Caractérisation globale des étoiles et magnétisme interne le long de leur évolution Intelligence artificielle en support de l'astérosismologie et nouvelles contraintes théoriques pour les champs magnétiques internes

Lisa Bugnet

▶ **To cite this version:**

Lisa Bugnet. Caractérisation globale des étoiles et magnétisme interne le long de leur évolution Intelligence artificielle en support de l'astérosismologie et nouvelles contraintes théoriques pour les champs magnétiques internes. Astrophysique stellaire et solaire [astro-ph.SR]. Université de Paris, 2020. Français. NNT : . tel-03275579

HAL Id: tel-03275579
https://hal.science/tel-03275579

Submitted on 1 Jul 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Paris
École doctorale STEP'UP - ED 560
UMR AIM - Département d'Astrophysique, CEA Saclay

Thèse de doctorat

présentée et soutenue publiquement le 28 Septembre 2020

Spécialité : Physique de l'Univers

par

Lisa Bugnet

Caractérisation globale des étoiles de type solaire et magnétisme interne le long de leur évolution

Intelligence artificielle en support de l'astérosismologie et nouvelles contraintes théoriques pour les champs magnétiques internes

---

Thèse dirigée par

M. Rafael A. García ..... Directeur de recherche cea, umr aim, Directeur
M. Stéphane Mathis ..... Chercheur cea, umr aim, Co-Directeur
Mme. Savita Mathur ..... Tenure track, iac, Co-Encadrante

Jury également composé de :

M. Stéphane Charpinet ..... Chargé de Recherche, irap, Rapporteur
M. Jørgen Christensen-Dalsgaard ..... Professeur, Aarhus University, Examinateur
Mme. Isabelle Grenier ..... Professeure, Université Paris 7, Présidente du Jury
Mme. Yveline Lebreton ..... Professeure, obspm/ipr, Rapporteure
M. Georges Meynet ..... Professeur, Geneva university, Examinateur

Except where otherwise noted, this is work licensed under
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/fr/

"Toutes ces étoiles-là, elles se taisent. Tu auras toi, des étoiles qui savent rire."
Antoine de Saint-Exupéry

Résumé

Les missions spatiales passées CoRoT et *Kepler*, actuellement en vol TESS, et en préparation PLATO permettent l'observation de millions d'étoiles. Dans cette thèse, nous nous intéressons en particulier aux géantes rouges (étoiles de type solaire évoluées). Grâce aux missions spatiales précédemment citées, il a été observé que le cœur de ces étoiles tourne environ dix fois plus rapidement que leur surface. Cependant, les modèles numériques d'évolution stellaire actuels prédisent une rotation beaucoup plus rapide : le cœur devrait tourner environ cent fois plus vite que la surface de l'étoile. Nous devons donc identifier le ou les mécanismes permettant d'évacuer efficacement le moment cinétique du cœur des étoiles de type solaire évoluées, une problématique qui est partagée par les étoiles de tout type pour tous les stades évolutifs.

Dans ce contexte, des mesures très précises des paramètres stellaires globaux (comme la gravité de surface ou la masse) sont nécessaires pour contraindre au mieux les modèles d'évolution stellaires. L'étude des modes propres d'oscillation des étoiles (astérosismologie) joue un rôle clé car cette méthode permet l'estimation des paramètres stellaires avec une excellente précision. En revanche, cette précision n'est obtenue que lorsque les données sont peu bruitées et dans lesquelles les signaux des oscillations des étoiles sont bien visibles. En combinant les techniques classiques d'analyse photométrique et des algorithmes d'intelligence artificielle, nous obtenons dans le premier volet de cette thèse une meilleure estimation de la gravité de surface des étoiles de type solaire. Nous apportons en particulier des estimations précises de la gravité de surface lorsque l'astérosismologie standard atteint ses limites. Les étoiles de type solaire sont extraites de l'ensemble des données du satellite *Kepler* par un premier algorithme d'intelligence artificielle, et caractérisées par un second. Nous obtenons finalement les valeurs de gravité de surface des étoiles de type solaire avec une précision de 0.04 à 0.1 dex, entre la séquence principale (fusion de l'hydrogène dans le cœur) et les phases de géantes (fusion de l'hydrogène en couche et/ou de l'hélium dans le cœur), et ce directement à partir de la densité de puissance lumineuse moyenne émise par l'étoile. Ces étoiles bien caractérisées peuvent ensuite être étudiées plus en détail pour améliorer notre compréhension du transport de moment cinétique interne dans les étoiles de type solaire le long de leur évolution.

Nous recherchons ensuite d'éventuelles signatures du phénomène de transport de moment cinétique actif dans les intérieurs stellaires dans les fréquences d'oscillation des étoiles de type solaire évoluées. Les champs magnétiques font partie des candidats les plus prometteurs pour expliquer le transport efficace observé. Les étoiles de masse intermédiaire (entre 1.1 et 3 masses solaires) sont connues pour développer un coeur convectif durant la séquence principale, qui peut générer un champ magnétique dynamo, relaxant dans l'intérieur radiatif sous forme d'un champ fossile et persistant durant le reste de l'évolution de l'étoile. Un tel champ magnétique devrait affecter les fréquences des modes d'oscillation mixtes acoustiques et de gravité des étoiles de masse intermédiaire évoluées étudiées dans cette thèse. Nous développons théoriquement la signature d'une telle configuration réaliste de champ magnétique fossile sur les fréquences des oscillations, en fonction de la masse, de la métallicité et de l'âge de l'étoile. Nous dérivons également une étude asymptotique complète, rendant possible l'inversion des données astérosismiques pour l'estimation des amplitudes des champs magnétiques internes. Nous estimons finalement l'efficacité d'un tel champ magnétique pour transporter le moment cinétique à l'intérieur des étoiles de type solaire.

Mots-clefs : astérosismologie - étoiles : intérieurs, évolution, oscillations, rotation et champ magnétique - méthodes : analyse de données, intelligence artificielle, modélisation et théorie des oscillations stellaires

Characterization of solar-type stars and study of their internal magnetic fields along the evolution
Machine learning for asteroseismology and theoretical constraints for internal magnetic fields

Abstract

Previous space missions CoRoT and *Kepler*, current mission TESS, and mission in preparation PLATO allow the observation of millions of stars. In this thesis, we are particularly interested in red giants (evolved solar-type stars). One of the ≪ legacy ≫ results of the *Kepler* mission is the interestingly low rotation rate of the core of subgiant (SG) and red giant (RG) stars, which is about 10 times lower than predicted with the current theory for the transport of angular momentum by purely hydrodynamical mechanisms. This discrepancy points out an order of magnitude issue concerning the understanding of the evolution of the stellar angular momentum in evolved Solar-like stars, a very ubiquitous problem shared by stars of all types and ages.

In this context, high-precision in the observables (such as surface gravity) is needed for stellar models results to be reliable. High-precision asteroseismology is a key player because it provides us with global stellar parameters with unprecedented precision and accuracy. However, asteroseismology is only efficient for stars that present a good signal-to-noise ratio with visible oscillation modes in their power spectrum density. By combining classical asteroseismology and innovative tools such as machine learning, we first focus on the better characterisation of the surface gravity for solar-type pulsators, including those that do not present detectable oscillations in their spectra. With Random Forest machine learning algorithms, solar-type stars observed by *Kepler* and TESS are classified among the different type of pulsating stars, and surface gravities of solar-type pulsators observed by *Kepler* ranging from 0.1 to 4.6 dex are estimated directly from the global power of the granulation with very small uncertainties of 0.04 to 0.1 dex. With the sample of well-characterised evolved Solar-like stars it will then be possible to conduct precise asteroseismic analyses to improve our understanding of angular momentum transport along the stellar evolution.

To lead this work, we first theoretically seek for a missing process taking place inside the core of RG stars to efficiently extract angular momentum from the core to the surface. Internal magnetic fields are one amongst the most serious candidates that are currently studied to solve the problem. Stars more massive than ~ 1.1 Ms are known to develop a convective core during the main-sequence : the dynamo process due to this convection could be the origin of a strong magnetic field, trapped inside the core of the star for the rest of its evolution. Such magnetic fields should impact mixed modes inside the core of RG stars, and their signature should be visible in asteroseismic data. To unravel which constraints can be obtained from these observations, we theoretically investigate the effects of a plausible mixed axisymmetric magnetic field with various amplitudes on the mixed-mode frequencies of red giants. Applying a perturbative method, we estimate the magnetic splitting of the frequencies of simulated mixed dipolar modes that depends on the magnetic field strength and its configuration. A complete asymptotic analysis is derived, showing the potential of asteroseismology to probe the magnetism at each depth as this is done for stellar rotation. The effects of the mass and the metallicity of the stars are also explored. Finally, we infer an upper limit for the strength of the field and the associated lower limit for the timescale of its action to redistribute angular momentum in stellar interiors.

Keywords : asteroseismology - stars : interiors, evolution, oscillations, magnetic field and rotation - methods : data analysis, machine learning, stellar oscillation modelling and theory

Remerciements

J'écris ces quelques pages avec grand plaisir, à la pensée de pouvoir mettre en lumière les personnes qui m'ont accompagnées dans l'ombre tout au long de mon parcours.

Bien évidemment, je remercie chaleureusement Rafa : pour m'avoir donné ta confiance alors que tu ne recherchais pas à encadrer un nouvel étudiant cette année là, pour ton soutien, et pour le grand partage scientifique dont tu as fait preuve. Rafa, je te remercie également bien sûr pour ta bonne humeur au quotidien, pour le partage de ta culture espagnole, et pour ton esprit d'équipe. Travailler avec toi sur les données astérosismiques fut très enrichissant scientifiquement, et un véritable plaisir. Je garde précieusement en mémoire les quelques conférences que nous avons partagé.

Toute ma gratitude revient à Stéphane : pour ton investissement immense dans nos projets, pour ta confiance sans faille, et pour ton amitié. J'ai débuté ma thèse effrayée par les études théoriques, et grâce à ta patience je la termine pleine d'envie d'en apprendre encore et d'ajouter toujours plus à ma collection dans le grand cahier. Ton aide précieuse n'est pas uniquement scientifique, elle dépasse les frontières du laboratoire : merci de me donner les moyens de rencontrer et connaître plus de membres de la communauté, et ainsi me donner les clefs pour réussir.

Enfin, je tiens à remercier Savita, qui a suivi ma thèse à distance depuis les Canaries mais qui a toujours été présente scientifiquement pour enrichir les débats. Je te remercie notamment pour tes relectures très poussées, les suggestions scientifiques, et tes enseignements de l'anglais sur les publications qui ont grandement amélioré mes travaux.

Je remercie Mme Yveline Lebreton et Mr Stéphane Charpinet pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, malgré la situation actuelle et les cours délais imposés par la pandémie. Je remercie également leur soutien et retours très positifs sur mes travaux. Je remercie Mme Isabelle Grenier qui préside mon jury, ainsi que Mr Jørgen Christensen-Dalsgaard et Mr Georges Meynet pour leur présence à distance et relecture en tant qu'examinateurs.

Mon doctorat n'aurait pas pu se dérouler dans de meilleures conditions grâce au Département d'Astrophysique du CEA, et à sa direction par Anne Decourchelle, Pascale Delbourgo, et Philippe Ferrando. Je remercie bien entendu Sacha Brun pour sa gestion du laboratoire LDE3 et pour son accueil chaleureux. Je remercie mes collègues qui ont partagé leur science et leurs repas durant ces trois années. En particulier : Mansour Benbakoura pour son amitié construite dans le bureau au fond du couloir, Antoine Strugarek pour sa sagesse et les discussion BD/jeux et Sylvain Breton pour avoir partagé au quotidien ma dernière année de thèse. Je remercie également Alessandra Tonazzo, Yannick Giraud-Héraud et Christophe Balland de l'école doctorale STEP'UP pour leurs suivis, enseignements et conseils. Merci à Emeric Le Floc'h ainsi qu'à Joao Marques pour le suivi de mes trois années de thèse.

Merci également à mes collaborateurs, en particulier à Vincent Prat, Kyle Augustson et Guy Davies. Une pensée également pour Michael J. Thompson qui aurait du faire partie du voyage.

Je tiens à souligner le grand rôle qu'ont joué les personnes rencontrées lors de mes études à l'École Normale Supérieure de Paris, aussi bien la direction du département de Géosciences en la personne d'Éric Calais, que les nombreux chercheurs enseignants nos cours, ainsi que l'irremplaçable Micheline au secrétariat. Je remercie en particulier Sabrina Speich pour m'avoir suivi lors de mes études, pour avoir accepté mon choix d'orientation à l'issu du M1, et pour ses nombreuses recommandations qui m'ont aidé à avancer. Je remercie chaleureusement Sébastien Charnoz pour son encadrement lors des mes débuts en stage. Ta bonne humeur et ta passion sont contagieuses, et m'ont permis de me projeter dans ce métier. Merci à David Stevenson pour son accueil à CalTech.

Je remercie grandement la fondation l'Oréal, l'UNESCO, et les membres de l'Académie des Sciences de m'avoir attribué un prix *Jeunes talents* pour mes travaux de thèse. Ce prix m'a apporté de la visibilité sur mes travaux, et m'a beaucoup aidé dans ma recherche d'un contrat post-doctoral. Je remercie Pascale Delbourgo pour m'avoir incitée à candidater, et pour ses conseils précieux. Merci également aux personnes ayant relu mon dossier : Sylvaine Turc-Chièze, Rafa, Stéphane, Savita. Un immense merci à Jørgen Christensen-Dalsgaard pour sa recommandation lors de ma candidature, ainsi que pour les nombreuses autres qui ont suivi. Je remercie le service de communication de l'Irfu, et en particulier Sophie Kerhoas pour avoir donné à ce prix une grande visibilité au sein du CEA et en dehors.

En grand merci à Cécile Drai, Clara Marchetti et Odile Blanchet (La Cie les Faits d'âmes) pour leur enseignement en communication théâtrale durant plusieurs mois dans le cadre du concours « Ma thèse en 180 secondes » au sein de l'Université de Paris. Je remercie également les organisateurs de la demi-finale nationale pour nous avoir permis d'échanger durant un week-end avec des doctorants de toutes disciplines partout en France. Je remercie chaleureusement Pascale Delbourgo et Michel Talvard pour m'avoir soutenue dans ce projet annexe à ma thèse. Je remercie les membres du LDE3 pour avoir fait le déplacement jusqu'à l'évènement !

Je remercie l'Université Paris-Saclay et l'école Polytech' Paris Sud pour m'avoir permis d'enseigner les mathématiques et me donner goût à l'enseignement. L'association Française d'Astronomie pour m'avoir permis de partager lors de soirées observations dans les jardins de Paris, et pour leur invitation à participer aux évènements grand public. Merci à l'Observatoire de Paris pour l'organisation de la soirée « Étoiles en scènes » et pour m'avoir poroposé de participer. Merci à Hervé Dole pour m'avoir fait monter à bord de l'équipage de la soirée Big Bang aux Big Bands ». Merci à toutes les personnes qui m'ont invité aux évènements grand public malheureusement annulés par la pandémie de la Covid-19.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui me sont chères. Cette thèse est dédiée à mes parents. Pour leur amour, leur soutien, leur présence à chaque instant. À mon père qui m'a transmis sa passion, et à ma mère qui nous as suivi dans l'aventure. À ma petite sœur que j'admire. À mes grand parents qui s'intéressent à mon drôle de métier. À mes grands amis qui ont pris le même bateau ; Amaël, Floriane, Elena, Cyril, Cécile, Maude et Clémence.

À la plus belle étoile de mon ciel.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé iii

Remerciements v

Sommaire vi

1 Comprendre les étoiles, depuis leur surface jusqu'à leur cœur 1
- 1.1 Les ondes sismiques : reconstruire l'invisible . . . 2
  - 1.1.1 La sismologie planétaire . . . 2
  - 1.1.2 Les vibrations des étoiles . . . 4
- 1.2 L'évolution de la physique stellaire . . . 6
  - 1.2.1 La découverte de l'Héliosismologie . . . 6
  - 1.2.2 La révolution astérosismique : de l'hydrostatique à la compréhension dynamique des étoiles . . . 7
  - 1.2.3 La communauté astérosismique au tournant face à l'immense quantité de données : le besoin de méthodes d'analyse automatisées . . . 8
- 1.3 Avancées scientifiques majeures grâce à l'astérosismologie et problématiques associées . . . 9
  - 1.3.1 Dater précisément la formation des étoiles de faible masse . . . 9
  - 1.3.2 Le transport de moment cinétique dans les étoiles de faible masse . . . 11
  - 1.3.3 Comprendre la dynamique interne des étoiles . . . 13
- 1.4 Enjeux de la thèse . . . 15
- 1.5 Méthode de travail . . . 17
- 1.6 Organisation du manuscrit . . . 17

2 Evolution stellaire et magnétisme des étoiles de faible masse 19
- 2.1 Évolution structurelle des étoiles de faible masse et de masse intermédiaire et paramètres globaux associés . . . 21
  - 2.1.1 Diagramme d'évolution stellaire de Hertzsprung-Russell . . . 21
  - 2.1.2 Effondrement du nuage moléculaire, chemin de Hayashi et pré-séquence principale (PMS) . . . 22
  - 2.1.3 Séquence principale (MS) . . . 24
  - 2.1.4 Phase des sous-géantes (SG) . . . 27
  - 2.1.5 Branche des géantes rouges (RGB) . . . 27
  - 2.1.6 Branche horizontale ou Clump (RC) . . . 30
  - 2.1.7 Branche asymptotique (AGB) . . . 32
  - 2.1.8 Fin de vie . . . 34
  - 2.1.9 Reconnaissance des stades évolutifs par l'estimation des paramètres physiques globaux . . . 34
- 2.2 Plasmas magnétisés : origine et évolution des champs magnétiques stellaires . . . 35
  - 2.2.1 Principe général de l'effet dynamo . . . 36
  - 2.2.2 La dynamo magnétique dans les zones convectives . . . 40
  - 2.2.3 La relaxation et la dissipation des champs magnétiques fossiles dans les régions radiatives stellaires . . . 45

2.2.4 Le magnétisme des zones radiatives . . . 47
2.3 Biographie stellaire magnétisée : scénario des champs fossiles . . . 54
2.3.1 La variété de stabilité vis-à-vis de la convection des étoiles de faible masse et de masse intermédiaire vue par les diagrammes de Kippenhahn . . . 54
2.3.2 Formation stellaire et dynamo magnétique (BD1) . . . 55
2.3.3 La PMS et l'apparition du premier champ fossile (BF1) . . . 56
2.3.4 La séquence principale pour les étoiles de type solaire : Champ fossile interne (BF1) et dynamo (BD1,BD2) . . . 57
2.3.5 La phase des sous-géantes : champs fossiles (BF1, BF2) et dynamo (BD1) . . . 58
2.3.6 La RGB : dynamo convective (BD1) et champ fossile (BF) . . . 59
2.3.7 Étapes évoluées et fin de vie . . . 59

3 Oscillations stellaires et magnétisme des étoiles de faible masse 61
3.1 Théorie des oscillations . . . 61
3.1.1 État d'équilibre . . . 62
3.1.2 Perturbation par les oscillations . . . 63
3.1.3 Première intuition sur la nature des modes d'oscillation des étoiles et relations de dispersion associées . . . 64
3.1.4 Solutions générales . . . 66
3.2 Solution générale des modes d'oscillation et points tournants . . . 68
3.2.1 Solution simplifiée correspondant aux ondes fortement oscillantes . . . 68
3.2.2 Cavités de résonance et points tournants . . . 70
3.2.3 Expression asymptotique des modes acoustiques . . . 71
3.2.4 Expression asymptotique des modes de gravité . . . 72
3.2.5 Les modes mixtes . . . 74
3.2.6 Fréquence et amplitude des modes d'oscillation . . . 78
3.3 Paramètres stellaires globaux et lois d'échelle astérosismiques . . . 80
3.4 Les oscillations pour sonder le profil de rotation différentielle . . . 81
3.4.1 Effet de la rotation sur les motifs des oscillations dans la PSD . . . 81
3.4.2 Le profil de rotation interne grâce aux modes mixtes . . . 83
3.5 La quête du magnétisme interne . . . 88
3.5.1 Les amplitudes anormalement faibles de certains modes mixtes dipolaires . . . 88
3.5.2 État de l'art sur la recherche de magnétisme interne aux étoiles . . . 92

I DE NOUVELLES MÉTHODOLOGIES POUR LA CARACTÉRISATION AUTOMATIQUE DES ÉTOILES 97

4 FliPer : une nouvelle méthode pour estimer automatiquement la gravité de surface des étoiles de type solaire 99
4.1 La gravité de surface et mesures associées . . . 100
4.1.1 Mesures physiques et incertitudes associées . . . 100
4.1.2 La granulation comme proxy de la gravité de surface . . . 102
4.1.3 La métrique Flicker et son domaine d'applicabilité . . . 105
4.2 FliPer : une nouvelle métrique pour l'estimation de la gravité de surface des étoiles de faible masse . . . 106
4.2.1 Évolution de la PSD d'une étoile de type solaire au long de l'évolution . . . 106
4.2.2 Définition et évaluation des paramètres FliPer . . . 108
4.2.3 Données utilisées . . . 109
4.2.4 Limitation de $f_{\rm min}$ . . . 109
4.2.5 Estimation du bruit de photon P_n . . . 110
4.2.6 Estimation de FliPer pour $f_{\rm min} = 0.7$ μHz . . . 111
4.2.7 Premiers résultats . . . 111

4.3 Automatisation : une Forêt Aléatoire pour l'estimation de la gravité de surface **113**
4.3.1 Vers une mesure automatisée de la gravité de surface **114**
4.3.2 Introduction à l'intelligence artificielle surpervisée **115**
4.3.3 Les arbres de décision pour la régression **115**
4.3.4 Méthode d'ensemble de Forêts Aléatoires pour la régression **116**
4.4 L'algorithme FliPer pour l'estimation automatique de la gravité de surface des étoiles de faible masse **117**
4.4.1 Paramètres X utilisés **117**
4.4.2 Étape d'entraînement **119**
4.4.3 Étape de test des performances de l'algorithme **120**
4.4.4 Résultats obtenus par l'algorithme FliPer **120**
4.4.5 Conclusion **122**

5 FliPer$_{\rm Class}$: Vers une détection automatique des étoiles de type solaire 143
5.1 Représentation spectrale des pulsateurs stellaires et méthodes de reconnaissance **145**
5.1.1 Présentation des pulsateurs stellaires étudiés **145**
5.1.2 Reconnaissance des étoiles variables **149**
5.2 FliPer$_{\rm Class}$: une Forêt Aléatoire pour la classification automatique des étoiles pulsantes . . **151**
5.2.1 Arbre individuel de classification **151**
5.2.2 Forêt Aléatoire de classification **152**
5.2.3 Estimation du taux d'erreur de classification **153**
5.2.4 Calibration de l'algorithme : estimation des probabilités d'appartenance des étoiles aux différentes classes **153**
5.3 Détection des étoiles de type solaire observées lors de la mission *Kepler* **154**
5.3.1 Données utilisées **154**
5.3.2 Paramètres et entraînement de FliPer$_{\rm Class}$ **155**
5.3.3 Performances et résultats **159**
5.3.4 Classification binaire de $\sim 160\,000$ étoiles observées par *Kepler* **163**
5.4 Classification des différents types d'étoiles variables observées par *Kepler* **166**
5.4.1 Données utilisées **166**
5.4.2 Paramètres, hyperparamètres, et entraînement de FliPer$_{\rm Class}$ pour la classification des pulsateurs observés par *Kepler* **166**
5.4.3 Performances et résultats **167**
5.4.4 Classification des étoiles observées par *Kepler* **171**
5.5 Préparation de l'analyse des données de la mission TESS : classification d'étoiles simulées . **173**
5.5.1 Quelques vérifications supplémentaires à partir des données de *Kepler* **173**
5.5.2 Classification des données simulées de TESS **177**
5.6 Conclusions & Perspectives **180**

II IMPACT D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE INTERNE SUR LES FRÉQUENCES DES MODES D'OSCILLATION DES ÉTOILES DE TYPE SOLAIRE **195**

6 Étude théorique de l'impact d'un champ magnétique axisymétrique sur les fréquences des modes propres d'oscillation des étoiles de faible masse 197
6.1 Impact d'un champ magnétique interne sur les fréquences d'oscillation des modes mixtes : étude perturbative **199**
6.1.1 Détermination de la topologie et de l'amplitude du champ magnétique utilisé, ainsi que du profil de rotation interne de l'étoile **199**
6.1.2 État d'équilibre **202**
6.1.3 Forces perturbatrices **202**
6.1.4 Développement au premier ordre **203**
6.1.5 Expression des termes composants la perturbation fréquentielle **203**

6.1.6 Limites de validité de la théorie perturbative . . . 204
6.2 Évaluation de l'impact magnétique sur les fréquences des modes mixtes . . . 205
6.2.1 Perturbation des fréquences des modes d'oscillation d'une géante rouge typique ($M_\star = 1.5\mathrm{M}_\odot$, Z=0.02, $\nu_{\max}\sim 170\mu$Hz) . . . 206
6.2.2 Caractérisation de l'asymétrie du multiplet . . . 209
6.2.3 Détectabilité de l'asymétrie magnétique . . . 210
6.2.4 Diagrammes échelle corrigés . . . 212
6.2.5 Évolution de la signature magnétique au cours de l'évolution le long de la RGB . . . 214
6.2.6 Évolution de la signature magnétique et détectabilité durant la phase des sous-géantes . . . 216
6.3 Transport de moment cinétique associé au magnétisme interne . . . 217
6.4 Dépendance de la signature magnétique aux paramètres stellaires . . . 221
6.4.1 Dépendance de la signature magnétique à la masse de l'étoile . . . 221
6.4.2 Dépendance de la signature magnétique à la métallicité de l'étoile . . . 221
6.5 Discussion sur les amplitudes des modes . . . 222
6.6 Ouverture sur la classification observationelle automatique des étoiles présentant des modes mixtes de faibles amplitudes . . . 224
6.6.1 Principe de la méthode . . . 226
6.6.2 Construction des imagettes . . . 227
6.6.3 Premiers résultats . . . 229
6.7 Conclusions & Perspectives . . . 231

7 Analyse asymptotique de la signature du magnétisme interne sur les fréquences des modes mixtes 261
7.1 Rappels sur la théorie asymptotique des modes d'oscillation mixtes . . . 262
7.1.1 Déplacement asymptotique des modes à basses fréquences . . . 262
7.1.2 Déplacement asymptotique des modes à hautes fréquences . . . 263
7.2 Premières expressions asymptotiques pour la description des perturbations magnétiques dans les géantes rouges . . . 263
7.2.1 Perturbations magnétiques sur les modes g . . . 263
7.2.2 Perturbations magnétiques sur les modes p . . . 264
7.2.3 Interprétation des signatures magnétiques sur les fréquences des modes mixtes . . . 265
7.3 Expressions asymptotiques pour l'inversion des champs internes . . . 266
7.3.1 Expression asymptotique de la signature magnétique sur les modes g . . . 266
7.3.2 Expression asymptotique de la signature magnétique sur les modes p . . . 266
7.3.3 Expression asymptotique de la signature magnétique sur les modes mixtes . . . 267
7.3.4 Le potentiel d'inversion des champs magnétiques internes par les modes mixtes . . . 268
7.4 Conclusions & Perspectives . . . 269

8 Conclusions & Perspectives 283
8.1 Conclusions de nos travaux . . . 283
8.2 Perspectives : la synergie entre analyse observationnelle et caractérisation théorique pour la compréhension des étoiles de type solaire. . . . 289
8.2.1 Extension de la métrique FliPer aux données de K2, TESS et PLATO pour la caractérisation globale des étoiles . . . 289
8.2.2 Extension de la recherche théorique de la perturbation magnétique sur les fréquences des modes mixtes à différentes topologies de champs . . . 291
8.2.3 La détection des signatures magnétiques sur les fréquences observées des modes mixtes . . . 292

A Calibration manuelle de l'algorithme FliPer 295

B Termes non-nuls composant le travail de la force de Lorentz 299
B.0.1 Termes poloidaux . . . 299

B.0.2 Termes toroidaux **299**

Bibliographie **301**

CHAPITRE 1

COMPRENDRE LES ÉTOILES, DEPUIS LEUR SURFACE JUSQU'À LEUR CŒUR

Les étoiles sont d'immenses boules de gaz ionisées, autogravitantes, lieux des réactions thermonucléaires à l'origine des éléments chimiques, depuis l'hélium jusqu'au fer, dans l'Univers. Depuis les amas de galaxies jusqu'aux grains de poussières constituant le milieu interstellaire, de nombreuses questions restent ouvertes à toutes les échelles spatiales et temporelles.

Les étoiles ne contiennent que quelques pourcents de la masse des galaxies dans lesquelles elles évoluent (e.g. Mitchell et al., 2013), la majorité de la masse étant attribuée à la matière noire (e.g. Read, 2014, pour une mesure locale de la matière noire autour du Soleil). Les étoiles dirigent cependant en grande partie la dynamique de la galaxie et son évolution par le biais des échanges avec le gaz environnant (Saslaw & C., 1985), par leur taux de formation (Larson & Tinsley, 1978) et par la création et la redistribution des éléments chimiques qui enrichissent la galaxie (e.g. Matteucci, 2010). L'étude observationnelle des galaxies est cependant globalement réduite aux mouvements d'ensembles, à cause de leur éloignement et du faible signal lumineux qui nous parvient. Ainsi, depuis la Terre, la voie Lactée et les nuages de Magellan sont les seules galaxies dans lesquelles nous pouvons étudier individuellement un grand nombre d'étoiles, par l'estimation de leur masse, âge, vitesse de déplacement dans la galaxie, et composition photosphérique. En estimant les âges des étoiles à différentes distances dans notre galaxie, il est par exemple possible de retracer l'évolution à grande échelle de la Voie Lactée, et de dater d'anciennes collisions (e.g. Chaplin et al., 2020). Ainsi, comme laboratoire de l'évolution des compositions chimiques des étoiles et de leur dynamique au sein des disques galactiques (archéologie galactique par exemple grâce à la gyrochronologie, e.g. Skumanich, 1972; Kawaler, 1989; Barnes, 2003, 2007; Angus et al., 2018), notre galaxie est très précieuse pour la compréhension de la structure des disques galactiques en général (e.g. Freeman & Bland-Hawthorn, 2002; Rix & Bovy, 2013; Xiang et al., 2018).

Par ailleurs, les étoiles sont pour la majorité d'entre elles hôtes de systèmes planétaires, comprenant une ou plusieurs planètes (e.g. Batygin & Laughlin, 2015). La dynamique orbitale des systèmes, la survie des planètes et les conditions thermodynamiques à leur surface sont très fortement reliées à l'état évolutif, la masse, et la dynamique de l'étoile centrale (e.g. Benbakoura et al., 2019). La physique stellaire apporte non seulement des contraintes sur les grandes structures mais également des connaissances sur l'environnement qui les entoure, permettant de conditionner par exemple l'habitabilité à la surface d'une planète (Gillon et al., 2017) [1]. La zone d'habitabilité d'une planète autour d'une étoile F est plus large et plus lointaine que celle du Soleil, alors que celle autour des étoiles de type K et M est plus restreinte et plus proche de l'étoile (Kasting et al., 1993). Une fois la planète formée et stabilisée, l'observation de l'étoile hôte et l'estimation de ses paramètres fondamentaux permet de caractériser le système étoile-planète dans son ensemble, par l'estimation des masses, âges et rayons

1. L'habitabilité d'une planète est caractérisée en première approximation par la plage de distance orbitale autour de l'étoile centrale pour laquelle la planète peut avoir de l'eau liquide à la surface et une atmosphère similaire à celle de la Terre.

de l'étoile et de la planète. La caractérisation de l'étoile hôte est donc cruciale pour la caractérisation des systèmes planétaires (e.g. Gandolfi et al., 2018; Huber et al., 2019).

L'arrivée des données de la mission *Gaia* lancée en 2013 (Agence Spatiale Européenne (ESA) ; Barstow et al., 2014; Prusti, 2017), renseignant sur les positions, vitesses et parallaxes d'environ un milliard d'étoiles dans la Voie Lactée (e.g. Gaia et al., 2016), a grandement amélioré nos connaissances sur la dynamique du disque galactique, en enrichissant les modèles chimico-dynamiques de la galaxie (e.g. Minchev et al., 2016). Dans le même temps, *Gaia* réalise une analyse photométrique permettant une estimation de la température effective et des couleurs des étoiles observées, avec un très grand apport pour la caractérisation des systèmes planétaires et de leur habitabilité (e.g. Johns et al., 2018). L'estimation précise des paramètres stellaires pour comprendre la structure et la dynamique des étoiles de la Voie Lactée reste difficile, en grande partie à cause de la difficulté d'observation de la grande diversité de magnitudes et de caractéristiques stellaires. Par exemple, les deux satellites *Kepler* et TESS qui observent des étoiles de notre galaxie ne sondent pas le ciel à la même distance : *Kepler* a observé des étoiles avec une grande magnitude dans le ciel, alors que TESS observe les étoiles plus proches de nous avec une luminosité apparente en moyenne 100 fois supérieure que les étoiles observées par *Kepler*. Pour chaque instrument, une population d'étoiles est donc ciblée. Selon les caractéristiques du détecteur, et le temps d'observation d'une même cible en continu, la dynamique interne des étoiles peut ou non être dévoilée (e.g. Mosser et al., 2012b; Deheuvels et al., 2015; Benomar et al., 2015). De plus, le satellite *Kepler* a permis l'estimation de la rotation de surface d'étoiles (e.g. García et al., 2014a; Ceillier et al., 2017, pour les étapes évolutives de la séquence principale, pour les« sous-géantes » et « géantes rouges » qui seront présentées dans le chapitre 2). Que ce soit pour la dynamique interne ou de surface, cette estimation est beaucoup plus compliquée avec les données des missions K2 ou bien TESS qui observent les étoiles moins longtemps.

Enfin, pour les étoiles à faible luminosité, la spectropolarimétrie visant à estimer les amplitudes des champs magnétiques de surface ne fonctionne pas (e.g. Leone, 2007) : leur magnétisme de surface est plus difficilement accessible que pour des étoiles plus brillantes (pour la plupart inaccessibles avec *Kepler*). De nombreux phénomènes dynamiques observés chez certaines étoiles restent totalement ou partiellement incompris, depuis le cycle magnétique du Soleil et sa rotation interne, jusqu'au transport de moment cinétique dans les étoiles et au magnétisme des naines blanches.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la « révolution astérosismique » qui prend place dans la communauté stellaire depuis une vingtaine d'années. La sismologie extra-terrestre qui sera détaillée dans la section suivante apporte les deux ingrédients manquants pour la compréhension des étoiles et de leur environnement : obtenir des paramètres stellaires précis (Lebreton et al., 2014b), et la possibilité de sonder la dynamique interne des étoiles, dans notre cas grâce à l'astérosismologie qui sera définie dans la section 1.2.2 (e.g. Aerts et al., 2010).

1.1 Les ondes sismiques : reconstruire l'invisible

Nous choisissons de revenir aux fondamentaux des études en sismologie afin de mieux placer le cadre de la sismologie stellaire qui est le fil rouge de cette thèse. Nous résumons ainsi dans cette première section les avancées majeures réalisées en sismologie terrestre et extra-terrestre depuis la découverte de la sismicité des astres.

1.1.1 La sismologie planétaire

Les mouvements de la croûte terrestre et les ondes sismiques qui en résultent sont propres à notre planète et à sa surface rigide et cassante : la sismologie terrestre est caractérisée par des évènements ponctuels, de faible amplitude (quelques centimètres voire quelques mètres), mesurables localement par des sismomètres. La sismologie terrestre n'est pas seulement connue aujourd'hui pour être la science des tremblements de Terre

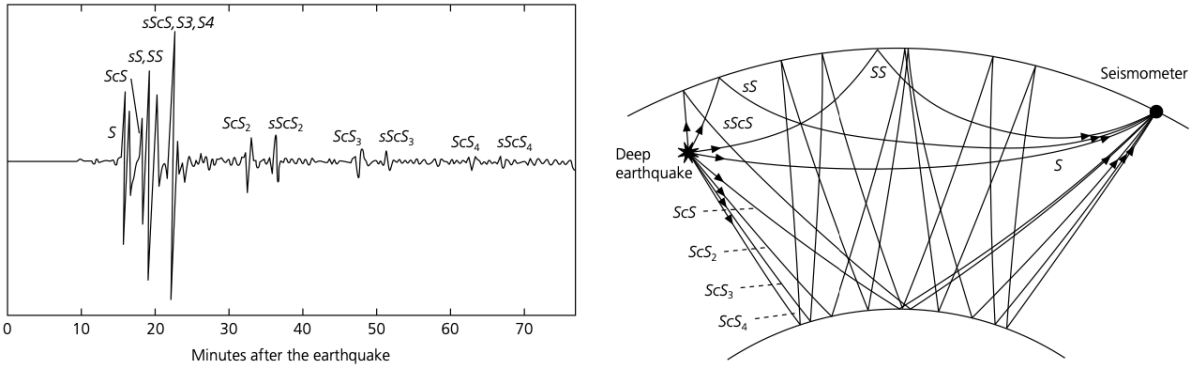


FIGURE 1.1: Propagation des ondes sismiques provoquées par un tremblement de Terre profond au royaume de Tonga enregistré à Hawaii. Les réflections sur le cœur affectent le temps de propagation des ondes et nous renseignent sur la profondeur de la frontière. Crédits : Stein & Wysession (2003).

localisés et de leurs impacts sur les territoires et les populations. C'est aussi et surtout la compréhension des ondes sismiques qui, en se propageant à l'intérieur de la Terre, nous renseignent sur le milieu qu'elles traversent (voir figure 1.1). Grâce à cette sismologie moderne ondulatoire, en grande partie créée et dirigée par le Professeur John Milne entre 1880 et 1920, la structure interne de la planète Terre avec ses composantes liquides, visqueuses, et plastiques, s'est peu à peu dévoilée (e.g. Agnew, 2002). Ainsi, nous devons à la sismologue Lehmann la découverte en 1936 (Lehmann, 1936) du noyau terrestre interne. Cette découverte est confirmée des années plus tard par le modèle de propagation des ondes sismiques PREM (Preliminary Reference Earth Model, Dziewonski & Anderson, 1981), qui ajoute la caractéristique solide de la graine interne et estime sa densité à environ $13\,000$ kg/m^3. Ce cœur est aujourd'hui suspecté de tourner en rotation différentielle anisotrope (Tromp, 2001). Les couches intermédiaires formant le manteau terrestre sont nombreuses, et la complexité de nos connaissances sur l'intérieur terrestre ne cesse d'augmenter.

La sismologie spatiale permet de la même façon de caractériser l'intérieur des corps de notre système solaire. Lors des missions Apollo (Paine et al., 1969), quatre sismomètres ont été déposés à la surface de la Lune (voir la figure 1.2 panneau de droite pour les sites d'atterrissage des missions Apollo à l'origine des mesures sismiques, Latham et al., 1969). Ils ont enregistré 28 séismes de surface, et pas moins de 11000 petits tremblements venus des profondeurs, suspectés d'être provoqués par les forces de marées s'exercant entre la Terre et la Lune (e.g. Watters et al., 2019, voir la figure 1.2). L'étude de ces séismes a permis une meilleure compréhension de la structure interne de la Lune, dont on connaît désormais la présence d'un noyau interne solide (voir figure 1.3). Les autres corps telluriques du système solaire ont peu à peu été étudiés sismiquement, en commençant par la planète Mars avec les deux attérisseurs Vikings (NASA, Anderson et al., 1977) équipés de sismomètres qui n'ont malheureusement pas détecté de signaux sismiques. La mission Mars 96 (Russian Space Forces, Zakharov & V., 1994) n'a pas eu plus de chance, et a été perdue après le décollage. Les espoirs sont placés désormais dans la sonde Insight (NASA, Lognonne et al. (2014); Lognonné et al. (2019)) qui a atterri sur Mars le 26 novembre 2018, et qui a enregistré quelques centaines d'évènements sismiques durant la première année de la mission (Witze, 2019). Les premiers résultats montrent une activité sismique Martienne (intensité et fréquence) entre celle de la Terre (très active) et celle de la Lune (peu active Giardini et al., 2020)).

Les corps telluriques ne sont pas les seuls à produire et à être le siège d'ondes sismiques : c'est également le cas des planètes gazeuses (Gaulme et al., 2014) et des étoiles (nous nous référons à la la revue « Extraterrestrial seismology » de Tong & García, 2015). Les odnes dans les anneaux de Saturne reflète la stratification interne de la planète (Fuller et al., 2014; Mankovich et al., 2019), et Jupiter est également le siège d'ondes sismiques (la sismologie dite « Jovienne », Bercovici & Schubert, 1987; Gaulme et al., 2011).

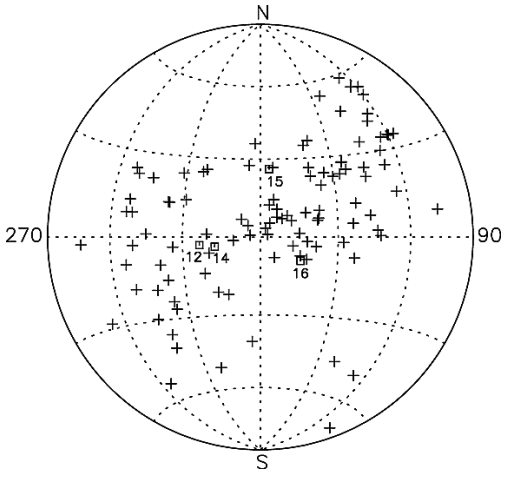


FIGURE 1.2: Distribution des séismes lunaires mesurés depuis la surface visible de la Lune par les quatre sismomètres déposés lors de la mission Apollo. Les positions enregistrées des séismes profonds (+) et de surface (×) sont représentées auprès des sites d'atterrissage de la mission Apollo (□ et ⋄). Crédits : Nakamura (2010).

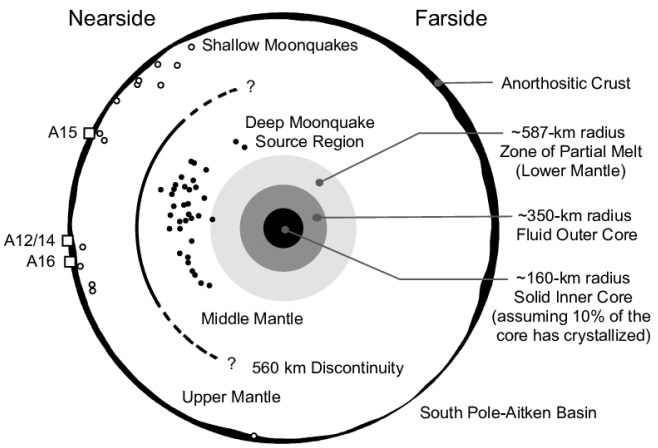


FIGURE 1.3: Représentation schématique de la structure interne de la Lune obtenue en combinant différentes méthodes géophysiques (e.g. télédétection, exploration de surface, analyses d'échantillons) accompagnées de sismologie. Les séismes profonds et de surface de la figure 1.2 sont représentés respectivement par les symboles • et ∘. Crédits : Wieczorek et al. (2006).

1.1.2 Les vibrations des étoiles

La découverte des étoiles pulsantes

En 1596, David Fabricius est officiellement le premier à découvrir la variabilité lumineuse de l'étoile o Ceti (nommée Mira en 1642 par J.H. of Danzig), qui s'étale sur 10 magnitudes stellaires. La mesure de sa période de variabilité d'environ 11 mois n'aura lieu qu'en 1638 par J.F. Holwarda. Dans le siècle suivant, quatre étoiles de type Mira ont été découvertes, toutes étant initialement référencées comme novæ dans des registres chinois ou coréens. Il est difficile de savoir si le caractère variable de l'étoile Mira avait été observé avant Fabricius, mais un doute réside suite à la disparition du catalogue de l'astronome grec Hipparque, qui aurait observé l'étoile en ~ -134 av. J.-C. d'après Müller & Hartwig (1920). L'arrivée de la photographie a permis de compléter l'échantillon d'étoiles Mira à 251 découvertes en 1896 (Hoffleit, 1997), et d'autres types d'étoiles pulsantes avec de grandes amplitudes ont été découvertes ensuite, comme les Céphéides (Goodricke & John, 1784), RR Lyrae (type découvert par Williamina Fleming, reporté par Pickering et al. (1901)), et les δ-Scuti (Campbell & Wright, 1900). Ces étoiles pulsantes ont en commun une fréquence précise de leurs oscillations auto-excitées : c'est par des mécanismes intrinsèques d'ajustement de température et d'opacité que ces étoiles pulsent [2]. Ce n'est pas le cas des étoiles que l'on appellera dans ce manuscrit ≪ étoiles de type solaire ≫, pour lesquelles l'excitation des oscillations se fait de façon stochastique du fait de la convection turbulente (Samadi et al., 2015).

Les oscillations du Soleil

Dans les milieux gazeux se propagent des ondes acoustiques, dont la force de rappel est due au gradient de pression, ainsi que des ondes de gravité donc la force de rappel est la poussée d'Archimède due au gradient

2. Les étoiles pulsent par exemple par le mécanisme κ (Aerts et al., 2010) pour celles situées dans la bande d'instabilité du diagramme de Hertzsprung-Russell qui sera présentée dans la section 5.1 du chapitre 5. Le mécanisme κ repose sur un ajustement de la température et de l'opacité de l'étoile qui conduisent à une restructuration rapide de l'étoile.

de densité dans le fluide.

- Au sommet de l'enveloppe d'une étoile comme le Soleil, les ondes acoustiques sont excitées par les tenseurs de Reynolds turbulents qui proviennent des cellules de convection remontant des profondeurs, (Samadi & Goupil, 2001; Samadi et al., 2005). Elles ont une période similaire à l'échelle de temps des mouvements convectifs, allant de la minute à quelques heures pour les étoiles de stade évolutif similaire au Soleil, et pouvant atteindre l'ordre de l'année pour les géantes très évoluées (e.g. Aerts et al., 2010; Samadi et al., 2015).
- Des ondes de gravité sont excitées par les tenseurs de Reynolds associés à la convection dans le volume de l'enveloppe, où les modes sont évanescents (non-propagatifs). La pénétration convective de panaches de gaz dans une zone radiative à la frontière avec une zone convective (mécanisme communémment appelé « overshooting », e.g. Christensen-Dalsgaard et al., 1995; Monteiro et al., 1996), excitent des ondes de densité internes à basse fréquence dans la zone stablement stratifiée. Ce sont les ondes de gravité qui se propagent dans les intérieurs radiatifs des étoiles, et qui sont détectées indirectement dans les observations des géantes rouges.

La sismologie stellaire et la théorie des ondes associée sera présentée avec plus de détails dans le chapitre 3.

En observant en haute résolution la surface du Soleil, le trajet des ondes sismiques excitées à la surface peut être suivi en trois dimensions (e.g. Gizon & Birch, 2005). En sondant les propriétés locales du milieu traversé, cette sismologie locale permet de découvrir une circulation horizontale sous la surface dans les régions des taches solaires, s'étendant aux régions actives. [3] (nous nous référons à Gizon et al., 2010, pour une description plus détaillée des découvertes liées à la sismologie locale du Soleil). Cependant, les ondes ne peuvent pas être suivies profondément dans l'étoile : la sismologie locale ne renseigne que sur les processus dynamiques et chimiques prenant place dans les quelques pourcents les plus externes du rayon de l'étoile.

De nature acoustique (voir Section 3.1.3.1), générées par les mouvements de convection du gaz à la surface, les ondes se propagent dans l'étoile qui constitue une cavité résonnante. Par réflexion, les ondes excitées aux fréquences propres du Soleil deviennent stationnaires. Cela résulte en des oscillations globales du Soleil à ses fréquences propres, provoquant un déplacement radial en surface de l'ordre de quelques mètres. La détection de cette sismicité stochastique globale repose non seulement sur l'amplitude de l'excitation des ondes par les mécanismes décrits au paragraphe précédent, mais également sur un mécanisme de résonance des ondes dans une cavité. Les fréquences propres des oscillations peuvent ainsi être enregistrées par un suivi du déplacement radial de la surface du Soleil par effet Doppler, ou bien acquises en observant la variation de luminosité induite par les changements de température résultant des variations de rayon. Cette sismicité globale ne renseigne que sur les fréquences propres d'oscillation, et ne permet pas de suivre le champ d'ondes en trois dimensions comme c'est le cas pour la sismologie locale.

L'étude de ces modes d'oscillation solaires, dont les fréquences sont fixées par la structure et par la dynamique de l'étoile, est nommée « Héliosismologie » (locale ou globale selon si les ondes ou bien les modes d'oscillation qui en résultent sont observés). Afin de détecter au mieux les modes d'oscillation, quatre grandeurs sont importantes :

- L'amplitude des oscillations doit être suffisante pour permettre une détection du signal parmi le bruit (fortement dépendant du détecteur utilisé).
- La résolution temporelle à laquelle les données sont acquises limite la plage de fréquence sur laquelle les oscillations peuvent être mesurées en fixant la fréquence de Nyquist du signal.
- La résolution spatiale de l'observation est également importante : la photométrie sismique ne requièrt pas de résoudre optiquement l'objet étudié pour les modes d'oscillation de bas degré ($\ell \lesssim 3$) : elle peut donc être adaptée à l'étude des autres étoiles de type solaire de notre galaxie.
- La durée des observations détermine la résolution fréquentielle des données. Elle dirige ainsi notre capacité à résoudre la structure fine des modes d'oscillation

3. Cette circulation méridienne prend place à la surface du Soleil (de l'équateur vers les pôles) et à la base de la zone convective (des pôles vers l'équateur). Elle est à l'origine de la migration des taches solaire de l'équateur vers les pôles durant un cycle magnétique solaire (Kitchatinov, 2016).

Nous nous concentrerons dans ce manuscrit sur la compréhension des étoiles de faible masse[4] *(*$0.8\mathrm{M}_\odot \lesssim M \lesssim 1.1\mathrm{M}_\odot$*) et de masse intermédiaire*[5] *(*$1.1\mathrm{M}_\odot \lesssim M \lesssim 8\mathrm{M}_\odot$*). Nous regrouperons dans le manuscrit ces étoiles sous le nom d'≪ étoiles de faible masse ≫, qui finiront leur vie sous forme de naine blanche et n'exploseront pas en supernovae gravitationnelle. Cette terminologie d' ≪ étoiles de faible masse ≫ regroupe donc des étoiles de type solaire, et des ≪ pulsateurs classiques ≫ (étoiles variables telles que les Céphéides utilisées pour la mesure des distances), pulsants par les mécanismes de restructuration de l'étoile (e.g. Di Mauro, 2016).*

1.2 L'évolution de la physique stellaire

1.2.1 La découverte de l'Héliosismologie

L'observation directe du Soleil avant la détection des oscillations par Leighton et al. (1962) se limite à l'étude de la surface par spectropolarimétrie (e.g. J.W. & Michard, 1962). La caractérisation globale de l'étoile et toutes les connaissances sur la structure interne reposent alors sur des prédictions théoriques (e.g. Boury & Gabriel, 1971) et sur des modèles d'évolution stellaire (e.g. Paczynski, 1969).

La mesure des fréquences propres des oscillations du Soleil a donc été une révolution pour la compréhension de la physique interne du Soleil. Ulrich (1970) et Leibacher & Stein (1971) apportent une preuve théorique que les vibrations observées en 1962 par Leighton et al. (1962) peuvent correspondre à des modes propres d'oscillation du Soleil. Ces modes d'oscillation ont été identifiés clairement dans les études de **?** et de Claverie et al. (1979), cette dernière ayant combiné plusieurs semaines d'observation du Soleil. C'est ensuite le début de l'ère de l'héliosismologie par réseau de télescopes au sol, visant à observer en continu la surface du Soleil. Nous mentionnons par exemple Fossat (1991) pour le réseau IRIS (International Research in the Interior of the Sun), Chaplin et al. (1996) pour BiSON (Birmingham Solar-Oscillations Network), et Hill et al. (1994) pour GONG (Global Oscillation Network Group). Par la suite, l'observation du Soleil est encore améliorée avec l'arrivée des missions spatiales. Les instruments Global Oscillations at Low Frequencies (GOLF, Gabriel et al., 1995), le Michelson Doppler Imager (MDI, Scherrer et al., 1995), et Variability of Solar Irradiance and Gravity Oscillations (VIRGO, Fröhlich et al., 1995) à bord du satellite SoHO (Domingo et al., 1995) ont permis de fournir le spectre des oscillations de type solaire obtenu par mesure spatiale le plus résolu (voir figure 1.4). L'héliosismologie spatiale s'est vue renforcée en 2010 par l'instrument Helioseismic and Magnetic Imager (HMI Scherrer et al., 2012) à bord du satellite Solar dynamics Observatory (SDO) qui possède une plus grande résolution spatiale et une meilleure stabilité instrumentale que SDO.

Par le biais de techniques d'inversion des données empruntées à la Géophysique, l'Héliosismologie a prouvé sa force pour la compréhension des processus internes du Soleil. Elle a en particulier permis la mesure de la position de la base de l'enveloppe convective (e.g. Christensen-Dalsgaard et al., 1991; Basu, 1997), du profil de rotation interne (e.g. Brown & Morrow, 1987; Kosovichev & G., 1988; Thompson et al., 2003; García et al., 2007) depuis la surface jusqu'à environ 0.25 rayon solaire, de l'activité magnétique (e.g. Lindsey & Braun, 2005), la résolution du problème des neutrinos (e.g. Couvidat et al., 2003; Turck-Chièze & Couvidat, 2011; Christensen-Dalsgaard, 2012) et la mesure des profils de vitesse du son et de densité (Antia & Basu, 1994) du Soleil. Nous gardons à l'esprit que cette avancée technologique de la physique solaire a posé les bases de la future révolution astérosismique de la physique stellaire, et nous nous référons pour plus de détails sur l'immense apport de l'héliosismologie à la compréhension du Soleil à la revue ≪ *Progress in Global Helioseismology* ≫ de Buldgen et al. (2019) ainsi qu'à la revue ≪ Helioseismology ≫ de Christensen-Dalsgaard (2002).

4. Étoiles de type solaire sur la séquence principale et sur les phases avancées de l'évolution, pour lesquelles le mécanisme d'excitation des modes d'oscillation est stochastique, similaire à celui du Soleil, entretenu par la convection turbulente.

5. Pulsations de restructuration durant la séquence principale, puis oscillations de type solaire durant les phases avancées (Aerts et al., 2010).

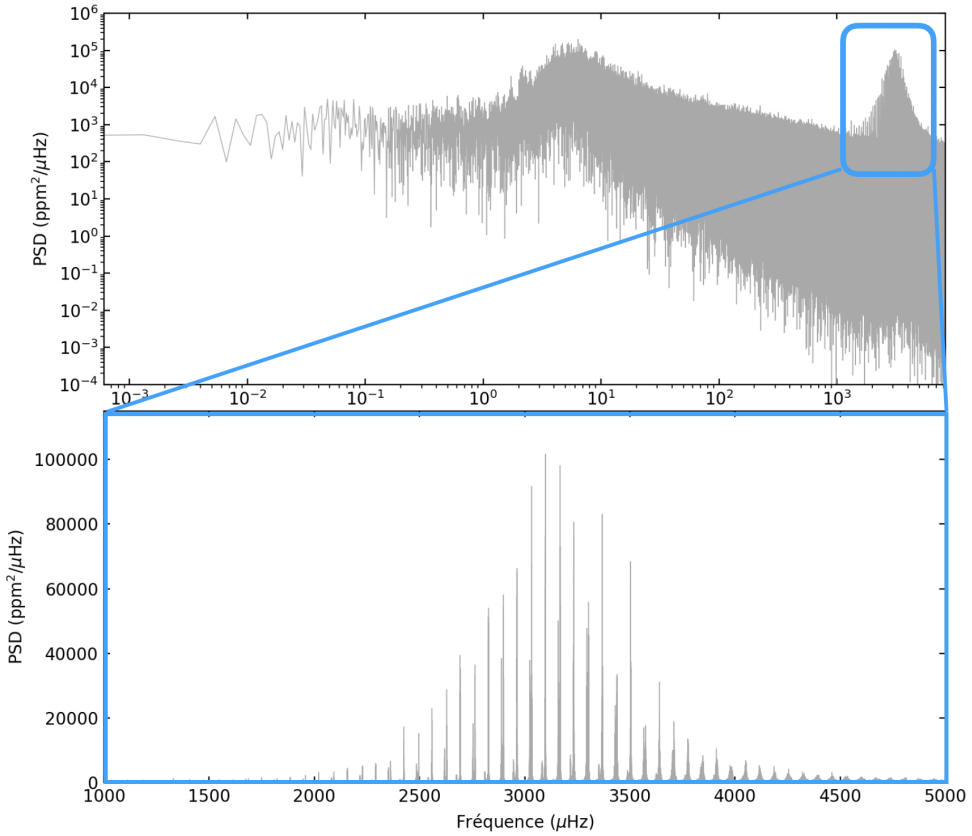


FIGURE 1.4: Spectre de densité de puissance (PSD) du Soleil, observé par l'instrument GOLF à bord du satellite SoHO. Un tel spectre est construit en reportant la densité de puissance contenue dans l'enregistrement des vitesses radiales en fonction de la fréquence à laquelle le signal apparaît dans les données. Le panneau du haut représente le spectre complet, filtré aux fréquences inférieures à 3.85μHz, et le panneau du bas est un agrandissement de la zone contenant les modes d'oscillation acoustiques du Soleil.

1.2.2 La révolution astérosismique : de l'hydrostatique à la compréhension dynamique des étoiles

> **Asteroseismology**. [f. Gr. $\alpha\sigma\tau\eta\rho$ (star) + $\sigma\epsilon\iota\sigma\mu o\zeta$ (shaking) + logy] *The science of using stellar oscillations for the study of the properties of stars, including their internal structure and dynamics.*

Cette définition du terme « Astérosismologie » proposée par Christensen-Dalsgaard (1984) arrive juste avant les premières estimations des oscillations de type solaire des étoiles autres que le Soleil. En combinant les équations de l'hydrostatique, de Poisson, de transfert de rayonnement, et en considérant un gaz polytropique [6], Eddington (1924) déduit une relation entre la masse des étoiles de type solaire, leur luminosité, leur rayon et leur composition chimique. Cette relation empirique est le fondement des modèles d'évolution stellaire, qui sont l'origine de toutes les connaissances sur la structure interne des étoiles à l'ère pré-astérosismologique. En 1984, seuls les paramètres globaux tels que la masse (M) ou le rayon (R) des étoiles peuvent être mesurés, de façon imprécise, avec les méthodes classiques de photométrie et de spectroscopie.

Beaucoup d'efforts ont donc été fournis pour la détection des modes d'oscillation stellaires de nature similaire à ceux du Soleil (« oscillations de type solaire ») pour apporter de la précision aux mesures globales, et dans le but d'obtenir des informations sur la dynamique stellaire interne permettant de mieux contraindre les modèles théoriques d'évolution. Le potentiel de la sismologie stellaire pour la dynamique interne des étoiles est d'ores

6. Un gaz polytropique est caractérisé par des modifications thermodynamiques suivant $P = \kappa\rho^{\gamma}$, avec P la pression, ρ la densité, κ une constante, et γ le degré du polytrope.

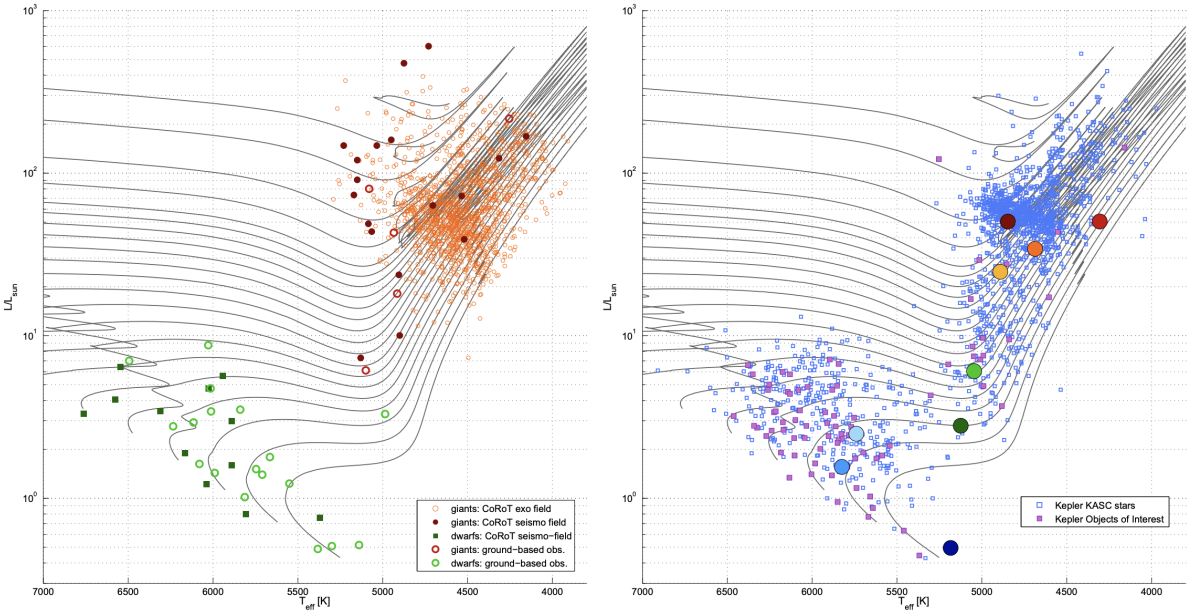


FIGURE 1.5: Diagrammes de Hertzsprung-Russell montrant les étoiles avec des pulsations de type solaire détectées avant 2013. Les lignes noires représentent les tracés évolutifs par Ventura et al. (2008). *Gauche :* étoiles pour lesquelles des oscillations ont été détectées par CoRoT et par les télescopes au sol. *Droit :* étoiles pour lesquelles des oscillations ont été détectées par *Kepler*, connues pour avoir des pulsations de type solaire en 2013. Crédits : Chaplin & Miglio (2013).

et déjà bien mesuré par la communauté, puisque l'étude des modes d'oscillation acoustiques du Soleil a déjà permis de mesurer le profil de vitesse de propagation du son (c_s) dans la partie externe du Soleil (voir la contribution de Christensen-Dalsgaard et al. parmi les proceeedings de Ulrich, 1983), ainsi que de fournir une première estimation de la vitesse de rotation interne du Soleil (Duvall et al., 1984).

Ainsi les 20 dernières années ont connu l'arrivée des premières détections astérosismiques dans des étoiles de type solaire, véritable prouesse technique du fait de la faible luminosité apparente des étoiles autres que le Soleil. La première détection des modes d'oscillation extra-solaires revient à Martic et al. (1999) pour les modes de Procyon et η Cas. Les mesures depuis le sol permettent la détection des modes de α Centauri (Bouchy & Carrier, 2001) avec le spectrographe CORALIE à l'European Space Observatory (ESO) au Chili. Cependant, la résolution en fréquence des mesures pour la recherche des fréquences propres d'oscillation dépend de la durée d'observation. De plus, les observations depuis la Terre sont limitées par les coupures dues au cycle diurne. Ces interruptions dans les données provoquent un effet de fenêtrage qui introduit des dédoublements de pics dans les observations astérosismiques (e.g. García, 2015). Grâce aux réseaux au sol, le micro-satellite Microvariability and Oscillations of STars (MOST, CSA's Space Science Branch), et le satellite Convection, Rotation & planetary Transits mission (CoRoT, CNES/ESA, Baglin et al. (2006)) observant en continu, le problème de la fenêtre d'observation est résolu.

1.2.3 La communauté astérosismique au tournant face à l'immense quantité de données : le besoin de méthodes d'analyse automatisées

Après le succès européen avec CoRoT, la mission *Kepler* de la NASA a pris le relais pour la couverture des observations astérosismiques spatiales (Borucki et al., 2010). Lors de sa mission principale qui a duré ~ 4 ans (acquisition des données entre 2009 et 2013), *Kepler* a observé un champ fixe avec une cadence d'acquisition des données de 30 min pour plus de 200 000 étoiles. Parmi celles-ci se trouvent près de 150 000 étoiles sur la MS (étoiles d'état évolutif proche de celui du Soleil), et des signaux astérosismiques de type solaire ont été détectés pour $\sim$ 25 000 RG (voir figure 1.5 panneau de droite pour les détection des étoiles de type solaire

à partir des données *Kepler* en 2013). Les étoiles sur la MS sont également caractérisées sismiquement grâce au mode d'observation à courte cadence (un point enregistré chaque minute) utilisé pour observer plusieurs centaines d'étoiles, permettant la détection des oscillations de type solaire à haute fréquence dans des étoiles similaires au Soleil. La quantité de données à analyser a connu une forte inflation avec l'arrivée de *Kepler*, et le nombre de résultats scientifiques provenant de l'analyse astérosismique des excellentes données du satellite est de l'ordre du millier de publications chaque année, et continue d'augmenter même plusieurs années après la fin de la mission. La communauté astérosismique s'adapte, et commence à tirer profit de cette grande quantité de données (e.g. Yu et al., 2018).

Nous notons parmi les découvertes de CoRoT et de *Kepler* importantes pour nos travaux la caractérisation (De Ridder et al., 2009) des modes d'oscillation de type solaire des géantes rouges (RG, voir le panneau de gauche de la figure 1.5), les estimations des états évolutifs des étoiles (voir e.g. García et al., 2009; Bedding et al., 2011; Mosser et al., 2011, et le panneau de gauche de la figure 1.5), la mesure des taux de rotation internes (Ballot et al., 2011; Beck et al., 2011; Mosser et al., 2012b; Gizon et al., 2013) et de surface (e.g. Mosser et al., 2009) ainsi que l'activité magnétique des étoiles de type solaire (Lanza, 2009; García et al., 2010; Gondoin et al., 2012; Gondoin, 2012).

La fin de la mission *Kepler* a fait suite à l'arrêt de deux des quatre roues d'inerties du satellite (la première en 2012, la deuxième en 2013), ne permettant plus une observation du champ fixe initialement prévue. La mission K2 (Howell et al., 2014) est alors proposée, permettant au satellite de fonctionner en utilisant seulement les deux roues restantes. La mission est divisée en 19 campagnes d'observation, chacune d'une durée de ~ 80 jours, orientées vers différents champs proches de l'écliptique [7]. La résolution des données sismique est fortement dégradée par rapport à celles de la mission initiale du fait du raccourcissement du temps d'observation de chaque cible, mais K2 a en échange observé de nombreuses nouvelles étoiles hors du champ initial de *Kepler*. Si la mission K2 s'est terminée en 2018 par manque de carburant [8], les données récoltées sont largement sous-exploitées par la communauté au moment de la réalisation de ce manuscrit. En effet, l'arrivée des données du tout nouveau satellite TESS (« *Transiting Exoplanet Survey Satellite* », NASA, Ricker et al. (2014)) avec ses quelques dizaines de millions d'étoiles observées et sa couverture quasi-totale du ciel des deux hémisphères célestes a détourné l'attention de la communauté astérosismique. Nous mentionnons également le lancement prochain du satellite PLATO (« *PLAnetary Transits and Oscillations of stars* », ESA, Rauer et al. (2014)) qui devrait apporter de nombreuses nouvelles données sismiques de qualité à travers sa recherche d'analogues terrestres.

1.3 Avancées scientifiques majeures grâce à l'astérosismologie et problématiques associées

1.3.1 Dater précisément la formation des étoiles de faible masse

Nous avons mentionné dans la section 1.2.1 l'état des connaissances pré-astérosismiques sur la physique stellaire. La spectroscopie, la photométrie, l'astrométrie (et l'interférométrie pour une méthode encore plus avancée) sont les méthodes usuelles pour étudier les étoiles (ces différentes méthodes et leurs incertitudes associées seront détaillées au chapitre 4). Ces observations permettent une estimation des paramètres globaux des étoiles comme la masse, le rayon, la température effective ($T_{\rm eff}$) et la gravité de surface ($\log g$). À partir de ces paramètres globaux, les modèles d'évolution stellaire sont utilisés pour estimer l'état évolutif des étoiles observées par la méthode d'ajustement des isochrones (e.g. Paczyński, 1970, voir figure 1.6 cas *a*). Cependant, les paramètres globaux sont estimés avec de grandes incertitudes par les méthodes classiques. Par exemple la gravité de surface est estimée avec :

7. la stabilité en trois dimensions du satellite est rendue difficile par le manque de stabilisation selon le troisième axe du fait de l'arrêt de deux des quatre moteurs. La solution trouvée pour faire fonctionner la mission K2 repose sur la pression de rayonnement qui pousse le satellite de la plan écliptique permettant une stabilisation selon cet axe.

8. Le manque de carburant est la raison pour laquelle le nombre de campagnes d'observation de K2 est fixé à 19.

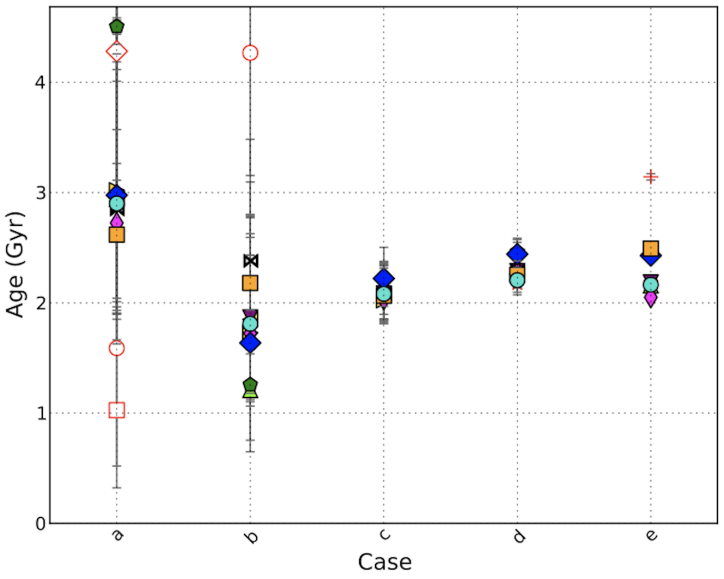


FIGURE 1.6: Estimation de l'âge de l'étoile HD 52265 et incertitudes associées par différents modèles d'évolution stellaire (différents symboles et couleurs) contraints avec différents paramètres stellaires. Pour le cas *a* les modèles sont optimisés uniquement par des paramètres spectroscopiques (température effective, luminosité, et métallicité). À ces paramètres s'ajoutent pour les modèles *b* à *e* des paramètres sismiques : *b* $\Leftrightarrow$ espacement moyen en fréquence entre deux ordres consécutifs ($\langle\Delta\nu\rangle$), *c* $\Leftrightarrow$ $\langle d_{0,2}\rangle$, espacement entre les modes de degrés $\ell = 0$ et $\ell = 2$, *d* $\Leftrightarrow$ rapports entre les séparations des modes individuels et *e* $\Leftrightarrow$ fréquences individuelles des modes. Crédits : Lebreton et al. (2014b).

- 90-150% d'incertitude pour la photométrie (Brown et al., 2011a)
- 25-50% pour la spectroscopie (Valenti & Fischer, 2005; Ghezzi et al., 2010)

De plus, certains paramètres comme la température effective varient très peu avec l'évolution de l'étoile, surtout durant les phases de MS et RGB. En utilisant une spectroscopie de haute résolution sur un échantillon d'étoiles brillantes, l'erreur commise sur l'estimation de leur âge reste de l'ordre de 20% (e.g. Soderblom, 2010). Cette barre d'erreur est trop grande, notamment pour l'archéologie galactique car la précision n'est pas suffisante pour contraindre les modèles d'évolution chimio-dynamique de la galaxie (Miglio et al., 2017). Sans sismologie, les meilleures estimations de l'âge des étoiles isolées concernent les étoiles de la MS qui présentent des signaux de rotation grâce à la « *Gyrochronologie* », qui relie la période de rotation et la masse des étoiles de faible masse sur la MS avec leur âge (Barnes, 2003). Cette méthode est applicable sur une plage d'états évolutifs qui dépend du type spectral de l'étoile, de son taux de rotation, etc. (e.g. Barnes, 2007; García et al., 2014b; Angus et al., 2015; van Saders et al., 2016; Angus et al., 2019).

Les fréquences des oscillations de type solaire sont directement reliées à la vitesse du son et au profil de densité (nous détaillerons les relations d'échelles astérosismiques au chapitre 3), qui eux-mêmes dépendent de l'état évolutif de l'étoile. En optimisant les modèles d'évolution stellaire avec des mesures astérosismiques, l'estimation de l'âge des étoiles de la MS et de la RGB devient très précise (e.g. Ulrich, 1986; Lebreton & Montalbán, 2008), avec une incertitude de l'ordre de quelques pourcents seulement pour les meilleurs modèles (voir figure 1.6 cas *b* à *e*, nous détaillerons dans le chapitre 4 les méthodes astérosismiques d'estimation de l'âge des étoiles).

L'estimation sismique de l'âge des étoiles n'est possible que lorsque des modes d'oscillation de type solaire sont visibles dans les données photométriques de l'étoile. Si la cadence d'observation de l'instrument est trop grande ($\gtrsim 8$ min), la signature sismique d'une étoile de type solaire sur la MS ne peut pas être détectée, comme c'est le cas pour les données « Long Cadence » acquises toutes les 30 minutes lors de la mission *Kepler* (cette cadence d'acquisition est la même pour les mission K2 et TESS). Si la durée d'observation est trop courte ($\lesssim 30$ jours), la résolution en fréquence n'est pas suffisante pour détecter précisément les modes d'oscillation. Le bruit intrinsèque au détecteur masque également les signaux astronomiques les plus

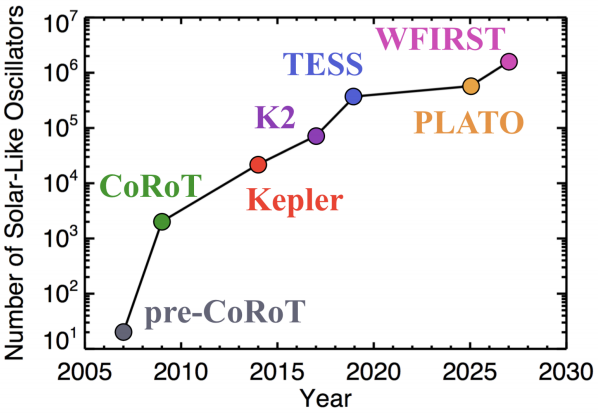


FIGURE 1.7: Nombre total d'étoiles de type solaire présentant des oscillations détectées en fonction du temps (extrapolations pour PLATO et WFIRST). Crédits : Huber (2017).

faibles (e.g. Gandolfi et al., 2018, pour la difficulté de détection des modes d'oscillation dans les données du satellite TESS). Finalement, quelques centaines d'étoiles de type solaire sur la MS ont pu être datées par l'astérosismologie sur les $\sim 150\,000$ observées par *Kepler* (Aguirre et al., 2017; Serenelli et al., 2017). De plus, le nombre d'étoiles de type solaire évoluées sur la branche des géantes rouges répertoriées parmi les cibles de *Kepler* est monté à près de $23\,000$ RG (voir García et al., *in prep*), bien que les signaux astérosismiques n'aient été détectés avec certitude que pour $\sim 20\,000$ d'entre elles (Mathur et al., 2017; Yu et al., 2018, 2020). Ces considérations nous amènent à poser la première problématique de ce manuscrit :

1 Les méthodes classiques de détection et d'analyse des signaux astérosismiques sont très puissantes, mais nécessitent dans la plupart des cas une étude quasi-individuelle des signaux de chacune des étoiles observées, et une vérification manuelle des résultats obtenus : la communauté sismique fait donc face à un besoin d'automatisation des outils de détection et d'analyse sismique pour mener à bien les études scientifiques sur l'immense quantité de données des missions *Kepler*, K2, TESS, et bientôt PLATO (voir figure 1.7).

1.3.2 Le transport de moment cinétique dans les étoiles de faible masse

Les fréquences, temps de vie et amplitudes des modes d'oscillation sont affectés par les changements de composition chimique et de comportement dynamique à l'intérieur de l'étoile (Eggenberger et al., 2017). Ces modes emmagasinent donc des informations sur le milieu qu'ils sondent, et nous renseignent sur la structure et sur les processus dynamiques internes dans la cavité dans laquelle ils se propagent.

Parmi les processus dynamiques révélés par l'astérosismologie se trouve la rotation interne des étoiles. La rotation lève la dégénérescence sur l'ordre azimutal m des modes d'oscillation prograde ($m > 0$, dans le sens de la rotation) et rétrogrades ($m < 0$, dans le sens inverse de la rotation) dans le référentiel intertiel. Si l'inclinaison de l'étoile par rapport à la ligne de visée le permet (inclinaison $i \gtrsim 30$ degrés), et que la résolution fréquentielle des données est suffisante, chaque mode d'oscillation est divisé en $2\ell+1$ composantes (avec ℓ le degré du mode d'oscillation, voir chapitre 3) régulièrement espacées en fréquence par les effets de l'accélération de Coriolis et du changement de référentiel. La mesure de la séparation rotationnelle des fréquences propres requiert une analyse fine du motif des fréquences d'oscillation des étoiles de faible masse, mais, combinée avec la mesure de l'inclinaison de l'étoile, permet d'obtenir une estimation de leur rotation interne durant les stades évolués (e.g. Beck et al., 2012; Deheuvels et al., 2012, 2014, 2016; Mosser et al., 2015; Vrard et al., 2016; Gehan et al., 2018). Dans le cas des SG en particulier, la mesure de la séparation rotationnelle indique que le cœur tourne une à dix fois plus rapidement que la surface (voir figure 1.8, e.g. Aerts et al.,

2019). Cependant, les modèles d'évolution stellaire prenant en compte la rotation et les processus de transport hydrodynamiques associés (circulation méridienne, turbulence de cisaillement, e.g. Zahn & P., 1992; Maeder & Zahn, 1998; Mathis & Zahn, 2004; Mathis et al., 2004, 2018) prédisent une rotation beaucoup plus rapide. Le cœur devrait tourner environ cent fois plus vite que la surface de l'étoile d'après la théorie actuelle (e.g. Ceillier et al., 2012; Marques et al., 2013; Eggenberger et al., 2012a, 2019a,b, voir figure 1.8). Nous sommes donc face à un problème d'ordre de grandeur pour comprendre l'évacuation de l'énergie cinétique du cœur des étoiles de faible masse évoluées, et un ou plusieurs processus de transport du moment cinétique interne ne sont pas identifiés dans les intérieurs stellaires.

Pourtant, le profil de rotation joue un rôle clef pour l'évolution de l'étoile (e.g. Maeder, 2009). Plus l'étoile a une rotation différentielle radiale importante, plus le plasma subit un mélange radial important. Un fort mélange redistribue les éléments chimiques, rallongeant la durée de vie de l'étoile puisque les éléments légers tels que l'hydrogène et l'hélium sont réapprovisionnés au cœur (e.g. Lebreton et al., 2014a). Parvenir à reproduire physiquement le profil de rotation interne observé à travers les modèles d'évolution stellaire est désormais l'étape clef pour améliorer l'estimation des âges stellaires.

Cette problématique de l'origine du transport efficace de moment cinétique est partagée par tous les types d'étoiles et états évolutifs dans le diagramme de Hertzsprung-Russell (nous nous référons à la revue de Aerts et al., 2019). Lors de l'évolution des étoiles de type solaire en particulier :

- Ł'estimation astérosismique du profil de rotation interne des étoiles de faible masse sur la séquence principale indique une rotation quasi-uniforme de l'intérieur stellaire et solaire (e.g. Thompson et al., 2003; García et al., 2007; Benomar et al., 2015; Fossat et al., 2017) jusqu'à des profondeurs de $\sim 0.2\mathrm{R}_\odot$. Cela suggère un puissant mécanisme de transport interne dans les étoiles de la séquence principale ou bien lors des phases plus jeunes de la vie de l'étoile.
- L'enveloppe convective du Soleil est en rotation différentielle latitudinale (e.g. Strugarek et al., 2011; Beaudoin et al., 2018). Cette rotation différentielle est également observée par astérosismologie dans d'autres étoiles (Benomar et al., 2018). Cependant, si le couplage magnétique entre le champ dynamo de surface et un éventuel champ interne dans la zone radiative se produit, la rotation différentielle latitudinale de l'enveloppe est transmise au cœur le long de l'axe de rotation, ce qui n'est pas observé dans l'intérieur du Soleil.
- Comme énoncé précédemment, un freinage puissant de la rotation dans la zone radiative est nécessaire lors du passage de la MS à la RGB (e.g. Fuller et al., 2019).
- La rotation interne des étoiles brûlant l'hélium au cœur (étoiles de la branche horizontale, dénotée comme « RC », voir chapitre 2) est beaucoup plus lente que celle des étoiles brûlant seulement l'hydrogène en couche (étoiles sur la branche des géantes rouges dénotée comme « RGB », voir figure 1.8, e.g. Eggenberger et al., 2012a; Ceillier et al., 2012, 2013; Marques et al., 2013). Cela implique un fort freinage de l'intérieur radiatif sur la RGB, dont l'origine est mal comprise. Le couplage rotationnel entre le cœur et l'enveloppe des étoiles de la branche horizontale est également très mal compris (Tayar et al., 2019).
- La rotation interne des étoiles de la branche horizontale est compatible avec la rotation observée des rémanents naines blanches correspondantes (e.g. Tayar & Pinsonneault, 2013; Hermes et al., 2017). Par exemple, en considérant l'intérieur radiatif d'une étoile de faible masse découplé d'un point de vue de la rotation de l'enveloppe convective depuis la fin de la MS, la période de rotation est extrapolée à $P_{\mathrm{rot}} = 0.2$ jours à la fin de la vie de l'étoile (Tayar & Pinsonneault, 2013), ce qui est compatible avec les taux de rotation observés dans les naines blanches (Charpinet et al., 2009).

Finalement, la seconde problématique de ce manuscrit est mise en évidence. Elle concerne la compréhension des mécanismes de transport de moment cinétique à l'intérieur des étoiles de faible masse :

2

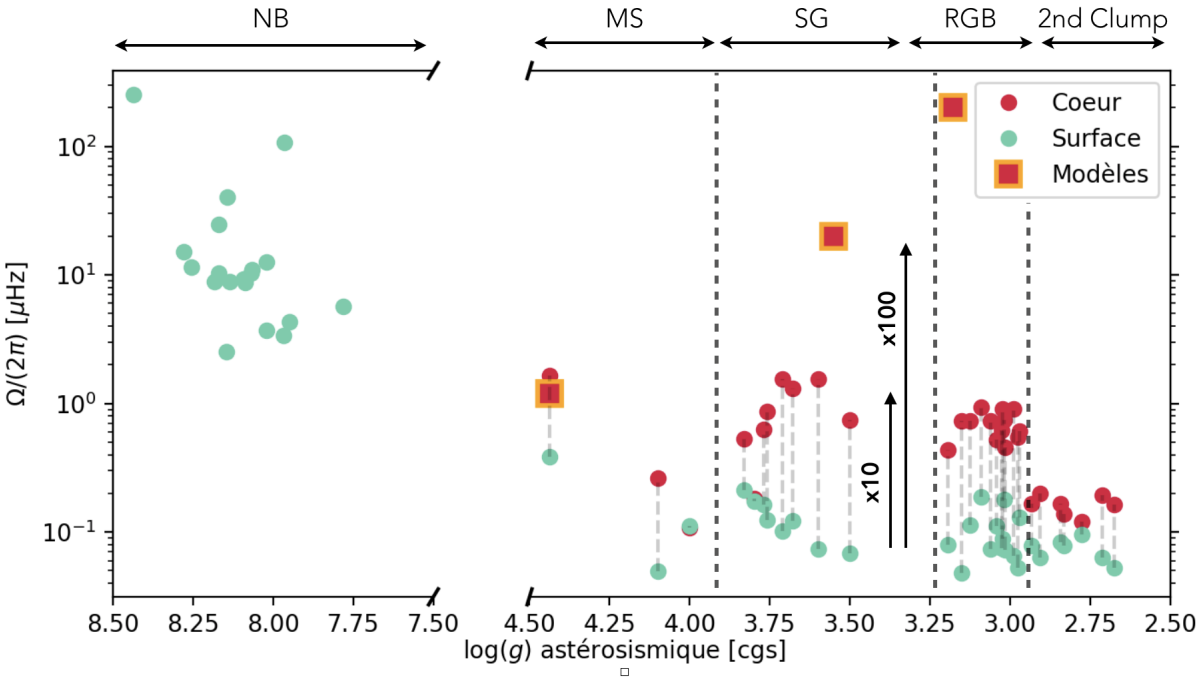


FIGURE 1.8: Fréquence de rotation observées dans le cœur (●) et dans l'enveloppe (●) d'étoiles de faible masse en fonction de leur gravité de surface. La modélisation des fréquences de rotation du cœur des étoiles pour les différents états évolutifs est ajoutée. NB : naines blanches, MS : séquence principale, SG : sous-géantes, RGB : étoiles de la branche des géantes rouges, 2nd Clump : étoiles massives sur la branche asymptotique. Figure réalisée à partir des études suivantes : Ceillier et al. (2012); Kurtz et al. (2014); Deheuvels et al. (2014, 2015); Saio et al. (2015); Triana et al. (2015, 2017); Di Mauro et al. (2016); Hermes et al. (2017); Eggenberger et al. (2019a).

1.3.3 Comprendre la dynamique interne des étoiles

Différents processus de transport ont été évoqués pour expliquer la faible rotation interne des géantes rouges. La circulation méridienne (e.g. Kippenhahn, 1963; Zahn & P., 1992; Maeder & Zahn, 1998; Mathis & Zahn, 2004) qui est à l'origine de rotation différentielle radiale dans l'étoile (Eggenberger et al., 2012a; Marques et al., 2013; Ceillier et al., 2013) transporte du moment cinétique, de même que la turbulence de cisaillement (Zahn & P., 1992; Maeder & Meynet, 1996; Talon & Zahn, 1997; Mathis et al., 2004), les modes mixtes (Belkacem et al., 2015b) et les ondes internes de gravité (Fuller et al., 2015; Pinçon et al., 2017). Cependant, aucun des processus hydrodynamiques cités ne fonctionne tout du long de l'évolution de l'étoile pour pouvoir expliquer le transport de moment cinétique de façon générale. Les ondes internes de gravité excitées par la convection turbulente sont de bons candidats pour expliquer le transport durant la phase des sous-géantes (Pinçon et al., 2017), mais sont amorties trop fortement pour être efficaces durant la RGB (Fuller et al., 2014). Le transport par les modes mixtes acoustiques et de gravité est évoqué pour un transport efficace durant la RGB (Belkacem et al., 2015a), mais pas pour le transport durant la phase des sous-géantes durant laquelle le couplage entre les modes acoustiques et les modes de gravité est trop faible (voir chapitre 3). Les instabilités hydrodynamiques comme l'instabilité de cisaillement (Zahn & P., 1992; Maeder & Meynet, 1996; Talon & Zahn, 1997; Mathis et al., 2004, 2018), de Goldreich-Schubert-Fricke (Barker et al., 2019) ne sont potentiellement pas suffisamment efficaces pour expliquer les taux de rotation des étoiles de type solaire observés (Marques et al., 2013). Tayler (1973) propose alors une instabilité magnéto-hydrodynamique, qui conduit à l'idée du mécanisme de dynamo en zone radiative dit de Tayler-Spruit (Spruit, 2002) pour transporter le moment cinétique. Avec ce mécanisme la rotation du cœur reste trop grande d'un ordre de grandeur à cause du gradient de composition des RG (Cantiello et al., 2014), et l'étude de Zahn et al. (2007) montre qu'une telle dynamo n'est pas physiquement envisageable. L'instabilité de Tayler (sans la dynamo associée) est désormais étudiée seule dans sa capacité à transporter du moment cinétique lors de sa saturation

par les tenseurs de Maxwell liés à l'instabilité (Fuller et al., 2019). Eggenberger et al. (2020) montrent cependant que ce mécanisme en champ magnétique instable ne peut expliquer la rotation de l'intérieur du Soleil si celui-ci est le siège d'une accélération centrale dans le cœur nucléaire comme proposé par García et al. (2007) et Fossat et al. (2017). Si l'ordre de grandeur du transport par la saturation de l'instabilité de Tayler est compatible avec les observations, ce mécanisme ne peut en revanche résoudre simultanément le transport dans les SG et des RG (Eggenberger et al., 2019b,c). Les instabilités magnéto-rotationnelles ne parviennent pas non plus à s'abstraire du gradient de composition chimique pour transporter suffisamment de moment (e.g. Balbus & Hawley, 1994). Finalement, le transport de moment cinétique par les champs magnétiques stables (Mestel & Weiss, 1987; Gough & Thompson, 1990; Brun et al., 2006; Strugarek et al., 2011; Acevedo-Arreguin et al., 2013; Kissin & Thompson, 2015a,b), rémanents de champs dynamo passés (voir chapitre 2), pourrait permettre d'expliquer les taux de rotation observés dans les étoiles de type solaire. Ce scénario et les problématiques associées seront développés dans les chapitres 2 et 6.

Ce problème de transport de moment cinétique entre les couches internes et l'enveloppe des RG est complété par la découverte surprenante de deux populations de géantes rouges (Mosser et al., 2012a; García et al., 2014c). Pour les moins massives (masse comprise entre 1 et 1.5 fois la masse solaire,$M_\odot$), les modes d'oscillation ont majoritairement une amplitude relative du même ordre de grandeur que celle du Soleil (figure 1.9, panneau en haut à gauche). Pour près de 50% des plus massives ($1.7\ M_\odot \leq M \leq 2.5\ M_\odot$) en revanche, la signature sismique est perturbée (figure 1.9, panneau en bas à gauche, e.g. Stello et al., 2016a, 2017), démontrant que les modes d'oscillation dipolaires et quadripolaires sont affectés à l'intérieur de certaines géantes rouges. Cette dichotomie est visible sur le panneau de droite de la figure 1.9, à partir de la visibilité des modes de degré $\ell = 0$ (voir chapitre 2 et 6 pour les expressions de visibilité des modes).

Fuller et al. (2015) propose la première explication théorique de la faible amplitude de certains modes dipolaires. Les auteurs apportent une justification par le magnétisme interne de l'étoile, qui transforme la nature des ondes de gravité en ondes magnétohydrodynamiques (appelées ondes d'Alfvén), ces dernières se trouvant alors piégées dans l'intérieur radiatif des géantes rouges. À la surface, seule l'énergie des modes acoustiques est visible, et l'amplitude des modes observés est donc fortement diminuée. Cet « effet de serre magnétique » est controversé dans la communauté astérosismique, notamment suite à l'étude de Mosser et al. (2018) qui présente observationnellement des modes d'oscillation de faible amplitude semblant être de nature mixte, et non pas purement acoustiques. Par la suite, Loi & Papaloizou (2017, 2020) proposent un mécanisme similaire, tout en permettant à une fraction de la puissance des modes de gravité de se coupler avec les modes de pression dans la zone radiative, ce qui apporterait une solution au problème de la nature mixte des modes de faible amplitude relevé par Mosser et al. (2018).

Nous détaillerons dans le chapitre 2 les différentes théories de l'amortissement des modes dipolaires à l'intérieur des géantes rouges. Nous détaillerons les spécificités observationnelles des étoiles présentant des modes mixtes de faible amplitude au chapitre 6.

Enfin, l'observation des naines blanches, état final d'évolution des étoiles de type solaire, montre que $\sim 15\%$ d'entre elles présentent un magnétisme intense supérieur au Mega Gauss (e.g. Liebert et al., 2002; Kawka et al., 2004; Ferrario & Wickramasinghe, 2007). Celles-ci semblent également tourner plus lentement encore que les naines blanche non-magnétisées (Ferrario & Wickramasinghe, 2005; Suijs et al., 2008; Hermes et al., 2017). Ceci conforte l'idée de la présence d'un champ magnétique intense durant la phase des RG et son rôle fondamental pour la dynamique de ces étoiles, tant du point de vue de leur rotation que de leurs oscillations.

Nous expliquerons les origines possibles d'un champ magnétique confiné dans la zone radiative des géantes rouges au chapitre 2.

La troisième et dernière problématique de ce manuscrit concerne ainsi la compréhension du magnétisme interne des étoiles de faible masse :

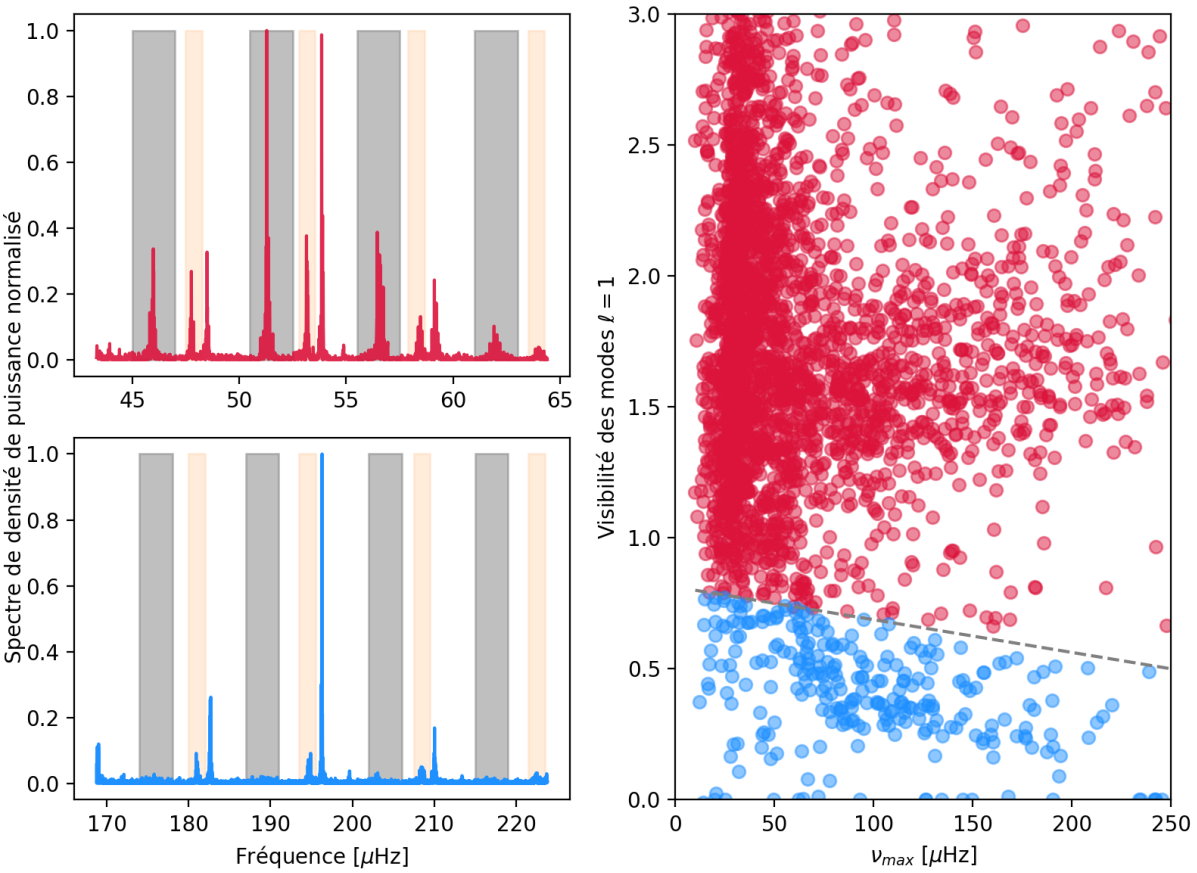


FIGURE 1.9: *Gauche :* Spectres de densité de puissance de deux RG observées par *Kepler*. Le panneau du haut est une RG avec des modes d'oscillation d'amplitudes normales. L'étoile du panneau du bas montre de très faibles amplitudes dans la zone des modes dipolaires (zones grises), ainsi que dans la zone quadripolaire (zones beiges). *Droit :* Visibilité des modes dipolaires comme introduite par Stello et al. (2016a) en fonction de la fréquence associée au maximum de puissance des modes d'oscillation dans la PSD pour $\sim$ 4 000 géantes rouges observées par *Kepler*. La ligne en pointillés représente la limite entre les étoiles présentant des modes d'amplitude normale (rouges) et celles présentant des modes de faible amplitude (bleues), comme établie par Stello et al. (2016b)

3 Le magnétisme interne des étoiles de faible masse est méconnu depuis la séquence principale jusqu'à la RGB. Il peut pourtant être un vecteur efficace de transport de moment cinétique des étoiles, et pourrait être le mécanisme à l'origine des modes dipolaires de faible amplitude. Pour comprendre la dynamique interne des étoiles de type solaire, il est donc nécessaire d'étudier le magnétisme interne tout au long de l'évolution des étoiles de faible masse.

1.4 Enjeux de la thèse

Le cadre général de ce projet de thèse est la compréhension des processus dynamiques des étoiles de type solaire évoluées. Pour étudier la dynamique interne des étoiles, une bonne connaissance des paramètres globaux est nécessaire : nous dédions une partie de cette thèse à la valorisation des échantillons de données sismiques pour une meilleure estimation des paramètres globaux des étoiles. La caractérisation précise des géantes rouges nous permettra ensuite d'étudier en détail leurs modes d'oscillation. Par une étude théorique, nous recherchons l'impact de champs magnétiques internes sur les fréquences d'oscillation des SG et RG, ainsi que sur le transport

de moment cinétique interne. Ce projet de thèse alliant analyse observationnelle, développement théorique et modélisation stellaire apporte des propositions de solutions pour les trois problématiques générales énoncées dans la section 1.3.

Valorisation des échantillons de données sismiques pour une meilleure compréhension des étoiles

Dans la section 1.2.3 nous avons évoqué la problématique **1** : la nécessité nouvelle d'automatisation des outils d'analyse astérosismiques pour pallier à l'arrivée massive des données. Pour remédier à ce problème, la communauté stellaire se rassemble dans des collaborations internationales pour mettre au point des pipelines d'analyse automatique en regroupant les méthodologies individuelles pour l'analyse des données, afin de classifier et de caractériser les propriétés physiques de la grande quantité d'étoiles observées. Nous mentionnons par exemple la collaboration APOKASC (Serenelli et al., 2017), qui regroupe la communauté astérosismique *Kepler* (KASC, Kepler Asteroseismic Science Consorsium) et la spectroscopie avec APOGEE (Apache Point Observatory Galactic Evolution Experiment), dans le but de caractériser les étoiles en combinant la spectroscopie de haute résolution et la sismologie. La mesure astrométrique et la caractérisation globale des étoiles est également rendue possible avec *Gaia* (Gaia Collaboration et al., 2018).

Pour répondre au besoin de la communauté pour l'analyse automatique des données astérosismiques, la première partie de cette thèse se concentre sur la classification et l'estimation automatique des paramètres globaux des étoiles comme la gravité de surface. Nous introduisons dans les chapitre 4 et 5 des méthodes d'intelligence artificielle (ML) en plein essor pour l'analyse de données, mais très peu utilisées par la communauté stellaire. Utilisées pour la classification et la caractérisation automatique des étoiles de faibles masses, elles permettent de répondre à la problématique **1**, pour préparer au mieux l'arrivée des données de PLATO. Les méthodologies présentées dans cette première partie sont désormais incluses dans le pipeline d'analyse automatique de la collaboration « TESS Data Analysis » (T'DA), qui a pour but de classifier et de caractériser les millions d'étoiles de TESS en regroupant sous un même réseau les méthodes d'analyse astérosismiques. Nous développerons ces méthodes dans le chapitre 3. Elles feront également partie intégrante des algorithmes officiels pour l'analyse des données de PLATO.

Rôle du magnétisme sur la dynamique et l'évolution des étoiles de faible masse

Nous avons exposé dans la section 1.3.2 et 1.3.3 les problématiques **2** et **3** concernant le transport de moment cinétique et la compréhension du champ magnétique interne aux étoiles de type solaire. À la fois le puissant transport de moment cinétique sur la branche des géantes rouges et la faible amplitude de certains modes dipolaires peuvent résulter de processus impliquant un fort champ magnétique interne. Nous recherchons théoriquement les effets de champs magnétiques internes sur les fréquences propres d'oscillation des RG. Ce diagnostic sismique pose les bases pour la recherche d'une signature magnétique dans les spectres d'oscillation des RG déjà caractérisées de façon globale.

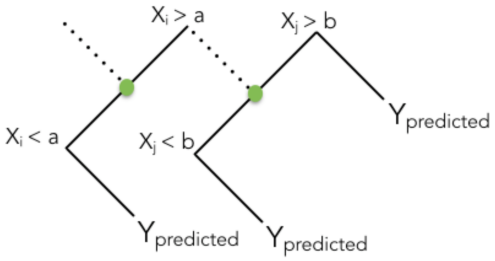
1.5 Méthode de travail

Nous proposons ici une vue d'ensemble des méthodologies utilisées durant cette thèse :

Analyse de données et développements théoriques en synergie

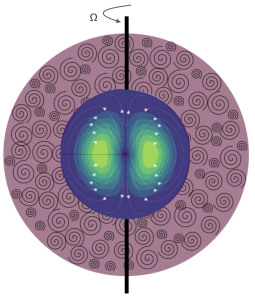
Analyse observationnelle

- **Analyses Photometriques & Astérosismiques** : Analyse des spectres de puissance des étoiles de type solaire
- Adaptation et Utilisation d'algorithmes d'**intelligence artificielle** : Forets aléatoires, Réseaux de neuronnes



Modélisation stellaire théorique

- **Théorie des oscillations stellaires**, incluant les effets de la rotation et du magnétisme
- **Théorie du transport** de moment cinétique
- Implémentation des résultats théoriques en utilisant les codes d'évolution et de pulsation stellaires **MESA** et **GYRE**.



1.6 Organisation du manuscrit

Le chapitre 2 de ce manuscrit présente l'état de l'art des connaissances sur l'évolution de la structure des étoiles de type solaire. Nous présentons également les phénomènes physiques magnétisés à l'intérieur des étoiles de type solaire, depuis leur formation jusqu'aux étapes les plus avancées de la vie de l'étoile, dans le but de suivre le magnétisme interne au long de l'évolution des étoiles. Un scénario complet de l'évolution des champs magnétiques fossiles le long de l'évolution des étoiles de type solaire est proposé.

Le chapitre 3 est dédié aux modes d'oscillation des étoiles de type solaire. Nous présentons les équations régissant la dynamique de ces modes d'oscillation et nous nous employons à exposer l'état de l'art des effets du magnétisme sur les oscillations.

Partie I : De nouvelles méthodologies pour la caractérisation automatique des étoiles

---

Nous introduisons au chapitre 4 une nouvelle métrique (FliPer, Bugnet et al., 2018) qui permet une estimation précise de la gravité de surface des étoiles de faible masse. Nous proposons une version automatisée de FliPer par l'utilisation d'intelligence artificielle, et en particulier d'un algorithme de régression de Forêts Aléatoires

(Random Forest, Breiman, 2001). Notre étude permet l'estimation automatique de la gravité de surface des étoiles de type solaire observées par *Kepler* depuis la séquence principale jusqu'au sommet de la RGB, avec des incertitudes de l'ordre de 0.046 dex (Bugnet et al., 2018).

Nous étendons au chapitre 5 cette étude à la classification automatique des différents types de pulsateurs, dans le but de contribuer à la classification automatique des données de *Kepler*, TESS (réalisée au sein de la collaboration T'DA) et PLATO. Les travaux réalisés sur les données simulées du satellite TESS montrent une reconnaissance des étoiles de type solaire à 99.9 % parmi tous les autres types de pulsateurs (Bugnet et al., 2019).

Partie II : Impact d'un champ magnétique interne sur les fréquences des modes d'oscillation des étoiles de type solaire

---

Le chapitre 6 reporte les développements théoriques et résultats associés sur la recherche de l'impact d'un champ magnétique interne axisymétrique et aligné avec l'axe de rotation de l'étoile sur les fréquences propres d'oscillation des géantes rouges. Nous mettons en évidence un décalage magnétique vers les hautes fréquences des modes mixtes dipolaires et quadripolaires des géantes rouges, créant une asymétrie dans les multiplets rotationnels. Nous estimons l'amplitude minimale d'un tel champ magnétique à ~ 1 MG pour que ses effets soient visibles dans les données les mieux résolues (4 ans d'observation) de la mission *Kepler*. Un tel champ magnétique redistribue très efficacement le moment cinétique dans l'intérieur radiatif (Bugnet et al., *accepted with moderate revision*). Nous présentons également une méthodologie pour la détection automatique des RG présentant des modes mixtes de faible amplitude grâce à l'utilisation d'un réseau de neurones de convolution. En reconnaissant les motifs présents dans le diagramme échelle d'une étoile, nous démontrons la capacité d'une telle méthodologie pour soutenir la recherche de signatures magnétiques dans les données astérosismiques.

Dans le chapitre 7, l'étude théorique des effets du magnétisme par le champ axisymétrique du chapitre 6 est approfondie pour l'obtention d'une formulation théorique asymptotique des perturbations magnétiques. Nous démontrons le potentiel de cette expression pour l'inversion de l'amplitude du champ magnétique interne aux étoiles de type solaire évoluées à partir des perturbations magnétiques sur les fréquences d'oscillation des modes mixtes (Mathis, Bugnet et al., *accepted to A&A*).

Enfin, le chapitre 8 présente les conclusions et perspectives de ce projet de thèse alliant analyse de données et développement théorique, tant sur la caractérisation globale des étoiles que sur la détection fine de signatures liées au magnétisme interne sur les modes propres d'oscillation des étoiles de type solaire, et de l'impact de ce dernier sur le transport de moment cinétique dans les étoiles.

CHAPITRE 2

EVOLUTION STELLAIRE ET MAGNÉTISME DES ÉTOILES DE FAIBLE MASSE

Sommaire

2.1 Évolution structurelle des étoiles de faible masse et de masse intermédiaire et paramètres globaux associés **21**
2.1.1 Diagramme d'évolution stellaire de Hertzsprung-Russell 21
2.1.2 Effondrement du nuage moléculaire, chemin de Hayashi et pré-séquence principale (PMS) 22
2.1.3 Séquence principale (MS) 24
2.1.4 Phase des sous-géantes (SG) 27
2.1.5 Branche des géantes rouges (RGB) 27
2.1.6 Branche horizontale ou Clump (RC) 30
2.1.7 Branche asymptotique (AGB) 32
2.1.8 Fin de vie 34
2.1.9 Reconnaissance des stades évolutifs par l'estimation des paramètres physiques globaux 34
2.2 Plasmas magnétisés : origine et évolution des champs magnétiques stellaires **35**
2.2.1 Principe général de l'effet dynamo 36
2.2.2 La dynamo magnétique dans les zones convectives 40
2.2.3 La relaxation et la dissipation des champs magnétiques fossiles dans les régions radiatives stellaires 45
2.2.4 Le magnétisme des zones radiatives 47
2.3 Biographie stellaire magnétisée : scénario des champs fossiles **54**
2.3.1 La variété de stabilité vis-à-vis de la convection des étoiles de faible masse et de masse intermédiaire vue par les diagrammes de Kippenhahn 54
2.3.2 Formation stellaire et dynamo magnétique (BD1) 55
2.3.3 La PMS et l'apparition du premier champ fossile (BF1) 56
2.3.4 La séquence principale pour les étoiles de type solaire : Champ fossile interne (BF1) et dynamo (BD1,BD2) 57
2.3.5 La phase des sous-géantes : champs fossiles (BF1, BF2) et dynamo (BD1) . . . 58
2.3.6 La RGB : dynamo convective (BD1) et champ fossile (BF) 59
2.3.7 Étapes évoluées et fin de vie 59

Dans ce chapitre, nous présentons les connaissances de l'évolution stellaire des étoiles de faible masse et de masse intermédiaire. Nous avons choisi de présenter de façon concise l'évolution structurelle et nucléaire des étoiles dans la première section (2.1), déja bien décrite dans la littérature (voir par exemple les notes de cours de Christensen-Dalsgaard (2001), ou bien les livres de référence de Maeder (2009) et de Kippenhahn

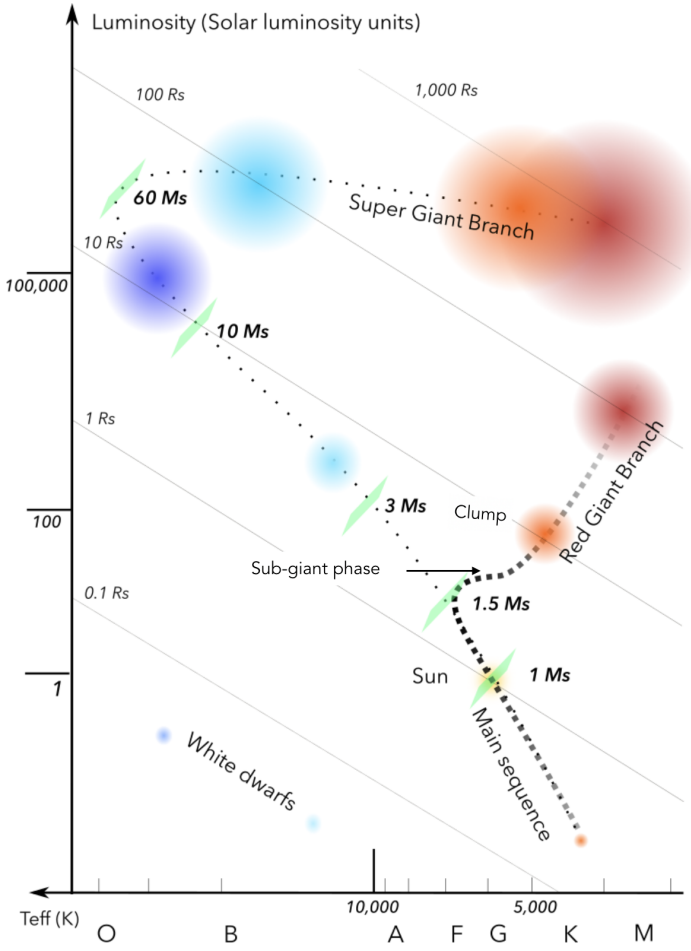


FIGURE 2.1: Diagramme d'évolution stellaire de Hertzsprung-Russell schématisé. Les chemins évolutifs des étoiles de faible masse (ligne tiretée) et de masse élevée (ligne pointillée) sont représentés. La taille des cercles permet d'illustrer le rayon de l'étoile aux différentes positions dans le diagramme, et la couleur reflète la température effective.

et al. (2012)). Le suivi des paramètres globaux de ces étoiles au cours de l'évolution, tels que le rayon ou la gravité de surface, sont cependant très importants dans le cadre de la problématique **1** *qui sera traitée dans la première partie de ce manuscrit. Nous mettrons ainsi l'accent sur le suivi des paramètres globaux au cours de l'évolution des étoiles de type solaire. Dans cette première partie, les chemins évolutifs et la structure interne des étoiles sont calculés avec le code d'évolution stellaire MESA (Paxton et al., 2011).*

Ensuite, nous développons un nouvel axe d'étude en proposant une méthode pour comprendre la nature des champs magnétiques dans les régions radiatives stellaires. Nous suivons ainsi la formation et l'évolution des champs magnétiques des étoiles de type solaire dans la section 2.3. Ce travail original en collaboration avec A. Astoul (également doctorante au département d'astrophysique du CEA de 2017 à 2020) nous sera d'une grande utilité pour aborder les problématiques **2** *et* **3** *dans la seconde partie de ce manuscrit. Pour cela, nous présentons au préalable dans la section 2.2 les différents phénomènes magnétiques et leur impact sur la dynamique de l'étoile.*

2.1 Évolution structurelle des étoiles de faible masse et de masse intermédiaire et paramètres globaux associés

2.1.1 Diagramme d'évolution stellaire de Hertzsprung-Russell

La figure 2.1 représente, de façon schématique et simplifiée, la globalité de l'évolution stellaire dans le diagramme de Hertzsprung-Russell. La position des étoiles dans le diagramme luminosité $L_\star$ de l'étoile en fonction de sa température effective $T_{\rm eff}$ est indiquée dans cette représentation le long de l'évolution de l'étoile une fois la fusion de l'hydrogène dans le cœur enclenchée. Nous nous intéressons dans ce chapitre aux étoiles dites de type solaire, qui sont de faible masse ($0.8\mathrm{M}_\odot \lesssim M_\star \lesssim 1.1\mathrm{M}_\odot$) et de masse intermédiaire ($1.1\mathrm{M}_\odot \lesssim M_\star \lesssim 8\mathrm{M}_\odot$), qui empruntent la branche des géantes rouges après leur passage sur la séquence principale.

Dans l'intérieur radiatif de l'étoile, considéré comme un corps noir, le gradient de température s'exprime comme :

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho L(r)}{64\pi\sigma r^2 T^3}, \tag{2.1}$$

avec σ la constante de Stefan-Boltzmann, r la distance au centre de l'étoile, T la température, κ l'opacité de l'étoile, et L la luminosité. Les grandeurs L et T peuvent également être définies à la surface de l'étoile :

- Dans ce cadre, le flux de chaleur traversant la surface de l'étoile s'exprime comme :

  $$F_R = \sigma T_{\rm eff}^4, \tag{2.2}$$

  définissant ainsi la température effective $T_{\rm eff}$. Le flux radiatif s'échappant de l'étoile est calculé géométriquement (nous nous référons aux notes de cours du professeur J. Christensen-Dalsgaard "Stellar Structure and Evolution" pour plus de précisions).
- La luminosité de surface correspond à la quantité d'énergie évacuée à la surface de l'étoile par radiation. La loi de radiation est :

  $$L_\star = 4\pi R_\star^2 \sigma T_{\rm eff}^4. \tag{2.3}$$

  Cette relation directe entre luminosité et rayon de l'étoile est une première mesure de la taille des étoiles, à condition de pouvoir mesurer une température effective et la luminosité bolométrique de l'étoile.

La température effective et la luminosité de l'étoile sont utilisées pour suivre le chemin évolutif d'une étoile dans le diagramme de Hertzsprung-Russell représenté en version simplifiée sur la figure 2.1. Dans ce diagramme, les principales phases évolutives des d'étoiles sont représentées : les étoiles sur la séquence principale sont des étoiles similaires au Soleil, dans le sens où elles brûlent de l'hydrogène dans leurs cœurs. Elles bifurquent une fois l'hydrogène épuisé au cœur vers la branche des géantes rouges pour les moins massives d'entre elles, en passant par la phase des sous-géantes. Pour ce type d'étoiles de moins de $8\mathrm{M}_\odot$ qui nous intéressent, les oscillations sont de nature similaire à celles du Soleil durant la RGB (voir Chapitre 3). Les étoiles massives, dont l'étude sort du cadre de cette thèse, deviendront des super-géantes avant d'exploser en supernovae gravitationnelle.

En revanche, la figure 2.1 représente un diagramme de Hertzsprung-Russell simpliste. Afin de pouvoir développer rigoureusement les étapes de l'évolution stellaire, nous ajoutons la figure 2.2, dont les données représentées sont calculées avec le code l'évolution stellaire « Modules for Experiments in Stellar Astrophysics » (MESA, Paxton et al., 2011). Cette figure contient les chemins évolutifs de deux étoiles de type solaire de 1 et 2 masses solaires ($\mathrm{M}_\odot$) dans le diagramme de Hertzsprung-Russell. Les différentes couleurs indiquent les différents états évolutifs que nous considérons dans la suite.

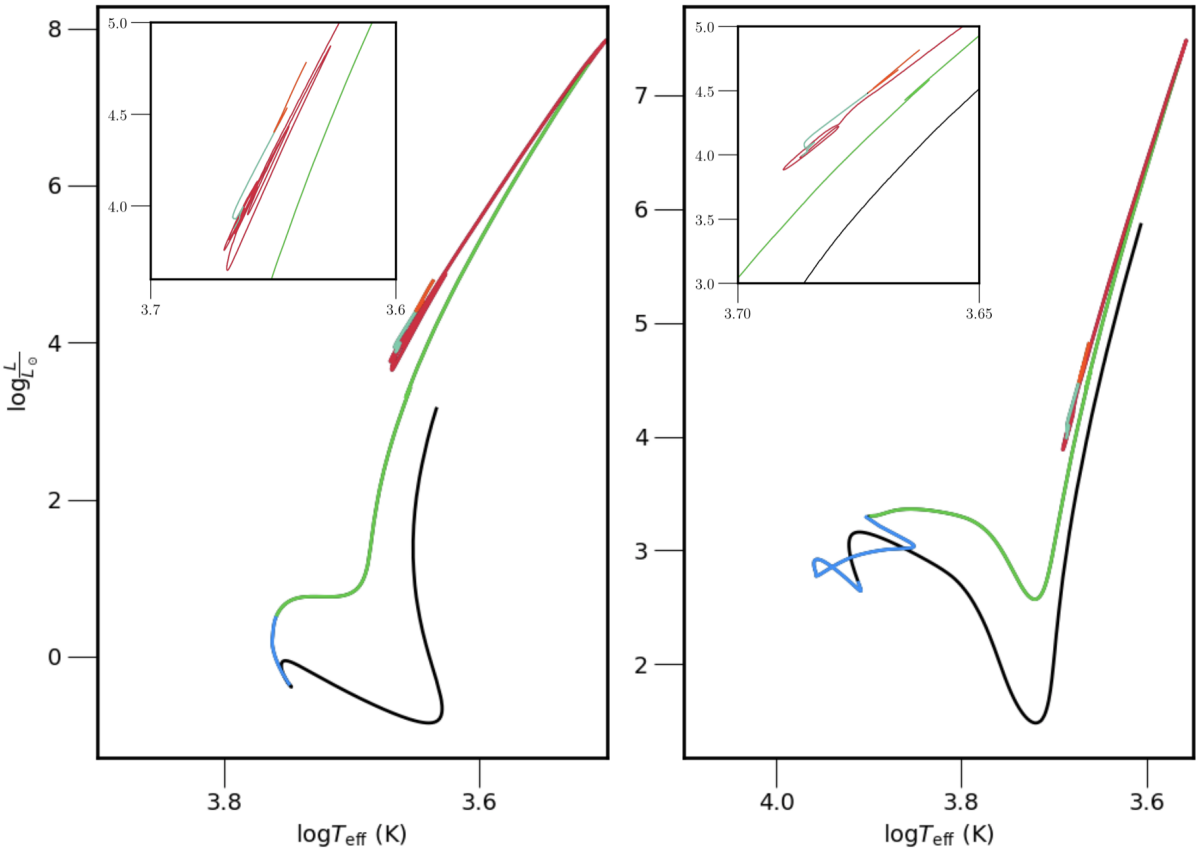


FIGURE 2.2: *Gauche :* Diagramme de Hertzsprung-Russell pour une étoile de $1\mathrm{M}_\odot$, et de métallicité solaire, avec un zoom sur la région des conséquences du flash de l'hélium détaillé dans la section 2.1.6. *Droite :* Même diagramme pour une étoile de $2\mathrm{M}_\odot$. Les chemins évolutifs ont été simulés en utilisant le code d'évolution stellaire MESA (Paxton et al., 2011). Les couleurs correspondent aux états évolutifs suivants : noir ⇔ chemin de Hayashi et pré-séquence principale, bleu ⇔ séquence principale et brûlage de l'hydrogène au cœur, vert ⇔ phases de sous-géantes et RGB et brûlage de l'hydrogène en couche, rouge ⇔ flash de l'hélium et ses conséquences, phases de transition entre la branche des géantes rouges et la branche horizontale (ou Red Clump pour les étoiles de métallicité proche de celle du Soleil car la branche horizontale est très peu parcourue), turquoise ⇔ branche horizontale et phase de brûlage de l'hélium au cœur et de l'hydrogène en couche, orange ⇔ début de la branche asymptotique et brûlage de l'hydrogène et de l'hélium en couches.

2.1.2 Effondrement du nuage moléculaire, chemin de Hayashi et pré-séquence principale (PMS)

Contraction du nuage moléculaire

Les étoiles résultent de la contraction gravitationnelle de nuages de gaz moléculaire sous l'effet d'une perturbation gravitationnelle, comme une onde de choc de supernova, ou bien une instabilité de flottaison qui génère une sur-densité locale. Le critère d'instabilité associé à la contraction d'un nuage moléculaire s'exprime en fonction de la masse de Jeans M_J, avec T la température du gaz, ρ sa densité, et μ le poids moléculaire moyen [1] du gaz (Kippenhahn et al., 2012) :

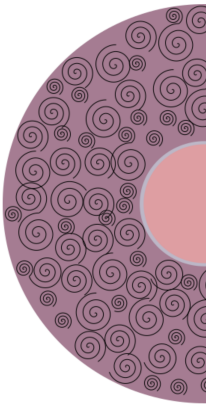
$$M_J = 1.1\mathrm{M}_\odot \left(\frac{\mathrm{T}}{10\mathrm{K}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\rho}{10^{-19}\mathrm{g.cm}^{-3}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu}{2.3}\right)^{-\frac{3}{2}}. \tag{2.4}$$

1. Le poids moléculaire moyen du gaz définit sa composition en hydrogène, en hélium et en éléments lourds.

Cette masse critique correspond à la masse maximale que le nuage peut accréter avant de s'effondrer sur lui-même gravitationnellement. Si cette masse critique est dépassée, le nuage devient donc instable. Cette instabilité a lieu pour des masses d'autant plus faibles que le nuage est froid et dense. Ce phénomène résulte de la comparaison entre le temps de chute libre du milieu $\tau_{\rm ff} = 1/(G\rho)$ dépendant de la densité du nuage, et le temps caractéristique nécessaire au milieu pour se réorganiser suite à une perturbation $t_{\rm son} = R/c_s$, avec R le rayon du nuage considéré sphérique, et c_s la vitesse du son dans le nuage. Si le temps nécessaire au milieu pour se stabiliser après le passage de la perturbation est plus court que le temps de chute libre, alors le nuage reste stable. Sinon, l'effondrement gravitationnel a lieu. L'expression 2.4 de M_J indique que plus un nuage est dense, plus la masse critique à atteindre pour que l'instabilité gravitationnelle se déclenche est faible : la formation des étoiles est isotherme, puisque le temps de contraction est bien inférieur au temps d'adaptation du fluide, et elle a lieu dans des lieux de sur-densité des nuages. À la fin de cette phase de contraction rapide, une étoile de masse $M_\star \lesssim 3{\rm M}_\odot$ est appelée étoile T-Tauri (Joy, 1945).

Chemin de Hayashi & pré-séquence principale (PMS)

Une fois initiée, la contraction devient adiabatique, et la luminosité de l'étoile diminue fortement tout en maintenant l'équilibre hydrostatique : c'est le chemin de Hayashi, quasiment vertical dans le diagramme de Hertzsprung-Russell. Durant cette étape évolutive, l'étoile est complètement convective (voir schéma à droite ($\longrightarrow$)). Ce chemin est bien défini pour une masse et une composition chimique définies, car il repose sur un critère de stabilité hydrostatique, où le gradient de température dans le fluide ∇ est égal au gradient adiabatique $\nabla_{\rm ad} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_S$, avec S l'entropie du gaz. Le chemin de Hayashi (en noir sur la figure 2.2) délimite ainsi deux zones.



- À plus haute température que l'état d'équilibre défini par le chemin de Hayashi, $\nabla < \nabla_{\rm ad}$: le gradient de température est sub-adiabatique dans le cœur, une zone radiative interne se développe.
- L'état superadiabatique $\nabla > \nabla_{\rm ad}$ supposément atteint pour une température plus faible que celle à l'état d'équilibre défini par le chemin de Hayashi n'est pas viable. De forts flux convectifs se mettraient en place, aplatissant aussitôt le gradient ∇ : aucune étoile à l'équilibre hydrostatique ne se trouve à droite du chemin de Hayashi correspondant à sa masse et à sa composition chimique.

Introduction au diagramme de Kippenhahn

Les panneaux du haut de la figure 2.3 contiennent deux diagrammes de Kippenhahn pour des étoiles de masse $M_\star = 1{\rm M}_\odot$ et $M_\star = 2{\rm M}_\odot$ à métallicité solaire (Z=0.02). Ces diagrammes indiquent la stabilité vis-à-vis de la convection à l'intérieur de l'étoile en fonction de la coordonnée en masse et de l'âge de l'étoile. Les zones bleues sont convectives, les zones blanches radiatives. En dessous sont réprésentées les courbes d'évolution du rayon de l'étoile durant la PMS. Le diagramme en rayon permet de visualiser la forte contraction de la proto-étoile durant la PMS, d'un facteur environ 10. À force de se contracter, l'étoile voit sa densité centrale devenir si importante que les rayonnements infrarouges ne peuvent plus s'en échapper. La température et la pression augmentent alors drastiquement dans le cœur, et l'évacuation de la chaleur se fait alors par radiation :

$$\nabla = \nabla_{\rm rad} = \frac{3}{64\pi G}\frac{\kappa p}{\sigma T^4}\frac{L(r)}{m(r)}. \tag{2.5}$$

Cela correspond à la formation d'un cœur radiatif, visible à partir de ~ 2.5 millions d'années (Ma) sur les panneaux supérieurs de la figure 2.3, et schématisé à droite du texte ($\longrightarrow$).

Lorsque la zone radiative interne est suffisamment conséquente (environ 45% du rayon de l'étoile), la température effective augmente : l'étoile se déplace à luminosité quasi-constante vers la gauche dans le diagramme de Hertzsprung-Russell. Cette évolution sur la pré-séquence principale se fait sur le temps caractéristique d'ajustement thermique de Kelvin-Helmoltz.

$$\tau_H = \frac{GM^2}{2RL} \propto M^{-5/2}, \tag{2.6}$$

d'autant plus court que l'étoile est massive.

2.1.3 Séquence principale (MS)

Initialisation des réactions de fusion nucléaire de l'hydrogène

Lorsque la température au cœur devient suffisante ($T \sim 10^6 K$), les premières étapes du cycle de réaction de fusion Carbone-Azote-Oxygène (CNO) commencent : la réaction de transformation du carbone en azote

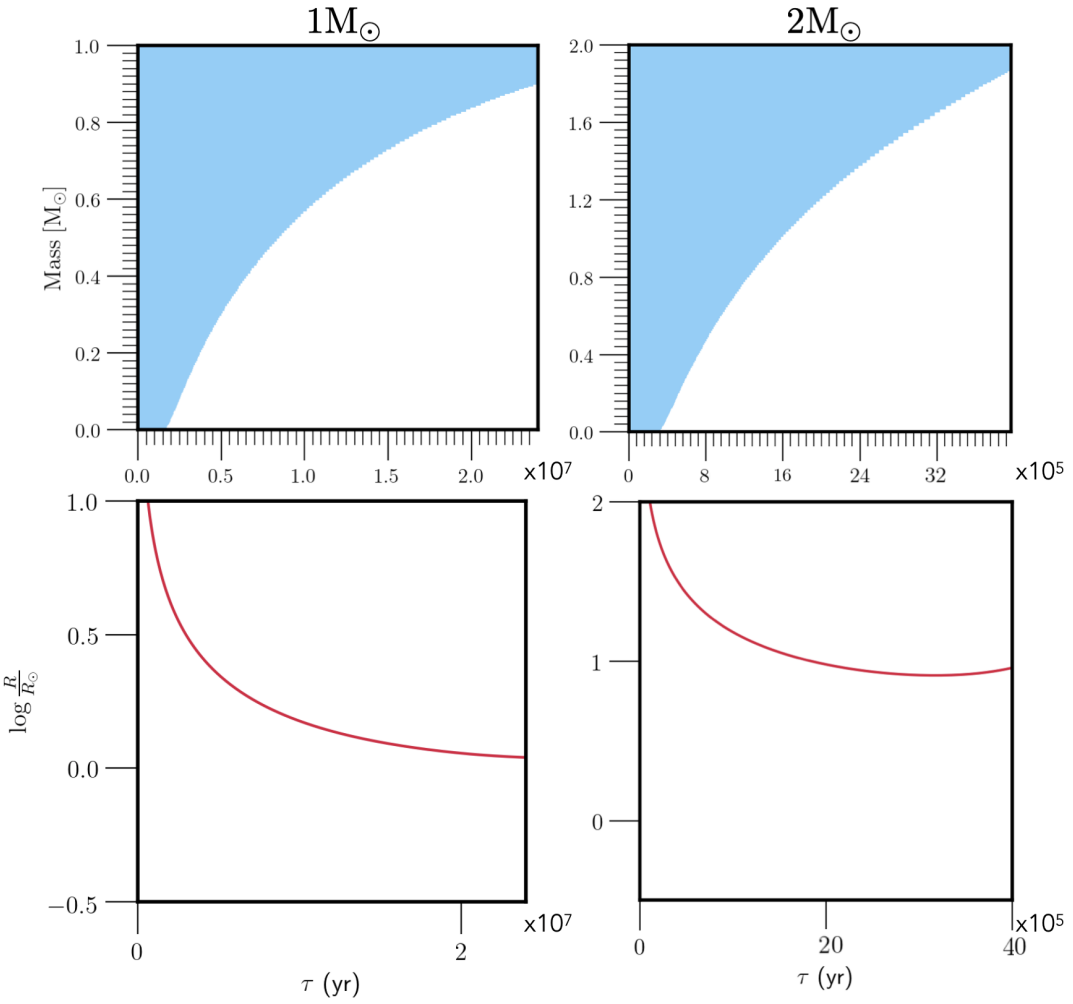


FIGURE 2.3: *Haut* : Diagrammes de Kippenhahn sur la pré-séquence principale. La structure interne de l'étoile est représentée selon l'état évolutif calculé par MESA : les zones bleues sont convectives tandis que les zones blanches sont radiatives. Dans ces modèles la pénétration convective n'est pas considérée. Le diagramme est représenté pour une étoile de $1M_\odot$ sur le panneau de gauche, et pour une étoile de $2M_\odot$ sur le panneau de droite. *Bas :* Évolution du rayon (normalisé à la valeur du rayon solaire) des deux étoiles le long de la PMS.

produit de l'énergie nucléaire très proche du centre de l'étoile. Cette réaction très exothermique conduit à la formation d'un petit cœur convectif à peine visible sur le panneau de gauche de la figure 2.4 (occupant les environ 2% les plus internes de la masse de l'étoile), qui stoppe la contraction de l'étoile. Lorsque la température atteint environ $10^7 K$, le cycle de réaction CNO se poursuit et se maintient pour les étoiles les plus massives ($M_\star \gtrsim 1.1 \mathrm{M}_\odot$) : catalysé par le carbone, utilisant des réactions d'échange de protons entre l'oxygène, l'azote, le carbone et l'hydrogène, il aboutit à la formation d'hélium par l'équation bilan :

$$4\,^1\mathrm{H} \longrightarrow {}^4\mathrm{He}.$$

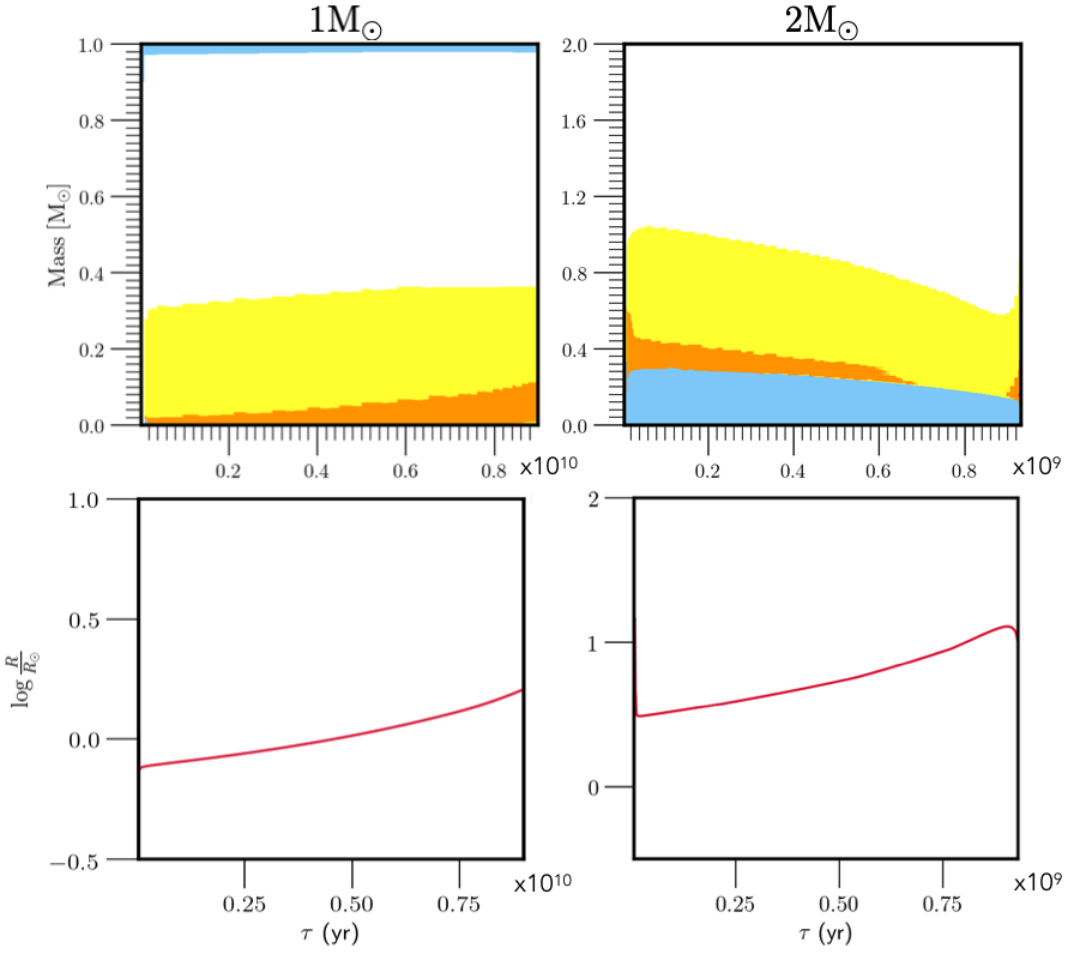
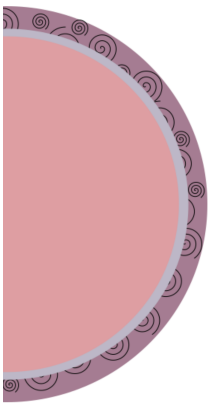
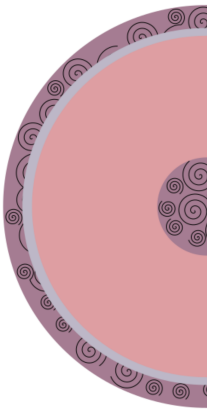


FIGURE 2.4: *Haut :* Diagramme en masse de Kippenhahn pour une étoile de $1\mathrm{M}_\odot$ (panneau de gauche) et de $2\mathrm{M}_\odot$ (panneau de droite) sur la séquence principale. La légende des zones bleues et blanches est la même que pour la figure 2.3. Les zones jaunes et oranges correspondent aux zones de fusion nucléaire avec un taux de production d'énergie supérieur à resp. 10^1, 10^2 erg.s^{-1}.g^{-1}. *Bas :* Évolution du rayon normalisé à la valeur solaire des deux étoiles le long de la MS.



Le cycle CNO ne peut en revanche se maintenir dans le cœur des étoiles les moins massives ($M_\star \leq 1.1\mathrm{M}_\odot$) dont le cœur est trop froid, et laisse plutôt place à la chaîne de fusion Proton-Proton conduisant également à la formation d'un atome d'hélium pour quatre atomes d'hydrogène. Cette distinction entre le mécanisme de fusion provoque une dichotomie de structure interne des étoiles durant la séquences principale. Les étoiles de faible masse ont un intérieur complètement radiatif (voir représentation schématique à gauche ($\longleftarrow$) et diagramme de Kippenhahn de gauche sur la figure 2.4), alors que les étoiles de masse intermédiaire développent et maintiennent un cœur convectif interne (voir représentation schématique à droite ($\longrightarrow$) et le diagramme de Kippenhahn de droite sur la figure 2.4).



Temps de vie des étoiles

Quel que soit le mécanisme de fusion, la formation d'hélium a pour conséquence un apport d'énergie nucléaire E_{nuc} et une pression du gaz associée qui contrebalance la force gravitationnelle. Le rayon et la structure de l'étoile restent alors quasi constants pendant cette étape évolutive de l'étoile qui est la plus longue (voir la faible évolution du rayon sur les panneaux du bas de la figure 2.4). Cette phase évolutive est appelée séquence principale, et sera notée MS (pour « main-sequence » en anglais). Les panneaux du haut de la figure 2.4 représentent les diagrammes de Kippenhahn en masse pour des étoiles de $1\mathrm{M}_\odot$ et $2\mathrm{M}_\odot$ sur la séquence principale. Les zones jaunes et oranges correspondent aux zones radiatives de fusion nucléaire avec un taux de production d'énergie nucléaire de resp. 10^1 et 10^2 erg.$g^{-1}.s^{-1}$.

Le temps de vie caractéristique d'une étoile sur la séquence principale est défini comme le temps nécessaire au brûlage de 10% de l'hydrogène de l'étoile, ce qui correspond approximativement à la quantité d'hydrogène accessible dans le cœur :

$$\tau_{\mathrm{nuc}} = \frac{E_{\mathrm{nuc}}}{L_\star} = 0.1\frac{\eta M_\star c^2}{L_\star} \tag{2.7}$$

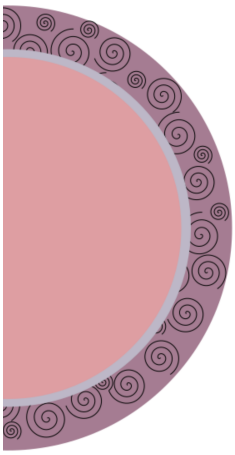
avec $L_\star$ la luminosité de l'étoile, η le rendement de la production d'énergie du cycle de fusion ($\eta = 0.7\%$ pour l'énergie produite par la fusion de H en He par rapport à l'énergie de masse disponible) et c la vitesse de la lumière. La masse et luminosité des étoiles sont reliées par la relation masse-luminosité mentionnée dans la section 1.2.2. Elle s'écrit classiquement comme

$$\frac{M_\star}{\mathrm{M}_\odot} = \left(\frac{L_\star}{\mathrm{L}_\odot}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{2.8}$$

l'exposant pouvant cependant varier selon les états évolutifs des étoiles (e.g. Wang & Zhong, 2018). Ainsi, en regard de la dépendance en masse et en luminosité du temps de réaction nucléaire par l'équation 2.7, plus l'étoile est massive plus sa durée de vie au premier ordre sur la séquence principale est courte.

2.1.4 Phase des sous-géantes (SG)

Déplétion d'hydrogène central : fin de la séquence principale



Lorsque l'hydrogène disparaît dans la zone de brûlage centrale, l'étoile doit se restructurer. Pour les étoiles de faible masse, qui possèdent un cœur radiatif durant toute la séquence principale, l'hydrogène est épuisé graduellement depuis le cœur vers les couches supérieures. En effet, sous l'effet de la contraction du cœur, la fusion se déplace vers l'extérieur, et l'étoile continue à brûler l'hydrogène « en couches ». Pour les étoiles plus massives qui possèdent un intérieur convectif, l'hydrogène dans toute la zone convective a supposément déjà fusionné, à cause de la convection qui ramène les éléments au cœur. Dans ce cas la fin de la séquence principale est plus brutale, signée par une brusque augmentation de température due à la contraction globale de l'étoile (voir l'évolution du rayon sur la figure 2.4) pour rétablir l'équilibre hydrostatique après la fin de la fusion centrale. Lorsque la pression redevient suffisante, la zone convective interne devient radiative, et l'hydrogène commence à brûler dans des couches plus externes.

Lorsque d'hydrogène commence à brûler en couches, la séquence principale laisse place à la courte phase de sous-géante, durant laquelle la température effective diminue fortement. Cette diminution de température effective est due à la restructuration de l'étoile. Sous l'effet de la contraction du cœur désormais constitué d'hélium inerte, les couches situées au-dessus deviennent plus chaudes (la température atteint $T \simeq 10^7$K) et la pression augmente. La température est ainsi suffisamment élevée pour que l'hydrogène fusionne en couche au dessus du cœur inerte. Sous l'effet de la production d'énergie dans la couche de fusion, l'enveloppe au-dessus n'a d'autre choix que de s'étendre en réponse à la contraction du cœur, car le gradient adiabatique fixé dans les régions convectives ne permet pas l'évacuation du surplus de chaleur. Par cet « effet miroir », les couches externes se dilatent, ce qui permet à la température de diminuer et à l'opacité d'augmenter. L'enveloppe convective occupe une fraction de la masse de l'étoile de plus en plus conséquente.

Cela conduit à une phase quasi-horizontale dans le diagramme de Hertzsprung-Russell, puisque la luminosité est quasi-équilibrée par la perte de température et l'augmentation du rayon de l'étoile. Finalement, cette courte phase de réajustement (sur la plage évolutive ~ 9 à 11 milliards d'années (Ga) pour une étoile de $1\mathrm{M}_\odot$) provoque une expansion de l'étoile d'un facteur 1.8 pour une étoile de $1\mathrm{M}_\odot$ (voir panneau en bas à gauche de la figure 2.5), légèrement moins pour les étoiles plus massives ($\simeq 1.4$ pour l'étoile de 2 $\mathrm{M}_\odot$). La durée de la phase des sous-géantes dépend fortement de la masse de l'étoile [2].

2.1.5 Branche des géantes rouges (RGB)

La branche des géantes rouges est l'état évolutif commun aux différents chapitres de ce manuscrit. De par l'ordre de grandeur des fréquences propres des modes propres d'oscillation de ces étoiles, et par leur nature mixte acoustique et de gravité qui permet de sonder les couches les plus profondes de l'étoile, les géantes rouges (RG) sont un excellent laboratoire pour la compréhension de la dynamique interne des étoiles de type solaire. Ces considérations physiques seront détaillées dans le chapitre 3. Nous nous concentrons ici dans un premier temps à caractériser cette étape évolutive du point de vue de la structure stellaire.

Après le déplacement horizontal de l'étoile dans le diagramme de Hertzsprung-Russell, nous pouvons observer les étoiles remonter dans le diagramme quasiment à T_{eff} constant. Ce changement de direction dans le diagramme de Hertzsprung-Russell provient du fait que la pression dans le cœur inerte d'hélium devient

2. Les étoiles massives ont un cœur d'hélium dépassant déja $\sim 10\%$ de la masse totale de l'étoile à la fin de la MS, correspondant à la limite de Schönberg-Chandrasekhar (Schönberg & Chandrasekhar, 1942). Cela implique que le cœur s'effondre beaucoup plus rapidement en dégageant une énergie provoquant l'expansion de l'enveloppe.

suffisamment forte dans les étoiles de masse intermédiaire ou de faible masse pour que le gaz soit dégénéré. Cet instant correspond au dépassement de la masse de Schönberg-Chandrasekhar pour les étoiles de faible masse ($M \lesssim 2\mathrm{M}_\odot$), lors duquel la densité de l'étoile devient très élevée. Pour que le principe d'exclusion de Pauli puisse être respecté par les fermions composant les atomes, les électrons libres peuplent les niveaux d'énergie plus élevés et le gaz est dégénéré. La pression de dégénérescence associée ne dépend alors plus de la température du gaz, et la loi des gaz parfait n'est plus valable. Pour les étoiles les moins massives, c'est cette pression de dégénérescence qui domine lors de la RGB, permettant de maintenir un équilibre hydrostatique et thermique tout au long de la branche. À partir de modèles d'évolution stellaire, nous pouvons établir que le temps passé sur la RGB pour une étoile de $1\mathrm{M}_\odot$ est de 700 millions d'années, beaucoup plus court que le temps de vie sur la MS. En revanche, pour les étoiles avec $M \gtrsim 2\mathrm{M}_\odot$, la densité est trop faible pour permettre au gaz d'être dégénéré, même si la masse de Schönberg-Chandrasekhar est dépassée : le cœur de l'étoile se contracte fortement sur la RGB, et cette étape évolutive est encore plus courte que pour les étoiles moins massives à l'équilibre.

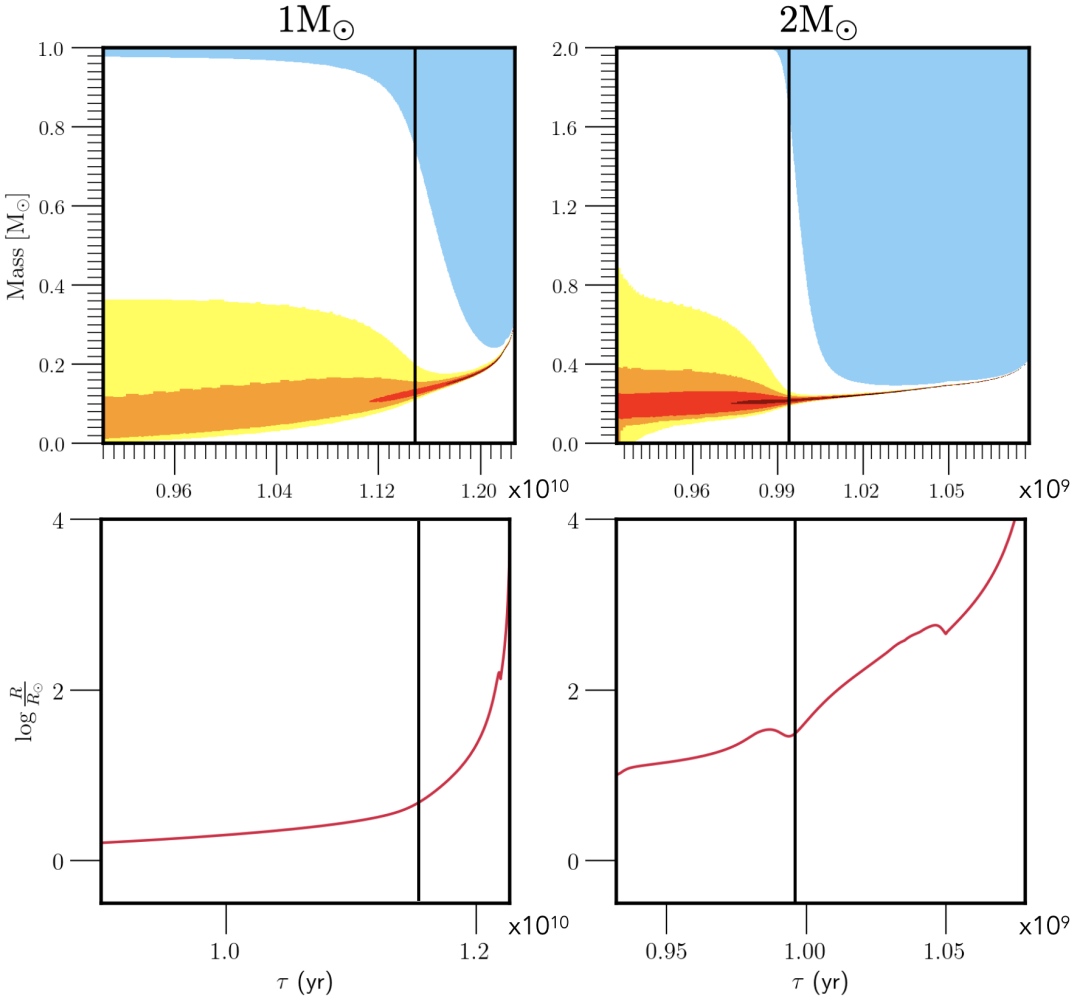
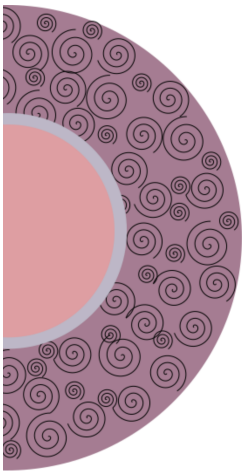


FIGURE 2.5: *Haut :* Diagramme en masse de Kippenhahn pour une étoile de $1\mathrm{M}_\odot$ (panneau de gauche) et $2\mathrm{M}_\odot$ (panneau de droite) entre la phase de sous-géante et la branche des géantes rouges. La légende est la même que pour la figure 2.3. Les zones jaunes, oranges, et rouges correspondent aux zones de fusion nucléaire avec un taux de production d'énergie supérieur à resp. 10^1, 10^2, 10^3 erg.s^{-1}.g^{-1}. La ligne noire indique sur chacun des panneau la transition entre le stade de sous-géante et la RGB. *Bas :* Évolution du rayon des deux étoiles depuis la phase des sous-géantes jusqu'en haut de la RGB. La ligne noire indique sur chacun des panneaux la transition entre le stade de sous-géante et la RGB.



Tout comme sur la phase des sous-géantes, la contraction du cœur sur la RGB implique la dilatation de l'enveloppe par effet miroir autour de la couche de brûlage de l'hydrogène. La dilatation de l'enveloppe est tout aussi large que le cœur est réduit : l'enveloppe des géantes rouges peut atteindre 75% de la masse d'une étoile de $1\mathrm{M}_\odot$ et son rayon peut être multiplié par 50 par rapport au rayon du Soleil. Ces deux phénomènes corrélés sont visibles sur le diagramme de Kippenhahn de la figure 2.5. La T_{eff} de l'étoile étant proche de la ligne de Hayashi, elle ne peut décroître fortement à l'équilibre hydrostatique. L'agrandissement de l'enveloppe ne se fait donc pas par un refroidissement mais plutôt par une augmentation de luminosité, le long d'un chemin proche de celui de Hayashi dans le sens inverse que sur la PMS. L'étoile n'étant pas complètement convective, le chemin est situé à plus haute température que celui emprunté lors de la PMS. Nous observons également dans les diagrammes de Kippenhahn de la figure 2.5 que la couche de brûlage de l'hydrogène s'amincit alors que l'étoile évolue sur la RGB : cela est dû au fait que l'augmentation de la température centrale par contraction réchauffe également la couche de fusion. Cela permet au cycle CNO de s'enclencher à la place de la chaine p-p, qui se fait dans une couche plus étroite (Hekker et al., 2017).

Le dredge-up de la RGB

À force de s'enfoncer dans l'étoile, l'enveloppe convective finit par atteindre un rayon dans l'étoile où la composition chimique a été modifiée par les réactions de fusion lors de la séquence principale. La convection remonte ces nouveaux éléments générés par le cycle de fusion jusqu'à la surface : c'est le premier dredge-up, non visible dans les diagrammes de Hertzsprung-Russell de la figure 2.2. C'est grâce à ce mécanisme que les produits de la fusion sont détectables par spectroscopie. Salaris et al. (2015) et Lagarde et al. (2017) montrent que l'abondance de l'hydrogène à la surface diminue, l'abondance de l'hélium et du carbone diminuent, et celle de l'azote augmente. La proportion des isotopes du carbone varie également pour les étoiles dont la fusion de l'hydrogène s'effectuait par le cycle CNO sur la séquence principale.

Le Bump des géantes

Pour les étoiles les moins massives[3], l'enveloppe convective s'enfonce très profondément dans l'étoile, comme expliqué dans le paragraphe précédent. Cependant, cette expansion est limitée par la présence sous-jacente de la couche d'hydrogène en fusion qui tend à s'éloigner du cœur et repousse l'enveloppe. La couche en fusion, poursuivant son déplacement radial, finit donc par rencontrer une zone de l'étoile ayant été préalablement affectée par la convection de l'enveloppe, beaucoup plus riche en hydrogène que le milieu de fusion habituel. Par conséquent, le poids moléculaire de la couche de fusion diminue, faisant également chuter la luminosité de l'étoile, jusqu'à ce que l'excédent d'hydrogène ait fusionné et que l'étoile reprenne sa montée dans le diagramme de Hertzsprung-Russell. Ce Bump est visible sur les diagrammes de Hertzsprung-Russell de la figure 2.2 ainsi que sur les diagrammes de Kippenhahn de la figure 2.5.

Perte de masse de l'enveloppe

Pendant la phase des géantes rouges, l'enveloppe de l'étoile grossit fortement, comme nous pouvons le constater via l'augmentation considérable des rayons sur les panneaux inférieurs de la figure 2.5. Cette extension éloigne les couches superficielles du centre de gravité de l'étoile : elles sont moins soumises à la gravité de l'étoile, et donc plus susceptibles de se détacher de l'étoile, entraînées par le vent stellaire magnétisé. *L'évolution de la gravité de surface des étoiles de type solaire, proxy de leur âge durant la branche des géantes rouges, fait l'objet du chapitre 4.*

3. Ce Bump n'a pas lieu pour les étoiles massives puisque l'enveloppe ne s'étend pas aussi profondément dans l'étoile.

La perte de masse de l'enveloppe des RG est un phénomène bien connu mais mal évalué tout au long de l'évolution des étoiles. Elle est quantifiée en masse solaire par an par Reimers (1975) [4], en fonction de la masse de l'étoile, de sa luminosité et de son rayon à partir de la relation masse-luminosité :

$$\dot{M} = 4 \times 10^{-13} \eta_R \frac{L_\star R_\star}{M_\star}, \tag{2.9}$$

avec η_R un paramètre proche de l'unité qui représente l'efficacité de la perte de masse. Par la dépendance en rayon et en masse de l'étoile, cette formule indique que les étoiles les moins massives et les plus évoluées sont les plus affectées par la perte de masse sur la RGB. Ainsi, les modèles d'évolution stellaire indiquent une perte de masse pouvant aller jusqu'à 30% pour une étoile de $1\mathrm{M}_\odot$, alors que les étoiles plus massives ne perdent que quelques pourcents de leur masse. La perte de masse n'est pas prise en compte dans les modèles d'évolution stellaire MESA utilisés pour représenter les diagrammes de Hertzsprung-Russell et de Kippenhahn dans cette section par soucis de simplicité, et également parce que le taux de perte de masse n'est pas toujours bien connu le long de l'évolution.

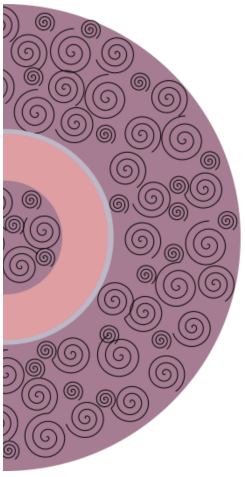
2.1.6 Branche horizontale ou Clump (RC)

Lorsque la contraction du cœur de l'étoile est suffisante pour atteindre une température centrale de l'ordre de 10^8K, l'hélium entre en fusion. La réaction triple alpha en deux étapes s'écrit comme suit, avec ν un neutrino et γ le rayonnement gamma, pour un bilan énergétique de $7.367\mathrm{Mev}$:

$$^4\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He} \Longleftrightarrow {}^8\mathrm{Be} + \mathrm{photon} \tag{2.10}$$

$$^8\mathrm{Be} + {}^4\mathrm{He} \Longleftrightarrow {}^{12}C + \gamma \tag{2.11}$$

Le béryllium (Be) étant très instable, il se décompose à nouveau spontanément en deux atomes d'hélium très rapidement. La production d'énergie par la première étape de la fusion de l'hélium seulement ne dégage que très peu d'énergie, insuffisante pour aboutir à une restructuration de l'étoile. À force de contraction, la température se maintient à $\sim 10^8$K, permettant à la deuxième étape de s'enclencher, et de former du carbone. L'hydrogène ne s'arrête pas de brûler en couche pour autant, comme nous pouvons le voir sur les diagrammes de Kippenhahn de la figure 2.6. Il y a donc deux zones de fusion dans l'étoile, dont la position dépend de la masse de l'étoile.



- Pour les étoiles les moins massives ($M \lesssim 2\mathrm{M}_\odot$), le cœur d'hélium est dégénéré sur la RGB. Cette dégénérescence implique qu'un changement de température ne conduit pas à une restructuration de l'étoile. Sous l'effet de la fusion de l'hélium, le cœur chauffe donc fortement, incapable de se réajuster. Lorsque la température est suffisamment élevée, la dégénérescence est levée brutalement, et par conséquent le cœur se contracte brutalement. C'est le flash de l'hélium visible sur le diagramme en haut à gauche de la figure 2.6. Ce flash, qui n'a pas été observé directement, semble avoir lieu à une couche située à $\frac{m}{M_\star} \simeq 0.2$. La dégénérescence n'est donc que partiellement levée, dans une coquille au-dessus du cœur dégénéré.

La température augmentant, une série de sous-flashs s'étendant sur $\sim$ 2Ma lève petit à petit la dégénérescence en coquille jusqu'à atteindre le cœur. Durant ce processus, le cœur de l'étoile se dilate

4. D'autres expressions de la perte de masse existent, comme celle provenant d'une approche plus physique de Schroder & Cuntz (2007), qui repose sur un équilibre énergétique du vent solaire.

(voir l'évolution du rayon associée sur la figure 2.6). Par effet miroir inversé par rapport à la RGB, l'enveloppe se contracte, impliquant ainsi une baisse de luminosité et de température de l'étoile. Une fois la fusion de l'hélium initiée, l'étoile entre sur la branche horizontale ou « red clump » (RC). La fusion est fortement concentrée au niveau du centre de l'étoile, permettant la création d'un cœur convectif. L'évolution de l'étoile sur le RC est quasi-stationnaire dans le diagramme de de Hertzsprung-Russell.

- Pour les étoiles les plus massives ($M_\star \gtrsim 2\mathrm{M}_\odot$), le cœur d'hélium n'est pas dégénéré : la fusion de l'hélium en carbone s'enclenche de façon beaucoup plus douce, sans emballement thermonucléaire (panneaux de droite de la figure 2.6). L'effet miroir joue également, comprimant l'enveloppe en réponse à la dilatation du cœur. Une fois la fusion de l'hélium commencée, l'étoile entre sur le clump secondaire, et acquiert également un cœur convectif. Le clump secondaire présente une dispersion plus importante dans le diagramme de Hertzsprung-Russell que le RC contenant les étoiles moins massives qui ont subi le flash de l'hélium.

Durant les phases évolutives précédentes, les étoiles les moins massives évoluent le plus lentement. Cependant, en raison de la fusion de l'hélium pendant les phases de flash, les étoiles les moins massives consomment

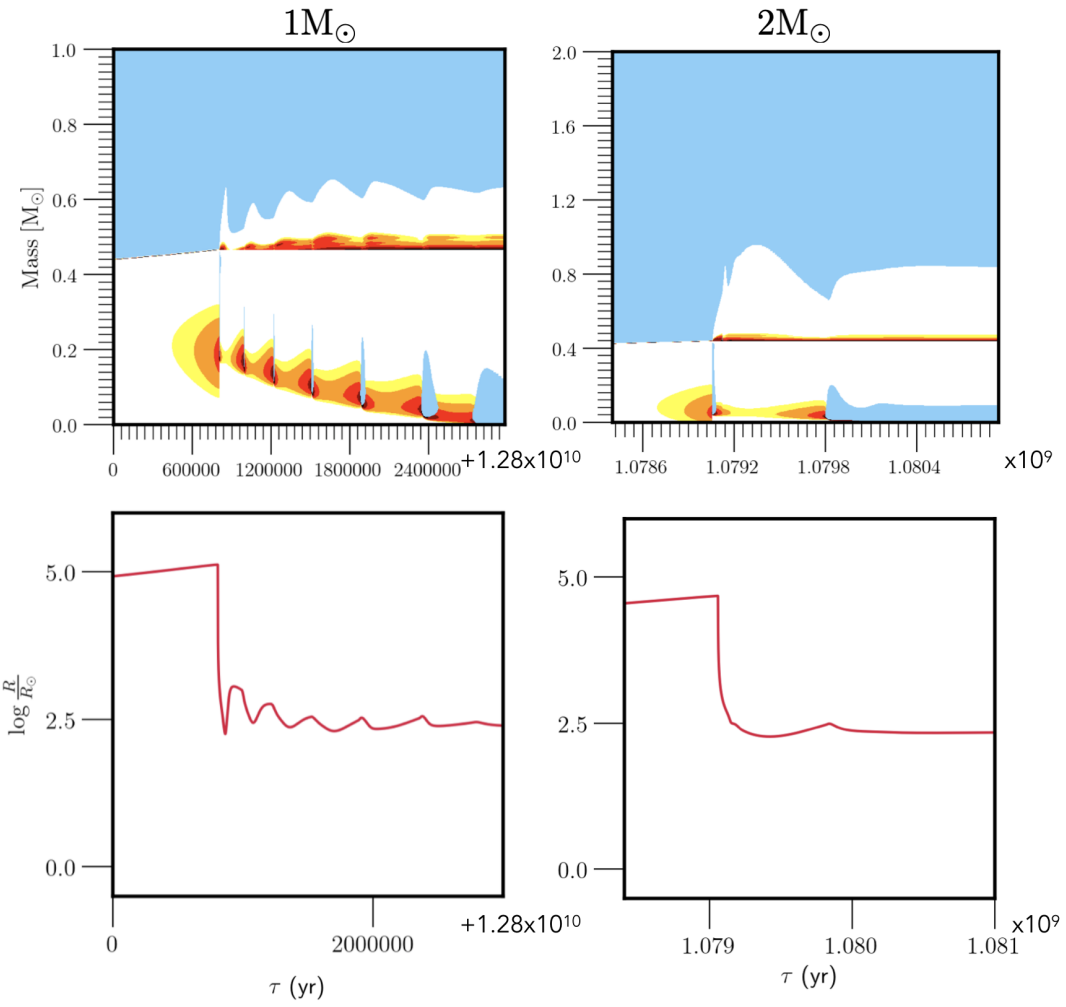


FIGURE 2.6: *Haut :* Diagramme en masse de Kippenhahn pour une étoile de $1\mathrm{M}_\odot$ (panneau de gauche) et $2\mathrm{M}_\odot$ (panneau de droite) durant la transition RGB/RC. La légende est la même que pour la figure 2.3. Les zones jaune, orange, rouge, et marron correspondent aux zones de fusion nucléaire avec un taux de production d'énergie supérieur à resp. 10^1, 10^2, 10^3, 10^4 erg.s^{-1}.g^{-1}. *Bas :* Évolution du rayon normalisé de l'étoile le long de la phase de transition entre la RGB et le clump, pour $1\mathrm{M}_\odot$ sur le panneau de gauche et pour $2\mathrm{M}_\odot$ pour le panneau de droite.

l'hélium plus rapidement dans leur cœur. Elles ne passent donc pas plus de temps que les étoiles plus massives dans la phase du clump, qui est représentée dans les diagrammes de Kippenhahn sur la figure 2.7. L'ordre de grandeur temporel lié à la branche asymptotique est de 100 millions d'années.

Les étoiles du Clump peuvent être difficiles à distinguer des géantes rouges par l'estimation de leur simples paramètres globaux comme la température effective ou la luminosité, puisque l'hyperespace des paramètres recoupe celui des étoiles de la RGB. *La détection des modes d'oscillation mixtes acoustiques et de gravité permet tout de même de distinguer les deux types de géantes (Bedding et al., 2011). Nous montrerons au chapitre 4 que les signaux de convection de surface sont très similaires entre ces deux types d'étoiles, conduisant à une gravité de surface du même ordre de grandeur entre les étoiles du Clump et celles se situant dans la même région du diagramme de Hertzsprung-Russell mais appartenant à la* RGB.

2.1.7 Branche asymptotique (AGB)

À la fin de la branche horizontale, l'hélium est épuisé au cœur. De façon très similaire au démarrage de la combustion de l'hydrogène en couche pendant la phase des sous-géantes, l'hélium soumis à des températures

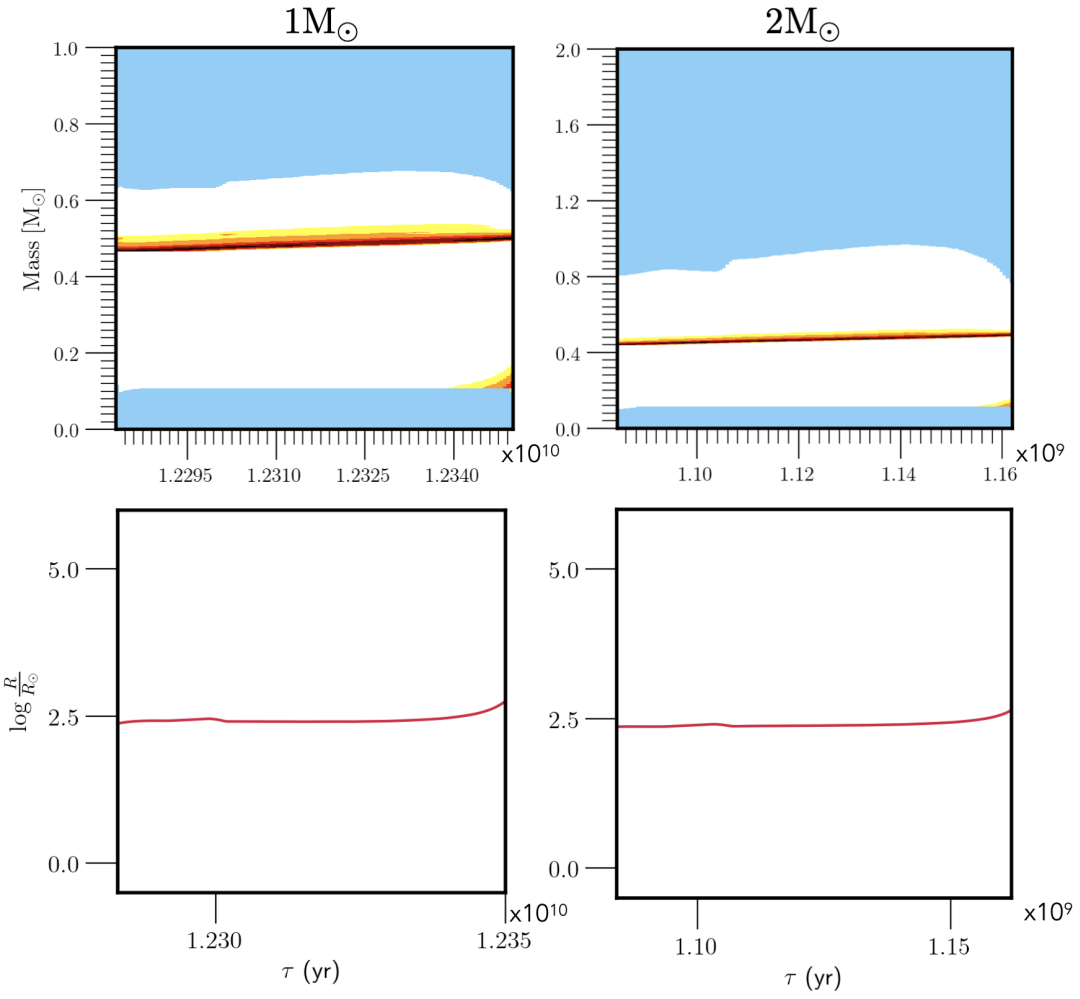


FIGURE 2.7: *Haut :* Diagramme en masse de Kippenhahn pour une étoile de $1\mathrm{M}_\odot$ (panneau de gauche) et $2\mathrm{M}_\odot$ (panneau de droite) durant la fin de la RGB et la branche horizontale. La légende est la même que pour la figure 2.3. Les zones jaune, orange, rouge et marron correspondent aux zones de fusion nucléaire avec un taux de production d'énergie supérieur à resp. 10^1, 10^2, 10^3, 10^4 erg.s^{-1}.g^{-1}. *Bas :* Évolution du profil du rayon normalisé des deux étoiles considérées durant la branche horizontale.

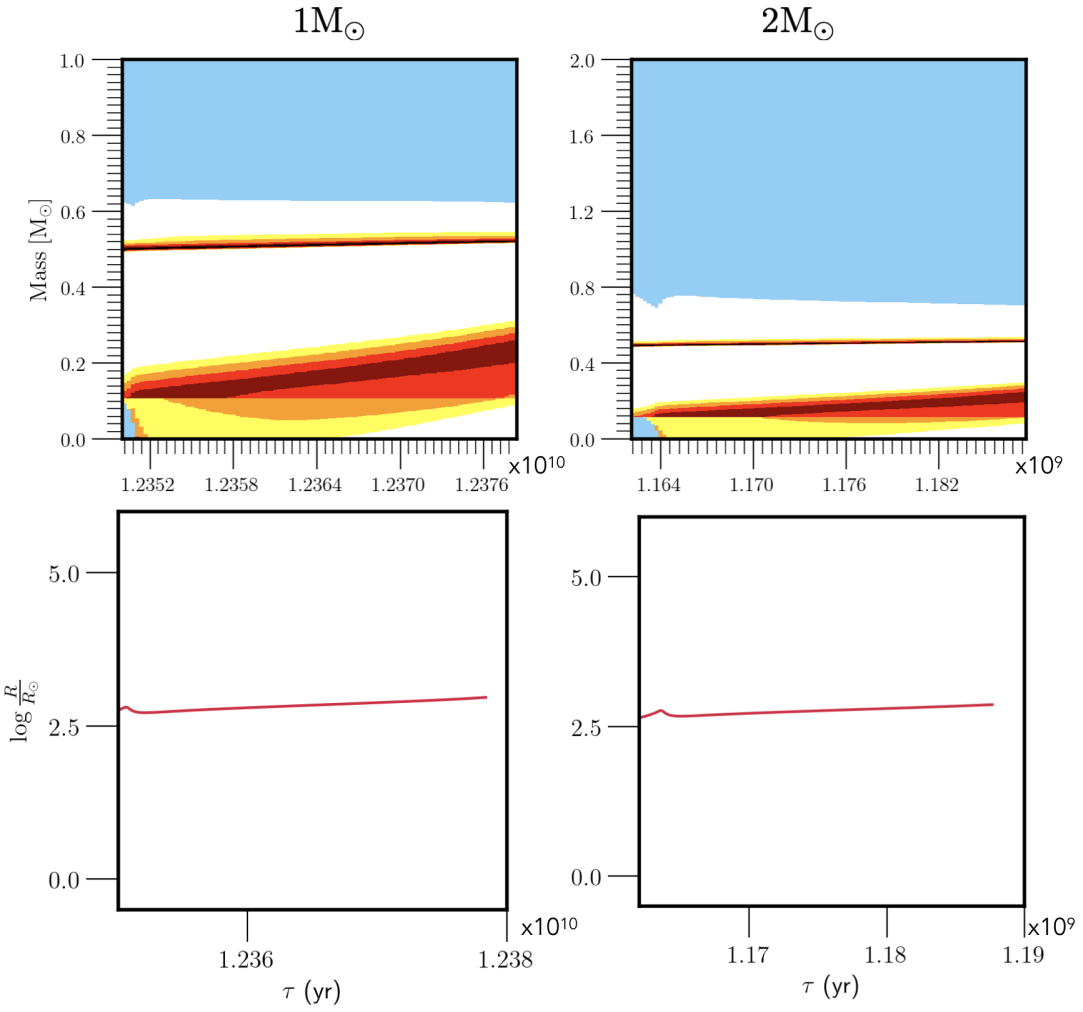


FIGURE 2.8: *Haut :* Diagramme en masse de Kippenhahn pour une étoile de $1M_\odot$ (panneau de gauche) et $2M_\odot$ (panneau de droite) au début de la branche asymptotique des géantes. La légende est la même que pour la figure 2.3. Les zones jaune, orange, rouge et marron correspondent aux zones de fusion nucléaire avec un taux de production d'énergie supérieur à resp. 10^1, 10^2, 10^3, 10^4 erg.s^{-1}.g^{-1}. *Bas :* Évolution du profil du rayon normalisé des deux étoiles considérées durant la branche asymptotique.

fortes à cause de la contraction du cœur peut brûler en couches au-dessus du cœur de carbone inerte. La fusion de l'hydrogène en couche au-dessus de la coquille de fusion de l'hélium est toujours présente. La branche asymptotique des géantes est donc caractérisée par une double fusion en couche (voir diagrammes de Kippenhahn sur la figure 2.8). La fusion de l'hélium devient alors la principale source d'énergie de l'étoile, faisant augmenter sa luminosité selon un chemin de Hayashi inverse, similaire à celui de la RGB, avec une température légèrement supérieure puisque la masse de l'enveloppe a diminué. La loi de perte de masse de Reimers (Reimers, 1975) évoquée durant la phase RGB est également utilisée pour modéliser la perte de masse des étoiles durant la AGB (Bloecker & T., 1995).

Les étoiles de la AGB sont les étoiles les plus évoluées pour lesquelles des modes d'oscillation de type solaire ont été observés (e.g. Corsaro et al., 2012; Mosser et al., 2014). Nous verrons au chapitre 4 que ces étoiles très lumineuses ont un signal de granulation permettant de mesurer leur gravité de surface, comme c'est le cas pour les étoiles de type solaire plus jeunes. Le chapitre 3 indiquera la difficulté d'étude directe des modes d'oscillation de ces étoiles, car leur basse fréquence rend difficile l'obtention d'une bonne résolution des données.

2.1.8 Fin de vie

La fin de vie des étoiles de faible masse et de masse intermédiaire ($M \leq 8\mathrm{M}_\odot$) s'effectue sous la forme d'un cœur de carbone et d'oxygène inerte, lorsque la combustion de l'hélium est terminée et que la quasi-totalité de l'enveloppe s'est échappée par le vent stellaire, repoussée par la combustion de l'hydrogène en couche de plus en plus proche de la surface. L'enveloppe se rétracte alors vers le cœur, augmentant la température effective. Durant environ 10^4 années, l'étoile se déplace horizontalement dans le diagramme de Hertzsprung-Russell vers les hautes températures en perdant son enveloppe. Elle devient alors une naine blanche, dont la seule évolution thermodynamique résulte de son refroidissement.

Les naines blanches sont d'excellents laboratoires d'étude du cœur des étoiles dont elles résultent. Ainsi, une naine blanche pourrait avoir conservé les propriétés magnétiques du cœur des géantes rouges ou bien du coeur des étoiles de la branche horizontale, permettant un accès direct aux propriétés de ce champ. La présence de certaines naines blanches fortement magnétisées (Angel et al., 1981; Braithwaite & Spruit, 2004) évoquées dans l'introduction de ce manuscrit pointe donc vers un magnétisme interne prenant place dans les phases antérieures de la vie de l'étoile. La mise au point des outils sismiques pour la recherche d'un tel magnétisme interne sera menée dans les chapitres 6 et 7.

2.1.9 Reconnaissance des stades évolutifs par l'estimation des paramètres physiques globaux

Une position ($T_{\rm eff}, L_\star$) dans le diagramme de Hertzsprung-Russell peut correspondre à plusieurs combinaisons de paramètres stellaires globaux (âge, masse, rayon, métallicité, etc.) car les étoiles de différentes masses et métallicités ne suivent pas exactement le même chemin évolutif. Ainsi, la simple position de l'étoile dans le diagramme de Hertzsprung-Russell n'est pas suffisante pour contraindre ses propriétés. Il est pourtant très important de caractériser globalement les étoiles afin de comprendre les observations, et les signatures de phénomènes dynamiques de surface et internes dans les données. La figure 2.9 représente les chemins évolutifs de sept étoiles, avec la masse parmi $M_\star = [1, 1.5, 2, 3]$ $\mathrm{M}_\odot$ et la métallicité parmi $Z = [0.0002, 0.002, 0.02, 0.04]$, calculés avec MESA (Paxton et al., 2011). Nous observons en effets que plusieurs étoiles de paramètres globaux et âges complètement différents peuvent se situer aux mêmes points dans le diagramme de Hertzsprung-Russell.

