marqueurs pour suivre les surfaces libres. Par contre, on définit, sur chaque cellule du maillage, une fonction de volume de fluide F (d'où le nom VOF: volume of fluid) dont la valeur varie entre 0 et 1. Ces valeurs extrêmes correspondent respectivement à une cellule ne contenant pas de fluide et à une cellule entièrement remplie de fluide. Si F prend une valeur intermédiaire comprise entre 0 et 1, cela signifie que l'on se trouve sur une cellule qui possède une partie de la surface libre. L'algorithme de résolution se décompose finalement en trois étapes:

1) calcul explicite des deux composantes de vitesses grâce aux équations de conservation de la quantité de mouvement.

2) calcul itératif qui permet d'effectuer des corrections simultanées sur la pression et les composantes de vitesses afin de satisfaire à l'équation de conservation de la masse.

3) actualisation de la fonction F pour déterminer la nouvelle position du fluide sur le maillage. Cette étape est résolue en écrivant la condition cinématique de la surface libre: $DF/Dt = 0$. L'intégration de cette dernière équation doit être faite avec beaucoup de précautions car une variation de la valeur de F entraîne une modification du calcul du flux de F à travers les faces de la cellule, puisque l'intersection des faces avec le fluide varie.

Cette dernière discrétisation est donc totalement Eulérienne. Le maillage du domaine est constant et rectangulaire, mais pas nécessairement régulier.

Au niveau des applications possibles, on remarquera que ce type de méthode autorise des formes assez complexes de surface libre. Des exemples de calcul portent ainsi sur des cas de déferlements, ou encore sur des études de séparation de colonnes de fluide sous l'effet des tensions superficielles. Des exemples où interviennent plusieurs fluides sont montrés: on notera la

simulation du passage et de la déformation d'une goutte d'huile baignant dans l'eau, à travers un trou situé sur une plaque fixe.

Finalement, nous remarquerons que ces méthodes sont souvent considérées comme étant coûteuses :

- La stabilisation des schémas explicites nécessite des petits pas de temps.
- Un nombre suffisamment grand de marqueurs doit être utilisé pour pouvoir représenter précisément les surfaces libres.

I-2-3-2 LE CODE NSL DU LNH/EDF

Au Laboratoire National d'Hydraulique de la Direction des Etudes et Recherches d'EDF, un code de calcul bidimensionnel résolvant, dans un plan vertical, les équations de Navier-Stokes avec une frontière libre a été développé par Daubert et Cahouet [29]. Une formulation en vitesse-pression est utilisée. L'un des objectifs principaux est ici de fournir une simulation numérique d'écoulements de boue.

Ces travaux sont basés sur une paramétrisation du fond et de la surface libre. Par un changement de coordonnées, qui n'agit que dans la direction verticale, on ramène ainsi le domaine physique variable en temps à un domaine de calcul constant et rectangulaire. L'utilisation des formules de dérivations composées permet d'écrire les équations dans le domaine de calcul: elles font apparaître de fortes non-linéarités. Cette transformation nécessite à chaque pas de temps, que les coefficients relatifs aux déformations de la surface libre soient recalculés.

Le principe du calcul repose sur l'utilisation d'une méthode à pas fractionnaires. Elle repose sur une décomposition du problème en trois étapes, des champs de vitesses auxiliaires étant calculés après chaque étape intermédiaire:

- Etape de convection, résolue par une méthode de caractéristiques
- Etape de diffusion due aux effets visqueux qui peut être résolue par une méthode explicite ou implicite.
- Etape de calcul de la pression et de la

vérification de l'équation de continuité. C'est le point délicat du calcul. Une méthode itérative est utilisée: elle permet de calculer la pression par l'équation de Poisson, centrée au demi-pas de temps intermédiaire. On calcule ensuite la nouvelle position de la surface libre et on actualise les vitesses.

La discrétisation est faite en différences finies. Un modèle simple de longueur de mélange permet de prendre en compte la turbulence, essentiellement pour compléter la couche limite sur le fond du domaine. La validité d'un tel modèle dans le cas de la houle reste entièrement à démontrer.

En raison de la transformation du domaine utilisée, il est impossible de simuler des houles à trop forte cambrure.

Des validations ont été effectuées, par comparaison avec des modèles théoriques. Pour des écoulements de clapotis, par exemple, le code prend en compte les non-linéarités et est en concordance avec les solutions développées au deuxième ordre (voir Daubert [30]).

D'autres applications concernent la simulation d'un canal avec génération d'une houle aléatoire, constituée d'une superposition d'ondes monochromatiques. Une plage d'amortissement, sous forme de plan incliné, est également prise en compte.

La paramétrisation du fond permet également de simuler des écoulements sur fonds de géométrie variable. Des exemples de calcul, effectués au-dessus d'un creux et au-dessus d'une marche (voir Daubert [31]), permettent de faire apparaître, d'une part, des structures tourbillonnaires grâce au modèle de couche de mélange, d'autre part, des déformations de surface libre engendrées par les discontinuités sur le fond.

1-2-3-3 FORMULATION EN VORTICITE ET FONCTION DE COURANT

Plus récemment, un code de simulation de la houle a été développé par Chagdali [32]. Il est caractérisé par une formulation des équations de Navier-Stokes en fonction de courant et fonction tourbillon. Un maillage curviligne permet de suivre avec précision les déformations de la surface libre. Une attention particulière est donnée pour le traitement de la surface libre et

permet ainsi de rendre compte du "saut de pression" entre l'eau et l'air. Une méthode de différences finies de type hermitien est utilisée. Elle consiste à considérer comme inconnues, non seulement les valeurs de la fonction cherchée, mais également ses dérivées. La fermeture du système est réalisée par des relations supplémentaires qui lient les valeurs de la fonction à celles de ses dérivées en trois points de discrétisation consécutifs. La précision d'une telle méthode semble être d'ordre élevé. Une méthode de perturbation est également mise en oeuvre: Elle consiste à décomposer les inconnues et le problème en deux parties: Dans la première partie, on suppose que l'écoulement du fluide est parfait; on a à résoudre : $\Delta\phi = 0$, où ϕ est le potentiel des vitesses. Dans la deuxième partie, on traite de la différence entre l'écoulement d'un fluide parfait et l'écoulement d'un fluide visqueux, grâce à l'équation: $\Delta\psi = \omega$ où ω est la fonction tourbillon et ψ la fonction de courant. On étudie ensuite le transport de ω . Des méthodes A.D.I. (Directions Alternées Implicite) sont utilisées pour la résolution des systèmes linéaires.

L'utilisation des variables fonction de courant et fonction tourbillon peut parfois permettre d'étudier plus facilement des phénomènes liés à ces grandeurs, comme on le verra dans les applications. Par contre, puisqu'elles ne sont pas des grandeurs physiques simplement mesurables, il peut s'avérer difficile d'en déduire des conditions aux limites: on utilise, par exemple, des conditions artificielles d'absorption de tourbillon.

Des exemples de calcul ont permis de faire apparaître les non-linéarités de la surface libre. Une couche limite de surface libre est alors caractérisée par une zone à fort rotationnel. Des applications ont été effectuées sur les phénomènes de transport et diffusion de tourbillons dans la houle. Par ailleurs, des validations avec des mesures expérimentales effectuées au Havre [5] ont été étudiées.

1-3 CHOIX DE LA METHODE UTILISEE

Le code de calcul que nous allons présenter dans cette thèse a été développé dans le but de compléter les recherches expérimentales effectuées jusqu'alors au Laboratoire de Mécanique des Fluides du Havre. La Vélocimétrie Doppler Laser y est utilisée afin de pouvoir connaître, sans modifier l'écoulement, les vitesses des particules fluides. Cette technique de mesure optique permet d'obtenir des résultats très précis sur l'écoulement dans le domaine fluide.

Au sein du laboratoire, les travaux s'articulent sur trois axes principaux :

- Etude de la couche limite générée par une houle en profondeur finie. Cette étude débouche naturellement sur les problèmes de sédimentations sur les fonds marins. Des travaux complémentaires ont été effectués à partir de fonds rugueux ou d'obstacles (cylindres) posés sur le fond. On pourra se référer à Lebas [33], Marin [34].

- Etude de l'écoulement généré par une houle en profondeur infinie autour d'obstacles situés à profondeur moyenne. Le cas d'un cylindre horizontal a été étudié avec précision. Le but recherché étant essentiellement d'en déduire les efforts exercés sur les éléments de plateformes pétrolières semi-submersibles. On pourra se référer à Jarno [35], Jarno, Bertelle et Bélorgey [36].

- Etude de l'écoulement tourbillonnaire généré par une plaque. Il s'agit ici de suivre la formation, l'évolution et le développement de structures tourbillonnaires dans la houle. Cette étude fondamentale possède quelques retombées au niveau des industries portuaires, notamment en ce qui concerne les problèmes d'amortissement de la houle. On pourra se référer à Brossard [37].

Pour ces trois cas, les études sont effectuées à une certaine distance de la surface libre. Bien que celle-ci joue un rôle fondamental dans l'écoulement de la houle, sa déformation n'est pas directement étudiée en tant que telle. Par ailleurs, pour les

différents cas d'étude, les cambrures de vagues mises en oeuvre restent généralement assez faibles. La simulation numérique, que nous allons présenter, n'est pas conçue pour permettre des déformations importantes de la surface libre, comme cela peut se produire, par exemple, au cours de déferlement de vagues. Cette remarque nous permet notamment d'utiliser un maillage structuré et d'avoir des conditions aux limites assez simples sur la surface libre, les tensions superficielles étant négligées. Par contre, les effets de viscosité ont une grande importance sur les écoulements décrits précédemment, aussi bien dans les couches limites que dans l'apparition de structures tourbillonnaires. Le problème complet doit être traité en fluide visqueux. Pour cela, la résolution des équations de Navier-Stokes est nécessaire.

Notre approche reste volontairement assez "physique" et proche des préoccupations d'un laboratoire reposant essentiellement sur des bases expérimentales. Ainsi, la vitesse est, parmi les grandeurs contrôlant l'écoulement, celle qui est la plus accessible par les mesures. La formulation du problème en vitesse-pression a donc été choisie par rapport à la formulation en fonction de courant et vorticité. La condition aux limites de pression sur la surface libre est alors plus facilement prise en compte. D'autre part, une mesure directe de vitesses sur une frontière du domaine peut ainsi éventuellement servir de conditions aux limites.

Notre choix de méthode numérique a été guidé par un savoir faire existant sur la méthode de volumes finis. L'avantage de cette technique de discrétisation est de formuler le problème discret en utilisant des expressions qui s'interprètent facilement par des grandeurs physiques (flux à travers les faces des cellules décomposant le domaine). Cette méthode autorise, a priori, des discrétisations de domaine avec des éléments de géométrie quelconque. Ceci nous permet d'intégrer directement les équations sur un maillage déformable qui suit l'évolution de la surface libre.

Nos travaux se situent parmi les différentes études existantes qui traitent de problèmes similaires (en écoulement de fluide incompressible) en utilisant la technique des volumes finis. Nous en citons quelques uns ci-après:

■ Garg et Maji [38] appliquent le schéma en puissance de Patankar [39] sur un maillage décalé pour résoudre des problèmes d'écoulements dans des canaux possédant des divergents-convergents. Une transformation du domaine permet de résoudre le problème sur un domaine rectangulaire.

■ Dealrdzic et Péric [40] s'intéressent aux résolutions en volumes finis sur des domaines à géométrie variable. Ils sont amenés à introduire une "loi de conservation d'espace" pour éviter l'apparition de sources artificielles de masse dues à la déformation du domaine.

■ Sarraf et al. [41] proposent une simulation d'écoulements à surface libre dans les conditions d'eau peu profonde. Les équations de Navier-Stokes sont résolues avec une pression hydrostatique. L'intégration et la discrétisation sont effectuées directement sur un maillage déformable qui suit l'évolution de la surface libre. Pour prendre en compte la déformation du maillage au cours de l'intégration en temps, les auteurs définissent une "loi de conservation du maillage" qui provient de l'utilisation du théorème de Reynolds (ou théorème de transport). Deux intégrations de l'équation de la conservation de la masse sont utilisées:

- sur une colonne d'eau entière pour déterminer l'élévation de la surface libre.
- sur chaque cellule de contrôle pour calculer la composante verticale de vitesse.

Finalement la discrétisation en temps est faite par un schéma explicite du deuxième ordre.

Chapitre 2:

DESCRIPTION DU PROBLEME ET DE SON SCHEMA DE RESOLUTION

II-1 LES EQUATIONS FONDAMENTALES

II-1-1 DESCRIPTION DU PHENOMENE PHYSIQUE

L'étude suivante porte sur une simulation numérique de l'écoulement de l'eau dans un canal à houle. L'écoulement est supposé bidimensionnel, dans un plan vertical.

On note, dans toute la suite, (x,y) les coordonnées cartésiennes spatiales du plan vertical et t la variable temps.

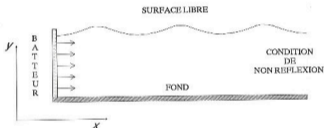


figure 2.1 : Description du canal à houle

Le canal est constitué d'un fond plat horizontal immobile, ainsi que d'un batteur. Celui-ci, initialement au repos, est matérialisé par une frontière verticale qui se déplacera horizontalement selon un mouvement sinusoïdal en temps. Deux types de batteurs sont traités:

- le cas d'un batteur plan:

le déplacement est constant sur toute la hauteur.

- le cas d'un batteur "voilet";
le déplacement est proportionnel à la hauteur par rapport au fond.



figure 2.2: Types de batteurs

D'autres simulations ont été effectuées pour lesquelles la frontière caractérisant le batteur a été remplacée par la donnée d'un profil de houle sinusoïdale, de type Stokes.

Dans une installation expérimentale, à l'extrémité opposée au batteur, on trouve généralement une plage d'amortissement dont le but est de réduire la réflexion de l'onde générée. En effet, la réflexion engendrée va créer une superposition de deux houles se propageant en sens inverse. Il en résulte alors un écoulement connu sous le nom de clapotis, dont on trouvera une description détaillée dans le livre de J.Larras [1]. L'efficacité d'un canal à houle de laboratoire se mesure donc souvent par son faible taux de réflexion, permettant ainsi d'obtenir une houle "propre".

Il n'est pas question, ici, de chercher à simuler de manière précise le processus d'amortissement, parfois complexe, dû à la plage d'amortissement située à l'extrémité opposée au batteur.

On aura besoin, par contre, pour notre traitement numérique, de borner le domaine d'étude par une frontière. On essaiera alors de trouver des conditions qui permettent de "faire sortir" l'onde

transportée en minimisant les réflexions. Il est intéressant, par ailleurs, de remarquer que l'expérimentateur et le numéricien se trouvent tous les deux confrontés au problème de la réflexion.

L'eau contenue dans le canal est initialement au repos, à une hauteur constante. Un des points caractéristiques du problème est que cette masse d'eau est délimitée sur sa partie supérieure par une surface libre qui va se déformer dès que le batteur se mettra en mouvement.

II-1-2 LES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Le comportement de l'eau que nous voulons simuler dans son évolution spatiale et temporelle est décrit, d'une manière générale, par les équations de Navier-Stokes régissant les écoulements de fluides visqueux incompressibles:

- équation de conservation de la masse:

$$\text{Div } \vec{U} = 0 \quad (2.1)$$

- équation d'évolution de la quantité de mouvement:

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{g} \text{ grad } P + \nu \vec{\Delta} \vec{U} + \vec{F} \quad (2.2)$$

où

$\vec{U} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ est la vitesse du fluide

P est la pression

ρ est la masse volumique

ν est la viscosité cinématique

\vec{F} correspond aux forces extérieures par unité de masse. On ne prendra en compte, ici, que les forces de pesanteur. On note g l'accélération de la pesanteur.

$\frac{D\varphi}{Dt}$ est la dérivée particulière d'une fonction scalaire ou vectorielle φ suivant le mouvement du fluide:

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (2.3)$$

$\vec{g} \text{ grad}$ et $\vec{\Delta}$ sont respectivement les opérateurs gradient et laplacien vectoriel.

Les équations précédentes s'écrivent alors, en variables d'Euler, et compte tenu des notations précédentes:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & (2.4) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) & (2.5) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) & (2.6) \end{cases}$$

II-1-3 LES CONDITIONS AUX LIMITES

Les équations traitées prenant en compte la viscosité du fluide, nous considérons que ce dernier adhère aux parois.

II-1-3-1 FOND DU CANAL

Sur le fond du canal, la condition d'imperméabilité impose que la vitesse verticale du fluide v soit nulle. Le fluide étant visqueux, la première composante de vitesse u est également nulle.

II-1-3-2 BATTEUR

Le mouvement du batteur sera décrit par un mouvement horizontal sinusoïdal:

Batteur plan:

Son déplacement est caractérisé par

$d_x = -A \cos(\omega t)$: déplacement horizontal

$d_y = 0$: déplacement vertical

où A est l'amplitude, ω la pulsation.

Les vitesses induites sont donc:

$$u = A \omega \sin(\omega t) \quad (2.7)$$

$$v = 0$$

Batteur volet:

Le déplacement correspond à celui du batteur plan multiplié par un coefficient proportionnel à la hauteur par rapport au fond du canal. Si H est la hauteur totale d'eau, à l'ordonnée y ($0 \leq y \leq H$) le déplacement est donné par:

$$d_x = -A \frac{y}{H} \cos(\omega t)$$

$$d_y = 0$$

Les vitesses induites sont donc:

$$u = A \omega \frac{y}{H} \sin(\omega t) \quad (2.8)$$

$$v = 0$$

Afin de simplifier le problème posé, on peut remarquer que le déplacement du batteur est petit par rapport à la longueur d'onde de la vague générée: ce rapport de grandeur est de l'ordre de 3%. La simulation va s'étendre sur plusieurs longueurs d'onde, si bien que, même au cours d'une discrétisation fine, le déplacement du batteur correspondra à peine à une cellule de calcul.

Il est donc tout à fait raisonnable de négliger ce déplacement: ceci revient à se placer juste après la position extrême du batteur. La frontière est alors fixe, ce qui simplifie singulièrement la géométrie du problème.

D'autre part, compte tenu que l'on se place un peu après le batteur, la condition d'adhérence, traduite par $v=0$, n'a plus lieu d'être. Il semble, en effet, plus judicieux de prendre ici une condition de glissement que l'on traduira par $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$.

Les deux cas de conditions aux limites:

■ adhérence: $v = 0$

■ glissement: $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

seront toutefois discutés au moment de la présentation des résultats obtenus.

¹ La condition d'adhérence, $v=0$, conduit à un problème de singularité, appelé problème de mouillage. Une remise en cause du modèle physique par les équations de Navier-Stokes peut, dans ce cas, être envisagée.

II-1-3-3 SURFACE LIBRE

a) Condition de pression

Pour la surface libre, une condition vient ici naturellement: la pression à l'interface air-eau est considérée comme constante: c'est la pression atmosphérique.

b) Condition dynamique

Nous ne nous intéressons pas, dans l'étude présentée ici, au cas de houles à fortes cambrures, proches du déferlement. On remarquera d'ailleurs que les auteurs s'intéressant à ces cas d'étude, sont souvent conduits à simplifier le comportement au sein du fluide en le prenant parfait et irrotationnel. On consultera la thèse de R. Cointe [18] pour ces études spécifiques.

Dans nos conditions d'étude, on considérera que la tension superficielle à l'interface air-eau est négligeable. Les contraintes normales et tangentielles sont alors prises nulles à la surface. Ceci permet alors d'écrire que la dérivée de la vitesse par rapport à la normale est nulle:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (2.9)$$

où n est la composante normale à la surface libre.

Cherchons les conséquences résultant des hypothèses fondamentales sur lesquelles se base cette condition formulée de manière intuitive.

D'après Chagdali [32], il existe une discontinuité des contraintes à la surface libre, due à la viscosité (même en négligeant les tensions superficielles, ce qui est notre cas, ici). Il existe alors un "saut de pression" entre le fluide (pression interne notée p^-) et l'extérieur du fluide (pression externe notée p^+) donnée par:

$$p^- + p^+ = 2 \nu \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (2.10)$$

où n et s sont les directions normales et tangentielles à la surface libre, U_η et U_τ sont les composantes de vitesses normales et tangentielles à la surface libre.

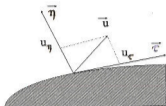


figure 2.3 : repère de Serret-Fresnet lié à la surface libre et les composantes de vitesse s'y rapportant

Par ailleurs, une contrainte de cisaillement sur la surface libre provient de la discontinuité de la vitesse tangentielle (due à l'inertie du fluide):

$$0 = \nu \left(\frac{\partial U_\tau}{\partial \eta} + \frac{\partial U_\eta}{\partial \tau} \right) \quad (2.11)$$

Soit ω le rotationnel que l'on peut définir dans le repère de Serret-Fresnet par:

$$\omega = 0,5 \left(\frac{\partial U_\eta}{\partial \tau} - \frac{\partial U_\tau}{\partial \eta} \right) \quad (2.12)$$

On a alors, d'après (2.11):

$$\omega = -\frac{\partial U_\tau}{\partial \eta} = \frac{\partial U_\eta}{\partial \tau} \quad (2.13)$$

Par conséquent, les conditions aux limites choisies dans notre simulation ont pour effet d'annuler à la surface libre:

- d'une part, le saut de pression et donc les contraintes dues à la viscosité.
- d'autre part, le rotationnel.

Ainsi, en correspondance avec les hypothèses choisies, nous limiterons à des simulations d'écoulements où n'interviennent

pas de contraintes visqueuses ou de tension ainsi que des corps traversant la surface libre, susceptibles de générer du rotationnel.

c) Condition cinématique

Rappelons que la surface libre fait intervenir une inconnue du problème à déterminer: la hauteur d'eau H. Le mouvement de la surface libre est caractérisé par le fait qu'une particule s'y trouvant à un instant t s'y trouvera encore à l'instant t+dt. On en déduit que la dérivée totale de la hauteur d'eau, en suivant le mouvement du fluide, correspond à la vitesse d'une particule se trouvant sur la surface:

$$\frac{DH}{Dt} = v \quad (2.14)$$

H, la hauteur d'eau est une fonction de x et de t, on a donc:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = v - u \frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.15)$$

II-1-3-4 FRONTIERE LATÉRALE DROITE

En ce qui concerne la frontière opposée au batteur, il s'agit, ici, de laisser "passer le fluide" sans introduire de réflexion parasite.

Le phénomène observé, la houle, se caractérise par une onde se déplaçant à une certaine célérité. On suppose que l'on peut approcher toutes les quantités par:

$$\varphi = A_{\varphi} \cos(kx + \omega t) \quad (2.16)$$

Nous allons écrire, qu'à la sortie du fluide, celui-ci satisfait une équation d'onde du type:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2.17)$$

où c est la célérité de l'onde, φ est une des grandeurs calculées (composantes de vitesse, pression ou hauteur d'eau)

La célérité doit donc être estimée. Pour cela, on fera une recherche d'extrema de la surface libre à proximité de la sortie, en prenant soin d'éliminer de légères perturbations. On en déduira

alors facilement la longueur d'onde, donc la célérité, de l'onde sortante.

II-2 SCHEMA DE RESOLUTION

II-2-1 TRAITEMENT ITERATIF DU PROBLEME NON LINEAIRE

Les équations que l'on cherche à résoudre ont un caractère non linéaire qui apparaît aussi bien dans le comportement du fluide (équations 2.5 et 2.6) que dans le problème de la surface libre (équation 2.15).

On utilise une méthode itérative. A chaque itération, certaines variables apparaissant dans les termes non linéaires seront fixées pour la résolution en cours. Elles seront ensuite actualisées à la fin de l'itération.

Un critère de convergence stoppera le processus itératif en assurant que les équations non linéaires soient résolues avec une précision donnée.

Notre méthode itérative est construite en calculant successivement les inconnues du problème dans l'ordre indiqué ci-dessous, à partir des équations du paragraphe précédent que l'on réécrit sous forme conservative:

1) Détermination de u

On l'obtient à partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (2.5).

De plus, grâce à la conservation de la masse (2.4), on a

$$\frac{\partial(uv)}{\partial y} = u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

d'où:
$$v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(uv)}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial x}$$

Par ailleurs, on a:
$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x} = 2u \frac{\partial u}{\partial x}$$

D'où (2.5) s'écrit:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(uv - \nu \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{P}{\rho}) = 0 \quad (2.18)$$

2) Détermination de v

L'équation de continuité (2.4) est directement utilisée:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial u}{\partial x}$$

3) Détermination de H

Elle s'obtient directement de l'équation (2.15) décrite précédemment:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = v - u \frac{\partial H}{\partial x}$$

4) Détermination de P/ρ

Elle s'obtient grâce à l'équation de Poisson, dont on rappelle brièvement l'écriture. En faisant une dérivation des équations (2.5) et (2.6), on a :

$$\partial(2.5)/\partial x + \partial(2.6)/\partial y :$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\ & \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 (P/\rho)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (P/\rho)}{\partial y^2} + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \right. \\ & \left. \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

En utilisant (2.4), un certain nombre de termes s'annulent deux à deux et on obtient, après quelques calculs, l'équation de Poisson, bien connue des mécaniciens:

(3.13) s'écrit alors:

$$\Delta(P/\rho) = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.20)$$

REMARQUE:

On remarque que l'équation servant à la détermination de v est du premier ordre. On utilise ainsi une approximation parabolique dont l'algorithme est détaillé dans le chapitre 3. On n'impose donc pas directement dans la formulation de l'équation en v de conditions aux limites sur la surface libre. En fait, la vitesse verticale sur cette frontière est directement liée à l'élévation d'eau, obtenue à partir de la condition cinématique sur la surface libre. Cette dernière condition étant correctement approchée en fin de processus de convergence de l'itération de linéarisation. Notons finalement que ce procédé est assez voisin de celui utilisé par Sarraf et al. [41].