Il est donc nécessaire de disposer de méthodologies différentes pour estimer par ailleurs la masse, le rayon, ou encore l'état évolutif de l'étoile observée. Pour cela, la spectroscopie et l'astérosismologie (qui sera développée dans le chapitre 3) sont les deux méthodes les plus précises pour l'estimation des paramètres stellaires globaux, avec l'aide précieuse de l'astrométrie (provenant en particulier des donnés de la mission Gaia). Elles ne sont en revanche pas toujours applicables, comme nous le préciserons au chapitre 4. Dans ce cadre, nous développerons dans le chapitre 4 une nouvelle méthodologie reposant sur une étude photométrique des étoiles pour l'estimation des paramètres globaux des étoiles, avec une attention particulière portée sur l'estimation de la gravité de surface.

Les chemins évolutifs des étoiles massives (qui n'ont pas été présentées dans cette section introductive) peuvent eux aussi recouper les trajets des étoiles de faible masse. Au chapitre 5, l'effort sera mis sur la détection des étoiles de type solaire parmi les différentes étoiles pulsantes dans le diagramme de Hertzsprung-Russell.

Dans la section suivante, nous présentons les phénomènes physiques donnant lieu à la formation et à l'évolution des champ magnétiques dans les intérieurs stellaires.

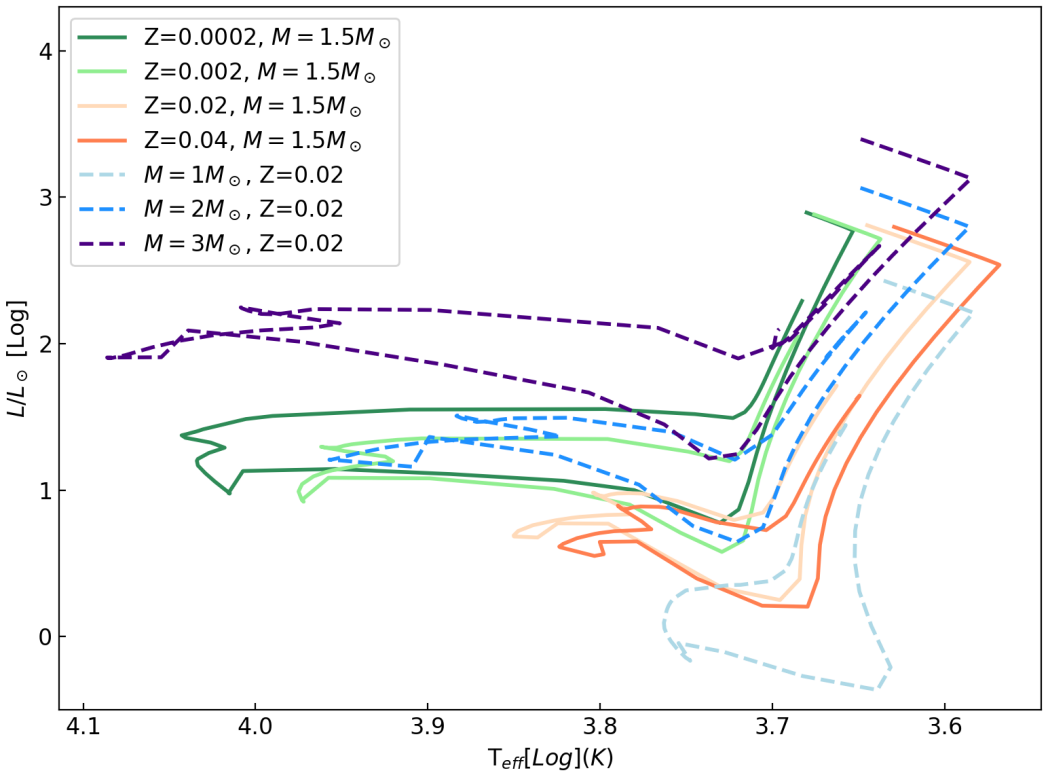


FIGURE 2.9: Chemins évolutifs de sept étoiles modélisées par le code MESA avec des masses et des métallicités différentes dans le diagramme de Hertzsprung-Russell.

2.2 Plasmas magnétisés : origine et évolution des champs magnétiques stellaires

Dans cette seconde section, nous présentons les phénomènes magnétiques qui ont été ignorés dans la description précédente de l'évolution stellaire de la section 2.1. La section 2.3 visera ensuite à donner une vision de l'évolution stellaire en prenant en compte les phénomènes dynamiques, incluant le magnétisme. Les effets du magnétisme seront ainsi considérés tant pour les aspects d'évolution structurelle (Duez et al., 2010b) que rotationnelle (e.g. Spruit, 1999; Mathis & Zahn, 2005; Maeder & Meynet, 2003; Eggenberger et al., 2005; Heger et al., 2005; Fuller et al., 2019). Pour ce faire, une vision de l'évolution des champs le long de l'évolution sera proposée (Augustson et al., 2019; Astoul et al., 2019).

Dans un fluide magnétisé, les équations de la magnétohydrodynamique (MHD) s'écrivent à partir des équations de Maxwell, de Faraday et de l'hydrodynamique comme :

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \underbrace{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}}_{\text{advection du gaz}}\right] = -\underbrace{\nabla p \boldsymbol{e}_r}_{\text{pression gazeuse}} - \underbrace{\frac{\nabla B^2}{2\mu}\boldsymbol{e}_r}_{\text{pression magnétique}} + \underbrace{\frac{(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{B}}{\mu}}_{\text{tension magnétique}} + \underbrace{\rho\boldsymbol{g}}_{\text{gravité}} + \underbrace{\rho\nu\nabla^2\boldsymbol{v}}_{\text{Force visqueuse}}$$

Équation de Navier Stokes

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \underbrace{\boldsymbol{\nabla}\wedge(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})}_{\text{advection du champ magnétique}} + \underbrace{\eta\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{B}}_{\text{diffusion magnétique}}$$

Équation de l'induction

avec ρ la densité du fluide, ν la viscosité généralement turbulente, p la pression du gaz, $\boldsymbol{g}$ le champ de gravité, et $\eta = \frac{1}{\mu\sigma}$ la diffusivité magnétique avec σ la conductivité du plasma. Par analogie avec le nombre de Reynolds hydrodynamique, le nombre de Reynolds magnétique R_m s'écrit comme le ratio de l'advection du champ magnétique et de la diffusion magnétique définies dans l'équation de l'induction. Ainsi, nous avons :

$$R_m = \frac{VL}{\eta}, \tag{2.12}$$

avec L et V l'échelle typique de distance et la vitesse associés à l'écoulement.

Dans la limite $R_m \gg 1$, souvent utilisée pour la modélisation des systèmes astrophysiques, on se place dans l'approximation de la MHD idéale pour laquelle l'équation de l'induction est réduite à :

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \simeq \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B})}_{\text{advection magnétique}} . \tag{2.13}$$

Dans ce cadre, les lignes de champ magnétique sont figées dans le plasma, comme le démontre le théorème d'Alfvén. Le flux magnétique traversant une surface de fluide est alors constant dans le temps.

Les équations de la MHD étant désormais introduites, nous examinons les mécanismes de génération et de dissipation des champs magnétiques stellaires.

2.2.1 Principe général de l'effet dynamo

Les observations du magnétisme à la surface du Soleil et des étoiles disposant d'une enveloppe convective indiquent la présence d'un champ magnétique de grande échelle, structuré et cohérent (sur des échelles de temps de l'ordre du mois, variant sur des échelles de temps de l'ordre de ~ 10 ans pour le Soleil, Charbonneau & Smolarkiewicz, 2013). Ces champs dans les zones convectives ont des topologies et temps caractéristiques d'évolution corrélés avec la masse, l'âge, et la période de rotation de l'étoile (Brun & Browning, 2017). Cela est caractéristique des champs dynamo, générés et maintenus par le fluide conducteur contre la dissipation ohmique. Afin d'expliquer ce champ de grande échelle spatiale et temporelle, un mécanisme d'amplification du champ magnétique existant, provenant des phases antérieures de la formation de l'étoile, est donc nécessaire.

La dynamo magnétique cinématique consiste en l'amplification auto-entretenue du champ magnétique par un champ de vitesse $\boldsymbol{v}$ via l'équation de l'induction. Le champ de vitesse à l'origine de la création de champ se doit d'être solution des équations hydrodynamiques incluant la force de Lorentz, et il doit également être cohérent avec les champs de vitesses observés. Le champ moyen de vitesse observé dans l'enveloppe convective du Soleil est différentiel en rayon et en latitude : $v_\varphi(r,\theta) = r\sin\theta\Omega(r,\theta)$. Ce champ de vitesses correspond à la rotation différentielle de l'étoile, en négligeant toute circulation méridienne.

Équation en champ moyen

En séparant les quantités moyennées ($\overline{\square}$) des fluctuations associées à la turbulence ($\square'$), c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v'}, \text{ et } \boldsymbol{B} = \overline{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{B'},$$

l'équation de l'induction s'écrit pour le champ moyen comme :

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \simeq \boldsymbol{\nabla} \wedge \left(\overline{\boldsymbol{v}} \wedge \overline{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{\varepsilon} - \eta \boldsymbol{\nabla} \wedge \overline{\boldsymbol{B}}\right). \tag{2.14}$$

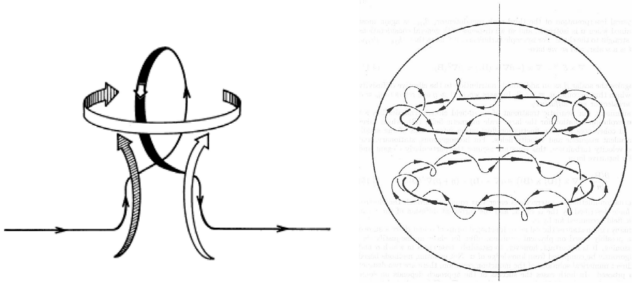


FIGURE 2.10: Représentation schématique de l'effet α sur une ligne de champ poloïdale à gauche, et globalement dans l'étoile à droite. Crédits : Parker.

Au premier ordre, l'équation pour les fluctuations dues à la convection s'écrit :

$$\frac{\partial \boldsymbol{b'}}{\partial t} \simeq \boldsymbol{\nabla} \wedge \left(\overline{\boldsymbol{v}} \wedge \boldsymbol{b'} + \boldsymbol{v'} \wedge \overline{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{v'} \wedge \boldsymbol{b'} - \boldsymbol{\varepsilon} - \eta \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{b'} \right). \tag{2.15}$$

La force électro-motrice moyenne (f-e-m, ε) contenue dans ce système d'équations est l'ingrédient clé pour la dynamo magnétique. Elle est définie comme :

$$\varepsilon = \overline{\boldsymbol{v'} \wedge \boldsymbol{B'}}. \tag{2.16}$$

Si $\overline{\boldsymbol{v}}$ et $\boldsymbol{v'}$ sont connues, alors l'équation 2.14 est linéaire en $\overline{\boldsymbol{B}}$, avec $\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}$ agissant comme un terme source linéaire en $\boldsymbol{b'}$. De la même façon, si $\boldsymbol{v'}$ est connue, alors l'équation 2.15 est linéaire en $\boldsymbol{b'}$, avec $\boldsymbol{v'} \wedge \overline{\boldsymbol{B}}$ agissant comme terme source linéaire en $\overline{\boldsymbol{B}}$. Ainsi la f-e-m moyenne peut s'écrire au premier ordre comme un dévelopement linéaire en $\overline{\boldsymbol{B}}$, avec α_{ijk}, βijk dépendant des propriétés du fluide mais indépendant du champ moyen :

$$\varepsilon \simeq \alpha_{ij} \overline{\boldsymbol{B}}_j + \beta_{ijk} \frac{\partial \overline{\boldsymbol{B}}_j}{\partial x_k}. \tag{2.17}$$

Sous l'hypothèse d'une fluctuation des vitesses homogène et isotrope, α_{ij} et β_{ijk} se réduisent respectivement à $\delta_{ij}\alpha$ et $\epsilon_{ijk}\beta$ (avec δ_{ij} le symbole de Krönecker et ϵ_{ijk} le symbole de Levi-Civita) où α mesure l'hélicité moyenne du fluide à partir de laquelle le champ est généré et β représente la diffusion turbulente du champ moyen. Finalement, l'équation de la dynamo en champ moyen s'exprime en fonction des quantités moyennées, de l'hélicité α due à la turbulence, et de la diffusion turbulente du champ β comme :

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{B}}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \left(\underbrace{\overline{\boldsymbol{v}} \wedge \overline{\boldsymbol{B}}}_{\text{advection magnétique}} + \underbrace{\alpha \overline{\boldsymbol{B}}}_{\text{production de champ magnétique}} - \underbrace{(\eta + \beta) \boldsymbol{\nabla} \wedge \overline{\boldsymbol{B}}}_{\text{diffusion magnétique}} \right) \quad \text{Equation de la dynamo.}$$

Effet Ω

Si le mouvement du fluide dans l'étoile se réduit à une rotation différentielle, $\boldsymbol{v} = v_\varphi(r,\theta)\boldsymbol{e_\varphi} = r\Omega(r,\theta)\boldsymbol{e_\varphi}$, un champ toroïdal $\boldsymbol{B_\varphi}$ (pour un champ axisymétrique, le champ toroïdal est constitué de la composante B_φ et le champ poloïdal des composantes B_r et B_θ) est créé à partir de tout champ poloïdal via l'équation d'induction

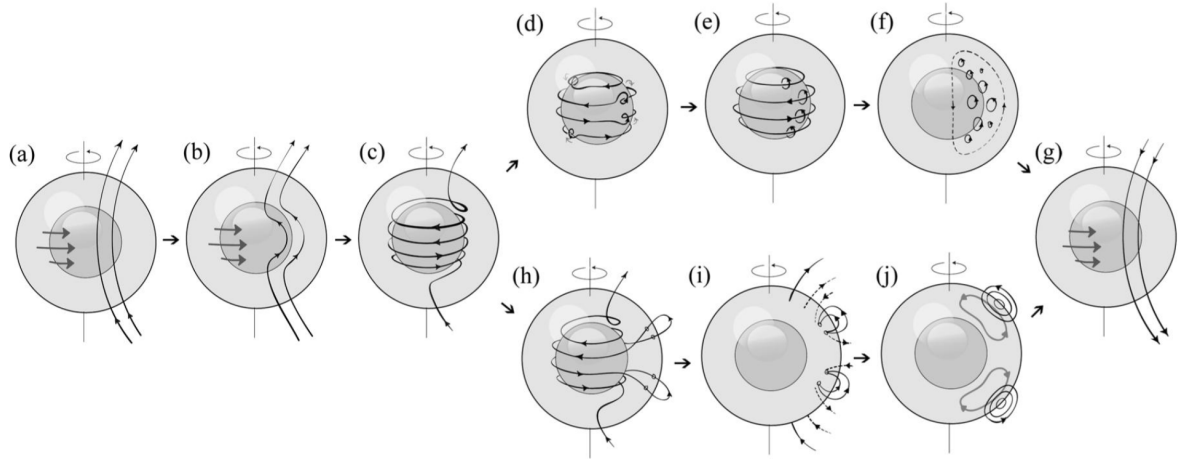


FIGURE 2.11: Schéma représentant les deux mécanismes évoqués pour la dynamo Solaire. Les étapes $a)$ à $c)$ représentent le mécanisme Ω, les étapes $d)$ à $f)$ représentent l'effet α au niveau de la tachocline, et les étapes $h)$ à $j)$ le mécanisme α de Babcock-Leighton. Enfin, l'étape $g)$ identique à l'étape $a)$ indique la fermeture de la boucle dynamo. Crédits : Sanchez et al. (2014)

de la MHD idéale :

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} \simeq \boldsymbol{\nabla} \wedge (\boldsymbol{v}_\varphi(r,\theta) \wedge \boldsymbol{B}_p) \cdot \boldsymbol{e_\varphi} = r\,(\boldsymbol{B}_p \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\Omega. \tag{2.18}$$

Une rotation différentielle latitudinale de l'étoile étire alors les lignes de champ dans la direction toroïdale, provoquant la conversion des composantes poloïdales en composantes toroïdales : c'est l'effet Ω, représenté à la surface du Soleil entre les panneaux $a)$ et $c)$ de la figure 2.11.

Effet α

Comme nous venons de le voir, l'effet Ω permet de transformer un champ poloïdal en un champ toroïdal dans une étoile en rotation différentielle. Cependant, il ne permet pas de regénérer le champ magnétique créé localement pour atteindre les amplitudes de champ observées à la surface du Soleil, ni d'expliquer l'apparition périodique d'un champ poloïdal à grande échelle. Parker (1955) propose l'idée qu'un champ toroïdal puisse être converti en champ poloïdal par la convection. L'idée est qu'une parcelle de fluide en rotation horizontale qui se déplace verticalement crée de l'hélicité magnétique α et applique une torsion verticale sur les lignes de champ, comme représenté à gauche de la figure 2.10. Cela a pour conséquence directe la création d'un champ local poloïdal de petite échelle, ce qui n'est pas suffisant pour expliquer l'amplitude et l'échelle spatiale des champs poloidaux observés. En revanche, cette accumulation nouvelle d'hélicité magnétique locale induit un courant électrique selon la direction principale des lignes de champ toroïdales (voir panneau droit de la figure 2.10), ce qui crée et alimente un champ poloïdal global. Ce champ est cette fois-ci à grande échelle, et ne provient pas de la conversion d'un champ pré-existant. De l'énergie magnétique est donc ajoutée au système. C'est le mécanisme α, qui se traduit par le terme $\alpha\overline{\boldsymbol{B}}$ dans l'équation de la dynamo. Finalement, à partir d'un champ magnétique initial purement toroïdal, l'hélicité magnétique génère un champ poloïdal global par le mécanisme α. Ce champ poloïdal généré est lui-même soumis au mécanisme α, qui régénère du champ toroïdal : c'est la dynamo α^2, pour laquelle les champs poloidaux et toroidaux sont tous les deux générés par le mécanisme α en l'absence de rotation différentielle du fluide.

Dynamo axisymétrique en champ moyen

Dans le cas du Soleil, la dynamo observée grâce aux taches solaires présente de grandes composantes axi-symétriques. Les champs moyens peuvent donc être écrits, en considérant uniquement un nouvement moyen du fluide dû à la rotation différentielle de l'étoile :

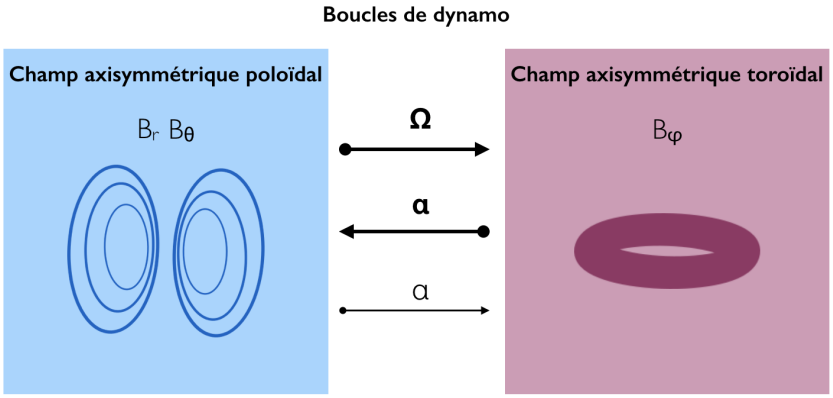


FIGURE 2.12: Représentation schématique de la boucle de dynamo dans les zones convectives des étoiles. Les flèches en gras représentent l'effet Ω pour la génération du champ toroïdal et l'effet α pour la génération du champ poloidal. La troisième flèche plus fine indique la contribution plus faible de l'effet α pour la génération du champ toroïdal.

$$\overline{\boldsymbol{v}}(r,\theta,t) = r\sin\theta\Omega(r,\theta,t)\boldsymbol{e}_\varphi \tag{2.19}$$

$$\overline{\boldsymbol{B}}(r,\theta,t) = B_\varphi(r,\theta,t)\boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{\nabla}\wedge(A(r,\theta,t)\boldsymbol{e}_\varphi)\,. \tag{2.20}$$

L'équation de l'induction se couple donc pour les composantes du champ toroïdal B_φ et du champ poloïdal exprimé ici grâce au potentiel vecteur toroïdal A. En négligeant les rétroactions du champ créées sur les champs moyens (approximation cinématique), en considérant η constant et dans un fluide isotropique :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \underbrace{\alpha B_\varphi}_{\text{induction du champ poloïdal, effet }\alpha} + \underbrace{\eta\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{(r\sin\theta)^2}\right)A}_{\text{diffusion poloïdale}} \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = \underbrace{r\sin\theta\,(\boldsymbol{\nabla}\wedge A\boldsymbol{e}_\varphi)\,.\,(\boldsymbol{\nabla}\Omega)}_{\text{cisaillement de rotation, effet }\Omega} + \underbrace{\boldsymbol{e}_\varphi.\boldsymbol{\nabla}\wedge(\alpha\boldsymbol{\nabla}\wedge A\boldsymbol{e}_\varphi)}_{\text{induction du champ toroïdal, effet }\alpha} + \underbrace{\eta\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{(r\sin\theta)^2}\right)B\varphi}_{\text{diffusion toroïdale}} \tag{2.22}$$

De l'équation 2.21, nous déduisons que le champ poloïdal est généré par l'effet α uniquement. Par l'équation 2.22, nous déduisons que le champ toroïdal est généré à la fois par l'effet α et par l'effet Ω dû à la rotation différentielle de l'étoile. Ces équations globales décrivent le mécanisme de dynamo $\alpha^2-\Omega$.

La contribution relative de l'effet Ω et de l'induction du champ toroïdal est comparée grâce aux nombres dynamos définis à partir de l'équation 2.22 :

$$C_\alpha = \frac{\alpha_0 R_\star}{\eta_0},\quad C_\Omega = \frac{\Omega_0 R_\star^2}{\eta_0}. \tag{2.23}$$

Dans le cas du Soleil, $\alpha_0 \simeq 1\mathrm{m.}^{-1}$, ce qui conduit à $C_\alpha \ll C_\Omega$; l'induction du champ toroïdal par le mécanisme α est négligeable devant la conversion du champ poloïdal en composante toroïdale par le cisaillement rotationnel. Ainsi, dans le cas du Soleil, la dynamo s'effectue plutôt via une combinaison $\alpha-\Omega$, représentée dans sa globalité par les étapes $a)$ à $g)$ sur la figure 2.11, et résumée sur la figure 2.12. Ce formalisme simplifié permet d'obtenir des champs cycliques (e.g. Jouve & Brun, 2007; Jouve et al., 2010; Do Cao & Brun, 2011), dont les propriétés dépendent des propriétés des champs moyens. Cependant, des écarts à cette image académique sont obtenus dans les simulations 3D (e.g. Brown et al., 2010).

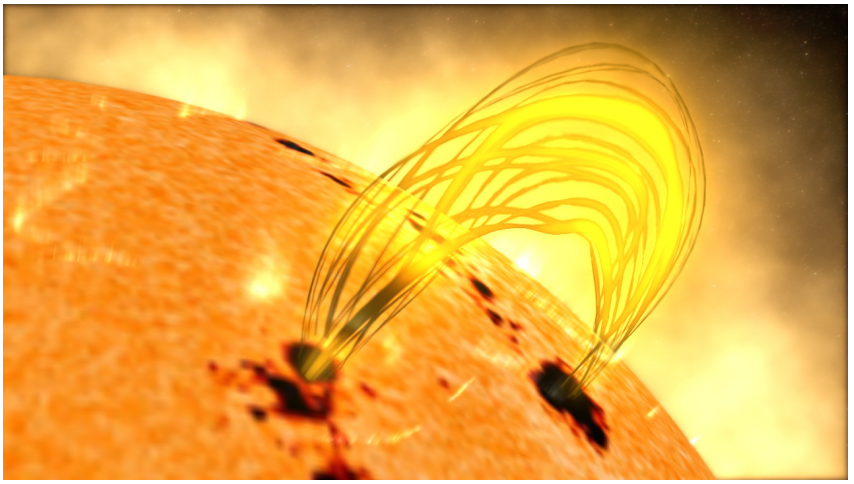


FIGURE 2.13: Vue d'artiste d'une protubérance magnétique à la surface du Soleil, enracinée dans deux taches solaires. Crédits : NASA.

2.2.2 La dynamo magnétique dans les zones convectives

2.2.2.1 Cas du Soleil

Observation directe des lignes de champ : la couronne solaire et les éjections coronales de matière

Le premier indice d'un champ magnétique à la surface du Soleil, et par analogie, à la surface des autres étoiles de type solaire, est la présence de structures à grande échelle dans la couronne solaire appelées protubérances ou encore éruptions solaires (voir figure 2.13). Elle sont enracinées dans les taches solaires (zones plus sombres et de plus basse température que le fluide environnant) à la surface. Le plasma étant figé dans les lignes de champ magnétique, lorsqu'une boucle de champ magnétique émerge à la surface du Soleil elle est rendue visible par une élévation du plasma, partant d'une tache solaire à une autre, pendant une durée de l'ordre de quelques jours. Ces taches solaires sont donc la signature du champ magnétique de surface du Soleil. Leur taux de formation n'est pas constant, il est modulé sur un cycle d'activité de ~ 11 ans, au cours duquel le lieu d'apparition des taches migre de l'équateur vers les pôles avant de disparaître et de réapparaître (avec des polarités inversées de part et d'autre de l'équateur) à l'équateur au début du cycle suivant. La présence d'un tel cycle régulier est en faveur d'un magnétisme cyclique d'origine dynamo comme le cycle $\alpha - \Omega$ présenté à la section 2.2.1. Nous nous référons à la revue de Hathaway (2010) ainsi qu'aux études de Strugarek et al. (2017), Jouve & Brun (2007) et Jouve et al. (2010) pour les spécificités et interrogations actuelles liées à l'activité solaire.

Effet Zeeman

Afin de mesurer l'intensité du champ magnétique à la surface du Soleil, il est donc intéressant d'observer les taches solaires puisqu'elles concentrent les tubes de champ. Pour cela, l'utilisation de spectrographes accompagnés de polariseurs est précieuse : l'effet Zeeman que nous ne détaillerons pas dans ce manuscrit provoque la démultiplication des niveaux d'énergie des atomes : chacune des raies spectrales observées par spectropolarimétrie est séparée en deux ou trois composantes selon l'orientation du champ magnétique. L'espacement et la polarisation des raies permettent de remonter à l'intensité du champ (Semel, 1989; Bommier et al., 1994).

Origine du champ observé à la surface

Dikpati & Gilman (2001) montrent que les mouvements verticaux de pénétration convective au niveau de la tachocline (interface entre la zone radiative interne et l'enveloppe convective) interagissent avec les mouvements de vorticité horizontaux de manière à créer de l'hélicité : la génération du champ toroïdal est suspecté d'avoir majoritairement lieu au niveau de la tachocline dans le Soleil, siège d'intense rotation différentielle.

Les tubes de flux émergeant à la surface du soleil sous forme de taches solaires sont également connus pour être enracinés au niveau de la tachocline (voir par exemple les articles et revues de Schüssler et al., 1996; Fan, 2004, ainsi que les références qu'ils contiennent).

Si ce mécanisme α en champ moyen situé au niveau de la tachocline est satisfaisant pour expliquer la génération de champs modérés, il est controversé pour les champs forts (Gilman & Fox, 1997; Dikpati & Gilman, 1999). Ainsi, pour des grandes amplitudes de champ toroïdaux, pouvant déstabiliser le cisaillement au niveau de la tachocline, le mécanisme α de Babcock-Leighton (BL) est généralement invoqué : l'hélicité nécessaire au mécanisme α serait alors initiée et maintenue par la torsion des boucles de flux magnétiques au niveau des régions actives par l'accélération de Coriolis, comme cela est représenté par les étapes $h)$ à $j)$ sur la figure 2.11. Pour cela, un mécanisme de flottaison des boucles magnétiques est invoqué afin de ramener le plasma magnétisé moins dense à la surface (Nelson et al., 2011, 2012). L'accélération de Coriolis exerce une torsion sur la boucle de champ, créant la composante toroïdale du champ. Ensuite, les mouvements longitudinaux de surface et de sous-surface (Babcock, 1961; Leighton, 1969) permettent de transporter le flux magnétique à la surface et d'expliquer la migration des taches solaires au cours du cycle.

Nous avons présenté ici les principes fondamentaux de la dynamo magnétique, agissant dans les milieux convectifs en rotation. Nous ne rentrerons pas plus dans les détails de la dynamo solaire en particulier (e.g. Browning et al., 2006), qui sort du cadre de cette thèse. Pour plus de détails nous nous référons à la living revue de (Charbonneau, 2005). Cependant, la forte analogie entre la structure du Soleil et des autres étoiles de type solaire entre la MS *et l'*AGB *auxquelles nous nous intéressons dans cette thèse induit un magnétisme cyclique d'origine dynamo dans l'enveloppe convective de ces étoiles.*

2.2.2.2 Les dynamos observées dans les enveloppes convectives des étoiles de type solaire

L'intérêt premier dans le recherche de l'activité magnétique des autres étoiles de type solaire est la possibilité d'étudier l'évolution du cycle solaire en observant des étoiles analogues plus jeunes, ou à un stade évolutif plus avancé que le Soleil. En revanche, la distance aux étoiles empêche de résoudre spatialement leur surface.

Méthodes de détection

- *Variabilité photométrique :* bien que les signatures magnétiques dans la chromosphère et la photosphère des étoiles ne peuvent être observées individuellement, la luminosité globale de l'étoile est affectée au long du cycle. Le Soleil par exemple est en moyenne plus lumineux lors d'un maximum d'activité que lorsque les taches solaires et les autres phénomènes magnétiques ont disparu (Fröhlich et al., 2012). À plus courte échelle temporelle, la rotation de l'étoile peut permettre d'obtenir un signal photosphérique quasi-périodique dû au magnétisme de surface de l'étoile (e.g. McQuillan et al., 2014; García et al., 2014a; Mathur et al., 2014; Vida & Oláh, 2013; Basri & Nguyen, 2018; Lanzafame et al., 2018; Santos et al., 2019). La signature sismique de tels phénomènes magnétiques sera développée dans le chapitre 3.
- *Chauffage atmosphérique :* bien que l'origine des fortes températures enregistrées dans la haute atmosphère du Soleil soit controversée, leur corrélation avec l'amplitude de flux du champ magnétique est marquée empiriquement (Noyes et al., 1984; Pevtsov et al., 2013; Egeland et al., 2016). La mesure de température contraint ainsi le flux magnétique de l'étoile (Hall, 2005).
- *Imagerie Zeeman-Doppler (ZDI) :* si l'effet Zeeman est très adapté pour la mesure du champ magnétique local à la surface du Soleil, il est également observable dans les bandes d'absorption de la photosphère des autres sources stellaires. Plus efficacement, des séries temporelles de la polarisation de la lumière émise par l'étoile sont acquises par spectropolarimétrie et inversées pour reconstruire les amplitudes de champ magnétique à la surface de l'étoile. Dans le même temps, les vitesses radiales du plasma sont enregistrées pour obtenir la localisation des différentes composantes observées à cause de la rotation différentielle de l'étoile. Cette méthode appelée Imagerie Zeeman-Doppler permet de reconstruire la topologie à grande échelle du champ magnétique de surface des étoiles (e.g. Semel, 1989; Petit et al.,

2003, 2004). Grâce à la rotation de l'étoile, la géométrie la plus simple du champ magnétique correspondant aux polarisations observées est ainsi cartographiée [5]. Pour cela, les spectrographes les plus utilisés sont ESPaDOnS (Manset & Donati, 2003) au Télescope Canada-France-Hawaï sur le Mauna Kea (à Hawaii), et NARVAL au Télescope Bernard Lyot du Pic du Midi de Bigorre (Hautes Pyrénées). Les méthodes spectropolarimétriques sont les seules à permettre une caractérisation de la topologie du champ de surface.

- *Interférométrie :* Pour un faible nombre d'étoiles, la résolution spatiale des instruments d'interférométrie est suffisante pour résoudre optiquement l'étoile, et enregistrer les variations de l'intensité lumineuse à la surface de l'étoile. Les régions sombres observées notamment par exemple par Roettenbacher et al. (2017) à la surface de l'étoile ζ Andromedae sont associées à la présence de magnétisme.
- *Les traceurs sismiques :* Les fréquences des modes d'oscillation acoustique des étoiles de type solaire sont affectées par la présence de magnétisme de surface (voir Kiefer & Roth, 2018, pour une description théorique récente). García et al. (2010) montrent pour la première fois la détection d'un cycle magnétique dans une étoile autre que le Soleil grâce aux observations astérosismiques de CoRoT pour l'étoile HD 49933. Par la suite, les perturbations des fréquences d'oscillation des étoiles par le magnétisme de surface ont été détectées dans les observations d'environ 70 étoiles (Kiefer & Roth, 2018; Santos et al., 2019). *Nous détaillerons au chapitre 3 l'impact du magnétisme sur les fréquences des modes d'oscillation, qui est le phénomène physique central de la seconde partie du manuscrit.*

Topologies des champs observés à la surface des étoiles de type-solaire sur la MS

Kochukhov et al. (2010) montrent qu'une analyse d'imagerie Doppler à partir d'observations spectropolarimétriques permet de reconstruire le champ de plus basse énergie possible pour l'étoile Ap α^2CVn. Par imagerie Zeeman-Dopler, Donati et al. (2006) montrent également que la topologie magnétique de l'étoile massive τ Sco sur la séquence principale peut être reconstruite. Ce sont des cas rares, pour lesquels la topologie du champ peut être estimée durant la séquence principale des étoiles autres que le Soleil (voir aussi Petit et al., 2008; Folsom et al., 2016, 2018). Si la topologie est difficilement accessible, il est en revanche souvent possible de détecter la signature de champ magnétique de surface des étoiles de la MS, par le biais de la variabilité photométrique présentée dans le paragraphe précédent, reliée à l'activité de l'étoile. En effet, McQuillan et al. (2014) montrent que par le biais du passage des signatures magnétiques à la surface des étoiles sur la MS, les périodes de rotation de surface de plus de $30\,000$ étoiles ont pu être mesurées. L'activité magnétique des étoiles est un paramètre important, car combiné avec la rotation de surface et la profondeur de la zone convective, il permet de contraindre les modèles de dynamos stellaires. L'indice magnétique S_{ph} [6] (Mathur et al., 2014) est désormais une bonne mesure de la variabilité des cycles d 'activité des étoiles. Par le biais des émissions chromosphériques observées, la dynamo des étoiles de type solaire peut également être caractérisée en estimant le ratio des périodes magnétiques et de rotation de l'étoile (e.g. Baliunas et al., 1996). L'observation en rayons X permet également d'estimer l'efficacité du mécanisme de dynamo au cours du temps (e.g. Gondoin, 2012).

Observation des champs à la surface des géantes rouges

Pour les étoiles de type solaire plus évoluées qui sont devenues des géantes, la détection des périodes de rotation de l'étoile par photométrie est rendue plus difficile. Certaines géantes tournent tout de même suffisamment vite et sont suffisamment actives pour qu'une détection des taches magnétiques dans les données photométriques soit possible (e.g. Tayar et al., 2015; Ceillier et al., 2017) [7]. Les études de Aurière et al. (2009) et Aurière

5. Des topologies plus complexes peuvent également satisfaire les observations.

6. L'indice S_{ph} est défini par la valeur moyenne de l'écart type de sous-séries temporelles de tailles proportionnelles à la période de rotation.

7. Trois mécanismes sont invoqués pour expliquer ce taux de rotation anormalement rapide : des interactions de marées avec un compagnon proche (la binarité pourrait concerner $\sim 44\%$ des étoiles de type spectral F à G d'après Raghavan et al. (2010), aboutissant à environ $1-2\%$ des géantes de type spectral K en rotation rapide, compatible avec les observations de de Medeiros et al. (1996) et de Carlberg et al. (2011), l'absorption de planètes (Peterson, 1983; Soker, 2004; Massarotti, 2008; Carlberg et al., 2009; Bolmont & Mathis, 2016; Benbakoura et al., 2019) et l'accrétion de la matière d'un compagnon. Il est également possible que les courbes de lumières photométriques de ces étoiles soient ≪ polluées ≫ par la présence d'autres étoiles en rotation dans la ligne de visée.

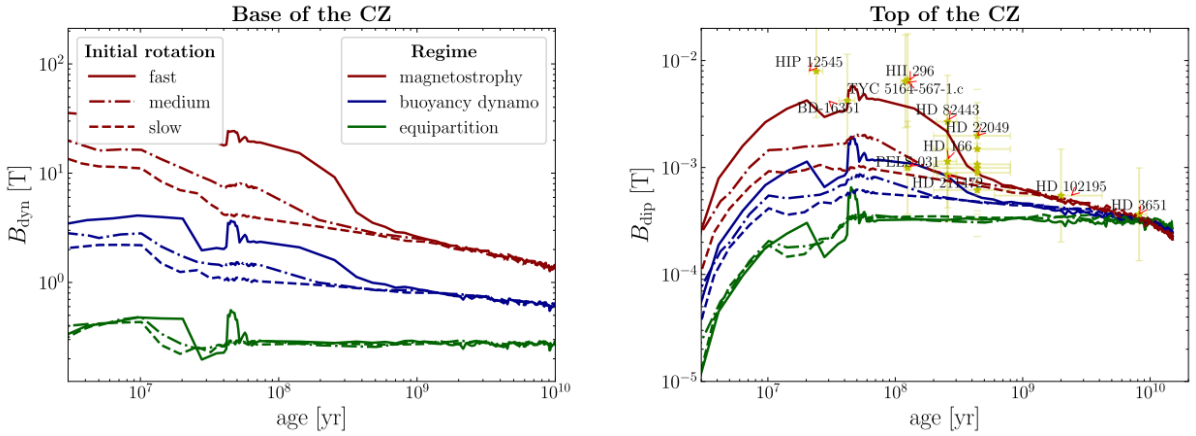


FIGURE 2.14: Estimation du champ magnétique dynamo à la base (panneau de gauche) et au sommet (panneau de droite) de l'enveloppe convective d'une étoile de 0.9$M_\odot$ le long de son évolution simulée par le code STAREVOL. Les champs magnétiques associés aux trois régimes (magnétostrophie, flottaison, et équipartition) sont évalués, pour trois taux de rotation de l'étoile ($\ll$ fast $\gg \Leftrightarrow$1.6 jours, $\ll$ median $\gg \Leftrightarrow$ 4.5 jours et $\ll$ slow $\gg \Leftrightarrow$ 9 jours). Les étoiles jaunes représentent les amplitudes de champs magnétiques observés à la surface d'étoiles de 0.9$M_\odot$ par See et al. (2017), leurs âges ayant été estimés par Ge et al. (2006), Janson et al. (2008), Line et al. (2015) et Folsom et al. (2016). Crédits : Astoul et al. (2019).

et al. (2014) sur la géante Pollux et quelques 40 autres géantes de type spectral G-K montrent que la spectropolorimétrie depuis le sol fournit des informations moyennées sur les champ magnétiques longitudinaux moyens des géantes ($B_0 \lesssim 10$G). Cette dernière étude montre également une grande corrélation entre les périodes de rotation et d'activité, supportant l'hypothèse d'un champ d'origine dynamo dans les enveloppes convectives des géantes rouges.

2.2.2.3 Estimation de l'amplitude des champs dynamo

L'amplitude de la dynamo de surface du Soleil (B_0 de l'ordre du Gauss) est mesurable directement par le biais de l'effet Zeeman dans les taches solaires (Charbonneau & Smolarkiewicz, 2013). Cependant, estimer l'amplitude dans l'intérieur des étoiles est beaucoup plus difficile. En considérant la génération de champ magnétique par la dynamo au niveau de la tachocline, Gough & Thompson (1990) et Antia et al. (2000) ont montré par héliosismologie que le champ magnétique maximal attendu à la base de la zone convective du Soleil est de 30×10^4 G. En revanche, l'astérosismologie n'est pas adéquate pour l'estimation de l'amplitude du champ magnétique généré par la convection dans les cœurs convectifs des étoiles de masse supérieure à 1.1 $M_\odot$, car les modes propres acoustiques ne sondent pas suffisamment les couches internes de l'étoile. On se tourne alors vers les simulations non-linéaires globales, qui permettent d'accéder à une amplitude de champ pour les champs dynamo stellaires (e.g. Strugarek et al., 2017; Emeriau-Viard & Brun, 2017). Dans ce cadre, Augustson et al. (2019) montrent que les rapports d'échelle entre les différents termes de l'équation de Navier-Stokes pour la convection en présence de rotation et de magnétisme peuvent être utilisés pour une première estimation des amplitudes des champs d'origine dynamo. Dans le régime stationnaire et non visqueux (la force visqueuse est négligeable devant l'accélération de Coriolis), cette équation est donnée dans le système d'unités cgs par :

$$\underbrace{\boldsymbol{v}.(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v})}_{\text{Advection}} = -\underbrace{\frac{\boldsymbol{\nabla}p}{\rho}}_{\text{Pression}} \underbrace{-2\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{v}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\rho}(\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{B})\wedge\boldsymbol{B}}_{\text{Lorentz}} + \underbrace{\boldsymbol{g}}_{\text{Gravité}} . \tag{2.24}$$

- **Régime magnétostrophique :** Cette équation permet d'identifier le régime magnétostrophique qui est atteint lorsque la force de Lorentz équilibre l'accélération de Coriolis, et que les autres composantes

sont négligeables. Cela implique une forte rotation de l'étoile, compatible avec les taux de rotation observés dans les étoiles de type solaire. À partir de l'équation (2.24), ce critère s'exprime comme :

$$B \simeq \sqrt{8\pi\Omega\rho R_{\rm conv} v_{\rm conv}}, \tag{2.25}$$

avec $R_{\rm conv}$ l'épaisseur de la zone convective et $v_{\rm conv}$ la vitesse de convection. Ce critère peut être réécrit en fonction du nombre de Rossby convectif $\mathrm{Ro} = v_{\rm conv}/(2\Omega R_{\rm conv})$ et de la densité d'énergie cinétique associée aux mouvements de convection $\mathrm{KE} = \rho v_{\rm conv}^2/2$:

$$B \simeq \sqrt{\frac{8\pi \mathrm{KE}}{\mathrm{Ro}}}. \tag{2.26}$$

- **Régime d'équipartition :** La dynamo convertit une fraction de l'énergie cinétique de la convection en énergie magnétique. Le régime d'≪ équipartition ≫ est atteint lorsque la densité d'énergie magnétique $\mathrm{ME} = B^2/(8\pi)$ équilibre la densité d'énergie cinétique KE. Ce critère est donc :

$$B \simeq \sqrt{8\pi \mathrm{KE}}. \tag{2.27}$$

- **Régime de flottaison :** Finalement, en négligeant les forces inertielles et que la densité est considérée constante (sauf pour l'estimation du terme de Coriolis), le rotationnel de l'équation 2.24 devient, avec $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{v} = 0$:

$$(\boldsymbol{\Omega}.\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{4\pi\rho}\boldsymbol{\nabla} \wedge ((\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{g}. \tag{2.28}$$

L'équilibre entre les trois termes de l'équation (2.28) est atteint pour

$$B \simeq \sqrt{\frac{8\pi \mathrm{KE}}{\sqrt{\mathrm{Ro}}}}. \tag{2.29}$$

Nous référons aux études de Augustson et al. (2019) et de Astoul et al. (2019) pour plus de détails sur cette loi d'échelle de la dynamo convective dite de ≪ flottaison ≫, qui aboutit à une amplitude de champ intermédiaire entre les régimes d'équipartition et de magnétostrophie.

Le panneau de gauche de la figure 2.14 représente les amplitudes de champs magnétiques estimées à la base de la zone convective d'une étoile de $0.9\mathrm{M}_\odot$ par les trois régimes précédemment cités. Le panneau de droite permet de visualiser les amplitudes de champ correspondantes à la surface de l'étoile pour les trois régimes. Les amplitudes estimées par ces lois d'échelle sont ainsi compatibles avec les observations des champs de surface, et le régime magnétostrophique est favorisé pour reproduire les amplitudes des champ de surface observés durant la séquence principale.

2.2.2.4 Interaction entre un champ dynamo convectif et un champ pré-existant

Les champs d'origine dynamo sont suspectés de se former dans les zones convectives des étoiles. Ainsi, l'étoile purement convective durant la PMS devrait être le siège d'une dynamo globale, et les étoiles de masse intermédiaire ($1.1\mathrm{M}_\odot \leq \mathrm{M}_\star \leq 8$) qui développent un cœur convectif durant la séquence principale doivent posséder une dynamo interne. La question de l'interaction de ce magnétisme interne avec les zones radiatives autour est discutée dans la section suivante. Le mécanisme fondamental de la dynamo qui a été présenté ne prend pas en compte un éventuel champ magnétique initialement présent dans le milieu convectif. Le plasma stellaire est pourtant intrinsèquement magnétisé, avec un champ d'amplitude au moins égale à l'amplitude du magnétisme présent dans le milieu interstellaire ($\sim 10^{-6}$ G) à partir duquel l'étoile est formée. La contraction du nuage moléculaire lors de la formation stellaire est accompagnée d'une mise en rotation du nuage, pouvant également conduire à une dynamo convective. Lorsque le cœur convectif des étoiles de masse intermédiaire se forme sur la séquence principale, le plasma contient certainement déjà des lignes de champ magnétique de

grande échelle [8]. Featherstone et al. (2009) évaluent l'impact de différentes topologies de champs magnétiques préexistants dans le cœur convectif des étoiles de type spectral A par simulation 3D. La présence d'un champ magnétique mixte toroïdal et poloïdal dans l'enveloppe radiative voisine change drastiquement la production magnétique par la dynamo convective, et l'énergie magnétique créée par la dynamo peut être amplifiée par un facteur 10.

Nous nous intéressons en particulier dans la deuxième partie de ce manuscrit aux rémanents des champs internes d'origine dynamo. L'amplitude originelle du champ dynamo est donc d'une grande importance pour l'estimation de l'amplitude des champs qui en découlent dans les phases plus avancées de la vie de l'étoile. Nous discuterons des amplitudes estimées des champs dynamos internes durant la PMS *et la* MS *dans la section 2.3.*

2.2.2.5 Effet du magnétisme des enveloppes convectives sur leur taux de rotation : première notion d'extraction de moment cinétique par le magnétisme

Bien que les travaux de la seconde partie de cette thèse se concentrent sur l'influence du magnétisme sur la dynamique interne à l'étoile, nous donnons ici une première notion de l'efficacité du transport de moment cinétique par le magnétisme, grâce au taux de rotation des étoiles qui ont une enveloppe convective sur la séquence principale.

Des particules ionisées s'échappent du Soleil le long des lignes de champ magnétique ouvertes vers le système solaire : ce vent solaire est directement connecté au magnétisme dynamo de l'enveloppe convective. **?** montre alors que par un mécanisme de rétroaction, les étoiles magnétisées sur la séquence principale subissent un freinage de la rotation de leur enveloppe (Kawaler, 1988; Bouvier et al., 1997; Gallet & Bouvier, 2013, 2015) selon la loi temporelle $\Omega \propto t^{-\frac{1}{2}}$, valable au moins jusqu'à l'âge du Soleil (van Saders et al., 2016). Cette méthode de datation des étoiles est la « Gyrochronologie » (Barnes, 2003, 2010), et devient la « Magnétochronologie » lorsque la topologie du champ magnétique est prise en compte (Vidotto et al., 2014). Ainsi, indépendamment du taux de rotation initial de l'étoile sur la PMS, le magnétisme est très efficace pour ralentir la vitesse de rotation de l'étoile, car les lignes de champ magnétique sont gelées dans le plasma (Schatzman, 1962). Il peut alors être montré que la perte de moment cinétique $\dot{J}$ de l'enveloppe des étoiles de type solaire sur la séquence principale dépend du rayon d'Alfvén magnétique de l'étoile comme

$$\dot{J} = \dot{M} r_A^2 \Omega, \tag{2.30}$$

avec $\dot{M}$ le taux de perte de masse de l'étoile (voir par exemple Schatzman, 1962; Weber & Davis, 1967; Réville et al., 2015). Le rayon d'Alfvén est quant a lui proportionnel à l'amplitude B_0 du champ magnétique, et est défini comme le rayon au-delà duquel la vitesse du vent solaire dépasse la vitesse d'Alfvén $v_a = B_0/\sqrt{4\pi\rho}$.

L'extraction de moment cinétique par le vent solaire/stellaire magnétisé est donc extrêmement efficace, et proportionnel à l'amplitude du champ au carré. Cette caractéristique, commune avec le transport de moment cinétique par le champ magnétique interne, sera rediscutée au chapitre 6 dans le cadre du transport de moment cinétique interne aux géantes rouges.

2.2.3 La relaxation et la dissipation des champs magnétiques fossiles dans les régions radiatives stellaires

La relaxation est un processus de réorganisation d'un champ par reconnections magnétiques. Une relaxation prend place lorsque la source (par exemple la convection) du champ magnétique disparaît dans une zone de l'étoile, à cause d'une restructuration par exemple. Ainsi, un champ d'origine dynamo qui est ensuite

8. La conservation du flux des champs magnétiques dans les milieux radiatifs lorsque la convection se retire sera développée dans la section 2.2.4.2

plongé dans une zone complètement radiative (stratification stable) peut maintenir un fort magnétisme dans l'intérieur radiatif des RG *(Cantiello et al., 2016), et peut être l'origine des champs observés dans les naines blanches magnétisées (Braithwaite & Spruit, 2004). Les études portant sur le magnétisme interne dans les étoiles de type solaire évoluées des chapitres 6 et 7 reposent sur la présence de tels champs relaxés qui sont qualifiés de champs « fossiles » puisque leur énergie a été générée durant une phase dynamo passée.*

Montgomery et al. (1998) ont montré que la relaxation d'un plasma peut aboutir à un équilibre dit « non force-free », signifiant que la force de Lorentz n'est pas nulle. De plus, les états d'équilibre avec une force de Lorentz nulle en chaque point ne peuvent exister dans les intérieurs stellaires auto-gravitants (Reisenegger, 2009), et les équilibres avec une force de Lorentz non nulle sont une généralisation des états de Taylor observés dans les plasmas de laboratoire dans les intérieurs stellaires stratifiés (Duez & Mathis, 2010). Pour toutes ces raisons, le champ d'équilibre recherché invoque donc une force de Lorentz non nulle dans l'étoile. Le champ magnétique évolue dans l'étoile via l'équation de l'induction, dépendante du champ de vitesse. Ce champ de vitesse dépend des propriétés hydrodynamiques du gaz (gradient de pression et gravité) et de la force de Lorentz associée au magnétisme, à travers l'équation du moment ici donnée dans sa version sans viscosité :

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \underbrace{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}}_{\text{advection fluide}} = - \underbrace{\frac{\boldsymbol{\nabla} p}{\rho}}_{\text{pression fluide}} + \underbrace{\boldsymbol{g}}_{\text{gravité}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\rho}(\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{B})\wedge\boldsymbol{B}}_{\text{force de Lorentz}}. \tag{2.31}$$

La force de Lorentz a pour effet un déplacement du fluide approximativement à la vitesse d'Alfvén, qui dure un temps d'Alfvén $\tau = D/v_a$, où D est la taille de la zone radiative considérée. Dans le cas des étoiles Ap par exemple, un champ d'ampitude 1 kG ajouté à un équilibre hydrostatique fait évoluer le champ de vitesse initialement nul en perturbant l'équilibre hydrostatique, et relaxe sur un temps d'Alfvén d'environ 10 ans. Durant la PMS, où l'étoile est en rotation rapide, le temps de formation d'un champ fossile en années est (Braithwaite & Cantiello, 2013) :

$$\tau_{\rm form} \sim 2\cdot 10^{11} \left(\frac{M_\star/\mathrm{M}_\odot}{R_\star/R_\odot}\right) \left(\frac{L}{R_\star}\right)^2 (B[\mathrm{G}])^{-2}\,(P[j])^{-1}\,, \tag{2.32}$$

avec L l'échelle spatiale caractéristique, B l'amplitude du champ magnétique et P la période de rotation de l'étoile. Dans le cas des étoiles à faible rotation comme les étoiles de type solaire évoluées, ce temps de relaxation du champ en champ fossile stable s'exprime en années comme (Braithwaite & Cantiello, 2013) :

$$\tau_{\rm form} \sim 10^4 \left(\frac{M_\star/\mathrm{M}_\odot}{R_\star/R_\odot}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{R}\right) (B[\mathrm{G}])^{-1} \tag{2.33}$$

Cependant, après cette transition il est possible qu'un nouvel état d'équilibre soit atteint, cette fois-ci entre les trois forces de pression, de gravité et de Lorentz. Dans ce cas, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ conduit à une équation d'induction purement diffusive et le champ stabilisé évolue ensuite sur un temps de diffusion ohmique beaucoup plus long :

$$\tau_{\rm Ohm} \sim D^2/\eta. \tag{2.34}$$

Il est ainsi de l'ordre de 10^{10} ans dans l'intérieur radiatif du Soleil (Cowling, 1945). Ce champ est alors dénommé champ « fossile » puisqu'il n'évolue que très peu sur l'échelle de temps de la vie de l'étoile, du fait du nouvel équilibre MHD atteint. Ce sont ces champs fossiles qui sont invoqués pour expliquer le magnétisme observé dans l'enveloppe radiative d'environ 10% des étoiles massives sur la séquence principale (e.g. Auriere et al., 2007; Morel et al., 2014; Wade et al., 2016).

2.2.4 Le magnétisme des zones radiatives

Le magnétisme stellaire est souvent associé au cycle magnétique solaire, d'origine dynamo, créé dans l'enveloppe convective. Récemment, des champs magnétiques stables ont été détectés à la surface d'étoiles plus massives (types spectraux A, B, 0) qui pourtant possèdent une enveloppe radiative. De la même façon, la présence de naines blanches (stablement stratifiées) dont la surface est fortement magnétisées pose la question de l'origine des champs magnétiques dans les zones radiatives, qui ne fait pas consensus (Ferrario et al., 2015).

2.2.4.1 Pénétration de la dynamo convective vers les zones radiatives

Les mesures astérosismiques du profil de rotation dans la zone radiative interne du Soleil indiquent qu'un mécanisme de transport du moment cinétique efficace prend place dans l'intérieur radiatif du Soleil, aplatissant le profil de rotation différentielle radiale jusqu'à $\sim 0.25\mathrm{R}_\odot$ (Gough & McIntyre, 1998; Mestel, 1953; Mestel & Weiss, 1987; Cowling & Lindsay, 1957; Charbonneau & MacGregor, 1992; Strugarek et al., 2011; Acevedo-Arreguin et al., 2013). Garaud (1999) investigue la possibilité que le champ dynamo présent dans la zone convective diffuse dans l'intérieur radiatif, figeant le plasma le long des lignes de champ et redistribuant très efficacement le moment cinétique. En effet, les travaux de Mestel et al. (1988) indiquent qu'un faible champ poloïdal serait suffisant pour redistribuer le moment cinétique dans la zone radiative. Les considérations de transport du moment cinétique dans les zones radiatives par le champ magnétique seront discutées dans la section 2.2.4.5 ainsi qu'au chapitre 6. En considérant uniquement une diffusion des résidus stochastiques du champ magnétique poloïdal [9], Garaud (1999) montre que la diffusion du champ dynamo dans la zone radiative se fait sur des échelles spatiales courtes, avec beaucoup de pertes d'amplitude magnétique : juste sous la zone convective le champ est estimé à environ 10^{-1} Gauss pour une amplitude dans la zone convective de 10^3 Gauss. Les travaux complémentaires de Dikpati et al. (2006) évaluent l'induction de champ toroïdal dans le partie radiative de la tachocline à partir du champ poloïdal oscillant transporté par les panaches convectifs pénétrant cette partie de la tachocline, et transmis par l'effet de peau dans les zones situées en dessous. Si la partie radiative de l'intérieur stellaire est peu diffusive, l'amplitude du champ toroïdal oscillant généré est au minimum de 1000 kG. Cependant, la conclusion de chacune de ces deux études indique que le champ dynamo ne peut être transféré bien au-delà de la tachocline : il ne peut alors expliquer le profil de rotation solide à l'intérieur du Soleil.

La diffusion d'un champ dynamo convectif depuis un intérieur convectif vers une enveloppe radiative a également été envisagée pour expliquer la présence d'étoiles Ap magnétiques (e.g. Charbonneau & MacGregor, 2001). Cependant, la grande variabilité des amplitudes observées, la structure à grande échelle des champs, ainsi que la détection de ces champs dans des étoiles jeunes de la séquence principale joue en défaveur d'un tel scénario. L'émergence des lignes de champ à la surface de ces étoiles nécessite la flottaison du flux magnétique depuis l'interface convective. Le temps de flottaison est estimé plus long que la durée totale de la séquence principale, à moins que les tubes de flux générés ne soient très minces (Parker, 1979; Moss, 1989; MacGregor & Cassinelli, 2002), incompatible avec les champs à grande échelle observé. De plus, l'inclinaison globale des champs observés ainsi que la non-corrélation de l'évolution du champ avec la rotation et l'âge de l'étoile suggèrent que le champ magnétique dans la zone radiative de ces étoiles n'est pas conduit par une dynamo d'origine convective (Neiner et al., 2015; Wade et al., 2016).

2.2.4.2 Champs fossiles

Si les champs observés dans les milieux radiatifs ne semblent pas provenir d'une dynamo sous-jacente, ils pourraient provenir en revanche d'une dynamo antérieure (Mathis et al., 2010; Neiner et al., 2015). Cette théorie des champs fossiles implique la restructuration à grande échelle et la stabilisation des champs (générés

9. Le champ magnétique solaire s'inversant périodiquement, seules les variations stochastiques du champ peuvent diffuser dans la zone radiative, le champ moyen étant compensé et annulé lors du passage d'un cycle à l'autre.

précédemment par effet dynamo) dans le milieu stablement stratifié après la disparition locale de la convection (e.g. Arlt & Weiss, 2014; Emeriau-Viard & Brun, 2017).

Nous avons décrit dans la section 2.2.3 le devenir d'un champ magnétique pour lequel le processus de génération est coupé. Le champ est donc supposé diffuser sur un temps suffisamment long pour que le champ magnétique alors considéré comme champ fossile évolue peu durant le reste de la vie de l'étoile. Cette analyse nous permet donc de rechercher l'impact d'un tel champ magnétique rémanent des phases évolutives antérieures sur les fréquences propres des modes d'oscillation des étoiles dans les chapitres 6 et 7.

Stabilité des champs dans les zones radiatives

D'éventuelles instabilités magnétiques qui évoluent pour leur part sur le temps d'Alfvén peuvent rapidement détruire le champ fossile : le champ magnétique fossile doit donc lui même être dans une configuration stable pour survivre, si l'on ne considère aucune perturbation hydrodynamique extérieure pouvant déstabiliser le champ [10]. La gravité est stabilisatrice des champs dans la direction radiale via la force de rappel d'Archimède. En revanche, les deux autres composantes du champ magnétique le long d'une surface équipotentielle ne sont *a priori* pas stabilisées : la stabilisation radiale est-elle suffisante pour empêcher la destruction d'un champ relaxé dans une zone radiative ?

- Tayler (1973) étudie théoriquement la stabilité d'un champ purement toroïdal axisymétrique. Ces champs B_φ sont alors démontrés être instables localement sur des plans horizontaux. Cette instabilité se propageant à la vitesse d'Alfvén, le champ devient globalement instable rapidement.
- Markey & Tayler (1973), Wright (1973) et Markey & Tayler (1974) testent ensuite la stabilité des champs purement poloïdaux axisymétriques pour lesquelles au moins une ligne de champ est fermée à l'intérieur de la zone radiative : ces champs (B_r, B_θ) sont également démontrés instables [11].
- Prendergast (1956) et Wright (1973) avancent les premiers arguments pour la possibilité d'atteindre un équilibre stable du champ avec des composantes mixtes poloïdales et toroïdales. Tayler (1980) et Kamchatnov (1982) proposent une première configuration magnétique stable dans le cadre de la MHD idéale. Sous la forme d'un tore enroulé, le champ est stabilisé par un champ de vitesse de la même nature.
- La stabilisation de la composante B_φ par une forte rotation est étudiée par Pitts & Tayler (1985) : si la rotation ralentit la croissance des instabilités par un facteur $1/\Omega$, elles se développent tout de même. Pour les champs poloïdaux, le temps de croissance de l'instabilité n'est pas modifié mais les déplacements de fluide générés par l'instabilité sont concentrés à l'équateur.

Les études purement analytiques sur la stabilité des champs plus complexes sont quasi-inexistantes jusqu'aux années 2010, car la complexité des topologies ne permet pas d'obtenir dans la plupart des cas réalistes une quelconque conclusion. Des simulations numériques MHD en 3D ont plus récemment pris le relais, confirmant les résultats analytiques principaux : un champ purement toroïdal est instable (Braithwaite, 2006), un champ purement poloïdal est instable (Braithwaite, 2007), et un champ mixte avec des composantes poloïdales et toroïdales peut être stabilisé (Braithwaite & Spruit, 2004; Braithwaite & Nordlund, 2006; Braithwaite, 2008, 2009; Duez et al., 2010a). De plus, cette première étude montre que la modélisation de la relaxation d'un champ stochastique dans un milieu stablement stratifié aboutit à la formation d'un tel champ mixte, comme reporté sur les panneaux du haut de la figure 2.15. La recherche de configurations analytiques pour les champs fossiles s'est donc concentrée sur les topologies mixtes poloïdales et toroïdales. Dans ce cadre, Duez & Mathis (2010) et Duez et al. (2010a) proposent une configuration analytique en très bon accord avec les résultats des simulations de relaxation réalisées par Braithwaite (2008) [12].

10. les instabilités hydrodynamiques sont décrites dans le paragraphe 2.2.4.3.
11. Les champs poloïdaux se reconnectant à l'extérieur de l'étoile avec des champs dipolaires dans le milieu interstellaire sont préalablement connus pour être instables (Flowers & Ruderman, 1977; Marchant et al., 2010).
12. Cette configuration sera utilisée dans le chapitre 6. L'étude de l'impact de la rotation sur cette configuration est également menée par Duez (2011), mais ne sera pas utilisée dans notre étude des étoiles de type solaire évoluées considérées comme des rotateurs lents.

Topologie des champs fossiles relaxés

Grâce aux études de stabilité présentées dans le paragraphe précédent, il est donc judicieux de choisir un champ mixte poloïdal et toroïdal pour la recherche d'un équilibre des forces conduisant à un champ fossile relaxé. Un tel champ s'écrit donc sous sa forme générale :

$$\boldsymbol{B}(r,\theta) = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\boldsymbol{\nabla}\Psi(r,\theta)\wedge\boldsymbol{e}_\varphi + F(r,\theta)\boldsymbol{e}_\varphi\right) = \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{A}(r,\theta) + \boldsymbol{B}_\varphi(r,\theta) \tag{2.35}$$

avec $\Psi(r,\theta)$ le flux poloïdal, $F(r,\theta)$ le potentiel toroïdal, $\boldsymbol{A}(r,\theta)$ le potentiel vecteur toroïdal et $\boldsymbol{B}_\varphi(r,\theta)$ la composante toroïdale du champ axisymétrique.

Le champ est ensuite recherché pour minimiser l'énergie à l'équilibre non force-free. Dans les étoiles, les amplitudes typiques de champ conduisent à une pression magnétique faible devant la pression du gaz. Deux invariants gouvernent alors la relaxation du champ : l'hélicité magnétique $\mathcal{H}$ et la masse contenue dans les tubes de flux poloïdaux. Ces deux grandeurs sont conservées à grande échelle grâce à la stratification stable du milieu radiatif : les échanges de matière ne se font que très peu selon la direction radiale. Une décroissance sélective de l'énergie est ensuite considérée : l'énergie magnétique décroît beaucoup plus rapidement que ne

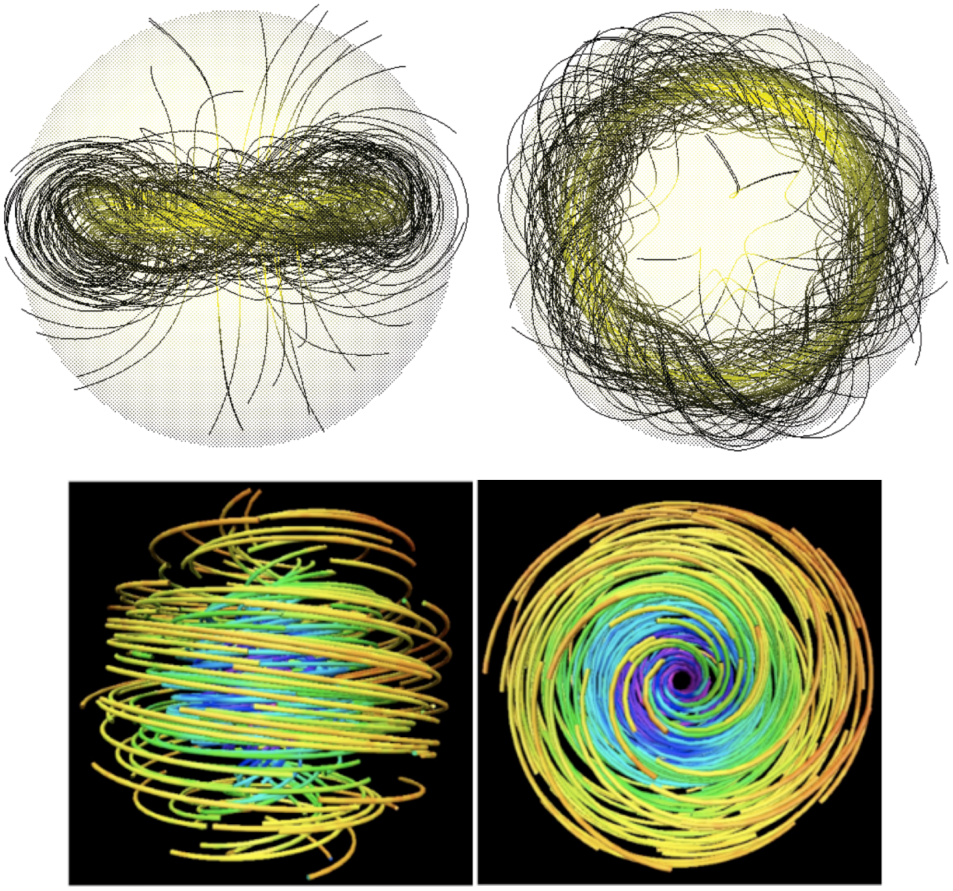


FIGURE 2.15: *Haut :* Résultats des simulations de Braithwaite (2008) (voir également Braithwaite & Nordlund (2006)) pour la formation et la stabilité de champs mixtes poloidal et toroidal. Le panneau de gauche représente le champ vu depuis la perpendiculaire à l'axe de rotation de l'étoile, le panneau de droite permet de visualiser le champ magnétique selon l'axe de rotation de l'étoile. Crédits : Braithwaite (2008). *Bas :* Résultats des simulations de Duez et al. (2010a) représentant les lignes du champ magnétique stable calculées par la formulation 2.35. Le panneau de gauche représente le champ vu depuis la perpendiculaire à l'axe de rotation de l'étoile, le panneau de droite permet de visualiser le champ magnétique selon l'axe de rotation de l'étoile. Crédits : Duez et al. (2010a).

varient l'hélicité et la masse poloïdale, qui sont alors considérées constantes. Cela est vérifié dans les simulations de Braithwaite (2008) correspondant au formalisme de Duez (2011).

Finalement, le flux poloïdal est gouverné par l'équation différentielle suivante (Woltjer, 1959; Montgomery & Phillips, 1989; Duez & Mathis, 2010), similaire à l'équation de Grad-Shafranov usuelle décrivant le magnétisme dans les plasmas confinés (Grad, 1958; Shafranov & D., 1966) :

$$\nabla^* \Psi + \frac{\lambda_1^2}{R_\star^2} \Psi = -\mu_0 \overline{\rho} r^2 \sin^2 \beta_0, \tag{2.36}$$

avec ∇^* l'opérateur de Grad-Shafranov en coordonnées sphériques défini comme :

$$\nabla^* \square = \partial_{rr} \square + \frac{\sin\theta \partial_\theta \left(\partial_\theta \square / \sin\theta \right)}{r^2}, \tag{2.37}$$

λ la valeur propre du système à déterminer avec les conditions aux limites, $\overline{\rho}$ la densité du fluide non magnétisé, R le rayon caractéristique sur lequel le champ se relaxe, et β_0 contraint par l'intensité du champ. Les conditions aux limites dans le cas le plus général où le milieu radiatif est une coquille entourée par l'enveloppe convective et entourant le cœur convectif sont dérivées par Duez & Mathis (2010) et par Duez et al. (2010b). Pour caractériser la topologie d'un champ fossile éventuellement présent dans l'intérieur radiatif des géantes rouges, les conditions aux limites suivantes en $r = 0$ et en $r = R_{\rm rad}$ sont appliquées : les composantes radiales et longitudinales du champ sont considérées nulles aux interfaces. Cela conduit à :

$$\Psi(r,\theta) = -\mu_o \beta_0 \lambda_1 \frac{r}{R} \left[j_1 \left(\lambda_1 \frac{r}{R_{\rm rad}} \right) \int_r^{R_{\rm rad}} y_1 \left(\lambda_1 \frac{x}{R_{\rm rad}} \right) \overline{\rho} x^3 {\rm d}x \right. \\ \left. + y_1 \left(\lambda_1 \frac{r}{R_{\rm rad}} \right) \int_0^r j_1 \left(\lambda_1 \frac{x}{R_{\rm rad}} \right) \overline{\rho} x^3 {\rm d}x \right] \sin^2 \theta, \tag{2.38}$$

avec j_1 et y_1 les fonctions de Bessel au premier ordre de premier et de second type respectivement. Dans le paragraphe précédent nous avons mentionné les études de modélisation de champs relaxés de Braithwaite & Spruit (2004), Braithwaite & Nordlund (2006) et Braithwaite (2008) qui favorisent un champ mixte poloïdal et toroïdal pour que la stabilité soit vérifiée. La topologie du champ mixte de l'équation 2.38 est cohérente avec le résultat de ces simulations, d'un point de vue topologique, de stabilité, et énergétique. Nous nous référons à la revue de Mathis (2010) pour plus de détails sur la compatibilité des approches numériques et théoriques.

Ensuite, Duez & Mathis (2010) démontrent que la valeur propre λ_1 la plus faible correspond à l'état d'énergie le plus bas : selon la structure interne de l'étoile la valeur λ_1 la plus basse est recherchée de sorte à annuler $\int_0^{R_{rad}} j_1 \left(\lambda \frac{x}{R_{\rm rad}} \right) \rho x^3 {\rm d}x$ [13]. Ces champs ont été soumis à tous types de perturbations, et sont restés stables, tandis que les instabilités des champs purement poloïdaux ou purement toroïdaux observées par les études de Braithwaite (2006) et Braithwaite (2007) sont retrouvées (Duez et al., 2010b).

Instabilité de Tayler sur le champ toroïdal et rotation différentielle

L'instabilité des champs purement toroidaux démontrée analytiquement par Tayler (1973) repose sur le principe d'énergie de Bernstein et al. (1958). Localement, deux tubes de flux toroidaux alignés autour de l'axe de rotation de l'étoile interagissent : la pression magnétique exercée entre deux tubes de flux juxtaposés est proportionnelle à B_φ^2. Afin de relâcher cette pression magnétique les tubes de flux se décalent les uns par rapport

13. Nous détaillerons dans le chapitre 6 les difficultés liées à l'estimation de la valeur propre λ_1 dans l'intérieur radiatif des géantes rouges qui présentent des fortes variations de densité, qui nous ont conduit à annuler uniquement le champ radial à l'interface convective par l'annulation de $y_1(\lambda)$.

aux autres dans la direction perpendiculaire aux torres, générant un champ magnétique non-axisymétrique, comme représenté sur la figure 2.16.

Si la rotation différentielle est un phénomène commun aux étoiles de tout âge, différents mécanismes peuvent la mettre en place. Le vent stellaire magnétisé par exemple ralentit l'enveloppe de l'étoile vis-à-vis de la rotation du cœur (Schatzman, 1962). La contraction du cœur lors des phases de SG et RG conduit également à une forte rotation différentielle radiale cœur/enveloppe, tout comme la circulation méridienne (Zahn & P., 1992; Maeder & Zahn, 1998; Mathis & Zahn, 2004; Eggenberger et al., 2012b; Ceillier et al., 2013; Marques et al., 2013; Cantiello et al., 2014).

Cette instabilité peut être très importante pour la compréhension du magnétisme interne des étoiles de type solaire évoluées, dans lesquelles la rotation différentielle radiale est présente à cause de la contraction du cœur. Pour une rotation différentielle trop grande qui transforme un champ mixte d'équilibre en un champ à prédominance toroïdale, cette instabilité peut alors détruire un champ d'origine fossile sur un temps d'Alfvén, si celui-ci n'est pas regénéré par un autre mécanisme.

2.2.4.3 Autres instabilités dans les zones radiatives

D'autres instabilités peuvent conduire au changement de topologie ou à la destruction des champs magnétiques dans les zones radiatives des étoiles. Un champ fossile peut donc être soumis à l'une de ces instabilités, perturbant l'équilibre des forces décrit dans la section 2.2.3. Cela conduit à la destruction du champ fossile sur un temps d'Alfvén.

Instabilité Magnétorotationnelle

Cette instabilité MHD déstabilise les disques d'accrétion (Fromang et al., 2004) et est suspectée d'initier l'accrétion des corps (Balbus & Hawley, 1991). Elle se crée dans un milieu en rotation différentielle décroissante selon la direction radiale, possédant un champ magnétique dans la direction parallèle à l'axe de rotation, avec une très faible diffusivité magnétique si bien que les lignes de champs sont gelées dans le plasma. Une perturbation radiale qui écarte une parcelle vers les couches externes (resp. internes) moins rapides (resp. plus rapide) déforme la ligne de champ. La tension magnétique qui s'exerce sur la parcelle tend à ramener le fluide à sa position d'équilibre, ce qui conduit à un transport de moment cinétique de l'intérieur vers l'extérieur (resp. vers l'intérieur), ce qui se fait par une accélération (resp. décélération) de la parcelle dans la direction azimutale : elle va finalement passer sur une orbite encore plus grande (resp. plus petite), et l'instabilité est créée. Cette instabilité peut transporter du moment cinétique dans les intérieurs stellaires (Jouve et al., 2015).

Instabilité de flottaison de Parker

Cette instabilité (Parker, 1966), bien connue dans le cadre du disque galactique, est la version magnétisée de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Elle se forme par déséquilibre de flottaison : le fluide magnétisé moins dense que la particule non magnétique situé au-dessus remonte. C'est cette instabilité qui est invoquée pour la flottaison des lignes de champ à l'origine des taches solaire à la surface du Soleil. Cette instabilité est notamment évoquée dans le mécanisme de BL pour la flottaison des lignes de champ magnétisées depuis la tachocline jusqu'à la surface.

2.2.4.4 Potentielle dynamo en milieu radiatif

La production de champ magnétique par effet dynamo est souvent associée à des phénomènes convectifs, ou bien à des champs de vitesses imposés à petite échelle (ondes, turbulence de cisaillement, ...). Cependant, un exemple concret de dynamo magnétique sans perturbation locale du champ de vitesse est celle des disques d'accrétion (Hawley et al., 1996) : une instabilité intrinsèque [14] au champ magnétique remplace l'instabilité

14. L'instabilité ayant lieu sur la composante toroïdale du champ, elle peut être dirigée par la flottaison (Parker, 1966), ou bien être de type Velikhov-Chandrasekhar-Balbus-Hawley (Velikhov, 1959; Chandrasekhar, 1960; Balbus & Hawley, 1991).

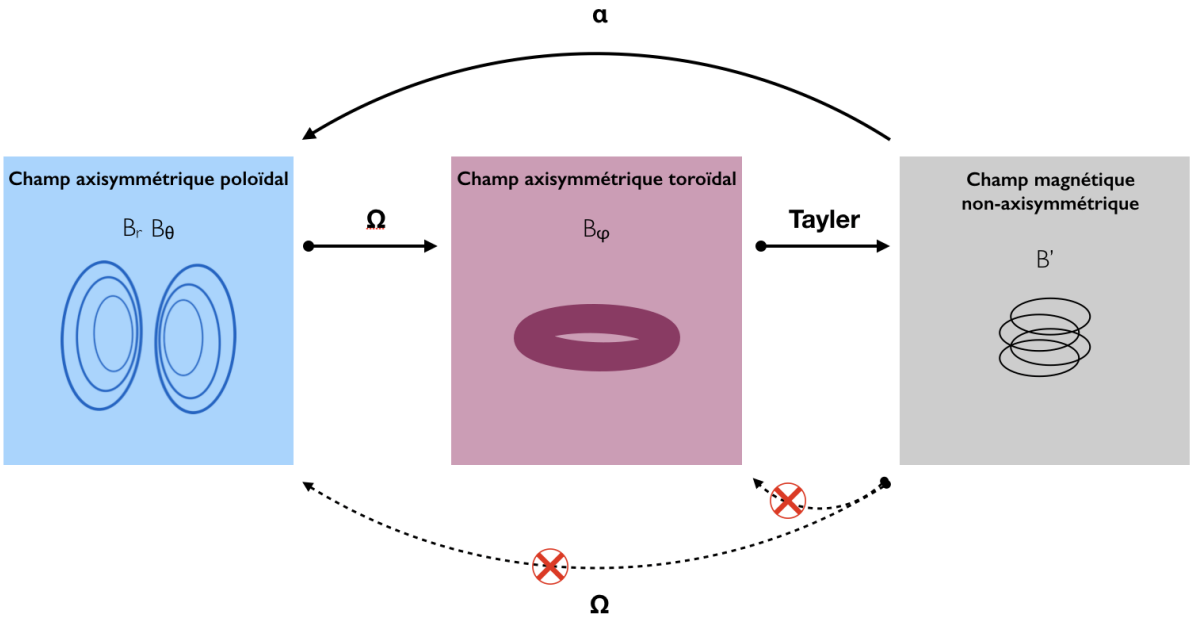


FIGURE 2.16: Boucles de dynamo évoquées dans les zones radiatives. Les croix rouges représentent des étapes qui ont été écartées par des études ultérieures.

du champ de vitesse pour générer un champ dynamo grâce à la rotation différentielle du disque. Tout comme ce peut être le cas pour la dynamo de surface du Soleil via le mécanisme de BL, une dynamo sans champ de vitesse fluctuant peut être générée dans les zones radiatives des étoiles grâce à la rotation différentielle et à des instabilités instrinsèques au champ magnétique existant.

Spruit (2002) invoque l'effet Ω dans l'étoile en rotation différentielle radiale comme moteur d'une dynamo (dite de Tayler-Spruit), regénérant du champ axisymétrique. Cette dynamo est initiée par la perturbation non-axisymétrique du champ azimutal par l'instabilité de Tayler. La fermeture de la boucle de dynamo est représentée sur la figure 2.16 par les flèches en pointillées en bas. En revanche, l'invocation de l'effet Ω pour regénérer le champ et former une dynamo de Tayler-Spruit est controversée : un mécanisme Ω étant par nature axisymétrique, il ne peut aboutir à la formation d'un champ axisymétrique à partir d'un champ non-axisymétrique comme celui créé par l'instabilité de Tayler. Un effet α additionnel est nécessaire pour regénérer le champ (Zahn et al., 2007). Cette bouche de dynamo, qui est plus difficile à exciter dans les intérieurs radiatifs que dans les zones convectives, est représentée par le mécanisme α en haut de la figure 2.16. Du fait des propriétés géométriques des fluctuations de vitesse et du champ magnétique que la f-e-m de l'instabilité de Tayler génère, elle semble potentiellement peu efficace (Rüdiger et al., 2012).

2.2.4.5 Transport de moment cinétique dans les zones radiatives magnétisées

Transport de moment cinétique associé aux champs fossiles

Une fois que le champ fossile est formé, il interagit avec la rotation différentielle dans l'étoile. Nous distinguons alors deux cas selon le critère de Auriere et al. (2007) :

- Le champ est suffisamment fort pour uniformiser la rotation sur les surfaces magnétiques à cause des ondes d'Alfvén qui transportent le moment cinétique très rapidement (TRANSPORT 1 sur la figure 2.17). Dans le cas d'un champ axisymétrique aligné avec la rotation de l'étoile tel que décrit par Braithwaite (2008) et Duez & Mathis (2010), la rotation est gelée le long des lignes du champ poloïdal, définissant ainsi l'état de Ferraro (Ferraro, 1937; MacGregor & Charbonneau, 1999) tel que $(\boldsymbol{B}_p \cdot \boldsymbol{\nabla})\Omega = 0$. Dans le cas d'un champ non-axisymétrique, la rotation est uniforme dans la zone radiative (Moss, 1992; Mathis, 2013; Wei & Goodman, 2015).

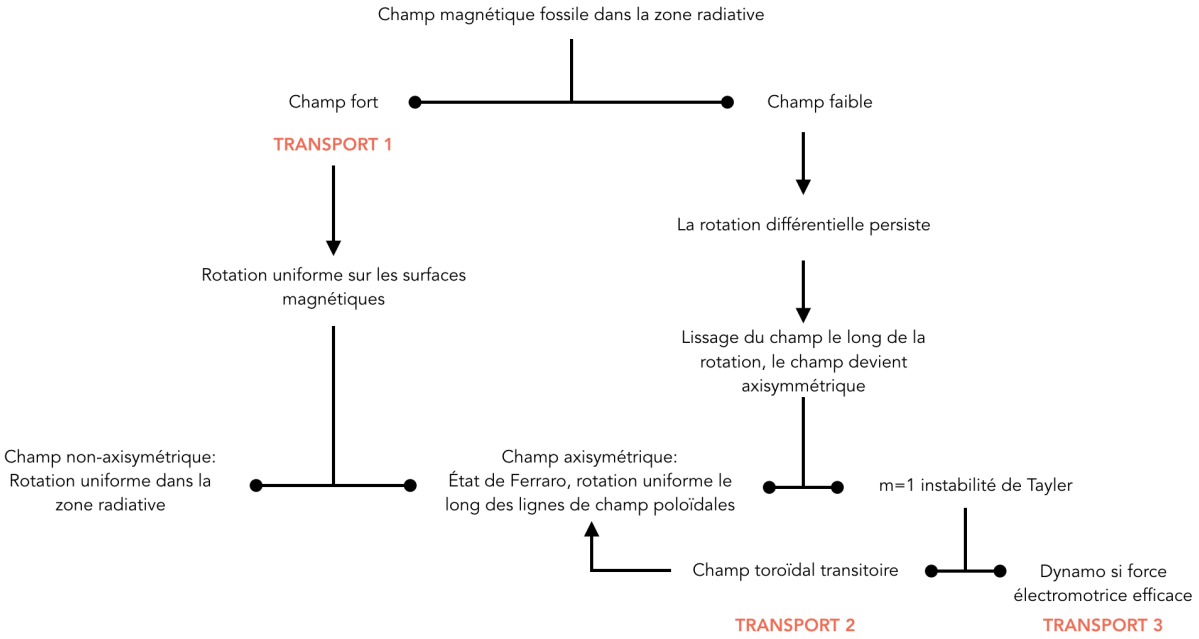


FIGURE 2.17: Phénomènes d'interaction entre un champ fossile et la rotation différentielle dans un intérieur radiatif (Généralisation de Spruit (2003) et de Mathis (2013)).

- Si le champ présent est d'amplitude trop faible pour transporter le moment cinétique rapidement, il est alors soumis à un ≪ rotationnal smoothing ≫ par la rotation qui ramène le champ à une configuration axisymétrique (Rädler & Bräuer, 1987; Spruit, 1999; Wei & Goodman, 2015). Ensuite, l'état de Ferraro est atteint par le même mécanisme que dans le cas en champ fort axisymétrique si aucune instabilité MHD n'entre en jeu.

Cependant, si la rotation différentielle est suffisamment forte, du champ toroïdal est généré. L'instabilité de Tayler (voir section 2.2.4.2) entre alors en jeu.

Transport de moment cinétique associé aux champs d'origine instable dans les zones radiatives

Si cette dernière instabilité est capable de provoquer un effet α (cette possibilité est controversée, Spruit (2002), Braithwaite (2006), Zahn et al. (2007), Arlt & Ruediger (2010), Fuller et al. (2019)), alors le champ poloïdal peut être régénéré et la dynamo en milieu radiatif pourrait se développer (mécanisme de TRANSPORT 3 sur la figure 2.17, voir section 2.2.4.4 pour les caractéristiques de cette dynamo radiative). Comme les champs dynamo contribuent au transport de moment cinétique dans la zone convective du Soleil (e.g. Brun et al., 2004, 2017), nous supposons donc qu'ils sont également efficaces en milieu radiatif (e.g. Heger et al., 2005; Maeder & Meynet, 2003; Eggenberger et al., 2005).

Dans le cas où la dynamo n'est pas excitée, Fuller et al. (2019) montrent que l'instabilité de Tayler peut saturer grâce à la dissipation turbulente des perturbations qu'elle génère. Cela produit des amplitudes de champ plus grandes encore, et un transport de moment cinétique par les ≪ Maxwell stresses ≫ (repéré par TRANSPORT 2 sur la figure 2.17) plus efficace que dans le scénario de dynamo de Tayler-Spruit (TRANSPORT 3, voir aussi Cantiello et al., 2014). Eggenberger et al. (2019a,b, 2020) préviennent en revanche que le scénario tel que présenté dans l'article de Fuller et al. (2019) ne suffit pas à expliquer complètement ni le transport de moment cinétique observé dans les étoiles de type solaire évoluées, ni la rotation du Soleil si le cœur tourne 3 à 4 fois plus vite que le reste de la région radiative comme proposé par García et al. (2007) et Fossat et al. (2017).

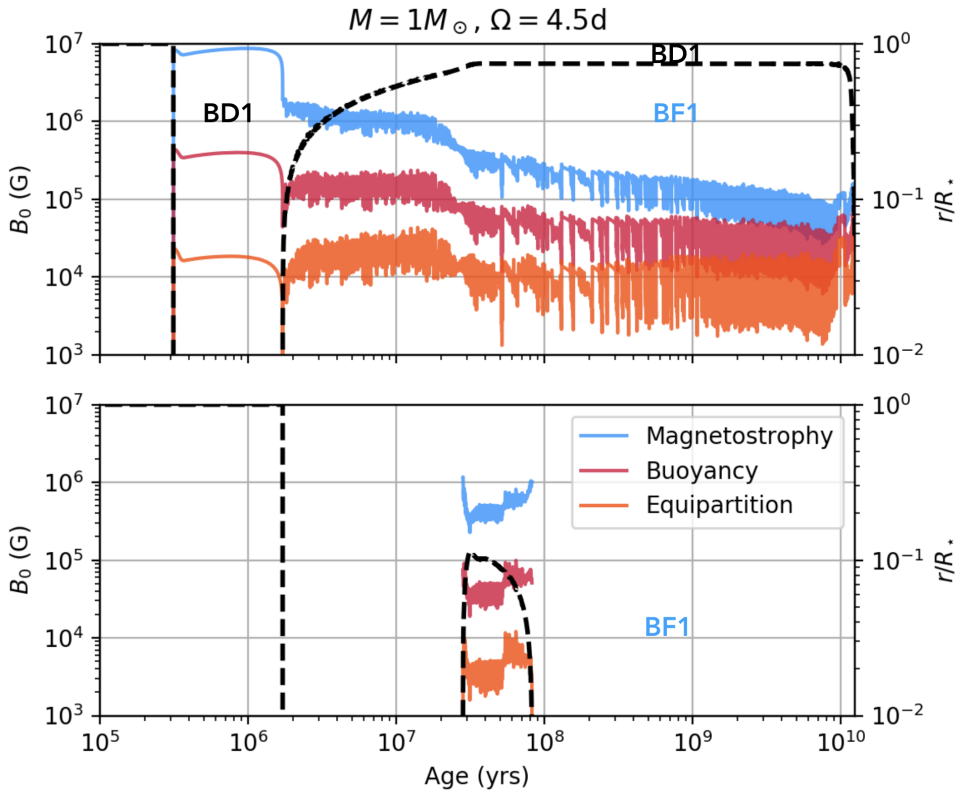


FIGURE 2.18: *Haut :* Amplitudes de champ magnétique dynamo à la frontière entre l'enveloppe convective et l'intérieur radiatif pour une étoile de $1M_\odot$, Z=0.0134, en rotation uniforme (le taux de rotation initial durant la PMS est de $\Omega = 2.5\mu$Hz) simulée avec le code STAREVOL (Siess et al., 2000; Palacios et al., 2006; Decressin et al., 2009; Amard et al., 2016). La courbe bleue (resp. rouge et orange) représente l'amplitude estimée à partir du régime magnétostrophique (resp. de flottaison et d'équipartition). La ligne noire en pointillés indique la position de la frontière entre l'intérieur radiatif et l'enveloppe convective au cours de l'évolution de l'étoile, entre la contraction du nuage et la fin de la séquence principale. *Bas :* Même légende que pour le panneau supérieur mais en considérant la frontière entre un cœur convectif et la zone radiative interne (Astoul, Bugnet, Mathis, Amard, *in prep*).

2.3 Biographie stellaire magnétisée : scénario des champs fossiles

À partir des différents mécanismes de formation, de maintien et de relaxation des champs magnétiques dans les zones radiatives et les zones convectives présentés dans la section 2.2, nous construisons un scénario complet d'évolution du champ magnétique fossile dans les régions radiatives des étoiles de type solaire tout au long de leur évolution.

2.3.1 La variété de stabilité vis-à-vis de la convection des étoiles de faible masse et de masse intermédiaire vue par les diagrammes de Kippenhahn

Au long de son évolution, une étoile de type solaire voit sa structure interne s'ajuster aux changements de densité et de pression liés à la fusion des éléments dans les régions internes. L'enveloppe externe de l'étoile de type solaire reste toujours convective, mais la zone interne peut être complètement radiative ou bien présenter un cœur convectif. Ces alternances de stabilité vis-à-vis de la convection jouent un rôle dans la présence de magnétisme interne des étoiles de type solaire. Les états présentant un cœur convectif sont alors supposés générer un champ dynamo, qui relaxe ensuite dans la zone radiative remplaçant la convection sous la forme d'un champ fossile, comme c'est le cas dans les enveloppes convectives (voir e.g. simulations numériques Arlt & Weiss, 2014; Emeriau-Viard & Brun, 2017).

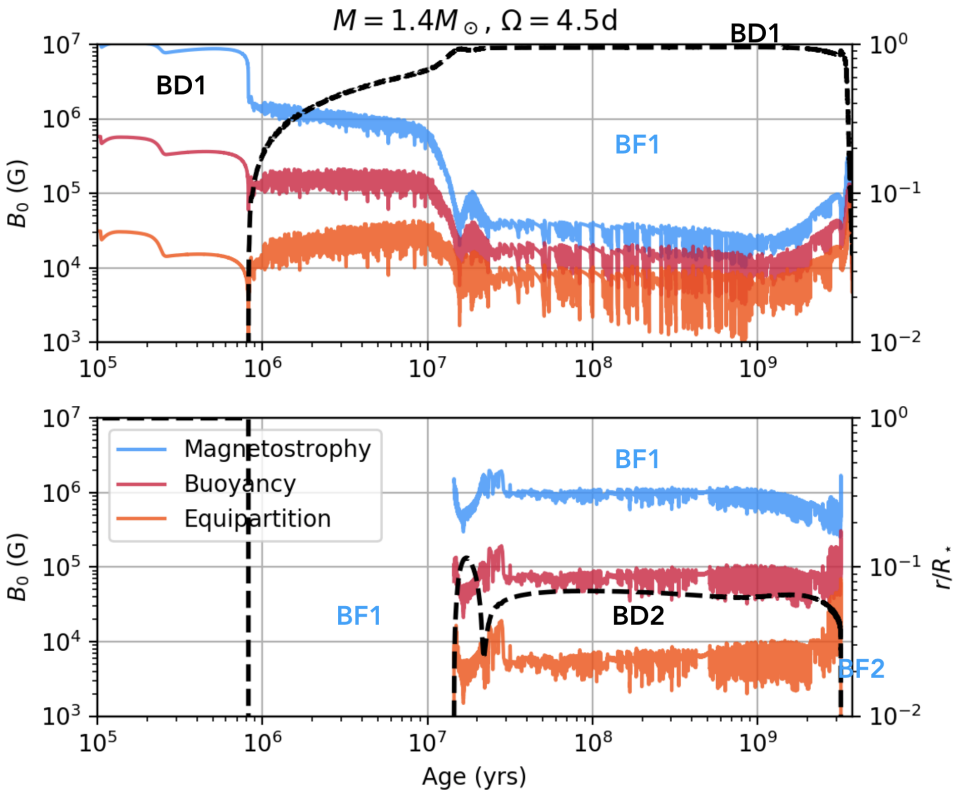


FIGURE 2.19: Légende identique à celle de la figure 2.18 pour une étoile de $M_\star = 1.4\mathrm{M}_\odot$.

Ce travail original fait l'objet d'une publication à referee en préparation, qui sera soumise au journal Astronomy & Astrophysics cet automne (Astoul, Bugnet, Mathis, et al).

2.3.2 Formation stellaire et dynamo magnétique (BD1)

Lors de la contraction du nuage moléculaire donnant naissance à la proto-étoile, le magnétisme présent initialement dans le milieu interstellaire (e.g. Alfvén, 1937; Ferrière, 2015) est transféré à la proto-étoile. Ce champ magnétique de très faible amplitude va cependant devenir négligeable devant celui généré par la dynamo magnétique se mettant en place dans l'étoile complètement convective le long du Chemin de Hayashi. Durant cette étape évolutive, la première dynamo stellaire (BD1) installe un champ magnétique d'amplitude minimale de 10^4G dans l'ensemble du plasma composant l'étoile. La méthodologie aboutissant à cette estimation d'amplitude de champ est celle décrite par Augustson et al. (2019) reportée dans la section 2.2.2.3. Sur le panneau du haut de la figure 2.18 sont représentées en bleu, rouge et orange les amplitudes de champ estimées à la frontière entre l'enveloppe convective et l'intérieur radiatif pour les régimes de magnétostrophie, de flottaison et d'équipartition. La structure interne de l'étoile de masse et métallicité solaires en rotation est modélisée jusqu'à la fin de la séquence principale par le code d'évolution stellaire STAREVOL. Nous considérons ainsi la plage évolutive $[3 \times 10^5, 2 \times 10^6]$ ans pour la formation de l'étoile complètement convective. Les amplitudes de champ associées sont ainsi d'après la figure 2.18 comprises entre 10^4 et 10^7 Gauss. Cet ordre de grandeur est très semblable pour une étoile de masse intermédiaire ($1.4\mathrm{M}_\odot$), représentée sur la figure 2.19.

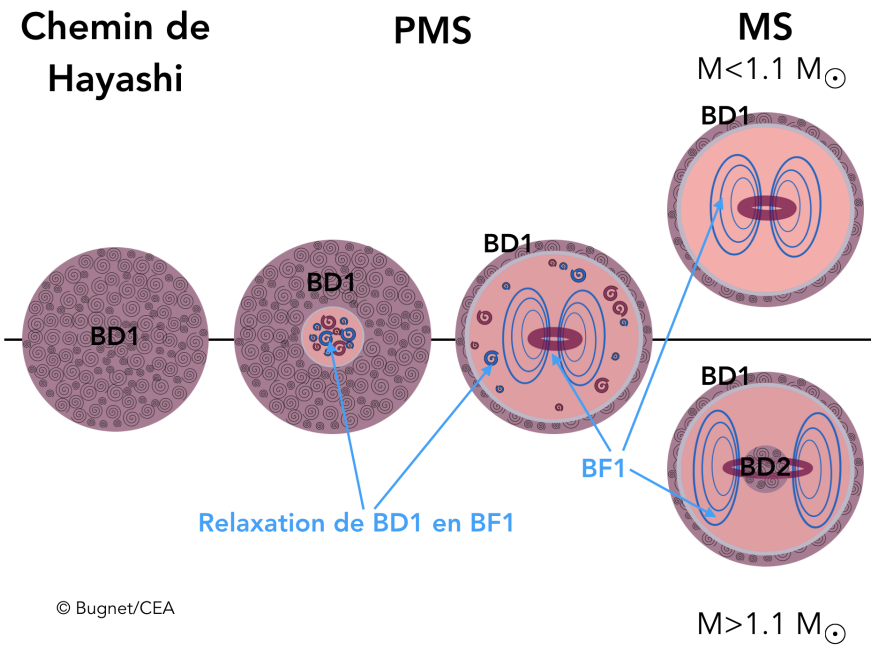


FIGURE 2.20: Représentation schématique de la structure et du magnétisme interne des étoiles de type solaire jusqu'à la séquence principale. Les zones violettes avec les tourbillons représentent les zones convectives dans lesquelles un champ magnétique est généré par effet dynamo. Les zones roses sont radiatives. Lorsqu'un champ fossile de grande échelle est présent, il est représenté par les lignes bleues (composante poloïdale) et violettes (composante toroïdale). Les champs d'origine dynamo sont localisés dans les zones convectives, et les épisodes de relaxation et leur localisation dans les intérieurs radiatifs sont représentés par les tourbillons violets et bleus.

2.3.3 La PMS et l'apparition du premier champ fossile (BF1)

Durant la PMS, la zone convective se retire depuis les profondeurs de l'étoile pour former un cœur radiatif (voir section 2.1). Ce retrait de la zone convective est visualisé sur les panneaux supérieurs des figures 2.18 et 2.19 par la remontée de la ligne en pointillés. Le champ dynamo BD1 ne peut donc plus être maintenu dans la nouvelle zone radiative. À chaque instant, le champ dynamo présent à la frontière radiative/convective qui s'éloigne du cœur relaxe dans l'intérieur radiatif par le mécanisme expliqué dans la section 2.2.3. La formation d'un champ fossile BF1 doit donc théoriquement avoir lieu durant la PMS, pour les étoiles de 1 et 1.4 masses solaires, avec une amplitude comprise entre environ 10^4 et 10^6 Gauss d'après les figures 2.18 et 2.19. Ces amplitudes de champs fossiles sont en réalité des limites maximales pour l'amplitude attendue du champ fossile, car elles sont estimées en négligeant les pertes ohmiques lors de la relaxation. Dans le même temps, le champ dynamo BD1 continue à agir dans l'enveloppe convective de l'étoile.

La question se pose alors du temps nécessaire pour la relaxation du précédant champ dynamo résultant en la formation d'un champ fossile BF1 au niveau de la tachocline. Le panneau de gauche de la figure 2.22 indique ce temps caractéristique nécessaire à la formation du champ fossile en fonction de l'âge de l'étoile et de sa masse, suivant les équations 2.32 et 2.33. D'après cette figure, lorsque l'étoile est en rotation rapide durant la PMS, le temps nécessaire pour former le champ fossile BF1 est inférieur à ~ 4 années. Le champ fossile se forme donc quasi-instantanément par comparaison avec le temps d'évolution caractéristique de l'étoile.

Le second point à considérer concerne la survie du champ fossile relaxé dans l'intérieur radiatif de l'étoile, en particulier pour qu'il y redistribue le moment cinétique. Comme explicité dans la section 2.2.3, le temps de vie d'un champ stable est donné par le temps de dissipation Ohmique (équation 2.34). Ce temps est estimé le long de l'évolution d'étoiles de type solaire de différentes masses sur le panneau de droite de la figure 2.22. Nous observons ainsi que les champs fossiles formés à partir de la PMS se dissipent sur les échelles de temps

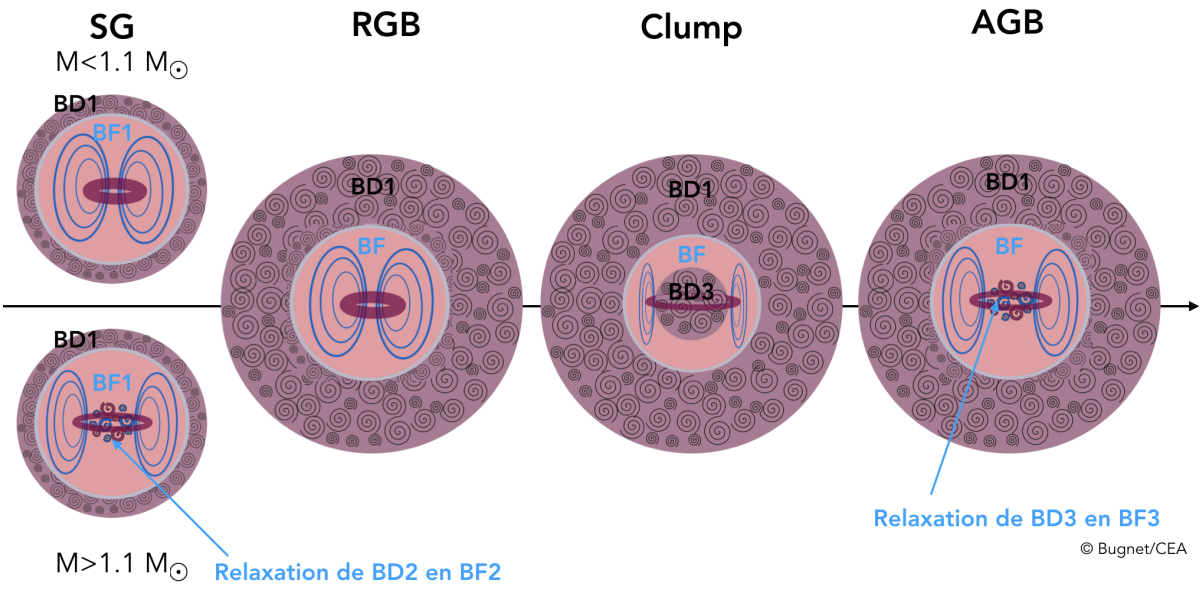


FIGURE 2.21: Représentation schématique de la structure et du magnétisme interne des étoiles de type solaire depuis la phase des sous-géantes jusqu'à l'AGB. Même légende que sur la figure 2.20.

très longues de l'ordre de $10 - 100$ Ga. Lorsque l'on compare ce temps de dissipation avec la durée de vie d'une étoile de type solaire de faible masse de l'ordre de 10Ga (cette estimation est faite pour le Soleil ; les étoiles plus massives évoluent encore plus rapidement), nous concluons que si le champ fossile est formé dans l'intérieur radiatif de l'étoile et qu'il n'est pas détruit ou perturbé par un phénomène dynamique, alors ce champ BF1 doit survivre durant les différents états évolutifs de l'étoile jusqu'à la fin de sa vie.

2.3.4 La séquence principale pour les étoiles de type solaire : Champ fossile interne (BF1) et dynamo (BD1,BD2)

Au début de la séquence principale, le champ BF1 a ainsi complètement relaxé et s'est stabilisé dans l'intérieur radiatif de l'étoile. Dans le cas des étoiles de faible masse ($M \lesssim 1.1\mathrm{M}_\odot$), un cœur convectif occupant 10% du rayon de l'étoile apparaît (voir figure 2.18). Il est alors accompagné d'une dynamo, avec une amplitude

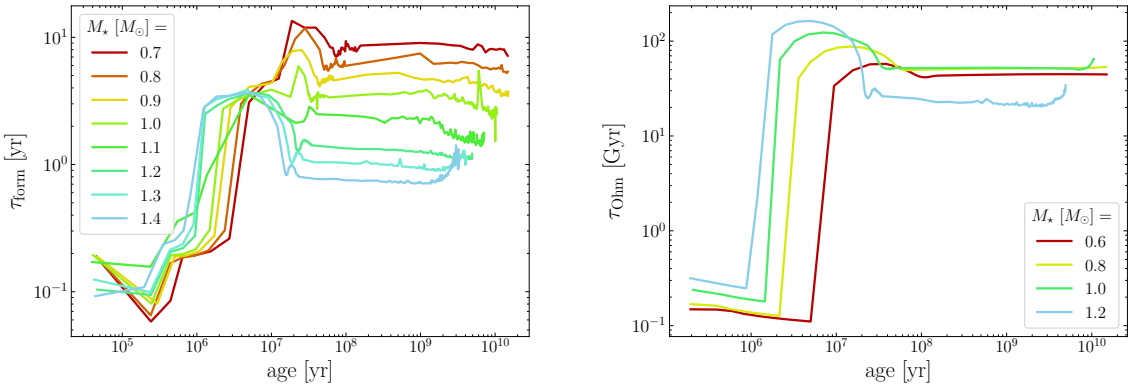


FIGURE 2.22: *Gauche :* Temps caractéristique de formation d'un champ fossile par relaxation du champ dynamo à la frontière radiative/convective lorsque la zone convective se retire en fonction de l'âge de l'étoile et de sa masse. *Droite :* Temps caractéristique de dissipation ohmique du champ stabilisé en fonction de la masse de l'étoile et de son âge (Astoul, Bugnet, Mathis, Amard, *in prep*).

de champ magnétique associée légèrement plus faible que l'amplitude du champ fossile BF1 présent dans l'intérieur radiatif. Nous négligerons l'impact de cette dynamo sur le champ fossile BF1 de part sa petite échelle spatiale et temporelle.

Pour les étoiles de masses intermédiaires, le cœur convectif persiste durant toute la séquence principale (voir figure 2.19). L'amplitude du champ magnétique d'origine dynamo BD2 associé à ce nouvel épisode convectif interne est du même ordre de grandeur que le champ fossile BF1 préexistant dans l'intérieur radiatif. Simultanément, la dynamo de surface continue à produire et maintenir le champ magnétique de surface BD1 pour les deux étoiles de 1 et 1.4 masses solaires présentées.

Le champ fossile BF1 doit être ajusté au long de l'évolution sur la MS par rapport à la taille de la zone radiative. Au premier ordre, la structure des étoiles est figée durant la phase de séquence principale, mais en toute rigueur le champ magnétique évolue par conservation du flux magnétique dans l'intérieur radiatif :

$$B_{0\star} \simeq B_{0,\mathrm{init}} \frac{R^2_{\mathrm{init}}}{R^2_{\mathrm{rad},\star}}, \tag{2.39}$$

avec R_{init} le rayon de la zone radiative à la fin du dernier épisode de dynamo interne, et $R_{\mathrm{rad},\star}$ le rayon radiatif actuel, qui est très proche de R_{init} durant la séquence principale. Cette conservation du flux n'est valable que lorsque l'on considère un champ magnétique confiné dans la zone radiative, sans reconnections avec le champ de surface. Cette hypothèse forte sera adoptée dans la suite du manuscrit, le sujet de la reconnection magnétique des champs au niveau de la tachocline restant fortement débatu (Strugarek et al., 2011; Acevedo-Arreguin et al., 2013).

Durant la séquence principale, le temps caractéristique de formation des champs fossiles reste très faible, inférieur à 10 ans (voir figure 2.22). Ainsi, le champ fossile BF2 se forme également très rapidement lorsque le cœur convectif des étoiles de masse intermédiaires se retire à la fin de la MS. Comme intuité dans la section 2.2.3, quels que soient l'état évolutif et la masse de l'étoile, le temps caractéristique de relaxation d'un champ en un champ fossile est de l'ordre de 1-10 années. Ce temps est donc très court devant les échelles de temps de l'évolution stellaire, et le phénomène de relaxation des champs d'origine dynamo en champs fossiles peut donc être considéré en première approximation comme instantané, comme observé dans les simulations numériques de Arlt & Weiss (2014) et de Emeriau-Viard & Brun (2017).

La figure 2.20 regroupe et schématise les différents états magnétiques des étoiles de type solaire depuis le chemin de Hayashi jusqu'à la séquence principale, et la figure 2.21 complète ce scénario d'évolution magnétisée jusqu'à l'AGB.

2.3.5 La phase des sous-géantes : champs fossiles (BF1, BF2) et dynamo (BD1)

Alors que l'enveloppe convective continue de générer le champ dynamo BD1, le cœur de l'étoile commence à se contracter durant la phase de sous-géante, et l'enveloppe s'étend en retour par effet miroir (voir la restructuration des étoiles dans les figures 2.18 et 2.19 autour de respectivement 10^{10} et 3×10^9 ans). Dans les étoiles de faible masse, le champ fossile BF1 doit donc s'ajuster au rétrécissement de l'intérieur radiatif. Il en va de même pour les champs BF1 et BF2 d'amplitudes similaires, provenant de la relaxation des champ dynamo BD1 et BD2 dans les étoiles de masses intermédiaires. Par l'équation 2.39, l'amplitude du champ magnétique fossile s'ajuste à la taille de la zone radiative. Le suivi de l'amplitude des champs magnétiques sur la phase des sous-géantes et des géantes sera présenté au chapitre 6. Nous considérons que les champs BF1 et BF2 se reconnectent dans les étoiles de masse intermédiaire sans perte d'énergie. Cela aboutit, quelle que soit la masse de l'étoile, à la présence d'un unique champ fossile BF dans les intérieurs des géantes rouges.

2.3.6 La RGB : dynamo convective (BD1) et champ fossile (BF)

Selon le régime d'équilibre choisi pour l'estimation de l'amplitude du champ magnétique à la fin du dernier épisode dynamo, les amplitudes de champs magnétiques fossiles durant la RGB atteignent des valeurs comprises entre 0.01 et 10MG (voir les résultats obtenus au chapitre 6 sur les figures 6.6 et 6.8 pour la conservation du flux magnétique dans l'intérieur radiatif).

Bien entendu, ce scénario est simpliste car il ne prend pas en compte ni les effets éventuels de l'augmentation de la rotation différentielle dans la zone radiative lorsque le cœur se contracte, ni les pertes ohmiques, ni les phénomènes de reconnections magnétiques. Les interactions entre la rotation différentielle et le magnétisme développées dans la section 2.2.4.2 peuvent bien évidemment entrer en jeu, détruire le champ fossile et éventuellement générer une potentielle dynamo en zone radiative par la saturation de l'instabilité de Tayler (Spruit, 2002; Zahn et al., 2007; Fuller et al., 2019).

2.3.7 Étapes évoluées et fin de vie

Les modèles d'évolution stellaires indiquent ensuite la nouvelle formation d'un cœur convectif durant la branche horizontale. Ce nouveau cœur convectif ainsi synonyme de nouvelle dynamo régénère un champ magnétique interne BD3. La disparition du cœur convectif du Clump laisse ensuite place à la relaxation du champ BD3 en champ BF3, qui se reconnecte avec le champ fossile déjà présent dans la zone radiative, BF. Lorsque l'enveloppe de l'étoile se perd peu à peu, l'intérieur radiatif se rapproche de la surface visible de l'étoile. Les naines blanches sont ainsi constituées du cœur radiatif compacté des géantes qui leur donnent naissance. La détection de naines blanches magnétiques pourrait donc être la preuve que les intérieurs radiatifs de certaines étoiles de type solaire évoluées sont magnétisées (e.g. Angel et al., 1981; Braithwaite & Spruit, 2004).

CHAPITRE 3

OSCILLATIONS STELLAIRES ET MAGNÉTISME DES ÉTOILES DE FAIBLE MASSE

Sommaire

3.1 Théorie des oscillations **61**
3.1.1 État d'équilibre 62
3.1.2 Perturbation par les oscillations 63
3.1.3 Première intuition sur la nature des modes d'oscillation des étoiles et relations de dispersion associées 64
3.1.4 Solutions générales 66
3.2 Solution générale des modes d'oscillation et points tournants **68**
3.2.1 Solution simplifiée correspondant aux ondes fortement oscillantes 68
3.2.2 Cavités de résonance et points tournants 70
3.2.3 Expression asymptotique des modes acoustiques 71
3.2.4 Expression asymptotique des modes de gravité 72
3.2.5 Les modes mixtes 74
3.2.6 Fréquence et amplitude des modes d'oscillation 78
3.3 Paramètres stellaires globaux et lois d'échelle astérosismiques **80**
3.4 Les oscillations pour sonder le profil de rotation différentielle **81**
3.4.1 Effet de la rotation sur les motifs des oscillations dans la PSD 81
3.4.2 Le profil de rotation interne grâce aux modes mixtes 83
3.5 La quête du magnétisme interne **88**
3.5.1 Les amplitudes anormalement faibles de certains modes mixtes dipolaires . . . 88
3.5.2 État de l'art sur la recherche de magnétisme interne aux étoiles 92

3.1 Théorie des oscillations

Les mouvements internes d'un corps sont associés à la génération de nombreux phénomènes ondulatoires. Ainsi, le déplacement des plaques tectoniques à la surface de la Terre les unes par rapport aux autres est à l'origine des ondes sismiques terrestres, les mouvements de circulation atmosphérique excitent les ondes de Rossby, le choc entre une pierre et l'eau génère des ondes de gravité de surface. Dans les étoiles de type solaire, les zones convectives externes sont le siège de mouvements turbulents. Ces mouvements stochastiques du gaz sont à l'origine des ondes qui se propagent à l'intérieur des étoiles. Afin de détailler la nature des ondes dans les étoiles, nous présentons tout d'abord la théorie linéaire des oscillations stellaires. Nous nous concentrons uniquement sur les oscillations de type solaire, générées par la convection turbulente de l'étoile et non pas par un mécanisme de restructuration globale de l'étoile, ou par les mécanismes κ et ϵ.

Nous considérons dans cette section une étoile sans rotation et sans champ magnétique. Le gaz composant l'étoile est à l'équilibre si la structure de l'étoile varie lentement par rapport à la fréquence des oscillations, ce qui est tout à fait correct dans le cas des étoiles de type solaire. Dans ce système, les équations classiques de l'hydrodynamique s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0, \qquad \text{Équation de Continuité}$$

avec ρ la densité du gaz et $\boldsymbol{v}$ le vecteur vitesse,

$$\rho \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{v} \right] = -\boldsymbol{\nabla} p + \rho \boldsymbol{g}, \qquad \text{Équation d'Euler}$$

avec p la pression du gaz et $\boldsymbol{g}$ l'accélération gravitationnelle qui s'écrit en fonction du potentiel gravitationnel Φ comme :

$$\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\nabla} \Phi, \tag{3.1}$$

avec

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi \rho G, \qquad \text{Équation de Poisson}$$

avec G la constante universelle de la gravitation.

L'équation de fermeture du système est donnée par la conservation de l'énergie (Aerts et al., 2010) :

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} + p \frac{\mathrm{d}\frac{1}{\rho}}{\mathrm{d}t}, \tag{3.2}$$

avec $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ le taux de perte ou de gain de chaleur et E l'énergie interne massique. Dans un système en évolution adiabatique, le chauffage du gaz est négligé. Cette approximation est valable dans l'intérieur dense des étoiles, pour lequel le temps de radiation de la chaleur est très grand. En utilisant cette approximation adiabatique, l'équation de continuité et les identités thermodynamiques, l'équation de conservation de l'énergie se réécrit comme :

$$\frac{1}{p} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\Gamma_1}{\rho} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}, \qquad \text{Équation de transport de l'énergie}$$

avec $\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_{\mathrm{ad}}$ le premier exposant adiabatique. Les équations de continuité, du mouvement, de l'énergie et de Poisson forment l'ensemble des équations décrivant le système des déplacements adiabatiques du gaz. Sur cet ensemble d'équations repose la physique des modes d'oscillation adiabatiques.

3.1.1 État d'équilibre

L'état d'équilibre correspond au gaz immobile, état dans lequel toutes les dérivées temporelles sont nulles sur les échelles de temps dynamiques. Les équations gouvernant le système s'écrivent donc, puisque l'équation de continuité est automatiquement satisfaite, comme :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} p_0 = \rho_0 \boldsymbol{g}_0 = -\rho_0 \boldsymbol{\nabla} \Phi_0 \\ \boldsymbol{\nabla}^2 \Phi_0 = 4\pi \rho_0 G \\ 0 = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \epsilon_0 - \dfrac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

avec ϵ le taux de production d'énergie massique et $\boldsymbol{F}$ le flux d'énergie. Le système est considéré à symétrie sphérique puisque les actions de la rotation et du champ magnétique sur la structure sont ignorées, donc l'accélération gravitationnelle s'exprime selon le vecteur direction radial $\boldsymbol{e}_r$ seulement. Le flux d'énergie dirigé vers l'extérieur de l'étoile est également selon $\boldsymbol{e}_r$. Sans détailler les calculs qui sont présentés notamment dans

la section 3 du livre « Asteroseismology » de Aerts et al. (2010), ce système d'équations à l'équilibre est réécrit pour obtenir les équations classiques de la structure des étoiles (Kippenhahn & Weigert, 1990) :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}r} = -g_0\rho_0 \\ g_0 = \dfrac{\mathrm{G}m_0}{r^2} \\ \dfrac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{3\kappa_0\rho_0}{16\pi^2 acT_0^3}4\pi r^2 F_0 & \text{pour un milieu radiatif,} \\ \dfrac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}r} \simeq -\left(\dfrac{\partial \ln \mathrm{T}}{\partial \ln \mathrm{p}}\right)_{\mathrm{ad}} \dfrac{\mathrm{G}m_0\rho_0 \mathrm{T}_0}{p_0 r^2} & \text{pour un milieu convectif.} \end{cases} \tag{3.4}$$

3.1.2 Perturbation par les oscillations

Ce système à l'équilibre est ensuite perturbé par la propagation des ondes dans l'étoile. Sans pour l'instant détailler la nature de ces ondes, exprimons les perturbations sur les équations décrivant le fluide adiabatique. Les perturbations Eulériennes au premier ordre, permettant de décrire les variations des quantités à la position $\boldsymbol{r}$ dans le temps, s'expriment, en considérant l'approximation de Cowling [1], comme :

$$\begin{cases} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{p}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{p'}(\boldsymbol{r},t) \\ \rho(\boldsymbol{r},t) = \rho_0(\boldsymbol{r}) + \rho'(\boldsymbol{r},t) \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{r}) \text{ (approximation de Cowling (Cowling \& Phil, 1941) pour négliger la composante } \boldsymbol{g'}) \\ \Phi(\boldsymbol{r},t) = \Phi_0(\boldsymbol{r}) \text{ (approximation de Cowling (Cowling \& Phil, 1941) pour négliger la composante } \Phi') \\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{v'}(\boldsymbol{r},t) \text{ (nous supposons le fluide à vitesse nulle à l'équilibre car le système est sans rotation).} \end{cases} \tag{3.5}$$

L'écriture Lagrangienne de ces perturbations sera parfois également utilisée, lorsque l'on a besoin de suivre le déplacement d'une particule fluide. Les perturbations Lagrangiennes des quantités ($\square$) sont reliées aux perturbations Eulériennes par la relation :

$$\delta\square = \square'(\boldsymbol{r}_0) + \boldsymbol{\delta r}. \cdot \boldsymbol{\nabla}\square_0, \tag{3.6}$$

avec $\boldsymbol{\delta r}$ le déplacement du fluide tel que $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{v'}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\partial \boldsymbol{\delta r}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$.

Ainsi au premier ordre, les équations décrivant le gaz dans la limite adiabatique s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_0 \boldsymbol{v}) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\delta\rho + \rho_0 \mathrm{div}(\boldsymbol{\delta r})\right) = 0 \\ \rho_0 \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{\delta r}}{\partial t^2} = \rho_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} p' + \rho' \boldsymbol{g}_0 \\ \delta p = p' + \boldsymbol{\delta r} \cdot \boldsymbol{\nabla} p_0 = \dfrac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0}\left(\rho' + \boldsymbol{\delta r} \cdot \boldsymbol{\nabla}\rho_0\right) = \dfrac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0}\delta\rho \end{cases} \tag{3.7}$$

1. Cette approximation qui consiste à négliger la perturbation du potentiel gravitationnel Φ' est valable lorsque les variations du potentiel gravitationnel sont faibles devant les variations de densité. Elle est valable lorsque le mode d'oscillation considéré a un ordre radial élevé ou bien un grand degré. Elle permet de simplifier le système décrivant les oscillations stellaires de 4 à 2 équations, permettant ainsi sa résolution semi-analytique (Cowling & Phil, 1941). Nous faisons dès à présent cette approximation afin de simplifier les expressions.

3.1.3 Première intuition sur la nature des modes d'oscillation des étoiles et relations de dispersion associées

3.1.3.1 Solution à hautes fréquences de nature acoustique

Nous supposons l'étoile comme homogène, provoquant l'annulation des dérivées spatiales des quantités d'équilibre. Ainsi, dans le système d'équation 3.7, l'accélération gravitationnelle g_0 est négligeable dans l'équation du mouvement lorsque le système à l'équilibre varie lentement en temps par rapport à la fréquence d'oscillation des ondes (e.g. Aerts et al., 2010). L'équation du mouvement se simplifie ainsi en :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\delta r}}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} p'. \tag{3.8}$$

En prenant la divergence de l'équation 3.8 et en utilisant l'équation de continuité, nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\Gamma_1 p_0}{\rho_0} \nabla^2 \rho'. \tag{3.9}$$

Nous introduisons ici l'expression générale de la vitesse du son c_s dans l'étoile :

$$c_s^2 = \frac{\Gamma_1 p_0}{\rho_0}. \tag{3.10}$$

Finalement, dans la limite des petites longueurs d'onde, l'équation 3.9 est une équation sous forme d'ondes planes dont la solution usuelle s'écrit :

$$\rho' = A e^{i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r} - \omega t)}, \tag{3.11}$$

avec k le vecteur d'onde et ω la fréquence angulaire de l'onde. La relation de dispersion associée à cette solution, déterminée en injectant l'équation 3.11 dans l'équation 3.9, s'écrit comme la relation de dispersion caractéristique des ondes sonores planes :

$$\omega^2 = c_s^2 |\boldsymbol{k}|^2. \tag{3.12}$$

Ces ondes sonores provoquent un déplacement du gaz compressible, dans la direction du vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$. *Nous utiliserons au long de ce manuscrit la notation ω pour désigner une pulsation en rad.s^{-1}, et ν pour désigner une fréquence en s^{-1} (Hz).*

3.1.3.2 Solution à basses fréquences sous forme d'ondes de gravité

L'hypothèse principale menant à l'équation de dispersion des ondes sonores est le faible impact de la gravité par rapport au gradient de pression. Dans les zones radiatives, la gravité joue un rôle essentiel pour maintenir la stratification stable du gaz du fait de la poussée d'Archimède. L'approximation n'est donc plus valide et un gradient de pression hydrostatique doit être considéré. Nous maintenons l'hypothèse que les quantités à l'équilibre varient lentement par rapport aux quantités perturbées et nous négligeons toujours les variations du potentiel gravitationnel, mais nous recherchons une solution à beaucoup plus basse fréquence que celle correspondant aux modes acoustiques obtenue dans le paragraphe précédent.

Puisque la gravité est dirigée vers le centre de l'étoile selon la direction radiale,

$$\boldsymbol{\nabla} p_0 = \frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}r} \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{\nabla} \rho_0 = \frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}r} \boldsymbol{e}_r, \tag{3.13}$$

tous les mouvements peuvent être décomposés selon leurs composantes radiales (selon $\boldsymbol{e}_r$) et horizontales (selon $\boldsymbol{e}_\theta$ et $\boldsymbol{e}_\varphi$) :

$$\boldsymbol{\delta r} = \xi_r \boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{\xi}_h,\ \boldsymbol{k} = k_r \boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{k}_h. \tag{3.14}$$

L'équation du mouvement selon les composantes radiale et horizontales, ainsi que l'équation de continuité deviennent :

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial p'}{\partial r} - \rho' g_0 \\ \rho_0 \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}_h}{\partial t^2} = -\boldsymbol{\nabla}_h p' \\ \rho' = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\rho r_0^2 \xi_r\right) - \rho_0 \boldsymbol{\nabla}_h \cdot \boldsymbol{\xi_h} \end{cases}, \tag{3.15}$$

en utilisant les coordonnées usuelles (r = distance au centre de l'étoile, θ = colatitude, φ= longitude), et $\boldsymbol{\nabla}_h$ le gradient horizontale de la quantité ($\square$) :

$$\boldsymbol{\nabla}_h \square = \frac{1}{r}\frac{\partial \square}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \square}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi. \tag{3.16}$$

Une solution de cette équation simplifiée est l'onde sonore adiabatique obtenue dans la section 3.1.3.1. Nous recherchons une seconde solution de ce système d'équations sous forme d'ondes planes ($\propto A e^{i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}-\omega t)}$), que nous injectons dans les équations 3.15 et dans l'équation de continuité, pour obtenir le nouveau système :

$$\begin{cases} -\rho_0 \omega^2 \xi_r = -ik_r p' - \rho' g_0 \\ -\rho_0 \omega^2 \boldsymbol{\xi}_h = -i\boldsymbol{k}_h p' \\ \rho' = -\rho_0 i k_r \xi_r - \rho_0 i \boldsymbol{k}_h \cdot \boldsymbol{\xi}_h \end{cases}. \tag{3.17}$$

La perturbation de pression s'exprime alors comme :

$$p' = \frac{\omega^2}{k_h^2}\left(\rho' + ik_r \rho_0 \xi_r\right), \tag{3.18}$$

et finalement l'équation du moment projeté sur la composante radiale s'exprime comme :

$$-\rho_0 \omega^2 \xi_r = -i\frac{k_r}{k_h^2}\omega^2 \rho' + \omega^2 \rho_0 \frac{k_r^2}{k_h^2}\xi_r - \rho' g_0. \tag{3.19}$$

Dans cette équation, le premier terme en ρ' est négligeable devant le second en k_r^2 pour des oscillations à très basses fréquences (approximation JWKB [2] pour Jeffreys, Wentzel, Kramers, Brillouin), et donc pour de telles oscillations rapides l'équation se transforme en :

$$\rho_0 \omega^2 \left(1 + \frac{k_r^2}{k_h^2}\right)\xi_r = \rho' g_0. \tag{3.22}$$

2. Lorsqu'une équation de type Schrodinger

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + \lambda^2 \hat{k}_v^2(x)\,\Psi(x) = 0 \tag{3.20}$$

doit être résolue, la méthode JWKB permet d'obtenir, si le paramètre λ est grand devant 1, une solution sous la forme (e.g. Erdélyi, 1956; Froman & Froman, 2005) :

$$\begin{aligned} \Psi(x) \quad = \quad & \frac{1}{\sqrt{\hat{k}_v(x)}}\left[A_+ \exp\left(i\lambda \int^x \hat{k}_v(x')\,\mathrm{d}x'\right)\right. \\ & \left. + A_- \exp\left(-i\lambda \int^x \hat{k}_v(x')\,\mathrm{d}x'\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.21}$$

En utilisant la relation adiabatique (dernière équation du système 3.7), et en négligeant les perturbations de pression (voir le développement de Aerts et al. (2010) dans la section 3.1.4.2), la nouvelle relation de dispersion lorsque la gravité n'est pas négligée, correspondant à des perturbations à très basse fréquence, s'exprime comme :

$$\omega^2 = \frac{N^2}{1+\frac{k_r^2}{k_h^2}} = \frac{N^2 k_h^2}{|\boldsymbol{k}|^2}, \tag{3.23}$$

avec N la fréquence de Brunt-Väisälä telle que :

$$N^2 = g_0 \left(\frac{1}{\Gamma_{1,0}} \frac{\mathrm{d}\ln p_0}{\mathrm{d}r} - \frac{\mathrm{d}\ln \rho_0}{\mathrm{d}r} \right). \tag{3.24}$$

Cette relation de dispersion correspond aux ondes de gravité se propageant dans les milieux stablement stratifiés lorsque $N^2 \geq 0$, dont la force de rappel est la poussée d'Archimède. Si $N^2 \leq 0$, la fréquence ω est complexe et le mouvement croit exponentiellement en temps : la zone devient convective lorsque le critère d'instabilité convective $\frac{\mathrm{d}\ln\rho}{\mathrm{d}\ln p} \leq \frac{1}{\Gamma_1}$ est atteint.

3.1.4 Solutions générales

Le système 3.15 peut être réduit en :

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial p'}{\partial r} - \rho' g_0 \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\rho' + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(\rho r_0^2 \xi_r)\right] = -\nabla_h^2 p' \end{cases}, \tag{3.25}$$

auquel est ajoutée l'équation d'énergie dans la limite adiabatique. Une résolution générale du système est rendue possible par séparation des variables angulaires (voir le détail des étapes de séparation des variables dans Aerts et al. (2010)). Elle permet, dans le cas d'une étoile sans rotation (ou à faible rotation), d'obtenir une expression décomposée sur la base des harmoniques sphériques $Y_\ell^m = \mathcal{N}_\ell^m P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$, avec

$$\mathcal{N}_l^m = (-1)^{\frac{(m+|m|)}{2}} \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.26}$$

une constante de normalisation et P_ℓ^m le polynôme associé de Legendre, (voir figure 3.1) dépendant de l'ordre ℓ et du degré azimutal $|m| \leq \ell$ du mode d'oscillation. Cela est possible si les Laplaciens horizontaux des quantités perturbés ($\square$) s'écrivent sous la forme de Laplace :

$$\nabla_h^2 \square = -\frac{1}{r^2}\Lambda^2 \square, \tag{3.27}$$

avec Λ la valeur propre évaluée à $\Lambda = \sqrt{\ell(\ell+1)}$. Les composantes du vecteurs déplacement peuvent ainsi être exprimées sur la base des harmoniques sphériques :

$$\begin{cases} \xi_r(r,\theta,\varphi,t) = \tilde{\xi}_r(r) Y_\ell^m(\theta,\varphi) e^{-i\omega t} \\ \boldsymbol{\xi}_h(r,\theta,\varphi,t) = \tilde{\xi}_h(r) \left(\dfrac{\partial Y_\ell^m(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial Y_\ell^m(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \right) e^{-i\omega t} \end{cases}. \tag{3.28}$$

Des expressions similaires sont obtenues pour les perturbations de pression et de densité. Finalement, le vecteur déplacement du gaz sous l'effet de l'onde s'écrit donc comme :

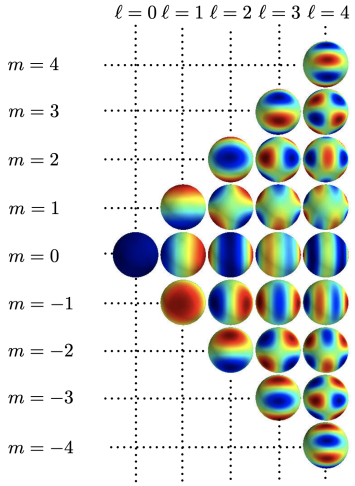


FIGURE 3.1: Représentation de la base des harmoniques sphériques. Chaque colonne correspond à un degré ℓ différent de 0 à 4, et chaque ligne correspond à l'ordre azimutal $m \in [-\ell : \ell]$. Crédits : adapté à partir de Pokorny et al. (2014).

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) = \mathcal{R}e\left\{\sum_{l,m}\left[\tilde{\xi}_r(r)Y_\ell^m(\theta,\varphi)e^{-i\omega t}\boldsymbol{e}_r + \tilde{\xi}_h(r)\left(\frac{\partial Y_\ell^m(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_\ell^m(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right)\right]e^{-i\omega t}\right\}, \tag{3.29}$$

avec $\mathcal{R}e$ la partie réelle. L'équation de l'énergie adiabatique s'ajoute au système 3.25, qui devient en remplaçant les composantes du déplacement et les quantités scalaires par leur projection sur les harmoniques sphériques :

$$\begin{cases} -\omega^2\rho_0\tilde{\xi}_r = -\dfrac{\mathrm{d}\tilde{p}'}{\mathrm{d}r} - \tilde{\rho}'g_0 \\ -\omega^2\left[\tilde{\rho}' + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\rho r_0^2\tilde{\xi}_r)\right] = -\dfrac{\ell(\ell+1)}{r^2}\tilde{p}' \\ \tilde{\rho}' = \dfrac{\rho_0}{\Gamma_1 p_0}\tilde{p}' + \rho_0\xi_r\left(\dfrac{1}{\Gamma_1 p_0}\dfrac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}r} - \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}r}\right) \end{cases}. \tag{3.30}$$

L'équation adiabatique permet de supprimer ρ' du système, qui se réduit à :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{p}'}{\mathrm{d}r} = \rho_0(\omega^2 - N^2)\tilde{\xi}_r + \dfrac{1}{\Gamma_1 p_0}\dfrac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}r}\tilde{p}' \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{\xi}_r}{\mathrm{d}r} = -\left(\dfrac{2}{r} + \dfrac{1}{\Gamma_1 p_0}\dfrac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}r}\right)\tilde{\xi}_r + \dfrac{1}{\rho_0 c_s^2}\left(\dfrac{S_l^2}{\omega^2} - 1\right)\tilde{p}' \end{cases}, \tag{3.31}$$

avec S_l la fréquence de Lamb définie par :

$$S_l^2 = k_h^2 c_s^2 = \frac{\ell(\ell+1)c_s^2}{r^2}, \tag{3.32}$$

définissant dans le même temps l'amplitude du vecteur d'onde horizontal.

Nous noterons par simplification dans la suite des calculs les quantités $\square' = \tilde{\square}'$ et $\square = \square_0$.

3.2 Solution générale des modes d'oscillation et points tournants

3.2.1 Solution simplifiée correspondant aux ondes fortement oscillantes

En première approximation, nous considérons les oscillations associées à un grand ordre radial n. Cela est compatible avec les ordres des modes d'oscillation généralement observés par astérosismologie ($n \geq 5$) et permet de considérer les fonctions propres rapidement oscillantes dans la direction radiale, $\xi_r' \gg \xi_r$, et de négliger le terme en ξ_r dans la seconde équation du système 3.33. De la même façon, une analyse JWKB indique que les fluctuations radiales de la perturbation en pression sont très grandes au passage de l'onde, permettant de négliger p' devant $\frac{\mathrm{d}\vec{p}'}{\mathrm{d}r}$. Tout ceci permet de réduire le système 3.33 à

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}r} = \rho_0(\omega^2 - N^2)\xi_r \\ \dfrac{\mathrm{d}\xi_r}{\mathrm{d}r} = \dfrac{1}{\rho_0 c_s^2}\left(\dfrac{S_l^2}{\omega^2} - 1\right)p' \end{cases}. \tag{3.33}$$

Ces deux équations sont combinées, en négligeant les variations de l'état d'équilibre, en une équation au second ordre pour le déplacement radial :

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi_r}{\mathrm{d}r^2} = \frac{\omega^2}{c_s^2}\left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right)\left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1\right)\xi_r = -K_s(r)\xi_r. \tag{3.34}$$

L'équation 3.34 de l'oscillateur harmonique a une solution oscillante seulement pour $K_s > 0$:

$$\xi_r \sim \cos\left(\int \sqrt{K_s}dr + \Phi\right). \tag{3.35}$$

Si $K_s < 0$ la solution est exponentielle, croissante au décroissante selon le signe du membre dans l'exponentielle.

$$\xi_r \sim e^{\pm \int \sqrt{|K_s|}dr}, \tag{3.36}$$

Ce régime correspond à des ondes dites évanescentes dans le cas d'une exponentielle décroissante.

Le signe de $K_s = k_r^2$ dépend des valeurs relatives des fréquences caractéristiques du système N, S_l et ω. Sur la figure 3.2 nous représentons le profil des fréquences caractéristiques du système pour une géante rouge typique de ~ 2.8 Ga, de métallicité solaire (Z=0.02) et de masse égale à 1.5 fois celle du Soleil.

- Lorsque la fréquence d'oscillation de l'onde est très grande, telle que $\omega \gg N \gg S_l$, la relation 3.34 se simplifie en

  $$K_s = k_r^2 = \frac{1}{c_s^2}\left(\omega^2 - S_l^2\right). \tag{3.37}$$

  Nous retrouvons ainsi la relation de dispersion décrite dans la section 3.1.3.1, valable lorsque les fréquences sont grandes et que la force de rappel est dominée par le gradient de pression plutôt que par la flottaison, avec $|\boldsymbol{k}| = k_r^2 + k_h^2 = k_r^2 + \frac{S_l^2}{c_s^2}$
- Lorsque la fréquence d'oscillation de l'onde est très petite, telle que $\omega \ll N \ll S_l$, la relation 3.34 se simplifie en

  $$K_s = k_r^2 = \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1\right)\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}. \tag{3.38}$$

  Cette fois-ci, la relation de dispersion correspondante est celle décrivant les modes de gravité introduits dans la section 3.1.3.2.

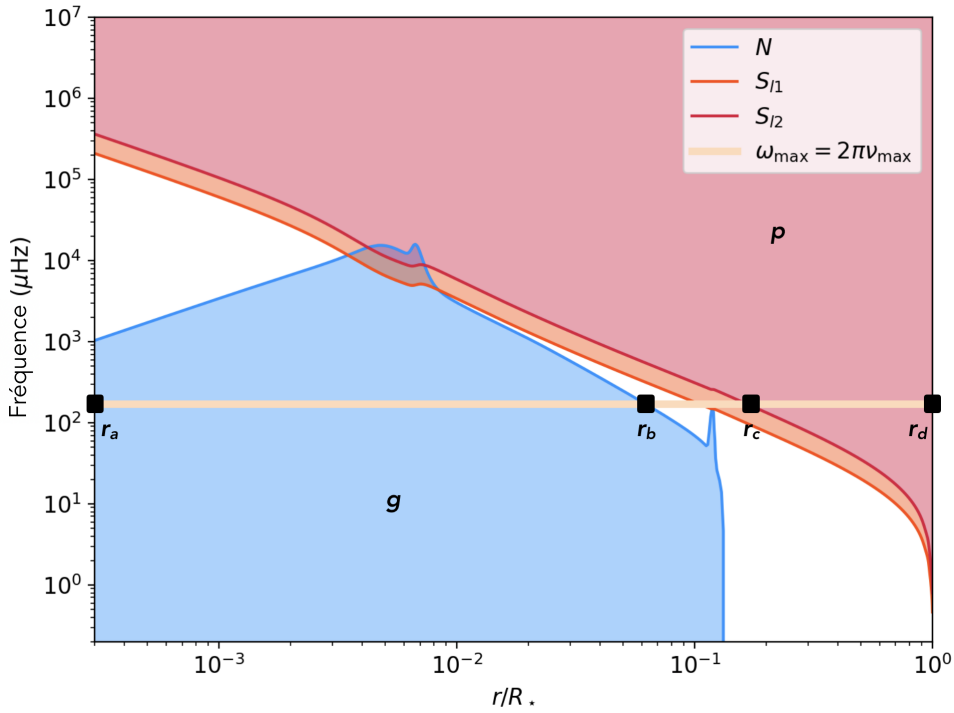


FIGURE 3.2: Diagramme de propagation des ondes dans une géante rouge typique de $\sim$ 2.8 Ga, de métallicité solaire et de masse égale à $1.5 M_\odot$. Les fréquences de Brunt-Väisälä (N) et de Lamb (S_l) pour les modes dipolaires ($\ell = 1$) et quadripolaires ($\ell = 2$) sont représentées. La fréquence $\nu_{\max}$ représentant la fréquence correspondant au maximum d'amplitude des oscillations de l'étoile est également indiquée par la ligne beige. La zone bleue (resp. rouge et orange) représente la cavité de propagation des oscillations de gravité (resp. acoustiques pour les modes $\ell = 1$ et acoustiques pour les modes $\ell = 2$). Les points tournants r_a, r_b, r_c et r_d sont représentés.

L'équation 3.34 est utilisée pour étudier les comportements asymptotiques du déplacement du gaz aux très basses et très hautes fréquences des modes d'oscillation. Elle sera utilisée notamment dans l'article joint aux chapitres 6 et 7 composant ce manuscrit. Cette équation en ξ_r peut également être réécrite sans négliger les variations de l'équation d'équilibre à partir du système 3.33 sous la forme (Lamb, 1932; Deubner & Gough, 1984; Gough, 1993) :

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}r^2} + k_r^2(r)\, X = 0, \tag{3.39}$$

avec $X = c_s^2 \sqrt{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\delta r}$, et le vecteur d'onde vertical complet définit par

$$k_r^2 = \frac{1}{c^2(r)} \left[S_l^2(r) \left(\frac{N^2(r)}{\omega^2} - 1 \right) + \omega^2 - \omega_{\mathrm{c}}^2(r) \right], \tag{3.40}$$

définissant dans le même temps la fréquence de coupure acoustique

$$\omega_{\mathrm{c}}^2 = \frac{c^2}{4H^2} \left(1 - 2\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r} \right). \tag{3.41}$$

La quantité $H = \left(-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr} \right)^{-1}$ est l'échelle de hauteur en densité. Elle indique la distance caractéristique de variation de la densité du gaz. Cette réécriture (expression 3.61) est utilisée dans l'article associé au chapitre 7 de ce manuscrit.

3.2.2 Cavités de résonance et points tournants

Nous étudions plus en détail la nature des oscillations associées au système d'équations 3.33. Afin de mettre les équations composant ce système sous forme canonique, plus facilement manipulable, nous utilisons le changement de variable (voir Unno et al., 1989, Section 15.1) :

$$\begin{cases} u_1 = r^2 \xi_r e^{-\int_0^r \frac{g}{c_s^2} \mathrm{d}r} \\ u_2 = \frac{p'}{\rho} e^{-\int_0^r \frac{N^2}{g} \mathrm{d}r} \end{cases}. \tag{3.42}$$

Ainsi le système 3.33 est modifié en

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}r} = P(r) u_2 \\ \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}r} = P(r) u_1 \end{cases}, \tag{3.43}$$

avec

$$\begin{cases} P(r) = \frac{r^2}{c_s^2} \left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1 \right) e^{\int_0^r \left(\frac{N^2}{g} - \frac{g}{c_s^2} \right) \mathrm{d}r} \\ Q(r) = \frac{1}{r^2} \left(\omega^2 - N^2 \right) e^{-\int_0^r \left(\frac{N^2}{g} - \frac{g}{c_s^2} \right) \mathrm{d}r} \end{cases}. \tag{3.44}$$

Le dernier changement de variable :

$$\begin{cases} v = u_1 \sqrt{\frac{\rho_c}{|P(r)|}} \\ w = u_2 \sqrt{\frac{\rho_c}{|Q(r)|}} \end{cases} \tag{3.45}$$

permet de faire ressortir le terme $K_s = k_r^2 = -PQ$ dans chacune des deux équations au second ordre :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2} + \left[k_r^2 - f(P) \right] v = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \left[k_r^2 - f(Q) \right] w = 0 \end{cases}, \tag{3.46}$$

avec $f(\square) = \sqrt{|\square|} \frac{\mathrm{d}^2 1/\sqrt{\square}}{\mathrm{d}r^2}$, dont les évaluations en P et Q seront négligées devant k_r^2 par la suite, puisque en première approximation $f(P) \sim f(Q) \sim \frac{1}{H_p^2}$, et

$$H_p = \left(-\frac{\mathrm{dln}p}{\mathrm{d}r} \right)^{-1} \tag{3.47}$$

l'échelle caractéristique de variation de la pression du gaz avec k_B la constante de Boltzman et m_u, très grande devant la longueur d'onde radiale des oscillations. Les systèmes 3.46 et 3.43 permettent d'obtenir les équations indiquant les points tournants des ondes dus au gradient structurel de l'étoile. Chaque point tournant est associé à une annulation de la quantité $k_r^2 = -PQ$, et sépare spatialement quatre comportements ondulatoires (voir tableau 3.1) :

Les cavités résonnantes définies par le signe des variables P et Q reportées en bleu et rouge dans le tableau 3.1 correspondent donc aux régions où peuvent se propager des ondes progressives ou se former des modes stationnaires. Ces cavités qui dépendent uniquement du profil radial des fréquences de Lamb et de Brunt-Väisälä sont représentées sur la figure 3.2 par les plages de couleur dans le cas d'une géante rouge typique de ~ 2.8Ga, de $1.5 M_\odot$ et de métallicité solaire. La plage bleue correspond à la cavité de propagation des

TABLE 3.1: Nature des oscillations selon les signes de P et de Q.

cas	$P > 0 \Leftrightarrow \omega < S_l$	$P < 0 \Leftrightarrow \omega > S_l$
$Q > 0 \Leftrightarrow \omega > N$	$k_r^2 < 0$ Zone d'évanescence des ondes p	$k_r^2 > 0$ Zone de propagation des modes p
$Q < 0 \Leftrightarrow \omega < N$	$k_r^2 > 0$ Zone de propagation des modes g	$k_r^2 < 0$ Zone d'évanescence des ondes g

modes de gravité, et la cavité rouge (respectivement orange) correspond à la cavité de propagation des modes acoustiques $\ell = 1$ (respectivement ($\ell = 2$). Les zones restées blanches sur la figure correspondent aux zones où les deux types d'ondes sont évanescentes.

3.2.3 Expression asymptotique des modes acoustiques

Shibahashi (1979) démontre que les solutions du système 3.46 peuvent s'exprimer sous une combinaison linéaires de fonctions d'Airy (voir aussi Olver (1954); Osaki (1977)) sous l'approximation JWKB, en considérant $k_r^2 \gg 1$ (Froman & Froman, 2005). Nous obtenons alors :

$$v \sim \begin{cases} \dfrac{a}{2\sqrt{\pi\kappa}} \exp\left(-\displaystyle\int_r^{r_c} \kappa \mathrm{d}r\right) & \text{si } r \ll r_c \\ \dfrac{a}{\sqrt{\pi k_r}} \sin\left(\displaystyle\int_{r_c}^{r} k_r \mathrm{d}r - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{a(-1)^m}{\sqrt{\pi k_r}} \cos\left(\displaystyle\int_r^{r_d} k_r \mathrm{d}r - \dfrac{\pi}{4}\right) & \text{si } r_c \ll r \ll r_d \end{cases}, \tag{3.48}$$

et

$$w \sim \begin{cases} \dfrac{a}{2\sqrt{\pi\kappa}} \exp\left(-\displaystyle\int_r^{r_c} \kappa \mathrm{d}r\right) & \text{si } r \ll r_c \\ \dfrac{a}{\sqrt{\pi k_r}} \cos\left(\displaystyle\int_{r_c}^{r} k_r \mathrm{d}r - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{a(-1)^{m+1}}{\sqrt{\pi k_r}} \sin\left(\displaystyle\int_r^{r_d} k_r \mathrm{d}r - \dfrac{\pi}{4}\right) & \text{si } r_c \ll r \ll r_d \end{cases}, \tag{3.49}$$

avec $\kappa^2 = -k_r^2$. Les expressions en rouge dans les deux systèmes décrivant v et w sont asymptotiques, et sont valables uniquement dans la zone d'oscillation des ondes loin des points tournants. En réinversant les variables, l'expression asymptotique pour le déplacement radial du fluide sous l'effet des ondes sonores est ainsi :

$$\xi_v = A_v \rho^{-1/2} c^{-1/2} \omega^{-1/2} r^{-1} \cos\left(\int_r^{R_\star} k_v \, \mathrm{d}r' - \phi_p'\right), \tag{3.50}$$

avec A_v l'amplitude fixée par le mécanisme d'excitation stochastique des modes par la convection turbulente, leur taux d'amortissement et leur inertie (Samadi et al., 2015) dans le cas des étoiles étudiées dans cette thèse, ϕ_p' la phase du mode, et $R_{\star d}$ le rayon de l'étoile.

Nous nous concentrons sur l'expression de la forme asymptotique des modes acoustiques, valable entre et loin des points tournants r_c et $r_d \approx R_\star$ représentés sur la figure 3.2 (ces points tournants correspondent sur la figure aux modes d'oscillation acoustiques $\ell = 1$). En multipliant l'expression en rouge de l'équation 3.48 par $\sin\left(\int_r^{r_d} k_r \mathrm{d}r - \frac{\pi}{4}\right)$ et l'expression en rouge de l'équation 3.49 par $\cos\left(\int_r^{r_d} k_r \mathrm{d}r - \frac{\pi}{4}\right)$, puis en additionnant les deux expressions, la condition menant à l'estimation asymptotique de la valeur propre ω est :

$$\sin\left(\int_{r_c}^{r_d} k_r \mathrm{d}r\right) = 0. \tag{3.51}$$

Cette expression permet la quantification du nombre d'onde associé aux modes acoustiques par

$$\int_{r_c}^{r_d} k_r \mathrm{d}r = n\pi, \text{ avec } n \in \mathbb{N}\text{, l'ordre radial du mode d'oscillation.} \tag{3.52}$$

D'après la relation entre k_r et ω par l'équation 3.37, les fréquences propres des modes d'oscillation acoustiques ω sont elles aussi quantifiées (les autres fréquences ne permettent donc pas la l'interférence constructive pour l'obtention d'un mode stationnaire). Le point de réflexion interne des ondes acoustiques r_c est atteint lorsque $\omega \sim S_l$, et correspond donc à une position du point tournant interne de la cavité acoustique donnée par $r_c = \frac{c_s \Lambda}{\omega}$. De par la dépendance de r_c en ℓ, les modes de haut degré ont un point de retournement interne plus proche de la surface que les modes de bas degré. Ainsi, plus le degré du mode est élevé, moins il permet de sonder profondément l'étoile. Finalement,

$$\omega \int_0^{R_\star} \frac{\mathrm{d}r}{c_s} - \Lambda^2 \frac{\pi}{2} = n\pi. \tag{3.53}$$

Par ailleurs, on définit

$$\Delta\nu_{\ell=0} = \nu_{n+1} - \nu_n = 2\int_0^{R_\star} \frac{\mathrm{d}r}{c_s}, \tag{3.54}$$

la grande séparation associée aux modes acoustiques qui permet d'exprimer la distance fréquentielle entre deux modes d'oscillation acoustiques de degré $\ell = 0$ et d'ordres radiaux consécutifs n et $n+1$. Cette grande séparation sera notée $\Delta\nu$ dans la suite de ce manuscrit.

La fréquence des modes est ainsi estimée par

$$\nu_{n,\ell} \approx \left(n + \frac{\Lambda}{2}\right)\Delta\nu. \tag{3.55}$$

La valeur $\Lambda = \sqrt{\ell(\ell+1)}$ peut être développée pour les ordres $\ell \gtrsim 1$ comme

$$\sqrt{\ell(\ell+1)} \sim \ell + \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ell+1)}\right), \tag{3.56}$$

dont on déduit l'expression asymptotique des fréquences des modes acoustiques dans la cavité loin des points tournants (Tassoul, 1980) :

$$\nu_{n,\ell} \approx \left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{4} + \alpha_{p,\ell}\right)\Delta\nu, \tag{3.57}$$

avec $\alpha_{p,\ell}$ regroupant les termes d'ordre plus élevés ainsi que les incertitudes liées aux couches superficielles de l'étoile (Christensen-Dalsgaard & Däppen, 1992; Kjeldsen et al., 2008). Deux ondes acoustiques sont représentées sur le panneau de gauche de la figure 3.3.

3.2.4 Expression asymptotique des modes de gravité

Nous nous plaçons ensuite dans la zone bleue sur la figure 3.2, entre les points tournants $r_a \approx 0$ et r_b correspondants aux modes d'oscillation de gravité. Dans l'étude de Unno et al. (1989), les équation équivalentes

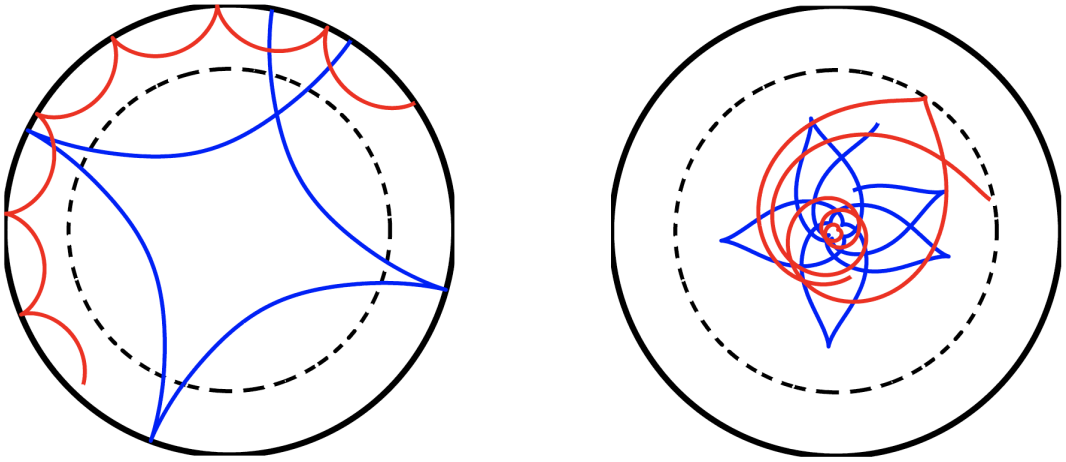


FIGURE 3.3: *Gauche :* Ondes acoustiques d'ordres ℓ différents (l'ordre ℓ de l'onde bleue est inférieur à l'ordre ℓ de l'onde rouge) se propageant depuis la surface jusqu'au point de retournement interne. L'intérieur radiatif est délimité par la ligne noire en pointillés. *Droite :* Même légende que pour le panneau de gauche dans le cas d'ondes de gravité se propageant depuis l'interface radiative/convective dans l'intérieur radiatif. Crédits : Manuscrit de thèse de L. Alfvan (2014).

aux systèmes 3.48 et 3.49 par analyse JWKB sont présentées :

$$v \sim \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{\pi k_r}} \cos\left(\displaystyle\int_{r_a}^{r} k_r \mathrm{d}r - \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{a(-1)^{n+1}}{\sqrt{\pi k_r}} \sin\left(\displaystyle\int_{r}^{r_b} k_r \mathrm{d}r - \frac{\pi}{4}\right) & \text{si } r_a \ll r \ll r_b \\ \dfrac{a(-1)^n}{2\sqrt{\pi\kappa}} \exp\left(-\displaystyle\int_{r_b}^{r} \kappa \mathrm{d}r\right) & \text{si } r \gg r_b \end{cases}, \tag{3.58}$$

et

$$w \sim \begin{cases} -\dfrac{a}{\sqrt{\pi k_r}} \sin\left(\displaystyle\int_{r_a}^{r} k_r \mathrm{d}r - \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{a(-1)^{n}}{\sqrt{\pi k_r}} \cos\left(\displaystyle\int_{r}^{r_b} k_r \mathrm{d}r - \frac{\pi}{4}\right) & \text{si } r_a \ll r \ll r_b \\ \dfrac{a(-1)^n}{2\sqrt{\pi\kappa}} \exp\left(-\displaystyle\int_{r_b}^{r} \kappa \mathrm{d}r\right) & \text{si } r \gg r_b \end{cases}, \tag{3.59}$$

De façon équivalente, les changements de variables effectués conduisent à l'expression asymptotique du déplacement horizontal par les modes de gravité :

$$\begin{aligned} \xi_h = A_w \rho^{-1/2} \omega^{-3/2} r^{-3/2} \left[l\,(l+1)\right]^{-1/4} N^{1/2} \\ \times \sin\left(\int_{r_{t;i}}^{r} k_v \,\mathrm{d}r^{'} - \phi_g^{'}\right), \end{aligned} \tag{3.60}$$

avec A_w l'amplitude fixée par le mécanisme d'excitation, $\phi_g^{'}$ la phase du mode, et $r_{t;i} = r_a$ le point de retournement interne. Le déplacement vertical est quant à lui obtenu par la relation de polarisation pour les modes de gravité (Alvan et al., 2013) :

$$\xi_h = \frac{i}{r k_r} \frac{N^2}{\omega^2} \xi_r. \tag{3.61}$$

Pour un ordre radial élevé ($|k_r| \gg 1$), la condition asymptotique équivalente à l'équation 3.51 pour les modes de gravité est donc

$$\cos\left(\int_{r_a}^{r_b} k_r \mathrm{d}r\right) = 0, \tag{3.62}$$

ce qui correspond à une quantification des modes de gravité par

$$\int_{r_a}^{r_b} k_r \mathrm{d}r = \left(s + \frac{1}{2}\right)\pi \text{ avec } s \in \mathbb{N}. \tag{3.63}$$

Puisque le nombre d'onde radial associé aux modes de gravité s'exprime comme $k_r \simeq \frac{N}{\omega}\frac{\Lambda}{r}$, la période des modes est ainsi estimée, en suivant la même méthode que pour le développement de l'équation 3.57, par

$$P_{n,\ell} = \frac{1}{\nu_{n,\ell}} \approx \left(s + \frac{\ell}{2} + \alpha_g\right)\Delta\Pi_\ell, \tag{3.64}$$

avec α_g un terme de l'ordre de l'unité qui dépend de la position des points tournants, et

> $\Delta\Pi_\ell$ l'espacement en période asymptotique des modes de gravité défini par l'écart entre deux modes de même degré ℓ et d'ordres radiaux n consécutifs :
>
> $$\Delta\Pi_\ell = P_{n,\ell} - P_{n+1,\ell} = \frac{2\pi^2}{\Lambda^2}\left(\int_{r_a}^{r_b}\frac{N\mathrm{d}r}{r}\right)^{-1}. \tag{3.65}$$
>
> Ainsi, à chaque degré angulaire correspond un espacement régulier des modes de gravité en période contrairement aux modes acoustiques qui sont régulièrement espacés en fréquence.

Deux ondes de gravité sont représentées sur le panneau de droite de la figure 3.3.

3.2.5 Les modes mixtes

Pour la fréquence caractéristique des oscillations de la géante rouge représentée sur la figure 3.2, le mode d'oscillation peut être de nature acoustique ou bien de gravité selon la zone de l'étoile considérée. Dans l'intérieur radiatif, les modes de gravité sont présents avec des fréquences ν_g proches de $\nu = \omega/(2\pi)$, alors qu'au dessus des modes acoustiques sont présents aux fréquences ν_p également proches de ν. Nous avons alors :

$$v \sim \begin{cases} \dfrac{a_1}{\sqrt{\pi k_r}}\cos\left(\displaystyle\int_{r_a}^{r} k_r\mathrm{d}r - \frac{\pi}{4}\right) & \text{si } r_a \ll r \ll r_b \\ \dfrac{a_1}{2\sqrt{\pi\kappa}}\sin\left(\displaystyle\int_{r_a}^{r_b} k_r\mathrm{d}r\right)\exp\left(-\displaystyle\int_{r_b}^{r}\kappa\mathrm{d}r\right) + \dfrac{a_1}{\sqrt{\pi\kappa}}\cos\left(\displaystyle\int_{r_a}^{r_b} k_r\mathrm{d}r\right)\exp\left(\displaystyle\int_{r_b}^{r}\kappa\mathrm{d}r\right) & \text{si } r_b \ll r \ll r_c\,, \\ \dfrac{a_2}{\sqrt{\pi k_r}}\cos\left(\displaystyle\int_{r}^{r_d} k_r\mathrm{d}r - \frac{\pi}{4}\right) & \text{si } r_c \ll r \ll r_d \end{cases} \tag{3.66}$$

et

$$w \sim \begin{cases} -\dfrac{a_1}{\sqrt{\pi k_r}}\sin\left(\displaystyle\int_{r_a}^{r} k_r\mathrm{d}r - \frac{\pi}{4}\right) & \text{si } r_a \ll r \ll r_b \\ -\dfrac{a_1}{2\sqrt{\pi\kappa}}\sin\left(\displaystyle\int_{r_a}^{r_b} k_r\mathrm{d}r\right)\exp\left(-\displaystyle\int_{r_b}^{r}\kappa\mathrm{d}r\right) + \dfrac{a_1}{\sqrt{\pi\kappa}}\cos\left(\displaystyle\int_{r_a}^{r_b} k_r\mathrm{d}r\right)\exp\left(\displaystyle\int_{r_b}^{r}\kappa\mathrm{d}r\right) & \text{si } r_b \ll r \ll r_c\,, \\ -\dfrac{a_2}{\sqrt{\pi k_r}}\sin\left(\displaystyle\int_{r}^{r_d} k_r\mathrm{d}r - \frac{\pi}{4}\right) & \text{si } r_c \ll r \ll r_d \end{cases} \tag{3.67}$$

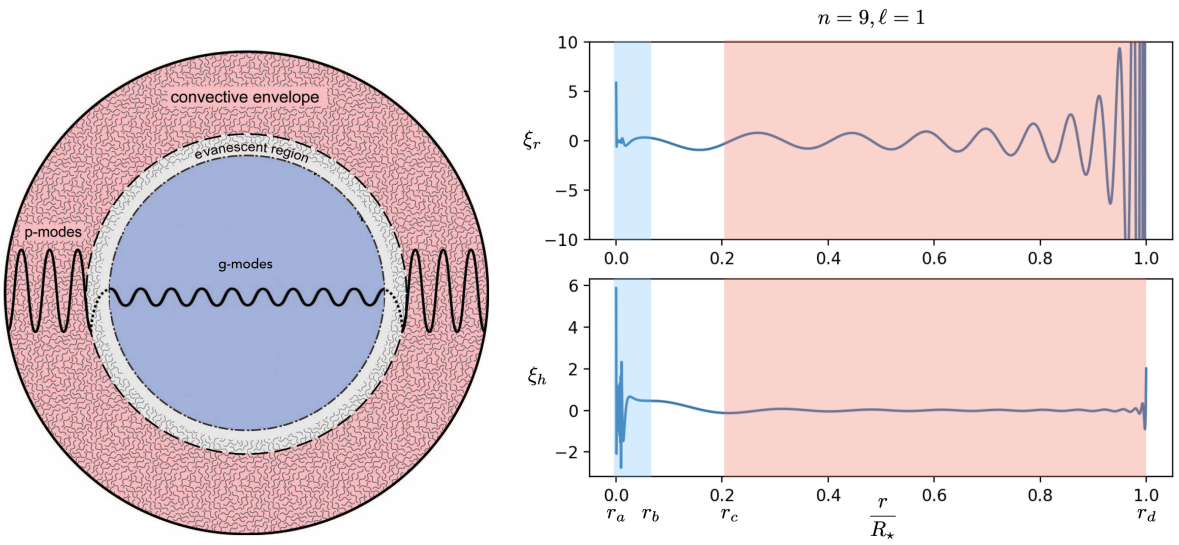


FIGURE 3.4: *Gauche :* Schématisation du mécanisme de couplage des modes acoustiques et des modes de gravité lorsque la zone évanescente est mince. Schéma modifié à partir de Fuller et al. (2015). *Droite :* Fonctions propres radiales et horizontales en fonction du rayon de l'étoile des modes mixtes calculées par le code de pulsation GYRE (les fonctions propres sont dans les unités normalisées utilisées par GYRE Townsend & Teitler, 2013) à partir de la structure d'une jeune géante rouge modélisée par MESA ($M = 1.5\mathrm{M}_\odot$, Z=0.02, Paxton et al., 2011). La plage bleue délimite la zone de propagation des ondes de gravité, et la plage rouge la zone de propagation des ondes acoustiques.

avec

$$a_2 = a_1 \left[2 \cos\left(\int_{r_a}^{r_b} k_r \mathrm{d}r \right) \cos\left(\int_{r_c}^{r_d} k_r \mathrm{d}r \right) \exp\left(\int_{r_b}^{r_c} \kappa \mathrm{d}r \right) + \frac{1}{2} \sin\left(\int_{r_a}^{r_b} k_r \mathrm{d}r \right) \sin\left(\int_{r_c}^{r_d} k_r \mathrm{d}r \right) \exp\left(- \int_{r_b}^{r_c} \kappa \mathrm{d}r \right). \quad (3.68)$$

3.2.5.1 Facteur de couplage

Cette dernière relation implique une condition sur la valeur propre k_r du système :

$$\cot\left(\int_{r_a}^{r_b} k_r \mathrm{d}r \right) \tan\left(\int_{r_c}^{r_d} k_r \mathrm{d}r \right) = \frac{1}{4} \exp\left(-2 \int_{r_b}^{r_c} \kappa \mathrm{d}r \right) \quad (3.69)$$

qui peut être réécrite en posant $\theta_p = \int_{r_c}^{r_d} k_r \mathrm{d}r$, $\theta_g = \int_{r_a}^{r_b} k_r \mathrm{d}r$ et $q = \frac{1}{4} \exp\left(-2 \int_{r_b}^{r_c} \kappa \mathrm{d}r \right)$ dénommé **facteur de couplage** :

$$\tan \theta_g = q \tan \theta_p. \quad (3.70)$$

Dans la zone évanescente, $\kappa \approx \Lambda$, donc

$$q \approx \frac{1}{4} \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2\ell} = \varepsilon \ll 1. \quad (3.71)$$

Mosser et al. (2017) montrent observationnellement grâce aux données de la mission *Kepler* que la valeur typique du facteur de couplage des modes p et g durant la RGB est de 0.15, vérifiant ainsi l'estimation 3.70. Ce facteur de couplage q est relié aux propriétés de la zone entre les cavités des modes p et g (Takata, 2016; Pinçon et al., 2020). La mesure de q peut ainsi permettre de sonder les propriétés de cette zone interne sous la

base de l'enveloppe convective. Elle permet par exemple de suivre la migration de la base de la zone convective avant le dredge-up, et de conclure que la structure de cette zone intermédiaire est très stable durant la branche horizontale (Pinçon et al., 2020).

3.2.5.2 Interactions entre les modes de gravité et les modes acoustiques

Finalement, la faible valeur de q implique, pour n et m deux entiers,

$$\begin{cases} \tan\left(\int_{r_c}^{r_d} k_r \mathrm{d}r\right) \ll 1 \longrightarrow \int_{r_c}^{r_d} k_r \mathrm{d}r \simeq m\pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \text{ou} \\ \tan\left(\int_{r_a}^{r_b} k_r \mathrm{d}r\right) \gg 1 \longrightarrow \int_{r_a}^{r_b} k_r \mathrm{d}r \simeq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \text{ou} \\ \begin{cases} \tan\left(\int_{r_c}^{r_d} k_r \mathrm{d}r\right) \ll 1 \longrightarrow \int_{r_c}^{r_d} k_r \mathrm{d}r \simeq m\pi + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \\ \text{et} \\ \tan\left(\int_{r_a}^{r_b} k_r \mathrm{d}r\right) \gg 1 \longrightarrow \int_{r_a}^{r_b} k_r \mathrm{d}r \simeq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \end{cases} \end{cases} . \tag{3.72}$$

Le premier cas en rouge correspond à des oscillations associées principalement à la zone $[r_c, r_d]$, les modes d'oscillation sont dominés par la composante acoustique (voir panneau de droite de la figure 3.4). Ces oscillations mixtes à dominance acoustique seront dénotées modes $p-m$ dans la suite de ce manuscrit (Shibahashi & Osaki, 1976). Le second cas en bleu correspond à des oscillations associées principalement à la zone $[r_a, r_b]$. Ces oscillations mixtes à dominance de gravité seront dénotées modes $g-m$ dans la suite de ce manuscrit (Shibahashi & Osaki, 1976). De par le couplage (faible mais existant) avec les modes acoustiques, ces oscillations sont détectables depuis la surface de l'étoile lorsque les fréquences des modes p et g sont proches. La dernière condition en noir correspond à un phénomène de mélange des modes p et des modes g, et le mode résultant a donc une nature mixte. Ce sont les modes mixtes, qui apparaissent quand k_r s'approche simultanément de $\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$ et $m\pi$, correspondant à des fréquences des pseudo-modes p et g très proches. La figure 3.4 représente la schématisation du mécanisme de couplage des modes de pression et de gravité dans une étoile de type solaire évoluée, ainsi que les fonctions propres horizontales et verticales associées à un mode mixte typique dans une géante rouge calculées grâce au code de pulsation GYRE.

3.2.5.3 Expression asymptotique des modes mixtes

Les modes acoustiques ont un espacement régulier en fréquence, indiqué par l'équation 3.52. Ainsi, la phase des modes p s'écrit comme (Mosser et al., 2012c) :

$$\theta_p = \pi \frac{\nu - \nu_p}{\Delta\nu_p}, \tag{3.73}$$

avec $\Delta\nu_p = \Delta\nu\left(1 + \alpha(n_p - n_{\max})\right)$ l'espacement en fréquence entre deux modes radiaux consécutifs ($n_{\max}$ est l'ordre radial égal à celui du mode $\ell = 0$ le plus proche de $\nu_{\max}$), et ν_p les fréquences des modes acoustiques. La phase des modes de gravité espacés régulièrement en période peut être exprimée en fonction de leur fréquence ν_g et du degré ℓ par

$$\theta_g = \pi\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_g}\right)\Delta\Pi_\ell. \tag{3.74}$$

Finalement, l'équation 3.70 devient la relation asymptotique exprimant les fréquences des modes dits **mixtes** de par leur nature acoustique et de gravité (Mosser et al., 2012c) :

$$\nu = \nu_p + \frac{\Delta\nu_p}{\pi} \arctan\left[q \tan\left(\pi\left[\frac{1}{\nu\Delta\Pi_\ell} - \frac{1}{\nu_g\Delta\Pi_\ell}\right]\right)\right]. \tag{3.75}$$

3.2.5.4 Périodicité des modes mixtes et inertie

Leur période peut également être exprimée, en fonction de l'ordre radial du mode mixte $n_m = n_p + n_g$ par

$$P = n_m\Delta\Pi_\ell + p, \tag{3.76}$$

avec p la déviation à une périodicité parfaite des modes. En dérivant l'expression 3.70 par rapport à n_m, et en négligeant les variations de $\Delta\nu_p$ avec la fréquence, Mosser et al. (2015) montrent que pour les modes de degré $\ell = 1$,

$$\frac{1}{\Delta\Pi_1}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}n_m} = \left[1 + \frac{\nu^2\Delta\Pi_1}{q\Delta\nu_p}\frac{\cos^2\theta_g}{\cos^2\theta_p}\right]. \tag{3.77}$$

Lorsque $\mathrm{d}n_m = 1$,

ΔP correspond à la distance en période entre deux modes mixtes consécutifs, et s'exprime ainsi comme

$$\frac{\Delta P}{\Delta\Pi_1} = \zeta(\nu), \tag{3.78}$$

avec la fonction ζ définie par

$$\zeta(\nu) = \left[1 + \frac{\nu^2\Delta\Pi_1}{q\Delta\nu_p}\frac{\cos^2\theta_g}{\cos^2\theta_p}\right]^{-1}. \tag{3.79}$$

Cette fonction de modulation de la périodicité des modes mixtes mise en évidence par Deheuvels et al. (2012) représente le rapport de l'inertie normalisée des modes dans la cavité radiative et dans la globalité de l'étoile.

$$\zeta = \frac{I_{\mathrm{core}}}{I}. \tag{3.80}$$

L'inertie normalisée s'exprime en fonction des déplacements (Goupil et al., 2013) :

$$I = \int_0^1 \left(z_1^2 + z_2^2\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}, \tag{3.81}$$

avec $x = r/R$, $R = [R_{\mathrm{rad}}$ pour I_{core}, $R_\star$ pour $I]$ et

$$z_1 = \left(\frac{3\rho}{\rho_c}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}\frac{\xi_r}{R_\star} \text{ et } z_2 = \Lambda\left(\frac{3\rho}{\rho_c}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}\frac{\xi_h}{R_\star}. \tag{3.82}$$

La fonction $\zeta(\nu)$ est représentée sur la figure 3.5. Elle est normalisée à 1, et est maximale lorsque l'inertie des modes résonnants dans le cœur est égale à l'inertie totale des modes dans l'étoile. Cela correspond donc aux modes $g-m$. Elle est minimale pour les modes $p-m$ à dominance acoustique. Nous remarquons également qu'à basses fréquences, la fonction ζ est majoritairement constituée de points proches de 1, correspondant à un spectre dominé par les modes $g-m$.

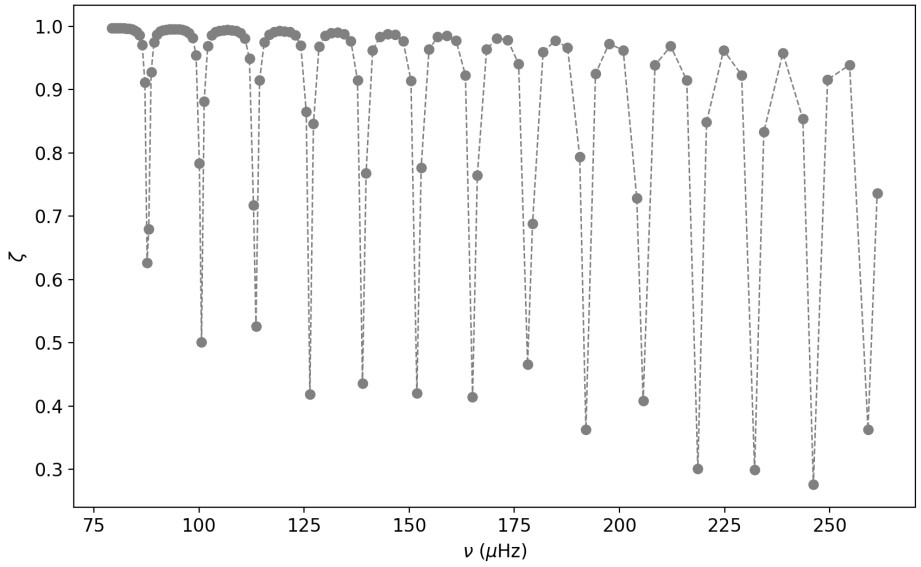


FIGURE 3.5: Représentation de la fonction ζ calculée à partir de fréquences de modes mixtes d'une géante rouge de $M\star = 1.5 M_\odot$, Z=0.02, $\nu_{\max} \simeq 172\,\mu$Hz calculées avec le code GYRE.

3.2.6 Fréquence et amplitude des modes d'oscillation

Cependant, les modes d'oscillation de la géante rouge étudiée ne sont pas visibles sur toute la plage de fréquence représentées sur la figure 3.5. En effet, seuls les modes suffisamment énergétiques et avec un temps de vie long par rapport à la fréquence d'oscillation s'établissent efficacement (Dupret et al., 2009). La détectablité des modes d'oscillation dépend donc de leur excitation et de leur amortissement. Les modes d'oscillation sont excités dans les étoiles de type solaire par les mouvements stochastiques des structures et tourbillons convectifs qui cèdent une partie de leur énergie sous forme d'ondes. C'est également la convection turbulente qui, en créant des déphasages, amortit les ondes. L'équilibre entre excitation (représentée par $\mathcal{P}$ la puissance injectée par la convection dans les modes) et amortissement (représenté par η le taux d'amortissement des modes par unité de temps) par la convection détermine l'amplitude des oscillations (Samadi et al., 2015) :

$$E_{\rm osc}(\nu) = \frac{\mathcal{P}(\nu)}{2\eta(\nu)} \tag{3.83}$$

La puissance injectée augmente avec la fréquence du mode, et tend asymptotiquement vers une valeur constante à haute fréquence (e.g. Belkacem et al., 2010). Le taux d'amortissement augmente également avec la fréquence, mais présente un plateau autour d'une fréquence $\nu_{\max}$ bien définie, à cause d'une résonance entre le mode d'oscillation et la convection dans les couches super-adiabatiques à la surface des étoiles (e.g. Belkacem et al., 2012).