Finalement, le code de calcul est décrit par l'algorithme général suivant:

```

Boucle sur les pas de temps
|
|   Boucle d'itération de linéarisation
|   |
|   |   Détermination de u par (2.18)
|   |   Détermination de v par (2.4)
|   |   Détermination de H par (2.15)
|   |   Détermination de (P/ρ) par (2.20)
|   |   Jusqu'à convergence en u,v,P/ρ et H
|   |
|   Jusqu'au nombre de périodes choisies

```

La norme utilisée dans le critère de convergence est la norme $\| \cdot \|_{\infty}$ (plus grande valeur absolue des composantes).

La convergence relative d'une grandeur φ , prenant les valeurs φ^* et φ^{**} au cours de deux itérations successives s'écrit

alors:

$$\frac{\|\varphi^* - \varphi^{**}\|_{\infty}}{\|\varphi^*\|_{\infty}} < \epsilon \quad (2.21)$$

$$\text{c'est à dire } \frac{\sup_{i,j} |\varphi_{i,j}^* - \varphi_{i,j}^{**}|}{\sup_{i,j} |\varphi_{i,j}^*|} < \epsilon \quad (2.22)$$

$\varphi_{i,j}^*$ correspond à la valeur de φ^* sur la cellule du maillage située sur la colonne i , à la ligne j .

On peut également s'assurer de la convergence vers la solution cherchée en calculant les résidus des équations mises en oeuvre. Il s'agit, en fin d'itération, de calculer avec quelle précision la première équation (ici, l'équation en u) de l'itération est vérifiée.

On calcule alors les résidus de chaque cellule Ω du maillage \mathcal{M} :

$$\mathcal{R}_{\Omega} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(uv - \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{p}{\rho} \right) \quad (2.23)$$

On arrête l'itération lorsque:

$$\frac{\|\varphi^* - \varphi^{**}\|_{\infty}}{\|\varphi^*\|_{\infty}} < \epsilon_1 \quad \text{pour } \varphi = u, v, H \text{ et } P/\rho$$

et $\frac{\sum_{\Omega \in \mathcal{M}} |\mathcal{R}_{\Omega}|}{N_{\mathcal{M}}} < \epsilon_2$ où $N_{\mathcal{M}}$ est le nombre de cellules du maillage.

II-2-2 CRITERE DE STABILITE

Le problème à résoudre est un phénomène d'évolution. A un instant donné, lorsque le processus itératif de linéarisation,

décrit précédemment, a convergé, on doit passer à l'étape suivante en temps en y ajoutant un pas de temps Δt . Ce pas de temps peut être choisi arbitrairement au début du programme. Il s'avère que le phénomène possède des phases nécessitant un pas de temps petit et d'autres pour lesquelles le pas de temps peut être plus grand. On notera, par exemple, le problème de mise en route du batteur où l'on démarre avec une vitesse horizontale nulle, et avec un fluide au repos. La phase de la houle correspond au maximum des vitesses verticales sur une période. Il en résulte que les premiers calculs génèrent de forts gradients de vitesses verticales et demandent un petit pas de temps.

On a donc choisi d'utiliser une procédure d'ajustement du pas de temps Δt qui peut diminuer ou augmenter en fonction de la rapidité avec laquelle a été résolu le précédent pas de temps. Le coefficient multiplicateur permettant d'augmenter ou de diminuer Δt est choisi empiriquement. On prendra garde à ne pas l'augmenter trop rapidement (coef: 1,05). Par contre, on essaiera de le diminuer assez vite de façon à aller à l'encontre de destabilisations dues à un pas de temps trop grand (coef: $1,4^{-1}$).

Les critères d'augmentation ou de diminution du pas de temps sont basés sur le nombre d'itérations dans la linéarisation et dans le solveur des systèmes linéaires.

En outre, ce pas de temps est majoré par une grandeur qui permet de s'assurer que l'on est capable, en fonction de la discrétisation en espace, de suivre l'évolution du phénomène.

Il s'agit là de conditions de type Courant-Friedrichs-Lewy (notée C.F.L.) qui doivent s'appliquer, à la fois, à la vitesse du fluide et à la célérité de l'onde générée. Ces conditions de stabilité sont liées aux schémas numériques utilisés qui seront décrits au chapitre suivant. Ceux-ci ont des formulations implicites (pour u), explicites (pour H) et indépendantes du temps (pour v et P).

Les schémas implicites font appel à des résolutions tridiagonales, par séparation des directions d'espace. D'après Euvrard [42], la condition à vérifier est celle qui rend les sous-systèmes tridiagonaux à diagonale dominante. Cette condition est discutée suivant la valeur du nombre de Peclet ou Reynolds de maille (qui sera utilisé au chapitre suivant):

$$P_0 = \frac{|U| \Delta l}{\nu}$$

où Δl est le pas d'espace et $|U|$ le module de vitesse

Si celui-ci est supérieur à 2, il faut que la condition suivante soit vérifiée:

$$\Delta t \leq \frac{2 \Delta l^2}{|U| \Delta l - 2\nu} \quad (2.24)$$

Dans les différentes simulations effectuées à partir de notre code de calcul, on a $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, Δl est de l'ordre de 10^{-3} m . et la plus grande valeur du module des vitesses est de l'ordre de 0,1. Le nombre de Peclet prend donc une valeur approximativement égale à 100. La condition précédente doit donc être satisfaite. Remarquons, de plus, que dans nos cas d'étude 2ν est négligeable devant $|U| \Delta l$ et donc la condition s'écrit:

$$\Delta t \leq \frac{2\Delta l}{|U|} \quad (2.25)$$

En différenciant les pas en espace, on écrira

$$\Delta t \leq 2 \min_{i,j} \left(\frac{\Delta x_{ij}}{|u_{ij}|}, \frac{\Delta y_{ij}}{|v_{ij}|} \right) \quad (2.26)$$

où Δx_{ij} , Δy_{ij} , u_{ij} et v_{ij} sont respectivement la longueur, la hauteur d'une cellule et les composantes horizontales et verticales des vitesses s'y rapportant.

Ce critère de stabilité concerne le schéma implicite permettant de calculer la composante horizontale de vitesse. Il reste à définir un critère relatif à la deuxième équation dépendant du temps intervenant dans notre algorithme de résolution: il s'agit de la résolution explicite de l'élevation de la surface libre: η . La solution attendue et effectivement trouvée de cette équation est assez voisine d'une onde se déplaçant à la célérité c évaluée de manière approximative pendant le calcul. Notons que cette célérité est plus grande que la vitesse maximum des particules d'eau dans le cas d'une houle établie (de 4 à 6 fois).

Notre schéma explicite relatif au calcul de H sera, à priori, stable si l'on satisfait à la condition de C.F.L. qui s'écrira:

$$\Delta Y \leq \text{Min}_{i,j} \frac{\Delta x_{ij}}{c} \quad (2.27)$$

Compte tenu de la comparaison faite précédemment entre la célérité de l'onde c et la vitesse maximum des particules d'eau, cette dernière condition (2.27) est plus contraignante que la première (2.26) et déterminera ainsi la stabilité de la résolution.

Chapitre 3:

DISCRETISATION NUMERIQUE

III-1 DISCRETISATION DU DOMAINE

III-1-1 STRUCTURE DU MAILLAGE DE CALCUL

Pour résoudre le problème numériquement, on va découper le domaine à traiter en cellules. Ce maillage est initialement orthogonal, puis la surface libre se déplaçant, il devra se déformer pour suivre l'évolution du domaine.

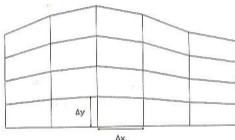


figure 3.1: Dilatation des cellules

Comme l'illustre la figure 3.1, les cellules du maillage, au cours du temps, ont une forme trapézoïdale dont la largeur Δx est fixe et la hauteur Δy variable.

Il est à noter que le nombre de cellules reste constant au cours du temps. Le maillage initialement "structuré", le reste donc tout au long du calcul et on repère ainsi de manière immédiate les cellules voisines d'une cellule donnée.

Les variables calculées sont placées sur ce maillage suivant un procédé initialement décrit dans les méthodes de type M.A.C. (Marker and Cell). Les différentes variables se trouvent en fait localisées en des points différents. On parlera alors de la cellule de contrôle d'une grandeur f , en désignant une cellule

centrée sur le point d'évaluation de f , de sorte que l'ensemble des cellules de contrôle recouvre le domaine.

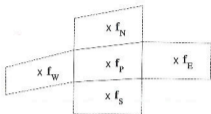


figure 3.2: Repérage des cellules

On suivra le repérage géographique classique en notant f_W, f_E, f_N et f_S (W pour Ouest, E pour Est, N pour Nord, S pour Sud) les voisins de la grandeur notée f_P .

En notation à double indice où le premier indice renseigne sur le voisinage suivant la direction x et le deuxième indice sur le voisinage suivant la direction y , lorsque $f_P = f_{i,j}$, on a alors les correspondances:

$$f_W = f_{i-1,j}$$

$$f_E = f_{i+1,j}$$

$$f_N = f_{i,j+1}$$

$$f_S = f_{i,j-1}$$

On utilise, dans la suite du texte, indifféremment ces deux types de notation.

III-1-2 LOCALISATION DES VARIABLES SUR LES CELLULES

Décrivons maintenant la localisation des variables les unes par rapport aux autres:

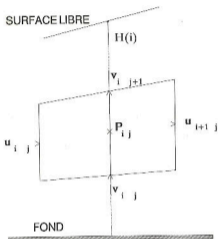


figure 3.3: Localisation des variables

Si l'on considère une cellule de contrôle de la pression $P_{i,j}$, la première composante de vitesse $u_{i,j}$ correspondante sera située au centre de la face Ouest de la cellule, alors que la deuxième composante de la vitesse $v_{i,j}$ sera située au centre de la face Sud.

La dernière variable calculée, la hauteur d'eau H par rapport au fond du canal, correspond à l'élévation du centre des colonnes des cellules centrées sur le point d'évaluation de la pression.

Cette disposition des variables de calcul possède des propriétés bien connues qui permettent notamment de ne pas avoir besoin de conditions aux limites de pression (puisque les cellules

sont centrées en pression) lors des résolutions des équations de conservation de la quantité de mouvement. De plus, pour les calculs faisant appel à de la compressibilité artificielle, on obtient facilement (par différences centrées) la divergence de la vitesse au lieu de calcul de la pression.

On représente sur la figure 3.6, le maillage dans sa position initiale: il est alors parfaitement orthogonal. On remarque que le domaine est entièrement recouvert par les cellules de contrôle de la pression.

On ne prendra que des demi-cellules sur la surface libre, de façon à ce que la pression qui y est connue (pression atmosphérique) ne soit pas interpolée.

Par ailleurs, le domaine de calcul est bordé par des cellules fictives pour lesquelles les grandeurs seront évaluées directement par l'expression des conditions aux limites. Ce procédé permet d'écrire de manière plus structurée le code de calcul en traitant les cellules au bord du domaine réel de la même manière que les cellules à l'intérieur du domaine.

On ramène ainsi le problème continu exposé au II-1 et II-2 à un problème discret pour lequel on cherche à déterminer les ensembles:

$$\begin{aligned} & \{ u_{i,j} ; 1 \leq j \leq nh ; 2 \leq i \leq nl+1 \} \\ & \{ v_{i,j} ; 2 \leq j \leq nh ; 1 \leq i \leq nl \} \\ & \{ P_{i,j} ; 1 \leq j \leq nh-1 ; 1 \leq i \leq nl \} \\ & \{ H_i ; 1 \leq i \leq nl \} \end{aligned}$$

où nl est le nombre de cellules centrées en P sur la longueur du domaine.

nh est le nombre de cellules centrées en P (sauf à la surface libre) sur la hauteur du domaine.

III-1-3 REPERAGE SPATIAL SUR LE MAILLAGE

Nous allons terminer ce paragraphe en précisant les notations utilisées pour le repérage spatial sur le maillage:

On note $\Delta x(i)$ la largeur d'une cellule de contrôle de pression.

On note $H(i)$ la hauteur d'eau comprise entre le fond et la surface libre.

A chaque nouveau calcul de l'élévation de la surface libre, on actualise un tableau à double indices y_h tel que:

$y_h(i, j)$ soit l'ordonnée du centre de la face Sud de la cellule de contrôle de $v_{i, j}$.

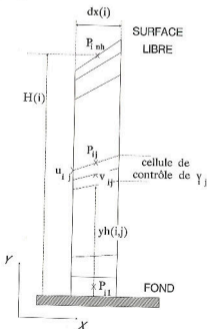


figure 3.5: Repérage spatial sur une colonne de cellules

III-2 DISCRETISATION DES EQUATIONS

III-2-1 INTEGRATION DES EQUATIONS SUR LES CELLULES DE DISCRETISATION

On utilise la méthode des volumes finis pour résoudre le problème:

On intègre, alors, les équations exactes sur chacune des cellules du domaine discrétisé.

Les équations étant sous forme conservative, les intégrales obtenues correspondent à des bilans de flux sur chacune des faces de la cellule.

Un flux d'une grandeur $\vec{\phi}$ sur une face i (i pouvant être N, S, W ou E) de normale \vec{n}_i et de longueur ℓ sera alors calculé par l'approximation:

$$\ell \vec{\phi}_i \cdot \vec{n}_i$$

où $\vec{\phi}_i$ est une valeur moyenne approchée de $\vec{\phi}$ sur toute la face.

Considérons une équation sous forme conservative, écrite sous la formulation générale suivante:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \vec{\phi}(\varphi) = S(\varphi) \quad (3.1)$$

où φ est une fonction de x , y et t .

$S(\varphi)$ est une expression fonction de φ .

Après intégration sur une cellule Ω , on obtient:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \text{div } \vec{\phi}(\varphi) d\Omega = \int_{\Omega} S(\varphi) d\Omega \quad (3.2)$$

L'intégrale de la divergence sera évaluée en utilisant le théorème de la divergence (ou Ostrogradski):

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{\phi}(\varphi) \, d\Omega = \sum_i \int_{\partial\Omega_i} \vec{\phi}(\varphi) \vec{n}_i \, ds$$

où \vec{n}_i est la normale à la face $\partial\Omega_i$ de la cellule Ω

En séparant les dérivées spatiales provenant de la divergence et en considérant la cellule trapézoïdale caractéristique du maillage, représentée en figure 3.6,

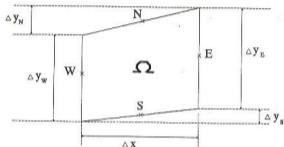


figure 3.6: Géométrie d'une cellule

on obtient, pour $\vec{\phi}$ de composantes (f, g) :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial g(\varphi)}{\partial y} \, d\Omega = \delta x (\tilde{g}_N(\varphi) - \tilde{g}_S(\varphi)) \quad (3.3)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f(\varphi)}{\partial x} \, d\Omega = \tilde{f}_E(\varphi) \Delta y_E - \tilde{f}_W(\varphi) \Delta y_W + \tilde{f}_S(\varphi) \Delta y_S - \tilde{f}_N(\varphi) \Delta y_N \quad (3.4)$$

(3.3) correspond au bilan des projections verticales des flux

entrant et sortant sur les faces Nord et Sud.

(3.4) correspond au bilan des projections horizontales des flux entrant et sortant sur les quatre faces de la cellule, puisqu'en raison de la déformation verticale du maillage, les faces Nord et Sud ne restent pas horizontales.

■ En ce qui concerne l'approximation du 1er terme de l'équation (3.2), la difficulté provient du fait que la cellule sur laquelle l'intégration a lieu, se déforme temporellement alors le théorème de transport (voir, par exemple, Duvaut [43]) :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \varphi \, d\Omega = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, d\Omega + \int_{\partial \Omega(t)} \varphi \, \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds \quad (3.5)$$

où $\partial \Omega(t)$ est le contour de $\Omega(t)$

\vec{V} et \vec{n} sont respectivement la vitesse de déformation et la normale instantanée aux points du bord.

Dans notre cas, seules les faces Nord et Sud sont animées de vitesses notées V_N , V_S .

De plus, on prendra l'approximation:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \varphi \, d\Omega = \frac{\left(\bar{\varphi}_\Omega V_\Omega \right)^n - \left(\bar{\varphi}_\Omega V_\Omega \right)^{n-1}}{\Delta t}$$

où $\bar{\varphi}_\Omega$ est la valeur moyenne de φ sur la cellule $\Omega(t)$,

V_Ω est le volume¹ de cette cellule.

les indices $n-1$ et n permettent de désigner les valeurs à deux pas de temps successifs, l'indice n correspondant au pas de temps actuel.

¹ Selon les habitudes de langage des numériciens utilisent les méthodes de volumes finis, les cellules du maillage sont qualifiées de volumes même si la résolution se fait dans un plan, ce qui est le cas ici, en raison de l'hypothèse de bidimensionnalité de l'écoulement.

Finalement (3.5) s'écrit

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\Omega = \frac{\left(\tilde{\varphi}_{\Omega} V_{\Omega} \right)^n - \left(\tilde{\varphi}_{\Omega} V_{\Omega} \right)^{n-1}}{\Delta t} - (\tilde{\varphi}_N V_N - \tilde{\varphi}_S V_S) \Delta x \quad (3.6)$$

Les calculs de V_N et V_S seront détaillés plus tard par les formules (3.13) et (3.14).

Pour terminer, il reste à évaluer l'intégrale du terme source de l'équation (3.2). On peut écrire approximativement que

$$\int_{\Omega} S(\varphi) d\Omega = \tilde{S}_{\Omega}(\varphi) V_{\Omega}$$

avec les notations précédentes.

La fin de ces calculs consiste à déterminer les différentes grandeurs moyennes approchées $\tilde{g}_N(\varphi)$, $\tilde{g}_S(\varphi)$, $\tilde{f}_N(\varphi)$, $\tilde{f}_N(\varphi)$, $\tilde{f}_S(\varphi)$, $\tilde{\varphi}_N$, $\tilde{\varphi}_S$ intervenant dans les équations (3.3), (3.4) et (3.6)

La technique du maillage décalé permet d'obtenir plus simplement ces valeurs.

Nous allons maintenant reprendre, en suivant ce principe, la discrétisation de chacune des équations de l'algorithme général de résolution décrit en II-2-1-5.

III-2-2 CALCUL DE u : COMPOSANTE HORIZONTALE DE LA VITESSE

C'est une des deux étapes de la résolution où l'on intègre directement un terme d'évolution, ici:

$$\frac{\partial u}{\partial t}$$

En suivant la démarche décrite en III-2-1, on intègre l'équation (2.18) sur chaque cellule Ω :

III-2-2-1 INTEGRATION DU TERME D'EVOLUTION

Le premier terme de (3.7) est discrétisé, d'après (3.6):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega = \frac{u_{1j}^n v_{\Omega}^n - u_{1j}^{n-1} v_{\Omega}^{n-1}}{\Delta t} - (u_N v_{FN} - u_S v_{FS}) \Delta x(1) \quad (3.8)$$

On indice par n les grandeurs calculées au temps en cours et par n-1 les grandeurs au temps précédent.

En reprenant les notations des figures 3.6 et 3.7, u_N et u_S sont les valeurs de la composante horizontale de la vitesse prises respectivement sur le centre de la face Nord et de la face Sud de la cellule Ω .

Elles sont obtenues par interpolation:

$$u_N = (u_{1,j} + u_{1,j+1})/2 \quad (3.9)$$

$$u_S = (u_{1,j} + u_{1,j-1})/2 \quad (3.10)$$

v_{FN} et v_{FS} sont les vitesses des faces Nord et Sud de la cellule Ω . Elles sont calculées à partir des hauteurs des faces Nord et Sud de la cellule de contrôle de u_{1j} , notées y_N et y_S . Par interpolation, en suivant les figures 3.6 et 3.7 on a:

$$y_N = (y_h(1,j+1) + y_h(1-1,j+1) + y_h(1,j+2) + y_h(1-1,j+2))/4 \quad (3.11)$$

$$y_S = (y_h(1,j+1) + y_h(1-1,j+1) + y_h(1,j) + y_h(1-1,j))/4 \quad (3.12)$$

et donc:

$$v_N = (y_N^n - y_N^{n-1})/\Delta t \quad (3.13)$$

$$v_S = (y_S^n - y_S^{n-1})/\Delta t \quad (3.14)$$

III-2-2-2 INTEGRATION DES TERMES DE CONVECTION-DIFFUSION

Le deuxième et le troisième termes de (3.7) sont discrétisés en utilisant un schéma hybride.

En suivant la démarche de Patankar [39], on identifie, par exemple, le 3ème terme à une formulation plus générale, du type:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(v\phi - \nu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) d\Omega$$

Le premier terme, dans la parenthèse, provient de la convection d'une fonction arbitraire ϕ , le second provient de la diffusion.

D'après (3.3), on obtient alors

$$\Delta x \left[\left(v\phi - \nu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_N - \left(v\phi - \nu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_S \right]$$

Il s'agit maintenant de trouver une approximation de l'expression $\left(v\phi - \nu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$ au centre des faces Nord et Sud de Ω .

Pour cela, on va chercher la solution analytique de l'équation différentielle:

$$\frac{d}{dy} \left(v\phi(y) - \nu \frac{d\phi}{dy}(y) \right) = 0$$

qui est:

$$\phi(y) = \phi_0 + (\phi_1 - \phi_0) \frac{\exp(vy/\nu) - 1}{\exp(P_e) - 1} \quad (3.15)$$

où $P_e = v \Delta y / \nu$ est le nombre de Peclet (appelé encore Reynolds de maille).

où ϕ_0 et ϕ_1 représentent :

- soit ϕ_j et ϕ_{j+1} lors du calcul de $\left(v\phi - \nu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_N$
- soit ϕ_{j-1} et ϕ_j lors du calcul de $\left(v\phi - \nu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_S$

et donc l'approximation cherchée s'écrit:

$$\left(v\phi - \nu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = v\phi_0 + (\phi_1 - \phi_0) \frac{\nu}{\Delta y} \frac{P_e}{1 - \exp(-P_e)} \quad (3.16)$$

Le calcul de l'exponentielle étant coûteux, suivant Patankar[39], on utilise l'approximation (voir figure 3.8):

$$\frac{P_o}{1-\exp(P_o)} \approx \inf (P_o ; 1/2 P_o - 1 ; 0) \quad (3.17)$$

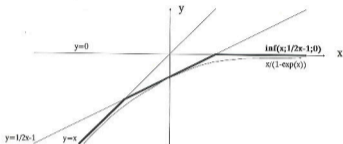


figure 3.8: Approximation de la fonction $x/(1-\exp(x))$

La substitution de cette approximation dans (3.16) redonne le schéma hybride classique qui correspond, comme son nom l'indique, à une utilisation mixte des deux schémas:

- le schéma Upwind si $|P_o| > 2$
- le schéma centré si $|P_o| < 2$

Finalement, le 3ème terme de (3.7) s'écrit:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(uv - \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega =$$

$$\Delta x(1) \left[\left(uv - \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_N - \left(uv - \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_S \right] = \quad (3.18)$$

$$\Delta x(1) \left[v_N u_{1,j} + B_N (u_{1,j+1} - u_{1,j}) - v_S u_{1,j} + A_S (u_{1,j-1} - u_{1,j}) \right]$$

avec

$$\bullet P_N = \frac{\nu}{\Delta y} \inf(P_{e_N} ; 1/2 P_{e_N} - 1 ; 0)$$

$$\text{et } P_{e_N} = \frac{v_N \Delta y}{\nu}$$

$$\bullet A_S = \frac{\nu}{\Delta y} \inf(P_{e_S} ; 1/2 P_{e_S} - 1 ; 0) - v_S$$

$$\text{et } P_{e_S} = \frac{v_S \Delta y}{\nu}$$

$$\bullet v_N = (v_{i-1,j+1} + v_{i,j+1})/2 \quad \text{et} \quad v_S = (v_{i-1,j} + v_{i,j})/2$$

Le deuxième terme de (3.7) est discrétisé par le même procédé. On l'écrit sous la forme:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(u \phi - \nu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) d\Omega$$

En utilisant (3.4), et les notations de la figure (3.6), on obtient:

$$\left(u \phi - \nu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_E \Delta y_E - \left(u \phi - \nu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_N \Delta y_N + \left(u \phi - \nu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_S \Delta y_S -$$

$$\left(u \phi - \nu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_H \Delta y_H$$

Avec le schéma hybride, on a:

$$\left(u \phi - \nu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = u \phi_0 + (\phi_1 - \phi_0) \frac{\nu}{\Delta x} \inf(P_n ; 1/2 P_n - 1 ; 0) \quad (3.19)$$

où $P_n = u \Delta x / \nu$

Finalement, le deuxième terme de (3.7) s'écrit:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) d\Omega = \\
 & \Delta y_E \left(u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_E - \Delta y_W \left(u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_W + \Delta y_S \left(u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_S - \\
 & \Delta y_N \left(u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_N = \\
 & \Delta y_E \left[u_E u_{1j} + B_x (u_{1+1j} - u_{1j}) \right] - \\
 & \Delta y_W \left[u_W u_{1j} + A_x (u_{1-1j} - u_{1j}) \right] + \Delta y_S \left[u_S^2 - \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_S \right] - \\
 & \Delta y_N \left[u_N^2 - \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_N \right] \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

avec

$$\blacksquare B_x = \frac{\nu}{\Delta x} \inf(P_{e_E} ; 1/2 P_{e_E} - 1 ; 0)$$

$$\text{et } P_{e_E} = \frac{u_E \Delta x}{\nu}$$

$$\blacksquare A_x = \frac{\nu}{\Delta x} \inf(P_{e_W} ; 1/2 P_{e_W} - 1 ; 0) - u_W$$

$$\text{et } P_{e_W} = \frac{u_W \Delta x}{\nu}$$

$$\blacksquare u_W = (u_{1j} + u_{1-1j})/2 \quad u_E = (u_{1j} + u_{1+1j})/2$$

$$\blacksquare u_S = (u_{1j} + u_{1j-1})/2 \quad u_N = (u_{1j} + u_{1j+1})/2$$

On utilise alors des formules centrées pour approcher les valeurs des dérivées partielles de u :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_N = (u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j} - u_{i-1,j+1}) / (4\Delta x(1))$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_S = (u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j} - u_{i-1,j-1}) / (4\Delta x(1))$$

On remarquera que les flux sur les faces obliques Nord et Sud, dus à la déformation de la cellule, sont traités de manière "explicite": Ils apparaissent en tant que source de quantité de mouvement, mais sont actualisés à chaque itération de linéarisation.

III-2-2-3 INTEGRATION DU TERME SOURCE

Le quatrième terme de (3.7) est également un terme source de quantité de mouvement.

D'après (3.4), on a

$$\int_{\Omega} \frac{\delta}{\delta x} (P/\rho) d\Omega = (P/\rho)_E \Delta y_E - (P/\rho)_N \Delta y_N + (P/\rho)_S \Delta y_S - (P/\rho)_W \Delta y_W \quad (3.21)$$

avec

$$(P/\rho)_E = P_{ij}$$

On note P_{ij} : la variable de pression effectivement calculée, correspondant à la pression divisée par la masse volumique.

$$(P/\rho)_W = P_{i-1,j}$$

$$(P/\rho)_N = (P_{i-1,j} + P_{ij} + P_{i,j+1} + P_{i-1,j+1}) / 4$$

$$\left(\frac{P}{\rho} \right)_S = (P_{i-1,j} + P_{i,j} + P_{i,j-1} + P_{i-1,j-1}) / 4$$

Il est intéressant de noter que la mise au point du code de calcul a permis de montrer que les flux de pression sur les faces obliques Nord et Sud sont essentiels quant à la génération des vitesses horizontales au sommet et au creux des vagues.

D'autre part, afin d'avoir un schéma centré en temps, il est important de prendre les termes source de quantité de mouvement à l'instant $n - 1/2$, obtenu en effectuant la moyenne de ceux calculés aux instants n et $n-1$. On rappelle, en effet, que le terme d'évolution :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} u \, d\Omega \text{ est approché par } \frac{u_{ij}^n V_{\Omega}^n - u_{ij}^{n-1} V_{\Omega}^{n-1}}{\Delta t} \quad (\text{voir 3.8})$$

Par conséquent, les termes de l'équation (3.21) et les flux sur les faces Nord et Sud de l'équation (3.20) seront évalués par les demi-sommes des valeurs prises aux instants n et $n-1$.

III-2-2-4 ECRITURE DU SYSTEME LINEAIRE OBTENU

Finalement l'équation (3.7) s'écrit, après discrétisation, sous la forme générale:

$$\sum_{\alpha} C_{\alpha} (u_{\alpha} - u_{ij}) + D \cdot u_{ij} + S = 0 \quad (3.22)$$

où les u_{α} sont les vitesses voisines de u_{ij} (c'est à dire $u_{i-1,j}$, $u_{i+1,j}$, $u_{i,j-1}$, $u_{i,j+1}$) et C_{α} les coefficients correspondants.

Les coefficients C_{α} provenant des schémas hybrides intègrent les phénomènes de convection et de diffusion (2ème et 3ème termes de 3.7);

le coefficient de u_{ij-1} est A_S

le coefficient de u_{ij+1} est B_N

le coefficient de u_{i-1j} est A_W

le coefficient de u_{i+1j} est A_E

Ils ont tous été définis dans les équations 3.18 et 3.20

D provient des 1er, 2ème et 3ème termes de (3.7)

$$D = u_E \Delta y_E - u_W \Delta y_W + (v_N - v_S) \Delta x + (\Delta x \Delta y) / \Delta t \quad (3.23)$$

S provient des 1er, 2ème et 4ème termes de (3.7)

$$\begin{aligned} S = & - \frac{\Delta x (\Delta y)^{n-1}}{\Delta t} u_{ij}^{n-1} + \left(u_S^2 + \frac{\nu}{\Delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_S \right)^{n-1/2} + \\ & \left(u_N^2 + \frac{\nu}{\Delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_N \right)^{n-1/2} + \\ & \left(P/\rho \right)_E^{n-1/2} \Delta y_E^{n-1/2} - \left(P/\rho \right)_W^{n-1/2} \Delta y_W^{n-1/2} \\ & \left(P/\rho \right)_S^{n-1/2} \Delta y_S^{n-1/2} - \left(P/\rho \right)_N^{n-1/2} \Delta y_N^{n-1/2} \quad (3.24) \end{aligned}$$

Les inconnus sont : u_{ij} et les u_α . Tous les autres termes de l'équation (3.22) sont calculés, soit à partir des valeurs du pas de temps précédent (d'indice n-1), soit à partir des valeurs du pas de temps en cours, mais à l'itération de linéarisation précédente.

L'équation (3.22) écrite pour chacune des cellules (i,j) du maillage conduit à un système linéaire pentadiagonal dont on donnera l'algorithme de résolution dans un chapitre ultérieur.

En conclusion sur la résolution de l'équation en u, on remarquera que l'intégration sur le maillage déformable apparaît :

■ d'une part, dans la prise en compte des calculs de flux des termes $\int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial x} d\Omega$ sur les faces Nord et Sud.

■ d'autre part, dans l'intégration du terme d'évolution $\partial u / \partial t$ auquel on ajoute les flux des vitesses des faces mobiles des cellules.

III-4-3 CALCUL DE v : DEUXIEME COMPOSANTE DE VITESSE

Comme décrit au paragraphe III-2-1, on doit intégrer l'équation de continuité:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega \quad (3.25)$$

On travaille, pour ce calcul, sur les cellules de contrôle de pression décrites sur la figure (3.9).

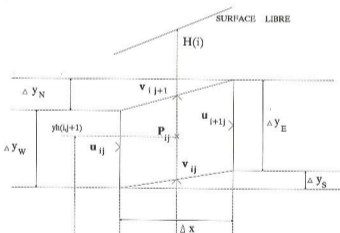


figure 3.9: Cellule de contrôle de pression

D'après (3.3) et (3.4), l'équation (3.25) se discrétise par:

$$(v_N - v_S) \Delta x = u_W \Delta y_W - u_E \Delta y_E + u_N \Delta y_N - u_S \Delta y_S \quad (3.26)$$

avec

$$\begin{aligned}v_N &= v_{i,j+1} & v_S &= v_{i,j} \\u_N &= u_{i,j} & u_E &= u_{i+1,j} \\u_N &= 0,25 (u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) \\u_S &= 0,25 (u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1})\end{aligned}$$

ce qui donne:

$$v_{i,j+1} = v_{i,j} + u_{i,j} \frac{\Delta y_N}{\Delta x} - u_{i+1,j} \frac{\Delta y_E}{\Delta x} + u_N \frac{\Delta y_N}{\Delta x} - u_S \frac{\Delta y_S}{\Delta x} \quad (3.27)$$

Connaissant alors v au fond du canal, à savoir $v=0$, il est possible, grâce à l'équation (3.27), de "remonter" pour déterminer toutes les autres valeurs de v sur toute la colonne de cellules correspondante. On effectue ce calcul pour chacune des colonnes de cellules.

Cette détermination de v est simple et rapide. Elle permet de s'assurer directement de la conservation de la masse. Certains codes de calcul (par exemple : les algorithmes SIMPLE et PISO, voir Patankar et Spalding [44], Gosman, Issa et Watkins [45]) n'assurent la conservation de la masse qu'au terme d'un processus itératif correctif souvent coûteux en temps calcul.

III-2-4 CALCUL DE LA HAUTEUR D'EAU

On doit résoudre (voir paragraphe II-2-1) l'équation (2.15):

$$\frac{\partial H}{\partial t} = v - u \frac{\partial H}{\partial x}$$

Cette équation est discrétisée par différences finies centrées en temps et en espace:

$$\frac{H_i^n - H_i^{n-1}}{\Delta t} = \tilde{v}^{n-1/2} - \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^{n-1/2} \quad (3.28)$$

On indice par n et $n-1$ les grandeurs calculées respectivement au pas de temps en cours et au temps précédent. L'indice $n-1/2$ correspond à une interpolation entre ces deux pas de temps.

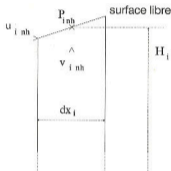


figure 3.10: Repérage à proximité de la surface libre

Les grandeurs tildées, correspondent à des interpolations spatiales permettant de suivre une particule dans son mouvement pendant un demi-pas de temps.

Une particule de la surface libre située en A, à l'instant n , se trouvait sur la surface libre, en un lieu B, à l'instant $n-1/2$ tel que (par développement limité à l'ordre 1) :

$$u_B = u_A + (x_B - x_A) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_A \quad (3.29)$$

u_A et u_B sont respectivement les vitesses horizontales en A et en B d'abscisses x_A et x_B .

De plus, $(x_A - x_B)$ correspond au déplacement horizontal de la particule pendant $\Delta t/2$.

On a alors, par linéarisation en temps:

$$x_A = x_B + \frac{\Delta t}{2} u_B \quad (3.30)$$

D'où (3.29) s'écrit:

$$u_B = u_A - \frac{\Delta t}{2} u_B \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_A$$

$$u_B = \frac{u_A}{1 + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_A} \quad (3.31)$$

Avec les notations de (3.28) on a

$$\tilde{u} = \frac{u_p}{1 + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_p} \quad (3.32)$$

$$\text{où } u_p = (u_{1,nh} + u_{1+1,nh}) / 2$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_p = (u_{1+1,nh} - u_{1,nh}) / \Delta x_i$$

Ayant évalué la vitesse horizontale \tilde{u} à l'instant $n-1/2$, on obtient \tilde{v} en effectuant un développement limité à l'ordre 1:

$$\tilde{v} = v_{1,nh} + \delta x \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\text{où } \delta x = -\tilde{u} \frac{\Delta t}{2}$$

ce qui donne:

$$\tilde{v} = v_{1,nh} - \tilde{u} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.33)$$

en prenant

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \begin{cases} \frac{v_{i,nh} - v_{i-1,nh}}{\Delta x_i} & \text{si } \tilde{u} > 0 \\ \frac{v_{i+1,nh} - v_{i,nh}}{\Delta x_i} & \text{si } \tilde{u} < 0 \end{cases}$$

Il reste à calculer dans (3.28) le terme $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}$ qui se calcule simplement de la manière suivante:

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = \begin{cases} \frac{H_i - H_{i-1}}{\Delta x_i} & \text{si } \tilde{u} > 0 \\ \frac{H_{i+1} - H_i}{\Delta x_i} & \text{si } \tilde{u} < 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Toutes les valeurs des formules (3.32) (3.33) et (3.34) sont calculées à l'instant $n-1/2$ par interpolation sur les valeurs connues au temps précédent (indice $n-1$) et sur les valeurs de l'itération de linéarisation précédente (indice n).

La formule (3.28) permet ainsi de calculer explicitement H_i^n .

III-2-5 CALCUL DE LA PRESSION

Elle est basée sur la résolution de l'équation de Poisson (2.20):

$$\Delta(P/\rho) = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

L'intégration de cette équation se fait sur les cellules de contrôle centrées en P. Sa discrétisation nécessite l'évaluation des quatre dérivées partielles en u et v au centre de ces cellules. Par ailleurs, l'évaluation de ces dérivées partielles, comme le calcul du laplacien, doit prendre en compte la déformation des cellules subie au cours du temps de calcul.

III-2-5-1 CALCUL DES DERIVEES PARTIELLES

Afin de simplifier les notations, on va introduire un repère local propre à chaque cellule:

On prend le point d'évaluation de P_{ij} comme origine locale. On note (x_W, y_W) , (x_E, y_E) , (x_S, y_S) et (x_N, y_N) les coordonnées locales des points d'évaluation des quatre pressions voisines $P_{i-1, j}$, $P_{i, j-1}$, $P_{i+1, j}$, $P_{i, j+1}$.

La géométrie du domaine est donnée dans les figures (3.11) et (3.3) du paragraphe III-1-2. Il est à noter que l'on aura besoin de distinguer les centres des faces de la cellule (n, e, s, w), des centres des cellules voisines (N, E, S, W).

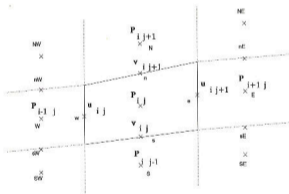


figure 3.11 : repérage du voisinage d'une cellule centrée en Pression

On a alors, par simple interpolation linéaire:

$$x_W = -\Delta x \quad \text{et} \quad x_E = \Delta x$$

$$y_W = y_h(i-1, j+1) - y_h(i, j+1)$$

$$y_E = y_{h(1+1, J+1)} - y_{h(1, J+1)}$$

$$y_N = y_{h(1, J+2)} - y_{h(1, J+1)}$$

$$y_S = y_{h(1, J)} - y_{h(1, J+1)}$$

Calculons maintenant des approximations des quatre dérivées premières des vitesses, centrées sur la cellule définie sur la figure (3.3).

Le maillage n'ayant pas de déformations dans la direction horizontale, les dérivées partielles suivant la direction verticale s'obtiennent naturellement par:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_N - u_S}{y_N - y_S} \quad (3.35)$$

$$\text{où } \begin{cases} u_N = 0,5 (u_{1, J+1} + u_{1+1, J+1}) \\ u_S = 0,5 (u_{1, J-1} + u_{1+1, J-1}) \end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2 \frac{v_{1, J+1} - v_{1, J}}{y_N - y_S} \quad (3.36)$$

En utilisant l'équation de continuité on a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial v}{\partial y}$$

Il reste à évaluer $\partial v / \partial x$:

$$\text{On note } v_E = 0,5 (v_{1+1, J} + v_{1+1, J+1})$$

$$v_N = 0,5 (v_{1-1, J} + v_{1-1, J+1})$$

$$v_P = 0,5 (v_{1, J} + v_{1, J+1})$$

Par développements limités, on a

$$v_E = v_P + x_E \frac{\partial v}{\partial x} + y_E \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$v_N = v_P + x_N \frac{\partial v}{\partial x} + y_N \frac{\partial v}{\partial y}$$

et donc

$$v_E - v_W = (x_E - x_W) \frac{\partial v}{\partial x} + (y_E - y_W) \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.37)$$

et alors:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v_E - v_W - (y_E - y_W) \frac{\partial v}{\partial y}}{x_E - x_W} \quad (3.38)$$

III-2-5-2 DISCRETISATION SUR LES CELLULES

L'approximation classique du laplacien par différences finies sur 5 points n'est valide que sur un maillage rectangulaire, ce qui n'est pas le cas ici, en raison des déformations subies par les cellules.

Pour cette discrétisation, nous allons reprendre les résultats généraux décrits au paragraphe III-2-1. On intègre l'équation de Poisson (2.20) sur une cellule Ω centrée en pression, dont la géométrie est donnée dans les figures (3.11) et (3.3):

$$\int_{\Omega} \Delta(P/\rho) = 2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega \quad (3.39)$$

Dans la suite de ce paragraphe et afin de simplifier les notations, on désignera par P , la grandeur P/ρ .

Le terme de droite est un terme source et il est obtenu par un simple calcul de moyenne sur la cellule, sachant que les dérivées partielles indexées par Ω sont calculées au centre de la cellule, ce qui a fait l'objet du paragraphe précédent:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{\Omega} \Delta x \Delta y \quad (3.40)$$

où Δy est approché par $0,5 (y_N - y_S)$

L'intégration du laplacien de pression s'effectue grâce aux formules (3.3) et (3.4):

$$\int_{\Omega} \Delta P \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \, d\Omega \quad (3.41)$$

avec

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) \, d\Omega = \Delta x \left[\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_n - \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_e \right] \quad (3.42)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \, d\Omega = \quad (3.43)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_e \Delta y_e - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_w \Delta y_w + \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_s \Delta y_s - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_n \Delta y_n$$

■ L'approximation de (3.42) s'obtient par:

$$\Delta x \left[\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_n - \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_e \right] \approx \Delta x \left[\frac{P_N - 2P_P + P_S}{\Delta y} \right] \quad (3.44)$$

■ L'approximation de (3.43) s'obtient plus difficilement, en raison de la géométrie des cellules:

Par développement limité, autour de la face Est, on a:

$$P_E = P_P + x_E \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_e + y_E \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_e \quad (3.45)$$

par interpolation linéaire, on écrit

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_e &= 0,5 \left[\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_P + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_E \right] \\ \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_n &\approx \frac{1}{4 \Delta y} \left[P_N - P_S + P_{NE} - P_{SE} \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

Rappelons que ces diverses simplifications n'ont de sens que si Δy ne varie pas trop en espace. Cette hypothèse reste cohérente avec le restant de nos propos, puisque, ne prenant pas en compte les tensions superficielles, on interdit de ce fait des déformations trop importantes de la surface libre.

on a donc, d'après (3.45):

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_e = \frac{1}{x_E} \left(P_E - P_P - \frac{y_E}{4 \Delta y} \left(P_N - P_S + P_{NE} - P_{SE} \right) \right) \quad (3.47)$$

on obtient de la même manière:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_w = \frac{1}{x_W} \left(P_W - P_P - \frac{y_W}{4 \Delta y} \left(P_N - P_S + P_{NW} - P_{SW} \right) \right) \quad (3.48)$$

Il reste à calculer dans (3.43) les flux à travers les faces obliques Nord et Sud:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_S \Delta y_S - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_N \Delta y_N$$

que l'on remplace, en première approximation par:

$$\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_S - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_N \right] \frac{\Delta y_N + \Delta y_S}{2}$$

On pose $P_{nE} = (P_{NE} + P_E)/2$

$P_{nW} = (P_{NW} + P_W)/2$

par développement limité, on a

$$P_{nE} = P_n + x_E \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_n + y_{nE} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_n \quad (3.49)$$

où $y_{nE} = 0,5 (y_{NE} + y_E)$

$$= y_E + 0,5 \left(y_{h(1+1; j+2)} - y_{h(1+1; j+1)} \right)$$

de même

$$P_{nW} = P_n + x_W \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_n + y_{nW} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_n \quad (3.50)$$

où $y_{nW} = 0,5 (y_{NW} + y_W)$

$$= y_W + 0,5 \left(y_{h(1-1; j+2)} - y_{h(1-1; j+1)} \right)$$

on obtient alors,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_n \approx \frac{1}{x_E - x_W} \left[P_{nE} - P_{nW} - (y_{nE} - y_{nW}) \frac{P_n - P_P}{y_N} \right] \quad (3.51)$$

de même, on a

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_S \approx \frac{1}{x_E - x_W} \left[P_{SE} - P_{SW} - (y_{SE} - y_{SW}) \frac{P_S - P_P}{y_S} \right] \quad (3.52)$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_S - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_N \right] \frac{\Delta y_N + \Delta y_S}{2} \approx \\ & \frac{\Delta y_N + \Delta y_S}{2(x_E - x_W)} \left[P_{SE} + P_{NW} - P_{SW} - P_{NE} + \right. \\ & \quad \left. (y_{NE} - y_{NW}) \frac{P_N - P_P}{y_N} - (y_{SE} - y_{SW}) \frac{P_S - P_P}{y_S} \right] \approx \\ & \frac{\Delta y_N + \Delta y_S}{2(x_E - x_W)} \left[0,5 (P_{SE} + P_{NW} - P_{SW} - P_{NE}) + \right. \\ & \quad \left. (y_{NE} - y_{NW}) \frac{P_N - P_P}{y_N} - (y_{SE} - y_{SW}) \frac{P_S - P_P}{y_S} \right] \end{aligned}$$

Donc (3.43) donne:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) d\Omega = \\ & \frac{\Delta y_E}{x_E} \left(P_E - P_P - \frac{y_E}{4\Delta y} (P_N - P_S + P_{NE} - P_{SE}) \right) - \\ & \frac{\Delta y_W}{x_W} \left(P_W - P_P - \frac{y_W}{4\Delta y} (P_N - P_S + P_{NW} - P_{SW}) \right) + \\ & \frac{\Delta y_N + \Delta y_S}{2(x_E - x_W)} \left[0,5 (P_{SE} + P_{NW} - P_{SW} - P_{NE}) + \right. \\ & \quad \left. (y_{NE} - y_{NW}) \frac{P_N - P_P}{y_N} - (y_{SE} - y_{SW}) \frac{P_S - P_P}{y_S} \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

Afin de simplifier cette expression, on va utiliser les approximations suivantes qui reviennent à confondre la cellule avec un parallélogramme, à égale distance des centres de ses

voisines:

$$y_E = -y_W = \Delta y_N = \Delta y_S = y_{NE} = y_{SE} = -y_{NW} = -y_{SW}$$

Toutes ces grandeurs précédentes seront alors notées δy

$$\Delta y_E = \Delta y_W = y_N = -y_S = \Delta y$$

$$\text{de plus, on a } x_E = -x_W = \Delta x$$

(3.53) s'écrit alors, après simplifications:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) d\Omega = \quad (3.54)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} (P_E + P_W - 2P_P) + \frac{(\delta y)^2}{\Delta x \Delta y} (P_N + P_S - 2P_P) + \frac{\delta y}{2\Delta x} (P_{SE} + P_{NW} - P_{NE} - P_{SW})$$

Finalement l'intégration du laplacien de pression donne

$$\int_{\Omega} \Delta P \, d\Omega = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{(\delta y)^2}{\Delta x \Delta y} \right) (P_N + P_S - 2P_P) + \frac{\Delta y}{\Delta x} (P_E + P_W - 2P_P) + \frac{\delta y}{2\Delta x} (P_{SE} + P_{NW} - P_{NE} - P_{SW}) \quad (3.55)$$

Et donc l'équation de Poisson discrétisée s'écrira:

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{(\delta y)^2}{\Delta x \Delta y} \right) (P_N + P_S) + \frac{\Delta y}{\Delta x} (P_E + P_W) - 2 \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \delta y^2}{\Delta x \Delta y} P_P = \frac{\delta y}{2\Delta x} (P_{NE} + P_{SW} - P_{SE} - P_{NW}) + 2 \Delta x \Delta y \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega \quad (3.56)$$

L'équation (3.56) décrit un système linéaire pentadiagonal où les inconnues (P_P , P_N , P_S , P_E et P_W) apparaissent au membre de gauche de l'égalité. Dans le membre de droite, les termes sont calculés de manière explicite: on utilise pour les évaluer les grandeurs calculées au précédent passage dans l'itération de linéarisation.

La méthode utilisée pour la résolution du système est décrite au chapitre suivant.

III-3 TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES

III-3-1 FOND DU CANAL

Comme décrit précédemment, la vitesse est déterminée par une condition de Dirichlet: $u=v=0$.

Pour la résolution de l'équation de pression, on utilise l'équation de conservation de la quantité de mouvement:

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - g + \nu \Delta v$$

Sachant que $u=v=0$, on a:

$$\frac{\partial(P/\rho)}{\partial y} = -g + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (3.57)$$

avec l'équation de continuité, il vient:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2 \left(u_{i1} - u_{i+1,1} \right) / (\Delta x \Delta y)$$

On rappelle que $u_{i0} = 0$.

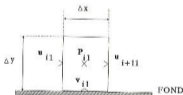


figure 3.12 : cellule de pression à proximité du fond

L'équation (3.57) donne ainsi une condition de Neumann pour le calcul de la pression.

III-3-2 BATTEUR

La composante horizontale de la vitesse est donnée par la cinématique du batteur (voir 2.7 et 2.8).

La composante verticale est prise nulle, dans le cas de l'adhérence du fluide sur la paroi. Cette condition est toutefois très contraignante, puisqu'il existe, à une proche distance, des vitesses verticales importantes. Par ailleurs, pour avoir une représentation significative de l'écoulement auprès du batteur, il est nécessaire, avec cette condition, d'avoir un maillage très fin, car l'écoulement est très perturbé.

Pour ces raisons, on choisira plutôt l'hypothèse du glissement (voir § II-1-3), c'est à dire $\partial v / \partial x = 0$. On obtient donc sur le domaine discrétisé, la condition $v_{0j} = v_{1j}$.