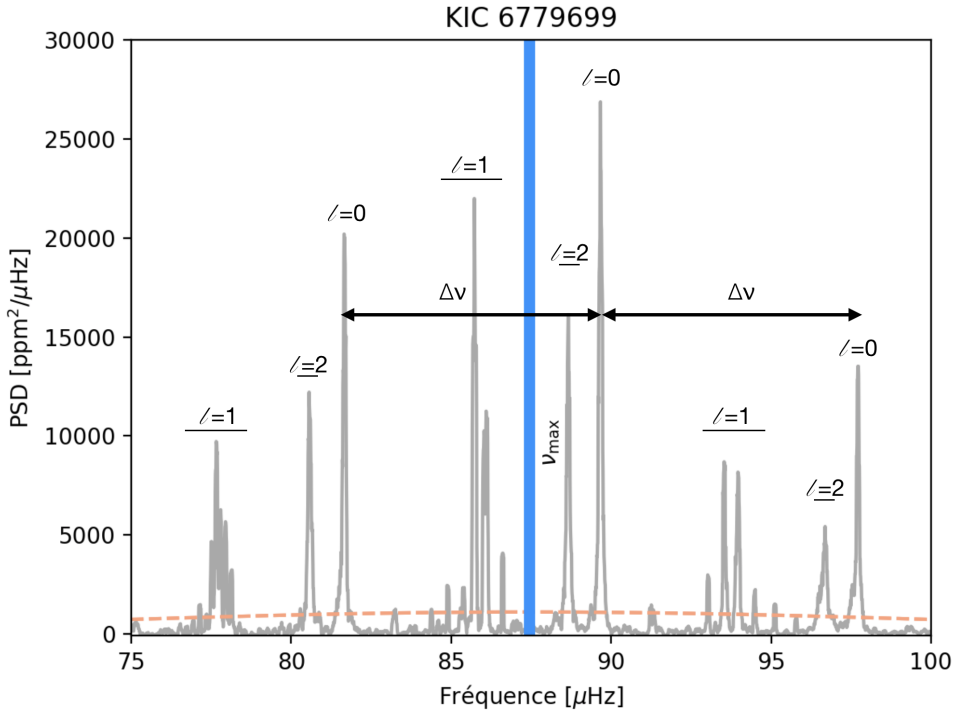


FIGURE 3.6: Spectre de densité de puissance normalisé de la géante rouge évoluée KIC 6779699 observée par *Kepler* ([Fe/H] $= 0.4$ et $M = 1.621\mathrm{M}_\odot$) centré autour de la fréquence $\nu_{\max} \simeq 87\mu$Hz, repérée par la position du maximum de la gaussienne orange ajustée dans la zone des modes. Le degré ℓ des modes centraux est indiqué, et la grandeur $\Delta\nu$ représentée.

De ces deux effets combinés résulte la détectabilité d'oscillations dont les fréquences sont concentrées autour de la valeur $\nu_{\max}$, qui est proportionnelle à la fréquence de coupure ν_c des modes acoustiques :

$$\nu_{\max} \propto \frac{1}{\tau_{\mathrm{th}}} \propto \left(\frac{\mathcal{M}_a}{\alpha_{\mathrm{MLT}}}\right)^3 \nu_c, \tag{3.84}$$

avec $\mathcal{M}_a$ le nombre de Mach convectif qui compare la vitesse convective et la vitesse du son. dans les couches superficielles super-adiabatiques, α_{MLT} le paramètre de la théorie de la longueur de mélange, et $\nu_c = \omega_c/(2\pi) \approx \frac{c_s}{4\pi H_p}$ (voir équation 3.41) la fréquence de coupure acoustique à la surface de l'étoile, (Gough, 1993). Cette fréquence de coupure représente la fréquence au-delà de laquelle l'onde n'est plus réfléchie à la surface de l'étoile, empêchant la stationnarité de l'onde et la formation du mode.

Les géantes rouges évoluées ont un $\nu_{\max}$ à basses fréquences à cause de leur grande taille alors que les étoiles plus jeunes ont un $\nu_{\max}$ plus élevé ($\nu_{\max} \simeq 3090\mu$Hz pour le Soleil par exemple). Ainsi, au vu de la répartition des modes p et g visible grâce à la fonction ζ sur la figure 3.5, les géantes rouges ont un spectre de puissance dominé par les modes $g-m$ dans la zone des modes $\ell = 1$. À haute fréquence en revanche, les modes $g-m$ se font plus rares : les modes dipolaires durant la phase des sous-géantes et des jeunes géantes rouges sont majoritairement $p-m$. Le régime d'oscillation des modes mixtes sera rediscuté au chapitre 6.

3.3 Paramètres stellaires globaux et lois d'échelle astérosismiques

Nous avons défini par les expressions 3.54, 3.65 et 3.78 les espacements en fréquence et en période associés aux modes d'oscillation, ainsi que la fréquence associée au maximum de puissance dans le spectre par l'équation 3.84. Ces paramètres sismiques globaux sont directement reliés aux paramètres stellaires globaux, par le biais des relations d'échelle que nous allons maintenant définir. Deux étoiles de même répartition interne de masse $\left(\frac{m}{M_\star}\right)$ et de même âge sont dites homologues : leurs rayons $\left(\frac{r}{R_\star}\right)$ sont identiques (e.g. Kippenhahn et al., 2012). À l'équilibre, l'équation de conservation de la masse s'exprime comme

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = 4\pi\rho r^2, \tag{3.85}$$

et l'équation de l'impulsion se réduit à l'équilibre hydrostatique

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\rho\frac{Gm}{r^2}. \tag{3.86}$$

Les relations d'homologie indiquent alors que

$$\begin{cases} \rho \propto \dfrac{M_\star}{R_\star^3} \\ p \propto \dfrac{M_\star^2}{R_\star^4} \end{cases}. \tag{3.87}$$

Ainsi, l'expression de $\Delta\nu$ définie par l'équation 3.54 peut être exprimée en fonction des paramètres globaux de l'étoile, en considérant Γ_1 constant, par

$$\Delta\nu \propto \sqrt{\frac{M_\star}{R_\star^3}}. \tag{3.88}$$

La grande séparation des modes acoustiques, définie comme la distance fréquentielle entre deux modes $\ell = 0$ consécutifs, est donc directement reliée à la densité moyenne de l'étoile. De même, la fréquence correspondant au maximum de puissance dans le spectre $\nu_{\max}$ peut être exprimée en fonction des paramètres de surface de l'étoile. En négligeant la contribution du nombre de Mach, par la loi de l'équilibre hydrostatique, et en supposant un poids moléculaire moyenne dans la loi des gaz parfaits, nous avons

$$\nu_{\max} \propto \nu_c \propto \frac{c_s}{H_p} \propto \frac{\sqrt{T_{\mathrm{eff}}}}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} \propto \frac{g}{\sqrt{T_{\mathrm{eff}}}}, \tag{3.89}$$

avec g la gravité de surface de l'étoile et T_{eff} sa température effective. En combinant les relations 3.88 et 3.89, et en utilisant les valeurs de références pour le Soleil afin d'éliminer les constantes de proportionnalité, les relations d'échelle astérosismiques sont formées :

$$\begin{cases} \dfrac{R_\star}{\mathrm{R}_\odot} \approx \left(\dfrac{\nu_{\max}}{\nu_{\max,\odot}}\right)\left(\dfrac{\Delta\nu}{\Delta\nu_\odot}\right)^{-2}\left(\dfrac{T_{\mathit{eff}}}{\mathrm{T}_{\mathit{eff},\odot}}\right)^{1/2} \\ \dfrac{M_\star}{\mathrm{M}_\odot} \approx \left(\dfrac{\nu_{\max}}{\nu_{\max,\odot}}\right)^{3}\left(\dfrac{\Delta\nu}{\Delta\nu_\odot}\right)^{-4}\left(\dfrac{T_{\mathit{eff}}}{\mathrm{T}_{\mathit{eff},\odot}}\right)^{3/2} \end{cases}, \tag{3.90}$$

où les paramètres dénotés par $\odot$ sont estimés pour le Soleil i.e., $\Delta\nu_\odot = 135.1\mu$Hz, $\nu_{\max\odot} \approx 3090\mu$Hz, $\mathrm{T}_{\mathit{eff},\odot} \approx 5777$K, $\mathrm{R}_\odot \approx 6.9551 \times 10^{10}$cm, $\mathrm{M}_\odot \approx 1.9884 \times 10^{30}$kg [3].

3. Ces valeurs de référence dépendent de la méthodologie utilisée et peuvent légèrement varier d'un pipeline sismique à l'autre.

La figure 3.6 représente la définition des paramètres globaux astérosismiques $\nu_{\max}$ et $\Delta\nu$ sur la PSD de la géante rouge évoluée KIC 1873204 d'environ $2\mathrm{M}_{\odot}$ et de métallicité $[\mathrm{Fe/H}] = -0.16$ observée par *Kepler*[4]. Les différents degrés des modes observés sont indiqués, permettant de mettre en avant la périodicité fréquentielle des modes d'oscillation acoustiques. Les modes $\ell = 1$ et $\ell = 2$ sont des modes mixtes durant la phase RGB. Ils occupent une plage en fréquence élargie. Pour chaque ordre n_p, de nombreux ordres n_g sont visibles, et l'espacement entre ces modes est régulier en période (ΔP, qui est trop petit pour être représenté sur la figure 3.6).

Ces lois d'échelle permettent de déterminer des masses et rayons sismiques par la simple mesure des paramètres astérosismiques globaux $\nu_{\max}$ et $\Delta\nu$ et de la température effective. Ces lois d'échelle sont très précises pour les étoiles de type solaire avec un stade évolutif proche de celui du Soleil (e.g. García & Ballot, 2019), et sont légèrement biaisées pour les étoiles plus évoluées telles que les géantes rouges (e.g. Kallinger et al., 2010, 2018; Chaplin et al., 2011; Gaulme et al., 2016). L'étude d'étoiles de type solaire évoluées en système binaire permettant de caractériser très précisément la masse et le rayon de la géante par spectroscopie et ainsi d'étudier les potentiel biais intrinsèques aux relations d'échelle calibrées avec les valeurs solaires (Benbakoura et al., 2020).

Ces relations d'échelle sont d'autant plus précieuses que la résolution des données astérosismiques acquises actuellement par le satellite TESS n'est souvent pas suffisante pour permettre une détection et une caractérisation des modes d'oscillation individuels. Ainsi l'astérosismologie globale est l'outil le plus précis pour l'estimation des paramètres stellaires globaux pour les étoiles isolées lorsque la sismologie des modes individuels n'est pas possible[5].

Parfois, les PSD sont trop bruitées (ou bien les modes sont de trop faibles amplitudes) pour une mesure fiable des paramètres astérosismiques globaux, comme c'est le cas notamment de nombreuses données acquises lors de la mission TESS (e.g. Gandolfi et al., 2018; Aguirre et al., 2020). Parfois également, les modes d'oscillation sont à trop hautes (cas des étoiles sur la séquence principale et des sous-géantes) ou trop basses (cas des étoiles sur la AGB) fréquences par rapport à la fréquence de coupure de Nyquist et la résolution fréquentielle pour permettre une bonne estimation des paramètres astérosismiques. Enfin, les différents algorithmes utilisés pour l'estimation quasi-automatique des paramètres sismiques globaux sont parfois en désaccord entre eux sur les valeurs estimées des paramètres. Afin d'étendre la plage d'application fréquentielle des mesures sismiques, et d'apporter une mesure des paramètres même lorsque les modes d'oscillation ne sont pas clairement distinguables, nous concentrons alors la première partie de ce manuscrit à la construction d'une méthode de caractérisation automatique des étoiles de type solaire à partir de la puissance globale contenue dans la PSD. En particulier, dans le chapitre 4 de ce manuscrit, nous nous concentrons sur une mesure globale photométrique automatique de la gravité de surface des étoiles de type solaire (et donc de $\nu_{\max}$ par la relation 3.89 Bugnet et al., 2018). Le Chapitre 5 étend cette méthodologie à la classification automatique des différents types d'étoiles pulsantes observées (Bugnet et al., 2019).

3.4 Les oscillations pour sonder le profil de rotation différentielle

3.4.1 Effet de la rotation sur les motifs des oscillations dans la PSD

Les équations exposées dans les sections précédentes ont été dérivées pour une étoile sans rotation et sans champ magnétique. Ces hypothèses ne sont pas réalistes, au vu des connaissances actuelles de la physique stellaire. Les modes d'oscillation et les expressions asymptotiques qui leur sont associées doivent donc être

4. La PSD a été normalisée par les différentes composantes du background convectif qui seront présentées dans le chapitre 4.
5. Les autres méthodes de caractérisation globale des étoiles seront développées dans le chapitre 4 dans le cadre de l'estimation de la gravité de surface des étoiles. Les étoiles en système binaires éclipsant peuvent être analysées plus précisément encore par spectroscopie, mais cette méthodologie sort du cadre de cette thèse. Nous nous référons au manuscrit de thèse de M. Benbakoura pour le détail des résultats obtenus par étude spectroscopique.

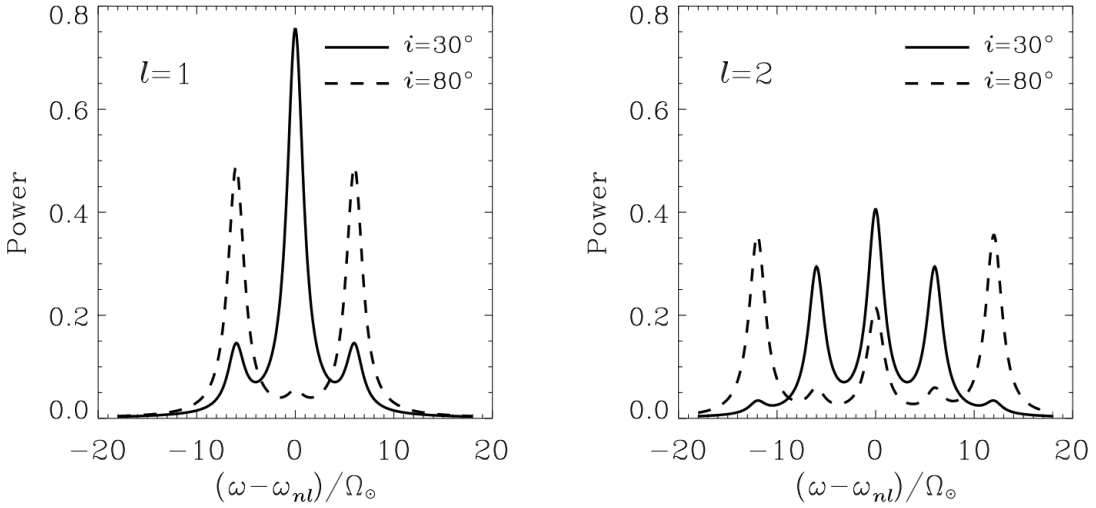


FIGURE 3.7: Effet de la rotation et de l'inclinaison de l'étoile sur la fréquence et amplitude d'un mode $\ell = 1$ (resp. $\ell = 2$) sur le panneau de gauche (resp. droite). Crédit : Gizon & Solanki (2003).

affectés par la dynamique rotationnelle (et également magnétique, dont les connaissances à ce jour seront présentées dans la section 3.5) de l'étoile.

Nous choisissons de ne pas présenter en détail les méthodologies d'estimation de la vitesse de rotation de surface des étoiles qui ne reposent en général pas sur un suivi astérosismique des modes d'oscillation. Nous précisons tout de même que la méthodologie la plus courante pour estimer la rotation de surface des étoiles de type solaire sur la séquence principale repose sur le suivi des variations de luminosité dans la PSD *des étoiles à basses fréquences, correspondant au passage périodique sur la face visible de l'étoile de taches magnétiques plus sombres et des autres signatures de l'activité de surface de l'étoile. La périodicité des variations de luminosité correspond ainsi à la période de rotation de la surface de l'étoile (García et al., 2014a; Ceillier et al., 2016, 2017). Cette méthode photométrique très efficace (Santos et al., 2019) est en revanche difficilement applicable pour les étoiles de type solaire plus évoluées de par la faible activité de ces étoiles (e.g. Ceillier et al., 2017).*

Le profil de rotation interne du Soleil n'est aujourd'hui connu que sur les 75% du rayon les plus externes, et les taux de rotation interne des étoiles de la MS *sont mesurables uniquement dans la partie de l'intérieur radiatif externe sondée par les modes p. Le taux de rotation interne est en revanche bien plus accessible pour les étoiles géantes, grâce à l'astérosismologie et au couplage entre les modes acoustiques de surface et les modes internes de gravité. Nous détaillons dans cette section les apports de l'astérosismologie pour la compréhension des phénomènes rotationnels internes aux étoiles durant leur évolution.*

Les expressions asymptotiques 3.57 et 3.64 permettant d'estimer les fréquences des modes d'oscillation acoustiques et mixtes dépendent de l'ordre radial n et du dégré angulaire ℓ du mode. En revanche, elles n'ont aucune dépendance à l'ordre azimutal, de par la symétrie sphérique régissant les équations utilisées dans le cas sans rotation ni champ magnétique. Dans le référentiel inertiel, depuis lequel les modes d'oscillation sont observés dans les données, la rotation de l'étoile brise la symétrie du système. Cet effet est très semblable à la levée de la dégénérescence des niveaux d'énergies d'un atome par effet Zeeman. La levée de dégénérescence rotationnelle crée pour chaque fréquence originale $\nu_{n,\ell}$ un motif à fréquences multiples $\nu_{n,\ell,m}$, avec $-\ell \leq m \leq \ell$. Ce motif fréquentiel que nous dénommons multiplet rotationnel est visualisé pour les modes $\ell = 1$ et $\ell = 2$ sur la figure 3.7. Plus la vitesse de rotation angulaire de l'étoile est élevée, plus l'écart entre les composantes d'ordre $m \neq 0$ et $m = 0$ est élevé, et plus l'inclinaison de l'axe de rotation de l'étoile par rapport à l'observateur est faible, plus les composantes $m = \pm 1$ sont de grandes amplitudes. La mesure de l'écart entre les composantes est donnée par :

$$\delta\nu_{\mathrm{rot},n,\ell,m} = \nu_{n,\ell,m} - \nu_{n,\ell,0}. \tag{3.91}$$

Il permet de remonter à la vitesse de rotation de surface de l'étoile lorsqu'il est mesuré sur les modes acoustiques. Cette méthode est par exemple utilisée pour la mesure de la rotation dans l'enveloppe du Soleil (Thompson et al., 2003; Couvidat et al., 2003; García et al., 2007) et de celle des étoiles de type solaire (Bazot et al., 2018; Benomar et al., 2018).

3.4.2 Le profil de rotation interne grâce aux modes mixtes

Les étoiles de type solaire sont considérées comme des rotateurs lents. Dans ce cas, l'effet de la rotation sur les fréquences des modes d'oscillation peut être considéré comme une perturbation au premier ordre. Nous nous référons à Christensen-Dalsgaard & Berthomieu (1991), et à Aerts et al. (2010) pour les étapes de calcul. Un raisonnement similaire sera mené aux chapitres 6 et 7 dans le cas du champ magnétique.

Nous nous concentrons ici sur les étoiles pour lesquelles ces méthodes perturbatives s'appliquent, en laissant ainsi de côté les rotateurs rapides (e.g. Ouazzani et al., 2013, 2017, 2020).

La perturbation sur les fréquences des modes propres d'oscillation associée à la rotation de l'étoile s'écrit dans le cas général comme (e.g. Aerts et al., 2010) :

$$\delta\omega_{n,\ell,m} = m(1 - C_{n,\ell}) \int_0^{R_\star} K_{n,\ell}\Omega(r)\mathrm{d}r, \tag{3.92}$$

avec le noyau unimodulaire

$$K_{n,\ell} = \frac{(\xi_r^2 + \Lambda^2\xi_h^2 - 2\xi_r\xi_h - \xi_h^2)\rho r^2}{\int_0^{R_\star}(\xi_r^2 + \Lambda^2\xi_h^2 - 2\xi_r\xi_h - \xi_h^2)\rho r^2\mathrm{d}r} \tag{3.93}$$

et

$$1 - C_{n,\ell} = \frac{\int_0^{R_\star}(\xi_r^2 + \Lambda^2\xi_h^2 - 2\xi_r\xi_h - \xi_h^2)\rho r^2\mathrm{d}r}{\int_0^{R_\star}(\xi_r^2 + \Lambda^2\xi_h^2)\rho r^2\mathrm{d}r}. \tag{3.94}$$

Dans le cas le plus simple d'une étoile en rotation solide, la relation entre la vitesse de rotation angulaire Ω_s et la signature rotationnelle des modes $\ell = 1$ est donnée par :

$$\delta\omega_{\mathrm{rot},n,1,m} = \frac{m\Omega_s}{2}. \tag{3.95}$$

En posant $\beta = \int_0^{R_\star} K(r)\mathrm{d}r$, l'expression de la perturbation rotationnelle s'exprime comme (Unno et al., 1989; Goupil et al., 2013) :

$$\delta\omega_{n,\ell,m} = m\beta_{\mathrm{core}} \langle\Omega_{\mathrm{core}}\rangle + m\beta_{\mathrm{env}} \langle\Omega_{\mathrm{env}}\rangle \tag{3.96}$$

avec

$$\langle\Omega_{\mathrm{core}}\rangle = \frac{\int_0^{R_{\mathrm{core}}} \Omega(r)K(r)\mathrm{d}r}{\int_0^{R_{\mathrm{core}}} K(r)\mathrm{d}r} \tag{3.97}$$

et

$$\langle\Omega_{\mathrm{env}}\rangle = \frac{\int_{R_{\mathrm{core}}}^{R_\star} \Omega(r)K(r)\mathrm{d}r}{\int_{R_{\mathrm{core}}}^{R_\star} K(r)\mathrm{d}r}. \tag{3.98}$$

En utilisant l'expression de la fonction ζ définie par l'équation 3.80, Goupil et al. (2013) montrent que

$$\begin{cases} \beta_{\mathrm{core}} = \dfrac{1}{2}\zeta \\ \beta_{\mathrm{env}} = 1 - \zeta \end{cases}, \tag{3.99}$$

et par suite la signature rotationnelle se définit par

$$\nu_{\rm rot} = \zeta \nu_{\rm rot,core} + (1-\zeta)\nu_{\rm rot,env}\,, \tag{3.100}$$

avec $\nu_{\rm rot,core}$ et $\nu_{\rm rot,env}$ proportionnels à l'ordre azimutal m. Finalement, pour les modes purement acoustiques pour lesquels $\zeta = 0$, la signature rotationnelle correspond uniquement à la valeur moyenne de rotation de l'enveloppe. Avec seulement des modes acoustiques à disposition, il n'est donc pas possible d'obtenir des mesures de rotation au centre de l'étoile. C'est pour cette raison que la rotation des 20% les plus profonds du Soleil n'est toujours pas accessible en dessous de 0.2 rayons solaires (Mathur et al., 2008). Finalement, il est de bonne approximation de définir les moyennes de rotation du cœur et de l'enveloppe des géantes comme l'opérateur appliqué sur la cavité ($\square \in \{\rm env, core\}$) :

$$\langle \Omega_\square \rangle = \frac{1}{\tau}\int_{x_\square} \Omega_\square {\rm d}x, \tag{3.101}$$

avec τ le temps passé dans la cavité du mode :

$$\tau_\square \approx \frac{2}{\omega}\int_{x_\square} k_r {\rm d}x. \tag{3.102}$$

En utilisant les expressions de k_r pour les modes dominés $g-m$ et les $p-m$, la signature rotationnelle associée aux modes mixtes s'écrit ainsi comme (Goupil et al., 2013) :

$$\delta\omega_{n,\ell,m} = m\frac{\zeta}{2}\frac{\displaystyle\int_0^{x_{\rm core}} \Omega(x)\frac{N}{x}{\rm d}x}{\dfrac{2\Lambda}{\omega^2}\displaystyle\int_0^{x_{\rm core}} N\frac{{\rm d}x}{x}} + m(1-\zeta)\frac{\displaystyle\int_{x_{\rm core}}^1 \Omega(x)\frac{{\rm d}x}{c_s}}{2\displaystyle\int_{x_{\rm core}}^1 \frac{{\rm d}x}{c_s}} \tag{3.103}$$

avec $x = r/R_\star$.

Cette dernière relation peut ensuite être inversée pour retrouver les profils de rotation moyennés du cœur et de l'enveloppe (e.g. Deheuvels et al., 2012, 2014, 2015). Cet atout de la formulation asymptotique à faible taux de rotation sera rediscutée dans le chapitre 7 dans le cas d'une perturbation des fréquences des modes par un champ magnétique.

Enfin, nous présentons la méthodologie développée par Vrard et al. (2015) et Gehan et al. (2018) pour une estimation précise des signatures rotationnelles à partir des données astérosismiques. Cette méthode sera adaptée dans le chapitre 6 pour la détection de signatures magnétiques sur les fréquences des modes mixtes. Il peut être difficile de mesurer directement la séparation d'un mode mixte en un multiplet rotationnel dans la PSD, la principale raison étant que si le taux de rotation de l'étoile est grand, la séparation des composantes dans le triplet rotationnel devient suffisamment grande pour que les motifs de différents ordres radiaux n se croisent. Le critère s'écrit comme

$$\delta\nu_{\rm rot} \geq \frac{\Delta P}{P^2}. \tag{3.104}$$

Ainsi dans le cas d'une faible rotation, la mesure de la séparation entre deux modes consécutifs renseigne bien sur l'amplitude du taux de rotation, comme il est représenté sur le panneau de gauche de la figure 3.8. En revanche, si la rotation est trop forte, les composantes des multiplets consécutifs se mélangent, comme représenté sur le panneau de droite. Dans ce cas, la mesure de la signature rotationnelle est rendue beaucoup plus difficile, et l'étoile peut être caractérisée avec une rotation plus faible que celle qu'elle possède réellement (Gehan et al., 2018) si la mesure de la signature magnétique est prise entre deux modes consécutifs dans le spectre. Cela est représenté par les deux flèches noires sur le panneau de droite de la figure 3.8. La véritable signature rotationnelle (entre les modes $m = 0$ et $m = 1$) est celle désignée par la flèche inférieure, alors qu'une mesure entre deux modes consécutifs aboutit à la distance désignée par la flèche supérieure.

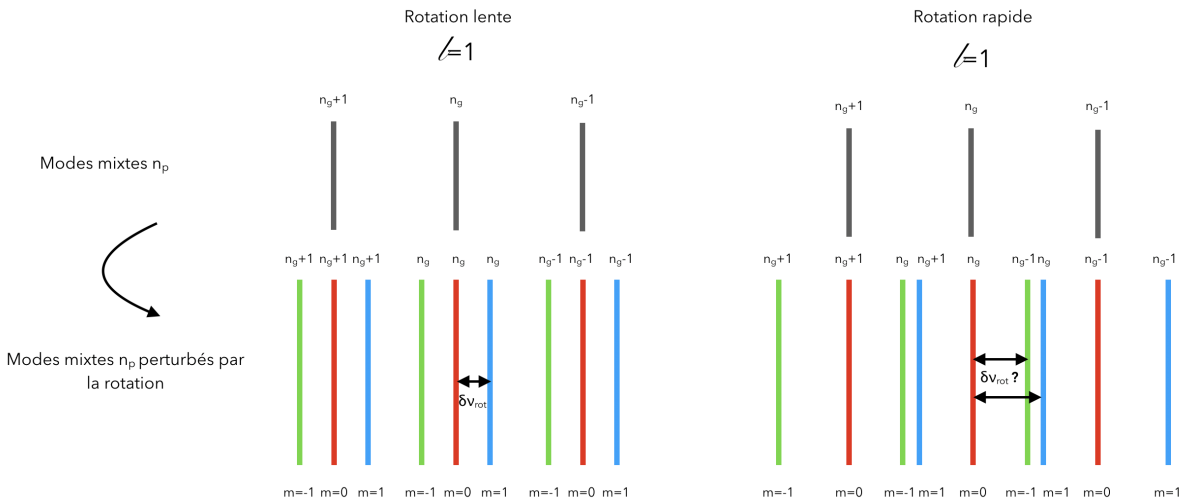


FIGURE 3.8: Schéma représentant la signature rotationnelle à partir de trois modes mixtes $\ell = 1$ de même ordre n_p et d'ordres n_p consécutifs, dans le cas d'une faible rotation (gauche) et d'une forte rotation (droite). Les composantes vertes, rouges et bleues représentent respectivement les modes d'ordre azimutal $m = -1, m = 0$ et $m = 1$.

Afin de lever le problème de l'identification des composantes du multiplet rotationnel, Gehan et al. (2018) se reposent sur la méthodologie de Vrard et al. (2015) et proposent d'utiliser les spectres en période ajustés pour l'identification des composantes. Comme nous proposerons également d'utiliser ces spectres corrigés pour la détection de la signature magnétique sur les fréquences des modes mixtes, nous détaillons ce principe de la mesure dans le cas de la rotation interne.

3.4.2.1 Les spectres en période corrigée pour un diagnostic de la signature rotationnelle

La première étape pour une mesure précise de la signature rotationnelle est l'ajustement du spectre de puissance en utilisant une nouvelle coordonnée τ, permettant de représenter les modes mixtes avec un écart constant entre deux modes $m = 0$ consécutifs. Afin de déterminer l'expression de cette nouvelle variable, la relation entre la fréquence et la période des modes mixtes est utilisée

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu} = -\frac{\mathrm{d}P}{P}. \tag{3.105}$$

La variable τ est alors définie telle que l'espacement en période corrigée des modes mixtes $\ell = 1$ ($\Delta\tau$) soit égal à $\Delta\Pi_1$. Ainsi τ est défini par l'équation différentielle :

$$\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\zeta}\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu^2}, \tag{3.106}$$

avec ν la fréquence du mode observé (Mosser et al., 2015). Afin de modifier le spectre de puissance pour obtenir un espacement régulier en fréquence, cette équation 3.106 est utilisée. Le panneau du haut de la figure 3.9 représente pour l'étoile KIC 9267654 la fonction ζ, définie par l'équation 3.80, ainsi que les fonctions asymptotiques délimitant le régime des modes $p - m$ (ligne beige) et $g - m$ (ligne rouge). Cette fonction permet donc de repérer la position des modes dipolaires $p - m$. En dessous est représentée la PSD de l'étoile avec uniquement les modes $\ell = 1$ rendus visibles. Enfin, le panneau du bas contient les mêmes données mais l'abscisse est changée en la période corrigée τ. Comme indiqué par les tirets verticaux, ce mode de représentation en période corrigée permet de faire apparaître la pseudo-périodicité des modes mixtes dans le spectre.

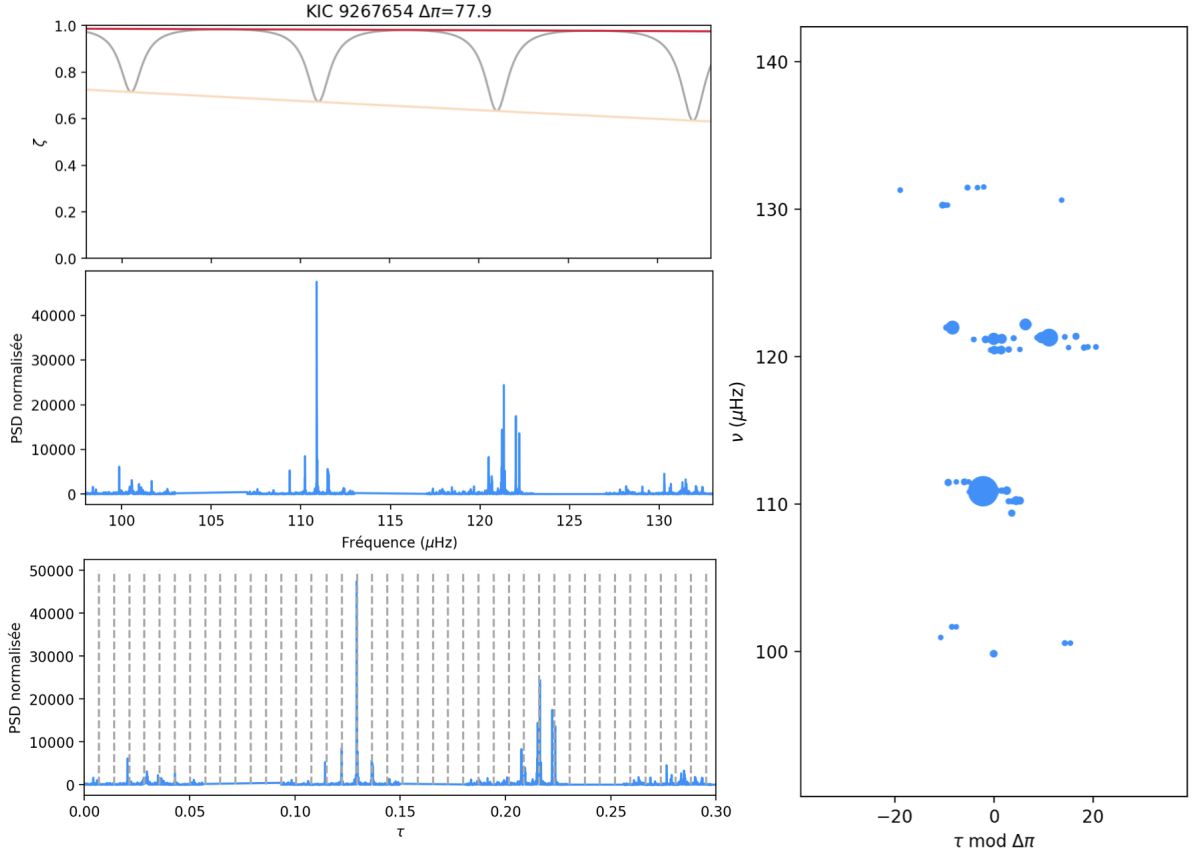


FIGURE 3.9: *Haut :* Représentation de la fonction ζ pour la géante rouge KIC 9267654 de masse $M = 2.654\mathrm{M}_\odot$ et de métallicité $[\mathrm{Fe/H}] = 0.21$ en gris, avec les fonctions maximales et minimales représentées en rouge et beige. *Milieu :* spectre de densité de puissance de l'étoile KIC 9267654 normalisé par le background convectif et par le bruit instrumental, centré sur les modes d'oscillation, auquel les régions des modes $\ell = 0$ et $\ell = 2$ ont été retirées. *Bas :* Mêmes données représentées en période corrigée. Les lignes en tirets aident à repérer la périodicité en la période étirée τ des modes mixtes sur les spectres corrigés. *Droite :* Diagramme échelle en période corrigée, avec la taille des points proportionnelle à l'amplitude des modes.

À partir de ces nouveaux spectres, Vrard et al. (2015), Gehan et al. (2018) proposent de fabriquer des diagrammes échelle corrigés, sur lesquels est représentée la fréquence des modes $\ell = 1$ en fonction de τ modulo $\Delta\Pi$. Sur ces diagramme échelle corrigés comme celui à droite sur la figure 3.9, des courbes quasi verticales apparaissent, chacune composée de modes de même degré azimutal. Ces courbes verticales dénommées « ridges » sont difficilement identifiables dans les données directement, et leur mise en évidence claire nécessite plusieurs étapes de traitement des données que nous ne présenterons pas ici. Nous nous référons au manuscrit de thèse de C. Gehan pour plus de précisions sur la méthodologie. Finalement, après traitement, les ridges apparaissent dans le diagramme échelle en période corrigée. La figure 3.10 représente pour une étoile sur la RGB modélisée par le code d'évolution stellaire MESA (Paxton et al., 2011), et dont les fréquences des modes d'oscillation ont été calculées avec le GYRE (Townsend & Teitler, 2013), le diagramme échelle corrigé des modes $\ell = 1$ (croix bleues pour $m = 1$, rouges pour $m = 0$, et vertes pour $m = -1$). La position horizontale des ridges dans ce diagramme dépend du choix de la constante d'intégration de l'équation 3.106, qui est choisie à zéro pour cette représentation sur la figure 3.10. En revanche, le nombre de croisements entre les différentes composantes, peu importe leur position horizontale, indique l'importance de la perturbation par la rotation. Ainsi, en dessous de la ligne noire, l'étoile est modérément affectée par la rotation, et pour de telles basses fréquences une rotation de cœur de 0.5μHz est suffisamment élevée pour provoquer des chevauchements et le mélange des différents multiplets. Pour des fréquences plus élevées, un même taux de rotation provoque une signature rotationnelle moins marquée dans les données.

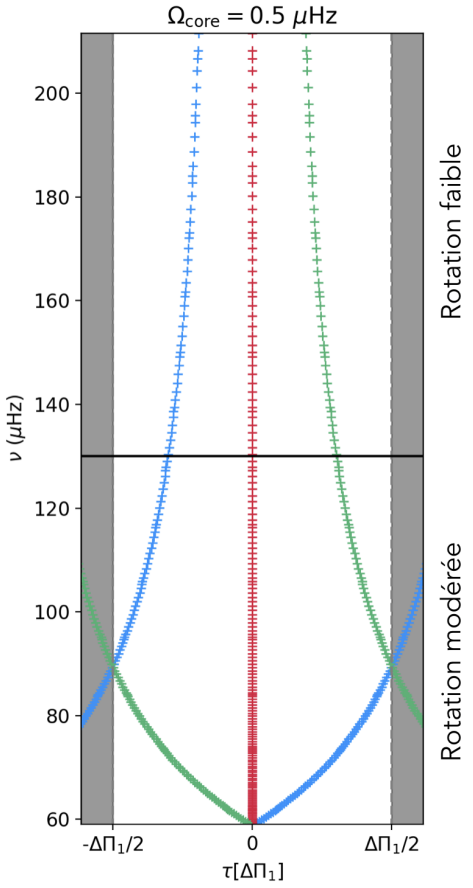


FIGURE 3.10: Diagramme échelle en période corrigée pour les modes $\ell = 1$ d'une géante rouge modélisée par MESA dont les fréquences non perturbées sont calculées par GYRE. Les croix bleues (resp. rouges et vertes) correspondent aux modes de degré azimutal $m = 1$ (resp. $m = 0$ et $m = -1$). La ligne noire délimite le régime de rotation faible par rapport à la fréquence des modes et le régime de rotation modérée se situant en dessous. Les zones grisées indiquent les dépassement à l'intervalle de largeur $\Delta\Pi_1$ nécéssaire pour la visualisation des ridges. Elles permettent d'aider le lecteur à visualiser le passage des ridges d'un ordre n_g au suivant.

3.4.2.2 Relation entre la période corrigée et la signature rotationnelle

Il faut ensuite exprimer la relation entre la nouvelle variable τ homogène à une période et la signature rotationnelle sur les fréquences des modes, afin de pouvoir espérer inverser le profil de rotation interne de l'étoile. En utilisant la relation 3.100 de Goupil et al. (2013), et en négligeant la contribution de l'enveloppe puisque $\zeta \approx 1$ pour les modes à dominance $g-m$, la fréquence du mode non perturbée est égale à la fréquence visible dans la PSD (ν) à laquelle est soustraite la valeur $\zeta\delta\nu_{\rm rot,core}$, et

$$\mathrm{d}P_m = -\frac{\mathrm{d}\nu}{(\nu - \zeta\delta\nu_{\rm rot,core})}. \tag{3.107}$$

Comme l'amplitude de la séparation fréquentielle est très faible devant la fréquence du mode,

$$\mathrm{d}P_m = -\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu^2}\left(1 + 2\zeta\frac{\delta\nu_{\rm rot,core}}{\nu}\right). \tag{3.108}$$

Finalement, l'espacement régulier en période corrigée s'exprime en fonction de la signature rotationnelle comme

$$\Delta\tau_m = \Delta\Pi_1\left(1 + 2\zeta\frac{\delta\nu_{\rm rot,core}}{\nu}\right). \tag{3.109}$$

Grâce aux modes mixtes et à la signature rotationnelle sur leurs fréquences d'oscillation, il est ainsi possible d'estimer le taux de rotation interne des étoiles de type solaire évoluées. Ainsi la rotation du cœur de quelques sous-géantes observées par *Kepler* est estimée à $\Omega_{\rm core}/(2\pi) \lesssim 2\,000$nHz (Deheuvels et al., 2012, 2014, et Deheuvels et al., *submitted*) à entre ~ 0.6 et ~ 10 fois plus rapide que la rotation de surface. Les étoiles sur la RGB encore plus évoluées ont été étudiées par Mosser et al. (2015) et Gehan et al. (2018). Ces dernières études indiquent une fréquence de rotation du cœur sur la RGB à $\Omega_{\rm core} \approx 100 - 15\,000$ nHz. Une première étude de la rotation interne des étoiles de la branche horizontale a également été réalisée par Tayar et al. (2019). Les taux de rotation du cœur et de l'enveloppe des étoiles de type solaire au cours de l'évolution sont représentés sur la figure 1.8.

Ces estimations de la rotation interne des étoiles de type solaire évoluées nous permettront au chapitre 6 de considérer une étoile à deux couches en rotation solide séparant l'enveloppe convective de l'intérieur radiatif. Dans ce même chapitre, nous réutiliserons les diagnostics sismiques présentés ici pour la recherche de la signature d'un champ magnétique interne sur les fréquences des modes mixtes des étoiles de type solaire évoluées. Nous présentons dans la section 3.5 l'état de l'art sur la recherche de magnétisme interne dans les étoiles en utilisant ses potentielles signatures astérosismiques. Nous gardons à l'esprit que la seconde partie de ce manuscrit décrit la théorie des perturbations des oscillations des étoiles de type solaire évoluées par le magnétisme de façon très similaire à ce qui a été exposé dans le cas de la rotation.

3.5 La quête du magnétisme interne

Ce n'est que très récemment que les résultats exposés dans la section précédente sur la détection du taux de rotation interne ont été obtenus. En effet, ces découvertes nécessitent une très bonne résolution dans les données photométriques pour que l'analyse des modes individuels soit possible. Depuis l'arrivée des données de *Kepler*, l'étude de la rotation interne qui permet de mieux comprendre les processus physiques responsables du transport de moment cinétique et du mélange dans les étoiles est devenue un des centres d'intérêts majeurs en astérosismologie. En revanche, un second processus interne, resté marginalement étudié depuis ces quelques années, est également fondamental pour la compréhension de la dynamique interne des étoiles. Le champ magnétique est en effet connu pour geler la rotation différentielle le long des lignes de champ poloïdales (Ferraro, 1937, voir chapitre 2), et pourrait par exemple expliquer le profil de rotation solide de l'intérieur radiatif du Soleil (Mestel & Weiss, 1987; Gough & McIntyre, 1998; Strugarek et al., 2011; Acevedo-Arreguin et al., 2013; Strugarek et al., 2014). Ainsi lors de la préparation de la mission SoHO la détectabilité du magnétisme interne grâce aux fréquences des modes acoustiques du Soleil a été étudiée de manière détaillée (e.g. Gough & Thompson, 1990; Goode & Thompson, 1992). La non-détection de telles signatures magnétiques dans le spectre d'oscillation du Soleil a dirigé l'intérêt de la communauté plutôt vers la recherche de signatures rotationnelles dans les étoiles de type solaire. La découverte de modes mixtes dipolaires d'amplitudes très inférieures à la normale chez certaines géantes rouges par García et al. (2014b) a récemment relancé l'intérêt pour la recherche de signatures magnétiques. Les études théoriques de Fuller et al. (2015); Lecoanet et al. (2017); Loi & Papaloizou (2018) mettent ainsi en avant les effets possibles du magnétisme interne sur les amplitudes des modes mixtes. Cette section présente les motivations actuelles pour la recherche de signatures sismiques du champ magnétique interne qui sera menée dans la seconde partie de ce manuscrit.

3.5.1 Les amplitudes anormalement faibles de certains modes mixtes dipolaires

Nous commençons donc en 2011, avec la première mise en évidence du spectre d'oscillation d'une sous-géante d'amplitude anormalement faible dans la région attendue pour les modes mixtes dipolaires, présentée lors de la réunion du consortium KASC et publiées plus tard par García et al. (2014b). La PSD de cette étoile est représentée sur le panneau de gauche de la figure 3.11 pour la visualisation du motif qui est associé aux oscillations de faibles amplitudes. L'étude contemporaine de Mosser et al. (2012a) met en évidence que non

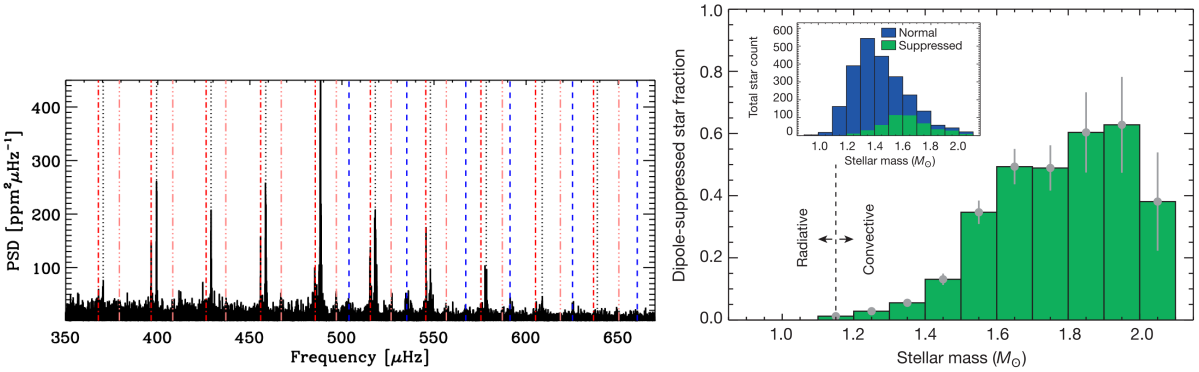


FIGURE 3.11: *Gauche :* PSD de la première étoile (KIC 8561221) découverte présentant des modes dipolaires d'amplitudes anormalement basses (pour cette étoile en particulier, les faibles amplitudes ne sont observées que pour les modes de fréquence inférieure à $\nu_{\rm max}$). Les pointillés verticaux noirs indiquent la position des modes $\ell = 0$, les tirets rouges et orange la position des $\ell = 2$ et $\ell = 3$, et enfin les tirets bleus indiquent la position des modes $\ell = 1$ $p-m$ centraux. Crédits : García et al. (2014b). *Droite :* Distribution des étoiles observées présentant des modes dipolaires de faibles amplitudes en fonction de la masse de l'étoile. La fraction d'étoiles présentant des modes de faibles amplitudes est également reportée. Crédits : Stello et al. (2016b).

seulement certaines étoiles de type solaire évoluées présentent des modes dipolaires de faibles amplitudes, mais également que certaines présentent des modes $\ell = 2$ de faibles amplitudes. La faible amplitude des modes dipolaires de KIC 8561221 pourrait donc résulter de la queue de la distribution statistique des amplitudes des modes. L'étude statistique de Stello et al. (2016a) met en revanche en évidence une nette dichotomie dans les amplitudes des modes $\ell = 1$ et $\ell = 2$ des étoiles de masse intermédiaire, écartant la possibilité que les amplitudes de KIC 8561221 soient simplement le fruit du hasard [6].

L'amplitude des modes d'oscillation ne peut être calculée par la mesure du maximum de puissance dans la zone des modes d'ordre ℓ considéré, à cause de l'excitation stochastique des modes et leur longue durée de vie par rapport à la durée des observations photométriques. En utilisant une plage de fréquence sur laquelle l'amplitude moyenne est calculée, les amplitudes peuvent être reconstruites. Ainsi, la mesure de l'amplitude au carré des modes (n, ℓ) est exprimée par Mosser et al. (2012a) par

$$A^2_\ell(n) = \delta f \int_{n-e_{\ell'\ell}}^{n+e_{\ell\ell''}} [p(n') - B]\, dn', \tag{3.110}$$

avec δf la résolution fréquentielle des données, $[e_{\ell'\ell}, e_{\ell\ell''}]$ délimitant la zone fréquentielle où se situent les modes de degré ℓ, p dénote la densité de puissance dans le spectre et B le signal associé à la convection et au bruit de photon du détecteur que nous dénommerons « background » par la suite. Comme l'amplitude des modes centraux est différente de l'amplitude des modes moins énergétiques situés loin de $\nu_{\rm max}$, la mesure seule de $A^2_\ell(n)$ est difficilement interprétable. L'amplitude de chaque degré $\ell = 1$ et $\ell = 2$ correspondant à un ordre radial donné est donc plutôt comparée à celle du mode $\ell = 0$ de même ordre par le biais de la **visibilité des modes** :

$$V^2_\ell = \langle A^2_\ell \rangle / \langle A^2_0 \rangle. \tag{3.111}$$

La figure 1.9 présentée dans l'introduction de ce manuscrit représente ainsi la valeur de la visibilité des modes d'oscillation $\ell = 1$ des géantes rouges observées par *Kepler*. Nous observons, tout comme décrit par Stello et al. (2016a), une nette dichotomie dans la valeur des amplitudes des modes dipolaires, exacerbée à haute fréquence, pour les étoiles les plus jeunes (les sous-géantes et jeunes géantes rouges). L'exploration de cette dichotomie avec la masse de l'étoile (voir le panneau de droite de la figure 3.11) dévoile que les étoiles les plus massives sont en plus grandes proportions affectées par le phénomène à l'origine de la diminution d'amplitude de leurs

6. Nous précisions que dans le cas de cette étude en particulier les faibles amplitudes ne sont détectées qu'à basses fréquences, inférieures à $\nu_{\rm max}$. Ainsi cette étoile fait partie d'une classe intermédiaire entre les étoiles présentant des modes d'amplitudes normales et les étoiles pour lesquelles tous les modes $\ell = 1$ ont une amplitude diminuée.

modes dipolaires et quadripolaires. Cette distribution en masse indique une dynamique interne différente entre les étoiles de faible masse et les étoiles de masse intermédiaire évoluées qui ont développé un cœur convectif durant la séquence principale. Cette observation est importante pour la recherche du mécanisme provoquant la perte d'énergie des modes dipolaires et quadripolaires, et la principale hypothèse actuelle est la présence de champs magnétiques internes de grande intensité dans la zone radiative des étoiles de masse intermédiaire, résultant de la relaxation du dernier champ dynamo dans l'intérieur des étoiles. Nous nous référons au chapitre 2 de ce manuscrit pour les origines et la conservation des champs magnétiques internes au long de l'évolution des étoiles de type solaire. Un champ magnétique contemporain dans l'intérieur radiatif des étoiles évoluées pourrait également être celui généré par l'instabilité de Tayler d'un champ toroïdal dominant (Tayler, 1980; Spruit, 2002; Fuller et al., 2019; Eggenberger et al., 2020). Un tel champ pourrait potentiellement affecter les amplitudes des modes d'oscillation de façon très similaire aux champs fossiles. En n'adoptant aucun *a priori* sur l'origine du potentiel champ magnétique interne, nous présentons les travaux théoriques visant à estimer l'impact du magnétisme interne sur les amplitudes des modes mixtes.

3.5.1.1 Conversion des modes de gravité magnétisés en onde d'Alfvén, et champ critique associé

Fuller et al. (2015) proposent d'expliquer la perte d'énergie des modes dipolaires par la conversion des ondes de gravité dans le cœur des étoiles évoluées en onde d'Alfvén par le champ magnétique interne. Le mécanisme invoqué est schématisé sur le panneau de gauche de la figure 3.12. Les ondes de gravité internes à courtes longueurs d'ondes radiales créent des tensions magnétiques intenses le long des lignes de champ, modifiant en retour la fréquence du mode et le déplacement associé. Lorsque la force associée à la tension magnétique domine l'accélération liée aux oscillations, les ondes de gravité sont fortement altérées par le champ magnétique. Cela a lieu pour un champ d'amplitude minimale

$$B_c = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}}\frac{\omega^2 r}{N}. \tag{3.112}$$

Cette expression correspond à la valeur critique de l'amplitude magnétique au-delà de laquelle la vitesse d'Alfvén dépasse la vitesse de groupe des ondes de gravité (Fuller et al., 2015). Ce champ critique atteint sa limite minimale au niveau de la couche de brûlage de l'hydrogène durant la phase des géantes rouges. Cette valeur minimale plutôt élevée de l'amplitude du champ est représentée au cours de l'évolution de l'étoile sur le panneau de droite de la figure 3.12. Cette représentation sera réutilisée dans le chapitre 6 pour comparaison avec le champ magnétique minimal nécessaire pour perturber efficacement les fréquences de modes mixtes dans les données. Lorsque l'amplitude du champ magnétique dépasse cette valeur de champ critique, les ondes de gravité ne sont plus propagatrices mais évanescentes, car la tension magnétique l'emporte sur la poussée d'Archimède. Ainsi, les ondes de gravité en présence de magnétisme deviennent évanescentes si

$$\omega < \left(\frac{2B_r^2 N^2}{\pi\rho r^2}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{3.113}$$

Lorsque cette condition est respectée, les ondes de gravité sont soit réfléchies au niveau de la couche de brûlage de l'hydrogène, soit transmises dans la région fortement magnétisée en tant qu'ondes d'Alfvén. Ces deux mécanismes de réflexion et de transmission modifient la structure angulaire du mode, dispersant son énergie sur une forêt d'ondes de degrés ℓ différents (Fuller et al., 2015). Du fait de la conversion d'ondes de faibles degrés, visibles depuis la surface, en ondes de hauts degrés ℓ qui ne peuvent franchir la zone d'évanescence, l'énergie contenue dans les modes de gravité reste alors piégée dans l'intérieur radiatif de l'étoile. Finalement, les modes d'oscillation observés conservent uniquement leur composante acoustique.

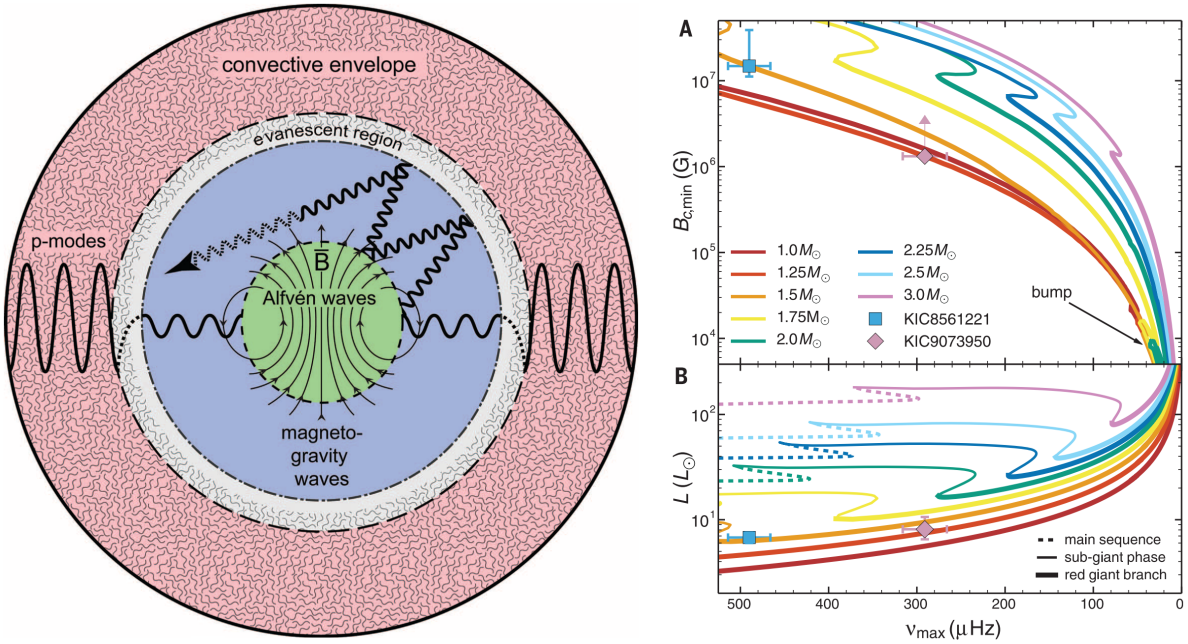


FIGURE 3.12: *Gauche :* Représentation schématique du mécanisme de conversion des ondes de gravité en ondes d'Alfvén tel que proposé par Fuller et al. (2015). *Droite :* Amplitude de champ magnétique interne critique pour la suppression de l'amplitude des modes d'oscillation dipolaires d'après cette théorie, en fonction de l'état évolutif de l'étoile repéré par $\nu_{\max}$, la luminosité, et la masse de l'étoile. Crédits : Fuller et al. (2015).

3.5.1.2 Évaluation de la perte d'amplitude des modes

En considérant que la totalité de la puissance des modes de gravité est perdue par ce mécanisme dans les oscillations observées, Fuller et al. (2015) démontrent ensuite que la perte d'amplitude du mode entre un mode normal (normal) et un mode de faible amplitude (low) s'écrit en terme de visibilité par

$$\frac{V^2_{\mathrm{low}}}{V^2_{\mathrm{normal}}} = \frac{1}{1+\Delta\nu\tau T^2}, \tag{3.114}$$

avec

$$T \sim \left(\frac{r_b}{r_c}\right)^{\Lambda}, \tag{3.115}$$

le coefficient de transmission d'énergie des ondes dans la zone évanescente, et τ le temps d'amortissement du mode. Cette perte de visibilité associée à la disparation totale de l'amplitude des modes g a une valeur cohérente avec les visibilités observées pour les étoiles à modes dipolaires de faibles amplitudes. De plus, l'étude de Lecoanet et al. (2017) démontre que les ondes à haut degré ℓ créées par le champ magnétique ne peuvent absolument pas s'échapper de l'intérieur radiatif, comme intuité par Fuller et al. (2015).

3.5.1.3 Les limitations observationnelles du modèle de Fuller

Afin que ce mécanisme de piégeage des ondes de gravité dans l'intérieur radiatif puisse être considéré, il faut que les modes résiduels apparaissant dans la PSD ne possèdent plus aucune composante associée à des modes de gravité. Mosser et al. (2017) ajustent le motif fréquentiel associé aux modes mixtes à un échantillon de quelques dizaines de géantes rouges présentant des modes d'oscillation dipolaires de faibles amplitudes. Ils montrent ainsi que la puissance résiduelle dans la PSD ne peut être associée à des modes purement acoustiques,

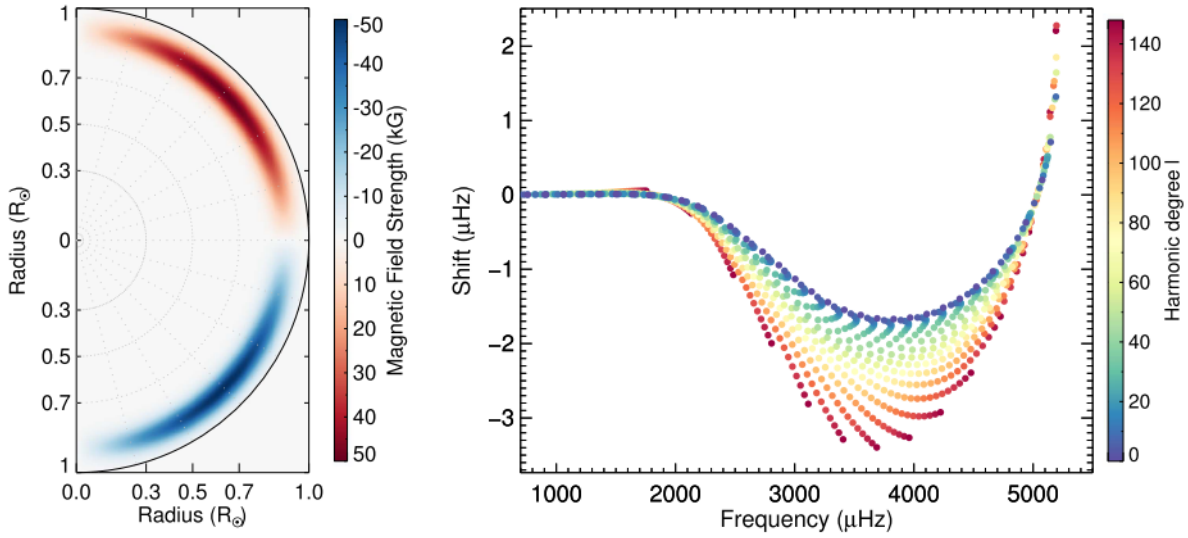


FIGURE 3.13: *Gauche :* Tolopogie de champ magnétique purement toroïdale qui correspondrait au minimum d'activité du Soleil. *Droite :* Perturbation des fréquences des modes acoustiques associée à un tel magnétisme de surface. Crédits : Kiefer & Roth (2018).

et est plutôt proche du motif associé aux modes mixtes, même à faible visibilité. Le mécanisme d'effet de serre magnétique tel que proposé par Fuller et al. (2015) ne pourrait donc pas être valide en l'état.

Loi & Papaloizou (2018) investiguent plus en profondeur la façon dont les modes de gravité interagissent avec un fort champ magnétique. Les auteurs démontrent alors que les ondes réfléchies par le champ magnétique peuvent former des modes de magnéto-gravité, selon la fréquence du mode et l'orientation des lignes de champ magnétique par rapport à la stratification. Ces modes établis peuvent ainsi être couplés avec les modes acoustiques par effet tunnel, comme dans le cas des modes mixtes non-magnétisés. Cela permettrait ainsi de conserver l'idée générale de piégeage des modes de gravité dans l'intérieur radiatif de Fuller et al. (2015), tout en permettant à une fraction de ces modes de se coupler avec les modes acoustiques, maintenant le motif des modes mixtes dans la PSD en accord avec l'étude observationnelle de Mosser et al. (2017). Dans un récent article, Loi (2020) démontre également que la densité de modes $g - m$ dans le spectre augmente d'environ 10% en présence de fort magnétisme, ce qui pourrait expliquer l'excès de pics significatifs observés dans les données par Mosser et al. (2017) par rapport au motif des modes mixtes non-magnétisés.

Si un tel mécanisme de piégeage magnétique est en place dans le cœur des géantes rouges de masses intermédiaires, alors la présence de ce champ magnétique intense devrait également affecter les fréquences des modes observés (Rieutord & Michel, 2017; Loi, 2020). C'est avec l'objectif de caractériser les signatures magnétiques sur les fréquences des modes mixtes que nous avons mené les travaux présentés dans la deuxième partie de ce manuscrit. Cela permet ainsi d'orienter la recherche des signatures magnétiques vers la reconnaissance des motifs fréquentiels attendus.

Notre étude sur la signature fréquentielle liée au magnétisme interne de l'étoile menée dans les chapitre 6 et 7 n'est pas la première. Nous présentons les travaux fondateurs sur ce sujet, en débutant par les études orientées vers le magnétisme solaire.

3.5.2 État de l'art sur la recherche de magnétisme interne aux étoiles

Le cas du Soleil et les modes acoustiques

Gough & Thompson (1990) et Goode & Thompson (1992) recherchent le motif fréquentiel associé à une perturbation au premier ordre des modes acoustiques par le magnétisme interne dans le Soleil. Nous ne

détaillerons pas les expressions analytiques obtenues dans la première de ces études se concentrant sur un champ magnétique axisymétrique (dont l'axe de symétrie est aligné avec l'axe de rotation de l'étoile), qui sont équivalentes au formalisme qui sera développé dans le chapitre 6. La seconde étude ajoute une inclinaison au champ magnétique utilisé par rapport à l'axe de rotation de l'étoile. Les signatures magnétiques sont exprimées à partir de topologies de champs simples, purement poloïdaux ou bien purement toroïdaux, car les études sont antérieures à l'expression semi-analytique des champs stables mixtes poloïdaux et toroïdaux (Duez & Mathis, 2010). Nous savons désormais que ces champs sont instables, et notre étude utilisera la formulation semi-analytique de Duez & Mathis (2010).

Rashba et al. (2007) recherche dans le cadre de la mission Solar and Heliospheric Observatory l'effet d'un champ magnétique dans la zone radiative du Soleil sur les fréquences des modes de gravité. Cependant, la difficile détection des modes g dans le Soleil (García et al., 2007; Fossat et al., 2017, détections très controversées) implique que la recherche de champ magnétique solaire interne sur les fréquences des modes g est très délicate, et n'a donc pas pu être réalisée.

La signature du champ magnétique de surface sur les modes acoustiques

Comme les ondes acoustiques franchissent très rapidement les couches internes du Soleil, aucune trace de champ magnétique interne n'a été trouvée dans la signature fréquentielle du Soleil. En revanche, le magnétisme de surface doit affecter les fréquences des oscillations acoustiques. Kiefer & Roth (2018) mettent ainsi en évidence les perturbations des fréquences des modes acoustiques par un champ toroïdal axisymétrique de sous-surface. En utilisant les perturbations des modes acoustiques observées dans la PSD du Soleil, les auteurs remontent aux profondeurs, tailles, et amplitudes des champs magnétiques toroïdaux qui permettraient de retrouver les perturbations fréquentielles observées au maximum et au minimum (voir figure 3.13 pour la topologie obtenue lors du minimum d'activité solaire) du cycle d'activité du Soleil.

3.5.2.1 Signatures magnétiques sur les oscillations des étoiles massives

La non-détection de signatures magnétiques s'apparentant aux motifs établis par Gough & Thompson (1990) et Goode & Thompson (1992) montre que le magnétisme interne des étoiles de la séquence principale ne peut être dévoilé par l'analyse fréquentielle des modes acoustiques. En revanche, la structure interne des étoiles qui ne sont pas de type solaire, plus massives, permet parfois de sonder le magnétisme interne. Par exemple, Shibahashi & Aerts (2000) montrent que l'étoile β Cephei, qui est une étoile magnétisée, présente des perturbations de sa période de pulsation associées à la configuration magnétique de l'étoile.

Kurtz (1982) a montré que les oscillations acoustiques des étoiles de type spectral A rapidement oscillantes (roAp) ont leurs oscillations influencées par le champ magnétique intense de l'étoile. Takata & Shibahashi (1994) investiguent l'effet d'un champ purement poloïdal (encore une fois connu désormais pour son instabilité) sur les fréquences des oscillations des étoiles roAp, et démontrent que les modes d'oscillation non-radiaux sont bel et bien perturbés par le magnétisme.

La structure interne des étoiles massives (OBA) étant différente de celle des étoiles de type solaire, elles présentent parfois également des modes de gravité en plus des modes acoustiques. Ces modes de gravité sondent les profondeurs, et donc devraient être plus affectés que les modes acoustiques par la présence de champ magnétique interne. Buysschaert et al. (2018) étudient les signatures magnétiques comme perturbations au premier ordre des modes g de l'étoile HD 43317, une étoile à pulsation lente (SPB) en rotation rapide. Cette étoile a été caractérisée précédemment par les études de Pápics et al. (2012), Briquet et al. (2013), et Buysschaert et al. (2017). Cependant cette fois-ci encore, la topologie du champ magnétique considéré est purement poloïdale (dipolaire) et axisymétrique, connue pour être instable par Braithwaite & Spruit (2004). Pour améliorer l'étude de cette étoile, Prat et al. (2019) considèrent les effets de la rotation sur les modes g des SPB en rotation rapide comme une force non perturbative. Cela permet d'exprimer les perturbations magnétiques au premier ordre sur les fréquences angulaires des modes d'oscillation de l'étoile en rotation par

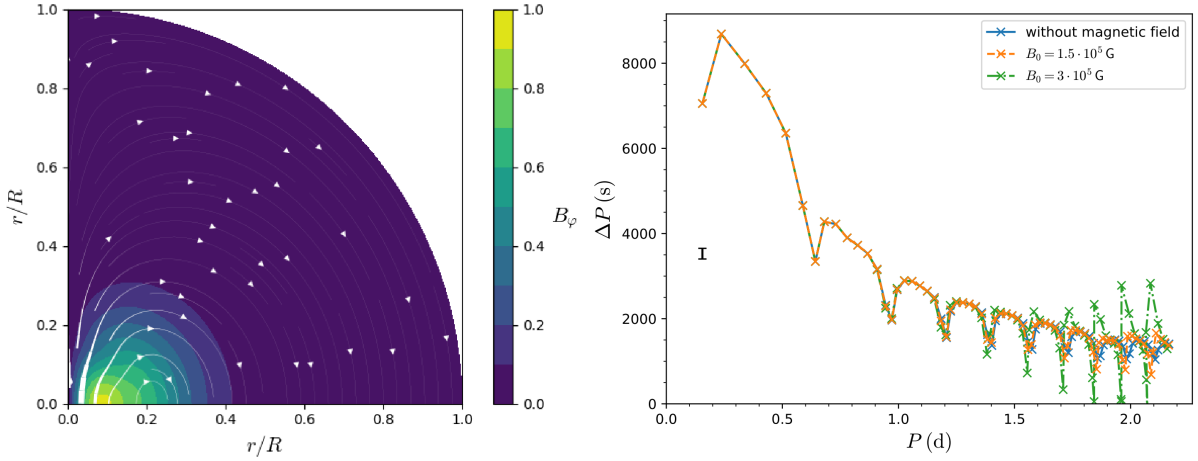


FIGURE 3.14: Gauche : Topologie du champ magnétique stable utilisée par Prat et al. (2019). La composante toroïdale est représentée par la carte de couleurs, et les lignes blanches représentent les lignes de champ poloïdales avec l'épaisseur proportionnelle à leurs amplitudes. *Droite :* Espacement en période entre deux modes g consécutifs pour les modes modélisés de HD 43317, selon que l'étoile est en rotation rapide non magnétisée (ligne bleue), magnétisée avec un champ d'amplitude $B_0 = 0.15$MG (ligne orange), ou bien magnétisée avec un champ d'amplitude 3MG. Crédits : Prat et al. (2019).

$$\omega_1 = -\frac{\langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\delta F}_l(\boldsymbol{\xi}_0)/\rho \rangle}{2\omega_0 \langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_0 \rangle + \langle \boldsymbol{\xi}_0, i\boldsymbol{F}_c(\boldsymbol{\xi}_0) + i\boldsymbol{F}_f(\boldsymbol{\xi}_0) \rangle}, \tag{3.116}$$

avec $\boldsymbol{\delta F}_l$ la perturbation de la force de Lorentz liée au champ magnétique, $\boldsymbol{F}_c$ l'accélération de Coriolis, et $\boldsymbol{F}_f$ l'advection liée au changement de référentiel de l'étoile tournant vers le repère inertiel. Les auteurs ajoutent également une topologie du champ magnétique réaliste, mixte poloïdale et toroïdale, suivant la description semi-analytique de Duez & Mathis (2010), représentée sur le panneau de gauche de la figure 3.14. Finalement, cette étude démontre que la présence de magnétisme modifie la période des modes g surtout pour des modes de basses fréquences (car leur fréquence est plus proche de la fréquence d'Alfvén). Le panneau de droite de la figure 3.14 montre l'effet du magnétisme sur les périodes des modes de gravité simulés pour HD 43317. Les vallées dans l'espacement en période sont dues aux gradients de composition chimique dans l'étoile, et la signature magnétique semble reliée à la position de ces vallées. En revanche, ces signatures magnétiques n'ont pas été détectée dans le spectre réel d'oscillation de l'étoile, car un nombre trop faible de modes a été identifié. L'article Prat et al. (2020) qui étend l'étude du cas des configurations magnétiques stable inclinées par rapport à l'axe de rotation de l'étoile produit des résultats similaires, avec une amplitude de la signature magnétique d'autant plus importante que le champ est incliné par rapport à la rotation. Cela peut être interprété par la rotation rapide de l'étoile, qui concentre les modes d'oscillation de basses fréquences au niveau de l'équateur du fait de l'action de l'accélération de Coriolis.

Un tel comportement n'est pas attendu dans le cas des étoiles de type solaire évoluées qui sont généralement en rotation lente qui seront étudiées dans la seconde partie de ce manuscrit. Nous nous concentrerons donc dans les chapitrea 6 et 7 sur le cas axisymétrique, pour lequel le champ magnétique est aligné avec l'axe de rotation de l'étoile. Le cas non axisymétrique sera discuté dans les perspectives de cette thèse au chapitre 8.

3.5.2.2 Recherche de magnétisme interne aux géantes rouges par les modes mixtes

Dans le cas des étoiles de type solaire évoluées, les modes à considérer pour la recherche de signatures magnétiques sur les fréquences sont les modes mixtes gravito-acoustiques. Le champ magnétique pouvant perturber les fréquences des modes est localisé dans l'intérieur radiatif de l'étoile (Cantiello et al., 2016), et ne s'étend pas jusqu'à la surface comme c'est le cas dans les travaux de Prat et al. (2019, 2020). Comme les étoiles de type solaire évoluées sont considérées comme des rotateurs lents, les fréquences des modes mixtes

peuvent être perturbées en utilisant le formalisme de Prat et al. (2019), en considérant la rotation comme une perturbation au premier ordre, s'ajoutant linéairement à la perturbation liée au magnétisme interne dans le cas axisymétrique. *C'est ce que nous présenterons dans le chapitre 6, en considérant l'effet des perturbations magnétiques au premier ordre sur les modes d'oscillation.*

Loi & Papaloizou (2020) étudient également la signature magnétique sur les fréquences des modes mixtes des géantes, mais en abordant le problème non perturbatif, pour lequel les effets du magnétisme ne jouent pas comme une perturbation mais directement à l'ordre 0 dans le système. *Cette étude purement théorique ne contient pas de comparaison avec les effets liés à la rotation de l'étoile, que nous traiterons dans le cas perturbatif au chapitre 6. Nous montrerons également que malgré les grandes amplitudes des champs magnétiques attendues dans l'intérieur radiatif des étoiles de type solaire évoluées, un développement perturbatif des signatures magnétiques est dans la plupart des cas suffisant.*

Première partie

De nouvelles méthodologies pour la caractérisation automatique des étoiles

CHAPITRE 4

FLIPER : UNE NOUVELLE MÉTHODE POUR ESTIMER AUTOMATIQUEMENT LA GRAVITÉ DE SURFACE DES ÉTOILES DE TYPE SOLAIRE

Sommaire

4.1 La gravité de surface et mesures associées **100**
4.1.1 Mesures physiques et incertitudes associées 100
4.1.2 La granulation comme proxy de la gravité de surface 102
4.1.3 La métrique Flicker et son domaine d'applicabilité 105
4.2 FliPer : une nouvelle métrique pour l'estimation de la gravité de surface des étoiles de faible masse **106**
4.2.1 Évolution de la PSD d'une étoile de type solaire au long de l'évolution 106
4.2.2 Définition et évaluation des paramètres FliPer 108
4.2.3 Données utilisées 109
4.2.4 Limitation de $f_{\rm min}$ 109
4.2.5 Estimation du bruit de photon P_n 110
4.2.6 Estimation de FliPer pour $f_{\rm min} = 0.7$ μHz 111
4.2.7 Premiers résultats 111
4.3 Automatisation : une Forêt Aléatoire pour l'estimation de la gravité de surface **113**
4.3.1 Vers une mesure automatisée de la gravité de surface 114
4.3.2 Introduction à l'intelligence artificielle surpervisée 115
4.3.3 Les arbres de décision pour la régression 115
4.3.4 Méthode d'ensemble de Forêts Aléatoires pour la régression 116
4.4 L'algorithme FliPer pour l'estimation automatique de la gravité de surface des étoiles de faible masse **117**
4.4.1 Paramètres X utilisés 117
4.4.2 Étape d'entraînement 119
4.4.3 Étape de test des performances de l'algorithme 120
4.4.4 Résultats obtenus par l'algorithme FliPer 120
4.4.5 Conclusion 122

Enjeux de l'estimation des paramètres globaux pour la caractérisation stellaire

Les paramètres stellaires comme la température effective ($T_{\rm eff}$), la luminosité (L), la métallicité ($[{\rm Fe/H}]$), la gravité de surface ($\log g$), ou encore la masse (M), le rayon (R) et l'âge de l'étoile sont clés pour la compréhension de l'évolution stellaire. Nous avons vu au chapitre 2 que le diagramme de Hertzsprung-Russell

permet de positionner l'état évolutif de l'étoile, à condition d'avoir une bonne estimation de sa $T_{\rm eff}$ et de sa luminosité. Cependant, une position dans le diagramme ne correspond pas toujours à un état évolutif unique (e.g. dégénérescence entre la RGB et le RC), et l'âge estimé à partir d'une position dans le diagramme dépend de la masse ou de la métallicité de l'étoile par exemple. Plus on a d'observables par spectroscopie ou asterosismologie notamment, mieux on pourra placer la position de l'étoile sur le diagramme de Hertzsprung-Russell et la caractériser. Ainsi, il est fondamental de contraindre le maximum de paramètres stellaires pour pouvoir étudier plus en détail une étoile.

Ces paramètres sont également d'une grande aide pour la caractérisation des systèmes planétaires. Afin d'estimer le rayon d'une planète (par la méthode des transits notamment), il faut connaître le rayon de l'étoile autour de laquelle elle orbite. De plus, l'âge estimé de l'étoile permet d'étudier l'évolution des systèmes planétaires (ou des galaxies, e.g. Fuhrmann, 2004), la masse de l'étoile doit nécessairement être connue pour ajuster les mesures de vitesse radiale, et la densité moyenne est clef pour étudier l'excentricité des systèmes (Huber et al., 2016). Finalement, l'estimation de paramètres aussi fondamentaux que la masse ou bien le rayon des exoplanètes transitant devant leur étoile est en grande partie dépendante de la caractérisation globale de l'étoile hôte (Guillot & Showman, 2002; Bodenheimer et al., 2003; Baraffe et al., 2003; Guillot, 2005) elle-même.

Différentes méthodes permettent d'estimer ces paramètres globaux. La spectroscopie par exemple permet d'obtenir une bonne estimation de la $T_{\rm eff}$ (corrélée avec l'estimation de la gravité de surface), l'étude des parallaxes permet d'obtenir la luminosité et d'inférer une estimation du rayon de l'étude, et l'astérosismologie nous renseigne encore plus précisément sur $\log g$ (Aguirre et al., 2020), ainsi que sur la masse et le rayon de l'étoile. Nous référons au livre de Aerts et al. (2010) pour plus de détails.

4.1 La gravité de surface et mesures associées

La gravité de surface est l'intensité du champ gravitationnel à la surface d'un astre. C'est un paramètre fondamentalement relié à la masse de l'étoile : plus un corps est massif, plus son attraction gravitationnelle est grande. Le Soleil a une gravité de surface $g = 273.95 \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, alors que sur la Terre, beaucoup moins massive, $g = 9.78 \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ à l'équateur. La gravité de surface s'exprime à la surface des étoiles par

$$g = \frac{\mathrm{G}M_\star}{R_\star^2}, \tag{4.1}$$

avec $G = 6.67430 \times 10^{11}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ la constante de gravitation universelle, $M_\star$ la masse de l'étoile et $R_\star$ le rayon de l'étoile. Par sa relation directe avec la masse et le rayon de l'étoile, la gravité de surface est un très bon indicateur de structure. Combiné par exemple avec la température effective spectroscopique ou bien des mesures astérosismiques, il permet ainsi d'obtenir une bonne estimation de la masse et du rayon des étoiles. La communauté astérosismique utilise plus fréquemment le logarithme en base 10 de la gravité de surface (noté $\log g$ dans la suite du manuscrit), s'étalant entre ~ 5 et ~ 0.1 dex pour les étoiles de type solaire entre la séquence principale et les étoiles sur la AGB (voir Chapitre 2, section 2.1 pour une description des différents états évolutifs des étoiles de type solaire).

4.1.1 Mesures physiques et incertitudes associées

Plusieurs méthodes observationnelles sont utilisables pour estimer la gravité de surface des étoiles. Nous nous référons à la section 4 de Huber et al. (2014) pour la description détaillée des méthodes classiques de mesure des paramètres stellaires. Nous les résumons ici, accompagnées de leur incertitude typique :

- **Photométrie : ajustement d'isochrones & estimation Bayesienne**

  La méthode des ajustements d'isochrone (Girardi et al., 2000) est la moins contraignante. En première approximation, il s'agit d'ajuster les isochrones dans un diagramme couleur-magnitude (représentant les états évolutifs des étoiles de façon similaire au diagramme de Hertzsprung-Russell) afin d'obtenir une estimation de $T_{\rm eff}$, $\log g$, $[{\rm Fe/H}]$, etc. Cet ajustement désormais couramment réalisé par études Bayésiennes (Jørgensen & Lindegren, 2005) nécessite une première intuition sur les priors des différents paramètres qui sont estimés. Le choix de la bande photométrique utilisée est important selon les paramètres à estimer, plusieurs bandes de couleurs sont en général combinées pour réduire les incertitudes sur les estimations. Une seconde étape de vérification des priors utilisés, par comparaison avec une autre méthode (e.g. la spectroscopie), est donc recommandée. C'est la méthode d'estimation des paramètres des étoiles qui peut fournir des estimations au plus grand nombre d'étoiles, mais c'est aussi la moins précise. L'incertitude associée à l'estimation de la gravité de surface des étoiles est de $90 - 150\%$. À partir des diagrammes de couleur/magnitude des étoiles, et en ajustant $T_{\rm eff}$, $[{\rm Fe/H}]$, et la densité stellaire moyenne (Mortier et al., 2014), des modèles d'évolution stellaire sont paramétrés pour modéliser les isochrones des étoiles (voir figure 2.1). Cette méthode qui combine la photométrie en bande large, la modélisation des atmosphères stellaires et les isochrones est utilisée par défaut pour l'estimation des paramètres stellaires des étoiles du « Kepler Input Catalog » (KIC ; Brown et al., 2011a). La gravité de surface estimée dans le KIC est connue pour être surestimée de ~ 0.2 dex (Verner et al., 2011), et Mathur et al. (2017) reporte une incertitude sur la gravité de surface estimée par le KIC de ~ 0.4dex. Avec l'arrivée récente des données de *Gaia* (Gaia Collaboration et al., 2018), les luminosités des étoiles de la galaxie sont obtenues à partir des mesures de parallaxes. Ces estimations dépendent des corrections bolométriques utilisées, et du modèle d'extinction. La photométrie en bande G des étoiles de la galaxie a également été obtenue grâce à *Gaia*. Ces récentes mesures peuvent être couplées avec les données astéorosismiques ou spectroscopiques pour améliorer les incertitudes, notamment sur l'estimation de la gravité de surface.

- **Photométrie : estimation des paramètres grâce aux transits**

  Les exoplanètes en transit permettent d'estimer avec précision la densité stellaire moyenne si l'excentricité et le parametre d'impact sont bien connus (Seager & Mallen-Ornelas, 2003; Winn et al., 2010). Pour les étoiles présentant des transits planétaires (e.g. Henry et al., 2000; Charbonneau et al., 2000) dans leur courbe de lumière, l'ajustement des isochrones décrit dans le paragraphe précédent ou bien une étude spectroscopique permet alors d'estimer la gravité de surface avec une très bonne précision. En effet, si l'on connaît par ailleurs la $T_{\rm eff}$, $[{\rm Fe/H}]$, l'estimation des densité moyennes de l'étoile et de la planète permet l'utilisation la troisième loi de Kepler (e.g. Sozzetti et al., 2007; Mortier et al., 2014). Par conséquent, une estimation directe de la gravité de surface de l'étoile est rendue possible, par la relation

$$\rho_\star + k^3 \rho_p = \frac{3\pi}{{\rm G}P^2} \left(\frac{a}{R_\star} \right)^3 , \tag{4.2}$$

  avec a le demi grand-axe de l'orbite, P la période de l'orbite, $R_\star$ le rayon de l'étoile, $\rho_\star$ et ρ_p les densités de l'étoile et de la planète et k une constante suffisamment faible pour que le second terme à gauche soit négligeable dans le cas d'un système étoile-planète. Cette méthode fonctionne aussi pour les système stellaires binaires avec des éclipses (e.g. Benbakoura et al., 2020). L'incertitude associée à cette méthode de mesure de $\log g$ est fixée à 0.05 dex par Huber et al. (2014). Si plusieurs planètes sont détectées, la précision augmente et peut atteindre celle des données astérosismiques.

- **Spectroscopie**

  La méthode spectroscopique est une des méthodes les plus utilisées pour estimer la gravité de surface des étoiles (e.g. Huber et al., 2014). Le spectre d'absorption de l'étoile est enregistré, puis un spectre simulé contenant les bandes d'absorption principales est ajusté (usuellement par corrélation croisée,

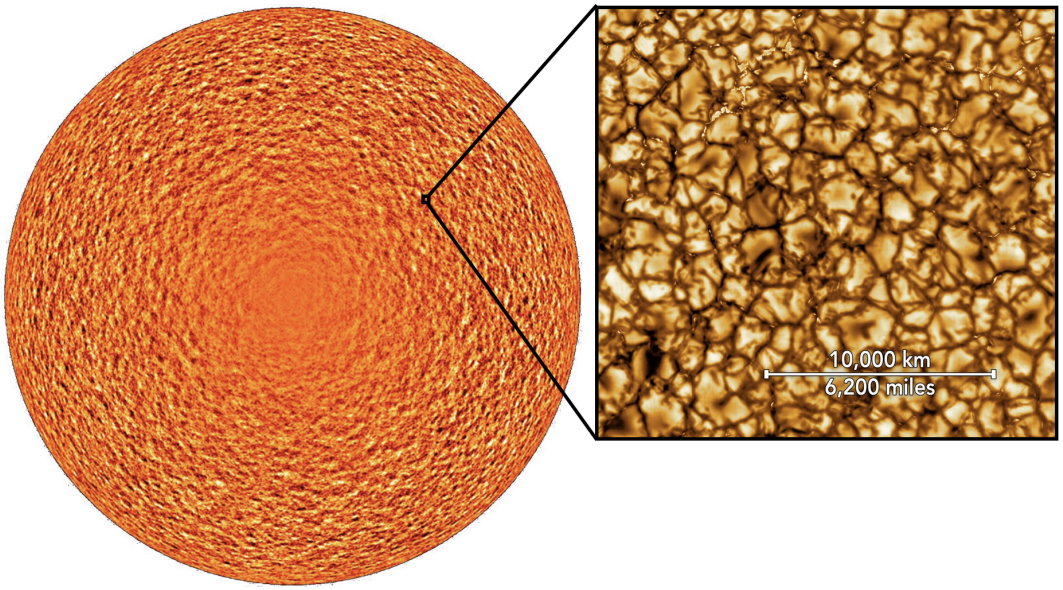


FIGURE 4.1: *Gauche :* La supergranulation à la surface du Soleil observée par MDI par imagerie Doppler. Crédits : SOHO/MDI/ESA, *Droite :* La granulation et mesogranulation dans la photosphère du Soleil observée avec la plus haute résolution à ce jour par le Daniel K. Inouye Solar Telescope (longueur d'onde $\lambda = 789\mathrm{nm}$). Crédits : NSO/NSF/AURA

Huber et al., 2013) pour identifier les raies contenues dans le spectre de l'étoile. Sans contraintes additionnelles, l'incertitude typique des mesures spectroscopiques de la gravité de surface des étoiles est de ~ 0.15 dex. Les analyses spectroscopiques sont de plus souvent affectées par la dégénérescence entre les paramètres $T_{\rm eff}$, $\log g$ et $[\mathrm{Fe/H}]$ (qui peut être levée en utilisant des contraintes astérosismiques additionnelles).

- **Astérosismologie**

  Une estimation de $\log g$ est rendue possible par l'astérosismologie globale. Cette méthode utilise la relation d'échelle astérosismique 3.89 détaillée au Chapitre 3, en utilisant le $\nu_{\rm max}$ astérosismique et $T_{\rm eff}$ en provenance de la spectroscopie ou bien de la photométrie (Belkacem et al., 2011) :

$$\log\, g = \log_{10}(\mathrm{g}_\odot) + \log_{10}\left(\frac{\nu_{\rm max}}{\nu_{\rm max,\odot}}\right) + \frac{1}{2}\log_{10}\left(\frac{\mathrm{T_{eff}}}{\mathrm{T_{eff,\odot}}}\right). \tag{4.3}$$

  En utilisant les modes d'oscillation individuels, l'astérosismologie permet une estimation encore plus précise de la gravité de surface, à au moins 0.03 dex (e.g. Morel & Miglio, 2012; Hekker et al., 2013; Creevey et al., 2013; Huber et al., 2014, 2019; Creevey et al., 2017; Chaplin et al., 2020). Cette méthode d'estimation de la gravité de surface des étoiles est donc la plus précise actuellement, mais est difficilement applicable sur un grand nombre d'étoiles de par le manque de résolution fréquentielle, la restriction de la plage de fréquence observée (dépendant de la cadence d'acquisition des données), et le bruit dans les données photométriques menant à un faible rapport signal à bruit dans les PSD.

4.1.2 La granulation comme proxy de la gravité de surface

Depuis son entrée sur la MS, et jusqu'à la perte de son enveloppe sur la RGB, une étoile de type solaire de faible masse possède une enveloppe convective (voir Section. 2.3.1). Les mouvements convectifs de surface provoquent des variations de luminosité localisées de l'étoile à toutes les fréquences. De plus, ces mêmes

parcelles de plasma convectives sont à l'origine des modes d'oscillation acoustiques excités à la surface de l'étoile (voir Chap. 3).

4.1.2.1 Découverte de la granulation et de ses échelles caractéristiques

Trois échelles caractéristiques de granulation sont observables à la surface du Soleil : la granulation, la mesogranulation, et la super-granulation, toutes trois directement reliées à la convection de surface de l'étoile. À la surface du Soleil, la granulation a été découverte par Herschel & William (1801) et nommée plusieurs décennies plus tard par Dawes (1864). Elle est la manifestation des mouvements de convection de la zone superficielle du Soleil, caractérisée par des remontées de plasma chaud au centre de cellules appelées « granules », et une plongée du plasma froid en leur bord. Les granules qui recouvrent la surface du Soleil provoquent des variations d'intensité lumineuse locales de l'ordre de 15%. Le nombre de granules solaires est estimé à $\sim 2\,600\,000$ à chaque instant (Keenan, 1938), avec $\sim 1\,000\mathrm{km}$ de diamètre (Rieutord & Rincon, 2010), un mouvement radial de $1\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ (Title et al., 1989), et une durée de vie de $\sim 10\,\mathrm{min}$. L'agrandissement sur la figure 4.1 (panneau de droite) montre une des images de plus haute résolution de la photosphère du Soleil acquise à ce jour. Les cellules de granulations avec leur centre lumineux et leur bord plus sombre sont bien visibles. L'origine propre de la mésogranulation (découverte par November et al. (1981) avec des mesures Doppler, puis observée par November & Simon (1988)), est fortement débattue (e.g. Rast, 2003). Avec son échelle typique de $5\,000\mathrm{km}$, sa vitesse verticale de $60\mathrm{ms}^{-1}$ et sa durée de vie de 3 heures, elle pourrait être une des résultantes de la granulation (Rast, 1995; Rieutord et al., 2000; Cattaneo et al., 2001). L'origine exacte de la super-granulation associée à des échelles de plus de $20\,000\mathrm{km}$ (Hart, 1954) est elle aussi très controversée (voir par exemple la living revue de Rincon et al., 2018). Elle n'est pas associée à de fortes variations de températures, et est donc quasi-invisible en lumière visible (e.g. Beckers, 1968; Dogel', 1990). Comme elle conduit cependant d'important déplacements de la photosphère, elle est mesurable par vitesse Doppler (voir figure 4.1, panneau de gauche).

La première tentative d'observation des granules extra-solaires par Lim et al. (1998) se concentre sur l'étoile α Ori, autrement connue sous le nom de Betelgeuse. Plus récemment les données du satellite CoRoT puis *Kepler* ont permis la détection de la signature de la granulation dans la PSD des milliers d'étoiles observées (voir par exemple Kallinger & Matthews, 2010, pour les étoiles de type A observées par CoRoT).

4.1.2.2 Dépendance de la granulation à l'état évolutif des étoiles de type solaire

La granulation du Soleil a été modélisée par Harvey (1985) par une impulsion de lumière décroissant exponentiellement sur une échelle de temps τ_{gran}. Dans le spectre de puissance du Soleil, la puissance de la granulation se traduit donc par une demi Lorentzienne (appelée « profil de Harvey » lorsque $\alpha = 2$, fonction de la fréquence $\nu > 0$, voir panneau gauche de la figure 4.2) :

$$P_{\mathrm{gran}}(\nu) = \frac{4\sigma^2\tau_{\mathrm{gran}}}{1 + (2\pi\nu\tau_{\mathrm{gran}})^{\alpha}} \tag{4.4}$$

avec σ l'amplitude caractéristique de la granulation, α le paramètre positif qui caractérise la décroissance exponentielle. α est évalué à une valeur de 2 en négligeant la mesogranulation, la supergranulation, et les autres signatures aux basses fréquences résultants des régions actives (passage de taches sur la face visible de l'étoile signant la présence de rotation de surface, etc. Mathur et al., 2011b) [1]. Karoff et al. (2018) proposeront par la suite une extension de ce modèle pour tenir compte des phénomènes de plus basses fréquences.

Les propriétés de la granulation dépendent fortement de l'état évolutif de l'étoile :

1. La valeur de ce paramètre α est cependant estimée à 4 par l'étude de Kallinger et al. (2014) avec les données de *Kepler*, et à une valeur de 3.2 par l'étude de Karoff et al. (2018). Les profils régissant la granulation dans les données sont donc toujours en discussion.

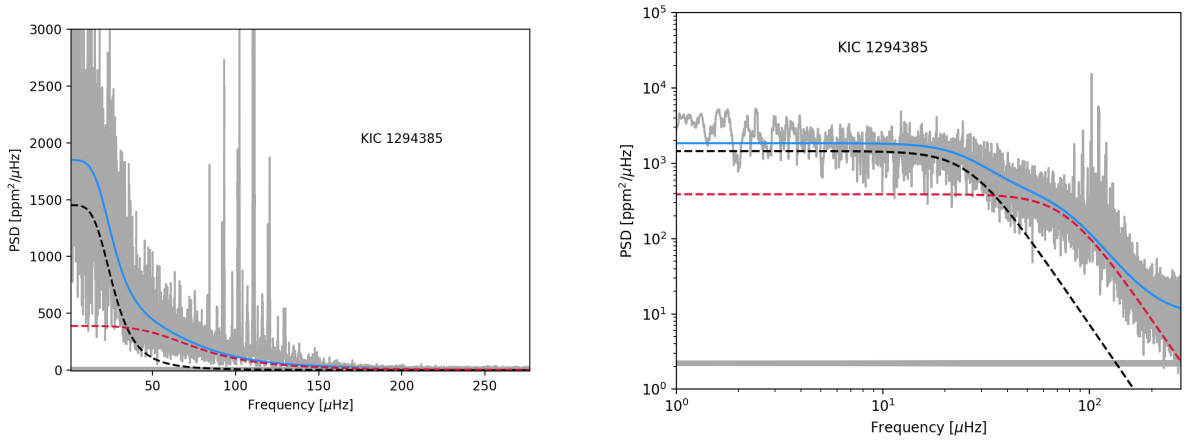


FIGURE 4.2: Spectres de densité de puissance de la géante rouge KIC 1294385 calculés à partir des données de la mission *Kepler*. *Gauche :* Spectre représenté en échelles linéaires : les profils de Harvey sont des Lorentziennes. *Droite :* Même étoile en représentation log-log, utilisée usuellement pour les méthodes astérosismiques. La courbe rouge en tirets est l'ajustement du profil de Harvey correspondant au signal de granulation de l'étoile. Le profil de Harvey en tirets noirs représente les signaux associés aux échelles de la convection. La ligne grise donne une estimation du bruit de photon lié au détecteur. La ligne bleue représente la somme des composantes des échelles de la convection pour cette étoile.

Freytag et al. (1997) montrent que la taille initiale caractéristique d'une granule est proportionnelle à l'échelle de pression dans la photosphère $H_P^{\rm surf}$:

$$l_{\rm gran} \propto H_P^{\rm surf} \propto \frac{T_{\rm eff}}{g}. \tag{4.5}$$

La vitesse du plasma dans une granule est proportionnelle à la vitesse du son $c_s \propto \sqrt{T_{\rm eff}}$: la fréquence caractéristique de la granulation s'exprime donc comme

$$\nu_{\rm gran} \propto \frac{c_s}{l_{\rm gran}} \propto \frac{g}{\sqrt{T_{\rm eff}}} \propto \nu_{\rm max}. \tag{4.6}$$

L'amplitude du signal de granulation est caractérisée par la racine carrée de la granulation intégrée dans la PSD, représentant la racine des variations de luminosité dans la série temporelle ($a_{\rm gran}$). Mathur et al. (2011a) et Kallinger et al. (2014) démontrent la dépendance de l'amplitude de la granulation à l'état évolutif :

$$a_{\rm gran} \propto \nu_{\rm max}^{-0.5}. \tag{4.7}$$

Ainsi les équations 4.6 et 4.7 nous indiquent que, lorsqu'une étoile de type solaire évolue depuis la MS jusqu'à la RGB, l'amplitude de la granulation augmente, et sa fréquence caratéristique diminue puisque $\nu_{\rm max}$ diminue. En rappelant l'équation 3.89, à la fois la fréquence caractéristique et l'amplitude de la granulation sont intrinsèquement reliées à la gravité de surface de l'étoile (e.g. Mathur et al., 2011b; Kjeldsen & Bedding, 2011) par les équations :

$$a_{\rm gran} \propto \sqrt{\frac{\sqrt{T_{\rm eff}}}{g}}, \qquad \nu_{\rm gran} \propto \frac{g}{\sqrt{T_{\rm eff}}}. \tag{4.8}$$

C'est le cas des autres signaux intrinsèquement reliés aux propriétés de la convection, comme les modes d'oscillation, ou bien la supergranulation. Kallinger et al. (2014) montre par une étude statistique qu'en moyenne l'utilisation de deux demi-lorentziennes (équation 4.4 avec $\alpha = 4$) pour reproduire la puissance

spectrale convective de l'étoile dans la PSD est le motif le plus adapté (voir figure 4.2). À très basse fréquence, il faut également prendre en compte une pente due au magnétisme de l'étoile et les signaux de rotation, mais ces composantes sont filtrées dans les données de *Kepler* que nous utilisons dans ce chapitre (voir section 4.2.3).

En ajustant les profils de Harvey correspondant au signal convectif d'une étoile (voir figure 4.2 panneau droit), nous pouvons donc estimer la gravité de surface des étoiles. Cependant, l'ajustement du profil du signal convectif est facilité par une première estimation astérosismique de $\nu_{\rm max}$ (e.g. Mathur et al., 2011b). Sans astérosismologie il est plus difficile d'ajuster avec certitude un profil de granulation pour en extraire la gravité de surface de l'étoile. De plus, l'ajustement du profil de convection nécessite de nombreux paramètres libres (voir Mathur et al., 2011b; Kallinger et al., 2014; Corsaro et al., 2017, pour plus de détails). Pour ces raisons, nous nous attachons à mettre en place des nouvelles méthode d'analyse de la convection plus efficaces en temps de calcul et applicables à un plus grand nombre d'étoiles. Dans ce cadre, les études Bastien et al. (2013) et Bastien et al. (2016) présentent la métrique « Flicker » pour l'estimation de $\log g$ des étoiles naines de faible masse.

4.1.3 La métrique Flicker et son domaine d'applicabilité

Les mesures précises (spectroscopiques ou bien astérosismiques) de $\log g$ ne sont disponibles que pour un échantillon restreint d'étoiles. En effet, la spectroscopie de haute résolution n'est disponible que sur quelques $\sim 20\,000$ étoiles parmi les $\sim 190\,000$ étoiles en général peu brillantes observées par *Kepler* ($\mathrm{K_p} \gtrsim 6$), et l'astérosismologie est souvent restreinte en grande majorité aux géantes rouges, à cause de contraintes instrumentales liées au temps d'observation et à la cadence d'acquisition des données (voir Chap. 1). En revanche, une photométrie de haute résolution est disponible grâce au satellite *Kepler* pour près de $190,000$ étoiles. Les variations de leur luminosité dues à la convection de surface peuvent donc être mesurées dans la courbe de lumière. Bastien et al. (2013) propose une métrique nommée « Flicker » qui vise à établir une relation empirique entre la gravité de surface et la variabilité contenue dans la courbe de lumière sur des échelles de temps plus courtes que 8 heures (F_8). En calibrant la métrique grâce à des estimations de gravité de surfaces astérosismiques précises, la gravité de surface peut être déduite de la mesure de F_8 pour les étoiles ne disposant pas de siganux sismiques. La figure 4.3 montre le résultats de l'étude de Bastien et al. (2013) pour la relation empirique entre F_8 et $\log g$. La relation à jour estimée par Bastien et al. (2016) pour les étoiles entre la MS et la RGB est :

$$\log g = \log_{10}(g) = 1.3724221 - 3.5002686\log_{10}(F_8) - 1.6838185\log^2_{10}(F_8) - 0.37909094\log^3_{10}(F_8). \quad (4.9)$$

La limite empirique de 8 heures est choisie car elle correspond en moyenne au meilleur seuil pour la corrélation de la gravité de surface avec la valeur du Flicker mesurée pour les étoiles de faible masse sur la séquence principale (Bastien et al., 2016). Cela permet de filtrer les signatures des processus astrophysiques de plus longue période qui ne sont pas liés à la convection de surface.

En revanche, ce seuil à 8 heures contraint le domaine d'applicabilité du Flicker. Pour les étoiles de type solaire évoluées, la granulation a lieu à basse fréquence : la période caractéristique de la granulation dépasse la limite de 8 heures pour les étoiles évoluées ($\log g \lesssim 2.7$ dex). La signature sismique des modes d'oscillation des étoiles devient le signal dominant dans la fenêtre de mesure de Flicker : la valeur estimée est beaucoup plus faible que celle attendue pour la granulation, et n'a plus la même signification physique que pour les étoiles de la MS. Il y a donc une dégénérescence de la valeur du Flicker, les étoiles de la RGB pouvant être confondues avec des étoiles de type solaire plus jeunes (voir Bastien et al., 2016). De la même façon, les étoiles pulsantes qui ne sont pas de type solaire (voir les différents types de pulsateurs classiques qui seront présentés au chapitre 5) peuvent avoir les signaux associés à leurs oscillations dans la plage de mesure du Flicker, biaisant l'estimation de la gravité de surface. Pour éviter la mauvaise estimation de la gravité de surface des étoiles, la méthode du Flicker définie comme telle dans Bastien et al. (2013) est donc en pratique restreinte aux étoiles de la MS

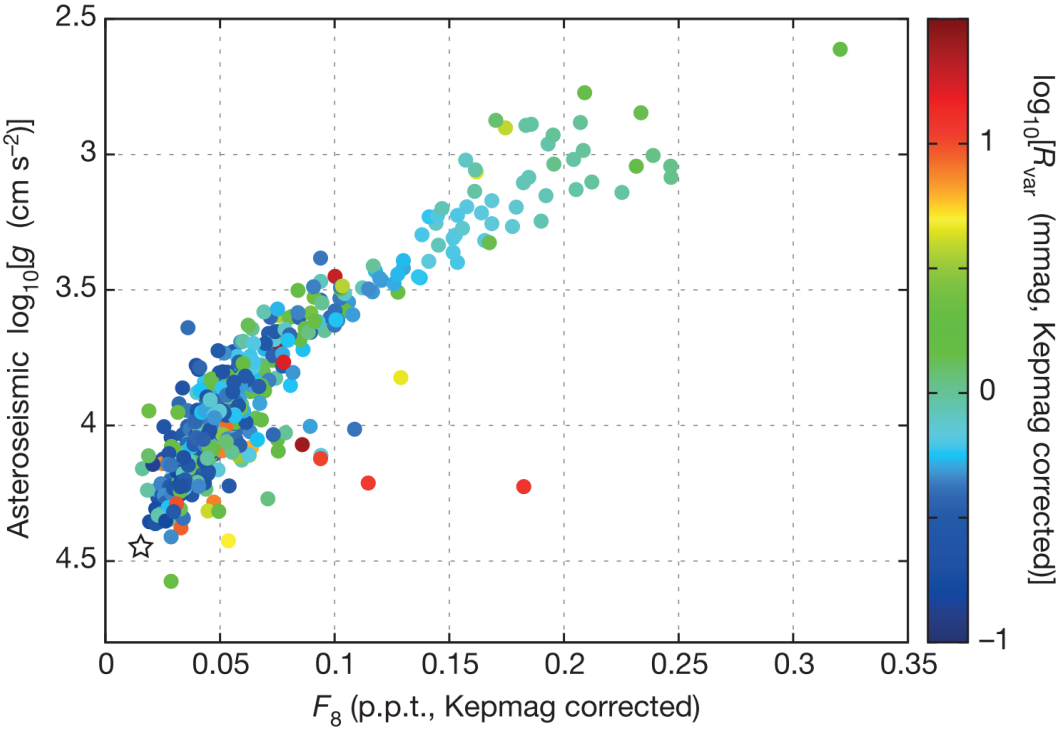


FIGURE 4.3: Corrélation entre le Flicker (F_8) et la gravité de surface estimée par astérosismologie. Le code couleur correspond à la plage sur laquelle varie la luminosité. L'étoile blanche désigne la position du Soleil dans le diagramme. Crédits : Bastien et al. (2013).

et aux SG. Dans Bastien et al. (2016) la plage d'applicabilité de Flicker est étendue jusqu'à ~ 2.2 dex (milieu de la RGB), mais avec une perte de précision sur l'estimation.

La précision sur la mesure de la gravité de surface par le Flicker est de l'ordre de $0.1-0.2$ dex. Cela correspond à entre ~ 2 et $\sim 8\%$ d'incertitude sur g pour les étoiles naines de faible masse, similaire à l'incertitude associée à la spectroscopie (voir Sect. 4.1.1). Le Flicker est d'une efficacité remarquable pour l'estimation de la gravité de surface des étoiles de la MS pour lesquelles les observations sismiques ne permettent pas la visualisation des modes d'oscillation (cadence d'acquisition des données trop grande, voir Chap. 1). En revanche, l'applicabilité du Flicker aux étoiles de la RGB est compromise à cause de la dégénérescence des valeurs du Flicker des RG avec celles des étoiles de la MS. De plus, toute pollution de la courbe de lumière avec une période de moins de 8 heures biaise la métrique et l'estimation de la gravité de surface.

4.2 FliPer : une nouvelle métrique pour l'estimation de la gravité de surface des étoiles de faible masse

4.2.1 Évolution de la PSD d'une étoile de type solaire au long de l'évolution

Nous avons montré durant la section 4.1.2.2 que les signatures des phénomènes convectifs dans la PSD évoluent avec l'état évolutif des étoiles de type solaire :

- La puissance associée aux échelles de convection se déplace vers les basses fréquences et gagne en amplitude lorsque l'étoile évolue entre la MS et la RGB.

Chaque autre signal composant la PSD est modifié selon l'état évolutif d'une étoile de type solaire (voir figure 4.4). Depuis la séquence principale vers la RGB :

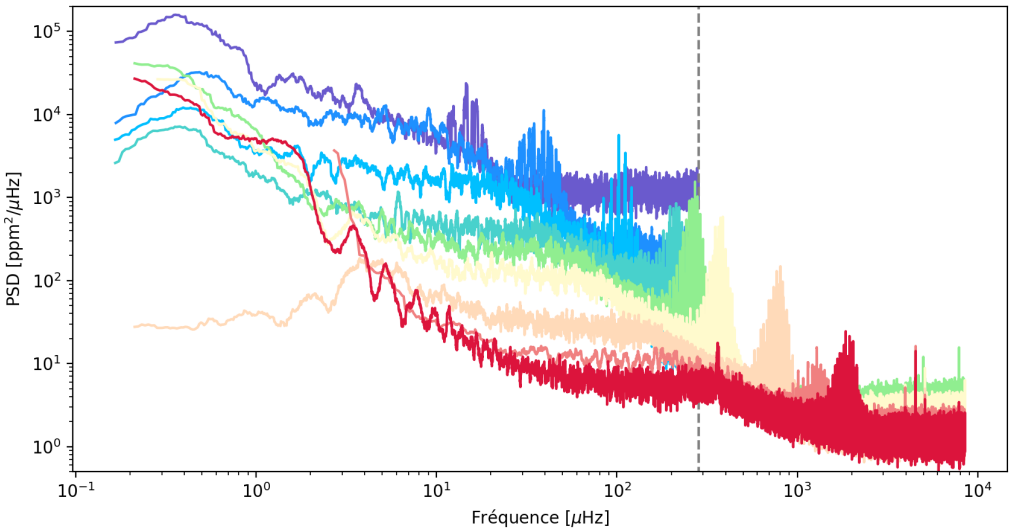


FIGURE 4.4: Évolution de la PSD en fonction de l'état évolutif des étoiles. L'évolution a lieu entre la phase de MS et la RGB du rouge au bleu. La ligne pointillée grise représente la limite des PSD acquises avec le mode d'observation en LC de *Kepler*.

- L'expansion de l'enveloppe de l'étoile durant son évolution conduit à la fois à l'agrandissement des cellules de convection et à l'agrandissement des cavités résonnantes des modes d'oscillation. Finalement, il sont excités et résonnent à des fréquences de plus en plus basses lorsque l'étoile évolue (voir figure 4.4, (e.g. Mathur et al., 2011a)).
- La signature rotationnelle de surface est également décalée vers les basses fréquences puisque l'expansion de l'enveloppe conduit à son ralentissement par conservation du moment cinétique. Avec la résolution fréquentielle disponible dans les données, les signaux de rotation à basses fréquences sont intrinsèquement plus difficiles à détecter. De plus, ils sont rarement détectés dans les étoiles au-delà de la MS à cause de leur baisse d'activité (bien que ce soit tout de même possible pour certaines, e.g. Ceillier et al., 2017). En général, les signaux de rotation sont plus facilement détectés pour les étoiles de la MS seulement (e.g. Barnes, 2003; García et al., 2014a; McQuillan et al., 2014; Santos et al., 2019).

Ainsi, nous avons vu que les signaux dominants que sont la convection et les oscillations évoluent de manière consistante dans la PSD avec l'évolution de l'étoile, vers les basses fréquences et grandes amplitudes entre la MS et la RGB. La tendance évolutive s'inverse lorsque l'étoile retombe dans le Clump, puis reprend durant la AGB. Le contenu général du spectre de puissance dépend donc de l'état évolutif de l'étoile de type solaire, ce qui rend la PSD un outil très précieux pour contraindre l'âge de l'étoile.

Pour pallier à la restriction du Flicker en état évolutif, nous avons développé la méthode FliPer. Le sigle FliPer correspond à « Flicker adapté au domaine des Puissances ». En effet, comme détaillée ci-après, la méthodologie du FliPer repose sur l'étude du scintillement convectif à partir des PSD des étoiles plutôt que de leur courbe de lumière.

Nous mentionnons également qu'une étude menée de façon contemporaine à la notre par Pande et al. (2018) adapte la loi 4.9 du Flicker au domaine de la densité de puissance :

$$\log \nu_{\rm max}\,[\mu{\rm Hz}] = 0.4861 \log P_{\rm gran}\,[{\rm ppm}^2/\mu{\rm Hz}] - T_{\rm eff}\,[11022K] + 4.197, \tag{4.10}$$

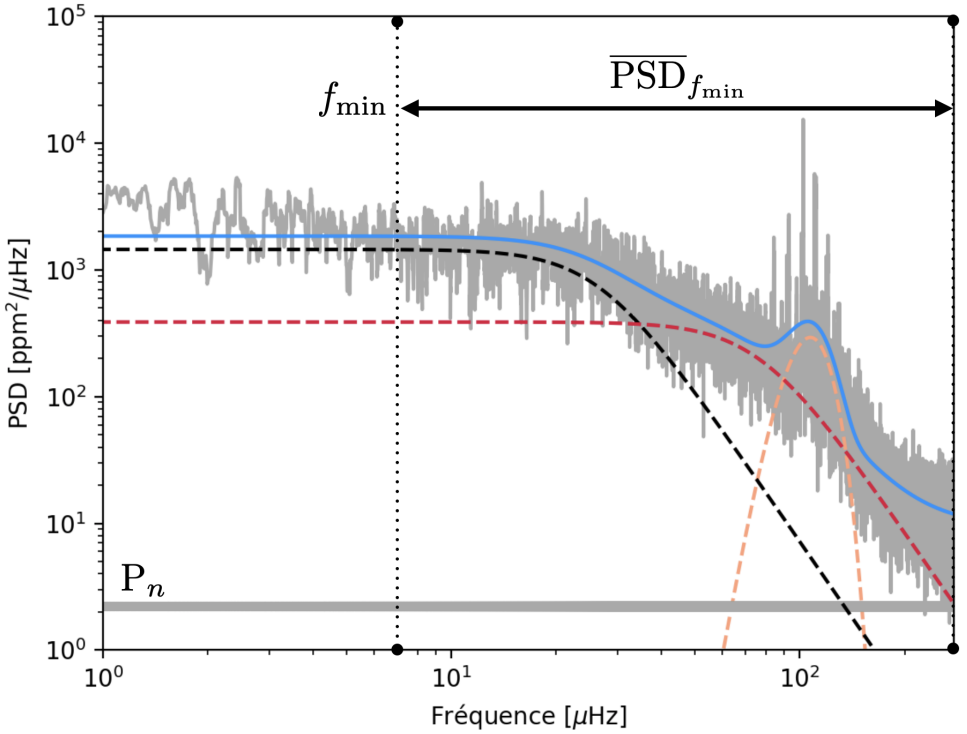


FIGURE 4.5: Définition du paramètre FliPer à partir du spectre de densité de puissance de la géante rouge KIC 1294385 observée par *Kepler*. FliPer défini dans l'équation 4.12 utilise le bruit de photon P_n représenté par le trait gris à ~ 2 ppm$^2/\mu$Hz, et la valeur moyenne ($\overline{\rm PSD}_{f_{\rm min}}$) calculée entre une fréquence minimale $f_{\rm min}$ à définir et la fréquence de Nyquist. FliPer contient donc les signatures de la convection (lignes pointillées noire et rouge représentant respectivement la supergranulation et la granulation), et des modes d'oscillation (modélisés par la gaussienne orange). La ligne bleue est la résultante de toutes les contributions.

avec $P_{\rm gran}$ une mesure de la granulation dans la PSD. *Finalement, les résultats sur l'estimation de $\log g$ d'environ $15,000$ étoiles ont une incertitude d'environ 0.5 dex, que nous montrerons bien supérieure à celle obtenue avec notre méthodologie du FliPer.*

4.2.2 Définition et évaluation des paramètres FliPer

Dans la section 4.1.2.2 nous expliquons que l'intensité des variations de luminosité dues à la convection dans la série temporelle, reliée à $\log g$, se traduit dans la PSD par l'amplitude du signal convectif intégré. Pour établir une méthode de mesure de la gravité de surface des étoiles à partir de leur signaux de convection, la méthode FliPer repose sur une mesure directe de la puissance moyenne contenue dans la PSD ($\overline{\rm PSD}_{f_{\rm min}}$) :

$$\overline{\rm PSD}_{f_{\rm min}} = \frac{1}{f_{\rm Nyq} - f_{\rm min}} \times \sum_{f=f_{\rm min}}^{f_{\rm Nyq}} {\rm PSD}(f). \tag{4.11}$$

Afin de normaliser la mesure, le bruit de photon (P_n) dépendant de la magnitude de l'étoile et du détecteur est retiré (voir figure 4.5). Finalement, FliPer est défini en fonction de la fréquence minimale $f_{\rm min}$ comme :

$$\mathrm{F}_{\mathrm{p,f_{min}}} = \overline{\rm PSD}_{f_{\rm min}} - \mathrm{P}_n. \tag{4.12}$$

4.2.3 Données utilisées

La mission *Kepler* nous permet d'obtenir les PSD avec la plus grande résolution fréquentielle à ce jour, grâce à sa longue durée d'observation de ~ 4 ans du même champ fixe. Notre étude s'appuie sur les données acquises avec le mode en *Long Cadence* (LC), correspondant à une acquisition toutes les 29.4 minutes. Ce mode d'acquisition a été utilisé pour l'observation de la grande majorité des $\sim 200,000$ étoiles observées lors de la mission *Kepler*. Les PSD utilisées s'étendent donc de $f_{\rm min} \simeq 7.0$nHz à $f_{\rm Nyq} \simeq 283.45$ μHz (voir la limite correspondante sur les PSD de la figure 4.4), permettant de visualiser :

- Les échelles de la convection pour toutes les étoiles de type solaire.
- Les modes d'oscillation (si présents dans le spectre) pour les étoiles depuis la MS et jusqu'aux phases géantes avancées (voir figure 4.4). En revanche, les modes d'oscillation des étoiles de la MS et SG, se trouvant à une fréquence plus haute que la fréquence de Nyquist, ne sont pas visibles dans la PSD calculée avec les données LC. Ils ne participent donc pas à l'estimation de la valeur du FliPer dans notre étude. Ces modes ayant une très faible amplitude en comparaison de l'amplitude moyenne de la granulation pour les étoiles naines (voir figure 1.9 de l'introduction, ainsi que la section 6.5 pour une estimation de la visibilité des modes), leur absence dans le calcul de FliPer ne biaise pas significativement la valeur.
- Les harmoniques de la rotation (si présentes) pour les étoiles de la MS, SG, et RG (voir paragraphe 4.2.1).

Nous utilisons dans ce chapitre un échantillon de $\sim 15,000$ étoiles entre la MS et la AGB présentant des oscillations de type solaire, et dont les paramètres sismiques globaux $\nu_{\rm max}$ et $\Delta\nu$ ont été estimés sismiquement par le pipeline A2Z (Mathur et al., 2010).

Avec cet échantillon, la région autour de $\log g \simeq 3.5$ est très faiblement peuplée (voir diagramme 4.6). Cette valeur caractéristique de gravité de surface correspond à l'état évolutif des sous-géantes, pour lesquelles nous n'avons que très peu de mesures sismiques par la mission Kepler. Cela devrait être améliorer lors de la calibration à venir de la méthode FliPer pour les données du satellite TESS.

À partir de l'équation 4.1 et de la relation d'échelle 3.89, $\log g$ peut être traduit sismiquement en fonction du paramètre sismique global $\nu_{\rm max}$ et de la $T_{\rm eff}$ par :

$$\log g = \log_{10}\left(\mathrm{g}_\odot \frac{\nu_{\rm max}}{\nu_{\rm max\odot}} \left(\frac{T_{\rm eff}}{\mathrm{T_{eff\odot}}}\right)^{0.5}\right) = \log_{10}\left(\mathrm{G}\frac{\mathrm{M}_\odot}{\mathrm{R}_\odot^2} \frac{\nu_{\rm max}}{\nu_{\rm max\odot}} \left(\frac{T_{\rm eff}}{\mathrm{T_{eff\odot}}}\right)^{0.5}\right). \tag{4.13}$$

Ces étoiles sont répertoriées parmi celles de Mathur et al. (2017). Leurs paramètres physiques s'étendent sur les plages : $0.1 < \log g < 3.4$ dex, $3285\mathrm{K} < T_{\rm eff} < 7411\mathrm{K}$. À cet échantillon d'étoiles évoluées s'ajoutent 254 étoiles appartenant à la MS, avec $4951\mathrm{K} < T_{\rm eff} < 6881$, et atteignant $\log g \approx 4.5$ dex. Elles ont été observées par *Kepler* avec le mode d'observation Short Cadence (SC, un point toutes les minutes), permettant une estimation de leurs paramètres sismiques et de la gravité de surface par A2Z. Le FliPer est en revanche toujours calculé à partir des données LC par soucis d'homogénéité.

4.2.4 Limitation de $f_{\rm min}$

Dans la courbe de lumière LC utilisée pour calculer la PSD sont présents des signaux non-astrophysiques de basse fréquence, comme par exemple la modulation associée au repositionnement de *Kepler* tous les ~ 33.5 jours ($\Leftrightarrow$ 0.35 μHz, pour transmettre les données sur Terre), la réorientation du satellite tous les ~ 83.5 jours ($\Leftrightarrow$ 0.14 μHz, pour maintenir le champ d'observation constant, Haas et al. (2010)), et le temps pour la satellite pour faire un tour autour du Soleil de ~ 380 jours ($\Leftrightarrow$ 30 nHz). Ces signaux sont retirés des données grâce à un filtrage à basse fréquence de la courbe de lumière avant le calcul de la PSD. Finalement, les données sont filtrées à 20, 55 ou bien 80 jours, limitant la fréquence minimale à laquelle le FliPer peut être calculé à respectivement $\sim 0.7, 0.3$ et 0.2 μHz (Nous nous référons à la méhode de García et al., 2011a, pour la

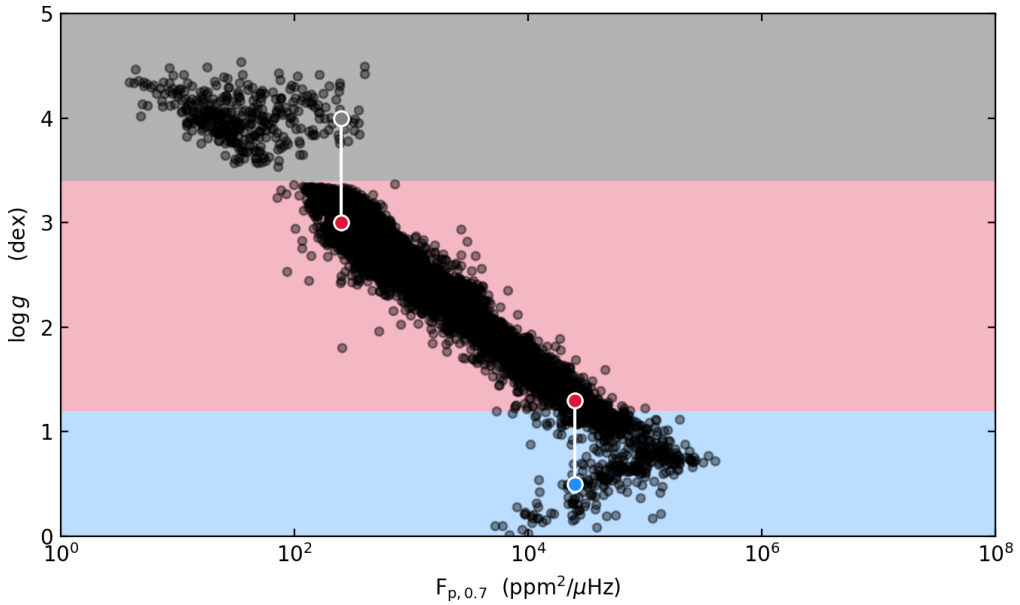


FIGURE 4.6: $\log g$ astérosismiques estimés par le pipeline A2Z (Mathur et al., 2010) pour $\sim 15,000$ étoiles observées en LC par la mission *Kepler*, en fonction des paramètres FliPer calculés à partir de 0.7 μHz (points noirs, voir Eq. 4.12). La région grise correspond aux étoiles de la séquence principale, la région rouge indique les étoiles sur la RGB ainsi que celles du RC. Enfin, la région bleue délimite empiriquement les étoiles très lumineuses en fin de RGB et les étoiles également très lumineuses de la AGB, qui ne sont pas correctement traitées avec le filtre à 20 jours utilisé pour retirer les signaux non-astrophysiques.

calibration et le choix du filtrage des données *Kepler* utilisées). Les données représentées sur la figure 4.6 sont donc par exemple calibrées par le filtrage de tous les signaux ayant des prédiocités au-delà de 20 jours.

4.2.5 Estimation du bruit de photon P_n

L'écart type (σ) du flux lumineux dans la série temporelle lorsqu'il n'y a pas de signaux astrophysiques, préalablement normalisée et aplanie, représente la précision photométrique du détecteur. La précision minimale pour les données LC de *Kepler* a été estimée empiriquement par Jenkins et al. (2010) à partir des données du premier quarter de la mission. L'équation 4.14, reporte la relation empirique de Jenkins et al. (2010) entre la précision minimale des données photométriques et la magnitude *Kepler* (K_p [2]) de l'étoile :

$$\sigma = \frac{\sqrt{c + 7 \times 10^6 \times \max(1, K_p/14)^4}}{c}, \tag{4.14}$$

avec $c = 3.46 \times 10^{0.4(12-K_p)+8}$ le nombre d'électrons détectés par acquisition LC. σ s'exprime en amplitude de flux normalisée, qui peut être convertie en ppm par $\sigma_{\rm ppm} = \sigma \times 10^6$. L'estimation du bruit de photon en ppm^2/μHz peut donc être traduit par :

$$P_n = \frac{\sigma^2_{\rm ppm}}{f_{\rm Nyq,[\mu Hz]}}. \tag{4.15}$$

2. K_p est définie comme la mesure de l'intensité lumineuse de la source à travers la bande photométrique large $(420 - 900$ nm) du détecteur de *Kepler*

Bien qu'étant construite sur les données du premier quarter seulement, nous utilisons cette métrique pour le calcul du bruit de photon P_n lors de l'estimation des paramètres FliPer pour les étoiles observées en LC par *Kepler*.

4.2.6 Estimation de FliPer pour $f_{\rm min} = 0.7$ μHz

Afin que les signaux non-astrophysiques ne biaisent pas la mesure du FliPer, nous utilisons dans cette première section d'analyse une valeur de $f_{\rm min}$ de 0.7 μHz correspondant à des données filtrées à 20 jours. Nous calculons la valeur $\mathrm{F_{p,0.7}}$ selon l'équation 4.12 pour notre échantillon de $\sim 15,000$ étoiles observées en LC par *Kepler*. Pour ces étoiles, une valeur astérosismique de $\nu_{\rm max}$ est estimée par A2Z (Mathur et al., 2010), puis convertie en $\log g$ par l'expression 4.3.

La figure 4.6 représente la relation entre le $\log g$ astérosismique et $\mathrm{F_{p,0.7}}$, depuis la MS (zone en rouge) jusqu'à la phase AGB. Nous constatons au premier ordre une nette dépendance de la gravité de surface au FliPer très similaire à la corrélation obtenue par Bastien et al. (2013) avec le Flicker. Les étoiles de la RGB et du RC s'alignent au premier ordre sur une droite en fonction du FliPer. Cependant, nous observons une dégénérescence de la valeur du FliPer entre la MS et la RGB, et également entre la les géantes jeunes de la RGB et celles très lumineuses en haut de la RGB et de la phase AGB, comme désigné par les lignes blanches verticales sur la figure 4.6. Ce diagramme est très similaire à la calibration du Flicker représentée sur la figure 4.3 (avec l'axe des ordonnées cependant inversé).

- La dégénérescence entre les FliPer de certaines étoiles de la MS avec celles de la RGB provient de la pollution du signal convectif par les harmoniques de la rotation des étoiles de la MS. En effet, la signature rotationnelle a lieu à basse fréquence et avec une forte amplitude dans la PSD : les étoiles de la MS qui présentent une signature rotationnelle ont un $\mathrm{F_{p,0.7}}$ anormalement élevé, pouvant atteindre les valeurs typiques d'une étoile de la RGB.
- La dégénérescence entre les FliPer des étoiles RG très lumineuses (appartenant à la région bleue sur la figure 4.6) et les FliPer de celles de la RGB (région rouge) provient de la puissance des modes d'oscillation des étoiles. Lorsque l'étoile évolue, la fréquence moyenne des modes d'oscillation diminue : pour les étoiles évoluées comme les étoiles au sommet de la branche des géantes rouges ou bien durant la phase asymptotique des géantes, les modes d'oscillation et la majorité du signal de la convection sont à plus basse fréquence que $f_{\rm min} = 0.7\mu$Hz. Leur puissance d'une grande amplitude n'entre plus dans le calcul de FliPer, qui se voit artificiellement diminué vers des valeurs caractéristiques des plus jeunes géantes rouges.

Ces deux dégénérescences dépendent grandement de la fréquence $f_{\rm min}$ choisie : sur la figure 4.7 nous représentons les mêmes étoiles que sur la figure 4.6 en variant $f_{\rm min} \in [0.2,$ 7, 20 et $50]$ μHz. Comme expliqué dans le paragraphe précédent, les étoiles les plus jeunes ont une relation $\log g$/FliPer dégénérée lorsque le FliPer est calculé à partir d'une basse fréquence, comme c'est le cas à partir de $f_{\rm min} = 0.2$ μHz. Lorsque l'on augmente $f_{\rm min}$, la dégénérescence du FliPer des étoiles de la MS avec la RGB disparaît, laissant place à la dégénérescence entre les géantes très lumineuses et les géantes moins évoluées de la RGB (voir les cas $f_{\rm min}$=7, 20 et 50 μHz sur la figure 4.7).

4.2.7 Premiers résultats

Afin d'assurer une estimation de $\log g$ pour les étoiles depuis la MS jusqu'à la phase AGB, ces deux dégénérescences doivent être levées. Une solution est d'utiliser des valeurs de FliPer différentes en fonction de l'état évolutif des étoiles. La figure 4.8 représente les mêmes étoiles que sur les figures 4.6 et 4.7, avec la valeur du FliPer ajustée dans chaque région évolutive (resp. grise, rouge et bleue) à resp. 7, 0.7 et 0.2 μHz. Par cet artifice nous levons les dégénérescences de FliPer à l'état évolutif de l'étoile. Nous proposons une calibration de la métrique FliPer par le calcul de moyennes locales le long de l'évolution. Pour les étoiles de la MS, et pour les

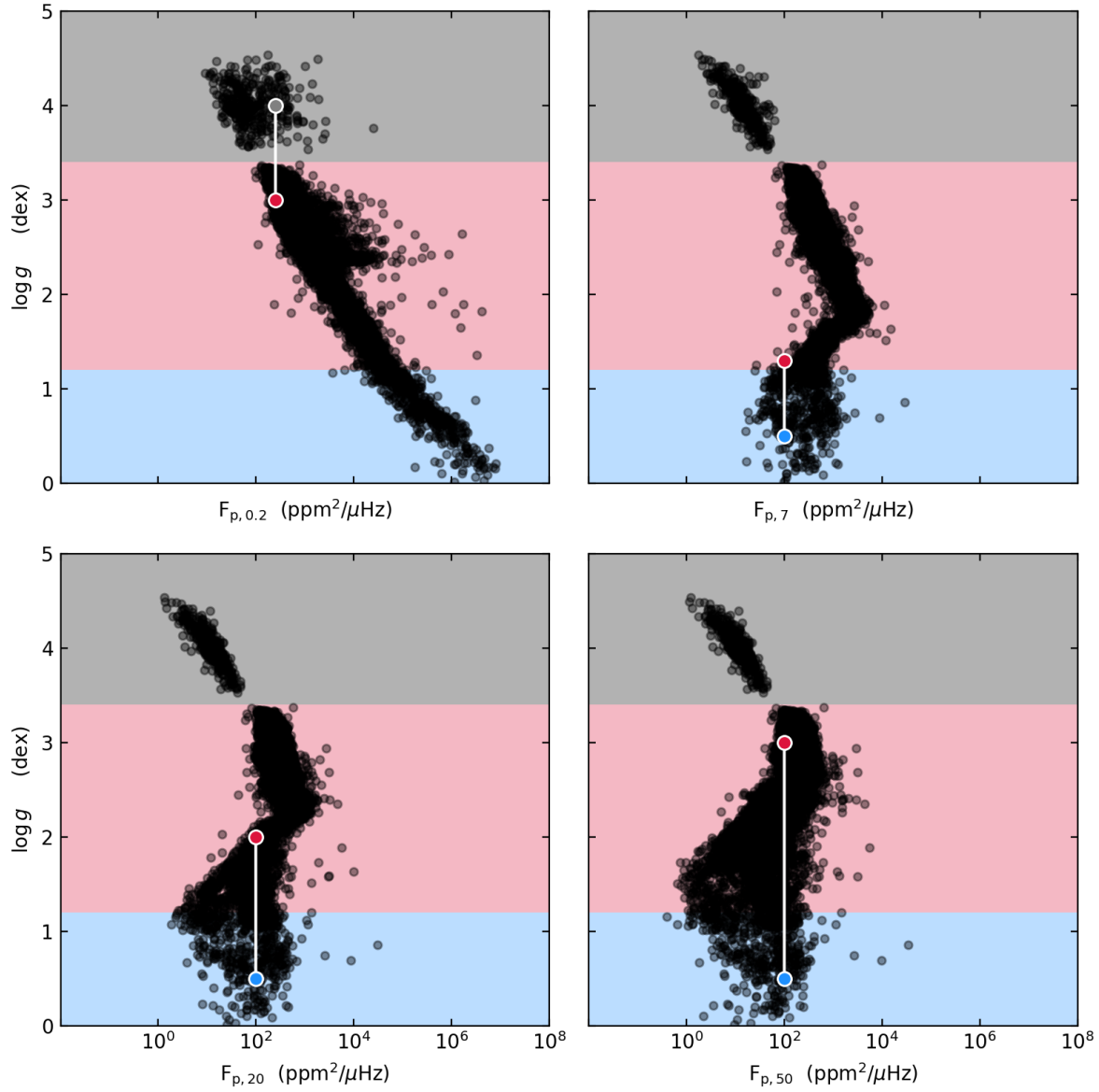


FIGURE 4.7: Même légende que celle de la figure 4.6 pour chacun des panneaux, avec $\mathrm{F_p}$ calculé à partir de $f_{\mathrm{min}=0.2,7,20}$ et 50μHz.

géantes très lumineuses, la moyenne est calculée par regroupement de 30 étoiles, avec un point représenté toutes les 30 étoiles. Pour la RGB beaucoup plus peuplée dans notre échantillon la moyenne est calculée toutes les 300 étoiles. Ces moyennes sont représentées par les diamants blancs sur la figure 4.8, avec les écarts types correspondants délimités par la zone blanche. La relation $\log g$/FliPer fournie empiriquement par ces moyennes est bijective, pour peu de connaître *a priori* l'état évolutif des étoiles. En effet, si l'état évolutif de l'étoile n'est pas connu au préalable, nous ne savons pas quel paramètre FliPer calculer, et nous nous ramenons au cas dégénéré de la figure 4.7. L'étalonnage de la relation $\log g$/FliPer représentée sur la figure 4.8 est donnée en Annexe dans la Table A.

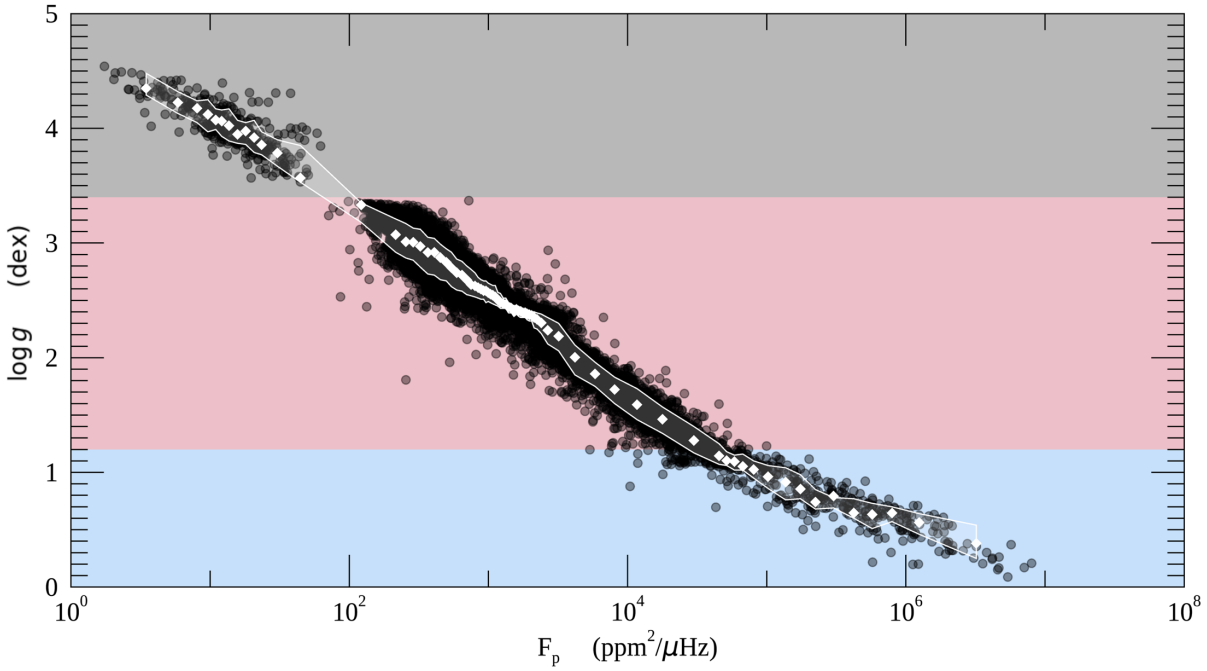


FIGURE 4.8: Mêmes étoiles que sur la figure 4.6. Les FliPer des étoiles dans la région grise (MS) ont été calculés à partir de $f_{\rm min} = 7$ μHz, ceux de la région rouge (RGB, RC) à partir de $f_{\rm min} = 0.7$ μHz, et ceux de la région bleue (RG très lumineuses) à partir de $f_{\rm min} = 0.2$ μHz. Des moyennes glissantes sont calculées (tous les 30 points pour les phases jeunes durant la MS et lorsque l'étoile est une RG très lumineuse, et tous les 300 points pour les RG). Elles sont représentées par les diamants blancs, avec leur écart type délimité par les lignes blanches.

L'incertitude obtenue sur l'estimation de $\log g$ par cette relation empirique dépend de l'état évolutif étudié, mais reste dans tous les cas très faible, de l'ordre de 0.1 dex. L'erreur commise est donc comparable à celle des mesures spectroscopiques disponibles. Elle est également comparable à l'incertitude associée à l'estimation de $\log g$ par le Flicker pour les étoiles de la MS, avec l'avantage d'une applicabilité étendue à l'estimation de $\log g$ à grande précision aux étoiles évoluées ($\log g < 2.7$ dex).

Cette méthode d'estimation de la gravité de surface repose sur la puissance moyennée dans les PSD. La résolution fréquentielle des données ne joue donc pas un rôle fondamental dans l'estimation des paramètres FliPer. Cela rend cette nouvelle métrique particulièrement intéressantes pour l'analyse des données à basse résolution comme celles des satellites K2 et TESS. Nous ne présenterons pas cependant dans ce manuscrit l'adaptation de la méthode FliPer pour ces deux missions car la version finale n'est pas encore aboutie.

4.3 Automatisation : une Forêt Aléatoire pour l'estimation de la gravité de surface

La méthodologie décrite dans la section précédente permet de tabuler les valeurs de $\log g$ en fonction des paramètres FliPer pour chaque stade évolutif (MS, RGB, RGB à grande luminosité et AGB). En revanche, elle ne permet pas d'estimer avec certitude le $\log g$ d'une étoile pour laquelle on ne connaît *a priori* pas l'état évolutif. Dans cette section, nous proposons une automatisation de la méthode FliPer reposant sur l'intelligence artificielle (IA), permettant d'estimer $\log g$ depuis la MS jusqu'à la AGB sans *a priori* sur l'état évolutif de l'étoile.

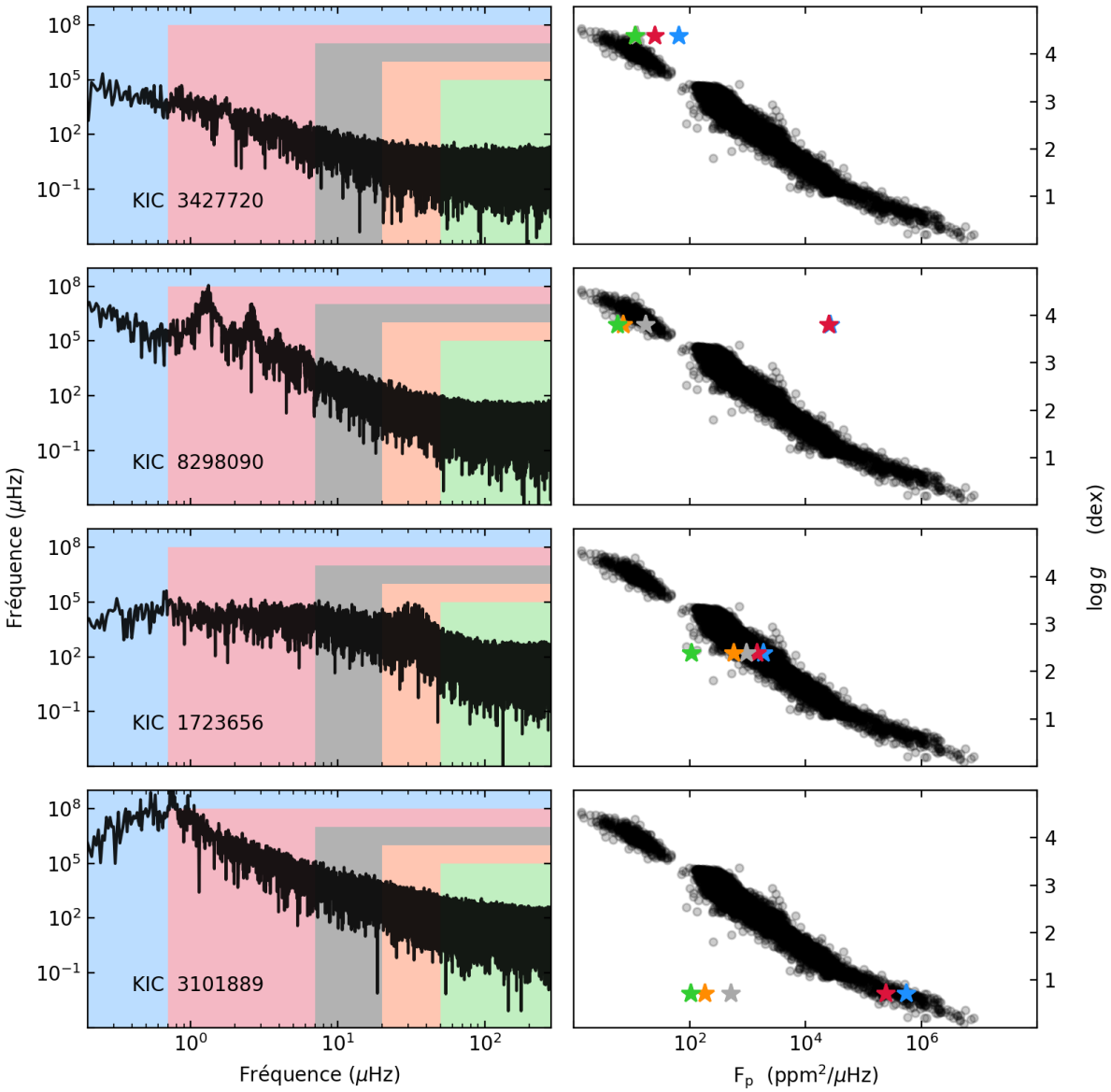


FIGURE 4.9: *Gauche :* PSD des courbes de lumière en LC de quatre étoiles observées par *Kepler*. Les plages de couleurs représentent les plages de fréquences utilisées pour le calcul des FliPer. *Droite :* Pour chacune des étoiles, les valeurs de FliPer calculées à partir de resp. 0.2, 0.7, 7, 20 et 50 μHz sont représentées resp. par les étoiles bleues, rouges, grises, oranges, et vertes, en fonction de $\log g$. Les données de la figure 4.8 sont représentées pour comparaison.

4.3.1 Vers une mesure automatisée de la gravité de surface

Pour calibrer la relation $\log g$/FliPer de la figure 4.8, une valeur de FliPer est calculée pour chaque étoile à partir de la fréquence $f_{\rm min}$ la plus adaptée, différant pour chacun des états évolutifs. En revanche, il est utile de calculer pour une même étoile plusieurs valeurs de FliPer. La figure 4.9 indique pour 4 PSD d'étoiles différentes (panneaux de gauche) la position des paramètres FliPer ($\rm F_{p,0.2}$, $\rm F_{p,0.7}$, $\rm F_{p,7}$, $\rm F_{p,20}$ et $\rm F_{p,50}$) dans le diagramme $\log g$/FliPer de la figure 4.8 (panneaux de droite). KIC 3427720 est une étoile de la MS qui ne présente pas de signal de rotation à basse fréquence, au contraire de KIC 8298090 pour laquelle des signaux de rotation sont visibles. KIC 1723656 est une RG, ayant des modes d'oscillation visibles autour de 30μHz, et KIC 3101889 est une géante rouge sur la branche asymptotique avec ses modes d'oscillation visibles à très basse fréquence.

Nous pouvons remarquer sur les panneaux de droite que pour l'étoile KIC 3427720, ainsi que pour KIC 1723656, les valeurs de FliPer calculées à partir des différents $f_{\rm min}$ sont très proches. En revanche, les signatures rotationnelles biaisent la valeur de FliPer, et créent un grand écart entre les FliPer calculés à basse fréquence et ceux à haute fréquence comme c'est le cas pour KIC 8298090. De même, la présence de modes d'oscillation de très grande amplitude à basse fréquence dans le spectre de KIC 3101889 créé de forts écarts entre les valeurs du FliPer.

Ainsi, en calculant différentes valeurs de FliPer pour chaque étoile, nous avons accès à la fois aux valeurs du FliPer et à l'écart entre ces valeurs, qui nous renseigne finalement sur la nature de l'étoile et sur de potentielles constituantes de la PSD à différentes fréquences (signatures rotationnelles, etc.). Par exemple pour KIC 8298090, la représentation des FliPer sur le panneau de droite de la figure 4.9 nous permet de confirmer que l'étoile est sur la MS, avec une pollution du signal de convection à basse fréquence qui est due pour cette étoile en particulier aux harmoniques de rotation. Manuellement, il est donc possible d'estimer le $\log g$ d'une étoile entre la MS et la AGB sans connaître à priori son état évolutif à partir de plusieurs valeurs de FliPer.

4.3.2 Introduction à l'intelligence artificielle surpervisée

Les algorithmes d'IA supervisés permettent de prédire un résultat ($\rm Y_{pred}$) à partir d'un échantillon de paramètres d'entraînement $\rm X$ de taille p. Les algorithmes supervisés doivent être entrainés : pendant cette phase d'apprentissage, l'algorithme « apprend » itérativement à prédire ($\rm Y_{pred}$) à partir de $\rm X$ en construisant une fonction *h* sur un échantillon d'objets dont le paramètre (Y) est connu par ailleurs ($\rm Y_{connu}$).

$$\rm Y_{pred} = \mathit{h}(X) \tag{4.16}$$

4.3.3 Les arbres de décision pour la régression

Les algorithmes d'arbre de décision sont des algorithmes d'IA supervisés. La méthode d'arbres de régression a été introduite parmi les méthodes « Classification And Regression Trees » (CART) par Breiman et al. (1984). Un algorithme d'arbre de décision construit un arbre binaire pendant la phase d'entraînement avec chaque « nœud » (voir disques bleus sur la figure 4.10) représentant un point de séparation sur les valeurs d'une variable d'un paramètre parmi les paramètres composant le vecteur paramètres que nous dénoterons $\rm X$. Chaque terminaison, appelée « feuille » (voir carrés sur la figure 4.10), contient une prédiction $\rm Y_{pred}$ comme la moyenne des prédictions des valeurs des données appartenant à la feuille (voir figure 4.10 panneau de droite).

À chaque nœud, un paramètre i parmi les p paramètres composant $\rm X$ est choisi. Une valeur a pour ce paramètre est également sélectionnée. Le couple $(\rm X_{\mathit{i}}, \mathit{a})$ est choisit parmi les couples $(\rm X_{\mathit{i}\in[1,\mathit{p}]}, \mathit{a} \in [\min X_{\mathit{i}}, \max X_{\mathit{i}}])$ afin de minimiser l'écart entre les prédictions $\rm Y_{pred}$ et les valeurs connues $\rm Y$ de par de l'autre du noeud (nous nous référons à l'article de (Genuer & Poggi, 2017) pour le détail du processus de division des nœuds de l'arbre). Finalement, la séparation binaire délimite les données en deux groupes :

$$\{\rm X_{\mathit{i}} \leq \mathit{a}\} \text{ et } \{\rm X_{\mathit{i}} > \mathit{a}\},$$

et l'arbre est construit de façon à minimiser la fonction coût C :

$$\rm C = \frac{1}{\mathit{N}} \times \sum_{\mathit{i}=1}^{\mathit{N}} (Y - Y_{pred}(X))^2 \ = \mathbb{E}(Y - \mathit{h}(X))^2. \tag{4.17}$$

avec N le nombre d'objets dans le set d'entraînement ($\mathcal{L}_N$) et $\mathbb{E}$ l'espérance mathématique.

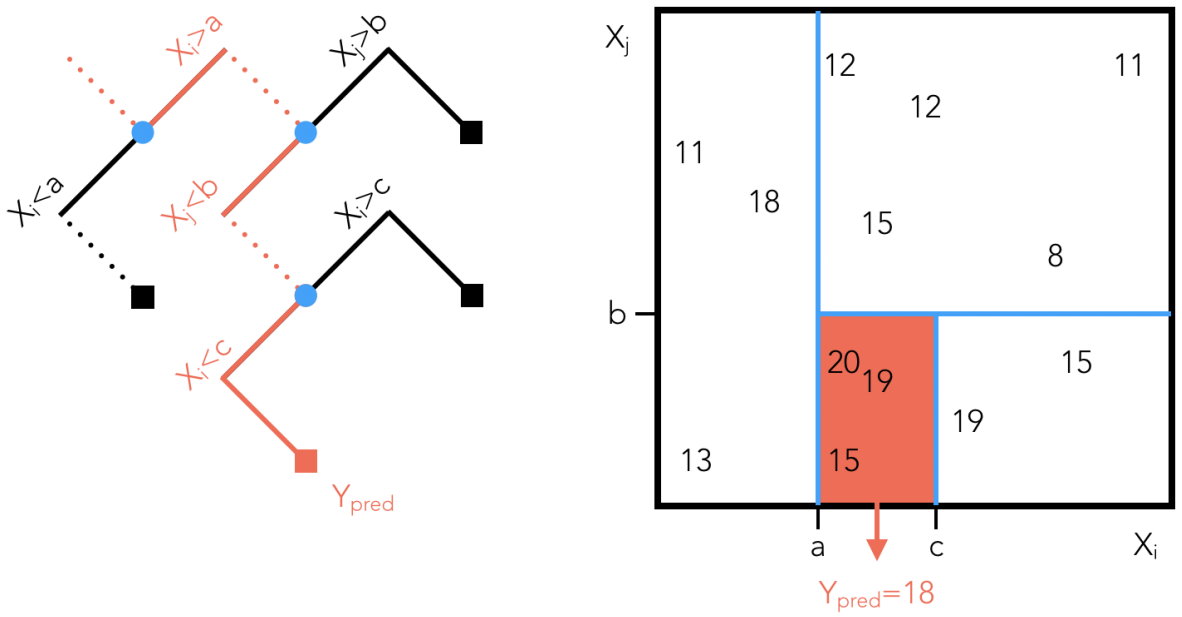


FIGURE 4.10: *Gauche :* représentation schématique d'un arbre de décision pour la régression. Les points bleus représentant les nœuds de décision, et les carrés les prédictions possibles (feuilles). Le trajet en rouge montre un trajet possible pour l'évaluation de $\mathrm{Y_{pred}}$. *Droite :* Visualisation en deux dimensions de la prédiction de $\mathrm{Y_{pred}}$ par l'arbre de décision du panneau de gauche. La prédiction du paramètre est ainsi calculée comme la moyenne des valeurs dans la dernière feuille de l'arbre, correspondant à la zone orange.

Ensuite, l'arbre entrainé est utilisé durant une phase de « test » pour prédire $\mathrm{Y_{pred}}$ sur un nouvel échantillon de données avec les paramètres X. Le trajet en rouge sur le panneau de gauche de la figure 4.10 est un exemple de trajet possible pour la prédiction une fois l'arbre entrainé.

4.3.4 Méthode d'ensemble de Forêts Aléatoires pour la régression

Une méthode d'ensemble combine les prédictions de plusieurs algorithmes indépendants, afin de rendre une prédiction moyenne plus juste que celle d'un algorithme individuel. Le régresseur « Random Forest » traduit en français par« Forêts Aléatoires » combine des arbres de décision par le processus suivant (Breiman, 2001) :

- Création aléatoire de K sous-échantillons de l'échantillon principal $\mathcal{L}_N$ d'entraînement (processus appelé « bagging »). Les échantillons obtenus sont dénommés « échantillons Bootstrap ».
- Fabrication de K arbres de régression à partir de chacun des K sous-échantillons aléatoires.

Chaque arbre est donc construit à partir de certaines données de l'échantillon d'entraînement seulement, sélectionnées aléatoirement, puis à chacun des nœuds l'algorithme considère uniquement une sélection aléatoire de m variables possibles (idée originale de Amit & Geman, 1997, par la suite adaptée pour les Forêts Aléatoires). Pour la régression, la valeur du paramètre m n'est pas déterminante pour l'entraînement. La valeur optimisant le temps de calcul est $\sim p/3$ (e.g. Genuer et al., 2008). Finalement, l'arbre construit sur chacun des échantillons Bootstrap $\mathcal{L}_N^{\Theta_k}$ est complètement aléatoire, déterminé par X et par Θ_k, vecteur aléatoire représentant tous les choix aléatoires qui ont été fait pour la construction de l'arbre $k \in [1, K]$. Une représentation schématique de l'algorithme de Forêts Aléatoires est donnée par la figure 4.11.

Finalement, l'algorithme de Random Forest construit la fonction h telle que :

$$\mathrm{Y_{pred}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} h(\mathrm{X}, \Theta_k). \tag{4.18}$$

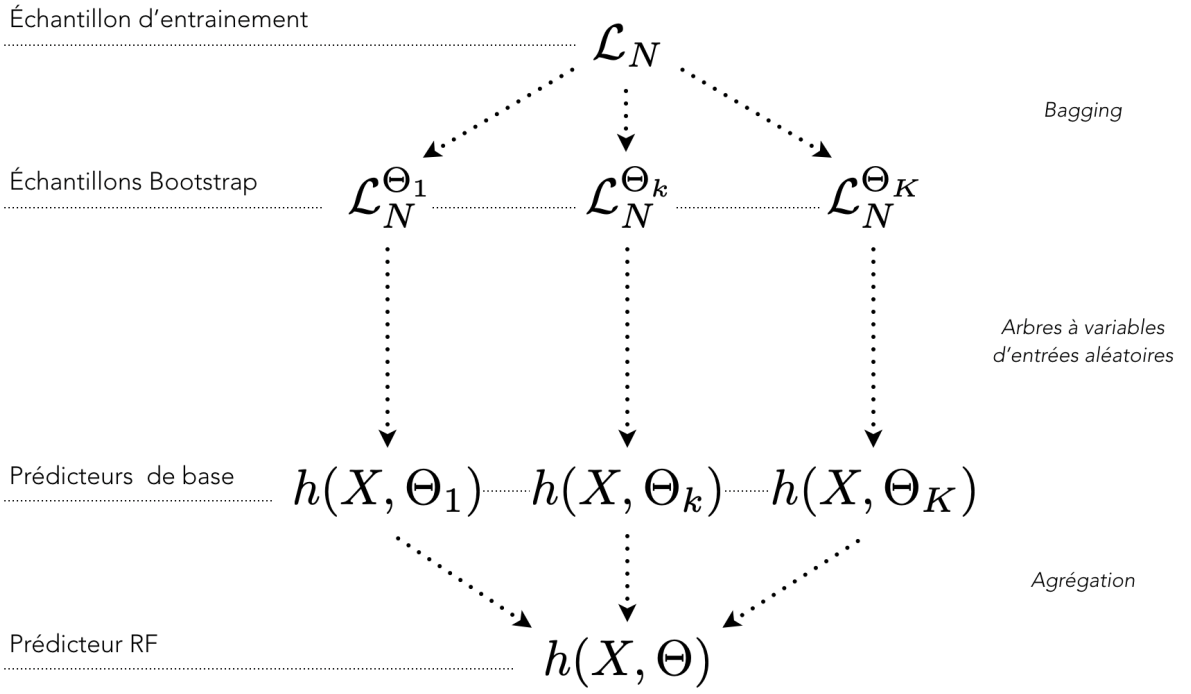


FIGURE 4.11: Représentation schématique d'un algorithme de Forêts Aléatoires.

Lorsque l'algorithme est constitué d'une forêt infinie d'arbres indépendants, l'erreur sur la prédiction s'exprime en utilisant la loi des grand nombres (d'après Breiman, 2001; Scornet et al., 2015) comme :

$$PE = \mathbb{E}_{X,Y}(\mathrm{Y} - \mathbb{E}_{\Theta}(h(\mathrm{X}, \Theta))). \tag{4.19}$$

Cette erreur est appelée « erreur de prédiction généralisée » ou « erreur de généralisation » lorsqu'elle est calculée à partir d'un nouvel échantillon d'entraînement une fois l'arbre déjà entraîné.

*Dans la suite de ce Chapitre, nous utilisons la fonction « RandomForestRegressor » appartenant à la librairie d'*IA *Python sklearn (Pedregosa et al., 2011) pour l'estimation automatique de la gravité de surface des étoiles de faible masse.*

4.4 L'algorithme FliPer pour l'estimation automatique de la gravité de surface des étoiles de faible masse

4.4.1 Paramètres X utilisés

Pour notre étude, le but est de prédire $\mathrm{Y_{pred}}=\log g$. Nous utilisons dans cette partie X=[$\mathrm{F_{p0.2}}$, $\mathrm{F_{p0.7}}$, $\mathrm{F_{p7}}$, $\mathrm{F_{p20}}$, $\mathrm{F_{p50}}$, $\mathrm{T_{eff}}$, $\mathrm{K_p}$]. Les paramètres $T_{\rm eff}$ et $\mathrm{K_p}$ sont ajoutés aux paramètres FliPer pour permettre une vérification de l'importance des paramètres FliPer lors de l'entraînement (voir Sect. 4.4.2), et également pour tenter d'améliorer améliorer les estimations. La $T_{\rm eff}$, $\mathrm{K_p}$ ainsi que le $\log g$ astérosismique proviennent du catalogue de Mathur et al. (2017). Ce groupe de paramètres peut être modifié et complété selon l'échantillon de données et le paramètre $\mathrm{Y_{pred}}$ recherché, comme ce sera le cas dans le Chapitre 5.

Afin d'estimer au mieux les performances de la méthode automatisée FliPer, nous souhaitons prendre en compte l'incertitude connue sur les paramètres composant X et Y lors de la phase de test de la méthode.

- L'incertitude sur la $T_{\rm eff}$ provient directement du catalogue de Mathur et al. (2017) et dépend de la méthode utilisée pour l'obtenir.
- L'incertitude sur les valeurs astérosismiques de $\log g$ découle de l'équation 4.13, en fonction de l'incertitude sur l'estimation astérosismique de $\nu_{\rm max}$ et de l'incertitude associée à $T_{\rm eff}$:

$$\delta \log g = \frac{1}{\ln(10)} \times \left(\frac{\delta \nu_{\rm max}}{\nu_{\rm max}} + \frac{\delta T_{\rm eff}}{2 T_{\rm eff}} \right). \tag{4.20}$$

- Nous considérons la contribution de $\rm P_n$ sur l'incertitude des paramètres FliPer négligeable devant la contribution de l'incertitude commise sur $\overline{\rm PSD}$. L'incertitude sur les paramètres FliPer est donc déterminée par l'erreur commise sur $\overline{\rm PSD}$ à cause du bruit dans le spectre. Le bruit suit une loi du χ_2 à deux degrés de liberté (χ^2_2) dans la PSD (e.g. Gilliland et al., 2011). L'incertitude sur les paramètres FliPer s'exprime donc comme :

$$\delta {\rm F_p} = \sqrt{\delta \overline{\rm PSD}^2} = \frac{\delta {\rm P_{tot}}}{\rm N_{bin}} = \frac{\sqrt{\sum_i \delta {\rm P}_i^2}}{\rm N_{bin}} \, , \tag{4.21}$$

avec $\delta {\rm P}_i$ l'erreur sur la densité de puissance contenue dans chaque élément de résolution, et $\rm N_{bin}$ le nombre total d'éléments de résolution dans la PSD entre $f_{\rm min}$ et la fréquence de Nyquist. Les $\delta {\rm P}_i$ individuels ne peuvent pas être extraits directement puisque la distribution du bruit en χ^2_2 n'a pas une erreur gaussienne. Nous utilisons donc le théorème central limite, et élargissons l'échantillonnage de la PSD par un facteur $n = 50$. La densité de puissance totale dans la PSD s'exprime alors comme :

$$ {\rm P_{tot}} = \sum_j {\rm P_{n,j}} \, , \tag{4.22}$$

avec $\rm P_{n,j}$ suivant une distribution quasi-normale avec $\rm 2n$ degrés de liberté. Cela suppose que le signal ne varie pas drastiquement sur 50 bins, ce qui est une approximation convenable à appliquer sur la PSD caractéristique d'une étoile de type solaire observée pendant une durée raisonnable de l'ordre minimal de l'année pour avoir suffisamment de points dans la PSD. L'incertitude sur la moyenne calculée sur les 50 bins s'exprime donc comme

$$\delta {\rm P_{n,j}} = 2 \times \frac{\rm P_{n,j}}{2n} \times \sqrt{n}. \tag{4.23}$$

Cela conduit à une incertitude globale sur les valeurs de FliPer s'exprimant par

$$\delta {\rm F_p} = \frac{\sqrt{\sum_j \left(2 \times \frac{\rm P_{50,j}}{2n} \times \sqrt{n} \right)^2}}{\rm N_{bin}} \, . \tag{4.24}$$

Pour introduire les incertitudes dans l'estimation automatique de $\log g$, nous simulons à partir de chaque étoile de l'échantillon de test 100 étoiles artificielles avec leurs paramètres $\rm X$ par une simulation Monte Carlo. Avec $\mathcal{G}_{0 \leq i \leq 100}$ des valeurs aléatoires suivant la loi normale, nous calculons pour les paramètres $\rm F_{p_{0.2}}$, $\rm F_{p_{0.7}}$, $\rm F_{p_7}$, $\rm F_{p_{20}}$, $\rm F_{p_{50}}$, $\rm T_{eff}$ et $\log g$ 100 nouvelles valeurs $\rm X_{0 \leq i \leq 100}$ suivant :

$$ {\rm X}_{0 \leq i \leq 100} = {\rm X} + \delta {\rm X} \times \mathcal{G}_{0 \leq i \leq 100}, \tag{4.25}$$

avec $\delta \rm X$ correspondant aux incertitudes associées aux différents paramètres X que nous venons d'exprimer. Le paramètre $X = \rm K_p$ reste constant et complète chacun des échantillons de 100 nouvelles étoiles artificielles puisqu'il ne possède pas d'incertitude associée.

Chaque nouvelle étoile artificielle appartenant à un tirage de 100 valeurs pour chaque étoile originale est par la suite considérée comme une étoile individuelle pour tester l'algorithme.

4.4.2 Étape d'entraînement

La quantité de données utilisée pour l'entraînement est le premier paramètre clef pour l'optimisation de l'algorithme : plus l'entraînement a lieu sur un échantillon conséquent et représentatif de l'ensemble des données, meilleur est l'apprentissage. Nous souhaitons entraîner un algorithme capable d'estimer le paramètre $\log g$ des étoiles observées par *Kepler* pour lesquelles la mesure de $\log g$ est imprécise ou bien même inexistante. Ces étoiles ne font pas partie de notre échantillon de $\sim 15,000$ étoiles, nous choisissons donc d'utiliser la majeure partie de l'échantillon bien caractérisé sismiquement pour l'entraînement. Nous utilisons 80% des étoiles de l'échantillon pour entraîner l'algorithme, et les 20% restantes seront utilisées ultérieurement pour tester l'entraînement réalisé, en prenant en compte les incertitudes δX.

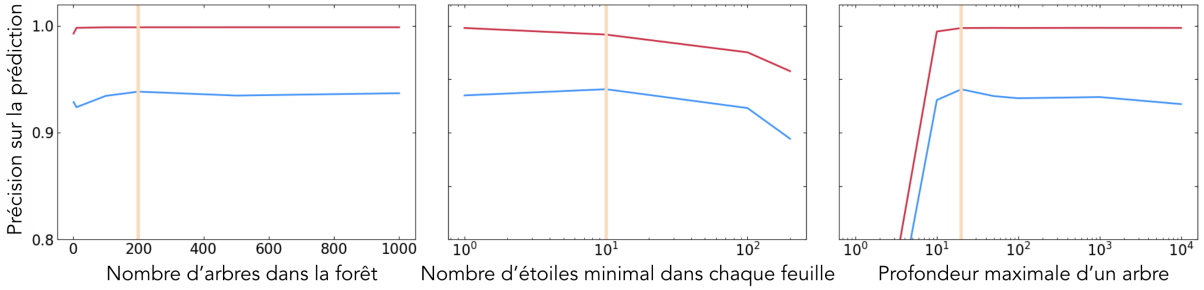


FIGURE 4.12: Courbes de validation des trois hyperparamètres utilisés lors de l'entraînement de l'algorithme. Les lignes rouges représentent la précision obtenue sur l'estimation de $\log g$ pendant l'entraînement et les ligne bleue représentent la précision associé à la phase de test. Les lignes beiges verticales indiquent les valeurs optimales pour chacun des hyperparamètres.

Pour entraîner l'algorithme, certains hyperparamètres [3] peuvent être choisis, comme le nombre d'arbres constituant la forêt, le nombre de nœuds autorisés (≪ profondeur ≫) dans un arbre, et la quantité minimale de données dans chacune des feuilles. Ces hyperparamètres sont déterminés grâce à leur courbe de validation respective. La courbe de validation d'un hyperparamètre HX se calcule en faisant varier la valeur de HX lors de différents entraînements de l'algorithme, tout en gardant les autres hyperparamètres constants. La précision obtenue lors de l'entraînement et lors du test sur une fraction de l'échantillon est calculée pour chaque valeur de HX, et représentée sur la figure 4.12 pour HX =[≪ Nombre d'arbres dans la forêt ≫ (A), ≪ Nombre d'étoiles minimal dans chaque feuille ≫ (F), ≪ Profondeur maximale d'un arbre ≫ (P)]. Pour sélectionner la valeur des hyperparamètres, nous cherchons la valeur de HX qui maximise la précision sur la prédiction de test. Cette valeur est indiquée par les lignes verticales beiges sur chacun des panneaux de la figure 4.12. Nous obtenons ainsi A= 200, F= 10 et P= 20, et entraînons la Forêt Aléatoire avec ces hyperparamètres.

Pour contrôler le bon déroulement de l'apprentissage, nous estimons également l'impact relatif des différents paramètres composant X sur l'étape d'entraînement de l'algorithme. L'importance des paramètres est définie comme l'≪ importance Gini ≫ définie par Breiman et al. (1984) dont nous ne détaillerons pas l'expression dans ce manuscrit. Elle représente la contribution de chacun des paramètres pour les constructions des décisions binaires prises aux nœuds des arbres. La figure 4.13 indique les importances relatives des différents paramètres X utilisés.

Le paramètre $\mathrm{F_{p_{0.7}}}$ domine largement l'entraînement : cela est attendu puisque ce paramètre est le plus adapté pour estimer $\log g$ des étoiles de la RGB et du RC qui sont les plus nombreuses dans notre échantillon. Nous retrouvons ensuite le paramètre $\mathrm{F_{p_7}}$, idéal pour l'estimation de $\log g$ des étoiles de la MS avec des signaux de rotation à basse fréquence dans la PSD, puis $\mathrm{F_{p_{0.2}}}$ permettant une estimation de $\log g$ pour les étoiles très lumineuses des phases RGB et AGB (voir figure 4.7). Les paramètres $\mathrm{F_{p_{20}}}$ et $\mathrm{F_{p_{50}}}$ jouent également un rôle pour la distinction entre les RG et les étoiles de la MS. Enfin, la magnitude $\mathrm{K_p}$ de l'étoile et sa T_{eff} n'ont presque pas de rôle dans l'entraînement. Ce n'est pas surprenant au vu de la dégénérescence de la T_{eff} entre

3. Nous désignons sous le terme ≪ hyperparamètres ≫ les paramètres non physiques permettant d'optimiser les performances de l'algorithme, par opposition aux ≪ paramètres ≫ physiques composants le vecteur X.

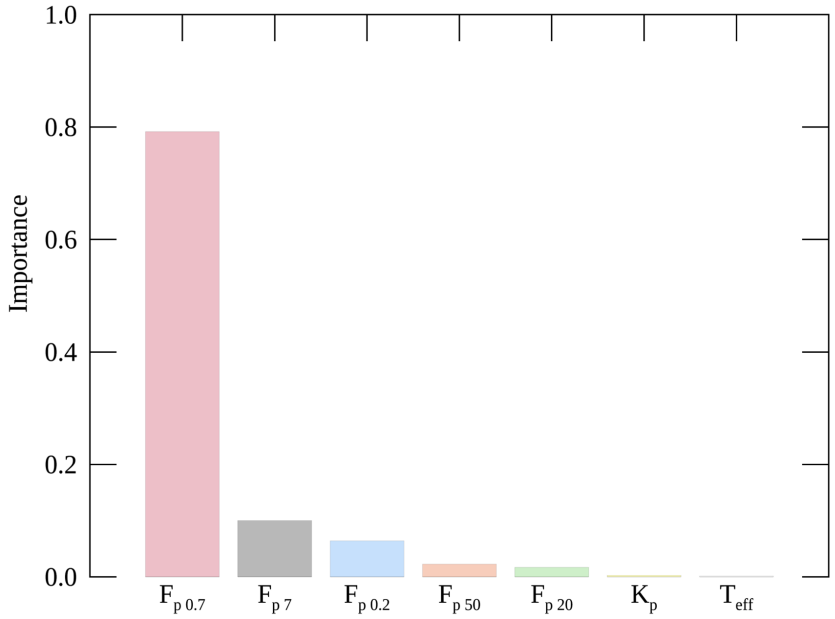


FIGURE 4.13: Importances relatives des différents paramètres composant X. Plus un paramètre a une grande importance relative, plus sa valeur a joué un rôle important dans l'estimation de la gravité de surface de l'étoile.

la RGB et la MS dans le diagramme de Hertzsprung-Russell, et puisque le FliPer est intrinsèquement corrigé de la magnitude *Kepler* via la soustraction du bruit de photon.

4.4.3 Étape de test des performances de l'algorithme

L'algorithme est ensuite testé sur les 20% ($\simeq 3,000$ étoiles) de l'échantillon restants. Les données sont démultipliées en $\sim 300,000$ étoiles artificielles selon la procédure décrite au paragraphe 4.4.1. La figure 4.14 représente donc, pour ces $\sim 300,000$ étoiles, la prédiction de l'algorithme en fonction de $\log g$ astérosismique mesuré par A2Z. Au premier ordre, l'estimation du $\log g$ par l'algorithme FliPer est compatible avec l'estimation astérosismique des étoiles, puisque la tendance sur la figure 4.14 suit la ligne $1:1$ depuis la MS jusqu'à la AGB.

4.4.4 Résultats obtenus par l'algorithme FliPer

L'erreur moyenne commise (PE) et sa déviation standard associée sur l'estimation de $\log g$ par l'algorithme sont reportées dans la première ligne de la table 4.1. Des estimations du biais moyen commis par rapport aux valeurs de A2Z et de l'incertitude sur la mesure, sont également présentées par plage évolutive sur la figure 4.15, et reportées dans la table 4.1.

La valeur de PE de 10^{-4} dex pour l'échantillon global indique qu'il n'y a pas de biais intrinsèque à la méthodologie FliPer.

Nous notons cependant qu'un potentiel biais intrinsèque à la mesure de $\nu_{\rm max}$ par A2Z, de même qu'un biais spectroscopique sur l'estimation de $T_{\rm eff}$ seraient reportés sur l'estimation par l'algorithme (García et al., *in prep*). En revanche, aucun biais de A2Z n'a été reporté par rapport aux autres outils sismiques à 1% près pour l'estimation de $\nu_{\rm max}$ (Pinsonneault et al., 2018).

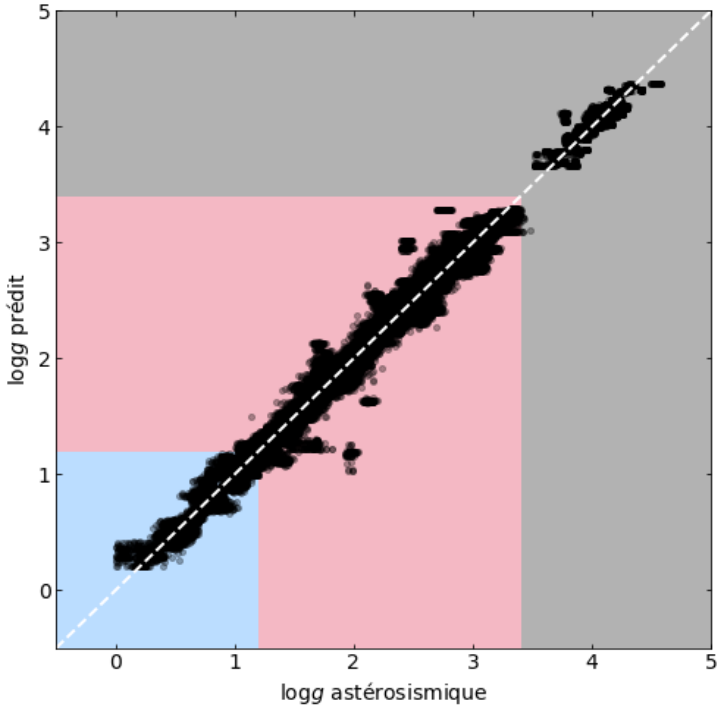


FIGURE 4.14: Comparaison entre les valeurs connues de la gravité de surface et les valeurs prédites par l'algorithme pour les $\sim 300,000$ étoiles artificielles composant l'échantillon de test. La ligne blanche en pointillés représente la valeur 1 :1.

La figure 4.15 montre un biais de la méthode FliPer par rapport à A2Z pour les étoiles très lumineuses avec $\log g < 0.5$ dex. Cela est dû au fait que, malgré l'utilisation du filtre à 80 jours, une partie de la puissance des modes d'oscillation des géantes très évoluées est filtrée : l'étoile apparaît légèrement plus jeune qu'elle ne l'est réellement par la mesure de FliPer. De même, un faible biais persiste dans la région MS à cause des signaux de rotation des étoiles.

L'incertitude commise sur l'estimation de $\log g$ lors de la phase de test par la méthode FliPer est mesurée par la Déviation Absolue Moyenne (MAD) définie dans notre cas par :

$$\mathrm{MAD} = \frac{1}{N_{\mathrm{test}}} \sum_{1}^{N_{\mathrm{test}}} |\mathrm{Y} - \mathrm{Y}_{\mathrm{pred}}| = \frac{1}{N_{\mathrm{test}}} \sum_{1}^{N_{\mathrm{test}}} |\log g_{\mathrm{A2Z}} - \log g_{\mathrm{pred}}|. \tag{4.26}$$

Cet estimateur de l'écart type est choisi pour la mesure de l'incertitude de la méthode FliPer car il est robuste vis-à-vis d'éventuelles estimations aberrantes de $\log g$ par A2Z.

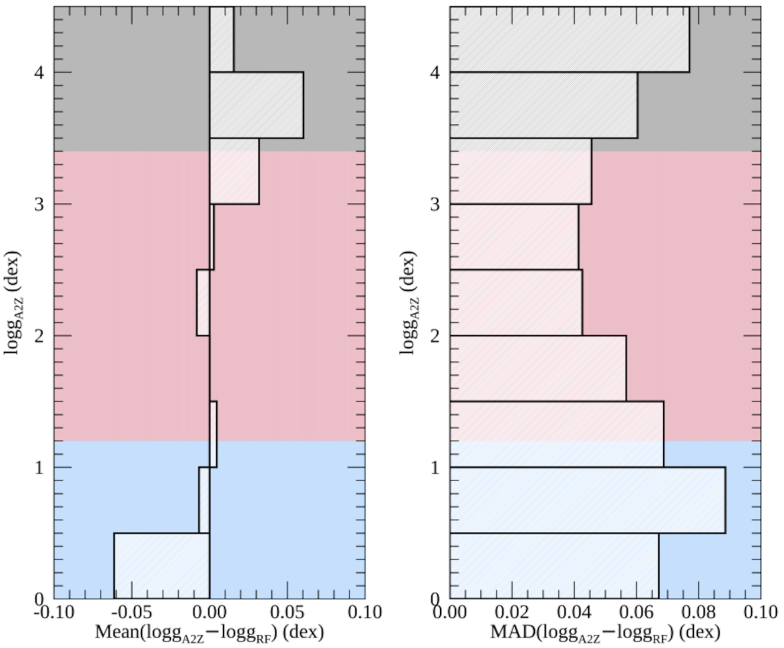


FIGURE 4.15: Résultats statistiques pour l'étape de test. *Gauche :* Erreur moyenne en fonction de la plage de $\log g$ considérée. *Droite :* Déviation absolue moyenne (MAD) en fonction de la plage de $\log g$ considérée.

TABLE 4.1: Données correspondant à la figure 4.15, avec PE l'erreur moyenne et MAD la Déviation absolue moyenne. Unités : (dex)

$\log g$	PE	MAD
ALL	-4.5×10^{-4}	0.046
$[0 - 0.5]$	-0.061	0.067
$[0.5 - 1]$	-0.007	0.089
$[1 - 1.5]$	0.005	0.069
$[1.5 - 2]$	0.000	0.057
$[2 - 2.5]$	-0.008	0.043
$[2.5 - 3]$	0.003	0.041
$[3 - 3.5]$	0.032	0.046
$[3.5 - 4]$	0.060	0.060
$[4 - 4.5]$	0.016	0.077

La valeur MAD$= 0.046$ dex (voir tableau 4.1) est nettement inférieure à l'incertitude associée aux mesures spectroscopiques ou bien à celle associée à la méthode Flicker. Cette incertitude est plutôt homogène le long de l'évolution des étoiles de faible masse. Elle est encore plus faible autour de la région de RC car nous disposons de nombreuses étoiles du Clump pour l'entraînement de l'algorithme. Nous notons que même dans les régions où l'algorithme est difficile à entraîner à cause du faible nombre d'étoiles analysées sismiquement (MS et RG très lumineuses), l'incertitude de la méthodologie FliPer sur l'estimation de $\log g$ reste inférieure à 0.1 dex.

Pour les états évolutifs des étoiles de faible masse entre la MS et la AGB, les performances de l'algorithme FliPer pour l'estimation de $\log g$ pour les étoiles isolées observées par *Kepler* sont donc meilleures que les estimations spectroscopiques d'un facteur compris entre 1 et 10 (selon l'état évolutif de l'étoile). Cette méthodologie est donc très précieuse pour les étoiles sans détection astérosismique, ou bien lorsque la résolution fréquentielle des données est faible ou que le rapport signal à bruit est bas.

4.4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une nouvelle méthode pour estimer automatiquement la gravité de surface des étoiles de type solaire à partir des données photométriques. La méthode du FliPer repose sur l'estimation de la densité de puissance moyenne contenue dans les PSD des étoiles de type solaire, et fonctionne automatiquement grâce à l'utilisation d'un algorithme d'intelligence artificielle (Forêts Aléatoires, Breiman (2001)). Nous travaillons avec un échantillon d'environ $15\,000$ étoiles entre la MS et les phases géantes avancées (appartenant à la RGB et étant très lumineuses, appartenant au RC, ou bien même à la AGB), préalablement étudiées sismiquement grâce au pipeline A2Z. Leur gravité de surface est estimée sismiquement dans l'intervalle $0.1 < \log g < 4.5$ dex, et les incertitudes sur ces mesures sont prises en compte.

Nous avons explicité le fonctionnement de la méthodologie, à la fois physiquement et numériquement. FliPer fonctionne pour l'estimation de la gravité de surface des étoiles car la mesure de la densité de puissance moyenne est fortement dominée par les signaux de convection et les modes d'oscillation qui en résultent. L'algorithme des Forêts Aléatoires est entraîné sur 80% des étoiles de l'échantillon à partir des valeurs de $\log g$ estimées précisément par astérosismologie, de la température effective et magnitude des étoiles, et des différents paramètres FliPer permettant de contraindre l'état évolutif de chacune des étoiles. L'algorithme est ensuite testé sur les 20% restants des étoiles de l'échantillon, pour lesquelles une valeur de $\log g$ astérosismique est également connue *a priori* afin d'évaluer ses performances.

Finalement, nous obtenons des estimations de gravité de surface non biaisées en moyenne par rapport aux estimations astérosismiques (biais négligeable de -4.5×10^{-4} dex), avec une incertitude moyenne de l'ordre de 0.046 dex pour les données de *Kepler*. Cette incertitude est très prometteuse, au vu des incertitudes typiques des mesures spectroscopiques de l'ordre de $0.1 - 0.3$ dex (Frasca et al., 2016; García Pérez et al., 2016). La méthodologie du Flicker (Bastien et al., 2016) présentée dans la section 4.1.3 est associée à des incertitudes plus larges que 0.1 dex, de même que la mesure de $\log g$ à 0.018 dex près par estimation du temps caractéristique de variation de la convection (Kallinger et al., 2016) et que la mesure à 0.5 dex près de la gravité de surface par Pande et al. (2018). La méthode d'estimation par les paramètres FliPer permet également d'étendre la plage d'applicabilité de ces méthodes citées, jusqu'à des géantes évoluées avec $\log g$ aussi bas que 0.1 dex. La méthode est applicable, que les modes d'oscillation soient visibles ou non, ce qui est très prometteur pour l'analyse des étoiles observées en faible résolution fréquentielle par la mission TESS (NASA).

Par la relation 3.89 il est donc très direct d'adapter la méthodologie pour l'estimation de $\nu_{\rm max}$ plutôt que de la gravité de surface. Cette étude présentée dans la publication jointe à la fin de ce chapitre permet donc également une estimation des paramètres sismiques globaux des étoiles de type solaire. Cela peut permettre une estimation de la position fréquentielle des modes d'oscillation dans les PSD lorsque les méthodes classiques comme A2Z (Mathur et al., 2010) ne convergent pas, ou bien que différents algorithmes sont en désaccord.

La méthode FliPer a déjà été utilisée pour l'estimation de la gravité de surface ou du $\nu_{\rm max}$ d'étoiles particulières (van Eylen et al., 2018; Gandolfi et al., 2018; Huber et al., 2019; Mathur et al., 2019) et pour la reconnaissance de signaux de rotation dans les PSD (Santos et al., 2019; Breton et al., 2019). De nombreuses extensions sont en cours, notamment pour la l'estimation de $\nu_{\rm max}$ de toutes les géantes rouges observées par *Kepler* (García et al., *in prep*), pour la caractérisation de la gravité de surface des étoiles observées par K2 (Le Saux et al., *in prep*), et par TESS.

Les algorithmes entraînes pour l'estimation de $\log g$ et $\nu_{\rm max}$ des étoiles de type solaire observées par Kepler sont disponibles à l'adresse : `https://github.com/lbugnet/FLIPER`. Le FliPer sera inclus parmi les algorithmes formant le pipeline d'analyse des données de la mission ESA PLATO pour une estimation de la gravité de surface dans les « Additional Data Products ».

A&A 620, A38 (2018)
https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833106
© ESO 2018

Astronomy & Astrophysics

FliPer: A global measure of power density to estimate surface gravities of main-sequence solar-like stars and red giants

L. Bugnet[1,2], R. A. García[1,2], G. R. Davies[3,4], S. Mathur[5,6,7], E. Corsaro[8], O. J. Hall[3,4], and B. M. Rendle[3,4]

[1] IRFU, CEA, Université Paris-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France
e-mail: lisa.bugnet@cea.fr
[2] AIM, CEA, CNRS, Université Paris-Saclay, Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 91191 Gif-sur-Yvette, France
[3] School of Physics and Astronomy, University of Birmingham, Edgbaston, Birmingham B15 2TT, UK
[4] Stellar Astrophysics Centre, Department of Physics and Astronomy, Aarhus University, Ny Munkegade 120, 8000 Aarhus C, Denmark
[5] Instituto de Astrofísica de Canarias, 38200 La Laguna, Tenerife, Spain
[6] Universidad de La Laguna, Dpto. de Astrofísica, 38205 La Laguna, Tenerife, Spain
[7] Space Science Institute, 4750 Walnut Street Suite 205, Boulder, CO 80301, USA
[8] INAF – Osservatorio Astrofisico di Catania, Via S. Sofia 78, 95123 Catania, Italy

Received 26 March 2018 / Accepted 13 September 2018

ABSTRACT

Asteroseismology provides global stellar parameters such as masses, radii, or surface gravities using mean global seismic parameters and effective temperature for thousands of low-mass stars ($0.8\,M_\odot < M < 3\,M_\odot$). This methodology has been successfully applied to stars in which acoustic modes excited by turbulent convection are measured. Other methods such as the Flicker technique can also be used to determine stellar surface gravities, but only works for $\log g$ above 2.5 dex. In this work, we present a new metric called FliPer (Flicker in spectral power density, in opposition to the standard Flicker measurement which is computed in the time domain); it is able to extend the range for which reliable surface gravities can be obtained ($0.1 < \log g < 4.6$ dex) without performing any seismic analysis for stars brighter than $Kp < 14$. FliPer takes into account the average variability of a star measured in the power density spectrum in a given range of frequencies. However, FliPer values calculated on several ranges of frequency are required to better characterize a star. Using a large set of asteroseismic targets it is possible to calibrate the behavior of surface gravity with FliPer through machine learning. This calibration made with a random forest regressor covers a wide range of surface gravities from main-sequence stars to subgiants and red giants, with very small uncertainties from 0.04 to 0.1 dex. FliPer values can be inserted in automatic global seismic pipelines to either give an estimation of the stellar surface gravity or to assess the quality of the seismic results by detecting any outliers in the obtained $\nu_{\rm max}$ values. FliPer also constrains the surface gravities of main-sequence dwarfs using only long-cadence data for which the Nyquist frequency is too low to measure the acoustic-mode properties.

Key words. asteroseismology – methods: data analysis – stars: oscillations

1. Introduction

The precise knowledge of stellar parameters is crucial for a very broad range of fields in astrophysics. It helps us understand stellar evolution; this knowledge also provides important information needed for planetary searches and for studying the chemical and dynamical evolution of our Galaxy. In the last decade, the NASA mission *Kepler* (Borucki et al. 2013) continuously collected very high-quality photometric data for almost 200 000 stars (Mathur et al. 2017) over ∼4 years. These observations not only revolutionized the search for exoplanets, but also opened a window into stellar physics. Asteroseismology proved to be a very powerful tool able to better characterize the stars in terms of mass, radii, and age (Metcalfe et al. 2010; Mathur et al. 2012; Silva Aguirre et al. 2017; Serenelli et al. 2017), and also in terms of their rotation and magnetic activity (McQuillan et al. 2014; García et al. 2014a; Davies et al. 2015; Ceillier et al. 2017; Kiefer et al. 2017). However, stellar oscillations have not been detected in all red giant (RG) stars (∼16 000 reported out of the ∼24 000 in the latest *Kepler* star-properties catalog Mathur et al. 2017) or in all the main-sequence (MS) solar-like stars. Around 135 000 MS dwarfs have only been observed in long cadence (LC) with a sampling time of 29.4 min, by *Kepler* preventing any direct asteroseismic analyses because their acoustic-mode frequencies are well above the Nyquist frequency and can only be seismically studied with short-cadence (SC) data with a sampling time of 58.85 s (Chaplin et al. 2011b).

To circumvent this, new techniques are being developed to extract precise surface gravities ($\log g$) directly from the photometric data. This is the case of the Flicker method, i.e., the measurement of the brightness variations on timescales shorter than 8 h (Bastien et al. 2013, 2016), the variance in the flux (Hekker et al. 2012), and the granulation (Mathur et al. 2011; Kallinger et al. 2014), and the analysis of the timescales of convective-driven brightness variations (Kallinger et al. 2016). However all these techniques have limitations. Flicker is restricted by construction to stars with $4500 < T_{\rm eff} < 7150$ K and $2.5 < \log g < 4.6$ dex, preventing the study of high-luminosity red-giant branch (RGB) and asymptotic red-giant branch (AGB) stars. To obtain the granulation properties it is necessary to fit a complicated model including different scales of convection with many free parameters (for more details see the

Open Access article, published by EDP Sciences, under the terms of the Creative Commons Attribution License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

discussions in Mathur et al. 2011; Kallinger et al. 2014; Corsaro et al. 2017). The final method requires that the oscillation signal be temporally resolved, which prevents extending the analysis to MS dwarfs only observed in LC data. It has also been shown that instead of using classic seismic methods, it is possible to apply machine learning algorithms directly on the data. For instance, Hon et al. (2018a) apply a convolutional neural network on spectra to classify stars. This method gives good results for about 99% of their sample of RGs, including some stars that were not already characterized with seismic pipelines. A random forest regression model (Breiman 2001) applied directly on the photometric light curves of variable stellar sources can also estimate their surface gravity with a 0.42 dex uncertainty (Miller et al. 2014).

We present here a new metric called FliPer (Flicker in power, in opposition to the standard Flicker measurement which is computed in the time domain), which links the variability of a star to its surface gravity in a wider range than Flicker, starting at a $\log g \sim 0.1$ and similar effective temperatures ($4500 < T_{\rm eff} < 7150$ K) covering solar-like pulsating stars. We are limited in the $0.1 < \log g < 4.6$ dex range of surface gravity because of the lack of information we have on extreme surface gravity solar-like stars. There is no intrinsic limits of applicability to the FliPer calculation. We decide to combine powerful methods: we include FliPer values from different lower frequency boundaries into a supervised machine learning random forest algorithm in order to get even more accurate results on the surface gravity estimation. This way, we obtain information about the impact of the lower frequency boundaries and the effective temperature on the estimation of surface gravity.

2. Observations, data selection, and preparation

In this work, LC data (Gilliland et al. 2010) obtained by NASA's *Kepler* main mission are used. The light curves have been corrected and the different quarters concatenated following García et al. (2011). Two high-pass filters have been used with cutoff frequencies corresponding to 20 and 80 days. To minimize the effects of the gaps in the observations (García et al. 2014b) the missing observations have been interpolated using inpainting techniques (Pires et al. 2015). The power spectrum density is then computed for each star (calibrated as a single-sided spectrum). Data are corrected for apodization following Chaplin et al. (2011a).

We selected ~15 000 RG stars among the ones in Mathur et al. (2017) showing stellar pulsations and characterized using the A2Z asteroseismic pipeline (Mathur et al. 2010). These stars have $0.1 < \log g < 3.4$ dex and $3285\,{\rm K} < T_{\rm eff} < 7411$ K. In addition, 254 MS stars with $4951\,{\rm K} < T_{\rm eff} < 6881$ K are used to extend the study towards a higher surface gravity range, reaching 4.5 dex. These stars have *Kepler* magnitudes brighter than 14 ($Kp < 14$).

It is important to note that the values of $\nu_{\rm max}$ computed by A2Z do not show any systematic biases at a level of ~1% when compared to other seismic pipelines as shown by Pinsonneault et al. (2018).

3. The new metric: FliPer

The complete power spectrum contains contributions from the stellar variability at all timescales, such as oscillation modes, surface granulation, and rotation. We define FliPer as

$$F_p = \overline{\rm PSD} - P_n, \quad (1)$$

where $\overline{\rm PSD}$ represents the averaged value of the power spectrum density from a given frequency (see Sect. 3.1) to the Nyquist frequency and P_n is the photon noise. This noise can be calculated by taking the average value of the PSD over a range of frequencies close to the Nyquist frequency, but this method leads to biased estimation of FliPer for stars that oscillate with a frequency close to the Nyquist frequency, as explained in detail by Bugnet et al. (2017). Then the photon noise is computed following the empirical expression obtained by Jenkins et al. (2010).

The value of FliPer is dominated by a combination of the granulation and the oscillation modes, which both depend on the evolutionary stage of the star. The more evolved the star, the larger their oscillation and granulation amplitudes (e.g., Mosser et al. 2012; García & Stello 2015), while the frequency of maximum power $\nu_{\rm max}$ decreases (e.g., Bedding 2014).

It is important to note that the signature of strong rotation (and its harmonics) would bias FliPer. This does not have a large impact in the case of RGs because a very small fraction of them show signatures of the rotation in the PSD, as shown by Ceillier et al. (2017), but needs to be studied in detail for MS solar-like stars (see Sect. 3.3).

3.1. Computing FliPer from data

The observational frequency range used to compute $\overline{\rm PSD}$ is limited at high frequency by the Nyquist frequency. For most stars (those observed in LC) we cannot get information above ~283 μHz. Therefore, we selected a first set of calibrator stars including a RG pulsating at a frequency lower than 300 μHz and for which asteroseismic parameters were available. A second set of known seismic MS dwarfs was used to study FliPer with LC data only.

The low-frequency limit of $\overline{\rm PSD}$ is given by the cutoff frequency used in the calibration of the data. For most of the stars, a 20-day high-pass filter light curve is used. The associated cutoff frequency of the signal is 0.58 μHz. We thus establish a low-frequency limit for the analysis at 0.7 μHz. As MS stars can rotate with a period shorter than 20 days, FliPer is computed with a low-frequency limit at 7 μHz (i.e., ~1.6 days) avoiding most of the pollution induced by rotation signals (see Sect. 3.3). For stars showing rotation harmonics at higher frequencies, the low-frequency boundary should be taken even higher (e.g., 20 μHz) to avoid any additional impact on FliPer from the peaks associated with rotation. Finally, a small number of RGs in our sample are either high-luminosity RGB or AGB stars ($\log g < 1.2$ dex) pulsating at frequencies smaller than the 20-day cutoff frequency of the calibrated data. For these stars, an 80-day filter is used in the calibration process. It allows us to properly measure the stellar signal down to 0.2 μHz (which is the limit frequency utilized in this analysis) and to include oscillation-mode power into the FliPer value.

3.2. First surface gravity estimator

For stars with solar-like oscillations, seismic surface gravities are directly obtained from the frequency of maximum oscillation power $\nu_{\rm max}$ computed with the A2Z pipeline (Mathur et al. 2010) and effective temperatures from the *Kepler* DR25 catalog (Mathur et al. 2017). Knowing seismic surface gravities with their uncertainties allows us to study the behavior of FliPer with the evolutionary state of the stars using only LC light curves even for MS stars. It is important to note that for MS stars the seismic

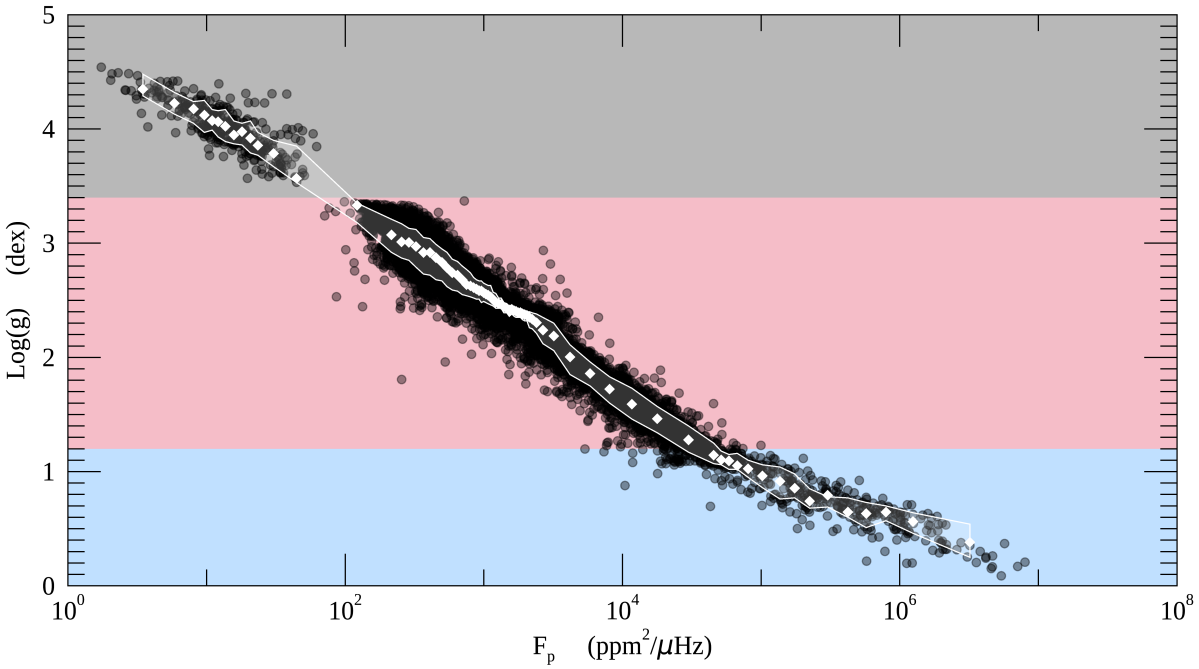


Fig. 1. Seismic $\log g$ vs FliPer for ~15 000 stars observed with *Kepler* long-cadence observational mode (black dots). The gray, red, and blue shaded regions correspond to MS and subgiant stars, RG, and high-luminosity RG stars or AGB, respectively. White diamonds represent the weighted mean value of $\log g$ (see Eq. (2)) computed with 30 MS stars and 300 RGs each. The white area delimits the location where 68% of the stars in our sample are around the mean value. The white boundary represents the equivalent of a 1σ uncertainty (standard deviation) on the surface gravity obtained from FliPer.

$\log g$ has been seismically inferred using SC data although FliPer has been computed using LC data.

In Fig. 1 the seismic $\log g$ is represented as a function of FliPer (black dots). Three different areas have been identified depending on the evolutionary state of the star: MS and subgiant stars (gray shaded region), RG (red), and high-luminosity RG stars from the branch and from the asymptotic branch (blue). For each of these star categories FliPer was computed with a different low-frequency limit of 7 μHz (avoiding in most cases the region of possible pollution by rotation signatures present on data filtered with a high-pass filter at 20 μHz), 0.7 μHz (20-day filter), and 0.2 μHz (80-day filter), respectively. The color scheme is the same in the captions.

In order to characterize the relationship between FliPer and $\log g$ represented in Fig. 1, we calculate an average value of $\log g$ for each bin of n stars (n = 300 for RG and n = 30 for MS and subgiant stars) as

$$\overline{\log g} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\delta \log g_i} \times \log g_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\delta \log g_i}}, \quad (2)$$

where $\log g_i$ represents the value of surface gravity for each star and $\delta \log g_i$ the corresponding uncertainty.

These values are represented by the white diamonds, and are located at the averaged value of FliPer over each bin. To define the 1σ uncertainties, we compute the area containing 68% of the stars of the sample (marked by a white contour region in Fig. 1). Mean values and their corresponding $\pm 1\sigma$ uncertainties are given in Table. A.1. By using these mean values it is possible to estimate the stellar surface gravity directly from the FliPer estimator. The uncertainties obtained on $\log g$ extend from 0.05 to 0.2 dex, depending on the evolutionary state of the star. Because of the calculation of the mean values, the boundaries in $\log g$ are reduced to the range 4.35–0.38 dex, as shown in Table A.1.

3.3. Disentangling main-sequence stars from red giants

As defined, FliPer is mostly dominated by a combination of the power coming from granulation and oscillation modes (when the latter are below the Nyquist frequency). The limitation in the use of the calibrated values from Table A.1 to directly estimate surface gravity of stars appears when the spectrum shows a specific behavior that strongly modifies the mean value of the power density. For instance, in stars showing large excess of power (e.g., due to spikes at thrusters frequency in K2 data or to pollution from a background binary), the value of FliPer is biased towards high power density (Bugnet et al. 2017). On the contrary, in stars with a low signal-to-noise ratio the value of FliPer is biased towards lower values because most of the spectrum is dominated by the instrumental noise. As a consequence, FliPer is higher than expected for fast rotating MS stars due to the rotation peaks and their harmonics, which can be particularly high for young MS dwarfs. For these stars, the $\log g$ inferred from Table A.1 could be such that it corresponds to a RG star and not to a MS star, even if we calculate FliPer with the 7 μHz frequency limit.

To avoid this problem and to disentangle any MS stars from RGs, we need an additional parameter that takes into account the power due to rotation. The simplest solution is to combine different FliPer values, including some at higher frequencies than the 7 μHz limit. For each star in our sample, we then calculate FliPer with several low-frequency limits (e.g., $F_{p_{0.2}}$ from 0.2, $F_{p_{0.7}}$ from 0.7, F_{p_7} from 7, $F_{p_{20}}$ from 20, and $F_{p_{50}}$ from 50 μHz). For MS stars with small rotation signatures the value of FliPer is almost the same for all the low-frequency boundaries (see panel a in Fig. 2). However, when rotation peaks are present, there is a large difference between the FliPer parameters, depending on the frequency of the rotational peaks (see Fig. 2). This is the case for the stars KIC 8298090 and KIC 5357446 represented in panels b and c. In panel b all the rotational components are below the 0.7 μHz

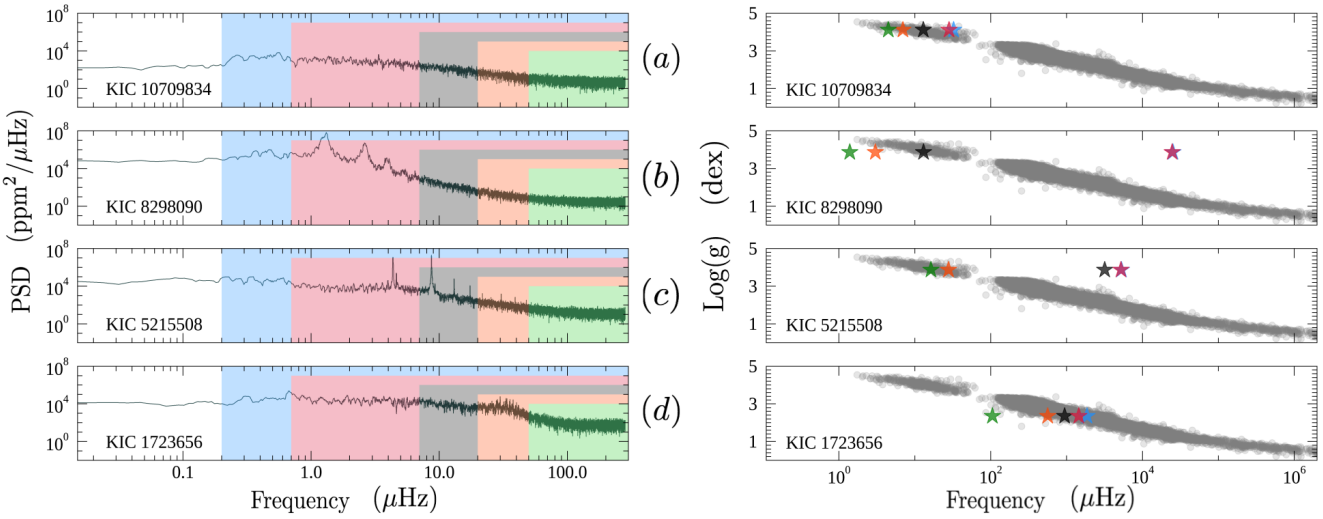


Fig. 2. Impact of the lower frequency limit in the FliPer calculation on the estimation of surface gravity for different types of star. *Left panels*: power density spectra of four *Kepler* targets. Colored areas (blue, red, black, orange, and green) represent the different ranges of frequency used for FliPer calculation (respectively from 0.2, 0.7, 7, 20, and 50 μHz to the Nyquist frequency). The color scheme is the same in the captions. *Right panels*: all studied *Kepler* stars from Fig. 1 are represented in gray in the $\log g$ V.S FliPer diagram. Colored stars (blue, red, black, orange, and green) show the positions in the diagram of the four stars from the left panels with their color corresponding to the low-frequency boundaries used to compute the FliPer value. *Panel a* represents a MS star without any visible rotation component, *panel b* a MS star showing rotation, *panel c* a high-frequency rotating MS star, and *panel d* a RG star.

boundary, meaning that parameters $F_{p_{20}}$ and $F_{p_{50}}$ were not necessary to classify this star as a MS star. However, in panel c the rotation peaks reach higher frequencies; in order to estimate the surface gravity of this star the two new high-frequency parameters are needed. Panel d shows a RG star for comparison. In the regime of RG stars, all the FliPer values are very similar, except the lowest ones coming from the calculation with the high-pass filter that does not include the range of frequency of oscillation modes. By comparing the values of FliPer computed with different low-frequency limits, it is then possible to disentangle MS stars with a high rotation signature from RG stars. This can be done in a star-by-star analysis (see Fig. 2). However, it is possible to automatize this procedure, as is explained in the following section.

4. Seismic independent surface gravity prediction from 0.1 to 4.5 dex

The direct estimation of surface gravity from Table A.1 gives good results only when the evolutionary state of the star is already known, and when the spectrum does not show a specific behavior that strongly modifies the mean value of the power density (e.g., when the PSD is polluted by spikes of a background binary or a classical pulsator). The reason is that we only use one value of FliPer computed from one lower frequency limit. Estimating surface gravities of unclassified or complex stars requires a different use of the FliPer method.

4.1. Using machine learning

As explained above, combining different FliPer values is a powerful way to detect MS stars showing high rotation signal among RGs. It also means that by using different high-pass filters in the calculation of FliPer we are sensitive to different physical signatures in the PSD. Combining them in the study thus improves the characterization of the star, and we intend to use this wisely to predict surface gravities. To do so, we train a random forest regressor algorithm (Breiman 2001) on a random subsample representing 80% of our set of stars. The random forest method is based on the aggregation of a large number of decision trees (see Appendix B for a description of the method) that has already been proved to be useful in asteroseimology (e.g., Miller et al. 2014). The trees are constructed from a training data set and internally validated to give a prediction based on the predictor for future observations. The random forest method not only allows the use of a large number of parameters but also estimates their individual impact on the regression. The parameters used to estimate surface gravities are $F_{p_{0.2}}$, $F_{p_{0.7}}$, F_{p_7}, $F_{p_{20}}$, $F_{p_{50}}$, $T_{\rm eff}$, and Kp. They represent the values of FliPer calculated from a low-frequency limit (0.2, 0.7, 7, 20, 50 μHz), the effective temperature, and the *Kepler* magnitude of the star.

4.2. Building training and test sets of parameters for the random forest algorithm

We intend to take into account the uncertainties on the parameters during the testing of the algorithm to estimate the intrinsic bias and/or uncertainties of our methodology. The uncertainties on effective temperature $\delta T_{\rm eff}$ are taken directly from the Mathur et al. (2017) catalog. The error on the surface gravity $\delta \log g$ comes from the uncertainty on $\nu_{\rm max}$ from the seismic analysis of the stars. We can estimate the uncertainty due to the photon noise in the spectra (following a chi-squared distribution with two degrees of freedom) impacting the determination of FliPer by considering negligible the uncertainty made on the photon noise. Hence, the uncertainty on FliPer can be explicitly written as

$$\delta F_p = \sqrt{\delta \overline{\rm PSD}^2} = \frac{\delta P_{\rm tot}}{N_{\rm bin}} = \frac{\sqrt{\sum_i \delta P_i^2}}{N_{\rm bin}}, \quad (3)$$

where δP_i stands for the error made on the power contained in each bin and $N_{\rm bin}$ is the total number of bins in the power density spectrum. The individual δP_i cannot be extracted directly

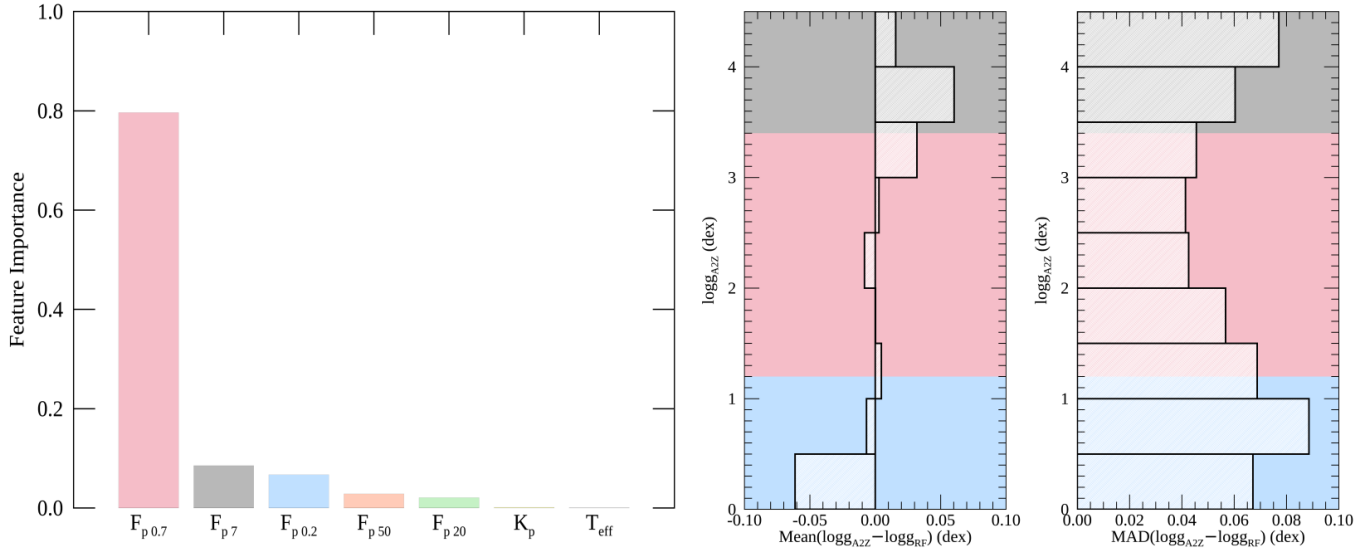


Fig. 3. *Left panel*: importance of the different parameters $F_{p_{0.2}}$, $F_{p_{0.7}}$, F_{p_7}, $F_{p_{20}}$, $F_{p_{50}}$,$T_{\rm eff}$, and Kp in the training process. The color scheme is the same in the captions. *Middle panel*: histogram of the residuals of the estimated $\log g_{\rm RF}$ values from the references $\log g_{\rm A2Z}$. *Right panel*: histogram of the mean absolute deviation from the expected value MAD($\log g_{\rm A2Z} - \log g_{\rm RF}$).

because the χ^2_2 noise distribution does not have Gaussian errors. We thus use the central limit theorem and we rebin the spectrum by a factor of $n = 50$. The total amount of power in the spectrum is then expressed as

$$P_{\rm tot} = \sum_j P_{n,j}, \tag{4}$$

where $P_{n,j}$ follows a quasi-normal distribution with $2n$ degrees of freedom. This assumes that the signal does not change dramatically over this range of 50 bins, which is consistent with the shape of the spectra in solar-like stars. The uncertainty on the mean from each n bins is then expressed as

$$\delta P_{n,j} = 2 \times \frac{P_{n,j}}{2n} \times \sqrt{n}, \tag{5}$$

leading to a global uncertainty on FliPer values of

$$\delta F_p = \frac{\sqrt{\sum_j \left(2 \times \frac{P_{50,j}}{2n} \times \sqrt{n}\right)^2}}{N_{\rm bin}}. \tag{6}$$

Then we include the effect of these errors on the different parameters on the testing of the algorithm. To do so, we perform a Monte Carlo simulation by generating for each star in our test sample (representing 20% of the total number of stars in our study) 100 artificial sets of parameters from their corresponding normal distributions. With $\mathcal{G}_{0\leq i\leq 100}$ being 100 random values following the standard distribution, we calculate for each X parameter ($F_{p_{0.2}}$, $F_{p_{0.7}}$, F_{p_7}, $F_{p_{20}}$, $F_{p_{50}}$,$T_{\rm eff}$, and $\log g$) 100 new values $X_{0\leq i\leq 100}$ following Eq. (7) below. However, the *Kepler* magnitude of the star remains constant as it has no uncertainties, and it completes each of the 100 new sets of parameters:

$$X_{0\leq i\leq 100} = X + \delta X \times \mathcal{G}_{0\leq i\leq 100}. \tag{7}$$

Each new group of 100 sets of parameters is considered in the following study as a representation of a hundred stars to test the algorithm.

4.3. Impacts of parameters on the training

We used 80% of our stars to train the algorithm to estimate the surface gravity. The remaining 20% was used to test the performance of the algorithm by taking into account uncertainties on the different parameters as explained in Sect. 4.2. The impacts of the different parameters on the training process are represented in Fig. 3 A.

A predictable result is that the $F_{p_{0.7}}$ parameter largely dominates the training. It comes from the fact that this is the most suitable parameter to study RG, representing more than 90% of the total number of stars. Other relevant values of the filtering appear to be 7 and 0.2 μHz. Indeed, F_{p_7} plays an important role in the training because of its ability to distinguish MS stars from RGs, and the $F_{p_{0.2}}$ parameter helps in the prediction of surface gravity for high-luminosity stars. The other parameters $F_{p_{20}}$ and $F_{p_{50}}$ have lower impacts on the training, but still help the learning for high rotating MS stars. Impacts of the effective temperature and Kp do not exceed a small fraction. We confirm from Fig. 3 that combining different lower frequency boundaries in the FliPer calculation makes a great difference for the estimation of robust surface gravities.

4.4. Results

To evaluate the performance of the algorithm, the estimate of surface gravity from the test sample is compared to the corresponding A2Z estimation of surface gravity. The mean absolute deviation (MAD) of the random forest surface gravities from reference values is reported in Table 1. This estimator of the deviation is chosen to be robust against outliers to avoid any issue coming from an eventual remaining error in the A2Z estimation of surface gravity.

The estimation of surface gravity resulting from the machine learning on the test sample has an averaged deviation of ~0.046 dex from our reference values (see Table 1). We also obtain surface gravity deviation and errors from the reference values for different ranges of surface gravity in Table 1. We conclude that for all our stars, the new method gives a very good precision on surface gravity; the Flicker method in the range of $\log g$

Table 1. Summary of statistical results on the test set from Fig. 3.

$\log g$ range (dex)	$\overline{\log g_{\rm A2Z} - \log g_{\rm RF}}$ (dex)	MAD (dex)
ALL	-4.5×10^{-4}	0.046
[0−0.5]	−0.061	0.067
[0.5−1]	−0.007	0.089
[1−1.5]	0.005	0.069
[1.5−2]	0.000	0.057
[2−2.5]	−0.008	0.043
[2.5−3]	0.003	0.046
[3−3.5]	0.032	0.041
[3.5−4]	0.060	0.060
[4−4.5]	0.016	0.077

Notes. MAD is the mean absolute deviation.

of 2.5−4.6 dex has typical errors between 0.1 and 0.2 dex. Here, errors are in the range from ∼0.04 dex for RGs to ∼0.09 dex for high-luminosity stars (see Fig. 3 right panel). Our estimates are on average centered around the $\log g$ reference values (see Table 1). There is a small bias for HL and MS stars (see Fig. 3 middle panel) because the estimation of extreme surface gravities is the hardest for the algorithm, which sometimes becomes slightly biased by the presence of many RGs in the sample. This bias, which depends on the evolutionary state of the star, should be taken into account, but it remains smaller than the uncertainties on the original surface gravity values.

Our algorithms are available on GitHub[1] where the functions to calculate FliPer and the random forest algorithm are provided. We also provide the already trained algorithms for the estimation of surface gravities. They can be directly applied to any solar-type star to estimate its surface gravity from 0.1 to 4.6 dex.

5. Discussion and conclusion

In this work we present a new method used to estimate surface gravity of solar-like stars that extracts information from global power in their spectra. The sample of ∼15 000 stars is constituted of MS and subgiant stars, stars on the red-giant branch (RGB) and clump stars, and also high-luminosity stars on the asymptotic giant branch (AGB). This way, we study stars with $0.1 < \log g < 4.5$ dex in which mode oscillations are expected to arise from surface convection. Power spectra should then present patterns of granulation power, rotation components, and oscillation-mode power.

FliPer values are calculated by taking the average power density normalized by the photon noise of the star from different lower frequency limits to the Nyquist frequency. Our first method consists of calibrating surface gravity of stars from their FliPer value with a 1σ uncertainty (see Table A.1). We explained how these values can be used directly to give a first estimate of surface gravity; however, it works well only on stars that are already characterized. The evolutionary state has to be known or the star must have a weak rotational signature in order to distinguish MS stars from RGs. To give estimations of surface gravities for any star, we introduce a second method. A random forest regressor algorithm is trained to estimate surface gravity on a sample of our stars. We use FliPer values computed with different frequency ranges, spectroscopic effective temperatures, and seismic surface gravities. This way, stars are better characterized during the process, and no additional information is needed to provide accurate estimations of surface gravity, even for highly rotating MS stars. By testing the algorithm on the rest of our sample, we obtain estimates of surface gravity with a mean absolute deviation of 0.046 dex from seismic $\log g$. The training relies on seismic observations of solar-like stars representing 80% of our sample. However, there is no need for additional seismic measurements to obtain precise estimations of surface gravities on the test set of stars. The uncertainty on our results largely improves upon previous non-seismic estimations of surface gravity. Spectroscopic estimations are known to have 0.1–0.3 dex error bars (Frasca et al. 2016; García Pérez et al. 2016). Recent methods such as Flicker (Bastien et al. 2016) give estimates with errors higher than 0.1 dex, while the study of the granulation timescale (Kallinger et al. 2016) is limited to stars showing a visible oscillation pattern but with better uncertainties, around 0.018 dex. In addition, FliPer is extended to a wider range of surface gravities, reaching $\log g$ as small as 0.1 dex with a mean absolute deviation of 0.046 dex comparable to the other RGs.

For MS stars that oscillate at high frequency (above the *Kepler* LC Nyquist frequency), FliPer computed from LC data does not contain mode power, but only granulation-related power (Corsaro et al. 2017) and rotation signals. However, Fig. 1 clearly shows that FliPer values for MS stars are still correlated with surface gravity. This is new evidence of the link between granulation and asteroseismic properties (Mathur et al. 2011; Kallinger et al. 2014), allowing us to estimate $\nu_{\rm max}$ or rather surface gravities on LC data for which high-frequency modes are not measured. Thus, proper surface gravities can be precisely inferred for any *Kepler* LC solar-like target, from MS to high-luminosity stars, without using direct seismic analysis.

Lots of studies concern the estimation of seismic parameters of stars with new techniques directly from the properties of the time series or the power spectrum density (Bugnet et al. 2017; Hon et al. 2018b; Pande et al. 2018; Bell et al. 2018). We thus adapt our methodology to estimate $\nu_{\rm max}$ instead of the surface gravity based on the same sample of stars (see Appendix C). The results are of course very similar to those on the surface gravity, with uncertainties on $\nu_{\rm max}$ about 0.044 dex and a mean distance to references $\nu_{\rm max}$ values ($\sim 1.3 \times 10^{-3}$ dex) negligible. Moreover, FliPer has already been included by Bell et al. (2018) as a validation procedure to their seismic results and it is also being implemented as one of the parameters to be used in the classification algorithm that is being developed for the NASA TESS mission (Ricker et al. 2014) using a random forest classifier (Tkachenko et al., in prep.).

Acknowledgements. We thank the anonymous referee for the very useful comments. We would also like to thank M. Benbakoura for his help in analyzing the light curves of several binary systems included in our set of stars. L.B. and R.A.G. acknowledge the support from PLATO and GOLF CNES grants. S.M. acknowledges support from the National Aeronautics and Space Administration under Grant NNX15AF13G, the National Science Foundation grant AST-1411685, and the Ramon y Cajal fellowship no. RYC-2015-17697. E.C. is funded by the European Union's Horizon 2020 research and innovation program under the Marie Sklodowska-Curie grant agreement no. 664931. O.J.H and B.M.R. acknowledge the support of the UK Science and Technology Facilities Council (STFC). Funding for the Stellar Astrophysics Centre is provided by the Danish National Research Foundation (Grant DNRF106). This research has made use of NASA's Astrophysics Data System. Data presented in this paper were obtained from the Mikulski Archive for Space Telescopes (MAST). STScI is operated by the Association of Universities for Research in Astronomy, Inc., under NASA contract NAS5-26555.

[1] https://github.com/lbugnet/FLIPER

References

Bastien, F. A., Stassun, K. G., Basri, G., & Pepper, J. 2013, Nature, 500, 427
Bastien, F. A., Stassun, K. G., Basri, G., & Pepper, J. 2016, ApJ, 818, 43
Bedding, T. R. 2014, Solar-like oscillations: An observational perspective, eds. P. L. Pallé, & C. Esteban, 60
Bell, K. J., Hekker, S., & Kuszlewicz, J. S. 2018, MNRAS, accepted [arXiv:1809.09135]
Borucki, W. J., Agol, E., Fressin, F., et al. 2013, Science, 340, 587
Breiman, L. 2001, Mach. Learn., 45, 5
Bugnet, L., Garcia, R. A., Davies, G. R., Mathur, S., & Corsaro, E. 2017, Proceedings SF2A 2017
Ceillier, T., Tayar, J., Mathur, S., et al. 2017, A&A, 605, A111
Chaplin, W. J., Kjeldsen, H., Bedding, T. R., et al. 2011a, ApJ, 732, 54
Chaplin, W. J., Kjeldsen, H., Christensen-Dalsgaard, J., et al. 2011b, Science, 332, 213
Corsaro, E., Mathur, S., García, R. A., et al. 2017, A&A, 605, A3
Davies, G. R., Chaplin, W. J., Farr, W. M., et al. 2015, MNRAS, 446, 2959
Frasca, A., Molenda-Żakowicz, J., De Cat, P., et al. 2016, A&A, 594, A39
García, R. A., & Stello, D. 2015, Asteroseismology of Red Giant Stars in Extraterrestrial Seismology (Cambridge: Cambridge University Press)
García, R. A., Hekker, S., Stello, D., et al. 2011, MNRAS, 414, L6
García, R. A., Ceillier, T., Salabert, D., et al. 2014a, A&A, 572, A34
García, R. A., Mathur, S., Pires, S., et al. 2014b, A&A, 568, A10
García Pérez, A. E., Allende Prieto, C., Holtzman, J. A., et al. 2016, AJ, 151, 144
Gilliland, R. L., Jenkins, J. M., Borucki, W. J., et al. 2010, ApJ, 713, L160
Hekker, S., Elsworth, Y., Mosser, B., et al. 2012, A&A, 544, A90
Hon, M., Stello, D., & Yu, J. 2018a, MNRAS, 475, 3233
Hon, M., Stello, D., & Zinn, J. C. 2018b, ApJ, 859, 64
Jenkins, J. M., Caldwell, D. A., Chandrasekaran, H., et al. 2010, ApJ, 713, L120
Kallinger, T., De Ridder, J., Hekker, S., et al. 2014, A&A, 570, A41
Kallinger, T., Hekker, S., Garcia, R. A., Huber, D., & Matthews, J. M. 2016, Sci. Adv., 2, 1500654
Kiefer, R., Schad, A., Davies, G., & Roth, M. 2017, A&A, 598, A77
Kotsiantis, S. B. 2007, Proceedings of the 2007 Conference on Emerging Artificial Intelligence Applications in Computer Engineering: Real Word AI Systems with Applications in eHealth, HCI, Information Retrieval and Pervasive Technologies (Amsterdam, The Netherlands: IOS Press), 3
Mathur, S., García, R. A., Régulo, C., et al. 2010, A&A, 511, A46
Mathur, S., Hekker, S., Trampedach, R., et al. 2011, ApJ, 741, 119
Mathur, S., Metcalfe, T. S., Woitaszek, M., et al. 2012, ApJ, 749, 152
Mathur, S., Huber, D., Batalha, N. M., et al. 2017, ApJS, 229, 30
McQuillan, A., Mazeh, T., & Aigrain, S. 2014, ApJS, 211, 24
Metcalfe, T. S., Monteiro, M. J. P. F. G., Thompson, M. J., et al. 2010, ApJ, 723, 1583
Miller, A., Richards, J., Bloom, J. S., & a larger Team 2014, Amer. Astron. Soc. Meet. Abstr., 223, 125.01
Mosser, B., Elsworth, Y., Hekker, S., et al. 2012, A&A, 537, A30
Pande, D., Bedding, T. R., Huber, D., & Kjeldsen, H. 2018, MNRAS, 480, 467
Pedregosa, F., Varoquaux, G., Gramfort, A., et al. 2011, J. Mach. Learn. Res., 12, 2825
Pinsonneault, M. H., Elsworth, Y. P., Tayar, J., et al. 2018, ApJS, submitted [arXiv:1804.09983]
Pires, S., Mathur, S., García, R. A., et al. 2015, A&A, 574, A18
Ricker, G. R., Winn, J. N., & Vanderspek, R. 2014, SPIE Conf. Ser., 9143, 20
Serenelli, A., Johnson, J., Huber, D., et al. 2017, AJSS, 233, 23
Silva Aguirre, V., Lund, M. N., Antia, H. M., et al. 2017, ApJ, 835, 173

Appendix A: Surface gravity as a function of FliPer

Table A.1. Weighted mean value of log g (diamonds in Fig. 1) with their 1σ uncertainties for each bin of 30 (for MS and HL stars) or 300 (for RGs) stars.

$\log(F_P)$	$\log g$ (dex)	-1σ (dex)	$+1\sigma$ (dex)
0.54	4.35	0.06	0.13
0.77	4.23	0.09	0.09
0.91	4.18	0.12	0.06
0.98	4.12	0.15	0.13
1.04	4.07	0.09	0.10
1.08	4.06	0.14	0.10
1.14	4.02	0.13	0.14
1.20	3.95	0.08	0.12
1.25	3.98	0.12	0.08
1.32	3.92	0.13	0.15
1.37	3.86	0.09	0.11
1.48	3.79	0.12	0.11
1.65	3.57	0.03	0.28
2.09	3.33	0.15	0.02
2.33	3.07	0.15	0.13
2.41	3.01	0.14	0.16
2.46	3.01	0.16	0.13
2.51	2.97	0.18	0.15
2.56	2.92	0.19	0.14
2.61	2.92	0.20	0.13
2.65	2.87	0.19	0.12
2.70	2.83	0.16	0.12
2.73	2.78	0.16	0.13
2.77	2.74	0.15	0.12
2.81	2.72	0.14	0.12
2.84	2.68	0.13	0.12
2.87	2.64	0.10	0.13
2.90	2.63	0.09	0.11
2.93	2.61	0.09	0.09
2.95	2.60	0.09	0.08
2.97	2.58	0.08	0.09
2.98	2.58	0.10	0.09
3.00	2.57	0.08	0.08
3.01	2.55	0.08	0.09
3.03	2.54	0.08	0.08
3.05	2.53	0.07	0.10
3.07	2.50	0.05	0.07
3.09	2.48	0.06	0.08
3.11	2.47	0.04	0.05
3.12	2.46	0.04	0.05
3.14	2.44	0.05	0.04
3.17	2.43	0.04	0.04
3.18	2.42	0.05	0.04
3.20	2.42	0.04	0.03
3.22	2.41	0.05	0.04
3.23	2.40	0.05	0.04
3.25	2.39	0.04	0.03
3.26	2.39	0.04	0.03
3.28	2.38	0.05	0.04
3.29	2.37	0.06	0.04
...	...	...	...

Table A.1. continued.

$\log(F_P)$	$\log g$ (dex)	-1σ (dex)	$+1\sigma$ (dex)
...	...	...	...
3.31	2.37	0.05	0.04
3.33	2.35	0.09	0.05
3.35	2.33	0.09	0.05
3.38	2.30	0.09	0.07
3.43	2.24	0.12	0.11
3.50	2.19	0.13	0.11
3.62	2.00	0.15	0.10
3.77	1.86	0.11	0.10
3.91	1.72	0.12	0.11
4.07	1.59	0.13	0.14
4.25	1.46	0.12	0.11
4.48	1.28	0.11	0.13
4.66	1.14	0.07	0.10
4.71	1.10	0.04	0.08
4.77	1.09	0.07	0.06
4.83	1.05	0.03	0.11
4.91	1.02	0.08	0.08
5.01	0.96	0.10	0.10
5.14	0.92	0.15	0.13
5.24	0.85	0.08	0.13
5.35	0.74	0.06	0.11
5.48	0.79	0.10	0.01
5.63	0.65	0.04	0.12
5.76	0.63	0.12	0.09
5.90	0.65	0.08	0.05
6.10	0.56	0.10	0.08
6.51	0.38	0.13	0.16

Appendix B: Random forest regressor

B.1. Supervised machine learning

A random forest algorithm is a supervised machine learning (ML) method (Kotsiantis 2007). It learns how to predict an output variable ($Y_{\rm predicted}$) from some training data (X) for which the corresponding result ($Y_{\rm known}$) is already known. It thus learns a mapping function f from the input(s) to the output:

$$Y_{\rm predicted} = f(X) \tag{B.1}$$

The algorithm iteratively makes predictions ($Y_{\rm predicted}$) on the training data (X). These predicted values are corrected to achieve a maximum level of performance by comparing them with the $Y_{\rm known}$ values. We use a supervised ML algorithm for our study because we have input variables X (which are $F_{\rm p_{0.2}}$, $F_{\rm p_{0.7}}$, $F_{\rm p_7}$, $F_{\rm p_{20}}$, $F_{\rm p_{50}}$, $T_{\rm eff}$, and Kp) and an output variable $Y_{\rm known}$ (representing our surface gravity log g).

B.2. Regression trees

The regression tree method is part of the Classification and Regression Trees (CART) introduced by Breiman (2001). A decision tree algorithm constructs a binary tree during the training, with each node representing a split point on a single input variable (X) (a numerical value for regression algorithms, or a class name for classification algorithms). The leaf nodes of the tree contain the output possible predictions ($Y_{\rm predicted}$), as shown in Fig B.1.

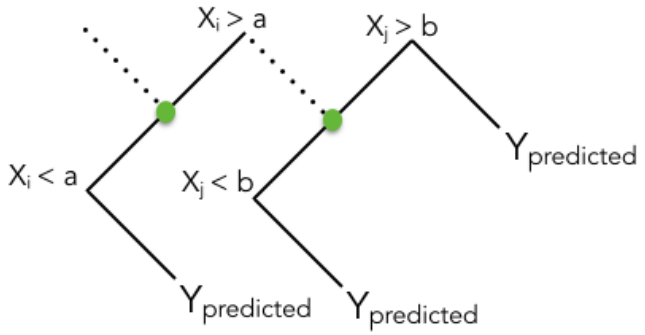


Fig. B.1. Schematic representation of a regression decision tree. At each node (green points) one variable is split at a value such that the cost function (see Eq (B.2)) is minimized.

The tree is built in such way that the cost function is minimized. Equation (B.2) is the cost function used for the regressor, with $N_{\rm training}$ being the number of stars in our training sample:

$$\text{cost} = \sum_{i=1}^{N_{\rm training}} (Y_{\rm known} - Y_{\rm predicted})^2. \quad \text{(B.2)}$$

Once the tree is built on the training sample, it is used to evaluate $Y_{\rm predicted}$ for new $X_{\rm new}$ data.

B.3. Ensemble method random forest regressor

An ensemble method combines the prediction from multiple ML algorithms together. It aims to make even more accurate predictions than any individual model. The random forest regressor is an ensemble method that combines regression trees. It consists in the following:

- Creating many subsamples of the training sample;
- Training a regression tree on each subsample, keeping a low number of variables that can be looked at for each split point. It aims to decrease the correlation between the different trees. For a regression algorithm, the typical number of features that can be searched is $m = \frac{p}{3}$ with p the number of input (X) variables;
- Calculating the average prediction from each model for the new test sample: this averaged value is taken as the estimate for the output variable ($Y_{\rm predicted}$).

In our work we use the "RandomForestRegressor" function from the "sklearn.ensemble" Python library (Pedregosa et al. 2011) to compute the training on surface gravity.

Appendix C: Automatic estimation of $\nu_{\rm max}$

As a complementary study we also trained our algorithm to estimate the frequency of maximum power $\nu_{\rm max}$. The training is made following Sect. 4 by using $\nu_{\rm max}$ instead of $\log g$ as the predicted parameter $Y_{\rm predicted}$. The training input values are computed as in Sect. 4.2 by combining the $\nu_{\rm max}$ values estimated by the A2Z global seismic pipeline for our sample of ∼15 000 stars along with their uncertainties.

Results are very similar to the estimation of surface gravity, and are given in Table C.1. The estimation of $\nu_{\rm max}$ can be made for any star with solar-like oscillations with $0.1 < \log g < 3.4$ dex, $3285 < T_{\rm eff} < 7411$ K, $Kp < 14$, and provide a very good prior for any more complex seismic analysis of the star. The complete algorithm for the $\nu_{\rm max}$ estimation can be found on the Git repository[1].

Table C.1. Summary of statistical results on $\nu_{\rm max}$ on the test set from Fig. 3.

$\log(\nu_{\rm max})$ (dex)	$\overline{\log(\nu_{\rm max\,A2Z}) - \log(\nu_{\rm max\,RF})}$ (dex)	MAD (dex)
ALL	-0.3×10^{-3}	0.044
[−1: − 0.5]	−0.123	0.085
[−0.5:0]	−0.011	0.081
[0:0.5]	−0.0007	0.075
[0.5:1]	−0.004	0.053
[1:1.5]	−0.019	0.041
[1.5:2]	0.003	0.037
[2:2.5]	0.025	0.046
[2.5:3]	−0.041	0.061
[3:3.5]	0.011	0.082

Notes. MAD is the mean absolute deviation.

• Articles en collaboration en lien avec FliPer : contribution majeure •

1. Revisiting the impact of stellar magnetic activity on the detection of solar-like oscillations by Kepler
   Accepted with moderate revision, Frontiers

   Mathur, S., García, R.A., Bugnet, L. *et al.*

   Syllabus : Environ 1 000 étoiles observées par *Kepler* sont étudiées pour déterminer l'origine de l'absence de détection des modes d'oscillations chez certaines étoiles de type solaire. La forte activité magnétique et/ou la composition chimique de certaines étoiles sont mis en avant pour expliquer cette non-détection. Ma contribution, qui se place en préambule de cette étude, a permis la confection de l'échantillon d'étoiles de type solaire non-oscillantes en utilisant la méthode $\text{FliPer}_{\text{Class}}$.

• Articles en collaboration en lien avec FliPer : contribution mineure •

6. Detection and Characterization of Oscillating Red Giants : First Results from the TESS Satellite
   The Astrophysical Journal Letters

   Silva Aguirre, V. [...] Bugnet, L. *et al.*

   Syllabus : Cette étude combine différentes méthodes observationnelles (astérosismologie et astrométrie) pour étudier 25 géantes rouges observées par TESS. Notre contribution prend place lors de la caractérisation de ces géantes rouges, pour contraindre la plage de $\nu_{\max}$ attendue pour chacune d'entre elles.

5. Age dating of an early Milky Way merger via asteroseismology of the naked-eye star ν Indi
   Nature Astronomy

   Chaplin, V. [...] Bugnet, L. *et al.*

   Syllabus : L'étoile ν Indi est caractérisée spectroscopiquement, ce qui permet de définir son environnement précoce grâce à la composition chimique. L'étude du mouvement de l'étoile par astrométrie avec *Gaia* permet de dire que sa trajectoire a été perturbée par la collision de notre galaxie avec la galaxie naine Gaia-Enceladus. Enfin, l'astérosismologie permet de dater cette collision à environ 11 milliards d'années. La métrique FliPer a permis d'aider à la recherche des fréquences des modes d'oscillation dans la PSD de l'étoile.

4. A Hot Saturn Orbiting An Oscillating Late Subgiant Discovered by TESS
   Accepted, Astronomy and Astrophysics

   Huber, D. [...] Bugnet, L. *et al.*

   Syllabus : Cette étude présente la première découverte par le satellite TESS d'une planète de type Saturne-chaud orbitant autour d'une étoile évoluée. À la fois l'astérosismologie, la méthode de détection par transit, la méthode des vitesse radiales, la spectroscopie, ainsi que la méthode FliPer sont utilisées, permettant une excellente caractérisation de ce système rare.

3. A Search for Red Giant Solar-like Oscillations in All Kepler Data
   Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 610
   DOI : 10.1093/mnras/stz622

   Hon, M. [...] Bugnet, L., *2019*

   Syllabus : La recherche de géantes rouges présentant des modes d'oscillation est toujours d'actualité dans le champ observé par *Kepler* : en entrainant un réseau de neurones à reconnaitre la forme des modes d'oscillations, plus de 600 nouvelles géantes rouges oscillantes ont pu être identifiées. Ma contribution a lieu lors de la validation du nouvel échantillon d'étoiles par les méthodes sismiques traditionnelles et l'utilisation de la méthode FliPer.

2. TESS's first planet. A super-Earth transiting the naked-eye star π Mensae
   Astronomy and Astrophysics 619 L10
   DOI : 10.1051/0004-6361/201834289

Gandolfi, D. [...] Bugnet, L. *et al., 2018*

Syllabus : Étude de la première planète détectée par le satellite TESS : c'est une nouvelle planète de type super-Terre découverte autour de l'étoile π-Mensae. Les méthodes sismiques accompagnées de la méthode FliPer ont permis de contraindre la valeur de la gravité de surface de l'étoile, afin de mieux connaitre ce système comprenant désormais deux planètes connues.

1. HD 89345 : a bright oscillating star hosting a transiting warm Saturn-sized planet observed by K2
   Monthly Notices of the RAS 478 4866V

   DOI : 10.1093/mnras/sty1390

   Van Eylen, V. [...] Bugnet, L. *et al., 2018*

   Syllabus : Il est peu fréquent de découvrir une planète de taille comprise entre celles de Neptune et d'Uranus, transitant devant une étoile plus agée que le soleil qui présente des modes d'oscillation. L'étude sismique de l'étoile centrale à laquelle j'ai participé a permis de bien contraindre les caractéristiques de la planète HD 89345, renforçant ainsi nos connaissances de cette classe planétaire.

frontiers

Revisiting the impact of stellar magnetic activity on the detectability of solar-like oscillations by *Kepler*

Savita Mathur [1,2,*], **Rafael A. García** [3,4], **Lisa Bugnet** [3,4], **Ângela R. G. Santos** [5], **Netsha Santiago** [6], **and Paul G. Beck** [1,2,7]

[1] *Instituto de Astrofísica de Canarias, La Laguna, Tenerife, Spain*
[2] *Dpto. de Astrofísica, Universidad de La Laguna, La Laguna, Tenerife, Spain*
[3] *IRFU, CEA, Université Paris-Saclay, Gif-sur-Yvette, France*
[4] *AIM, CEA, CNRS, Université Paris-Saclay, Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, F-91191 Gif-sur-Yvette, France*
[5] *Space Science Institute, 4750 Walnut Street, Suite 205, Boulder CO 80301, USA*
[6] *University of Puerto Rico at Cayey, Puerto Rico*
[7] *Department for Geophysics, Meteorology and Astrophysics, Institute of Physics, Karl-Franzens University of Graz, Universitätsplatz 5/II, 8010 Graz, Austria*

Correspondence*:
Savita Mathur
smathur@iac.es

arXiv:1907.01415v1 [astro-ph.SR] 2 Jul 2019

ABSTRACT

Over 2,000 stars were observed for one month with a high enough cadence in order to look for acoustic modes during the survey phase of the *Kepler* mission. Solar-like oscillations have been detected in about 540 stars. The question of why no oscillations were detected in the remaining stars is still open. Previous works explained the non-detection of modes with the high level of magnetic activity of the stars. However, the sample of stars studied contained some classical pulsators and red giants that could have biased the results. In this work, we revisit this analysis on a cleaner sample of main-sequence solar-like stars that consists of 1,014 stars. First we compute the predicted amplitude of the modes of that sample and for the stars with detected oscillation and compare it to the noise at high frequency in the power spectrum. We find that the stars with detected modes have an amplitude to noise ratio larger than 0.94. We measure reliable rotation periods and the associated photometric magnetic index for 684 stars out of the full sample and in particular for 323 stars where the amplitude of the modes is predicted to be high enough to be detected. We find that among these 323 stars 32% of them have a level of magnetic activity larger than the Sun during its maximum activity, explaining the non-detection of acoustic modes. Interestingly, magnetic activity cannot be the primary reason responsible for the absence of detectable modes in the remaining 68% of the stars without acoustic modes detected and with reliable rotation periods. Thus, we investigate metallicity, inclination angle of the rotation axis, and binarity as possible causes of low mode amplitudes. Using spectroscopic observations for a subsample, we find that a low metallicity could be the reason for suppressed modes. No clear correlation with binarity nor inclination is found. We also derive the lower limit for our photometric activity index (of 20-30 ppm) below which rotation and magnetic activity are

The Astrophysical Journal Letters, 889:L34 (8pp), 2020 February 1 https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab6443
© 2020. The American Astronomical Society. All rights reserved.

Detection and Characterization of Oscillating Red Giants: First Results from the *TESS* Satellite

Víctor Silva Aguirre[1], Dennis Stello[1,2,3], Amalie Stokholm[1], Jakob R. Mosumgaard[1], Warrick H. Ball[1,4], Sarbani Basu[5], Diego Bossini[6], Lisa Bugnet[7,8], Derek Buzasi[9], Tiago L. Campante[6,10], Lindsey Carboneau[9], William J. Chaplin[1,4], Enrico Corsaro[11], Guy R. Davies[1,4], Yvonne Elsworth[1,4], Rafael A. García[7,8], Patrick Gaulme[12,13], Oliver J. Hall[1,4], Rasmus Handberg[1], Marc Hon[2], Thomas Kallinger[14], Liu Kang[15], Mikkel N. Lund[1], Savita Mathur[16,17], Alexey Mints[18], Benoit Mosser[19], Zeynep Çelik Orhan[20], Thaíse S. Rodrigues[21], Mathieu Vrard[6,22], Mutlu Yıldız[20], Joel C. Zinn[2,22,23], Sibel Örtel[20], Paul G. Beck[16,17,24], Keaton J. Bell[25,62], Zhao Guo[26], Chen Jiang[27], James S. Kuszlewicz[12], Charles A. Kuehn[28], Tanda Li[1,3,4], Mia S. Lundkvist[1], Marc Pinsonneault[22], Jamie Tayar[29,63], Margarida S. Cunha[4,6], Saskia Hekker[1,12], Daniel Huber[29], Andrea Miglio[1,4], Mario J. P. F. G. Monteiro[6,10], Ditte Slumstrup[1,30], Mark L. Winther[1], George Angelou[31], Othman Benomar[32,33], Attila Bódi[34,35], Bruno L. De Moura[36], Sébastien Deheuvels[37], Aliz Derekas[34,38,39], Maria Pia Di Mauro[40], Marc-Antoine Dupret[41], Antonio Jiménez[16,17], Yveline Lebreton[19,42], Jaymie Matthews[43], Nicolas Nardetto[44], Jose D. do Nascimento, Jr.[45,46], Filipe Pereira[6,10], Luisa F. Rodríguez Díaz[1], Aldo M. Serenelli[47,48], Emanuele Spitoni[1], Edita Stonkutė[49], Juan Carlos Suárez[50,51], Robert Szabó[34,35], Vincent Van Eylen[52], Rita Ventura[11], Kuldeep Verma[1], Achim Weiss[31], Tao Wu[53,54,55], Thomas Barclay[56,57], Jørgen Christensen-Dalsgaard[1], Jon M. Jenkins[58], Hans Kjeldsen[1], George R. Ricker[59], Sara Seager[59,60,61], and Roland Vanderspek[59]

[1] Stellar Astrophysics Centre (SAC), Department of Physics and Astronomy, Aarhus University, Ny Munkegade 120, DK-8000 Aarhus C, Denmark
victor@phys.au.dk
[2] School of Physics, The University of New South Wales, Sydney, NSW 2052, Australia
[3] Sydney Institute for Astronomy (SIfA), School of Physics, University of Sydney, Sydney, NSW 2006, Australia
[4] School of Physics and Astronomy, University of Birmingham, Birmingham B15 2TT, UK
[5] Department of Astronomy, Yale University, New Haven, CT 06520, USA
[6] Instituto de Astrofísica e Ciências do Espaço, Universidade do Porto, Rua das Estrelas, 4150-762 Porto, Portugal
[7] IRFU, CEA, Université Paris-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France
[8] AIM, CEA, CNRS, Université Paris-Saclay, Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, F-91191 Gif-sur-Yvette, France
[9] Dept. of Chemistry and Physics, Florida Gulf Coast University, 10501 FGCU Boulevard South, Fort Myers, FL 33965, USA
[10] Departamento de Física e Astronomia, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Rua do Campo Alegre, s/n, 4169-007 Porto, Portugal
[11] INAF—Osservatorio Astrofisico di Catania, Via S. Sofia, 78, I-95123 Catania, Italy
[12] Max Planck Institute for Solar System Research, Justus-von-Liebig Weg 3, D-37077 Göttingen, Germany
[13] Department of Astronomy, New Mexico State University, P.O. Box 30001, MSC 4500, Las Cruces, NM 88003-8001, USA
[14] Institut für Astrophysik, Universität Wien, Türkenschanzstrasse 17, A-1180 Vienna, Austria
[15] Department of Astronomy, Beijing Normal University, 100875 Beijing, People's Republic of China
[16] Instituto de Astrofísica de Canarias, E-38200 La Laguna, Tenerife, Spain
[17] Departamento de Astrofísica, Universidad de La Laguna, E-38206 La Laguna, Tenerife, Spain
[18] Leibniz-Institut für Astrophysik Potsdam (AIP), An der Sternwarte 16, D-14482 Potsdam, Germany
[19] LESIA, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Université de Paris, F-92195 Meudon, France
[20] Department of Astronomy and Space Sciences, Science Faculty, Ege University, 35100, Bornova, İzmir, Turkey
[21] Osservatorio Astronomico di Padova—INAF, Vicolo dell'Osservatorio 5, I-35122 Padova, Italy
[22] Department of Astronomy, The Ohio State University, 140 West 18th Avenue, Columbus, OH 43210, USA
[23] Kavli Institute for Theoretical Physics, University of California, Santa Barbara, CA 93106, USA
[24] Institute of Physics, Karl-Franzens University of Graz, NAWI Graz, Universitätsplatz 5/II, A-8010 Graz, Austria
[25] DIRAC Institute, Department of Astronomy, University of Washington, Seattle, WA 98195-1580, USA
[26] Center for Exoplanets and Habitable Worlds, Department of Astronomy and Astrophysics, 525 Davey Laboratory, The Pennsylvania State University, University Park, PA16802, USA
[27] School of Physics and Astronomy, Sun Yat-Sen University, No. 135, Xingang Xi Road, Guangzhou, 510275, People's Republic of China
[28] Department of Physics and Astronomy, University of Northern Colorado, Greeley, CO 80639, USA
[29] Institute for Astronomy, University of Hawaii, 2680 Woodlawn Drive, Honolulu, HI 96822, USA
[30] European Southern Observatory, Alonso de Córdova 3107, Vitacura, Santiago, Chile
[31] Max-Planck-Institut für Astrophysics, Karl Schwarzschild Strasse 1, D-85748, Garching, Germany
[32] Solar Science Observatory, NAOJ, Mitaka, Japan
[33] Center for Space Science, New York University Abu Dhabi, Abu Dhabi, UAE
[34] Konkoly Observatory, Research Centre for Astronomy and Earth Sciences, H-1121 Budapest, Konkoly Thege M. út 15-17, Hungary
[35] MTA CSFK Lendület Near-Field Cosmology Research Group, Hungary
[36] Instituto Federal do R.G. do Norte - IFRN, Brazil
[37] IRAP, Université de Toulouse, CNRS, CNES, UPS, Toulouse, France
[38] ELTE Eötvös Loránd University, Gothard Astrophysical Observatory, Szombathely, Hungary
[39] MTA-ELTE Exoplanet Research Group, 9700 Szombathely, Szent Imre h.u. 112, Hungary
[40] INAF-IAPS, Istituto di Astrofisica e Planetologia Spaziali, Via del Fosso del Cavaliere 100, I-00133 Roma, Italy
[41] STAR Institute, University of Liège, 19C Allée du 6 Août, B-4000 Liège, Belgium
[42] Univ Rennes, CNRS, IPR (Institut de Physique de Rennes) - UMR 6251, F-35000 Rennes, France
[43] Department of Physics and Astronomy, University of British Columbia, Vancouver, Canada
[44] Université Côte d'Azur, Observatoire de la Côte d'Azur, CNRS, Laboratoire Lagrange, France
[45] Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN, Departamento de Física, 59078-970, Natal, RN, Brazil
[46] Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, 60 Garden Street, Cambridge, MA 02138, USA
[47] Instituto de Ciencias del Espacio (ICE, CSIC), Campus UAB, Carrer de Can Magrans, s/n, E-08193 Cerdanyola del Valles, Spain
[48] Institut d'Estudis Espacials de Catalunya (IEEC), Gran Capita 4, E-08034, Barcelona, Spain

arXiv:2001.04653v1 [astro-ph.GA] 14 Jan 2020

Age dating of an early Milky Way merger via asteroseismology of the naked-eye star ν Indi

William J. Chaplin[1,2,3], Aldo M. Serenelli[4,5], Andrea Miglio[1,2], Thierry Morel[6], J. Ted Mackereth[1,2], Fiorenzo Vincenzo[1,2,7,8], Hans Kjeldsen[2,9], Sarbani Basu[10], Warrick H. Ball[1,2], Amalie Stokholm[2], Kuldeep Verma[2], Jakob Rørsted Mosumgaard[2], Victor Silva Aguirre[2], Anwesh Mazumdar[11], Pritesh Ranadive[11], H. M. Antia[12], Yveline Lebreton[13,14], Joel Ong[10], Thierry Appourchaux[15], Timothy R. Bedding[16], Jørgen Christensen-Dalsgaard[2,3], Orlagh Creevey[17], Rafael A. García[18,19], Rasmus Handberg[2], Daniel Huber[20], Steven D. Kawaler[21], Mikkel N. Lund[2], Travis S. Metcalfe[22,23], Keivan G. Stassun[24,25], Michäel Bazot[26,27], Paul Beck[28,29,30], Keaton J. Bell[31,62,23,2], Maria Bergemann[32], Derek L. Buzasi[33], Othman Benomar[27,34], Diego Bossini[35], Lisa Bugnet[18,19], Tiago L. Campante[35,36], Zeynep Çelik Orhan[37], Enrico Corsaro[38], Lucía González-Cuesta[29,30], Guy R. Davies[1,2], Maria Pia Di Mauro[39], Ricky Egeland[40], Yvonne P. Elsworth[1,2], Patrick Gaulme[23,41], Hamed Ghasemi[42], Zhao Guo[43,44], Oliver J. Hall[1,2], Amir Hasanzadeh[45], Saskia Hekker[23,2], Rachel Howe[1,2], Jon M. Jenkins[46], Antonio Jiménez[29,30], René Kiefer[47], James S. Kuszlewicz[23,2], Thomas Kallinger[48], David W. Latham[49], Mia S. Lundkvist[2], Savita Mathur[29,30], Josefina Montalbán[1,2], Benoit Mosser[13], Andres Moya Bedón[1,2], Martin Bo Nielsen[1,2,27], Sibel Örtel[37], Ben M. Rendle[1,2], George R. Ricker[50], Thaíse S. Rodrigues[51], Ian W. Roxburgh[52,1], Hossein Safari[45], Mathew Schofield[1,2], Sara Seager[50,53,54], Barry Smalley[55], Dennis Stello[56,16,2], Róbert Szabó[57,58], Jamie Tayar[20,63], Nathalie Themeßl[23,2], Alexandra E. L. Thomas[1,2], Roland K. Vanderspek[50], Walter E. van Rossem[1,2], Mathieu Vrard[35,36], Achim Weiss[59], Timothy R. White[60,2], Joshua N. Winn[61], Mutlu Yıldız[37]

[1] School of Physics and Astronomy, University of Birmingham, Birmingham B15 2TT, UK
[2] Stellar Astrophysics Centre (SAC), Department of Physics and Astronomy, Aarhus University, Ny Munkegade 120, DK-8000 Aarhus C, Denmark
[3] Kavli Institute for Theoretical Physics, University of California, Santa Barbara, CA 93106, USA
[4] Institute of Space Sciences (ICE, CSIC) Campus UAB, Carrer de Can Magrans s/n, 08193 Barcelona, Spain
[5] Institut d'Estudis Espacials de Catalunya (IEEC), C/ Gran Capità, 2-4, 08034 Barcelona, Spain
[6] Space Sciences, Technologies and Astrophysics Research (STAR) Institute, Université de Liège, Quartier Agora, Allée du 6 Août 19c, Bât. B5C, B4000-Liège, Belgium
[7] Center for Cosmology and AstroParticle Physics, The Ohio State University, 191 West Woodruff Avenue, Columbus, OH 43210, USA
[8] Department of Physics, The Ohio State University, 191 West Woodruff Avenue, Columbus, OH 43210, USA
[9] Institute of Theoretical Physics and Astronomy, Vilnius University, Sauletekio av. 3, 10257 Vilnius, Lithuania
[10] Department of Astronomy, Yale University, P.O. Box 208101, New Haven, CT 06520-8101, USA
[11] Homi Bhabha Centre for Science Education, TIFR, V. N. Purav Marg, Mankhurd, Mumbai 400088, India
[12] Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, India
[13] LESIA, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Université de Paris, 5 place Jules Janssen, 92195 Meudon, France
[14] Univ Rennes, CNRS, IPR (Institut de Physique de Rennes) - UMR 6251, F-35000 Rennes, France
[15] Univ. Paris-Sud, Institut d'Astrophysique Spatiale, UMR 8617, CNRS, Bâtiment 121, 91405 Orsay Cedex, France
[16] Sydney Institute for Astronomy (SIfA), School of Physics, University of Sydney, NSW 2006, Australia
[17] Université Côte d'Azur, Observatoire de la Côte d'Azur, CNRS, Laboratoire Lagrange, France

Draft version April 8, 2019
Typeset using LaTeX **twocolumn** style in AASTeX62

arXiv:1901.01643v2 [astro-ph.EP] 5 Apr 2019

A HOT SATURN ORBITING AN OSCILLATING LATE SUBGIANT DISCOVERED BY TESS

Daniel Huber,[1] William J. Chaplin,[2,3] Ashley Chontos,[1,4] Hans Kjeldsen,[3,5] Jørgen Christensen-Dalsgaard,[3] Timothy R. Bedding,[6,3] Warrick Ball,[2,3] Rafael Brahm,[7,8,9] Nestor Espinoza,[10] Thomas Henning,[10] Andrés Jordán,[8,9] Paula Sarkis,[10] Emil Knudstrup,[3] Simon Albrecht,[3] Frank Grundahl,[3,5] Mads Fredslund Andersen,[3] Pere L. Pallé,[11,12] Ian Crossfield,[13] Benjamin Fulton,[14] Andrew W. Howard,[15] Howard T. Isaacson,[16] Lauren M. Weiss,[1] Rasmus Handberg,[3] Mikkel N. Lund,[3] Aldo M. Serenelli,[17,18] Jakob Rørsted Mosumgaard,[3] Amalie Stokholm,[3] Allyson Bieryla,[19] Lars A. Buchhave,[20] David W. Latham,[19] Samuel N. Quinn,[19] Eric Gaidos,[21] Teruyuki Hirano,[22,1] George R. Ricker,[13] Roland K. Vanderspek,[13] Sara Seager,[13,23,24] Jon M. Jenkins,[25] Joshua N. Winn,[26] H. M. Antia,[27] Thierry Appourchaux,[28] Sarbani Basu,[29] Keaton J. Bell,[30,3] Othman Benomar,[31] Alfio Bonanno,[32] Derek L. Buzasi,[33] Tiago L. Campante,[34,35] Z. Çelik Orhan,[36] Enrico Corsaro,[32] Margarida S. Cunha,[34] Guy R. Davies,[2,3] Sebastien Deheuvels,[37] Samuel K. Grunblatt,[1] Amir Hasanzadeh,[38] Maria Pia Di Mauro,[39] Rafael A. García,[40,41] Patrick Gaulme,[30,3] Léo Girardi,[42] Joyce A. Guzik,[43] Marc Hon,[44] Chen Jiang,[45] Thomas Kallinger,[46] Steven D. Kawaler,[47] James S. Kuszlewicz,[30,3] Yveline Lebreton,[48,49] Tanda Li,[6,3] Miles Lucas,[47] Mia S. Lundkvist,[3,50] Andrew W. Mann,[51] Stéphane Mathis,[40,41] Savita Mathur,[11,12] Anwesh Mazumdar,[52] Travis S. Metcalfe,[53,54] Andrea Miglio,[2,3] Mário J. P. F. G. Monteiro,[34,35] Benoit Mosser,[48] Anthony Noll,[37] Benard Nsamba,[34,35] Jia Mian Joel Ong,[29] S. Örtel,[36] Filipe Pereira,[34,35] Pritesh Ranadive,[52] Clara Régulo,[11,12] Thaíse S. Rodrigues,[42] Ian W. Roxburgh,[55] Victor Silva Aguirre,[3] Barry Smalley,[56] Mathew Schofield,[2,3] Sérgio G. Sousa,[34] Keivan G. Stassun,[57,58] Dennis Stello,[44,6,3] Jamie Tayar,[1,59] Timothy R. White,[60] Kuldeep Verma,[3] Mathieu Vrard,[34] M. Yildiz,[36] David Baker,[61] Michaël Bazot,[31] Charles Beichmann,[62] Christoph Bergmann,[63] Lisa Bugnet,[40,41] Bryson Cale,[64] Roberto Carlino,[65] Scott M. Cartwright,[66] Jessie L. Christiansen,[62] David R. Ciardi,[62] Orlagh Creevey,[67] Jason A. Dittmann,[19] Jose-Dias Do Nascimento Jr.,[19,68] Vincent Van Eylen,[26] Gabor Fürész,[13] Jonathan Gagné,[69] Peter Gao,[16] Kosmas Gazeas,[70] Frank Giddens,[71] Oliver J. Hall,[2,3] Saskia Hekker,[30,3] Michael J. Ireland,[60] Natasha Latouf,[64] Danny LeBrun,[64] Alan M. Levine,[13] William Matzko,[64] Eva Natinsky,[61] Emma Page,[61] Peter Plavchan,[64] Masoud Mansouri-Samani,[65] Sean McCauliff,[72] Susan E. Mullally,[73] Brendan Orenstein,[60] Aylin Garcia Soto,[23] Martin Paegert,[19] Jennifer L. van Saders,[1] Chloe Schnaible,[61] David R. Soderblom,[73] Róbert Szabó,[74,75] Angelle Tanner,[76] C. G. Tinney,[63] Johanna Teske,[69,77,59] Alexandra Thomas,[2,3] Regner Trampedach,[53,3] Duncan Wright,[78] Thomas T. Yuan,[61] and Farzaneh Zohrabi[76]

[1] *Institute for Astronomy, University of Hawai'i, 2680 Woodlawn Drive, Honolulu, HI 96822, USA*
[2] *School of Physics and Astronomy, University of Birmingham, Birmingham B15 2TT, UK*
[3] *Stellar Astrophysics Centre (SAC), Department of Physics and Astronomy, Aarhus University, Ny Munkegade 120, DK-8000 Aarhus C, Denmark*
[4] *NSF Graduate Research Fellow*
[5] *Institute of Theoretical Physics and Astronomy, Vilnius University, Sauletekio av. 3, 10257 Vilnius, Lithuania*
[6] *Sydney Institute for Astronomy (SIfA), School of Physics, University of Sydney, NSW 2006, Australia*
[7] *Center of Astro-Engineering UC, Pontificia Universidad Católica de Chile, Av. Vicuña Mackenna 4860, 7820436 Macul, Santiago, Chile*
[8] *Instituto de Astrofísica, Facultad de Física, Pontificia Universidad Católica de Chile*
[9] *Millennium Institute of Astrophysics, Av. Vicuña Mackenna 4860, 782-0436 Macul, Santiago, Chile*
[10] *Max-Planck-Institut fur Astronomie, Königstuhl 17, D-69117 Heidelberg, Germany*
[11] *Instituto de Astrofísica de Canarias (IAC), 38205 La Laguna, Tenerife, Spain*
[12] *Universidad de La Laguna (ULL), Departamento de Astrofísica, E-38206 La Laguna, Tenerife, Spain*
[13] *Department of Physics, and Kavli Institute for Astrophysics and Space Research, Massachusetts Institute of Technology, 77 Massachusetts Ave., Cambridge, MA 02139, USA*
[14] *NASA Exoplanet Science Institute / Caltech-IPAC, Pasadena, CA 91125, USA*
[15] *California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125, USA*
[16] *Department of Astronomy, UC Berkeley, Berkeley, CA 94720, USA*
[17] *Institute of Space Sciences (ICE, CSIC) Campus UAB, Carrer de Can Magrans, s/n, E-08193, Barcelona, Spain*
[18] *Institut dEstudis Espacials de Catalunya (IEEC), C/Gran Capita, 2-4, E-08034, Barcelona, Spain*
[19] *Center for Astrophysics |Harvard & Smithsonian, 60 Garden St., Cambridge, MA 02138, USA*
[20] *DTU Space, National Space Institute, Technical University of Denmark, Elektrovej 328, DK-2800 Kgs. Lyngby, Denmark*

huberd@hawaii.edu

MNRAS 000, 1–15 (2018) Preprint 5 March 2019 Compiled using MNRAS LATEX style file v3.0

A Search for Red Giant Solar-like Oscillations in All *Kepler* Data

Marc Hon[1]★, Dennis Stello[1,2,3], Rafael A. García[4,5], Savita Mathur[6,7,8], Sanjib Sharma[2], Isabel L. Colman[2,3], and Lisa Bugnet[4,5]

[1]*School of Physics, The University of New South Wales, Sydney NSW 2052, Australia*
[2]*Sydney Institute for Astronomy (SIfA), School of Physics, University of Sydney, NSW 2006, Australia*
[3]*Stellar Astrophysics Centre, Department of Physics and Astronomy, Aarhus University, Ny Munkegade 120, DK-8000 Aarhus C, Denmark*
[4]*IRFU, CEA, Université Paris-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France*
[5]*Université Paris Diderot, AIM, Sorbonne Paris Cité, CEA, CNRS, F-91191 Gif-sur-Yvette, France*
[6]*Instituto de Astrofísica de Canarias, E-38200, La Laguna, Tenerife, Spain*
[7]*Universidad de La Laguna, Departamento de Astrofísica, E-38205, La Laguna, Tenerife, Spain*
[8]*Space Science Institute, 4750 Walnut Street Suite 205, Boulder, CO 80301, USA*

arXiv:1903.00115v2 [astro-ph.SR] 4 Mar 2019

Accepted XXX. Received YYY; in original form ZZZ

ABSTRACT

The recently published *Kepler* mission Data Release 25 (DR25) reported on ∼197,000 targets observed during the mission. Despite this, no wide search for red giants showing solar-like oscillations have been made across all stars observed in *Kepler*'s long-cadence mode. In this work, we perform this task using custom apertures on the *Kepler* pixel files and detect oscillations in 21,914 stars, representing the largest sample of solar-like oscillating stars to date. We measure their frequency at maximum power, $\nu_{\rm max}$, down to $\nu_{\rm max} \simeq 4\mu$Hz and obtain $\log(g)$ estimates with a typical uncertainty below 0.05 dex, which is superior to typical measurements from spectroscopy. Additionally, the $\nu_{\rm max}$ distribution of our detections show good agreement with results from a simulated model of the Milky Way, with a ratio of observed to predicted stars of 0.992 for stars with $10\mu{\rm Hz} < \nu_{\rm max} < 270\mu{\rm Hz}$. Among our red giant detections, we find 909 to be dwarf/subgiant stars whose flux signal is polluted by a neighbouring giant as a result of using larger photometric apertures than those used by the NASA *Kepler* Science Processing Pipeline. We further find that only 293 of the polluting giants are known *Kepler* targets. The remainder comprises over 600 newly identified oscillating red giants, with many expected to belong to the galactic halo, serendipitously falling within the *Kepler* pixel files of targeted stars.

Key words: asteroseismology – methods: data analysis – techniques: image processing – stars: oscillations – stars: statistics

1 INTRODUCTION

Red giants showing solar-like oscillations from NASA's *Kepler* mission (Borucki et al. 2010) are critical to our understanding of stellar evolution and stellar populations. The asteroseismic study of such oscillations provides us with the ability to probe the stellar interior conditions such as core rotation rates (Beck et al. 2011; Mosser et al. 2012; Deheuvels et al. 2014), and possibly core magnetic fields (Fuller et al. 2015; Stello et al. 2016a,b), whose existence remains highly investigated (e.g. Mosser et al. 2017). Moreover, the large number of oscillating red giants from *Kepler* has provided us with the opportunity to study and characterize large stellar populations through ensemble analyses (Chaplin & Miglio 2013; Hekker & Christensen-Dalsgaard 2017; García & Stello 2018) that can inform galactic archaeology studies (e.g. Casagrande et al. 2015; Sharma et al. 2016; Aguirre et al. 2018).

From the 197,096 stars observed by *Kepler* in long-cadence ($\Delta T \simeq 30$min.) from the *Kepler* Data Release 25 (DR25), there is a current combined total of ∼19000 identified oscillating red giants reported in literature (Yu et al. 2018). This sample comes from ensemble studies of previous data releases (Hekker et al. 2011; Huber et al. 2011; Stello et al. 2013) and newly identified targets (Huber et al. 2014; Mathur et al. 2016; Yu et al. 2016), from which only ∼16000 have been analysed seismically based on the full end-of-mission 4-year light curves (Yu et al. 2018). This number represents a significant fraction of the total number of *Kepler* targets. However, recent population estimates from Gaia-derived radii on ∼178,000 *Kepler* DR25 stars showed that the number of *Kepler* red giants is approximately 21,000 (Berger et al. 2018, hereafter B18),

★ E-mail: mtyh555@uowmail.edu.au

© 2018 The Authors

Astronomy & Astrophysics manuscript no. DGandolfi_Pi_Men
November 9, 2018
©ESO 2018

Letter to the Editor

TESS's first planet:

a super-Earth transiting the naked-eye star π Mensae

D. Gandolfi[1], O. Barragán[1], J. H. Livingston[2], M. Fridlund[3,4], A. B. Justesen[5], S. Redfield[6], L. Fossati[7], S. Mathur[8,9], S. Grziwa[10], J. Cabrera[11], R. A. García[12,13], C. M. Persson[3], V. Van Eylen[14], A. P. Hatzes[15], D. Hidalgo[8,9], S. Albrecht[5], L. Bugnet[12,13], W. D. Cochran[16], Sz. Csizmadia[11], H. Deeg.[8,9], Ph. Eigmuller[11], M. Endl[16], A. Erikson[11], M. Esposito[15], E. Guenther[15], J. Korth[10], R. Luque[8,9], P. Montañes Rodríguez[8,9], D. Nespral[8,9], G. Nowak[8,9], M. Patzold[10], J. Prieto-Arranz[8,9]

(Affiliations can be found after the references)

Received September 20, 2018; accepted September 28, 2018

ABSTRACT

We report on the confirmation and mass determination of π Men c, the first transiting planet discovered by NASA's *TESS* space mission. π Men is a naked-eye (V=5.65 mag), quiet G0 V star that was previously known to host a sub-stellar companion (π Men b) on a long-period ($P_{\rm orb}$ = 2091 days), eccentric (e = 0.64) orbit. Using *TESS* time-series photometry, combined with *Gaia* data, published UCLES@AAT Doppler measurements, and archival HARPS@ESO-3.6m radial velocities, we found that π Men c is a close-in planet with an orbital period of $P_{\rm orb}$ = 6.27 days, a mass of $M_{\rm c}$ = 4.52 ± 0.81 $M_{\oplus}$, and a radius of $R_{\rm c}$ = 2.06 ± 0.03 $R_{\oplus}$. Based on the planet's orbital period and size, π Men c is a super-Earth located at, or close to, the radius gap, while its mass and bulk density suggest it may have held on to a significant atmosphere. Because of the brightness of the host star, this system is highly suitable for a wide range of further studies to characterize the planetary atmosphere and dynamical properties. We also performed an asteroseismic analysis of the *TESS* data and detected a hint of power excess consistent with the seismic values expected for this star, although this result depends on the photometric aperture used to extract the light curve. This marginal detection is expected from pre-launch simulations hinting at the asteroseismic potential of the *TESS* mission for longer, multi-sector observations and/or for more evolved bright stars.

Key words. Planetary systems – Planets and satellites: individual: π Mensae b, π Mensae c – Stars: fundamental parameters – Stars: individual: π Mensae – Techniques: photometric – Techniques: radial velocities

arXiv:1809.07573v2 [astro-ph.EP] 8 Nov 2018

1. Introduction

Successfully launched on 18 April 2018, NASA's Transiting Exoplanet Survey Satellite (*TESS*; Ricker et al. 2015) will provide us with a leap forward in understanding the diversity of small planets ($R_{\rm p} < 4\,R_{\oplus}$). Unlike previous space missions, *TESS* is performing an all-sky transit survey focusing on bright stars ($5 < V < 11$ mag) so that detailed characterizations of the planets and their atmospheres can be performed. In its two-year prime mission, *TESS* observes first the southern and then the northern ecliptic hemisphere. The survey is broken up into 26 anti-solar sky sectors. *TESS* uses four cameras to observe each sector, resulting in a combined field of view of $24^{\circ} \times 96^{\circ}$. The overlap between sectors towards the ecliptic poles provides greater sensitivity to smaller and longer-period planets in those regions of the celestial sphere. *TESS* records full-frame images of its entire field of view every 30 minutes and observes approximately 200 000 pre-selected main-sequence stars with a cadence of ∼2 minutes. The mission will certainly open a new era in the study of close-in small planets, providing us with cornerstone objects amenable to both mass determination – via Doppler spectroscopy – and atmospheric characterization – via transmission spectroscopy with NASA's James Webb space telescope (*JWST*) and the next generation of extremely large ground-based telescopes (*ELT*, *TMT*, and *GMT*).

Following a successful commissioning of 3 months, *TESS* started the science operation on 25 July 2018 by photometrically monitoring its first sector (Sector 1), which is centered at coordinates $\alpha = 352.68^{\circ}$, $\delta = -64.85^{\circ}$ (J2000). Shortly after ∼30 days of (almost) continuous observations in Sector 1, 73 transiting planet candidates were detected in the two-minute cadence light curves by the *TESS* team and made available to the scientific community upon registration to a dedicated web portal hosted at the Massachusetts Institute of Technology (MIT) web page[1].

In this letter, we present the spectroscopic confirmation of π Men c, the first transiting planet discovered by the *TESS* space mission. The host star is π Mensae (HD 39091; Table 1), a naked-eye (V=5.65 mag), relatively inactive ($\log R'_{\rm HK} = -4.941$; Gray et al. 2006) G0 V star already known to host a sub-stellar companion (π Men b) on a ∼2100-day eccentric ($e \approx 0.6$) orbit (Jones et al. 2002). π Men c is a $2.06\,R_{\oplus}$ planet with an orbital period of 6.27 days. Using *Gaia* photometry, archival HARPS Doppler data, and published UCLES high-precision radial velocities (RVs) we confirmed the planetary nature of the transiting signal detected by *TESS* and derived the planet's mass. We note that in the final stage of preparing this manuscript, an independent investigation of this system was publicly announced by Huang et al. (2018).

[1] Available at https://tess.mit.edu/alerts/.

MNRAS 000, 1–14 (0000) Preprint 7th May 2018 Compiled using MNRAS LATEX style file v3.0

HD 89345: a bright oscillating star hosting a transiting warm Saturn-sized planet observed by K2

V. Van Eylen[1★], F. Dai[2,3], S. Mathur[4,5], D. Gandolfi[6], S. Albrecht[7], M. Fridlund[8,1], R. A. García[9,10], E. Guenther[11], M. Hjorth[7], A. B. Justesen[7], J. Livingston[12], M. N. Lund[7], F. Pérez Hernández[4,5], J. Prieto-Arranz[4,5], C. Regulo[4,5], L. Bugnet[9,10], M. E. Everett[13], T. Hirano[14], D. Nespral[4,5], G. Nowak[4,5], E. Palle[4,5], V. Silva Aguirre[7], T. Trifonov[15], J. N. Winn[3], O. Barragán[6], P. G. Beck[4,5], W. J. Chaplin[16,7], W. D. Cochran[17], S. Csizmadia[18], H. Deeg[4,5], M. Endl[17], P. Heeren[22], S. Grziwa[19], A. P. Hatzes[11], D. Hidalgo[4,5], J. Korth[19], S. Mathis[9,10], P. Montañes Rodriguez[4,5], N. Narita[12,20,21], M. Patzold[19], C. M. Persson[8], F. Rodler[23], A. M. S. Smith[18]

[1] *Leiden Observatory, Leiden University, postbus 9513, 2300RA Leiden, The Netherlands*
[2] *Department of Physics and Kavli Institute for Astrophysics and Space Research, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 02139, USA*
[3] *Department of Astrophysical Sciences, Princeton University, 4 Ivy Lane, Princeton, NJ, 08544, USA*
[4] *Departamento de Astrofísica, Universidad de La Laguna, E-38206, Tenerife, Spain*
[5] *Instituto de Astrofísica de Canarias, C/ Vía Láctea s/n, E-38205, La Laguna, Tenerife, Spain*
[6] *Dipartimento di Fisica, Università degli Studi di Torino, via Pietro Giuria 1, I-10125, Torino, Italy*
[7] *Stellar Astrophysics Centre, Deparment of Physics and Astronomy, Aarhus University, Ny Munkegade 120, DK-8000 Aarhus C, Denmark*
[8] *Department of Space, Earth and Environment, Chalmers University of Technology, Onsala Space Observatory, 439 92 Onsala, Sweden*
[9] *IRFU, CEA, Université Paris-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France*
[10] *Université Paris Diderot, AIM, Sorbonne Paris Cité, CEA, CNRS, F-91191 Gif-sur-Yvette, France*
[11] *Thüringer Landessternwarte Tautenburg, Sternwarte 5, D-07778 Tautenberg, Germany*
[12] *Department of Astronomy, Graduate School of Science, The University of Tokyo, Hongo 7-3-1, Bunkyo-ku, Tokyo, 113-0033, Japan*
[13] *National Optical Astronomy Observatory, 950 North Cherry Avenue Tucson, AZ 85719, USA*
[14] *Department of Earth and Planetary Sciences, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8551, Japan*
[15] *Max-Planck-Institut für Astronomie, Königstuhl 17, D-69117 Heidelberg, Germany*
[16] *School of Physics and Astronomy, University of Birmingham, Edgbaston, Birmingham, B15 2TT, UK*
[17] *Department of Astronomy and McDonald Observatory, University of Texas at Austin, 2515 Speedway, Stop C1400, Austin, TX 78712, USA*
[18] *Institute of Planetary Research, German Aerospace Center, Rutherfordstrasse 2, 12489 Berlin, Germany*
[19] *Rheinisches Institut für Umweltforschung, Abteilung Planetenforschung an der Universität zu Köln, Aachener Strasse 209, 50931 Köln, Germany*
[20] *Astrobiology Center, NINS, 2-21-1 Osawa, Mitaka, Tokyo 181-8588, Japan*
[21] *National Astronomical Observatory of Japan, NINS, 2-21-1 Osawa, Mitaka, Tokyo 181-8588, Japan*
[22] *ZAH-Landessternwarte Heidelberg, Königstuhl 12, 69117 Heidelberg, Germany*
[23] *European Southern Observatory, Alonso de Córdova 3107, Vitacura, Casilla, 19001, Santiago de Chile, Chile*

7th May 2018

arXiv:1805.01860v1 [astro-ph.EP] 4 May 2018

ABSTRACT

We report the discovery and characterization of HD 89345b (K2-234b; EPIC 248777106b), a Saturn-sized planet orbiting a slightly evolved star. HD 89345 is a bright star (V = 9.3 mag) observed by the K2 mission with one-minute time sampling. It exhibits solar-like oscillations. We conducted asteroseismology to determine the parameters of the star, finding the mass and radius to be $1.12^{+0.04}_{-0.01}$ $M_\odot$ and $1.657^{+0.020}_{-0.004}$ $R_\odot$, respectively. The star appears to have recently left the main sequence, based on the inferred age, $9.4^{+0.4}_{-1.3}$ Gyr, and the non-detection of mixed modes. The star hosts a "warm Saturn" ($P = 11.8$ days, $R_p = 6.86 \pm 0.14$ $R_\oplus$). Radial-velocity follow-up observations performed with the FIES, HARPS, and HARPS-N spectrographs show that the planet has a mass of 35.7 ± 3.3 $M_\oplus$. The data also show that the planet's orbit is eccentric ($e \approx 0.2$). An investigation of the rotational splitting of the oscillation frequencies of the star yields no conclusive evidence on the stellar inclination angle. We further obtained Rossiter-McLaughlin observations, which result in a broad posterior of the stellar obliquity. The planet seems to conform to the same patterns that have been observed for other sub-Saturns regarding planet mass and multiplicity, orbital eccentricity, and stellar metallicity.

© 0000 The Authors

Key words: planets and satellites: composition – planets and satellites: formation – planets and satellites: fundamental parameters – asteroseismology

CHAPITRE 5

FLIPER$_{\mathrm{CLASS}}$: VERS UNE DÉTECTION AUTOMATIQUE DES ÉTOILES DE TYPE SOLAIRE

Sommaire

5.1 Représentation spectrale des pulsateurs stellaires et méthodes de reconnaissance **145**
5.1.1 Présentation des pulsateurs stellaires étudiés 145
5.1.2 Reconnaissance des étoiles variables 149
5.2 FliPer$_{\mathrm{Class}}$: une Forêt Aléatoire pour la classification automatique des étoiles pulsantes **151**
5.2.1 Arbre individuel de classification 151
5.2.2 Forêt Aléatoire de classification 152
5.2.3 Estimation du taux d'erreur de classification 153
5.2.4 Calibration de l'algorithme : estimation des probabilités d'appartenance des étoiles aux différentes classes 153
5.3 Détection des étoiles de type solaire observées lors de la mission *Kepler* **154**
5.3.1 Données utilisées 154
5.3.2 Paramètres et entraînement de FliPer$_{\mathrm{Class}}$ 155
5.3.3 Performances et résultats 159
5.3.4 Classification binaire de $\sim 160\,000$ étoiles observées par *Kepler* 163
5.4 Classification des différents types d'étoiles variables observées par *Kepler* **166**
5.4.1 Données utilisées 166
5.4.2 Paramètres, hyperparamètres, et entraînement de FliPer$_{\mathrm{Class}}$ pour la classification des pulsateurs observés par *Kepler* 166
5.4.3 Performances et résultats 167
5.4.4 Classification des étoiles observées par *Kepler* 171
5.5 Préparation de l'analyse des données de la mission TESS : classification d'étoiles simulées **173**
5.5.1 Quelques vérifications supplémentaires à partir des données de *Kepler* 173
5.5.2 Classification des données simulées de TESS 177
5.6 Conclusions & Perspectives **180**

Enjeux de la classification sismique des étoiles

L'estimation des paramètres globaux des étoiles de type solaire, comme celle réalisée au chapitre précédent, ainsi que les études physiques sur la dynamique interne des étoiles de type solaire reposent sur la détection préalable des modes d'oscillation parmi les données à disposition. Les missions spatiales qui mènent une observation photométrique d'étoiles, comme *Kepler*, K2, TESS ou bien PLATO (future mission) observent un

catalogue prédéfini de sources (appelées par exemple « *Kepler* Input Catalog » (KIC) (Brown et al., 2011b) lors de la mission *Kepler*, ou encore « TESS Input Catalog » (TIC) et « Asteroseismic Target List » (ATL, Schofield et al., 2019) pour la mission TESS). Ces étoiles observées sont choisies pour certaines de leur caractéristiques, définies par les objectifs de la mission. Par exemple la mission TESS se focalise sur les étoiles de type spectral M, K et qui peut s'étendre vers les G, optimal pour la recherche de planètes situées dans la zone d'habitabilité avec de courtes périodes orbitales. Le satellite TESS observe certaines étoiles en particulier (TESS Object of Interest (TOI), etc.) avec une cadence d'acquisition de 2 minutes. Mais dans le même temps, le satellite réalise des observations beaucoup plus larges, représentant une portion du ciel de 24×96 degrés, avec une cadence de 30 minutes : les images qui en résultent sont appelées « full frame images » (FFI) et contiennent chacune des centaines de milliers d'étoiles. Dans le cas de la mission *Kepler*, le champ d'observation est fixe, et contient $\sim 200,000$ étoiles qui sont pour la plupart dans la plage de magnitude *Kepler* K_p $\sim$[$7-8:16$]. La mission K2 qui suit observe avec le même détecteur différentes parties du ciel, augmentant en conséquence le nombre d'étoiles observées, pour la plupart desquelles les caractéristiques fondamentales telles que l'âge, la masse ou bien le type de pulsateur sont également *a priori* inconnues.

À chacune des missions évoquées se rattachent des catalogues des étoiles observées, référençant des estimations spectroscopiques ou photométriques des paramètres de surface $T_{\rm eff}$, $\log g$, de la masse et du rayon des étoiles par exemple (e.g. Huber et al., 2014, 2016). En revanche, ces catalogues ne contiennent pas d'information sur la nature des pulsations des étoiles. Les étoiles qui ont été référencées comme étant de type solaire constituent des catalogues séparés composés uniquement d'étoiles de type solaire, dans lesquels les estimations astérosismiques sont ajoutées aux paramètres photométriques et spectroscopiques (e.g. Mathur et al., 2016, 2017; Yu et al., 2018). Il n'y a donc pas de catalogue généralisé indiquant la nature des pulsations des étoiles observées par les différentes missions photométriques. Le diagramme 5.1 représente les différents types de pulsateurs stellaires connus dans le diagramme de Hertzsprung-Russell. Une mesure précise de la $T_{\rm eff}$ et de la luminosité des étoiles permet de distinguer grossièrement les différents types de pulsateurs sur ce diagramme comme il a été fait par le code couleur sur la figure 5.1. En revanche, certains types de pulsateurs peuplent les mêmes plages du diagramme (voir aussi figure 2.9), rendant difficile leur distinction directe, comme pour les pulsateurs localisés proches de la bande d'instabilité représentée par la bande noire sur la figure 5.1. De plus, les grandes incertitudes de mesure sur $T_{\rm eff}$, $[{\rm Fe/H}]$ et L (voir Chapitre 4) conduisent à des délimitations incertaines entre les différents types de pulsateurs observés. Afin de mener à bien les études observationnelles de physique stellaire, il est donc nécessaire dans un premier temps de caractériser sismiquement les étoiles. De nombreuses études se sont donc portées sur la caractérisation observationnelle des types d'étoiles observées lors de la mission *Kepler*. (e.g. Kolenberg et al., 2010; Molnár et al., 2018) pour la détection des RRLyrae et Céphéides, (e.g. Prsa et al., 2011) pour les étoiles binaires à éclipses, (e.g. Uytterhoeven et al., 2011) pour les étoiles A-F. (e.g. Tkachenko et al., 2012; Kurtz et al., 2015; Balona, 2018) pour les γDoradus, (e.g. Balona, 2018) pour les δScuti, (e.g. Kurtz et al., 2015) pour les étoiles de type B à pulsation lente (SPB), et enfin (e.g. Chaplin et al., 2014; Mathur et al., 2016; Davies et al., 2017; Yu et al., 2018, 2020; Hon et al., 2018a) pour les étoiles de type solaire. Malgré tout, il n'existe à ce jour aucun catalogue complet référençant les types de pulsations des étoiles observées lors des missions *Kepler* ou bien K2, et l'analyse des récentes données de TESS est rendue difficile par la difficulté de reconnaissance des types de pulsateurs et/ou état évolutif des étoiles.

À cette difficulté de reconnaissance intrinsèque aux propriétés des étoiles s'ajoute désormais la problématique associée à la quantité sans cesse croissante de données à étudier, comme détaillé dans l'introduction de ce manuscrit. Djorgovski et al. (2013) présente dans sa revue l'explosion de la quantité de données depuis les années 1990 : « l'astrophysique du 21ème siècle » a besoin de méthodes informatiques de plus en plus performantes pour tirer profit des grandes quantités de données.

Dans ce contexte nous dédions ce chapitre à la classification automatique des étoiles pulsantes observées par les missions Kepler, K2 et TESS. Dans une première section nous présentons brièvement les différents type d'étoiles pulsantes observées, ainsi que les méthodes de détection existantes associées. Nous expliquons ensuite le fonctionnement de notre méthode de détection automatique FliPer$_{\rm Class}$*, puis détectons les étoiles oscillantes de type solaire parmi les données du satellite Kepler. Nous élargissons ensuite dans la section 5.4 la*

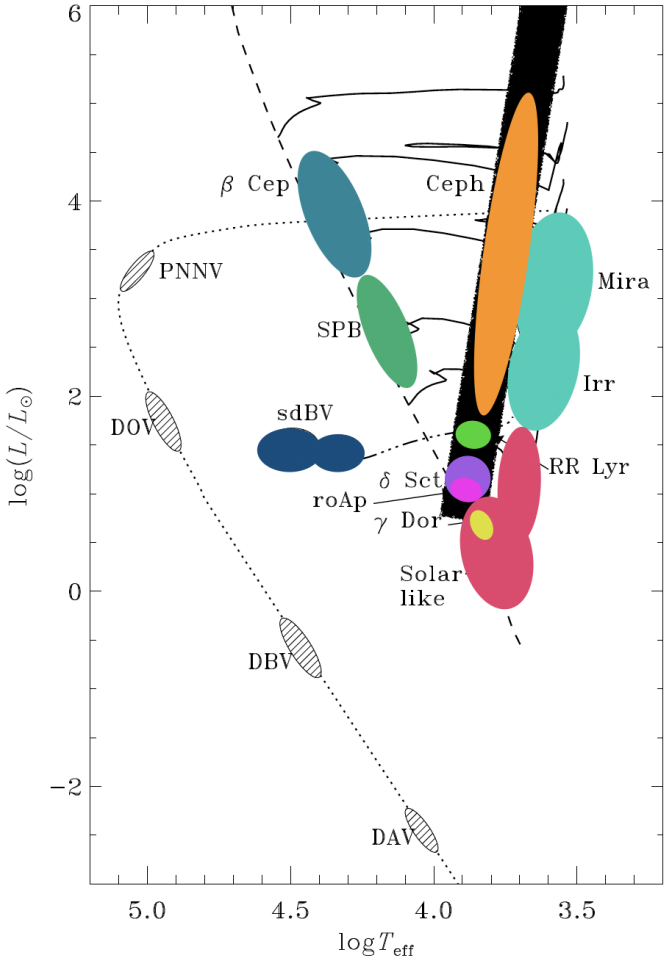


FIGURE 5.1: Diagramme de Hertzsprung-Russell représentant les différents types d'étoiles pulsantes. Le code couleur désignant les différents types de pulsateurs sera réutilisé au long de ce chapitre : rouge ⇔ étoiles de type solaire, jaune ⇔ γDoradus, violet ⇔ δScuti, rose ⇔ étoiles Ap oscillant rapidement, vert clair ⇔ RRLyrae, orange ⇔ Céphéides, bleu clair ⇔ étoiles variables à longue période, bleu moyen ⇔ βCeph, vert foncé ⇔ étoiles B à pulsations lentes, et bleu foncé ⇔ sdBV. La bande noire indique la position de la bande d'instabilité. Adapté à partir de Christensen-Dalsgaard (2004)

classification aux différents types de pulsateurs observés par Kepler. Enfin, des données simulées du satellite TESS nous permettent d'évaluer le potentiel de la méthode de classification FliPer$_{\text{Class}}$ *pour reconnaître les différents types de pulsateurs parmi les dizaines de millions d'étoiles observées par TESS.*

5.1 Représentation spectrale des pulsateurs stellaires et méthodes de reconnaissance

Dans cette section nous présentons brièvement les différents types de pulsateurs que nous visons à classifier, ainsi que les méthodes visant à les reconnaître. Nous nous référons à l'introduction du manuscrit de thèse de Bowman (2016) pour une description détaillée des différents types d'étoiles pulsantes.

5.1.1 Présentation des pulsateurs stellaires étudiés

Étoiles de type solaire

Les étoiles présentant des oscillations de type solaire depuis la séquence principale jusqu'aux stades évolutifs de géante rouge ont été étudiées dans le chapitre 4, et leurs propriétés ne seront pas détaillées à nouveau. La figure 5.2 représente la PSD de KIC 8298090, une étoile de type solaire sur la séquence principale qui présente des signatures de la rotation à basse fréquence.

δScuti

Les δ Scuti (δ Sct) sont des pulsateurs de masse intermédiaire ($1.5 \mathrm{M}_{\odot} \leq \mathrm{M}_{\star} \leq 2.5\ \mathrm{M}_{\odot}$) dans la zone d'instabilité (Cunha, 2002) à la frontière avec la séquence principale (représentée par la bande noire sur la figure 5.1). Ils ont été largement étudiés (e.g. Fath, 1935; Colacevich, 1935; Breger, 2000; Aerts et al., 2010; Murphy et al., 2014) depuis leur découverte par Campbell & Wright (1900), et se sont révélés être le type de pulsateur le plus courant pour les étoiles A et F. Les pulsations sont auto-excitées par le mécanisme κ, ce qui les place dans la catégorie des « pulsateurs classiques » définie dans l'introduction de ce manuscrit. Pour des δ Sct les modes excités sont de nature acoustique et/ou de gravité, à la fois radiaux et non radiaux, avec un ordre faible : ils ne sont pas concernés par le régime asymptotique de Tassoul (1980), ce qui rend difficile leur identification dans la PSD. Nous nous référons à la revue de Bowman (2016) pour le détail de l'identification des modes d'oscillation des δ Sct. L'étoile KIC 7106205 est représentée sur la figure 5.2 comme exemple de PSD d'une δScuti. Nous observons une PSD dense en pics de grande amplitude, signature d'oscillations non-radiales.

Étoile de type A, composition chimique particulière, rotation rapide (roAp)

Le groupe des étoiles de type spectral A renferme de nombreuses étoiles particulières. Parmi celles-ci, nous trouvons un faible échantillon d'étoiles fortement magnétisées en rotation rapide (roAp). Leur particularité chimique résulte d'une combinaison entre la sédimentation gravitationnelle des éléments lourds et la présence d'un fort champ magnétique qui tend à diffuser les métaux vers le surface. Celles en rotation rapide (roAp) présentent des pulsations à période multiple dans la plage $5 - 25$ minutes (Smalley et al., 2015) et d'amplitude pouvant atteindre 20 mmag (e.g. Kurtz, 1990; Holdsworth et al., 2014). Elles se trouvent au bord de la séquence principale, dans la bande d'instabilité du diagramme 5.1 (Cunha, 2002; Théado et al., 2008). L'origine de leurs pulsations intrinsèques est mal déterminée, supposée résulter du méchanisme κ dans la zone d'ionisation de l'hydrogène, mais ce mécanisme ne fonctionne pas pour toutes les roAp observées (Cunha et al., 2013). Sur la figure 5.2 nous observons la PSD de KIC 4768731, l'un des plus lents rotateurs parmi les 61 roAp observées par *Kepler* (Smalley et al., 2015).

γDoradus

Les γ Dor sont également des étoiles de type $\mathrm{A} - \mathrm{F}$. Elles présentent pour leur part des modes dont la nature est interprétée à partir de leur période comme étant de gravité non radiaux. Les variations de la luminosité de ces étoiles sont de l'ordre de 0.1 mag, et leur période est de ~ 1 jour. La mesure de leur période permet une estimation de l'âge de ces étoiles (Miglio et al., 2008). La figure 5.2 montre la PSD de KIC 7661054, une étoile γ Dor observée par *Kepler* et découverte par Murphy et al. (2016).

Certaines γ Dor présentent à la fois les modes g habituels, mais aussi des modes radiaux acoustiques en provenance de la surface : ce sont des étoiles hybrides δ Sct –γ Dor qui sont très utilisées pour déduire les profils de rotation radiaux des étoiles (Kurtz et al., 2014).

β-Cephei

Les étoiles de type βCephei sont caractérisées par des oscillations acoustiques radiales et non-radiales. La périodicité des pulsations est de 3 à 8 heures, et leur amplitude est d'environ 0.1 mag. Les pulsations de ces étoiles massives de type spectral O-B sont considérées d'origine κ, la sur-opacité provenant de surabondance de fer dans l'enveloppe profonde (connue sous le nom de « Z bump », Dziembowski & Pamyatnykh, 1993; Gautschy, 1993). Le mode fondamental domine largement le signal, et leur PSD est faiblement peuplée par les modes de bas degré p et/ou g.

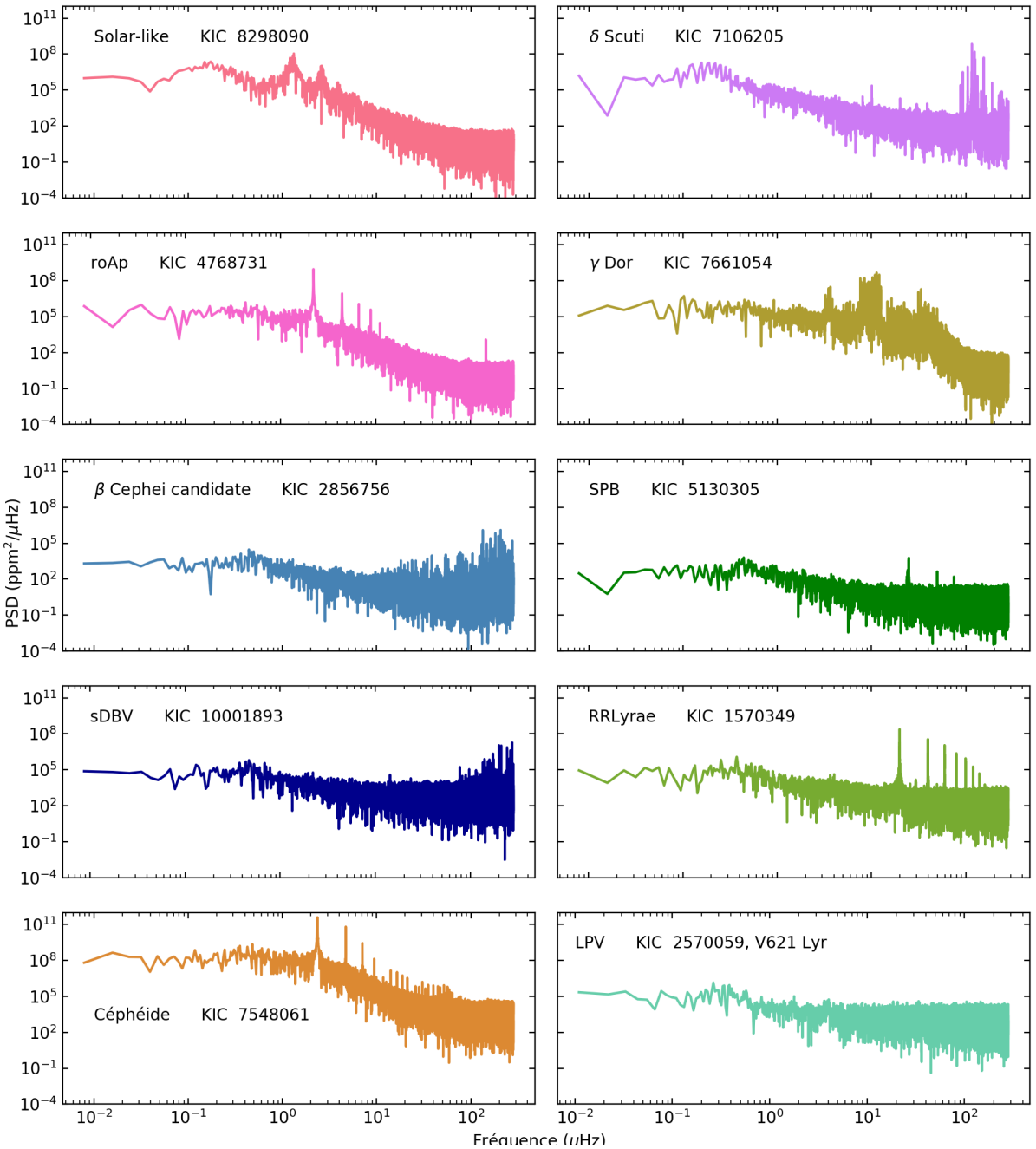


FIGURE 5.2: PSD des différents types d'étoiles pulsantes, observées par *Kepler* dans le mode d'acquisition long-cadence, étudiées au cours du chapitre 5. Le code couleur sera conservé tout au long du chapitre.

Étoile de type spectral B a pulsation lente (SPB)

Les étoiles SPB, correspondant à « étoiles de type B à pulsations lentes », ont été découvertes par Waelkens (1991). Ce sont des étoiles de Population I de masse intermédiaire ($2M_\odot \leq M_\star \leq 7\ M_\odot$) qui pulsent avec une période de pulsation entre 0.5 et 3 jours. L'étude de ces étoiles a été facilitée par la détection de 72 SPB par la mission Hipparcos (e.g. Aerts et al., 1999). Le mécanisme κ agit dans ces étoiles, par une augmentation d'opacité en profondeur liée au Z bump, pour exciter des pulsations non-radiales de haut degré g (e.g. Dziembowski & Pamyatnykh, 1993; De Cat & Aerts, 2002; Townsend, 2005) avec une amplitude maximale de 0.1 mag. Ces étoiles sont souvent difficilement distinguables des γ Dor par l'étude seule de leur

pulsations : elles se distinguent surtout par leur $T_{\rm eff}$ (voir figure 5.1). KIC 5130305 est la SPB représentée sur la figure 5.2 pour comparaison des motifs dans la PSD avec les autres types de pulsateurs.

Sous-naine de type B variable (sdBV)

Les étoiles sous-naines de type B (sdB) sont des étoiles chaudes ($22,000\text{K} < T_{\rm eff} < 40,000\text{K}$). Elles brûlent l'hélium en leur coeur, et sont associées à la branche horizontale extrême, post phase RGB. Grâce à l'astérosismologie, deux sous-classes d'étoiles sdB variables (sdBV) ont été découvertes (Kilkenny et al., 1997; Green et al., 2003), selon la valeur de leur période et la nature des oscillations établies théoriquement (Charpinet et al., 2000, 2002). Ainsi, les sdBV à pulsations rapides sont associées à des oscillations acoustiques (période de l'ordre de quelques minutes), et les sdBV à pulsations lentes sont associées à des modes g avec une périodicité de 1 à 4 heures. Au premier ordre, l'origine des ces oscillations est liée au mécanisme κ prenant place dans le Z bump (Charpinet et al., 1997; Fontaine et al., 2003). KIC 10001893 est représentée sur la figure 5.2 pour illustration de la PSD caractéristique d'une sous-naine de type B variable.

RRLyrae

Les RRLyrae sont des pulsateurs classiques agés de population II de faible masse ($M_\star \leq 1\text{M}_\odot$). Ce sont des étoiles évoluées ayant déjà monté la branche des géantes rouges, et se trouvant désormais sur la branche asymptotique (Breger, 2010; Aerts et al., 2010). Elles ont été découvertes par Williamina Fleming, (reporté par Pickering et al. (1901)), et sont très nombreuses : $\sim 38,000$ RRLyrae ont été découvertes dans le bulbe de la Voie Lactée. Diférents sous-types de RRLyrae sont répertoriés par Bailey & Irving (1902).

- Les RRab pulsent avec le mode fondamental avec une période entre 0.3 et 1 jours, inversement corrélée avec leur métallicité. Les RRab avec les plus courtes périodes présentent les pulsations de plus grande amplitude, pouvant atteindre 1.5 mag dans la bande V (Jurcsik, 1996). Leur courbe de lumière est asymétrique : le maximum de luminosité est atteint rapidement mais la baisse de luminosité est plus lente. De plus, près de 50% des RRab présentent une modulation à plus longue période de leurs amplitudes et phases de pulsation (Jurcsik et al., 2009), connue sous le nom d'effet Blazhko (Blažko, 1907), dont l'origine est toujours controversée.
- Les RRc pulsent selon le mode de première harmonique, avec un période entre 0.2 et 0.5 jours. La variation de luminosité associée avec ces pulsations est beaucoup plus symétrique que pour les RRab dans la courbe de lumière. Seules 10% des RRc présentent un effet de modulation Blazhko.
- Les RRd présentent à la fois des pulsations sur le mode fondamental et sur la première harmonique.

KIC 1570349 est représentée sur la figure 5.2 pour illustration de la PSD caractéristique d'une RRLyrae.

Céphéide

Il existe différentes familles de Céphéides que nous choisissons de ne pas détailler dans ce manuscrit. Les pulsations des Céphéides ont une amplitude de 0.1 à 2 mag avec une période comprise entre 1 et 135 jours. Leur périodicité est très régulière, et inversement proportionnelle à leur luminosité intrinsèque : la périodicité des Céphéides est utilisée pour les mesures de distance galactique par comparaison entre leur magnitude absolue et la magnitude observée. Les pulsations de ces étoiles massives ($5\ \text{M}_\odot \lesssim M \lesssim 20\text{M}_\odot$) évoluées ne sont pas de type solaire. Elles se font majoritairement selon le mode radial fondamental, ce qui facilite la mesure de la période dans les PSD. La figure 5.2 montre la PSD de KIC 7548061, une parmi la dizaine de candidates Céphéides observées par *Kepler*.

Étoiles variables à longue période (LPV)

Les étoiles variables à longue période regroupent les étoiles de type Mira (voir chapitre 1) et les étoiles semi-variables. Ce sont des étoiles évoluées, géantes rouges froides ou des supergéantes froides. Les étoiles Mira pulsent principalement selon le mode fondamental, alors que les étoiles semi-régulières pulsent plutôt selon les harmoniques de premier et second ordre. La figure 5.2 contient la PSD de KIC 2570059, une étoile à longue période observée par *Kepler*.

Les étoiles pulsantes n'étant pas de type solaire seront désignées sous le terme « Autres pulsateurs » dans la suite de ce chapitre.

Naines blanches (NB)

Les naines blanches sont les rémanents des cœurs radiatifs des étoiles de type solaire de faible masse qui n'explosent pas en supernovæ. Elles traversent au moins une phase d'instabilité provoquant des pulsation multipériodiques visibles en optique et en UV (à l'exception des NB fortement magnétisées pour lesquelles les pulsations ne sont pas observées, e.g. Winget, 1988; Kepler & Bradley, 1995; Córsico et al., 2019). Les pulsations globales sont entretenues par la force de rappel d'Archimède, ce qui en fait des modes de gravité. Six types de NB pulsantes sont distingués à ce jour, nous ne détaillerons pas leur nature dans ce manuscrit. En effet, nous ne prenons pas en compte les NB dans cette étude de classification car leur position dans le diagramme de Hertzsprung-Russell suffit à les différencier des autres types d'étoiles.

5.1.2 Reconnaissance des étoiles variables

Les pulsations des étoiles sont détectables grâce à des mesures spectroscopiques de vitesses radiales de la surface, ou bien par la mesure de la variation de luminosité associée dans les courbes de lumière. Que les données soient photométriques ou spectroscopiques, la méthode la plus utilisée pour détecter les périodicités est la décomposition de Fourier, avec ses méthodes dérivées comme par exemple le Lomb-Scargle periodogram (Lomb, 1976; Scargle, 1982) utilisé pour produire les PSD présentées dans ce manuscrit. À partir d'un spectre, l'utilisation de fonctions d'autocorrelation (ACF, McQuillan et al., 2014) ou bien les transformées en ondelettes (Torrence & Compo, 1998; Ceillier et al., 2016) permettent d'extraire les motifs périodiques caractéristiques du signal. Les relations d'échelle asymptotiques (Tassoul, 1980; Gough, 1986, voir Chapitre 3) sont applicables pour les étoiles présentant des modes p d'ordre élevé, comme fréquemment utilisées pour l'étude des étoiles de type solaire.

Si les caractéristiques des pulsations peuvent être mesurées automatiquement pour les étoiles observées une fois leur nature connue, la classification des différents types de pulsateurs reste aujourd'hui souvent associée à une reconnaissance visuelle (e.g. Murphy et al., 2018, 2019; Santos et al., 2019). Quelques études se distinguent cependant par un effort d'automatisation de la reconnaissance des types d'étoiles variables. Debosscher et al. (2007); Blomme et al. (2011) utilisent une méthode de « Gaussian mixture », que nous assimilons au premier ordre à un algorithme de clustering, afin de classifier les étoiles observées lors de sondages depuis le sol comme le « Trans-Atlantic Exoplanet Survey » (TrES). Ils utilisent les paramètres extraits des études de périodicité dans les courbes de lumière, comme les périodicités fondamentales et des premières harmoniques, les amplitudes associées et les phases des pulsations.

En utilisant différents algorithmes d'intelligence artificielle dont l'algorithme de Random Forest pour la classification qui sera détaillé dans la section suivante, Bass & Borne (2016) réalisent une classification de $150,000$ étoiles observées par *Kepler*. Les pulsateurs sont reconnus grâce à leurs caractéristiques de périodicité (amplitude et phases des pulsations), par les paramètres issus de la méthode SAX (Lin et al., 2007) qui vise à caractériser les variations dans la courbe de lumière, et grâce aux paramètres de couleur, $T_{\rm eff}$, $\log g$, R et $[{\rm Fe/H}]$. Les étoiles pulsantes sont reconnues par cette méthode à $50-70\%$ par comparaison avec la seule autre étude de classification des étoiles observées par *Kepler* (étude réalisée par Blomme et al., 2011, à partir des données sol du TrES, qui comptent $\sim 26\,000$ étoiles en commun avec l'échantillon observé par *Kepler*).

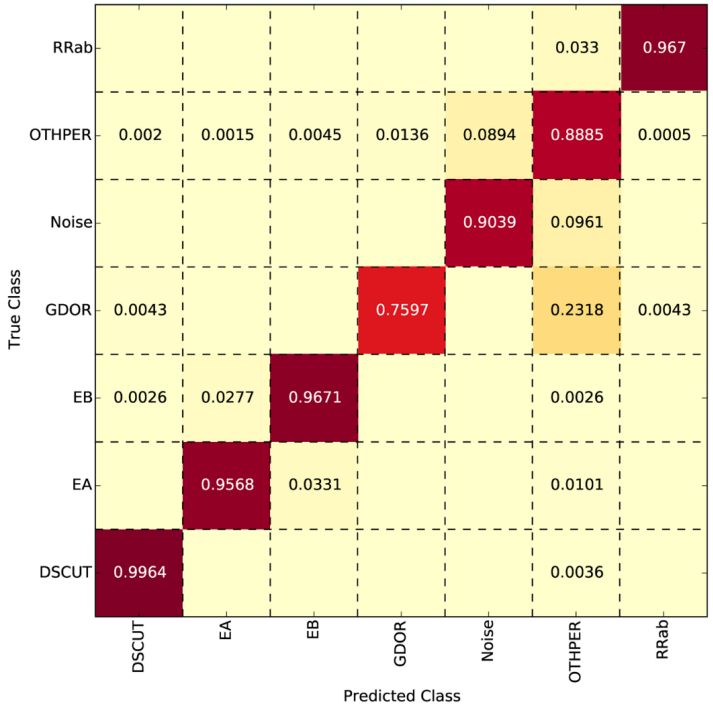


FIGURE 5.3: Résultats de la classification par Armstrong et al. (2016) de $\sim 60,000$ étoiles observées lors des quarters 0-4 de la mission K2. Chaque ligne représente un type d'étoile connu, et chaque colonne correspond à la classification effectuée par l'algorithme. Les valeurs représentent la fractions d'étoiles appartenant à la classe classifiée. Les nombres en dehors de la diagonale représentent les erreurs commises par l'algorithme. Les différentes étiquettes utilisées sont : « RRab » (RRLyare de type ab), « OTHPER" (autres objets périodiques et semi-périodiques), « Noise » (courbe de lumière dominée par le bruit), « GDOR » (γDoradus), « EB » (binaire à éclipse concentrée ou semi-détachée), « EA » (binaire à éclipse détachée), « DSCUT » (δScuti).

Parmi ces étoiles, celles de type solaire ne sont pas classifiées autrement que par leur absence de périodicité marquée : elles se situent dans la classe « Divers » et ne sont pas étudiées. Le faible taux d'étoiles classifiées identiquement par les méthodes de Blomme et al. (2011) et Bass & Borne (2016) (environ $50-70\%$ des étoiles sont correctement classifiées) démontre la difficulté liée à la classification automatique des différents types de pulsateurs.

Les données de la mission K2 sont encore plus difficiles à étudier que celles de la mission principale *Kepler*. En effet, la direction du pointage est réajustée toutes les $6h$ durant la mission K2 pour compenser la perte de deux roues d'inertie, ce qui ajoute des périodicités d'origine non-astrophysique au signal. Armstrong et al. (2016) s'est attaché à classifier sismiquement les données observées durant les campagnes 0 à 4 de la mission K2. Cette étude combine deux méthodes d'intelligence artificielle : un algorithme de Forêts Aléatoires et l'algorithme « Kohonen Self-Organizing Map » (SOM Kohonen, 1990) qui est fondé sur la réduction de données. La figure 5.3 représente les résultats de la classification des étoiles par cette étude. Nous remarquons que cette fois-ci encore, les étoiles pulsantes de type solaire ne sont pas classifiées. Le score de classification entre les différentes classes est estimé à $\sim 92\%$. Cette étude qui n'a à ce jour pas été étendue aux autres campagnes de la mission K2 démontre le potentiel des algorithmes de Forêts Aléatoires pour la classification des différents types de pulsateurs.

Plus récemment, les algorithmes de classification des étoiles pulsantes utilisant les paramètres usuels extraits des courbes de lumière se sont diversifiés. L'étude de Kgoadi et al. (2019) mettant à profit la méthode de « gradient boosted trees » (Friedman, 2001, 2002; Natekin & Knoll, 2013), utilisée avec un boosting extrême (voir Chen & Guestrin, 2016, pour les détails de la méthode utilisée), a permis une classification incluant les pulsateurs de type solaire. $96\,493$ courbes de lumière acquises par l'expérience optique de lentille

gravitationnelle (OGLE Udalski et al., 2008, 2015) et durant la mission *Kepler* sont classifiées, avec un taux de succès compris entre 81 et 91%. Cette étude démontre la variété d'algorithmes pouvant être utilisés pour la classification automatique des étoiles. Nous citons également les travaux de Hon et al. (2018b, 2019) qui détectent les signaux sismiques liés aux oscillations de type solaire dans la PSD des RG à partir d'un réseau de neurones de convolution. Cette méthode de reconnaissance performante à 99% ne peut en revanche être appliquée que pour les étoiles pour lesquelles les fréquences propres des oscillations sont dans la plage de fréquence observée. Parmi les données acquises avec une cadence de 30 minutes comme c'est le cas de la plupart des étoiles observées par *Kepler*, K2 et TESS, seules les étoiles suffisamment évoluées, appartenant à la RGB ou bien au Clump peuvent donc être reconnues (voir section 4.1.2.2). Les étoiles présentant des modes à très basse fréquences ($f \lesssim 5\mu$Hz) sont également exclues de l'étude.

Notre étude porte également sur la classification automatique des étoiles observées par les différentes missions Kepler, K2 et TESS. Nous ne différencions pas par l'originalité de l'algorithme de classification choisi, mais plutôt grâce aux paramètres utilisés pour réaliser la classification. Ainsi nous n'utilisons aucune mesure de l'amplitude ou bien de la phase associée à la périodicité contenue dans la courbe de lumière. Nous utilisons au contraire la mesure globale de la puissance contenue dans la PSD des étoiles introduite au chapitre précédent, FliPer, qui ne nécéssite pas la détection de modes d'oscillation pour fonctionner. Les paramètres FliPer seront accompagnés de mesures de la $T_{\rm eff}$ et/ou de la luminosité des étoiles au long de l'étude. Afin de mettre à profit ces paramètres, nous utilisons l'algorithme de classification automatique de Forêt Aléatoire pour la classification qui est expliquée dans la section suivante.

5.2 FliPer$_{\rm Class}$: une Forêt Aléatoire pour la classification automatique des étoiles pulsantes

Au chapitre 4 nous avons présenté les algorithmes de Forêts Aléatoires pour les problématiques de régression. Ces algorithmes peuvent également être entraînés et utilisés pour la classification des données. La performance des algorithmes de Random Forest pour la classification des étoiles pulsantes étant démontrée par l'étude de Armstrong et al. (2016), nous choisissons les Forêts Aléatoires pour la classification des étoiles grâce aux paramètres FliPer. Nous reprenons les explications sur les Forêts Aléatoires de la section 4.3.4, et nous donnons ici l'adaptation de la méthodologie à la problématique de classification des données.

5.2.1 Arbre individuel de classification

Un arbre de classification est construit par des choix binaires successifs de façon similaire à ceux d'un arbre de régression. En revanche, à chaque noeud i la fonction coût minimisée s'exprime pour la classification par

$$\mathrm{G}_i = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}_i} p_k \times (1 - p_k), \tag{5.1}$$

avec p_k le nombre d'individus X classifié dans la classe k au nœud i, et N_i le nombre de classes possibles au nœud i. Cet indice appelé « Indice de Gini » mesure avec quelle fréquence un élément aléatoire de l'échantillon serait mal classé si sa classification était choisie aléatoirement selon la distribution des classes au niveau du nœud.

Finalement, un arbre de classification renvoie en sortie vers un entier correspondant à la classe choisie (voir le panneau de droite de la figure 5.4) plutôt que vers une variable continue (comme sur la figure 4.10). En sortie d'un arbre de classification, la variable $\mathrm{Y}_{\rm pred}$ est donc discrète et désigne la classe à laquelle appartient l'objet X :

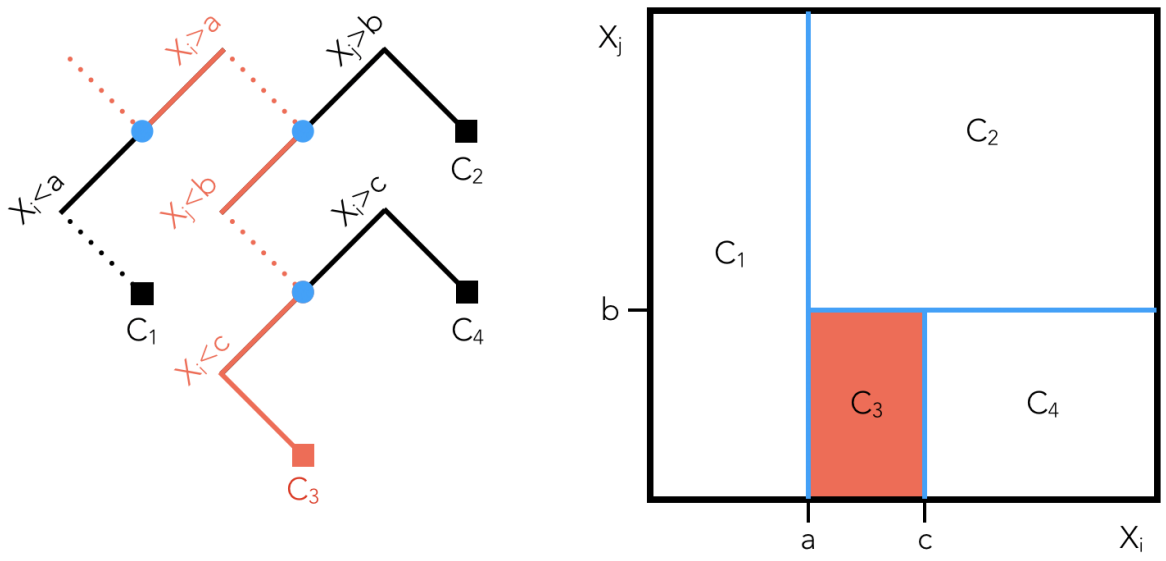


FIGURE 5.4: *Gauche :* représentation schématique d'un arbre de décision pour la classification. Les points bleus représentant les nœuds de décision, et les carrés les prédictions de possibles (feuilles). Le trajet en rouge montre un trajet possible pour l'estimation de la classe. *Droite :* Visualisation en deux dimensions de la classification.

$$\mathrm{Y}_{\text{pred}} = c, \text{ avec } c \in \{1, ..., N\}, \tag{5.2}$$

avec N le nombre de classes possibles. Pour choisir la classe correspondant à l'entrée X, les probabilités postérieures sont calculées :

$$\forall c \in \{1, ..., L\}, \mathrm{P}(\mathrm{Y} = \mathrm{c}|\mathrm{X} = \mathrm{x}). \tag{5.3}$$

L'erreur de généralisation estimée durant l'étape de test de l'arbre s'exprime comme :

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}_{\text{pred}} \neq \mathrm{Y}). \tag{5.4}$$

5.2.2 Forêt Aléatoire de classification

Contrairement aux Forêts Aléatoires de régression qui estiment la moyenne de la prédiction des arbres (voir l'équation 4.18), l'algorithme de Random Forest de classification proposé par Breiman (2001) renvoie le vote majoritaire parmi les prédictions individuelles des arbres, ce qui s'exprime par l'équation :

$$\mathrm{Y}_{\text{pred}} = \underset{1 \leq k \leq K}{\operatorname{argmax}} \sum_{\ell=1}^{q} \mathbb{1}_{h(x,\Theta_\ell)=k}, \tag{5.5}$$

avec K le nombre d'arbres dans la forêt, h la fonction construite par l'algorithme lors de l'apprentissage, et q le nombre de classes possibles.

5.2.3 Estimation du taux d'erreur de classification

5.2.3.1 L'erreur « Out-of-Bag »

Il est également possible d'estimer l'erreur de généralisation des algorithmes de Forêts Aléatoires durant la phase d'entrainement directement. Cette erreur est nommée « erreur Out-Of-Bag » (OOB), ce qui signifie « erreur calculée en dehors du Bootstrap ».

Pour un individu observé $(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i)$ de l'échantillon d'entraînement $\mathcal{L}_N$, seuls les arbres construits sur des sous-échantillons de $\mathcal{L}_N$ ne comprenant pas l'individu $(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i)$ sont utilisés pour l'estimation de l'erreur OOB.

La prédiction $\widehat{\mathrm{Y}_i}$ résultant uniquement de ces arbres est comparée à la valeur connue Y_i par le calcul de l'erreur OOB :

$$\mathrm{OOB} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\widehat{\mathrm{Y}_i} \neq \mathrm{Y}_i}. \tag{5.6}$$

Chaque individu utilisé pour estimer OOB n'a donc pas été rencontré au préalable par le prédicteur utilisé pour sa classification : cette erreur est une bonne estimation de l'erreur de généralisation d'une forêt, dans le cas où une étape de test est rendue difficile par le faible échantillon de données préalablement classifiées.

Pour l'étude de régression de la gravité de surface dans le chapitre précédent, nous disposions de nombreuses PSD d'étoiles de type solaire : l'estimation de l'erreur OOB n'était pas nécessaire puisque la phase de test a pu être menée facilement. Dans le cadre de la classification des étoiles pulsantes, certaines catégories de pulsateurs sont très peu représentées, comme c'est le cas des Cepheides très rares dans les données de *Kepler*. Cela rend l'utilisation de l'erreur OOB très adaptée à notre étude de classification, bien qu'une validation sur un échantillon test soit tout de même menée.

5.2.3.2 Erreur de prédiction généralisée

Dans le chapitre 4, les performances de l'algorithme de régression sont estimées grâce à un échantillon de test. L'incertitude mesurée correspond alors à l'erreur de prédiction généralisée. Dans le cas de la classification, cette erreur commise lors de l'utilisation de l'algorithme s'exprime par la proportion d'individus mal classifiés par l'algorithme par rapport à la classification préalablement connue Y :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\mathrm{Y}_{\mathrm{pred},i} \neq \mathrm{Y}_i} \tag{5.7}$$

5.2.4 Calibration de l'algorithme : estimation des probabilités d'appartenance des étoiles aux différentes classes

Cette erreur de prédiction calculée pour les problématiques de classification est une erreur binaire : elle ne contient aucune notion de distance entre les étoiles dans l'hyperplan des paramètres, au contraire de l'erreur calculée par exemple pour les problématiques de régression (voir Chapitre 4). L'erreur de classification calculée pour la classification ne prend donc pas en compte le doute sur la classification d'une étoile qui serait difficile à classer. Afin de connaître pour chacune des étoiles classées la fiabilité de la classification, nous utilisons les indices d'appartenance de l'algorithme : chacune des étoiles est classifiée avec un indice de confiance (que l'on appellera « indice d'appartenance ») par classe possible. Pour un arbre, l'indice d'appartenance à une classe C est calculé comme la fraction d'étoiles dans la feuille appartenant à la classe C. Dans une forêt, l'indice d'appartenance à la classe C est estimée par l'algorithme comme la valeur moyenne sur les différents arbres

de la probabilité d'appartenance à la classe. Ainsi pour chaque individu, et pour chaque classe, un indice entre 0 et 1 est assigné selon la fraction de représentation de cette classe dans les feuilles des arbres.

Pour un algorithme idéal, l'indice d'appartenance à la classe C est égal à la probabilité que l'étoile appartienne réellement à la classe C. Les algorithmes de Forêts Aléatoires sont connus pour prédire des indices d'appartenance biaisés (Boström, 2012) : les individus classés dans la classe C avec un faible indice d'appartenance ont en réalité une probabilité encore plus faible d'appartenir à cette classe, alors que les individus classés avec une grande probabilité devraient avoir une probabilité encore supérieure d'appartenir à la classe C.

Différentes méthodes sont efficaces pour la calibration des algorithmes de classification binaire (e.g. Boström, 2008). La calibration « Platt » (qui consiste à maximiser la vraisemblance de l'échantillon d'entrainement Platt, 1999) et la calibration « isotonique » (qui calcule la fraction d'étoiles bien classifiées selon différents intervalles de paramètres Zadrozny & Elkan, 2001) sont les deux méthodes les plus utilisées (voir Boström (2012) pour plus de détails sur le fonctionnement des deux méthodes). Après une étape de test des deux méthodes, nous choisissons d'utiliser la calibration isotonique qui renvoie les meilleures performances pour la classification des étoiles. L'algorithme est entraîné et calibré sur l'échantillon $\mathcal{L}_{\rm entraînement}$. Ensuite, les performances sont comparées avec les résultats de classification de l'échantillon $\mathcal{L}_{\rm test}$. Cette calibration affecte de façon négligeable la capacité de prédiction de l'algorithme (Boström, 2007). Pour les études de classification multi-classes, il n'existe pas de méthode de calibration directe des algorithmes. Il n'est donc pas possible d'obtenir directement une estimation de la probabilité d'appartenance des étoiles aux différentes classes.

*Dans la suite de ce Chapitre, nous utilisons la fonction « RandomForestClassifier » appartenant à la librairie d'*IA *Python « sklearn » (Pedregosa et al., 2011) pour la classification automatique des étoiles observées.*

5.3 Détection des étoiles de type solaire observées lors de la mission *Kepler*

Dans cette section, nous nous concentrons sur la détection automatique des étoiles oscillantes de type solaire parmi les étoiles observées par le satellite Kepler. Nous choisissons de réaliser tout d'abord une classification binaire des étoiles afin de présenter les probabilités d'appartenance réelles des étoiles à la classe des pulsateurs de type solaire. Nous proposerons ensuite dans la section 5.4 une classification multi-classes des différents types de pulsateurs.

5.3.1 Données utilisées

Les données photométriques utilisées dans cette section proviennent des observations en long-cadence du satellite *Kepler*. Les courbes de lumière des étoiles enregistrées lors de la mission *Kepler* sont calibrées en suivant García et al. (2011b, 2014b), puis transformées en spectre de densité de puissance.

TABLE 5.1: Composition de l'échantillon $\mathcal{L}_N$

Type de pulsateur	Nb. d'étoiles
Solar-like (SL)	1394
δScuti (δSct)	262
γDoradus (γDor)	166
rapidly oscillating Ap (roAp)	2
RRLyrae (RRL)	9
Cepheide (Cep.)	1

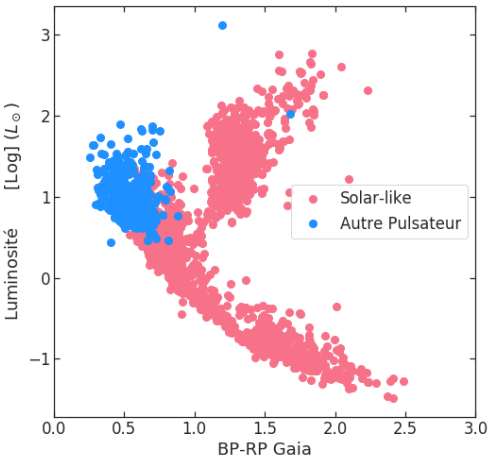


FIGURE 5.5: Luminosité en fonction de la mesure photométrique BP-RP *Gaia* des étoiles composant l'échantillon $\mathcal{L}_N$ pour la classification des étoiles de *Kepler*. Les étoiles sont séparées selon si leurs oscillations sont ou non de type solaire.

Dans ce chapitre nous utiliserons trois échantillons de données, qui nous permettent d'entraîner, valider, tester puis utiliser notre algorithme. Nous présentons ces trois échantillons en amont de l'étude :

- Nous utilisons un échantillon $\mathcal{L}_N$, représenté dans le diagramme de Hertzsprung-Russell modifié pour remplacer la température par la mesure de couleur *Gaia* BP-RP [1] sur la figure 5.5. Cet échantillon est constitué de $N = 1\,834$ cibles de *Kepler* pour lesquelles le type de pulsateur est connu et a été vérifié visuellement pour cette étude de classification. Il s'agit d'un sous-ensemble des meilleures étoiles classifiées. La classification des étoiles constituant l'échantillon $\mathcal{L}_N$ provient des études de Ngeow et al. (2011); Balona et al. (2011); Balona & Dziembowski (2011); Balona (2013); Chaplin et al. (2014); Sachkov (2014); Smalley et al. (2015); Drury et al. (2015); Serenelli et al. (2017); Mathur et al. (2017) et Li et al. (2019a). Les étoiles sont séparées en deux classes étiquetées Solar-like et Autre pulsateur. Parmi ces étoiles, nous sélectionnons $\sim 80\%$ des étoiles de type solaire, et $\sim 90\%$ des autres pulsateurs pour former l'échantillon d'entraînement $\mathcal{L}_{\rm entraînement}$ (1 557 étoiles). Les 277 étoiles restantes forment l'échantillon de validation de l'algorithme $\mathcal{L}_{\rm validation}$ utilisé dans la section 5.3.3.1.
- Un échantillon composé de $25\,092$ étoiles, composé par Dr. A. Santos, collecte des étoiles dont le type de pulsation est connu dans la littérature. La classification de ces étoiles provient des études Uytterhoeven et al. (2011); Li et al. (2019a,b); Murphy et al. (2019), García et al, *in prep* et Szabó et al. *in prep* [2]. Nous n'avons volontairement pas vérifié manuellement la classification de ces étoiles. Nous regroupons ces étoiles sous deux étiquettes : Solar-like et Autre pulsateur. Elles constituent notre échantillon de test $\mathcal{L}_{\rm test}$ utilisé dans la section 5.3.3.2.
- Enfin, nous classifions les étoiles observées par *Kepler* : la composition et les résultats d'analyse de cet échantillon final sont reportés dans la section 5.3.4.

5.3.2 Paramètres et entraînement de FliPer$_{\rm Class}$

Comme exposé dans l'introduction de ce chapitre, les études de classification sismique des étoiles reposent usuellement sur la détection ou non-détection de périodicités dans les courbes de lumière des étoiles. Nous

1. le paramètre photométrique BP-RP est défini comme G_{BP}-G_{RP}, avec G_{BP} et G_{RP} les bandes passantes bleues et rouges de la mission Gaia. C'est un proxy de la $T_{\rm eff}$ des étoiles.
2. Nous remercions la collaboration T'DA pour la constitution et le partage d'échantillon de différents types de pulsateurs observés par *Kepler* mis à disposition sur `https://tasoc.dk/tda/TrainingSets` après connexion.

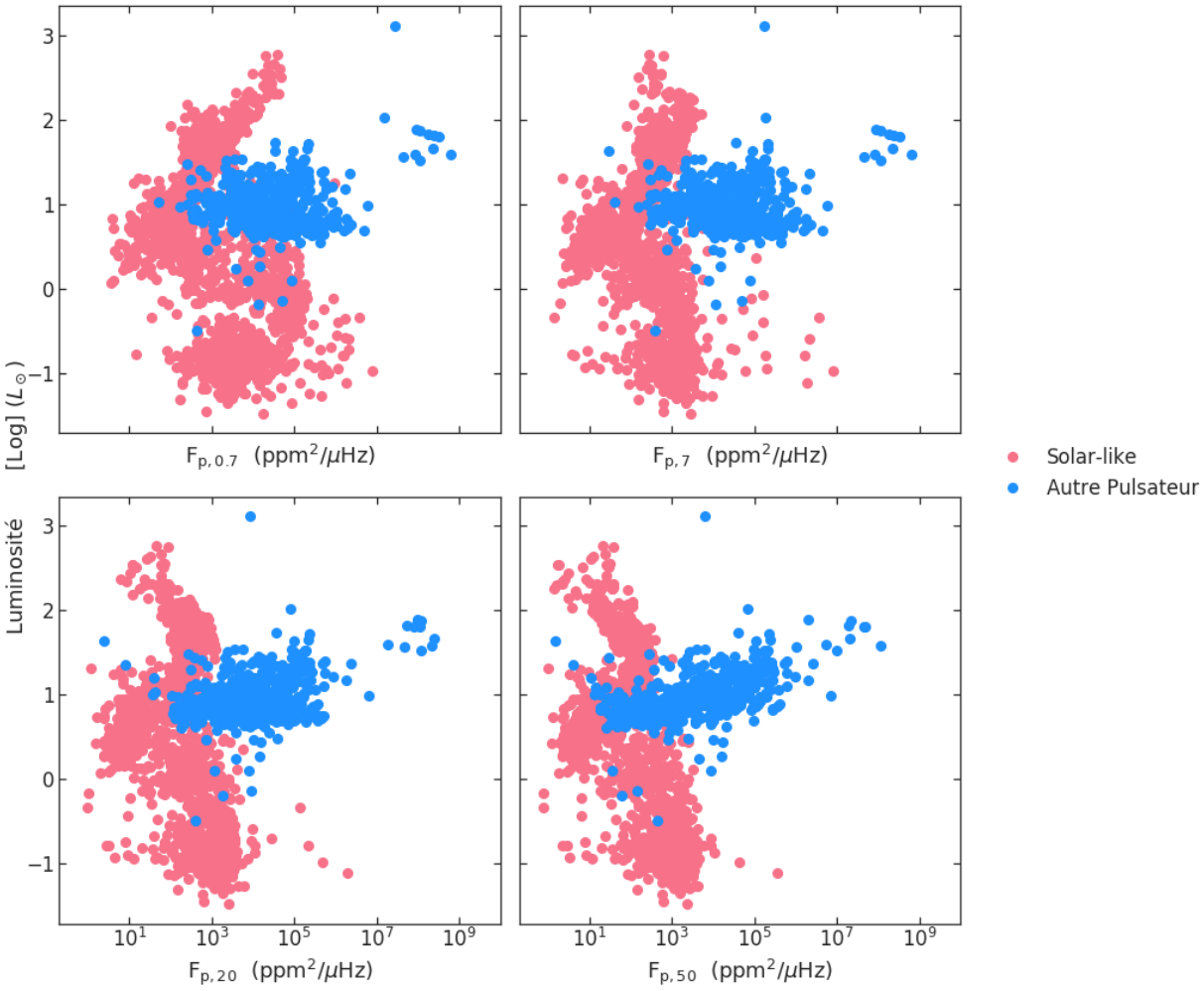


FIGURE 5.6: Mêmes étoiles que sur la figure 5.5 en fonction de la luminosité et des différents paramètres FliPer.

choisissons de ne pas utiliser ces paramètres dans notre étude, afin qu'elle puisse être associée aux algorithmes déjà existants qui classifient les étoiles grâce aux périodicités. Nous choisissons une approche plus globale, qui ne nécessite que très peu d'analyse des données au préalable.

Tout comme lors du chapitre 4, notre méthode de classification repose donc principalement sur la puissance contenue dans les PSD grâce à l'utilisation des paramètres FliPer (définis à la section 4.2.7 pour la caractérisation de la convection de surface des étoiles de type solaire). Les valeurs FliPer se répartissent pour les pulsateurs de type solaire selon leur état évolutif dans la plage [1e0, 1e7] ppm^2/μHz. Nous remarquons également que tout signal qui ne résulte pas des pulsations, que nous dénommons « background » biaise les valeurs de FliPer : par exemple, les signaux de rotation des étoiles de la séquence principale augmentent artificiellement la valeur de FliPer. Les autres pulsateurs présentent des backgrounds différents, ainsi que des structures à grande amplitude dans la PSD (la figure 5.2 qui représente la PSD de différents types d'étoiles pulsantes permet cette visualisation). Ainsi, nous choisissons d'utiliser les paramètres FliPer pour la classification des pulsateurs. À partir de la figure 5.1 nous concluons que les étoiles très lumineuses du haut de la RGB et de la AGB sont facilement distinguables des autres types de pulsateurs de par leur position dans le diagramme de de Hertzsprung-Russell : nous n'aurons donc pas besoin d'utiliser le paramètre $\mathrm{F}_{\mathrm{p},0.2}$ pour notre classification.

Dans le chapitre 4, nous utilisons la $T_{\rm eff}$ spectroscopique en provenance du catalogue de Mathur et al. (2017) comme paramètre pour l'algorithme de Forêts Aléatoires (méthode FliPer). Dans cette nouvelle étude, nous nous intéressons à un nombre d'étoiles plus important, élargi à tous les types de pulsateurs, dont la plupart n'ont pas d'estimation précise de la $T_{\rm eff}$. Afin de mieux contraindre les paramètres associés aux étoiles classées, nous choisissons de substituer $T_{\rm eff}$ par le paramètre photométrique BP-RP=$\rm G_{BP}$-$\rm G_{RP}$, avec $\rm G_{BP}$ et $\rm G_{RP}$ les bandes passantes bleues et rouges de la mission Gaia, comme proxy de la $T_{\rm eff}$ des étoiles. Nous utilisons également la luminosité des étoiles, estimée à partir des parallaxes de Gaia Andrae et al. (2018). La magnitude *Kepler* K_p ne joue pas un rôle significatif lors de l'entraînement de l'algorithme FliPer dans le chapitre 4, puisque les valeurs du FliPer sont calibrées à partir du bruit de photon correspondant à leur magnitude : nous avons choisi de ne pas utiliser K_p comme paramètre pour la classification des étoiles.

Les étoiles de $\mathcal{L}_N$ sont représentées sur la figure 5.5 en fonction de la luminosité et du paramètre photométrique BP-RP mesurés par Gaia [3]. Nous observons que les $\rm RG$ sont facilement identifiables par leur grande luminosité et BP-RP élevé. En revanche, certaines étoiles de la séquence principale et sous-géantes se confondent avec les autres types de pulsateurs dans ce diagramme pour BP-RP$\lesssim 1$. La luminosité Gaia des étoiles composant l'échantillon $\mathcal{L}_N$ est représentée en fonction des différents paramètres FliPer utilisés sur la figure 5.6. Nous observons comme attendu des valeurs de FliPer pour les autres pulsateurs significativement plus grandes que les valeurs de type solaire, à cause de l'ajout de densité de puissance au spectre par les pulsations des étoiles.

Finalement, l'ensemble de paramètres utilisé pour la classification des étoiles est

$$\rm X = [\mathit{L}, BP - RP, F_{p,0.7}, F_{p,7}, F_{p,20}, F_{p,50}].$$

5.3.2.1 Calibration des hyperparamètres

Nous recherchons ensuite les valeurs optimales des hyperparamètres $\rm HX$ =[≪ Nombre d'arbres dans la forêt ≫ (A), ≪ Nombre d'étoiles minimal dans chaque feuille ≫ (F), ≪ Profondeur maximale d'un arbre ≫ (P)] de la forêt (voir section 4.4.2 pour le détail de la méthode). La figure 5.7 représente l'erreur OOB commise par la Forêt Aléatoire en fonction de la valeur choisie pour chacun des hyperparamètres $\rm HX$. Au vu des profils d'erreur OOB, nous utilisons donc A=600, F=22, P=40 afin de minimiser l'erreur de classification et le temps de calcul lors de l'apprentissage, . Finalement, avec ces hyperparamètres, l'erreur OOB définie dans le paragraphe 5.2.3.1 est estimée à 0.6%.

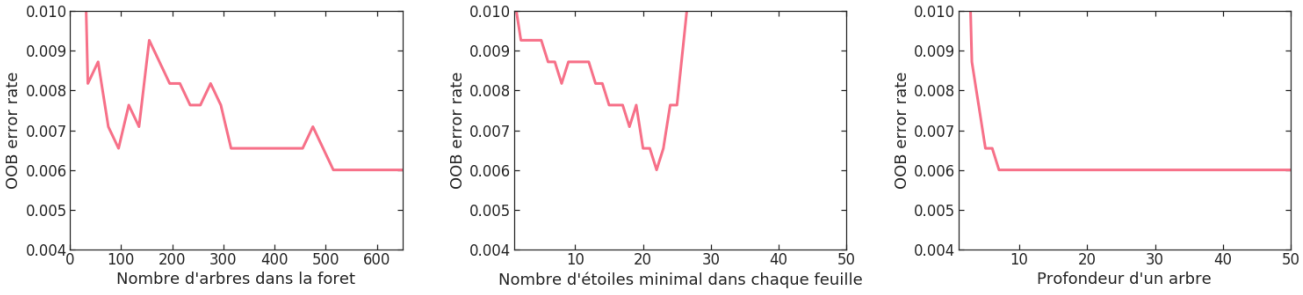


FIGURE 5.7: Courbes de validation des trois hyperparamètres utilisés lors de l'entraînement de l'algorithme. Les lignes rouges représentent l'erreur OOB sur la classification des étoiles pendant l'entraînement.

3. Cette étude utilise la base de données comparée pour les satellites *Kepler* et Gaia ≪ gaia-kepler.fun ≫ créée par Dr. Megan Bedell

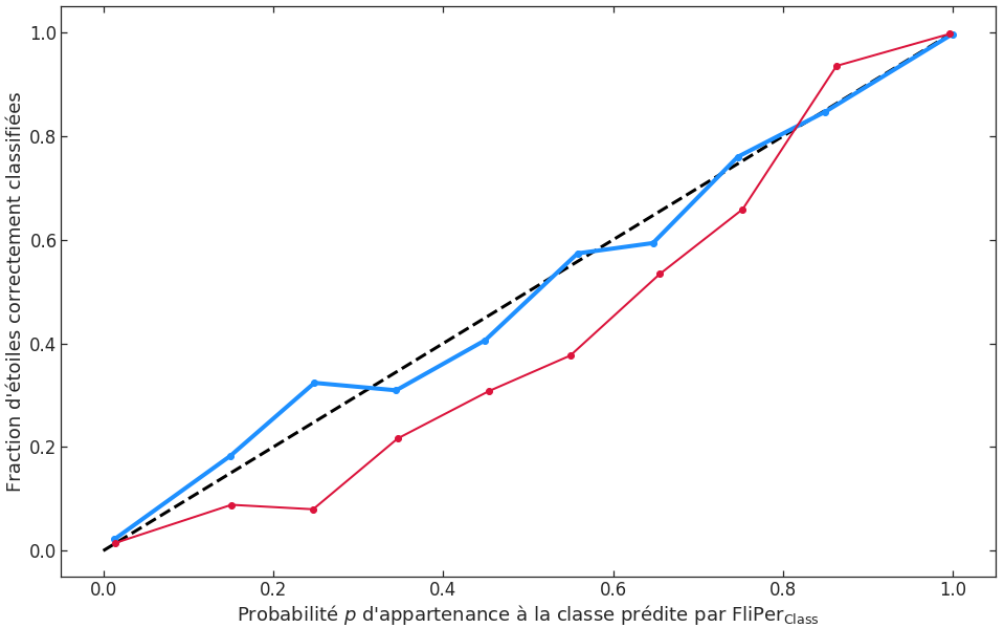


FIGURE 5.8: Courbes de calibration (ou courbes de validation) : fraction d'étoiles correctement identifiées par FliPer$_{\text{Class}}$ par rapport à la littérature en fonction de la probabilité d'appartenance à la classe associée à l'étoile par FliPer$_{\text{Class}}$. La ligne rouge correspond aux prédictions initiales de l'algorithme non calibré, et la ligne bleue correspond aux indices calibrés. La ligne en pointillées noirs représente la calibration idéale de l'algorithme.

5.3.2.2 Calibration de l'algorithme FliPer$_{\text{Class}}$

Les algorithmes de Forêts Aléatoires pour la classification binaire permettent d'obtenir non seulement la classification des étoiles mais aussi une probabilité associée à cette classification. Nous corrigeons l'algorithme FliPer$_{\text{Class}}$ par la méthode isotonique (voir section 5.2.4) pour obtenir les probabilités réelles d'appartenance des étoiles aux différentes classes.

La ligne rouge sur la figure 5.8 représente la fraction d'étoiles de l'échantillon $\mathcal{L}_{\text{test}}$ correctement classifiées par rapport à la littérature pour l'algorithme non-calibré en fonction de la probabilité d'appartenance à la classe choisie. Cette courbe est appelée « courbe de validation » : un algorithme idéalement calibré a une courbe de validation suivant la ligne $1:1$ représentée en pointillés noirs. Notre algorithme FliPer$_{\text{Class}}$ a une courbe de validation classique des algorithmes de Forêts Aléatoires : la classification avec une faible probabilité sur-estime la probabilité réelle, alors que la classification avec un grand indice d'appartenance sous-estime les probabilités d'appartenance réelle à la classe. En suivant la méthode isotonique proposée par Zadrozny & Elkan (2001), nous calibrons FliPer$_{\text{Class}}$: la courbe bleue est la nouvelle courbe de validation de l'algorithme calibré, plus proche en moyenne de la ligne $1:1$ idéale. Ce nouvel algorithme calibré est utilisé dans les sections suivantes pour les étapes de validation et de test. La calibration affecte de façon négligeable les performances de classification de l'algorithme (Boström, 2007), et permet d'obtenir des probabilités calibrées pour une interprétation physique des résultats.

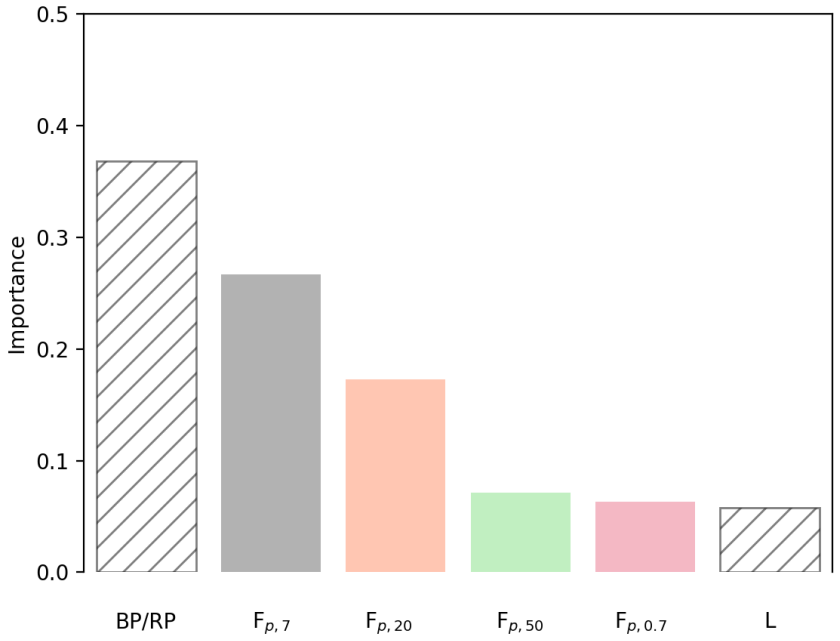


FIGURE 5.9: Importances relatives des différents paramètres FliPer, T_{eff}, L, et $\mathrm{BP\text{-}RP}$ estimées lors de l'étape d'entraînement de FliPer$_{\mathrm{Class}}$.

5.3.2.3 Importance relative des paramètres utilisés pour l'entraînement de FliPer$_{\mathrm{Class}}$

La figure 5.9 représente l'importance des différents paramètres composant X pour l'entraînement de FliPer$_{\mathrm{Class}}$. Le paramètre BP-RP, ainsi que $\mathrm{F_{p,7}}$, ont des importances élevées : ils permettent tous deux de distinguer les types d'étoiles dans la plage dégénérée à faible BP-RP où $\log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) \sim 1$ visible sur la figure 5.5. Les paramètres FliPer $\mathrm{F_{p,20}}$ et $\mathrm{F_{p,50}}$ permettent de distinguer les signaux de rotation des étoiles de type solaire des signaux de pulsations, tout comme ils permettent dans le chapitre 4 de distinguer les signaux liés à la rotation chez les étoiles jeunes des grandes densités de puissance associées à des étoiles plus évoluées. Le paramètre $\mathrm{F_{p,0.7}}$ qui est optimal lors de l'estimation de $\log g$ des géantes rouges au chapitre 4 n'est pas le plus efficace pour la classification des pulsateurs : en effet, les géantes rouges sont déjà bien séparées des autres types d'étoiles par le paramètre BP-RP. Enfin, la luminosité ne joue qu'un rôle secondaire, ce qui s'explique par la dégénérescence des autres pulsateurs avec les étoiles de type solaire dans le diagramme de Hertzsprung-Russell.

5.3.3 Performances et résultats

5.3.3.1 Validation de FliPer$_{\mathrm{Class}}$

Nous validons les capacités de classification de l'algorithme sur l'échantillon $\mathcal{L}_{\mathrm{validation}}$ composé de 367 étoiles n'ayant pas été utilisées lors de l'entraînement de l'algorithme. La table 5.2 représente la matrice de confusion résultant de l'étape de validation. La matrice de confusion indique la classification prédite par l'algorithme par rapport à la classification connue pour chacune des classes. Les valeurs sur la diagonale correspondent donc au nombre de classifications en accord avec les étiquettes. Les valeurs en dehors de la diagonale correspondent aux erreurs de classification : le succès de la classification de l'échantillon de validation est de 99.7%. Ce résultat est à pondérer par le fait que les PSD des étoiles composant l'échantillon de validation ont été sélectionnées

manuellement : ce sont des étoiles portant des signatures caractéristiques de leur étiquette correspondantes (background, pulsations, etc.), sans pollutions externes par des sources astrophysiques ou instrumentales.

Cette classification est estimée à partir de la classification la plus probable parmi les résultats des différents arbres composant la forêt. Nous calculons par ailleurs les indices d'appartenance aux différentes classes pour chacune des étoiles de l'échantillon de validation, disponibles à ce LIEN, dont une fraction représentative est donnée dans la table 5.3. Ces indices représentent en quelle proportion l'étoile est reconnue par les arbres de la forêt comme appartenant aux différentes classes. Comme l'algorithme a été calibré (voir section 5.2.4), ces indices d'appartenance sont également les probabilités réelles d'appartenance des étoiles aux différentes classes. Nous remarquons que pour l'échantillon de validation comportant des étoiles caractéristiques des différentes classes sans pollutions extérieures, la grande majorité du processus de classification se fait de façon quasi binaire : la classe à laquelle l'étoile appartient est reconnue avec une probabilité proche de 1. Au vu du succès de la classification de l'échantillon de validation, nous validons l'entraînement de l'algorithme FliPer$_{\rm Class}$ pour la reconnaissance des étoiles de type solaire.

5.3.3.2 Étape de test de FliPer$_{\rm Class}$ pour la séparation des étoiles de type solaire

Le très bon taux de succès sur l'échantillon de validation de FliPer$_{\rm Class}$ est obtenu à partir d'un faible nombre d'étoiles, pour lesquelles le type de pulsateur est très bien défini, sans forte pollution externe de la courbe de lumière. La variété de signatures spectrales dans les PSD des étoiles est immense, par les possibilités de contamination du signal par des sources externes. En effet, les masques choisis (composés en utilisant le *Kepler* Asteroseismic Data Analysis and Calibration Software (KADACS) ; García et al. (2011a) encerclant les étoiles dans les images sont suffisamment larges (flux$\geq 100e^-$ par pixel) pour être certain de capturer le signal de l'étoile durant tout un quarter d'observation malgré le déplacement propre de l'étoile par rapport à la ligne de visée (Santos et al., 2019). Ils sont donc également suffisamment larges pour permettre au flux en provenance d'une étoile proche de la ligne de visée de polluer le signal observé. Pour cette raison, nous choisissons de tester une nouvelle fois l'algorithme, sur des étoiles dont la classification provient d'études publiées, contenant potentiellement des signaux de pollution. Notre nouvel échantillon de test $\mathcal{L}_{\rm test}$ comprend $25\,092$ étoiles, classifiées préalablement de façon binaire : elles appartiennent soit à la classe Solar-like soit à la classe Autre pulsateur.

TABLE 5.2: Matrice de confusion de l'étape de validation pour l'algorithme FliPer$_{\text{Class}}$ sur les données *Kepler*. Chaque ligne représente un type d'étoile connu, et chaque colonne correspond à la classification effectuée par l'algorithme. Les valeurs représentent le nombre d'étoiles dans chaque catégorie, et le nombre entre parenthèses représente le pourcentage d'étoiles de la classe classifiée. Le code couleur est le même que sur la figure 5.5, et est normalisé dans chaque case. Les nombres en dehors de la diagonale représentent les erreurs commises par l'algorithme FliPer$_{\text{Class}}$.

Connu \ Prédit	S-l	A. Puls.
Solar-like	322 *(99.6)*	1
Autre pulsateur		44 *(100)*

TABLE 5.3: Indices d'appartenance aux différentes classes lors de la phase d'entraînement de FliPer$_{\text{Class}}$ (échantillon représentatif de la table disponible à ce LIEN).