La hauteur d'eau est également déterminée, suivant l'hypothèse liée à v . On a:

* avec l'hypothèse d'adhérence: $H = \text{Constante} =$ hauteur d'eau initiale.

* avec l'hypothèse de glissement: $\partial H / \partial x = 0$ donc $H_0 = H_1$.

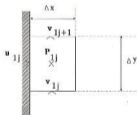


figure 3.13: cellule de pression à proximité du batteur

La pression suit l'équation de conservation de la quantité de mouvement, projetée ici sur l'axe horizontal:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Remarquons que dans les deux cas d'étude choisis:

* cas du batteur plan: la vitesse du batteur: u_B est constante et donc $\partial u/\partial y = \partial^2 u/\partial y^2 = 0$.

* cas du batteur volet: le gradient vertical de vitesse $\partial u/\partial y$ est constant et donc $\partial^2 u/\partial y^2 = 0$.

Dans tous les cas $\partial u/\partial t$ correspond à l'accélération du batteur et est connue: Γ_B

Par ailleurs,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \begin{cases} 0, & \text{dans le cas de l'adhérence} \\ (v_{1j} - v_{1j+1})/(\Delta x \Delta y), & \text{avec l'hypothèse de glissement} \end{cases}$$

$u \frac{\partial u}{\partial x}$ est approché par différences finies:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_{1j} \frac{u_{2j} - u_{1j}}{\Delta x}$$

$\frac{\partial u}{\partial y}$ est donné par la cinématique du batteur (nul pour un batteur plan, constant pour un batteur volet), on le note K_B .

v est approché par interpolation linéaire: $(v_{1j} + v_{1j+1})/2$

Finalement, la discrétisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement conduit à:

$$P_{0j} = P_{1j} - \Delta x \left(\Gamma_B + u_{1j} \frac{u_{2j} - u_{1j}}{\Delta x} + K_B (v_{1j} + v_{1j+1})/2 \right) - \frac{\nu}{\Delta x \Delta y} (v_{1j} - v_{1j+1}) \quad (3.58)$$

III-3-3 SURFACE LIBRE

La pression y est connue et est prise égale à 0, conformément à l'usage.

Les deux composantes de vitesse satisfont à

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$$

où $\vec{\eta}$ est la normale extérieure à la surface.

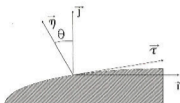


figure 3.14: Système de coordonnées lié à la surface libre (repère de Serret-Fresnet)

Soit $\mathcal{R}_0 = (0, \vec{i}, \vec{J})$ le repère d'origine

$\mathcal{R}_1 = (0, \vec{\tau}, \vec{\eta})$ le repère lié à la surface libre

avec $\vec{\tau}$ et $\vec{\eta}$ les directions tangente et normale à la surface libre
soit $\theta = \cos(\vec{J}, \vec{\eta})$

Un point de coordonnée (x, y) dans \mathcal{R}_0 et (η, τ) dans \mathcal{R}_1 vérifie

$$\begin{cases} x = \tau \cos \theta - \eta \sin \theta \\ y = \eta \cos \theta + \tau \sin \theta \end{cases} \quad (3.59)$$

$$\text{or, } \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} = -\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

en désignant par φ successivement u et v .

donc, puisque $\partial \varphi / \partial \eta = 0$ on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \operatorname{tg} \theta \quad (3.60)$$

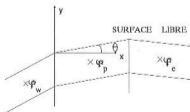


figure 3.15: repérage des cellules à la surface libre

En reprenant l'approximation établie dans (3.38), on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(\varphi_E - \varphi_W - \frac{\partial \varphi}{\partial y} (y_E - y_W) \right) / (x_E - x_W) \quad (3.61)$$

D'autre part, on a:

$$\lg \theta = (y_E - y_W) / (x_E - x_W) \quad (3.62)$$

Donc, (3.60), (3.61) et (3.62) permettent d'écrire:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y_E - y_W}{(x_E - x_W)^2} \left(\varphi_E - \varphi_W - \frac{\partial \varphi}{\partial y} (y_E - y_W) \right) \quad (3.63)$$

ce qui donne:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y_E - y_W}{(x_E - x_W)^2 + (y_E - y_W)^2} \left(\varphi_E - \varphi_W \right) \quad (3.64)$$

en posant $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\varphi_N - \varphi_S}{y_N - y_S}$

on obtient finalement l'expression de φ_N qui nous donne la condition aux limites cherchée:

$$\varphi_N = \varphi_S + \frac{(y_N - y_S)(y_E - y_W)}{(x_E - x_W)^2 + (y_E - y_W)^2} \left(\varphi_E - \varphi_W \right) \quad (3.65)$$

L'expression (3.65) s'applique en remplaçant φ par u ou par v sur la surface libre.

III-3-4 CONDITION DE NON REFLEXION

Pour chacune des inconnues du problème, on écrit qu'elle vérifie, à la sortie du domaine, une équation d'onde du type (voir 2.17), où l'on note c la célérité:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

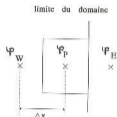


figure 3.16 : repérage des cellules à la limite droite du domaine

En indiquant par n , l'instant du calcul en cours et par $n-1$, l'instant précédent, on approche (2.17) par:

$$\frac{\psi_E^n - \psi_E^{n-1}}{\Delta t} = -c \frac{\psi_P^n - \psi_W^n}{\Delta x} \quad (3.66)$$

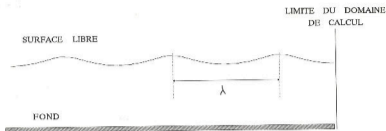
en suivant les notations de la figure 3.18.

L'équation (3.66) nous fournit donc la condition aux limites cherchée, correspondant à l'évaluation de ψ_E^n . La fonction ψ désigne successivement u, v, P et H .

Il reste alors à évaluer la célérité c de l'onde sortante.

Pour cela, on recherche les extrema locaux de l'ensemble des hauteurs d'eau discrétisées: $\{ H_i ; |i| \leq n \}$. Les amplitudes entre les extrema consécutifs sont calculées, ainsi que la moyenne de ces amplitudes. Ces calculs nous permettent alors de ne pas prendre en compte les extrema qui sont à l'origine d'amplitudes trop faibles par rapport à la moyenne calculée. On espère ainsi éliminer des phénomènes de perturbations de la surface libre d'importance moindre que celles générées par la houle.

Après ce "filtrage", on en déduit la longueur d'onde fournie par les derniers extrema (voir figure 3.17).



*figure 3.17: sélection de la longueur d'onde
servant au calcul de la célérité*

La longueur d'onde λ étant évaluée, on en déduit la célérité $c = \lambda / T$, où T est la période du batteur. Cette célérité étant connue, la relation (3.66) nous donne la condition aux limites cherchée.

Ce procédé de calcul assez simple a été mis en oeuvre dans notre cas d'étude. Il donne des résultats satisfaisant dans le cas où l'on étudie la propagation d'une houle seule. Il est clair que si la surface libre se trouve déformée par un autre phénomène, ces oscillations générées doivent rester faibles, de façon à être filtrées. Elles seront alors partiellement réfléchies.

Une généralisation plus rigoureuse de ce procédé consisterait en une analyse spectrale de la déformation de la surface libre: on pourrait ainsi prendre en compte des phénomènes de fréquences différentes, et "laisser sortir" les ondes qu'ils engendrent.

Chapitre 4:

ALGORITHMES DE CALCUL

IV-1 INTRODUCTION

Nous allons décrire dans ce chapitre les algorithmes utilisés permettant de résoudre les systèmes linéaires pentadiagonaux obtenus après discrétisation des équations pour la composante horizontale de la vitesse (3.22) et pour la pression relative (3.56).

En désignant par φ les inconnues, les deux systèmes précédents peuvent s'écrire sous la forme d'un système d'équation du type:

$$\sum_{\alpha} C_{P,\alpha} \varphi_{\alpha} + D_P \varphi_P = S_P \quad (4.1)$$

où φ_{α} représente un des quatre voisins de φ_P , à savoir: φ_N , φ_S , φ_W ou φ_E en reprenant les notations de la figure 3.2.

D_P correspond au terme diagonal de la matrice du système linéaire.

S_P correspond au second membre du système.

IV-2 FERMETURE DES SYSTEMES LINEAIRES

Le système linéaire est fermé par les conditions aux limites qui sont écrites sous l'une des deux formes suivantes:

■ condition de Dirichlet: φ est connue sur la frontière

■ condition de Neumann: $\partial\varphi/\partial x$ et/ou $\partial\varphi/\partial y$ sont connues suivant que la frontière soit verticale, horizontale ou oblique.

Dans le premier cas, si φ est égale à φ_0 connue sur la frontière β , alors l'équation (4.1) écrite pour une cellule au bord de la frontière β s'écrit:

$$\sum_{\alpha \neq \beta} C_{p,\alpha} \varphi_\alpha + D_p \varphi_p = S_p - C_{p,\beta} \varphi_0 \quad (4.2)$$

Pratiquement, cela revient à retirer $C_{p,\beta} \varphi_0$ au second membre et à annuler le coefficient de φ_β , puisque ce dernier n'apparaît plus dans (4.2).

Dans le deuxième cas, supposons que $\partial\varphi/\partial x$ soit connue sur la frontière verticale β , alors on peut écrire:

$$\varphi_\beta = \varphi_p + \gamma_0 \Delta x$$

où γ_0 est connu,

Δx est la différence d'abscisse des lieux de calcul de φ_β et φ_p .

L'équation (4.1) écrite pour une cellule au bord de la frontière β s'écrit:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \neq \beta} C_{p,\alpha} \varphi_\alpha + C_{p,\beta} (\varphi_p + \gamma_0 \Delta x) + D_p \varphi_p &= S_p \\ \sum_{\alpha \neq \beta} C_{p,\alpha} \varphi_\alpha + (D_p + C_{p,\beta}) \varphi_p &= S_p - C_{p,\beta} \gamma_0 \Delta x \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pratiquement, cela revient à retirer $C_{p,\beta} \gamma_0 \Delta x$ au second membre, à ajouter $C_{p,\beta}$ au terme diagonal et à annuler le coefficient de ψ_β , qui n'apparaît plus dans (4.3).

IV-3 SEPARATION DU SCHEMA IMPLICITE SUIVANT LA DIRECTION D'ESPACE
--

Rappelons que l'équation (4.1) correspond soit à la discrétisation d'un problème elliptique lorsqu'elle sert à calculer la pression (3.56), soit à la discrétisation d'un problème parabolique lorsqu'elle sert à calculer la composante horizontale de la vitesse (3.22).

La méthode que nous allons utiliser est inspirée de la méthode de Gauss-Seidel et de la méthode des directions alternées.

La méthode de Gauss-Seidel est un algorithme itératif résolvant typiquement des équations elliptiques. A chaque itération, on résout un système diagonal avec mise à jour du second membre au cours du calcul.

La méthode des directions alternées s'applique à des équations paraboliques. A chaque pas de temps, on divise la résolution en deux étapes (pour un problème bidimensionnel). Pour chacun de ces demi-pas de temps, on se ramène à un système tridiagonal, obtenu en "implicitant" l'équation alternativement dans une seule direction d'espace puis dans l'autre.

On va utiliser, comme dans la méthode de Gauss-Seidel, un schéma itératif, mais que l'on va "implicitier" alternativement dans chacune des deux directions d'espace. On n'introduit pas de demi-pas de temps comme dans les méthodes de directions alternées; les deux étapes ne font que corriger la solution en prenant en compte successivement les phénomènes de propagation suivant leur direction.

Le schéma de résolution de l'équation (4.1) est alors le suivant:

boucle d'itération

1) balayage horizontal sur chaque ligne du maillage:

$$C_{P,N} \bar{\varphi}_N^* + D_P \bar{\varphi}_P^* + C_{P,E} \bar{\varphi}_E^* = S_P - C_{P,N} \bar{\varphi}_N - C_{P,S} \bar{\varphi}_S \quad (4.4)$$

2) balayage vertical sur chaque colonne du maillage:

$$C_{P,N} \bar{\varphi}_N + D_P \bar{\varphi}_P + C_{P,S} \bar{\varphi}_S = S_P - C_{P,W} \bar{\varphi}_W - C_{P,E} \bar{\varphi}_E \quad (4.5)$$

Jusqu'à ce que $\|\varphi - \bar{\varphi}\| < \varepsilon$

on note $\bar{\varphi}$ l'ensemble des valeurs déterminées à l'itération précédente.

Les inconnues du système sur lesquelles se fait la résolution sont à gauche de l'égalité. Les termes de droite sont assimilés à des termes du second membre. Comme dans la méthode de Gauss-Seidel, les résultats sont réexploités dès leur calcul: on ne stocke donc qu'un seul jeu de valeurs pour φ .

Il est à noter que les deux balayages peuvent être intervertis. De même, dans certains cas, on peut aussi ne faire de balayage que dans un seul sens.

Les avantages de cette technique sont les suivants:

- Par rapport au schéma diagonal utilisé à chaque itération dans la méthode de Gauss-Seidel, la résolution tridiagonale permet des propagations rapides dans la direction concernée. Rappelons, par ailleurs, qu'une résolution de système tridiagonal (décrite au paragraphe suivant) nécessite, comme pour la méthode de Gauss-Seidel, un nombre d'opérations proportionnel à la dimension du système linéaire.

- d'autre part, on peut essayer d'organiser l'ordre de déroulement des directions de balayage, de manière à ce que celui-ci corresponde à la propagation intuitive des grandeurs physiques essentielles de l'équation.

Pour la résolution de l'équation (3.22) donnant u , on effectuera d'abord des balayages verticaux de gauche à droite, puis des balayages horizontaux. En effet, ceci permet de propager les vitesses en provenance du batteur dès la première itération.

Pour la résolution de l'équation donnant la pression adimensionnalisée (3.56) on n'effectuera que des balayages verticaux: en effet la pression est essentiellement gouvernée par les conditions aux limites qui doivent être vérifiées simultanément en haut du domaine (pression atmosphérique) et en bas du domaine (pression hydrostatique).

IV-4 RESOLUTION DES SYSTEMES TRIDIAGONAUX

On utilise la méthode TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) connue également sous le nom d'algorithme de THOMAS (voir CIARLET [46], par exemple), que l'on rappelle ici.

Soit à résoudre le système linéaire, écrit sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

La première équation s'écrit:

$$x_1 = p_1 x_2 + q_1 \quad (4.7)$$

$$\text{où } p_1 = -c_1 / b_1 \quad \text{et } q_1 = d_1 / b_1$$

De même, on écrit chacune des équations de la deuxième à la (n-1) ème sous la forme:

$$x_k = p_k x_{k+1} + q_k \quad (4.8)$$

où les suites (p_k) et (q_k) sont définies par récurrence:

$$p_{k+1} = -c_{k+1} / (a_{k+1} p_k + b_{k+1}) \quad (4.9)$$

$$q_{k+1} = (d_{k+1} - a_{k+1} q_k) / (a_{k+1} p_k + b_{k+1}) \quad (4.10)$$

La dernière équation s'écrira :

$$x_n = q_n \quad \text{où } q_n \text{ est défini par (4.10)}$$

On a construit ainsi par récurrence les suites (p_k) et (q_k) . Il ne reste plus qu'à déterminer les inconnues x_k avec la formule (4.8) que l'on utilise en faisant varier k de $n-1$ à 1.

L'algorithme précédent est valide si les dénominateurs ne s'annulent pas :

$$\text{c'est à dire } b_k \neq 0 \text{ et } a_{k+1} p_k + b_{k+1} \neq 0.$$

On montre que si la matrice est à diagonale strictement dominante, alors la méthode est valide.

Par ailleurs, cette méthode requiert (voir Ciarlet[46]) un nombre d'opérations total de $8n-6$, où n est la dimension de la matrice.

Nous allons maintenant faire les deux remarques suivantes, qui vont nous permettre d'optimiser l'occupation en mémoire et donc le temps d'exécution nécessaire pour le traitement effectif de cet algorithme. Une telle préoccupation est justifiée par le fait qu'il a été vérifié, a posteriori, que 70 % du temps total d'exécution passe dans cette procédure.

Remarque 1:

En utilisant brutalement les formules énoncées ci-dessus, on est amené à réserver, pour la mise en oeuvre informatique, des tableaux de données a, b, c et d , ainsi que des tableaux pour stocker les éléments des suites (p_n) et (q_n) et un tableau pour le résultat x .

■ Remarquons que d n'apparaît dans le calcul qu'en (4.10) au même indice que la variable calculée q , ce qui permet finalement de stocker directement les valeurs de q dans le tableau d .

■ c n'apparaît dans le calcul qu'en (4.9), au même indice que la variable calculée p , ce qui permet de stocker directement les valeurs de p dans le tableau c .

■ Dans la deuxième étape de l'algorithme, qui consiste à calculer les variables x_k à partir de la formule (4.8), on remarque que x et q apparaissent au même indice. Ceci permet alors

de stocker les valeurs de x dans le même tableau que pour q et d .

En conclusion, tous les calculs peuvent s'effectuer uniquement avec les quatre tableaux de données a, b, c et d .

A la suite de cette remarque, l'algorithme peut s'écrire:

```

 $c_1 \leftarrow -c_1 / b_1$ 
 $d_1 \leftarrow d_1 / b_1$ 
pour  $k$  allant de 2 à  $n-1$ 
  début
    quot  $\leftarrow a_k c_{k-1} + b_k$ 
     $c_k \leftarrow -c_k / \text{quot}$ 
     $d_k \leftarrow (d_k - a_k d_{k-1}) / \text{quot}$ 
  fin
 $d_n \leftarrow (d_n - a_n d_{n-1}) / (a_n c_{n-1} + b_n)$ 
pour  $i$  allant de  $n-1$  à 1
  début
     $d_i \leftarrow c_i d_{i+1} + d_i$ 
  fin

```

Remarque 2:

Il est fréquent de déclarer toutes les variables de calcul en double précision afin de réduire le cumul des erreurs d'arrondis qui risque de se produire, notamment lorsque la dimension des tableaux est importante.

Or, en observant l'algorithme précédent, on s'aperçoit que les erreurs d'arrondis ne s'accroissent qu'à l'intérieur des deux boucles itératives du schéma. Finalement, on peut se permettre de garder tous les tableaux en simple précision et n'utiliser que trois variables en double précision que l'on notera quot, dc et dd. L'algorithme à utiliser est alors le suivant:

```

dc ← dble(-c1 / b1)
dd ← dble( d1 / b1)
c1 ← dc
d1 ← dd
pour k allant de 2 à n-1
  début
    quot ← ak dc + bk
    dc ← -ck / quot
    dd ← (dk - ak dd) / quot
    ck ← dc
    dk ← dd2
  fin
dd ← (dn - an dd) / (an dc + bn)
dn ← dd
pour i allant de n-1 à 1
  début
    dd ← ci dd + di
    di ← dd
  fin

```

Cet algorithme, bien que comportant quelques affectations supplémentaires, ne propagera pas plus les erreurs d'arrondis, à l'intérieur des deux itérations, qu'en déclarant toutes les variables en double précision.

Finalement, en faisant le bilan global des deux remarques précédentes, on s'aperçoit que seuls quatre tableaux en simple précision et trois variables en double précision sont nécessaires. L'utilisation de l'algorithme "brut" initial conduirait à l'utilisation de sept tableaux en double précision. On divise ainsi par 3,5 l'emplacement mémoire utile uniquement dans cette procédure de calcul.

Chapitre 5:

EXEMPLES DE CALCUL ET VALIDATIONS PAR DES MESURES EXPERIMENTALES

V-1 INTRODUCTION

On présente dans ce chapitre des exemples de résultats de calcul obtenus à partir du code décrit aux chapitres précédents.

Les résultats obtenus sont d'abord comparés d'une manière qualitative par rapport aux modèles théoriques: Il s'agit de montrer que notre code est capable de simuler des écoulements de houle (éventuellement de clapotis) dans différentes conditions (par exemple, en faisant varier la hauteur d'eau ou le type de batteur).

On effectue ensuite des validations d'une manière plus précise en se rapprochant de conditions expérimentales pour lesquelles on connaît des mesures précises de champs cinématiques. On a essentiellement travaillé sur une étude cinématique de la houle en eau peu profonde faite par Jarno [5].

Pour terminer ce chapitre, on présente les premiers résultats obtenus à partir d'une simulation d'un écoulement autour d'une plaque plane horizontale. On compare et discute ces résultats par rapport à des références issues de modèles basés sur l'hypothèse d'un écoulement potentiel et par rapport à des résultats expérimentaux. Cette simulation est l'occasion de montrer l'influence de la viscosité dans les résultats numériques obtenus à partir de notre code.

V-2 CALCUL DE CHAMPS CINEMATIQUES

On présente sur la figure 5.1 l'établissement d'une houle à partir d'une position au repos et une hauteur d'eau initiale de 0,27 mètre. La longueur du canal est de 2,7 mètres. Le batteur de type piston a un mouvement plan horizontal et sinusoïdal en temps. On impose donc sur la frontière gauche que les composantes horizontales des vitesses vérifient:

$$u(t) = A \frac{2\pi}{T} \sin(2\pi t/T)$$

où A, l'amplitude vaut 0,022 mètre.

T, la période vaut 1,03 seconde.

Ces conditions précises correspondent aux conditions expérimentales sur lesquelles sont basées les validations du paragraphe V-3.

Le maillage de calcul est composé de 1000 cellules (100 sur la longueur et 10 sur la hauteur) et la totalité des champs cinématiques calculés sont représentés sur la figure 5.1 entre 0,5 et 3,8 périodes de batteur (on ne représente, par contre, qu'une vitesse sur deux, pour augmenter la lisibilité).

La figure 5.2 est l'équivalent de la figure 5.1 mais en changeant la condition aux limites sur la frontière latérale droite. Les champs de houle précédents ont été obtenus en "laissant sortir l'onde" par cette frontière, grâce à une condition de radiation de Sommerfeld (voir chapitre 2 et 3), alors qu'ici on traite cette frontière comme un mur et l'on impose aux deux composantes de vitesses d'être nulles. On introduit alors une réflexion totale de la houle et l'on génère la formation progressive d'un clapotis, en concordance avec ce que prédit une étude théorique (voir Larras [1]).

On donne ensuite un exemple de champ cinématique obtenu en modifiant certains paramètres du code par rapport aux calculs précédents. On rétablit la condition de radiation de Sommerfeld sur la frontière latérale droite afin de se placer dans le cas d'un écoulement de houle, ce qui correspond à notre motivation initiale. Le code permet d'agir facilement sur les conditions aux limites relatives à la frontière gauche, génératrice du mouvement. On a, par exemple, sur la figure 5.3 représenté l'écoulement obtenu en se donnant sur cette frontière un profil de vitesses de houle de Stokes défini par:

$$u(y, t) = \frac{\pi H}{T} \frac{\operatorname{ch}(ky)}{\operatorname{sh}(kh)} \cos(kx - \sigma t)$$

$$v(y, t) = \frac{\pi H}{T} \frac{\operatorname{sh}(ky)}{\operatorname{sh}(kh)} \sin(kx - \sigma t)$$

où h est la hauteur d'eau au repos

L est la longueur d'onde et T la période

$k = 2\pi/L$ et $\sigma = 2\pi/T$

H est l'amplitude verticale d'une vague entre le creux et le sommet.

La hauteur d'eau a été fixée, pour cette simulation à 1 mètre et l'amplitude des vagues H vaut 0,044 mètre. La hauteur relative de la vague est donc faible et si l'on suit la classification donnée au chapitre 1, par la figure 1.1, notre étude fait partie du domaine de validité d'une houle simple sinusoïdale en profondeur infinie. En comparaison, l'étude précédente relative à la figure 5.1 se situe dans le domaine de validité de la houle de Miche.

La figure 5.3 représente les champs cinématiques obtenus sur la totalité du domaine de calcul (en ne représentant toujours qu'une vitesse sur deux). Le canal a une longueur fixée à 6 mètres.

Finalement, sur la figure 5.4, on représente les champs cinématiques obtenus à partir d'un batteur de type volet sur lequel les composantes des vitesses vérifient:

$$u(t) = A \frac{2\pi}{T} \sin(2\pi t/T)$$

où A , l'amplitude vaut 0,022 mètre.

T , la période vaut 1,03 seconde.

La hauteur d'eau, au repos est de 0,27 m. et la longueur du canal est de 5,4 m. Le maillage est ici constitué de 2000 cellules.

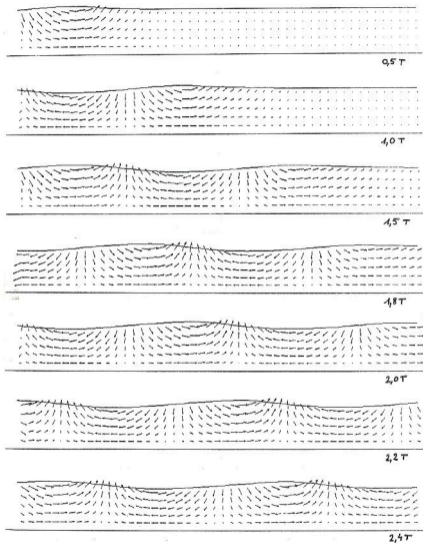


figure 5.1: établissement d'un écoulement de houle (partie 1)

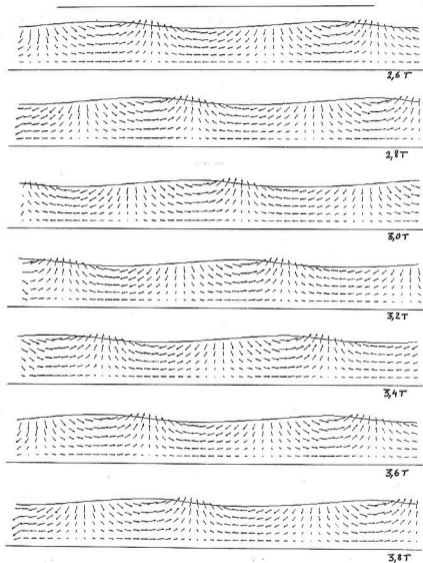


figure 5.1: établissement d'un écoulement de houle (partie 2)

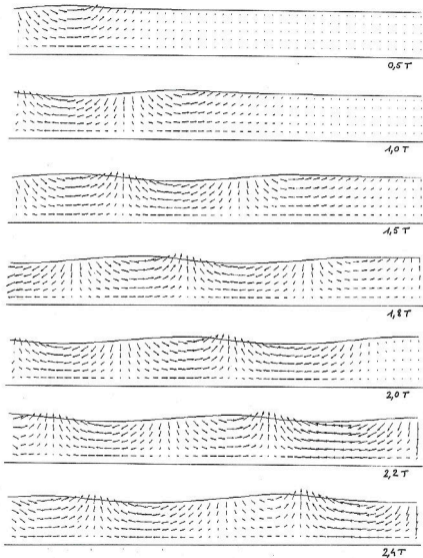


figure 5.2: établissement d'un écoulement de type clapotis (1)

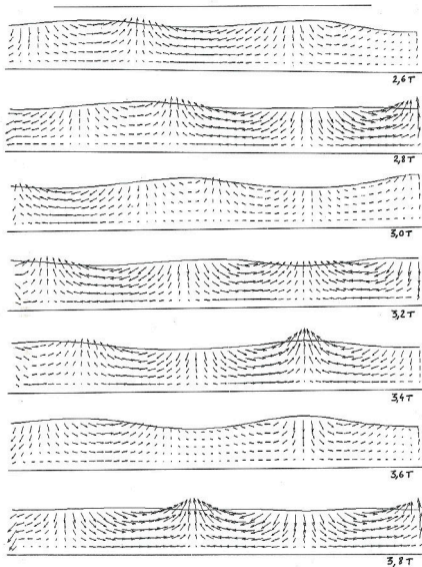


figure 5.2: établissement d'un écoulement de type clapotis (2)

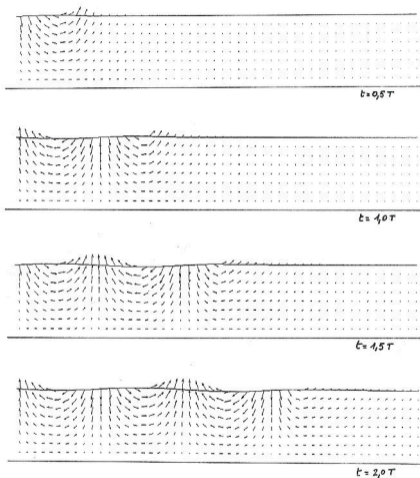


figure 5.3: établissement d'une houle à partir d'un profil de houle de Stokes, en faible hauteur relative (1)

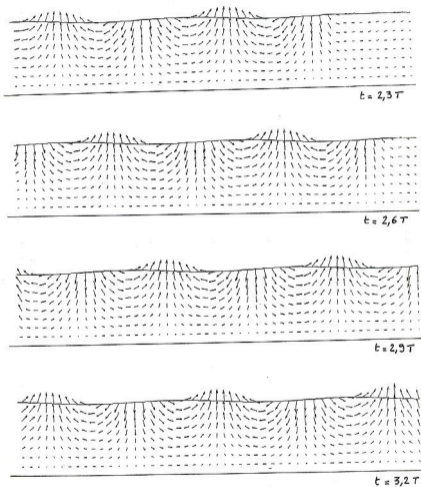


figure 5.3: établissement d'une houle à partir d'un profil de houle de Stokes, en faible hauteur relative (2)

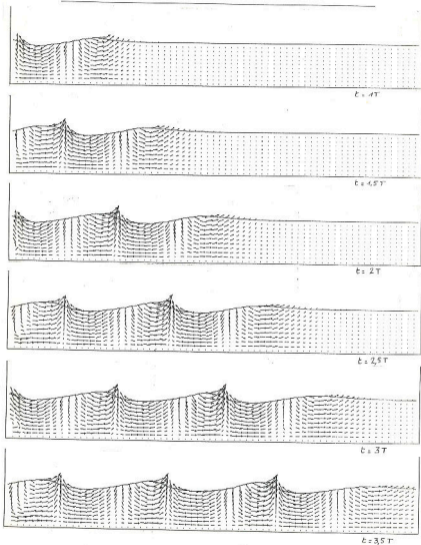


Figure 5.4: houle générée par un batteur volet (partie 1)

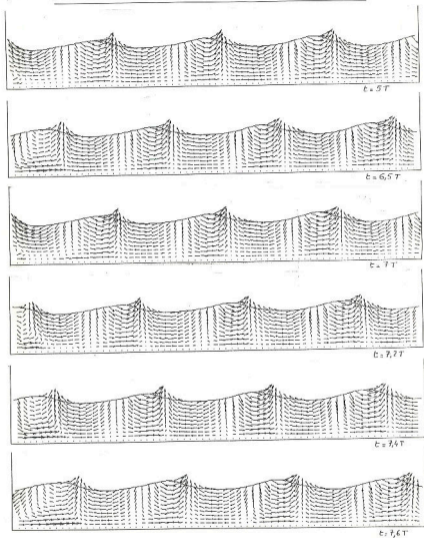


figure 5.4: houle générée par un batteur volet (partie 2)

V-3 ETUDE DE LA CINEMATIQUE DE LA HOULE
EN EAU PEU PROFONDE. COMPARAISONS
AVEC DES RESULTATS EXPERIMENTAUX.

Une validation plus précise de notre code a été effectuée à partir des travaux de Jarno [5] portant sur l'étude expérimentale de la cinématique de la houle en eau peu profonde. Ces mesures de vitesses ont été effectuées par Vélocimétrie Doppler Laser. Le canal à houle utilisé est celui du laboratoire de mécanique des fluides du Havre. Ses caractéristiques sont décrites dans Belorgey et Lebas [48]. Il mesure 9m. de long et est constitué d'un batteur dont le mouvement est quasiment celui d'un piston plan de mouvement sinusoïdal en temps. Il est borné, à l'extrémité opposée au batteur, par une plage d'amortissement qui possède de bonnes propriétés d'absorption. Le coefficient de réflexion de la houle peut ainsi être ramené en dessous des 5%.

Dans le cas des mesures effectuées par Jarno, le mouvement du batteur est caractérisé par:

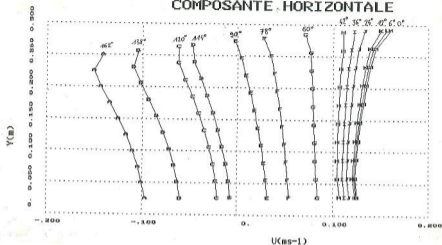
- son amplitude : 0,022 mètre
- sa période : 1,03 seconde

Le niveau d'eau au repos est de 0,27 mètre. Les mesures de vitesses ont été effectuées approximativement au centre du canal. Les données expérimentales semblent être en accord, pour ce qui concerne les caractéristiques principales, avec le modèle mathématique de Miche [49] décrivant des houles dans des conditions similaires. Toutefois, il est noté quelques différences par rapport à ce modèle qui sont détaillées ci-dessous.

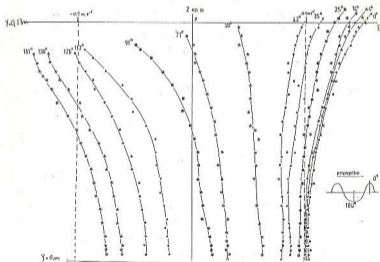
La figure 5.5 donne une comparaison entre les valeurs mesurées par Jarno et les résultats obtenus à partir de notre code de calcul. Cette étude porte sur les profils de la composante horizontale des vitesses au cours du front descendant de la houle. Chacune des courbes tracées représente les valeurs de vitesse pour une même phase de la houle, en fonction de la profondeur.

La figure 5.6, correspondant à une partie du champ cinématique calculé, permet de repérer les profils en fonction de la phase de la houle. Pour des raisons de lisibilité, seulement un profil calculé sur deux a été représenté. Les valeurs des courbes de calcul tracées ont alors été choisies de façon à être le plus proche des phases de houle mesurées. Ces phases sont repérées en haut de chacune des courbes.

COMPOSANTE HORIZONTALE



a) calculs



b) expériences

figure 5.5: comparaisons calculs-expériences en houle à faible profondeur. composante horizontale sur le front descendant.

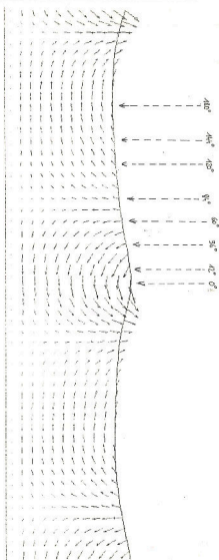


Figure 5.6: détermination des phases de houle, sur le champ cinématique calculé, pour obtenir les profils de la Figure 5.6

Plusieurs remarques s'imposent à propos de cette confrontation entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées.

Tout d'abord, on remarque que certaines différences par rapport au modèle mathématique de Niche, servant de référence, se retrouvent sur les mesures et les calculs:

- La valeur absolue des vitesses est plus grande au sommet de la vague qu'au creux de la vague. Ceci est la preuve qu'il existe un courant de dérive Eulerien.

- A proximité de la surface libre, la valeur absolue de l'accélération augmente au passage du sommet alors qu'elle diminue au passage du creux. Dans ce dernier cas, les courbes font apparaître un point d'inflexion, ce qui permet de séparer dans l'écoulement une zone d'entraînement par la surface libre et la zone principale dominée par l'écoulement à l'intérieur de la masse fluide.

- Le changement d'inclinaison des profils vers le sens décroissant s'effectue bien avant l'annulation des vitesses sur le fond (entre 40° et 60°). Les vitesses varient de manière importante, par rapport à la phase, à ce moment, ce qui explique les décalages obtenus, à ce niveau, entre l'expérience et le calcul.

Par ailleurs, les légères différences existantes entre les profils de mesure et de calcul peuvent provenir du fait que, physiquement, il existe une réflexion de la houle sur la plage d'amortissement qui est de l'ordre de 5%. Ceci peut conduire à modifier légèrement les valeurs des vitesses. Numériquement, il pourrait être envisagé de mixer les conditions aux limites de non-réflexion et de réflexion totale (présentées au paragraphe V-1) afin de se rapprocher du cas réel.

Pour terminer cette étude comparative, on donne sur les figures (5.7) à (5.9) les courbes de comparaisons portant sur les valeurs de la composante horizontale au front montant et sur les valeurs de la composante verticale au front montant et descendant. Ces comparaisons sont moins précises du fait que le calage des phases de houle calculées par rapport aux mesures n'a pas été effectué de manière systématique.

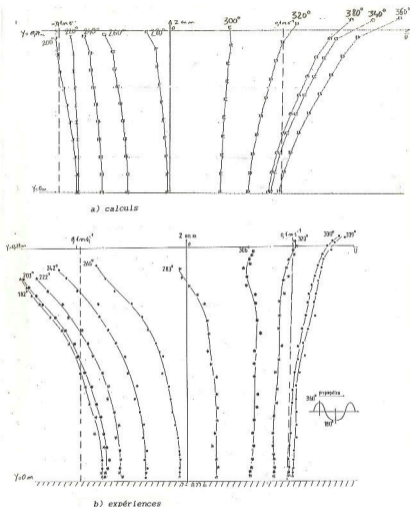
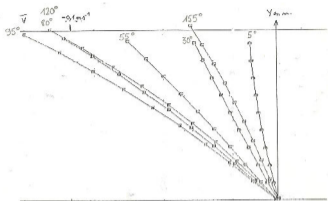
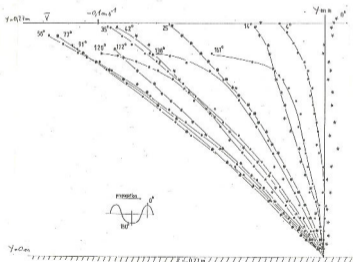


Figure 5.7: comparaisons calculs-expériences en houle à faible profondeur. composante horizontale sur le front montant.



a) calculs



b) expériences

Figure 5.8: comparaisons calculs-expériences en houle à faible profondeur. composante verticale sur le front descendant.

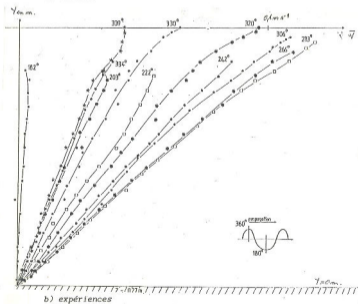
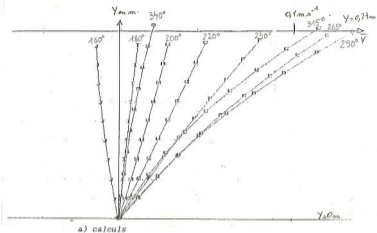


figure 5.9: comparaisons calculs-expériences en houle à faible profondeur, composante verticale sur le front montant.

V-4 PREMIERS ESSAIS DE CALCUL D'ÉCOULEMENTS AUTOUR D'OBSTACLES: APPLICATION AU CAS DES PLAQUES HORIZONTALES IMMERGEES.

V-4-1 QUELQUES REPERES BIBLIOGRAPHIQUES

L'étude des plaques horizontales immergées dans la houle est essentiellement motivée par leur propriétés de réflexion d'onde. Ces plaques constituent, dans certaines conditions, d'excellents brise-lames. Alors que les propriétés de réflexions sont fréquemment étudiées à partir de théorie potentielle, il a été mis en évidence, d'une manière expérimentale, que des zones de création de rotationnel existaient au bord de fuite de ces plaques. Ces zones sont à l'origine de la création de tourbillons hydrodynamiques qui se détachent de la plaque et évoluent d'une manière parfaitement reproductible dans la houle.

V-4-1-1 LES REFLECTEURS DE ROULE

Les plaques horizontales submergées ont été étudiées par Sien et Hurley [50] dans le but d'aider à la construction de brise-houle flottants. Les coefficients de réflexion et de transmission sont obtenus par des méthodes de développements asymptotiques raccordés.

Patarapanich [51,52] étudie également la réflexion sur ces plaques en fonction du rapport longueur de plaque sur longueur d'onde et du rapport d'immersion. L'étude est basée sur la théorie potentielle avec l'approximation des ondes longues. Des résultats expérimentaux et numériques (par une méthode d'éléments finis) prévoient une longueur de plaque optimum comprise entre 0,5 et 0,7 fois la longueur d'onde et une profondeur d'immersion optimum comprise entre 0,05 et 0,15. Cette dernière condition conduit alors au déferlement et provoque ainsi une dissipation d'énergie.

Par ailleurs, Guével et al. [14] effectuent également des études expérimentales dans des conditions analogues et des études

numériques en théorie potentielle en prenant notamment des conditions de glissement sur la plaque. Ils décrivent l'écoulement sous la plaque comme un mouvement de translation oscillant (appelé "mur d'eau oscillant") qui explique les propriétés de réflexion intéressante du phénomène. Des simulations d'écoulements autour de la plaque sont données (voir figure ci-dessous). L'hypothèse d'irrotationnalité fait que le fluide effectue des contournements de la plaque sans qu'il n'y ait jamais de création de rotationnel.

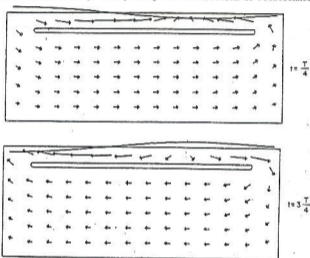


Figure 5.1a: écoulement autour d'une plaque en théorie potentielle (d'après Guevel et al. [14])

Plus récemment, Le Thi Minh [53] reprend l'étude numérique et expérimentale des perturbations des ondes de gravité, dues à la présence de seuils ou de plaques planes horizontales immergées, dans le cadre de la théorie en eau peu profonde. Une confrontation de résultats expérimentaux et numériques porte sur la dissipation d'énergie engendrée par un seuil immergé. Il est noté que les valeurs théoriques sont toujours supérieures aux valeurs expérimentales. L'auteur précise alors que le modèle théorique irrotationnel mis en oeuvre ne peut prendre en compte ni les effets de viscosité, ni l'apparition d'un tourbillon zonal

derrière la plaque, observé expérimentalement.

V-4-1-2 ETUDE EXPERIMENTALE DU ROTATIONNEL

GENERE SUR LE BORD DE FUITE

Notre motivation réelle initiale pour l'étude des plaques horizontales immergées provient des études expérimentales effectuées par Brossard et al. [37,54], basées sur des mesures de vitesses effectuées par Vélocimétrie Doppler Laser.

Des premières mesures ont été effectuées en prenant une longueur de plaque égale à une demi-longueur d'onde, un coefficient d'immersion d'environ 0,66 et une houle d'amplitude 0,03 mètre et de période 1,24 seconde. On met en évidence un écoulement pulsé sous la plaque qui permet à des tourbillons générés en amont d'être transportés sous la plaque. L'étude porte essentiellement sur le bord de fuite en aval où apparaissent des tourbillons de sens opposés au passage du creux et du sommet des vagues.



figure 5.11: formation des tourbillons sur le bord aval de la plaque, au passage du sommet et du creux de la vague

Par la suite, des études plus fines ont été réalisées en effectuant des mesures en aval de la plaque (Rivoalen [55], Melen [56]). Des champs cinématiques très précis autour du bord de fuite de la plaque ont été mesurés. On en a extrait les quatre figures suivantes où l'on voit nettement le mécanisme de formation et d'éjection du tourbillon. Il a été mis en évidence un déplacement et une reformation (une période plus tard) du tourbillon ainsi créé. Le phénomène est parfaitement reproductible et permet d'observer jusqu'à trois tourbillons équidistants.

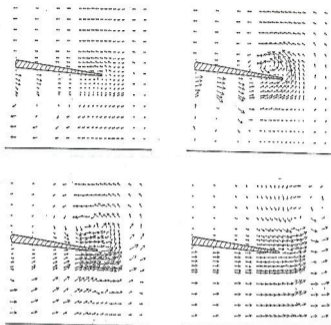


figure 5.1: écoulement autour d'une plaque, à partir de mesures en VDL effectuées par Brossard.

Des études plus récentes, portent sur des plaques situées à proximité de la surface libre: les tourbillons générés au bord aval descendent rapidement et on obtient un écoulement de type "jet" arrivant sur le fond du canal (Brossard [57]).

Il reste alors à quantifier les énergies mises en oeuvre dans ces phénomènes d'échappements tourbillonnaires pour connaître leur contribution réelle vis à vis de l'amortissement de la houle.

V-4-2 RESULTATS DE CALCULS OBTENUS ET PREMIERES CONCLUSIONS

Le code de calcul que nous avons développé étant basé sur des écoulements prenant en compte la viscosité du fluide, il nous a paru intéressant de le tester pour donner une approche différente des résultats obtenus en théorie potentielle.

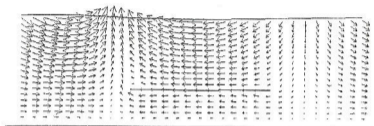
Notre code de calcul, présenté aux chapitres précédents, a simplement été adapté en ajoutant des conditions aux limites au niveau de la plaque. Les vitesses y ont été prises nulles et la pression vérifie des conditions de Neumann données par la projection verticale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (on retrouve exactement les équations écrites pour le traitement du fond du canal (voir paragraphe III-3-1).

Nous nous sommes placés dans des conditions relativement proches, quant à l'immersion, de celles décrites dans Brossard [37].

Nous présentons sur la figure 5.13, les résultats d'une simulation faite avec une plaque d'une demi-longueur d'onde. Retrouvant sous la plaque, un écoulement pulsé, comme cela est décrit expérimentalement, nous avons tracé les champs cinématiques correspondant aux instants suivants:

- écoulement sensiblement constant sous la plaque lorsque les vitesses de houle ont la même orientation aux extrémités de la plaque.
- écoulement quasi nul sous la plaque lorsque les vitesses de houle sont d'orientations différentes aux extrémités de la plaque (pression maximum).

3.250000 périodes(s)



3.500000 périodes(s)

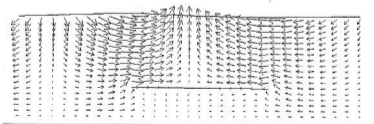


figure 5.18: écoulement autour d'une plaque. Résultats de calculs.

Ensuite, nous avons cherché à savoir si notre code pouvait mettre en évidence des zones de création de rotationnel dues aux effets visqueux. Il est clair que nous ne pouvons pas faire apparaître de tourbillons tels qu'on les observe expérimentalement. En effet leur création et leur croissance font intervenir des phénomènes de frottement visqueux dont la taille est très inférieure à celle de nos cellules de discrétisation.

Nous avons fait fonctionner le code de calcul en utilisant des viscosités différentes. Ceci permettant, par comparaison, de voir où se situent les effets visqueux du phénomène. Dans l'exemple suivant, la plaque a une longueur correspondant au quart de la longueur d'onde.

Sur la figure 5.14, nous présentons des résultats obtenus aux mêmes instants avec deux viscosités cinématiques différentes: $\nu = 10^{-3}$ et $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

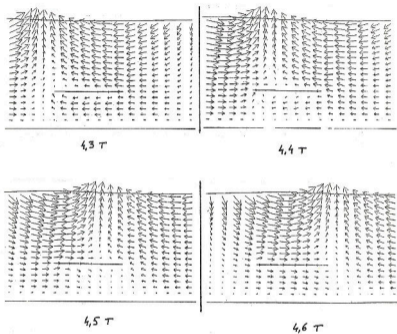


figure 5.14 (partie 1): calcul d'un écoulement autour d'une plaque, avec une viscosité cinématique de $10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

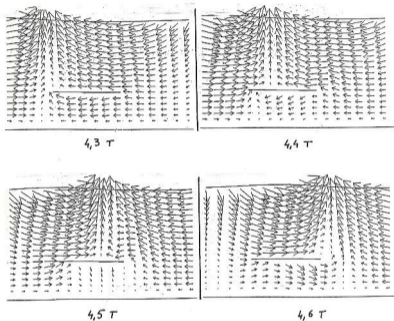


figure 5.14. (partie 2): calcul d'un écoulement autour d'une plaque, avec une viscosité cinématique de $10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

■ On peut observer une zone de rotationnel sur le bord de fuite amont, au passage du front montant (4,3 T) pour une viscosité de 10^{-3} . On voit également, à cet instant, assez clairement, d'épaisses couches limites autour de la plaque, absentes, au même instant, pour $\nu = 10^{-6}$. La zone de rotationnel observée peut s'expliquer par le fait que les vitesses au-dessous du creux sont freinées sur la plaque, par viscosité et laissent ainsi apparaître une zone de dépression sur le bord de fuite amont.

■ On peut observer la formation d'une zone de rotationnel sur le bord de fuite aval, au passage du sommet, pour la viscosité $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Elle s'explique par le fait qu'il s'est formé une couche limite sur le bord de fuite aval depuis le passage du creux (on remarque en effet la déviation des lignes de courant à 4,4 T et à 4,5 T). Cette couche limite décolle avec le passage du front montant de la vague et provoque la zone rotationnelle observée. Ceci correspond assez fidèlement au phénomène de création et détachement de tourbillon présenté sur la figure 5.12.

Ces zones de rotationnel, apparaissant dans notre code, se dissipent très rapidement et ne donnent pas naissance à des tourbillons hydrodynamiques comme cela s'observe expérimentalement. Cette dissipation est essentiellement due à la résolution Eulerienne des équations de Navier-Stokes. Des prolongements possibles à cette étude pourraient éventuellement avoir lieu, en ajoutant au code existant un traitement Lagrangien correspondant au transport du tourbillon par l'écoulement. Des études dans ce sens ont été effectuées par Chagdali [32].

On notera par ailleurs que des vitesses verticales se développent sous la plaque (voir pour $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ à 4,6 T) et sont expliquées par l'hypothèse de parabolisation de l'équation donnant v . Cette hypothèse ne semble pas être souhaitable dans ce cas de traitement et une prise en compte effective de la condition aux limites sous la plaque doit être envisagée afin de donner des résultats plus réalistes. On remarquera, par ailleurs, que cette

hypothèse de parabolisation est beaucoup moins pénalisante lorsque la viscosité augmente en raison des plus faibles vitesses horizontales obtenues.