KIC	S-l	Puls.
...	...	...
5534973	1	0
4243508	0.92	0.09
6140892	1	0
12105259	0	1
7510397	0.97	0.03
8946760	1	0
6691449	1	0
10801714	0.03	0.97
5810513	1	0
3099949	1	0
5706341	1	0
1996456	0.02	0.98
6306718	1	0
6805631	1	0
4948479	1	0
...	...	...

98.9% des étoiles de l'échantillon $\mathcal{L}_{\text{test}}$ sont correctement classifiées par FliPer$_{\text{Class}}$. Cela correspond à une reconnaissance des pulsateurs de type solaire à 99.6%, et une reconnaissance des autres pulsateurs à 88.4%, comme indiqué sur la matrice de confusion de la table 5.4.

Ces performances, bien que plus faibles que celles obtenues sur le set de validation, sont très bonnes. En effet, l'échantillon de test n'a pas été vérifié : il comporte certainement des étoiles dont la puissance globale dans la PSD est altérée par des signaux astrophysiques externes à l'étoile observée (binarité, autre étoile dans le champ, ...), polluée par des signaux instrumentaux, ou bien avec une estimation biaisée de BP-RP et/ou L. Ces considérations seront développées à la section 5.4 lors de la classification des différents types de pulsateurs.

TABLE 5.4: Matrice de confusion de l'étape de test pour l'algorithme FliPer$_{\text{Class}}$ sur les données *Kepler*. La légende est la même que celle de la table 5.2

Connu \ Prédit	S-l	A. Puls.
Solar-like	23524 *(99.6)*	88
Autre pulsateur	170	1308 *(88.4)*

Les résultats de la classification sont représentés dans le diagramme de Hertzsprung-Russell sur la figure 5.10. Le panneau de gauche représente les étoiles dont la classification par FliPer$_{\text{Class}}$ est compatible avec les étiquettes de la littérature, alors que le panneau de droite représente les étoiles pour lesquelles les classifications sont différentes. Le code couleur correspond à celui de la classification par FliPer$_{\text{Class}}$. Nous remarquons que la plupart des confusions ont lieu pour des étoiles aux environs de la bande d'instabilité dans le diagramme de Hertzsprung-Russell, étoiles les plus difficiles à classifier. En effet, au voisinage de la bande l'instabilité dans le diagramme de Hertzsprung-Russell se mélangent des étoiles de faible masse de type solaire avec d'autres

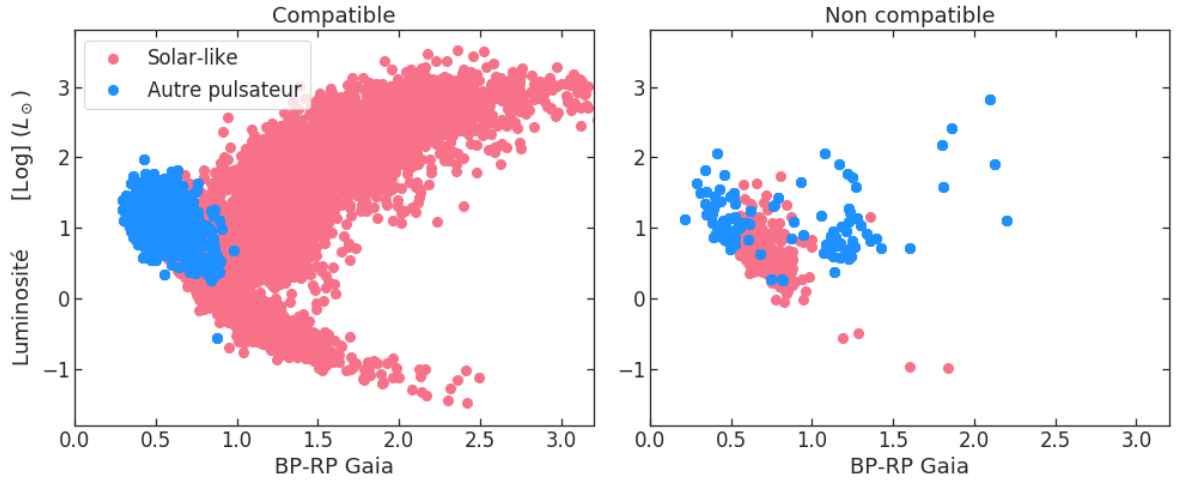


FIGURE 5.10: Résultats de la classification des $\sim 25\,000$ étoiles connues composant $\mathcal{L}_{\mathrm{validation}}$ entre la catégorie Solar-like et la catégorie Autre pulsateur dans le diagramme de Hertzsprung-Russell modifié. Le panneau de gauche représente les succès de la classification dans le diagramme de Hertzsprung-Russell modifié, le panneau de droite représente les discordances par rapport à la littérature, le code couleur correspondant à la classification par FliPer$_{\mathrm{Class}}$.

étoiles pulsantes plus massives (voir figure 5.1). Le paramètre BP-RP et la luminosité de l'étoile ne peuvent donc pas séparer les types de pulsateurs, et la classification repose uniquement sur les paramètres FliPer. Les pics associés à la restructuration de certains pulsateurs peuvent alors être confondus avec des pics associés aux harmoniques de la rotation type solaire, et vice-versa.

Les tables 5.5 et 5.6 sont représentatives des probabilités des différentes classes obtenues respectivement pour les étoiles reconnues par FliPer$_{\mathrm{Class}}$ et pour les étoiles dont les étiquettes diffèrent. Nous remarquons que pour la plupart des étoiles correctement classifiées, près de 100% des arbres constituant la forêt renvoient vers la bonne classe (voir table 5.5). En revanche, les étoiles source de désaccord entre FliPer$_{\mathrm{Class}}$ et les étiquettes de l'échantillon reportées dans la table 5.6 sont classifiées par FliPer$_{\mathrm{Class}}$ avec une probabilité en général significativement plus faible : la fraction d'arbres de la forêt désignant la classe est plus faible en moyenne que pour les étoiles correctement classifiées. Cela est cohérent avec un algorithme bien calibré, car une étoile classifiée avec un indice de confiance p a en réalité une probabilité p d'appartenir à cette classe.

À partir de l'algorithme entraîné, validé et testé, nous classifions enfin les étoiles observées par *Kepler*.

TABLE 5.5: Probabilités d'appartenance aux différentes classes par FliPer$_{\text{Class}}$ pour les étoiles dont les classifications sont compatibles. La table complète est disponible à ce LIEN

KIC	S-l	A. Puls
...	...	...
892760.00	0.00	1.00
893210.00	0.00	1.00
893214.00	0.00	1.00
893233.00	0.00	1.00
893647.00	0.09	0.91
893750.00	0.00	1.00
1025494.00	0.00	1.00
1026084.00	0.00	1.00
1026180.00	0.00	1.00
1026309.00	0.00	1.00
1026326.00	0.00	1.00
1026452.00	0.31	0.69
1026473.00	0.99	0.01
1026861.00	0.00	1.00
1026895.00	0.00	1.00
...	...	...

TABLE 5.6: Probabilités d'appartenance aux différentes classes par FliPer$_{\text{Class}}$ pour les étoiles classifiées différemment par l'algorithme par rapport aux étiquettes de l'échantillon. Extrait représentatif de la table disponible à ce LIEN

KIC	S-l	A. Puls.
...	...	...
3117511	0.97	0.03
3232218	0.73	0.27
3242039	0.13	0.87
3324644	0.28	0.72
3327681	0.88	0.12
3426995	0.25	0.75
3554497	0.18	0.82
3655608	1.00	0.00
3660010	0.81	0.19
3731157	0.22	0.78
3836772	0.34	0.66
3861139	0.55	0.45
3868832	0.54	0.46
3966800	1.00	0.00
4043227	0.57	0.43
...	...	...

5.3.4 Classification binaire de $\sim 160\,000$ étoiles observées par *Kepler*

La mission *Kepler* a observé de l'ordre de $195\,000$ étoiles dans le mode d'acquisition long-cadence. Nous disposons des PSD de ces étoiles, calibrées par la méthode décrite à la section 4.2.4. De cet échantillon d'étoiles :

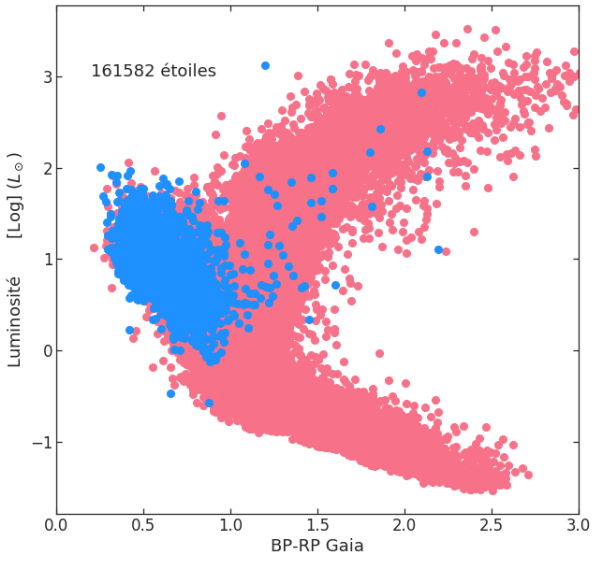


FIGURE 5.11: Résultats de la classification des $\sim 160\,000$ étoiles observées par *Kepler* représentées dans le diagramme de Hertzsprung-Russell. Le code couleur est le même que celui de la figure 5.6

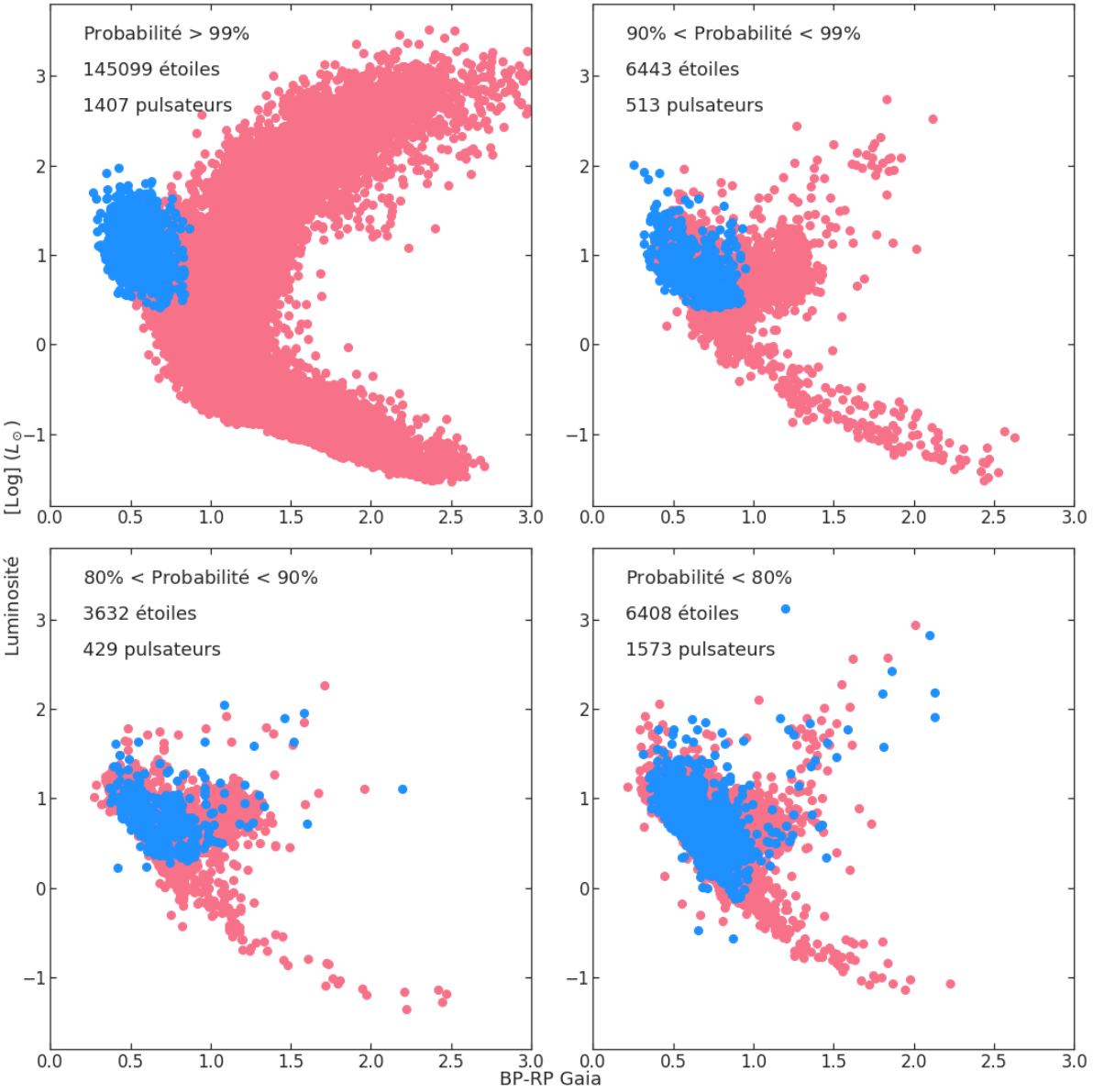


FIGURE 5.12: Résultats de la classification des $\sim 160\,000$ étoiles observées par *Kepler* représentées dans le diagramme de Hertzsprung-Russell, en fonction de la probabilité d'appartenance associée aux différentes classes par l'algorithme. Le code couleur est le même que celui de la figure 5.6

- Nous retirons les cibles connues pour faire partie d'un système binaire éclipsant (Prsa et al., 2011). En effet, les binaires à éclipses ont des signatures dans les PSD qui dépendent de l'orbite, du ratio de masse des étoiles, et le caractère aléatoire de la signature associée dans la PSD empêche leur reconnaissance par l'utilisation de la métrique FliPer.
- Nous retirons bien entendu les étoiles faisant partie de l'échantillon $\mathcal{L}_N$ utilisé pour les étapes d'entraînement et de validation.
- Nous choisissons de ne pas étudier les étoiles avec une PSD quasi-constante, caractérisées par des valeurs $\mathrm{F}_{\mathrm{p},0.7}, \mathrm{F}_{\mathrm{p},7}, \mathrm{F}_{\mathrm{p},20}$ ou $\mathrm{F}_{\mathrm{p},50} \leq 0$. Ces étoiles ont une PSD dominée par le bruit de photon, ce qui rend leur classification à partir de la puissance contenue dans la PSD non judicieuse.
- Les étoiles n'ayant pas de valeur de L ou BP-RP estimées par Gaia sont également retirées.

Finalement, $161\,577$ étoiles composent notre échantillon. Les résultats de la classification sont représentés dans le diagramme de Hertzsprung-Russell sur la figure 5.11, avec les points rouges représentant les étoiles

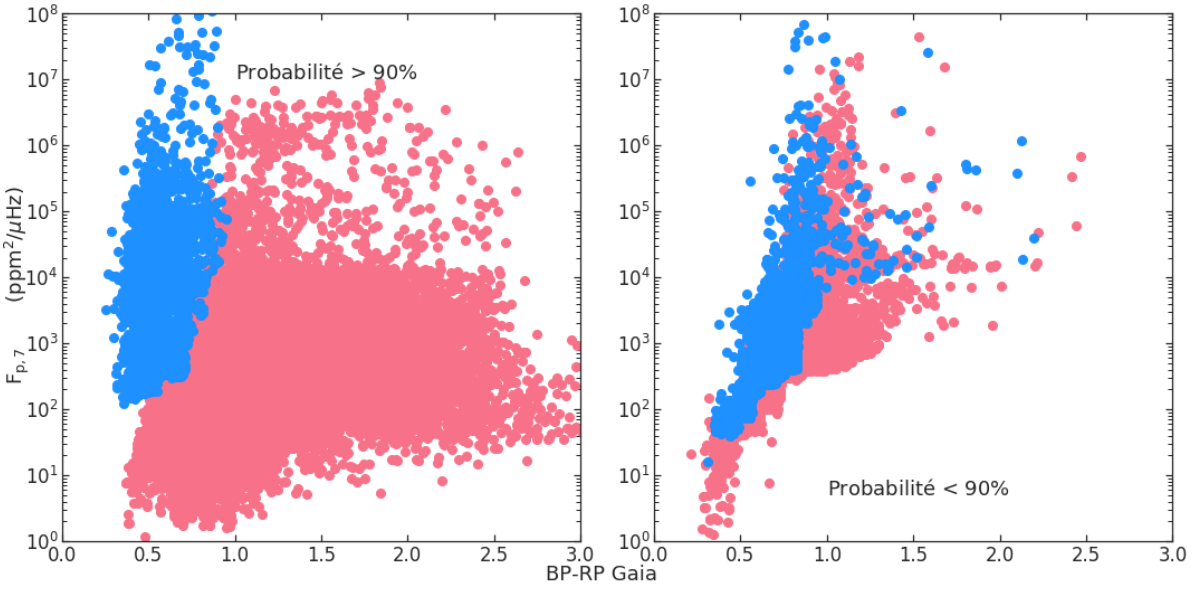


FIGURE 5.13: Résultats de la classification des $\sim 160\,000$ étoiles observées par *Kepler* représentées dans le diagramme $\mathrm{F_{p,7}}$ vs BP-RP. Le panneau de gauche contient les étoiles classifiées à plus de 90% de probabilité, et le panneau de droite contient le reste des étoiles classifiées. Le code couleur est le même que celui de la figure 5.6.

classifiées comme étoiles de type solaire, et les points bleus comme autres pulsateurs. Au premier ordre, les géantes rouges et les étoiles de la MS sont bien reconnues, et les autres pulsateurs se trouvent en majorité dans la bonne région du diagramme, proche de la bande d'instabilité.

Comme démontré lors de l'étape de test dans la section précédente, les indices d'appartenance correspondent à la probabilité de l'étoile d'appartenir à la classe prédite. Selon le degré de fiabilité souhaité pour la classification, certaines étoiles seulement sont sélectionnées. Afin d'obtenir par exemple des prédictions avec au moins 90% de confiance, il s'agit donc de sélectionner les étoiles dont la classe est prédite avec un indice de fiabilité supérieur à 0.9, et la même opération peut être menée pour obtenir les étoiles classifiées avec 80% de probabilité. La figure 5.12 représente les étoiles classifiées avec différents niveaux de confiance : la probabilité d'appartenir à la classe prédite est d'au moins de 99%, entre 90 et 99%, entre 80 et 90% ou bien inférieure à 80%. Pour que 90% des étoiles représentées soient considérées comme bien classifiées, on ne peut garder les résultats de la classification que de $151\,542$ étoiles. Cela correspond tout de même à $\sim 94\%$ de l'échantillon qui est bien classifié à au moins 90%, parmi lesquel $1\,920$ étoiles pulsantes qui ne sont pas de type solaire sont classifiées à 90% de confiance.

Nous visualisons sur la figure 5.13 les étoiles dans le diagramme $\mathrm{F_{p,7}}$ vs BP-RP : le panneau de gauche contient les étoiles classifiées avec un niveau de confiance d'au moins 90%, les étoiles sur le panneau de droite sont celles classifiées avec un niveau de confiance inférieur à 90%. Comme attendu suite à l'étude des importances relatives des différents paramètres lors de l'entraînement de l'algorithme, les étoiles classifiées avec le plus haut degré de confiance forment distinctement deux groupes dans le diagramme. Cette figure démontre l'impact important des paramètres FliPer sur la reconnaissance des pulsateurs de type solaire. Les étoiles classifiées avec une probabilité plus faible sont regroupées dans le diagramme $\mathrm{F_{p,7}}$ vs BP-RP sur le panneau de droite. Cette fois-ci, les deux groupes de pulsateurs sont en effet plus difficilement séparables. Cela prouve que les paramètres FliPer jouent un rôle important dans la classification des étoiles, puisque les étoiles classifiées avec les indices de confiance les plus faibles ont finalement des valeurs de FliPer similaires (panneau de droite de la figure 5.13).

Les probabilités associées à la classification binaire (identique à celle représentée sur la figure 5.6) des $\sim 160\,000$ étoiles observées par *Kepler* avec les incertitudes associées sont disponibles au téléchargement à ce LIEN.

5.4 Classification des différents types d'étoiles variables observées par *Kepler*

Après avoir démontré les performances des paramètres FliPer pour la reconnaissance des étoiles de type solaire parmi les étoiles pulsantes, nous nous intéressons dans cette section à la reconnaissance des autres pulsateurs observés lors de la mission principale Kepler. Nous conservons les étoiles de type solaire dans l'échantillon afin de confirmer les performances de la méthode à différentier tous les types de pulsateurs.

5.4.1 Données utilisées

Nous disposons de l'échantillon $\mathcal{L}_N$ utilisé pour la détection des pulsateurs de type solaire dans les données de *Kepler*. En raison du faible nombre de roAp et de Cepheides observées par *Kepler*, l'échantillon n'est pas suffisant pour permettre un entraînement de l'algorithme performant sur ces étiquettes. Nous donc regroupons ces types de pulsateurs avec le type d'étoile le plus proche dans le diagramme de Hertzsprung-Russell (voir figure 5.1) :

— Les étoiles δ-Scuti et roAp sont regroupées car elles ont une faible luminosité ($10\mathrm{L}_\odot \lesssim \mathrm{L} \lesssim 100\mathrm{L}_\odot$).

— Les Céphéides et RRLyrae appartiennent au même groupe car elles ont une grande luminosité ($30\mathrm{L}_\odot \lesssim \mathrm{L} \lesssim 100\,000\mathrm{L}_\odot$) mais une T_{eff} basse ($3.6 \lesssim \log_{10}(T_{\text{eff}}) \lesssim 3.9$).

Ainsi, les quatre étiquettes utilisées sont : Solar-like, γDor, δScuti/roAp et RRLyrae/Cephéide. Nous nous attendons à quelques confusions entre les étiquettes γDor et δScuti/roAp, car certaines des étoiles observées ont des signatures hydrides γDor/δScuti.

Les étoiles de $\mathcal{L}_N$ sont représentées sur la figure 5.14 dans le diagramme de Hertzsprung-Russell. La classe RRL/Ceph étant très peu peuplée, nous nous attendons à un taux de succès de la classification plus faible que celui des autres classes.

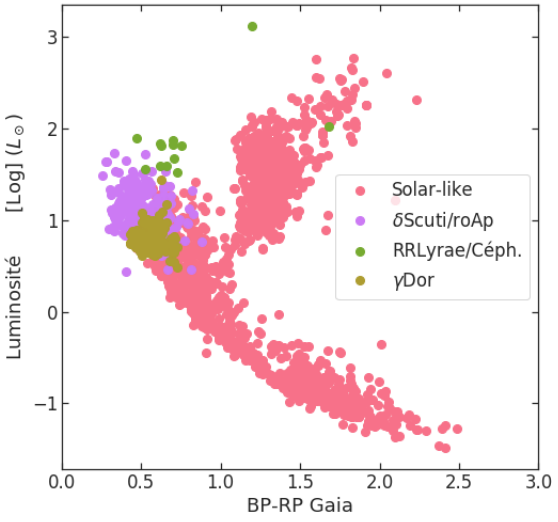


FIGURE 5.14: Diagramme de Hertzsprung-Russell des étoiles de $\mathcal{L}_N$.

5.4.2 Paramètres, hyperparamètres, et entraînement de FliPer$_{\text{Class}}$ pour la classification des pulsateurs observés par *Kepler*

Nous utilisons une nouvelle fois le paramètre photométrique BP-RP=G_{BP}-G_{RP} et la luminosité L de la mission Gaia. L'ensemble de paramètres utilisé pour la classification des différents types de pulsateurs est

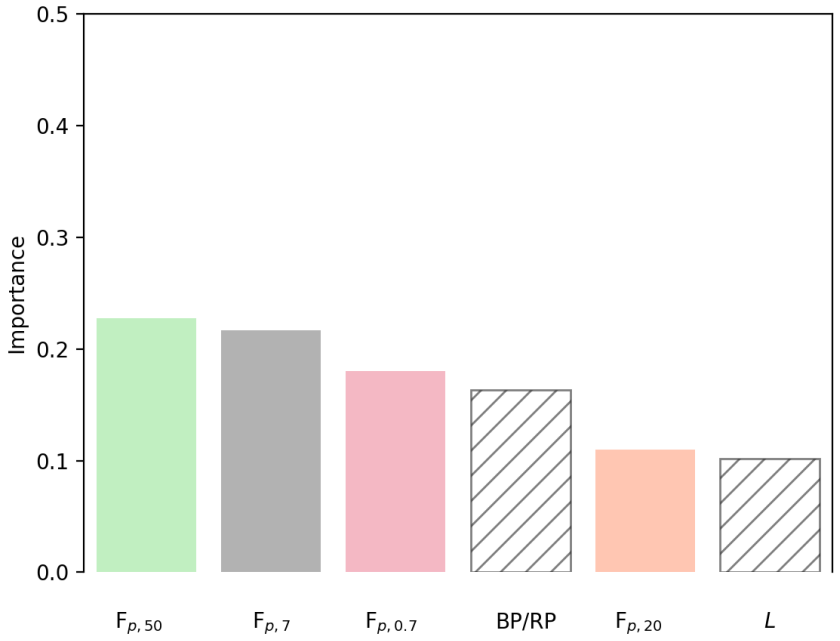


FIGURE 5.15: Importances relatives des différents paramètres FliPer, $T_{\rm eff}$, L, et $\rm BP\text{-}RP$ estimées lors de l'étape d'entraînement.

donc toujours

$$\mathrm{X} = [\mathrm{BP}-\mathrm{RP}, L, \mathrm{F_{p,0.7}}, \mathrm{F_{p,7}}, \mathrm{F_{p,20}}, \mathrm{F_{p,50}}].$$

Nous recherchons ensuite les valeurs optimales des hyperparamètres HX =[≪ Nombre d'arbres dans la forêt ≫ (A), ≪ Nombre d'étoiles minimal dans chaque feuille ≫ (F), ≪ Profondeur maximale d'un arbre ≫ (P)] de la forêt, à partir de courbes de validations très similaires à celles de la figure 5.7. Afin de minimiser l'erreur de classification et le temps de calcul lors de l'apprentissage, nous utilisons ainsi A=600, F=1 et P=40.

La Forêt Aléatoire est ensuite entraînée sur un échantillon d'entraînement $\mathcal{L}_{\rm entraînement}$ composé de $1\,557$ étoiles ($\sim 80\%$ des étoiles de type solaire et de $\sim 90\%$ des autres pulsateurs de $\mathcal{L}_N$).

La figure 5.15 représente l'importance des différents paramètres composant X pour l'entraînement. Nous observons que les paramètres FliPer gagnent de l'importance au détriment de BP-RP lors de l'entraînement lorsque l'on cherche à classifier les étoiles avec plus d'étiquettes différentes. Cela est cohérent avec un bon entraînement de l'algorithme, puisque les pulsateurs se trouvant dans la même région de la bande d'instabilité ne peuvent être distingués que par les paramètres FliPer parmi les paramètres composant X.

5.4.3 Performances et résultats

5.4.3.1 Validation

Nous validons l'algorithme entraîné sur l'échantillon de 277 étoiles restantes, n'ayant pas été utilisées lors de l'entraînement de l'algorithme. Le taux de réussite de la classification des différents types de pulsateurs est de 99.6%. La table 5.7 représente la matrice de confusion résultant de l'étape de validation. Comme attendu au vu des résultats de la section précédente, les pulsateurs de type solaire sont reconnus à 100% dans l'échantillon de test. Les RRL/Cephéides sont toutes reconnues, ainsi que les γDoradus et les δScuti/roAp.

TABLE 5.7: Matrice de confusion pour la classification des différents types de pulsateurs observés par *Kepler* lors de l'étape de validation de l'entraînement sur l'échantillon $\mathcal{L}_{\rm validation}$.

Connu \ Prédit	SL	RR/Cep	γ-Dor	δ-Sct/roAp
Solar-like	239 (*100*)			
RRLyrae/Cepheid		3 (*100*)		
γ-Dor			19 (*100*)	
δ-Scuti/RoAp/sdBV				16 (*94.1*)

Cette classification est une nouvelle fois estimée à partir de la classification la plus probable parmi les résultats des différents arbres composant la forêt. En revanche, contrairement à la classification binaire réalisée dans la section précédente, il n'existe pas de méthode directe de calibration des indices de fiabilité de l'algorithme pour les classifications à étiquettes multiples. Les indices de classification produits par l'algorithme ne sont donc pas égaux aux probabilités d'appartenance aux différentes classes pour chacune des étoiles de l'échantillon de validation.

Nous précisons qu'en raison du faible nombre d'étoiles présentes dans chacune des classes RRL/Cephéides, γDoradus et δScuti/roAp, les positions des différents types de pulsateurs peuvent ne pas être bien définies dans l'hyperplan des paramètres utilisés. Nous réalisons donc une nouvelle étape de test sur la classification des données classifiées dans la littérature.

5.4.3.2 Étape de test

Afin de tester les capacités de classification de l'algorithme sur un échantillon plus large, nous utilisons l'échantillon d'étoiles $\mathcal{L}_{test}$ observées par *Kepler* en long-cadence composé de $23\,607$ étoiles de type solaire, 6 RRL/Cepheides, 44 γDor et 56 δSct/roAp. La matrice de confusion de la classification de cet échantillon est représentée sur la table 5.8. Les étoiles de type solaire, les γDor et les δSct/roAp sont reconnues à plus de 98%. Les quelques erreurs sont majoritairement liées à une confusion entre les autres pulsateurs et les oscillateurs de type solaire. En revanche, les RRLyrae et Céphéides sont souvent confondues avec les autres classes. Cela n'est pas surprenant puisque l'échantillon d'entraînement ne contient que 7 de ces étoiles : l'algorithme n'est pas entraîné sur un échantillon suffisamment peuplé pour reconnaître cette classe de pulsateurs efficacement.

TABLE 5.8: Matrice de confusion pour la classification des différents types de pulsateurs observés par *Kepler* durant l'étape de test de l'algorithme sur l'échantillon $\mathcal{L}_{\rm test}$.

Connu \ Prédit	SL	RR/Cep	γ-Dor	δ-Sct/roAp
Solar-like	23556 (*99.7*)	3	12	41
RRLyrae/Cepheid	4	1 (*16.7*)		1
γ-Dor			44 (*100*)	
δ-Scuti/RoAp	1			55 (*98.2*)

Bien que l'algorithme multi-classes ne puisse être calibré, nous étudions les courbes de validation associées à la classification de chacune des classes. Elles sont représentées sur la figure 5.16. L'indice d'appartenance des étoiles classifiées dans la classe C_i est comparé à la fraction des étoiles étiquetées C_i correctement classifiées par l'algorithme. Nous ne représentons pas les données obtenues à partir de moins de 10 étoiles par intervalle de probabilité, afin de garantir que les points représentés sont significatifs. Ainsi nous n'avons que deux intervalles

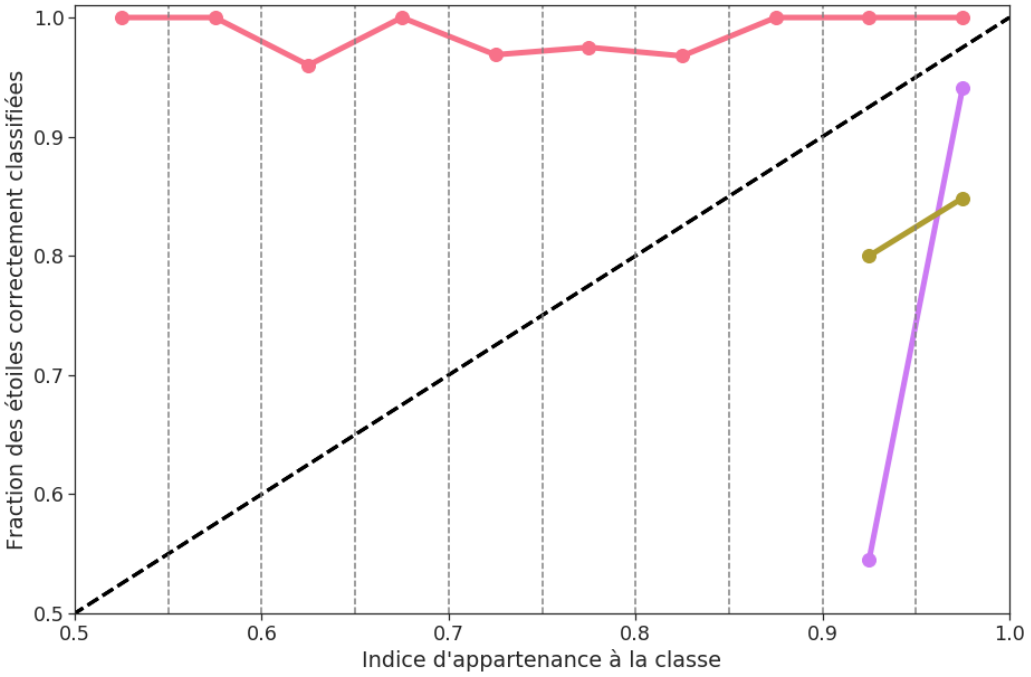


FIGURE 5.16: Courbes de validation des différentes classes (SL, γDor, δScuti/roAp). L'indice d'appartenance à une classe est calculé et représenté en fonction de la proportion d'étoiles assignées à l'étiquette correspondante. Pour chaque intervalle de longueur 0.05 de probabilité, délimité par les lignes en tirets verticales, les indices d'appartenance sont reportés. Seuls les intervalles contenant un nombre d'étoiles significatif sont représentés, ce qui explique que les classes γDor et δScuti/roAp n'aient chacune que deux valeurs reportées, et l'absence de la classe RRL/Cep qui n'est pas suffisamment peuplée.

représentatifs pour les classes γDor et δScuti/roAp, et la courbe de validation de la classe RRL/Cep ne peut être obtenue à partir du faible échantillon de données. De ce diagramme nous déduisons que :

- Les étoiles classifiées comme pulsateur de type solaire à plus de 50% de confiance par FliPer$_{\text{Class}}$ ont toutes une probabilité d'être en effet étiquetées SL dans la littérature à plus de 95%.
- Les étoiles classifiées comme δSct/roAp à plus de 95% de confiance par FliPer$_{\text{Class}}$ ont une probabilité d'être étiquetées δSct/roAp dans la littérature à plus de 94%. Nous n'avons pas suffisamment d'étoiles dans l'échantillon classifiées avec un indice de confiance $< 90\%$ pour étalonner les probabilités en dessous.
- Les étoiles classifiées comme γDor à plus de 90% de confiance par FliPer$_{\text{Class}}$ ont une probabilité d'être étiquetées γDor dans la littérature à $\sim 80\%$. Nous n'avons pas suffisamment d'étoiles dans l'échantillon classifiées avec un indice de confiance $< 90\%$ pour étalonner les probabilités en dessous.
- L'échantillon de RRL/Cep n'est pas suffisamment peuplé pour permettre de déterminer des statistiques de classification. Nous choisirons donc de ne pas nous fier aux probabilités associées aux résultats de la classification indiquant une détection d'étoiles de type RRL/Cep par la suite.

La figure 5.17 représente dans le diagramme de Hertzsprung-Russell de gauche à droite : les étoiles pour lesquelles la classification par FliPer$_{\text{Class}}$ est compatible avec les étiquettes de la littérature, les étoiles pour lesquelles la classification est en désaccord avec les étiquettes, avec le code couleur correspondant à la classification par FliPer$_{\text{Class}}$, et les étoiles pour lesquelles la classification est en désaccord avec les étiquettes, avec le code couleur correspondant aux étiquettes connues. Cette figure est donc une visualisation de la matrice de confusion (table 5.8). Comme attendu à cause du faible échantillon utilisé pour l'entraînement, les étoiles

RRL/Cep sont très mal reconnues. Nous observons également que les quelques désaccords supplémentaires concernent des étoiles proches de la bande d'instabilité. Certaines étoiles de type solaire sont classifiées comme γDor, RRL/Cep ou δSct/roAp par FliPer$_{\text{Class}}$. Puisque ces étoiles se trouvent loin de la bande d'instabilité, et comme les étoiles binaires à éclipse ont été retirées de l'échantillon, il s'agit certainement d'étoiles présentant un signal pollué par des sources extérieures. En effet, afin d'être certain de capturer le flux issu de l'étoile observée pendant toute la durée d'un quarter d'observation malgré le déplacement propre de l'étoile, le masque choisi est grand (seuil à 100 e$^-$/pixel contre les 1000 e$^-$/pixel habituellement utilisés pour la détection des transits planétaires). Pour cette raison, nous sommes sensibles à la présence d'autres corps proches de la ligne de visée : les PSD utilisées peuvent contenir du signal de pollution provenant d'une autre source.

Nous vérifions cette hypothèse visuellement, à partir des PSD des étoiles sujet de discordance. La figure 5.18 contient les PSD de 16 étoiles choisies aléatoirement parmi les étoiles représentées sur les panneaux de droite de la figure 5.17. À partir de cette figure nous remarquons que sur 12 étoiles étiquetées Solar-like, 11 (repérées sur la figure par les fonds beiges) présentent des signaux s'apparentant à de très intenses signaux de rotation, ou bien à des signaux sismiques associés à d'autres pulsateurs. Ces étoiles peuvent donc être des étoiles avec des oscillations de type solaire, mais polluées par des signaux extérieurs, comme pour KIC 3554497 représentée sur la figure 5.18 qui semble présenter des modes d'oscillation de type solaire autour de 30μHz, et également des pics de grande amplitude généralement associés à la présence d'une autre étoile pulsante dans le champ. L'étoile KIC 4249145 est en revanche peut-être mal classifiée par FliPer$_{\text{Class}}$ à cause de forts signaux rotationnels qui biaisent les paramètres FliPer des étoiles de type solaire vers des valeurs typiques des autres pulsateurs. Les indices d'appartenance de ces étoiles à la classe associée par FliPer$_{\text{Class}}$ sont également renseignés pour chacune des étoiles sur la figure 5.18. Nous confirmons que malgré le fait que l'algorithme de Random Forest pour la classification multi-classes ne puisse être calibré, les indices d'appartenance renseignent tout de même sur la fiabilité de la classification : les étoiles en discordance ont en moyenne un indice de fiabilité de 68%, alors que les étoiles reconnues ont un indice d'appartenance moyen de 98%.

À partir de cette étude de test des résultats de FliPer$_{\text{Class}}$, nous concluons que l'algorithme est performant pour la classification des différents types de pulsateurs pour lesquels il a été correctement entraîné à plus de 98%. Les indices d'appartenance produits lors de la classification nous renseignent sur la fiabilité de la classification pour chacune des étoiles, et permettent de détecter des étoiles présentant des signaux pollués ou bien difficilement classifiables à cause de la présence de forts signaux de rotation.

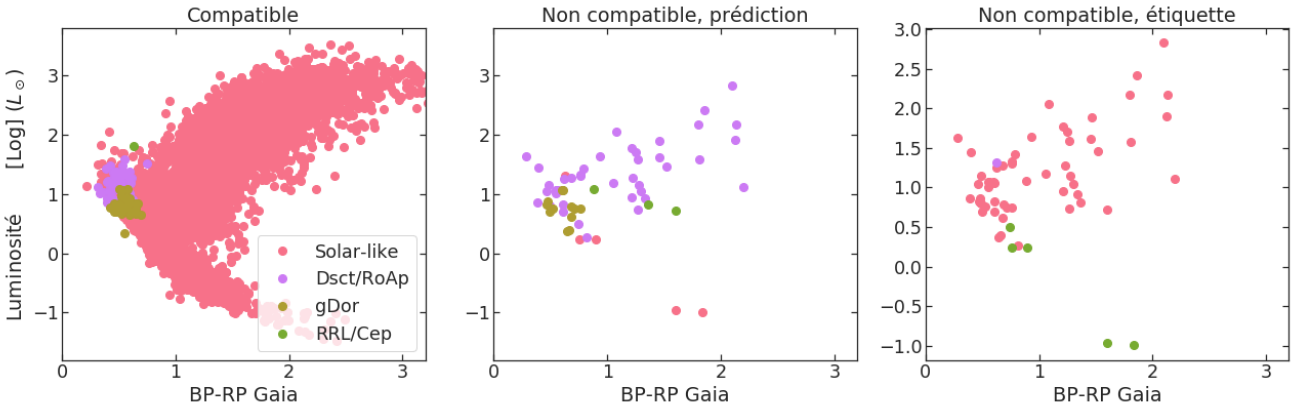


FIGURE 5.17: Diagramme de Hertzsprung-Russell contenant de gauche à droite les étoiles dont les classifications par FliPer$_{\text{Class}}$ et par la littérature sont en accord, les étoiles en désaccord avec le code couleur correspondant aux prédictions de FliPer$_{\text{Class}}$, et les étoiles en désaccord avec le code couleur correspondant aux étiquettes de la littérature.

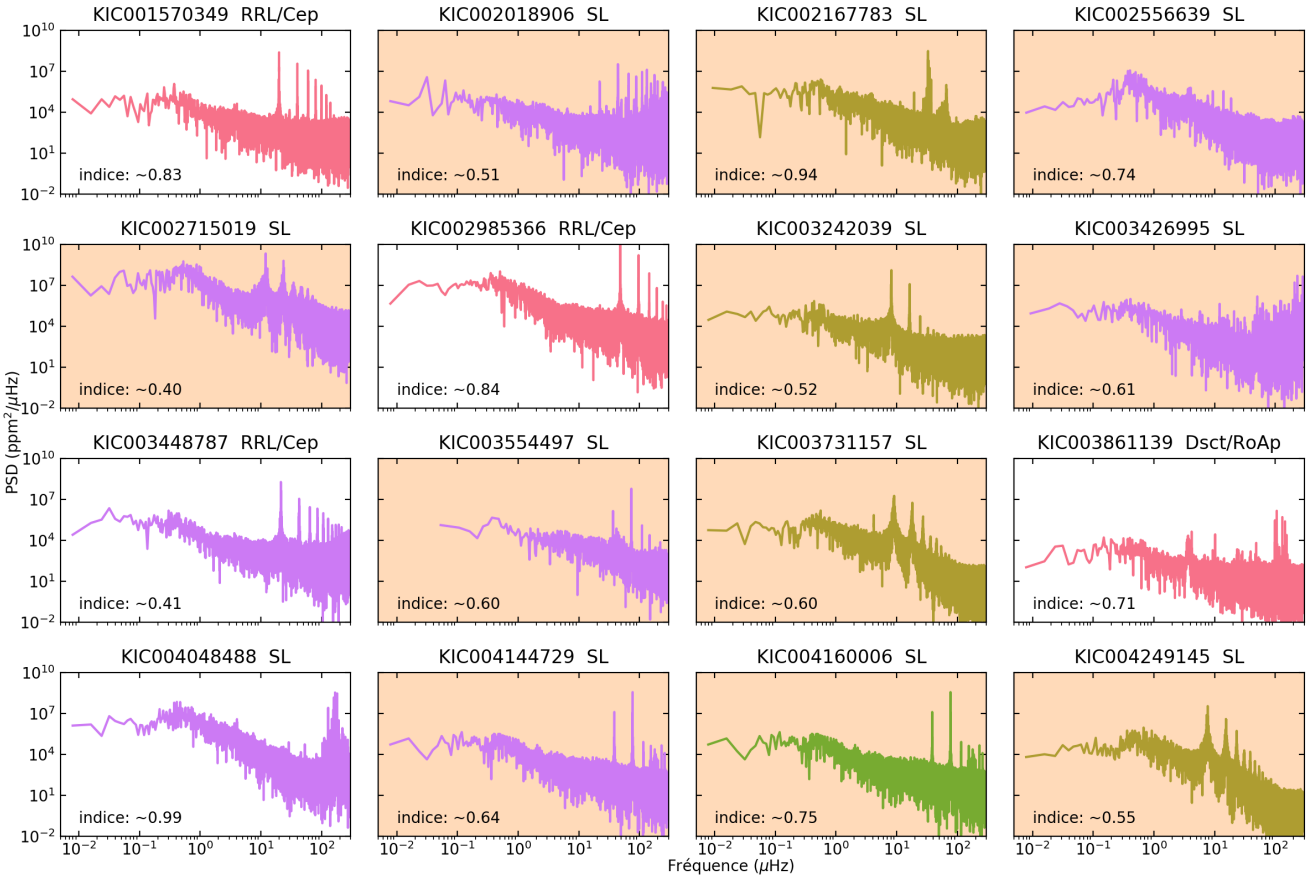


FIGURE 5.18: Représentation de 16 PSD choisies aléatoirement parmi les étoiles pour lesquelles la classification par FliPer$_{\text{Class}}$ est en désaccord avec la littérature. Le code couleur correspond à la classification par FliPer$_{\text{Class}}$. Au dessus de chaque PSD est indiquée l'étiquette correspondante dans la littérature. Les étoiles représentées sur fond beige sont étiquettes Solar-like, mais présentent pourtant des signaux s'apparentant visuellement à des autres pulsateurs ou bien à des puissants signaux de rotation. Les indices d'appartenance par FliPer$_{\text{Class}}$ sont également indiqués.

5.4.4 Classification des étoiles observées par *Kepler*

Finalement, nous classifions l'ensemble de l'échantillon des étoiles de *Kepler* décrit à la section 5.3.4. Les résultats de classification par FliPer$_{\text{Class}}$ des différents types de pulsateurs observés par *Kepler* sont représentés sur les diagramme de Hertzsprung-Russell de la figure 5.19, en fonction de l'indice de la valeur de l'indice de confiance fourni par l'algorithme. Nous savons d'après l'étude de test de la section 5.4.3.2 que les étoiles classifiées de type solaire avec un indice de confiance supérieur à 95% ont une probabilité d'appartenir à la classe prédite de 100%, la classification des étoiles γDor avec un indice de confiance supérieur à 95% est fiable à plus de 80%, et la classification des δScuti/roAp avec un indice de confiance supérieur à 95% est fiable à plus de 90%. Les étoiles classifiées avec un indice d'appartenance supérieur à 90% sont représentées sur la figure 5.19, auprès des étoiles classifiées à plus de 99% de confiance, celles ayant des indices d'appartenance entre 80 et 90%, et celles avec un indice inférieur à 80%. Visuellement, les étoiles avec un indice supérieur à 99% se trouvent toutes dans les bonnes régions du diagramme de Hertzsprung-Russell, tout comme celles classifiées à plus de 90%. Lorsque l'indice d'appartenance passe sous la barre des 90% (voir les probabilités d'appartenance associées aux différentes classes sur la figure 5.16), certaines étoiles se trouvant dans la zone des RG sont classifiées comme δScuti/roAp. Nous interprétons cette classification comme la présence de signaux de pollution à grande amplitude dans les PSD de ces étoiles. Cette fois encore, la classification des étoiles vers la classe RRL/Céphéide n'est pas fiable à cause du faible nombre d'étoiles considérées dans la

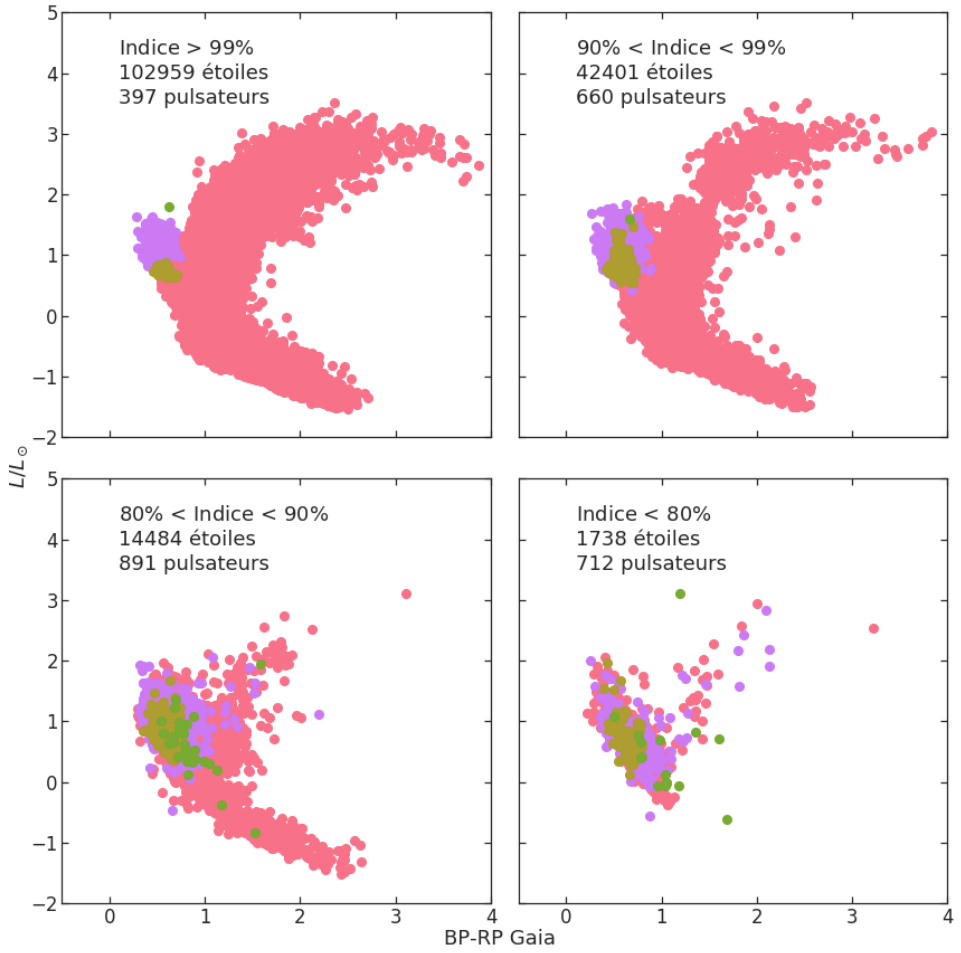


FIGURE 5.19: Diagrammes de Hertzsprung-Russell contenant les étoiles observées par *Kepler*, réparties dans les différents panneaux selon leur indice d'appartenance à la classe choisie par FliPer$_{\rm Class}$. Le code couleur est le même que celui de la figure 5.17.

phase d'entraînement. La classification de ces $\sim 160\,000$ étoiles par FliPer$_{\rm Class}$ est rendue disponible à cette ADRESSE.

Les données de la mission *Kepler* ont été largement étudiées, de nombreuses étoiles pulsantes ont été référencées : ces études ont permis la phase de test de l'algorithme FliPer$_{\rm Class}$. Notre classification apporte non seulement une confirmation indépendante des détections, mais aussi un moyen de détecter des étoiles avec un signal pollué par une source physique ou instrumentale externe, grâce aux indices d'appartenance associés à la classification. Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéressons aux étoiles observées par les missions qui ont pris la relève de *Kepler* : la deuxième vie de l'instrument dénommée K2, et la plus récente mission TESS. Pour les étoiles observées lors de ces deux missions, qui n'ont en grande majorité jamais été étudiées, la classification par FliPer$_{\rm Class}$ arrive en amont des études physiques, et vise cette fois-ci à faciliter grandement les analyses observationnelles à venir.

5.5 Préparation de l'analyse des données de la mission TESS : classification d'étoiles simulées

Durant les deux années de la mission spatiale nominale, TESS observe spécifiquement plus de $200,000$ étoiles naines appartenant à la séquence principale à la recherche de transits planétaires (Ricker et al., 2014). Dans le même temps, les images appelées « full-frame images » (FFI) d'une dimension de 24×96 degrés sont acquises avec (entre autres) une cadence de 30 minutes, équivalente au mode d'acquisition LC de la mission *Kepler*. À la fin de la mission nominale prévue pour deux ans, la quasi-totalité des deux hémisphères célestes aura ainsi été observée (voir le plan d'observation de la mission TESS sur la figure 5.20). En revanche, les différentes parties du ciel sont observées durant différentes plages temporelles : les étoiles proche des pôles écliptiques sont observées en continu pendant ~ 1 an, tandis que les étoiles proches de l'écliptique ne sont observées que pendant un secteur d'observation, soit 27.38 jours consécutifs. Nous savons désormais qu'à l'issue de ces deux ans d'observation de la mission nominale, le satellite observera de nouveau des différentes zones du ciel, avec une cadence de 10 minutes, enrichissant les données.

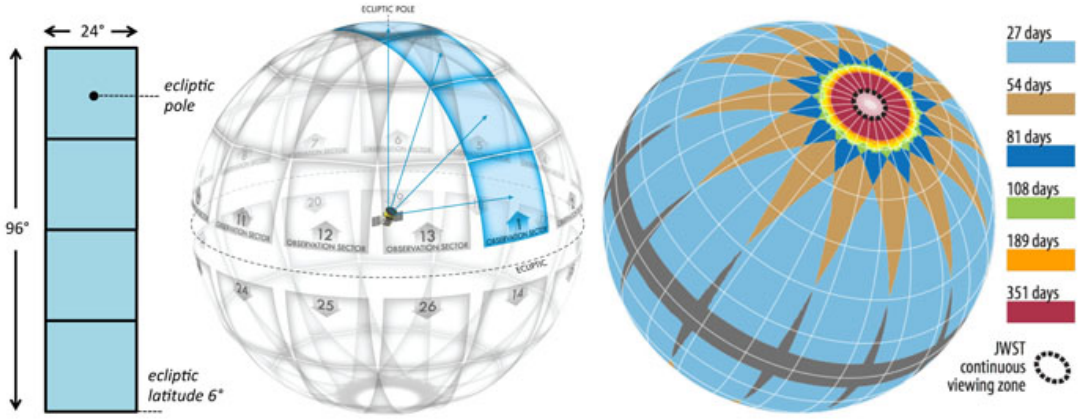


FIGURE 5.20: Plan d'opération de la mission TESS. Crédits : NASA

Dans le contexte de la mission spatiale TESS, le nombre d'étoiles observées dans les FFI est de l'ordre de la dizaine de millions. Cela représente une augmentation d'au moins 2 ordres de grandeur par rapport au volume de données astérosismiques regroupant les étoiles observées durant les missions CoRoT, *Kepler* et K2 (voir figure 1.7 de l'introduction de ce manuscrit). La communauté astérosismique s'est mobilisée depuis 2016, pour anticiper l'arrivée des données, afin de mettre en commun les outils d'analyse existants pour tirer profit rapidement de l'immense échantillon d'étoiles observées. Ce regroupement « TESS Data for Asteroseismology » (T'DA), auquel nous appartenons, est composé de quelques dizaines de membres de la communauté astérosismique internationale. Il a pour but de créer un algorithme automatique de calibration des courbes de lumière, enrichit d'un algorithme de classification automatique des étoiles observées. Cette section s'inscrit dans le cadre de notre contribution à l'algorithme de classification généralisé pour les données de TESS. Ces travaux ont été réalisés avant l'arrivée des premières données du satellite TESS, et sont donc menés sur des étoiles simulées.

5.5.1 Quelques vérifications supplémentaires à partir des données de *Kepler*

Nous avons réalisé l'étude de classification multi-classes de $\sim 160\,000$ étoiles observées par *Kepler* dans la section 5.4. Nous avons pu vérifier directement à partir d'échantillons de validation et de test les bonnes performances à 98% de l'algorithme. Dans le cas des données de TESS, la classification doit avoir lieu à l'aveugle puisque nous nous plaçons en amont de la plupart des études concernant les différents types de

pulsateurs. Pour cette raison, nous effectuons des dernières vérifications des performances de l'algorithme soumis à quelques difficultés : une durée d'observation réduite, des données de température manquantes, et la prise en compte des incertitudes sur les différents paramètres utilisés.

5.5.1.1 Données utilisées

Afin de confirmer en amont l'efficacité de la méthodologie FliPer sur des données acquises pendant une courte période de temps, comme ce sera le cas pour une grande partie des données de TESS, nous utilisons un échantillon $\mathcal{L}_{kepler}$ de 1.442 étoiles observées par *Kepler* dans le mode d'observation « long-cadence », dont la fréquence est égale à la cadence d'acquisition des données de TESS. Ces données ont été acquises pendant les quatre années de la mission principale *Kepler* : nous les réduisons à 27 jours consécutifs, extraits aléatoirement pendant les années d'observation de la mission *Kepler*. Les étoiles composant l'échantillon sont répertoriées dans la table 5.13. L'échantillon ne comporte pas d'étoiles variables de type LPV, puisque ces étoiles sont très bien séparées des autres pulsateurs dans le diagramme de Hertzsprung-Russell : l'effet lié à la durée d'observation n'entre pas en jeu pour leur classification.

TABLE 5.9: Composition de l'échantillon d'étoiles observées par *Kepler* (données réduites à une durée de 27 jours).

Type d'étoile	Nb. d'étoiles *Kepler*
Solar-like (SL)	802
Subdwarf B (sdBV)	8
βCephei (β-Cep)	5
Slowly pulsating B-type (SPB)	26
δScuti	358
γDoradus (γ-Dor)	202
rapidly oscillating Ap (roAp)	3
RRLyrae	36
Long-period variable (LPV)	0
Cepheid	2

L'échantillon de données $\mathcal{L}_{kepler}$ provenant de la mission *Kepler*, certaines classes d'étoiles sont sous-représentées. Nous choisissons de regrouper les étoiles avec la classe la plus proche dans le diagramme de Hertzsprung-Russell (voir figure 5.1) :

- Les étoiles δ-Scuti, RoAp, et sdBV ont une faible luminosité $(10\mathrm{L}_\odot \lesssim \mathrm{L} \lesssim 100\mathrm{L}_\odot)$;
- Les β-Cep et SPB ont une grande luminosité $(100\mathrm{L}_\odot \lesssim \mathrm{L} \lesssim 100,000\mathrm{L}_\odot)$ et une T_{eff} élevée $(4 \lesssim \log_{10}(T_{\text{eff}}) \lesssim 4.5)$;
- Les Céphéides et RRLyrae ont une grande luminosité $(30\mathrm{L}_\odot \lesssim \mathrm{L} \lesssim 100,000\mathrm{L}_\odot)$ mais T_{eff} basse $(3.6 \lesssim \log_{10}(T_{\text{eff}}) \lesssim 3.9)$.

Les différentes étiquettes utilisées pour la classification sont donc Solar-like, γDor, δScuti/roAp/sdBV, RR-Lyrae/Cephéide et SPB/βCephei.

Afin de classifier ces données, nous utilisons les paramètres suivants :

$$\mathrm{X} = [\mathrm{F}_{\mathrm{p},0.7}, \mathrm{F}_{\mathrm{p},7}, \mathrm{F}_{\mathrm{p},20}, \mathrm{F}_{\mathrm{p},50}, T_{\text{eff}}]. \tag{5.8}$$

Nous avons volontairement remplacé le paramètre Gaia BP-RP par la température effective en provenance du catalogue de Mathur et al. (2017) dans un soucis de cohérence au long de la section, car les données simulées pour TESS sont directement accompagnées de la température effective. Pour la même raison, la luminosité n'est plus utilisée dans cette section. L'étude présentée ici est donc une preuve de concept du grand apport des paramètres FliPer pour la classification des étoiles. Ces paramètres sont donc utilisés aux côtés des paramètres photométriques et spectroscopiques habituels (voir section 5.1.2) au sein d'un unique algorithme de classification pour l'analyse automatique des données de TESS par le regroupement T'DA.

5.5.1.2 Impact de la durée d'observation sur les performances de FliPer$_{\rm Class}$

L'algorithme FliPer$_{\rm Class}$ est entraîné sur 80% de l'échantillon $\mathcal{L}_{kepler}$ puis testé sur les 20% restants. La table 5.10 représente la matrice de confusion obtenue à l'étape de test.

La classification sur les données réduites à 27 jours a un taux de succès de 99% : nous concluons que la résolution fréquentielle des PSD liée à la durée d'observation n'a qu'un très faible impact sur les performances de classification de FliPer$_{\rm Class}$.
Ce résultat est interprété par le fait que les paramètres FliPer ne sont que très peu affectés par la résolution fréquentielle, puisqu'ils mesurent une densité de puissance globale. Ce résultat important place les paramètres FliPer en bonne position pour classifier les étoiles qui n'ont été observées que pendant une courte période de temps, pour lesquelles les estimations classiques de périodicité dans la courbe de lumière sont rendues difficiles.

TABLE 5.10: Matrice de confusion résultant de la classification de l'échantillon de test pour les données de *Kepler* réduites à 27 jours. Les paramètres utilisés pour effectuer la classification sont $\mathrm{F}_{\mathrm{p},i}$ ($i \in [0.7, 7, 20, 50]$ μHz) et $T_{\rm eff}$.

Connu \ Prédit	S-l	RR/Cep	γ-Dor	δ/roAp/sdBV	SPB/β
Solar-like	161 (*100*)				
RRLyrae/Cepheid		9 (*100*)			
γ-Dor			41 (*100*)		
δ-Scuti/RoAp/sdBV			1	73 (*97.3*)	1
SPB/β-Cephei				1	6 (*85.7*)

5.5.1.3 Performance des paramètres FliPer seuls

Dans la collaboration T'DA les algorithmes sont regroupés pour former un seul et même réseau de classification. Ainsi, il est judicieux de regrouper notre étude FliPer$_{\rm Class}$ avec l'algorithme utilisé par Armstrong et al. (2016) dont les performances ont été détaillées dans la section 5.1.2 sous un seul et même algorithme de Random Forest. Notre contribution consiste donc à apporter les paramètres FliPer au sein de l'algorithme. L'apport étant l'utilisation des paramètres FliPer, nous évaluons leur efficacité indépendamment des autres paramètres avec lesquels ils peuvent être combinés.

Nous entraînons une nouvelle fois FliPer$_{\rm Class}$ en retirant la $T_{\rm eff}$ des paramètres utilisés : l'algorithme ne classifie donc les étoiles qu'à partir des paramètres $\mathrm{F}_{\mathrm{p},i}$ ($i \in [0.7, 7, 20, 50]$ μHz). Les résultats de la classification effectuée sur l'échantillon de test sont reportés sur la table 5.11.

Les résultats sont très semblables à ceux obtenus lors de l'utilisation de la $T_{\rm eff}$: le taux de succès de la classification avec les paramètres FliPer seuls est tout de même de 96%. La grande majorité des erreurs de classification concerne la classe des SPB/βCepehi qui ne sont pas reconnues par les paramètres FliPer. De façon globale, les paramètres FliPer, même s'ils ne sont pas suffisants pour classifier tous les types de pulsateurs, semblent très efficaces :

- Pour distinguer les étoiles de type solaire, qui sont habituellement exclues des études de classification comme c'est le cas pour l'algorithme d'Armstrong et al. (2016) avec lequel nous nous regroupons ;
- Pour distinguer également les étoiles pulsantes dans la zone d'instabilité.

TABLE 5.11: Matrice de confusion résultant de la classification de l'échantillon de test pour les données de *Kepler* réduites à 27 jours. Les paramètres utilisés pour effectuer la classification sont les FliPer seulement : $\mathrm{F}_{\mathrm{p},i}$ ($i \in [0.7, 7, 20, 50]$ μHz)

Connu \ Prédit	S-l	RR/Cep	γ-Dor	δ/roAp/sdBV	SPB/β
Solar-like	161 (*100*)				
RRLyrae/Cepheid		8 (*88.6*)		1	
γ-Dor			41 (*99.4*)		
δ-Scuti/RoAp/sdBV	1			73 (*93.8*)	1
SPB/β-Cephei	5		1	1	0 (*0*)

5.5.1.4 Impact des incertitudes sur les paramètres utilisés sur les performances de FliPer$_{\rm Class}$

Finalement, nous évaluons l'impact des incertitudes mesurées sur les différents paramètres utilisés sur les performances de l'algorithme. La méthodologie pour estimer les incertitudes sur les paramètres FliPer est la même que celle utilisée dans le chapitre 4 (voir section 5.1). En revanche, comme la température effective des étoiles observées par TESS provient du catalogue TIC, nous choisissons d'utiliser une incertitude moyenne sur la température effective de 170K, qui correspond à l'incertitude moyenne calculée à partir des données du premier secteur d'observation du satellite TESS.

Nous simulons ensuite à partir de chaque étoile de l'échantillon de test 100 étoiles artificielles avec leurs paramètres X par une simulation Monte Carlo. Avec $\mathcal{G}_{0\leq i\leq 100}$ des valeurs aléatoires suivant la loi normale, nous calculons pour les paramètres $\mathrm{F}_{\mathrm{p}_{0.7}}$, $\mathrm{F}_{\mathrm{p}_7}$, $\mathrm{F}_{\mathrm{p}_{20}}$, $\mathrm{F}_{\mathrm{p}_{50}}$ et $\mathrm{T}_{\mathrm{eff}}$ 100 nouvelles valeurs $\mathrm{X}_{0\leq i\leq 100}$ suivant l'équation 4.25.

Chaque nouvelle étoile artificielle appartenant à un tirage de 100 valeurs pour chaque étoile originale est par la suite considérée comme une étoile individuelle pour tester l'algorithme.

La matrice de confusion obtenue à partir du nouvel échantillon de test contenant cent fois plus d'étoiles qu'auparavant est représentée sur la table 5.12.

Les performances de la classification sont très similaires à celles obtenues à partir de l'échantillon de test original, avec un taux de réussite dépassant de 99%. La prise en compte des incertitudes sur les paramètres d'entrée n'altère pas les performances de FliPer$_{\rm Class}$.

TABLE 5.12: Matrice de confusion résultant de la classification de l'échantillon de test pour les données de *Kepler* réduites à 27 jours, en prenant en compte les incertitudes sur les paramètres. Les paramètres utilisés pour effectuer la classification : $\mathrm{F}_{\mathrm{p},i}$ ($i \in [0.7, 7, 20, 50]$ μHz) et T_{eff}.

Connu \ Prédit	S-l	RR/Cep	γ-Dor	δ/roAp/sdBV	SPB/β
Solar-like	15940 (*100*)				
RRLyrae/Cepheid		900 (*100*)			
γ-Dor			3912 (*99.4*)	2	
δ-Scuti/RoAp/sdBV	1		93	5541 (*93.8*)	11
SPB/β-Cephei				133	381 (*85.7*)

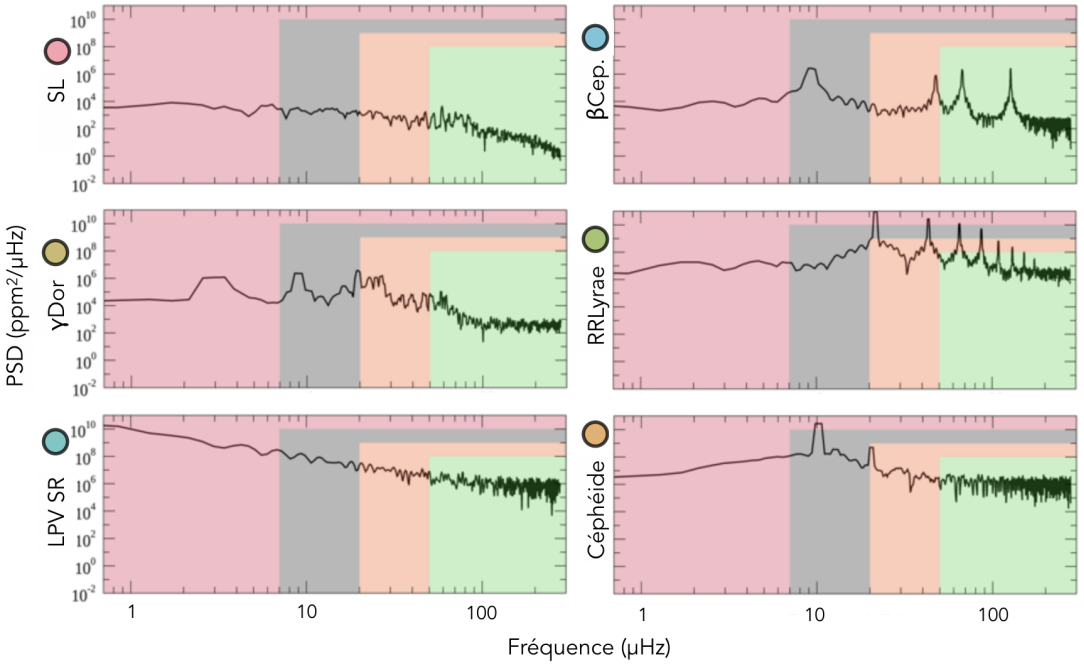


FIGURE 5.21: PSD de six étoiles simulées bruitées de types SL, γDor, LPV, βCep., RRLyrae et Cephéide. Les plages de couleurs sont les mêmes que sur la figure 4.9, et délimitent les signaux qui sont pris en compte dans le calcul des différents paramètres FliPer. Les disques colorés assignent une couleur aux différentes étoiles, et sont réutilisés sur la figure 5.22.

Finalement, la méthode FliPer$_{\rm Class}$ est robuste au faible temps d'observation, à l'incertitude sur les paramètres, et les paramètres FliPer sont performants par eux-même pour la classifications des étoiles. Nous utilisons donc l'algorithme sur un dernier échantillon composé de données entièrement simulées pour le satellite TESS. Cet échantillon a l'avantage de contenir un nombre d'étoiles conséquent dans les classes sous-peuplées par les observations de *Kepler* : nous pouvons alors tester FliPer$_{\rm Class}$ sur une classification multi-classes beaucoup plus fine.

5.5.2 Classification des données simulées de TESS

5.5.2.1 Données simulées pour le satellite TESS & étape d'entraînement

La collaboration T'DA a simulé des échantillons d'étoiles représentatifs des observations attendues pour le satellite TESS [4] (Lund et al., 2017). Nous utilisons $10\,812$ étoiles artificielles, pour lesquelles les courbes de lumière ont été simulées sur une durée de 27.38 jours en utilisant seulement une modélisation du signal stellaire (échantillon « lisse »), ou bien en y ajoutant un bruit blanc (échantillon « bruité ») représentant le bruit de photon, ou encore en y ajoutant un bruit blanc et les signatures provenant de systématiques prédites de l'instrument (échantillon « sys-bruité »). Comme les systématiques instrumentales peuvent être retirées des données (par exemple en utilisant des méthodes similaires à celles appliquées sur les données de K2, voir Aigrain et al., 2016, pour la méthode K2SC), nous choisissons de nous intéresser à la classification des données de l'échantillon bruité. Pour chacune des étoiles la température effective $T_{\rm eff}$ est également simulée.

La composition de l'échantillon est reportée dans la table 5.13. Puisque les différentes classes comportent un nombre d'étoiles représentatif, nous choisissons de réaliser une classification prenant en compte chacune des classes reportées sur la table 5.13. Nous précisions que certaines étoiles étiquetées γDoradus dans l'échantillon

4. Les données peuvent être téléchargées après connexion sur le site internet du TESS Asteroseismic Science Operations Center (TASOC) : https://tasoc.dk/wg0/SimData. Crédit : M. Lund

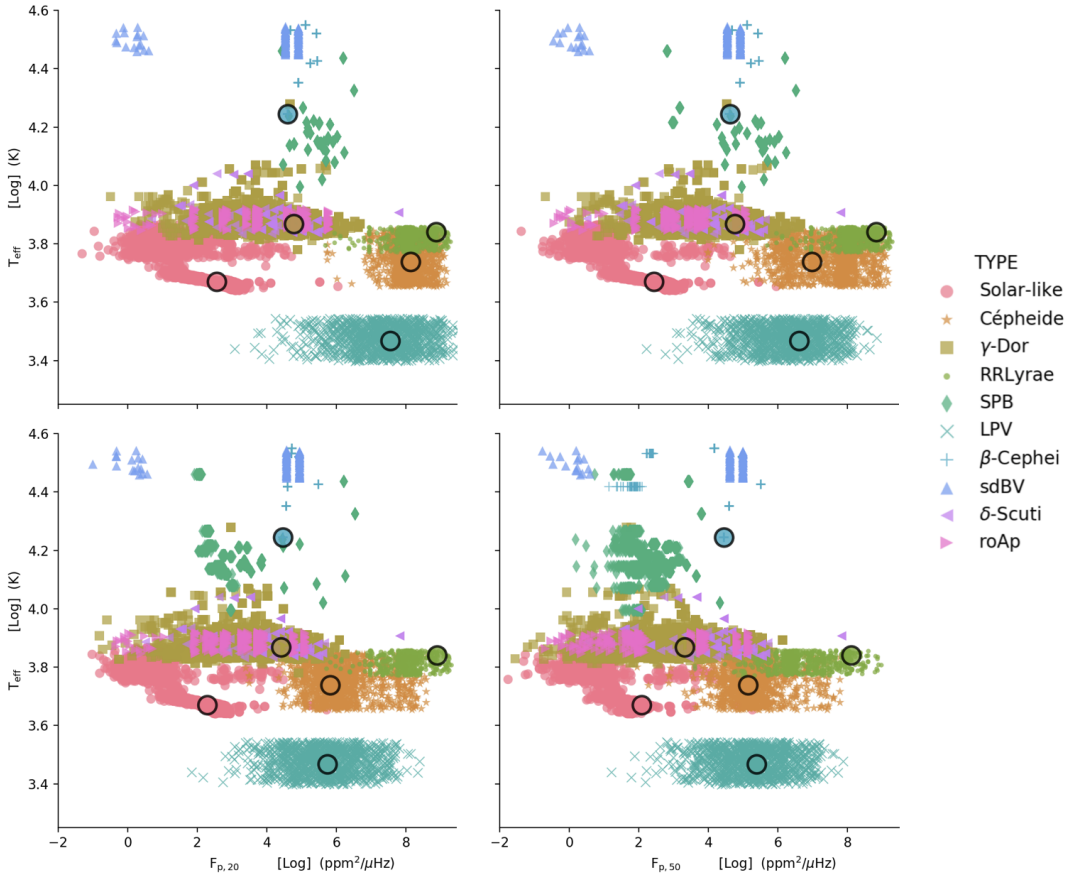


FIGURE 5.22: Les différents panneaux représentent les étoiles simulées bruitées pour le satellite TESS dans le diagramme T_{eff} en fonction de FliPer pour $f_{\min} \in [0.7, 7, 20, 50]$. Les disques colorés désignent la position des étoiles représentées sur la figure 5.21.

sont en réalité des étoiles hybrides γDoradus/δScuti. Nous nous attendons donc *a priori* à avoir des erreurs de classification entre les classes γDor et δSct sur les données simulées.

TABLE 5.13: Composition de l'échantillon bruité simulé pour le satellite TESS.

Type d'étoile	Nb. d'étoiles simulées pour TESS
Solar-like (SL)	3668
Subdwarf B (sdBV)	12
βCephei (β-Cep)	298
Slowly pulsating B-type (SPB)	1846
δScuti	115
γDoradus (γ-Dor)	1569
rapidly oscillating Ap (roAp)	287
RRLyrae	646
Long-period variable (LPV)	965
Cepheid	1289

Les PSD de différents types de pulsateurs simulés sont représentées sur la figure 5.21. De la même façon que pour les données de *Kepler* représentées sur la figure 5.2, les différents types de pulsateurs sont identifiables par leur signature spectrale dans la PSD, permettant une utilisation des paramètres FliPer pour la classification des étoiles. Nous notons une dégradation de la résolution fréquentielle des PSD par rapport à celles de la figure 5.2, due à la réduction de la durée d'observation à 27 jours. La figure 5.22 représente la T_{eff} des étoiles simulées en fonction de chacun des paramètres FliPer avec $f_{\min} \in [0.7, 7, 20, 50]$ μHz. À partir du diagramme en $\text{F}_{\text{p},0.7}$,

les étoiles de type solaire sont par exemple facilement distinguables des étoiles à variabilité à longue période à la fois par leurs différentes $T_{\rm eff}$ et par l'amplitude de leur signaux de convection. En revanche, il est plus difficile de distinguer les RRLyrae des Céphéides puisque à la fois la $T_{\rm eff}$ et l'amplitude du background des deux types d'étoiles sont du même ordre de grandeur. Ces deux classes seront plus facilement distinguables en utilisant les FliPer calculés à plus hautes fréquences, comme le montre la distance grandissante entre le disque orange (représentant l'étoile Céphéide de la figure 5.21) et le disque vert (représentant l'étoile RRL de la figure 5.21) lorsque $f_{\rm min}$ diminue (voir la figure 5.22).

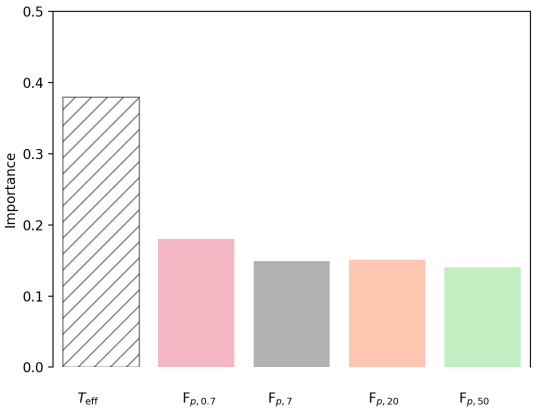


FIGURE 5.23: Importances relatives des différents paramètres pour la construction des arbres de la forêt lors de l'étape d'entraînement de l'algorithme sur les données simulées de TESS.

Afin de classifier ces étoiles, nous utilisons ainsi l'ensemble de paramètres

$$\mathrm{X} = [\mathrm{F_{p,0.7}}, \mathrm{F_{p,7}}, \mathrm{F_{p,20}}, \mathrm{F_{p,50}}, T_{\rm eff}]. \tag{5.9}$$

Les données sont rassemblées en un échantillon d'entraînement constitué de 80% des étoiles, et un échantillon de test constitué des 20% restants des étoiles. Lors de l'entraînement, l'erreur OOB mesurée est de 0.011. La figure 5.23 représente les importances relatives des différents paramètres X utilisés pour l'entrainement. Nous remarquons une distribution des importances similaire à celle résultant de l'entraînement sur les données de *Kepler* : la température effective (ou le proxy BP-RP dans le cas de *Kepler*) est très utilisée pour la construction des arbres de la forêt, suivie de près par les différents paramètres FliPer.

5.5.2.2 Test de FliPer$_{\rm Class}$ pour la classification des données simulées de TESS

À l'issue de l'étape de test de l'algorithme, $\sim 98\%$ des étoiles sont correctement classifiées. Ce taux de réussite est très grand au regard du grand nombre de classes et du faible nombre de paramètres utilisés. La matrice de confusion obtenue à l'issue de l'étape de test est représentée sur la table 5.14. Nous observons comme discuté dans la section 5.5.2.1 des confusions entre les classes δScuti et γDor, dues à la présence d'étoiles binaires δScuti/γDor dans l'échantillon. Certaines γDoradus sont également classifiées comme étoiles de type solaire, mais ces erreurs de classification ne représentent que 2% des étoiles γDor. 2% des Céphéides sont également mal classifiées au profit de la classe RRLyrae. Ces confusions ont lieu entre les types d'étoiles très proches dans le diagramme de Hertzsprung-Russell et sur la figure 5.22 : ce sont les étoiles les plus difficiles à classifier en utilisant seulement les 5 paramètres composant X.

Cette étude sur la classification des données simulées du satellite TESS, réalisée en amont de l'arrivée des premières données du satellite, est publiée dans le journal $A\&A$: Bugnet et al. (2019),

5.6 Conclusions & Perspectives

Dans ce chapitre nous exposons ainsi le potentiel des paramètres FliPer définis au chapitre 4 pour la classification automatique des étoiles à partir de leur PSD. Grâce à une classification binaire des étoiles réalisée, nous obtenons la probabilité qu'une étoile observée soit de type solaire. Cette classification est réalisée uniquement à partir des paramètres FliPer, indicateurs de la densité de puissance globale de l'étoile, et des paramètres photométriques BP-RP et L obtenus grâce à la mission Gaia. Ce regroupement de paramètres est volontairement choisi très réduit afin de mettre à l'épreuve la méthodologie FliPer. Les différentes étapes de test de l'algorithme démontrent une détection des étoiles de type solaire à plus de 98%, cependant le taux de succès est directement dépendant de l'indice de d'appartenance estimé par FliPer$_{\text{Class}}$ pour chacune des étoiles classifiées. Ainsi, nous proposons pour la première fois une classification de $\sim 160\,000$ étoiles observées par *Kepler* entre les classes « étoile de type solaire » et « étoile pulsante n'étant pas de type solaire » avec le taux de fiabilité de la classification associé pour chacune des étoiles. Environ $30\,000$ étoiles restantes observées par *Kepler* n'ont pas été classifiées, car connues pour faire partie de systèmes binaires, n'ayant pas été observées par *Gaia*, et pour la plupart d'entre elles car présentant des densités de puissance non exploitables par la méthode du FliPer.

Nous étendons ensuite notre étude à la classification multi-classes des étoiles. Pour ce type de classification, les probabilités associées aux prédictions ne peuvent en revanche pas être obtenues. Les différentes étapes de test de la méthodologie à partir des données de *Kepler* démontrent que, pour les types de pulsateurs ayant été observés en quantité suffisante pour permettre un bon entraînement du Random Forest, le taux de réussite

TABLE 5.14: Matrice de confusion de l'étape de test pour la classification des données simulées pour le satellite TESS. Les valeurs représentent le nombre d'étoiles, les nombres entre parenthèses représentent le pourcentage de reconnaissance correspondant. Le code couleur est le même que celui de la figure 5.22, et est normalisé par le nombre d'étoiles de chaque catégorie. Les nombres en dehors de la diagonale représentent les erreurs de la classification.

Connu \ Predit	S-l	sdBV	β	SPB	δ	γ	roAp	RR	LPV	Ce
Solar-like	713 (*99.9*)							1		
sdBV		33 (*100*)								
β-Cep			52 (*100*)							
SPB				360 (*100*)						
δ-Scuti					18 (*64.3*)	9	1			
γ-Dor	7			3	2	320 (*96.1*)	1			
roAp	1						50 (*98.1*)			
RRLyrae								115 (*98.3*)		2
LPV									214 (*100*)	
Cepheid						1		6		256 (*96.6*)

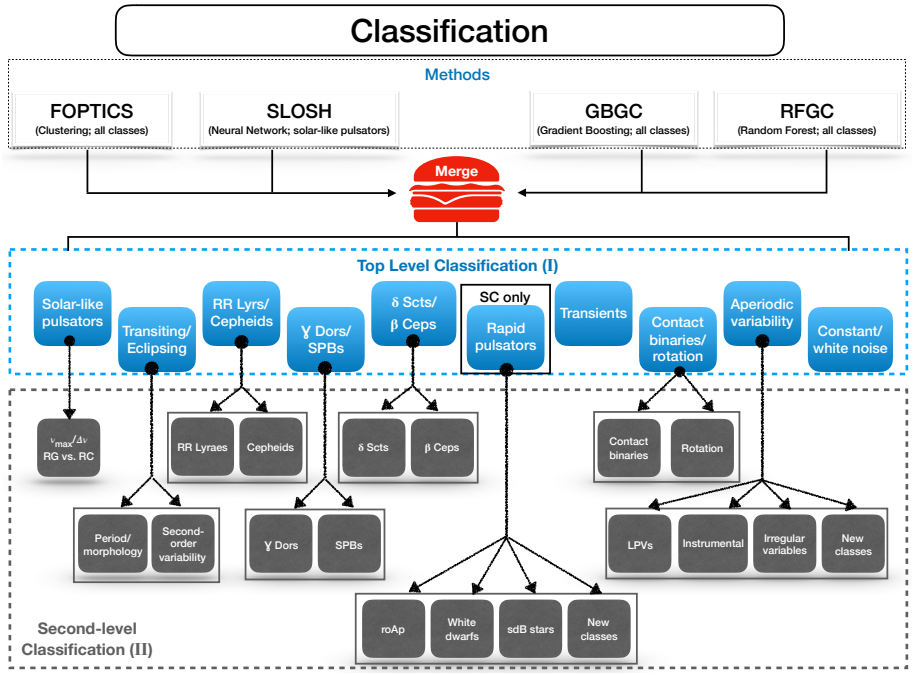


FIGURE 5.24: Représentation schématique du réseau d'algorithmes en préparation pour la classification des données de TESS. Crédits : Tkachenko et al., *in prep*

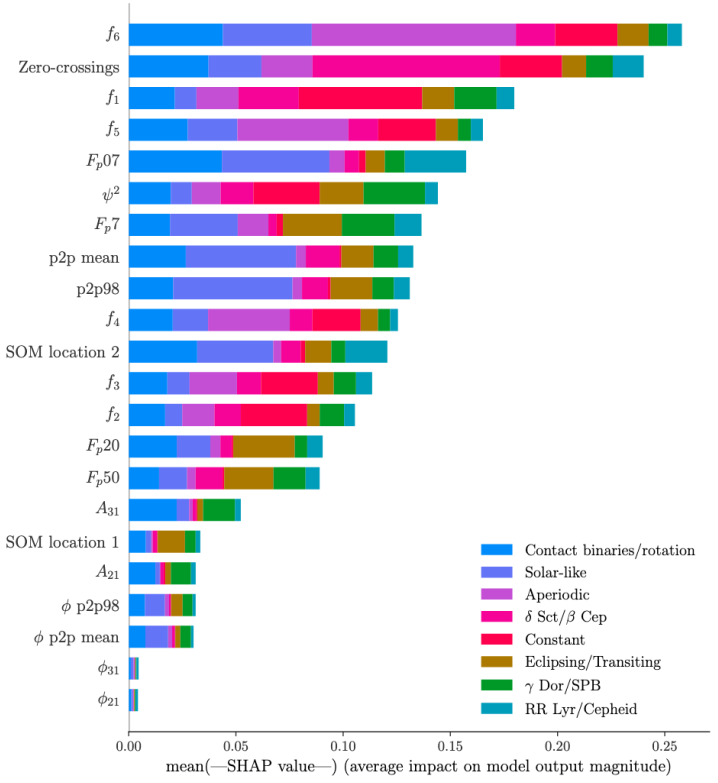


FIGURE 5.25: Importances relatives des différents paramètres utilisés pour la construction des arbres de la forêt lors de l'étape d'entraînement de l'algorithme RFGC sur les données du 9ème quarter de la mission *Kepler* réduites à 27 jours. Les importances sont mesurées en utilisant la méthode SHapley Additive exPlanations (SHAP, Lundberg et al., 2017) qui ne sera pas détaillée. Crédits : Tkachenko et al., *in prep*

TABLE 5.15: Recensement des différents paramètres utilisés pour la classification des étoiles par le réseau de classification T'DA. Crédits : Tkachenko et al., *in prep*

Paramètre	FOPTICS	SLOSH	RFGC	GBGC	Notes
PSD		x			spectre de densité de puissance
f_i, jf_i[a]	x		x	x	fréquences caractéristiques et harmoniques
A_{ij}	x			x	amplitudes des pulsations
$\frac{A_{21}}{A_{11}}$, $\frac{A_{31}}{A_{11}}$			x		ratio des amplitudes des pulsations
ϕ_{ij}				x	phases des pulsations
$\phi_{i1} - \phi_{11}, i = 2, 3$			x		différences de phases
FliPer (F_p)[b]					paramètres FliPer
F_p07,7,20,50			x		calculés à partir de 0.7, 7, 20 et 50μHz
SOM_loc			x		position de la « self-organizing maps » entraînée
ϕ_p2p_98			x		différences point à point, 98ème percentile,
p2p_98			x		ϕ : courbe de lumière repliée sur une phase
ϕ_p2p_mean			x		valeur moyenne des différences point à point,
p2p_mean			x		ϕ : courbe de lumière repliée sur une phase
D_k	x		x		nombre de passages à zéro
ψ^2			x		paramètre de cohérence
η_e[d]				x	index de variabilité
skewness[c]	x			x	asymétrie de la courbe de lumière
MAD[e]			x	x	déviation absolue moyenne
Rcs[f]				x	plage de la somme cumulative de flux
σ^2	x			x	variance du flux contenu

[a] $i \in [2, 6]$ et $j \in [1, 10]$; le nombre de fréquences et d'harmoniques utilisées est indépendant de l'algorithme.

[b] $F_{p,f_i} = \overline{PDS[f \to f_{max}]} - P_n$, avec P_n le bruit de photon calculé en utilisant la valeur moyenne de la densité de puissance à haute fréquence (Bugnet et al., 2018).

[c] est définie comme $\frac{m_3}{m_2^{3/2}}$, avec $m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^r$ le r_{eme} moment de la moyenne $\overline{x}$.

[d] L'index de variabilité η_e calculé comme le ratio de la valeur moyenne au carré des distances successives à la variance.

[e] MAD = $\mathrm{median}(|X_{0,i} - \mathrm{median}(X_0)|)$, avec X_0 la série temporelle, et l'indice i correspond à un unique point de données dans la série temporelle X_0.

[f] La somme cumulative des flux est définie comme $S_i = S_{i-1} + \left(X_i - \overline{X}\right), i \in [1, N]$, avec $\overline{X}$ le flux moyen.

de la classification dépasse 98%, et les erreurs de classification proviennent en grande partie de la présence de signaux de pollutions extérieures dans les PSD des étoiles.

Les résultats de ces deux classifications des étoiles observées par Kepler sont rendues disponibles à cette ADRESSE. La dernière étape restante pour la finalisation de ces travaux est la mise en regard des classifications binaire et multi-classes, afin de proposer une classification unique des $\sim 160\,000$ étoiles observées par Kepler. Cette étude qui demandera beaucoup de temps est envisagée post-thèse.

La méthodologie testée sur les données de Kepler, permettant une bonne investigation des performances de l'algorithme, est actuellement appliquée aux données de la mission K2 (Le Saux et al., in prep). Ce travail toujours en cours résulte du co-encadrement de Arthur Le Saux lors de son stage de M2 (co-encadrement : R.A. García et L. Bugnet).

Finalement, afin de permettre des futures analyses efficaces des étoiles observées par le satellite TESS, nous réalisons une étude préalable des performances de FliPer$_{\rm Class}$ à partir de données simulées pour le satellite TESS. Nous démontrons notamment que la faible résolution liée au court temps d'observation de la plupart des étoiles par TESS n'est pas décisive pour les performances de la méthode FliPer$_{\rm Class}$. Finalement, les

données simulées pour TESS sont correctement classifiées à plus de 98% parmi les 10 types de pulsateurs disponibles (Bugnet et al., 2019).

Cela est prometteur pour une application aux véritables données acquises par le satellite, au bémol près que les données réelles semblent en moyenne plus bruitées que prévu. L'analyse des données observées par TESS en vu de leur classification automatique est actuellement en cours, et ces travaux seront également finalisés post-thèse.

En revanche, la classification des étoiles observées jusqu'à présent n'a pas été réalisée indépendamment avec l'algorithme FliPer$_{\rm Class}$. En effet, nous avons choisi d'allier notre méthodologie aux autres algorithmes de classification automatique des étoiles existants au sein de la collaboration TESS Data for Asteroseismology, ce qui implique de ne pas utiliser les algorithmes individuels pour classifier en amont les données. Les paramètres FliPer, très utiles notamment pour la détection des étoiles de type solaire, sont ajoutés aux paramètres liés aux périodicités dans la courbe de lumière détaillées dans la table 5.15, au sein d'un seul et même algorithme (RFGC, l'algorithme est issu de l'étude de Armstrong et al., 2016). Cet algorithme combine un Random Forest et une « self-organising-map » (SOM, Kohonen, 1990; Brett et al., 2004). Il est accompagné de l'algorithme de Gradient Boosting (GBGC) de Kgoadi et al. (2019), et de l'algorithme de clustering FOPTICS (Sans Fuentes et al., 2017) pour la classification générale des étoiles. Le réseau de neurones de Hon et al. (2018a) est également ajouté pour renforcer en particulier la détection des géantes rouges présentant des modes d'oscillation. La structure du réseau est représentée sur la figure 5.24 pour illustration.

La figure 5.25 représente les importances des différents paramètres utilisés pour la classification des étoiles observées durant le 9ème quarter de la mission *Kepler* (réduites à 27 jours d'observation) avec l'algorithme de Random Forest RFGC. La table 5.15 contient les définitions des différents paramètres utilisés par les différents algorithmes du réseau. Nous observons que les paramètres FliPer ont un impact sur l'entraînement comparable aux paramètres extraits des courbes de lumière, comme les périodicités ou encore les valeurs point à point, avec en particulier un très grand poids associé aux paramètres $\mathrm{F_{p,0.7}}$ et $\mathrm{F_{p,7}}$ pour la détection des étoiles de type solaire. Cette étude comparant les importances des différents paramètres pour la reconnaissance des pulsateurs, indépendante des différents tests réalisés dans ce chapitre, confirme le potentiel des paramètres FliPer comme outil de classification des différents types d'étoiles observées.

A&A 624, A79 (2019)
https://doi.org/10.1051/0004-6361/201834780
© L. Bugnet et al. 2019

Astronomy & Astrophysics

FliPer$_{\rm Class}$: In search of solar-like pulsators among TESS targets

L. Bugnet[1,2], R. A. García[1,2], S. Mathur[3,4], G. R. Davies[5,6], O. J. Hall[5,6], M. N. Lund[6], and B. M. Rendle[5,6]

[1] IRFU, CEA, Université Paris-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France
e-mail: lisa.bugnet@cea.fr
[2] AIM, CEA, CNRS, Université Paris-Saclay, Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 91191 Gif-sur-Yvette, France
[3] Instituto de Astrofísica de Canarias, 38200 La Laguna, Tenerife, Spain
[4] Universidad de La Laguna, Dpto. de Astrofísica, 38205 La Laguna, Tenerife, Spain
[5] School of Physics and Astronomy, University of Birmingham, Edgbaston, Birmingham B15 2TT, UK
[6] Stellar Astrophysics Centre, Department of Physics and Astronomy, Aarhus University, Ny Munkegade 120, 8000 Aarhus C, Denmark

Received 5 December 2018 / Accepted 25 February 2019

ABSTRACT

The NASA Transiting Exoplanet Survey Satellite (TESS) is about to provide full-frame images of almost the entire sky. The amount of stellar data to be analysed represents hundreds of millions stars, which is several orders of magnitude more than the number of stars observed by the Convection, Rotation and planetary Transits satellite (CoRoT), and NASA *Kepler* and K2 missions. We aim at automatically classifying the newly observed stars with near real-time algorithms to better guide the subsequent detailed studies. In this paper, we present a classification algorithm built to recognise solar-like pulsators among classical pulsators. This algorithm relies on the global amount of power contained in the power spectral density (PSD), also known as the flicker in spectral power density (FliPer). Because each type of pulsating star has a characteristic background or pulsation pattern, the shape of the PSD at different frequencies can be used to characterise the type of pulsating star. The FliPer classifier (FliPer$_{\rm Class}$) uses different FliPer parameters along with the effective temperature as input parameters to feed a ML algorithm in order to automatically classify the pulsating stars observed by TESS. Using noisy TESS-simulated data from the TESS Asteroseismic Science Consortium (TASC), we classify pulsators with a 98% accuracy. Among them, solar-like pulsating stars are recognised with a 99% accuracy, which is of great interest for a further seismic analysis of these stars, which are like our Sun. Similar results are obtained when we trained our classifier and applied it to 27-day subsets of real *Kepler* data. FliPer$_{\rm Class}$ is part of the large TASC classification pipeline developed by the TESS Data for Asteroseismology (T'DA) classification working group.

Key words. asteroseismology – methods: data analysis – stars: oscillations

1. Introduction

Starting with the Convection, Rotation and planetary Transits satellite (CoRoT), and showing its full potential with *Kepler*, asteroseismology is now the most precise way to obtain estimates of masses and radius of field stars (e.g. Lebreton & Goupil 2014), except for eclipsing binaries, for which spectroscopy prevails. Asteroseismic parameters such as the frequency of maximum power $\nu_{\rm max}$ and the large frequency separation $\Delta\nu$ of the oscillation modes of solar-like pulsators (i.e. with modes excited by turbulent convection, Goldreich & Keeley 1977) are obtained from the power density spectrum using global seismic pipelines (e.g. Mosser & Appourchaux 2009; Huber et al. 2009; Mathur et al. 2010, etc.). These global seismic parameters are key constraints for stellar evolution models: using them leads to age estimates that are much more precise than estimates obtained with other classical methods (e.g. Lebreton & Goupil 2014).

The Transiting Exoplanet Survey Satellite (TESS), launched on 18 April 2018, conducts a photometric survey of 90% of the sky during its two-year nominal operations (Ricker et al. 2014). It will search for extrasolar planets that mostly orbit M-type stars. The TESS fields cover 26 sky sectors that each cover four $24^\circ \times 24^\circ$ areas from the galactic pole to nearly the ecliptic plane. Each field of view remains unchanged for 27 continuous days. The satellite will specifically observe no fewer than 200 000 main-sequence dwarf stars, 30−100 times brighter (with an apparent magnitude lower than ∼10, Stassun et al. 2018) than those observed by the *Kepler* satellite. All these conditions are suitable for seismic detections in solar-like stars, mostly in high-luminosity main-sequence (MS) and subgiant stars (a detailed study of the potential asteroseismic yields of the TESS mission is given by Campante et al. 2016). In addition, more than 400 million stars will be observed in the full-frame images with a 30 min observational cadence.

The first step for the large asteroseismic survey analysis is to distinguish solar-like pulsators from all other pulsating stars. An accurate stellar classification can be computationally expensive, but efforts have been made to classify CoRoT and *Kepler* targets (Debosscher et al. 2009; Molnár et al. 2018). For example, Mathur et al. (2016a) showed three years after the end of the *Kepler* main mission that more than 800 red giants (RGs; corresponding to about 3% of the total number of observed RGs) were still misclassified as cool dwarfs (see also Hon et al. 2019). However, no public real-time automatic algorithm was developed to classify stars that wereobserved during these missions. In view of the huge amount of data to be delivered by TESS, it would be advantageous to have an automatic method to classify solar-like stars, and even other pulsator types.

FliPer is a method for estimating surface gravities (from 0.3 to 4.5 dex) or $\nu_{\rm max}$ of solar-type stars (Bugnet et al. 2018a, 2017). It relies on the use of the global amount of power contained in the power spectrum density (PSD) of a solar-type

Open Access article, published by EDP Sciences, under the terms of the Creative Commons Attribution License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

pulsator, which depends on its evolutionary state (Mathur et al. 2011; Kallinger et al. 2016). The method is automatic, and takes advantage of a random forest ML regressor (Breiman 2001) to estimate precise surface gravities. The algorithm is trained to learn how to predict $\log g$ from thousands of precise seismic estimates made with the A2Z seismic pipeline (Mathur et al. 2010). In this way, FliPer gives estimates with a precision that is better than can be obtained from spectroscopy alone.

Machine-learning methods such as neural networks (e.g. Bai et al. 2005), algorithms based on decision trees (e.g. Pérez-Ortiz et al. 2017; Veljanoski et al. 2019), or AdaBoost (e.g. Viquar et al. 2018) already give good results for characterising the stars. For instance, Hon et al. (2018) showed that they were able to distinguish core helium-burning clump stars from hydrogen shell-burning RG stars using a convolutional neural network. In our study, we use FliPer parameters to classify solar-like pulsators from among all pulsating stars: instead of using a regressor (see Bugnet et al. 2018a) to estimate physical parameters, we use a classifier algorithm trained with the FliPer parameters and the effective temperature of each star. After describing the data in Sect. 2, we explain in Sect. 3 how the $\text{FliPer}_{\text{Class}}$ algorithm uses FliPer parameters ($F_{\text{p},i}$) along with the effective temperature to distinguish between the different pulsator types. Then we present results from the classification of TESS-simulated data and of a known sample of *Kepler* main mission data.

2. Data preparation

In order to test the algorithms, the T'DA working group simulated datasets of TESS observations[1] (Lund et al. 2017). We used 10 812 simulated stars that can be studied with a stellar signal alone (designated as "clean" data), with additional white noise ("noisy" data), or with both additional white noise and instrumental systematics ("sysnoisy" data). Because systematics can be corrected (using methods similar to those applied to the K2 data, Aigrain et al. 2016), we chose to focus our study on the "noisy" dataset. The sample is described in Table 2. Part of the γ-Doradus sample is constituted of γ-Doradus and δ-Scuti hybrid stars.

To determine the reliability of our method on real data, we also used power spectrum densities of a sample of 1442 *Kepler* targets observed in the long-cadence observation mode (corresponding to an acquisition every 30 min) for which we know the classification. Table 2 displays the number of stars in the *Kepler* sample belonging to each classification (Reed et al. 2018; McNamara et al. 2012; Li et al. 2019; Balona et al. 2011; Balona 2013; Sachkov 2014; Smalley et al. 2015; Serenelli et al. 2017). Long-period variability stars are not represented in the *Kepler* sample because they can be easily classified by using the effective temperature alone (the $\text{FliPer}_{\text{Class}}$ is not required for these stars). The *Kepler* light curves (calibrated following García et al. 2011) considered in this work were observed for approximately four years. This results in a much higher frequency resolution in the PSD than what is expected for most TESS targets, which are observed for only 27 days. To test our method on data that are representative of the first sector of TESS data, we computed the PSD of each star based on randomly extracted 27-day periods of time from the full *Kepler* time series. We also used the effective temperatures from Mathur et al. (2017) for the sample of *Kepler* stars.

[1] Datasets can be downloaded after registration on the TESS Asteroseismic Science Operations Center (TASOC) website at `https://tasoc.dk/wg0/SimData`

Table 1. Composition of the samples from T'DA simulated dataset and real *Kepler* data.

Type of star	$\text{TESS}_{\text{simulated}}$	*Kepler*
Solar-like (SL)	3668	802
Subdwarf B (sdBV)	129	8
β-Cephei (β-Cep)	298	5
Slowly pulsating B-type (SPB)	1846	26
δ-Scuti	115	358
γ-Doradus (γ-Dor)	1569	202
Rapidly oscillating Ap (roAp)	287	3
RRLyrae	646	36
Long-period variable (LPV)	965	0
Cepheid	1289	2

3. $\text{Fliper}_{\text{Class}}$: a tool for classifying pulsating stars

FliPer (Bugnet et al. 2018a) is a method for estimating the surface gravity of solar-like pulsating stars based on the measure of the amount of power in their PSD. For solar-type pulsators, the PSD is dominated by the power of the convective background, stellar oscillation modes, and the rotation period signals. All these effects vary when the star evolves from the MS to the red giant branch (RGB). FliPer thus gives constraints on the evolutionary stage of the solar-like pulsator. We define the FliPer metric as

$$F_{\text{p}} = \overline{\text{PSD}} - P_{\text{n}}, \tag{1}$$

where $\overline{\text{PSD}}$ represents the averaged value of the PSD from a given frequency to the Nyquist frequency, and P_{n} is the photon noise (see Bugnet et al. 2017, for more information).

3.1. FliPer parameters: $F_{p,i}$

For each star we calculated different FliPer parameters, $F_{\text{p},i}$, as the FliPer metric starting from different lower frequency boundaries ($i \in [0.7, 7, 20, 50]\,\mu$Hz) in the calculation of $\overline{\text{PSD}}$. The four different frequency domains used for the $F_{\text{p},i}$ calculation are represented by the coloured area in Fig. 1. By combining these different $F_{\text{p},i}$, we extracted information from different regions of the PSD of the star. A previous study (see Bugnet et al. 2017) indicated that the two $F_{\text{p},0.7}$ and $F_{\text{p},7}$ parameters are easily dominated by rotation peaks for MS stars, but are perfectly suitable to take the power of the modes for high-luminosity giants into account. The other parameters, $F_{\text{p},20}$ and $F_{\text{p},50}$, allow precise estimates for MS stars but they do not take the mode power in high-luminosity RGs into account. FliPer gives great results when MS stars are distinguished from RGs by estimating their surface gravity, as discussed in Bugnet et al. (2018a). By combining the different $F_{\text{p},i}$ for all stellar types, we attempted to classify not only solar-like stars, but all pulsator types.

Each pulsator type has a typical amount of power associated for a given frequency range in the PSD. Figure 1 shows the TESS-simulated PSD for six different pulsator types. First, we observe that each type of star presents a characteristic signature in the PSD.

By calculating $F_{\text{p},0.7}$ (red areas on Fig. 1), it is easy to distinguish a solar-like star from a long-period variable (LPV) because their granulation power differs by several orders of magnitude. However, it is harder to distinguish a Cepheid from a RRLyrae using only $F_{\text{p},0.7}$ because they both present a PSD background with the same order of magnitude. With a higher frequency

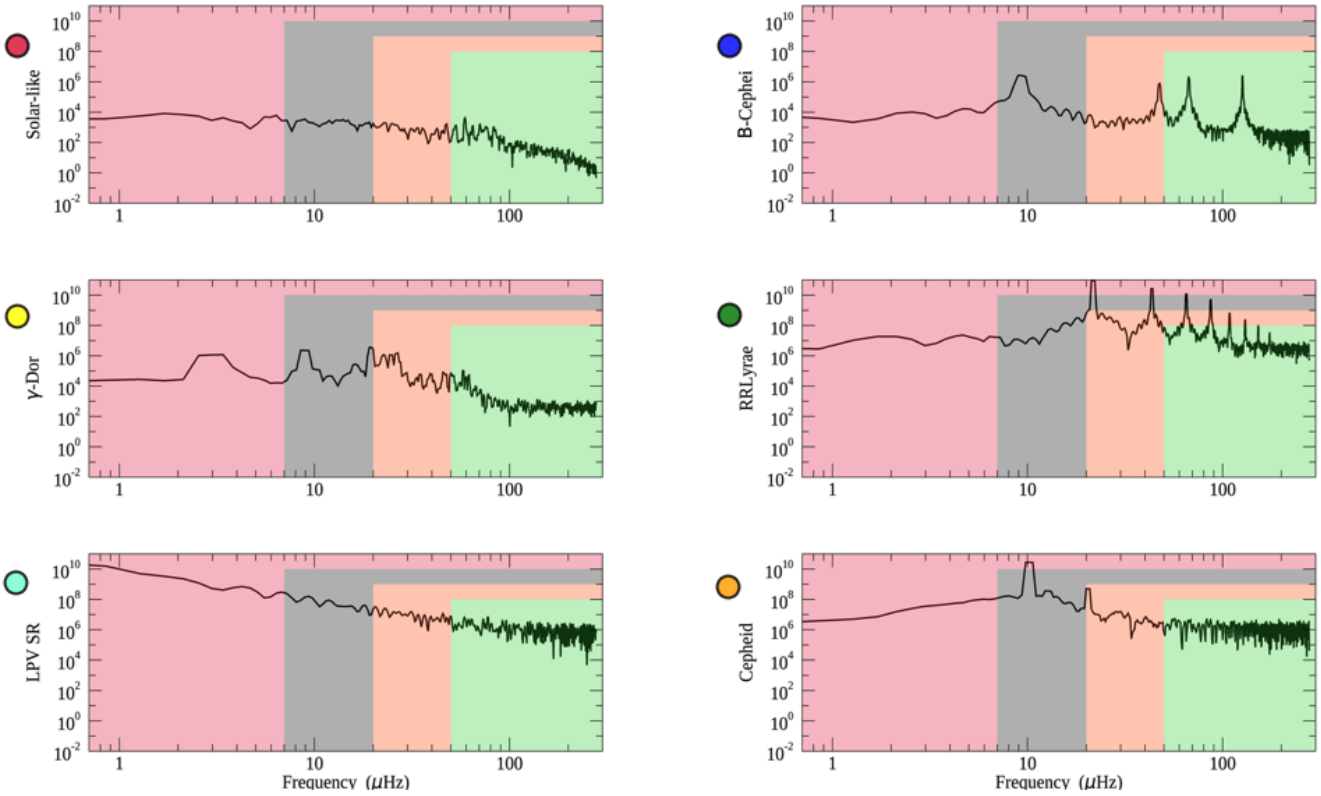


Fig. 1. PSD of six different simulated stars belonging to different classes (solar-like, β-Cephei, γ-Dor, RRLyrae, LPV, and Cepheid) as described by the y -axis labels of each panel. Coloured areas (red, grey, orange, and green) represent the different ranges of frequency used for the $F_{{\rm p},i}$ calculation (from 0.7, 7, 20, and 50 μHz, respectively, to the Nyquist frequency). Coloured circles represent the class identifiers used in Fig. 2.

boundary such as 50 μHz for the $F_{{\rm p},i}$ calculation, we can distinguish a Cepheid well from a RRLyrae. However, by simultaneously using the different $F_{{\rm p},i}$, it is possible to distinguish the different types of stellar pulsators.

As previously discussed, the type of variability shown by the star affects the range of values that it can have for each $F_{{\rm p},i}$. Figure 2 represents the total sample of TESS-simulated data in the $\log(T_{\rm eff})$ versus $F_{{\rm p},i}$ diagram for $i = 0.7\,\mu$Hz (left panel) and $i = 20\,\mu$Hz values (right panel). In addition, the stars shown in Fig. 1 are represented in the diagrams with stars with the same colour code as in Fig. 2. We also represent the first planet star host observed by TESS in the π-Mensae system with a star (Huang et al. 2018; Gandolfi et al. 2018). This star is properly classified as a solar-like pulsator based on its FliPer values, as shown in Fig. 2.

Using the TESS simulated dataset, we note that each type of star covers a given region of the $T_{\rm eff}$ versus $F_{{\rm p},i}$ diagrams. This means for instance that using only one $F_{{\rm p},i}$, solar-like pulsators are already well separated from Cepheids and RRLyrae. However, we extended the analysis of Fig. 1 and show with Fig. 2 that using only one $F_{{\rm p},i}$ does not allow us to clearly distinguish between Cepheids and RRLyrae. In addition, we observe by comparing the two panels of Fig. 2 that the area corresponding to a given type of star changes when a different $F_{{\rm p},i}$ is used: each pulsator type evolves differently in the diagram when we modify the starting frequency of the $F_{{\rm p},i\in[0.7,7,20,50]}$ calculation (when we switch from the left to the right panel in Fig. 2). We therefore expect to be able to separate RRLyrae from Cepheids by comparing their different $F_{{\rm p},i}$ ($i \in [0.7, 7, 20, 50]$ μHz).

3.2. FliPer$_{\rm Class}$ classification algorithm

In the previous section we explained that stars can be manually classified according to their $F_{{\rm p},i\in[0.7,7,20,50]}$. In view of the amount of TESS data to be released, the classification of each individual pulsator has to be automatic. A random forest classifier (Breiman 2001) is a supervised machine-learning (ML) algorithm that classifies data from a given set of input parameters (see Appendix A for more details about the classifier). Random forest algorithms have been proven to be efficient in distinguishing between MS stars and RGs (Bugnet et al. 2018a) when $F_{{\rm p},i}$ ($i \in [0.7, 7, 20, 50]\,\mu$Hz) is used as input parameters.

We classified the pulsators using the "RandomForestClassifier" function from the "sklearn.ensemble" Python library (Pedregosa et al. 2011). We split the simulated dataset into two random samples. The training set contains 80% of the total number of stars, while the test sample contains the remaining 20% of the stars. The same method was applied to the *Kepler* set. The supervised classifier FliPer$_{\rm Class}$ was trained on the training dataset to learn how to predict the output classification using $F_{{\rm p},i}$ ($i \in [0.7, 7, 20, 50]\,\mu$Hz) and $T_{\rm eff}$ as input parameters for each star. The maximum number of features considered at each split point is $p = \sqrt{m}$ because we consider $m = 5$ input parameters (see Appendix A for details about the classifier). The previously trained algorithm, along with the code to use it, can be downloaded from GitHub[2]. Each parameter has a different effect on the training process, which is represented in Fig. 3 for the TESS-simulated dataset. Feature importance is the number of times a feature is used to split a node normalised by the total number of

[2] https://github.com/lbugnet/FLIPER_CLASS

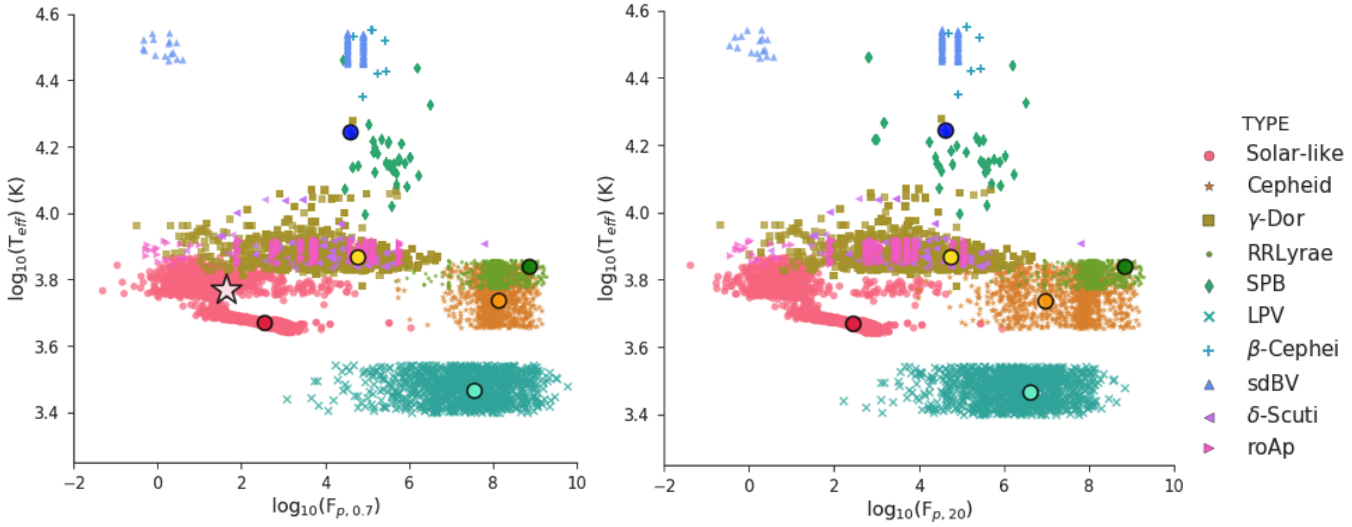


Fig. 2. *Left panel*: representation of the total sample of simulated TESS stars in the log ($T_{\rm eff}$) vs. log($F_{\rm p,0.7}$) diagram. Each stellar type is associated with a unique colour and symbol reported at the side legend. In addition, the positions of the stars shown in Fig. 1 are added to the diagram and are represented with circles. The white star represents the position in the diagram of the TESS target TIC 261136679. *Right panel*: same as the left panel, but for $F_{\rm p,20}$.

Table 2. Confusion matrix of the TESS-simulated data test sample.

True \ Predicted	S-l	sdBV	β	SPB	δ	γ	roAp	RR	LPV	Ce
Solar-like	713 *(99.9)*							1		
sdBV		33 *(100)*								
β-Cep			52 *(100)*							
SPB				360 *(100)*						
δ-Scuti					18 *(64.3)*	9	1			
γ-Dor	7			3	2	320 *(96.1)*	1			
roAp	1						50 *(98.1)*			
RRLyrae								115 *(98.3)*		2
LPV									214 *(100)*	
Cepheid						1		6		256 *(96.6)*

Notes. Values represent the number of stars, and italic numbers in parentheses represent the percentage accuracy for the class. The colour code is the same as in Fig. 2 and is normalised for each row by the total number of stars in each true class. Numbers that do not belong to the diagonal represent classification errors by FliPer$_{\rm Class}$.

nodes. Uncertainties are calculated by taking the standard deviation of each feature importance from the individual trees. The effective temperature has the highest weight in classifying the type of stars. However, all input parameters are useful regarding the importance of the other $F_{{\rm p},i}$ parameters. This shows that $F_{{\rm p},i}$ parameters, coupled with $T_{\rm eff}$, are suitable parameters for classifying stars. Similar results are obtained when the *Kepler* training sample was used.

4. Classification of TESS-simulated data

We obtained an out-of-bag (OOB) error of the training on TESS-simulated data of about 0.011. This number gives estimates of the error rate of the classifier when $n_{\rm t} = 200$ trees are used by classifying a sub-sample of stars that were not used in the building of the last learner. The OOB error can be biased depending on the hyperparameters of the algorithm (number of trees

($n_{\rm t}$), number of features considered at each split point (m), etc., Mitchell 2011). This study thus provides another estimate of the classification accuracy using the TESS test sample to examine the performance of the trained algorithm.

The ~2000 stars that belong to the TESS test sample were automatically classified amongst the classes reported in Table 2 by FliPer$_{\rm Class}$ trained on the training sample. The results are represented in Table 2: the numbers in each row represent for a given pulsator class the number of stars that were classified in each output class by FliPer$_{\rm Class}$. The higher the value on the diagonal (a high value corresponds to a dark-coloured cell), the more accurate the algorithm for the corresponding class. From this table, we first conclude that ~98% of stars in the test set are well characterised by the algorithm.

Then, considering specifically the misclassified stars, we show that most classification errors concern classical pulsators. In particular, δ-Scutis are classified as γ-Doradus, which can be explained by the fact that there are not enough δ-Scuti stars in the sample for the algorithm to learn how to recognise this type of star, and also because the γ-Doradus training sample contains some γ-Doradus and δ-Scuti hybrid stars. This misclassification problem should be solved with real TESS data as the training of the algorithm will be made on a larger set of stars that belong to each of the categories, including new hybrid categories, which will allow us to separate similar classes such as δ-Scuti and γ-Dor well. From studying the spectra, we note that most misclassified solar-like and roAp stars show nearly flat power spectra, except at very low frequency. It is already known from Bugnet et al. (2018a) that FliPer, and thus FliPer$_{\rm Class}$, is not efficient for this type of noise-dominated spectrum because it compares the global amount of power in the power spectrum with the power at high frequency (representing the photon noise).

5. Classification based on 27-day segments of real *Kepler* data

To estimate the accuracy of the method on real data, we trained (tested) the algorithm on 80% (20%) of the global set of *Kepler* data. As the number of some types of classical pulsators (such as sdBV, β-Cep, RoAp, and Cepheid stars) observed by the *Kepler* main mission is very small (see Table 1), it is too ambitious to train and test the algorithm to recognise all different types of stellar pulsators. To avoid misclassification due to the lack of stars in the *Kepler* catalogue, we chose to group several pulsators into categories dependent upon their position in the Hertzsprung-Russell diagram:

- δ-Scuti, RoAp, and sdBV stars have a low luminosity ($10\,L_\odot < L < 100\,L_\odot$).
- β-Cep and SPB stars have a high luminosity ($100\,L_\odot < L < 100\,000\,L_\odot$) and high effective temperatures ($4< \log_{10}(T_{\rm eff}) <4.5$).
- Cepheids and RRLyrae have a high luminosity ($30\,L_\odot < L < 100\,000\,L_\odot$) and low effective temperature ($3.6 < \log_{10}(T_{\rm eff}) <3.9$).

We then considered the five different classes reported in Table 3, which represents the confusion matrix for stars in the *Kepler* test set. As in Table 2, values in each row represent for a given class the number of stars classified in each output class by the FliPer$_{\rm Class}$. The accuracy of the classification of the *Kepler* test sample is approximately 99%. We point out that all solar-like stars are correctly classified by the algorithm (which we recall was our main goal). Most misclassifications concern classical pulsators, with a low corresponding number of stars in the training set, which means that the training was probably more difficult for these types of stars. This problem should be solved by training the algorithm on a much larger set of TESS observations.

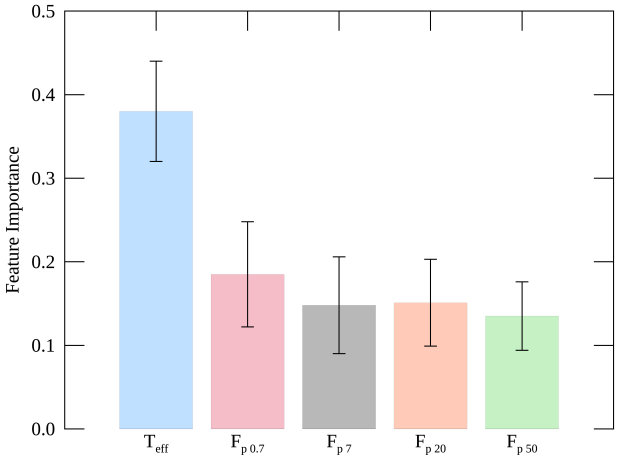


Fig. 3. Significance of the different input parameters on the training process based on the TESS-simulated dataset along with their uncertainties.

5.1. Effect of the effective temperature for the classification

A distribution of input parameter importance very similar to that shown in Fig. 3 was obtained when we trained on the 0 *Kepler* sample. The effective temperature thus seems to play a much larger role in the classification process than the different FliPer parameters. We decided to show classification results when the effective temperature was removed from the input parameters in order to explain to which extent the effective temperature is needed for the classification.

When the classifier is tested and trained on *Kepler* data and the effective temperature is not used as an input parameter, the classification only depends on the FliPer parameters. With this configuration, we obtain a 96% accuracy on the classification of the test set. Solar-like stars are still very well classified, and most errors concern the SPB/β-Cephei class (see Table 4). Indeed Fig. 1 shows that $F_{{\rm p},i}$ ($i \in [0.7, 7, 20, 50]\,\mu$Hz) values for SPB/$\beta$-Cephei are quite similar to those of solar-like stars and of δ-Scuti, RoAp, and sdBV.

With this study, we point out that the FliPer parameters alone as input to the algorithm are enough to recognise all solar-like stars. However, adding physical parameters (such as $T_{\rm eff}$) to the classifier allows FliPer$_{\rm Class}$ to perform well for all pulsators, and also to avoid false detection of solar-like stars, as shown in Table 3.

5.2. Taking uncertainties on input parameters into account

In order to test the robustness of the classifier regarding uncertainties on the input parameters, we tested the algorithm on the *Kepler* dataset with modified input parameter values. Uncertainties on FliPer arise from the photon noise in the spectra (following a chi-squared distribution with two degrees of freedom). Hence, the uncertainty on the FliPer (see Bugnet et al. 2018a, for more details) parameters can be explicitly written as

$$\delta F_{\rm p} = \sqrt{\overline{\delta {\rm PSD}^2}} = \frac{\delta {\rm P_{tot}}}{\rm N_{bin}}. \quad (2)$$

We used the central limit theorem and re-binned the spectrum by a factor of $n = 50$. The total amount of power in the

Table 3. Confusion matrix of the *Kepler* data test sample when $F_{p,i}$ ($i \in [0.7, 7, 20, 50]$ μHz) and T_{eff} are used as input parameters for each star.

True \ Predicted	S-l	RR/Cep	γ-Dor	δ/roAp/sdBV	SPB/β
Solar-like	161 (*100*)				
RRLyrae/Cepheid		9 (*100*)			
γ-Dor			41 (*100*)		
δ-Scuti/RoAp/sdBV			1	73 (*97.3*)	1
SPB/β-Cephei				1	6 (*85.7*)

Notes. Values represent the number of stars, and italic numbers in parentheses represent the percentage accuracy for the class. The colour code is normalised for each row by the total number of stars in each true class. Numbers that do not belong to the diagonal represent classification errors by $\mathrm{FliPer}_{\mathrm{Class}}$.

Table 4. Confusion matrix of the *Kepler* data test sample when $F_{p,i}$ ($i \in [0.7, 7, 20, 50]$ μHz) alone is used as input parameter for each star.

True \ Predicted	S-l	RR/Cep	γ-Dor	δ/roAp/sdBV	SPB/β
Solar-like	161 (*100*)				
RRLyrae/Cepheid		8 (*88.6*)		1	
γ-Dor			41 (*99.4*)		
δ-Scuti/RoAp/sdBV	1			73 (*93.8*)	1
SPB/β-Cephei	5		1	1	0 (*0*)

Notes. Values represent the number of stars, and italic numbers in parentheses represent the percentage accuracy for the class. The colour code is normalised for each row by the total number of stars in each true class. Numbers that do not belong to the diagonal represent classification errors.

spectrum is

$$\mathrm{P_{tot}} = \sum_j \mathrm{P_{n,}}_j, \tag{3}$$

where $\mathrm{P_{n,}}_j$ follows a quasi-normal distribution with $2n$ degrees of freedom. It assumes that the signal does not change dramatically over this range of 50 bins, which is a strong assumption for classical pulsators. This leads to a global uncertainty on FliPer values of

$$\delta F_{\mathrm{p}} = \frac{\sqrt{\sum_j \left(2 \times \frac{\mathrm{P}_{50,j}}{2n} \times \sqrt{n}\right)^2}}{\mathrm{N_{bin}}}. \tag{4}$$

The effective temperature values for the *Kepler* set are taken directly from the Mathur et al. (2017) catalogue. As long as no spectroscopic follow-up surveys are available, only the effective temperature coming from the TIC will be available for most TESS data. Large uncertainties are expected because on average, $\overline{\delta T_{\mathrm{eff}}} \sim 170$ K, according to the first sector data. To be representative of future TESS data, we decided to use $\delta T_{\mathrm{eff}} = 170$ K instead of the uncertainties from the Mathur et al. (2017) catalogue for the whole *Kepler* test sample.

We then included the effect of these errors on the different parameters during the testing of the algorithm. We performed a Monte Carlo simulation by generating for each star in our test sample 100 artificial parameter sets from their corresponding normal distributions. We computed for each X parameter ($F_{\mathrm{p}_{0.7}}$, F_{p_7}, $F_{\mathrm{p}_{20}}$, $F_{\mathrm{p}_{50}}$, and T_{eff}) 100 new values $\mathrm{X}_{0 \leq i \leq 100}$ following

$$\mathrm{X}_{0 \leq i \leq 100} = \mathrm{X} + \delta \mathrm{X} \times \mathcal{G}_{0 \leq i \leq 100}, \tag{5}$$

with $\mathcal{G}_{0 \leq i \leq 100}$ being 100 random values following the standard distribution. Each new group of X_i parameters describes a new star to test the algorithm.

We continued to train the algorithm using the original *Kepler* training set. The new test set now contained a hundred times more stars than the original test set in order to include the effect of uncertainties on the input parameters. We are able to classify these new stars with a 99% accuracy. We thus conclude that there is no effect of uncertainties of the chosen input parameters for the classification of stars because the classes are well separated in the $\log(T_{\mathrm{eff}})$ versus $\log(F_{\mathrm{p},0.7})$ (see Fig. 2). In particular, large uncertainties on T_{eff} that are representative of future TIC effective temperatures do not perturb the pulsator classification.

6. Conclusion

The study on *Kepler* data confirms the results obtained by using TESS-simulated data. As expected, $\mathrm{FliPer}_{\mathrm{Class}}$ is a great method to recognise solar-like stars based on the shape of their PSD. Using $F_{p,i}$ ($i \in [0.7, 7, 20, 50]\,\mu$Hz) along with T_{eff} as input parameters in a random forest algorithm, we classified more than 98% of TESS-simulated and almost all the *Kepler* solar-like pulsators within the test set amongst other pulsators. We plan to improve the $F_{p,i}$ calculation (especially for stars observed by TESS with a low signal-to-noise ratio) by empirically calibrating the photon noise as a function of the TESS magnitude of the star (similar to the study by Jenkins et al. 2010, for the *Kepler* data) instead of measuring the power at high frequencies, which can be biased by astrophysical signal. By comparing the results on noisy data with previous results obtained using clean

simulated data (Bugnet et al. 2018b), we note that the performance of FliPer$_{\rm Class}$ is only slightly diminished by photometric noise. This is also auspicious for the applicability of the method to real TESS data. This study will help the massive seismic analysis of TESS solar-like stars with global seismic pipelines by providing a list of stars that are predicted to be solar-like stars.

FliPer$_{\rm Class}$ gives a high weight to seismology through the use of the $F_{{\rm p},i}$ parameters. We chose not to incorporate any *Gaia* parameters in the FliPer$_{\rm Class}$ to remain as general as possible. For example, for faint stars such as the *Kepler* RGs at the deep end of the Milky Way (Mathur et al. 2016b) or for polluted systems, *Gaia* luminosities could have large uncertainties or might even be biased. Hence, seismic parameters coupled to effective temperature could be a better choice, as shown by Huber et al. (2017). Therefore, the FliPer$_{\rm Class}$ as defined here could be complemented by any additional precise astrometric, photometric, or spectroscopic parameters, which could then be applied to any observations from *Kepler*, K2, or TESS missions.

FliPer parameters are integrated as features in the TASOC/T'DA random forest classifier that will be used to automatically classify all TESS targets. This enlarged random forest is itself part of a larger classifier that includes convolutional neural networks (Hon et al. 2018), clustering, etc. The pipeline (Tkatchenko et al., in prep.) is currently being built to be efficient in classifying all types of pulsators, and should demonstrate a high level of performance even for stars with complicated pulsation patterns.

Acknowledgements. We thank the enitre T'DA team for useful comments and discussions, in particular Andrew Tkachenko. We also acknowledge Marc Hon, Keaton Bell, and James Kuszlewicz for useful comments on the manuscript. L.B. and R.A.G. acknowledge the support from PLATO and GOLF CNES grants. S.M. acknowledges support by the Ramon y Cajal fellowship number RYC-2015-17697. O.J.H. and B.M.R. acknowledge the support of the UK Science and Technology Facilities Council (STFC). M.N.L. acknowledges the support of the ESA PRODEX programme (PEA 4000119301). Funding for the Stellar Astrophysics Centre is provided by the Danish National Research Foundation (Grant DNRF106).

References

Aigrain, S., Parviainen, H., & Pope, B. J. S. 2016, MNRAS, 459, 2408
Bai, L., Guo, P., & Hu, Z.-Y. 2005, Astron. Astrophys., 5, 203
Balona, L. A. 2013, MNRAS, 436, 1415
Balona, L. A., Cunha, M. S., Kurtz, D. W., et al. 2011, MNRAS, 410, 517
Breiman, L. 2001, Mach. Learn., 45, 5
Bugnet, L., Garcia, R. A., Davies, G. R., Mathur, S., & Corsaro, E. 2017, SF2A-2017: Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics
Bugnet, L., García, R. A., Davies, G. R., et al. 2018a, A&A, 620, A38
Bugnet, L., Garcia, R. A., Davies, G. R., et al. 2018b, SF2A-2018: Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics
Campante, T. L., Schofield, M., Kuszlewicz, J. S., et al. 2016, ApJ, 830, 138
Debosscher, J., Sarro, L. M., López, M., et al. 2009, A&A, 506, 519
Gandolfi, D., Barragan, O., Livingston, J., et al. 2018, A&A, 619, L10
García, R. A., Hekker, S., Stello, D., et al. 2011, MNRAS, 414, L6
Goldreich, P., & Keeley, D. A. 1977, APJ, 212, 243
Hon, M., Stello, D., & Yu, J. 2018, MNRAS, 476, 3233
Hon, M., Stello, D., García, R. A., et al. 2019, MNRAS, 485, 5616
Huang, C. X., Burt, J., Vanderburg, A., et al. 2018, ApJ, 868, L39
Huber, D., Stello, D., Bedding, T. R., et al. 2009, Commun. Asteroseismol., 160, 74
Huber, D., Zinn, J., Bojsen-Hansen, M., et al. 2017, ApJ, 844, 102
Jenkins, J. M., Caldwell, D. A., Chandrasekaran, H., et al. 2010, ApJ, 713, L120
Kallinger, T., Hekker, S., Garcia, R. A., Huber, D., & Matthews, J. M. 2016, Sci. Adv., 2, 1500654
Lebreton, Y., & Goupil, M. J. 2014, A&A, 569, A21
Li, G., Bedding, T. R., Murphy, S. J., et al. 2019, MNRAS, 482, 1757
Lund, M. N., Handberg, R., Kjeldsen, H., Chaplin, W. J., & Christensen-Dalsgaard, J. 2017, Eur. Phys. J. Web Conf., 160, 01005
Mathur, S., García, R. A., Régulo, C., et al. 2010, A&A, 511, A46
Mathur, S., Hekker, S., Trampedach, R., et al. 2011, ApJ, 741, 119
Mathur, S., García, R. A., Huber, D., et al. 2016a, ApJ, 827, 50
Mathur, S., García, R. A., Huber, D., et al. 2016b, ApJ, 833, 294
Mathur, S., Huber, D., Batalha, N. M., et al. 2017, ApJS, 229, 30
McNamara, B. J., Jackiewicz, J., & McKeever, J. 2012, AJ, 143, 101
Mitchell, M. 2011, Stat., 1, 205
Molnár, L., Plachy, E., Juhász, Á. L., & Rimoldini, L. 2018, A&A, 620, A127
Mosser, B., & Appourchaux, T. 2009, A&A, 508, 877
Pedregosa, F., Varoquaux, G., Gramfort, A., et al. 2011, J. Mach. Learn. Res., 12, 2825
Pérez-Ortiz, M. F., García-Varela, A., Quiroz, A. J., Sabogal, B. E., & Hernández, J. 2017, A&A, 605, A123
Reed, M. D., Baran, A. S., Telting, J. H., et al. 2018, Open Astron., 27, 157
Ricker, G. R., Winn, J. N., Vanderspek, R., et al. 2014, SPIE Conf. Ser., 9143, 20
Sachkov, M. 2014, in Putting A Stars into Context: Evolution, Environment, and Related Stars, eds. G. Mathys, E. R. Griffin, O. Kochukhov, R. Monier, & G. M. Wahlgren, 315
Serenelli, A., Johnson, J., Huber, D., et al. 2017, ApJS, 233, 23
Smalley, B., Niemczura, E., Murphy, S. J., et al. 2015, MNRAS, 452, 3334
Stassun, K. G., Oelkers, R. J., Pepper, J., et al. 2018, AJ, 156, 102
Veljanoski, J., Helmi, A., Breddels, M., & Posti, L. 2019, A&A, 621, A13
Viquar, M., Basak, S., Dasgupta, A., Agrawal, S., & Saha, S. 2018, ArXiv e-prints [arXiv:1804.05051]

Appendix A: Random forest classifier

A.1. Supervised machine-learning

Random forests are supervised machine-learning (ML) algorithms, which learn how to predict an output variable ($Y_{predicted}$) from some training data (X) for which the corresponding result (Y_{known}) is already known. They learn a mapping function f from the input(s) to the output:

$$Y_{predicted} = f(X). \quad (A.1)$$

The algorithm iteratively makes predictions ($Y_{predicted}$) on the training data (X). They are corrected to achieve a maximum level of performance by comparing with the Y_{known} classes. The out-of-bag (OOB) error evaluates at each step the performance of the algorithm. We use a surpervised ML algorithm for our study because we have input variables X (which are $F_{p_{0.7}}$, F_{p_7}, $F_{p_{20}}$, $F_{p_{50}}$, and T_{eff}) and an output class Y_{known} (representing the type of pulsator).

A.2. Classification trees

The clasification-tree method is part of the Classification and Regression Trees (CART) introduced by Breiman (2001). A decision-tree algorithm constructs a binary tree during the training, with each node representing a split point on an input variable (X) (numerical value for regression algorithms, or class name for classification algorithms). The leaf nodes of the tree contain the possible output classes ($Y_{predicted}$).

The tree is built such that a cost function is minimized at each node. Equation (A.2) is the cost function used for the classifier, with $N_{classes}$ the number of classes and p_k the number of training instances with class k at the node of interest,

$$G = \sum_{k=1}^{N_{classes}} p_k \times (1 - p_k). \quad (A.2)$$

When the tree is built on the training sample, it is used to evaluate $Y_{predicted}$ for new X_{new} data.

A.3. Ensemble method Random Forest classifier

An ensemble method combines the prediction from multiple ML algorithms. It aims at making even more accurate predictions than any individual model. The Random Forest classifier is an ensemble method that combines classification trees. It consists of the following steps:

- Creating many subsamples of the training sample.
- Training a classification tree on each subsample, keeping a low number of features that can be looked at for each split point. It aims at decreasing the correlation between the different trees. For classification algorithms, the maximum number of features searched for at each split point is usually $m = \sqrt{p}$, where p is the number of input (X) variables.
- Calculating the dominant class from each model for the new test sample: this predicted class is used as the output variable ($Y_{predicted}$).

• Articles en collaboration en lien avec FliPer$_{\mathrm{Class}}$: contribution majeure •

Surface Rotation and Photometric Activity for *Kepler* Targets. I. M and K Main-sequence Stars

The Astrophysical Journal Supplement Series, 244, 1

DOI : 10.3847/1538-4365/ab3b56

Santos, A. R. G., García, R. A., Mathur, S., Bugnet, L. *et al., 2019*

Syllabus : Dans ce travail, nous analysons les données *Kepler* LC de 26,521 étoiles de la séquence principale de type spectral M et K pour mesurer leur période de rotation de surface et leur niveau d'activité photométrique. Ma contribution se place lors du choix réalisé entre les différentes valeurs du taux de rotation des étoiles établis par des diagnostiques rotationnels de différentes techniques. En utilisant une Forêt Aléatoire pour la classification, nous proposons ainsi un choix entre les différentes estimations des périodes de rotation.

Draft version August 16, 2019
Typeset using LaTeX **twocolumn** style in AASTeX62

arXiv:1908.05222v2 [astro-ph.SR] 15 Aug 2019

SURFACE ROTATION AND PHOTOMETRIC ACTIVITY FOR *KEPLER* TARGETS I. M AND K MAIN-SEQUENCE STARS

A. R. G. Santos,[1] R. A. García,[2,3] S. Mathur,[4,5] L. Bugnet,[2,3] J. L. van Saders,[6] T. S. Metcalfe,[1,7] G. V. A. Simonian,[8] and M. H. Pinsonneault[8]

[1] *Space Science Institute, 4750 Walnut Street, Suite 205, Boulder CO 80301, USA*
[2] *IRFU, CEA, Université Paris-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France*
[3] *Université Paris Diderot, AIM, Sorbonne Paris Cité, CEA, CNRS, F-91191 Gif-sur-Yvette, France*
[4] *Instituto de Astrofisica de Canarias, Spain*
[5] *Universidad de La Laguna, Spain*
[6] *Institute for Astronomy, University of Hawai'i, Honolulu, HI 96822*
[7] *Max-Planck-Institut für Sonnensystemforschung, Justus-von-Liebig-Weg 3, 37077, Göttingen, Germany*
[8] *Department of Astronomy, The Ohio State University, 140 West 18th Avenue, Columbus, OH 43210*

ABSTRACT

Brightness variations due to dark spots on the stellar surface encode information about stellar surface rotation and magnetic activity. In this work, we analyze the *Kepler* long-cadence data of 26,521 main-sequence stars of spectral types M and K in order to measure their surface rotation and photometric activity level. Rotation-period estimates are obtained by the combination of a wavelet analysis and autocorrelation function of the light curves. Reliable rotation estimates are determined by comparing the results from the different rotation diagnostics and four data sets. We also measure the photometric activity proxy $S_{\rm ph}$ using the amplitude of the flux variations on an appropriate timescale. We report rotation periods and photometric activity proxies for about 60 per cent of the sample, including 4,431 targets for which McQuillan et al. (2013b, 2014) did not report a rotation period. For the common targets with rotation estimates in this study and in McQuillan et al. (2013b, 2014), our rotation periods agree within 99 per cent. In this work, we also identify potential polluters, such as misclassified red giants and classical pulsator candidates. Within the parameter range we study, there is a mild tendency for hotter stars to have shorter rotation periods. The photometric activity proxy spans a wider range of values with increasing effective temperature. The rotation period and photometric activity proxy are also related, with $S_{\rm ph}$ being larger for fast rotators. Similar to McQuillan et al. (2013b, 2014), we find a bimodal distribution of rotation periods.

Keywords: stars: low-mass – stars: rotation – stars: activity – starspots – techniques: photometric – methods: data analysis – catalogs

1. INTRODUCTION

Stellar rotation is a key ingredient for the generation of magnetic fields and magnetic cycles in the Sun and other solar-type stars (e.g. Brun & Browning 2017). Stars are observed to spin down as they evolve and lose angular momentum (e.g. Wilson 1963; Wilson & Skumanich 1964). Therefore, rotation can also be used as a diagnostic for stellar age, in what we call gyrochronology (e.g. Skumanich 1972; Barnes 2003, 2007; Mamajek & Hillenbrand 2008; García et al. 2014a; Davies et al. 2015; Metcalfe & Egeland 2019). To calibrate the empirical gyrochronology relations, rotation-period estimates for large samples stars are needed as well as precise ages estimates.

Thanks to the NASA mission *Kepler*, almost 200,000 stars were observed almost continuously for up to four years. These long duration photometric observations obtained with high precision allow us to measure rotation periods through the modulation of the stellar brightness caused by the passage of spots on the stellar disk. This has been done on a large number of stars observed by *Kepler* using different techniques, such as periodogram analysis (e.g. Nielsen et al. 2013; Reinhold et al. 2013),

asantos@spacescience.org

Deuxième partie

Impact d'un champ magnétique interne sur les fréquences des modes d'oscillation des étoiles de type solaire

CHAPITRE 6

ÉTUDE THÉORIQUE DE L'IMPACT D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE AXISYMÉTRIQUE SUR LES FRÉQUENCES DES MODES PROPRES D'OSCILLATION DES ÉTOILES DE FAIBLE MASSE

Sommaire

6.1 Impact d'un champ magnétique interne sur les fréquences d'oscillation des modes mixtes : étude perturbative **199**
6.1.1 Détermination de la topologie et de l'amplitude du champ magnétique utilisé, ainsi que du profil de rotation interne de l'étoile 199
6.1.2 État d'équilibre 202
6.1.3 Forces perturbatrices 202
6.1.4 Développement au premier ordre 203
6.1.5 Expression des termes composants la perturbation fréquentielle 203
6.1.6 Limites de validité de la théorie perturbative 204
6.2 Évaluation de l'impact magnétique sur les fréquences des modes mixtes **205**
6.2.1 Perturbation des fréquences des modes d'oscillation d'une géante rouge typique ($M_\star = 1.5\mathrm{M}_\odot$, Z=0.02, $\nu_{\max}\sim 170\mu$Hz) 206
6.2.2 Caractérisation de l'asymétrie du multiplet 209
6.2.3 Détectabilité de l'asymétrie magnétique 210
6.2.4 Diagrammes échelle corrigés 212
6.2.5 Évolution de la signature magnétique au cours de l'évolution le long de la RGB . 214
6.2.6 Évolution de la signature magnétique et détectabilité durant la phase des sous-géantes 216
6.3 Transport de moment cinétique associé au magnétisme interne **217**
6.4 Dépendance de la signature magnétique aux paramètres stellaires **221**
6.4.1 Dépendance de la signature magnétique à la masse de l'étoile 221
6.4.2 Dépendance de la signature magnétique à la métallicité de l'étoile 221
6.5 Discussion sur les amplitudes des modes **222**
6.6 Ouverture sur la classification observationelle automatique des étoiles présentant des modes mixtes de faibles amplitudes **224**
6.6.1 Principe de la méthode 226
6.6.2 Construction des imagettes 227
6.6.3 Premiers résultats 229
6.7 Conclusions & Perspectives **231**

Enjeux

Dans le chapitre 2 nous avons présenté la structure interne des étoiles le long de leur évolution, accompagnée de la formation et de l'évolution des champs magnétiques qui y prennent place. Nous y détaillons ainsi la présence hypothétique de champs magnétiques d'origine fossile dans l'intérieur radiatif des étoiles de type solaire évoluées, provenant d'épisodes de dynamo convective intense passés. Nous y mentionnons également la possibilité de création et de maintenance locale de magnétisme dans les intérieurs radiatifs par instabilités magnétohydrodynamiques (instabilité de Tayler (Tayler, 1973; Spruit, 2002), formalisme dit « de Fuller » (Fuller et al., 2019)). Ces instabilités et l'étude de l'impact d'un tel magnétisme instable sur les modes d'oscillation des étoiles sera l'objet d'une autre étude, et sort du cadre de cette thèse.

Dans la seconde partie de cette thèse, nous nous concentrons sur l'impact d'un magnétisme interne d'origine fossile sur les fréquences propres des modes d'oscillation des étoiles de type solaire. Nous nous efforçons de proposer une étude complète depuis l'évaluation de l'effet d'un magnétisme axisymétrique (c'est-à-dire aligné avec l'axe de rotation de l'étoile), jusqu'au développement théorique asymptotique de la perturbation des fréquences des modes mixtes associée, afin d'apporter des réponses aux problématiques **2** *(Transport de moment cinétique interne) et* **3** *(Magnétisme interne) énoncées dans l'introduction de ce manuscrit. Ce chapitre est consacré à l'évaluation de l'impact du magnétisme sur les observations, afin de présenter les caractéristiques composant la signature magnétique pour une éventuelle détection dans les données astérosismiques. Le chapitre 7 sera quant à lui dédié à une étude théorique plus approfondie, fournissant une expression asymptotique de l'effet d'un champ magnétique axisymétrique, aligné avec la rotation de l'étoile, sur les fréquences des modes mixtes au long de l'évolution de l'étoile. Les deux publications qui seront rattachées au manuscrit à la fin des chapitres 6 et 7 sont l'aboutissement des travaux sur le cas dit axisymétrique, pour lequel le champ magnétique considéré possède un axe de symétrie de ses composantes poloïdales (radiales et latitudinales dans le cas axisymétrique) et toroïdales (azimutales dans le cas axisymétrique) aligné avec l'axe de rotation de l'étoile. Contrairement aux études publiées de la première partie de cette thèse (composant les chapitres 2 et 3) qui ont été grandement enrichies et complétées dans les mois et années suivant la publications des résultats, les deux articles composant cette seconde partie de manuscrit contiennent tous les résultats obtenus à ce jour concernant l'impact du magnétisme interne. Nous choisissons donc de ne pas reporter à l'identique le contenu des publications, mais plutôt de nous concentrer sur les étapes clefs du raisonnement, ainsi que sur les tenants et les aboutissants de ces études pour la compréhension de la physique stellaire.*

Notre étude n'est pas la première à s'intéresser à l'impact de champ magnétique interne sur les modes propres des oscillations des étoiles. La recherche du champ magnétique interne et de sa signature sur les modes d'oscillation du Soleil a pris place lors de la préparation de la mission SoHO pour l'Héliosismologie. De nombreuses études parmi lesquelles nous citons Takata & Shibahashi (1994); Gough & Thompson (1990); Goode & Thompson (1992) ont entrepris les développements théoriques pour la recherche de signatures magnétiques dans les fréquences propres d'oscillation du Soleil, la véritable motivation étant finalement la compréhension du profil de rotation constant dans l'intérieur radiatif du Soleil. En effet, la rotation interne à la zone radiative mesurée jusqu'à des profondeurs atteignant 25% du rayon du Soleil semble solide (García et al., 2007; Mathur et al., 2008; Fossat et al., 2017), ce qui implique la présence d'un mécanisme de transport de moment cinétique extrêmement efficace prenant place dans les zones radiatives. Parmi les mécanismes efficaces pour le transport de moment cinétique évoqués dans l'introduction de cette thèse (voir section 1.3.3) nous retrouvons un magnétisme intense, connu pour son effet de geler le fluide ionisé le long des lignes de champ magnétique poloïdales, effaçant très rapidement toute rotation différentielle (voir section 2.2.4.5 pour la définition de cet état de Ferraro). Nous discuterons du transport de moment cinétique à l'intérieur des étoiles de type solaire évoluées dans le cadre de notre étude dans la section 6.3. Plus récemment, la détection d'oscillations dipolaires et quadripolaires dans les étoiles de type solaire évoluées avec des amplitudes anormalement faibles (Mosser et al., 2012a; García et al., 2014b; Stello et al., 2016a) a relancé la recherche active de signatures liées au magnétisme interne dans la communauté stellaire. Nous détaillerons notre contribution à la recherche observationnelle d'étoiles candidates pour la recherche de champ magnétique profond à la fin de ce chapitre (voir la section 6.6). Nous nous concentrons dans un premier temps sur le développement théorique et la

modélisation de signatures magnétiques caractéristiques sur le motif fréquentiel. Cela nous permet d'obtenir des informations sur le type de signature qui peut être attendu dans les données d'une étoile avec un champ magnétique interne axisymétrique.

La spécificité de nos résultats et de notre méthodologie repose sur la prise en compte simultanée de :

- **Une topologie magnétique réaliste correspondant aux champs magnétiques fossiles observables dans les zones radiatives des étoiles.** Les études évoquées pour la recherche de signature magnétique dans les données sismiques du Soleil se concentrent sur des topologies simplifiées, composées de champs purement poloïdaux (composante radiale et composante latitudinale dans le cas axisymétrique) ou bien purement toroïdaux (composante azimutale uniquement dans le cas axisymétrique). Ces configurations étant aujourd'hui connues pour leur instabilité (Tayler, 1973; Markey & Tayler, 1973), nous complexifions l'étude par la prise en compte d'un champ mixte, poloïdal et toroïdal, comme dans les études plus récentes de Loi & Papaloizou (2020); Prat et al. (2019); van Beeck et al. (2020). Ces champs mixtes sont stables, et correspondent aux champs fossiles attendus dans les intérieurs radiatifs des étoiles de type solaire évoluées (voir le chapitre 2 pour plus de détails sur la stabilité des champs fossiles). Ces champs fossiles ont la particularité d'être décorrélés de la rotation de l'étoile (par opposition avec les champs d'origine dynamo) et évoluent sur des temps ohmiques très longs, comme ceux observés à la surface d'environ 10% des étoiles OBA.
- **Modes d'oscillation de nature mixte poloïdale et toroïdale correspondant à la nature des modes observés dans les étoiles de type solaire post-séquence principale.** Les études précédemment citées, ayant pour visée une détection du magnétisme interne du Soleil, se concentrent sur les perturbations liées aux magnétisme sur les fréquences des modes acoustiques. L'étude de Rashba et al. (2007) recherche également l'effet du magnétisme sur les fréquences des modes purement de gravité dans le Soleil. Plus récemment, des études perturbatives similaires se sont concentrées sur les étoiles en rotation rapide (les étoiles SPB dans le cas de Prat et al. (2019) et étoiles γ-Doradus van Beeck et al. (2020)), pour lesquelles les modes de gravité purs peuvent être observés. Notre étude sur la sismicité interne des géantes rouges se doit en revanche de porter sur les modes d'oscillation mixtes p et g, comme c'est le cas des travaux de Loi & Papaloizou (2020) pour la recherche des signatures fréquentielles des champs forts.
- **La présence de rotation différentielle dans l'étoile, dont les effets sur les fréquences des modes d'oscillation sont déjà connus (Goupil et al., 2013), sont comparés directement à ceux provoqués par le magnétisme.** L'étude très récente menée par Loi & Papaloizou (2020) se concentre sur l'estimation théorique de l'impact de champ magnétique interne intense sur les fréquences des modes mixtes. Dans cette étude (qui se distingue notamment comme étant la première à ne pas considérer le champ magnétique comme une perturbation au premier ordre), la comparaison des résultats observationnels attendus en présence de magnétisme n'est pas mise en regard avec la signature rotationnelle de l'étoile. Dans notre cas, nous considérons que magnétisme et rotation jouent tous les deux comme des perturbations au premier ordre des fréquences des modes d'oscillation. Cette approximation est tout à fait valable dans le cas des rotateurs lents que sont les étoiles de type solaire évoluées (voir section 3.4.2). Nous montrerons que cette approximation des champs faibles est valide dans la plupart des cas durant les phases de SG et RG.

6.1 Impact d'un champ magnétique interne sur les fréquences d'oscillation des modes mixtes : étude perturbative

6.1.1 Détermination de la topologie et de l'amplitude du champ magnétique utilisé, ainsi que du profil de rotation interne de l'étoile

Topologie du champ fossile

Dans notre étude, le champ magnétique est considéré axisymétrique, mixte poloïdal et toroïdal, aligné avec l'axe de rotation de l'étoile, comme représenté sur la figure 6.1. Il s'exprime par l'équation 2.35 dont l'origine est détaillée dans le chapitre 2 : il s'agit d'un champ fossile ayant relaxé dans l'intérieur radiatif de l'étoile après la disparition de la zone convective interne hébergeant une dynamo magnétique. Le choix d'une telle configuration magnétique repose sur des critères physiques de stabilité qui ont été détaillés dans la section 2.2.4.2 et que nous rappelons ici :

- Les nombreuses études étudiant la stabilité d'un champ relaxé dans un intérieur radiatif pointent vers une configuration avec des composantes mixtes poloïdales et toroïdales, et démontrent l'instabilité des champs purement poloïdaux ou toroïdaux (e.g. Tayler, 1973; Markey & Tayler, 1973; Tayler, 1980; Braithwaite & Spruit, 2004; Braithwaite & Nordlund, 2006; Braithwaite, 2006, 2007, 2008; Duez & Mathis, 2010; Duez et al., 2010a; Akgün et al., 2013).
- Les champs magnétiques observés à la surface radiative d'environ 10% des étoiles de masses intermédiaires et des étoiles massives (types spectraux OBA) sont des champs stables à grandes échelles, non-corrélés avec la rotation de l'étoile, sans évolution temporelle apparente (e.g. Landstreet, 1992) : ces champs ont toutes les caractéristiques associées théoriquement aux champs fossiles, et peuvent donc être considérés comme une preuve de leur existence dans les zones radiatives.

Nous choisissons dans cette première étude de considérer uniquement un champ axisymétrique dont l'axe principal est aligné avec l'axe de rotation de l'étoile. Cette configuration permet une analyse théorique simplifiée, que nous détaillerons par la suite. Les champs magnétiques observés à la surface de certaines naines blanches (Angel et al., 1981; Putney, 1999; Schmidt et al., 2001) indiquent cependant un angle d'inclinaison par rapport à l'axe de rotation de l'étoile. Ces champs magnétiques dans les naines blanches peuvent résulter de la conservation du magnétisme interne à la zone radiative des étoiles de type solaire durant les phases géantes. Afin de nous rapprocher au plus des potentiels champs fossiles observés dans les étoiles, nous étendrons notre étude au cas des champs fossiles inclinés dans une étude à venir.

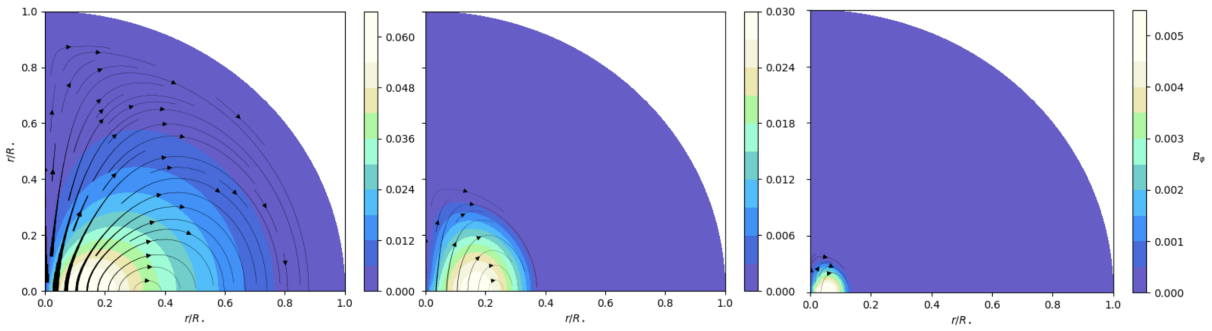


FIGURE 6.1: Topologies de champ magnétique confiné à l'intérieur de la zone radiative des étoiles le long de l'évolution (d'une étoile de $M = 1.5\mathrm{M}_\odot$, Z=0.02, et d'âge de gauche à droite 2.61, 2.73 et 2.80 Ga), calculées grâce à la recherche des valeurs propres de l'équation 2.35 proposée par Duez & Mathis (2010). Les valeurs de l'échelle de couleur représentant la composante toroïdale du champ sont normalisées par l'amplitude maximale du champ poloïdal représentée par les flèches noires dont l'épaisseur reflète l'intensité. De gauche à droite, l'étoile évolue depuis la phase des sous-géantes jusqu'à la RGB. Le panneau de droite représente la topologie du champ magnétique utilisée pour le calcul des perturbations dans la section 6.2.1

.

La figure 6.1 représente les topologies de champ magnétique interne utilisées pour perturber les modes d'oscillation des étoiles depuis la phase des sous-géantes jusqu'aux géantes rouges. Nous considérons uniquement le magnétisme interne, et nous négligeons la contribution des champs de surface d'origine dynamo. Notre étude se place dans le cadre d'un champ magnétique interne d'amplitude suffisamment faible pour que les effets magnétiques ne jouent que par la force de Lorentz perturbée. Les géantes rouges étant des étoiles en rotation lente, nous considérons aussi les effets de la rotation comme des perturbations au premier ordre de l'état d'équilibre. Nous développons ainsi dans cette section la théorie perturbative pour les fréquences propres des

modes mixtes correspondant à l'ajout d'un champ magnétique interne et de la rotation à un état d'équilibre purement hydrostatique sans rotation et sans champ magnétique. Cette étude perturbative au premier ordre est motivée par les très bons résultats obtenus dans le cas de la rotation : les formulations asymptotiques au premier ordre par Goupil et al. (2013) reproduisent les motifs des modes d'oscillation observés pour les étoiles de type solaire évoluées (Mosser et al., 2015; Vrard et al., 2015; Gehan et al., 2018). Comme nous ne recensons pas de perturbation notable du motif rotationnel sur les fréquences des modes mixtes au sein des géantes rouges, nous déduisons que l'effet du magnétisme sur les fréquences propres d'oscillation ne doit pas surpasser celui de la rotation : une théorie au premier ordre devrait donc être suffisante pour la recherche de signatures magnétiques. Nous confirmerons la justesse de ce choix en démontrant la validité de la théorie perturbative pour les amplitudes de champ attendues dans l'intérieur radiatif des étoiles évoluées dans la section 6.1.6. Pour des étoiles très évoluées sur la RGB, l'approximation au premier ordre détaillée ci-dessous atteint ses limites (voir section 6.1.6). La limite de validité de la théorie perturbative dépend de la masse, de la métallicité et de l'état évolutif de l'étoile, mais correspond de façon générale à des amplitudes de champs forts, d'amplitude supérieure à 1MG. Pour l'expression de l'effet d'un champ magnétique interne sur les fréquences propres d'oscillation de ces étoiles, nous nous référons au développement non perturbatif réalisé par Loi & Papaloizou (2020).

Amplitude du champ durant les phases de sous-géante et sur la RGB

Les figures et discussions contenues dans la section 2.3 du chapitre 2 sont rappelées pour l'estimation des amplitudes des champs internes durant les stades évolués des étoiles de type solaire. Les amplitudes ont été estimées dans la plage $[0.01\text{-}1]$ MG à la sortie de la séquence principale, et se renforcent par conservation du flux magnétique dans l'intérieur radiatif (via l'équation 2.39, en considérant que le champ magnétique est isolé dans l'intérieur radiatif). Ces amplitudes réalistes de champ sont utilisées tout au long de notre étude pour estimer leur impact sur les fréquences propres des modes d'oscillation.

Profil de rotation interne

Les taux de rotation interne des étoiles de type solaire évoluées ont peu à peu été dévoilés par l'astérosismologie. Les vitesses de rotation internes de quelques sous-géantes mesurées par Deheuvels et al. (2014) indiquent une fréquence de rotation moyenne du cœur des SG de l'ordre de 0.5 μHz, environ 1 à 5 fois plus rapide que la rotation de surface. Le profil de rotation différentielle dans les sous-géantes jeunes pourrait même être quasiment plat d'après la dernière étude de Deheuvels et al., *accepted*. L'étude de Gehan et al. (2018) montre également une rotation différentielle des géantes rouges, avec une enveloppe tournant jusqu'à 10 fois plus lentement que le cœur.

Afin de représenter au mieux les taux de rotation issus de ces récentes mesures caractéristiques des étoiles de type solaire évoluées, nous choisissons de considérer un système bi-couche, composé d'un intérieur radiatif en rotation solide rapide ($\Omega_{\rm core} \simeq 2\pi \times 5 \times 10^{-7}$ rad$/$sec, et d'une enveloppe convective en rotation solide 10 fois plus lente ($\Omega_{\rm env}$). Ces taux de rotation sont, dans notre système simplifié, considérés identiques depuis la phase de SG jusqu'au sommet de la RGB. Ils sont considérés suffisamment faibles pour que leurs effets sur le système à l'équilibre ne joue qu'au premier ordre. Finalement, en considérant la limite des deux couches se situant à la frontière de la zone radiative interne ($R_{\rm rad}$), on peut décrire le profil de vitesse angulaire comme suit :

$$\Omega(r,\theta) = \Omega(r) \tag{6.1}$$

$$= \begin{cases} \Omega_{\rm core} \, \text{si} \, r < R_{\rm rad} \\ \Omega_{\rm env} \, \text{si} \, r > R_{\rm rad} \end{cases} . \tag{6.2}$$

6.1.2 État d'équilibre

Nous considérons un déplacement Lagrangien du fluide $\boldsymbol{\xi}$ dans le référentiel inertiel dû aux modes propres d'oscillation. L'équation du mouvement s'écrit donc comme :

$$\rho \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}), \tag{6.3}$$

avec ρ=$\rho(r)$ la masse volumique du gaz et $\boldsymbol{F}$ représentant toutes les forces jouant sur la particule fluide. Nous approximons le déplacement du fluide sous l'effet des modes d'oscillation périodiques avec une fréquence propre ω comme un développement de Fourier :

$$\boldsymbol{\xi} = \tilde{\boldsymbol{\xi}}(r, \theta, \varphi) e^{-i\omega t}. \tag{6.4}$$

Dans une étoile non-magnétique et sans rotation, l'équation du mouvement peut ainsi être réécrite comme :

$$\rho_0 \omega_0^2 \boldsymbol{\xi}_0 = -\boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{\xi}_0), \tag{6.5}$$

avec ρ_0 la densité du gaz à l'équilibre et ω_0 et $\boldsymbol{\xi}_0$ les fréquences et fonctions propres d'oscillation non-perturbées. $\boldsymbol{F}_0$ représentant les forces agissant sur le système à l'équilibre, ce terme est constitué par les forces de pression et d'Archimède (voir chapitre 3). Dans une sphère sans rotation (ou bien en faible rotation) le déplacement du fluide sous l'effet des modes d'oscillation peut être projeté sur les harmoniques sphériques comme (e.g. Unno et al., 1989) :

$$\boldsymbol{\xi}_0 = \left[\xi_r(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi), \xi_h(r) \frac{\partial Y_\ell^m(\theta, \varphi)}{\partial \theta}, \frac{im}{\sin\theta} \xi_h(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \right] e^{-i(\omega t)}. \tag{6.6}$$

6.1.3 Forces perturbatrices

Nous considérons donc que les champs magnétiques estimés par conservation du flux depuis la fin du dernier épisode dynamo sont suffisamment faibles pour que la force de Lorentz ne joue qu'au premier ordre sur l'état d'équilibre non-magnétisé. Nous exprimons l'équation du moment dans le repère inertiel, cohérent avec les observations réalisées depuis la position de l'observateur. L'état non-perturbé est alors modifié au premier ordre par trois composantes[1] : la force de Lorentz perturbée ($\boldsymbol{\delta F_l}$, Eq. 6.9), l'accélération de Coriolis ($\boldsymbol{F_c}$, Eq. 6.7) et l'advection liée au changement du référentiel en co-rotation vers le référentiel inertiel depuis lequel les modes d'oscillation sont observés ($\boldsymbol{F_f}$, Eq. 6.8). En utilisant les développements perturbatifs au premier ordre $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1$, $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 + \varepsilon\boldsymbol{\xi}_1$ et $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 + \varepsilon\boldsymbol{F_1}$, l'accélération de Coriolis s'exprime comme :

$$\boldsymbol{F_c}(\boldsymbol{\xi}_0) = 2i\omega_0 \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\xi}_0, \tag{6.7}$$

avec $\boldsymbol{\Omega} = \Omega(r)\boldsymbol{e_z}$ le vecteur fréquence angulaire de rotation (d'amplitude suffisamment faible telle que $\omega_0 \gg 2\Omega$) pour que l'effet de cette force de Coriolis soit au premier ordre, cette condition dépend aussi

1. Quatre composantes sont en réalité à prendre en compte, si l'on considère également l'effet du terme de compression dans la force de Lorentz :

$$\nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{\xi_0}) \nabla \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} / (\mu_0 \rho_0) .$$

Ce terme additionnel, négligé dans les travaux de Morsink & Rezania (2002); Prat et al. (2019); van Beeck et al. (2020), est en cours d'implémentation dans notre étude. Son ajout ne devrait pas changer significativement les résultats, au vu de l'analyse JWKB que l'on peut mener sur ce terme (de façon similaire à l'analyse JWKB au chapitre 7), montrant qu'il sera négligeable tant pour les modes $g-m$ de basses fréquences que pour les modes $p-m$ de hautes fréquences.

de la fréquence du mode considéré, voir par exemple le manuscrit de thèse de C. Gehan). Sous la même approximation la force inertielle associée au changement de référentiel s'écrit comme :

$$\boldsymbol{F_f}(\boldsymbol{\xi}_0) = -2m\omega_0\Omega\boldsymbol{\xi}_0. \tag{6.8}$$

Enfin, la force de Lorentz perturbée est exprimée par :

$$\boldsymbol{\delta F_l}(\boldsymbol{\xi}_0) = \frac{1}{\mu_0}[(\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{B})\wedge\boldsymbol{\delta B} + (\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{\delta B})\wedge\boldsymbol{B}], \tag{6.9}$$

avec $\boldsymbol{\delta B} = \boldsymbol{\nabla}\wedge(\boldsymbol{\xi}_0\wedge\boldsymbol{B})$ et $\mu_0 = 4\pi$ dans le système d'unités cgs.

6.1.4 Développement au premier ordre

Au premier ordre, l'équation du moment s'écrit ainsi dans le repère inertiel comme :

$$2\omega_1\omega_0\boldsymbol{\xi}_0 + \omega_0^2\boldsymbol{\xi}_1 = -\frac{\boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{\xi}_1)}{\rho_0} - \frac{\boldsymbol{\delta F_L}(\boldsymbol{\xi}_0)}{\rho_0} - \boldsymbol{F_c}(\boldsymbol{\xi}_0) - \boldsymbol{F_f}(\boldsymbol{\xi}_0), \tag{6.10}$$

avec ξ_1 les fonctions propres perturbées des modes d'oscillation. Le produit scalaire défini par :

$$\langle\boldsymbol{\xi}_0, \square\rangle = \int_V \rho\boldsymbol{\xi}_0^* \boldsymbol{.}\, \square \mathrm{d}V \tag{6.11}$$

est alors appliqué à l'équation du moment. Puisque l'opérateur $\boldsymbol{F}_0$ est Hermitien, Eq. 6.10 se simplifie et aboutit à l'expression de la perturbation fréquentielle au premier ordre par l'équation 6.12, sur laquelle repose la suite de notre étude.

$$\omega_1 = -\frac{\langle\boldsymbol{\xi}_0, \delta\boldsymbol{F_L}(\boldsymbol{\xi}_0)/\rho_0\rangle + \langle\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{F_c}(\boldsymbol{\xi}_0)\rangle + \langle\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{F_f}(\boldsymbol{\xi}_0)\rangle}{2\omega_0\langle\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_0\rangle}. \tag{6.12}$$

6.1.5 Expression des termes composants la perturbation fréquentielle

Le terme $\langle\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_0\rangle$ qui représente l'inertie des modes s'exprime en fonction des fonctions propres radiales et horizontales, de l'ordre azimuthal m, et des harmoniques sphériques comme :

$$\langle\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_0\rangle = \int_0^R \rho r^2 \left(|\xi_r|^2 + \Lambda^2|\xi_h|^2\right) \mathrm{d}r, \tag{6.13}$$

avec $\Lambda = \sqrt{\ell(\ell+1)}$.

La contribution liée à l'accélération de Coriolis est également développée dans l'équation 6.14, et l'effet du changement de référentiel par l'équation 6.15.

$$\langle\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{F_c}(\boldsymbol{\xi}_0)\rangle = 4m\omega_0\int_0^R \rho r^2\Omega(r)|\xi_h|^2\mathrm{d}r + 8m\omega_0\int_0^R \rho r^2\Omega(r)\mathcal{R}e(\xi_r\xi_h^*)\mathrm{d}r \tag{6.14}$$

$$\langle\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{F_f}(\boldsymbol{\xi}_0)\rangle \;=\; -2m\omega_0\left(\int_0^R \rho r^2\left(|\xi_r|^2 + \Lambda^2|\xi_h|^2\right)\Omega(r)\mathrm{d}r\right). \tag{6.15}$$

Dans le cas d'une rotation solide Ω_s, nous vérifions que le changement de référentiel s'exprime simplement par :

$$-\frac{\langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{F_f}(\boldsymbol{\xi}_0)\rangle}{2\omega_0 \langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_0\rangle} = +m\Omega_s. \tag{6.16}$$

L'évaluation du travail de la force de Lorentz $\langle \boldsymbol{\xi}_0, \delta\boldsymbol{F_L}(\boldsymbol{\xi}_0)\rangle$ est composée de 72 termes ; 40 d'entre eux seulement ne s'annulent pas pour des raisons géométriques liées aux harmoniques sphériques : nous les reportons dans l'annexe B.

6.1.6 Limites de validité de la théorie perturbative

Nous avons considéré un champ d'amplitude suffisamment faible pour que la force de Lorentz ne joue que comme une perturbation au premier ordre. Nous estimons l'amplitude critique des champs au-delà de laquelle notre approximation n'est plus valide. Par sécurité, nous considérons que l'amplitude du champ utilisée doit être au moins 1000 fois inférieure à la valeur critique obtenue pour que la théorie perturbative puisse être utilisée. Les modes mixtes, dont la structure est détaillée dans le chapitre 3, peuvent être dominés par la composante acoustique ou bien de gravité. Au centre de la région des modes mixtes se trouvent les modes dominés par la puissance contenue dans le mode acoustique (mode $p-m$, voir chapitre 3), alors que les modes à dominance de gravité (modes $g-m$) se trouvent aux extrémités de la plage de fréquence des modes mixtes, avec des amplitudes usuellement plus faibles que celles des modes $p-m$. La phase de sous-géante constitue une transition entre les modes purement acoustiques bien connus durant la séquence principale (pour les étoiles de type solaire), et les modes mixtes $g-m$ peuplant la région des modes mixtes durant la RGB. Nous considérons alors les champs critiques associés aux deux régimes de modes mixtes :

Champ critique associé aux modes $g-m$

Pour que les fréquences des modes d'oscillation dominés par la gravité soient (faiblement) affectées par l'équation 6.12, la fréquence angulaire des modes doit être supérieure à la fréquence angulaire d'Alfvén ω_A qui s'écrit comme :

$$\omega_A = \frac{\boldsymbol{B}.\boldsymbol{k}}{\sqrt{\mu_o \rho}}. \tag{6.17}$$

Les modes $g-m$ ont un grand ordre radial $n_{pg} = n_p + |n_g|$ puisque les ordre radiaux associés aux modes g sont fortement négatifs. Dans ce cas, $\boldsymbol{B}.\boldsymbol{k} \simeq B_0 b_r k_r$, avec $b_r \simeq 1$, $k_r \propto \frac{N_{\max}}{\omega_0}\frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}}{R_{\rm rad}}$, où $N_{\max}$ correspond au maximum du profil de la fréquence angulaire de Brunt-Väisälä dont la définition est donnée au Chapitre 2. L'amplitude critique maximale du champ magnétique permettant la validité de notre étude perturbative s'écrit ainsi comme :

$$B_{c,g} \simeq \frac{\omega_0^2 R_{\rm rad}\sqrt{\mu_0 \rho_c}}{\sqrt{\ell(\ell+1)} N_{\max}}, \tag{6.18}$$

avec ρ_c la densité au centre de l'étoile, et $N_{\max}$ la valeur maximale de la fréquence angulaire de Brunt-Vaïsala dans l'intérieur radiatif. La fréquence $N_{\max}$ est de plus en plus élevée lorsque l'étoile évolue comme représenté sur le panneau de gauche de la figure 6.2.

Nous choisissons donc de fixer la limite de validité de nos développements perturbatifs sur les modes $g-m$ des géantes rouges à la valeur raisonnable de $B_0 = B_{c,g}/1000$.

Champ critique associé aux modes $p-m$

Dans le cas des modes $p-m$, situés à très hautes fréquences afin de garantir un ordre n_{pg} élevé, la vitesse d'Alfvén s'écrit comme :

$$v_A = B_0/\sqrt{\mu_0 \rho}. \tag{6.19}$$

Nous comparons cette vitesse avec la vitesse du son associé aux modes acoustiques dans le gaz ($c_s = S_l R_{\rm rad}/\sqrt{\ell(\ell+1)}$) avec S_l la fréquence de Lamb définie au chapitre 2. Ainsi, le champ critique maximal

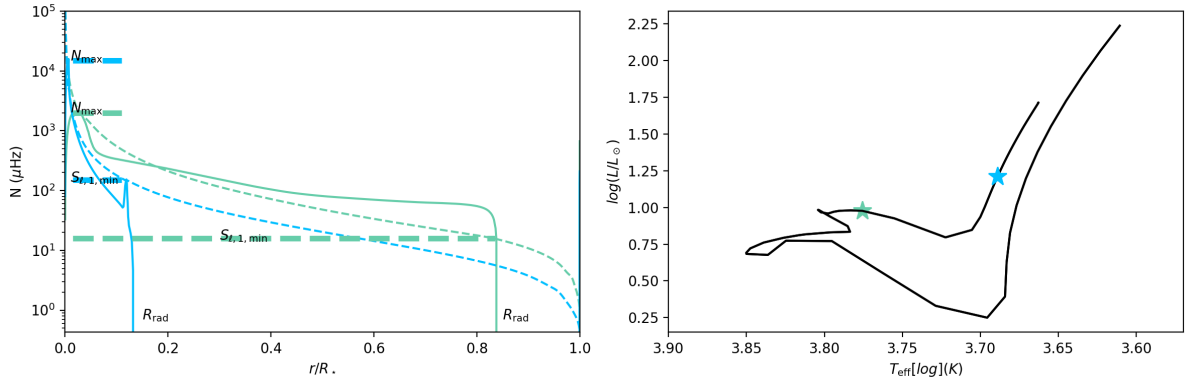


FIGURE 6.2: *Gauche :* Profils des fréquences de Lamb et de Brunt-Väisälä pour une sous-géante (courbes vertes) et une géante (courbes bleues) en fonction du rayon normalisé à l'intérieur de l'étoile. *Droite :* Les deux étoiles étudiées sont représentées dans le diagramme de Hertzsprung-Russell pour information.

associé aux modes $p-m$ s'écrit en fonction de la fréquence de Lamb angulaire minimale dans la zone radiative $S_{l,\min}$ comme :

$$B_{c,p} \simeq \sqrt{\frac{\mu_0 \rho_c}{\ell(\ell+1)}} \times S_{l,\min} \times R_{\rm rad}. \tag{6.20}$$

La fréquence $S_{l,\max}$ est de plus en plus élevée lorsque l'étoile évolue comme représenté sur la figure 6.2. Ces deux champs critiques associés aux deux régimes asymptotiques seront utilisés pour tester la validité de notre étude perturbative dans la section 5.3.3.1.

Nous choisissons alors de fixer la limite de validité de nos développements perturbatifs sur les modes $p-m$ des sous-géantes à la valeur raisonnable de $B_0 = B_{c,p}/1000$.