Chapitre 6:

QUELQUES ASPECTS DE LA SIMULATION DU TRANSPORT DE SEDIMENTS SOUS L'ACTION DE LA HOULE

VI-1 INTRODUCTION

Un des domaines d'application possibles du code de calcul présenté précédemment peut être le problème de sédimentation sur les fonds marins. En effet, puisque l'on résout les équations de Navier-Stokes, on est à même de pouvoir s'intéresser à l'influence de la viscosité sur le transport de particules près du fond.

Par ailleurs, le laboratoire de mécanique des fluides du Havre, du fait de sa technique de mesure par Vélocimétrie Doppler Laser, s'est, dès l'origine, intéressé à la mesure de vitesses dans la couche limite au fond du canal à houle. La technique de mesure permettant, là encore, d'obtenir des résultats qui ne sont pas perturbés par l'appareillage de mesure. Il est alors possible de faire des études fiables vis à vis des phénomènes visqueux et turbulents survenant dans les écoulements étudiés.

Nous allons traiter dans ce chapitre du problème de sédimentation sur les fonds marins. Après avoir donné quelques références bibliographiques sur les travaux existants, nous allons présenter une étude sur le déplacement de particules solides et sphériques sous l'action de la houle, à partir des champs cinématiques obtenus par notre code décrit aux chapitres précédents.

VI-2 QUELQUES ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE

VI-2-1 ETUDE EXPERIMENTALE ET NUMERIQUE DE LA COUCHE LIMITE
AU FOND D'UN CANAL A HOULE

Suite à des mesures expérimentales faites par Vélocimétrie Doppler Laser, Lebas et Belorgey [58] étudient la contrainte tangentielle au fond d'un canal à houle. Cette contrainte garde le même signe au creux et au sommet des vagues alors que les vitesses moyennes en changent. Les composantes turbulentes ($-\rho \overline{u'v'}$)¹ et visqueuses ($\mu \partial \overline{u} / \partial y$) sont étudiées et comparées. Une étude dynamique porte sur l'estimation des forces surfaciques suivantes agissant au fond du canal:

- entraînement dû aux contraintes de frottement et aux contraintes turbulentes ($T = \mu \partial \overline{u} / \partial y - \rho \overline{u'v'}$)
- force de traînée ($0,5 C_D \rho \overline{u}^2$), où C_D est un coefficient de traînée.

Ces forces sont évaluées à partir des champs cinématiques moyens et fluctuants mesurés. Cette étude permet de mettre en évidence un transport dans le sens de propagation de la houle, accompagné d'une rotation importante des particules au passage du sommet des vagues, alors qu'au passage du creux, ces deux phénomènes apparaissent en sens inverse avec une moindre intensité.

On en déduit un mécanisme de transport de particules schématisées sur la figure (6.1)

¹ RAPPELS DES NOTATIONS STATISTIQUES UTILISEES:

Soit une vitesse instantanée u , on note \overline{u} la moyenne des valeurs instantanées d'un échantillon de mesure et $u' = u - \overline{u}$: la vitesse fluctuante.

SENS DE PROPAGATION



figure 6.1: mécanisme de transport de particules

Le transport sédimentaire à travers les couches limites générées par la houle est également abordé par Chapalain et Temperville [25,59]. Dans cette étude, les équations de Boussinesq, modifiées afin de prendre en compte le frottement sur le fond, sont résolues numériquement par un schéma aux différences finies proposé initialement par Peregrine [60]. Une étude comparée entre expériences et calculs est présentée. Des résultats obtenus par analyse spectrale sont couplés à des modèles d'érosion et de couche limite chargée de sédiments en suspension. Des évolutions du transit sédimentaire apparaissent avec des périodes égales à trois fois la longueur d'onde de la houle. Ceci permet alors d'expliquer la formation des systèmes de barres sur les côtes dont la longueur d'onde est égale à la répétition des échanges d'énergie.

Huynh Thanh [61] met en oeuvre une simulation numérique de la couche limite sur les fonds marins en s'attachant à rendre compte des phénomènes turbulents qui s'y produisent. S'appuyant sur les travaux antérieurs de Sumer [105], Jenson [106] et Sleath [107] qui mettent en évidence la formation de phénomènes turbulents d'intensité variable au cours d'une période, il compare les différents modèles de turbulence proposés habituellement. Sa conclusion est que les modèles de longueur de mélange (correspondant à des fermetures à zéro équation) peuvent donner des renseignements sur la connaissance de la cinématique et dynamique du phénomène au-dessus de la couche limite, mais ils ne sont pas capables d'interpréter les structures complexes turbulentes dans la couche limite. Il a donc recours à un modèle

de fermeture à deux équations, où la turbulence est caractérisée par:

■ K: l'énergie turbulente

■ L: l'échelle macro caractéristique de l'interaction entre la turbulence et l'écoulement moyen.

Il propose donc un système d'équations pour simuler la couche limite qui est dominée sur sa frontière supérieure par un écoulement horizontal défini par une onde de gravité en eau peu profonde. La composante verticale de l'écoulement, dont la moyenne n'apparaît plus, n'intervient qu'au travers des fluctuations présentes dans les tensions de Reynolds.

Des validations sont faites à partir de plusieurs résultats d'expériences issus de la littérature et qui concernent les couches limites sur fonds plats, rugueux et présentant des rides. Ces travaux se terminent par une étude numérique, sur fond à rides, du transport de particules basé sur une équation de bilan des forces énoncée par Maxey et Riley [62]. Après simplifications, l'équation formulée donnant la vitesse des particules est résolue analytiquement en fonction de la vitesse du fluide décomposée en vitesse moyenne et fluctuante. Des trajectoires en sont déduites. Des nombres aléatoires sont générés pour fournir les fluctuations de vitesses et il est mis en évidence que les résultats obtenus en dépendent fortement, surtout à proximité du fond: ceci rend difficile le jugement critique à porter sur les effets turbulents ainsi construits.

VI-2-2 LES MODELES DE SUSPENSION ET DE TRANSPORT DE PARTICULES PAR DES ECOULEMENTS FLUIDES

Les modèles de suspension sont souvent formulés à partir de la concentration de particules dans l'écoulement fluide. On traite alors la suspension de particules solides comme un milieu continu régi par des équations de transport et de diffusion. On se référera à Fortier [63] pour des études théoriques précises à ce sujet. Dans cette voie, de très abondants travaux numériques existent. Nous en citons ici quelques uns:

Celik [64] ajoute aux équations précédentes un modèle

turbulent de type k- ϵ . Bechteler et Schrimpf [65] effectuent des études sur fonds rugueux. Nielsen [66] étudie trois modèles simples de transport de sédiments sous l'action de la houle et les compare à des données expérimentales. O'Connor et Nicholson [67] décrivent un modèle tridimensionnel de diffusion-advection.

D'autres auteurs s'intéressent au charriage et au tri granulométrique. Rahuel [68] présente cette approche pour l'étude des lits de rivières en écoulement permanent: on fait intervenir une grandeur représentant le débit solide qui doit vérifier une loi de conservation et une équation la liant aux paramètres hydrauliques.

D'autres approches, plus empiriques, reposent sur la formulation de lois à partir de relevés ou de mesures sur modèles réduits. Mignot et Loun [69] étudient ainsi le poids moyen de sable en suspension sous l'action de la houle, en fonction de la hauteur des vagues.

L'approche qui nous intéresse dans notre cas d'étude, consiste à simuler de manière plus précise le mouvement d'une particule sphérique en effectuant le bilan des forces qui s'y exercent au sein du fluide porteur. L'établissement des équations correspondantes est généralement attribué à Boussinesq [108], Basset [109] et Oseen [110], puis à Tchen [111]. Finalement, la version modifiée proposée par Maxey et Riley [62] semble être actuellement la plus utilisée. Sumner [70] reprend l'étude des différentes forces de traînée appliquées sur une particule se déplaçant près d'un fond lisse ou rugueux dans un écoulement turbulent. Il montre qu'à proximité du fond, les forces de traînée sont d'autant plus intenses que le fond est rugueux.

Par ailleurs Picart [71] résout numériquement l'équation de Tchen écrite pour des écoulements turbulents, en suivant l'approche de Hinze [72]. Cette étude, complétée par Desjonquères [73], est appliquée par Yvergniaux et Chollet [74] pour reconstituer des trajectoires de particules solides en écoulement turbulent et simuler l'action des bouffées turbulentes sur celles-ci.

On relèvera, d'autre part, les importants travaux de Feuillebois [75] qui traitent d'une manière très complète du transport d'une sphère dans des écoulements stationnaires et dans des écoulements instationnaires, en présence ou non de parois. Le problème d'interaction entre particules est également abordé. Les calculs sont essentiellement construits à partir de la théorie des développements asymptotiques et à partir d'approches probabilistes dues à Batchelor [112]. Feuillebois et al. [76] étudient alors l'importance relative des différentes forces agissant sur une particule sphérique se déplaçant dans un écoulement cisailé et dans une couche limite.

Une application fondamentale de ces modèles de transport de particules concerne les problèmes de formation de dunes ou rides. On notera les travaux de Blondeaux [77] qui prolongent ceux de Lyne [78] et Sleath [79] en étudiant la formation des rides pour des valeurs arbitraires du rapport entre l'amplitude du mouvement oscillatoire du fluide et la longueur des ondulations sur le fond. L'écoulement fluide est considéré visqueux. Le problème est résolu par une théorie d'analyse de stabilité linéaire.

VI-3 ETUDE NUMERIQUE

Notre étude va porter sur le transport de particules solides sphériques par un écoulement de houle calculé à partir du code précédemment décrit. Le modèle de transport décrit ici reste assez simple: il s'agit de la première approche d'une application de notre code de calcul. L'étude bibliographique précédente montre que de nombreuses extensions sont alors envisageables à partir de ces premiers travaux que nous allons décrire ci-après.

VI-3-1 MODELISATION DU TRANSPORT DE PARTICULES

VI-3-1-1 BILAN DES FORCES PRISES EN COMPTE

On étudie le mouvement d'une particule P, supposée sphérique, de diamètre D, dans un écoulement de fluide.

■ la particule P est caractérisée par sa masse m_p , son volume V, sa masse volumique $\rho_p = m_p / V$, et sa vitesse de déplacement \vec{U}_p .

■ l'écoulement du fluide est caractérisé par sa masse volumique ρ_f et sa vitesse \vec{U}_f .

L'hypothèse fondamentale que nous allons faire est que:

la particule ne modifie pas l'écoulement

Nous faisons alors le bilan des forces exercées sur la particule. Elles se répartissent ainsi:

- les forces exercées sur la particule fluide occupant le même espace: \vec{F}_f .
- le poids apparent de la particule (poids réel - poussée d'Archimède): \vec{F}_p .
- les forces de traînée visqueuse que l'on modélisera par la

trainée de Stokes: \vec{F}_t .

Les forces précédentes donnent lieu à un déplacement de la particule sous la forme d'une translation. La particule peut être, par ailleurs, animée d'un mouvement de rotation dont la vitesse angulaire est notée ω . Par le théorème de Kutta-Joukowski, elle subit alors une force \vec{F}_m , connue sous le nom d'effet Magnus, qui est perpendiculaire à l'écoulement.

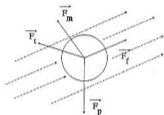


figure 6.2: bilan des forces exercées sur une particule solide, dans un écoulement de fluide

VI-3-1-2 CALCUL EFFECTIF DES FORCES

D'après le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule, on a:

$$\vec{F}_f + \vec{F}_p + \vec{F}_t + \vec{F}_m = n_p \frac{d\vec{0}}{dt} \quad (6.1)$$

■ calcul de \vec{F}_p :

Il s'agit du poids réel moins la poussée d'Archimède:

$$(n_f - n_p) g \vec{j}$$

où \vec{j} est le vecteur unitaire de direction vertical.

■ calcul de \vec{F}_f :

On l'obtient en appliquant le principe fondamental sur le fluide seul:

$$n_f \frac{D\vec{U}_f}{Dt} = n_p \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{D\vec{U}_f}{Dt}$$

■ calcul de \vec{F}_t :

On utilise la formule de la traînée de Stokes. Soit μ la viscosité du fluide, on a:

$$\vec{F}_t = 3\pi\mu D (\vec{U}_f - \vec{U}_p)$$

■ calcul de \vec{F}_a :

On peut l'exprimer sous forme vectorielle:

$$\vec{F}_a = 2V\rho_f \vec{U}_f \wedge \vec{\omega}_p$$

où \vec{U}_f est ici un vecteur à trois composantes dont la troisième est nulle, $\vec{\omega}_p$ a ses deux premières composantes nulles et sa troisième vaut ω_p . Pour évaluer cette dernière, on peut faire l'une des deux hypothèses suivantes:

1'hypothèse:

$$\omega_p \text{ est égal au rotationnel du fluide } \omega_f = 0,5 \left(\frac{\partial v_f}{\partial x} - \frac{\partial u_f}{\partial y} \right)$$

où u_f et v_f sont les composantes horizontale et verticale des vitesses du fluide.

2'hypothèse:

On écrit que l'énergie cinétique est conservée entre le fluide et la particule:

$$\omega_p = \omega_f \sqrt{\frac{\rho_f}{\rho_p}}$$

L'équation (6.1) s'écrit alors:

$$n_p \frac{D\vec{0}}{Dt} = (n_r - n_p) g \vec{j} + n_p \frac{\rho_r}{\rho_p} \frac{D\vec{0}_r}{Dt} + 2V \rho_r \vec{0}_r \wedge \vec{\omega}_p + 3\pi\mu D (\vec{0}_r - \vec{0}_p)$$

VI-3-1-3 SYSTEME DIFFERENTIEL DECRIVANT LE TRANSPORT
D'UNE PARTICULE

Sachant que $V = \pi D^3 / 6$, posant $s = \rho_r / \rho_p$, et utilisant la viscosité dynamique $\nu = \mu / \rho$, l'équation précédente s'écrit:

$$\frac{D\vec{0}}{Dt} = (s-1)g \vec{j} + s \frac{D\vec{0}_r}{Dt} + 2s \vec{0}_r \wedge \vec{\omega}_p + \frac{18 s \nu}{D^2} (\vec{0}_r - \vec{0}_p) \quad (6.2)$$

En posant $\vec{0}_p = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\vec{0}_r = \begin{pmatrix} u_r \\ v_r \end{pmatrix}$ et en désignant par (x_p, y_p) la position de la particule, on obtient finalement le système:

$$\frac{Du_p}{Dt} = s \frac{Du_r}{Dt} + 2 s v_r \omega_p + \frac{18 s \nu}{D^2} (u_r - u_p) \quad (6.3)$$

$$\frac{Dv_p}{Dt} = (s-1)g + s \frac{Dv_r}{Dt} - 2 s u_r \omega_p + \frac{18 s \nu}{D^2} (v_r - v_p) \quad (6.4)$$

$$\frac{Dx_p}{Dt} = u_p \quad (6.5)$$

$$\frac{Dy_p}{Dt} = v_p \quad (6.6)$$

VI-3-2 IMPLEMENTATION NUMERIQUE: COUPLAGE AVEC LE CODE
DE SIMULATION DE LA MOULE

VI-3-2-1 SCHEMA DE DISCRETISATION EN TEMPS
DU SYSTEME DIFFERENTIEL

Le système différentiel précédent peut alors s'exprimer sous la forme vectorielle générale:

$$\frac{D\vec{Q}(t)}{Dt} = \vec{F}(t, \vec{Q}(t)) \quad (6.7)$$

avec

$$\vec{Q}(t) = \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ x_p \\ y_p \end{pmatrix}, \text{ en posant } \alpha = \frac{18 s v}{D^2}$$

$$\vec{F}(t, \vec{Q}(t)) = \begin{pmatrix} s \frac{Du_f}{Dt} + 2 s v_f \omega_p + \alpha (u_f - u_p) \\ (s-1)g + s \frac{Dv_f}{Dt} - 2 s u_f \omega_p + \alpha (v_f - v_p) \\ u_p \\ v_p \end{pmatrix}$$

toutes les grandeurs exprimées dans $\vec{F}(t, \vec{Q}(t))$ sont à évaluer à la position (x_p, y_p) (dont la dépendance n'a pas été rappelée afin d'alléger l'écriture).

Pour résoudre l'équation différentielle (6.7), on utilise la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, écrite sous forme vectorielle.

Pour cela, on suppose que l'on connaît une condition initiale $\vec{Q}(t_0) = \vec{Q}_0$: ce qui revient à connaître la position et la vitesse de la particule à l'instant initial.

L'algorithme de la méthode de Runge-Kutta est rappelé ici :
 connaissant $\vec{Q}(t)$, on détermine $\vec{Q}(t+\Delta t)$ par :

$$\vec{Q}(t+\Delta t) = \vec{Q}(t) + \frac{\Delta t}{6} (\vec{A}(t) + 2 \vec{B}(t) + 2 \vec{C}(t) + \vec{D}(t)) \quad (6.8)$$

où

$$\vec{A}(t) = \vec{F}(t, \vec{Q}(t))$$

$$\vec{B}(t) = \vec{F}(t + \frac{\Delta t}{2}, \vec{Q}(t) + \frac{\Delta t}{2} \vec{A}(t))$$

$$\vec{C}(t) = \vec{F}(t + \frac{\Delta t}{2}, \vec{Q}(t) + \frac{\Delta t}{2} \vec{B}(t))$$

$$\vec{D}(t) = \vec{F}(t + \Delta t, \vec{Q}(t) + \Delta t \vec{C}(t))$$

Les évaluations de \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} et \vec{D} supposent que l'on puisse connaître les grandeurs intervenant dans \vec{F} à une position arbitraire et au trois instants t , $t + \Delta t/2$ et $t + \Delta t$. Ces grandeurs font intervenir essentiellement les composantes de vitesse du fluide, leurs dérivées partielles spatiales (par l'intermédiaire de u_p) et l'accélération du fluide.

VI-3-2-2 SUIVI SPATIAL ET TEMPOREL DE LA PARTICULE SUR

LE MAILLAGE DE CALCUL DE L'ÉCOULEMENT DU FLUIDE

a) stockage préalable des champs cinématiques de l'écoulement du fluide

Le problème de l'écoulement du fluide est découplé du problème de transport de particules, car on a supposé que les particules ne modifiaient pas l'écoulement. Le champ cinématique du fluide peut donc être calculé auparavant, pour toute la durée concernée par l'étude du transport particulaire.

Pour des domaines et des durées suffisamment grands, il n'est pas question de stocker en mémoire tous les champs cinématiques. Il devient donc indispensable de faire des sauvegardes sur fichiers, à chaque pas de temps, des valeurs des vitesses. Les calculs nécessaires au temps $t + \Delta t/2$ se font par interpolation linéaire entre les instants t et $t + \Delta t$, stockés sur fichier.

Par ailleurs, il est fondamental de pouvoir aller chercher rapidement des valeurs de vitesse à une position donnée, lors de l'étude du déplacement d'une particule. Pour cette raison, on a eu recours à l'utilisation de fichiers à accès direct. Cela permet de ne garder en mémoire que les vitesses du fluide aux sommets de la cellule du maillage contenant la position (x_p, y_p) de la particule étudiée.

Connaissant ces vitesses, on peut en déduire les dérivées partielles par des formules analogues à celles énoncées au paragraphe III-2-5-1. L'évaluation de la vitesse du fluide en (x_p, y_p) se fait par interpolation (décrite ci-dessous). Il reste alors à évaluer l'accélération du fluide.

b) calcul de l'accélération du fluide

Considérons une particule fluide à la position \vec{X}_p . Connaissant \vec{U}_p sa vitesse, on va en déduire des approximations de sa position aux instants $t + \Delta t$ et $t - \Delta t$ par un pas du schéma de Runge-Kutta d'ordre 4:

$$\begin{aligned}\vec{X}_p^{n+1} &= \vec{X}_p + \vec{\phi}(\vec{X}_p, \vec{U}_p, \Delta t) \\ \vec{X}_p^{n-1} &= \vec{X}_p + \vec{\phi}(\vec{X}_p, -\vec{U}_p, \Delta t)\end{aligned}$$

Par interpolation sur le maillage, on en déduit \vec{U}_r^{n-1} et \vec{U}_r^{n+1} qui représentent les approximations des vitesses fluides aux positions qu'occupe la particule aux instants $n-1$ et $n+1$.

L'accélération du fluide est alors approchée par

$$\frac{D\vec{U}_r}{Dt}(X_p) \approx \frac{\vec{U}_r^{n+1} - \vec{U}_r^{n-1}}{2 \Delta t} \quad (6.9)$$

c) interpolation sur les cellules

Les cellules du maillage ont la particularité d'avoir deux côtés verticaux, ce qui permet d'écrire un schéma d'interpolation bilinéaire.

Soit la cellule (A, B, C, D) pour laquelle $x_A = x_D$ et $x_B = x_C$. On cherche la transformation qui va ramener cette cellule sur le carré unité de sommets:

$a_1(0,0)$, $a_2(1,0)$, $a_3(1,1)$ et $a_4(0,1)$

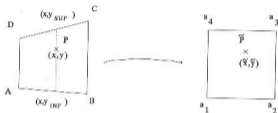


figure 6.3: transformation bilinéaire

Avec les notations de la figure précédente, on obtient les formules de transformation et d'interpolation suivantes:

$$\bar{x} = (x - x_A) / (x_B - x_A)$$

$$\bar{y} = (y - y_{inf}) / (y_{sup} - y_{inf})$$

$$\text{où } y_{inf} = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$$

$$y_{sup} = y_D + \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} (x - x_D)$$

La formule d'interpolation s'écrit alors, pour une fonction ϕ :

$$\phi(P) = \sum_{i=1}^4 \phi(a_i) p_i(\bar{x}, \bar{y}) \quad (6.10)$$

$$\text{où } p_1(\bar{x}, \bar{y}) = (1 - \bar{x})(1 - \bar{y})$$

$$p_2(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}(1 - \bar{y})$$

$$p_3(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}\bar{y}$$

$$p_4(\bar{x}, \bar{y}) = (1 - \bar{x})\bar{y}$$

VI-4 RESULTATS

VI-4-1 TRACE DE TRAJECTOIRES DE PARTICULES D'EAU

Nous allons, tout d'abord, tracer les trajectoires des particules d'eau, obtenues par simple convection du milieu fluide. Cette description des champs cinématiques calculés permet de caractériser la houle, par les mouvements orbitaux qu'elle engendre. On prendra, comme référence de comparaison, la figure 1.4 du chapitre 1, relative aux trajectoires obtenues à partir des modèles théoriques de houle.

Le traitement numérique permettant de tracer ces trajectoires, à partir des champs calculés, est une version simplifiée de celui décrit au paragraphe précédent:

En notant \vec{x}_r et \vec{v}_r la position et la vitesse relative à une particule fluide, on doit résoudre le système différentiel:

$$\frac{D\vec{x}_r}{Dt} = \vec{v}_r \quad (6.11)$$

La résolution se fait par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. On recherche, pour chaque pas de temps, dans les fichiers contenant les champs cinématiques, les valeurs des vitesses sur les sommets des cellules. La vitesse à la position \vec{x}_p est obtenue par interpolation bilinéaire.

On donne sur les figures suivantes, des tracés de trajectoires calculées à partir des trois exemples de champs cinématiques donnés au paragraphe 5.2.

La figure 6.4 reprend l'écoulement de houle de faible profondeur décrit sur la figure 5.1. Les particules sont situées initialement au centre du canal. Les ordonnées des positions initiales des particules, relatives au fond du canal (dont le niveau d'eau au repos est de 0,27 mètre) sont: 0,05 m; 0,12 m et 0,25 m.

On peut alors remarquer que le déplacement des particules fluides est tout à fait en accord avec les descriptions théoriques

de la houle (voir figure (1.4) du chapitre 1).

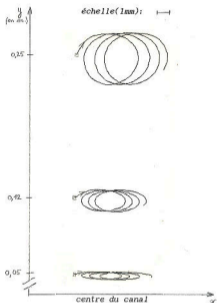


figure 6.4: houle de faible profondeur

La figure 6.5 reprend l'écoulement d'établissement d'un clapotis décrit sur la figure 5.2. Les particules sont situées initialement au milieu du canal (partie gauche de la figure) et près du mur constituant la frontière latérale droite (partie droite de la figure). Les ordonnées des particules sont les mêmes que sur la figure précédente.

On remarque que les particules fluides situées à droite du canal subissent presque aussitôt l'influence de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. Par contre, les particules fluides situées au milieu du canal commencent à avoir

un mouvement orbital qui dégénère au retour de l'onde réfléchie.

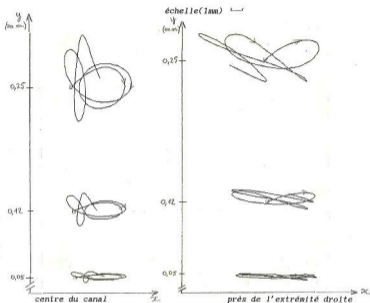


figure 6.5: établissement d'un clapotis

La figure 6.6 reprend l'écoulement généré par un profil de houle de Stokes, de faible hauteur relative, décrit sur la figure 5.3. Les particules sont situées initialement au centre du canal. Les trois trajectoires tracées correspondent à des positions initiales de même abscisse: 0,3 m et d'ordonnées différentes: 0,84 m; 0,43 m et 0,26 m (la hauteur d'eau est de 1 mètre et le canal mesure 6 m de long).

échelles (mm):



figure 6.6: houle générée par un profil de houle de Stokes

VI-4-2 TRACE DE TRAJECTOIRES DE PARTICULES PESANTES

IMPORTANCE RELATIVE DES DIFFERENTES FORCES

VI-4-2-1 VALIDATION DU SCHEMA DE CONVECTION

Afin de s'assurer du bien fondé de la méthode numérique résolvant le système différentiel (6.3) à (6.6), une vérification est effectuée afin de comparer les trajectoires de particules fluides issues du schéma simple de convection (6.11) (lui-même ayant été testé précédemment avec succès sur des mouvements connus) avec les trajectoires de particules de même masse volumique que l'eau ($s=1$) obtenues à partir du système différentiel (6.3) à (6.6), en annulant les forces dues à la trainée de Stokes et à l'effet Magnus.

Rappelons que ces deux procédés sont totalement différents: en effet, par l'équation (6.11), on accède, à chaque instants, aux vitesses exactes que l'on interpole. En revanche, dans le système (6.3) à (6.6), la vitesse n'est exacte qu'à l'instant initial, ensuite elle est approchée à chaque pas de temps par la résolution numérique des équations (6.3) et (6.4) relatives aux accélérations.

Le résultat de la comparaison est donné sur la figure 6.7 où les particules sont initialement situées au centre du canal, aux ordonnées respectives: 0,05 m; 0,12 m et 0,24 m. Notons que pour

VI-4-2-2 ETUDE DES DIFFERENTES FORCES PRISES EN COMPTE

Le modèle de transport de particules décrit par les équations (6.3) à (6.6) a ensuite été résolu en introduisant progressivement les différentes forces considérées.

Sur la figure 6.8, seul le poids apparent de la particule est pris en compte. La force de trainée est négligée, ainsi que la vitesse de rotation de la particule. La vitesse de chute de la particule est alors importante. Les trois trajectoires tracées correspondent à des particules de densités relatives (ρ_p/ρ_f) différentes. De gauche à droite de la figure, les particules ont respectivement des densités relatives de: 1,002; 1,005 et 1,01.

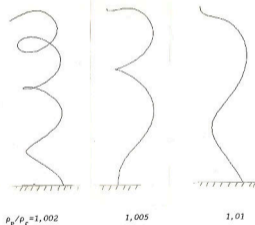


figure 6.8: particules pesantes (poids apparent seul)

Sur la figure 6.9, on a introduit, en plus du poids apparent de la particule, une force de trainée de Stokes, les particules considérées ayant un diamètre de 1 mm. La vitesse de chute est

alors beaucoup moins grande. Les densités relatives sont les densités relatives extrêmes de la figure 6.8.



figure 6.9 : particules pesantes (poids + traînée)

On a représenté des trajectoires de particules de densité plus importante sur la figure 6.10. On peut s'apercevoir que l'accélération du mouvement de chute est moins rapide comparée à ce que l'on obtient, pour d'autres densités, dans la figure 6.8. Les trois particules, pour lesquelles les trajectoires sont tracées, ont respectivement une densité relative de 1,1; 1,07 et 1,04.

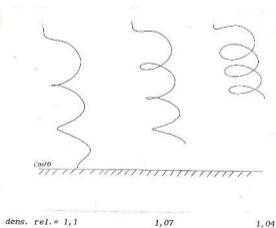


figure 6.10 : particules pesantes (poids + traînée)

Sur la figure 6.11, on compare des trajectoires de particules sans mouvement de rotation (partie gauche) avec des trajectoires de particules ayant un mouvement de rotation qui est fonction du rotationnel du fluide (partie droite). Notons qu'en raison des faibles densités relatives considérées dans nos exemples (ici elle est égale à 1,04), le mode de calcul du rotationnel, discuté au paragraphe VI-2-1-2, n'a quasiment aucune influence sur le calcul des trajectoires considérées. La position initiale de la particule sur cette figure correspond à une hauteur de 0,075 m au-dessus du fond. On illustre, ici, le fait que l'effet Magnus n'a un rôle important que lorsque la particule arrive sur le fond. C'est, en effet, à proximité de la couche limite que le rotationnel du fluide devient important alors qu'au-dessus il est très faible dans le cas d'écoulements de houle.

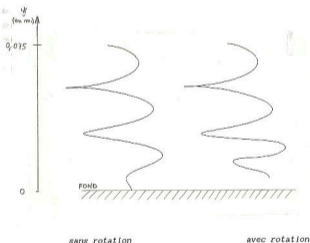


Figure 6.11: prise en compte de la rotation des particules

Sur la figure 6.12, on se place dans le même cas de comparaison que sur la figure précédente. On choisit, par contre,

une position initiale de la particule beaucoup plus proche du fond: 2,5 cm. La densité relative est ici de 1,01. On remarque alors que la rotation de la particule conduit à sa remise en suspension. Ce phénomène, ainsi mis en oeuvre, est fondamental dans la compréhension du mécanisme du transport sédimentaire.

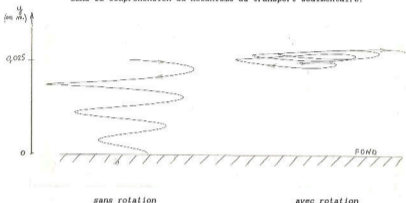


figure 6.12 : effet de la rotation des particules près du fond

Nous essayons finalement sur la figure 6.13 de mettre en évidence une hauteur d'équilibre pour laquelle les forces de pesanteur s'équilibrent avec les forces dues à la rotation de la particule. Pour cela, en prenant une densité relative des particules de 1,01, nous montrons les trajectoires de trois particules initialement aux hauteurs de 0,04m, 0,027m et 0,018m par rapport au fond du canal. Ces trois particules terminent leur parcours à des hauteurs voisines qui correspondraient à une hauteur d'équilibre des forces verticales.

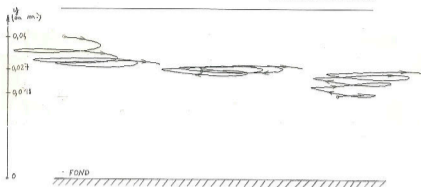


figure 6.13 trajectoires de particules en rotation, en fonction de la hauteur de leur position initiale.

VI-4-3 CONCLUSION

Cette application de notre code dans le domaine du transport sédimentaire reste assez simple. Une étude plus complète peut être envisagée. En premier lieu, il semble important de décrire la rotation des particules par une équation d'évolution, ainsi que de prendre en compte des forces de tension près du fond. Néanmoins, cette première étude a permis de faire apparaître un phénomène de remise en suspension des particules dû à leur rotation.

Chapitre 7:

MISE EN OEUVRE INFORMATIQUE

VII-1 INTRODUCTION

L'aspect principal des difficultés de la mise en oeuvre informatique de notre code de calcul résultait du fait qu'il n'existait pas de précédents travaux de ce type dans notre laboratoire qui n'avait entrepris jusqu'alors que des études expérimentales.

Ce travail de mise en oeuvre s'est rapidement révélé assez délicat en tant que première approche numérique d'un phénomène physique lui-même relativement complexe. Il a été mis en évidence que deux nécessités apparaissaient sur le plan matériel:

- Le phénomène devait être simulé sur un domaine suffisamment grand pour pouvoir s'établir et avec une précision relativement importante. Un moyen de calcul efficace devait être à notre disposition de façon à ce que le phénomène instationnaire s'établissant pendant plusieurs périodes de batteur, puisse être simulé avec des temps de calculs qui ne soient pas exorbitants.

- Il était exclu de travailler directement à partir des valeurs numériques des résultats de calcul, et, par conséquent, un système de représentation graphique devenait indispensable.

Les solutions relatives à ces deux nécessités sont apparues progressivement au cours du développement de notre travail. En ce qui concerne le matériel informatique, nous avons essayé d'utiliser le matériel le plus performant et le plus approprié disponible sur notre lieu de travail. Ainsi nous avons été amenés à changer de système informatique de manière à profiter de meilleures performances de calcul. Nous avons alors essayé de construire notre code de calcul avec une réelle préoccupation concernant la portabilité de nos développements. Pour cette raison, nous avons utilisé le FORTRAN comme langage de programmation, celui-ci étant la référence obligatoire dans le domaine scientifique proche de nos préoccupations.

Nous avons été amenés à développer des traitements graphiques. L'originalité de notre travail dans notre laboratoire

faisait que nous n'avions pas à notre disposition d'utilitaires déjà développés. Par ailleurs, il est clair qu'au niveau du graphisme, les problèmes de portabilité sur différentes machines sont beaucoup plus délicats à traiter. Nous avons alors développé quelques routines de base de graphisme de bas niveau en se tenant à n'utiliser que ces dernières dans nos tracés plus évolués. Un changement de matériel nous contraint uniquement à réécrire ces quelques routines de base, ce qui ne représente qu'un travail de quelques heures, à condition de connaître le nouvel environnement graphique disponible.

VII-2 MATERIEL UTILISE

Nous avons commencé nos développements sur un Micro VAX 2, dont le système d'exploitation, VMS, est propre au fabricant DIGITAL. Suite à l'acquisition d'un nouvel équipement s'intégrant dans un réseau desservant l'Université du Havre, nous avons été amenés à changer complètement d'environnement en travaillant sur un VAX 3900 lui-même géré par un système d'exploitation de la famille d'UNIX. Les inconvénients non négligeables de ce changement de matériel ont été compensés par le gain des performances de traitements des calculs. Là encore, ces nouveaux moyens de calcul dont nous disposons restent relativement modestes, comparés aux calculateurs vectoriels fréquemment utilisés en mécanique des fluides numérique. Par contre, le gros avantage provient du fait que le coût du temps de calcul CPU n'est pas du tout comparable et permet ainsi une utilisation sans restrictions de l'ordinateur disponible.

Il est alors difficile de décrire de manière précise les performances de calcul de l'ordinateur disponible car les différents indices annoncés par les constructeurs se révèlent souvent peu utiles pour effectuer des comparaisons fiables.

Il nous est apparu plus intéressant de donner le temps réel d'une exécution précise et simple dont le programme en FORTRAN est le suivant:

```

      do 1 i=1,100
        do 2 j=1,1000
          x=sin(1.)
2         continue
1       continue
      end

```

Le temps CPU de ce programme est alors de 4,2 secondes sur le VAX 3900.

Par ailleurs, le matériel utilisé présente certaines caractéristiques:

■ L'environnement de travail est multi-utilisateurs et multi-tâches. Ceci permettant notamment de lancer les exécutions longues en tâches de fond, ainsi que de faciliter les différentes communications à travers le réseau utilisé.

■ La gestion de la mémoire est régie par une technique dite de mémoire virtuelle. Pour des traitements nécessitant une capacité de mémoire importante, des stockages partiels de données sont gérés automatiquement par le système ce qui évite au programmeur de se soucier de telles préoccupations assez fastidieuses.

Nous nous sommes alors préoccupés de mettre au point un algorithme suffisamment efficace pour traiter notre problème qui est nécessairement coûteux en temps de calcul (Des problèmes analogues, décrits dans la littérature, nécessitent fréquemment de l'ordre de plusieurs minutes à plusieurs heures de calcul sur des ordinateurs de type CRAY).

Finalement, après de nombreuses améliorations, le code de simulation de la houle fournissant les résultats tels que ceux présentés au paragraphe V-2, travaillant sur des maillages contenant deux mille cellules de discrétisation, nécessite à l'heure actuelle un temps de calcul de l'ordre de 30 minutes par période de houle sur le VAX 3900. Le programme traitant du transport de particules dans un écoulement déjà calculé est, quant à lui, beaucoup plus rapide et ne nécessite que de l'ordre d'une minute pour l'étude du déplacement d'une particule pendant une période (On travaille alors avec cinquante fichiers sauvegardés par période de houle).

VII-3 LA REPRESENTATION GRAPHIQUE DES RESULTATS

Le dernier matériel graphique mis à notre disposition était une console DIGITAL VT 330. Le langage graphique Régis, de DIGITAL, a été utilisé: il est basé sur l'envoi de codes de contrôle et de chaînes de caractères sur la console qui les interprète localement.

Des procédures de bas niveau ont alors été développées en langage Régis, afin d'effectuer les tâches suivantes:

- Initialisation et sortie du mode graphique.
- Effacement de l'écran
- Positionnement du curseur
- Déplacement du curseur avec tracé à l'écran
- Affichage de caractères, dans le mode graphique

Les autres routines graphiques plus évoluées utilisent pour la plupart ces procédures de bas niveau, autorisant ainsi une portabilité maximum. On a ainsi été amené à développer des traitements plus élaborés du type:

- Tracé de champs vectoriels
- Tracé de familles de courbes
- Tracé de trajectoires de particules

La gestion des fichiers de résultats de calcul dans le but de leur exploitation graphique est organisée en deux étapes: Une étape "pré-graphique" permet de sélectionner de manière interactive les informations nécessaires au tracé graphique par les différents fichiers de résultats de calculs stockés. Un fichier est alors directement généré pour être traité ultérieurement, sans intervention humaine, par un programme graphique effectuant éventuellement plusieurs tracés successifs, ainsi que des copies d'écran automatiques.

VII-4 ORGANISATION DES DIFFERENTS PROGRAMMES ET UTILITAIRES

Le schéma suivant renseigne sur l'enchaînement des différents programmes de calculs et de traitements graphiques utilisés. Les programmes nommés exécutent les tâches suivantes:

■ *SINHOC*: programme de simulation de la houle, générant des fichiers contenant les vitesses et les pressions calculées.

■ *TSEDIM*: programme calculant la position des particules pesantes, générant un fichier directement traitable par un programme de tracé de trajectoires.

■ *TRAJECTOIRE*: programme calculant les trajectoires de particules d'eau, générant un fichier directement traitable par un programme de tracé de trajectoires.

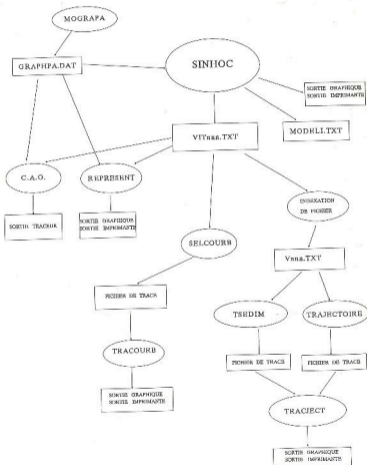
■ *MOGRAPA*: programme permettant de régler certains paramètres d'affichage graphique.

■ *REPRESENT*: programme traçant les champs cinématiques, à partir des fichiers de calcul générés par *SINHOC*.

■ *SELCOURB*: programme permettant d'extraire des informations à partir des fichiers générés par *SINHOC*, afin de tracer des courbes de profils de vitesse.

■ *TRACOURB*: programme traçant les courbes sélectionnées par *SELCOURB*.

■ *TRAJECT*: programme de tracé de trajectoires.



VII-5 EXEMPLES DE DEROULEMENTS DE SESSIONS DE CALCULS

Nous terminons finalement ce chapitre en présentant quelques exemples de sessions de calculs. Les affichages illustratifs correspondent aux programmes décrits au paragraphe précédent.

Un lancement du calcul de simulation de houle débute, en principe, par le lancement du programme *MOGRAPA* permettant de contrôler certains paramètres graphiques. L'affichage interactif de ce programme est le suivant:

```

39004 mographa
MODIFICATION DES PARAMETRES D'AFFICHAGE
DES CHAMPS DE VITESSES

valeur actuelle des parametres :
1.premiere colonne de cellules a représenter : 1
2.Derniere colonne de cellules a représenter : 101
3.assises d'affichage(1:total,2:une vitesse sur deux, etc...) :
3.sur x : 2
4.sur y : 2
5.facteur d'echelle des modules de vitesses : 2.00000
6.facteur de dilatation au hôteour : 1.00000
7.affichage en serie : non
8.nombre de colonnes de marge a gauche : 4
9.nombre de colonnes de marge a droite : 1
10.nombre de rangées de marge en haut : 2
11.nombre de fichiers par période : 56
12. SORTIE DU PROGRAMME Sa MODIFICATION

 taper unera de parametres a modifier

```

On peut ensuite lancer le programme de calcul proprement dit: *SINROC* qui, au démarrage permet de choisir entre plusieurs types de simulations. L'affichage de ce choix, précédent les résultats apparaissant sous la forme graphique donnée au paragraphe V-2, est le suivant:

```

39808 ./sinroc
batteur: 1.plan 2.volet 3.houle de Stokes : 1
OM v sur batteur: 1.salle 2.de/da sul : 1
vit. init. : 1.rulle 2.houle de Stokes : 1
surf. libre init. : 1.repsa 2.sinusoide : 1
facteur de relaxation:
1.
2.
fleches proportionnelles: (1.ros; 2.oul)
2
decrire de definition de la viscosite
de la colonne 3 a nhl : 101
de la ligne 3 a nhl : 11
Colonnes 0 a 2
lignes 0 a 11
viscosite : 1.00000e-16
Colonnes 3 a 4
lignes 0 a 4
viscosite : 1.00000e-06
modification (O/N) ?

```

Une fois le calcul de simulation de houle terminé, il est alors possible de faire tracer des profils de vitesses tels que ceux représentés sur les figures 5.5 à 5.9. La sélection des profils à tracer se fait alors par *SELCOURB*, sous la forme suivante:

```

30004 selcoub
SELECTION DE COURBES DE TRACE
suffixe des fichiers a lire : tel

parametres constants
  1. numero de profil constant
  2. numero de fichier constant
  3. ascure constante
2
numero de fichier : 50
composante a représenter :
  1. U
  2. V
  3. P
1
numero de profil : 50
numero de profil : 54
numero de profil : 58
numero de profil : 0
en-tete du graphique :
COMP. HORIZONTALE
legende de l'axe des x
U
legende de l'axe des y
Y

```

Le tracé des courbes se fait alors aussitôt après en appelant *TRACOURB*.

L'étude des trajectoires de particules pesantes résultant des fichiers calculés par *SINROC* se fait alors par le programme *TSEDIM*. Le lancement de ce programme provoque une session interactive dans laquelle l'utilisateur peut choisir les différentes forces agissant sur la particule pesante. L'écran d'affichage correspondant est le suivant:


```

39004 $HOME/sediments/neuvel/taedin
prefixe des fichiers (1 caractere): v
premier fichier lu:
50
dernier fichier lu:
158
pas de temps entre deux fichiers:
0.0250
frequence d'affichage:
18
densite relative de la particule par rap. au fluide:
1.025
vitesse initiale des particules:
1. nulle 2. celle de l'ecoulement
2
nombre de particules:
3
saisie des positions initiales des particules:
particule n. 1
abscisse: 0.8
ordonnee: 0.65
particule n. 2
abscisse: 0.8
ordonnee: 0.64
particule n. 3
abscisse: 0.8
ordonnee: 0.63
prise en compte de la trainee de Stokes :
0. non 1. oui
1
prise en compte de l'effet Magnus :
0. non 1. oui
1
methode de calcul de la rotation des particules:
0. identique au fluide
1. meme energie cinetique que le fluide
1
viscosite du fluide : 1.e-06
diametre des particules : 0.801

```

```

#####

```

*** solution calculee au temps : 00 sec

```

#####

```

J	X	Y	C
1	0.801200	0.649679	
2	0.801209	0.639755	
3	0.801220	0.629840	

Une fois ce programme exécuté, il ne reste plus qu'à faire afficher les trajectoires des particules en lançant le programme *TRACJECT*. Les graphiques résultants sont ceux donnés dans le chapitre 6.

Chapitre 8:

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Nous avons présenté dans cette thèse un outil informatique et numérique permettant de simuler des écoulements de type houle (ou de type clapotis), s'établissant à partir d'une frontière génératrice du mouvement.

Il s'agissait, ici, dans un premier temps, de développer une application informatique suffisamment performante et souple pour contribuer à compléter un mode d'investigation expérimental existant déjà. Par ailleurs, connaissant les limitations ou les difficultés de mise en oeuvre de certaines méthodes numériques existant déjà, on s'est efforcé de proposer un algorithme de traitement permettant de rendre compte des propriétés de conservation qui réduisent ainsi les erreurs d'approximation inhérentes à la discrétisation du problème.

Un traitement simple de la surface libre et une hypothèse de parabolisation, pour la résolution de l'équation donnant la deuxième composante des vitesses, permettent de rendre le code suffisamment rapide pour traiter, sur des ordinateurs aux performances de calcul moyennes, des cas d'écoulements comparables avec des expériences de laboratoire. On a vérifié, à partir de validations expérimentales, que les simplifications, énoncées ci-dessus, n'engendraient pas d'erreurs significatives sur l'écoulement intérieur du fluide. Les exemples donnés montrent que l'accord entre les calculs et les résultats d'expériences est satisfaisant et permet d'envisager une utilisation efficace du code:

- pour compléter et valider des résultats expérimentaux.
- pour prédire des écoulements.
- pour isoler les facteurs prédominants intervenant dans un écoulement observé.

Par ailleurs, plusieurs améliorations sont à envisager:

- Une étude plus précise des phénomènes intervenant au coin batteur-fond est souhaitable. Si les phénomènes turbulents se révèlent être prépondérants dans cette zone d'étude, il sera utile d'adjoindre au code actuel un modèle les prenant en compte.

- Un traitement plus rigoureux, par analyse spectrale, sur la condition de sortie latérale droite est aussi à envisager.

L'utilisation du code pour traiter les problèmes de sédimentation semble être assez prometteuse. Nous n'avons présenté ici, qu'un modèle relativement simple d'application qu'il sera nécessaire de compléter. Là encore, les phénomènes turbulents, abordés par d'autres auteurs, seront certainement à prendre en considération.

Par ailleurs, les travaux présentés ont été construits sur des maillages trapézoïdaux assez simples. Il est toutefois intéressant de rappeler que les méthodes de volumes finis utilisées se généralisent, avec quelques précautions lors de l'intégration des équations, à des maillages quelconques (voir, par exemple, Lhuissier [97]). Des adaptations de ce type sont alors possibles à partir de notre code de calcul et permettraient d'envisager de nombreuses études complémentaires, plus proches de cas réalistes. Citons, parmi elles, les problèmes de sédimentations sur des fonds à géométrie particulière, de type rides ou dunes.

La mise en oeuvre informatique nous a conduit à écrire un code de calcul portable et donc, facilement adaptable sur différentes machines. Les développements graphiques nécessaires à l'analyse des résultats ont été développés. Ce dernier aspect plus technique nous permettra également d'exploiter nos travaux en les portant sur d'autres types de matériels informatiques afin de faciliter nos comparaisons avec des traitements de mesures expérimentales.

Ces travaux nous ont montré que le traitement graphique lié au problème instationnaire posé jouait un rôle important dans l'analyse des résultats. Des développements et améliorations informatiques liés à cet aspect peuvent être envisagés.

Par ailleurs, en envisageant une adaptation du problème à une simulation tridimensionnelle, certains aspects informatiques devront être éventuellement résolus, tels que des gestions de sauvegardes partielles de données ou des traitements spécifiques adaptés à des calculateurs vectoriels.

Finalement, en mettant en oeuvre un travail original dans un laboratoire jusqu'alors orienté vers des études expérimentales, de nombreux développements futurs peuvent être envisagés tant sur le plan des équations modélisant le problème physique, que sur le traitement numérique et informatique.

NOTATIONS

GRANDEURS PHYSIQUES

§ de définition

(x, y)	: coordonnées spatiales cartésiennes	II-1-1
t	: temps	II-1-1
\vec{U}	: vecteur vitesse de l'écoulement fluide	II-1-2
(u, v)	: composantes horizontale et verticale de la vitesse	II-1-2
P	: pression	II-1-2
ρ	: masse volumique de l'eau	II-1-2
ν	: viscosité cinématique de l'eau	II-1-2
H	: hauteur totale d'eau par rapport au fond du canal	II-1-3-2
\bar{H}	: profondeur d'eau moyenne	I-1-1
ΔH	: hauteur des vagues, creux à crêtes	I-1-1
λ	: longueur d'onde des vagues	I-1-1
c	: célérité	I-1-1
T	: période	I-1-1
Γ_B	: accélération du batteur	III-3-2
W	: fréquence du batteur	II-1-3-2
A	: amplitude du déplacement du batteur	III-1-3-2
\vec{F}	: forces massiques extérieures	II-1-2
g	: accélération de la pesanteur	II-1-2
d_x, d_y	: déplacements horizontal et verti- cal du batteur	III-1-3-2
p^-	: pression dans l'eau, à la surface libre	II-1-3-3
p^+	: pression dans l'air, à la surface libre	II-1-3-3
$\vec{n}, \vec{\tau}$: vecteurs normal et tangent à la surface libre	II-1-3-3
U_n, U_τ	: composantes de vitesse normale et tangente à la surface libre	II-1-3-3

ω	: rotationnel du fluide: $(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)/2$	II-1-3-3
ϕ et ψ	: représentent à plusieurs reprises des fonctions arbitraires qui n'ont pas de signification constante tout au long de ce mémoire.	