6.2 Évaluation de l'impact magnétique sur les fréquences des modes mixtes

Afin d'évaluer les différents termes composant l'équation 6.12, nous modélisons la structure interne des étoiles et les paramètres associés à leurs oscillations grâce au code d'évolution stellaire Modules for Experiments in Stellar Astrophysics (MESA, Paxton et al., 2011) et au code de pulsation stellaire GYRE (Townsend & Teitler, 2013)[2]*. Dans le paragraphe suivant, nous présentons les signatures fréquentielles obtenues à partir de l'équation 6.12 pour la géante rouge typique que nous avons choisi d'étudier :* $M_\star = 1.5\mathrm{M}_\odot$, $Z = 0.02$, *et* $\nu_{\max}$=172μHz. *Cette étoile se situe au milieu de la branche des géantes rouges. Elle est suffisamment massive pour développer un cœur convectif durant la séquence principale, pouvant aboutir à la formation d'un champ fossile (voir chapitre 2).*

6.2.0.1 Signatures magnétiques durant la RGB

Par le phénomène de conservation du flux magnétique décrit par l'équation 2.39, nous évaluons l'amplitude estimée du champ magnétique résultant du champ dynamo présent durant la séquence principale pour les étoiles de plus de $1.1\mathrm{M}_\odot$. Pour une géante rouge typique de $M_\star = 1.5\mathrm{M}_\odot$, $Z = 0.02$, et $\nu_{\max}$=172μHz, le rayon initial de la zone radiative interne à la fin de la séquence principale $R_{\rm init}$ mesure environ 97% de la taille

2. Nous utilisons également la suite d'outils megyr, permettant une interface plus agréable entre MESA et GYRE.

totale de l'étoile, ce qui équivaut à $\sim 10^{11}$ centimètres. Lorsque $\nu_{\max}$ atteint 172μHz, le rayon de la zone radiative s'est réduit à 16% du rayon total de la géante rouge, correspondant à $R_{\mathrm{rad},\star} \simeq 6\times10^{10}$centimètres. Le régime d'équipartition conduit à une amplitude de champ durant la RGB la plus faible (ce régime est utilisé par les études de Cantiello et al., 2016; Fuller et al., 2015, pour l'estimation des champs magnétiques dans les géantes rouges). Par cette transmission d'énergie, le champ attendu pour la géante rouge typique est de $B_0 \sim 0.7$MG. Le régime magnétostrophique qui fixe quant à lui la limite maximale du champ attendu provoque $B_0 \sim 7$MG. Ces deux limites seront représentées au long de l'évolution de l'étoile dans la section 6.2.5, et sont envisageables durant l'épisode convectif de la MS.

Nous choisissons d'utiliser dans la section 6.2.1 un champ magnétique d'amplitude 1MG pour l'étude des signatures magnétiques de l'étoile considérée, qui se trouve dans la plage délimitée par les régimes magnétostrophiques et d'équipartition, cohérent avec les amplitudes de champs magnétiques dynamos attendus dans le cœur convectif durant la séquence principale (MS).

Nous déterminons également la limite de validité de notre étude perturbative. Nous avons choisi dans la section précédente de fixer la limite de validité de nos développements perturbatifs sur les modes aux valeurs raisonnables de $B_0 = B_{c,x}/1000$, avec $B_{c,x}$ défini par les équation 6.18 et 6.20.

- En considérant la géante rouge caractéristique ($M_\star = 1.5\mathrm{M}_\odot$, Z=0.02, $\nu_{\max}\simeq 172\mu$Hz), la valeur critique associée aux modes $g-m$ s'évalue à environ $B_{c,g}/1000 \simeq 3$MG par l'équation 6.18, et celle associée aux modes $p-m$ à hauteur de $B_{c,p}/1000 \simeq 470$MG. Pour une étoile similaire plus âgée ($\nu_{\max}\simeq 100\mu$Hz), l'estimation est réduite à $B_{c,g}/1000 \sim 1$MG : lorsque l'étoile évolue le long de la RGB, l'utilisation de champ d'amplitude importante de l'ordre de 1MG se rapproche donc de la limite perturbative pour les modes $g-m$.
- Lorsque l'étoile est plus jeune, sur la phase des sous-géantes par exemple, ρ_c diminue, S_l est plus élevée, et R_{rad} également : finalement $B_{c,p}$ diminue, et la valeur critique $B_{c,p}/1000$ est également réduite à ~ 1MG. Lorsque l'étoile est très jeune sur la phase des sous-géantes, l'utilisation de champ d'amplitude $\gtrsim 1$MG avoisine donc la limite de notre étude perturbative. Tout cela sera rediscuté au vu des résultats de l'effet magnétique sur les fréquences caractéristiques des modes d'oscillation dans la section 6.2.5.

6.2.1 Perturbation des fréquences des modes d'oscillation d'une géante rouge typique ($M_\star = 1.5\mathrm{M}_\odot$, Z=0.02, $\nu_{\max}\sim 170\mu$Hz)

Les différentes composantes de l'équation 6.12 sont évaluées sur les fréquences des modes dipolaires $\ell = 1$ et quadripolaires $\ell = 2$[3]. Les fréquences considérées se trouvent dans la plage $[\nu_{\max}-7\Delta\nu : \nu_{\max}+7\Delta\nu]$, avec $\nu_{\max}$ et $\Delta\nu$ estimés à partir des relations d'échelle définies par les équations 3.89 et 3.88. Cet intervalle correspond usuellement à la plage la plus large permettant une visualisation des modes d'oscillation autour de $\nu_{\max}$. Les fréquences et fonctions propres associées calculées avec GYRE sont dégénérées puisque la rotation n'est pas prise en compte. Chaque fréquence non-perturbée est donc supposée être séparée en $2\ell+1$ composantes à cause de la levée de dégénérescence liée à l'advection décrite dans le chapitre 3. Les différents termes composants le travail de la force de Lorentz perturbée (reportés dans l'annexe B) dépendent de m^2 ou bien sont indépendants de m. Comme c'est également le cas pour l'inertie des modes, nous attendons une levée de dégénérescence par le magnétisme du multiplet en $2\ell+1$ composantes, avec les composantes $\pm m$ équivalentes deux à deux. Cela correspond finalement à la présence de $\ell+1$ composantes seulement.

Dans la configuration axisymétrique considérée pour cette première étape du projet, les axes de rotation et magnétique sont alignés. Par conséquent, une seule résultante de la levée de la dégénérescence du multiplet dégénéré est attendue, composée de la somme linéaire des perturbations de la rotation et du magnétisme comme décrit par l'équation 6.12. Ce comportement linéaire ne sera en revanche certainement pas vérifié pour

3. Les fréquences des modes radiaux $\ell = 0$ ne sont pas affectées ni par la rotation, ni par le magnétisme.

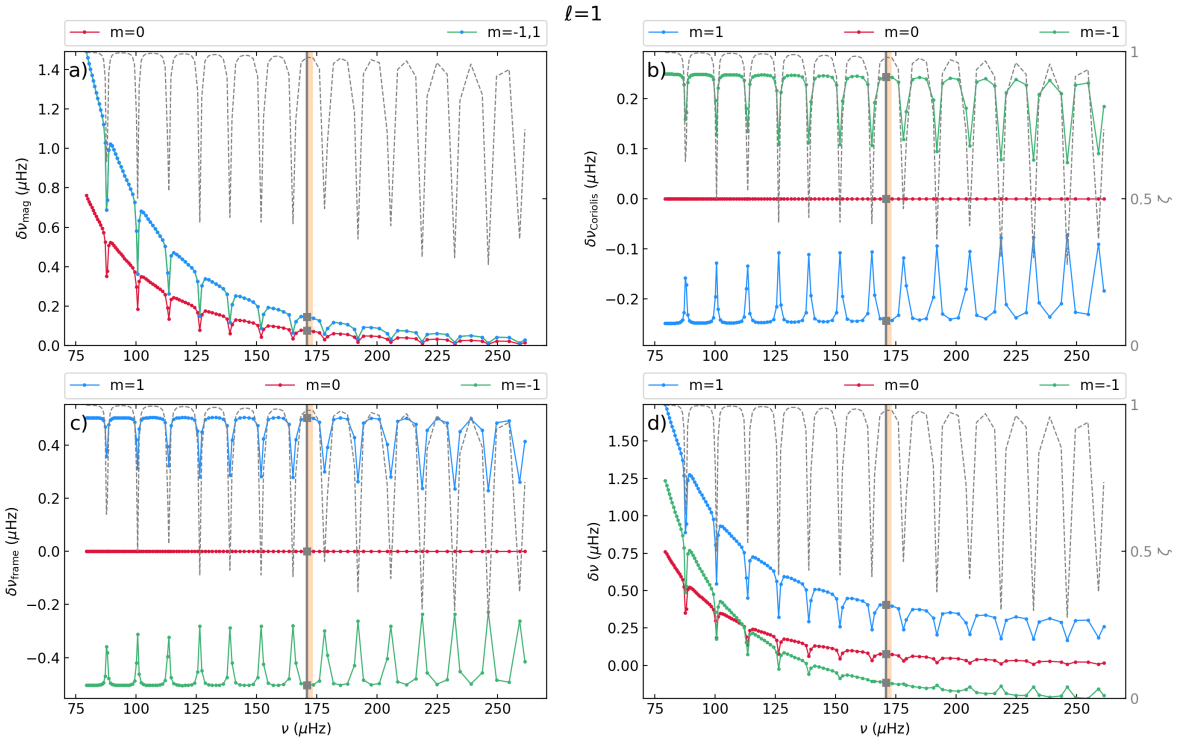


FIGURE 6.3: Perturbation au premier ordre des fréquences des modes mixtes ($\delta\nu$) modélisées pour une géante rouge de masse $M_\star = 1.5\mathrm{M}_\odot$, de métallicité Z=0.02, et de fréquence de puissance maximale des modes d'oscillation $\nu_{\max}\simeq 172\mu$Hz. Les quatre panneaux correspondent à : a) effet du magnétisme seul ($B_0 = 1$ MG), b) effet de l'accélération de Coriolis seule, c) impact du changement de référentiel sur les fréquences, et d) perturbation totale. Les lignes rouges (resp. bleues et vertes) représentent les perturbations fréquentielles pour la composante azimutale $m = 0$ (resp. $m - 1$ et $m = -1$ qui se superposent dans le cas du champ magnétique seul sur le panneau a)). La ligne grise en pointillés reportée sur chacun des panneaux correspond à la fonction ζ définie par Goupil et al. (2013) et présentée dans la section 3.2.5.4. La ligne verticale beige indique la position de $\nu_{\max}$, et la ligne grise indique la position de $\nu_{1,\mathrm{g},\max}$, défini comme la fréquence correspondant au maximum de la fonction ζ le plus proche de $\nu_{\max}$.

des topologies de champ magnétique non alignées avec l'axe de rotation de l'étoile. Ces configurations de champs sont hors du cadre de cette thèse.

Effet du magnétisme seul sur les fréquences des modes mixtes dipolaires

Le panneau a) de la figure 6.3 représente l'effet du magnétisme (voir équation 6.21) sur les multiplets $\ell = 1$ calculés à partir d'une amplitude de champ magnétique de $B_0 = 1$MG. La grandeur $\delta\nu_{\mathrm{mag}}$:

$$\delta\nu_{\mathrm{mag}} = -\frac{\langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{F_L}(\boldsymbol{\xi}_0)/\rho_0 \rangle}{2\omega_0 \langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_0 \rangle} \tag{6.21}$$

est représentée pour les modes contenus dans l'intervalle [$\nu_{\max}$-7$\Delta\nu$:$\nu_{\max}$+7$\Delta\nu$] en fonction de leurs fréquences non-perturbées.

Les composantes b_r, b_θ et b_φ pour cette étoile suivent la formulation établie par Duez et al. (2010a) et sont représentées sur la panneau de droite de la figure 6.1. Comme attendu au vu de la dépendance en m^2 ou bien de la non-dépendance en m des termes composant $\delta\nu_{\mathrm{mag}}$, nous observons une levée de dégénérescence des modes $\ell = 1$ en $\ell + 1 = 2$ composantes. Ces deux composantes sont en réalité constituées par trois modes, les résultantes $m = -1$ et $m = 1$ se superposant. Nous notons également que le ratio de l'amplitude de la déviation magnétique des composantes $m = \{-1, 1\}$ ($C_{1,\{1,-1\}}$) par rapport à celui du mode $m = 0$ ($C_{1,0}$)

est de $C_{1,\{1,-1\}}/C_{1,0} = 2$. Ce rapport provenant de la composante angulaire de la perturbation a été défini par Hasan et al. (2005) : nous observons donc un ratio d'amplitude de l'effet magnétique cohérent avec cette étude.

Nous remarquons également un motif caractéristique de l'effet du magnétisme : la tendance générale est une loi de puissance dépendant de ν (cette loi de puissance sera déterminée dans le chapitre 7), perturbée par des diminutions de l'amplitude de la perturbation à intervalles de fréquence réguliers. Nous représentons pour comparaison la fonction ζ définie au Chapitre 3 comme une mesure de la nature g du mode, à partir du ratio de l'inertie du mode dans la cavité radiative par l'inertie totale du mode :

$$\zeta = \frac{\mathcal{I}_{\rm core}}{\mathcal{I}} = \frac{\int_0^{R_{\rm rad}} \left(\xi_r^2 + \Lambda^2 \xi_h^2\right) r^2 dr}{\int_0^{R_\star} \left(\xi_r^2 + \Lambda^2 \xi_h^2\right) r^2 dr}. \tag{6.22}$$

Nous observons alors que les minima de la signature magnétique sont corrélés avec les minima de la fonction ζ. Par conséquent, ces minima indiquent la position des modes à dominante acoustique au centre de la zone des modes mixtes $\ell = 1$. Par analogie, les modes $g - m$ se situent au niveau des maxima de la fonction ζ. La ligne beige verticale indique la position de $\nu_{\rm max}$. La ligne verticale grise indique quant à elle la position du mode à dominance g la plus forte le plus proche de $\nu_{\rm max}$. Cette fréquence, qui sera dénotée $\nu_{\rm 1,g,max}$ par la suite, indique donc en première approximation le $g - m$ mode central d'amplitude maximale dans la PSD.

Le panneau b) de la figure 6.3 représente la perturbation en fréquence par l'accélération de Coriolis sur les fréquences des modes mixtes $\ell = 1$. Le panneau c) représente la signature du changement de référentiel sur ces mêmes fréquences. La fonction ζ est également représentée pour information, redémontrant la forte dépendance de l'effet rotationnel à la dominance p ou g du mode considéré (Goupil et al., 2013). Ces deux panneaux ont été obtenus en considérant des valeurs typiques pour la rotation du cœur et de l'enveloppe des géantes rouges à partir de l'étude de Gehan et al. (2018) ($\Omega_{\rm core}/(2\pi) = 0.5\mu$Hz et $\Omega_{\rm env}/(2\pi) = 0.05\mu$Hz comme décrit dans la section 6.1.1). L'ensemble de ces deux courbes est bien connu dans la littérature (e.g. Aerts et al., 2010; Mosser et al., 2015; Vrard et al., 2015). Leur développement asymptotique au premier ordre peut être exprimé analytiquement à travers la fonction ζ (Goupil et al., 2013) :

$$\delta\nu_{\rm rot} = \delta\nu_{\rm Coriolis} + \delta\nu_{\rm frame} \simeq \frac{\zeta}{2}\left\langle \frac{\Omega_{\rm core}}{2\pi} \right\rangle + (1-\zeta)\left\langle \frac{\Omega_{\rm env}}{2\pi} \right\rangle \simeq \zeta\delta\nu_{\rm rot,g} + (1-\zeta)\,\delta\nu_{\rm rot,p}. \tag{6.23}$$

Cette expression, qui permet l'inversion des rotations du cœur des étoiles de type solaire évoluées, est très précieuse pour la compréhension des phénomènes dynamiques internes comme le transport de moment cinétique. Nous montrerons dans le chapitre 7 qu'une expression analogue peut être développée dans le cas du magnétisme : cette expression pourrait alors permettre d'inverser l'amplitude du champ magnétique interne dans la zone radiative des géantes rouges lorsque les modes correspondants sont observés.

Finalement, le panneau d) reporte la perturbation combinée du magnétisme et de la rotation décrite par l'équation 6.12.

Les fréquences non-perturbées se retrouvent globalement décalées à plus haute fréquence sous l'effet de la rotation et du magnétisme, avec les modes prograde et rétrograde plus affectés que les modes d'ordre azimuthal nul. L'ajout du magnétisme conduit ainsi à la rupture de la symétrie du triplet $\ell = 1$ dans le spectre en fréquence.

Tout comme dans le cas décrit par Goupil et al. (2013) pour l'impact de la rotation, les modes $g - m$ des géantes rouges sont plus affectés par la présence de magnétisme que les mode $p - m$. Cela s'explique par la position des cavités des modes $g - m$ qui ne sondent que l'intérieur magnétisé alors que les modes $p - m$ sondent également l'enveloppe non-magnétisée dans notre configuration.

L'effet du magnétisme est d'autant plus fort que la fréquence du mode considéré est faible durant la RGB. Les fréquences des modes mixtes des géantes rouges les plus évoluées doivent donc être les plus sensibles au magnétisme.

Nous nous référons à la figure 6 dans la publication reportée à la fin de ce chapitre pour la représentation des résultats associés aux modes quadripolaires $\ell = 2$. Les résultats sont très semblables à ceux obtenus pour les modes $\ell = 1$, avec une amplitude de la perturbation magnétique plus faible relativement à celle obtenue par la rotation. Nous reportons également les ratios $C_{2,0}/C_{2,\{2,-2\}} = 1.8$, $C_{2,0}/C_{2,\{1,-1\}} = 1.125$ entre les différentes perturbations magnétiques d'ordre azimuthal m. Par opposition au cas $\ell = 1$, pour lequel les perturbations magnétiques sont telles que $\delta\nu_{\{1,-1\}} > \delta\nu_0$, les composantes $m = 0$ sont les plus affectées par la présence de magnétisme pour les modes $\ell = 2$, suivis par les modes $|m| = 1$, puis $|m| = 2$ ($\delta\nu_0 > \delta\nu_{\{-1,1\}} > \delta\nu_{\{-2,2\}}$).

6.2.2 Caractérisation de l'asymétrie du multiplet

Après avoir mis en évidence une signature magnétique ayant pour effet la rupture de symétrie du multiplet rotationnel, nous proposons une mesure de cette asymétrie par l'évaluation de la grandeur

$$\delta_{\ell,m} = \frac{\nu_{\ell,m} + \nu_{\ell,-m} - 2\nu_{\ell,0}}{\nu_{\ell,m} - \nu_{\ell,-m}}. \tag{6.24}$$

Cette mesure de l'asymétrie correspondant à chaque $|m|$ est similaire au critère utilisé par Deheuvels et al. (2017) pour exprimer l'asymétrie liée aux effets non-dégénérés de la rotation, qui sont explicités dans la publication associée à ce chapitre. La figure 6.4 schématise et résume le motif fréquentiel attendu dans la PSD des étoiles en rotation avec un champ magnétique interne axisymétrique. Elle définit également les fréquences $\nu_{1,-1}$, $\nu_{1,0}$ et $\nu_{1,1}$ utilisées pour le calcul du degré d'asymétrie.

Le degré $\delta_{\ell,m}$ est égal à zéro quand les composantes m et $-m$ sont parfaitement symétriques autour du mode $m = 0$. Il tend vers 1 ou -1 lorsque l'une des composantes $|m|$ superpose la composante $m = 0$. Pour la géante rouge caractéristique étudiée dans cette section, avec les taux de rotations typiques $\Omega_{\rm core} = 10 \times \Omega_{\rm env} = 2\pi \times 0.5\,{\rm rad.}\mu$Hz et l'amplitude de champ $B_0 = 1$MG, les perturbations globales des fréquences des modes mixtes s'évaluent à hauteur de $\nu_{1,1} \simeq 0.41\mu$Hz, $\nu_{1,-1} \simeq -0.076$, $\nu_{1,0} \simeq -0.11$, $\nu_{2,2} \simeq 0.93\mu$Hz, $\nu_{2,-2} \simeq -0.74\mu$Hz, $\nu_{2,1} \simeq 0.56\mu$Hz, $\nu_{2,-1} \simeq -0.27\mu$Hz et $\nu_{2,0} \simeq 0.17\mu$Hz. Ces valeurs conduisent à une estimation des degrés d'asymétrie de $\delta_{1,1} \simeq 0.28$, $\delta_{2,2} \simeq -0.09$ et $\delta_{2,1} \simeq -0.06$ pour l'amplitude de champ et les taux de rotation utilisés.

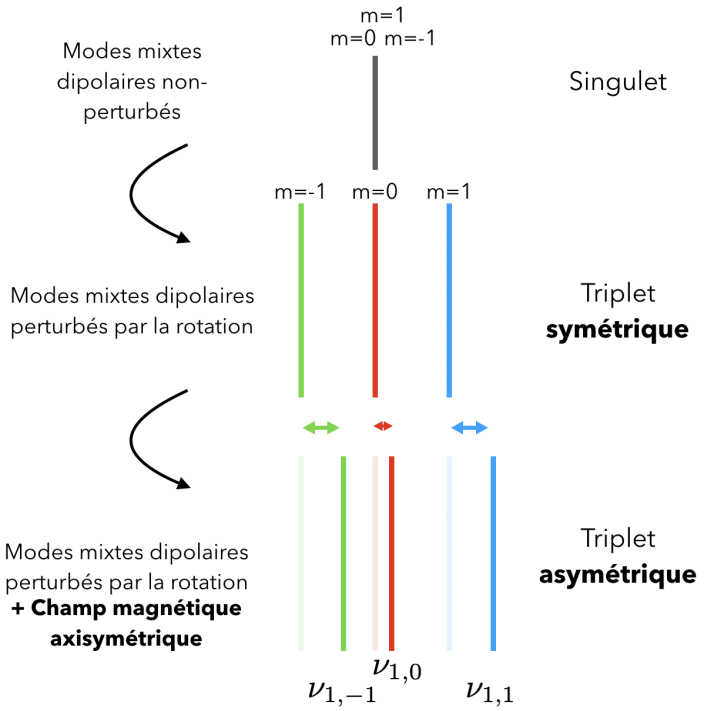


FIGURE 6.4: Représentation schématique des perturbations rotationnelles et magnétiques au premier ordre données par l'équation 6.12 sur un mode mixte $\ell = 1$ dégénéré.

Nous confirmons par cette métrique que les modes $|m| = 1$ sont plus affectés à amplitude magnétique équivalente pour les modes $\ell = 1$ que pour les modes $\ell = 2$: l'impact du magnétisme est plus élevé pour les modes de bas degré, ce qui n'est pas surprenant puisque les modes acoustiques de bas degré se propagent plus en profondeur dans la zone occupée par le champ magnétique.

Nous nous concentrons surtout dans la suite du manuscrit sur les caractéristiques associées aux modes $\ell = 1$ puisqu'ils sont plus facilement observables dans les données réelles au vu de leurs amplitudes.

6.2.3 Détectabilité de l'asymétrie magnétique

Il est naturel ensuite de rechercher quel décalage magnétique minimal peut être détecté dans les données astérosismiques. En présence de magnétisme interne sans rotation, il semble judicieux de poser le critère de détectabilité de la signature magnétique comme :

$$\delta\nu_{\mathrm{mag}} \gtrsim \delta f, \tag{6.25}$$

avec δf la résolution fréquentielle dans les données astérosismiques, qui dépend de la durée des observations. Dans ce cas, la signature magnétique surpasse la résolution fréquentielle et devrait apparaître dans les données. Nous modérons tout de même ce critère simpliste :

- Usuellement, un décalage de l'ordre de plusieurs résolutions fréquentielles est nécéssaire pour qu'un signal soit réellement détectable dans les données, à cause de l'étalement du signal sur plusieurs résolutions fréquentielles dû au bruit contenu dans les données. Cependant, les largeurs typiques des modes $g - m$ qui nous intéressent sont très petites. En effet, Benomar et al. (2014) montrent que la

largeur des modes dipolaires est reliée à celle des modes radiaux par

$$\Gamma_1 = \Gamma_0(1-\zeta). \tag{6.26}$$

Comme la fonction ζ est très proche de 1 ($\zeta \simeq 0.98$) pour les modes $g-m$, cela conduit à une largeur typique des modes $\ell = 1$ de 2.4nHz en considérant des largeurs typiques des modes $\ell = 0$ de 120nHz (e.g. Mosser et al., 2018). Comme la résolution fréquentielle des meilleures données de *Kepler* est plus élevée ($\delta f \sim 7.9$nHz), les modes $g-m$ dipolaires ne sont pas résolus, et un facteur de dilution du signal sur plusieurs bins de fréquence doit être considéré (Dupret et al., 2009; Mosser et al., 2018). Ainsi, après prise en compte de ce facteur, la largeur typique des modes dipolaires $g-m$ est de $2\delta f/\pi$, évaluée à 5nHz pour les données de *Kepler* acquises pendant 4 ans. Ainsi, la limite de détectabilité de l'effet du magnétisme sur les modes $g-m$ doit être de l'ordre de grandeur de la résolution fréquentielle des données : le critère 6.25 est donc valide pour les modes $g-m$ qui nous intéressent en particulier car ils sont plus sensibles au magnétisme interne.

- La signature magnétique est accompagnée de la signature rotationnelle dans la PSD. La détection de la signature rotationnelle est désormais possible par les méthodes d'inversion de Deheuvels et al. (2012); Gehan et al. (2018). Cependant cette détection est accompagnée d'une incertitude, et l'effet du magnétisme doit être supérieur à la marge d'erreur associée à la détection rotationnelle pour pouvoir en être distingué. Les erreurs commises sur l'estimation de la position des composantes du triplet rotationnel ont été estimées par Mosser et al. (2018) à environ $\Delta\nu/200$, ce qui correspond à ~ 1.3 fois la résolution des meilleures données de *Kepler*. La limite de détection fixée par le critère 6.25 est donc raisonnable, dans le cas où les signaux associés à la rotation sont bien identifiables.
- La signature rotationnelle s'ajoute linéairement à la signature magnétique. La mesure directe de la déviation des fréquences par le magnétisme seul n'est donc pas possible, et la seule mesure correspond au degré d'asymétrie du triplet $\delta_{1,m}$ défini par l'équation 6.24. Ainsi, afin que les effets du magnétisme soient détectables en présence de la rotation de l'étoile, le critère 6.25 pour la détection des signatures magnétiques sur le triplet $\ell = 1$ est modifié en :

$$\nu_{\ell,1} + \nu_{\ell,-1} - 2\nu_{\ell,0} \gtrsim \delta f. \tag{6.27}$$

Nous estimons ce critère en fonction des perturbations en fréquences liées à la rotation et au magnétisme pour les composantes $m = \{-1, 0, 1\}$ (elles sont dénotées respectivement $[-\delta\nu_{\mathrm{rot},1},\ 0,\ \delta\nu_{\mathrm{rot},1}]$ et $[\delta\nu_{\mathrm{mag},1},\ \delta\nu_{\mathrm{mag},1}/2,\ \delta\nu_{\mathrm{mag},1}]$ pour les triplets $\ell = 1$). Le critère 6.27 devient pour les modes $\ell = 1$:

$$\underbrace{\overline{\nu_{\ell,0}} + \delta\nu_{\mathrm{mag},1} + \delta\nu_{\mathrm{rot},1}}_{\nu_{\ell,1}} + \underbrace{\overline{\nu_{\ell,0}} + \delta\nu_{\mathrm{mag},1} - \delta\nu_{\mathrm{rot},1}}_{\nu_{\ell,-1}} - 2\underbrace{(\overline{\nu_{\ell,0}} + \delta\nu_{\mathrm{mag},1}/2)}_{\nu_{\ell,0}} \gtrsim \delta f, \tag{6.28}$$

avec $\overline{\nu_{\ell,0}}$ la fréquence des modes $\ell = 0$ non perturbés. Cette dernière équation se réduit donc en :

$$\delta\nu_{\mathrm{mag},1} \gtrsim \delta f, \tag{6.29}$$

et nous retrouvons le critère originel donné par l'équation 6.25. Ainsi, ce critère reste cohérent lorsque l'étoile est en rotation.

D'autres sources d'asymétrie du triplet rotationnel des modes dipolaires peuvent être recensées sans nécessiter la présence de magnétisme interne. Nous nous référons à la section 4.5 de la publication associée à ce chapitre pour le détail des sources recensées d'asymétrie des multiplets rotationnels. Nous précisons cependant que ces nouvelles asymétries sont soit d'amplitude négligeable, soit aisément distinguables des asymétries magnétiques de par leurs amplitudes relatives entre les modes dipolaires et quadripolaires comme dans le cas des effets presque-dégénérés de la rotation (voir par exemple Deheuvels et al., 2017).

6.2.4 Diagrammes échelle corrigés

En tant que dernier outil pour la détection et la mesure de la signature magnétique sur les fréquences des modes mixtes dipolaires, nous adaptons la méthodologie de Vrard et al. (2015) et de Gehan et al. (2018) d'étirement des spectres de puissance. Cette méthode consiste à modifier l'abscisse d'un spectre de puissance, habituellement représenté en fréquence ou bien en période, afin de faire apparaître une périodicité dans les modes d'oscillation mixtes, et également de faire apparaître la présence de multiplets rotationnels sur plusieurs ordres $n_{p,g}$.

Le changement de coordonnées permettant la mise en évidence de la périodicité des modes mixtes s'exprime comme l'équation 3.106, que nous reportons ici :

$$\mathrm{d}\tau_m = \frac{1}{\zeta}\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu^2}, \tag{6.30}$$

avec ν la fréquence du mode observé (Mosser et al., 2015). Dans le cas d'une étoile observée sans magnétisme interne, la distance entre deux modes consécutifs ayant le même ordre azimutal m est donnée par l'intégration de l'équation 6.30 :

$$\Delta\tau_m = \Delta\Pi_1 \left(1 + 2\zeta\frac{\delta\nu_{\mathrm{rot,m}}}{\nu}\right), \tag{6.31}$$

avec $\delta\nu_{\mathrm{rot},m}$ la perturbation de la fréquence du mode due à la rotation de l'étoile et $\Delta\Pi_1$ l'espacement en période des modes de gravité défini dans le chapitre 3 par l'équation 3.78. Par l'équation 6.23, $\delta\nu_{\mathrm{rot,g},m}$ est très proche de $\delta\nu_{\mathrm{rot,m}}$ pour les modes $g-m$ puisque ζ est proche de 1. Ainsi l'approximation $\delta\nu_{\mathrm{rot},m} \sim \delta\nu_{\mathrm{rot,g},m} \sim \delta\nu_{\mathrm{rot,core},m}$ est valide pour les modes $g-m$, et permet une mesure directe de la rotation du cœur de l'étoile. Nous recherchons ici une formulation équivalente pour la mesure directe du champ magnétique interne.

Pour une étoile en rotation, la fréquence d'un mode $g-m$ non-perturbée à l'ordre 0 s'exprime comme la fréquence observée à laquelle la perturbation rotationnelle est soustraite :

$$\nu_g \simeq \nu - \delta\nu_{\mathrm{rot},g}\zeta, \tag{6.32}$$

Nous montrerons dans le chapitre 7 que l'expression de la perturbation asymptotique par le magnétisme s'exprime de façon analogue à l'équation 6.23 pour la rotation :

$$\delta\nu_{\mathrm{mag}} \simeq \zeta\delta\nu_{\mathrm{mag,g}} + (1-\zeta)\,\delta\nu_{\mathrm{mag,p}} \tag{6.33}$$

Cette formulation admise ici sera explicitée dans la section 7.3.3 du chapitre 7.

Dans le cas d'une étoile magnétisée, la fréquence non-perturbée à l'ordre 0 du mode $g-m$ s'exprime alors comme la fréquence observée à laquelle les perturbations rotationnelles et magnétiques sont soustraites :

$$\nu_g \simeq \nu - \left(\delta\nu_{\mathrm{rot},g} + \delta\nu_{\mathrm{mag},g}\right)\zeta. \tag{6.34}$$

Par conséquent la période d'un mode mixte varie comme :

$$\frac{\mathrm{d}P_m}{\mathrm{d}\nu} = -\frac{1}{\nu^2}, \tag{6.35}$$

donc :

$$\mathrm{d}P_m = -\frac{\mathrm{d}\nu_g}{\left[\nu_g + \left(\delta\nu_{\mathrm{rot,g},m} + \delta\nu_{\mathrm{mag,g},m}\right)\zeta\right]^2}. \tag{6.36}$$

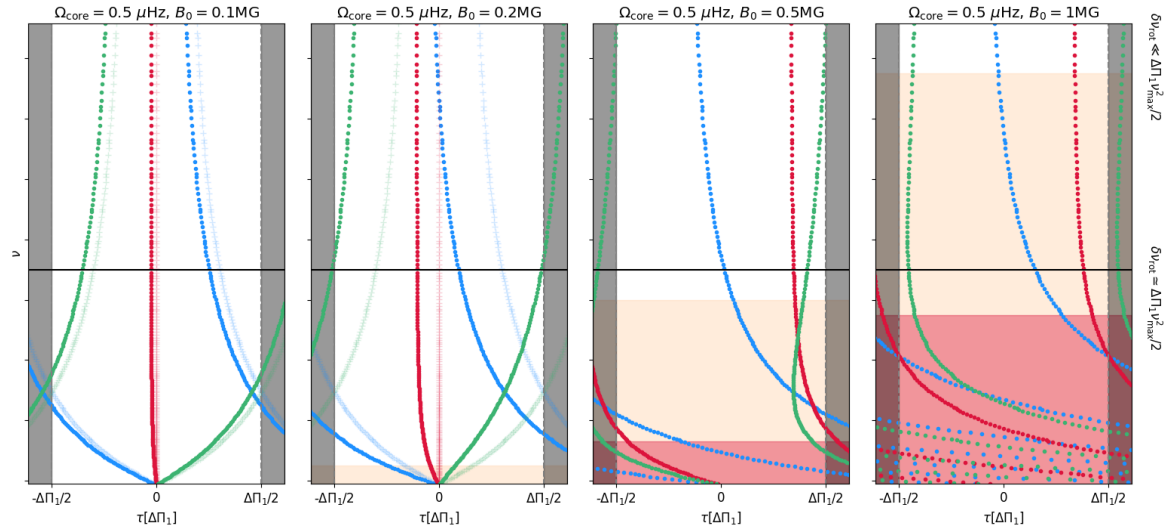


FIGURE 6.5: Diagrammes échelle synthétiques corrigés à partir de l'équation 6.30. Les points colorés (resp. verts, rouges et bleus) représentent la position des modes mixtes $\ell = 1$ d'ordre azimutal $m \in \{-1, 0, 1\}$. La ligne noire horizontale délimite deux régimes de rotation : le plus bas correspond à une rotation du cœur de l'étoile modérée (cas des étoiles de la RGB par exemple), alors que la partie supérieure des diagrammes correspond plutôt à des rotations du cœur lentes par rapport à la fréquence d'oscillation des modes comme c'est le cas sur la phase des sous-géantes. Le critère d'appartenance aux deux régions est reporté sur la droite du diagramme ($\delta\nu_{\rm rot} \pm \Delta\Pi_1\nu_{\rm max}/2$; voir Gehan et al., 2018, pour plus de détails). Un critère similaire est établi pour comparer les effets du magnétisme par rapport à ceux de la rotation : les zones blanches correspondent à des effets magnétiques plus faibles que les effets rotationnels, les plages jaunes correspondent à des configurations où les effets magnétiques sont comparables aux effets rotationnels, et enfin les plages rouges correspondent à des perturbations fréquentielles dominées par le magnétisme. Les panneaux représentés sont pour, de gauche à droite, une amplitude de champ magnétique augmentant de 0.1 à 1MG. Sur les deux premiers panneaux, la position des modes dans le cas où seule la rotation agit est représentée en fond par les croix transparentes.

Grâce à un développement limité sur la grandeur $\left(\delta\nu_{\rm rot,g,}{}_m + \delta\nu_{\rm mag,g,}{}_m\right)/\nu_g$, qui est proche de 0 au vu de la valeur relative des perturbations,

$$\mathrm{d}P_m = -\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu^2}\left(1 - 2\zeta\frac{\delta\nu_{\rm rot,g,}{}_m + \delta\nu_{\rm mag,g,}{}_m}{\nu_g}\right). \tag{6.37}$$

En utilisant les correspondances $\Delta\tau_m = \Delta P_m/\zeta$ et $-\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu^2} = \zeta\Delta\Pi_1$ (voir Mosser, 2015), l'équation 6.38 devient :

$$\Delta\tau_m = \Delta\Pi_1\left(1 - 2\zeta\frac{\delta\nu_{\rm rot,g,}{}_m + \delta\nu_{\rm mag,g,}{}_m}{\nu_g}\right), \tag{6.38}$$

avec $\delta\nu_{\rm mag,g,}{}_m$ la perturbation due au champ magnétique présent dans l'intérieur radiatif de l'étoile.

La méthode décrite par Gehan et al. (2018) permettant d'estimer les perturbations rotationnelles peut donc être appliquée aux étoiles magnétisées (de façon axisymétrique dans un premier temps) en estimant non pas la perturbation rotationnelle seule mais plutôt la somme des deux perturbations $\delta\nu_{\rm rot,g,}{}_m + \delta\nu_{\rm mag,g,}{}_m$. Ensuite, une seconde étape d'analyse est nécessaire afin de séparer les deux composantes. Nous proposons donc la recherche de l'asymétrie du multiplet comme décrit dans la section 6.2.2, une fois les perturbations totales mesurées.

La figure 6.5 représente les diagrammes échelle en période corrigée. Ce sont des diagrammes échelle dont l'axe des abscisses a été modifié pour prendre en compte la période corrigée des modes mixtes τ. La périodicité associée est donnée par la grandeur $\Delta\Pi_1$ représentant la périodicité des modes $g-m$. Quatre diagrammes échelle corrigés sont représentés, chacun correspondant à une perturbation par la rotation et par un magnétisme évoluant de gauche à droite dans la plage d'amplitude $B_0 \equiv [0.1, 0.2, 0.5, 1]$ MG. Les points verts, rouges et bleus représentent respectivement les positions des modes $\ell = 1$ de composante $m = -1$, $m = 0$ et $m = 1$, en fonction de la fréquence du mode et de la période corrigée modulo $\Delta\Pi_1$. Sur les deux premiers panneaux la position des modes dans le cas sans magnétisme est également représentée par les croix en arrière-plan.

Tout comme pour le cas rotationnel sans magnétisme décrit par Gehan et al. (2018), nous obtenons 3 courbes, correspondant aux composantes $m = \{-1, 0, 1\}$ des modes mixtes. Deux zones sont également délimitées par la ligne noire horizontale, correspondant à deux régimes rotationnels définis par Gehan et al. (2018). En dessous de la limite, la rotation est dite modérée, son effet sur les fréquences des modes d'oscillation est comparable à la grandeur $\Delta\Pi_1\nu^2_{\rm max}/2$. Ce régime correspond visuellement aux zones contenant des croisements entre les différentes composantes m des modes mixtes dans le diagramme échelle corrigé. Au dessus de la limite, la rotation est faible et ses effets sur les fréquences des modes mixtes sont très faibles devant cette grandeur caractéristique du système : il n'y a pas de croisement entre les différentes composantes m de modes d'ordre n_g consécutifs. Sur le panneau de gauche, le champ magnétique est suffisamment faible pour que la géométrie des courbes ressemble fortement à celle obtenue par Gehan et al. (2018) dans le cas rotationnel. Les trois courbes sont simplement légèrement décalées à plus hautes fréquences par le magnétisme. Ce phénomène s'amplifie lorsque l'amplitude du champ magnétique est augmentée. Nous délimitons alors plusieurs zones dans les diagrammes, en étudiant la composante $m = -1$ du multiplet. En effet, la composante $m = -1$ est la seule pour laquelle les effets du magnétisme et de la rotation jouent en sens opposés. Un ligne verticale parmi les modes $m = -1$ dans le diagramme corrigé correspond alors à une balance des effets de la rotation et du magnétisme.

- Là où la composante $m = -1$ évolue de gauche à droite, les effets du magnétisme sont négligeables devant les effets de la rotation. Ce régime est indiqué par les plages blanches sur la figure 6.5.
- Quand $\delta\nu_{\rm mag}$ est proche de $\delta\nu_{\rm rot}$, la courbure de le ligne $m = -1$ tend à s'inverser. Ce scénario correspond aux plages jaunes sur la figure 6.5.
- Enfin, dans les plages rouges, le magnétisme domine les effets rotationnels. Ces régions sont à analyser avec prudence pour ne pas sortir du régime perturbatif que nous utilisons pour ces résultats.

6.2.5 Évolution de la signature magnétique au cours de l'évolution le long de la RGB

Après avoir étudié en détail les effets du magnétisme interne sur les fréquences des modes d'oscillation d'une géante rouge typique au milieu de la RGB, nous nous intéressons désormais aux variations de cet effet magnétique le long de son évolution sur la RGB. Tout au long de cette étape évolutive, les modes mixtes de l'étoile de masse $1.5{\rm M}_\odot$ et de métallicité Z$= 0.02$ sont des modes $g-m$ (par opposition avec les modes mixtes des étoiles sur la phase des sous-géantes, chose qui sera détaillée par la suite). Nous avons vu grâce à l'étude de l'étoile à $\nu_{\rm max} \simeq 172\mu$Hz que les modes à dominance g dans le spectre sont plus affectés par le magnétisme que les modes à dominance p. Nous nous focalisons donc sur les modes $g-m$ pour leur suivi le long de l'évolution de l'étoile sur la RGB.

Nous évaluons une grille du paramètre $\delta\nu_{\rm mag}$ en fonction de la fréquence caractéristique du mode $g-m$ central $\nu_{\rm 1,g,max}$ pour chacun des états évolutifs, et de l'amplitude du champ magnétique considérée entre 0.1 et 10 MG. Les amplitudes de la perturbation magnétique sur la composante $m = 1$ des modes mixtes sont représentées par l'échelle de couleur sur le panneau de gauche de la figure 6.6. Les amplitudes critiques de champ $B_{c,g}/1000$ estimées par l'équation 6.18 pour les modes $g-m$ délimitent le haut de la plage colorée : au-delà de cette valeur nous considérons le régime perturbatif non valide. Nous représentons également les résolutions fréquentielles δf associées aux données des différentes missions spatiales utilisées pour l'astérosismologie les plus récentes

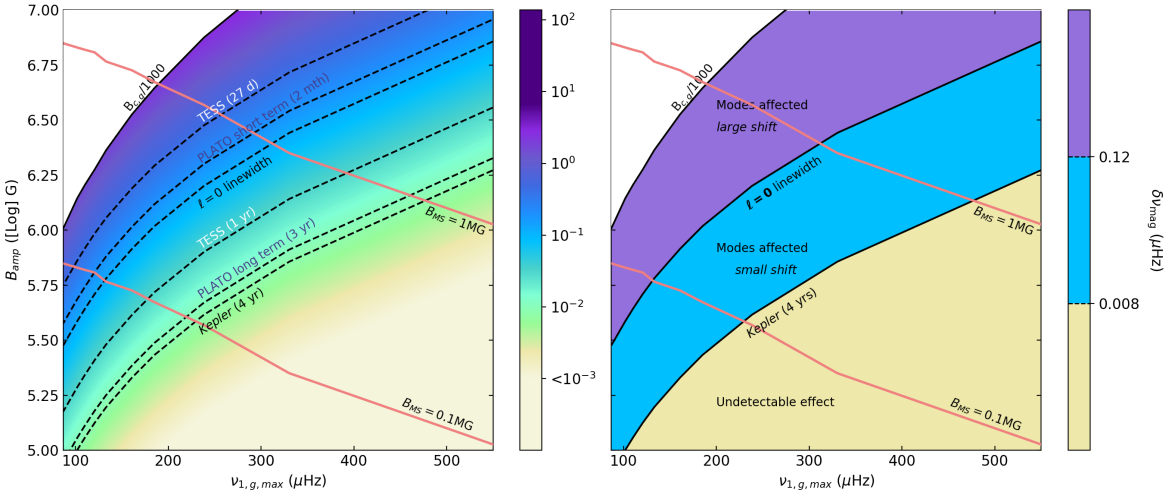


FIGURE 6.6: *Gauche :* perturbation de la fréquence des modes $\ell = 1, m = 1$ mixtes $g - m$ par le magnétisme $\nu_{\rm mag}$, en fonction de l'amplitude du champ magnétique et de la fréquence du mode $g - m$ considéré $\nu_{1,\rm g,max}$. La figure est réalisée en suivant l'évolution de la géante rouge de masse $M = 1.5 M_\odot$ et Z=0.02 le long de la branche des géantes rouges. La valeur critique $B_{c,g}/1000$ est reportée et délimite la zone de validité de notre étude perturbative. Nous représentons également les fréquences de résolution typiques associées aux principales missions astérosismiques : la ligne pointillée dénommée « *Kepler* (4 years) » (resp. « PLATO (3 years) », « TESS (1 year) », « PLATO (2 months) », « TESS (27 days) ») représente la résolution fréquentielle dans la PSD, qui vaut ~ 8 nHz (resp. ~ 11 nHz, ~ 30 nHz, $\sim 0.19 \mu$Hz, et $\sim 0.37 \mu$Hz). La ligne pointillée dénotée "$\ell = 0$ linewidth" correspond à la largeur typique à mi-hauteur des modes radiaux dans le spectre, associée aux études de Vrard et al. (2017); Mosser et al. (2018). Les lignes rouges représentent les valeurs des amplitudes de champ estimées le long de l'évolution de l'étoile par la conservation du flux magnétique originellement à 0.1 and 1 MG à la fin de la MS, comme détaillé dans la section 2.3.4. *Droite :* Le panneau de gauche est reporté et simplifié. La carte de couleurs est modifiée pour délimiter seulement les combinaisons de paramètres $\nu_{1,\rm g,max}$ tels que : la signature magnétique n'est pas détectable (zone jaune), est détectable (zone bleue) d'après le critère 6.27, et est facilement détectable (zone violette) dans les données du satellite *Kepler* acquises sur une durée de 4 ans.

(*Kepler*, TESS et PLATO en préparation). Elles permettent ainsi de repérer pour chacun des états évolutifs dénotés par $\nu_{1,\rm g,max}$ la valeur minimale de l'amplitude du champ magnétique nécessaire pour une potentielle détection sur les fréquences des modes comme décrit dans la section 6.2.3. Nous représentons également la largeur typique des modes radiaux $\ell = 0$ estimée par Vrard et al. (2017) et Mosser et al. (2018). Enfin, les amplitudes estimées des champs magnétiques internes par conservation du flux magnétique via l'équation 2.39 depuis le dernier épisode dynamo (qui correspond pour notre étoile de $1.5 M_\odot$ à la fin de la MS, voir Chapitre 2) sont représentées par les lignes rouges. La ligne du haut correspond au régime magnétostrophique et la ligne du bas au régime de flottaison. Le régime d'équipartition aboutit à des amplitudes de champs trop faibles pour être visualisées sur ce diagramme.

Sur le panneau de droite sont reportées uniquement les plages correspondant à trois régimes de la signature magnétique dans les données de *Kepler* acquises pendant 4 ans : la plage jaune est située sous la limite de résolution des données. Les combinaisons $(\delta\nu_{1,\rm g,max},\ B_0)$ se situant dans cette plage du diagramme ne conduisent pas à une signature magnétique détectable dans les données. Les combinaisons résultant d'une valeur dans la plage bleue peuvent en revanche permettre une détection du signal magnétique dans les données de *Kepler*, mais cette signature est modérée, la perturbation sur les fréquences étant plus petite que la largeur typique des modes radiaux de l'étoile. Enfin, dans la plage violette, les signatures magnétiques sont très grandes et devraient être facilement détectables dans les données de *Kepler*. Nous avons choisi de représenter uniquement ce diagramme pour les données de *Kepler* acquises durant 4 années car elles sont et resteront pendant encore longtemps les données astérosismiques avec la meilleure résolution fréquentielle à disposition : elles offrent la plus grande probabilité de détection d'une éventuelle signature magnétique.

La signature magnétique augmente à amplitude magnétique constante lorsque l'étoile évolue sur la RGB. Bien entendu, elle augmente également lorsque l'on augmente l'amplitude du champ magnétique à état évolutif constant du fait de la dépendance de la perturbation magnétique en B_0^2. Le long des tracés de conservation du flux magnétique, l'amplitude du champ magnétique augmente lorsque l'étoile évolue sur la RGB, provoquant dès lors des perturbations magnétiques sur les fréquences des modes d'oscillation de plus en plus grandes. Les amplitudes des champ sattendues durant la RGB sont ainsi suffisantes pour une possible détection de leurs signatures sur les fréquences des modes $g-m$ dans les données astérosismiques.

6.2.6 Évolution de la signature magnétique et détectabilité durant la phase des sous-géantes

La phase des sous-géantes est beaucoup plus courte que la RGB, comme explicité dans le chapitre 2, surtout dans le cas des étoiles de masses intermédiaires qui évoluent très rapidement. Pour notre même étoile de $M_\star = 1.5\mathrm{M}_\odot$, Z=0.02, la phase de sous-géante dure environ 0.1 milliards d'années. Pendant cette phase, la fréquence $\nu_{\max}$ de l'étoile considérée varie entre environ 700 et 500μHz. Nous observons alors que, contrairement au cas de l'évolution sur la RGB, la fréquence $\nu_{1,\mathrm{g},\max}$ n'évolue pas de façon monotone pendant la phase de sous-géantes. Cela est visualisable sur le panneau de gauche de la figure 6.7. De plus, la perturbation magnétique ne suit pas non plus une évolution monotone avec l'évolution de l'étoile. Cela est visualisé sur le panneau central de la figure 6.7. Nous observons alors deux régimes :

- À basse fréquence, le motif de la perturbation magnétique dans le diagramme (ν, $\delta\nu_{\mathrm{mag}}$) est similaire à celui représenté sur le panneau a) de la figure 6.6 dans le cas des géantes rouges. En effet, nous observons une augmentation de la valeur de la perturbation magnétique lorsque la fréquence du mode diminue sur le panneau central de la figure 6.6, et les modes $p-m$ sont moins affectés que les modes $g-m$.
- À plus haute fréquence, ce qui correspond à une étoile jeune sur la phase des sous-géantes, le motif magnétique est bien différent. Nous observons une remontée de la signature magnétique avec la fréquence, ainsi qu'un effet magnétique sur les modes $p-m$ plus important que celui sur les modes à dominance g.

Ces comportements asymptotiques correspondant aux modes $g-m$ de basses fréquences ert aux modes $p-m$ de hautes fréquences seront étudiés théoriquement dans le chapitre 7.

Tout comme nous l'avons fait pour les étoiles durant la RGB (voir section 6.2.5), nous recherchons également la détectabilité des signatures magnétiques sur les fréquences des modes mixtes durant la phase des sous-géantes. Comme observé grâce à la figure 6.7, la phase des sous-géantes est une étape de transition entre un spectre de puissance dominé par les modes $p-m$ et un spectre de puissance dominé par les modes $g-m$. Pour cette raison, nous observons les conditions de détection des modes $p-m$ en plus de celles des modes $g-m$ sur la figure 6.8. Puisque la fréquence $\nu_{1,\mathrm{g},\max}$ n'est pas monotone, ce n'est pas un bon indicateur pour le suivi de l'étoile le long de son évolution : nous utilisons donc directement l'âge de l'étoile pour la suivre le long de son évolution sur la phase des SG. Les panneaux du haut de la figure 6.8 représentent l'amplitude de la signature magnétique sur les modes $\ell = 1, m = 1$ à dominance g de façon identique à la figure 6.6. Les panneaux du bas représentent les mêmes cartes de couleur que pour les modes à dominance acoustique. Les mêmes fréquences caractéristiques sont reportées, ainsi que la valeur estimée de l'amplitude du champ magnétique par conservation du flux depuis la fin de la séquence principale. Sur les panneaux du haut la valeur critique $B_{c,g}/1000$ n'est pas visible car elle est trop élevée par rapport à la plage de champ magnétique considérée : les informations représentées se situent donc bien dans le cadre de la validité de l'étude perturbative. Sur les panneaux du bas la valeur critique associée aux modes acoustiques $B_{c,p}/1000$ est représentée et délimite cette

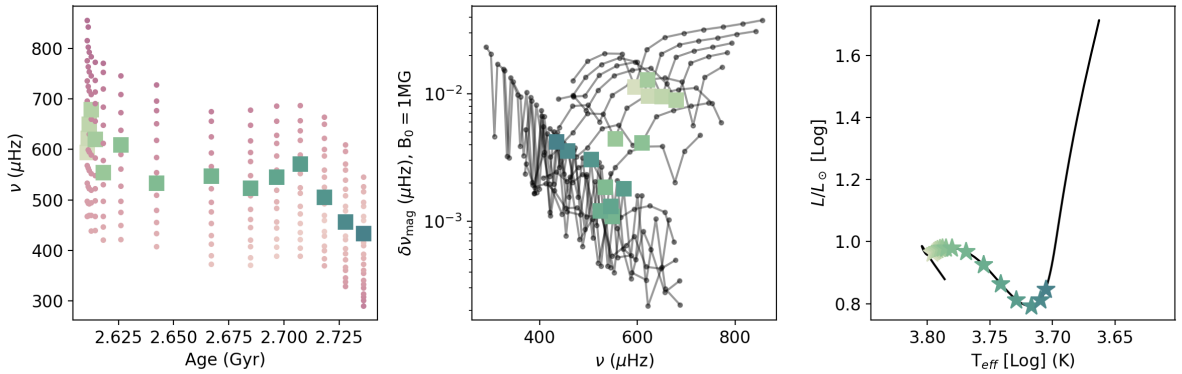


FIGURE 6.7: Sur le panneau de gauche sont représentées les fréquences des modes d'oscillation contenues dans l'intervalle [$\nu_{\max}$-7$\delta\nu$:$\nu_{\max}$+7$\delta\nu$] (points violets) pour des étoiles le long de leur évolution sur la phase des sous-géantes en fonction de leur âge, dont la position est référencée par le code de couleur dans le diagramme de Hertzsprung-Russell sur le panneau de droite. La variation de couleur des points violets indique la variation de l'ordre n_{pg} des modes. Les carrés verts indiquent pour chacune des étoiles la valeur de la fréquence $\nu_{1,\mathrm{g},\max}$. Sur le panneau central la perturbation magnétique (associée à une amplitude de champ de 1MG) observée pour les modes contenus dans l'intervalle [$\nu_{\max}$-7$\delta\nu$:$\nu_{\max}$+7$\delta\nu$] est représentée par les points noirs pour chacun des états évolutifs. Les carrés verts indiquent également la position du mode $g-m$ le plus proche de $\nu_{\max}$.

fois-ci la limite de validité de la théorie perturbative appliquée aux modes $p-m$. À partir de cette figure, nous tirons les conclusion suivantes :

Contrairement à l'évolution linéaire de l'amplitude des perturbations magnétiques durant la RGB, l'étape de sous-géante provoque des variations de la signature magnétique beaucoup moins régulières. Cette phase est le siège de transition entre un spectre de densité de puissance dominé par les modes à dominance acoustique et par les modes à dominance de gravité. Les signatures magnétiques aussi bien sur les modes $p-m$ que sur les modes $g-m$ sont très faibles pour une amplitude de champ ($B_0 \lesssim 5$MG) cohérente avec la conservation du flux magnétique depuis la fin de la séquence principale. La perturbation magnétique attendue a ainsi une amplitude plus faible que la résolution fréquentielle des données astérosismiques, ce qui empêche toute détection du magnétisme interne durant la phase des sous-géantes sous l'effet de telles amplitudes de champ interne.

6.3 Transport de moment cinétique associé au magnétisme interne

Le transport de moment cinétique entre deux régions d'un objet céleste est un phénomène dynamique clef pour le suivi de toute son évolution et de sa dynamique interne. Comprendre les mécanismes et la puissance du transport de moment dans les intérieurs stellaires est crucial pour une bonne interprétation des observations grâce aux modèles d'évolution stellaire. Actuellement, les contraintes observationnelles sur le transport de moment cinétique interne reposent sur la mesure des taux de rotation internes et de surface des étoiles. Durant la séquence principale, la mesure de la vitesse de rotation de surface de l'étoile freinée par le vent stellaire est directement corrélée à son âge (voir par exemple les travaux de Angus & Kipping (2016) sur la gyrochronologie). Cette rotation de surface peut être mesurée (entre autres) photométriquement en utilisant la périodicité des obscurcissements de luminosité de l'étoile par le passage de taches sombres magnétiques (e.g. García et al., 2014a; Mathur et al., 2014; Ceillier et al., 2017; Santos et al., 2019). En revanche, la mesure de la rotation moyenne de l'intérieur des étoiles est beaucoup plus difficile à obtenir puisqu'elle ne peut être mesurée directement. Par exemple dans le cas du Soleil, le taux de rotation des couches les plus profondes ($r \lesssim 0.25 R_\star$) ne peut être mesuré. Dans le cas des étoiles de type solaire plus évoluées en revanche,

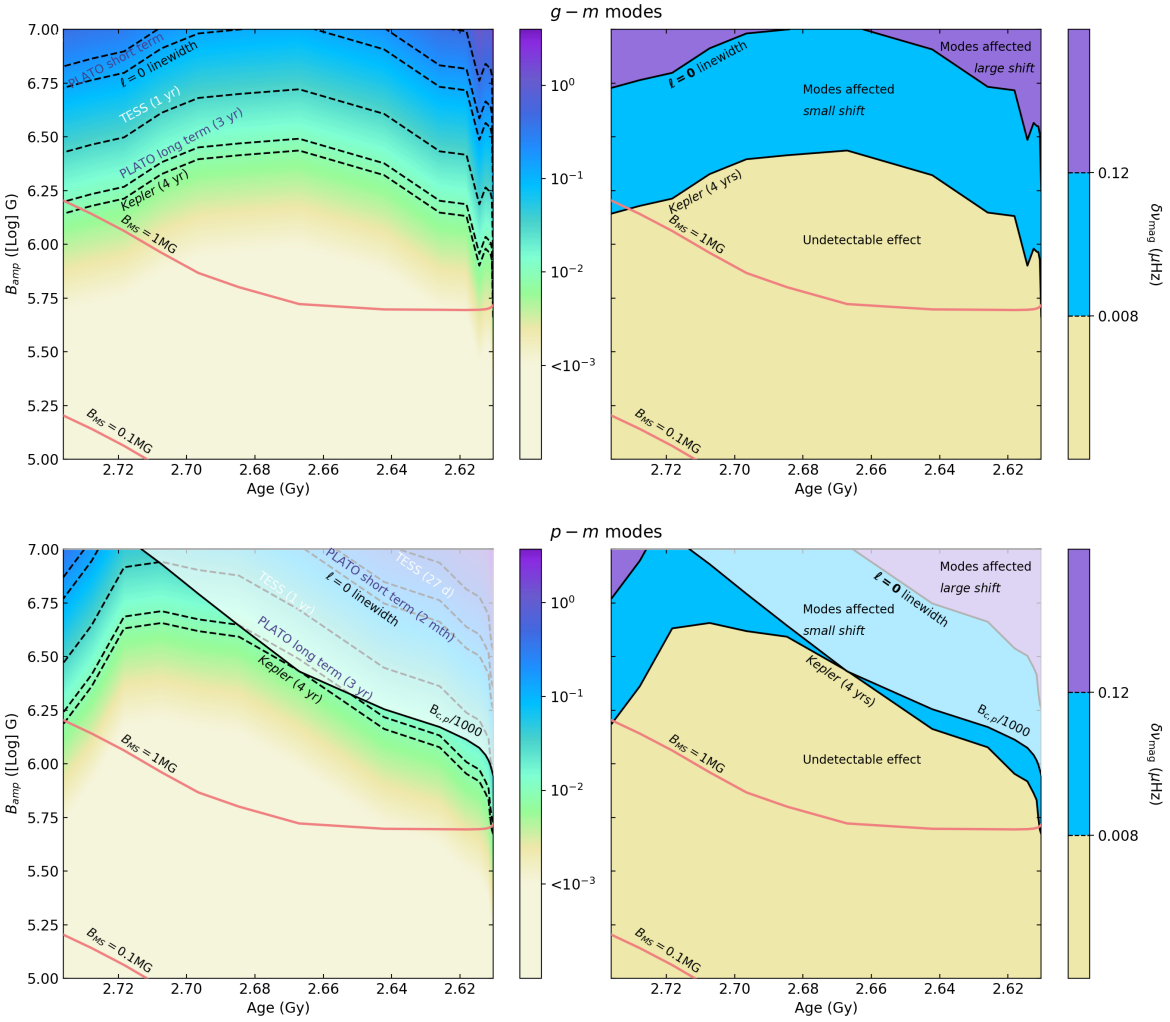


FIGURE 6.8: *Panneaux supérieurs :* Même légende que celle de la figure 6.6, pour des étoiles plus jeunes ($\nu_{\max} \gtrsim 350\mu$Hz) et l'abscisse changée en l'âge de l'étoile. *Panneaux inférieurs :* Même légende pour les modes $p-m$ au lieu des modes $g-m$.

la présence de puissance associée aux modes de gravité prenant place dans le cœur de ces étoiles rend possible une estimation de la vitesse de rotation de leur cœur (e.g. Beck et al., 2012). Sous l'effet de la contraction du cœur lors des phases de SG et de RG, et par un simple mécanisme de conservation du moment angulaire, la vitesse de rotation du cœur devrait être environ égale à 100 fois celle de l'enveloppe de l'étoile. Ce n'est pas l'ordre de grandeur observé ($\Omega_{\rm core}/\Omega_{\rm env} \simeq 1-10$), comme évoqué précédemment par les travaux de (Deheuvels et al., 2012; García et al., 2014a; Deheuvels et al., 2014; Mosser et al., 2014; Spada et al., 2016; Mosser et al., 2018; Gehan et al., 2018, Deheuvels et al., *accepted*). Ainsi, afin d'expliquer les observations, un processus doit transporter efficacement le moment cinétique depuis les profondeurs de l'étoile vers son enveloppe (Aerts et al., 2019).

Le magnétisme, bien connu pour rigidifier le profil de rotation de l'étoile le long des lignes poloïdales du champ magnétique, est l'un des candidats les plus sérieux pour répondre à ce problème (Ferraro, 1937; Mestel & Weiss, 1987; Charbonneau & MacGregor, 1993; Gough, 1993; Spruit, 1999; Mathis & Zahn, 2005), avec les ondes internes de gravité efficaces seulement durant la SG (Pinçon et al., 2017), les modes mixtes efficaces durant les phases avancées de la RGB (Belkacem et al., 2015a,b), et les instabilités hydrodynamiques (Barker et al., 2019). Nous recherchons donc l'impact de notre configuration mixte de champ magnétique confiné dans l'intérieur radiatif des étoiles sur le profil de rotation interne (e.g. Charbonneau & MacGregor, 1993;

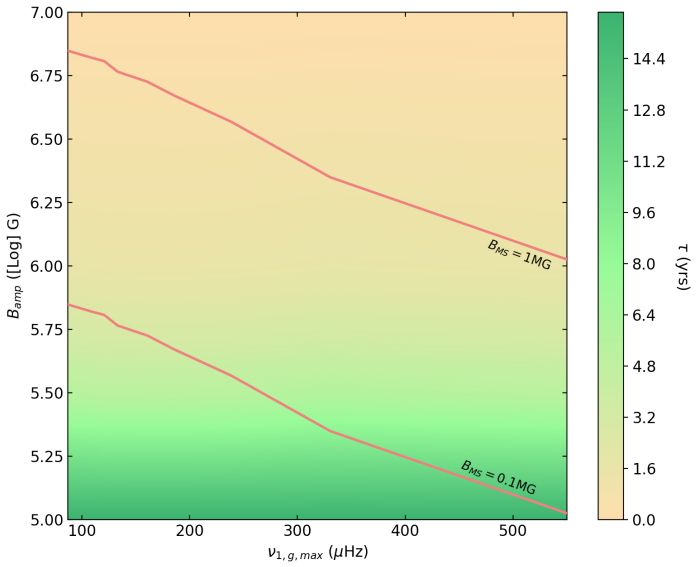


FIGURE 6.9: Temps caractéristique de transport du moment cinétique exprimé par l'équation 6.44 en fonction de la fréquence du mode $g-m$ central de l'étoile typique de $M = 1.5\mathrm{M}_{\odot}$, Z=0.02 sur la RGBet de l'amplitude du champ magnétique considéré. Les lignes rouges représentent ici encore l'amplitude de champ magnétique attendue par conservation du flux magnétique depuis la fin de la séquence principale.

Mathis & Zahn, 2005). Pour la configuration axisymétrique, et en suivant la méthodologie décrite par Mestel & Weiss (1987), la composante toroïdale du champ est maintenue par les courants poloidaux :

$$\boldsymbol{j_p} = \frac{1}{4\pi r}\boldsymbol{\nabla}(rB_{\varphi}\boldsymbol{e_{\varphi}}) \wedge \boldsymbol{e_{\varphi}}. \tag{6.39}$$

L'équation de l'induction selon la composante toroïdale s'écrit comme (voir également équation 2.18 du chapitre 2) :

$$\frac{\partial B_{\varphi}}{\partial t} = r(\boldsymbol{B_p}.\boldsymbol{\nabla})\Omega. \tag{6.40}$$

Le profil de rotation varie alors dans le temps selon l'équation du transport de moment cinétique :

$$\rho r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B_p}.\boldsymbol{\nabla}(rB_{\varphi}). \tag{6.41}$$

En considérant le temps caractéristique des variations ohmiques du champ poloïdal comme étant bien supérieur au temps de variation de la rotation différentielle, l'équation du moment se réécrit comme

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi\rho r^2}\boldsymbol{B_p}.\boldsymbol{\nabla}\left(r^2\boldsymbol{B_p}.\boldsymbol{\nabla}\right)\Omega. \tag{6.42}$$

Ce sont donc les ondes d'Alfvén se propageant à la vitesse $v_{A,\mathrm{polo}}$ définie par l'équation $v_{A,\mathrm{polo}} = \frac{\boldsymbol{B_p}^2}{4\pi\rho}$ qui transportent le moment cinétique dans l'étoile le long des lignes du champ poloïdal. Ainsi, si la distance caractéristique de variation de Ω le long des lignes de champ poloïdales $\boldsymbol{B_p}$ (coordonnée dénotée s) est petite par rapport au rayon occupé par la ligne de champ (r), l'équation 6.42 se simplifie comme :

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = \frac{\boldsymbol{B_p}^2}{4\pi\rho}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial s^2}. \tag{6.43}$$

Nous retrouvons alors l'état d'isorotation de long des lignes du champ poloïdal de Ferraro (Ferraro, 1937) décrit au chapitre 2. Comme les lignes de champ poloïdales s'étendent sur tout le rayon radiatif interne,

l'intérieur radiatif est en première approximation en rotation solide. Comme $\boldsymbol{B_p}$ est de l'ordre de grandeur de B_0 dans notre étude, et comme le champ magnétique occupe tout l'espace de l'intérieur radiatif mesuré par son rayon $R_{\rm rad}$, le temps caractéristique pour transporter efficacement le moment cinétique dans l'intérieur radiatif est donné par l'équation 6.43 et est égal au temps d'Alfvén :

$$\tau = \frac{R_{\rm rad}}{v_A}, \tag{6.44}$$

avec v_A la vitesse d'Alfven définie par l'équation 6.19. Comme intuité par Ferraro (1937); Mestel (1953); Mestel & Weiss (1987), ce temps caractéristique pour aplatir le profil de rotation interne est très court.

La figure 6.9 représente l'évaluation du temps τ pour l'étoile $M_\star = 1.5{\rm M}_\odot$, Z=0.02 le long de la RGB en fonction de $\nu_{1,{\rm g},\max}$ et de l'amplitude du champ magnétique. Au vu de l'expression 6.44, plus l'amplitude du champ est élevée, plus le transport de moment cinétique par le magnétisme est efficace. En revanche, nous n'observons pas d'impact réel de la fréquence des modes d'oscillation (et donc de l'état évolutif de l'étoile durant la RGB) sur le temps caractéristique τ.

Finalement, quelle que soit la configuration (B_0, $\nu_{1,{\rm g},\max}$) sur la figure 6.9, le temps caractéristique de transport par le magnétisme est de l'ordre de l'année, extrêmement court par rapport à la durée de vie de l'étoile sur la RGB. Ainsi, si un tel champ fossile est présent dans l'intérieur radiatif des géantes rouges, il aplatit alors un faible profil de rotation le long des lignes du champ poloïdal quasi-instantanément (en regard du temps d'évolution séculaire de l'étoile). Cela permettrait alors d'expliquer la très faible rotation différentielle observée dans les étoiles de type solaire évoluées.

Ce résultat est également valable pour les étoiles sur la phase des sous-géantes. Nous nous référons à la publication (Bugnet et al., accepted with moderate revision) reportée à la fin de ce chapitre pour plus de détails.

Ce processus de transport par le magnétisme est même potentiellement trop efficace pour expliquer les observations. Nous modérons alors les résultats obtenus :

- Le scénario d'un champ magnétique isolé dans l'intérieur radiatif de l'étoile consiste cependant en une forte approximation, qui doit être discutée. Gough & McIntyre (1998) proposent qu'un champ primordial dans l'intérieur radiatif du Soleil maintient la finesse de la tachocline (voir aussi Rüdiger & Kitchatinov, 1997; Barnes et al., 1999). La présence d'un tel champ confiné peut expliquer la rotation quasi-uniforme observée dans les couches externes de l'intérieur radiatif. Cependant, Strugarek et al. (2011) montrent qu'un champ magnétique initialement confiné diffuse vers l'enveloppe de façon ohmique, ce qui peut permettre une reconnexion magnétique avec le champ dynamo de l'enveloppe et une pénétration de sa rotation différentielle dans l'enveloppe le long de l'axe de rotation. Du fait de la loi d'iso-rotation de Ferraro, la rotation différentielle latitudinale de l'enveloppe pourrait alors se transmettre dans l'intérieur radiatif. Cet ajout de rotation différentielle pourrait contrebalancer l'aplatissement du profil de rotation latitudinal par le magnétisme interne. Un tel phénomène pouvant prendre place dans les étoiles de type solaire évoluées n'est cependant pas observé dans le Soleil. Garaud & Garaud (2008) et Acevedo-Arreguin et al. (2013) montrent que, pour confiner un champ dans une zone radiative, des mouvements radiaux au niveau de la tachocline en provenance de l'enveloppe convective doivent jouer, ce qui est cohérent avec les modèles de tachocline proposés par Gough & McIntyre (1998). Ainsi, la question du confinement du champ magnétique interne dans les intérieurs radiatifs est encore débattue. Si le champ (en supposant qu'il existe) se reconnecte avec le champ de surface, une rotation différentielle latitudinale pourrait prendre place dans la zone radiative malgré la présence du champ magnétique (le gradient de rotation radial reste malgré tout amorti).
- Si la rotation différentielle dans l'étoile est très forte, l'instabilité de Tayler (Tayler, 1973) décrite au chapitre 2 se déclenche et peut conduire à la déstabilisation et à la destruction du champ fossile. Cette

potentielle destruction du champ fossile n'est pas considérée ici, mais elle sera examinée en détails dans nos travaux futurs.

6.4 Dépendance de la signature magnétique aux paramètres stellaires

Dans les sections précédentes, nous présentons les résultats obtenus pour une étoile typique de $M_\star = 1.5\mathrm{M}_\odot$ et Z=0.02. Cependant, nous savons par les modèles d'évolution et par la théorie que les étoiles les plus massives évoluent sur des temps beaucoup plus courts que les étoiles de faibles masses (voir par exemple la figure 2.9). Nous savons également que les étoiles les plus métalliques vivent plus longtemps. Dans cette section, nous évaluons donc l'impact de la masse et de la métallicité de l'étoile sur les perturbations fréquentielles attendues par un magnétisme interne. Sur les panneaux de droite des figures 6.10 et 6.11, nous suivons l'évolution de la perturbation magnétique pour des étoiles de différentes masses ($M_\star \in [1, 1.5, 2, 3]\mathrm{M}_\odot$) et différentes métallicités (Z$\in [0.0002, 0.002, 0.02, 0.04]$). Les panneaux de gauche représentent la perturbation magnétique sur les fréquences des modes $\ell = 1$ $g-m$ centraux en fonction de l'âge de l'étoile. La même grandeur est représentée en fonction de la fréquence $\nu_{1,\mathrm{g},\mathrm{max}}$ sur les panneaux centraux.

6.4.1 Dépendance de la signature magnétique à la masse de l'étoile

Le panneau de gauche de la figure 6.10 indique pour chacun des états évolutifs reportés sur le panneau de droite l'amplitude de la perturbation magnétique en fonction de l'âge des étoiles de différentes masses. Cette perturbation est également reportée en fonction de la fréquence caractéristique des modes $\nu_{1,g,\mathrm{max}}$ sur le panneau central. Nous observons ainsi que les étoiles les moins massives mettent plus de temps à évoluer, comme déjà établi dans le chapitre 2. Nous remarquons également que lorsqu'une étoile peu massive passe de la phase des SG à la RGB, la fréquence caractéristique de ses modes d'oscillation est plus élevée que lorsqu'une étoile plus massive franchit cette même limite. Nous interprétons cela par le fait que les fréquences propres des modes dépendent de la taille de la cavité dans laquelle ils résonnent. Les modes d'une étoile massive sont donc en toute logique à plus basses fréquences que ceux d'une étoile moins massive pour un même état évolutif.

6.4.2 Dépendance de la signature magnétique à la métallicité de l'étoile

Sur la figure 6.11, les trois mêmes panneaux que ceux de la figure 6.10 sont utilisés pour observer la dépendance de la signature magnétique à la métallicité de l'étoile. Comme indiqué dans la section 2.1.9 du chapitre 2, les étoiles les plus métalliques évoluent le plus lentement (voir panneau de gauche de la figure 6.11). Par le même raisonnement que dans le cas de la dépendance en masse, les étoiles les moins métalliques passent de la phase des SG à la RGB à des fréquences plus basses que les étoiles métalliques de par la grande taille des cavités de résonance des modes. Ainsi, des étoiles de métallicités différentes peuvent avoir des signatures magnétiques d'amplitudes différentes sur leurs fréquences propres.

En conséquence, des étoiles de masses et de métallicités différentes peuvent présenter des signatures sismiques d'amplitudes très différentes pour une même fréquence de mode mixte, selon si leur transition SG/RG se fait à plus haute ou bien à plus basse fréquence que la fréquence du mode observé. Il est donc très important de bien caractériser au préalable les étoiles candidates pour la détection de magnétisme interne, par exemple par la mesure de leurs paramètres globaux. Nous renvoyons ainsi à la première partie de ce manuscrit et aux méthodologies de classification et de caractérisation des étoiles proposées.

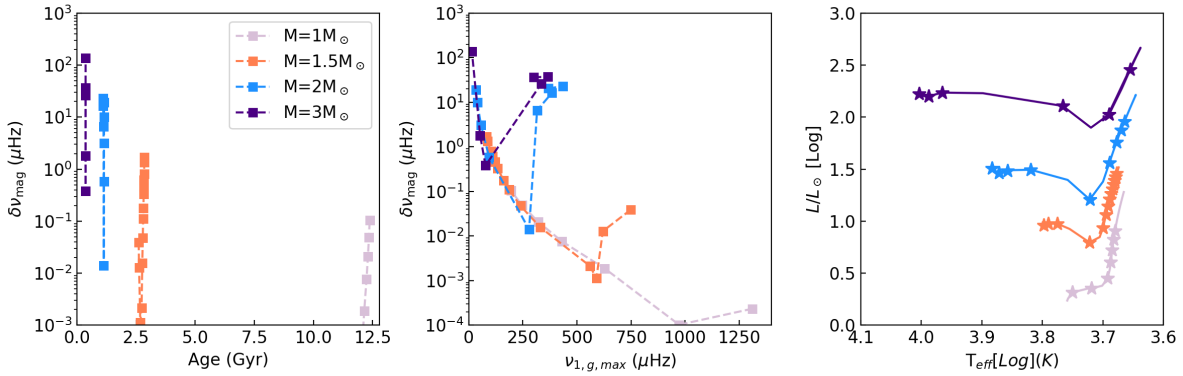


FIGURE 6.10: *Gauche :* Fréquences des modes mixtes calculées au niveau de la fréquence centrale des modes $g-m$ ($\nu_{1,\mathrm{g,max}}$) en fonction de l'âge de l'étoile et de sa masse. Les différents états évolutifs sont reportés dans le diagramme de Hertzsprung-Russell sur le panneau de droite pour des étoiles de masse $M_\star \in [1, 1.5, 2, 3]\mathrm{M}_\odot$ et Z=0.02. *Centre :* Perturbation magnétique associées à un champ d'amplitude 1MG sur les fréquences des modes mixtes calculées à ($\nu_{1,\mathrm{g,max}}$) durant la RGB. *Droite :* Diagramme de Hertzsprung-Russell indiquant la position des différents états évolutifs étudiés sur les deux autres panneaux.

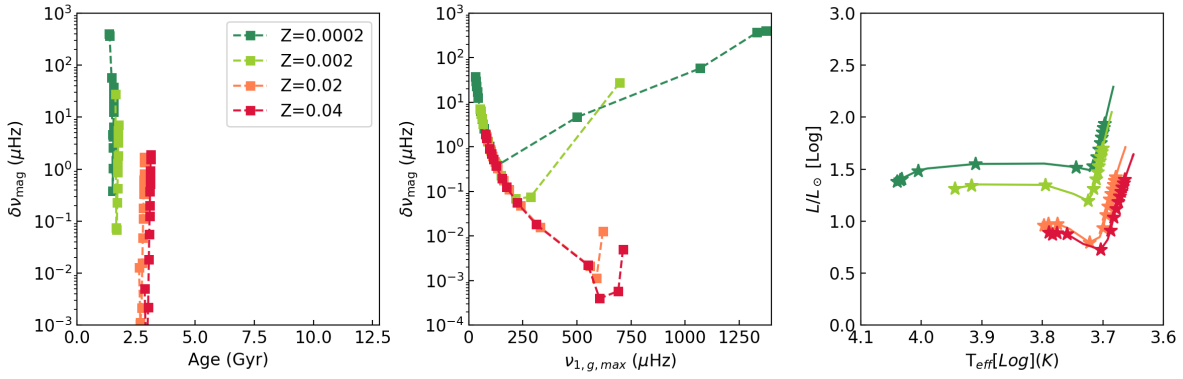


FIGURE 6.11: Même légende que pour la figure 6.10 mais pour des paramètres stellaires $M_\star = 1.5\mathrm{M}_\odot$ Z$\in [0.04, 0.02, 0.002, 0.0002]$ permettant de visualiser l'effet de la métallicité.

6.5 Discussion sur les amplitudes des modes

Le mécanisme de piégeage des modes de gravité magnétisés dans le cœur de l'étoile proposé par Fuller et al. (2015) permet de transférer la totalité de l'énergie des modes de gravité en modes d'Alfvén, qui se retrouve alors piégée dans le cœur de l'étoile par « effet de serre magnétique ». Ce mécanisme est total et affecte tous les ordres $\ell = 1$ des modes. Le mode d'oscillation résultant est alors purement acoustique et de très faible amplitude par rapport à l'amplitude attendue des modes mixtes. L'étude analytique de Lecoanet et al. (2017) vient en renfort pour valider cette théorie de conversion des modes de gravité en ondes d'Alfvén.

Mosser et al. (2017) recherchent alors la nature des modes observés dans les régions affectées par un processus interne aboutissant à leur faible amplitude. Cette étude montre que la signature des oscillations reste mixte, et non pas purement acoustique. Cela exclut la possibilité que le mécanisme d'effet de serre magnétique tel que proposé par Fuller et al. (2015) soit la clef pour la compréhension de ces étoiles. En revanche, un mécanisme très proche n'aboutissant pas à la totale conversion des modes de gravité mais seulement à une diminution partielle de leur puissance pourrait jouer. Cette idée en provenance de Loi & Papaloizou (2020) permet de voir que certaines conditions physiques peuvent entraîner la diminution (non totale) de l'amplitude des modes g sans pour autant les faire disparaître. Les auteurs soutiennent que les modes de gravité peuvent interagir

de différentes façons avec un champ magnétique, selon son amplitude et sa configuration, ainsi que selon la structure et composition de l'étoile. Cette étude modère donc celle de Fuller et al. (2015), permettant toujours de rechercher un argument magnétique pour la diminution de l'amplitude des modes d'oscillation.

Ce sujet étant très controversé, nous proposons une comparaison objective de l'amplitude du champ magnétique qui serait nécessaire pour que le mécanisme de diminution de l'amplitude des modes par effet de serre magnétique soit efficace (en suivant Fuller et al. (2015)) avec le champ minimal estimé dans notre étude nécessaire pour que son effet sur les fréquences des modes mixtes soit visible dans les données. En effet, l'étude de la perturbation liée au magnétisme sur les fréquences des modes est absente de l'étude de Fuller et al. (2015)[4].

Le champ critique associé à la suppression de l'amplitude des modes par le mécanisme de Fuller et al. (2015) est donné par l'expression 3.112 dans le chapitre 3. Nous fixons la plage du champ critique pour la détectabilité de la perturbation fréquentielle entre la résolution fréquentielle des données utilisées (nous utiliserons les données du satellite *Kepler* pour cet exemple) et la largeur typique des modes radiaux indiqués sur les panneaux de gauche de la figure 6.12. Sur cette figure, nous comparons alors les deux champs critiques aux stades évolutifs $\nu_{\max} = 150\mu$Hz (géante rouge évoluée) et $\nu_{\max} = 425\mu$Hz (jeune géante rouge).

Les panneaux de gauche sont identiques au panneau de droite de la figure 6.6, et les panneaux de droite reportent la figure de l'article de Fuller et al. (2015), représentant l'amplitude du champ critique associé à la suppression des modes en fonction de la fréquence du mode. La comparaison entre les deux champs critiques sur les panneaux en haut est réalisée pour une géante rouge évoluée de $\nu_{\max} \simeq 150\mu$Hz. Nous observons que les champs critiques associés à la suppression et à la perturbation fréquentielle sont du même ordre de grandeur. La comparaison du bas est réalisée pour une jeune géante rouge de $\nu_{\max} \simeq 425\mu$Hz. Cette fois, les champs nécessaires pour une perturbation fréquentielle détectable sont d'amplitudes inférieures à la valeur critique nécessaire pour la suppression des modes.

Nous remarquons ainsi que lorsque l'étoile est jeune, l'amplitude de champ nécessaire pour une détection dans les données (de *Kepler* ici) est bien plus faible que celle du champ associé à une suppression totale de l'amplitude des modes. Cela signifie que pour une étoile jeune, une signature magnétique sur les fréquences pourrait être observée sans suppression totale de l'amplitude des modes d'oscillation mixtes. Lorsque l'étoile évolue en revanche, les deux champs critiques se rapprochent : dans ce cas nous ne pouvons confirmer qu'une détection de la signature magnétique sur les fréquences des modes soit possible à cause de la potentielle faible amplitude des modes d'oscillation.

La table 6.1 contient les deux valeurs critiques de champ attendues associées à différents états évolutifs et pour différentes observations (associées à différentes résolutions fréquentielles). Nous observons cette fois-ci encore que, lorsque l'étoile évolue, elle est plus susceptible de perdre l'amplitude de ses oscillations dipolaires avant que la signature du magnétisme interne ne soit visible sur les fréquences.

4. Cantiello et al. (2016) proposent tout de même une estimation simplifiée de l'amplitude moyenne de la perturbation des fréquences des modes pour une géante rouge étudiée par Fuller et al. (2015), et montrent que pour cette étoile en particulier la perturbation fréquentielle doit être de l'ordre de l'espacement en période des modes g.

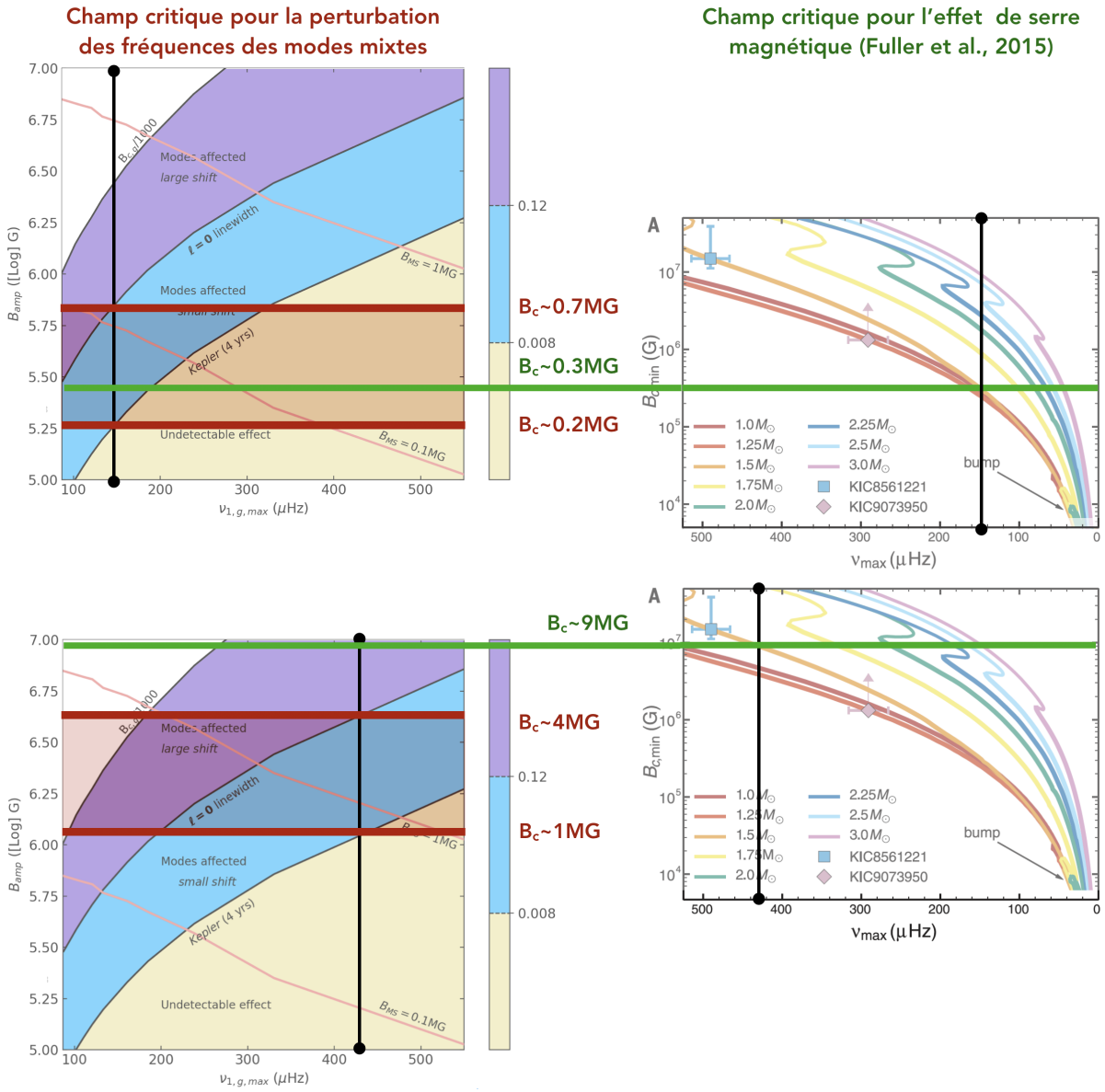


FIGURE 6.12: Comparaison des champs critiques associés à l'effet de serre magnétique (mécanisme de Fuller et al., 2015) et à la détection des perturbations magnétiques dans les données de *Kepler*. *Haut :* comparaison pour une géante rouge de $M = 1.5\mathrm{M}_\odot$ et $\nu_{\max}= 150\mu$Hz. *Bas :* Même légende que sur le panneau du haut pour $\nu_{\max}= 425\mu$Hz. Crédit (figures de droite) : Fuller et al. (2015).

6.6 Ouverture sur la classification observationelle automatique des étoiles présentant des modes mixtes de faibles amplitudes

Dans cette dernière section, nous présentons les résultats de récents travaux menés en collaboration active avec Arthur Le Saux, étudiant en doctorat à l'Université d'Exeter. Nous nous intéressons à la détection automatique des étoiles présentant des modes d'oscillation d'amplitudes anormalement basses dans les régions habituellement peuplées par des modes mixtes (modes dipolaires et/ou quadripolaires), car celles pour lesquelles de la puissance est encore présente bien qu'affaiblie sont candidates pour la détection de signatures magnétiques.

Les étoiles présentant ces modes d'oscillation de faibles amplitudes sont usuellement détectées par le calcul de la visibilité des modes (voir la section 3.5.1.2 Kjeldsen et al., 2008; Michel et al., 2009), qui est une mesure du

TABLE 6.1: Comparaison entre le champ critique $B_{c,\mathrm{low-amplitude}}$ associé à la suppression de l'amplitude des modes mixtes (Fuller et al., 2015) et le champ magnétique minimal pour une signature observable dans les données comme décrit dans la section 6.2.3.

Instrument	Durée (années)	$M_\star$	$\nu_{\max}(\mu\mathrm{Hz})$	$B_{\min}$ (MG)	$B_{c,\mathrm{low-amplitude}}$ (MG)
Kepler	4	1.5	300	0.50	3
Kepler	4	1.5	200	0.25	1
Kepler	4	1.5	100	0.10	0.1
PLATO	3	1.5	300	0.6	3
PLATO	3	1.5	200	0.35	1
PLATO	3	1.5	100	0.11	0.1
TESS	1	1.5	300	1.2	3
TESS	1	1.5	200	0.55	1
TESS	1	1.5	100	0.20	0.1

ratio d'énergie contenue dans les modes d'ordre ℓ par rapport à l'énergie contenue dans les modes $\ell = 0$. Pour mener à bien cette détection, il est tout d'abord nécessaire de connaître la fréquence des modes acoustiques de différents degrés ℓ. Ces positions sont données automatiquement par le motif universel des oscillations des géantes rouges par Mosser et al. (2011), qui repose sur la paramétrisation de Tassoul (1980) comme décrite par l'équation 3.57. Cette relation peut être réécrite comme :

$$\frac{\nu_{n,\ell}}{\Delta\nu} = n + \varepsilon(\Delta\nu) + \frac{\ell}{2} - d_{0,\ell}(\Delta\nu) + \frac{\alpha_\ell(\Delta\nu)}{2}\left(n - \frac{\nu_{\max}}{\Delta\nu}\right)^2, \tag{6.45}$$

permettant d'identifier les modes d'ordre ℓ peuvent par l'ajustement des paramètres constituant ce motif fréquentiel. $\alpha_\ell(\Delta\nu) = (\mathrm{d}\log\Delta\nu/\mathrm{d}n)_\ell$ est le gradient exprimant la dépendance linéaire de la grande séparation à la fréquence. Nous référons au chapitre 3 pour la définition des autres grandeurs composant cette équation. L'ajustement des différents paramètres composant cette équation permet de connaître la fréquence des modes d'oscillation grâce à l'estimation des paramètres astérosismiques globaux. Les motifs verticaux correspondant aux modes $\ell = 0$ et $\ell = 2$ dans le diagramme échelle observé sur la figure 6.13 sont ajustés, et permettent d'obtenir une première estimation de la localisation des modes radiaux et quadripolaires, ainsi que l'estimation de ε. Par la suite, les plages de fréquences contenant les différents ordres de mode sont evaluées en utilisant les limites fréquentielles associées aux différents modes proposées par Stello et al. (2016a) :

- $\varepsilon - 0.06 < (\nu/\Delta\nu \mod 1) < \varepsilon + 0.10$ pour $\ell = 0$,
- $\varepsilon + 0.25 < (\nu/\Delta\nu \mod 1) < \varepsilon + 0.78$ pour $\ell = 1$,
- $\varepsilon - 0.22 < (\nu/\Delta\nu \mod 1) < \varepsilon - 0.06$ pour $\ell = 2$.

Grâce à la reproduction de ces méthodologies, nous sommes alors en mesure d'évaluer les amplitudes respectives des modes d'oscillation contenues dans chacune des plages délimitées, via la mesure de la visibilité des modes (voir équation 3.111 définie dans le chapitre 3).

Finalement, les visibilités des modes $\ell = 1$ (et également $\ell = 2$) sont calculées, et permettent la construction de la Figure 1.9 présentée dans l'introduction de ce manuscrit. Nous remarquons deux groupes rassemblant les étoiles pour deux valeurs caractéristiques de visibilité globale des modes $\ell = 1$: les étoiles présentant des amplitudes de mode dipolaires normales (représentées en rouge sur la figure 1.9) ont une visibilité d'environ 1.5, alors que les étoiles présentant des faibles amplitudes d'oscillation (représentées en bleu sur la figure 1.9) ont une visibilité plus basse autour de 0.5. Cette méthode de distinction des étoiles présentant différentes amplitudes est en revanche globale : elle ne permet qu'une évaluation de l'amplitude moyennée des modes ℓ sur tous les ordres radiaux n en même temps. Nous savons en revanche que certaines étoiles présentent des modes d'oscillation d'amplitude normale à hautes fréquences, tandis que les amplitudes de leurs modes $\ell = 1$ sont fortement diminuées à basses fréquences (en dessous de $\nu_{\max}$, García et al., 2014b). D'autres combinaisons des amplitudes des modes d'oscillation dans les spectres de puissance non identifiées aujourd'hui pourraient être la signature de processus physiques dans les étoiles. La présence d'étoiles dans le diagramme de la figure 1.9 entre les deux comportements $V^2 = 1.5$ et $V^2 = 0.5$ peut indiquer la présence de nouvelles amplitudes caractéristiques, ou bien simplement être due au fait qu'une légère déviation dans l'estimation des plages sur

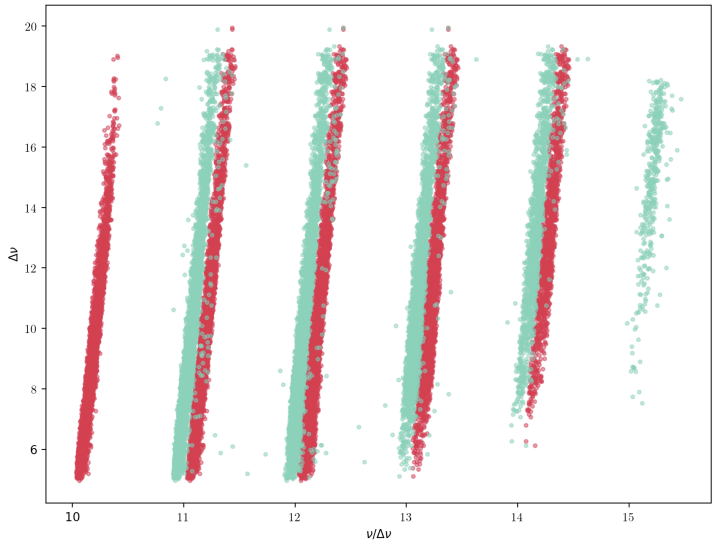


FIGURE 6.13: Reproduction de l'observation de Mosser et al. (2011) sur l'alignement des fréquences des modes d'oscillation dans les diagrammes représentant $\Delta\nu$ en fonction de $\nu/\Delta\nu$ pour un échantillon de ~ 3200 étoiles observés par *Kepler*. Les points rouges sont ajustés comme des modes $\ell = 0$, tandis que les points turquoises indiquent les fréquences ajustées pour les modes $\ell = 2$.

lesquelles les amplitudes sont calculées provoque de fortes erreurs dans l'estimation des visibilités. Dans tous les cas, nous pensons judicieux d'avoir à disposition une seconde méthode indépendante et complémentaire pour détecter les anomalies d'amplitudes dans les spectres de puissance.

6.6.1 Principe de la méthode

Sonder les amplitudes des modes par l'intensité dans les diagrammes échelles

La méthode des visibilités pour la détection des différentes amplitudes des modes dipolaires et quadripolaires consiste à calculer la puissance moyennée sur les différents ordres. Dans un diagramme échelle, cela revient à intégrer la zone correspondante, qui se trouve être la zone verte pour les modes $\ell = 1$ sur les panneaux du haut de la figure 6.15. En revanche, l'intégration de cette zone en entier ne permet pas d'obtenir d'informations sur la distribution des amplitudes des modes selon leur ordre radial, alors que cette information est visible sur le diagramme échelle en lui-même. Nous choisissons donc de travailler sur la détection des amplitudes directement dans les diagrammes échelle en deux dimensions plutôt que de réduire les données à une valeur de visibilité.

Principe général de la méthode de classification : réseau de neurones de convolution

Dans la première partie de ce manuscrit, nous utilisons des algorithmes de Forets Aléatoires pour l'estimation des paramètres stellaires et la classification des étoiles. Cette méthode repose sur la connaissance préalable de paramètres caractérisant l'étoile, comme la température effective ou bien les paramètres FliPer définis au chapitre 4. Nous aurions pu choisir d'utiliser les valeurs des visibilités comme paramètres pour l'utilisation d'un algorithme similaire. Cependant, nous souhaitons une méthode indépendante des visibilités pour classifier les différents comportements d'amplitude des modes d'oscillation. Nous ne disposons donc pas de beaucoup de paramètres pour la classification des amplitudes, et nous nous dirigeons vers un type d'intelligence artificiel moins guidée : les réseaux de neurones à convolution (CNN) (Krizhevsky et al., 2012).

Un tel algorithme fait partie de la catégorie des algorithmes d'intelligence artificielle « profonds » (ou « deep learning »). La spécificité des CNN est une très bonne identification des différents objets présents sur les images. Hon et al. (2018b,a) est un des premier à utiliser efficacement un réseau de neurones convolutif pour

la caractérisation des oscillations des étoiles de type solaire. La totalité des diagrammes échelle des étoiles sont transformée en imagettes, que l'algorithme utilise pour détecter la région contenant les modes d'oscillation et donc en déduire le paramètre global $\nu_{\max}$. Les auteurs ont choisi de développer par eux-même un nouveau réseau de convolution pour cet effet. Cependant, le développement d'un réseau fonctionnel prend beaucoup de temps, car l'obtention de bons résultats n'est pas une science exacte en terme de nombre de convolutions successives, de taille des filtres de convolution, etc. Notre problématique se résume à la problématique de classification d'images (celles qui possèdent de l'amplitude dans les régions $\ell = 1$ et celles qui n'en possèdent pas), un problème partagé par toutes les communautés scientifiques, depuis la recherche de cellules cancéreuses dans les images médicales, jusqu'à la détection et l'identification des animaux sauvages dans des images prises automatiquement dans les réserves. De nombreux experts en intelligence artificielle profonde se sont concentrés sur cette problématique, et nombre de leurs algorithmes fonctionnels sont mis à disposition. La librairie Python « TensorFlow » très utilisée pour l'intelligence artificielle en astrophysique avec Python comprend par exemple l'algorithme « Inception » Szegedy et al. (2015, 2017), déjà entrainé pour la classification de différents types d'images (objets, animaux, etc.). Nous choisissons donc d'utiliser cet algorithme très bien construit et entraîné pour notre classification. Cependant, il n'a évidemment pas été bien entraîné à identifier les étoiles présentant des modes de faibles amplitudes. En revanche, bien que l'algorithme ne puisse pas associer une classe par lui-même sur chaque étoile, il fournit tout de même une vectorisation des images, en sortie de l'avant dernière couche de neurones. Si deux images sont identiques, leur vecteurs associés par Inception le sont également. Ainsi, en comparant les distances entre deux vecteurs, nous obtenons une information sur la similarité des images. La similarité entre deux images est donc estimée par la mesure de l'angle entre leurs deux vecteurs respectifs, ($\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ estimés par Inception, méthodologie dénommée Approximate Nearest Neighbors Oh Yeah par Bernhardsson, E. : `https://github.com/spotify/annoy`), dont le cosinus s'approche de 1 pour deux images identiques, et de -1 pour deux images opposées :

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{U}.\boldsymbol{V}}{||\boldsymbol{U}||.||\boldsymbol{V}||} \tag{6.46}$$

6.6.2 Construction des imagettes

Afin de construire des diagrammes échelles pour leur classification, nous établissons le protocole suivant :

- Le background est ajusté au spectre d'oscillation de l'étoile par l'utilisation de deux profils de Harvey et de la valeur du bruit de photon définis dans le chapitre 4 sur la figure 4.2. Cette courbe est ensuite soustraite au spectre de densité de puissance de l'étoile.
- Une gaussienne est également ajustée dans la région des modes d'oscillation : la largeur à mi-hauteur de cette gaussienne est donnée par FWHM $= 0.59 * \nu_{\max}^{0.9}$ et l'amplitude typique est fixée à 3.5 fois la valeur du backgound convectif à $\nu_{\max}$, comme évalué en moyenne par Mosser et al. (2012a). Cette manipulation des données permet de restaurer les amplitudes attendues dans la PSD en l'absence de fenêtrage des modes d'oscillation autour de $\nu_{\max}$, pour rendre visible les modes les plus éloignés de $\nu_{\max}$ dans les diagrammes échelles. La figure 6.14 montre pour une géante rouge typique la transformation des données.
- Le spectre est centré sur $\nu_{\max}$ et réduit à l'intervalle $[\nu_{\max}-3\nu : \nu_{\max}+3\Delta\nu]$. Les signaux d'amplitude inférieure à 8 fois le background [5] sont ensuite retirés des données, car considérés comme non significatifs (et donc associés au bruit de photon du détecteur).
- Ensuite, le spectre centré autour des modes d'oscillation dans la plage $[\nu_{\max}-3\nu : \nu_{\max}+3\Delta\nu]$ est converti en diagramme échelle grâce à l'estimation de $\nu_{\max}$ et de $\Delta\nu$ par A2Z (Mathur et al., 2010). Le diagramme échelle est construit en utilisant la fréquence des modes modulo $\Delta\nu$, mais ne possède par de contrainte sur la phase. Nous choisissons de fixer la position du $l = 0$ central de sorte que le diagramme échelle soit toujours dans la même configuration que sur la figure 6.15, avec les composantes $\ell = 2$ et $\ell = 0$ à gauche de la composante $\ell = 1$.

5. Cette valeur de 8 fois le background convectif est communément utilisée pour la détection de signaux significatif dans les PSD, elle correspond à un indice de confiance de la détection parmi le bruit à environ 98% (voir par exemple Mosser et al., 2017).

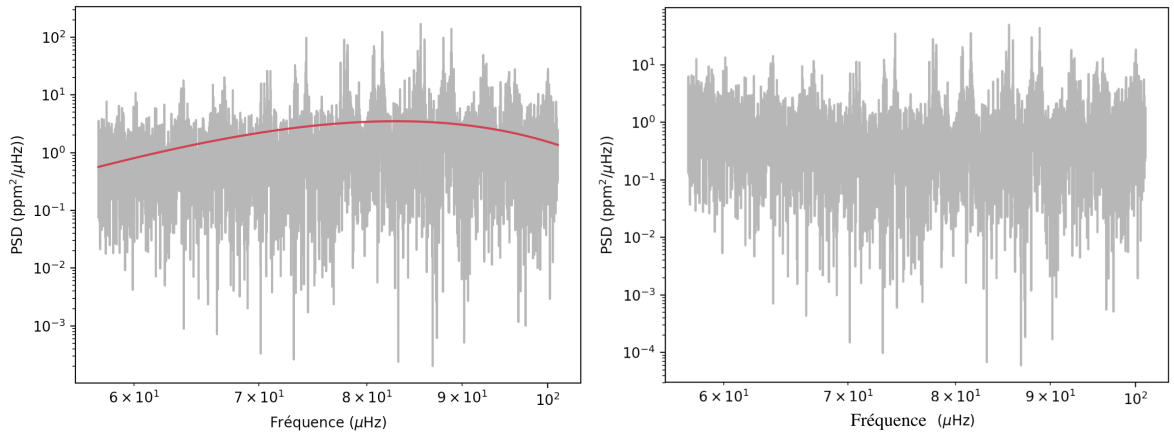


FIGURE 6.14: PSD centrées autour des modes d'oscillation d'une géante rouge caractéristique. *Gauche :* la PSD à laquelle le background et le bruit de photon ont été soustraits. La courbe rouge indique la gaussienne utilisée pour renormaliser l'amplitude des modes. *Droite :* PSD normalisée par la gaussienne définie sur le panneau de gauche.

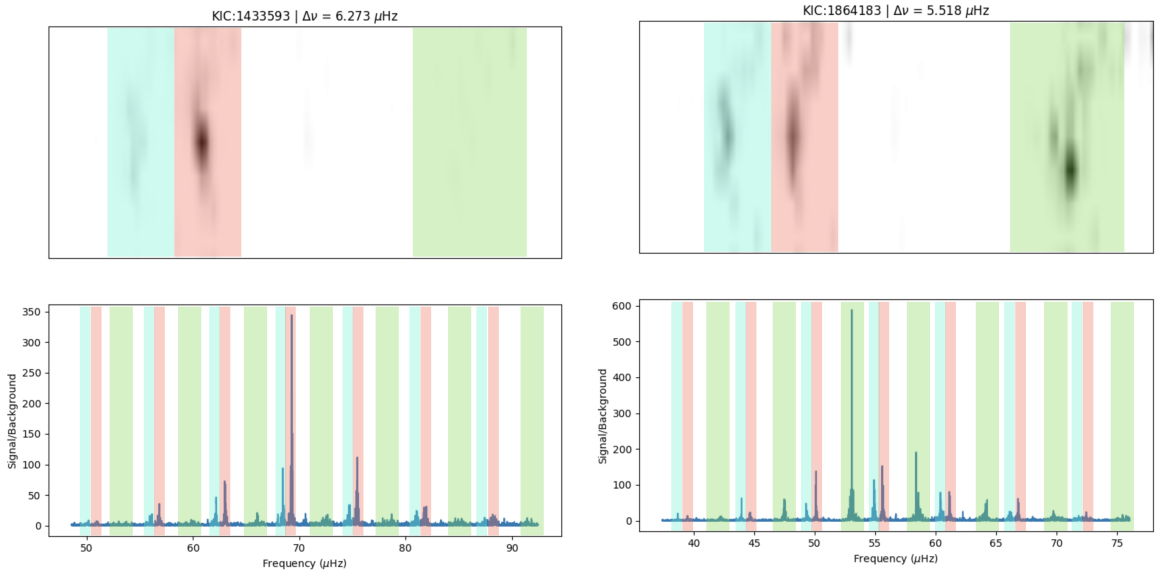


FIGURE 6.15: Diagrammes échelle et PSD normalisée centrés autour des modes d'oscillation pour deux étoiles : KIC 1433593 à gauche est une étoile présentant des modes d'oscillation $\ell = 1$ (et aussi $\ell = 2$) de faible amplitude, et KIC 1864183 est une étoile avec des modes d'oscillation d'amplitudes normales. Pour chacune des deux étoiles, le panneau supérieur (diagramme échelle) est construit à partir du spectre de puissance normalisé par le background, centré autour de $\nu_{\max}$ comme représenté sur les panneaux inférieurs. Les plages rouges (resp. vertes, bleues) correspondent aux modes de degré $\ell = 0$ (resp. $\ell = 1$ et $\ell = 2$).

- L'échelle de gris est normalisée par le maximum d'amplitude dans chacun des diagrammes échelles.
- Les diagrammes échelles sont ensuite transformés en fichiers images comprenant 128 par 128 pixels, puis les vecteurs associés sont calculés grâce à Inception.

Finalement, les diagrammes échelles (en haut) et les spectres normalisés (en bas) correspondants à deux étoiles caractéristiques sont représentés sur la figure 6.15. Les panneaux de gauche représentent une étoile présentant des modes dipolaires (et quadripolaires) de faibles amplitudes. Nous remarquons ainsi l'absence de puissance dans le diagramme échelle (représentés par les zones sombres) dans la zone correspondant aux modes $\ell = 1$ (zone verte). La seconde étoile représentée à droite de la figure 6.15 présente des amplitudes normales de ses oscillations, comme l'indique la présence de signaux sombres dans la zone verte du diagramme échelle.

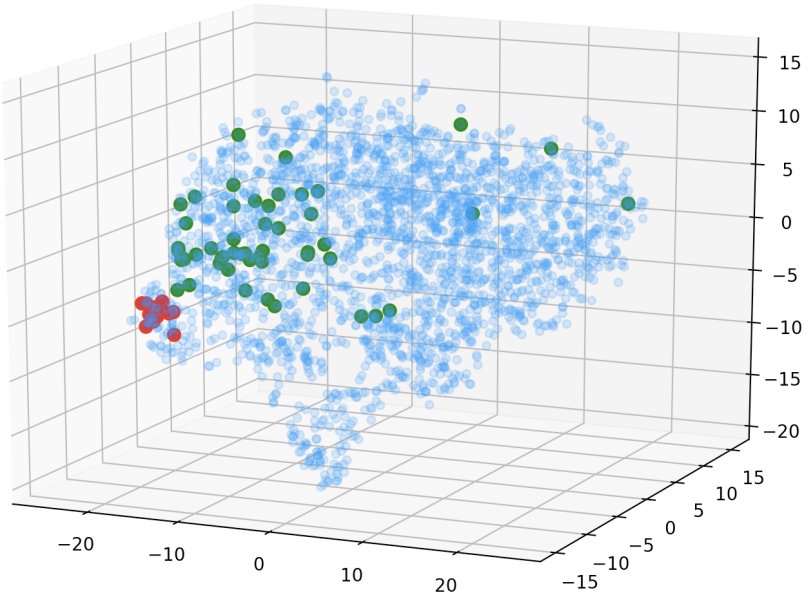


FIGURE 6.16: Visualisation des vecteurs associés à chaque diagramme échelle par Inception réduits à 3 dimensions par la méthode de réduction vectorielle t-SNE. Les étoiles sont toutes représentées par les points bleus, sauf celles pour lesquelles nous connaissons *a priori* la nature de l'amplitude des modes d'oscillation ; les points rouges indiquent la position dans le diagramme des étoiles présentant des modes d'oscillation $\ell =$ de faibles amplitudes, et les points verts indiquent la position d'étoiles ayant des modes d'amplitudes normales.

6.6.3 Premiers résultats

Dans une première étape de visualisation des similarités entre les diagrammes échelles, nous utilisons la méthode de réduction vectorielle t-SNE, que nous ne développerons pas ici (t-distributed Stochastic Neighbor Embedding van der Maaten & Hinton, 2008), mais qui permet de réduire un vecteur à un nombre défini de composantes pour visualisation dans un diagramme à 2 ou 3 dimensions. La figure 6.16 représente le résultat d'une réduction t-SNE de chacun des vecteurs associés à chacun des diagrammes échelles des quelques 2500 étoiles représentées à 3 dimensions. Les points bleus sont des étoiles donc nous ne connaissons/reportons pas le type associé à leurs amplitudes. Les points rouges sont des étoiles observées visuellement qui présentent des modes $\ell = 1$ de faibles amplitudes. Les points verts correspondent à des étoiles dans lesquelles aucune anomalie d'amplitude n'a été observée. Nous remarquons que les étoiles reconnues avec des modes de faibles amplitudes visuellement sont toutes regroupées dans une même région du diagramme, séparées du groupe majoritaire où nous retrouvons les étoiles d'amplitudes normales. Il semble donc que la méthodologie utilisée permette de détecter les anomalies d'amplitude. Nous utilisons alors la mesure de distance définie par l'équation 6.46 pour trouver les plus proches voisins d'une étoile connue visuellement pour la faible amplitude de ses oscillations dipolaires. L'étoile (KIC 6208588) en haut à gauche de la figure 6.17 est connue pour présenter des modes $\ell = 1$ de faible amplitude comme l'indique le (D) à côté de la numérotation de l'étoile. Les autres étoiles sont les 29 étoiles parmi les $\sim 2\,500$ étoiles étudiées dont $\cos\theta$ est le plus proche de celui de KIC 6208588. Certaines d'entre elles sont déjà connues pour la faible amplitude de leurs oscillations dipolaires et sont représentées sur la figure 6.16. Elles sont indiquées par la note (D) à côté de leur numérotation sur la figure 6.17. Parmi les 29 étoiles les plus proches de KIC 6208588, seules 3 d'entre elles présentent une petite puissance dans la zone attendue pour les modes $\ell = 1$. L'amplitude de ces modes $\ell = 1$ est suffisamment faible pour que les étoiles soient également considérées comme présentant des modes de faibles amplitudes.

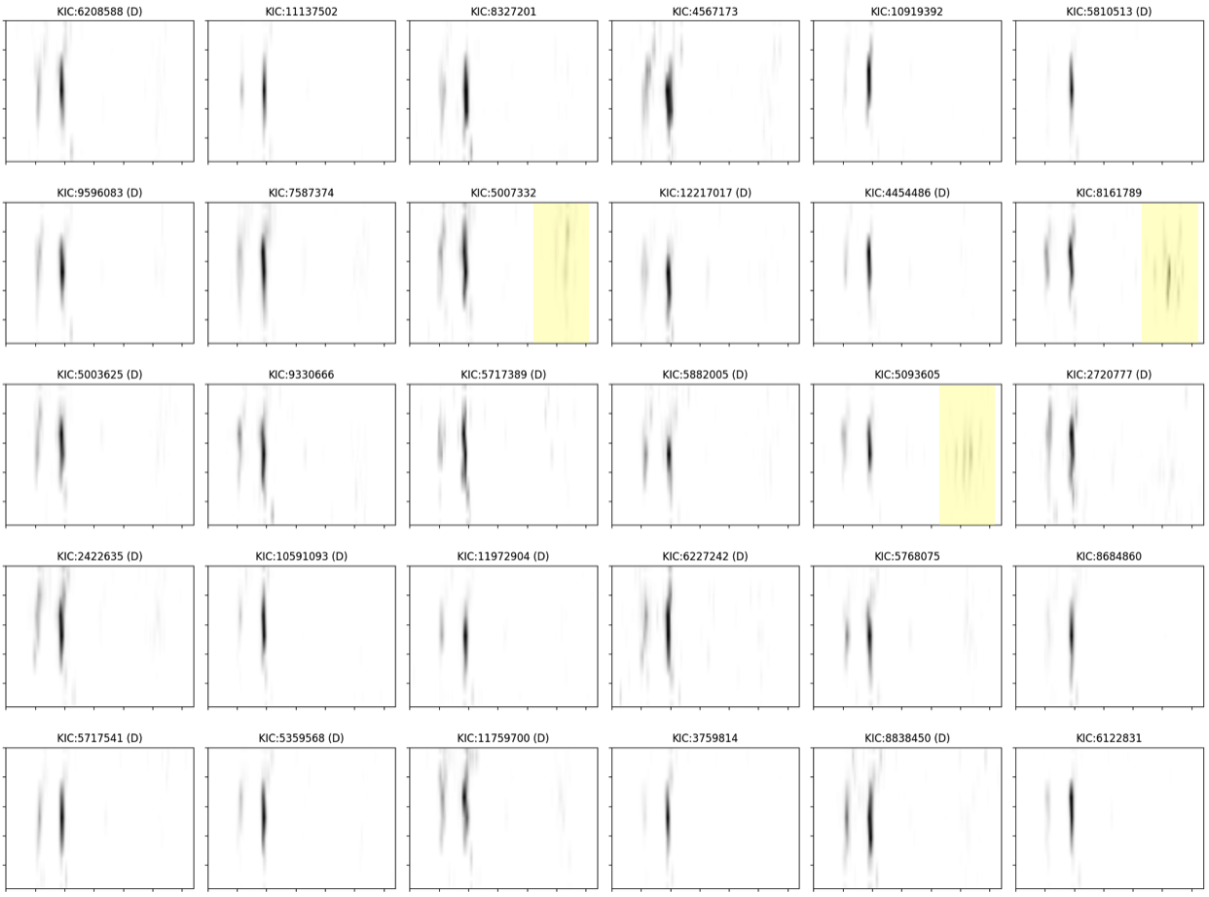


FIGURE 6.17: L'étoile en haut à gauche est connue pour présenter des modes $\ell = 1$ de faible amplitude, et les 29 autres étoiles sont celles avec une valeur de $\cos$ définie par l'équation 6.46 les plus proches parmi les étoiles étudiées. Les plages jaunes indiquent la présence de puissance dans la zone des modes $\ell = 1$.

Ainsi, à partir d'une étoile typique présentant des faibles amplitudes d'oscillation, notre méthodologie permet de détecter les étoiles similaires. Nous vérifions également que les étoiles d'amplitudes normales sont bien reconnues, grâce à la figure 6.18 sur laquelle les diagrammes échelles les plus similaires à celui de KIC 6768319 sont représentés. Les étoiles représentées présentent bel et bien de l'amplitude dans les régions $\ell = 1$, et aucune étoile connue pour ses faibles amplitudes n'est détectée. Nous confirmons donc l'efficacité de la méthode à séparer les deux types d'étoiles connues.

Ces travaux de classification automatique des étoiles ne sont pas finalisés, car nous souhaitons augmenter la statistique sur la conclusion de nos travaux, et permettre à la limite de distance entre deux vecteurs (donc entre deux images) d'être fixée automatiquement pour estimer les similarités et regrouper les étoiles selon leurs amplitudes caractéristiques. De plus, d'autres regroupements d'étoiles sont visibles dans la figure 6.16, et un temps supplémentaire est nécessaire pour interpréter correctement ces rassemblements, qui ne sont pas forcément liés à une particularité dans les amplitudes des modes, mais peut-être dans la position de leurs oscillations provenant d'une mauvaise estimation des positions des modes. Ce nouveau projet pourrait permettre de mieux comprendre les différents types de signatures oscillatoires globales dans les spectres de densité de puissance des étoiles, dans le but d'obtenir des listes d'étoiles susceptibles de présenter des signatures fréquentielles magnétisées.

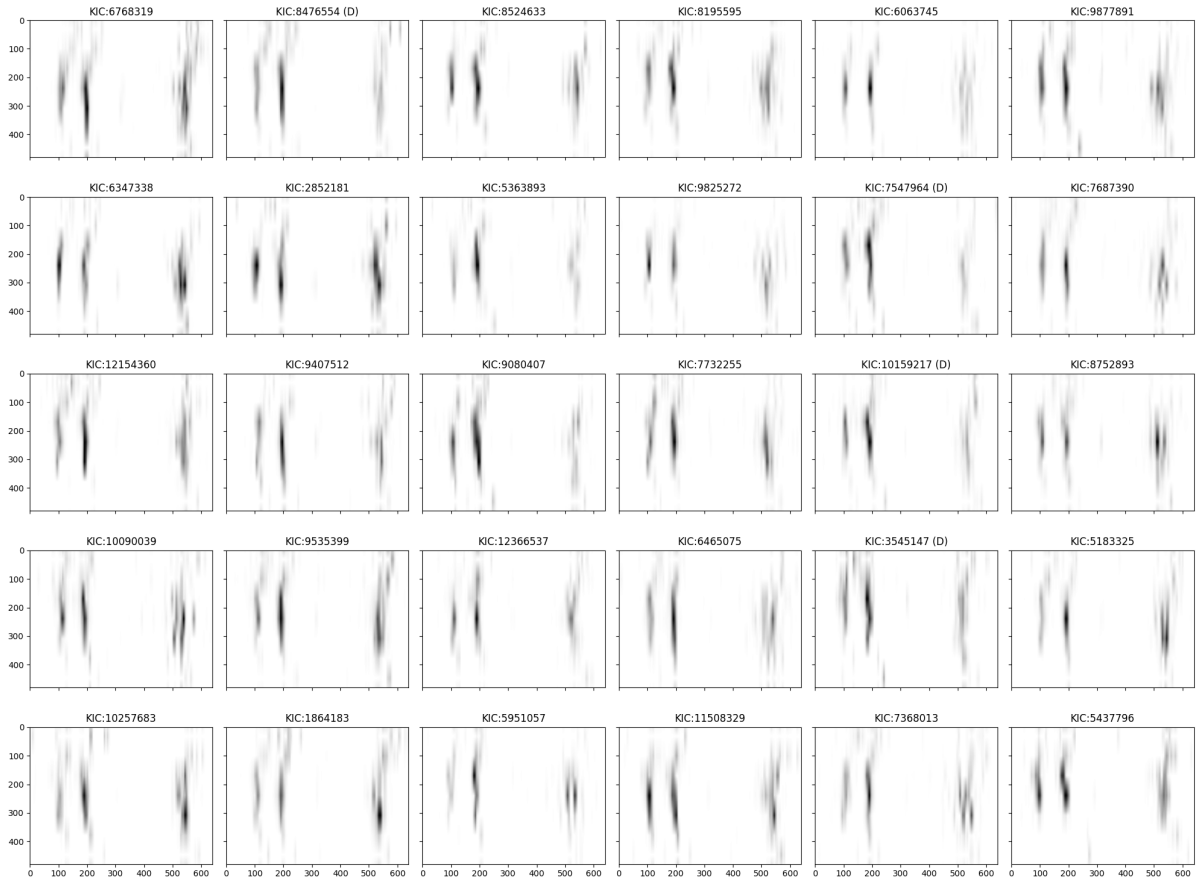


FIGURE 6.18: L'étoile en haut à gauche est connue pour présenter des modes $\ell = 1$ d'amplitude normale, et les 29 autres étoiles sont celles avec une valeur de $\cos$ définie par l'équation 6.46 les plus proches parmi les étoiles étudiées.

6.7 Conclusions & Perspectives

Dans cette première étude sur l'effet du magnétisme interne sur les fréquences des modes d'oscillation mixtes acoustiques et de gravité, nous nous concentrons sur le cas d'un champ axisymétrique (c'est-à-dire dont l'axe est aligné avec l'axe de rotation de l'étoile), à caractère mixte (qui contient des composantes toroïdales et poloïdales), et confiné dans l'intérieur radiatif de l'étoile. Nous nous concentrons sur les étapes évolutives de sous-géantes et de géantes rouges, durant lesquelles nous supposons l'existence d'un tel champ magnétique d'origine fossile, d'amplitude originelle comprise dans l'intervalle [0.1-1] MG, ayant relaxé depuis le dernier épisode de dynamo interne comme décrit dans le chapitre 2. Cela résulte en des amplitudes de champ magnétique suffisantes, mais modérées, pour que notre étude perturbative au premier ordre soit pertinente.

Nous montrons que durant la RGB une telle configuration magnétique interne aboutit à une signature détectable (perturbation de l'ordre de $\sim 0.1\mu$Hz) dans les données astérosismiques des modes $g-m$, caractérisée par une asymétrie du multiplet (ℓ, m). Durant la RGB l'effet du magnétisme est plus important sur les modes dominés par la composante de gravité, puisqu'ils se propagent uniquement là où se situe le champ magnétique, au contraire des modes $p-m$ qui sondent également l'enveloppe. Cet effet est bien connu dans le cas des perturbations associées à la rotation de l'étoile, puisque l'étoile tourne plus vite dans le cœur. Nous nous sommes donc concentrés sur la perturbation par le magnétisme interne sur les modes $g-m$, bien que leurs amplitudes soient plus faibles initialement dans les données astérosismiques.

Durant l'étape de sous-géante en revanche, les champs magnétiques attendus sont plus faibles (voir Chapitre 2), et ne permettent pas une perturbation fréquentielle d'amplitude suffisante pour qu'une quelconque détection ne soit envisageable. Durant ce stade évolutif, où la zone radiative interne est beaucoup plus étendue, les perturbations sont plus grandes sur les modes $p-m$ que $g-m$, mais restent indétectables. Nous n'excluons pas la possibilité de champs internes d'amplitudes supérieures provoquant une véritable signature magnétique sur les fréquences des modes durant la séquence principale (voir par exemple l'étude de Rashba et al. (2007) sur la perturbation magnétique sur les fréquences des modes g). Le mécanisme de conversion des ondes proposé par Fuller et al. (2015) permet par exemple d'estimer l'amplitude du champ interne à la sous-géante KIC 8561221 à 10MG, bien plus grand que les estimations provenant des régimes d'équilibre d'énergie et de force utilisés.

Nous démontrons ainsi qu'un champ magnétique axisymétrique provoque une asymétrie dans les multiplets rotationnels. Toutes les composantes du multiplet $\ell = 1$ et $\ell = 2$ sont décalées vers les plus hautes fréquences, d'une valeur dépendant de $|m|$. Nous montrons également que cette asymétrie est facilement distinguable des autres sources d'asymétrie recensées. Les méthodes d'ajustement des spectres pour évaluer la perturbation des modes par la rotation décrites par Vrard et al. (2015); Mosser et al. (2015); Gehan et al. (2018) peuvent donc être appliquées pour déterminer la perturbation totale générée par la rotation et le magnétisme interne. Si le magnétisme est d'amplitude faible, alors le mutiplet rotationnel est simplement rendu légèrement asymétrique. Si le magnétisme est important en revanche, nous observons une modification radicale du motif observé, pouvant conduire à de nouveaux croisements entre les composantes des modes d'ordre n_{pg} consécutifs.

Si un tel magnétisme interne est présent dans l'étoile, il doit affecter fortement le profil de rotation de l'intérieur radiatif. Nous démontrons qu'un champ magnétique d'une telle amplitude ($B_0 \in [0.1, 10]$MG) provoque un transport du moment cinétique interne le long des lignes de champ poloïdales sur un temps caractéristique aussi court que l'année. Une reconnection du champ interne avec le magnétisme dynamo de surface pourrait en revanche permettre à une rotation différentielle latitudinale de prendre place dans l'intérieur radiatif malgré la présence de magnétisme, bien que le profil de rotation différentielle radial soit aplati.

Sous la forte hypothèse d'un mécanisme de conversion des ondes de gravité en ondes d'Alfven, comme décrit dans la théorie de Fuller et al. (2015), nous montrons que les étoiles sur le début de la RGB peuvent présenter une signature du magnétisme sur leurs fréquences d'oscillation avant que le magnétisme ne convertisse les composantes g des oscillations. Ce dernier résultat est donc très intéressant : il souligne que la recherche de signature magnétique sur les fréquences des modes d'oscillation mixtes peut se faire dans des plages d'oscillation d'amplitudes normales, chose qui n'était pas évoquée dans les travaux de Fuller et al. (2015) (limite pointée par Rieutord & Michel, 2017)).

A&A 650, A53 (2021)
https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039159
© L. Bugnet et al. 2021

Astronomy & Astrophysics

Magnetic signatures on mixed-mode frequencies

I. An axisymmetric fossil field inside the core of red giants

L. Bugnet[1,2], V. Prat[1], S. Mathis[1], A. Astoul[1], K. Augustson[1], R. A. García[1], S. Mathur[3,4], L. Amard[5], and C. Neiner[6]

[1] AIM, CEA, CNRS, Université Paris-Saclay, Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 91191 Gif-sur-Yvette, France
[2] Flatiron Institute, Simons Foundation, 162 Fifth Ave, New York, NY 10010, USA
e-mail: lbugnet@flatironinstitute.org
[3] Instituto de Astrofísica de Canarias, 38200 La Laguna, Tenerife, Spain
[4] Universidad de La Laguna, Dpto. de Astrofísica, 38205 La Laguna, Tenerife, Spain
[5] University of Exeter, Department of Physics and Astronomy, Stoker Road, Devon, Exeter EX4 4GL, UK
[6] LESIA, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Université de Paris, 5 Place Jules Janssen, 92195 Meudon, France

Received 11 August 2020 / Accepted 2 March 2021

ABSTRACT

Context. The discovery of moderate differential rotation between the core and the envelope of evolved solar-like stars could be the signature of a strong magnetic field trapped inside the radiative interior. The population of intermediate-mass red giants presenting surprisingly low-amplitude mixed modes (i.e. oscillation modes that behave as acoustic modes in their external envelope and as gravity modes in their core) could also arise from the effect of an internal magnetic field. Indeed, stars more massive than about 1.1 solar masses are known to develop a convective core during their main sequence. The field generated by the dynamo triggered by this convection could be the progenitor of a strong fossil magnetic field trapped inside the core of the star for the remainder of its evolution.
Aims. Observations of mixed modes can constitute an excellent probe of the deepest layers of evolved solar-like stars, and magnetic fields in those regions can impact their propagation. The magnetic perturbation on mixed modes may therefore be visible in asteroseismic data. To unravel which constraints can be obtained from observations, we theoretically investigate the effects of a plausible mixed axisymmetric magnetic field with various amplitudes on the mixed-mode frequencies of evolved solar-like stars.
Methods. First-order frequency perturbations due to an axisymmetric magnetic field were computed for dipolar and quadrupolar mixed modes. These computations were carried out for a range of stellar ages, masses, and metallicities.
Conclusions. We show that typical fossil-field strengths of 0.1−1 MG, consistent with the presence of a dynamo in the convective core during the main sequence, provoke significant asymmetries on mixed-mode frequency multiplets during the red giant branch. We provide constraints and methods for the detectability of such magnetic signatures. We show that these signatures may be detectable in asteroseismic data for field amplitudes small enough for the amplitude of the modes not to be affected by the conversion of gravity into Alfvén waves inside the magnetised interior. Finally, we infer an upper limit for the strength of the field and the associated lower limit for the timescale of its action in order to redistribute angular momentum in stellar interiors.

Key words. stars: oscillations – stars: magnetic field – stars: interiors – stars: evolution – stars: rotation

1. Introduction

Oscillations on the surface of solar-type stars have been observed and studied across the Hertzsprung-Russel diagram thanks in large part to the data provided by CoRoT, *Kepler*, K2, and the TESS missions (e.g. Michel et al. 2008; Chaplin et al. 2010, 2020; Lund et al. 2017; Huber et al. 2019; García & Ballot 2019). While this list is hardly exhaustive, some key results are relevant to this paper and to the importance of the transport of angular momentum in the radiative regions of main sequence (MS) stars. Indeed, the radiative interior of the Sun seems to rotate as a solid body slightly slower than the equatorial surface rotation rate (García et al. 2007) until 0.25 solar radii ($R_\odot$; e.g. Thompson et al. 2003; Couvidat et al. 2003), and the nuclear core may rotate even faster (García et al. 2007). The study of some solar-like stars also shows that they present a nearly solid-body rotation (Benomar et al. 2015). Likewise, in subgiant (SG) stars and red-giant (RG) stars, some relevant works are the discoveries of the unexpectedly slow rotation rate of their cores (e.g. Deheuvels et al. 2012, 2014, 2016; Mosser et al. 2012, 2017; Gehan et al. 2018), and the surprisingly low amplitude of dipolar mixed modes in some red giants (RGs; García et al. 2014a; Mosser et al. 2012, 2017; Stello et al. 2016a). As of yet, there is no clear evolutionary model that yields internal rotation profiles akin to those observed (e.g. Eggenberger et al. 2012, 2017, 2019; Ceillier et al. 2013; Marques et al. 2013, for the loss of angular momentum on the giant branch), nor is there a robust explanation for the observed dipole mode amplitude suppression (Fuller et al. 2015; Cantiello et al. 2016; Lecoanet et al. 2017; Mosser et al. 2017; Loi & Papaloizou 2018).

Some magneto-hydrodynamic fluid behaviours can strongly impact the rotation profile of the star both on secular timescales (Eggenberger et al. 2005; Cantiello et al. 2014; Fuller et al. 2014, 2019) and even on their dynamical timescales (Brun et al. 2005; Featherstone et al. 2009; Augustson et al. 2016). Moreover, the transport of chemical species, energy, and angular

Open Access article, published by EDP Sciences, under the terms of the Creative Commons Attribution License (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

momentum by internal waves can also play a role (e.g. Belkacem et al. 2015; Pinçon et al. 2017).

However, none of these cited solutions fully explains the angular momentum transport from the subgiant stage until the end of the red giant branch (RGB). This raises the issue of the incompleteness or inaccuracy of the included set of physical processes driving the internal dynamics in stellar models at each step of the evolution. Magnetic fields are not considered for instance inside the radiative interior of solar-type stars along their evolution in models (apart from a few studies that do include the effect of the Tayler-Spruit dynamo, e.g. Cantiello et al. 2014), while we do know that at least weak fields must be present, resulting from the relaxation of past dynamo events (e.g. Braithwaite & Spruit 2004; Braithwaite 2008; Duez & Mathis 2010). Such internal magnetism may prevent differential rotation inside the radiative interior, a configuration that has been observed inside solar-like stars and the Sun (García et al. 2007; Benomar et al. 2015; Fossat et al. 2017).

The internal structure of SGs and RGs allows acoustic and gravity modes to couple to form mixed modes. As they probe the deepest layers of the star, they are of great interest for the understanding of physical processes taking place from the deepest layers of the radiative interior towards the surface of the star. For instance, they are known to provide estimates of the mean rotation rate of the core of SGs and RGs (e.g. Deheuvels et al. 2012, 2014, 2016; Mosser et al. 2012, 2017; Gehan et al. 2018). Fuller et al. (2015), Lecoanet et al. (2017), and Loi & Papaloizou (2017) suggested via different magnetic conversion mechanisms that the presence of a strong magnetic field inside the core of a RG can convert magneto-gravity waves into Alfvén waves. This results in a loss of energy of the observed modes, which are no longer mixed modes and only present an acoustic signature. Their amplitude is therefore diminished in the power spectrum density (PSD). Even if these theories are controversial (e.g. Mosser et al. 2017), they point out the potentially large effect of magnetic fields on mixed-mode amplitudes. The impact of buried pure toroidal or poloidal magnetic fields on acoustic mode frequencies was studied in the context of the SOlar and Heliospheric Observatory (SOHO, Domingo et al. 1995) mission (Solar Oscillation Imager/Michelson Doppler Imager; SOI/MDI, Scherrer et al. 1995) and the Global Oscillations at Low Frequencies (GOLF, Gabriel et al. 1995 instruments) for the observation of the Sun (e.g. Gough 1984; Gough & Thompson 1990; Dziembowski & Goode 1985, 1989; Takata & Shibahashi 1994; Kiefer & Roth 2018) but no trace of such fields has been found in the solar acoustic data. Rashba et al. (2007) developed the equivalent theory for the Sun's g modes, whose detection is still controversial (García et al. 2007; Appourchaux et al. 2010, 2018; Fossat et al. 2017; Fossat & Schmider 2018; Schunker et al. 2018; Scherrer & Gough 2019). More recent studies (e.g. Hasan et al. 2005; Prat et al. 2019; van Beeck et al. 2020) focused on the impact of stable fields (with a magnetic configuration given by Duez & Mathis 2010 that consists in mixed poloidal and toroidal fields) on slowly pulsating B and γ-Doradus stars showing pure gravity modes. The effect of moderate-amplitude magnetic fields on mixed-mode frequencies of evolved stars was theoretically studied by Loi (2020) in the case of a non-rotating star. That study provides analytical (non-perturbative) expressions of the impact of magnetic fields on mixed mode frequencies that are complementary to the perturbative analysis presented in this paper.

Led by all these previous theoretical studies, we focus our efforts on understanding the core dynamics of SGs and RGs. We investigate the impact of a realistic axisymmetric fossil magnetic field buried inside the core of evolved low-mass ($M_\star \lesssim 1.3$ solar masses, $M_\odot$) and intermediate-mass ($1.3\,M_\odot \lesssim M_\star \lesssim 7\,M_\odot$) solar-like pulsators (i.e. SGSs and RGSs) on their observable mixed-mode frequencies. In our study, as opposed to the work by Loi (2020), we consider the magnetic field amplitude to be small enough for its effects on the mixed-mode frequencies to play as a first-order perturbation, along with the first-order effects resulting from the slow differential rotation of the star (e.g. Deheuvels et al. 2014; Gehan et al. 2018). This approximation is motivated by the non-discovery to date of any magnetic signatures on the mixed-mode frequency pattern of observed RGs.

For the magnetic field, we use a realistic mixed poloidal and toroidal configuration (Braithwaite & Spruit 2004; Braithwaite & Nordlund 2006; Duez et al. 2010a,b), and evaluate its impact on typical mixed modes computed using the stellar evolution code MESA (Paxton et al. 2011) and stellar oscillation code GYRE (Townsend & Teitler 2013). After describing the magnetic-field configuration and its potential origin and evolution in Sect. 2, we provide in Sect. 3 the first-order perturbative analysis leading to the magnetic and rotational shift of mixed-mode frequencies. Section 4 investigates the shifting of the $\ell = 1$ and $\ell = 2$ mixed mode frequencies in the case of a $M_\star = 1.5\,M_\odot$, $Z = 0.02$ star along its evolution on the RGB. This star is massive enough to develop a convective core during the MS, which can lead to the intense production of magnetic energy. We provide values of the critical field strength associated to this axisymmetric topology above which the effect on mode frequencies should be visible in real data, and conclude on the validity of the perturbative approach depending on the magnetic-field strength and the evolutionary stage of the star. In Sect. 5, we then follow the same approach as we do for the RG branch for the SG stage. During the SG branch (SGB), the nature of most mixed modes is transitioning from acoustic- toward gravity-dominated modes. Section 6 discusses the consequences of the presence of fossil magnetic fields inside evolved solar-like stars on angular momentum transport. In Sect. 7 we investigate the stellar mass and metallicity dependence of the magnetic splitting of mixed modes. Section 8 focuses on comparing the magnetic field amplitude needed for g-mode conversion into Alfvén modes with those needed for magnetic splitting to be detectable in the data. Finally, we conclude on the large potential of this approach for the future detection of magnetic fields from the inversion of magnetic-frequency splitting from real data.

2. Internal magnetic fields along the evolution

Magnetism in the depths of stars is very difficult to probe. Spectropolarimetry, which provides most measurements of stellar magnetic fields through the Zeeman effect, only provides information on magnetism emerging from the external layers of the star (e.g. Donati et al. 1997). Probing internal magnetism in evolved solar-like stars could be game changing, because magnetism is known to enhance angular momentum transport (Mestel & Weiss 1987; Charbonneau & MacGregor 1993; Gough & McIntyre 1998; Spruit 1999, 2002; Mathis & Zahn 2005; Fuller 2014; Fuller et al. 2019; Eggenberger et al. 2020). Thus, strong magnetic fields within subgiants and red giants could potentially explain their low core-to-envelope rotation-rate ratio.

One powerful mechanism strengthening and sustaining magnetic fields is a convective dynamo, which can create strong magnetism from a weak initial field (e.g. Dikpati & Gilman 1999, for the Sun's dynamo). Such a mechanism is likely to be the

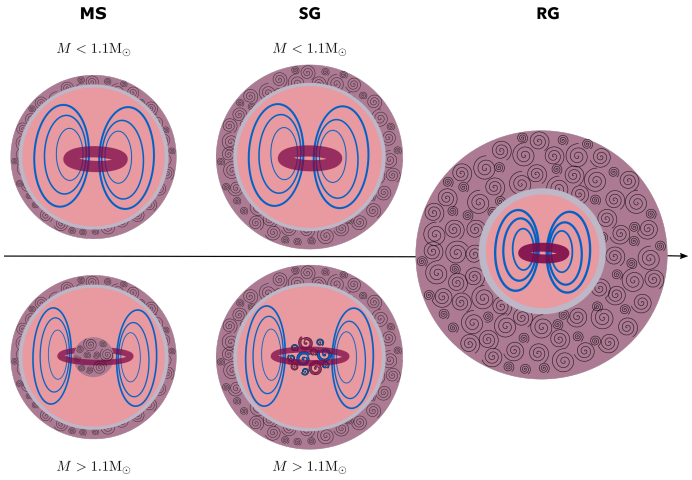


Fig. 1. Magnetic configuration schemes (not to scale) following the evolution of low- and intermediate-mass stars from the main sequence. The represented configuration corresponds to the axisymmetric field topology considered in our study. It presents both a poloidal (blue lines) and a toroidal (red lines) component, with the axis of symmetry aligned with the rotation axis of the star.

origin of the solar surface magnetic cycle (Brun et al. 2004; Brun & Browning 2017), and is probably active in any convective rotating region inside stars (e.g. Brun et al. 2005; Browning 2008; Brown et al. 2010, 2011; Augustson et al. 2012, 2015, 2016). However, internal layers of low-mass evolved stars are radiative during the SG and RG stages: no convective dynamo can take place in their depths. For a magnetic field to be present inside the radiative interior of evolved solar-like stars, either a dynamo-originated stochastic field has been preserved inside the radiative cavity following the last dynamo episode (fossil field scenario), or the field is transient and currently generated by magnetohydrodynamics instabilities (Spruit 2002; Zahn et al. 2007; Fuller et al. 2019). Spruit (2002) and Fuller et al. (2019) propose a solution to generate magnetic energy from the combination of the Tayler instability (Tayler 1973) and radial differential rotation. This rotational instability may result in large-scale internal magnetic fields, but is out of the scope of this paper. We focus here on the so-called fossil field scenario, resulting from the relaxation of magnetic fields originating from a past convective episode, as described in Braithwaite (2008), Duez & Mathis (2010), and Mathis et al. (2010). In the case of giant stars, internal fields may form from two previous convective dynamo episodes, depending on the mass of the star. During the pre-main sequence (PMS), the star is fully convective: a similar dynamo process to the solar dynamo could take place inside the whole star. When the convective region reduces to a thin surface layer on the MS, the dynamo-originated magnetism may start to relax inside the radiative interior (Arlt et al. 2013; Emeriau-Viard & Brun 2017; Villebrun et al. 2019). As the star evolves on the MS, its radiative interior thus possesses a relaxed fossil field resulting from the convective dynamo taking place during the PMS. On the MS, either the star is of low mass ($M_\star \leq 1.1\,M_\odot$) and the convective region simply reduces to a surface layer, or for $M_\star \geq 1.1\,M_\odot$ the convective region reduces to a surface layer while a convective core is formed due to the change in the hydrogen fusion mechanisms. Such a core likely also convectively generates a magnetic field via a dynamo (see Fig. 1). This field could therefore enhance the potentially already present relaxed magnetic field inside the radiative interior of the star. During the SG phase, the interior is completely radiative, and a fossil field is formed, which is also present during the RGB. The field is located inside the radiative region of the star, the extent of which varies with evolution.

2.1. The fossil field scenario

In the fossil field scenario, the relaxing magnetic field may be preserved inside the radiative interior when the convection ends. If no disruptive processes occur inside the radiative interior from the MS towards the RGB, such as strong differential rotation (Aurière et al. 2015; Gaurat et al. 2015), the stochastic field will eventually stabilise into a fossil equilibrium configuration, reached when the Lorentz force balances hydrodynamics forces (Chandrasekhar 1958). In that case, and by assuming a constant magnetic diffusivity, the induction equation is written as:

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\eta \boldsymbol{\nabla} \wedge (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B}), \tag{1}$$

where η is the magnetic diffusivity. If there is no turbulence in the region, the associated Ohmic relaxation time due to atomic processes is $\tau = R^2/\eta$. For a 'fossil field', this is comparable to the lifetime of the star itself, being 10^{10} years in the case of a field inside the radiative interior of the Sun (e.g. Cowling 1945). Thus, if ever generated and never disrupted by hydrodynamical or other MHD processes, the dynamo-originated field should remain trapped for the remaining evolution of the star as a fossil field, and should still be present in its radiative interior during the RGB (Stello et al. 2016b). The intense magnetism discovered in some white dwarfs (Angel et al. 1981; Putney 1999; Schmidt et al. 2001) could then result from such a PMS-MS dynamo field, surviving as a fossil field during the succeeding evolutionary stages. The primary challenges regarding these equilibrium magnetic fields are the determination of their 3D configuration and the estimation of their amplitude.

2.2. Fossil field topology

Purely toroidal and purely poloidal magnetic configurations are known to be unstable (e.g. Tayler 1973; Markey & Tayler 1973; Braithwaite 2006, 2007). The stability of mixed configurations with both poloidal and toroidal components is demonstrated in Tayler (1980), and the relative energy contained in the toroidal and poloidal components for the field to be stable has been evaluated numerically (Braithwaite 2008) and semi-analytically (Akgün et al. 2013). In a similar vein, Braithwaite & Spruit (2004) simulated the relaxation of stochastic fields in a non-rotating radiative medium. Those simulations show that a stochastic field representing a dynamo-generated field inside a stably stratified region relaxes into a stable, larger-scale, mixed poloidal and toroidal magnetic field. Duez & Mathis (2010) give the closest semi-analytic description of such stable mixed toroidal and poloidal fossil fields. As opposed to previous studies (e.g. Gough & Thompson 1990) that considered purely toroidal or purely poloidal field topologies, we use this stable mixed formalism to investigate the effect on mixed-mode frequencies of a hypothetical fossil field trapped inside the radiative interior of size $R_{\rm rad}$ of evolved stars (see Fig. 1). We do not consider in our study non-perturbative boundary conditions associated to more realistic magnetic field configurations (e.g. Roberts & Soward 1983; Campbell & Papaloizou 1986; Dziembowski & Goode 1996; Bigot et al. 2000). The mixed toroidal and poloidal expression from Duez & Mathis (2010) that minimises the energy of the system is dipolar. Such magnetism confined inside the radiative interior of the star is written

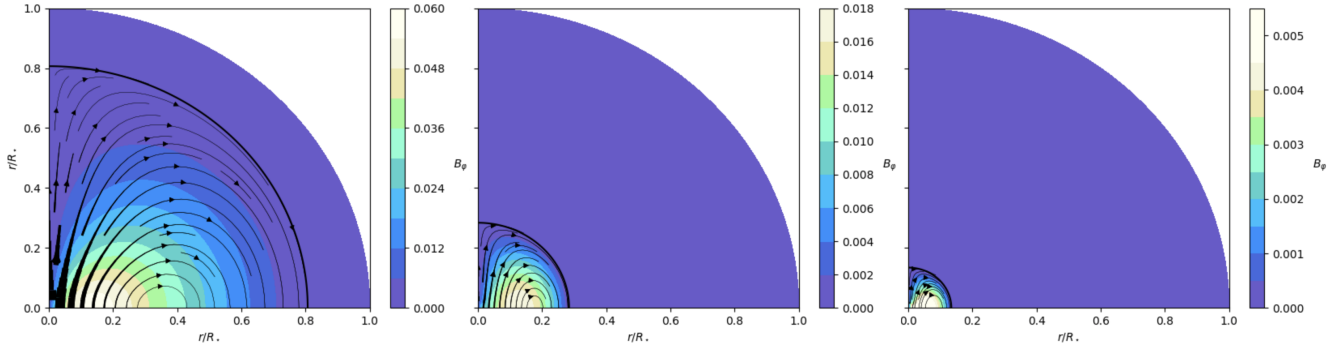


Fig. 2. Mixed poloidal (black lines) and toroidal (colour scale) magnetic field modelled using the formalism of Duez & Mathis (2010); see Eq. (2). Values are normalised by the maximum radial field amplitude. The field is confined inside the radiative region of the star, the extent of which is given by the corresponding evolution model MESA and indicated by the black circle. *Left to right*: cases of a 1.5 $M_\odot$, $Z = 0.02$ star from the SG phase to RGB, with ages of 2.65, 2.75, and 2.80 Gyr, and effective temperatures of 5967, 5075, 4900 K, respectively.

as:

$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\boldsymbol{\nabla}\psi(r,\theta)\wedge\boldsymbol{e}_\varphi + \lambda\dfrac{\psi(r,\theta)}{R_{\rm rad}}\boldsymbol{e}_\varphi\right) \text{ if } r < R_{\rm rad}, \\ 0 \text{ if } r > R_{\rm rad}, \end{cases} \tag{2}$$

where ψ is the stream function satisfying

$$\psi(r,\theta) = \mu_0\alpha\lambda\frac{A(r)}{R_{\rm rad}}\sin^2\theta, \tag{3}$$

with μ_0 the vacuum magnetic permeability expressed as 4π in cgs units, α a normalisation constant fixed by the chosen magnetic-field amplitude, λ the eigenvalue of the problem to be determined, $R_{\rm rad}$ the radius of the radiative interior, and

$$\begin{aligned} A(r) = & -rj_1\left(\lambda\frac{r}{R_{\rm rad}}\right)\int_{\rm r}^{R_{\rm rad}} y_1\left(\lambda\frac{x}{R_{\rm rad}}\right)\rho x^3{\rm d}x \\ & - ry_1\left(\lambda\frac{r}{R_{\rm rad}}\right)\int_0^{r} j_1\left(\lambda\frac{x}{R_{\rm rad}}\right)\rho x^3{\rm d}x, \end{aligned} \tag{4}$$

with j_1 (y_1) the first-order spherical Bessel function of the first (second) kind (Abramowitz & Stegun 1972) and $\rho = \rho(r)$ the density of the star.

In our study, we consider the field to be aligned with the rotation axis of the star; hence, non-aligned and non-fossil field configurations are out of the scope of this paper. Finally, the axisymmetric poloidal and toroidal magnetic field used in our analytical calculations can be expressed as

$$\boldsymbol{B} = B_0\left[b_{\rm r}(r)\cos\theta, b_\theta(r)\sin\theta, b_\varphi(r)\sin\theta\right], \tag{5}$$

with the following correspondences to match the Duez & Mathis (2010) formalism:

$$B_0 = \frac{\mu_0\alpha\lambda}{R_{\rm rad}} \tag{6}$$

$$b_{\rm r}(r) = \frac{2A}{r^2} \tag{7}$$

$$b_\theta(r) = -\frac{A'}{r} \tag{8}$$

$$b_\varphi(r) = \frac{\lambda A}{rR_{\rm rad}}, \tag{9}$$

with the prime symbol denoting the radial derivative.

In order to confine the field inside the radiative area we set λ as the smallest positive constant for $\boldsymbol{B}$ to vanish at the radiative–convective boundary (see Fig. 2). As opposed to massive stars, red giants present a strong internal density gradient. This property prevents $\int_0^{R_{\rm rad}} j_1\left(\lambda\frac{x}{R_{\rm rad}}\right)\rho x^3{\rm d}x$ from going to zero for any value of λ. As a result, we could not simultaneously cancel the $b_{\rm r}$ and b_θ components of the field at the radiative–convective boundary. To ensure that the field is confined to the radiative interior, we choose to eliminate only $b_{\rm r}$. This leads to an azimuthal current sheet that might create instabilities (see Duez & Mathis 2010, for a detailed description). This is accomplished by searching for zeros of $y_1(\lambda)$ instead (a more detailed description is given in Appendix B). We find that the corresponding smallest value for λ is about 2.80. This eigenvalue corresponds to the first zero of the function y_1, providing the most stable parametrisation that eliminates $b_{\rm r}$ at $R_{\rm rad}$. This rather small value of λ leads to poloidally dominated fields as represented in Fig. 2.

2.3. Estimating the evolving magnetic field amplitude

By considering an ideal fossil-field scenario, one can estimate the amplitude of the field along the evolution of the star by considering magnetic-flux conservation from the end of the more recent dynamo episode without considering any Ohmic loss of energy due to the reconnection of field lines during successive relaxations. Therefore, here we adopt the approach of giving an upper-limit of the field amplitude by first computing the rate of magnetic energy produced by stellar dynamos and transmitting its amplitude to the fossil field, a simple approach that is currently used in studies in asteroseismology (e.g. Fuller et al. 2015; Cantiello et al. 2016). However, we know that during the relaxation of fossil fields, loss of magnetic energy occurs at small scales. This has been observed in numerical simulations (e.g. Braithwaite 2008; Duez 2011; Emeriau-Viard & Brun 2017). How to properly quantify this Ohmic loss of energy and the corresponding turbulent scales all along the evolution of stars is an open and difficult question because a coherent theoretical modeling should be provided (e.g. Moffatt 2015; Hotta 2017) while our current MHD simulations assume magnetic diffusivities (and diffusivities in general) that are in general higher than in stellar interiors. This question will be examined in detail in a forthcoming article.

We consider the extent of the fossil field configuration to match the size of the radiative interior of the star during the SG and RG phases (see Fig. 1). This implies that no reconnections with the envelope field are considered in our simplified configuration. In our fossil field scenario, the last recorded internal dynamo is either the convective core dynamo for stars more

massive than 1.1 $M_\odot$, as presented in Fig. 1, or the global convective dynamo during the PMS for low-mass stars.

As in Fuller et al. (2015) and Cantiello et al. (2016), we estimate the magnetic amplitude resulting from magnetic flux conservation from the end of the last convective dynamo episode towards the current giant stage, through:

$$B_{0\star} \simeq B_{0,\mathrm{init}} \frac{R^2_{\mathrm{init}}}{R^2_{\mathrm{rad},\star}}, \tag{10}$$

with R_{init} the radius of the convective cavity of the last internal dynamo phase, and $R_{\mathrm{rad},\star}$ the size of the current radiative sphere inside which the field is supposed to be confined. This flux conservation equation ensures that the entirety of the magnetic energy is conserved inside the radiative interior, with no exchanges with the surrounding convective zone, and with no disruption of the magnetic field by an external mechanism such as differential rotation. R_{init} and $R_{\mathrm{rad},\star}$ are evaluated along the evolution using the MESA stellar evolution code (Paxton et al. 2011). The $B_{0,\mathrm{init}}$ field amplitude is estimated during the recession phase of the last internal dynamo by the use of rotating stellar models computed with STAREVOL (STAREVOL is used instead of MESA to take into account rotation during the early stages of the evolution of the star needed in order to estimate the magnetic field amplitude resulting from magnetostrophy and buoyancy regimes; see Amard et al. 2019; Astoul et al. 2019, for details). The field is evaluated following Augustson et al. (2019) and Astoul et al. (2019) by considering the magnetostrophic, equipartition, and buoyancy-driven regimes (see Appendix A for details about how the different regimes are constructed). The turbulent equipartition regime corresponds to the state where the convective kinetic energy density of the fluid is fully converted into a magnetic energy density (superequipartition regime therefore refers to the fluid's magnetic energy being greater than its kinetic energy). An equipartition or subequipartition regime is invoked for the Sun's dynamo inside the convective envelope (Brun et al. 2017). The magnetostrophic regime is reached when Coriolis acceleration balances Lorentz force in the momentum equation. This corresponds to a maximum-amplitude estimate of the magnetic field, and can be a superequipartition regime. The magnetostrophic regime is suspected by Augustson et al. (2019) to be applicable for stellar dynamos. The buoyancy dynamo regime corresponds to the case where Coriolis acceleration, buoyancy, and Lorentz forces all have the same order of magnitude. This regime is usually considered for rapidly rotating low-mass stars and planets with strong density gradient (Christensen et al. 2009).

2.3.1. Case of $M_\star \lesssim 1.1\,M_\odot$

Low-mass stars do not develop a convective core during the MS, apart from a small convective interior that arises from the energy released during the CNO cycle before the temperature drops (down to ~5600 K) leading to the p-p fusion mechanism. However, such stars possess a convective envelope, schematically represented in Fig. 1. The top panel of Fig. 3 represents the amplitude of the magnetic field generated at the bottom of the convective envelope while the star evolves. When the radiative interior replaces the convection at the beginning of the MS ($\sim 2 \times 10^7$ years), the amplitude of the expected magnetic field that relaxes into the radiative interior at the boundary with the convective envelope is of the order of magnitude of respectively 10^6, 10^5, and 10^4 G for the magnetostrophic, buoyancy, and equipartition regimes. Astoul et al. (2019) concluded that in order to reproduce the magnetic amplitude observed at the surface of rotating PMS and MS stars, the magnetostrophic regime should be considered. For the remainder of this paper we therefore use the amplitude of the dynamo field estimated by considering the magnetostrophic regime as an upper estimate of the magnetic amplitude inside the radiative interior. The equipartition approximation that is used by Cantiello et al. (2016) and Fuller et al. (2015) provides much smaller estimates of the field amplitude, as seen in Fig. 3: we consider these estimates as the lowest possible value of the fossil field in the remainder of the article.

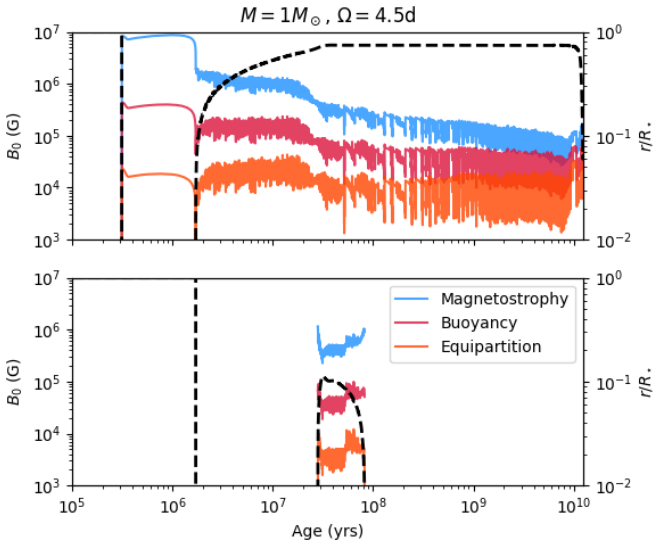


Fig. 3. *Top*: magnetic field amplitude at the base of the convective envelope along the evolution of a $M_\star = 1\,M_\odot$ star, with solar metallicity ($Z = 0.0134$), uniformly rotating with an initial rotation rate during the disk-locking of the PMS of $\Omega = 2.5$ μHz. The blue, red, and orange lines respectively represent the field estimated by considering the magnetostrophic, buoyancy, and equipartition regimes. The black dashed line represents the location of the limit radius between the internal radiative layer and the convective envelope. *Bottom*: same as top panel at the top of the convective interior along the evolution of the star. The black dashed line represents the location of the limit radius between the convective core (when existing) and the radiative layer.

We shall also discuss the quick appearance of a convective core at the beginning of the MS. The characteristic timescale for a dynamo to emerge from convection and differential rotation is of the order of a year (by considering a typical solar internal rotation rate). Therefore, despite its comparatively short lifespan, this early convective core should still produce a dynamo field. Its amplitude would be of the order of magnitude represented in the bottom panel of Fig. 3. This newly generated field has an amplitude equivalent to that of the original field resulting from the dynamo in the convective envelope during the PMS: the presence of this convective core right after the end of the PMS should not modify the amplitude of the already relaxing field. In this way we ignore the interaction between the dynamo field and the surrounding fossil field as shown by Featherstone et al. (2009) in the case of A-type stars. Such interaction may enhance the dynamo process, and may lead to stronger core field amplitudes. For low-mass stars with no persistent convective core during the MS, we thus consider the relaxation and stabilisation of the field to occur at the end of the PMS inside the newly formed radiative interior, ignoring the early convective core, where $B_{\mathrm{init}} = B_{\mathrm{PMS}}$ with values ranging from 10^4 to 10^6 G, depending on the chosen dynamo force balance regime.

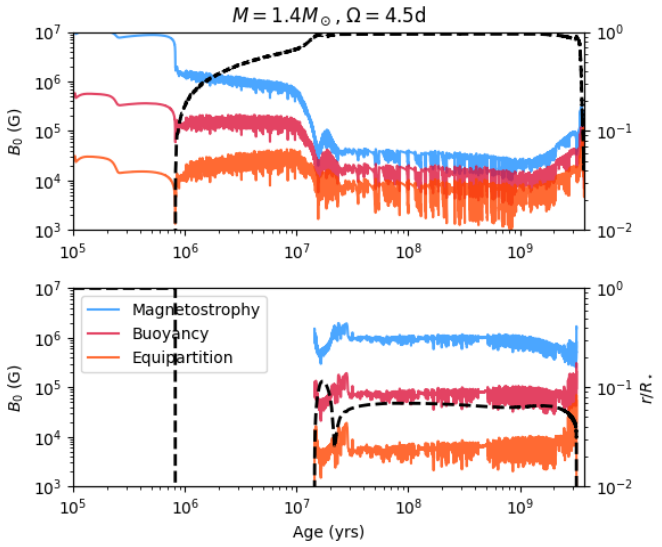


Fig. 4. Same as Fig. 3 but for a $M_\star = 1.4\,M_\odot$ star.

2.3.2. Case of $M_\star \gtrsim 1.1\,M_\odot$

If the star is massive enough for a sustainable convective core to form during the MS, we then consider this convective core to be the location of the last internal dynamo episode from which the fossil field relaxed. In that case, $R_{\rm init}$ is equal to the radius corresponding to the maximum extent of the convective core during the MS ($R_{\rm MS}$), which is estimated with evolution models from MESA (see Appendix E). Figure 4 represents the same diagrams as Fig. 3 for a $M_\star = 1.4\,M_\odot$ star. The top panel indicates the relaxation of the PMS magnetic field with the same order of magnitude as the $B_{\rm PMS}$ field estimated for low-mass stars represented in Fig. 3. In the bottom panel of Fig. 4 we observe the formation of the convective core around 10 Myr, which lasts until the end of the MS. The corresponding field amplitudes are of the same order of magnitude as the different fields estimated from the relaxation of the magnetic field resulting from the PMS dynamo (see top panel of Fig. 4). In that case, we consider the relaxation to a fossil configuration of the field to occur inside the radiative interior at the end of the MS: $B_{\rm init} = B_{\rm MS}$, with values also ranging from 10^4 to 10^6 G. This new relaxing field eventually couples with the surrounding relaxed magnetic field from the PMS, which has an amplitude of the same order of magnitude.

As shown in Figs. 3 and 4, the expected magnetic-field amplitude in the convective star during the PMS is very similar to that inside the convective core during the MS. Indeed, $B_{\rm init}$ is in both cases evaluated to be of the same order of magnitude (between 10^4 and 10^6 G). As a result, it appears from our study that there is no correlation between the development of a convective core during the MS and the fossil magnetic field amplitude on the RGB. This would imply that the discrepancy between low- and intermediate-mass star dipolar mode amplitudes on the RGB (Stello et al. 2016a) might not be provoked by the fossil magnetic field resulting from the core dynamo action on the MS. The main difference in field amplitude during the RGB in our scenario is therefore due to the contraction of the radiative interior, as the interiors of massive stars contract more efficiently than those of low-mass stars after the MS, resulting in larger magnetic field amplitudes during the RGB from Eq. (10).

We consider the dissipation of the fossil field to take place during the Ohmic timescale computed with its relaxed equilibrium global scale, and therefore we neglect the losses of energy induced by its relaxation from the previous dynamo field during the conversion of convective layers into stably stratified radiative ones throughout the evolution of stars. This is a significant approximation, as already pointed out before, as the reconnection of small-scale magnetic structures into a larger global structure would decrease the fossil-field initial amplitude (e.g. Braithwaite 2008; Duez 2011; Moffatt 2015; Emeriau-Viard & Brun 2017). This reconnection process could result into amplitude discrepancy between the fossil fields of low- and intermediate-mass stars. In addition, our estimation of magnetic field amplitudes throughout evolution is based on scaling laws and flux conservation only; we do not take into account any interaction between the fossil field in the radiative shell and the dynamo action inside the convective core of intermediate-mass stars on the MS. Such interaction could enhance the dynamo action inside the convective core of intermediate-mass stars (e.g. Featherstone et al. 2009) and thus result in stronger fossil-field amplitudes inside intermediate-mass stars than inside low-mass stars on the RGB. Such interactions between stable and dynamo fields during the MS could therefore support the magnetic scenario as an explanation for the amplitude of dipolar modes discrepancy as presented by Stello et al. (2016a).

3. First-order frequency perturbation of mixed modes

In this section we develop the first-order perturbation of the eigenfrequency of the oscillation modes due to the stellar rotation and internal magnetism.

3.1. Oscillations in non-rotating, non-magnetised stars

The general linearised equation of motion of the fluid inside a non-rotating, non-magnetised star can be written in the inertial frame as:

$$\rho \frac{d^2\boldsymbol{\xi}}{{\rm d}t^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}), \tag{11}$$

where $\boldsymbol{\xi}$ denotes eigenfunctions of the modes propagating inside the star. In the case of evolved solar-like oscillators, oscillation modes correspond to the superposition of mixed acoustic and gravity waves (Beck et al. 2011; Bedding et al. 2011). $\boldsymbol{F}$ represents all the applied forces in the inertial frame and is composed of the effect of pressure and density gradient for a non-rotating, non-magnetised star (where the effects of the centrifugal acceleration and of the Lorentz force are neglected when computing the structure of the star).

We suppose a periodic Lagrangian displacement of the fluid inside the star due to oscillation modes $\boldsymbol{\xi} = \tilde{\boldsymbol{\xi}}(r,\theta,\varphi)e^{-i\omega t}$, with ω the eigenfrequencies of the oscillations. The non-perturbative equilibrium state refers to the non-rotating, non-magnetic oscillating star, for which the equation of motion can be written:

$$\omega_0^2 \boldsymbol{\xi}_0 = -\boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{\xi}_0), \tag{12}$$

with ω_0 the unperturbed eigenfrequencies, $\boldsymbol{\xi}_0$ the unperturbed eigenmodes, and $\boldsymbol{F}_0$ reduced to pressure and buoyancy forces. Unperturbed eigenmodes for slowly or non-rotating stars can be written as a function of the azimuthal order m and the degree ℓ of the mode (Unno et al. 1989):

$$\boldsymbol{\xi}_0 = \left[\xi_{\rm r}(r)Y_\ell^m(\theta), \xi_{\rm h}(r)\frac{\partial Y_\ell^m(\theta)}{\partial\theta}, \frac{im}{\sin\theta}\xi_{\rm h}(r)Y_\ell^m(\theta)\right]e^{i(m\varphi-\omega t)}, \tag{13}$$

with (r,θ,φ) the usual spherical coordinates, and Y_ℓ^m the spherical harmonics of degree ℓ and azimuthal order m.

3.2. First-order perturbative forces

3.2.1. Rotational inertial forces

In order to connect our theory to observations, we approximate the star as a slowly rotating object with two layers, where each layer is rotating as a solid body. Let $\Omega_{\rm core}$ be the angular rotation rate in the radiative interior and $\Omega_{\rm env}$ be the angular rotation rate in the convective envelope. This approximation is justified because asteroseismology generally provides only one measurement inside the deep radiative interior of the star and one at the surface (because of the limitation of the number of measured modes and the spatial structure of the kernels or eigenfunctions). These rotation rates are considered small enough so that the resulting terms in $\Omega(r)$ only come into play as a first-order perturbation (e.g. Gough & Thompson 1990). Observational studies of rotational splitting of mixed modes provide average values of surface and internal rotation for SGs and RGs. Specifically, we fix $\Omega_{\rm core} \simeq 0.5$ μHz and $\Omega_{\rm env} \simeq \Omega_{\rm core}/10$ (Deheuvels et al. 2014; Gehan et al. 2018). Finally, with $R_{\rm rad}$ being the size of the radiative interior,

$$\Omega(r,\theta) = \Omega(r) \tag{14}$$

$$= \begin{cases} \Omega_{\rm core} & \text{if } r < R_{\rm rad} \\ \Omega_{\rm env} & \text{if } r > R_{\rm rad} \end{cases}. \tag{15}$$

The system is thus affected in the inertial frame at first order in Ω by the Coriolis acceleration ($\boldsymbol{F}_{\rm c}$, Eq. (16)) and by the advection linked to the rotating motion of the star relative to an observer in an inertial frame ($\boldsymbol{F}_{\rm f}$, Eq. (17)). In the following, for rotational effects, we make use of the decompositions $\omega = \omega_0 + \epsilon_\Omega \omega_1$, $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 + \epsilon_\Omega \boldsymbol{\xi}_1$, and $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 + \epsilon_\Omega \boldsymbol{F}_1$, with $\epsilon_\Omega \ll 1$, which is the dimensionless parameter $\epsilon_\Omega = \Omega/\Omega_{\rm C}$, with $\Omega_{\rm C} = (GM/R^3)^{-1/2}$, which is the Keplerian critical angular velocity (see Gough & Thompson 1990). The Coriolis operator stands for:

$$\boldsymbol{F}_{\rm c}(\boldsymbol{\xi}_0) = 2i\omega_0 \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\xi}_0, \tag{16}$$

where $\boldsymbol{\Omega} = \Omega(r)(\cos\theta \boldsymbol{e}_{\rm r} - \sin\theta \boldsymbol{e}_\theta)$ is the rotation vector (whose amplitude is small enough in the core and in the envelope for the effect of the Coriolis acceleration to be considered as a first-order perturbation). Under the same approximation, the advection operator associated with the change of frame is written at first order as

$$\boldsymbol{F}_{\rm f}(\boldsymbol{\xi}_0) = -2m\omega_0 \Omega \boldsymbol{\xi}_0. \tag{17}$$

3.2.2. The Lorentz force associated to magnetism

For RG with a moderate internal magnetic field, we consider the magnetic field energy to be weak enough for the effects of the unperturbed Lorentz force on the system to be negligible compared to the gravitational force (e.g. Augustson & Mathis 2018, and in prep.).

The system is thus also affected in the inertial frame at first order by the perturbed Lorentz force ($\boldsymbol{\delta F}_{\rm L}$, Eq. (18)). We again make use of decompositions associated with the perturbed Lorentz force: $\omega = \omega_0 + \epsilon_B \omega_1$, $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 + \epsilon_B \boldsymbol{\xi}_1$ and $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 + \epsilon_B \boldsymbol{F}_1$, with $\epsilon_B \ll 1$, the dimensionless parameter $\epsilon_B = B_0 \left(\mu_0 GM^2/R^4\right)^{-1/2}$ which compares the magnetic and gravitational forces (Gough & Thompson 1990). Finally, the perturbed linearised magnetic operator is given by

$$\boldsymbol{\delta F}_{\rm L}(\boldsymbol{\xi}_0) = \boldsymbol{\delta F}_{{\rm L},j+t}(\boldsymbol{\xi}_0) + \boldsymbol{\delta F}_{\rm L,c}(\boldsymbol{\xi}_0), \tag{18}$$

where $\boldsymbol{\delta F}_{{\rm L},j+t}$ represents the sum of the current and tension terms:

$$\boldsymbol{\delta F}_{{\rm L},j+t}(\boldsymbol{\xi}_0) = \frac{1}{\mu_0}[(\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{\delta B} + (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{\delta B}) \wedge \boldsymbol{B}], \tag{19}$$

where the fluctuation of the magnetic field that comes from the linearised induction equation[1] is

$$\boldsymbol{\delta B} = \boldsymbol{\nabla} \wedge (\boldsymbol{\xi}_0 \wedge \boldsymbol{B}), \tag{20}$$

and $\boldsymbol{\delta F}_{\rm L,c}$ is the compression term associated with the compressibility of the mode (Gough & Thompson 1990):

$$\boldsymbol{\delta F}_{\rm L,c}(\boldsymbol{\xi}_0) = \frac{\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{\xi}_0)}{\rho} (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{B}. \tag{21}$$

3.3. First-order perturbation equations

The first-order momentum equation is written in the inertial frame as

$$2\omega_1 \omega_0 \boldsymbol{\xi}_0 + \omega_0^2 \boldsymbol{\xi}_1 = -\boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{\xi}_1) - \boldsymbol{\delta F}_{\rm L}(\boldsymbol{\xi}_0)/\rho - \boldsymbol{F}_{\rm c}(\boldsymbol{\xi}_0) - \boldsymbol{F}_{\rm f}(\boldsymbol{\xi}_0), \tag{22}$$

with $\boldsymbol{\xi}_1$ being the perturbed eigenfunctions of the modes. We then apply the scalar product $\langle \boldsymbol{\xi}_0, \square \rangle = \int_V \rho \boldsymbol{\xi}_0^* \cdot \square {\rm d}V$ to Eq. (22). As $\boldsymbol{F}_0$ is Hermitian, Eq. (22) simplifies and leads to the expression of the frequency shift at first order in the inertial frame:

$$\omega_1 = -\frac{\langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\delta F}_{\rm L}(\boldsymbol{\xi}_0)/\rho \rangle + \langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{F}_{\rm c}(\boldsymbol{\xi}_0) \rangle + \langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{F}_{\rm f}(\boldsymbol{\xi}_0) \rangle}{2\omega_0 \langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_0 \rangle}. \tag{23}$$

3.4. Analytical development of frequency shifts

We directly estimate the inertia of the modes, and the contribution of the Coriolis acceleration and of the advection term associated to the change of frame to the splitting in the inertial frame. Equation (24) is the inertia of the modes, independent of the azimuthal order m:

$$\langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_0 \rangle = \int_0^R \rho r^2 \left(|\xi_{\rm r}^2 + \Lambda |\xi_{\rm h}|^2 \right) {\rm d}r, \text{ with } \Lambda = \ell(\ell+1). \tag{24}$$

The effect of the Coriolis acceleration and of the change of frame are usually written together as the global rotational perturbation (Aerts et al. 2010). For clarity we chose to detail the two terms in Eqs. (25) and (26):

$$\langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{F}_{\rm c}(\boldsymbol{\xi}_0) \rangle = 4m\omega_0 \int_0^R \rho r^2 \Omega(r) |\xi_{\rm h}|^2 {\rm d}r + 8m\omega_0 \int_0^R \rho r^2 \Omega(r) \xi_{\rm r}^* \xi_{\rm h} {\rm d}r, \tag{25}$$

$$\langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{F}_{\rm f}(\boldsymbol{\xi}_0) \rangle = -2m\omega_0 \left(\int_0^R \rho r^2 \left(|\xi_{\rm r}|^2 + \Lambda |\xi_{\rm h}|^2 \right) \Omega(r) {\rm d}r \right). \tag{26}$$

We verify that in the case of solid rotation $\Omega_{\rm s}$, the change of frame can as usually be written as

$$-\frac{\langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{F}_{\rm f}(\boldsymbol{\xi}_0) \rangle}{2\omega_0 \langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_0 \rangle} = +m\Omega_{\rm s}. \tag{27}$$

[1] By combining the Maxwell Faraday and the Maxwell Ampére equations with the Ohm's law and by considering an ideal plasma with infinite electric conductivity (low Ohmic diffusivity η, see Eq. (1), usually verified inside stars), the induction equation reduces to $\partial \boldsymbol{B}/\partial t = \boldsymbol{\nabla} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{B})$, with $\boldsymbol{u}$ the velocity field.

The calculation of $\langle \boldsymbol{\xi}_0, \delta \boldsymbol{F}_{\rm L}(\boldsymbol{\xi}_0)/\rho \rangle$ involves 50 terms for which the angular integral does not cancel by geometrical combination of the spherical harmonics. These are reported in Appendix C. Depending on the nature of the mixed modes, dominant terms can be extracted from this massive expression (see e.g. works by Hasan et al. 2005; Rashba et al. 2007, for high-radial-order pure gravity modes). In the case of subgiant stars, mixed-mode patterns are strongly dominated by peaks located at the acoustic mode eigenfrequencies, and are denoted as $p-m$ modes in the following study. On the contrary, modes located at internal gravity-mode frequencies have very small acoustic signatures. They dominate the spectrum of red giants, and are denoted $g-m$ modes. The dominant nature of the mode strongly influences the value of each of the 50 terms; we refer to Sects. 4.3 and 5.2 for the extraction of dominant terms and to Mathis et al. (2021) for asymptotic formulations in the case of g-dominated modes and p-dominated modes.