OPERATEURS MATHÉMATIQUES

$\partial/\partial x, \partial/\partial y$: dérivées partielles dans les directions horizontales et verticales	II-1-2
$\partial/\partial t$: dérivée partielle par rapport au temps	II-1-2
$\vec{g}rad$: opérateur gradient: $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$	II-1-2
D/Dt	: dérivée totale lagrangienne: $\partial/\partial t + \vec{U} \cdot \vec{grad}$	II-1-2
Δ	: opérateur laplacien: $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$	II-1-2
$\vec{\Delta}$: opérateur laplacien vectoriel	II-1-2
div	: opérateur divergence: $\partial/\partial x + \partial/\partial y$	II-1-2
$\ \cdot \ _{\infty}$: norme max: plus grande valeur absolue des composantes	II-2-1

GRANDEURS LIÉES À LA DISCRETISATION

$\Omega(t)$: cellule à l'instant t	II-2-1
$\partial\Omega(t)$: frontière de la cellule	III-2-1
\vec{V}	: vitesse des cellules du maillage	III-2-1
Δt	: pas de temps du calcul	II-2-1
$\Delta x, \Delta y$: pas d'espace horizontal et vertical	II-2-2
δy	: déformation verticale de la cellule	III-2-5-2
P_0	: nombre de Peclet	II-2-2

NOTATIONS

M	: maillage de calcul	II-2-1
X_{Ω}	: résidu de la projection horizontale de l'équation d'évolution de la quantité de mouvement	II-2-1
N_M	: nombre total de cellules du maillage	II-2-1
Δl	: pas d'espace	II-2-2
n_l, n_h	: nombre de cellules dans le sens horizontal et vertical	III-1-2
y_h	: ordonnées des centres des faces Sud des cellules de contrôle de V	III-1-3
V_{Ω}	: surface de la cellule Ω	II-2-1
$C_{p,\alpha}$: coefficients des termes non diagonaux des systèmes linéaires	III-2-2-4
D_p	: coefficient du terme diagonal des systèmes linéaires	III-2-2-4
S_p	: second membre des systèmes linéaires	III-2-2-4
b_i, a_i, c_i	: coefficients des diagonale, sous-diagonale et sur-diagonale de la $i^{\text{ème}}$ ligne d'une matrice tridiagonale	IV-1-4
x_i, d_i	: $i^{\text{ème}}$ coefficients du vecteur inconnu et du second membre d'un système linéaire	IV-1-4
p_i, q_i	: coefficients des suites de calcul utilisées pour résoudre un système tridiagonal	IV-1-4

INDICES SUPERIEURS

n	: nouvelle valeur au temps t	II-2-1
$n-1$: ancienne valeur au temps $t - \Delta t$	II-2-1
$\cdot, n - 1/2$: valeurs interpolées entre les temps t et $t - \Delta t$, en suivant le mouvement des particules	II-2-1

INDICES INFERIEURS

i, j	: indices de colonne et de ligne	II-2-1
P	: indice de la position centrale de la cellule	III-1-1
n, s, e, w	: indices des centres des faces des cellules, suivant l'orientation géographique traditionnelle	III-2-5-1
$N, E, S, W, NE, SE, NW, SW$: indices de la position du centre des cellules voisines suivant l'orientation géographique	III-1-1

GRANDEURS RELATIVES AU TRANSPORT PARTICULAIRE

V	: volume d'une particule	VI-3-1-1
D	: diamètre de la particule	VI-3-1-1
m_p	: masse d'une particule	VI-3-1-1
ρ_p	: masse volumique d'une particule	VI-3-1-1
\vec{U}_p	: vitesse de déplacement d'une particule	VI-3-1-1
u_p, v_p	: composantes horizontale et verticale de la vitesse d'une particule	VI-3-1-3
x_p, y_p	: coordonnées de la position d'une particule	VI-3-1-3
m_f	: masse du fluide occupant le même espace que la particule	VI-3-1-1
ρ_f	: masse volumique du fluide	VI-3-1-1
\vec{U}_f	: vitesse du fluide	VI-3-1-1
u_f, v_f	: composantes horizontale et verticale de la vitesse du fluide	VI-3-1-2
\vec{F}_f	: force exercée sur la particule fluide occupant le même espace que la particule	VI-3-1-1
\vec{F}_p	: poids apparent de la particule	VI-3-1-1
\vec{F}_t	: force de traînée visqueuse	VI-3-1-1
\vec{F}_m	: force due à l'effet Magnus	VI-3-1-1

NOTATIONS

ω_p	: vitesse angulaire de la particule	VI-3-1-1
μ	: viscosité dynamique du fluide	VI-3-1-2
ω_f	: rotationnel du fluide	VI-3-1-2
s	: densité relative du fluide par rapport à la particule	VI-3-1-3
$\vec{Q}(t)$: vecteur inconnu du système différentiel (6.7) donnant la position d'une particule	VI-3-2-1
$\vec{F}(t, \vec{Q}(t))$: second membre du système différentiel (6.7)	VI-3-2-1
$\vec{K}(t), \vec{B}(t), \vec{C}(t), \vec{D}(t)$: vecteurs intermédiaires de calcul du schéma de Runge Kutta	VI-3-2-1
$\vec{\phi}(\vec{x}_p, \vec{U}_f, \Delta t)$: second membre de l'équation différentielle donnant la position d'une particule fluide	VI-3-2-2
$\vec{x}_p^{n+1}, \vec{x}_p^{n-1}$: approximation des positions d'une particule fluide aux instants $t + \Delta t$ et $t - \Delta t$	VI-3-2-2
$\vec{U}_f^{n+1}, \vec{U}_f^{n-1}$: vitesses du fluide aux instants $t + \Delta t$ et $t - \Delta t$	VI-3-2-2
A, B, C, D	: sommet d'une cellule	VI-3-2-2
$(x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C)$ et (x_D, y_D)	: coordonnées des sommets de la cellule	VI-3-2-2
a_1, a_2, a_3, a_4	: sommets du carré unité	VI-3-2-2
P_1, P_2, P_3, P_4	: fonctions poids des sommets de la cellule unité	VI-3-2-2
$\tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{y})$: transformé d'un point P (x, y) par une transformation bilinéaire ramenant une cellule au carré unitaire	VI-3-2-2

REMARQUE: Quelques notations utilisées de manière unique dans ce mémoire, n'apparaissent pas dans cette nomenclature.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LARRAS J. : "Physique de la houle et des lames", Eyrolles 1979.
- [2] BONNEFILLE R. : "Cours d'hydraulique maritime", Masson 1980.
- [3] SUSBIELLES G. et BRATU C. : "Vagues et ouvrages pétroliers en mer", Editions Technip 1981.
- [4] LE BAS J. : "Etude expérimentale du champ des vitesses instantanées dans un canal à houle", Thèse de 3ième cycle, Rouen, 1983.
- [5] JARNO A. : "Analyse de la cinématique de la houle en eau peu profonde", Rapport de DEA, Le Havre 1986.
- [6] FONTANET : "Théorie de la génération de la houle cylindrique par un batteur plan", Thèse de 3ième cycle, Grenoble, 1961.
- [7] WU : "Waves generated by an inclined-plate wave generator", Int. J. for Num. Meth. in Fluid, Vol 8, p 803-811, 1988.
- [8] TRINITE : "Couche limite turbulente avec transfert de chaleur et de masse. Cas d'une discontinuité de température et de concentration à la paroi", Thèse d'état, Rouen, 1971.
- [9] VASSELIN : "Acquisition et traitement de données pour vélocimétrie Doppler à laser", Rapport de DEA, Le Havre, 1987.
- [10] TEMAM : "Navier Stokes Equations", North Holland, 1985
- [11] GIRAULT, RAVIART : "Finite element approximation of the Navier-Stokes Equations", Springer Verlag 1981.
- [12] DAUTREY, LIGNS : "Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques", Masson, 1985.
- [13] LANDEL : "Etude de deux dispositifs hydrodynamiques générateur de houle résonant. Atténuateur de houle mettant à profit le phénomène du mur d'eau oscillant", Thèse de docteur-ingénieur, Nantes, 1988.
- [14] GUEVEL, LANDEL, BOUCHET, MANZONE : "Le phénomène d'un mur d'eau oscillant et son application pour protéger un site côtier soumis à l'action de la houle", PIANC AIPCN n°52, 1986.
- [15] LANDEL : "Etude d'un générateur de houle constitué d'un flotteur cylindrique oscillant horizontalement au voisinage d'une paroi verticale", 1ères journées de l'hydrodynamique, Nantes, 1987.
- [16] MOLIN : "Quelques réflexions sur la résolution du problème de diffraction au deuxième ordre", 1ères journées de l'hydrodynamique, Nantes, 1987.

- [17] LONGUET-HIGGINS et COKELET : "The deformation of steep surface waves on water. 1. A numerical method of computation", Proc. R. Soc. London, Vol A 364, p 1-26, 1976.
- [18] COINTE : "Quelques aspects de la simulation numérique d'un canal à houle", Thèse de l'école nationale des Ponts et Chaussées, 1989.
- [19] NAVON : "A review of finite element methods for solving shallow-water equations", Comp. Mod. in Ocean Eng., Schrefler and Zienkiewicz (ed.), Balkema, 1988.
- [20] MEI C.C. : "The applied dynamics of ocean surface waves", World Scientific, 1990.
- [21] SEABRA SANTOS : "Contribution à l'étude des ondes de gravité bidimensionnelles en eau peu profonde", Thèse d'état, Grenoble, 1985.
- [22] BONA, PRITCHARD et SCOTT : "An evaluation of a model equation for water waves", Phil. Trans. R. Soc. London, A 302, p 457-510, 1981.
- [23] TEMPERVILLE : "Contribution à la théorie des ondes de gravité en eau peu profonde", Thèse d'état, Grenoble, 1985.
- [24] CHUBAROV et SHOKIN : "The numerical modelling of long wave propagation in the framework of non-linear dispersion models", Computers and Fluids, Vol. 15, n°3, p 229-249, 1987.
- [25] CHAPALAIN et TEMPERVILLE : "Etude théorique et expérimentale de la propagation de la houle en eau peu profonde", 21èmes Journées de l'hydrodynamique, Nantes, 1989.
- [26] HARLOW et WELCH : "Numerical calculation of time dependant viscous incompressible flow of fluid with free surface", Physics of Fluids, Vol. 8, n°12, p 2182-2189, 1965.
- [27] BORLETEAU, MAISONNEUVE, CORDONNIER, SULMONT : "Etude expérimentale et modélisation numérique du comportement d'un pont flottant bidimensionnel dans un courant uniforme", 21èmes Journées de l'hydrodynamique, Nantes, 1989.
- [28] NICHOLS, HIRT, HOTCHKISS : "SOLA-VOLF : A solution algorithm for transient fluid flow with multiple free boundaries", Los Alamos Scientific Laboratory report, LA 8355, August 1980.
- [29] DAUBERT et CANOUET : "Approche numérique de la houle par les équations de Navier Stokes", Annales des Ponts et Chaussées, 1984.
- [30] DAUBERT : "Peut-on espérer tenir compte des effets visqueux quand on calcule un écoulement à surface libre en présence d'un obstacle ?", 1ères Journées de l'hydrodynamique, Nantes, 1987.
- [31] DAUBERT : "Quelques animations concernant les écoulements à surface libre", 2èmes Journées de l'hydrodynamique, Nantes, 1989.

- [32] CHAGDALI : "Simulation numérique d'écoulements à surface libre d'un fluide visqueux incompressible", Thèse d'état, Casablanca, 1990.
- [33] LE BAS J. : "Etude de la couche limite générée par les vagues sur le fond d'un canal à houle", Thèse d'état, Le Havre, 1986.
- [34] MARIN : "Turbulence induite par la houle au voisinage d'un cylindre posé sur le fond d'un canal à houle", rapport de DEA, Le Havre, 1988.
- [35] JARNO : "Interaction houle-cylindre horizontal, à faible nombre de Keulegan-Carpenter", Thèse de l'Université du Havre, 1989.
- [36] JARNO, BERTELLE, BELORGEY : "Dynamic influence of waves on a horizontal cylinder beneath waves", *Comp. Modelling in Ocean Eng.*, Schrefler and Zienkiewicz (ed.), p 609-615, Balkema, 1988.
- [37] BROSSARD : "Contribution à l'étude de la turbulence à travers l'analyse d'un écoulement généré par la houle entre deux plaques", Thèse de 3ième cycle, Rouen, 1986.
- [38] GARG et MAJI : "Laminar flow and heat transfer in a periodically converging-diverging channel", *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, Vol. 8, p 579-597, 1988.
- [39] PATANKAR : "Numerical heat transfer and fluid flow", Hemisphere pub. corp., Mc Graw Hill book company, New York, 1980.
- [40] DEMIRDZIC et PERIC : "Space conservation law in finite volume calculations of fluid flow", *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, Vol 8, p 1037-1050, 1988.
- [41] SARRAF : "Three dimensional surface water modelling using a mesh adaptive technique", *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, Vol 7, p 465-488, 1987.
- [42] EUVRARD : "Résolution numérique des équations aux dérivées partielles", Masson, 1990.
- [43] DUVAUT : "Mécanique des milieux continus", Masson, 1990.
- [44] PATANKAR, SPALDING : "A calculational procedure for heat, mass and momentum transfer in three dimensional parabolic flows", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15, p 1787-1805, 1972.
- [45] GOSMAN, ISSA, WATKINS : "Application of a new implicit scheme to the computation of compressible and incompressible recirculating flows", 1986.
- [46] CIARLET : "Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation", Masson, 1982.
- [47] ORLANSKI : "A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows", *J. of Computational Physics*, 21, p 251-269, 1976.

- [48] BELORGEY, LEBAS : "Etude par vélocimétrie Doppler à laser du champs des vitesses instantanées dans la houle produite en laboratoire", la houille blanche, n° 5, p 363-368, 1984.
- [49] NICHE : "Mouvements ondulatoires de la mer en profondeur croissante ou décroissante", Annales des Ponts et Chaussées, Paris 1944.
- [50] SIEW, HURLEY : "Long surface waves incident on a submerged horizontal plate", Journal of Fluid Mechanics, 83, p 141-151, 1977.
- [51] PATARAPANICH : "Maximum and zero reflection from submerged plate", J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol. 110, n°2, p 171-181, 1984.
- [52] PATARAPANICH : "Reflection and transmission characteristics of regular and random waves from a submerged horizontal plate", Coastal Eng. 13, p 161-182, 1989.
- [53] LE THI MINH : "Etudes théorique et expérimentales du passage des ondes longues sur des obstacles immergés", Thèse de l'INPG, Grenoble, 1989.
- [54] BROSSARD, BELORGEY : "Experimental study of vortex kinematic in a periodic two dimensional flow", proposé à European Journal of Mechanics, 1990.
- [55] RIVOALEN E. : "Evolution de structures tourbillonnaires générées dans un canal à houle", Rapport de DEA, Le Havre 1989.
- [56] MELEN B. : "Création de structures tourbillonnaires", Rapport de DEA, Le Havre, 1990.
- [57] BROSSARD J. : "Propagation d'une onde sur une plaque immergée", 1ères Journées inter-universitaires Génie Côtier-Génie Civil, 1990.
- [58] LE BAS, BELORGEY : "Contribution to the experimental study of phenomena of transport in a turbulent oscillatory boundary layer", EuroMech 215, Gènes, 1987.
- [59] CHAPALAIN : "Etude hydrodynamique et sédimentaire des environnements littoraux dominés par la houle", Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, 1988.
- [60] PEREGRINE : "Long waves on a beach", J. of Fluid Mech., 27, p 815-825, 1967.
- [61] HUYNH THANH : "Etude numérique de la couche limite turbulente oscillatoire générée par l'interaction houle-courant en zone côtière", Thèse de l'INPG, Grenoble, 1990.
- [62] MAXEY, RILEY : "Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow", Phys. Fluids 26, p 883-889, 1983.
- [63] FORTIER : "Mécanique des suspensions", Masson, 1967.

- [64] CELIK : "Numerical modelling of sediment transport in open channel flows", *Euronech* 156, Istanbul, 1982.
- [65] BECHTELER, SCHRINPF : "Improved numerical calculation of sediment fo different bed-roughness ans various turbulence models", *Euronech* 156, Istanbul, 1982.
- [66] NIELSEN : "Three simple models of wave sediment transport", *Coastal Eng.* 12, p 43-62, 1988.
- [67] O'CONNOR, NICHOLSON : "A three dimensional model of suspended particulate sediment transport", *Coastal Eng.* 12, p 157-174, 1988.
- [68] RAHUEL : "Modélisation de l'évolution du lit des rivières alluvionnaires à granulométrie étendus", Thèse de l'INPG, Grenoble, 1988.
- [69] MIGNOT, LOUIN : "Etude de la remise en suspension des sables sous l'action de la houle", *La houille blanche*, n°3, p 211-219, 1986.
- [70] SUMER B.M. : "Lift forces on moving particles near boundaries", *J. of Hydraulic Eng.*, Vol 110, n°9, 1984.
- [71] PICART : "Le code disco 2 pour la prédiction du comportement de particules discrètes dans un écoulement turbulent", Thèse de 3ième cycle, Rouen, 1983.
- [72] HINZE J.O. : "Turbulence", Mc Graw Hill, New York, 1959.
- [73] DESJONQUERES : "Modélisation lagrangienne du comportement de particules discrètes en écoulement turbulent", Thèse de l'Université de Rouen, 1987.
- [74] YVERGNIAUX, CHOLLET : "Reconstitution de trajectoires de particules solides sur le base d'un modèle de turbulence", *la houille blanche*, n°3/4, p 283-286, 1989.
- [75] FEUILLEBOIS : "Certains problèmes d'écoulements mixtes fluide-particules solides", Thèse d'état, Paris 6, 1980.
- [76] FEUILLEBOIS, LASEK, SPITZ : "Migration of spherical particles suspended in shear flows", *Euronech* 156, Istanbul, 1982.
- [77] BLONDEAUX : "Sand ripples under sea waves", *J. of Fluid Mech.*, 218, 1-39, 1990.
- [78] LYNE : "Unsteady viscous flow over wavy wall", *J. of Fluid Mech.*, 50, 33-48, 1971.
- [79] SLEATH : "On rolling grain ripples", *J. Hydraul. Res.* 14, p 69-81, 1976.
- [80] BERTELLE, LHISSIER : "Simulation numérique d'une houle de canal", 1ères journées Inter-universitaires Génie Côtier-Génie Civil, 1990.

- [81] BREZINSKI : "Algorithmique numérique", Ellipses, 1988.
- [82] RAVIART, THOMAS : "Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles", Masson, 1983.
- [83] CUVELIER, DESCLOUX, RAPPAZ, STUART, ZWANLEN : "Eléments d'équations aux dérivées partielles pour ingénieurs", Presses polytechniques romandes, 1988.
- [84] PRATAP, SPALDING : "Numerical computation of the flow in curved ducts", Aeronaut. Q., vol 26, p. 219, 1975.
- [85] MAQUET : "Contribution à l'étude de la surstabilité d'une surface libre chauffée par un laser ou un fil chaud", Thèse de l'Université de Rouen, 1987.
- [86] LIGNELET : "Fortran 77", Masson, 1985.
- [87] FAROULT S., SIMON D. : "Fortran structuré et méthodes numériques", Dunod, 1987.
- [88] DARROZES, FRANCOIS : "Mécanique des fluides incompressibles", Springer Verlag, 1982.
- [89] LAURENTIEV, CHABAT : "Effets hydrodynamiques et modèles mathématiques", Editions MIR, 1980.
- [90] JOLLES A. : "Résolution numérique des équations de Navier-Stokes par des méthodes particules maillage", Thèse de l'Université de Paris 6, 1989.
- [91] ANDERSON J.D. : "An introduction to Computational Fluid Dynamics", Lecture Series 1989-02, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1989.
- [92] DICK E. : "Introduction for finite volume techniques in computational fluid dynamics", Lecture Series 1989-02, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1989.
- [93] THOMAS, LOMBARD : "Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids", AIAA Journal, Vol 17, n°10, p 1030-1037, 1979.
- [94] DAVISTER, LEJEUNE, MARCHAL : "Etude des sollicitations et des mouvements tourbillonnaires autour des colonnes d'une plate-forme océanique sous l'action de courants alternés", Bull. Ass. Techn. marit. aeronaut., n° 78, p 291-306, 1978.
- [95] SIDEN, LYNCH : "Wave equation hydrodynamics on deforming elements", Int. J. for Num. Meth. in Fluids, Vol. 8, p 1071-1093, 1988.
- [96] SHIN, MORI : "Numerical computation of 2 dimensional waves behind a hydrofoil", J. Societ. Naval Architect. of Japan, p 17-22, 1988.

- [97] LHISSIER J.F. : "Etude numérique des déformations, ruptures et évaporations de gouttelettes liquides dans un écoulement gazeux", Rapport interne CORIA, Rouen, 1989.
- [98] COMOLET : mécanique expérimentale des fluides (3 tomes), Masson, 1985.
- [99] SCOLAN : "Contribution à l'étude des non-linéarités de surface libre", Thèse de Paris VI, 1989.
- [100] CAHOUEY : "Etude numérique et expérimentale du problème bidimensionnel de la résistance de vagues non-linéaire", Thèse de l'ENSTA, 1984.
- [101] BIESEL ET SUQUET : "les appareils générateurs de houle en laboratoire", la houille blanche, p 147-165, 1951.
- [102] BERTELLE ET LHISSIER : "Simulation numérique d'un canal à houle", 3ème Journées de l'hydrodynamique, Grenoble, 1991.
- [103] TEISSON : "Reculer pour mieux défendre: protection de la plage de galets de Criel/mer", 1ères Journées Génie Civil-Génie Côtier, Le Havre, 1990.
- [104] MEYER ET BAUDOUIN : "Méthodes de programmation", Eyrolles, 1984.
- [105] SUMER, JENSEN ET FREDSOE : "Turbulence in oscillatory boundary layers", Advances in Turbulence, p 556-567, 1986.
- [106] JENSEN, SUMER ET FREDSOE : "Turbulent oscillatory boundary layers at high Reynolds number", Journ. Fluids Mec., 206, p 265-297, 1989.
- [107] SLEATH : "Turbulence oscillatory flow over rough beds", Journ. Fluids Mec., 182, p 369-409, 1987.
- [108] BOUSSINESQ : "Sur la résistance qu'oppose un fluide indéfini en repos, sans pesanteur, au mouvement varié d'une sphère solide ...", C.R.A.S. 100, p 935-937, 1885.
- [109] BASSET : "A treatise on hydrodynamics", Cambridge, 1988.
- [110] OSEEN : "Ueber ein randwertproblem in der hydrodynamik", Ark. Math. Astronom. Fys. 18, n° 17, 1925.
- [111] TCHEN : Doctoral thesis, technical university, Delft, Netherlands, 1947.
- [112] BATCHLOR : "Sedimentation in a dilute dispersion of spheres", J. Fluids Mec., 52, 2, p 245-268, 1972.
- [113] GERMAIN-LACOUR : "Mathématiques et CAO n°3: calcul scientifique", Hermès, 1987.
- [114] "Procédures ALGOL en analyse numérique", Editions du CNRS, 1967.

BIBLIOGRAPHIE

- [115] DREYFUS : "Fortran IV", Dunod, 1975.
- [116] ASTOLFI ET DEVELAY : "La didactique des sciences", P.U.F., 1989.
- [117] ADRIAN : "Wave theory of laser anemometer"
- [118] T.S.I. : "Technical Bulletin TB 25 - An introduction to the laser anemometer"
- [119] ADRIAN, FINGERSON : "LDA data processing".

NOM et PRENOM: BERTELLE Cyrille

TITRE: SIMULATION NUMERIQUE D'UNE HOULE DE CANAL, APPLIQUEE A UN MODELE SIMPLE DE TRANSPORT DE SEDIMENTS.

RESUME: Une méthode est présentée pour simuler numériquement un écoulement visqueux dans un canal à houle. Les équations de Navier-Stokes, sous une formulation vitesse-pression, sont résolues par un schéma de volumes finis. Un maillage structuré et déformable est utilisé: il permet de suivre le déplacement de la surface libre. Une discrétisation de second ordre en espace et une résolution implicite du problème instationnaire sont utilisées. La validité de la méthode est testée par comparaison avec des valeurs expérimentales obtenues par Vélocimétrie Doppler Laser en canal à houle. Un modèle simple de transport de particules, par les champs cinématiques de houle calculés, est ensuite mis en oeuvre. Une étude qualitative des différentes forces prises en compte permet de faire apparaître le rôle de la rotation des particules près du fond dans la remise en suspension des sédiments marins.

MOTS CLES: surface libre - houle - dynamique des fluides numérique - volumes finis - maillage déformable

TITLE: NUMERICAL SIMULATION OF THE SWELL IN A WAVE CHANNEL. APPLICATION TO A SIMPLE MODEL FOR PARTICLES TRANSPORT.

ABSTRACT: A method is presented for the numerical simulation of viscous flows in a wave channel. The Navier-Stokes equations in velocity-pressure formulation are solved by a finite volumes scheme. We use a structured, moving mesh which allows to follow the free surface motion. A second order spatial discretization and a implicit resolution of the transient problem are used. The validity of this method is tested by comparison with Velocimetry Doppler Laser experimental data obtained in a laboratory wave tank. A simple model for particles transport, based on calculated kinematic fields, is tested. A qualitative study of different involved strengths allows to show the importance of particle rotation near the bottom, in the sea sediments levitation phenomenae.

KEYWORDS: free surface - swell - computational fluid dynamic - finite volumes - moving mesh