3.5. Validity of the perturbative analysis

In our scenario the magnetic field perturbation on mixed-mode frequencies plays a role at first order. For this approximation to be valid, the magnetic field amplitude should be small when compared to the zeroth-order processes. Thus, the frequency of the $g-m$ modes should be larger than the characteristic Alfvén frequency $\omega_{\rm A}$, usually written as

$$\omega_{\rm A} = \frac{\boldsymbol{B}.\boldsymbol{k}}{\sqrt{\mu_o \rho}}, \tag{28}$$

with $\boldsymbol{k}$ the wave vector. For high-order radial modes, $\boldsymbol{B}.\boldsymbol{k} \simeq B_0 b_{\rm r} k_{\rm r}$, with $b_{\rm r}$ close to unity, $k_{\rm r}$ the vertical wave number scaling for $g-m$ modes as $\frac{N_{\rm max}}{\omega_0}\frac{\sqrt{\Lambda}}{R_{\rm rad}}$, the critical field amplitude value for the perturbative study to be valid can be expressed as:

$$B_{{\rm c},g} \simeq \frac{\omega_0^2 R_{\rm rad}\sqrt{\mu_0 \rho_{\rm c}}}{\sqrt{\Lambda} N_{\rm max}}, \tag{29}$$

with $\rho_{\rm c}$ the central density, and $N_{\rm max}$ the maximum value of the Brunt-Väisälä angular frequency profile defined as:

$$N^2 = {\rm g}\left(\frac{1}{\Gamma_1}\frac{{\rm d}\ln P}{{\rm d}r} - \frac{{\rm d}\ln \rho}{{\rm d}r}\right), \tag{30}$$

where g is the gravity of the hydrostatic background. In order to ensure that the frequency of the mode is much larger than the Alfvén frequency, we set the limit of validity of the perturbative analysis for $g-m$ modes to $B_{{\rm c},g}/1000$.

In the case of high-radial-order $p-m$ modes, the Alfvén speed

$$v_{\rm A} = B_0/\sqrt{\mu_0 \rho} \tag{31}$$

should be compared to the sound speed of the gas ($c_{\rm s}$) through S_1 the Lamb frequency, defined as:

$$S_1^2 = \frac{\Lambda c_{\rm s}^2}{r^2} = k_{\rm h}^2 c_{\rm s}^2, \quad \text{where} \quad k_{\rm h} = \frac{\sqrt{\Lambda}}{r}. \tag{32}$$

For high-radial-order $p-m$ modes, the minimum field above which the perturbative analysis may not be valid, considering the minimum value of the Lamb angular frequency $S_{\rm l,min}$ inside the radiative core, is written as

$$B_{{\rm c},p} \simeq \sqrt{\frac{\mu_0 \rho_{\rm c}}{\Lambda}} \times S_{\rm l,min} \times R_{\rm rad}. \tag{33}$$

In the remainder of the present study, we set the limit of validity for the perturbative analysis for $p-m$ modes to $B_{{\rm c},p}/1000$.

4. Investigation of the magnetic impact on mixed-mode frequencies of red giants

To evaluate the different contributions from Eq. (23) to the frequency perturbation of mixed modes, we model stellar structures with the MESA evolutionary code (Paxton et al. 2011), and we compute the frequency of the associated oscillation modes using the GYRE pulsation code (Townsend & Teitler 2013). In this section, we estimate frequency perturbations from rotation and magnetism on mixed dipolar ($\ell = 1$) and quadrupolar ($\ell = 2$) modes for the reference star with $M_\star = 1.5\,M_\odot$ and $Z = 0.02$ along the RGB. This star is characteristic of intermediate-mass stars observed on the RGB (e.g. Yu et al. 2016). In Sect. 5 the effect of internal magnetism on mixed modes during the SG stage is also investigated.

4.1. Expected fossil magnetic field signature on mixed-mode frequencies during the RGB

From the conservation of the magnetic flux from the end of the MS, we evaluate the magnetic amplitude range expected for a typical red giant with $M_\star = 1.5\,M_\odot$ and $Z = 0.02$. The star has oscillation modes centred around the frequency of maximum mode power $\nu_{\rm max}$ of about 172 µHz. For such a star, the initial radiative radius $R_{\rm init}$ is about 92% of the star's total radius at the beginning of the subgiant phase ($R_\star = 1.8 \times 10^{11}$ cm, $R_{\rm init} = 1.6 \times 10^{11}$ cm). This reduces to about 13% of the total radius for the considered evolutionary stage star at the middle of the RGB ($R_\star = 3.7 \times 10^{11}$ cm, $R_{\rm rad} = 5.0 \times 10^{10}$ cm). The equipartition regime, which is used to estimate field amplitudes in the study of Cantiello et al. (2016) leads to $B_0 \sim 0.7$ MG, while the magnetostrophic regime sets the upper boundary of the field amplitude to $B_0 \sim 7$ MG (these boundaries will be extended along the evolutionary path of the reference star for the analysis of the impact of magnetism along the evolution of the star in Sect. 4.5). In the following paragraph, we investigate the effect of the change of internal structure of the star along its evolutionary path on the RGB on the effect of magnetism at mixed-mode frequencies. We choose to use a magnetic-field amplitude value of 1 MG, consistent with the presence of a convective core dynamo during the MS.

As a first step, we verify that our perturbative approach can be used for this typical $M_\star = 1.5\,M_\odot$, $Z = 0.02$, $\nu_{\rm max} \simeq 172$ µHz red giant. By fixing the validity limit of the perturbative analysis to a reasonable value of $B_0 = B_{{\rm c},g}/1000$, the critical value for the magnetic-field amplitude at $\nu_{\rm max}$ is $B_0 \simeq 3$ MG from Eq. (29). Regarding the relatively large value of this limit, we conclude that the typical magnetic frequency-shift amplitudes of $g-m$ modes around $\nu_{\rm max}$ represented in Fig. 5 belong to the valid frequency range of the perturbative analysis. However, a similar calculation for a frequency of 100 µHz leads to a critical field value (divided by 1000) of $B_0 \sim 1$ MG, equal to the value used to build Fig. 5. The MG order of magnitude is too high to ensure that the perturbative analysis is valid for evolved red giants with $\nu_{\rm max}$ lower than ~100 µHz. This upper boundary will further be discussed along the evolution of the reference star in Sect. 4.5. The reasonable limiting value of $B_0 = B_{{\rm c},p}/1000$ for the pertubative analysis to be valid for $p-m$ modes leads to field amplitudes of about $B_0 \simeq 10$ MG for typical $S_{\rm l,min} \simeq 200$ µHz for the considered red giant by using Eq. (33). The following study with a field amplitude of 1 MG is therefore consistent with a perturbative regime for $p-m$ modes.

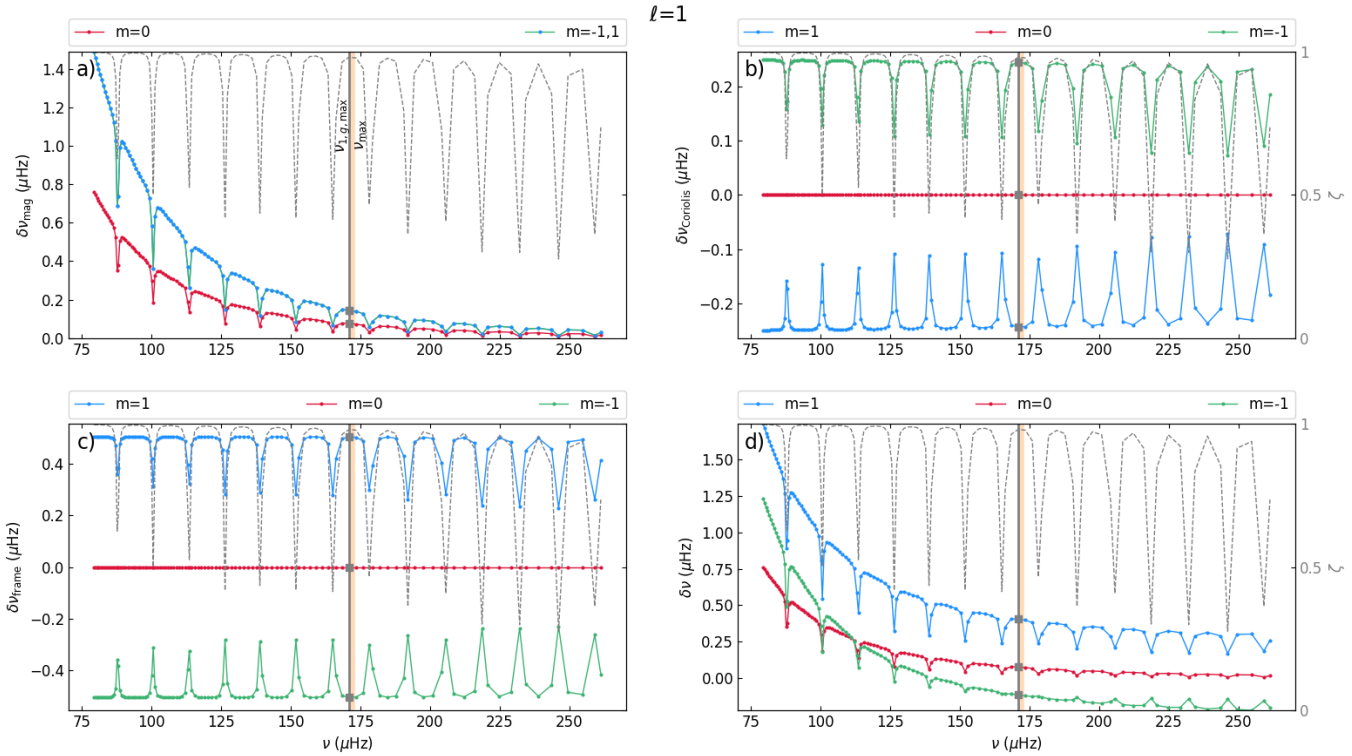


Fig. 5. Frequency splittings ($\delta\nu$) calculated for mixed modes frequencies of a $M_\star = 1.5\,M_\odot$, $Z = 0.02$, $\nu_{\rm max} \simeq 172$ μHz red giant, corresponding to (*a*) magnetic splitting, (*b*) the Coriolis effect, (*c*) the change from co-rotating to inertial frame, and (*d*) total frequency shifts. Red lines and points represent splittings for the $m = 0$ component. The blue and green lines represent the magnetic splitting for the $m = 1$ and $m = -1$ components respectively, that overlap on *panel a*. The grey dashed line represents the ζ function as defined by Goupil et al. (2013), the beige vertical line indicates the position of $\nu_{\rm max}$, and the grey vertical line the frequency of the $\ell = 1$ g-dominated mode closest to $\nu_{\rm max}$, $\nu_{1,g,\rm max}$, with squares indicating the corresponding splitting values associated with the different orders m.

4.2. Results for a typical $M_\star = 1.5\,M_\odot$, $Z = 0.02$, $\nu_{max} \sim 172\,\mu$Hz star on the RGB

The different terms constituting Eq. (23) are evaluated for mixed modes $\ell = 1$ and $\ell = 2$ frequencies within the $[\nu_{\rm max} - 7\Delta\nu{:}\nu_{\rm max} + 7\Delta\nu]$ interval, which ensures that detectable solar-like-oscillation modes are inside this region for most stars. The unperturbed frequencies of mixed modes computed with GYRE (Townsend & Teitler 2013) are degenerated because of the choice of a non-rotating and non-magnetic equilibrium. Each unperturbed mode is thus expected to be split into $2\ell + 1$ components because of both rotational and magnetic effects when applying Eq. (23). Both magnetic first-order terms (reported in Appendix C) and the mode inertia (see Eq. (23)) depend on m^2 or are independent of m; thus, we expect the magnetic-frequency splittings of the $\pm m$ modes to be equal.

Panel a of Fig. 5 represents magnetic shifts on $\ell = 1$ mixed-mode frequencies $\left(\delta\nu_{\rm mag,core,}{}_m = -\langle\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{F}_L(\boldsymbol{\xi}_0)\rangle/(2\omega_0\langle\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_0\rangle)\right)$, resulting from a field of amplitude $B_0 = 1$ MG affecting the reference star on the RGB. The magnetic field components $b_{\rm r}$, b_θ, and b_φ expressed by Eqs. (7)–(9) describe the stable axisymmetric fossil field from the configuration given by Eq. (2). The magnetic splittings of the $m = -1$ and $m = 1$ modes are equal as expected ($C_{1,[1,-1]}$), and are larger than the splitting for $m = 0$ modes ($C_{1,0}$) by a factor $C_{1,[1,-1]}/C_{1,0} = 2$, as calculated by Hasan et al. (2005). A characteristic pattern in the magnetic splittings can be seen: the global trend follows a power law in ν, with deviations toward lower splitting values equivalently spaced in frequency. Such deviations are associated with the ζ function, a measure of the g nature of the mode through the ratio of the mode inertia in the g cavity over the total mode inertia (Deheuvels et al. 2012; Goupil et al. 2013):

$$\zeta = \frac{\mathcal{I}_{\rm core}}{\mathcal{I}} = \frac{\int_0^{R_{\rm rad}} \left(\xi_{\rm r}^2 + \Lambda\xi_{\rm h}^2\right) r^2 {\rm d}r}{\int_0^{R_\star} \left(\xi_{\rm r}^2 + \Lambda\xi_{\rm h}^2\right) r^2 {\rm d}r}. \tag{34}$$

This characteristic pattern is very similar to the pattern of mixed modes split by rotation as studied by Goupil et al. (2013) and is represented by the grey dashed line in Fig. 5. Panel b of Fig. 5 represents the frequency splittings due to the Coriolis acceleration only on $\ell = 1$ mixed-mode frequencies, whereas panel c shows the effect of the change of frame on mixed mode frequencies due to the rotation of the star. These two rotational components are evaluated by considering typical red-giant rotation rates from Gehan et al. (2018) of $\Omega_{\rm core}/(2\pi) = 0.5$ μHz, and $\Omega_{\rm env}/(2\pi) = 0.05$ μHz. Combined together, these terms are well known from previous studies (e.g. Aerts et al. 2010; Mosser et al. 2015; Vrard et al. 2015), and can also be expressed as a function of the ζ function.

Dips in the ζ function (grey dashed line) indicate the location of $p - m$ modes whereas the value of ζ tends towards 1 for $g - m$ modes. As the rotation rate of evolved solar-like stars is much higher deeper below the surface than at the surface, the g-mode cavity is more affected by rotation. This leads to a global rotation splitting (including both b and c components) that is larger for $g - m$ than for $p - m$ modes, which also probe the slowly rotating envelope. As a consequence of the confinement of the magnetic field inside the g-mode cavity, g-dominated mixed modes are also more affected by the magnetic field than p-dominated

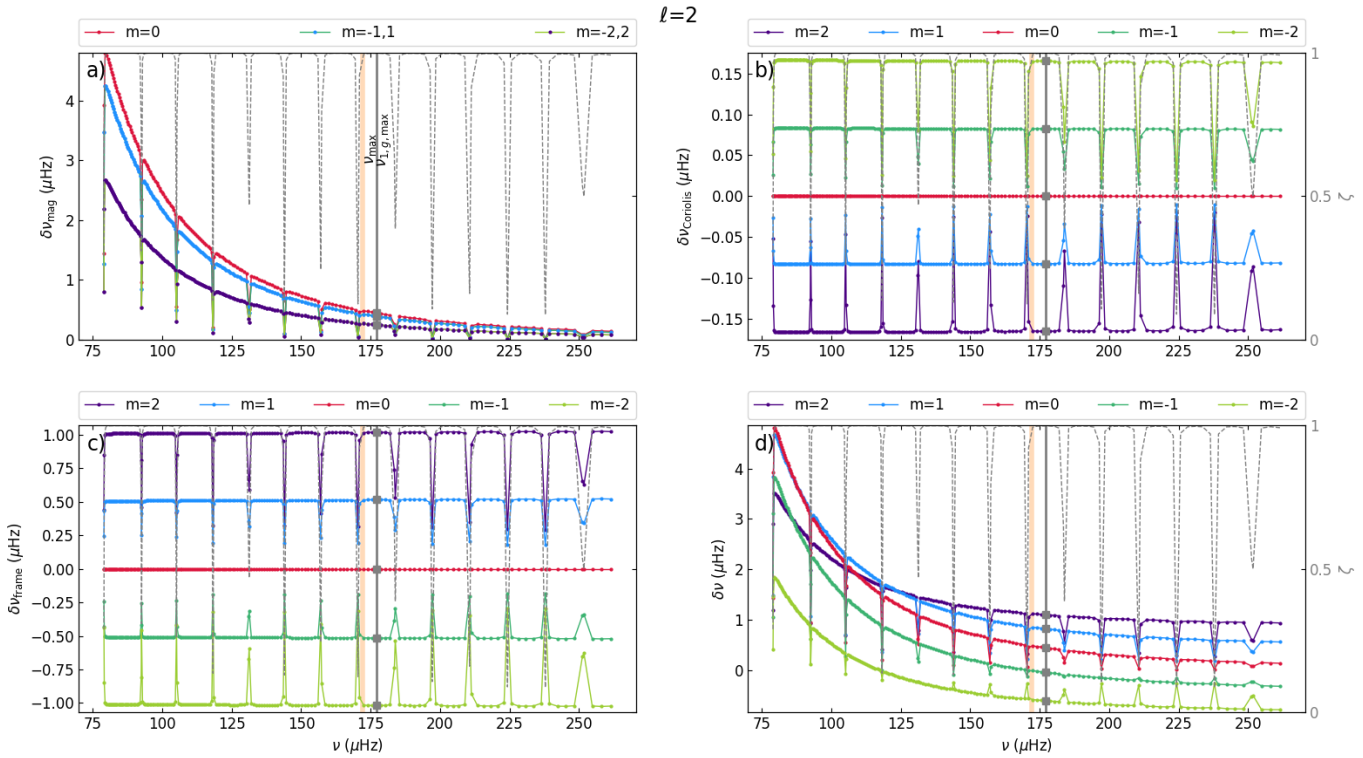


Fig. 6. As in Fig. 5 but for $\ell = 2$ mixed modes. The red line represents the $m = 0$ mode, the green line with blue points the $m = -1, 1$ components, and the green line with purple points the $m = -2, 2$ components.

mixed modes. Indeed, the minimum values of ζ correlate with the minimum in the magnetic splitting in panel a.

Finally, the bottom right panel provides the global splitting due to rotation and magnetism under the previously detailed rotational and magnetic configurations. Unperturbed frequencies are generally shifted towards higher frequencies for modes around $\nu_{\rm max}$, with a greater shift for prograde ($m = 1$) and retrograde ($m = -1$) components than for the zonal modes ($m = 0$), which are only affected by magnetism. As a consequence of this global frequency change, magnetism leads to a break of symmetry of the usually studied rotational g-dominated triplet, as seen by the non-regular vertical spacing between two consecutive grey squares. Rotation plays against magnetism for the shifting of $m = -1$, $p-m$ modes (at frequencies corresponding to dips of the ζ function), resulting in upward peaks in the bottom right diagram at high frequencies.

In Fig. 6 the same approach is taken for quadrupolar $\ell = 2$ mixed modes. In panel a, magnetic splits are represented as a function of the frequency of the modes, depending on the value of m. As opposed to the $\ell = 1$ case, zonal modes are more affected by magnetism than the $m = 1, -1$ and even more so than the $m = 2, -2$ mixed modes, by factors of $C_{2,0}/C_{2,[1,-1]} = 1.125$ and $C_{2,0}/C_{2,[2,-2]} = 1.8$ respectively, as in Hasan et al. (2005). Panels c and d represent the contribution from the Coriolis acceleration and from the change of frame. Panel d shows the global frequency shifts for $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ in the inertial frame due to magnetism and rotation. The ζ function and the location of $\nu_{1,g,\rm max}$ are reported in each panel for reference. As for $\ell = 1$ mixed modes, $p - m$ modes are less affected by both rotation and magnetism than $g - m$ modes. Each perturbed quintuplet corresponding to one given unperturbed mixed mode is expected to have non-constant spacings between its components, as shown by the non-constant vertical spacing between the quintuplet components in panel d. The asymmetry of $\ell = 1$ and $\ell = 2$ mixed-mode multiplets are schematically represented in Fig. 7, in which we can observe the simplified behaviour of dipolar- and quadrupolar-mode frequency patterns due to internal magnetism.

4.3. Asymptotic expressions of the magnetic perturbations on g–m mode frequencies

In order to interpret the previously presented asymptotic patterns of magnetic splittings, we investigate the frequency dependency of the magnetic splitting at low ($\omega_0 \ll N$) and high ($\omega_0 \gg S_1$) frequency, with N the angular Brunt-Väisälä frequency (Eq. (30)) and S_1 the Lamb angular frequency (Eq. (32)) in rad s^{-1}.

In both cases, the oscillation vertical wavelength is much smaller than the characteristic distance of change of the equilibrium state describing the surrounding fluid. In the Cowling approximation, and for high-order modes, the equation of non-radial oscillations can be written (e.g. Aerts et al. 2010):

$$\frac{d^2\xi_{\rm r}}{{\rm d}r^2} = \frac{\omega_0^2}{c^2}\left(1 - \frac{N^2}{\omega_0^2}\right)\left(\frac{S_1^2}{\omega_0^2} - 1\right)\xi_{\rm r}. \tag{35}$$

In the approximation of high-order mixed modes, the local radial displacement is dominated by the horizontal one ($\xi_{\rm r} \ll \xi_{\rm h}$) in the radiative region. The high-radial-order modes have a small vertical wavelength, allowing us to perform an asymptotic Jeffreys-Wentzel-Kramers-Brillouin (JWKB) analysis (Hasan et al. 2005; Prat et al. 2019). Terms with high-order $\xi_{\rm h}$ derivatives dominate because $\xi_{\rm h}' \propto ik_{\rm r}\xi_{\rm h}, \xi_{\rm h}'' \propto -k_{\rm r}^2\xi_{\rm h}$, and $k_{\rm r} \gg 1$.

These approximations allow us to estimate the dominant terms composing Eq. (23) in the case of low-frequency $g - m$

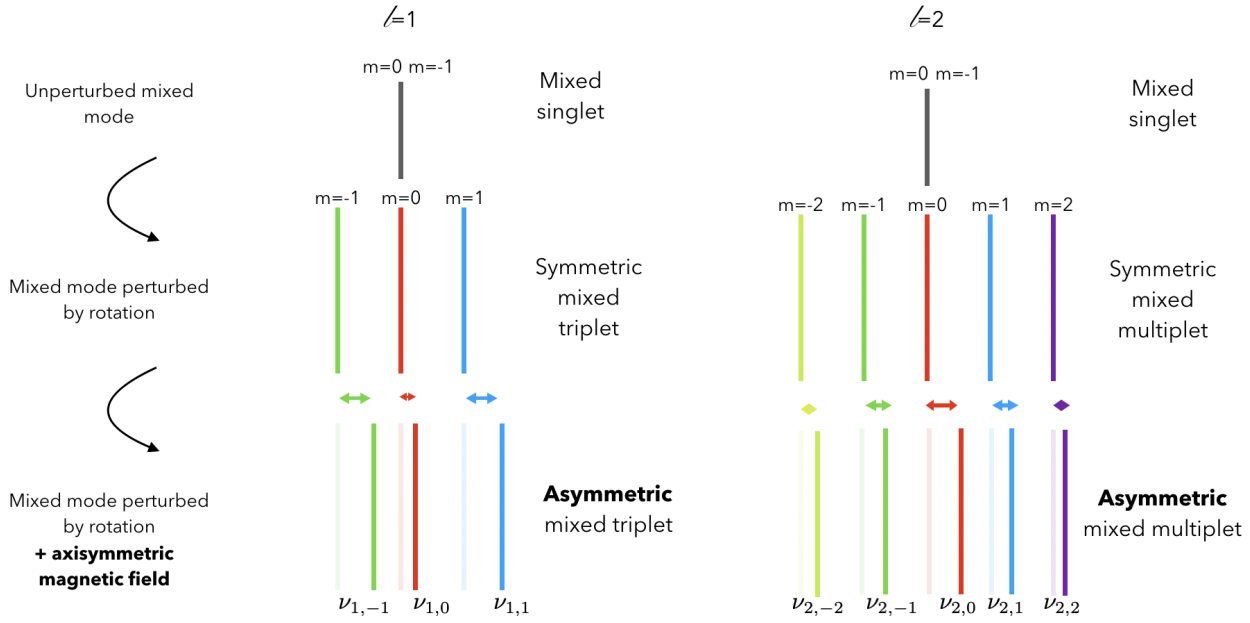


Fig. 7. Sketch representing the effect of rotation and magnetism on a single unperturbed mixed mode frequency of degree $\ell = 1$ and $\ell = 2$.

modes:

$$\langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_0 \rangle_g \simeq \int_0^R \rho r^2 \Lambda |\xi_\mathrm{h}|^2 \mathrm{d}r, \tag{36}$$

$$\langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{F}_\mathrm{c}(\boldsymbol{\xi}_0) \rangle_g \simeq 4m\omega_0 \int_0^R \rho r^2 \Omega |\xi_\mathrm{h}|^2 \mathrm{d}r, \tag{37}$$

$$\langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{F}_\mathrm{f}(\boldsymbol{\xi}_0) \rangle_g \simeq -2m\omega_0 \int_0^R \rho r^2 \Omega\Lambda |\xi_\mathrm{h}|^2 \mathrm{d}r, \tag{38}$$

$$\langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\delta F}_\mathrm{L}(\boldsymbol{\xi}_0)/\rho \rangle_g \simeq 2\pi B_0^2 \int_0^R r\xi_\mathrm{h}^* b_\mathrm{r} \left(r\xi_\mathrm{h} b_\mathrm{r}\right)'' \mathrm{d}r \times \int_0^\pi \left(\left(\frac{m Y_l^m}{\sin\theta} \right)^2 + \left(\partial_\theta Y_l^m \right)^2 \right) \cos^2\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta. \tag{39}$$

From Eq. (23), the magnetic contribution to the frequency perturbation is

$$\delta\omega_{\mathrm{mag},g} \propto \frac{B_0^2}{\omega_0} \times \mathcal{I}_g, \tag{40}$$

with, in the case of high-order gravity modes,

$$\mathcal{I}_g = \frac{\int_0^R |(r b_\mathrm{r} \xi_\mathrm{h})'|^2 \mathrm{d}r}{\int_0^R \rho r^2 |\xi_\mathrm{h}|^2 \mathrm{d}r}, \tag{41}$$

where we used Eqs. (36) and (39). In the low-frequency regime, where $\omega_0 \ll N \ll S_1$, Eq. (35) becomes

$$\frac{d^2\xi_\mathrm{r}}{\mathrm{d}r^2} = -\frac{N^2}{\omega_0^2}\frac{\Lambda}{r^2}\xi_\mathrm{r} = -k_\mathrm{r}^2 \xi_\mathrm{r}. \tag{42}$$

In the Cowling approximation, we obtain a set of radial equations of momentum (see for instance Alvan et al. 2013), with p_1 the perturbation associated with the gas pressure:

$$\xi_\mathrm{h} = \frac{1}{r\omega_0^2}\frac{1}{\rho_0} p_1, \tag{43}$$

and

$$\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}r} \simeq -\rho_0 N^2 \xi_\mathrm{r}. \tag{44}$$

Finally, we have that

$$\xi_\mathrm{h} = \frac{i}{r}\left(\frac{N^2}{\omega_0^2}\right)\frac{\xi_\mathrm{r}}{k_\mathrm{r}}. \tag{45}$$

We write $N = N_\mathrm{max} \times f(r)$, with N_max the maximum of the Brunt-Väisälä frequency inside the radiative interior and $f(r)$ containing all the radial dependence of the N profile. As we look for the frequency dependence of $\mathcal{I}_g$, and by the use of the JWKB solution $\xi_\mathrm{r} \propto \frac{1}{\sqrt{k_\mathrm{r}}} e^{i\int k_\mathrm{r} \mathrm{d}r}$ (Froman & Froman 2005), we obtain

$$\xi_\mathrm{h} = \left(\frac{N_\mathrm{max}^2}{\omega_0^2}\right)^{1/4} \times F(r), \tag{46}$$

with $F(r)$ containing all factors that are independent of ω. Considering high-order $g-m$ modes, we evaluate

$$|(r^2 b_\mathrm{r} \xi_\mathrm{h})'|^2 \propto \left(\frac{N_\mathrm{max}^2}{\omega_0^2}\right)^{3/2}, \tag{47}$$

and

$$|\xi_\mathrm{h}|^2 \propto \left(\frac{N_\mathrm{max}^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2}. \tag{48}$$

This leads to

$$\mathcal{I}_g \propto \frac{N_\mathrm{max}^2}{\omega_0^2}, \text{ and } \delta\omega_g \propto \frac{B_0^2}{\omega_0^3} N_\mathrm{max}^2. \tag{49}$$

The magnetic splitting of $g-m$ modes is thus proportional to ω_0^{-3} to leading order. In Fig. 8, we represent the magnetic splittings $\delta\nu_\mathrm{mag} = \delta\nu_{\mathrm{mag,core},m}$ normalised to one of $m = -1, 0, 1$ mixed modes for the reference red giant from panel a of Fig. 5. The black line indicates the normalised frequency power law

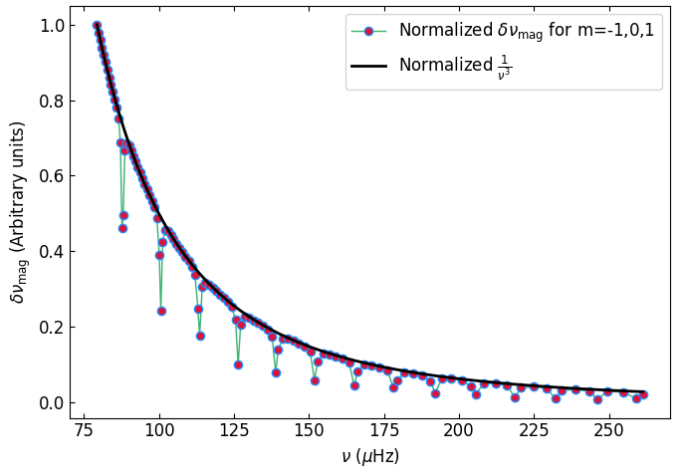


Fig. 8. Normalised magnetic splittings versus mixed-mode frequencies computed for a simulated $M_\star = 1.5\,M_\odot$, $Z = 0.02$, $\nu_{\rm max} \simeq 172\,\mu$Hz red giant. The normalised power law following $1/\nu^3$ is superimposed in black.

from Eq. (49). As a result, $g-m$ modes perfectly follow the frequency power law, as inferred from the JWKB analysis. However, $p-m$ modes that are less affected by magnetism are not reproduced by this analysis. For a complete theoretical description of asymptotic behaviours, including the origin of the $p-m$ dips through the ζ function and the theoretical estimation of angular integrals setting the amplitude of $\delta\nu_{\rm mag}$, we refer to our paper (Mathis et al. 2021).

4.4. Characterisation of the multiplet asymmetry

Regardless of the degree ℓ of the mixed modes, the $g-m$ multiplet formed by the lifting of degeneracy by first-order perturbations linked to rotation and magnetism is asymmetric. This asymmetry can be quantified for each $|m|$ through the calculation of an asymmetry measure $\delta_{\ell,m}$ (similar formalism to that in Deheuvels et al. 2017, adapted for the consideration of magnetism in addition to rotation):

$$\delta_{\ell,m} = \frac{\nu_{\ell,m} + \nu_{\ell,-m} - 2\nu_{\ell,0}}{\nu_{\ell,m} - \nu_{\ell-m}} = \frac{\delta\nu_{\ell,m} + \delta\nu_{\ell,-m} - 2\delta\nu_{\ell,0}}{\delta\nu_{\ell,m} - \delta\nu_{\ell,-m}}. \quad (50)$$

This measure is equal to zero when the m and $-m$ components of the multiplet are perfectly symmetric around the $m = 0$ component, and reaches 1 or -1 when one of the $|m|$ components overlaps with the $m = 0$ mode. For the reference red giant studied in this section, with the considered $\Omega_{\rm core} = 10 \times \Omega_{\rm env} = 0.5\,\mu$Hz, $B_0 = 1$ MG, total frequency perturbations are estimated at $\nu_{1,g,\rm max}$: $\delta\nu_{1,1} \simeq 0.41\,\mu$Hz, $\delta\nu_{1,-1} \simeq -0.076\,\mu$Hz, $\delta\nu_{1,0} \simeq -0.11\,\mu$Hz, $\delta\nu_{2,2} \simeq 0.93\,\mu$Hz, $\delta\nu_{2,-2} \simeq -0.74\,\mu$Hz, $\delta\nu_{2,1} \simeq 0.56\,\mu$Hz, $\delta\nu_{2,-1} \simeq -0.27\,\mu$Hz, and $\delta\nu_{2,0} \simeq 0.17\,\mu$Hz from d panels of Figs. 5 and 6. These values lead to asymmetry measures of $\delta_{1,1} \simeq 0.28$, $\delta_{2,2} \simeq -0.09$, and $\delta_{2,1} \simeq -0.06$. We notice the change of sign of the measure from $\ell = 1$ to $\ell = 2$ modes, where the $m = 0$ mode is closer to the $m = -1$ mode for $\ell = 1$, and closer to the $m = 1$ mode for $\ell = 2$. The absolute value of the asymmetry measure is higher for $\ell = 1$ modes than for $\ell = 2$, meaning that the impact of magnetism compared to rotation is stronger for $\ell = 1$ modes. This is not surprising considering that the acoustic dipolar modes couple with internal gravity modes, which are sensitive to the magnetic field, deeper inside the radiative interior than $\ell = 2$ modes for a given frequency.

Figure 9 depicts the changes in the magnetic splittings along the evolutionary track of the reference star from the base of the RGB, during which mixed modes can be approximated as $g-m$ modes. Squares indicate for each evolutionary stage the $\nu_{1,g,\rm max}$ frequency defined in the previous section, for each of the colour-coded evolutionary stages reported on the Hertzsprung-Russell diagram in the right-hand panel of Fig. 9. The middle panel is composed of the superposition of the magnetic splittings (equivalent to panel a in Fig. 5) corresponding to a field of amplitude $B_0 = 1$ MG for the $m = 1$ mixed modes at the given evolutionary stages, as a function of their unperturbed frequencies. We notice that for stars ascending the RGB, the value of $\nu_{1,g,\rm max}$ is globally monotonously decreasing. As a consequence, the magnetic splitting value of $g-m$ modes increases as the star evolves on the RGB (the base of the RGB corresponds to $\nu_{1,g,\rm max} \lesssim 550\,\mu$Hz for the considered reference star). The $p-m$ modes, which are less affected by magnetism generally, are also more split as they evolve along the RGB as seen by the minima on the curve of the middle panel. The increase of $\delta\nu_{\rm mag,core,}m$ with the evolution of the star on the RGB at a given magnetic field amplitude should make the detection of the magnetic effect on mixed-mode ($g-m$ and $p-m$) frequencies easier for evolved red giants than younger ones on the RGB.

Similar results are obtained for different magnetic field amplitudes B_0, ranging from 0.1 to 10 MG, which may arise from past dynamo events (see Sect. 2.3). As a summary, the colour map in the left panel of Fig. 10 represents values of $m = 1$, $g-m$-mode-frequency splittings due to magnetism only, as a function of the frequency $\nu_{1,g,\rm max}$, which is a proxy for the evolutionary stage along the RGB, and of the applied magnetic field amplitude. The critical value of the magnetic field $B_{\rm c}/1000$ estimated by Eq. (29) for $g-m$ modes at all points along a star's evolution delimits the top of the colour map. Specifically, results above this line are beyond the domain of applicability of the perturbative analysis and have been removed. The magnetic signature increases as the star evolves, as deduced from Fig. 9. The magnetic signature also increases with the magnetic field amplitude, as expected from the B_0^2 dependency in the magnetic splitting expression, and as already deduced from Fig. 9.

4.5. Detectability of the magnetic signature

For comparison, we represent the position in the diagram of different typical observational frequencies: the frequency resolutions of the *Kepler*, TESS, and PLATO data, and the typical value of $\ell = 0$ mode line widths as estimated by Vrard et al. (2017) and Mosser et al. (2018). The line width of $\ell = 1$ mixed modes of normal amplitude was shown by Benomar et al. (2014) to be linked to that of $\ell = 0$ modes by

$$\Gamma_1 = \Gamma_0(1-\zeta). \quad (51)$$

Here, this radial mode line width is considered to be an upper limit for mixed-mode line width values. All these typical frequencies provide constraints on the minimum field amplitude needed at each evolutionary stage in order for magnetic effects to be visible in asteroseismic observations. When considering a star from the continuous viewing zone (CVZ) of the TESS satellite, meaning that the star has been observed for about 1 year, with $\nu_{\rm max} \simeq 172\,\mu$Hz, the lower bound value for the magnetic field amplitude to have detectable signatures is about 0.4 MG. In the right-hand panel, the same diagram is shown but simplified, emphasising the (B_0, $\nu_{1,g,\rm max}$) combinations for which the magnetic signature should be either easily detectable (purple area),

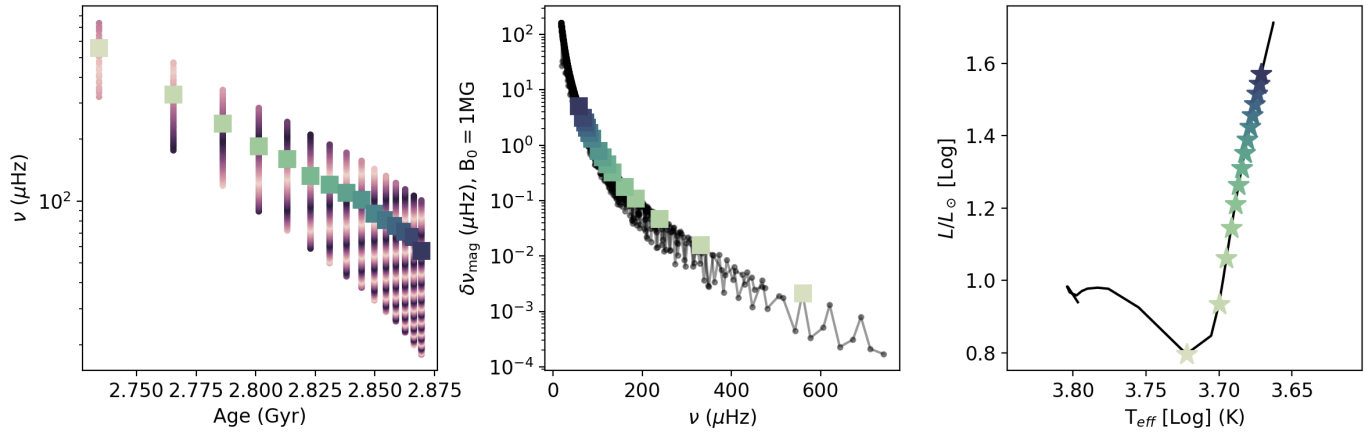


Fig. 9. *Left*: mixed-mode frequencies at different evolutionary stages along the RGB indicated in the right panel. Purple dots represent the individual frequencies of mixed modes, with the shade of the dots allowing to visualise the evolution of the mixed-mode order n_{pg} (the order is higher at high frequencies). Squares represent for each evolutionary stage the frequency of the $\ell = 1$ g-dominated mode closest to $\nu_{\rm max}$ (see Fig. 10 for the determination of this frequency). *Middle*: $m = 1$ magnetic splitting of $\ell = 1$ mixed modes located inside $[\nu_{\rm max} - 7\Delta\nu{:}\nu_{\rm max} + 7\Delta\nu]$ for each of the evolutionary stages denoted in the right panel. Squares represent for each evolutionary stage the frequency of the $\ell = 1$ g-dominated mode closest to $\nu_{\rm max}$ ($\nu_{1,g,\rm max}$, see Fig. 5) *Right*: Hertzsprung-Russell diagram of the $M_\star = 1.5\,M_\odot$, $Z = 0.02$ star ascending the RGB. Coloured stars indicate the different evolutionary stages represented in the other panels.

detectable (blue area), or undetectable (yellow area) based on 4 years of observations, such as those by *Kepler*.

For simplification, we consider the magnetic signature to be observable when $\delta\nu_{\rm mag}$ is larger than the data frequency resolution (δf). However, this threshold should be discussed and considered carefully as described by the following criteria:

1. It usually takes a few δf for a signal to be detectable within observational data because of the spreading of the signal over several frequency bins. However, typical line widths of $g - m$ mixed modes are very small, as measured from Eq. (51) where $\zeta \to 1$. For the typical $g-m$ mode located at $\nu_{1,g,\rm max}$, we estimate $\zeta \simeq 0.98$ from Fig. 5, which leads to an estimation of $g-m$ mode line widths of about 2.4 nHz by considering the typical line width of radial modes of 120 nHz (e.g. Mosser et al. 2018). The minimal frequency resolution of the *Kepler* satellite being greater than ∼7.9 nHz, $g - m$ mixed modes are not resolved, and a dilution factor must be considered (Dupret et al. 2009; Mosser et al. 2018). This results in a lower limit for $g - m$ mode line widths of $2\delta f/\pi$, evaluated at 5 nHz for the *Kepler* four-year observations (see also Mosser et al. 2018, for the estimation of $\ell = 1$-mode line widths for a typical red giant). We conclude that the line width of $g - m$ modes is of the order of magnitude of the resolution of the data. Therefore, the detection limit of the magnetic signature at $\delta\nu_{\rm mag,core,}{}_m \simeq \delta f$ is consistent. In contrast, even though $p - m$ modes have a larger line width of about 70 nHz, the magnetic effect has a much smaller amplitude, and these are therefore much more difficult to detect. We keep the detection limit at $\delta\nu_{\rm mag,core,}{}_m \gtrsim \delta f$ which is pertinent for $g - m$ modes, but one should use this lower boundary with care especially when looking at p-dominated mixed modes.

2. In addition to the magnetic splitting, one should also add the shift due to the rotation of the star from Eqs. (16) and (17), whose measurements come with their own uncertainties. Thereby, the magnetic effect should be large enough for its signature to be easily distinguishable from rotational pattern adjustment errors. These errors have been estimated by Mosser et al. (2018) at about $\Delta\nu/200$, corresponding to about 1.3 times the *Kepler* typical frequency resolution. Once again, the lower limit of detectability evaluated at δf may be too small, especially in the case of noisy data.

3. When adding rotational perturbations, the magnetic signature can only be measured through the use of the asymmetry measure $\delta_{\ell,m}$ defined in Eq. (50), as magnetic and rotational effects add up. For the effect of magnetism to be detectable, the criterion is changed from $\delta\nu_{\rm mag,core,}{}_m \gtrsim \delta f$ to

$$\nu_{\ell,m} + \nu_{\ell,-m} - 2\nu_{\ell,0} \gtrsim \delta f \tag{52}$$

in the presence of rotation. From a perfectly symmetric rotational $\ell = 1$ triplet, at given frequencies $[-\delta\nu_{\rm rot,1}, 0, \delta\nu_{\rm rot,1}]$, perturbations by magnetism produce the shifts $[\delta\nu_{\rm mag,1}, \delta\nu_{\rm mag,1}/2, \delta\nu_{\rm mag,1}]$ (see Sect. 4.1). The criterion from Eq. (52) may then be rewritten as

$$\underbrace{\nu_{0,\ell,0} + \delta\nu_{{\rm mag},\ell,m} + \delta\nu_{{\rm rot},\ell,m}}_{\nu_{\ell,m}} + \underbrace{\nu_{0,\ell,0} + \delta\nu_{{\rm mag},\ell,m} - \delta\nu_{{\rm rot},\ell,m}}_{\nu_{\ell,-m}} - 2(\underbrace{\nu_{0,\ell,0} + \delta\nu_{{\rm mag},\ell,m}/2}_{\nu_{\ell,0}}) \gtrsim \delta f, \tag{53}$$

with $\nu_{0,\ell,0}$ the unperturbed frequency of the $m = 0$ component. Simplifying Eq. (53) leads back to the equation $\delta\nu_{\rm mag,core,}{}_m \gtrsim \delta f$. The chosen minimum limit of detection is thus conserved when the star rotates.

4. For a few red giants, a departure of the symmetric rotational triplet due to buoyancy glitches can be observed, which is caused by strong chemical gradients generated by the first dredge-up and left behind by the retreating envelope (Cunha et al. 2015, 2019; Jiang et al. 2020). Mosser et al. (2018) shows that KIC 3216736 is the only red giant among the 200 studied that exhibits buoyancy glitches, with only its $m = 0$ component visible. As deduced analytically by Cunha et al. (2015, 2019), buoyancy glitches are very rare on the RGB, and glitch-induced oscillation variation occur only at the luminosity bump. As a consequence, glitches will be neglected in the rest of our study.

5. If the star rotates fast enough, second-order and higher-order asymmetric rotational perturbations of the centrifugal and Coriolis accelerations can affect the symmetric rotational frequency pattern (Dziembowski & Goode 1992; Suárez et al. 2006). Such second-order perturbations should affect both $\ell = 1$

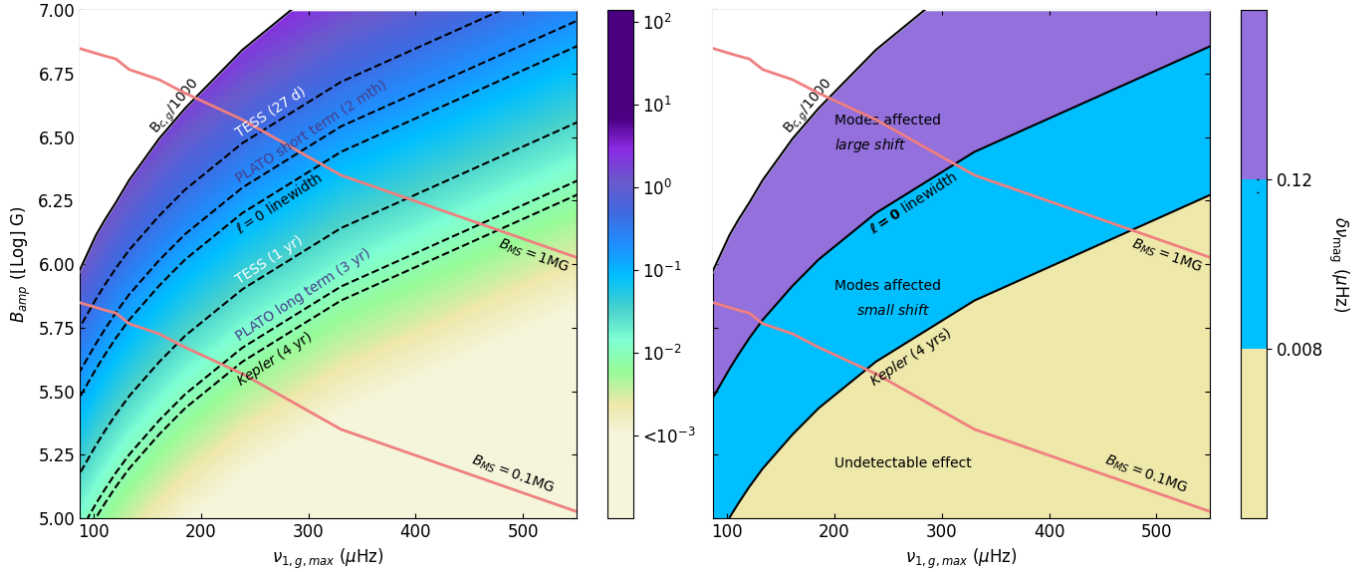


Fig. 10. *Left*: $m = 1$ mixed-mode mean frequency perturbation due to magnetism only ($\delta\nu_{\rm mag}$ in μHz) as a function of mixed-mode frequencies ($\nu_{1,g,\rm max}$ in μHz) and the magnetic field amplitude in Gauss for a $M_\star = 1.5\,M_\odot$, $Z = 0.02$. Typical limiting frequencies are indicated: black dashed lines represent the frequency resolution in the PSD corresponding to 4 years of *Kepler* continuous observations (∼8 nHz), 3 years of PLATO two main fields (∼11 nHz), 1 year of TESS continuous viewing zone data (∼30 nHz), a typical line width of radial modes, which are an upper limit for the line width of dipolar mixed modes (∼0.12 μHz), 2 months of PLATO stare-and-step observations (0.19 μHz), and 27 days of TESS individual sectors (0.37 μHz). The coloured area is limited by the critical magnetic-field amplitude range for the validity of the perturbative analysis. We choose to limit the results at $B_{c,g}/1000$, as defined in Sect. 3.5. Red lines represent the expected magnetic-field amplitude by considering magnetic-flux conservation from the end of the MS, with original fossil field amplitudes of 0.1 and 1 MG, as detailed in Sect. 2.3. *Right*: same as left panel, but simplified with the colour map replaced by typical limiting frequency values corresponding to *Kepler* data. The yellow area corresponds to the combination of $\nu_{1,g,\rm max}$ and magnetic amplitude for which magnetic splittings cannot be visible in *Kepler* observations. The blue area corresponds to small magnetic shifts that should be visible in *Kepler* observations. The purple area corresponds to very large magnetic shifts, larger than the typical line width of radial modes.

and $\ell = 2$ mixed modes. However, Deheuvels et al. (2017) emphasise that a measured core rotation rate of $\Omega_{\rm c} \simeq 710$ nHz along with a five-times-smaller envelope rotation rate are much too low for second-order rotational effects to significantly contribute to rotational splittings. Therefore, second-order rotational effects should not produce significant asymmetric perturbations in the spectrum of red giants or subgiants. Moreover, we consider only rotation as a perturbation in the case of red giants as they are considered as slow rotators. Indeed, Ouazzani et al. (2013) show that the effect of rotation can be expressed by perturbative calculations when $\Omega/(2\pi)/(\Delta P/P^2) \lesssim 2$, which is the case for red giants according to core rotation measurements by Gehan et al. (2018). For the study of rapid rotators with non-perturbative developments, we refer to Prat et al. (2019) and van Beeck et al. (2020) (for gravity modes), and to Reese et al. (2006) (for acoustic modes).

6. Latitudinal differential rotation may also induce asymmetries, but as evaluated through non-perturbative calculations with the Adiabatic Code of Oscillation including Rotation (ACOR) by Deheuvels et al. (2017), typical latitudinal differential rotation profiles lead to a very small asymmetry measure of $\sim 10^{-3}$. This corresponds to $\delta\nu_{\rm mag,core},_m \simeq 2 \times 10^{-3}\delta\nu_{\rm rot,core},_m$, evaluated at $\delta\nu_{\rm mag,core},_m \simeq 0.5$ nHz for the rotational splittings associated with core rotation of 0.5 μHz. Given the frequency resolution of asteroseismic data ranging from ∼7.9 (*Kepler* 4 years data) to ∼380 nHz (TESS 1 month data), and considering typical latitudinal differential rotation inside solar-like stars, the effect of latitudinal differential rotation on the symmetry of the mixed-mode pattern is therefore negligible.

7. Near-degeneracy effects occur by the combination of rotation and mode mixing: when two mixed modes with the same (ℓ, m) combination have frequencies that are too close to each other (i.e. the frequency spacing between the two mixed modes is smaller than the rotation rate), their frequencies are perturbed (Dziembowski & Goode 1992; Suárez et al. 2006). We refer to the complete study of Deheuvels et al. (2017) for the theoretical development of near-degeneracy effects on the asymmetry of rotational multiplets. We emphasise the fact that near-degeneracy effects produce increasing asymmetry measure $\delta_{\ell,m}$ when ℓ increases ($\delta\nu_{\rm degeneracy},_{\ell=1} \ll \delta\nu_{\rm degeneracy},_{\ell=2}$). This can be interpreted as being due to the fact that the frequency separation between two consecutive $\ell = 1$ mixed modes is much larger than the separation between two consecutive $\ell = 2$ mixed modes. In the case of KIC 7341231 studied by Deheuvels et al. (2017), no asymmetries were found in the $\ell = 1$ triplet, whereas $\ell = 2$ multiplet asymmetries are $|\delta_{2,2}| \gtrsim 0.14$. In order to disentangle near-degeneracy from magnetic effects, measures of $\ell = 1$ and $\ell = 2$ mixed mode asymmetries are effective. More precisely, an asymmetry measure such that $\delta\nu_{\ell=1} \gtrsim \delta\nu_{\ell=2}$ is a clear indicator that the magnetic effects are larger than those of near-degeneracy.

In conclusion, $(B_0, \nu_{1,g,\rm max})$ areas delimited in the right panel of Fig. 10 should be used with care. In addition to the characteristic frequency positions, expected magnetic-field amplitudes at given evolutionary stages from Eq. (29) are represented by red lines in each panel, considering amplitudes at the end of the MS of $B_{\rm ms} = 0.1$ and 1 MG. The maximum expected magnetic amplitude is represented by the $B_{\rm ms} = 1$ MG upper red line on the diagram (magnetic field amplitude along the evolution; we recall that this results from the conservation of the magnetic field flux from the end of the MS as explained in Sect. 2.3). We note that the value of $B_{\rm ms} = 0.01$ MG corresponding to the equipartition regime leads to magnetic field amplitude values

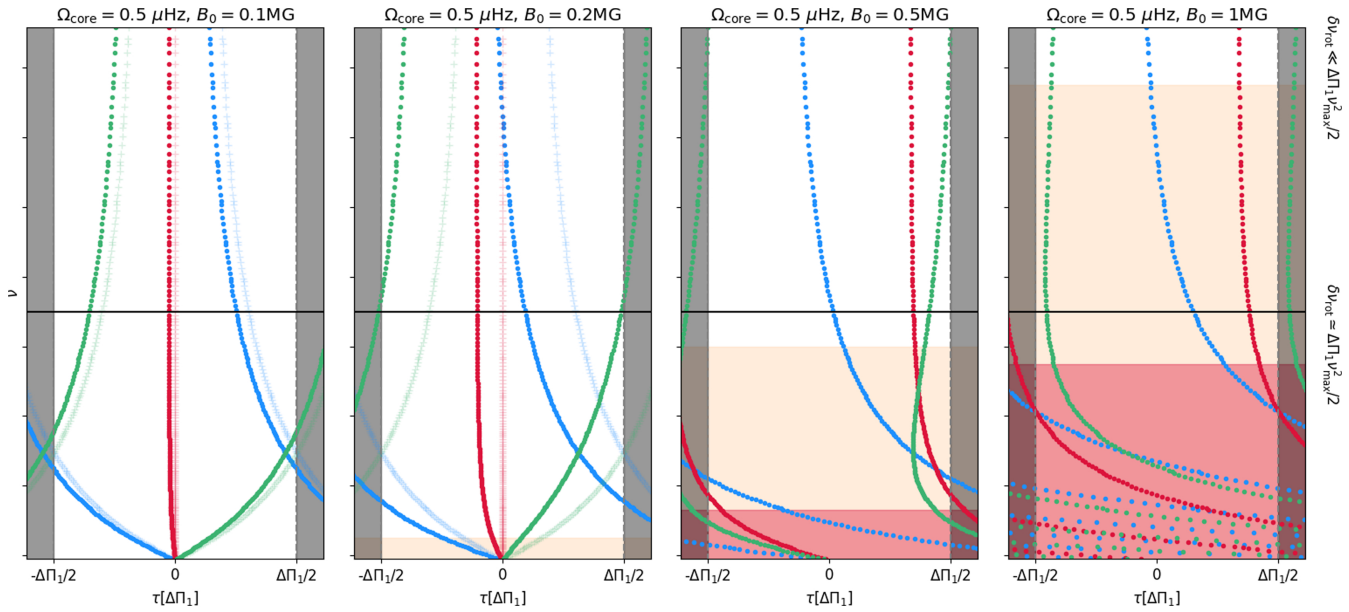


Fig. 11. Synthetic stretched period echelle diagram built from Eq. (54), showing modelled mixed-mode frequencies affected by rotation with $\Omega_{core} = 0.5\,\mu$Hz and magnetic-field strengths increasing *left to right* with $B_0 = 0.1\,$MG, $B_0 = 0.2\,$MG, $B_0 = 0.5\,$MG, and $B_0 = 1\,$MG in the radiative interior. Purely rotationally split components are given for reference by background crosses on the *first two panels*. Coloured dots indicate the positions of the $\ell = 1$ mixed modes of azimuthal order $m \in \{1, 0, -1\}$, respectively blue, red, and green dots. The horizontal black line delimits domains for which the rotational splitting is small compared to $\Delta\Pi_1\nu_{max}^2/2$ (see Gehan et al. 2018, for more details). Synthetic patterns above this line are typically representative of patterns of mixed modes for subgiants and early giants, and those below are associated with evolved red giants. The magnetic effect is small compared to rotational effects in white areas, is of the same order of magnitude as in orange areas, and is larger than $\delta\nu_{rot,core,m}$ in red areas.

that are too low on the RGB to be represented on the diagram. From Fig. 10 we conclude that the more evolved the star the easier it is to detect its internal magnetic signature. More specifically, magnetic fields of $B_{MS} \simeq 1\,$MG at the end of the MS produce frequency perturbations that are too small to be detected inside young RG with $\nu_{max} \gtrsim 475\,\mu$Hz and are too large for the perturbative analysis to be valid for older RG with $\nu_{max} \lesssim 190\,\mu$Hz. Globally, the expected range for the magnetic-field amplitude to reach sufficiently large values for the magnetic signature to be observable depends upon the duration of the observing campaign; for example, the red lines crossing the different *Kepler* boundaries are shown in the right panel of Fig. 10.

4.6. Stretched spectrum

As a way of summarising previous results concerning the asymmetry of the perturbed rotational triplet and the amplitude of this perturbation by magnetism, we illustrate the stretched spectrum corresponding to perturbed frequencies of mixed modes in Fig. 11. This visualisation technique was initially developed by Vrard et al. (2015) to estimate the observational period spacing ($\Delta\Pi_1$) of mixed modes, and it is quite often employed to estimate the internal rotation rate of red giants (e.g. Gehan et al. 2018). In these diagrams (see Fig. 11), $\ell = 1$ mixed-mode frequencies are represented by coloured dots (green: $m = -1$, red: $m = 0$, blue: $m = 1$) as a function of the corrected period τ modulo $\Delta\Pi_1$, defined via the differential equation:

$$\mathrm{d}\tau_m = \frac{1}{\zeta}\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu^2}, \tag{54}$$

with ζ defined by Eq. (34), and ν the observational frequency of the mode. For a rotating star without magnetism, the period separation between two mixed-modes of the same azimuthal order m is given by integrating Eq. (54):

$$\Delta\tau_m = \Delta\Pi_1\left(1 - 2\zeta\frac{\delta\nu_{rot,core,m}}{\nu}\right), \tag{55}$$

with $\delta\nu_{rot,core,m}$ the rotational perturbation of the mode due to the core rotation. We show in Appendix D that this stretched period spacing can be rewritten in the presence of magnetism as

$$\Delta\tau_m = \Delta\Pi_1\left(1 - 2\zeta\frac{\delta\nu_{rot,core,m} + \delta\nu_{mag,core,m}}{\nu}\right), \tag{56}$$

with $\delta\nu_{mag,core,m}$ the magnetic perturbation in the core of the star. The method described by Gehan et al. (2018) to estimate the rotation period of the star can therefore still be applied to magnetised stars due to the similarities between Eqs. (55) and (56). However, the resulting value is no longer an estimate of $\delta\nu_{rot,core}$ but rather of $\left(\delta\nu_{rot,core} + \delta\nu_{mag,core}\right)$. A second analysis step is necessary in order to separate the rotational and magnetism signatures. This is accomplished through the measurement of the asymmetry of the multiplet described in Sect. 4.4.

In Fig. 11 we represent four stretched spectra. From left to right, we increase the core magnetic field amplitude ($B_0 \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1\}\,$MG). In the first two panels, the positions of non-magnetised modes are represented by faded crosses for comparison. They are constructed following the method described in Gehan et al. (2018). As in the case of non-magnetised rotating stars, we obtain three ridges, corresponding to the $m \in \{-1, 0, 1\}$ components of the mixed modes. We can see in the left panel that for a weak magnetic field the rotational ridges are nearly identical to the magnetically influenced ones, with the triplet being slightly shifted towards higher frequencies as expected given our discussion in Sect. 4.4. The horizontal black line separates two rotational regimes. Below this line

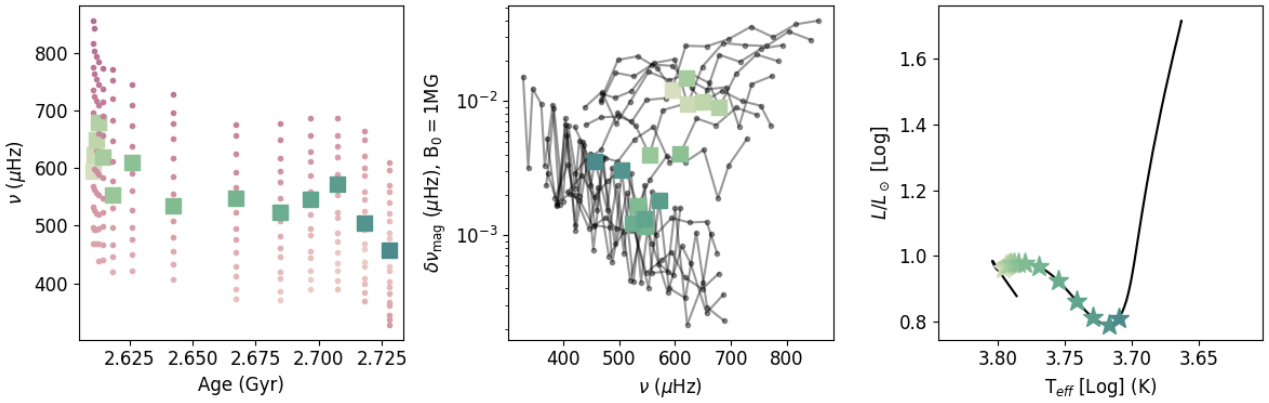


Fig. 12. *Left*: a range of mixed mode frequencies is shown for different evolutionary stages along the subgiant phase (and early RGB). The individual stages are indicated on the evolutionary track plotted in the *right panel*. Purple dots represent the individual frequencies of mixed modes, with the shade of the dots allowing to visualise the evolution of the mixed-mode order n_{pg}. Squares represent the frequency of the $\ell = 1$ g-dominated mode closest to $\nu_{\max}$ for each evolutionary stage. We refer to Fig. 5 for the determination of this frequency. *Middle*: magnetic splitting of $\ell = 1, m = 1$ mixed modes located inside the range $[\nu_{\max} - 7\Delta\nu : \nu_{\max} + 7\Delta\nu]$ for each of the evolutionary stages denoted in the right panel. Squares represent the frequency of the $\ell = 1$ g-dominated mode closest to $\nu_{\max}$ (see Fig. 5 for further reference). *Right*: Hertzsprung-Russell diagram of a $M_\star = 1.5\,M_\odot$, $Z = 0.02$ star evolving on the subgiant phase. Coloured stars indicate the different evolutionary stages represented in the other panels.

the effect of rotation is moderate, where the resulting rotational splitting of the modes is of the order of $\Delta\Pi_1\nu_{\max}^2/2$. This regime is associated with crossing of the three ridges in the stretched spectrum, wherein the rotational splitting leads to the crossing of mixed modes with different n_g. In contrast, above the black line, the core rotation rate is small enough so that the individual multiplets do not overlap with each other.

We now construct criteria similar to those in Sect. 4.5 characterising the magnetic effect on the rotational triplet. By studying the $m = -1$ component of the triplet, one can compare the effect of rotation and magnetism on the frequency of the modes. Indeed, magnetism and rotation have opposite effects on the frequency of the $m = -1$ component. We conclude that when the stretched period of the $m = -1$ mode increases with the frequency of the mode, magnetic effects dominate rotation effects. We identify three different regimes depending on the curvature of the $m = -1$ ridge of the stretched spectrum:

1. When the green ridge representing $m = -1$ mode components is concave, the effect of magnetism is negligible relative to rotational effects. This scenario is indicated by the white areas in Fig. 11.
2. When $\delta\nu_{\rm mag}$ approaches $\delta\nu_{\rm rot}$, the curvature of the $m = -1$ ridge reverses and becomes convex. At that point, magnetism and rotation have comparable effects on mixed-mode frequencies. This scenario corresponds to the orange areas in Fig. 11.
3. When the magnetic field is even larger, its effects can dominate the rotational effects. Such instances are shown as red areas in Fig. 11. One must take caution in this regime, as the magnetic field amplitudes may be large enough to violate the first-order approximation considered in this paper.

We choose not to indicate the frequency values on the y-axes because the position of the ridges of the stretched spectrum depends on the choice of the integration constant, and thus on the minimum frequency we consider, where we set all τ values to zero.

5. Magnetic effect on mixed mode frequencies of subgiants

Studying magnetic effects on mixed modes inside subgiants is more complicated than studying those occurring on the RGB because of the transition from $p - m$ to $g - m$ modes that occurs during this evolutionary stage. As a consequence, the driving terms listed in Appendix C are no longer fully represented by Eq. (39), and the mode inertia is no longer simply Eq. (36) during the subgiant stage (Hekker & Christensen-Dalsgaard 2017), leading to variations in the magnetic-splitting patterns.

5.1. Evolution of the magnetic splitting during the subgiant stage

The subgiant phase is much shorter than the RGB, especially for intermediate-mass stars; it lasts ∼0.1 Gyr for a $M_\star = 1.5\,M_\odot$, $Z = 0.02$ star, during which the frequency of maximum power varies between approximately 700 and 500 μHz. Figure 12 represents the same three panels as Fig. 9 at this earlier stage, which is indicated by the position of the considered stars in the right panel. In the left panel, we see that the value of $\nu_{1,g,\max}$ is no longer monotonously decreasing as it was during the RGB. In the middle panel, the amplitude of the magnetic signature for modes contained in the $[\nu_{\max} - 7\Delta\nu : \nu_{\max} + 7\Delta\nu]$ range are represented for all the considered evolutionary states by the black-dotted lines. Green squares indicate the position of $\nu_{1,g,\max}$. We observe that for evolved subgiants (and early red giants, e.g. stars older than ∼2.675 Gyr), the magnetic signature is consistent with the asymptotic theoretical pattern detailed in Sect. 4.3. However, younger red giants have larger magnetic frequency splittings at $\nu_{1,g,\max}$, and even more substantial signatures for $p - m$ modes, as seen in the middle panel of Fig. 12. We thus investigate the asymptotic regime where high-radial-order $p - m$ modes dominate the frequency spectrum.

5.2. Analytic expression of the magnetic perturbations for high-radial-order p–m modes

In the approximation of acoustic modes, the local radial displacement is much larger than the horizontal one ($\xi_{\rm h} \ll \xi_{\rm r}$). The high-radial-order modes have a small wavelength, allowing us to perform an asymptotic JWKB analysis, where terms with high-order $\xi_{\rm r}$ derivatives dominate. This approximation is valid for

high-frequency, high-order mixed modes, for which the splitting components can be expressed as:

$$\langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_0 \rangle_\mathrm{p} \simeq \int_0^R \rho r^2 |\xi_\mathrm{r}|^2 \mathrm{d}r, \tag{57}$$

$$\langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{F}_\mathrm{c}(\boldsymbol{\xi}_0) \rangle_\mathrm{p} \simeq 4m\omega_0 \int_0^R \rho r^2 \Omega \mathcal{R}e(\xi_\mathrm{r}^* \xi_\mathrm{h}) \mathrm{d}r, \tag{58}$$

$$\langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{F}_\mathrm{f}(\boldsymbol{\xi}_0) \rangle_\mathrm{p} \simeq -m\omega_0 \int_0^R \rho r^2 \Omega |\xi_\mathrm{r}|^2 \mathrm{d}r, \tag{59}$$

$$\langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\delta F}_\mathrm{L}(\boldsymbol{\xi}_0)/\rho \rangle_\mathrm{p} \simeq 2\pi B_0^2 \int_0^R r\xi_\mathrm{r}^* \left(b_\theta \left(r\xi_\mathrm{r} b_\theta \right)'' + b_\phi \left(r\xi_\mathrm{r} b_\phi \right)'' \right) \mathrm{d}r \times \int_0^\pi \left(Y_l^m \right)^2 \sin^3\theta \mathrm{d}\theta. \tag{60}$$

In the case of high-order acoustic modes, the dominant magnetic ratio becomes:

$$\mathcal{I}_\mathrm{p} = \frac{\int_0^R \left(|(rb_\theta \xi_\mathrm{r})'|^2 + \left| (rb_\phi \xi_\mathrm{r})' \right|^2 \right) \mathrm{d}r}{\int_0^R |\xi_\mathrm{r}|^2 \rho r^2 \mathrm{d}r}. \tag{61}$$

At high frequency, where $\omega_0 \gg S_1 \gg N$, Eq. (35) may be written as

$$\frac{d^2\xi_\mathrm{r}}{\mathrm{d}r^2} = \frac{S_1^2}{c_\mathrm{s}^2}\xi_\mathrm{r} = -k_\mathrm{r}^2 \xi_\mathrm{r}, \text{ with } k_\mathrm{r} = -\frac{\omega_0}{c_\mathrm{s}}. \tag{62}$$

Taking $S_1 = S_{1,\mathrm{min}} \times \mathrm{g}(r)$, with $S_{1,\mathrm{min}}$ the minimum value of the Lamb frequency inside the acoustic cavity and g(r) containing all radial dependencies of S_1, the solution can be expressed as

$$\xi_\mathrm{r} \propto \frac{e^{i\int k_\mathrm{r} \mathrm{d}r}}{k_\mathrm{r}} \propto \left(\frac{\omega_0^2}{S_{1,\mathrm{min}}^2} \right)^{-1/4}. \tag{63}$$

We thus arrive at the following expression for the amplitude scaling of the radial displacement:

$$|\xi_\mathrm{r}|^2 \propto \left(\frac{\omega_0^2}{S_{1,\mathrm{min}}^2} \right)^{-1/2}. \tag{64}$$

Therefore, for a rapidly oscillating radial eigenfunction ($\xi_\mathrm{r}' \gg \xi_\mathrm{r}$), and $i \in \{\theta, \varphi\}$,

$$|(r\xi_\mathrm{r} b_i)'|^2 \propto \left(\frac{\omega_0^2}{S_{1,\mathrm{min}}^2} \right)^{1/2}. \tag{65}$$

By employing the scaling for ξ_r in Eq. (61), we can see that

$$\mathcal{I}_\mathrm{p} \propto \frac{\omega_0^2}{S_{1,\mathrm{min}}^2}, \tag{66}$$

and

$$\delta\omega_{\mathrm{mag,p}} \propto \frac{B_0^2}{S_{1,\mathrm{min}}^2}\omega_0. \tag{67}$$

For high-frequency $p-m$ modes, the magnetic splitting is therefore proportional to the unperturbed frequency of the mode at first order. This asymptotic behaviour explains the average rise in the measured $\delta\nu_{\mathrm{mag,core},m}$ with $\nu_{1,g,\mathrm{max}}$ at high frequencies (early subgiants; see Fig. 12). As for red giants, we check this power law for a typical $M_\star = 1.5\,M_\odot$, $Z = 0.02$, $\nu_{\mathrm{max}} \simeq 750\,\mu$Hz subgiant. The normalised power law following ν is superimposed in black.

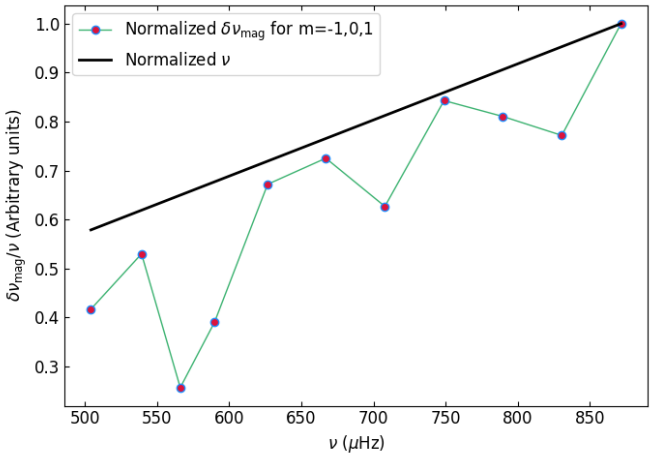


Fig. 13. Normalised magnetic splittings of the $p-m$ modes versus mixed-mode frequencies computed for a simulated $M_\star = 1.5\,M_\odot$, $Z = 0.02$, $\nu_{\mathrm{max}} \simeq 750\,\mu$Hz subgiant. The normalised power law following ν is superimposed in black.

$\nu_{\mathrm{max}} = 750\,\mu$Hz. In Fig. 13 the normalised magnetic splitting of the $\ell = 1, m \in \{1, 0, -1\}$ modes within the $[\nu_{\mathrm{max}} - 7\Delta\nu : \nu_{\mathrm{max}} + 7\Delta\nu]$ range is represented by the green dotted line. The subgiant mixed-mode frequency space is less populated, as $p-m$ modes completely dominate the spectrum. We observe a $g-m$ mode among $p-m$ modes at ~565 μHz. The black line corresponds to the normalised power law describing the $p-m$-mode magnetic signature from Eq. (67), proportional to the mixed-mode unperturbed frequencies $\nu_0 = \omega_0/(2\pi)$. We confirm that the modelled $p-m$ modes follow this ν_0 asymptotic trend well at high frequency. We refer to Mathis et al. (2021) for a complete study of the asymptotic behaviour of $p-m$-mode frequencies in the presence of magnetism.

5.3. Detectability of magnetic signature along the subgiant stage

As done for stars on the RGB (see Sect. 4.5), we now investigate the detectability of such magnetic signatures within the power spectrum density of subgiants. As this evolutionary stage is a transition period between $p-m$ and $g-m$ modes, we choose to represent the detectability of the two asymptotic regimes $p-m$ and $g-m$ in Fig. 14. In contrast with Fig. 10, in which we follow the ascension of the RGB using the $\nu_{1,g,\mathrm{max}}$ proxy, we choose to study the star during the SG stage by following its age, as $\nu_{1,g,\mathrm{max}}$ does not evolve monotonously from consecutive subgiant stages. The top panels of Fig. 14 represent the amplitude of the magnetic splitting (not including rotational effects) affecting $\ell = 1$, $m = 1$ $g-m$ modes along the evolution of the star during the SGB. The abscissa are reversed in order to retain the same orientation as used in Fig. 10. From right to left in the diagrams, we observe a decrease in the magnetic effect on $g-m$ modes as the star evolves along on the SGB, followed by an increase of the magnetic signature as the star reaches the RGB. The top-right panel delimits regions of detectability in the (Age, B_0) space. For a similar field amplitude, the magnetic signatures of the $g-m$ modes are harder to detect in the power density spectra of subgiants than in those of a red giant. We observe the same change of slope in the colour map for $p-m$ modes (see the bottom panels of Fig. 14), which are the majority among the mixed modes in subgiants. This change is due to the switch of asymptotic regime.

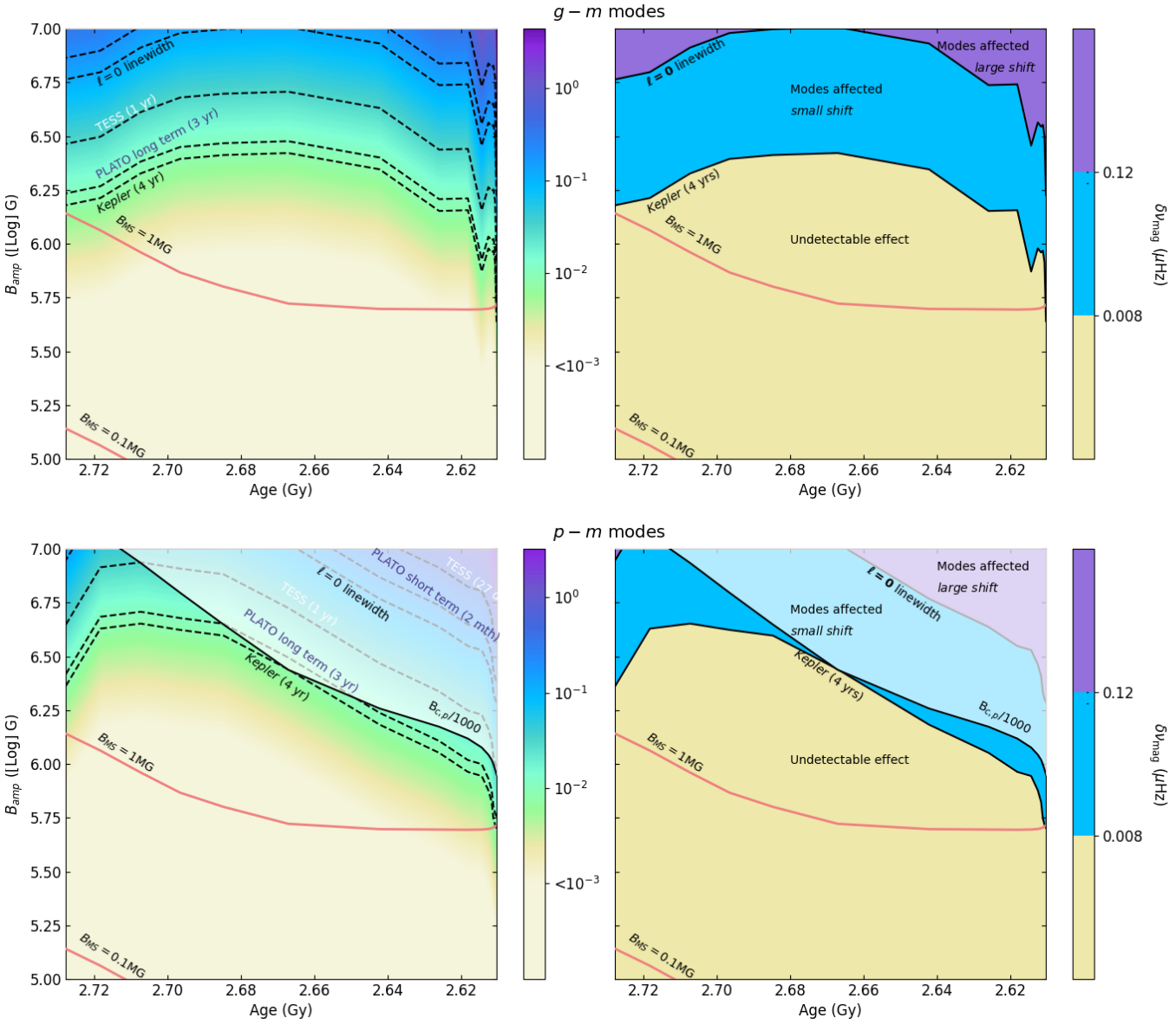


Fig. 14. *Top panels*: same as Fig. 5 but for younger stars ($\nu_{\max} \gtrsim 350$ μHz) with the abscissa changed to the age of the star (reversed to be consistent with the convention used in Fig. 5). *Bottom panels*: same as top panels but considering $p - m$ modes instead of $g - m$ modes.

In all panels, the red lines delineate the expected magnetic field amplitude evaluated by conservation of the magnetic flux inside the radiative interior from the end of the MS. By comparing the relative position of these red lines with the frequencies characterising asteroseismic data, if such magnetic field amplitudes ($B \lesssim 1$ MG) are indeed present in the subgiants' radiative interiors, their effect on mixed-mode frequencies is not detectable with data from any current satellite. In order to reach the frequency resolution needed to be able to identify magnetic effects on mixed mode frequencies during the SGB ($\delta f \lesssim 10^{-3}$ μHz), the observation duration must be longer than about 30 years. Therefore, we do not present further analysis of the magnetic signature on mixed-mode frequencies for subgiants.

6. Angular momentum transport by fossil magnetic fields in evolved solar-like stars

The transport of angular momentum inside stars is a consequence of internal dynamical mechanisms. Understanding the transport of angular momentum inside stars therefore allows us to understand their global dynamical evolution. Current observational constraints on the transport inside stars begin with an estimation of the profile of their internal rotation rate (e.g. Beck et al. 2012). Constraining the core rotation rate also helps to estimate the surface rotation rate (Gallet & Bouvier 2013; Spada & Lanzafame 2020), and the measurement of the surface rotation rate provides an estimate of the age of the star during the MS through gyrochronology (e.g. Barnes 2003, 2010; Angus et al. 2015). Stars with magnetic activity may possess signatures of their surface rotation rate in their PSD through the periodic reduction of their brightness by a few percent due to magnetised dark spots at the surface (e.g. McQuillan et al. 2013; van Saders & Pinsonneault 2013; Mathur et al. 2014; García et al. 2014b; Ceillier et al. 2017; Santos et al. 2019). However, internal rotation rate measurements are more difficult to obtain in general; for instance even the rotation rate of the core of the Sun has yet to be measured, as it requires the presence of g modes to efficiently probe the deepest layers

of the radiative interior (e.g. García et al. 2008; Mathur et al. 2008). In the case of subgiants and red giants that possess mixed modes, the internal rotation rate of a restricted sample of evolved stars has recently been measured (e.g. Deheuvels et al. 2012, 2020; Mosser et al. 2012; Gehan et al. 2018). As detailed in Sect. 2.3.2, the observed rotation-rate ratio ($\Omega_{\rm core}/\Omega_{\rm env} \simeq 5-10$) between the core and the envelope of evolved solar-like stars (Deheuvels et al. 2012, 2014; Mosser et al. 2015; Vrard et al. 2015; Gehan et al. 2018) is not consistent with the strong contraction of the core after the MS that should lead to much higher ratio values (e.g. Eggenberger et al. 2012, 2019; Ceillier et al. 2013; Cantiello et al. 2014). A dynamical process must be identified to transport angular momentum from the contracting core towards the envelope in order for this observation to be understood. In the recent literature that tackles this important question, most of the attention has been given to the potential effects of Maxwell stresses triggered by unstable fields in stably stratified radiative regions (e.g. Fuller et al. 2019; Eggenberger et al. 2020; Den Hartogh et al. 2020; Jouve et al. 2020). Here we recall the potentially significant efficiency with which a stable axisymmetric field redistributes angular momentum along poloidal field lines, a well-known result since Ferraro (1937), Mestel & Weiss (1987). We aim to provide a quantitative estimate of the characteristic timescale needed for such a field to redistribute angular momentum for field amplitude that could be detected in seismic data. As such, we are closing the loop: we are looking for seismic signatures of a potential axisymmetric fossil field as a potential candidate to explain the strong angular momentum transport revealed by the observed weak surface-to-core rotation contrast. Given the amplitude of the field that we predict to be able to detect, we compute the characteristic timescale on which it redistributes angular momentum. If it is very short compared to evolution timescales, as expected, this confirms that it is an excellent candidate for the observed strong extraction of angular momentum.

By considering a large-scale axisymmetric fossil magnetic field trapped inside the radiative interior of evolved solar-like pulsators, we investigate the impact of such magnetism on the internal rotation profile of the star (see e.g. Mestel & Weiss 1987; Charbonneau & MacGregor 1993, for previous studies on the Sun). We consider the field lines to be closed, without any re-connection with the dynamo-generated field in its convection zone. Such configurations are depicted in Fig. 2, and following Mestel & Weiss (1987), consider the following poloidal current due to the toroidal component of the axisymmetric magnetic field:

$$\boldsymbol{j}_{\rm p} = \frac{1}{4\pi r}\boldsymbol{\nabla}(rB_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi) \wedge \boldsymbol{e}_\varphi. \tag{68}$$

The toroidal component of the equation of induction can be written

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = r\sin\theta(\boldsymbol{B}_{\rm p}\cdot\boldsymbol{\nabla})\Omega, \tag{69}$$

where $\boldsymbol{B}_{\rm p}$ is the poloidal magnetic field vector. The current has a component perpendicular to $B_{\rm p}$, and so it exerts a torque that changes the rotation profile according to

$$\rho r^2 \sin\theta \frac{\partial \Omega}{\partial t} = r\boldsymbol{j}_{\rm p} \wedge \boldsymbol{B}_{\rm p}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi. \tag{70}$$

The rotation profile is therefore affected in time according to the toroidal component of the momentum equation

$$\rho r^2 \sin\theta \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B}_{\rm p}\cdot\boldsymbol{\nabla}(rB_\varphi). \tag{71}$$

Assuming no turbulence, and given that the Ohmic diffusion timescale due to atomic processes is very large, changes to the poloidal component of the magnetic field can be neglected at the leading order. This leads to the partial differential equation that describes the redistribution of angular momentum along the poloidal field lines by Alfvén waves:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi\rho r^2}\boldsymbol{B}_{\rm p}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(r^2\boldsymbol{B}_{\rm p}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\Omega. \tag{72}$$

If the variation of Ω along the magnetic field lines of $\boldsymbol{B}_{\rm p}$, which define the coordinate s, is small with r and with the scale of variation of $\boldsymbol{B}_{\rm p}$, then

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} = \frac{{B_{\rm p}}^2}{4\pi\rho}\frac{\partial^2\Omega}{\partial s^2}. \tag{73}$$

From this equation, Alfvén waves transport angular momentum leading to the Ferraro iso-rotation law $\left(B_{\rm p}\cdot\nabla\Omega\right) = 0$ where rotation becomes constant along the poloidal field lines because they are considered to be fixed in time. Given the defintion of our axisymmetric magnetic field, $\boldsymbol{B}_{\rm p}$ scales with B_0, and as the magnetic field extent covers all the radiative interior delimited by $R_{\rm rad}$, the characteristic time for angular momentum transport derived from Eq. (73) is equal to the Alfvén time:

$$\tau = \frac{R_{\rm rad}}{v_{\rm A}}, \tag{74}$$

with $v_{\rm A}$ the Alfvén speed defined by Eq. (31). As shown in Ferraro (1937), Mestel (1953), and Mestel & Weiss (1987), this characteristic time to flatten the rotational profile of the radiative interior is very short.

Figure 15 evaluates the characteristic time for magnetism to flatten the rotational profile of the radiative interior of the reference star along the RGB (left panel) and along the SGB (right panel) as a function of $\nu_{1,g,\rm max}$ and age, respectively, and as a function of the magnetic field amplitude ranging from 0.1 to 10 MG. As expected, a greater magnetic amplitude implies a shorter characteristic transport time. We do not observe any significant impact of the evolutionary stage of the star on the transport characteristic time during the SGB and RGB. In any case, the characteristic time to flatten the radiative interior of the star is of the order of 1 year and thus such considered magnetic-field amplitudes (as represented by red lines in Fig. 15) are very efficient at transporting angular momentum inside the radiative region. With this order-of-magnitude analysis we reconfirm that magnetism is a very good candidate for rapidly transporting angular momentum after the MS. It may actually be too powerful to maintain the slight differential rotation rate observed inside evolved solar-like stars (Eggenberger et al. 2012, 2017; Cantiello et al. 2014).

The isolated-field scenario used for these calculations is however a strong assumption; this should be discussed. It has been proposed that the primordial magnetic field buried inside the radiative zone of the Sun inhibits the spread of the tachocline (e.g. Rüdiger & Kitchatinov 1997; Gough & McIntyre 1998; Barnes et al. 1999). Such confined magnetism can explain the quasi-uniform rotation rate of the radiative interior of the Sun. However, Brun & Zahn (2006) and Strugarek et al. (2011) showed that we may expect the confined magnetic field to spread by Ohmic diffusion towards the envelope, and to eventually

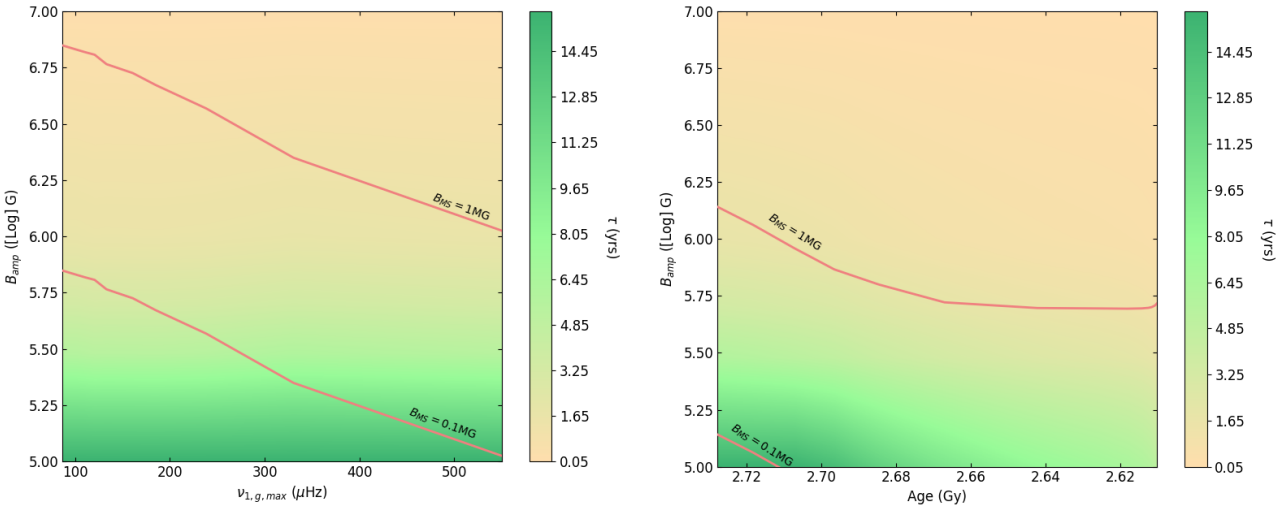


Fig. 15. Characteristic time of angular momentum transport τ in years as expressed by Eq. (74), depending on the given evolutionary stage and the magnetic field amplitude. The magnetic field amplitude expected at each stage from the conservation of flux from the end of the MS is indicated by red lines for $B_{\rm MS}$ = 0.1 and 1 MG. *Left*: transport along the RGB with $\nu_{1,g,\rm max}$ as the abscissa. *Right*: transport along the subgiant branch with age as the abscissa.

reconnect with the convection zone dynamo field. Due to Ferraro's law of iso-rotation, the latitudinal differential rotation of the convection zone would then imprint on the radiation zone. Such a phenomenon is however not observed in the radiative interior of the Sun. On the other hand, from a more theoretical standpoint, it has been argued that with a proper ordering of timescales of the dynamical processes, this spread can be prevented (e.g. Wood et al. 2011; Acevedo-Arreguin et al. 2013). Indeed, this question of tachocline confinement and its role in global dynamics is still an open question; it is nevertheless still relevant for the radiative interior of red giants. If the fossil field reconnects with the surface dynamo field, we expect the radiative interior to undergo a small amount of differential rotation despite the strong magnetic field.

7. Dependency of the magnetic splitting on stellar parameters

In the above sections, we derive our study from mixed modes of a typical $M_\star = 1.5\,M_\odot$, $Z = 0.02$ star during its evolution from the base of the subgiant stage towards the top of the RGB. In the following section, we explore the impact of a change of mass and metallicity on the previous results. From theoretical studies, stellar-evolution models, and observations, we know that massive stars evolve on shorter timescales than less massive ones. It is also well known that metal-rich stars live longer. We follow the evolution of stars with different initial masses ($M_\star \in \{1, 1.5, 2, 3\}\,M_\odot$) and different metallicities ($Z \in \{0.0002, 0.002, 0.02, 0.04\}$) in the Hertzsprung-Russell diagram in right panel of Figs. 16 and 17. In the left panels, for each mass we observe the evolution of the magnetic splitting $\delta\nu_{\rm mag,core,}m$ of the central $g-m$ mode as the star evolves.

7.1. Mass dependency

To investigate the effect of stellar mass on magnetic splitting, we consider low- and intermediate-mass solar-type oscillators from the subgiant towards the red giant phases, for which the convective envelope is thick enough for acoustic modes to be excited at the surface. From the left panel of Fig. 16, it takes around 12.5 Gyr for the $M_\star = 1\,M_\odot$ star to ascend the RGB, whereas the $M_\star = 3\,M_\odot$ reaches this stage in less than 1 Gyr. As a first result, significant magnetic signatures arise on frequency spectra at an earlier time for more intermediate-mass stars than for lighter ones. This first effect is due to the fact that intermediate-mass stars take less time to evolve from the SG to the RG stage than low-mass stars.

We also represent the value of the magnetic splittings as a function of the dominant $g-m$ mode frequencies $\nu_{1,g,\rm max}$ in the middle panel of Fig. 16. Intermediate-mass stars show the transition between the $p-m$- and $g-m$-dominated mixed modes (see Fig. 12) at lower frequencies than low-mass stars. We interpret this mass dependency as follows: the frequency range inside which we can detect mixed-mode form is set by the frequency range of acoustic modes that propagate all over the star, strongly correlated with the size of the star. As a result, acoustic modes propagating inside intermediate-mass stars have lower eigenfrequencies than those inside low-mass stars for a given evolutionary stage. In other words, the frequency associated with the base of the RGB where $g-m$ modes dominate is lower for intermediate-mass stars than for low-mass stars. However, the mass difference does not significantly impact the magnetic frequency-splitting values for a given $g-m$ mode frequency. The small mass dependency seen at low frequency in the middle panel comes from the mixed-mode nature of the mode, which is more dominated by its acoustic nature for massive stars than for low-mass stars at a given frequency on the RGB. The consequence is a slightly smaller effect of magnetism on mixed-mode frequencies for more massive stars during the RGB.

7.2. Metallicity dependency

In Fig. 17 the same three panels as in Fig. 16 are represented, with the change in mass replaced by a change in metallicity from $Z = 0.0002$ to $Z = 0.04$ for a fixed $M_\star = 1.5\,M_\odot$. As expected, the more metallic the star, the slower it evolves as seen in the left panel. The effect of metallicity on the magnetic signature at

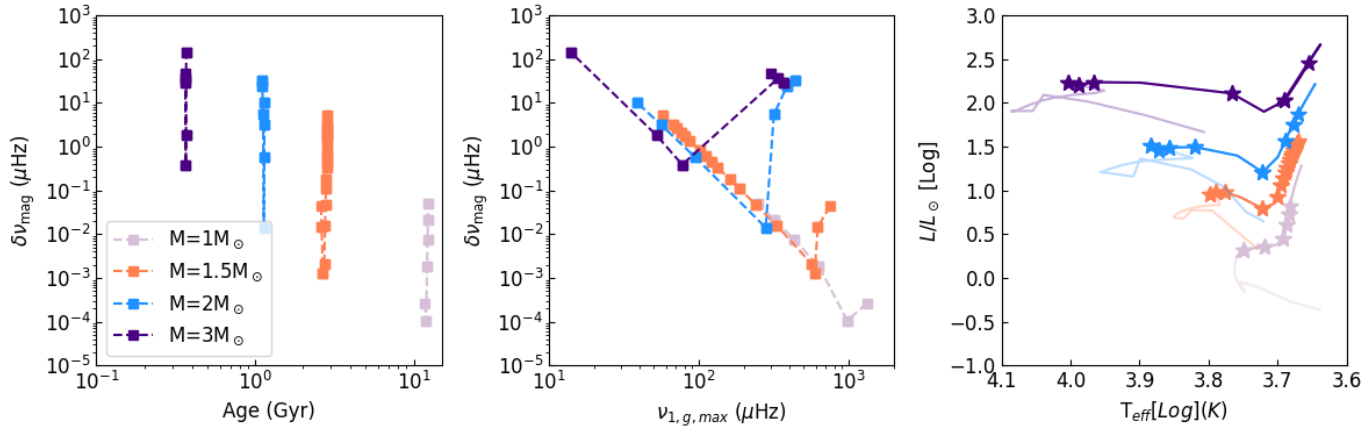


Fig. 16. *Left*: magnetic frequency splitting calculated at the central mode frequency $\nu_{1,g,\max}$ versus the age of the different evolutionary stages reported in the right panel for $Z = 0.02$, $M_\star \in \{1, 1.5, 2, 3\}\, M_\odot$. *Middle*: magnetic frequency splitting calculated at the central mode frequency $\nu_{1,g,\max}$ for the different evolutionary stages and masses reported in the right panel. *Right*: Hertzsprung-Russell diagram corresponding to the colour-coded $Z = 0.02$, $M_\star \in \{1, 1.5, 2, 3\}\, M_\odot$ stars. The star symbols indicate the position of the star at which measurements are reported in the left and middle panels.

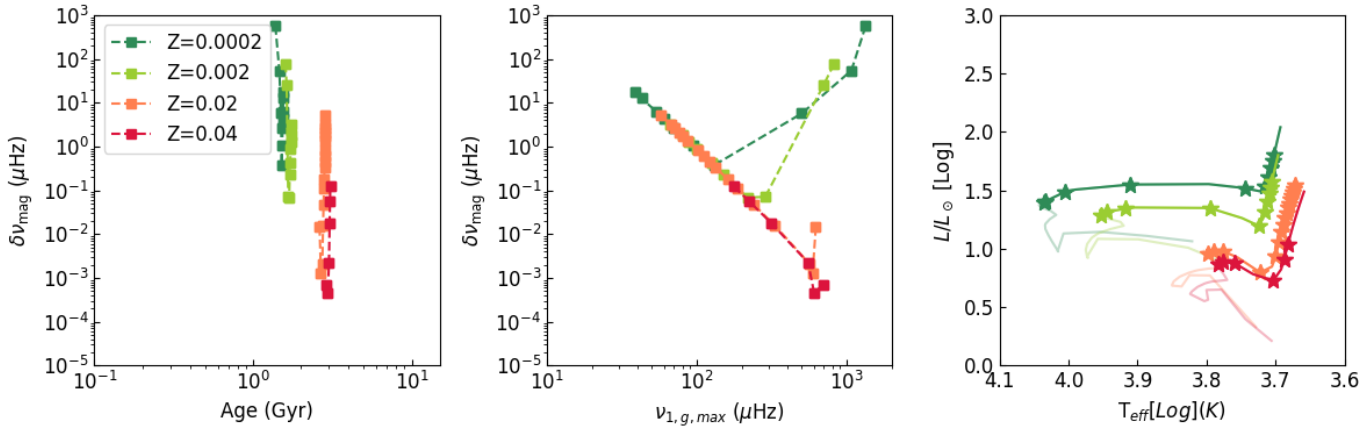


Fig. 17. Same as Fig. 16 but with varying metallicity; we represent $M_\star = 1.5\, M_\odot$, $Z \in \{0.04, 0.02, 0.002, 0.0002\}$ stars.

a given mixed-mode frequency of the stars is negligible during the RGB. However, the transition from SG to RG arises at lower frequencies for low-metallicity stars. This leads to a large spread in magnetic-signature values at a given frequency (see the middle panel of Fig. 17), similar to what is observed when varying the mass of the star shown in the middle panel of Fig. 16.

8. Comparison with low-amplitude dipolar mixed-mode critical field

The magnetic greenhouse effect, as proposed by Fuller et al. (2015) and supported by the study of Lecoanet et al. (2017), consists in a complete transfer of energy of magnetised gravity waves towards Alfvén waves, geometrically trapped inside the core of the star. The resulting oscillation mode is then purely acoustic, with a great loss of power compared to the corresponding mixed mode due to the loss of the gravity wave energy trapped inside the core. Such a mechanism implies the total disappearance of g components in the $\ell = \{1, 2\}$ mode regions in the PSD. For this reason, Mosser et al. (2017) led an observational study looking for signatures of mixed-mode residuals inside low-amplitude $\ell = 1$ regions. The complete rotational mixed-mode frequency pattern is adjusted: it reconstructs the observed $\ell = 1$ pattern well. These latter authors conclude that even for stars showing low-amplitude inside the $\ell = 1$ region, the remaining oscillation modes have a mixed p and g nature. However, Loi & Papaloizou (2020) set a warning about the physical conditions under which the suppression of mixed-mode amplitude may arise along with the disappearance of the g components: the authors support that interactions between gravity modes and magnetic fields may result in various behaviours depending on the configuration and strength of the magnetic field, and of the star's structure and stratification. This latter study brings perspectives concerning the validity of the theory proposed by Fuller et al. (2015), which may be adapted for mixed-mode amplitude suppression by magnetism without loosing all the mixed nature of the modes.

This topic being very controversial, we do not intend to form any conclusions as to whether or not the greenhouse effect is the key to mode suppression. However, we provide the comparison of the critical magnetic-field amplitude needed for mode suppression –as fixed by Fuller et al. (2015)– with the minimum field amplitudes needed for the magnetic signature of mixed-mode frequencies to be detectable in observational data. Table 1 contains the approximated values of the magnetic field corresponding to the minimum detection threshold inside data from Sect. 4.5 ($B_{\min}$) and of the critical field needed for mode suppression to occur according to the theory by Fuller et al. (2015). Results depend on the duration of observation, and on

Table 1. Comparison of the critical field $B_{\rm c,low-amplitude}$ needed for mode suppression by the greenhouse effect (Fuller et al. 2015) and the minimum magnetic field amplitude leading to frequency shifts of about the frequency resolution inside data.

Instrument	Time (yr)	$M_\star$ ($M_\odot$)	$\nu_{\rm max}$ (μHz)	$B_{\rm min}$ (MG)	$B_{\rm c,low-amplitude}$ (MG)
Kepler	4	1.5	300	0.50	3
Kepler	4	1.5	200	0.25	1
Kepler	4	1.5	100	0.10	0.1
PLATO	3	1.5	300	0.6	3
PLATO	3	1.5	200	0.35	1
PLATO	3	1.5	100	0.11	0.1
TESS	1	1.5	300	1.2	3
TESS	1	1.5	200	0.55	1
TESS	1	1.5	100	0.20	0.1

the considered frequency of the modes. In any case, we observe that as the star evolves (corresponding to a decrease of $\nu_{\rm max}$) the two critical magnetic-field amplitudes are of the same order of magnitude, whereas the critical field for mode suppression is much larger for less-evolved red giants. This means that if magnetic suppression by the greenhouse mechanism is at work inside RGs, one should also observe magnetic signatures on mixed-mode frequencies, especially for young RGs (see also the work of Rieutord 2017).

9. Discussion and perspectives

In this study, we investigate the effects of an axisymmetric mixed poloidal and toroidal fossil field aligned with the rotation axis of the star on mixed-mode frequencies during the SG and RG evolutionary stages. We concentrate on the fossil field scenario, in which a buried magnetism is present inside the radiative interior of the stars. This field results from the relaxation of a magnetic field generated from previously active dynamos. By using different force and energy balance regimes, we show that the expected fossil magnetic-field amplitude stabilised at the end of the MS should be in the range of [0.1−1] MG. This range is independent of the mass of the star, and of the presence or not of a sustainable convective core during the MS. Such field amplitudes are sufficiently large to be pertinent for our study of the effects of magnetism on mixed-mode frequencies. Indeed, our perturbative analysis of mixed-mode frequencies of evolved solar-like stars provides constraints for the expected field amplitudes inside evolved stars. Such field amplitudes during the RGB may permit the detection of magnetic signatures on $g-m$ mixed-mode frequencies. Specifically, the amplitude of magnetically induced frequency shifts is of about ∼0.1 μHz during the RGB when considering field amplitudes between 0.1 and 1 MG, and this shift is larger than the frequency resolution of long-term observations by the *Kepler*, TESS, and PLATO missions. Depending on the nature ($p-m$ or $g-m$) of the mixed mode and of its frequency, the magnetically induced frequency shift may also exceed the typical line width of the mode. Along the RGB, the effect of magnetism on $g-m$ modes, which propagate inside the magnetised radiative interior, is larger than on $p-m$ modes, which also propagate inside the convective envelope. This difference between $g-m$ and $p-m$ modes is also visible when evaluating the effect of the rotation of the star, where $p-m$ modes probing the more slowly rotating envelope are less affected by rotation than $g-m$ modes that primarily provide information about the more rapidly rotating core. Our results therefore mostly concern the effect of magnetism on $g-m$ modes, despite the fact that they are more difficult to observe than $p-m$ modes because of their relatively low amplitude in current data sets.

However, during the SG stage, $p-m$ modes dominate the observed spectra and are more affected by magnetism than during the RGB. This is reflected in the large extent of the radiative interior: $R_{\rm rad}\rightarrow R_\star$ during the SG phase while $R_{\rm rad}\rightarrow 0$ during the RGB. As a result, $p-m$ modes probe more highly magnetised plasma when the star is young. Fossil magnetism resulting from active dynamos before or during the MS is however not strong enough throughout the SGB to produce detectable changes either on their $p-m$ or $g-m$ mixed-mode frequencies. We do not exclude the possibility of having stronger fields than that obtained by the balanced regimes. For example, Fuller et al. (2015) proposed a mechanism that uses the frequency of magneto-gravity waves to estimate field amplitudes as large as 10 MG in KIC 8561221 during the SG phase.

The two g- and p- dominated mode regimes correspond to two different asymptotic cases: $\omega \ll N \ll S_1$ for $g-m$ modes, and $N \ll S_1 \ll \omega$ for $p-m$ modes. Asymptotic power laws corresponding to the magnetic effect on $p-m$ and $g-m$ mode frequencies are provided, where low-frequency $g-m$-mode magnetic splittings behave as $\delta\omega_{{\rm mag},g}\sim 1/\omega^{-3}$ whereas $p-m$-mode magnetic splittings behave as $\delta\omega_{{\rm mag},p}\sim\omega$. These asymptotic power laws possess amplitude scaling factors, and correlate with the ζ mode-coupling function. Complete expressions for these are derived in Mathis et al. (2021). Considering the typical balanced field amplitudes, we argue that, as for rotational perturbations, these first-order expressions are sufficient to ascertain the effect of magnetism on mixed-mode frequencies. As the star evolves on the RGB, the effect of magnetism on mixed-mode frequencies gets larger, where very evolved red giants or AGB stars with $\nu_{\rm max}\lesssim 100$ μHz may be non-perturbatively impacted by magnetism. For such evolved stars, we refer to the study of Loi (2020).

We show that the considered axisymmetric magnetism, aligned with the rotation axis of the star, acts as a new perturbation of the already present rotational multiplet. The magnetised mixed multiplet with order n_{pg} is made asymmetric by the presence of a magnetic field: all $\ell=1$ and $\ell=2$ multiplet components are shifted towards higher frequencies, with the amplitude of the shifts depending on the azimuthal order m of the mode. We argue that this asymmetry can be distinguished from other asymmetry sources such as non-degenerate effects. Adjustment methods such as described in Vrard et al. (2015), Mosser et al. (2015), and Gehan et al. (2018) may be adapted to investigate magnetic asymmetries. If the magnetic effect is small compared to the rotational impact on mixed-mode frequencies, the multiplet is simply shifted towards higher frequencies. However, we may observe crossings of the components between successive n_{pg} mixed-mode multiplets if the magnetic field amplitude is sufficiently large, yet a strong core rotation also yields similar crossings.

If such isolated fossil fields exist inside the radiative interior of evolved stars, they would also affect the rotational profile of the radiative zone: we show that within the assumptions of Mestel & Weiss (1987), the rotation is frozen to poloidal field lines within a few years, eventually leading to an almost flat rotational profile inside the radiative interior. A reconnection of the fossil and dynamo-generated magnetic fields in the convection zone at the tachocline may however permit a small amount of differential rotation to persist inside the radiative interior.

Under the hypothesis that g modes may be trapped inside the core of the star as described by Fuller et al. (2015), we also show that magnetic signatures may be detectable in the frequency pattern of a star before the complete suppression of the mode amplitudes, especially in the case of young red giants. This result is of great interest because the magnetic signature within mixed-mode frequencies may appear in the PSD with $\ell = 1$ modes of normal amplitude.

Acknowledgements. We thank the referee for very useful and detailed comments that allow to improve the quality of our study and the article. L. Bugnet, V. Prat, S. Mathis, A. A. Stoul, and K. Augustson acknowledge support from the European Research Council through ERC grant SPIRE 647383. All CEA members acknowledge support from GOLF and PLATO CNES grants of the Astrophysics Division at CEA. S. Mathur acknowledges support by the Ramon y Cajal fellowship number RYC-2015-17697. L. Amard acknowledges funding from the European Research Council (grant agreement No. 682393 AWESoMeStars). We made great use of the megyr python package for interfacing MESA and GYRE codes. In honour of our dear friend and colleague Michael J. Thompson.

References

Abramowitz, M., & Stegun, I. 1972, Handbook of Mathematical Functions (New York: Dover)
Acevedo-Arreguin, L. A., Garaud, P., & Wood, T. S. 2013, MNRAS, 434, 720
Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J., & Kurtz, D. W. 2010, Asteroseismology, Astronomy and Astrophysics Library (Dordrecht: Springer Netherlands)
Akgün, T., Reisenegger, A., Mastrano, A., & Marchant, P. 2013, MNRAS, 433, 2445
Alvan, L., Mathis, S., & Decressin, T. 2013, A&A, 553, A86
Amard, L., Palacios, A., Charbonnel, C., et al. 2019, A&A, 631, A77
Angel, J. R. P., Borra, E. F., & Landstreet, J. D. 1981, ApJ, 45, 457
Angus, R., Aigrain, S., Foreman-Mackey, D., & McQuillan, A. 2015, MNRAS, 450, 1787
Appourchaux, T., Belkacem, K., Broomhall, A. M., et al. 2010, A&ARv, 18, 197
Appourchaux, T., Boumier, P., Leibacher, J. W., & Corbard, T. 2018, A&A, 607, A108
Arlt, R., Leussu, R., Giese, N., Mursula, K., & Usoskin, I. G. 2013, MNRAS, 433, 3165
Astoul, A., Mathis, S., Baruteau, C., et al. 2019, A&A, 631, A111
Augustson, K., & Mathis, S. 2018, SF2A-2018: Proceedings of the Annual Meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics, 113
Augustson, K. C., Brown, B. P., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2012, ApJ, 756, 169
Augustson, K., Brun, A. S., Miesch, M., & Toomre, J. 2015, ApJ, 809, 149
Augustson, K. C., Brun, A. S., & Toomre, J. 2016, ApJ, 829, 92
Augustson, K. C., Brun, A. S., & Toomre, J. 2019, ApJ, 876, 83
Aurière, M., Konstantinova-Antova, R., Charbonnel, C., et al. 2015, A&A, 574, A90
Barnes, S. A. 2003, ApJ, 586, 464
Barnes, S. A. 2010, ApJ, 722, 222
Barnes, G., Charbonneau, P., & MacGregor, K. B. 1999, ApJ, 511, 466
Beck, P. G., Bedding, T. R., Mosser, B., et al. 2011, Science, 332, 205
Beck, P. G., Montalban, J., Kallinger, T., et al. 2012, Nature, 481, 55
Bedding, T. R., Mosser, B., Huber, D., et al. 2011, Nature, 471, 608
Belkacem, K., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2015, A&A, 579, A30
Benomar, O., Belkacem, K., Bedding, T. R., et al. 2014, ApJ, 781, L29
Benomar, O., Takata, M., Shibahashi, H., Ceillier, T., & García, R. A. 2015, MNRAS, 452, 2654
Bigot, L., Provost, J., Berthomieu, G., Dziembowski, W. A., & Goode, P. R. 2000, A&A, 356, 218
Braithwaite, J. 2006, A&A, 453, 687
Braithwaite, J. 2007, A&A, 469, 275
Braithwaite, J. 2008, MNRAS, 386, 1947
Braithwaite, J., & Nordlund, A. 2006, A&A, 450, 1077
Braithwaite, J., & Spruit, H. C. 2004, Nature, 431, 819
Brown, B. P., Browning, M. K., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2010, ApJ, 711, 424
Brown, B. P., Miesch, M. S., Browning, M. K., Brun, A. S., & Toomre, J. 2011, ApJ, 731, 69
Browning, M. K. 2008, ApJ, 676, 1262
Brun, A. S., & Browning, M. K. 2017, Liv. Rev. Sol. Phys., 14, A4
Brun, A. S., & Zahn, J. P. 2006, A&A, 457, 665
Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2004, ApJ, 614, 1073
Brun, A. S., Browning, M. K., & Toomre, J. 2005, ApJ, 629, 461
Brun, A. S., Strugarek, A., Varela, J., et al. 2017, ApJ, 836, 192
Campbell, C. G., & Papaloizou, J. C. B. 1986, MNRAS, 220, 577
Cantiello, M., Mankovich, C., Bildsten, L., Christensen-Dalsgaard, J., & Paxton, B. 2014, ApJ, 788, 93
Cantiello, M., Fuller, J., & Bildsten, L. 2016, ApJ, 824, 14
Ceillier, T., Eggenberger, P., García, R. A., & Mathis, S. 2013, A&A, 555, A54
Ceillier, T., Tayar, J., Mathur, S., et al. 2017, A&A, 605, A111
Chandrasekhar, S. 1958, Proc. Natl. Acad. Sci., 44, 842
Chaplin, W. J., Appourchaux, T., Elsworth, Y., et al. 2010, ApJ, 713, 169
Chaplin, W. J., Serenelli, A. M., Miglio, A., et al. 2020, Nat. Astron., 4, 383
Charbonneau, P., & MacGregor, K. B. 1993, ASP Conf. Ser., 40, 464
Christensen, U. R., Holzwarth, V., & Reiners, A. 2009, Nature, 457, 167
Couvidat, S., Garca, R. A., Turck-Chize, S., et al. 2003, ApJ, 597, L77
Cowling, T. G. 1945, MNRAS, 38, 105
Cunha, M. S., Stello, D., Avelino, P. P., Christensen-Dalsgaard, J., & Townsend, R. H. 2015, ApJ, 805, 127
Cunha, M. S., Avelino, P. P., Christensen-Dalsgaard, J., et al. 2019, MNRAS, 490, 909
Deheuvels, S., García, R. A., Chaplin, W. J., et al. 2012, ApJ, 756, 19
Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M. J., et al. 2014, A&A, 564, A27
Deheuvels, S., Brandão, I., Silva Aguirre, V., et al. 2016, A&A, 589, A93
Deheuvels, S., Ouazzani, R. M., & Basu, S. 2017, A&A, 605, A75
Deheuvels, S., Ballot, J., Eggenberger, P., et al. 2020, A&A, 641, A117
Den Hartogh, J. W., Eggenberger, P., & Deheuvels, S. 2020, A&A, 634, L16
Dikpati, M., & Gilman, P. A. 1999, ApJ, 512, 417
Domingo, V., Fleck, B., & Poland, A. I. 1995, Sol. Phys., 162, 1
Donati, J.-F., Semel, M., Carter, B. D., Rees, D. E., & Cameron, A. C. 1997, MNRAS, 291, 658
Duez, V. 2011, Astron. Nachr., 332, 983
Duez, V., & Mathis, S. 2010, A&A, 517, A58
Duez, V., Braithwaite, J., & Mathis, S. 2010a, ApJ, 724, L34
Duez, V., Mathis, S., & Turck-Chièze, S. 2010b, MNRAS, 402, 271
Dupret, M. A., Belkacem, K., Samadi, R., et al. 2009, A&A, 506, 57
Dziembowski, W. A., & Goode, P. R. 1985, ApJ, 296, 27
Dziembowski, W. A., & Goode, P. R. 1989, ApJ, 347, 540
Dziembowski, W. A., & Goode, P. R. 1992, ApJ, 394, 670
Dziembowski, W. A., & Goode, P. R. 1996, ApJ, 458, 338
Eggenberger, P., Maeder, A., & Meynet, G. 2005, A&A, 440, L9
Eggenberger, P., Montalbán, J., & Miglio, A. 2012, A&A, 544, L4
Eggenberger, P., Lagarde, N., Miglio, A., et al. 2017, A&A, 599, A18
Eggenberger, P., Deheuvels, S., Miglio, A., et al. 2019, A&A, 621, A66
Eggenberger, P., Den Hartogh, J. W., Buldgen, G., et al. 2020, A&A, 631, L6
Emeriau-Viard, C., & Brun, A. S. 2017, ApJ, 846, 8
Featherstone, N. A., Browning, M. K., Brun, A. S., & Toomre, J. 2009, ApJ, 705, 1000
Ferraro, V. C. A. 1937, MNRAS, 97, 458
Fossat, E., & Schmider, F. X. 2018, A&A, 612, L1
Fossat, E., Boumier, P., Corbard, T., et al. 2017, A&A, 604, A40
Froman, N., & Froman, P. O. 2005, Physical Problems Solved by the Phase-integral Method (Cambridge, UK: Cambridge University Press), 228
Fuller, J. 2014, Icarus, 242, 283
Fuller, J., Lecoanet, D., Cantiello, M., & Brown, B. 2014, ApJ, 796, 17
Fuller, J., Cantiello, M., Stello, D., Garcia, R. A., & Bildsten, L. 2015, Science, 350, 423
Fuller, J., Piro, A. L., & Jermyn, A. S. 2019, MNRAS, 485, 3661
Gabriel, A. H., Grec, G., Charra, J., et al. 1995, Sol. Phys., 162, 61
Gallet, F., & Bouvier, J. 2013, A&A, 556, A36
García, R. A., & Ballot, J. 2019, Liv. Rev. Sol. Phys., 16, A4
García, R. A., Turck-Chièze, S., Jiménez-Reyes, S., et al. 2007, Science, 316, 1591
García, R. A., Mathur, S., Ballot, J., et al. 2008, Sol. Phys., 251, 119
García, R. A., Mathur, S., Pires, S., et al. 2014a, A&A, 568, A10
García, R. A., Ceillier, T., Salabert, D., et al. 2014b, A&A, 572, A34
Gaurat, M., Jouve, L., Lignières, F., & Gastine, T. 2015, A&A, 580, A103
Gehan, C., Mosser, B., Michel, E., Samadi, R., & Kallinger, T. 2018, A&A, 616, A24
Gough, D. 1984, Interdiscip. Sci. Rev., 9, 240
Gough, D. O., & McIntyre, M. E. 1998, Nature, 394, 755
Gough, D. O., & Thompson, M. J. 1990, MNRAS, 242, 25
Goupil, M. J., Mosser, B., Marques, J. P., et al. 2013, A&A, 549, A75
Hasan, S. S., Zahn, J. P., & Christensen-Dalsgaard, J. 2005, A&A, 444, 29
Hekker, S., & Christensen-Dalsgaard, J. 2017, A&ARv, 25, A1
Hotta, H. 2017, ApJ, 843, 52
Huber, D., Chaplin, W. J., Chontos, A., et al. 2019, AJ, 157, 245
Jiang, C., Cunha, M., Christensen-Dalsgaard, J., & Zhang, Q. 2020, MNRAS, 495, 621
Jouve, L., Lignières, F., & Gaurat, M. 2020, A&A, 641, A13

Kiefer, R., & Roth, M. 2018, ApJ, 854, 74
Lecoanet, D., Vasil, G. M., Fuller, J., Cantiello, M., & Burns, K. J. 2017, MNRAS, 466, 2181
Loi, S. T. 2020, MNRAS, 496, 3829
Loi, S. T., & Papaloizou, J. C. B. 2017, MNRAS, 3225, 3212
Loi, S. T., & Papaloizou, J. C. B. 2018, MNRAS, 477, 5338
Loi, S. T., & Papaloizou, J. C. B. 2020, MNRAS, 491, 708
Lund, M. N., Aguirre, V. S., Davies, G. R., et al. 2017, ApJ, 835, 172
Markey, P., & Tayler, R. 1973, MNRAS, 163, 77
Marques, J. P., Goupil, M. J., Lebreton, Y., et al. 2013, A&A, 549, A74
Mathis, S., & Zahn, J. P. 2005, A&A, 440, 653
Mathis, S., Duez, V., & Braithwaite, J. 2010, Proc. Int. Astron. Union, 6, 270
Mathis, S., Bugnet, L., Prat, V., et al. 2021, A&A, 647, A122
Mathur, S., Eff-Darwich, A., García, R. A., & Turck-Chièze, S. 2008, A&A, 484, 517
Mathur, S., García, R. A., Ballot, J., et al. 2014, A&A, 562, A124
McQuillan, A., Aigrain, S., & Mazeh, T. 2013, MNRAS, 432, 1203
Mestel, L. 1953, MNRAS, 113, 716
Mestel, L., & Weiss, N. O. 1987, MNRAS, 226, 123
Michel, E., Baglin, A., Auvergne, M., et al. 2008, Science, 322, 558
Moffatt, H. K. 2015, J. Plasma Phys., 81, 905810608
Mosser, B. 2015, EAS Publ. Ser., 73, 3
Mosser, B., Elsworth, Y., Hekker, S., et al. 2012, A&A, 537, A30
Mosser, B., Vrard, M., Belkacem, K., Deheuvels, S., & Goupil, M. J. 2015, A&A, 584, A50
Mosser, B., Belkacem, K., Pinçon, C., et al. 2017, A&A, 598, A62
Mosser, B., Gehan, C., Belkacem, K., et al. 2018, A&A, 618, A109
Ouazzani, R.-M., Goupil, M. J., Dupret, M.-A., & Marques, J. P. 2013, A&A, 554, A80
Paxton, B., Bildsten, L., Dotter, A., et al. 2011, ApJS, 192, 3
Pinçon, C., Belkacem, K., Goupil, M. J., & Marques, J. P. 2017, A&A, 605, A31
Prat, V., Mathis, S., Buysschaert, B., et al. 2019, A&A, 627, A64
Putney, A. 1999, 11th European Workshop on White Dwarfs (San Francisco: Astronomical Society of the Pacific)
Rashba, T. I., Semikoz, V. B., Turck-Chièze, S., & Valle, J. W. 2007, MNRAS, 377, 453
Reese, D., Lignières, F., & Rieutord, M. 2006, A&A, 455, 621
Rieutord, M. 2017, EPJ Web Conf., 160, 02011
Roberts, P. H., & Soward, A. M. 1983, MNRAS, 205, 1171
Rüdiger, G., & Kitchatinov, L. L. 1997, Astron. Nachr., 318, 273
Santos, A. R. G., García, R. A., Mathur, S., et al. 2019, ApJS, 244, 21
Scherrer, P. H., & Gough, D. O. 2019, ApJ, 877, 42
Scherrer, P. H., Bogart, R. S., Bush, R. I., et al. 1995, Sol. Phys., 162, 129
Schmidt, G. D., Vennes, S., Wickramasinghe, D. T., & Ferrario, L. 2001, MNRAS, 328, 203
Schunker, H., Schou, J., Gaulme, P., & Gizon, L. 2018, Sol. Phys., 293, 95
Spada, F., & Lanzafame, A. C. 2020, A&A, 636, A76
Spruit, H. C. 1999, A&A, 349, 189
Spruit, H. C. 2002, A&A, 381, 923
Stello, D., Cantiello, M., Fuller, J., Garcia, R. A., & Huber, D. 2016a, PASA, 33, e011
Stello, D., Cantiello, M., Fuller, J., et al. 2016b, Nature, 529, 364
Strugarek, A., Brun, A. S., & Zahn, J. P. 2011, A&A, 532, A34
Suárez, J. C., Goupil, M. J., & Morel, P. 2006, A&A, 449, 673
Takata, M., & Shibahashi, H. 1994, PASJ, 46, 301
Tayler, R. 1973, MNRAS, 161, 365
Tayler, R. 1980, MNRAS, 191, 151
Thompson, M., Christensen-Dalsgaard, J., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2003, ARA&A, 41, 81
Townsend, R. H., & Teitler, S. A. 2013, MNRAS, 435, 3406
Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, Nonradial Oscillations of Stars (Tokyo: University of Tokyo Press)
van Beeck, J., Prat, V., Van Reeth, T., et al. 2020, A&A, 638, A149
van Saders, J. L., & Pinsonneault, M. H. 2013, ApJ, 776, 67
Villebrun, F., Alecian, E., Hussain, G., et al. 2019, A&A, 622, A72
Vrard, M., Mosser, B., & Barban, C. 2015, EPJ Web Conf., 101, 06067
Vrard, M., Mosser, B., & Barban, C. 2017, EPJ Web Conf., 160, 04012
Woltjer, L. 1959, ApJ, 130, 405
Wood, T. S., McCaslin, J. O., & Garaud, P. 2011, ApJ, 738, 47
Yu, J., Huber, D., Bedding, T. R., et al. 2016, MNRAS, 463, 1297
Zahn, J. P., Brun, A. S., & Mathis, S. 2007, A&A, 474, 145

Appendix A: Magnetic scaling-law regimes

By considering the fluid in the rotating frame under the effect of magnetism (via the Lorentz force) and rotation (via the Coriolis acceleration), assuming stationarity and neglecting viscosity and the centrifugal acceleration, the Navier-Stokes equation in a convection zone may be written as:

$$\underbrace{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}}_{\text{Advection}} = \underbrace{-\frac{\boldsymbol{\nabla}P}{\rho}}_{\text{Fluid pressure}} \underbrace{-2\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{v}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\rho}(\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{B})\wedge\boldsymbol{B}}_{\text{Lorentz force}} + \underbrace{\mathrm{g}}_{\text{Gravity}}, \tag{A.1}$$

with g the gravitational acceleration.

For this equation, several force balances allow us to evaluate the amplitude of the magnetic field in different regimes. The balance between forces is a partitioning that depends upon the convective Rossby number. It is more subtle than a typical asymptotic analysis because it is meant to encompass three convective Rossby number regimes smoothly:

- At high Rossby number ($\mathrm{Ro} \gg 1$) flows are weakly rotationally constrained but possess a strong dynamo;
- for Ro close to one, flows are modestly rotationally constrained, again with a strong dynamo;
- for low Ro ($\mathrm{Ro} \ll 1$), the magnetostrophic regime is reached, corresponding to rotationally constrained and magnetised flows.

It is found in Augustson et al. (2019) that the partitioning of forces is dominated by combinations of the inertial terms (Reynolds stresses), the Coriolis acceleration, and the Lorentz force (or Maxwell stresses) for all Rossby numbers. However, depending upon Rossby number regime, the relative influence of each of these three strongest forces changes.

The force balance described in Augustson et al. (2019) fits the available simulation data well when the force balance is described as

$$I + C + L \approx 0, \tag{A.2}$$

where I is the magnitude of the inertial forces, C that of the Coriolis force, and L that of the Lorentz force. Using a scaling argument about the dominant length scales, velocity, and magnetic field amplitudes at that scale, one can show that in this case

$$\mathrm{ME}/\mathrm{KE} \approx a + b/\mathrm{Ro}, \tag{A.3}$$

where $\mathrm{Ro} \approx v_l/(2\Omega_0 l)$ and l is that dominant length scale, a describes the efficiency of a small-scale local dynamo that depends only on the helical turbulence generated by convection, and b refers to how close to perfect magnetostrophy the system is. In this framework, three specific regimes can be reached:

- The magnetostrophic regime (low Rossby number) is reached when the Lorentz force balances the Coriolis acceleration and other forces are much smaller in magnitude. This regime can be achieved for a sufficiently high rotation rate. From Eq. (A.1), we deduce that

$$B \simeq \sqrt{8\pi\Omega\rho R_{\mathrm{conv}} v_{\mathrm{conv}}}, \tag{A.4}$$

with R_{conv} the size of the convective zone, and v_{conv} the convective velocity. This can be rewritten in terms of convective Rossby number $\mathrm{Ro} = v_{\mathrm{conv}}/(2\Omega R_{\mathrm{conv}})$ and kinetic energy density associated with convective motions $\mathrm{KE} = \rho v_{\mathrm{conv}}^2/2$ as:

$$B \simeq \sqrt{\frac{8\pi\mathrm{KE}}{\mathrm{Ro}}}. \tag{A.5}$$

- Dynamo action converts a fraction of the kinetic energy of the convective motions into magnetic energy. In the equipartition regime (high Rossby number regime where the Coriolis acceleration can be neglected), the assumption is thus that the dynamo is efficient enough such that the magnetic energy density $\mathrm{ME} = B^2/(8\pi)$ balances the convective kinetic energy density KE of the fluid:

$$B \simeq \sqrt{8\pi\mathrm{KE}}. \tag{A.6}$$

- In the modest Rossby number regime, all three forces have roughly the same magnitude. So, ultimately, in the Rossby number regime that is close to unity, all three forces play nearly equal roles. By neglecting inertial forces, considering constant density, and with $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{v} = 0$, the curl of Eq. (A.1) can be written

$$(\boldsymbol{\Omega}.\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = \frac{1}{4\pi\rho}\boldsymbol{\nabla}\wedge((\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{B})\wedge\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{\nabla}\wedge\mathrm{g}. \tag{A.7}$$

Comparing the three terms composing Eq. (A.7), the balance is reached for

$$B \simeq \sqrt{\frac{8\pi\mathrm{KE}}{\sqrt{\mathrm{Ro}}}}. \tag{A.8}$$

We refer to the Augustson et al. (2019) and Astoul et al. (2019) studies for additional details on the estimation of the buoyancy dynamo field strength. This field has an intermediate value between the equipartition and magnetostrophy regimes, which set the upper and lower boundaries of the expected magnetic amplitude during episodes of internal convective dynamo action.

Appendix B: Magnetic field stable topology

We recall the stable configuration theoretical expression (Duez & Mathis 2010) that is used in our study to represent fossil fields aligned with the rotation axis of the star:

$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\boldsymbol{\nabla}\psi(r,\theta)\wedge\boldsymbol{e}_{\varphi} + \lambda\dfrac{\psi(r,\theta)}{R_{\mathrm{rad}}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\varphi}}\right) \text{ if } r < R_{\mathrm{rad}}, \\ 0 \text{ if } r > R_{\mathrm{rad}}, \end{cases} \tag{B.1}$$

where ψ is the stream function:

$$\psi(r,\theta) = \mu_0\alpha\lambda\frac{A(r)}{R_{\mathrm{rad}}}\sin^2\theta, \tag{B.2}$$

with μ_0 the vacuum magnetic permeability, α a normalisation constant, λ the eigenvalue of the problem that fixes the shape of the magnetic configuration, R_{rad} the radius of the radiative cavity, and

$$\begin{aligned} A(r) = &-rj_1\left(\lambda\frac{r}{R_{\mathrm{rad}}}\right)\int_{\mathrm{r}}^{R_{\mathrm{rad}}} y_1\left(\lambda\frac{x}{R_{\mathrm{rad}}}\right)\rho x^3\mathrm{d}x \\ &- ry_1\left(\lambda\frac{r}{R_{\mathrm{rad}}}\right)\int_0^{\mathrm{r}} j_1\left(\lambda\frac{x}{R_{\mathrm{rad}}}\right)\rho x^3\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{B.3}$$

with j_1 (y_1) the first-order spherical Bessel function of the first (second) kind (Abramowitz & Stegun 1972).

In order for the field to be confined inside the radiative interior of evolved solar-like stars, $\psi(r,\theta)$ (and thus $A(r)$) should go to zero at the radiative–convective boundary located by R_{rad}. There are two options to cancel $\psi(R_{\mathrm{rad}},\theta)$ for any value of θ:

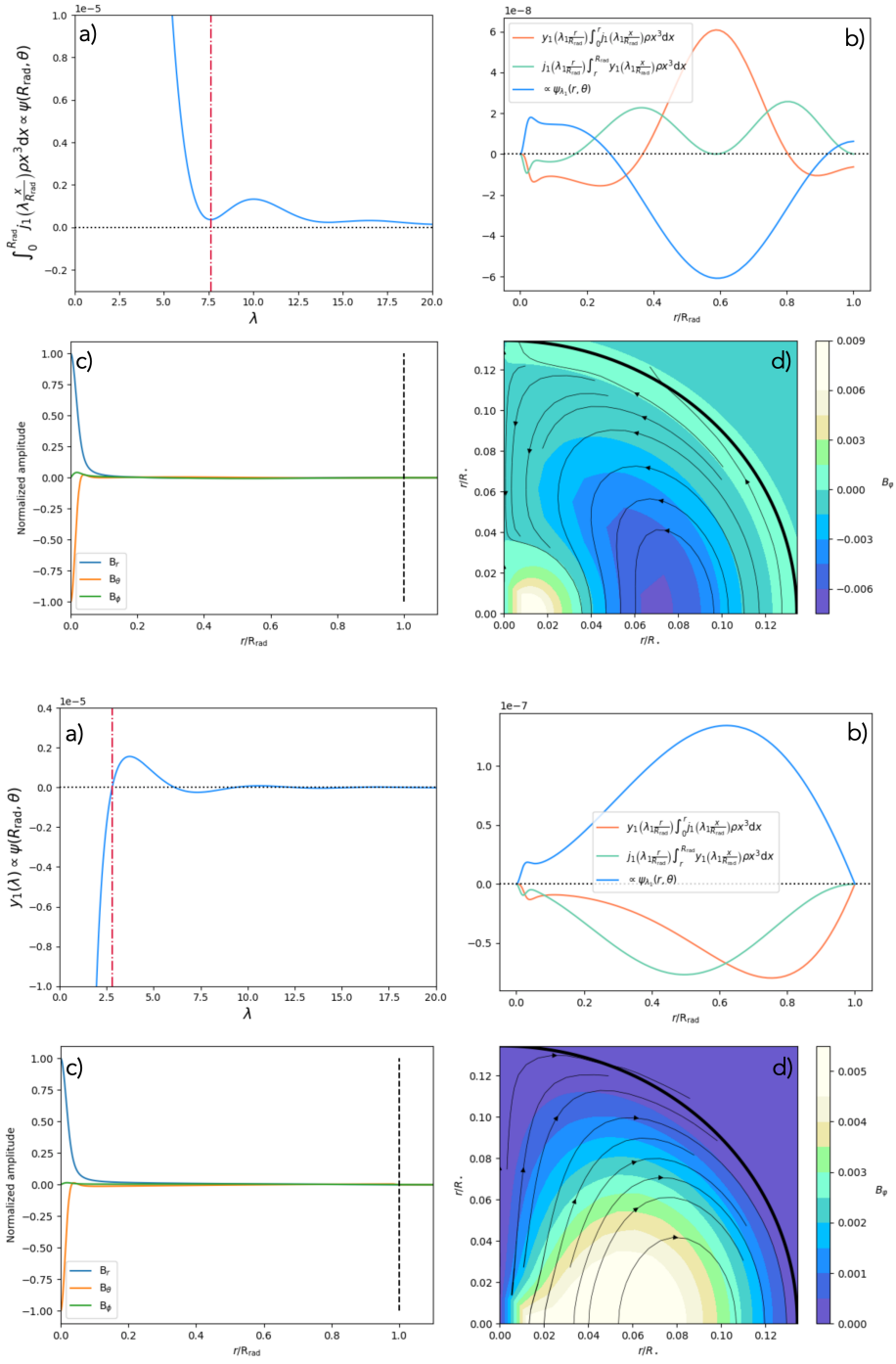


Fig. B.1. Attempt to find the first zero of $\int_0^{\mathrm{r}} j_1\left(\lambda \frac{x}{R_{\mathrm{rad}}}\right)\rho x^3 \mathrm{d}x$ at the radiative–convective boundary. We consider the typical red giant with $M = 1.5\,M_\odot$, $Z = 0.02$ on the RGB. *Panel a*: trend of the evolution of the ψ function at $r = R_{\mathrm{rad}}$ with the eigenvalue λ. The value λ_1 closest to the eigenvalue is indicated by the red vertical line. *Panel b*: shape of the functions $y_1\left(\lambda_1 \frac{r}{R_{\mathrm{rad}}}\right)\int_0^{\mathrm{r}} j_1\left(\lambda_1 \frac{x}{R_{\mathrm{rad}}}\right)\rho x^3 \mathrm{d}x$, $j_1\left(\lambda_1 \frac{r}{R_{\mathrm{rad}}}\right)\int_{\mathrm{r}}^{R_{\mathrm{rad}}} y_1\left(\lambda_1 \frac{x}{R_{\mathrm{rad}}}\right)\rho x^3 \mathrm{d}x$ and $\psi_{\lambda_1}(r,\theta)$ with $\lambda_1 \simeq 7.62$, the vertical dashed line indicates the surface. *Panel c*: magnetic field components with $\lambda_1 \simeq 7.62$. *Panel d*: resulting magnetic field topology with $\lambda_1 \simeq 7.62$.

Fig. B.2. Same legend as Fig. B.1 for the first zero of $y_1\left(\lambda \frac{r}{R_{\mathrm{rad}}}\right)$ at the radiative–convective boundary instead. In this case we find the first eigenvalue $\lambda_1 \simeq 2.80$.

– Cancelling $\rho \int_0^{R_{\mathrm{rad}}} j_1\left(\lambda \frac{x}{R_{\mathrm{rad}}}\right) x^3 \mathrm{d}x$ allows us to confine b_{r} and b_θ inside the radiative interior and to keep the field in its more stable configuration (Woltjer 1959; Duez et al. 2010a).
– Cancelling $y_1(\lambda)$ allows only b_{r} to go to zero at the radiative boundary. Non-zero B_θ generates an azimuthal current sheet that potentially creates instabilities (Duez & Mathis 2010).

We observe in panel a of Fig. B.1 that the Ψ function fails to reach zero at the edge of the convective interior for any value of λ_1 when trying to suppress $\rho \int_0^{R_{\mathrm{rad}}} j_1\left(\lambda \frac{x}{R_{\mathrm{rad}}}\right) x^3 \mathrm{d}x$. The first minimum of the function $\psi(R_{\mathrm{rad}}, \theta)$ is found at $\lambda_1 \simeq 7.62$, and leads to a $\psi_{\lambda_1}(r,\theta)$ function proportional to the blue curve represented in panel b and to the magnetic field topology represented in panels c and d of Fig. B.1, for which the field is not trapped inside the radiative interior. Such magnetic-field configuration is not the most stable one according to the studies of Braithwaite (2008) and Duez & Mathis (2010).

By performing instead the analysis with a constant density profile (i.e. searching for zeros of the function $\rho \int_0^{R_{\mathrm{rad}}} j_1\left(\lambda \frac{x}{R_{\mathrm{rad}}}\right) x^3 \mathrm{d}x$) allows the search for λ_1 to converge. We therefore conclude that the steep density profile inside red giants prevents the $\int_0^{R_{\mathrm{rad}}} j_1\left(\lambda \frac{x}{R_{\mathrm{rad}}}\right) x^3 \rho \mathrm{d}x$ integral from converging to zero easily.

The only remaining option to find the eigenvalue λ_1 that cancels ψ at the radiative boundary for all θ is therefore to search

for the zeros of $y_1(\lambda)$ instead of those of the integral in Eq. (4). Results are represented in Fig. B.2, with $\lambda_1 \simeq 2.80$ the eigenvalue used in this study. This method allows b_r to cancel at the radiative boundary, but does not constrain the horizontal component of the field. As shown by panel c of Fig. B.2, angular components are still very close to zero at the radiative–convective boundary. As a result, this magnetic field topology is stable (Duez & Mathis 2010) and can be considered as trapped inside the radiative interior along the evolution.

Appendix C: Non-zero average terms of the Lorentz work

In this section, we present all the non-zero terms composing the work of $\boldsymbol{\delta F}_\mathrm{L}\cdot\boldsymbol{\xi}^*/\rho$. They either involve only poloidal components of the magnetic field, or toroidal components only. The prime symbol ($'$) indicates a total derivative, either radial or latitudinal depending on the considered variable.

C.1. Poloidal terms

By using $A = [(rb_\theta)' + b_\mathrm{r}]$, the terms of the work of $\boldsymbol{\delta F}_{\mathrm{L},j+t}\cdot\boldsymbol{\xi}^*/\rho$ involving poloidal components write:

$$
\begin{aligned}
&- m^2\frac{\xi_\mathrm{h} b_\theta A\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}\left(Y_l^m\right)^2 + \frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\theta)'A\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}\left(Y_l^m\right)^2\sin^2\theta\\
&- \frac{(r\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r})'A\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}Y_l^m\partial_\theta Y_l^m\sin\theta\cos\theta + \frac{\xi_\mathrm{r}b_\theta A\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}\partial_\theta Y_l^m(Y_l^m\sin^2\theta)'\\
&- \frac{Ab_\mathrm{r}|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}\partial_\theta Y_l^m(\partial_\theta Y_l^m\sin\theta\cos\theta)' + m^2\frac{Ab_\mathrm{r}|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2\sin\theta}\partial_\theta Y_l^m Y_l^m\cos\theta\\
&- m^2\frac{(\xi_\mathrm{h}b_\theta)'b_\theta\xi_\mathrm{r}^*}{r}\left(Y_l^m\right)^2 + \frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\theta)''b_\theta\xi_\mathrm{r}^*}{r}\left(Y_l^m\right)^2\sin^2\theta\\
&- \frac{(r\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r})''b_\theta\xi_\mathrm{r}^*}{r}Y_l^m\partial_\theta Y_l^m\sin\theta\cos\theta\\
&+ \frac{b_\theta^2|\xi_\mathrm{r}|^2}{r^2}Y_l^m\sin\theta\left[\frac{(Y_l^m\sin^2\theta)'}{\sin\theta}\right]'\\
&- \frac{\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r}b_\theta\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}Y_l^m\sin\theta\left[\frac{(\partial_\theta Y_l^m\sin\theta\cos\theta)'}{\sin\theta}\right]'\\
&+ m^2\frac{\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r}b_\theta\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}Y_l^m\sin\theta\left(Y_l^m\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)' + m^2\frac{(\xi_\mathrm{h}b_\theta)'b_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}^*}{r\sin\theta}\partial_\theta Y_l^m Y_l^m\cos\theta\\
&- \frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\theta)''b_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}^*}{r}Y_l^m\partial_\theta Y_l^m\sin\theta\cos\theta + \frac{(r\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r})''b_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}^*}{r}\left(\partial_\theta Y_l^m\right)^2\cos^2\theta\\
&- \frac{\xi_\mathrm{r}b_\mathrm{r}b_\theta\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}\partial_\theta Y_l^m\cos\theta\left[\frac{(Y_l^m\sin^2\theta)'}{\sin\theta}\right]'\\
&+ \frac{b_\mathrm{r}^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}\partial_\theta Y_l^m\cos\theta\left[\frac{(\partial_\theta Y_l^m\sin\theta\cos\theta)'}{\sin\theta}\right]'\\
&- m^2\frac{b_\mathrm{r}^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}\partial_\theta Y_l^m\cos\theta\left(Y_l^m\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)'\\
&+ m^2\frac{(r\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r})'b_\theta\xi_\mathrm{h}^*}{r^2\sin\theta}Y_l^m(Y_l^m\cos\theta)'\\
&+ m^2\frac{b_\theta^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2\sin^2\theta}Y_l^m[\sin\theta(Y_l^m)']' - m^4\frac{b_\theta^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2\sin^2\theta}\left(Y_l^m\right)^2\\
&+ m^2\frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\theta)'b_\theta\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}\left(Y_l^m\right)^2 - m^2\frac{(r\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r})'b_\theta\xi_\mathrm{h}^*}{r^2\sin\theta}\partial_\theta Y_l^m Y_l^m\cos\theta\\
&- m^2\frac{\xi_\mathrm{r}b_\theta b_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}Y_l^m\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}(Y_l^m\sin^2\theta)'\\
&+ m^2\frac{b_\mathrm{r}^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}Y_l^m\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}(\partial_\theta Y_l^m\sin\theta\cos\theta)'\\
&- m^4\frac{b_\mathrm{r}^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}\left(Y_l^m\right)^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^4\theta} + m^2\frac{(r\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r})''b_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}^*}{r\sin^2\theta}\left(Y_l^m\right)^2\cos^2\theta\\
&+ m^2\frac{(\xi_\mathrm{h}b_\theta)'b_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}^*}{r\sin\theta}Y_l^m\cos\theta(Y_l^m)'
\end{aligned}
$$

and the work of $\boldsymbol{\delta F}_{\mathrm{L},c}\cdot\boldsymbol{\xi}^*/\rho$ is composed of:

$$
\begin{aligned}
&- \frac{Ab_\theta}{r}\frac{\left(\rho r^2\xi_\mathrm{r}\right)'}{\rho}\xi_\mathrm{r}^*\left(Y_l^m\right)^2\sin^3\theta - b_\theta A\xi_\mathrm{r}^*\xi_\mathrm{h}\partial_\theta\left(\partial_\theta Y_l^m\sin\theta\right)\sin^2\theta Y_l^m\\
&+ m^2Ab_\theta\xi_\mathrm{r}^*\xi_\mathrm{h}\left(Y_l^m\right)^2\sin\theta + \frac{Ab_\mathrm{r}}{r}\frac{\left(\rho r^2\xi_\mathrm{r}\right)'}{\rho}\xi_\mathrm{h}^*Y_l^m\partial_\theta Y_l^m\sin^2\theta\cos\theta\\
&- m^2Ab_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}^2Y_l^m\partial_\theta Y_l^m\cos\theta.
\end{aligned}
$$

C.2. Toroidal terms

The terms that involve the toroidal component of the field are for the work of $\boldsymbol{\delta F}_{\mathrm{L},j+t}\cdot\boldsymbol{\xi}^*/\rho$:

$$
\begin{aligned}
&2\frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\varphi)'b_\varphi\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}Y_l^m\partial_\theta Y_l^m\sin\theta\cos\theta\\
&+ 2\frac{b_\varphi^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}\partial_\theta Y_l^m\cos\theta(\partial_\theta Y_l^m\sin\theta)'\\
&+ 2m^2\frac{b_\varphi^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2\sin\theta}\partial_\theta Y_l^m Y_l^m\cos\theta + \frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\varphi)''b_\varphi\xi_\mathrm{r}^*}{r}\left(Y_l^m\right)^2\sin^2\theta\\
&+ \frac{(\xi_\mathrm{h}b_\varphi)'b_\varphi\xi_\mathrm{r}^*}{r}Y_l^m\sin\theta(\partial_\theta Y_l^m\sin\theta)'\\
&+ \frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\varphi)'b_\varphi\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}\partial_\theta Y_l^m(Y_l^m\sin^2\theta)'\\
&+ \frac{b_\varphi^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}\partial_\theta Y_l^m[\sin\theta(\partial_\theta Y_l^m\sin\theta)'] - m^2\frac{b_\varphi^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}\left(\partial_\theta Y_l^m\right)^2\\
&+ \frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\varphi)'(rb_\varphi)'\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}\left(Y_l^m\right)^2\sin^2\theta\\
&+ \frac{\xi_\mathrm{h}b_\varphi(rb_\varphi)'\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}Y_l^m\sin\theta(\partial_\theta Y_l^m\sin\theta)'\\
&+ m^2\frac{\xi_\mathrm{r}b_\varphi(rb_\varphi)'\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}\left(Y_l^m\right)^2 - m^2\frac{b_\varphi^2|\xi_\mathrm{r}|^2}{r^2}\left(Y_l^m\right)^2,
\end{aligned}
$$

and:

$$
\begin{aligned}
&- \frac{(rb_\varphi)'b_\varphi}{r}\frac{\left(\rho r^2\xi_\mathrm{r}\right)'}{\rho}\xi_\mathrm{r}^*\left(Y_l^m\right)^2\sin^3\theta\\
&- \left(rb_\varphi\right)'b_\varphi\xi_\mathrm{r}^*\xi_\mathrm{h}\partial_\theta\left(\partial_\theta Y_l^m\sin\theta\right)\sin^2\theta Y_l^m\\
&+ m^2(rb_\varphi)'b_\varphi\xi_\mathrm{r}^*\xi_\mathrm{h}\left(Y_l^m\right)^2\sin\theta\\
&- \frac{2b_\varphi^2}{r}\frac{\left(\rho r^2\xi_\mathrm{r}\right)'}{\rho}\xi_\mathrm{h}^*Y_l^m\partial_\theta Y_l^m\sin^2\theta\cos\theta\\
&+ 2m^2b_\varphi^2\xi_\mathrm{h}^2Y_l^m\partial_\theta Y_l^m\cos\theta
\end{aligned}
$$

for the work of $\boldsymbol{\delta F}_{\mathrm{L},c}\cdot\boldsymbol{\xi}^*/\rho$.

Appendix D: Stretched spectrum spacing $\Delta\tau_m$ in the presence of magnetism

In order to investigate the internal rotation rate of evolved solar-like stars possessing mixed modes, Mosser (2015) concentrates

on the rotational splitting on $g-m$ modes. We assume that solar-like stars are slow rotators, and therefore neglect the centrifugal acceleration and other second-order rotational effects which scale as Ω^2. From the study of Goupil et al. (2013) the global rotational splitting of a mixed mode is written as

$$\delta\nu_{\mathrm{rot},m} = \delta\nu_{\mathrm{rot},g}\zeta + \delta\nu_{\mathrm{rot,p}}(1-\zeta). \tag{D.1}$$

For $g-m$ modes the ζ function is very close to 1, so $\delta\nu_{\mathrm{rot},m} \simeq \delta\nu_{\mathrm{rot},g}\zeta \simeq \delta\nu_{\mathrm{rot,core}}\zeta$, providing a measure of the core rotation rate of the star. Therefore, the unperturbed frequency of $g-m$ modes can be written as $\nu_g = \nu - \delta\nu_{\mathrm{rot},g}\zeta$ with ν the measured frequency in the presence of rotation.

For a rotating and magnetised star, we rewrite the unperturbed frequency as a function of the observed frequency through:

$$\nu_g = \nu - \left(\delta\nu_{\mathrm{rot},g} + \delta\nu_{\mathrm{mag},g}\right)\zeta, \tag{D.2}$$

with $\delta\nu_{\mathrm{mag},g}$ the frequency perturbation due to magnetism only. The validity of this expression comes from the asymptotic study contained in the paper (Mathis et al. 2021). As a consequence, the period of mixed modes of azimuthal component m varies as

$$\frac{\mathrm{d}P_m}{\mathrm{d}\nu} = -\frac{1}{\nu^2}, \tag{D.3}$$

leading to

$$\mathrm{d}P_m = -\frac{\mathrm{d}\nu}{\left(\nu_g + \left(\delta\nu_{\mathrm{rot},g,m} + \delta\nu_{\mathrm{mag},g,m}\right)\zeta\right)^2}. \tag{D.4}$$

With the use of a limiting case where $\left(\delta\nu + \delta\nu_{\mathrm{mag,core},m}\right)/\nu \to 0$, one obtains:

$$\mathrm{d}P_m = -\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu_g^2}\left(1 - 2\zeta\frac{\delta\nu_{\mathrm{rot},g,m} + \delta\nu_{\mathrm{mag},g,m}}{\nu_g}\right). \tag{D.5}$$

The period spacing between two consecutive mixed modes is therefore written as:

$$\Delta P_m = \Delta P\left(1 - 2\zeta\frac{\delta\nu_{\mathrm{rot},g,m} + \delta\nu_{\mathrm{mag},g,m}}{\nu_g}\right), \tag{D.6}$$

with ΔP the period spacing between two consecutive $m = 0$ axisymmetric mixed modes. Noting that $\Delta\tau_m = \Delta P_m/\zeta$ and by using the fact ΔP can be written as $\Delta P = \zeta\Delta\Pi_1$, Eq. (D.6) becomes:

$$\Delta\tau_m = \Delta\Pi_1\left(1 - 2\zeta\frac{\delta\nu_{\mathrm{rot},g,m} + \delta\nu_{\mathrm{mag},g,m}}{\nu_g}\right). \tag{D.7}$$

Appendix E: MESA inlist

In this appendix we report the MESA inlist used to calculate the stellar evolution models of the 1.5 $M_\odot$, $Z = 0.02$ star:

```
&star_job

  ! begin with a pre-main sequence model
  create_pre_main_sequence_model = .true.

/ !end of star_job namelist


&controls

! starting specifications
  initial_mass  = 1.5 ! in Msun units
  initial_z     = 0.02
  use_Type2_opacities = .true.
  Zbase         = 0.02
  max_model_number    = 900

!------------ MISC
profile_interval = 10
history_interval = 10
max_num_profile_models = 1000

calculate_Brunt_N2 = .true.
star_history_name = 'history.data'
profile_data_prefix = 'profile'
profiles_index_name = 'profiles.index'

set_min_D_mix = .true.
min_D_mix = 1d1


!------------ Output pulse files for GYRE
pulse_data_format = 'GYRE'
write_pulse_data_with_profile = .true.
add_center_point_to_pulse_data = . true.
add_double_points_to_pulse_data = . true.


!------------ WIND
cool_wind_RGB_scheme = 'Reimers'
cool_wind_AGB_scheme = 'Blocker'
RGB_to_AGB_wind_switch = 1d-4
Reimers_scaling_factor = 0.2
Blocker_scaling_factor = 0.5
use_accreted_material_j = .true.
accreted_material_j = 0

!------------ OVERSHOOTING
overshoot_scheme(1) = 'exponential'
overshoot_zone_type(1) = 'any'
overshoot_zone_loc(1) = 'any'
overshoot_bdy_loc(1) = 'any'
overshoot_f(1) = 0.015
overshoot_f0(1) = 0.004

!------------ MESH
mesh_delta_coeff = 0.7
varcontrol_target = 0.7d-3
predictive_mix(1) = .true.
predictive_superad_thresh(1) = 0.005
predictive_avoid_reversal(1) = 'he4'
predictive_zone_type(1) = 'any'
predictive_zone_loc(1) = 'core'
predictive_bdy_loc(1) = 'top'
dX_div_X_limit_min_X = 1d-4
dX_div_X_limit = 5d-1
dX_nuc_drop_min_X_limit = 1d-4
dX_nuc_drop_limit = 1d-2

/ ! end of controls namelist
```

CHAPITRE 7

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DE LA SIGNATURE DU MAGNÉTISME INTERNE SUR LES FRÉQUENCES DES MODES MIXTES

Sommaire

7.1 Rappels sur la théorie asymptotique des modes d'oscillation mixtes **262**
7.1.1 Déplacement asymptotique des modes à basses fréquences 262
7.1.2 Déplacement asymptotique des modes à hautes fréquences 263
7.2 Premières expressions asymptotiques pour la description des perturbations magnétiques dans les géantes rouges **263**
7.2.1 Perturbations magnétiques sur les modes g 263
7.2.2 Perturbations magnétiques sur les modes p 264
7.2.3 Interprétation des signatures magnétiques sur les fréquences des modes mixtes 265
7.3 Expressions asymptotiques pour l'inversion des champs internes **266**
7.3.1 Expression asymptotique de la signature magnétique sur les modes g 266
7.3.2 Expression asymptotique de la signature magnétique sur les modes p 266
7.3.3 Expression asymptotique de la signature magnétique sur les modes mixtes . . . 267
7.3.4 Le potentiel d'inversion des champs magnétiques internes par les modes mixtes 268
7.4 Conclusions & Perspectives **269**

Dans le chapitre 6, nous évaluons numériquement l'amplitude des perturbations sur les fréquences des modes mixtes d'un champ magnétique confiné dans la zone radiative interne des étoiles de type solaire évoluées. La signature est démontrée asymétrique, et d'amplitude suffisante pour les champs magnétiques attendus au coeur des géantes rouges pour être détectable dans les données astérosismiques.

Nous avons également exposé dans le chapitre 3 l'état de l'art sur la mesure de la rotation interne des sous-géantes et des géantes rouges. La mesure de la signature rotationnelle sur les fréquences des modes permet l'inversion du taux de rotation interne de l'étoile (e.g. Deheuvels et al., 2012).

Dans ce nouveau chapitre, nous enrichissons l'étude du chapitre 6 par l'apport d'une formulation théorique asymptotique des perturbations magnétiques au premier ordre de façon très similaire à ce qui a été fait par Goupil et al. (2013) pour la perturbation rotationnelle au premier ordre, décrit dans la section 3.4. Ceci a pour but d'enrichir les diagnostiques possibles des phénomènes dynamiques internes aux étoiles (ici le magnétisme) et de fournir des outils efficaces de modélisation sismique intensive. Les formulations asymptotiques permettent l'exploration d'un vaste domaine de paramètres.

7.1 Rappels sur la théorie asymptotique des modes d'oscillation mixtes

Nous rappelons ici les grandeurs et les équations importantes pour la caractérisation des oscillations mixtes acoustiques/gravité des étoiles de type solaire évoluées. Nous notons le déplacement du fluide $\boldsymbol{\xi}$, défini par l'équation 6.6. Deux composantes du déplacement sont donc distinguées : ξ_r le déplacement radial et $\boldsymbol{\xi_h}$ le déplacement local horizontal. Comme démontré dans le chapitre 3, l'équation des ondes s'écrit comme :

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(c_s^2\rho^{1/2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi}\right)}{\mathrm{d}r^2}+k_r^2\left(r\right)\left(c_s^2\rho^{1/2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi}\right)=0, \tag{7.1}$$

avec c_s la vitesse du son, ρ la densité de gaz, et $\boldsymbol{\xi}$ le déplacement du gaz (ou fonction propre des oscillations).

Le nombre d'onde vertical k_r utilisé dans cette équation d'onde s'exprime en fonction de la fréquence de Lamb 3.32 et de la fréquence de Brunt-Vaisala 3.24 par l'équation 3.40 que nous reportons ici :

$$k_r^2=\frac{1}{c_s^2}\left[S_l^2\left(\frac{N^2}{\omega^2}-1\right)+\omega^2-\omega_{\mathrm{c}}^2\right]. \tag{7.2}$$

Le nombre d'onde horizontal s'exprime également par :

$$k_h=\frac{\Lambda}{r}. \tag{7.3}$$

Dans le cas de l'étude des modes mixtes des étoiles de type solaire évoluées sur lesquels nous nous concentrons dans la seconde partie de cette thèse, l'équation 7.2 peut être exprimée asymptotiquement aux très basses et aux très hautes fréquences, permettant l'obtention d'expressions asymptotiques pour les fonctions propres des modes g (pour lesquels $\xi_h \gg \xi_r$) et des modes p (pour lesquels $\xi_r \gg \xi_h$) que nous présentons maintenant.

7.1.1 Déplacement asymptotique des modes à basses fréquences

Dans le régime à basses fréquences ($\omega << \{S_l, N\}$), le déplacement Lagrangien devient quasi horizontal (i.e. $|\xi_r| << |\xi_h|$), et le nombre d'onde vertical se simplifie en (voir également la section 3.2.1 pour plus de détails) :

$$k_r\approx\left(\frac{N^2}{\omega^2}-1\right)\frac{\Lambda}{r}\approx\frac{N}{\omega}\frac{\Lambda}{r}. \tag{7.4}$$

Nous retrouvons ainsi la relation de dispersion des modes de gravité développée dans la section 3.1.3.2. En utilisant le changement de variable introduit par Shibahashi (1979) :

$$w=\rho^{1/2}\omega r^2\left(\frac{N^2}{\omega^2}-1\right)^{-1/2}\xi_h, \tag{7.5}$$

et en appliquant l'approximation JWKB (Jeffeys, Wentzel, Krammer, and Brillouin) détaillée dans la section 3.1.3.2, nous exprimons alors l'expression asymptotique $\xi_h\left(r\right)$ à basses fréquences (Hekker & Christensen-Dalsgaard, 2017) :

$$\xi_h=\frac{A_w}{\sqrt{\rho\omega^3r^3\Lambda}}\sqrt{N}\times\sin\left(\int_{r_{t;i}}^{r}k_r\,\mathrm{d}r^{'}-\phi_g^{'}\right), \tag{7.6}$$

avec A_w l'amplitude des ondes fixée par le mécanisme d'excitation des modes, leur amortissement et leur inertie, $\phi_g^{'}$ la phase, et $r_{t;i}$ la position du point de retournement interne.

7.1.2 Déplacement asymptotique des modes à hautes fréquences

Dans la limite des hautes fréquences ($\omega >> S_l$), le déplacement Lagrangien devient cette fois-ci majoritairement vertical (i.e. $|\xi_h| << |\xi_r|$) et le nombre d'onde vertical se réduit à :

$$k_r \approx \frac{\omega}{c}. \tag{7.7}$$

Nous retrouvons ainsi la relation de dispersion des modes acoustiques décrite dans la section 3.1.3.1. En utilisant le changement de variable :

$$v = \rho^{1/2} c_s r \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right)^{-1/2} \xi_r, \tag{7.8}$$

également introduit par Shibahashi (1979), nous obtenons l'expression asymptotique à hautes fréquences du déplacement des modes vertical $\xi_r(r)$ en appliquant l'approximation JWKB :

$$\xi_r = \frac{A_v}{\sqrt{\rho c_s \omega} r} \cos\left(\int_r^{R_\star} k_r \, \mathrm{d}r' - \phi_p^{'}\right), \tag{7.9}$$

avec A_v l'amplitude verticale, $\phi_p^{'}$ la phase, et $R_\star$ le rayon de l'étoile.

Grâce aux expressions de ces déplacement propres à basses et hautes fréquences, nous pouvons alors identifier le(s) terme(s) dominant(s) parmi les ~ 40 termes composant l'expression de la perturbation magnétique au premier ordre, reportés dans l'annexe B.

7.2 Premières expressions asymptotiques pour la description des perturbations magnétiques dans les géantes rouges

7.2.1 Perturbations magnétiques sur les modes g

Afin d'interpréter les résultats obtenus dans le chapitre précédent sur l'impact du magnétisme sur les fréquences des modes mixtes $g-m$, nous recherchons tout d'abord les termes dominants dans les domaines asymptotiques aux basses fréquences. L'analyse JWKB dans la région radiative nous indique que pour les modes g à basses fréquences $\xi_r \ll \xi_h$, tandis que et les termes portés par la dérivée seconde ξ_h'' sont dominants devant ceux portés par ξ_h' et ξ_h puisque $k_r \gg 1$. Ainsi, la perturbation magnétique donnée par l'équation 6.21 reportée ici :

$$\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right) = \frac{\langle \boldsymbol{\xi_0}, \delta \boldsymbol{F_L}(\boldsymbol{\xi_0})/\rho \rangle}{2\omega_0 \langle \boldsymbol{\xi_0}, \boldsymbol{\xi_0} \rangle} \tag{7.10}$$

peut être réduite à son terme dominant parmi les termes reportés dans l'annexe B. Ce terme dominant pour les modes g à basses fréquences s'exprime donc en fonction de la combinaison de :

$$\langle \boldsymbol{\xi_0}, \boldsymbol{\xi_0} \rangle_g \simeq 2\pi \int_0^{R_{\rm rad}} \rho r^2 \Lambda^2 |\xi_h|^2 \mathrm{d}r, \tag{7.11}$$

et de :

$$\langle \boldsymbol{\xi_0}, \delta \boldsymbol{F_L}(\boldsymbol{\xi_0}) \rangle_g \simeq 2\pi B_0^2 \int_0^{R_{\rm rad}} r \xi_h^* b_r \left(r \xi_h b_r\right)'' \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \left(\left| \frac{m Y_l^m}{\sin\theta} \right|^2 + |\partial_\theta Y_l^m|^2 \right) \cos^2\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta. \tag{7.12}$$

Finalement, la perturbation magnétique à basses fréquences s'exprime comme :

$$\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)_g = \frac{B_0^2}{8\pi\omega_0^2} C_{l,m} \frac{\int_0^{R_{\rm rad}} |\left(r\, b_r\, \xi_h\right)'|^2 \,\mathrm{d}r}{\int_0^{R_{\rm rad}} |\xi_h|^2 \rho r^2 \,\mathrm{d}r} \tag{7.13}$$

avec

$$C_{l,m} = \frac{\int_0^\pi \left(|\cos\theta \partial_\theta Y_l^m|^2 + m^2 \left| \frac{\cos\theta}{\sin\theta} Y_l^m \right|^2 \right) \sin\theta \mathrm{d}\theta}{\Lambda^2}. \tag{7.14}$$

Ces coefficients angulaires ont été estimés à partir des résultats des modélisations de la géante rouge typique avec MESA et GYRE dans le chapitre 6 (section 6.2.1). Ils permettent d'expliquer la hiérarchie des amplitudes des perturbations en fonction de ℓ et de m ($C_{1,0} < C_{1,[-1,1]}$ et $C_{2,0} > C_{2,[-1,1]} > C_{2,[-2,2]}$) Nous retrouvons ainsi les formulations et estimations des études de Hasan et al. (2005) et Rashba et al. (2007). À partir de la forme de ξ_h donnée par l'équation 7.6, l'équation 7.13 devient :

$$\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)_g = \frac{1}{2\omega_0^4} C_{\ell,m} \frac{\int_0^{R_{\rm rad}} \left(\omega_A^r\right)^2 N^2 \, \cos^2\left(X_g\right) \, N \, \frac{\mathrm{d}r}{r}}{\int_0^{R_{\rm rad}} N \frac{\mathrm{d}r}{r}} \propto \frac{\mathcal{K}_1}{\omega_0^4}, \tag{7.15}$$

avec $X_g = \int_{r_{t;i}}^r k_r \,\mathrm{d}r^{'} - \phi_g^{'}$, $\omega_A^r = B_0 b_r / \left(\sqrt{4\pi\rho} r\right)$, et $\mathcal{K}_1$ regroupant tous les termes indépendants de ω_0.

7.2.2 Perturbations magnétiques sur les modes p

Dans le cas des modes p à hautes fréquences, les termes composant l'équation 7.10 deviennent, par une méthode JWKB similaire à celle menée dans le paragraphe précédent :

$$\langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_0 \rangle_p \simeq 2\pi \int_0^R \rho r^2 |\xi_r|^2 \mathrm{d}r \tag{7.16}$$

et

$$\langle \boldsymbol{\xi}_0, \delta \boldsymbol{F_L}(\boldsymbol{\xi}_0) \rangle_p \simeq 2\pi B_0^2 \int_{r_c}^{r_d} r\xi_r^* \left[b_\theta \left(r\xi_r b_\theta\right)'' + b_\phi \left(r\xi_r b_\phi\right)'' \right] \mathrm{d}r \int_0^\pi \left(Y_l^m\right)^2 \sin^3\theta \mathrm{d}\theta, \tag{7.17}$$

avec r_c et r_d les points de retournement respectivement interne et externe associés au mode p considéré. Finalement, nous obtenons l'expression équivalente à l'équation 7.15 pour les modes p à hautes fréquences :

$$\left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right)_p = \frac{D_{l,m}}{2} \sum_{i=\{\theta,\varphi\}} \frac{\int_{r_c}^{r_d} \frac{v_{A,i}^2}{c_s^2} \cos^2\left(X_p\right) \frac{\mathrm{d}r}{c_s}}{\int_{r_c}^{r_d} \cos^2\left(X_p\right) \frac{\mathrm{d}r}{c_s}} \propto \mathcal{K}_2, \tag{7.18}$$

avec le coefficient angulaire

$$D_{l,m} = \int_0^\pi \sin^2\theta |Y_l^m|^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta, \tag{7.19}$$

$X_p = \int k_h \mathrm{d}r^{'} - \phi_g^{'}$, $v_A^i = B_0 b_i / \sqrt{4\pi\rho}$ ($i \in [\theta, \varphi]$) et $\mathcal{K}_2$ indiquant la non-dépendance de la perturbation relative des modes p à hautes fréquences à la fréquence du mode non-perturbé. Les coefficients $D_{\ell,m}$ sont évalués dans l'annexe D.3 de l'article joint à la fin de ce chapitre (Mathis, Bugnet et al., *accepted in A&A*), ce qui permet de connaître la hiérarchie entre les amplitudes des perturbations associées aux modes $p-m$ de différents degrés ℓ et ordres n ($D_{1,0} < D_{1,[-1,1]}$ et $D_{2,0} < D_{2,[-1,1]} < D_{2,[-2,2]}$).

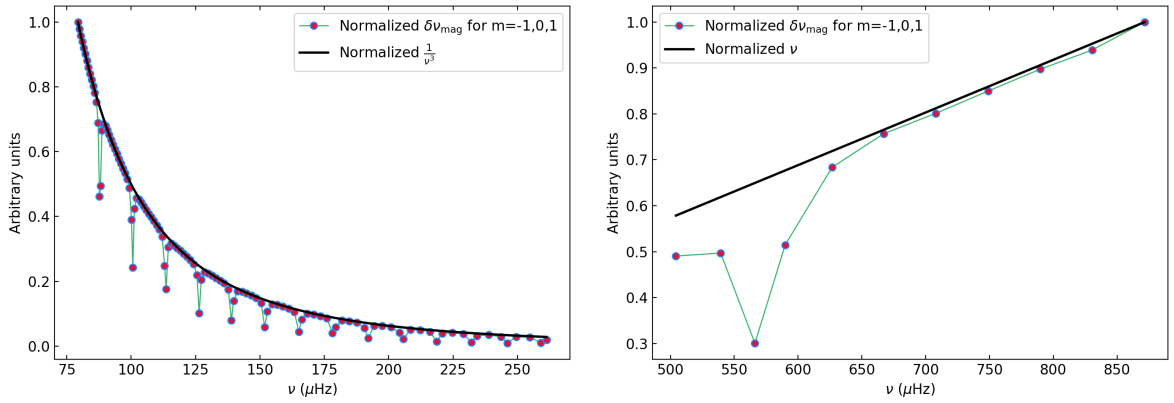


FIGURE 7.1: Les points colorés reliés par la ligne verte représentent les perturbations magnétiques normalisées au premier ordre des fréquences des modes $\ell = 1$ mixtes ($\delta\nu$) calculées pour une géante rouge de masse $M_\star = 1.5 M_\odot$, de métallicité Z=0.02, et de fréquence de puissance maximale des modes d'oscillation $\nu_{\max} \simeq 172 \mu$Hz sur le panneau de gauche et de $\simeq 750 \mu$Hz sur le panneau de droite. La ligne noire représente la loi asymptotique obtenue pour les modes $g - m$ à basses fréquences en $1/\nu^3$ sur le panneau de gauche, et la loi en ν obtenue pour les modes $p - m$ à hautes fréquences.

7.2.3 Interprétation des signatures magnétiques sur les fréquences des modes mixtes

Nous donnons ainsi les expressions asymptotiques des perturbations magnétiques des modes de gravité à basses fréquences et des modes acoustiques à hautes fréquences. Dans les étoiles de type solaire évoluées, à partir de la phase des SG*, les modes acoustiques et les modes de gravité sont couplés, et forment les modes $p - m$ si la puissance est à dominance acoustiques et les modes $g - m$ si la puissance est à dominance de gravité (voir Chapitre 3).*

Ainsi, nous obtenons grâce à l'équation 7.15 que la perturbation fréquentielle des modes g par le magnétisme $\delta\nu$ doit être proportionnelle à $1/\nu^3$. En normalisant les valeurs des perturbations magnétiques obtenues sur la figure 6.3, nous vérifions la validité de cette dépendance pour les modes dipolaires $g-m$ de basses fréquences sur le panneau de gauche de la figure 7.1. De même, pour les modes mixtes $p - m$ à basses fréquences la perturbation magnétique est proportionnelle à la fréquence du mode. Cette dépendance est également vérifiée sur le panneau de droite de la figure 7.1.

Finalement, les modes $g - m$ à basses fréquences se comportent en première approximation vis-à-vis de la perturbation magnétique comme des modes purement g. De même, les modes $p - m$ à hautes fréquences se comportent vis-à-vis de la perturbation magnétique comme des modes purement acoustiques.

Les expressions asymptotiques 7.15 et 7.18 sont difficilement utilisables en tant que telles pour la caractérisation du champ magnétique à l'origine des perturbations. Nous travaillons encore ces expressions, dans le but d'obtenir une formulation propice à l'inversion des profils de champ magnétiques internes . En effet, les expressions 7.15 et 7.18 ont des intégrands rapidement oscillants, permettant la réduction semi-analytique des intégrales pour obtenir des expressions propices aux inversions comme dans le cas de la rotation (Goupil et al., 2013).

7.3 Expressions asymptotiques pour l'inversion des champs internes

Nous utilisons alors les propriétés JWKB des intégrales rapidement oscillantes (Erdélyi, 1956). Cette méthode vise à simplifier les intégrales de la forme :

$$I = \int_a^b g\left(x\right) \exp\left[i\lambda f\left(x\right)\right] \mathrm{d}x. \tag{7.20}$$

Dans le cas où $\lambda \gg 1$, ces intégrales peuvent être approximées par :

$$I \to_{\lambda\to\infty} \sum_{|x_i|} g\left(x_i\right) \sqrt{\frac{2\pi}{|f"\left(x_i\right)|}} \exp\left[i\lambda\left(f\left(x_i\right) - \frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\left(f"\left(x_i\right)\right)\right)\right], \tag{7.21}$$

avec x_i les points tels que $f'\left(x_i\right) = 0$ (Erdélyi, 1956). Si $f\left(x\right) = \int^x \hat{k}_v\left(x'\right) \mathrm{d}x'$, alors les x_i sont les points de retournement tels que $\hat{k}_v\left(x_i\right) = 0$.

7.3.1 Expression asymptotique de la signature magnétique sur les modes g

Dans le cas des modes g à basses fréquences, l'équation 7.15 devient ainsi, en dénotant comme $\widehat{\square}$ les quantités $\square$ adimensionnées :

$$\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)_g = \frac{1}{2}\frac{B_0^2}{4\pi\rho_c R_{\mathrm{rad}}^2\omega_0^2}\frac{N_{\max}^2}{\omega_0^2}\Lambda^2 C_{l,m}\frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{b_r^2\widehat{N}^2}{\left(\rho/\rho_c\right)x^2}\widehat{N}\frac{\mathrm{d}x}{x}}{\displaystyle\int_0^1 \widehat{N}\frac{\mathrm{d}x}{x}}. \tag{7.22}$$

Nous obtenons donc une nouvelle expression asymptotique explicite de la perturbation magnétique des basses fréquences des modes g. Cette expression dépend désormais de la fréquence du mode, du profil de Brunt-Väisälä, de celui du champ magnétique radial et de celui de la densité dans la zone magnétisée de taille $R = R_{\mathrm{rad}}$.

7.3.2 Expression asymptotique de la signature magnétique sur les modes p

Dans le cas des modes p à hautes fréquences, l'équation 7.18 devient grâce à l'application des mêmes méthodes :

$$\left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right)_p = \frac{D_{l,m}}{2}\sum_{i=\{\theta,\varphi\}}\frac{\displaystyle\int_{r_c}^{r_d}\frac{\left(v_{\mathrm{A}}^i\right)^2}{c_s^2}\frac{\mathrm{d}r'}{c_s}}{\displaystyle\int_{r_c}^{r_d}\frac{\mathrm{d}r'}{c_s}}, \text{ avec } v_{\mathrm{A}}^i = B_0 b_i/\sqrt{4\pi\rho}. \tag{7.23}$$

Dans le cas des modes acoustiques, la perturbation fréquentielle due au magnétisme ne dépend donc plus de la composante radiale du champ mais des composantes horizontales b_θ et b_φ, ainsi que du profil de vitesse du son et de la densité dans la cavité de taille R.

Nous avons ainsi développé les étapes de calcul aboutissant aux expressions asymptotiques de la perturbation magnétique fréquentielle à basses fréquences (modes g) et à hautes fréquences (modes p). Cependant, dans

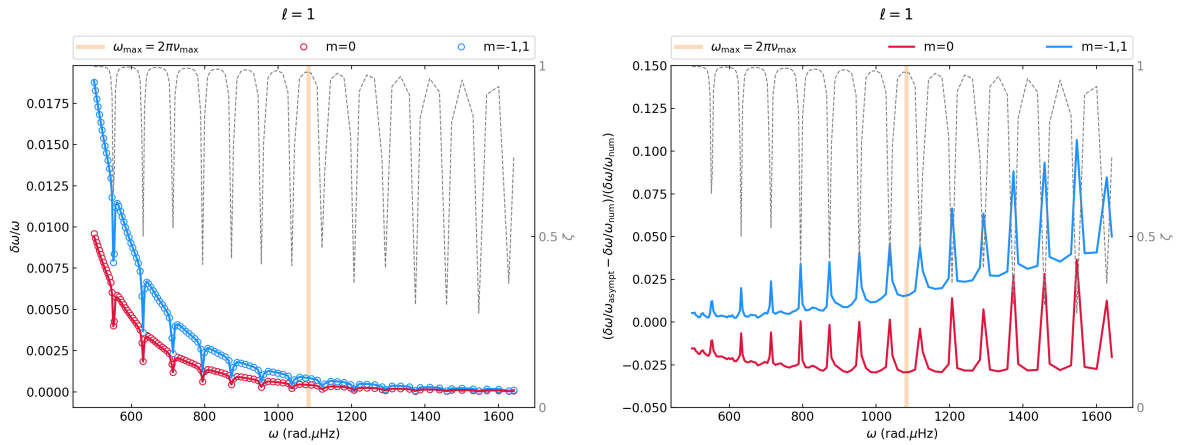


FIGURE 7.2: *Gauche :* Les cercles (resp. bleus et rouges) indiquent les perturbations magnétiques au premier ordre sur les modes mixtes $\ell = 1$ (resp. $m = 1, -1$ et $m = 0$) d'une géante rouge de masse $1.5\mathrm{M}_\odot$ et de métallicité Z=0.02 (comme étudiées dans le chapitre 6), en fonction de la fréquence du mode non-perturbé. La courbe bleue (resp. rouge) correspond à la formulation asymptotique à basses fréquences pour les modes de gravité d'ordre azimutal $m = 1, -1$ (resp. $m = 0$) par la formulation 7.22. *Droite :* Écarts relatifs entre les perturbations magnétiques évaluées via MESA et GYRE en prenant en compte la totalité des termes composant l'équation 7.10 et l'expression asymptotique des modes g. Le code couleurs est le même que celui du panneau de gauche. Sur chacun des panneaux, la fonction ζ est également représentée en pointillés gris et la fréquence $\nu_{\max}$ est indiquée par la ligne beige verticale.

notre cas, les modes ne sont ni purement acoustiques, ni purement de gravité. Nous prenons donc en compte dans la section suivante le couplage entre les modes.

7.3.3 Expression asymptotique de la signature magnétique sur les modes mixtes

Contrairement aux modes purement g qui se propagent principalement dans la zone radiative, les modes $g-m$ sont couplés avec les modes acoustiques de surface et donc se propagent dans toute l'étoile. La perturbation magnétique relative associée à un mode mixte $g-m$ qui se propage dans toute l'étoile s'exprime ainsi comme la perturbation associée au mode g dans l'intérieur radiatif pondérée par le ratio de l'inertie contenue dans le mode g dans l'intérieur radiatif (I_g) et de l'inertie totale du mode (I) :

$$\left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right)_{g-m} = \left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right)_g \times \frac{I_g}{I} = \left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right)_g \zeta. \tag{7.24}$$

De la même façon, la perturbation magnétique relative sur les fréquences des modes $p-m$ s'exprime en fonction de la perturbation associée aux modes p comme :

$$\left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right)_{p-m} = \left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right)_p \times \frac{I_p}{I} = \left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right)_p (1-\zeta)\,. \tag{7.25}$$

La perturbation magnétique relative sur les fréquences des modes mixtes s'exprime alors, comme pour le cas de la perturbation par la rotation (Goupil et al., 2013), en fonction des perturbation asymptotiques des modes p et des modes g et de la fonction de couplage des modes ζ comme :

$$\left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right) = \underbrace{\left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right)_g \zeta}_{\text{G : Domine à basses fréquences}} + \underbrace{\left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right)_p (1-\zeta)}_{\text{P : Domine à hautes fréquences}}\,. \tag{7.26}$$

Cette formulation de l'expression asymptotique de la signature magnétique sur les fréquences des modes mixtes est donc équivalente à l'expression pour la perturbation rotationnelle obtenue par Goupil et al. (2013) reportée dans l'équation 3.103. Le terme G de la géante rouge typique ($M = \mathrm{M}_\odot$, Z=0.02, $\nu_{\max} \simeq 172\mu$Hz) peut ainsi être comparé aux calculs numériques complets des perturbations fréquentielles relatives à la fréquence des modes $g-m$ dipolaires calculées grâce à MESA et GYRE dans la section 6.2.1. La comparaison est reportée pour modes $\ell = 1$ sur le panneau de gauche de la figure 7.2 [1], avec les cercles représentant les résultats du chapitre 6 pour un champ d'amplitude $B_0 = 1$MG via la formulation 7.10 comprenant l'ensemble des 40 termes donnés en annexe B, et les courbes indiquant l'évaluation de l'expression asymptotique 7.22 pour les modes g. Le panneau de droite reporte les erreurs relatives entre la prédiction asymptotique et le calcul complet de la perturbation. Nous observons ainsi de très faibles écarts entre les amplitudes des perturbations totales et celles prédites par la théorie asymptotique développée dans ce chapitre pour les modes à basses fréquences. La précision relative de la formule asymptotique est en valeur absolue de l'ordre de 2.5% pour les modes $g-m$. Les modes $p-m$ dont la perturbation est estimée à partir de la modulation par la fonction ζ sont plus difficilement reconstruits à basses fréquences.

Nous démontrons ainsi le potentiel de l'analyse asymptotique pour une estimation des perturbations magnétiques de façon simplifiée, sans avoir besoin de prendre en compte l'ensemble des nombreux termes répertoriés en annexe B, durant la RGB où la zone des modes d'oscillation dans la PSD est largement dominée par les modes $g-m$.

Nous ne développerons pas en détail la même analyse pour les modes $p-m$ à hautes fréquences, car nous avons démontré dans le chapitre 6 que l'amplitude attendue du champ magnétique interne (ou bien le champ de surface) n'est pas suffisante pour une éventuelle détection de signatures sur les fréquences des modes $p-m$.

7.3.4 Le potentiel d'inversion des champs magnétiques internes par les modes mixtes

À partir des équations 7.22 et 7.23, nous établissons un parallèle entre les perturbations asymptotiques liées au magnétisme et celles associées à la perturbation par la rotation de l'étoile (voir l'équation 3.103 Goupil et al., 2013). La table 7.1 met en regard les grandeurs sondées par les expressions asymptotiques des perturbations au premier ordre dues à la rotation (Goupil et al., 2013) et au magnétisme (Mathis, Bugnet et al., *accepted in A&A*).

Nous montrons ainsi que si les modes $p-m$ permettent de sonder le profil de rotation $\Omega(x)$ de l'enveloppe de l'étoile, ils permettent aussi de sonder le champ magnétique horizontal via la quantité $v_A^i \omega_0 / c_s^2$ le long

1. Nous nous référons à la publication Mathis, Bugnet et al., *accepted in A&A* jointe à la fin de ce chapitre pour la visualisation des résultats sur les modes $\ell = 2$

TABLE 7.1: Mise en regard des grandeurs sondées par les perturbations fréquentielles des modes $p-m$ et $g-m$, avec $v_A^i = B_0 b_i / \sqrt{4\pi\rho}$, $i \in [\theta, \varphi]$ et $\omega_A^r = B_0 b_r / \left(\sqrt{4\pi\rho} r\right)$.

Quantité sondée	Rotation	Magnétisme	le long du chemin
Modes $p-m$	$\Omega_{\mathrm{env}}(x)$	$\left(v_A^i\right)^2 \omega_0 / c_s^2$	$\int_{\mathrm{env}} \square \frac{1}{c_s} \mathrm{d}x$
Modes $g-m$	$\Omega_{\mathrm{core}}(x)$	$\left(\omega_A^r\right)^2 N^2 / \omega_0^3$	$\int_{\mathrm{core}} \square \frac{N}{x} \mathrm{d}x$

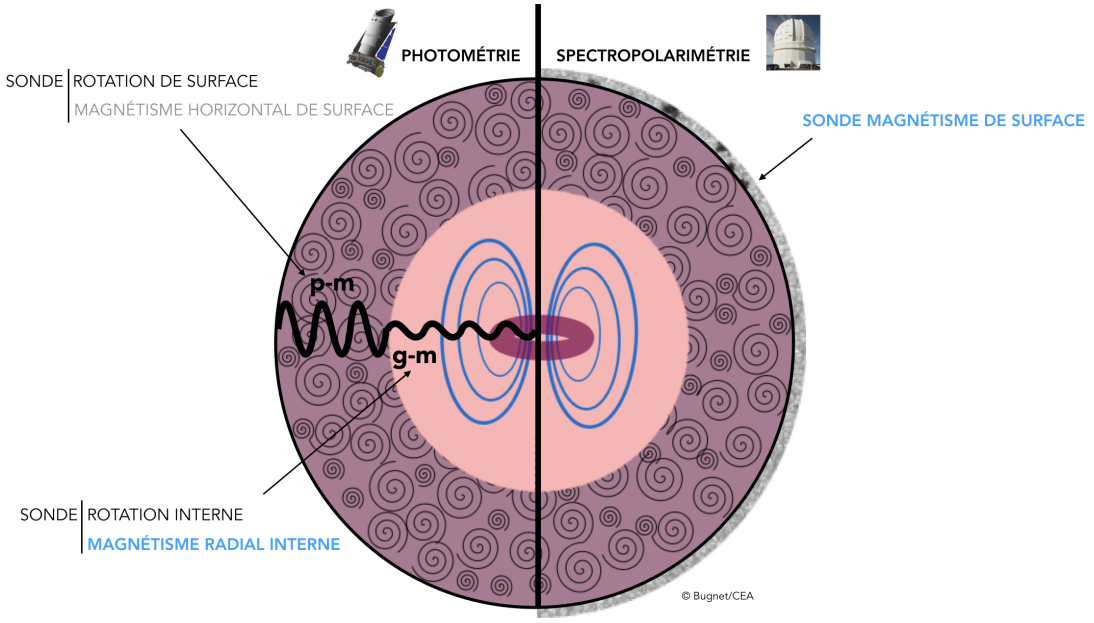


FIGURE 7.3: Représentation schématique des méthodes observationnelles pour la caractérisation des champs magnétiques des étoiles.

du chemin acoustique. Cependant, comme démontré au chapitre 6, les champ magnétiques attendus dans les sous-géantes n'ont pas une amplitude suffisante pour permettre la mesure des perturbations fréquentielles associées. Les amplitudes des champs magnétismes mesuréees à la surface des étoiles de type solaire évolués sont de l'ordre du Gauss (Aurière et al., 2015; Charbonnel et al., 2017)

Les modes $g-m$ permettent quant à eux de sonder à la fois le profil de rotation interne à la zone radiative et la composante radiale du champ magnétique interne via la quantité $\omega_A^r N^2/\omega_0^3$ le long du rayon de flottaison $\frac{N}{x}$. Puisque les champ magnétiques attendus dans l'intérieur des géantes rouge ont une amplitude suffisante pour permettre une détection de la perturbation magnétique sur les fréquences des modes $g-m$, la mesure de cette signature pourrait alors permettre d'inverser le profil magnétique radial interne à la zone radiative de l'étoile, de la même façon que les taux de rotation internes des géantes rouges et des sous-géantes peuvent être mesurés (e.g. Deheuvels et al., 2015, 2016).

7.4 Conclusions & Perspectives

Dans ce chapitre, nous présentons le potentiel associé à la détection de signatures magnétiques sur les fréquences des modes mixtes pour l'inversion du magnétisme interne des géantes rouges. Nous démontrons que si une signature magnétique est détectée sur les modes $g-m$ de basses fréquences, la formulation asymptotique dérivée pour les modes g de basses fréquences permet d'inverser la composante radiale du champ magnétique interne à l'origine de la perturbation. La formulation asymptotique des modes p pourrait permettre l'inversion des composantes horizontales du champ, mais nous n'attendons pas la détection de signature magnétiques sur les modes $p-m$ à hautes fréquences dans les sous-géantes au vu de l'amplitude des champs fossiles présentée dans la section 6.2.6.

Le magnétisme interne pourrait ainsi être sondé dans les étoiles de type solaire pour la première fois grâce à l'astérosismologie des modes mixtes. Notre étude fréquentielle est en faveur d'une détection de la signature sur les modes $g-m$ plutôt que sur les modes $p-m$, bien que les modes à dominance de gravité aient une amplitude plus faible dans les PSD.

Afin d'obtenir une vision complète du magnétisme dans les géantes rouges, la spectropolarimétrie permettant la mesure des champ de surface dans l'enveloppe convective serait ainsi la méthode d'observation complémentaire de l'éventuelle mesure astérosismique des champ internes. La figure 7.3 représente ainsi nos perspectives pour la caractérisation future du magnétisme interne des étoiles de type solaire évoluées, et constitue le bilan de la seconde partie de ce manuscrit.

A&A 647, A122 (2021)
https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039180
© S. Mathis et al. 2021

Astronomy & Astrophysics

Probing the internal magnetism of stars using asymptotic magneto-asteroseismology

S. Mathis[1,⋆], L. Bugnet[1,⋆], V. Prat[1], K. Augustson[1], S. Mathur[2,3], and R. A. Garcia[1]

[1] AIM, CEA, CNRS, Université Paris-Saclay, Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France
e-mail: stephane.mathis@cea.fr,lisa.bugnet@cea.fr
[2] Instituto de Astrofísica de Canarias, 38200 La Laguna, Tenerife, Spain
[3] Universidad de La Laguna, Dpto. de Astrofísica, 38205 La Laguna, Tenerife, Spain

Received 13 August 2020 / Accepted 23 November 2020

ABSTRACT

Context. Our knowledge of the dynamics of stars has undergone a revolution through the simultaneous large amount of high-quality photometric observations collected by space-based asteroseismology and ground-based high-precision spectropolarimetry. They allowed us to probe the internal rotation of stars and their surface magnetism in the whole Hertzsprung-Russell diagram. However, new methods should still be developed to probe the deep magnetic fields in these stars.
Aims. Our goal is to provide seismic diagnoses that allow us to probe the internal magnetism of stars.
Methods. We focused on asymptotic low-frequency gravity modes and high-frequency acoustic modes. Using a first-order perturbative theory, we derived magnetic splittings of their frequencies as explicit functions of stellar parameters.
Results. As in the case of rotation, we show that asymptotic gravity and acoustic modes can allow us to probe the different components of the magnetic field in the cavities in which they propagate. This again demonstrates the high potential of using mixed-modes when this is possible.

Key words. asteroseismology – waves – stars: magnetic field – stars: oscillations – methods: analytical

1. Introduction

Along with rotation, magnetism is one of the two corner stones of stellar dynamics. Magnetism deeply modifies the interactions of every type of stars with their surrounding environment and their evolution, in particular through the transport of angular momentum and chemicals that they potentially trigger in their interiors (e.g. Brun & Browning 2017; Braithwaite & Spruit 2017). In this framework, two revolutions have occurred in stellar physics in the past two decades.

The first revolution is space-based helio- and asteroseismology (e.g. Christensen-Dalsgaard 2015; García & Ballot 2019; Aerts 2021). These techniques have allowed us to probe the structure, the internal rotation, and the magnetic activity of the Sun and of stars with high precision. Helioseismology analyses with spaced-based instruments (i.e. the Michelson Doppler Imager (MDI; Scherrer et al. 1995) and Global Oscillations at Low Frequencies (GOLF; Gabriel et al. 1995) instruments onboard the SOlar and Heliospheric Observatory (SOHO; Domingo et al. 1995) spacecraft) revealed the solar rotation profile down to $0.25\,R_\odot$ ($R_\odot$ is the radius of the Sun) with an outer radiative core that rotates as a solid body. Strong efforts are still ongoing to constrain the rotation of the nuclear core (e.g. García et al. 2007; Mathur et al. 2008). Space-based asteroseismology with the *Kepler* space mission then allowed us to probe the rotation of stars from their surface to their core in the case of main-sequence and evolved low- and intermediate-mass stars (Aerts et al. 2019, and references therein). First, acoustic modes have been used to study the internal rotation of main-sequence low-mass stars (e.g. Benomar et al. 2015). Next, gravito-inertial modes allowed us to determine the rotation near the interface of the radiative envelope with the convective core and in the convective core of fast-rotating intermediate-mass stars (e.g. Van Reeth et al. 2016; Ouazzani et al. 2020, respectively). Finally, mixed gravito-acoustic modes in evolved low- and intermediate-mass stars provide precise constraints on the rotation of the internal radiative zone down to the core and the averaged rotation of the envelope (e.g. Mosser et al. 2012; Gehan et al. 2018; Deheuvels et al. 2014, 2020). These observations have revealed core-to-surface rotation ratios that are weaker by several orders of magnitude than those predicted by the most modern rotating stellar models for the whole Hertzsprung-Russel diagram (e.g. Eggenberger et al. 2012; Ceillier et al. 2013; Marques et al. 2013; Cantiello et al. 2014; Ouazzani et al. 2019). This demonstrates that a powerful mechanism acts throughout the evolution of stars, including our Sun, and extracts angular momentum from the deep interior. The transport induced by stable (e.g. Mestel & Weiss 1987; Mathis & Zahn 2005) or unstable magnetic fields in stably stratified stellar radiation zones is one of the potential mechanisms (e.g. Spruit 2002; Fuller et al. 2019). These discoveries have triggered the development of a strong theoretical basis from which we interpret seismic observations. For oscillation modes, with frequencies far higher than the rotation frequency, the perturbative theory allows us to compute frequency splittings due to the Coriolis and centrifugal accelerations (e.g. Aerts et al. 2010; Goupil et al. 2013, and references therein). It also allows us to compute splittings due to the change of reference frame from the stellar corotating one to the observer frame. These splittings are then used to constrain the internal stellar rotation. This method

⋆ S. Mathis and L. Bugnet equally contributed to this work.

Open Access article, published by EDP Sciences, under the terms of the Creative Commons Attribution License (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

has been intensively used to probe the solar rotation profile (e.g. Thompson et al. 1996; Couvidat et al. 2003) and the core-to-surface rotation ratio in evolved stars (e.g. Beck et al. 2012; Deheuvels et al. 2012, 2014, 2015, 2020; Spada et al. 2016). For low-frequency gravito-inertial modes with frequencies of the same order of magnitude as the rotation frequency, the traditional approximation of rotation (TAR), which is not perturbative, can be used (e.g. Lee & Saio 1997; Townsend 2003; Van Reeth et al. 2018; Mathis & Prat 2019). The traditional approximation of rotation can be used when the buoyancy-restoring force dominates the Coriolis force in the direction of the stable entropy and chemical stratification (Mathis 2009). When the variation in the period spacing (i.e. the difference between the periods of two consecutive modes) is considered as a function of the mode period, the (differential) rotation of the oscillations propagation cavity can be constrained (Bouabid et al. 2013; Van Reeth et al. 2018). This method is currently used to provide key information on the rotation rate of the radiative layers surrounding the convective core in fast-rotating intermediate-mass stars (e.g. Van Reeth et al. 2016; Christophe et al. 2018; Aerts et al. 2019; Li et al. 2019, 2020). For each case, the study of the effect of rotation on asymptotic gravity (and gravito-inertial), acoustic, and mixed gravito-acoustic modes, which rapidly oscillate in the radial direction, has provided a deep understanding of their modification by the Coriolis (and centrifugal) acceleration and key tools for seismic modelling and inversions.

The second revolution is ground-based high-precision spectropolarimetry that probes the strength and geometric configuration of magnetic fields at the surface of stars in the whole Hertzsprung-Russell diagram from the pre-main sequence to the late stages of their evolution (e.g. Donati & Landstreet 2009; Aurière et al. 2015; Wade et al. 2016). Large spectropolarimetric surveys thus led our knowledge of dynamo-generated and fossil magnetic fields to a new level of understanding, in particular through the simultaneous development of theoretical models and three-dimensional (3D), global, nonlinear magnetohydrodynamical (MHD) simulations (e.g. Brun & Browning 2017; Braithwaite & Spruit 2017). However, spectropolarimetry does not give access to the distribution of the magnetic field inside stars. Once again, asteroseismology is the answer. The method is the same as for rotation, that is, specific signatures of the effect of magnetism on the excitation, the propagation, and the damping of stellar oscillations are looked for. First studies have considered the effects of simple magnetic configurations such as purely dipolar poloidal fields (aligned or inclined to the rotation axis) or purely toroidal fields (e.g. Goode & Thompson 1992; Takata & Shibahashi 1994). However, our knowledge of magnetic topologies and their stability has strongly progressed in the past two decades through the simultaneous development of stellar spectropolarimetry and of 3D MHD simulations. For instance, we now have a better understanding of the formation and the topologies of fossil fields in stellar radiation zones (Braithwaite & Spruit 2004). They should be a combination of dipolar poloidal and toroidal fields to be in their lowest energy stable equilibrium state (Duez & Mathis 2010). Therefore it becomes mandatory to study the seismic signatures of such complex topologies. This has recently been undertaken for the fossil fields in the radiative envelope of upper main-sequence stars (Prat et al. 2019) and the radiative core of low-mass and intermediate-mass evolved stars (Bugnet et al. 2021) as well as for the dynamo fields generated in the convective envelope of solar-type stars (Kiefer & Roth 2018).

In this framework, asymptotic analyses have been very useful to provide powerful seismic diagnoses for probing the rotation of stellar interiors (Goupil et al. 2013). In this article, we show how a method like this, which has been developed for rotation, can be applied to magnetism. In Sect. 2 we first recall the asymptotic theory for acoustic, gravity, and mixed gravito-acoustic modes. In Sect. 3 we identify the dominant terms in the magnetic splittings for each class of modes, and we derive asymptotic expressions that are the counterpart of those known for stellar rotation. In Sect. 4 we present a proof-of-concept application to a typical intermediate-mass red giant star. Finally, in Sect. 5, we make a synthesis of the results and discuss how asymptotic predictions can allow us to probe the distribution of the magnetic field at different depths in stars, and the applications of these predictions to different stellar types that can be foreseen.

2. Asymptotic theory for (mixed) stellar oscillation modes

We first recall the basics of the theory of the oscillations of non-rotating and non-magnetic stars, which is necessary to compute first-order magnetic splittings in the asymptotic limits of low-frequency gravity (g) modes and high-frequency pressure (p) modes. The Lagrangian displacement of an oscillation eigenmode is expanded as

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\left[\xi_\mathrm{r}(r)\, Y_l^m(\theta,\varphi)\,\boldsymbol{e}_\mathrm{r} + \xi_\mathrm{h}(r)\,\boldsymbol{\nabla}_\mathrm{h} Y_l^m(\theta,\varphi)\right] e^{-i\omega t}\right\}, \quad (1)$$

where ξ_r and ξ_h are the radial functions of its vertical and horizontal components, ω is the angular frequency, Y_l^m are the spherical harmonics, l is its degree, and m the azimuthal order, $\boldsymbol{\nabla}_\mathrm{h} = \partial_\theta(\cdot)\,\boldsymbol{e}_\theta + 1/\sin\theta\,\partial_\varphi(\cdot)\,\boldsymbol{e}_\varphi$ is the horizontal gradient, $\left\{\boldsymbol{e}_\mathrm{r},\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\varphi\right\}$ are the spherical unit vectors, and Re is the real part of a complex number. Following Gough (1993) and Hekker & Christensen-Dalsgaard (2017), who used the adiabatic linearised hydrodynamical equations assuming the Cowling approximation, we derive the Schrödinger-like wave equation

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}r^2} + k_\mathrm{r}^2(r)\,X = 0, \quad (2)$$

where $X = c^2\rho^{1/2}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi}$. The sound speed c is defined as $c = \sqrt{\Gamma_1 P/\rho}$, where ρ and P are the density and the pressure of the hydrostatic background, respectively, and $\Gamma_1 = (\partial \ln P/\partial \ln \rho)_S$ is the first adiabatic exponent, with S being the macroscopic entropy. The vertical wave number k_r is given by

$$k_\mathrm{r}^2 = \frac{1}{c^2(r)}\left[S_l^2(r)\left(\frac{N^2(r)}{\omega^2}-1\right)+\omega^2-\omega_\mathrm{c}^2(r)\right]. \quad (3)$$

We have identified the Lamb frequency S_l defined by

$$S_l^2 = \frac{l(l+1)\,c^2}{r^2} = k_\mathrm{h}^2 c^2, \quad \text{where} \quad k_\mathrm{h} = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r} \quad (4)$$

is the horizontal wave number, and the Brunt-Väisälä frequency N defined by

$$N^2 = g\left(\frac{1}{\Gamma_1}\frac{\mathrm{d}\ln P}{\mathrm{d}r} - \frac{\mathrm{d}\ln\rho}{\mathrm{d}r}\right), \quad (5)$$

where g is the gravity of the hydrostatic background. Finally, ω_c is the acoustic cut-off frequency, defined by

$$\omega_\mathrm{c}^2 = \frac{c^2}{4H^2}\left(1-2\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r}\right), \quad (6)$$

where $H = -(\mathrm{d}\ln\rho/\mathrm{d}r)^{-1}$ is the density scale height.

2.1. Asymptotic g modes

In the low-frequency regime for which $\omega \ll \{S_l, N\}$, the Lagrangian displacement becomes mostly horizontal (i.e. $|\xi_\mathrm{r}| \ll |\xi_\mathrm{h}|$) and the vertical wave number reduces to (e.g. Hekker & Christensen-Dalsgaard 2017)

$$k_\mathrm{r} \approx \frac{N}{\omega}\frac{\sqrt{l\,(l+1)}}{r}. \tag{7}$$

Using the reduced canonical variable

$$W = \rho^{1/2}\omega r^2 \left(\frac{N^2}{\omega^2}-1\right)^{-1/2} \xi_\mathrm{h}, \tag{8}$$

which has been introduced by Shibahashi (1979), and applying the JWKB (for Jeffreys, Wentzel, Kramers, and Brillouin) method (we refer to Appendix C and to Erdelyi 1956; Fröman & Fröman 2005), we derive the asymptotic expression for $\xi_\mathrm{h}\,(r)$

$$\xi_\mathrm{h} = A_W \rho^{-1/2}\omega^{-3/2} r^{-3/2}\,[l\,(l+1)]^{-1/4}\,N^{1/2} \times \sin\left(\int_{r_{t;i}}^{r} k_\mathrm{r}\,\mathrm{d}r' - \phi_g'\right), \tag{9}$$

where A_W is the amplitude fixed by the excitation and damping mechanisms and the inertia of the mode (Samadi et al. 2015), ϕ_g' is a phase, and $r_{t;i}$ ($r_{t;e}$) is the internal (external) turning point for which k_r vanishes.

2.2. Asymptotic p modes

In the high-frequency regime for which $\omega \gg S_l$, the Lagrangian displacement becomes mostly vertical (i.e. $|\xi_\mathrm{h}| \ll |\xi_\mathrm{r}|$) and the vertical wave number reduces to

$$k_\mathrm{r} \approx \frac{\omega}{c}. \tag{10}$$

Using the reduced canonical variable

$$V = \rho^{1/2} c r \left(1-\frac{S_l^2}{\omega^2}\right)^{-1/2} \xi_\mathrm{r}, \tag{11}$$

which has been introduced by Shibahashi (1979), and applying again the JWKB method (Appendix C), we derive the asymptotic expression for $\xi_\mathrm{r}\,(r)$

$$\xi_\mathrm{r} = A_V \rho^{-1/2} c^{-1/2}\omega^{-1/2} r^{-1} \cos\left(\int_\mathrm{r}^{R} k_\mathrm{r}\,\mathrm{d}r' - \phi_\mathrm{p}'\right), \tag{12}$$

where A_V is the mode amplitude, ϕ_p' is a phase, and R is the radius of the star.

3. Asymptotic magnetic splittings

3.1. Studied magnetic configuration

For a sufficiently moderate magnetic field, we can perturb the wave equation to the first-order by the linearised Lorentz force

$$\delta \boldsymbol{F}_\mathrm{L} = \frac{1}{4\pi}\left[(\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{B})\wedge\delta\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{\nabla}\wedge\delta\boldsymbol{B})\wedge\boldsymbol{B}\right], \tag{13}$$

where $\boldsymbol{B}$ is the stellar magnetic field, $\delta\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\wedge(\boldsymbol{\xi}\wedge\boldsymbol{B})$ is its fluctuation, and $\mu_0 = 4\pi$ (in c.g.s.) is the magnetic permeability of vacuum. We obtain the general expression for the magnetic frequency splitting

$$\left(\frac{\delta\omega_\mathrm{mag}}{\omega_0}\right) = -\frac{\langle\boldsymbol{\xi}, \delta\boldsymbol{F}_\mathrm{L}/\rho\rangle}{2\omega_0\,\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle}, \tag{14}$$

where $\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta}\rangle = \int_V \rho\,(\boldsymbol{\xi}^*\cdot\boldsymbol{\zeta})\,\mathrm{d}V$ (where the asterisk is the complex conjugate) and ω_0 is the angular frequency of the unperturbed mode; we refer to Prat et al. (2019) for details on the perturbation formalism. A supplementary term, $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{\xi})\,(\boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{B})\wedge\boldsymbol{B}/(\mu_0\rho)$, should be taken into account in the general case (Goode & Thompson 1992). However, we can demonstrate again using the JWKB approximation that it is not the dominant term for the asymptotic modes. It scales as k_r, while the dominant terms scales as k_r^2 while $k_r\,H \gg 1$ in the JWKB limit. Therefore, we assume that the characteristic length scale of the wave is shorter than the length scales of the variation in the hydrostatic background (H) and in the magnetic field configuration.

The mode inertia is expressed as

$$\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle = \int_0^R \rho r^2\left(|\xi_\mathrm{r}|^2 + l\,(l+1)\,|\xi_\mathrm{h}|^2\right)\mathrm{d}r. \tag{15}$$

In this work, we chose to focus on a dipolar mixed (i.e. with both a poloidal and a toroidal components) axisymmetric configuration

$$\boldsymbol{B} = B_0\left[b_\mathrm{r}(r)\cos\theta, b_\theta(r)\sin\theta, b_\varphi(r)\sin\theta\right], \tag{16}$$

where B_0 is the field amplitude and the functions $b_i\,(r)$ (with $i = \{r,\theta,\varphi\}$) describe the radial dependence of each component. On the one hand, it can model a stable fossil field that has been formed in a stably stratified radiation zone (e.g. Duez & Mathis 2010). On the other hand, it can model the first large-scale component of a dynamo-generated magnetic field (e.g. Brun & Browning 2017).

3.2. Asymptotic g modes

We first focus on low-frequency asymptotic g modes, which probe radiative zones, that is, cores of low-mass stars. For these modes, we have $\omega_0 \ll \{S_l, N\}$ and thus $k_\mathrm{r} \approx (N/\omega_0)\,k_\mathrm{h} \gg k_\mathrm{h}$ with $k_\mathrm{h} \equiv \sqrt{l\,(l+1)}/r$. Because of their weak compressibility, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi} \approx 0$, and they are thus quasi-horizontal with $\xi_\mathrm{v} \ll \xi_\mathrm{h}$. Therefore we selected the terms that involve the products $\left\{\xi_\mathrm{h}, \xi_\mathrm{h}', \xi_\mathrm{h}''\right\}\times\xi_\mathrm{h}^*$ to isolate the dominant terms in the general expression of the magnetic splitting provided by Eqs. (B.1) and (B.2). Then, using the results provided in Eq. (9), we have $\xi_\mathrm{h} \propto (k_\mathrm{r})^{-1/2}\exp\left[i\int k_\mathrm{r}\mathrm{d}r'\right]$ if the studied low-frequency mode varies rapidly in space in comparison to the characteristic length scale of the variation in the stellar hydrostatic structure and in the magnetic configuration. We thus have $\xi_\mathrm{h}' \propto ik_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}$ and $\xi_\mathrm{h}'' \propto k_\mathrm{r}^2\xi_\mathrm{h}$. Because $k_\mathrm{r}H \gg 1$ (because $N \gg \omega$, and where H is the characteristic length of the variation in the hydrostatic background) in the asymptotic regime, the dominant terms are thus those $\propto k_\mathrm{r}^2$, that is, $\propto\xi_\mathrm{h}''\xi_\mathrm{h}^*$. As in Hasan et al. (2005) and Rashba et al. (2007), we can therefore identify the dominant terms in the complete expression of the magnetic splitting given in Eq. (B.1). After a last integration by parts, we obtain

$$\left(\frac{\delta\omega_\mathrm{mag}}{\omega_0}\right)_g = \frac{B_0^2}{8\pi\omega_0^2}C_{l,m}\frac{\int_{r_{t;i}}^{r_{t;e}}|\,(r\,b_\mathrm{r}\,\xi_\mathrm{h})'\,|^2\,\mathrm{d}r}{\int_{r_{t;i}}^{r_{t;e}}|\xi_\mathrm{h}|^2\rho r^2\,\mathrm{d}r}, \tag{17}$$

where

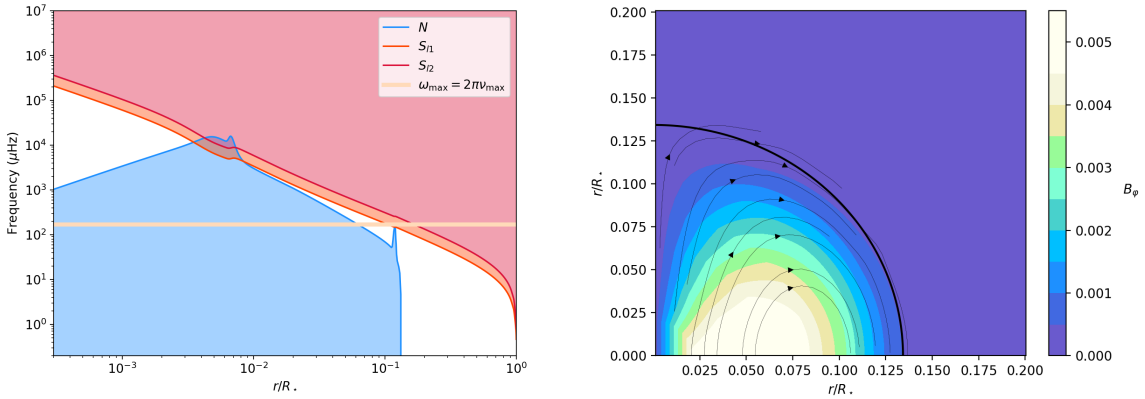


Fig. 1. *Left*: profiles of the Lamb frequencies (S_l; red lines) for $l = \{1, 2\}$ and of the Brunt-Väisälä frequency (N; blue line) for the studied $1.5 M_\odot$ 2.8 Gyr old intermediate-mass red giant star (with a solar metallicity $Z = 0.02$); the position of $\nu_{\max}$ is also reported (orange line). *Right*: topology of the fossil magnetic field in the stably stratified radiative core of the studied red giant (its limit is given by the thick black line). The thin black lines are the poloidal field lines, while the intensity of the toroidal field (normalised by the maximum values of the radial field) is given in colours.

$$C_{l,m} = \frac{\displaystyle\int_0^\pi \left[\left| \cos\theta \partial_\theta Y_l^m \right|^2 + m^2 \left| \frac{\cos\theta}{\sin\theta} Y_l^m \right|^2 \right] \sin\theta \mathrm{d}\theta}{l\,(l+1)}. \tag{18}$$

Because the angular coupling coefficient $C_{l,m}$ is independent of the sign of m in the case of the considered dipolar magnetic configuration, we can already predict that the magnetic frequency splittings for pro- and retrograde modes ($m > 0$ and $m < 0$, respectively) will be the same. This will allow us to potentially distinguish them from the rotation-induced frequency splittings which depend on the sign of m with opposite values when computed to the first-order in Ω (Ω is the rotation of the star); this is discussed in details in Sect. 4. In the case of main-sequence low-mass stars and of evolved stars, we can assume that $r_{t;i} \approx 0$ and $r_{t;e} \approx R_{\rm core}$ for low-frequency g modes, where $R_{\rm core}$ is the radius of the radiative core. In the case of main-sequence intermediate-mass stars, we have $r_{t;i} \approx R_{\rm CC}$ and $r_{t;e} \approx R$, where $R_{\rm CC}$ is the radius of the convective core.

In addition, the mostly horizontal low-frequency g modes allows us to probe the orthogonal radial component of the field. This can be understood from the form of the linearised Lorentz force, which implies terms of the form $\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{B}$ (cf. Eq. (13)). These terms thus couple the Lagrangian displacement of the mostly horizontal mode with the orthogonal radial component of the field.

Using Eq. (9), this can be written as

$$\left(\frac{\delta\omega_{\rm mag}}{\omega_0}\right)_g = \frac{1}{2\omega_0^4} C_{l,m} \frac{\displaystyle\int_{r_{t;i}}^{r_{t;e}} (\omega_A^r)^2\, N^2\, \cos^2\left(X_g\right) N \frac{\mathrm{d}r}{r}}{\displaystyle\int_{r_{t;i}}^{r_{t;e}} N \frac{\mathrm{d}r}{r}}, \tag{19}$$

where $X_g = \int_{r_{t;i}}^{r} k_{\rm r}\, \mathrm{d}r' - \phi'_g$ and $\omega_A^r = B_0 b_{\rm r} / \left(\sqrt{4\pi\rho} r\right)$.

Using the properties of rapidly oscillating integrals (see Appendix C), this reduces to

$$\left(\frac{\delta\omega_{\rm mag}}{\omega_0}\right)_g = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{4\pi\rho_c R^2 \omega_0^2} \frac{N_{\max}^2}{\omega_0^2} l\,(l+1)\, C_{l,m} \frac{\displaystyle\int_{x_{t;i}}^{x_{t;e}} \frac{b_{\rm r}^2 \widehat{N}^2}{(\rho/\rho_c)\, x^2} \widehat{N} \frac{\mathrm{d}x}{x}}{\displaystyle\int_{x_{t;i}}^{x_{t;e}} \widehat{N} \frac{\mathrm{d}x}{x}}, \tag{20}$$

where we have introduced the dimensionless radius $x = r/R$ (with $x_{t;i} = r_{t;i}/R$ and $x_{t;e} = r_{t;e}/R$), the maximum of the Brunt-Väisälä frequency $N_{\max}$ and its dimensionless radial profile $\widehat{N}$ defined such that $N(r) = N_{\max} \widehat{N}(r)$. The form of this integral is really interesting because we recover the one known for asymptotic rotational splittings, but for the radial component of the magnetic field. We can then define a kernel as Goupil et al. (2013) (see the end of Sect. 3.4.), which opens the path for potential inversions when magnetic seismic signatures can be detected (we refer to Bugnet et al. 2021 for the corresponding values of the critical amplitudes).

This result can be generalised for g modes with frequencies of the same order of magnitude as the inertial frequency 2Ω, where Ω is the angular velocity of the star. This is the case for instance in fast-rotating stars such as γ Doradus stars (e.g. Van Beeck et al. 2020) and SPB stars (e.g. Prat et al. 2019). When the buoyancy force exceeds the Coriolis force in the direction of the stable entropy or chemical stratification, we can assume the traditional approximation of rotation (TAR; e.g. Eckart 1960; Lee & Saio 1997; Townsend 2003; Bouabid et al. 2013; Mathis 2009). In this approximation, the horizontal projection of the rotation vector is neglected that allows us to separate variables when the wave propagation equation is solved as in the non-rotating case. Then, we obtain for g modes modified by rotation, in other words, for gravito-inertial modes (hereafter gi modes),

$$\left(\frac{\delta\omega_{\rm mag}}{\omega_0}\right)_g = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{4\pi\rho_c R^2 \omega_0^2} \frac{N_{\max}^2}{\omega_0^2} \Lambda_{k,m}(\nu)\, C_{k,m}(\nu) \times \frac{\displaystyle\int_{x_{t;i}}^{x_{t;e}} \frac{b_{\rm r}^2 \widehat{N}^2}{(\rho/\rho_c)\, x^2} \widehat{N} \frac{\mathrm{d}x}{x}}{\displaystyle\int_{x_{t;i}}^{x_{t;e}} \widehat{N} \frac{\mathrm{d}x}{x}}, \tag{21}$$

with

$$C_{k,m}(\nu) = \frac{\displaystyle\int_0^\pi \left[H_\theta^2(\cos\theta) + H_\varphi^2(\cos\theta) \right] \cos^2\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta}{\displaystyle\int_0^\pi \left[H_\theta^2(\cos\theta) + H_\varphi^2(\cos\theta) \right] \sin\theta \mathrm{d}\theta}, \tag{22}$$

where $\nu = 2\Omega/\omega_0$ is the spin parameter and $\Lambda_{k,m}(\nu)$ is the horizontal eigenvalues of the Hough functions (e.g. Hough 1898; Lee & Saio 1997; Townsend 2003) $\left\{ H_r(\cos\theta), H_\theta(\cos\theta), H_\varphi(\cos\theta) \right\}$ that generalise the spherical harmonics when the rotation within the TAR is taken into

account (we refer to Appendix A for the details of their definition).

3.3. Asymptotic p modes

We can apply the same method to the case of high-frequency acoustic modes, which probe the external layers of stars. In the same way, we isolate using Eq. (12) the dominant terms in Eq. (B.2), which are $\propto \xi_{\rm r}'' \xi_{\rm r}^*$

$$\left(\frac{\delta\omega_{\rm mag}}{\omega_0}\right)_p = \frac{B_0^2}{8\pi\omega_0^2} D_{l,m} \sum_{i=\{\theta,\varphi\}} \frac{\int_{r_t}^R |\left(r\, b_i\, \xi_{\rm r}\right)'|^2 \,{\rm d}r}{\int_{r_t}^R |\xi_{\rm r}|^2 \rho r^2 \,{\rm d}r}, \tag{23}$$

where $D_{l,m} = \int_0^\pi \sin^2\theta |Y_l^m|^2 \sin\theta {\rm d}\theta$ is computed in Appendix D.3. As for the angular coupling coefficients $C_{l,m}$ computed for asymptotic g modes, we also identify here that $D_{l,-m} = D_{l,m}$. We have introduced the internal turning point $r_t = \sqrt{l\,(l+1)}c/\omega_0$ for which $S_l\,(r_t) = \omega_0$. In the case of low-degree high-frequency acoustic modes, we have $r_t \rightarrow 0$. Using the asymptotic JWKB solution given in Eq. (12) and the theory of rapidly oscillating integrals (see Appendix C), we finally obtain

$$\left(\frac{\delta\omega_{\rm mag}}{\omega_0}\right)_p = \frac{D_{l,m}}{2} \sum_{i=\{\theta,\varphi\}} \frac{\int_0^R \frac{\left(V_{\rm A}^i\right)^2}{c^2} \frac{{\rm d}r'}{c}}{\int_0^R \frac{{\rm d}r'}{c}}, \tag{24}$$

where $V_{\rm A}^i = B_i/\sqrt{4\pi\rho}$. We again recover exactly the same form as for the asymptotic rotational splittings, but for the horizontal components of the magnetic field. As in the case of low-frequency g modes, high-frequency acoustic modes, which have mostly vertical Lagrangian displacements, allow us to probe the orthogonal horizontal (latitudinal and azimuthal) components of the field.

3.4. Mixed modes

As in Goupil et al. (2013), we can express the magnetic splittings for mixed (gravito-acoustic) modes using the expressions of the splittings of asymptotic gravity and acoustic modes:

$$\left(\frac{\delta\omega_{\rm mag}}{\omega_0}\right) = \left(\frac{\delta\omega_{\rm mag}}{\omega_0}\right)_g \zeta + \left(\frac{\delta\omega_{\rm mag}}{\omega_0}\right)_p (1-\zeta), \tag{25}$$

where we have introduced the

$$\zeta = \frac{I_g}{I} = \frac{\int_{r_{t,i}}^{r_{t,e}} \left(\xi_{\rm r}^2 + l\,(l+1)\,\xi_{\rm h}^2\right) r^2 {\rm d}r}{\int_0^R \left(\xi_{\rm r}^2 + l\,(l+1)\,\xi_{\rm h}^2\right) r^2 {\rm d}r} \tag{26}$$

function, with I_g and I being the inertia of their g-dominated component (the so-called $g-m$ modes) and their total inertia, respectively. It quantifies their behaviour as a g-dominated mode when $\zeta = 1$ or as a p-dominated mode (the so-called $p-m$ modes) when $\zeta \rightarrow 0$.

It is interesting here to make the analogy with the case of rotation studied in Goupil et al. (2013). They showed that for the dipolar modes ($l = 1$)

$$\delta\omega \approx \frac{\zeta}{2} \langle\Omega\rangle_{\rm core} + (1-\zeta)\,\langle\Omega\rangle_{\rm envelope}\,, \tag{27}$$

where

$$\langle\Omega\rangle_{\rm core} \approx \frac{1}{2\sqrt{l\,(l+1)}} \left(\frac{\omega_0}{\Omega_c}\right)^2 \frac{\int_{\rm core} \Omega\,(x)\, N \frac{{\rm d}x}{x}}{\int_{\rm core} N \frac{{\rm d}x}{x}}, \tag{28}$$

with $\Omega_c = (GM/R^3)^{1/2}$ the critical Keplerian velocity, and

$$\langle\Omega\rangle_{\rm envelope} \approx \frac{1}{2} \frac{\int_{\rm envelope} \Omega\,(x) \frac{{\rm d}x}{c}}{\int_{\rm envelope} \frac{{\rm d}x}{c}}. \tag{29}$$

Using Eqs. (20) and (24), we identify the analogy between Ω in the core and $\left(\omega_{\rm A}^r\right)^2 N^2/\omega_0^3$ in the case of g-dominated modes and between Ω in the envelope and $\omega_0 \left(V_{\rm A}^i\right)^2/c^2$ for p-dominated modes. This shows the potential power of mixed modes to probe the magnetism of stars where they propagate from their surfaces to their cores.

4. Key application: evolved low-mass and intermediate-mass stars

Because of all the key results they have provided within the theory of stellar evolution and the study of the internal dynamics of stars based on space-based asteroseismology (e.g. Hekker & Christensen-Dalsgaard 2017; Aerts et al. 2019), we chose here to apply our theoretical results to a typical $1.5\,M_\odot$ 2.8 Gyr old intermediate-mass red giant star (with a solar metallicity $Z = 0.02$). The profiles of its Brunt-Vaïsälä and Lamb frequencies for dipolar and quadrupolar modes (N, $S_{l=1}$, $S_{l=2}$, respectively) are represented in Fig. 1 (left panel) where the position of $\nu_{\rm max} = 172.2\,\mu$Hz, the frequency of maximum oscillation power, is reported by the thick horizontal orange line.

First, we computed the topology of a mixed (with both poloidal and toroidal components) relaxed fossil magnetic field in its radiative core following the method introduced in Prat et al. (2019) and the theoretical modelling for this field by Duez & Mathis (2010). As in Bugnet et al. (2021), the chosen boundary conditions are $b_{\rm r} = 0$ at the boundary of the radiative core and convective envelope. Its amplitude was fixed to $B_0 = 10^6$ G and its geometry is reported in Fig. 1 (right panel). For this possible field amplitude (Cantiello et al. 2016), magnetic frequency splittings should be detectable within *Kepler* data (Bugnet et al. 2021). The thin black lines represent the poloidal field lines, and the colours give the amplitude of the toroidal component of the field (the boundary of the radiative core is given by the thick black line).

Then, we computed the magnetic splittings with their complete expression $\left(\delta\omega_{\rm mag}/\omega_0\right)_{\rm num}$ given in Appendix B using the combination of the GYRE and MESA codes (Townsend & Teitler 2013; Paxton et al. 2011) for the dipolar ($l = 1$) and quadrupolar ($l = 2$) mixed modes (represented by the dots in the left panel (right panel) of Fig. 2). We computed the corresponding asymptotic prediction $\left(\delta\omega_{\rm mag}/\omega_0\right)_{\rm asympt}$ using Eq. (20) (solid lines in Fig. 2). The complete and asymptotic expressions were compared based on the relative error defined as $\left[\left(\delta\omega_{\rm mag}/\omega_0\right)_{\rm asympt} - \left(\delta\omega_{\rm mag}/\omega_0\right)_{\rm num}\right] / \left(\delta\omega_{\rm mag}/\omega_0\right)_{\rm num}$ (Fig. 2, bottom panels). In the low-frequency regime, the agreement is excellent for g-dominated mixed modes with a relative error

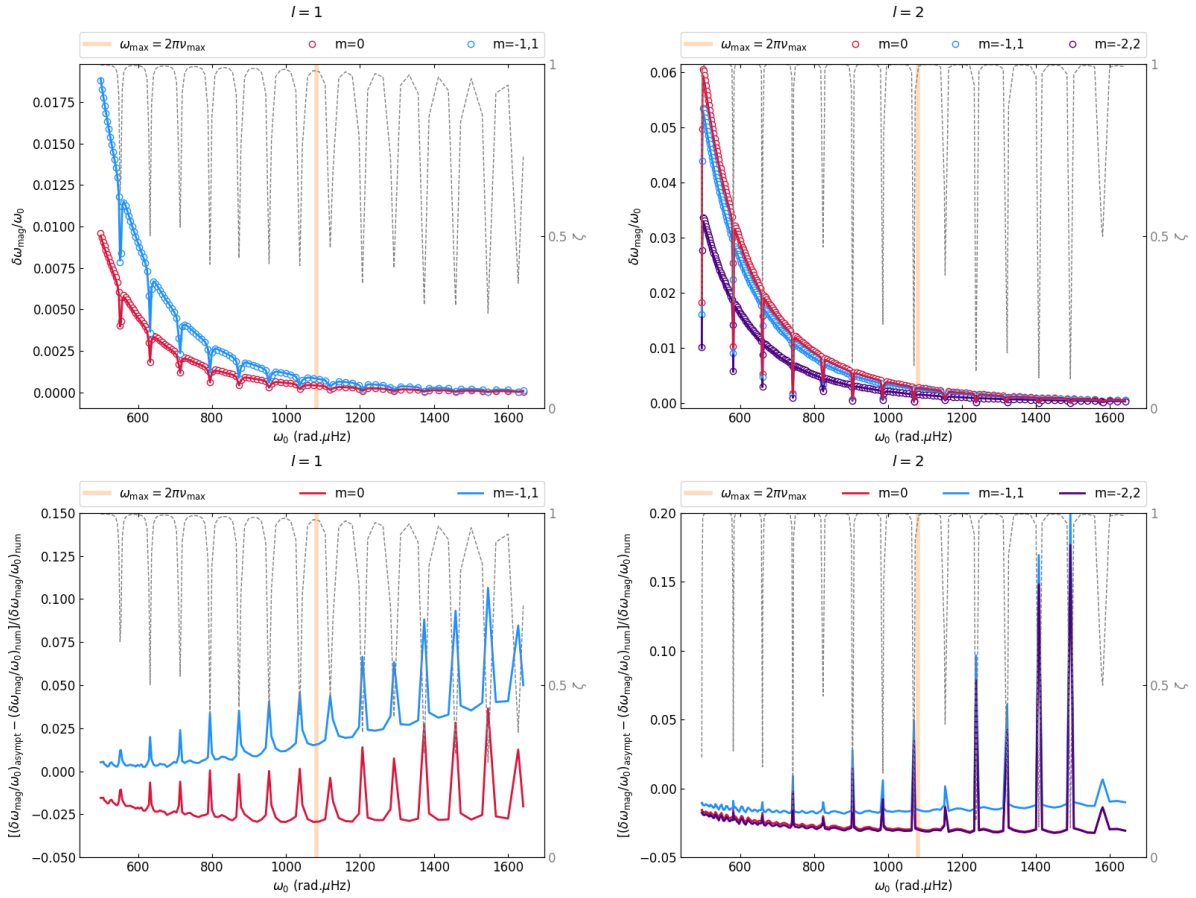


Fig. 2. First-order magnetic splitting for dipolar ($l = 1$, *left top panel*) and quadrupolar ($l = 2$, *right top panel*) mixed modes in the studied 1.5 $M_\odot$ red giant star. The dots correspond to the full expression for the splitting (Eqs. (B.1) and (B.2)) computed numerically using the GYRE and MESA codes, and the solid lines are the asymptotic solutions given in Eq. (20). The ζ function related to the mixed character of modes propagating in evolved low-mass stars is plotted as a dotted grey line. Finally, the vertical thick orange line indicates the position of $\omega_{\rm max} = 2\pi\nu_{\rm max}$. *Bottom panels*: relative errors between the asymptotic magnetic splittings as derived in Eq. (20) and their full expression given in Appendix B for dipolar (*left panel*) and quadrupolar (*right panel*) modes, respectively.

lower than 4% for dipolar modes and 3% for quadrupolar modes outside the dips of the ζ function. These results are coherent with the high radial orders of the obtained mixed modes, that is, $n \in [-138, -24]$ for the dipolar modes and $n \in [-244, -56]$ for the quadrupolar modes, for which the JWKB approximation works well. This demonstrates the high potential of using the asymptotic magnetic splittings for intensive seismic modelling where they can be very useful to explore a broad space of stellar parameters (see e.g. the work by Van Beeck et al. 2020, for main-sequence intermediate-mass stars).

As this has already been identified in Eq. (18), the effects of the studied dipolar mixed (poloidal + toroidal) fossil magnetic field on the frequencies of g-dominated mixed modes are the same for pro- and retrograde modes. This strongly differs from the case of the frequency splittings induced by the stellar rotation, which are due to the combination of the Coriolis acceleration and of the change in reference frame (e.g. Aerts et al. 2010),

$$\delta\omega_{\rm rot} = -\frac{\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{F}_c(\boldsymbol{\xi})\rangle + \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{F}_f(\boldsymbol{\xi})\rangle}{2\omega_0 \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}\rangle}, \tag{30}$$

where $\boldsymbol{F}_c(\boldsymbol{\xi}_0) = 2i\omega_0 \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\xi}_0$ is the Coriolis acceleration operator and $\boldsymbol{F}_f(\boldsymbol{\xi}_0) = -2m\omega_0 \Omega \boldsymbol{\xi}_0$ is the advection operator due to the change of reference frame. In the case of a radial differential rotation, we have

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{F}_c(\boldsymbol{\xi})\rangle = 4m\omega_0 \int_0^R \rho r^2 \Omega(r) \left[|\xi_{\rm h}|^2 + 2\xi_{\rm r}^* \xi_{\rm h}\right] {\rm d}r \tag{31}$$

and

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{F}_f(\boldsymbol{\xi})\rangle = -2m\omega_0 \left(\int_0^R \rho r^2 \left(|\xi_{\rm r}|^2 + l(l+1)|\xi_{\rm h}|^2 \right) \Omega(r) {\rm d}r \right). \tag{32}$$

Therefore, $\delta\omega_{\rm rot}$ is proportional to m, leading to opposite rotational frequency splittings for pro- and retrograde modes. This is illustrated in Fig. 3, where we represent in the middle column this rotational splitting when a typical two-zone differential rotation with a solid-body rotation $\Omega_{\rm core}/(2\pi) = 0.5\,\mu$Hz in the radiative core and $\Omega_{\rm envelope}/(2\pi) = (\Omega_{\rm core}/10)/2\pi = 0.05\,\mu$Hz in the convective envelope is assumed (Gehan et al. 2018). When added to the magnetic frequency splitting, which is the same for pro- and retrograde modes, this leads to an asymmetry of the total frequency splitting that scales with the squared amplitude of the field (cf. Eqs. (17) and (20)). This asymmetry will allow asteroseismologists to probe the potential presence of an (axisymmetric) stable fossil magnetic field in the core of evolved low-mass and intermediate-mass stars. We refer to Bugnet et al. (2021) for a detailed characterisation of this

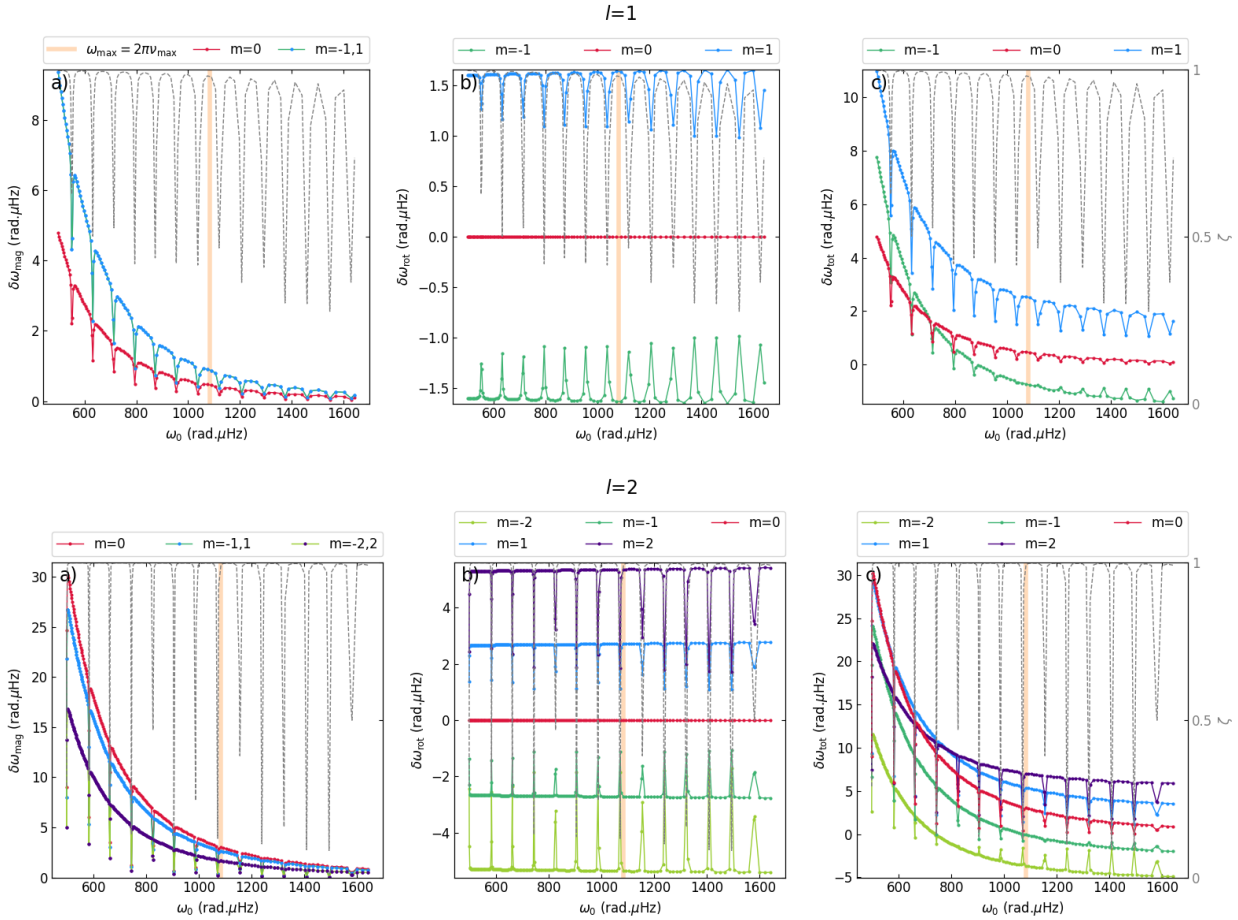


Fig. 3. Leading-order perturbations on the frequencies of dipolar ($l = 1$, *top panels*) and quadripolar ($l = 2$, *bottom panels*) mixed modes in the studied 1.5 $M_\odot$ red giant star. *Left panels*: magnetic angular frequency splitting $\delta\omega_{\rm mag}$ (for $B_0 = 1$MG) of the $m \in [-l, l]$ modes. *Middle panels*: angular frequency splitting $\delta\omega_{\rm rot}$ for a plausible two-layer differential rotation (with $\Omega_{\rm core} = 0.5\,\mu$Hz and $\Omega_{\rm env} = \Omega_{\rm core}/10$) of the same mixed modes is represented. *Right panels*: combination of magnetic and rotational splittings of mixed-mode angular frequencies $\delta\omega_{\rm tot} = \delta\omega_{\rm mag} + \delta\omega_{\rm rot}$. The vertical orange line indicates in each panel the expected frequency of maximum power of the modes $\nu_{\rm max}$. The ζ function is represented in each case by the grey dashed line.

asymmetry in seismic data. We did not consider the case of p-dominated modes during the subgiant phase because Bugnet et al. (2021) demonstrated that magnetic signatures would not be detectable for them.

5. Conclusion and perspectives

We have established the asymptotic values of the magnetic splittings of low-frequency gravity and gravito-inertial (gi) modes and high-frequency acoustic modes. These results were applied to the case of mixed gravito-acoustic modes such as those that propagate in evolved low- and intermediate-mass red giant stars. They were derived in the case of a large-scale axisymmetric mixed (poloidal + toroidal) dipolar field that can be representative of a stable fossil field or of the large-scale axisymmetric dipolar component of a dynamo-generated field. The main results that we obtained are listed below.

The expressions obtained for the magnetic splittings in the asymptotic limits of low-frequency g (gi) modes and high-frequency p modes are very similar in their form to those of rotational splittings in the same limits. This opens the path to potential inversions of the internal distribution of magnetic fields in stellar interiors when these signatures can be detected in stellar oscillation frequency spectra.

For asymptotic g (gi) modes, the splittings scale as the normalised squared ratio of the local Alfvén frequency to the mode frequency integrated along the buoyancy radius. For asymptotic p modes, they scale as the normalised squared ratio of the Alfvén velocity to the sound speed integrated along the acoustic path.

In the case of the dipolar configuration we studied, magnetic frequency splittings are the same for pro- and retrograde modes ($m > 0$ and $m < 0$, respectively). This allows us to distinguish them from rotational frequency splittings that have opposite values for pro- and retrograde modes. This leads to an asymmetry of the total frequency splittings when the two effects are added. It could be detectable within high-precision asteroseismic data for sufficient field amplitude. We refer to Bugnet et al. (2021) for a complete seismic characterisation of this asymmetry and for the study of this required amplitude in the evolution of low-mass and intermediate-mass stars.

In the case of the large-scale mixed dipolar configuration, which is treated here, low-frequency g (gi) modes and high-frequency p modes explore different components of the magnetic field because of the form of the linearised Lorentz force, which involves $\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{B}$ terms. On the one hand, mostly horizontal low-frequency g (gi) modes, which propagate in the central regions of stars, probe the orthogonal radial component of the field. On the other hand, mostly vertical high-frequency p modes, which

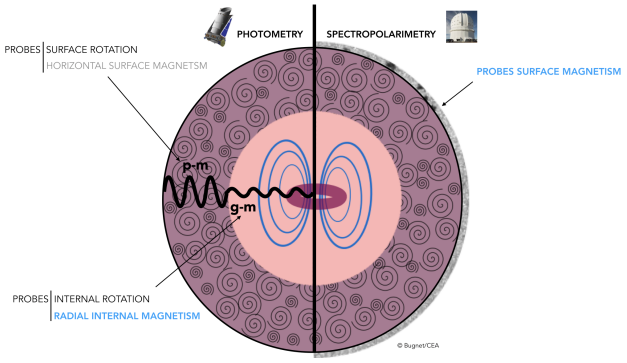


Fig. 4. Global strategy for probing the internal magnetism of stars using asteroseismology (in potential synergy with spectropolarimetry). Here, the scheme is designed for evolved low- and intermediate-mass stars.

propagate in the external regions of stars, probe the orthogonal horizontal (latitudinal and azimuthal) components of the field. As in the case of the rotation, where mixed modes have allowed us to probe the rotation of the core and of the external envelope with their g-dominated ($g-m$) and p-dominated ($p-m$) components, respectively, this opens the path to probe the stellar magnetic field from the surface to the core of stars. Because high frequencies of asymptotic p modes will be more distant than low frequencies of asymptotic g modes from the Alfvén frequency, the seismic signatures of the external field can be more difficult to detect in the case of a low-amplitude field. This can be fixed in the case of bright stars such as those observed by the Transiting Exoplanet Survey Satellite (TESS; Ricker et al. 2015), and in the future by the PLAnetary Transits and Oscillations of stars (PLATO) mission (Rauer et al. 2014), by combining spectropolarimetic observations to determine the configuration and the strength of the field at the surface and seismic signatures to probe the core magnetism. This strategy is summarised in Fig. 4.

In a near future, the derived asymptotic relations should be tested and systematically used for all classes of pulsators. In addition, more complex (non-dipolar and non-axisymmetric) magnetic topologies must be studied (e.g. Prat et al. 2020). This should allow us to build a complete knowledge of the magnetism of stars from their surfaces to their cores, step by step.

Acknowledgements. The authors thank the referee and Pr. J. Christensen-Dalsgaard for their very constructive comments and remarks that allowed us to improve the article. St. M., L. B., V. P., and K. A. acknowledge support from the European Research Council through ERC grant SPIRE 647383. All the members from CEA acknowledge support from GOLF and PLATO CNES grants of the Astrophysics Division at CEA. S. Mathur acknowledges support by the Ramon y Cajal fellowship number RYC-2015-17697. We made great use of the megyr python package for interfacing MESA and GYRE codes.

References

Abramowitz, M., & Stegun, I. A. 1972, Handbook of Mathematical Functions (New York: Dover Publications, INC.)
Aerts, C. 2021, Rev. Mod. Phys., 93, 015001
Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J., & Kurtz, D. W. 2010, Asteroseismology (Springer)
Aerts, C., Mathis, S., & Rogers, T. M. 2019, ARA&A, 57, 35
Aurière, M., Konstantinova-Antova, R., Charbonnel, C., et al. 2015, A&A, 574, A90
Beck, P. G., Montalban, J., Kallinger, T., et al. 2012, Nature, 481, 55
Benomar, O., Takata, M., Shibahashi, H., Ceillier, T., & García, R. A. 2015, MNRAS, 452, 2654
Bouabid, M. P., Dupret, M. A., Salmon, S., et al. 2013, MNRAS, 429, 2500
Bugnet, L., Prat, V., Mathis, S., et al. 2021, A&A, submitted [arXiv:2102.01216]
Braithwaite, J., & Spruit, H. C. 2004, Nature, 431, 819
Braithwaite, J., & Spruit, H. C. 2017, R. Soc. Open Sci., 4, 160271
Brun, A. S., & Browning, M. K. 2017, Liv. Rev. Sol. Phys., 14, 4
Cantiello, M., Mankovich, C., Bildsten, L., Christensen-Dalsgaard, J., & Paxton, B. 2014, ApJ, 788, 93
Cantiello, M., Fuller, J., & Bildsten, L. 2016, ApJ, 824, 14
Ceillier, T., Eggenberger, P., García, R. A., & Mathis, S. 2013, A&A, 555, A54
Christensen-Dalsgaard, J. 2015, From the Sun to the distant stars, and back Future research directions (Cambridge University Press), 276
Christophe, S., Ballot, J., Ouazzani, R. M., Antoci, V., & Salmon, S. J. A. J. 2018, A&A, 618, A47
Couvidat, S., García, R. A., Turck-Chièze, S., et al. 2003, ApJ, 597, L77
Deheuvels, S., García, R. A., Chaplin, W. J., et al. 2012, ApJ, 756, 19
Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M. J., et al. 2014, A&A, 564, A27
Deheuvels, S., Ballot, J., Beck, P. G., et al. 2015, A&A, 580, A96
Deheuvels, S., Ballot, J., Eggenberger, P., et al. 2020, A&A, 641, A117
Domingo, V., Fleck, B., & Poland, A. I. 1995, Sol. Phys., 162, 1
Donati, J. F., & Landstreet, J. D. 2009, ARA&A, 47, 333
Duez, V., & Mathis, S. 2010, A&A, 517, A58
Eckart, C. 1960, Hydrodynamics of Oceans and Atmospheres (Pergamon Press)
Eggenberger, P., Montalbán, J., & Miglio, A. 2012, A&A, 544, L4
Erdelyi, A. 1956, Asymptotic Expansions (Dover Publications, Inc.)
Fröman, N., & Fröman, P. O. 2005, Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method (North-Holland Publishing Company)
Fuller, J., Piro, A. L., & Jermyn, A. S. 2019, MNRAS, 485, 3661
Gabriel, A. H., Grec, G., Charra, J., et al. 1995, Sol. Phys., 162, 61
García, R. A., & Ballot, J. 2019, Liv. Rev. Sol. Phys., 16, 4
García, R. A., Turck-Chièze, S., Jiménez-Reyes, S. J., et al. 2007, Science, 316, 1591
Gehan, C., Mosser, B., Michel, E., Samadi, R., & Kallinger, T. 2018, A&A, 616, A24
Goode, P. R., & Thompson, M. J. 1992, ApJ, 395, 307
Gough, D. O. 1993, Astrophysical Fluid Dynamics - Les Houches 1987, 399
Goupil, M. J., Mosser, B., Marques, J. P., et al. 2013, A&A, 549, A75
Hasan, S. S., Zahn, J. P., & Christensen-Dalsgaard, J. 2005, A&A, 444, L29
Hekker, S., & Christensen-Dalsgaard, J. 2017, A&ARv, 25, 1
Hough, S. S. 1898, Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A, 191, 139
Kiefer, R., & Roth, M. 2018, ApJ, 854, 74
Lee, U., & Saio, H. 1997, ApJ, 491, 839
Li, G., Bedding, T. R., Murphy, S. J., et al. 2019, MNRAS, 482, 1757
Li, G., Van Reeth, T., Bedding, T. R., et al. 2020, MNRAS, 491, 3586
Marques, J. P., Goupil, M. J., Lebreton, Y., et al. 2013, A&A, 549, A74
Mathis, S. 2009, A&A, 506, 811
Mathis, S., & Prat, V. 2019, A&A, 631, A26
Mathis, S., & Zahn, J. P. 2005, A&A, 440, 653
Mathur, S., Eff-Darwich, A., García, R. A., & Turck-Chièze, S. 2008, A&A, 484, 517
Mestel, L., & Weiss, N. O. 1987, MNRAS, 226, 123
Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012, A&A, 548, A10
Ouazzani, R. M., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2019, A&A, 626, A121
Ouazzani, R. M., Lignières, F., Dupret, M. A., et al. 2020, A&A, 640, A49
Paxton, B., Bildsten, L., Dotter, A., et al. 2011, ApJS, 192, 3
Prat, V., Mathis, S., Buysschaert, B., et al. 2019, A&A, 627, A64
Prat, V., Mathis, S., Neiner, C., et al. 2020, A&A, 636, A100
Rashba, T. I., Semikoz, V. B., Turck-Chièze, S., & Valle, J. W. F. 2007, MNRAS, 377, 453
Rauer, H., Catala, C., Aerts, C., et al. 2014, Exp. Astron., 38, 249
Ricker, G. R., Winn, J. N., Vanderspek, R., et al. 2015, J. Astron. Telescopes Instrum. Syst., 1, 014003
Samadi, R., Belkacem, K., & Sonoi, T. 2015, EAS Publ. Ser., 73–74, 111
Scherrer, P. H., Bogart, R. S., Bush, R. I., et al. 1995, Sol. Phys., 162, 129
Shibahashi, H. 1979, PASJ, 31, 87
Spada, F., Gellert, M., Arlt, R., & Deheuvels, S. 2016, A&A, 589, A23
Spruit, H. C. 2002, A&A, 381, 923
Takata, M., & Shibahashi, H. 1994, PASJ, 46, 301
Thompson, M. J., Toomre, J., Anderson, E. R., et al. 1996, Science, 272, 1300
Townsend, R. H. D. 2003, MNRAS, 340, 1020
Townsend, R. H. D., & Teitler, S. A. 2013, MNRAS, 435, 3406
Van Beeck, J., Prat, V., Van Reeth, T., et al. 2020, A&A, 638, A149
Van Reeth, T., Tkachenko, A., & Aerts, C. 2016, A&A, 593, A120
Van Reeth, T., Mombarg, J. S. G., Mathis, S., et al. 2018, A&A, 618, A24
Varshalovich, D. A., Moskalev, A. N., & Khersonskii, V. 1988, Quantum Theory of Angular Momentum (World Scientific)
Wade, G. A., Neiner, C., Alecian, E., et al. 2016, MNRAS, 456, 2

Appendix A: Hough functions

The radial Hough functions (Hough 1898) are defined by $H_r(\cos\theta) = f(\mu = \cos\theta)$, where f is the solution of the so-called tidal Laplace equation,

$$\frac{1-\mu^2}{1-\nu^2\mu^2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\mu^2} - \frac{2\mu(1-\nu^2)}{(1-\nu^2\mu^2)^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mu} + \left[\frac{m\nu(1+\nu^2\mu^2)}{(1-\nu^2\mu^2)^2} - \frac{m^2}{(1-\mu^2)(1-\nu^2\mu^2)}\right] f = -\Lambda(\nu)\, f, \tag{A.1}$$

where $\nu = 2\Omega/\omega$ is the spin factor. In the non-rotating case ($\nu = 0$), the eigenvalue Λ (they are generally indexed by an integer k for a given m; see e.g. Lee & Saio 1997) reduces to $l(l+1)$, where l is the angular degree of the mode, and H_r simplifies to the classical associated Legendre polynomial $P_l^m(\cos\theta)$.

The latitudinal and azimuthal Hough functions are respectively derived,

$$H_\theta(\cos\theta)\sin\theta = \frac{H_r'\sin\theta - m\nu H_r\cos\theta}{1-\nu^2\cos^2\theta} \tag{A.2}$$

and

$$H_\varphi(\cos\theta)\sin\theta = \frac{mH_r - \nu H_r'\sin\theta\cos\theta}{1-\nu^2\cos^2\theta}, \tag{A.3}$$

where $'$ is the total latitudinal derivative. H_φ has the same parity as H_r with respect to $\theta = \pi/2$, while H_θ has the opposite parity. In the non-rotating case ($\nu = 0$), H_θ and H_φ reduce to $\mathrm{d}P_l^m/\mathrm{d}\theta$ and $mP_l^m/\sin\theta$, respectively.

Appendix B: General expression of magnetic splittings

We recall all the non-zero-average terms of the work of the Lorentz force $\mu_0\delta\boldsymbol{F}_\mathrm{L}\cdot\boldsymbol{\xi}^*$. All these terms involve either only poloidal components of the magnetic field or only the toroidal component, and they are grouped accordingly as in Prat et al. (2019). All terms are composed of a purely radial part multiplied by a purely latitudinal part, and the prime symbol ($'$) is a total radial or latitudinal derivative, depending on the considered part.

B.1. Poloidal terms

We define $A = [(rb_\theta)' + b_\mathrm{r}]$. The terms that involve poloidal components are obtained,

$$\begin{aligned}
&-m\frac{\xi_\mathrm{h}b_\theta A\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}H_\mathrm{r}H_\varphi\sin\theta + \frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\theta)'A\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}H_\mathrm{r}^2\sin^2\theta\\
&-\frac{(r\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r})'A\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}H_\mathrm{r}H_\theta\sin\theta\cos\theta + \frac{\xi_\mathrm{r}b_\theta A\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}H_\theta(H_\mathrm{r}\sin^2\theta)'\\
&-\frac{Ab_\mathrm{r}|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}H_\theta(H_\theta\sin\theta\cos\theta)' + m\frac{Ab_\mathrm{r}|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}H_\theta H_\varphi\cos\theta\\
&-m\frac{(\xi_\mathrm{h}b_\theta)'b_\theta\xi_\mathrm{r}^*}{r}H_\mathrm{r}H_\varphi\sin\theta + \frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\theta)''b_\theta\xi_\mathrm{r}^*}{r}H_\mathrm{r}^2\sin^2\theta\\
&-\frac{(r\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r})''b_\theta\xi_\mathrm{r}^*}{r}H_\mathrm{r}H_\theta\sin\theta\cos\theta + \frac{b_\theta^2|\xi_\mathrm{r}|^2}{r^2}H_\mathrm{r}\sin\theta\left[\frac{(H_\mathrm{r}\sin^2\theta)'}{\sin\theta}\right]'\\
&-\frac{\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r}b_\theta\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}H_\mathrm{r}\sin\theta\left[\frac{(H_\theta\sin\theta\cos\theta)'}{\sin\theta}\right]'\\
&+m\frac{\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r}b_\theta\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}H_\mathrm{r}\sin\theta\left(H_\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)' + m\frac{(\xi_\mathrm{h}b_\theta)'b_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}^*}{r}H_\theta H_\varphi\cos\theta\\
&-\frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\theta)'b_\theta\xi_\mathrm{h}^*}{r}H_\mathrm{r}H_\theta\sin\theta\cos\theta + \frac{(r\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r})''b_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}^*}{r}H_\theta^2\cos^2\theta\\
&-\frac{\xi_\mathrm{r}b_\mathrm{r}b_\theta\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}H_\theta\cos\theta\left[\frac{(H_\mathrm{r}\sin^2\theta)'}{\sin\theta}\right]'\\
&+\frac{b_\mathrm{r}^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}H_\theta\cos\theta\left[\frac{(H_\theta\sin\theta\cos\theta)'}{\sin\theta}\right]'\\
&-m\frac{b_\mathrm{r}^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}H_\theta\cos\theta\left(H_\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)' + \frac{(r\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r})'b_\theta\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}H_\varphi(H_\varphi\sin\theta\cos\theta)'\\
&+\frac{b_\theta^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}H_\varphi[\sin\theta(H_\varphi\sin\theta)']' - m^2\frac{b_\theta^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}H_\varphi^2\\
&+m\frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\theta)'b_\theta\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}H_\mathrm{r}H_\varphi\sin\theta - m\frac{(r\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r})'b_\theta\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}H_\theta H_\varphi\cos\theta\\
&-m\frac{\xi_\mathrm{r}b_\theta b_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}H_\varphi\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(H_\mathrm{r}\sin^2\theta)' + m\frac{b_\mathrm{r}^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}H_\varphi\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(H_\theta\sin\theta\cos\theta)'\\
&-m^2\frac{b_\mathrm{r}^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}H_\varphi^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{(r\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r})''b_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}^*}{r}H_\varphi^2\cos^2\theta\\
&+\frac{(\xi_\mathrm{h}b_\theta)'b_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}^*}{r}H_\varphi\cos\theta(H_\varphi\sin\theta)'.
\end{aligned} \tag{B.1}$$

B.2. Toroidal terms

The terms involving the toroidal component are derived,

$$\begin{aligned}
&2\frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\varphi)'b_\varphi\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}H_\mathrm{r}H_\theta\sin\theta\cos\theta + 2\frac{b_\varphi^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}H_\theta\cos\theta(H_\theta\sin\theta)'\\
&+2m\frac{b_\varphi^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}H_\theta H_\varphi\cos\theta + \frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\varphi)''b_\varphi\xi_\mathrm{r}^*}{r}H_\mathrm{r}^2\sin^2\theta\\
&+\frac{(\xi_\mathrm{h}b_\varphi)'b_\varphi\xi_\mathrm{r}^*}{r}H_\mathrm{r}\sin\theta(H_\theta\sin\theta)' + \frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\varphi)'b_\varphi\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}H_\theta(H_\mathrm{r}\sin^2\theta)'\\
&+\frac{b_\varphi^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}H_\theta[\sin\theta(H_\theta\sin\theta)']' - m^2\frac{b_\varphi^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}H_\theta^2\\
&+\frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\varphi)'(rb_\varphi)'\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}H_\mathrm{r}^2\sin^2\theta + \frac{\xi_\mathrm{h}b_\varphi(rb_\varphi)'\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}H_\mathrm{r}\sin\theta(H_\theta\sin\theta)'\\
&+m\frac{\xi_\mathrm{r}b_\varphi(rb_\varphi)'\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}H_\mathrm{r}H_\varphi\sin\theta - m^2\frac{b_\varphi^2|\xi_\mathrm{r}|^2}{r^2}H_\mathrm{r}^2.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Appendix C: JWKB method for ordinary differential equations and rapidly oscillating integrals

On the one hand, studying the dynamics of asymptotic low-frequency g and high-frequency p modes implies solving Schrödinger-like equations of the form

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + \lambda^2\hat{k}_x^2(x)\,\Psi(x) = 0, \tag{C.1}$$

where λ is a large parameter and $\hat{k}_x$ is a normalised vertical wave number. Applying the JWKB (for Jeffreys-Wentzel-Krammer-Brillouin) method leads for $\lambda \gg 1$ to the following solution (e.g. Erdelyi 1956; Fröman & Fröman 2005):

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\hat{k}_x(x)}}\left[A_+\exp\left(i\lambda\int^x\hat{k}_x(x')\,\mathrm{d}x'\right) + A_-\exp\left(-i\lambda\int^x\hat{k}_x(x')\,\mathrm{d}x'\right)\right]. \tag{C.2}$$

On the other hand, we have to compute integrals of the form

$$I = \int_a^b g(x)\exp\left[i\lambda f(x)\right]\mathrm{d}x \tag{C.3}$$

to calculate their magnetic splittings. In the cases where $\lambda \gg 1$, they can be approximated by

$$I \rightarrow_{\lambda\to\infty} \sum_{|x_i|} g(x_i) \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_i)|}} \exp\left[i\lambda\left(f(x_i) - \frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\left(f''(x_i)\right)\right)\right], \tag{C.4}$$

where the x_i are the points such that $f'(x_i) = 0$ (Erdelyi 1956). If $f(x) = \int^x \hat{k}_x(x')\,\mathrm{d}x'$, the x_i are the turning points such that $\left(\hat{k}_x(x_i)\right)^2 = 0$.

Appendix D: Algebra for computing horizontal integrals

D.1. Spherical harmonics

D.1.1. Definitions

The spherical harmonics are defined by (e.g. Varshalovich et al. 1988)

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \mathcal{N}_l^m P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}, \tag{D.1}$$

where $P_l^{|m|}(\cos\theta)$ is the associated Legendre function, and $\mathcal{N}_l^m$ the normalisation coefficient

$$\mathcal{N}_l^m = (-1)^{\frac{(m+|m|)}{2}} \left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{D.2}$$

They obey the orthogonality relation,

$$\int_\Omega \left(Y_{l_1}^{m_1}(\theta,\varphi)\right)^* Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\Omega = \delta_{l_1,l_2}\delta_{m_1,m_2}, \tag{D.3}$$

where $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ and where the complex conjugate spherical harmonic is given by

$$\left(Y_l^m(\theta,\varphi)\right)^* = (-1)^m Y_l^{-m}(\theta,\varphi). \tag{D.4}$$

D.1.2. Linear recurrence relations

We introduce useful linear recurrence relations that should be used to analytically compute the $C_{l,m}$ and $D_{l,m}$ coefficients. Using again Varshalovich et al. (1988), we have on the one hand

$$\cos\theta\, Y_l^m = \alpha_{l,m} Y_{l+1}^m + \beta_{l,m} Y_{l-1}^m, \tag{D.5}$$

where

$$\alpha_{l,m} = \left[\frac{(l+1+m)(l+1-m)}{(2l+1)(2l+3)}\right]^{1/2} \tag{D.6}$$

and

$$\beta_{l,m} = \left[\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}\right]^{1/2}. \tag{D.7}$$

On the other hand, we obtain

$$\partial_\theta Y_l^m = A_{l,m} Y_l^{m+1} e^{-i\varphi} - B_{l,m} Y_l^{m-1} e^{i\varphi} \tag{D.8}$$

$$-m\frac{\cos\theta}{\sin\theta} Y_l^m = A_{l,m} Y_l^{m+1} e^{-i\varphi} + B_{l,m} Y_l^{m-1} e^{i\varphi}, \tag{D.9}$$

where

$$A_{l,m} = \frac{1}{2}\sqrt{[l(l+1) - m(m+1)]} \tag{D.10}$$

and

$$B_{l,m} = \frac{1}{2}\sqrt{[l(l+1) - m(m-1)]}. \tag{D.11}$$

D.1.3. Products of spherical functions and specific integrals

Integrals involving products of spherical harmonics should also be computed to calculate $C_{l,m}$ and $D_{l,m}$. Using the normalisation and the orthogonality of spherical harmonics (Eqs. (D.2)–(D.3)) and their complex conjugate (Eq. (D.4)), we can write

$$\begin{aligned} Y_{l_1}^{m_1}(\theta,\varphi)\, Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\varphi) &= \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} c^l_{l_1,m_1,l_2,m_2} Y_l^{m_1+m_2}(\theta,\varphi) \\ &= (-1)^{(m_1+m_2)} \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} \mathcal{I}^{m_1,m_2,-(m_1+m_2)}_{l_1,l_2,l} Y_l^{m_1+m_2}(\theta,\varphi), \end{aligned} \tag{D.12}$$

where we define the integral $\mathcal{I}^{m_1,m_2,m}_{l_1,l_2,l}$ like in Varshalovich et al. (1988),

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{m_1,m_2,m}_{l_1,l_2,l} &= \int_\Omega Y_{l_1}^{m_1}(\theta,\varphi)\, Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\varphi)\, Y_l^m(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\Omega \\ &= \sqrt{\tfrac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{D.13}$$

with the 3j-Wigner coefficients $(\cdots)$ that are related to the classical Clebsch-Gordan coefficients by

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{l_1-l_2-m}}{\sqrt{2l+1}} C^{l,-m}_{l_1,m_1,l_2,m_2}. \tag{D.14}$$

Then, using the initial definition of spherical harmonics (cf. Eqs. (D.1)–(D.2)), we deduce the expansion for the product of two associated Legendre functions,

$$P_{l_1}^{m_1}(\cos\theta)\, P_{l_2}^{m_2}(\cos\theta) = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} d^l_{l_1,m_1,l_2,m_2} P_l^{m_1+m_2}(\cos\theta), \tag{D.15}$$

where

$$\begin{aligned} d^l_{l_1,m_1,l_2,m_2} &= (-1)^{(m_1+m_2)}(2l+1) \\ &\times \sqrt{\frac{(l_1+m_1)!\,(l_2+m_2)!\,(l-(m_1+m_2))!}{(l_1-m_1)!\,(l_2-m_2)!\,(l+(m_1+m_2))!}} \\ &\times \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & -(m_1+m_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{D.16}$$

The last relevant integral is

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} P_l^m(\mu)\,\mathrm{d}\mu &= \frac{(-1)^l + (-1)^m}{\left(\frac{l-m}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{l+3}{2}\right)} \\ &\times 2^{m-2} m \Gamma\left(\frac{l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(l+m+1)\right), \end{aligned} \tag{D.17}$$

where Γ are the usual gamma functions (Abramowitz & Stegun 1972).

D.2. Application to $C_{l,m}$ coefficients

It is possible to provide a fully analytical expression of $C_{l,m}$ by using Eqs. (D.8), (D.9), (D.16), (D.17). However, it is very cumbersome, and the only interesting tractable expression is obtained in the case when $l = m$, where

$$C_{l,l} = \frac{1}{l\,(l+1)}\left[A_{l,l}^2\left[(\alpha_{l,l+1})^2+(\beta_{l,l+1})^2+1\right]\right. \\ \left. + B_{l,l}^2\left[(\alpha_{l,l-1})^2+(\beta_{l,l-1})^2+1\right]\right] \\ = \frac{3+l}{3+5l+2l^2}. \quad \text{(D.18)}$$

The values of $C_{l,m}$ for the dipolar ($l = 1$) and the quadrupolar ($l = 2$) modes are

$$C_{1,0} = \frac{1}{5}, \quad C_{1,1} = C_{1,-1} = \frac{2}{5}, \quad \text{(D.19)}$$

$$C_{2,0} = \frac{9}{21}, \quad C_{2,1} = C_{2,-1} = \frac{8}{21}, \quad C_{2,2} = C_{2,-2} = \frac{5}{21}. \quad \text{(D.20)}$$

D.3. Application to $D_{l,m}$ coefficients

We have to compute

$$D_{l,m} = \int_\Omega \sin^2\theta |Y_l^m|^2 \mathrm{d}\Omega. \quad \text{(D.21)}$$

Using Eq. (D.4) and the identity

$$\sin^2\theta = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{Y_2^0}{\mathcal{N}_2^0}\right), \quad \text{(D.22)}$$

where $\mathcal{N}_2^0 = 1/2\sqrt{5/\pi}$ is obtained with Eq. (D.2), we obtain

$$D_{l,m} = \frac{2}{3}\left[1 - \frac{(-1)^m}{\mathcal{N}_2^0}\mathcal{I}_{2,l,l}^{0,m,-m}\right], \quad \text{(D.23)}$$

where $\mathcal{I}$ has been defined in Eq. (D.13).

The values of $D_{l,m}$ for the dipolar ($l = 1$) and the quadrupolar ($l = 2$) modes are

$$D_{1,0} = \frac{2}{5}, \quad D_{1,1} = D_{1,-1} = \frac{4}{5}, \quad \text{(D.24)}$$

$$D_{2,0} = \frac{10}{21}, \quad D_{2,1} = D_{2,-1} = \frac{4}{7}, \quad D_{2,2} = D_{2,-2} = \frac{6}{7}. \quad \text{(D.25)}$$

CHAPITRE 8

CONCLUSIONS & PERSPECTIVES

La compréhension des étoiles de type solaire passe par leur caractérisation globale (par l'estimation de leur masse, rayon, âge, etc.) ainsi que par la caractérisation des processus dynamiques dont elles sont le siège depuis la surface jusqu'aux couches les plus profondes. À la suite des chapitres introductifs, ce manuscrit contient donc deux parties, dont chacune vise à contribuer à l'une de ces deux branches de la physique stellaire. Dans la première partie de ce manuscrit, nous nous sommes concentrés sur la reconnaissance et la caractérisation globale des étoiles de type solaire observées par photométrie de haute précision, depuis la séquence principale jusqu'aux géantes rouges évoluées. Dans la seconde partie, nous nous concentrons sur la compréhension théorique de la dynamique et du magnétisme de l'intérieur des étoiles de type solaire évoluées. Nous proposons ici une synthèse des principaux résultats obtenus, et nous apportons nos conclusions aux trois grandes problématiques abordées dans l'introduction.

8.1 Conclusions de nos travaux

Notre premier volet s'articule autour de la problématique de l'analyse en masse des données photométriques en support de l'astérosismologie :

Problématique I : Intelligence artificielle en support de l'astérosismologie

1 Les méthodes classiques de détection et d'analyse des signaux astérosismiques sont très puissantes, mais nécessitent dans la plupart des cas une étude quasi-individuelle des signaux de chacune des étoiles observées, et une vérification manuelle des résultats obtenus : la communauté sismique fait donc face à un besoin d'automatisation des outils de détection et d'analyse sismique pour mener à bien les études scientifiques sur l'immense quantité de données des missions *Kepler*, K2, TESS, et bientôt PLATO.

Par nos études constituant les chapitres 4 et 5, nous contribuons à l'effort de la communauté pour l'automatisation des outils d'analyse des données photométriques. Dans le chapitre 4, nous montrons ainsi le potentiel de notre nouvelle métrique FliPer pour la caractérisation des paramètres globaux des étoiles de type solaire, que nous résumons ici :

FliPer est une mesure de la densité de puissance globale contenue dans les spectres de densité de puissance (PSD) des étoiles, directement corrélée aux propriétés de la convection de surface (Trampedach et al., 2013; Schwarzschild, 1975). Le sigle « FliPer » correspond à l'adaptation de la méthode Flicker par Bastien et al. (2013) pour une mesure de la gravité de surface dans le spectre de densité de Puissance. Différents paramètres

FliPer correspondant à la valeur moyenne de la densité de puissance sur différentes plages fréquentielles sont utilisés.

Cela nous permet de remonter à la gravité de surface ($\log g$), qui est un paramètre clé pour l'estimation des âges stellaires (Mathur et al., 2011c; Kallinger et al., 2014, 2016). Cette nouvelle méthodologie pour l'estimation de $\log g$ est complètement automatisée par l'utilisation d'un algorithme d'intelligence artificielle de Forêts Aléatoires (Breiman, 2001). L'algorithme dénommé FliPer est ainsi entraîné à estimer le $\log g$ des étoiles de type solaire à partir des paramètres FliPer (les valeurs moyennées de la densité de puissance dans la PSD sur différentes plages de fréquence), de la température effective de l'étoile ($T_{\rm eff}$) et de sa luminosité (L). Cet entraînement est réalisé grâce à un échantillon de $\sim 15,000$ étoiles de type solaire observées par *Kepler* entre la séquence principale (MS, fixant la limite d'applicabilité supérieure du FliPer à $\log g \lesssim 4.6$dex) et les phases très lumineuses de la branche des géantes rouges (RGB) et de la branche asymptotique (AGB, fixant la limite inférieure d'applicabilité du FliPer à $\log g \gtrsim 0.1$dex). Ces étoiles ont été caractérisées sismiquement par le pipeline A2Z (Mathur et al., 2010). Ainsi, une estimation précise de la gravité de surface est préalablement connue. Ceci permet l'obtention dans Bugnet et al. (2018) des incertitudes de l'ordre de 0.046 dex sur l'estimation de la gravité de surface des étoiles de type solaire observées par *Kepler*, sans biais significatif sur l'estimation (déviation par rapport aux données sismiques en moyenne de -4.5×10^{-4} dex), avec une précision plus élevée encore pour les géantes rouges sur la RGB et les étoiles de la branche horizontale (RC). De plus,

1. Grâce à l'utilisation des différents paramètres FliPer (complémentés par la température effective et par la magnitude *Kepler*), les étoiles géantes sont distinguées des étoiles jeunes de la MS qui présentent des signaux de rotation dans la PSD, permettant ainsi de s'astreindre de la limitation intrinsèque à la méthodologie du Flicker développée par Bastien et al. (2013) à un stade évolutif donné (Bastien et al., 2016). En regard de la méthodologie du Flicker utilisant les signaux de la convection dans la courbe de lumière pour l'estimation de la gravité de surface des étoiles de type solaire (Bastien et al., 2013, 2016), l'algorithme du FliPer est donc automatisé pour fonctionner sur **une plage d'applicabilité plus étendue**.
2. Par opposition avec la méthodologie précise de Kallinger et al. (2016) qui nécessite un ajustement chronophage du background convectif, le FliPer est très rapide à calculer à partir des PSD, de façon équivalente à la rapidité d'utilisation du Flicker. De plus, **notre métrique FliPer est très peu dépendante de la présence ou non des modes d'oscillation dans la PSD**, par opposition avec la méthode de Kallinger et al. (2016) qui a besoin d'une détection des oscillations pour fonctionner.
3. L'utilisation de l'intelligence artificielle et des paramètres FliPer permet de diminuer de façon conséquente les incertitudes associées à l'estimation de la gravité de surface **($\lesssim 10\%$)** par rapport aux méthodologies reposant sur l'étude de la convection de Bastien et al. (2013) (~ 0.1 dex d'incertitude) et de Pande et al. (2018) ($\sim 0.3 - 0.5$ dex d'incertitude).
4. **Les incertitudes obtenues sur l'estimation de $\log g$ sont ainsi très satisfaisantes, car plus faibles que les incertitudes typiques associées aux mesures classiques** par la photométrie (non astérosismiques, $\sim 90 - 150\%$ Brown et al., 2011a) et par la spectroscopie ($25 - 50\%$ Valenti & Fischer, 2005; Ghezzi et al., 2010). Pour les étoiles de type solaire isolées pour lesquelles l'astérosismologie atteint ses limites (faible rapport signal à bruit, basse résolution fréquentielle, etc.), le FliPer permet ainsi une estimation de $\log g$ avec la plus grande précision.
5. En comparaison avec les performances des pipelines sismiques globaux comme A2Z, **FliPer fonctionne mieux que les méthodes classiques pour des données acquises durant une courte durée d'observation** (faible résolution fréquentielle), **ainsi que pour celles avec un faible rapport signal à bruit.**

Le FliPer peut également être utilisé pour l'estimation du paramètre sismique global $\nu_{\rm max}$. Cette méthode s'ajoute donc aux pipelines d'analyse de données sismiques pour l'estimation de $\log g$ et des paramètres sismiques globaux dans le grand projet de référencement et de caractérisation des géantes rouges observées par *Kepler* (« *Kepler* legacy RG catalog », García et al., *in prep*).

La méthode devrait également fonctionner pour l'analyse des données très bruitées du satellite TESS, en permettant de contraindre la plage fréquentielle où les modes d'oscillation des étoiles sont attendus lorsque les méthodes sismiques ne convergent pas vers une détection significative. Cependant, cela requiert au préalable une bonne calibration du bruit de photon sur chacun des secteurs d'observation de la mission TESS, qui n'a pas encore été réalisée. Nous avons tout de même mené quelques tentatives de caractérisation des étoiles observées, bien que le bruit de photon ne soit pas bien caractérisé (e.g. Gandolfi et al., 2018; Chaplin et al., 2020; Aguirre et al., 2020, les premières pages de ces articles sont ajoutées dans leurs formats publiés à la fin du chapitre 4). Ces quelques courbes de lumière analysées sont soumises aux instabilités du satellite, et le bruit est aujourd'hui mal estimé (fortement dépendant de la magnitude de l'étoile et du secteur d'observation), donc l'analyse par FliPer a seulement permis de contraindre légèrement le $\log g$ ou le $\nu_{\rm max}$. Dans ce cas, l'adaptation complète de la méthode pour les données de la mission TESS est en cours. Elle est rendue complexe par leur très faible rapport signal à bruit et par la courte durée d'observation.

Concernant les donnés de la mission K2 qui présentent des problématiques similaires à celles de TESS, nous avons encadré (co-direction avec R.A. García) Arthur Le Saux pour son stage de M2 au CEA en 2019. Nous avons ainsi commencé la calibration de l'algorithme FliPer sur les donnés de K2 calibrées par EVEREST (Luger et al., 2016). La difficulté de calibration du bruit instrumental campagne par campagne complique l'étude par rapport à celle présentée sur les données de la mission *Kepler*.

Au vu du succès de l'utilisation des paramètres FliPer combinée avec l'intelligence artificielle, nous étendons notre étude à la classification des différents types d'étoiles pulsantes dans le chapitre 5.

Par la mesure de la densité de puissance globale dans les PSD, les paramètres FliPer (combinés dans notre étude avec la luminosité et l'étoile et la mesure BP-RP de *Gaia*) permettent de distinguer les différents stades évolutifs des étoiles de type solaire. Si l'étoile présente des pulsations qui ne sont pas de type solaire, à la fois le background et les amplitudes des oscillations sont différentes. La mesure de la densité de puissance moyenne est donc statistiquement différente pour les oscillateurs de type solaire et pour les autres types de pulsateurs. Nous adaptons alors la méthodologie décrite dans le chapitre 4 pour la classification automatique des étoiles de type solaire parmi les différents types d'étoiles observées à partir de leurs paramètres FliPer.

Nous menons alors une classification binaire des étoiles observées par *Kepler*, visant à détecter les étoiles de type solaire (depuis la MS jusqu'à la AGB) parmi les autres types de pulsateurs. Lors du test des performances de cet algorithme $\text{FliPer}_{\rm Class}$ de nouveau construit à partir d'une Forêt Aléatoire (Breiman, 2001), plus de 99% des étoiles de type solaires sont reconnues. Lorsque l'on distingue les différents types d'étoiles pulsantes qui ne sont pas de type solaire dans une classification multi-classe, ce taux de succès reste supérieur à 99%.

Nous avons tout de même choisi de présenter les résultats des deux types de classification (binaire et multi-classes) car la classification binaire permet d'associer une probabilité d'appartenance aux deux classes pour chacune des étoiles étudiées. La classification multi-classe permet d'associer un indice de confiance sur la classification, mais cet indice ne peut être interprété directement comme une probabilité d'appartenance de l'étoile aux différentes classes possibles.

La classification des différents types de pulsateurs est également réalisée sur des données simulées pour le satellite TESS (étude menée avant que les premières données du satellite ne soient rendues publiques en 2019, Bugnet et al., 2019), avec un taux de succès de la classification des étoiles également excellent (plus de 99% des étoiles de type solaire sont reconnues). La classe la moins bien reconnue contient les étoiles δ-Scuti ($\sim 64\%$ de succès), confondues avec les γ-Dor, du fait de la présence d'étoiles hybrides dans l'échantillon. Les autres types de pulsateurs sont reconnus pour plus de 96% d'entre eux. Avec l'arrivée des données réelles du satellite TESS nous avons pu constater que les simulations des données sous-estiment les instabilités et le bruit instrumental. Un travail supplémentaire de calibration des données est donc nécéssaire avant de pouvoir utiliser la méthode du FliPer. Tout comme pour l'algorithme FliPer dans le chapitre 4, l'entraînement de l'algorithme de classification FliPerClass est ainsi en cours pour les données du satellite TESS (et pour celles de K2, Le Saux et al., *in prep*).

Finalement, nos deux études reposant sur l'utilisation d'intelligence artificielle pour mettre à profit la nouvelle métrique FliPer permettent de participer de façon active et efficace à l'analyse en masse des nombreuses données photométriques. Nos deux études reposent majoritairement sur les données du satellite *Kepler*, et seront étendues pour l'analyse automatique des données des missions TESS et PLATO. Nous apportons ainsi à la communauté deux nouveaux outils qui se placent en amont de la caractérisation individuelle détaillée des étoiles observées.

La première partie de ce manuscrit permet donc de faciliter grandement les premières étapes de caractérisation des étoiles observées reposant entre autre sur la sismologie globale observationnelle. Cette méthode peut également permettre la caractérisation des étoiles de type solaire lorsque les modes d'oscillation ne sont pas détectables (à cause par exemple de l'activité dans les systèmes binaires, Gaulme et al., 2020), ainsi que lorsque la résolution fréquentielle n'est pas suffisante pour permettent une bonne précision sur l'estimation des paramètres globaux. Dans la seconde partie de la thèse, nous nous concentrons sur une étude théorique fine de l'impact de magnétisme sur les fréquences des modes d'oscillation des étoiles de type solaire. Cette étude initiée au chapitre 2 a pour but de proposer des scénarios pour les problématiques **2** *et* **3** *énoncées en introduction que nous rappelons maintenant :*

Problématique II : La compréhension du transport de moment cinétique dans les étoiles de type solaire

2 Nous sommes face à un problème d'ordre de grandeur pour comprendre l'évacuation du moment cinétique interne des étoiles de faible masse depuis la séquence principale jusqu'à la phase de brûlage de l'hélium. Un (ou des) processus physique(s) manque(nt) dans la théorie actuelle du transport de moment cinétique interne des étoiles de faible masse.

Pour comprendre l'évacuation du moment cinétique depuis le cœur des étoiles de type solaire vers la surface, plusieurs mécanismes sont usuellement invoqués. Les processus hydrodynamiques et la dynamo en zone radiative dite de type Tayler-Spruit ne permettent pas d'expliquer les taux de rotation observés au cours de l'évolution des étoiles de type solaire. Le transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité ou par les modes mixtes (e.g. Belkacem et al., 2015b; Pinçon et al., 2017) est l'un des candidats pour expliquer les observations. Nous choisissons de nous focaliser plutôt sur la seconde piste, celle de la présence d'un fort champ magnétique interne. Le magnétisme pourrait en effet geler la rotation différentielle de l'étoile le long des lignes de champ magnétique dans l'intérieur radiatif des étoiles (voir chapitre 2), permettant ainsi d'expliquer la faible rotation différentielle observée dans les SG *(e.g. Deheuvels et al., 2015, Deheuvels et al., accepted), et dans les* RG *(e.g. Mosser et al., 2015; Gehan et al., 2018).*

Dans le chapitre 6 nous prenons en compte les effets de la rotation de l'étoile et d'un hypothétique champ magnétique interne sur les fréquences des modes mixtes des étoiles de type solaire évoluées, permettant d'estimer la perturbation qui en résulte. Nous démontrons que les perturbations magnétiques sur les fréquences des modes mixtes s'ajoutent aux perturbations rotationnelles déjà connues (e.g. Aerts et al., 2010; Goupil et al., 2013). Nous nous concentrons dans une première étape sur le cas où le champ magnétique est axisymétrique et aligné avec l'axe de rotation de l'étoile. Nous étudions cette configuration de champ magnétique en utilisant une topologie stable réaliste des champs fossiles dans les intérieurs radiatifs des étoiles, cette topologie présentant à la fois une composante toroïdale et une composante poloïdale (Braithwaite, 2008; Duez et al., 2010a).

Nous démontrons que la présence d'un tel magnétisme interne a pour effet de briser la symétrie des multiplets rotationnel (nous démontrons que les effets de la rotation au second ordre et les autres sources d'asymétries sont négligeables, ou bien facilement distinguables des asymétries magnétiques, voir l'article Bugnet et al., *soumis* à la fin du chapitre 6). Toutes les composantes des multiplets associés aux modes mixtes affectés par la rotation sont décalées vers les hautes fréquences. Les modes d'ordre azimutal $\pm m$ sont affectés de façon

identiques du fait de la géométrie axisymétrique choisie. L'amplitude de la perturbation varie d'un ordre $|m|$ à l'autre et dépend également du degré ℓ du mode. L'amplitude de l'asymétrie dépend fortement de la nature du mode mixte (puissance dominée par la puissance acoustique ou bien par celle de l'onde de gravité), de l'amplitude du champ considéré, et de l'état évolutif de l'étoile.

L'amplitude des modes mixtes résulte en partie de la puissance des modes de gravité se propageant dans l'intérieur radiatif, et aussi de la puissance des modes acoustiques prenant place plutôt dans les couches externes de l'étoile. Selon la fréquence du mode mixte, l'inertie du mode est attribuée plutôt aux modes acoustiques ($p-m$) ou bien plutôt aux modes de gravité ($g-m$). Puisqu'ils ne sondent pas les mêmes régions de l'étoile, et que le champ magnétique considéré dans notre étude est confiné dans l'intérieur radiatif de l'étoile, les effets du magnétisme sont différents sur les modes $g-m$ et sur les modes $p-m$. Nous mettons alors en évidence dans le chapitre 6 que la perturbation magnétique est directement corrélée avec la fonction de couplage des modes mixtes ζ, tout comme c'est le cas des perturbations associées à la rotation de l'étoile (Goupil et al., 2013).

- Durant la phase des sous-géantes, la majorité des modes sont $p-m$. Nous proposons une expression asymptotique théorique décrivant la perturbation associée au magnétisme sur les modes $p-m$ à hautes fréquences dans le chapitre 7. La perturbation magnétique des fréquences de ces modes à hautes fréquences est proportionnelles à la fréquence non perturbée, et est proportionnelle au rapport de la vitesse d'Alfvén sur la vitesse du son. La perturbation magnétique est donc d'autant plus importante que l'étoile est jeune durant la phase des SG.
- En revanche, le spectre de puissance est peuplé par les modes $g-m$ durant la RGB. Dans ce cas, nous démontrons au chapitre 7 que la perturbation magnétique sur les fréquences ν des modes $g-m$ est en $1/\nu^3$ dans la limite des basses fréquences. Cette perturbation augmente avec l'amplitude du champ magnétique et avec la stratification de l'intérieur radiatif. La perturbation magnétique est donc renforcée lorsque l'étoile évolue sur la RGB.

Plus l'amplitude du champ magnétique interne est grande, plus les effets du magnétisme sur les fréquences des modes mixtes sont importants. En considérant que la résolution fréquentielle des données est la valeur limite minimale au delà de laquelle la signature du champ magnétique peut éventuellement être détectée dans les PSD, l'ordre de grandeur de l'amplitude du champ magnétique minimale pour que la signature magnétique soit détectable est de $\sim$ 1MG pour les étoiles au début de la RGB. Cette valeur critique diminue jusqu'à ~ 0.1MG pour les géantes évoluées, mais reste supérieure à 1MG durant la phase des SG.

La masse et la métallicité de l'étoile jouent un rôle sur la fréquence caractéristique des modes associée à la transition entre une PSD dominée par les modes $p-m$ durant la phase des SG et une PSD dominée par les modes $g-m$ durant la RGB. En conséquence, l'amplitude de la signature magnétique à une fréquence donnée varie d'une masse à l'autre, et d'une métallicité à l'autre. Les étoiles les plus massives et/ou les moins métalliques qui évoluent plus vite présentent des signatures magnétique plus faibles pour une fréquence donnée durant la RGB. Cette tendance est inversée durant la phase des sous-géantes.

Nous démontrons en reprenant les travaux de Mestel & Weiss (1987) que des amplitudes de champ magnétique comprises entre 0.1 et 10MG produisent un aplatissement du profil de rotation interne de l'étoile le long des lignes de champ poloïdales sur des échelles de temps très courtes de l'ordre de l'année. Ce temps caractéristique associé au transport de moment cinétique dans l'intérieur radiatif des étoiles est extrêmement court, ce qui démontre l'efficacité du magnétisme à transporter le moment cinétique. Ainsi, si des multiplets asymétriques associés à une perturbation magnétique des fréquences des modes mixtes dans l'intérieur radiatif sont détectées dans le futur, cela signifie alors que l'amplitude du champ magnétique provoquant ces perturbations est suffisamment grande pour transporter très efficacement le moment cinétique dans l'intérieur radiatif des étoiles de faible masse évoluées. La détection d'éventuelles signatures magnétiques sur les fréquences des modes mixtes observées est donc clé pour déterminer si un fort champ magnétique interne est présent et peut expliquer le faible taux de rotation de l'intérieur radiatif des étoiles de faible masse évoluées.

Nous démontrons ainsi que la recherche du magnétisme interne peut se faire en observant en détail la symétrie des multiplets associés aux modes mixtes perturbés par la rotation de l'étoile. La troisième et dernière problématique de ce manuscrit concerne donc la détermination de la nature et de la topologie du champ magnétique présent dans les intérieurs radiatifs des étoiles de type solaire, et de l'estimation de son amplitude :

Problématique III : Nouvelles contraintes théoriques pour les champs magnétiques internes

3 Le magnétisme interne des étoiles de faible masse est méconnu depuis la séquence principale jusqu'à la RGB. Il peut pourtant être un vecteur efficace de transport de moment cinétique des étoiles, et pourrait être le mécanisme à l'origine des modes dipolaires de faible amplitude. Pour comprendre la dynamique interne des étoiles de type solaire, il est donc nécessaire d'étudier le magnétisme interne tout au long de l'évolution des étoiles de faible masse.

Dans le chapitre 2 nous avons présenté un scénario de suivi du magnétisme dans les étoiles de type solaire qui repose sur la formation de champs fossiles par la relaxation des champs d'origine dynamo dans les intérieurs radiatifs lorsque la convection se retire. L'amplitude maximale des champs fossiles confinés dans les intérieurs radiatifs est également estimée lors de leur formation. Par conservation totale du flux magnétique dans l'intérieur radiatif lorsque l'étoile évolue, l'amplitude maximale du champ magnétique interne à la zone radiative durant les états évolutifs de SG et RG est estimée dans le chapitre 6. Les amplitudes attendues durant ces étapes évolutives tardives de l'évolution varient ainsi entre ~ 0.01 et ~ 10 MG selon l'âge de l'étoile et la loi d'échelle choisie pour estimer l'amplitude du champ dynamo à l'origine du champ fossile (voir chapitre 2, chapitre 3 et les études de Augustson et al., 2019; Astoul et al., 2019). Ces amplitudes sont compatibles avec une éventuelle détection de la signature magnétique sur les fréquences des modes mixtes durant la phase des géantes. Ces amplitudes estimées ne permettent en revanche pas la détection de l'effet du champ magnétique interne sur les fréquences des modes mixtes des sous-géantes.

Nous proposons dans le chapitre 6 une méthodologie adaptée des études de Vrard et al. (2015), Mosser et al. (2015) et Gehan et al. (2018) afin de rechercher efficacement les signatures magnétiques sur les fréquences des modes mixtes. Par la construction de spectres en période corrigée, l'asymétrie des mutliplets devrait être mesurable, permettant de remonter à l'amplitude de la perturbation fréquentielle par le magnétisme interne.

Finalement, nous menons dans le chapitre 7 les développements asymptotiques associés aux termes dominants à basses et à hautes fréquences de la perturbation magnétique sur les fréquences des modes mixtes. Ces termes dominants sont identifiés par analyse JWKB dans le chapitre 6, et exprimés en fonction des paramètres structurels de l'étoile dans le chapitre 7.

- L'expression asymptotique à basse fréquence est adéquate pour l'estimation de la perturbation magnétique sur les modes $g-m$. La formulation obtenue est très similaire à l'expression asymptotique dérivée par Goupil et al. (2013) dans le cas de la perturbation fréquentielle par la rotation de l'étoile. De par la forme de l'expression obtenue, le profil de la composante radiale du champ magnétique le long du $\ll$ buoyancy radius $\gg$ (défini par le rapport du profil de la fréquence de Brunt-Väisälä et de la coordonnée radiale) pourrait alors être inversé à partir d'éventuelles mesures de perturbations magnétiques sur les fréquences des modes mixtes, tout comme le profil de rotation interne est inversé pour les SG et RG (e.g. Goupil et al., 2013; Deheuvels et al., 2014, 2016) à partir des perturbations rotationnelles.
- L'expression asymptotique à hautes fréquences est adéquate pour l'étude des modes $p-m$. Bien que la détection des signatures magnétiques sur les fréquences des modes $p-m$ des SG semble impossible au vu des amplitudes de champ internes attendues, nous dérivons tout de même l'expression asymptotique correspondante. Cette fois-ci, ce sont les composantes horizontales du champ magnétique qui provoquent majoritairement la perturbation fréquentielle. Une inversion d'éventuelles signatures magnétiques sur les modes $p-m$ à hautes fréquences pourrait alors permettre de caractériser le profil des composantes horizontales du champ magnétique le long du chemin acoustique.

L'astérosismologie des modes mixtes pourrait ainsi permettre de sonder pour la première fois la composante radiale des champs magnétiques dans les couches les plus profondes de l'intérieur des étoiles de type solaire. Les amplitudes de champ attendues ne semblent pas suffisantes dans l'enveloppe des étoiles pour qu'une détection de leurs perturbations engendrées sur les fréquences des modes mixtes soient détectables. Cependant, la synergie entre l'astérosismologie des modes $g-m$ pour la caractérisation des champs profonds et la spectropolarimétrie pour la caractérisation des champs de surface semble très prometteuse pour une compréhension globale du magnétisme des géantes rouges.

Nous démontrons ainsi le potentiel de l'astérosismologie pour la compréhension des phénomènes dynamiques internes aux étoiles. Nous proposons à la fois une formulation théorique perturbative ainsi que des estimations numériques à partir de modèles d'évolution stellaire des effets du magnétisme interne sur les fréquences des modes d'oscillation mixtes des étoiles de type solaire évoluées. Nous démontrons que les effets du magnétisme interne sur les fréquences des oscillations pourraient être détectés dans les données photométriques des géantes rouges, et proposons des pistes pour faciliter cette quête. Notre étude pour l'estimation des champs magnétiques internes se place en regard des travaux effectués par Goupil et al. (2013) pour la mesure des taux de rotation internes des étoiles de type solaire, qui ont d'ores et déjà permis l'inversion des taux de rotation au coeur des SG et RG.

8.2 Perspectives : la synergie entre analyse observationnelle et caractérisation théorique pour la compréhension des étoiles de type solaire.

8.2.1 Extension de la métrique FliPer aux données de K2, TESS et PLATO pour la caractérisation globale des étoiles

Nous démontrons ainsi les performances de la méthode FliPer sur les données de la mission *Kepler* pour la caractérisation des étoiles de type solaire. Nous avons pour projet d'étendre cette étude aux étoiles observées par K2 et par TESS, qui sont très mal caractérisées en regard des nombreuses études sur les étoiles de type solaires observées par *Kepler*.

La grande difficulté pour l'adaptation du FliPer (et également de $\text{FliPer}_{\text{Class}}$) à ces données est la caractérisation du bruit instrumental pour la normalisation des paramètres FliPer. Lors du co-encadrement

de Arthur Le Saux, nous avons déjà pu caractériser les bruits instrumentaux des campagnes 2 à 8 de la mission K2 (Le Saux et al., *in prep*). Cela nous permet d'effectuer une première classification des étoiles de ces campagnes (avec une réussite globale de la classification pour $\sim 87.7\%$ des étoiles lors de la phase de test de l'algorithme). La caractérisation par l'estimation de la gravité de surface de ces étoiles sera menée dans une seconde étape à la suite de cette thèse (également dans Le Saux et al., *in prep*).

Les données du satellite TESS sont en effet difficiles à analyser par les méthodes astérosismiques, à cause du faible rapport signal à bruit, de la faible résolution fréquentielle, et des instabilités liées à l'instrument. Nous souhaitons ainsi calibrer les bruits instrumentaux pour chacun des secteurs d'observation selon la magnitude de l'étoile, afin de permettre la classification et la caractérisation des millions d'étoiles observées durant la mission TESS par les méthodes FliPer et FliPer$_{\mathrm{Class}}$. Cela permettrait une grande avancée dans la compréhension des étoiles et également pour la galacto archéologie, puisque les étoiles observées par TESS se répartissent dans la quasi-totalité du ciel par opposition au champ fixe de la mission *Kepler* et au balayage de l'écliptique par K2. Notre méthodologie de classification reposant sur les paramètres FliPer est incluse dans le pipeline global de classification des données de TESS par le « TESS Data for Asteroseismology (T'DA) », (Tkatchenko et al., *in prep*). Les paramètres FliPer y sont couplés avec les paramètres usuels pour la classification des étoiles (voir Armstrong et al. (2016) pour les paramètres stellaires utilisés, et l'article de TESS Data for Asteroseismology collaboration, *in prep*).

Notre méthodologie est également en cours d'implémentation pour faire partie intégrante des algorithmes de la branche « Additionnal Data Product » du pipeline d'analyse de la future mission M3 de l'ESA PLATO représenté sur la figure 8.1.

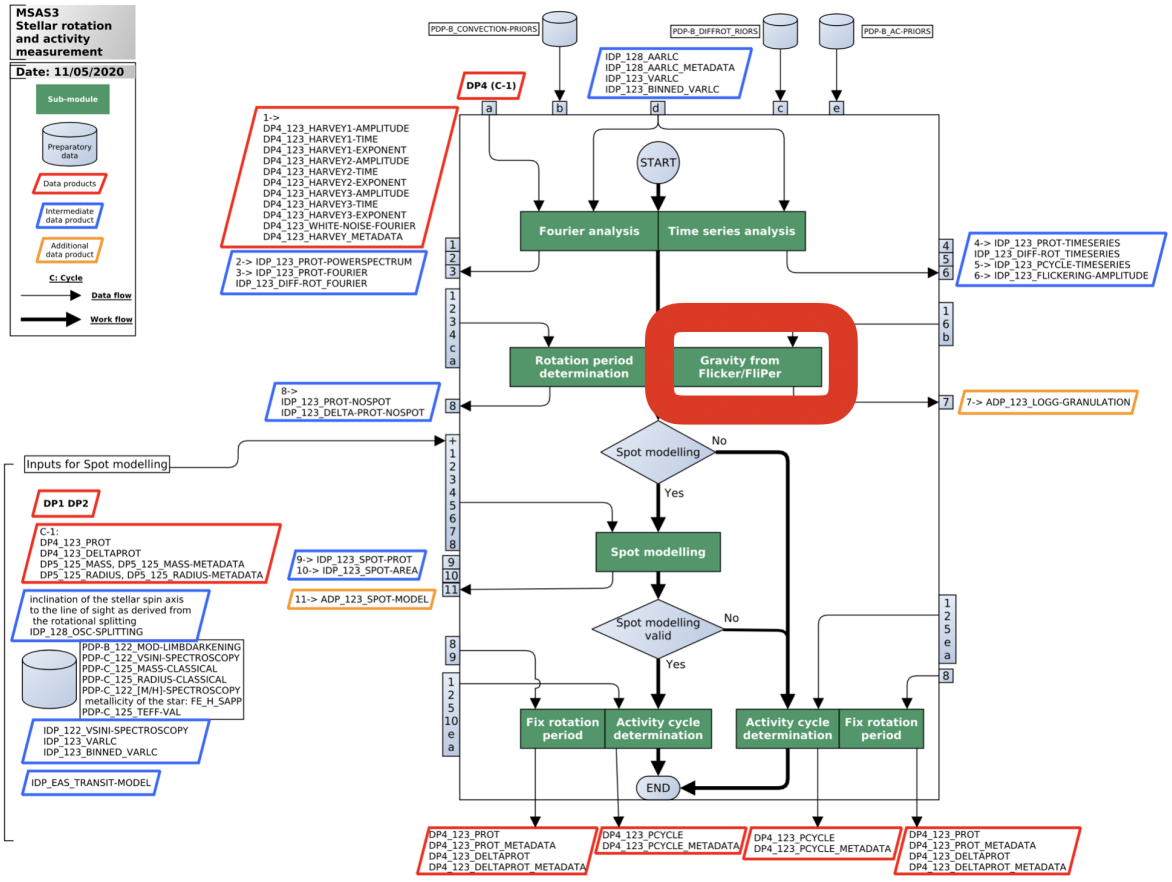


FIGURE 8.1: Représentation de la branche « Stellar rotation and activity measurement » pour la préparation de la mission PLATO, dans lequel notre algorithme FliPer sera implémenté (entouré en rouge sur le diagramme).

8.2.2 Extension de la recherche théorique de la perturbation magnétique sur les fréquences des modes mixtes à différentes topologies de champs

Nous nous sommes concentrés dans ce manuscrit sur les conséquences d'un champ magnétique interne axisymétrique d'origine fossile, dont l'axe est aligné avec l'axe de rotation de l'étoile. Ceci est une forte approximation, car les champs fossiles observés dans les naines blanches (e.g. Braithwaite & Spruit, 2004; Tout et al., 2004; Ferrario & Wickramasinghe, 2005) et dans les étoiles de type spectral OBA tendent plutôt à être inclinés par rapport à l'axe de rotation de l'étoile (e.g. Valyavin et al., 2005; Morel et al., 2014; Wade et al., 2016; Buysschaert et al., 2018). Nous souhaitons donc étendre notre étude sur la recherche des signatures magnétiques fréquentielles aux cas des champs magnétiques fossiles inclinés par rapport à l'axe de rotation de l'étoile (voir panneau de droite de la figure 8.2). Dans ce cadre, les effets de la rotation et du magnétisme sur les fréquences des modes propres ne peuvent plus être combinés linéairement, comme démontré par Goode & Thompson (1992). Nous attendons ainsi une seconde levée de dégénérescence sur les multiplets rotationnels, aboutissant à $(2\ell+1)^2$ composantes au lieu du multiplet asymétrique à $2\ell+1$ composantes obtenu dans le cas axisymétrique (voir par exemple l'étude de Turck-Chièze et al., 2005). Une forêt de pics dans le spectre de densité de puissance dans le cas du champ magnétique interne incliné serait ainsi une seconde signature du magnétisme fossile interne possible sur les fréquences des modes d'oscillation des étoiles.

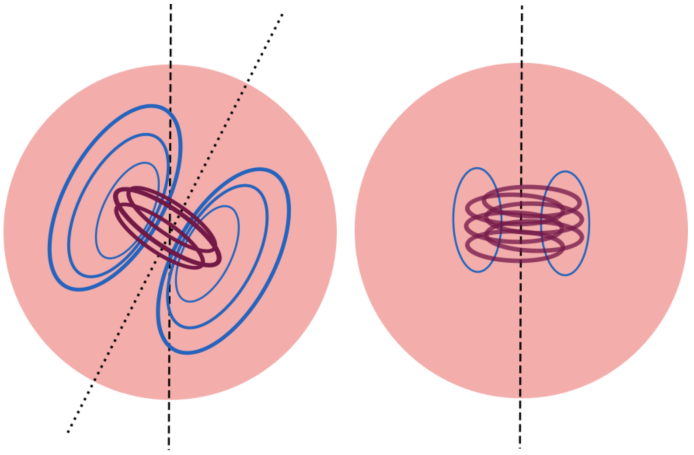


FIGURE 8.2: Représentation schématique des deux configurations de champ magnétique dans les zones radiatives internes que nous prévoyons d'étudier pour la détection du magnétisme interne dans les étoiles de type solaire évoluées. *Gauche :* Champ magnétique mixte poloïdal et toroïdal incliné par rapport à l'axe de rotation de l'étoile pouvant résulter de la relaxation d'un champ dynamo dans la zone radiative. *Droite :* Champ magnétique instable généré par l'instabilité de Tayler (Tayler, 1973) et ensuite modifié par l'action de la rotation différentielle dans la zone radiative (e.g. Fuller et al., 2019).

La seconde partie de cette thèse se concentre ainsi sur le scénario des champs fossiles, résultant de la relaxation de champs d'origine dynamo à la fin des épisodes de convection. Le magnétisme en zone radiative peut également résulter d'instabilités magnétiques comme celles présentées au chapitre 2 (e.g. Tayler, 1973; Spruit, 2002; Fuller et al., 2019). Les champs magnétiques deviennent par exemple instables lorsque leur composante toroïdale augmente sous l'effet de la rotation différentielle de l'étoile (Spruit, 1999). Les couples associés peuvent être très intenses, et jouer un rôle très important dans le transport de moment cinétique interne (voir chapitre 2). Un tel champ instable a récemment été proposé pour expliquer le faible taux de rotation différentielle dans les géantes rouges (Fuller et al., 2019; Eggenberger et al., 2020). Nous souhaitons donc étudier une telle topologie de champ magnétique (voir panneau de droite de la figure 8.2), afin d'évaluer son impact sur les fréquences des modes mixtes, et essayer d'identifier la présence de tels champs en même temps que l'intensité du transport de moment cinétique qu'ils génèrent.

8.2.3 La détection des signatures magnétiques sur les fréquences observées des modes mixtes

Dans le chapitre 6 nous proposons une méthodologie pour la détection des perturbations magnétiques sur les fréquences des modes mixtes, reposant notamment sur les travaux de Gehan et al. (2018). Nous souhaitons mener cette recherche observationnelle de l'asymétrie des mutliplets rotationnel. En effet, la complexité de leur motif fréquentiel pourrait être due aux perturbations par un champ magnétique interne. Une telle détection serait ensuite utilisée pour une éventuelle inversion de l'amplitude du champ magnétique radial interne à la zone radiative de l'étoile, potentiel démontré dans le chapitre 7. Les étoiles présentant des modes mixtes de faible amplitude sont également des cibles intéressantes pour la recherche des perturbations magnétiques, et nous poursuivrons nos travaux sur leur détection par intelligence artificielle et caractérisation fréquentielle.

Finalement, le suivi de la formation et de l'évolution des champs fossiles dans les intérieurs stellaires présenté au chapitre 2 fera également l'objet d'une publication (Astoul, Bugnet, et al., *in prep*). Cette étude sera très précieuse notamment dans le cas d'une détection observationnelle de la signature magnétique est détectée sur les fréquences des oscillations des modes, permettant de remonter à l'origine du champ magnétique détecté.

La synergie entre l'analyse des données astérosismiques et les développements théoriques sera ainsi renforcée dans la suite de nos travaux, permettant de faire valoir l'expérience acquise dans les deux domaines. Nous concluons ainsi ce manuscrit en mettant en avant le potentiel scientifique de la grande quantité de données photométriques (grâce aux missions Kepler/K2, TESS, et bientôt PLATO) pour la recherche de signatures de magnétisme interne aux étoiles de type solaire, et pour la compréhension de la dynamique des étoiles en général.

"Toutes les étoiles rient doucement.
[...] *et aucune grande personne ne comprendra jamais que ça a tellement d'importance !"*
Antoine de Saint-Exupéry

ANNEXE A

CALIBRATION MANUELLE DE L'ALGORITHME FLIPER

TABLE A.1: Valeurs des moyennes correspondant aux diamants blancs de la Fig. 4.8 avec l'écart type associé.

$\log(F_{P,\,0.2})$	$\log g$ (dex)	-1σ (dex)	+1σ (dex)
0.54	4.35	0.06	0.13
0.77	4.23	0.09	0.09
0.91	4.18	0.12	0.06
0.98	4.12	0.15	0.13
1.04	4.07	0.09	0.10
1.08	4.06	0.14	0.10
1.14	4.02	0.13	0.14
1.20	3.95	0.08	0.12

$\log(F_{P,\,0.7})$	$\log g$ (dex)	-1σ (dex)	+1σ (dex)
1.25	3.98	0.12	0.08
1.32	3.92	0.13	0.15
1.37	3.86	0.09	0.11
1.48	3.79	0.12	0.11
1.65	3.57	0.03	0.28
2.09	3.33	0.15	0.02
2.33	3.07	0.15	0.13
2.41	3.01	0.14	0.16
2.46	3.01	0.16	0.13
2.51	2.97	0.18	0.15
2.56	2.92	0.19	0.14
2.61	2.92	0.20	0.13
2.65	2.87	0.19	0.12
2.70	2.83	0.16	0.12
2.73	2.78	0.16	0.13
2.77	2.74	0.15	0.12
2.81	2.72	0.14	0.12
2.84	2.68	0.13	0.12
2.87	2.64	0.10	0.13
2.90	2.63	0.09	0.11
...	...	...	...

$\log(F_{P,\,0.7)}$	$\log g$ (dex)	-1σ (dex)	+1σ (dex)
...	...	...	...
2.93	2.61	0.09	0.09
2.95	2.60	0.09	0.08
2.97	2.58	0.08	0.09
2.98	2.58	0.10	0.09
3.00	2.57	0.08	0.08
3.01	2.55	0.08	0.09
3.03	2.54	0.08	0.08
3.05	2.53	0.07	0.10
3.07	2.50	0.05	0.07
3.09	2.48	0.06	0.08
3.11	2.47	0.04	0.05
3.12	2.46	0.04	0.05
3.14	2.44	0.05	0.04
3.17	2.43	0.04	0.04
3.18	2.42	0.05	0.04
3.20	2.42	0.04	0.03
3.22	2.41	0.05	0.04
3.23	2.40	0.05	0.04
3.25	2.39	0.04	0.03
3.26	2.39	0.04	0.03
3.28	2.38	0.05	0.04
3.29	2.37	0.06	0.04
3.31	2.37	0.05	0.04
3.33	2.35	0.09	0.05
3.35	2.33	0.09	0.05
3.38	2.30	0.09	0.07

$\log(F_{P,\,7})$	$\log g$ (dex)	-1σ (dex)	+1σ (dex)
3.43	2.24	0.12	0.11
3.50	2.19	0.13	0.11
3.62	2.00	0.15	0.10
3.77	1.86	0.11	0.10
3.91	1.72	0.12	0.11
4.07	1.59	0.13	0.14
4.25	1.46	0.12	0.11
4.48	1.28	0.11	0.13
4.66	1.14	0.07	0.10
4.71	1.10	0.04	0.08
4.77	1.09	0.07	0.06
4.83	1.05	0.03	0.11
4.91	1.02	0.08	0.08
5.01	0.96	0.10	0.10
5.14	0.92	0.15	0.13
5.24	0.85	0.08	0.13
5.35	0.74	0.06	0.11
5.48	0.79	0.10	0.01
5.63	0.65	0.04	0.12
...	...	...	...

$\log(F_{P,\,0.7)}$	$\log g$ (dex)	-1σ (dex)	+1σ (dex)
...	...	...	...
5.76	0.63	0.12	0.09
5.90	0.65	0.08	0.05
6.10	0.56	0.10	0.08
6.51	0.38	0.13	0.16

ANNEXE B

TERMES NON-NULS COMPOSANT LE TRAVAIL DE LA FORCE DE LORENTZ

B.0.1 Termes poloidaux

Avec $A = [(rb_\theta)' + b_\mathrm{r}]$:

$$
\begin{aligned}
&- m^2\frac{\xi_\mathrm{h}b_\theta A\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}Y_l^{m\,2} + \frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\theta)'A\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}Y_l^{m\,2}\sin^2\theta - \frac{(r\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r})'A\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}Y_l^m\partial_\theta Y_l^m\sin\theta\cos\theta + \frac{\xi_\mathrm{r}b_\theta A\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}\partial_\theta Y_l^m(Y_l^m\sin^2\theta)' \\
&- \frac{Ab_\mathrm{r}|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}\partial_\theta Y_l^m(\partial_\theta Y_l^m\sin\theta\cos\theta)' + m^2\frac{Ab_\mathrm{r}|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2\sin\theta}\partial_\theta Y_l^m Y_l^m\cos\theta - m^2\frac{(\xi_\mathrm{h}b_\theta)'b_\theta\xi_\mathrm{r}^*}{r}Y_l^{m\,2} + \frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\theta)''b_\theta\xi_\mathrm{r}^*}{r}Y_l^{m\,2}\sin^2\theta \\
&- \frac{(r\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r})''b_\theta\xi_\mathrm{r}^*}{r}Y_l^m\partial_\theta Y_l^m\sin\theta\cos\theta + \frac{b_\theta^2|\xi_\mathrm{r}|^2}{r^2}Y_l^m\sin\theta\left[\frac{(Y_l^m\sin^2\theta)'}{\sin\theta}\right]' - \frac{\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r}b_\theta\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}Y_l^m\sin\theta\left[\frac{(\partial_\theta Y_l^m\sin\theta\cos\theta)'}{\sin\theta}\right]' \\
&+ m^2\frac{\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r}b_\theta\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}Y_l^m\sin\theta\left(Y_l^m\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)' + m^2\frac{(\xi_\mathrm{h}b_\theta)'b_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}^*}{r\sin\theta}\partial_\theta Y_l^m Y_l^m\cos\theta - \frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\theta)''b_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}^*}{r}Y_l^m\partial_\theta Y_l^m\sin\theta\cos\theta \\
&+ \frac{(r\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r})''b_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}^*}{r}(\partial_\theta Y_l^m)^2\cos^2\theta - \frac{\xi_\mathrm{r}b_\mathrm{r}b_\theta\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}\partial_\theta Y_l^m\cos\theta\left[\frac{(Y_l^m\sin^2\theta)'}{\sin\theta}\right]' + \frac{b_\mathrm{r}^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}\partial_\theta Y_l^m\cos\theta\left[\frac{(\partial_\theta Y_l^m\sin\theta\cos\theta)'}{\sin\theta}\right]' \\
&- m^2\frac{b_\mathrm{r}^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}\partial_\theta Y_l^m\cos\theta\left(Y_l^m\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)' + m^2\frac{(r\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r})'b_\theta\xi_\mathrm{h}^*}{r^2\sin\theta}Y_l^m(Y_l^m\cos\theta)' + m^2\frac{b_\theta^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2\sin^2\theta}Y_l^m[\sin\theta(Y_l^m)']' \\
&- m^4\frac{b_\theta^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2\sin^2\theta}Y_l^{m\,2} + m^2\frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\theta)'b_\theta\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}Y_l^{m\,2} - m^2\frac{(r\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r})'b_\theta\xi_\mathrm{h}^*}{r^2\sin\theta}\partial_\theta Y_l^m Y_l^m\cos\theta - m^2\frac{\xi_\mathrm{r}b_\theta b_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}Y_l^m\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}(Y_l^m\sin^2\theta)' \\
&+ m^2\frac{b_\mathrm{r}^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}Y_l^m\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}(\partial_\theta Y_l^m\sin\theta\cos\theta)' - m^4\frac{b_\mathrm{r}^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}Y_l^{m\,2}\frac{\cos^2\theta}{\sin^4\theta} + m^2\frac{(r\xi_\mathrm{h}b_\mathrm{r})''b_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}^*}{r\sin^2\theta}Y_l^{m\,2}\cos^2\theta + m^2\frac{(\xi_\mathrm{h}b_\theta)'b_\mathrm{r}\xi_\mathrm{h}^*}{r\sin\theta}Y_l^m\cos\theta(Y_
\end{aligned}
$$

B.0.2 Termes toroidaux

$$
\begin{aligned}
&2\frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\varphi)'b_\varphi\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}Y_l^m\partial_\theta Y_l^m\sin\theta\cos\theta + 2\frac{b_\varphi^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}\partial_\theta Y_l^m\cos\theta(\partial_\theta Y_l^m\sin\theta)' + 2m^2\frac{b_\varphi^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2\sin\theta}\partial_\theta Y_l^m Y_l^m\cos\theta \\
&+ \frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\varphi)''b_\varphi\xi_\mathrm{r}^*}{r}Y_l^{m\,2}\sin^2\theta + \frac{(\xi_\mathrm{h}b_\varphi)'b_\varphi\xi_\mathrm{r}^*}{r}Y_l^m\sin\theta(\partial_\theta Y_l^m\sin\theta)' + \frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\varphi)'b_\varphi\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}{}_\theta Y_l^m(Y_l^m\sin^2\theta)' \\
&+ \frac{b_\varphi^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}\partial_\theta Y_l^m[\sin\theta(\partial_\theta Y_l^m\sin\theta)']' - m^2\frac{b_\varphi^2|\xi_\mathrm{h}|^2}{r^2}(\partial_\theta Y_l^m)^2 + \frac{(r\xi_\mathrm{r}b_\varphi)'(rb_\varphi)'\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}Y_l^{m\,2}\sin^2\theta \\
&+ \frac{\xi_\mathrm{h}b_\varphi(rb_\varphi)'\xi_\mathrm{r}^*}{r^2}Y_l^m\sin\theta(\partial_\theta Y_l^m\sin\theta)' + m^2\frac{\xi_\mathrm{r}b_\varphi(rb_\varphi)'\xi_\mathrm{h}^*}{r^2}Y_l^{m\,2} - m^2\frac{b_\varphi^2|\xi_\mathrm{r}|^2}{r^2}Y_l^{m\,2}.
\end{aligned}
$$

BIBLIOGRAPHIE

Acevedo-Arreguin, L. A., Garaud, P., & Wood, T. S. 2013, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 434, 720 Cited on pages 14, 47, 58, 88, and 220.

Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J., & Kurtz, D. W. 2010, Asteroseismology, Astronomy and Astrophysics Library (Dordrecht : Springer Netherlands) Cited on pages 2, 4, 5, 6, 62, 63, 64, 66, 83, 100, 146, 148, 208, and 286.

Aerts, C., Decat, P., Peeters, E., et al. 1999, ASTRONOMY AND ASTROPHYSICS, 343, 872 Cited on page 147.

Aerts, C., Mathis, S., & Rogers, T. M. 2019, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 57, 35 Cited on pages 11, 12, and 218.

Agnew, D. C. 2002, International Geophysics, 81, 3 Cited on page 3.

Aguirre, V. S., Lund, M. N., Antia, H. M., et al. 2017, The Astrophysical Journal, 835, 173 Cited on page 11.

Aguirre, V. S., Stello, D., Stokholm, A., et al. 2020, The Astrophysical Journal Letters, 889 Cited on pages 81, 100, and 285.

Aigrain, S., Parviainen, H., & Pope, B. J. 2016, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 459, 2408 Cited on page 177.

Akgün, T., Reisenegger, A., Mastrano, A., & Marchant, P. 2013, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 433, 2445 Cited on page 200.

Alfvén, H. 1937, Zeitschrift für Physik, 107, 579 Cited on page 55.

Alvan, L., Mathis, S., & Decressin, T. 2013, Astronomy and Astrophysics, 553 Cited on page 73.

Amard, L., Palacios, A., Charbonnel, C., Gallet, F., & Bouvier, J. 2016, Astronomy and Astrophysics, 587 Cited on page 54.

Amit, Y. & Geman, D. 1997, Neural Computation, 9, 1545 Cited on page 116.

Anderson, D. L., Miller, W. F., Latham, G. V., et al. 1977, Journal of Geophysical Research, 82, 4524 Cited on page 3.

Andrae, R., Fouesneau, M., Creevey, O., et al. 2018, Astronomy and Astrophysics, 616 Cited on page 157.

Angel, J., Borra, E. F., & Lands. 1981, The Astrophysical Journal, 45, 457 Cited on pages 34, 59, and 200.

Angus, R., Aigrain, S., Foreman-Mackey, D., & McQuillan, A. 2015, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 450, 1787 Cited on page 10.

Angus, R. & Kipping, D. M. 2016, The Astrophysical Journal, 823, L9 Cited on page 217.

Angus, R., Morton, T., Aigrain, S., Foreman-Mackey, D., & Rajpaul, V. 2018, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 474 Cited on page 1.

Angus, R., Morton, T. D., Foreman-Mackey, D., et al. 2019 Cited on page 10.

Antia, H. M. & Basu, S. 1994, Astronomy and Astrophysics Supplement Series, 107 Cited on page 6.

Antia, H. M., Chitre, S. M., & Thompson, M. J. 2000 Cited on page 43.

Arlt, R. & Ruediger, G. 2010, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 412, 107 Cited on page 53.

Arlt, R. & Weiss, N. 2014, Space Science Reviews, 186, 525 Cited on pages 48, 54, and 58.

Armstrong, D. J., Kirk, J., Lam, K. W. F., et al. 2016, MNRAS, 456, 2260 Cited on pages 150, 151, 175, 183, and 290.

Astoul, A., Mathis, S., Baruteau, C., et al. 2019, Astronomy & Astrophysics, 631, A111 Cited on pages 35, 43, 44, and 288.

Augustson, K. C., Brun, A. S., & Toomre, J. 2019, The Astrophysical Journal, 876 Cited on pages 35, 43, 44, 55, and 288.

Aurière, M., Konstantinova-Antova, R., Charbonnel, C., et al. 2014 Cited on page 42.

Aurière, M., Konstantinova-Antova, R., Charbonnel, C., et al. 2015, Astronomy and Astrophysics, 574, 1 Cited on page 269.

Aurière, M., Wade, G. A., Konstantinova-Antova, R., et al. 2009, Astronomy & Astrophysics, 504, 231 Cited on page 42.

Auriere, M., Wade, G. A., Silvester, J., et al. 2007, Astronomy and Astrophysics, 475, 1053 Cited on pages 46 and 52.

Babcock, H. W. 1961, The Astrophysical Journal, 133, 572 Cited on page 41.

Baglin, A., Michel, E., Auvergne, M., & Team, C. 2006, in Proceedings of SOHO 18/GONG 2006/HELAS I, Beyond the spherical Sun (ESA SP-624). Cited on page 8.

Bailey, S. I. & Irving, S. 1902, phae, 6, 2290 Cited on page 148.

Balbus, S. & Hawley, J. 1994, MNRAS, 266 Cited on page 14.

Balbus, S. A. & Hawley, J. F. 1991, The Astrophysical Journal, 376, 214 Cited on page 51.

Baliunas, S. L., Nesme-Ribes, E., Sokoloff, D., & Soon, W. H. 1996, The Astrophysical Journal, 460, 848 Cited on page 42.

Ballot, J., Gizon, L., Samadi, R., et al. 2011, Astronomy and Astrophysics, 530 Cited on page 9.

Balona, L. A. 2013, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 436, 1415 Cited on page 155.

Balona, L. A. 2018, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 479, 183 Cited on page 144.

Balona, L. A. & Dziembowski, W. A. 2011, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 417, 591 Cited on page 155.

Balona, L. A., Guzik, J. A., Uytterhoeven, K., et al. 2011, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 415, 3531 Cited on page 155.

Baraffe, I., Chabrier, G., Barman, T. S., Allard, F., & Hauschildt, P. H. 2003, Astronomy and Astrophysics, 402, 701 Cited on page 100.

Barker, A. J., Jones, C. A., & Tobias, S. M. 2019, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 487, 1777 Cited on pages 13 and 218.

Barnes, G., Charbonneau, P., & MacGregor, K. B. 1999, The Astrophysical Journal, 511, 466 Cited on page 220.

Barnes, S. A. 2003, The Astrophysical Journal, 586, 464 Cited on pages 1, 10, 45, and 107.

Barnes, S. A. 2007, The Astrophysical Journal, 669, 1167 Cited on pages 1 and 10.

Barnes, S. A. 2010, The Astrophysical Journal, 722, 222 Cited on page 45.

Barstow, M. A., Casewell, S. L., Catalan, S., et al. 2014 Cited on page 2.

Basri, G. & Nguyen, H. T. 2018, The Astrophysical Journal, 863, 190 Cited on page 41.

Bass, G. & Borne, K. 2016 Cited on pages 149 and 150.

Bastien, F. A., Stassun, K. G., Basri, G., & Pepper, J. 2013, Nature, 500, 427 Cited on pages 105, 106, 111, 283, and 284.

Bastien, F. A., Stassun, K. G., Basri, G., & Pepper, J. 2016, The Astrophysical Journal, 818, 43 Cited on pages 105, 106, 123, and 284.

Basu. 1997, MNRAS, 288 Cited on page 6.

Batygin, K. & Laughlin, G. 2015, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 112, 4214 Cited on page 1.

Bazot, M., Nielsen, M. B., Mary, D., et al. 2018, Astronomy and Astrophysics, 619 Cited on page 83.

Beaudoin, P., Strugarek, A., & Charbonneau, P. 2018 Cited on page 12.

Beck, P. G., Bedding, T. R., Mosser, B., et al. 2011, Science, 332, 205 Cited on page 9.

Beck, P. G., Montalban, J., Kallinger, T., et al. 2012, Nature, 481, 55 Cited on pages 11 and 218.

Beckers, J. M. 1968, Solar Physics, 5, 309 Cited on page 103.

Bedding, T. R., Mosser, B., Huber, D., et al. 2011, Nature, 471, 608 Cited on pages 9 and 32.

Belkacem, K., Dupret, M. A., Baudin, F., et al. 2012, Astronomy & Astrophysics, 540 Cited on page 78.

Belkacem, K., Dupret, M. A., & Noels, A. 2010, A&A, 510, 6 Cited on page 78.

Belkacem, K., Goupil, M. J., Dupret, M. A., et al. 2011, Astronomy and Astrophysics, 530, 1 Cited on page 102.

Belkacem, K., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2015a, Astronomy & Astrophysics, 579 Cited on pages 13 and 218.

Belkacem, K., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2015b, Astronomy and Astrophysics, 579, 1 Cited on pages 13, 218, and 286.

Benbakoura, M., Gaulme, P., Mckeever, J., et al. 2020 Cited on pages 81 and 101.

Benbakoura, M., Réville, V., Brun, A. S., Le Poncin-Lafitte, C., & Mathis, S. 2019, Astronomy and Astrophysics, 621 Cited on pages 1 and 42.

Benomar, O., Bazot, M., Nielsen, M. B., et al. 2018, Science, 361, 1231 Cited on pages 12 and 83.

Benomar, O., Belkacem, K., Bedding, T. R., et al. 2014, The Astrophysical Journal, 781, L29 Cited on page 210.

Benomar, O., Takata, M., Shibahashi, H., Ceillier, T., & García, R. A. 2015, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 452, 2654 Cited on pages 2 and 12.

Bercovici, D. & Schubert, G. 1987, Icarus, 69, 557 Cited on page 3.

Bernstein, I. B., Frieman, E. A., Kruskal, M. D., & Kulsrud, R. M. 1958, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 244, 17 Cited on page 50.

Blažko, S. 1907, Astronomische Nachrichten, 175, 327 Cited on page 148.

Bloecker, T. & T. 1995, A&A, 297, 727 Cited on page 33.

Blomme, J., Sarro, L. M., O'donovan, F. T., et al. 2011, Mon. Not. R. Astron. Soc, 418, 96 Cited on pages 149 and 150.

Bodenheimer, P., Laughlin, G., & Lin, D. N. C. 2003, The Astrophysical Journal, 592, 555 Cited on page 100.

Bolmont, E. & Mathis, S. 2016, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 126, 275 Cited on page 42.

Bommier, V., Degl'Innocenti, E. L., Leroy, J. L., & Sahal-Bréchot, S. 1994, Solar Physics, 154, 231 Cited on page 40.

Borucki, W. J., Koch, D., Basri, G., et al. 2010, Science, 327, 977 Cited on page 8.

Boström, H. 2007, Calibrating Random Forests, Tech. rep. Cited on pages 154 and 158.

Boström, H. 2008, IEEE Xplore Cited on page 154.

Boström, H. 2012, International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 26 Cited on page 154.

Bouchy, F. & Carrier, F. 2001, Astronomy & Astrophysics, 374, L5 Cited on page 8.

Boury, A. & Gabriel, M. 1971, C&T, 87 Cited on page 6.

Bouvier, J., Forestini, M., & Allain, S. 1997, The angular momentum evolution of low-mass stars, Tech. rep. Cited on page 45.

Bowman, D. M. 2016, Amplitude modulation and energy conservation of pulsation modes in delta Scuti stars, Tech. rep. Cited on pages 145 and 146.

Braithwaite, J. 2006, Astronomy and Astrophysics, 453, 687 Cited on pages 48, 50, 53, and 200.

Braithwaite, J. 2007, Astronomy and Astrophysics, 469, 275 Cited on pages 48, 50, and 200.

Braithwaite, J. 2008, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 386, 1947 Cited on pages 48, 49, 50, 52, 200, and 286.

Braithwaite, J. 2009, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 397, 763 Cited on page 48.

Braithwaite, J. & Cantiello, M. 2013, Mon. Not. R. Astron. Soc, 428, 2789 Cited on page 46.

Braithwaite, J. & Nordlund, A. 2006, Astronomy and Astrophysics, 450, 1077 Cited on pages 48, 49, 50, and 200.

Braithwaite, J. & Spruit, H. C. 2004, Nature, 431, 819 Cited on pages 34, 46, 48, 50, 59, 93, 200, and 291.

Breger, M. 2000, delta Scuti stars, Tech. rep. Cited on page 146.

Breger, M. 2010, in B.V. Kukarkin Centenary Conference : Variable Stars the Galactic Halo and Galaxy Formation Cited on page 148.

Breiman, L. 2001, Machine Learning, 45, 5 Cited on pages 18, 116, 117, 122, 152, 284, and 285.

Breiman, L., Friedman, J., Stone, C. J., & Olsen, R. 1984, Classification And Regression Trees, ed. Taylor & Francis Cited on pages 115 and 119.

Breton, S. N., Bugnet, L., Santos, A. R. G., et al. 2019, in Proceedings of the 2019 SF2A meeting Cited on page 123.

Brett, D. R., West, R. G., & Wheatley, P. J. 2004, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 353, 369 Cited on page 183.

Briquet, M., Neiner, C., Leroy, B., Pápics, P. I., & collaboration, t. M. 2013 Cited on page 93.

Brown, B. P., Browning, M. K., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2010, The Astrophysical Journal, 711, 424 Cited on page 39.

Brown, B. P., Miesch, M. S., Browning, M. K., Brun, A. S., & Toomre, J. 2011a, Astrophysical Journal, 731 Cited on pages 10, 101, and 284.

Brown, T. M., Latham, D. W., Everett, M. E., & Esquerdo, G. A. 2011b, Astronomical Journal, 142 Cited on page 144.

Brown, T. M. & Morrow, C. A. 1987, The Astrophysical Journal, 314, 21 Cited on page 6.

Browning, M. K., Miesch, M. S., Brun, A. S., & Toomre, J. 2006, The Astrophysical Journal, 648, L157 Cited on page 41.

Brun, A. S. & Browning, M. K. 2017, Living Reviews in Solar Physics, 14, 1 Cited on page 36.

Brun, A. S., Browning, M. K., & Toomre, J. 2006, The Astrophysical Journal, 629, 461 Cited on page 14.

Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2004, The Astrophysical Journal, 614, 1073 Cited on page 53.

Brun, A. S., Strugarek, A., Varela, J., et al. 2017, The Astrophysical Journal, 836, 192 Cited on page 53.

Bugnet, L., García, R. A., Davies, G. R., et al. 2018, Astronomy and Astrophysics, 620, 1 Cited on pages 17, 18, 81, 182, and 284.

Bugnet, L., García, R. A., Mathur, S., et al. 2019, Astronomy and Astrophysics, 624, 1 Cited on pages 18, 81, 179, 183, and 285.

Buldgen, G., Salmon, S., & Noels, A. 2019, Frontiers in Astronomy and Space Sciences, 6, 42 Cited on page 6.

Buysschaert, B., Aerts, C., Bowman, D. M., et al. 2018, Astronomy & Astrophysics, 616 Cited on pages 93 and 291.

Buysschaert, B., Neiner, C., Briquet, M., & Aerts, C. 2017, Astronomy & Astrophysics, 605 Cited on page 93.

Campbell, W. W. & Wright, W. H. 1900, The Astrophysical Journal, 12, 254 Cited on pages 4 and 146.

Cantiello, M., Fuller, J., & Bildsten, L. 2016, The Astrophysical Journal, 824, 14 Cited on pages 46, 94, 206, and 223.

Cantiello, M., Mankovich, C., Bildsten, L., Christensen-Dalsgaard, J., & Paxton, B. 2014, Astrophysical Journal, 788, 1 Cited on pages 13, 51, and 53.

Carlberg, J. K., Majewski, S. R., & Arras, P. 2009, The Astrophysical Journal, 700, 832 Cited on page 42.

Carlberg, J. K., Majewski, S. R., Patterson, R. J., et al. 2011, Astrophysical Journal, 732, 1 Cited on page 42.

Cattaneo, F., Lenz, D., & Weiss, N. 2001, The Astrophysical Journal, 563, L91 Cited on page 103.

Ceillier, T., Eggenberger, P., García, R. A., & Mathis, S. 2012, Astronomische Nachrichten, 333, 971 Cited on pages 12 and 13.

Ceillier, T., Eggenberger, P., García, R. A., & Mathis, S. 2013, Astronomy and Astrophysics, 555, 1 Cited on pages 12, 13, and 51.

Ceillier, T., Tayar, J., Mathur, S., et al. 2017, Astronomy and Astrophysics, 605, 1 Cited on pages 2, 42, 82, 107, and 217.

Ceillier, T., van Saders, J., García, R. A., et al. 2016, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 456, 119 Cited on pages 82 and 149.

Chandrasekhar, S. 1960, Proceedings of the National Academy of Sciences, 46, 253 Cited on page 51.

Chaplin, W. J., Basu, S., Huber, D., et al. 2014, The Astrophysical Journal Supplement Series, 210, 1 Cited on pages 144 and 155.

Chaplin, W. J., Elsworth, Y., Howe, R., et al. 1996, Solar Physics, 168, 1 Cited on page 6.

Chaplin, W. J., Kjeldsen, H., Basu, S., et al. 2011, 332, 213 Cited on page 81.

Chaplin, W. J. & Miglio, A. 2013, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 51, 353 Cited on page 8.

Chaplin, W. J., Serenelli, A. M., Miglio, A., et al. 2020 Cited on pages 1, 102, and 285.

Charbonneau, D., Brown, T. M., Latham, D. W., & Mayor, M. 2000, The Astrophysical Journal, 529, L45 Cited on page 101.

Charbonneau, P. 2005, Dynamo Models of the Solar Cycle Living Reviews in Solar Physics, Tech. rep. Cited on page 41.

Charbonneau, P. & MacGregor, K. B. 1992, The Astrophysical Journal, 387, 639 Cited on page 47.

Charbonneau, P. & MacGregor, K. B. 1993, in Inside the stars, IAU Colloquium 137 Cited on page 218.

Charbonneau, P. & MacGregor, K. B. 2001, The Astrophysical Journal, 559, 1094 Cited on page 47.

Charbonneau, P. & Smolarkiewicz, P. K. 2013, Science, 340, 42 Cited on pages 36 and 43.

Charbonnel, C., Decressin, T., Lagarde, N., et al. 2017 Cited on page 269.

Charpinet, S., Fontaine, G., & Brassard, P. 2009, Nature, 461, 501 Cited on page 12.

Charpinet, S., Fontaine, G., Brassard, P., et al. 1997, The Astrophysical Journal, 483, L123 Cited on page 148.

Charpinet, S., Fontaine, G., Brassard, P., & Dorman, B. 2000, The Astrophysical Journal Supplement Series, 131, 223 Cited on page 148.

Charpinet, S., Fontaine, G., Brassard, P., & Dorman, B. 2002, The Astrophysical Journal Supplement Series, 139, 487 Cited on page 148.

Chen, T. & Guestrin, C. 2016, in ACM Cited on page 150.

Christensen-Dalsgaard, J. 1984, What Will Asteroseismology Teach us, Tech. rep. Cited on page 7.

Christensen-Dalsgaard, J. 2001, Stellar evolution (IOP Publishing Ltd), E1879 Cited on page 19.

Christensen-Dalsgaard, J. 2002, Helioseismology, Tech. Rep. 4 Cited on page 6.

Christensen-Dalsgaard, J. 2004, Solar Physics, 220, 137 Cited on page 145.

Christensen-Dalsgaard, J. 2012, in Proceedings of the 123th Symposium Cited on page 6.

Christensen-Dalsgaard, J. & Berthomieu, G. 1991, sia, 401 Cited on page 83.

Christensen-Dalsgaard, J. & Däppen, W. 1992, The Astronomy and Astrophysics Review, 4, 267 Cited on page 72.

Christensen-Dalsgaard, J., Gough, D. O., & Thompson, M. J. 1991, The Astrophysical Journal, 378, 413 Cited on page 6.

Christensen-Dalsgaard, J., Monteiro, M. J., & Thompson, M. J. 1995, MNRAS, 276 Cited on page 5.

Claverie, A., Isaak, G. R., Mcleod, C. P., Raay, H. B. V. D., & Cortes, T. R. 1979, 282, 6 Cited on page 6.

Colacevich, A. 1935, Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 47, 231 Cited on page 146.

Corsaro, E., Mathur, S., Garciá, R. A., et al. 2017, Astronomy and Astrophysics, 605 Cited on page 105.

Corsaro, E., Stello, D., Huber, D., et al. 2012, Astrophysical Journal, 757 Cited on page 33.

Córsico, A. H., Althaus, L. G., Bertolami, M. M. M., & Kepler, S. O. 2019, Astronomy and Astrophysics Review, 27 Cited on page 149.

Couvidat, S., Garca, R. A., Turck-Chize, S., et al. 2003, The Astrophysical Journal, 597, L77 Cited on pages 6 and 83.

Cowling, T. G. 1945, MNRAS, 38, 105 Cited on page 46.

Cowling, T. G. & Lindsay, R. B. 1957, Physics Today, 10, 40 Cited on page 47.

Cowling, T. G. & Phil, D. 1941, MNRAS, 101, 367C Cited on page 63.

Creevey, O. L., Metcalfe, T. S., Schultheis, M., et al. 2017, Astronomy and Astrophysics, 601, 1 Cited on page 102.

Creevey, O. L., Thévenin, F., Basu, S., et al. 2013, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 431, 2419 Cited on page 102.

Cunha, M. S. 2002, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 333, 47 Cited on page 146.

Cunha, M. S., Alentiev, D., Brandão, I. M., & Perraut, K. 2013, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 436 Cited on page 146.

Davies, G. R., Lund, M. N., Miglio, A., et al. 2017, Astronomy and Astrophysics, 598, 2 Cited on page 144.

Dawes, W. 1864, MNRAS, 24 Cited on page 103.

De Cat, P. & Aerts, C. 2002, Astronomy and Astrophysics, 393, 965 Cited on page 147.

de Medeiros, J. R., Da Rocha, C., & Mayor, M. 1996, A&A, 314, 499 Cited on page 42.

De Ridder, J., Barban, C., Baudin, F., et al. 2009, Nature, 459, 398 Cited on page 9.

Debosscher, J., Sarro, L. M., Aerts, C., et al. 2007, Astronomy and Astrophysics, 475, 1159 Cited on page 149.

Decressin, T., Mathis, S., Palacios, A., et al. 2009, Astronomy & Astrophysics, 495, 271 Cited on page 54.

Deheuvels, S., Ballot, J., Beck, P. G., et al. 2015, Astronomy and Astrophysics, 580, 1 Cited on pages 2, 13, 84, 269, and 286.

Deheuvels, S., Brandão, I., Silva Aguirre, V., et al. 2016, Astronomy and Astrophysics, 589 Cited on pages 11, 269, and 289.

Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M. J., et al. 2014, Astronomy and Astrophysics, 564 Cited on pages 11, 13, 84, 88, 201, 218, and 289.

Deheuvels, S., García, R. A., Chaplin, W. J., et al. 2012, Astrophysical Journal, 756 Cited on pages 11, 77, 84, 88, 211, 218, and 261.

Deheuvels, S., Ouazzani, R. M., & Basu, S. 2017, Astronomy and Astrophysics, 605 Cited on pages 209 and 211.

Deubner, F.-L. & Gough, D. 1984, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 22, 593 Cited on page 69.

Di Mauro, M. P. 2016, in Proceedings of Science, Vol. 2016-May Cited on page 6.

Di Mauro, M. P., Ventura, R., Cardini, D., et al. 2016, The Astrophysical Journal, 817, 65 Cited on page 13.

Dikpati, M. & Gilman, P. A. 1999, The Astrophysical Journal, 512, 417 Cited on page 41.

Dikpati, M. & Gilman, P. A. 2001, The Astrophysical Journal, 559, 428 Cited on page 40.

Dikpati, M., Gilman, P. A., & MacGregor, K. B. 2006, The Astrophysical Journal, 638, 564 Cited on page 47.

Djorgovski, S. G., Mahabal, A., Drake, A., Graham, M., & Donalek, C. 2013, Sky Surveys, Tech. rep. Cited on page 144.

Do Cao, O. & Brun, A. S. 2011, Astronomische Nachrichten, 332, 907 Cited on page 39.

Dogel', V. A. 1990, Soviet Physics - Uspekhi, 33, 392 Cited on page 103.

Domingo, V., Fleck, B., & Poland, A. I. 1995, Solar Physics, 162, 1 Cited on page 6.

Donati, J. F., Howarth, I. D., Jardine, M. M., et al. 2006, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 370, 629 Cited on page 42.

Drury, J. A., Kuehn, C. A., Bellamy, B. R., Stello, D., & Bedding, T. R. 2015, EPJWC, 101, 06024 Cited on page 155.

Duez, V. 2011, Astronomische Nachrichten, 332, 983 Cited on pages 48 and 50.

Duez, V., Braithwaite, J., & Mathis, S. 2010a, Astrophysical Journal Letters, 724, 34 Cited on pages 48, 49, 200, 207, and 286.

Duez, V. & Mathis, S. 2010, Astronomy and Astrophysics, 517, 1 Cited on pages 46, 48, 50, 52, 93, 94, and 200.

Duez, V., Mathis, S., & Turck-Chièze, S. 2010b, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 402, 271 Cited on pages 35 and 50.

Dupret, M. A., Belkacem, K., Samadi, R., et al. 2009, Astronomy and Astrophysics, 506, 57 Cited on pages 78 and 211.

Duvall, T. L., Dziembowski, W. A., Goode, P. R., et al. 1984, Nature, 310, 22 Cited on page 8.

Dziembowski, W. A. & Pamyatnykh, A. A. 1993, Mon. Not. R. Astron. Soc, 262, 204 Cited on pages 146 and 147.

Dziewonski, A. M. & Anderson, D. L. 1981, Preliminary reference Earth modeL Phys. Earth Planet. Inter, 25, 297 Cited on page 3.

Eddington, A. S. 1924, Nature, 113, 786 Cited on page 7.

Egeland, R., Soon, W., Baliunas, S., et al. 2016, 1 Cited on page 41.

Eggenberger, P., Buldgen, G., & Salmon, S. J. A. J. 2019a, Astronomy & Astrophysics, 626, L1 Cited on pages 12, 13, and 53.

Eggenberger, P., Deheuvels, S., Miglio, A., et al. 2019b, Astronomy & Astrophysics, 621, A66 Cited on pages 12, 14, and 53.

Eggenberger, P., Den Hartogh, J. W., Buldgen, G., et al. 2020, Astronomy & Astrophysics, 631 Cited on pages 14, 53, 90, and 291.

Eggenberger, P., Haemmerlé, L., Meynet, G., & Maeder, A. 2012a, Astronomy and Astrophysics, 539, 1 Cited on pages 12 and 13.

Eggenberger, P., Hartogh, J. W. d., Buldgen, G., et al. 2019c, Astronomy & Astrophysics, 631 Cited on page 14.

Eggenberger, P., Lagarde, N., Miglio, A., et al. 2017, Astronomy and Astrophysics, 599, 1 Cited on page 11.

Eggenberger, P., Maeder, A., & Meynet, G. 2005, Astronomy and Astrophysics, 440, 9 Cited on pages 35 and 53.

Eggenberger, P., Montalbán, J., & Miglio, A. 2012b Cited on page 51.

Emeriau-Viard, C. & Brun, A. S. 2017, The Astrophysical Journal, 846 Cited on pages 43, 48, 54, and 58.

Erdélyi, A. 1956, Asymptotic Expansions, courier co edn. Cited on pages 65 and 266.

Fan, Y. 2004, Living Reviews in Solar Physics, 1, 1 Cited on page 41.

Fath, E. A. 1935, Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 47, 232 Cited on page 146.

Featherstone, N. A., Browning, M. K., Brun, A. S., & Toomre, J. 2009, Astrophysical Journal, 705, 1000 Cited on page 45.

Ferrario, L., Melatos, A., & Zrake, J. 2015, Space Science Reviews, 191, 77 Cited on page 47.

Ferrario, L. & Wickramasinghe, D. T. 2005, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 356, 615 Cited on pages 14 and 291.

Ferrario, L. & Wickramasinghe, D. T. 2007, in 15th European Workshop on White Dwarfs, ASP conference Series, Vol. 372 Cited on page 14.

Ferraro, V. C. A. 1937, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 97, 458 Cited on pages 52, 88, 218, 219, and 220.

Ferrière, K. 2015, in 13th Annual Internationnal Astrophysics Conference : Voyager, IBEX and the Interstellar Medium Cited on page 55.

Flowers, E. & Ruderman, M. A. 1977, The Astrophysical Journal, 215, 302 Cited on page 48.

Folsom, C. P., Bouvier, J., Petit, P., et al. 2018, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 474, 4956 Cited on page 42.

Folsom, C. P., Petit, P., Bouvier, J., et al. 2016, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 457, 580 Cited on pages 42 and 43.

Fontaine, G., Brassard, P., Charpinet, S., et al. 2003, The Astrophysical Journal, 597, 518 Cited on page 148.

Fossat, E. 1991, Solar Physics, 133, 1 Cited on page 6.

Fossat, E., Boumier, P., Corbard, T., et al. 2017, Astronomy and Astrophysics, 604 Cited on pages 12, 14, 53, 93, and 198.

Frasca, A., Molenda-Zakowicz, J., De Cat, P., et al. 2016, Astronomy and Astrophysics, 594, 1 Cited on page 123.

Freeman, K. & Bland-Hawthorn, J. 2002, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 40, 487 Cited on page 1.

Freytag, B., Holweger, H., Steffen, M., & Ludwig, H. G. 1997, in Science with the VLT Interferometer : proceedings of the ESO workshop held at Garching, Germany, 18-21 June 1996 (Springer), 316 Cited on page 104.

Friedman, J. H. 2001, The Annals of Statistics, 29, 1189 Cited on page 150.

Friedman, J. H. 2002, Computational Statistics and Data Analysis, 38, 367 Cited on page 150.

Fröhlich, C., Romero, J., Roth, H., et al. 1995, Solar Physics, 162, 101 Cited on page 6.

Fröhlich, H. E., Frasca, A., Catanzaro, G., et al. 2012, Astronomy and Astrophysics, 543, 1 Cited on page 41.

Froman, N. & Froman, P. O. 2005, Physical problems solved by the phase-integral method, 228 Cited on pages 65 and 71.

Fromang, S., Balbus, S. A., Terquem, C., & De Villiers, J.-P. 2004, The Astrophysical Journal, 616, 364 Cited on page 51.

Fuhrmann, K. 2004, Astronomische Nachrichten, 325, 3 Cited on page 100.

Fuller, J., Cantiello, M., Stello, D., Garcia, R. A., & Bildsten, L. 2015, Science, 350, 423 Cited on pages 13, 14, 75, 88, 90, 91, 92, 206, 222, 223, 224, 225, and 232.

Fuller, J., Lecoanet, D., Cantiello, M., & Brown, B. 2014, Astrophysical Journal, 796 Cited on pages 3 and 13.

Fuller, J., Piro, A. L., & Jermyn, A. S. 2019, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 485, 3661 Cited on pages 12, 14, 35, 53, 59, 90, 198, and 291.

Gabriel, A. H., Grec, G., Charra, J., et al. 1995, Solar Physics, 162, 61 Cited on page 6.

Gaia, C., A Brown, A. G., Vallenari, A., et al. 2016, Astronomische Nachrichten, 337, 944 Cited on page 2.

Gaia Collaboration, Brown, A. G. A., Vallenari, A., et al. 2018, Astronomy & Astrophysics, 616 Cited on pages 16 and 101.

Gallet, F. & Bouvier, J. 2013, Astronomy and Astrophysics, 556 Cited on page 45.

Gallet, F. & Bouvier, J. 2015, Astronomy & Astrophysics, 577 Cited on page 45.

Gandolfi, D., Livingston, J. H., Fridlund, M., et al. 2018, Astronomy and Astrophysics Letter to the editor, 10, 1 Cited on pages 2, 11, 81, 123, and 285.

Garaud, P. 1999, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 304, 583 Cited on page 47.

Garaud, P. & Garaud, J. D. 2008, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 391, 1239 Cited on page 220.

García, R. A. 2015, EAS Publications Series, 73-74, 193 Cited on page 8.

García, R. A. & Ballot, J. 2019 Cited on page 81.

García, R. A., Ceillier, T., Salabert, D., et al. 2014a, Astronomy and Astrophysics, 572, 1 Cited on pages 2, 41, 82, 107, 217, and 218.

García, R. A., Hekker, S., Stello, D., et al. 2011a, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society : Letters, 414, 6 Cited on pages 109 and 160.

García, R. A., Mathur, S., Pires, S., et al. 2014b, Astronomy and Astrophysics, 568, 1 Cited on pages 10, 88, 89, 154, 198, and 225.

García, R. A., Mathur, S., Salabert, D., et al. 2010, Science, 329, 1032 Cited on pages 9 and 42.

García, R. A., Pérez Hernández, F., Benomar, O., et al. 2014c, Astronomy and Astrophysics, 563, 1 Cited on page 14.

García, R. A., Régulo, C., Samadi, R., et al. 2009, Astronomy and Astrophysics, 506, 41 Cited on page 9.

García, R. A., Salabert, D., Ballot, J., et al. 2011b, Journal of Physics : Conference Series, 271 Cited on page 154.

García, R. A., Turck-Chièze, S., Jiménez-Reyes, S., et al. 2007, Science, 316, 1591 Cited on pages 6, 12, 14, 53, 83, 93, and 198.

García Pérez, A. E., Prieto, C. A., Holtzman, J. A., et al. 2016, The Astronomical Journal, 151, 144 Cited on page 123.

Gaulme, P., Jackiewicz, J., Appourchaux, T., & Mosser, B. 2014, Astrophysical Journal, 785 Cited on page 3.

Gaulme, P., Jackiewicz, J., Spada, F., et al. 2020, Astronomy & Astrophysics Cited on page 286.

Gaulme, P., Rowe, J. F., Bedding, T. R., et al. 2016, The Astrophysical Journal, 833, L13 Cited on page 81.

Gaulme, P., Schmider, F. X., Gay, J., Guillot, T., & Jacob, C. 2011, Astronomy and Astrophysics, 531, 1 Cited on page 3.

Gautschy, A. 1993, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 265, 340 Cited on page 146.

Ge, J., van Eyken, J., Mahadevan, S., et al. 2006, The Astrophysical Journal, 648, 683 Cited on page 43.

Gehan, C., Mosser, B., Michel, E., Samadi, R., & Kallinger, T. 2018, Astronomy and Astrophysics, 616, 1 Cited on pages 11, 84, 85, 86, 88, 201, 208, 211, 212, 213, 214, 218, 232, 286, 288, and 292.

Genuer, R. & Poggi, J.-M. 2017, PhD thesis Cited on page 115.

Genuer, R., Poggi, J.-M., & Tuleau, C. 2008, PhD thesis Cited on page 116.

Ghezzi, L., Cunha, K., Smith, V. V., et al. 2010, ApJ, 720, 1290 Cited on pages 10 and 284.

Giardini, D., Lognonné, P., Banerdt, W., et al. 2020, Nature Geoscience, in press, 205 Cited on page 3.

Gilliland, R. L., Chaplin, W. J., Dunham, E. W., et al. 2011, Astrophysical Journal, Supplement Series, 197 Cited on page 118.

Gillon, M., Triaud, A. H., Demory, B. O., et al. 2017, Nature, 542, 456 Cited on page 1.

Gilman, P. A. & Fox, P. A. 1997, The Astrophysical Journal, 484, 439 Cited on page 41.

Girardi, L., Bressan, A., Bertelli, G., & Chiosi, C. 2000, Astronomy and Astrophysics Supplement Series, 141, 371 Cited on page 101.

Gizon, L., Ballot, J., Michel, E., et al. 2013, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 110, 13267 Cited on page 9.

Gizon, L. & Birch, A. C. 2005, Living Reviews in Solar Physics, 2, 6 Cited on page 5.

Gizon, L., Birch, A. C., & Spruit, H. C. 2010, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 48, 289 Cited on page 5.

Gizon, L. & Solanki, S. K. 2003, The Astrophysical Journal, 589, 1009 Cited on page 82.

Gondoin, P. 2012, A&A, 546, 117 Cited on pages 9 and 42.

Gondoin, P., Gandolfi, D., Fridlund, M., et al. 2012 Cited on page 9.

Goode, P. R. & Thompson, M. J. 1992, The Astrophysical Journal, 395, 307 Cited on pages 88, 92, 93, 198, and 291.

Goodricke, J. & John. 1784, RSPT, 74, 287 Cited on page 4.

Gough, D. 1986, Book-Review - Seismology of the Sun and the Distant Stars - NASA/ADS, sky and te edn., Vol. 72, 479 Cited on page 149.

Gough, D. O. 1993, in 47. session de l'Ecole d'Eté de Physique Théorique : Astrophysical fluid dynamics - Les Houches, 399–560 Cited on pages 69, 79, and 218.

Gough, D. O. & McIntyre, M. E. 1998, Nature, 394, 755 Cited on pages 47, 88, and 220.

Gough, D. O. & Thompson, M. J. 1990, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 242, 25 Cited on pages 14, 43, 88, 92, 93, and 198.

Goupil, M. J., Mosser, B., Marques, J. P., et al. 2013, Astronomy and Astrophysics, 549 Cited on pages 77, 83, 84, 87, 199, 201, 207, 208, 209, 261, 265, 267, 268, 286, 287, and 289.

Grad, H. 1958, in HDP, Vol. 3, 205–294 Cited on page 50.

Green, E. M., Fontaine, G., Reed, M. D., et al. 2003, The Astrophysical Journal, 583, L31 Cited on page 148.

Guillot, T. 2005, Annual Review of Earth and Planetary Sciences, 33, 493 Cited on page 100.

Guillot, T. & Showman, A. P. 2002, Astronomy and Astrophysics, 385, 156 Cited on page 100.

Haas, M. R., Batalha, N. M., Bryson, S. T., et al. 2010, Astrophysical Journal Letters, 713, 1 Cited on page 109.

Hall, J. C. 2005, Stellar chromospheric activity Cited on page 41.

Hart, A. B. 1954, MNRAS, 114 Cited on page 103.

Harvey, J. 1985, in ESA Workshop on Future Mission in SOlar, Heliospheric & Space Plasma Physics Cited on page 103.

Hasan, S. S., Zahn, J. P., & Christensen-Dalsgaard, J. 2005, Astronomy and Astrophysics, 444, 29 Cited on pages 208 and 264.

Hathaway, D. H. 2010, Living Reviews in Solar Physics, 7, 1 Cited on page 40.

Hawley, J. F., Gammie, C. F., & Balbus, S. A. 1996, The Astrophysical Journal, 464, 690 Cited on page 51.

Heger, A., Woosley, S. E., & Spruit, H. C. 2005, The Astrophysical Journal, 626, 350 Cited on pages 35 and 53.

Hekker, S. & Christensen-Dalsgaard, J. 2017, giant star seismology, Tech. rep. Cited on page 262.

Hekker, S., Elsworth, Y., Basu, S., & Bellinger, E. 2017, in EPJ Web of Conferences, Vol. 160 Cited on page 29.

Hekker, S., Elsworth, Y., Mosser, B., et al. 2013, Astronomy & Astrophysics, 556 Cited on page 102.

Henry, G. W., Marcy, G. W., Butler, R. P., & Vogt, S. S. 2000, The Astrophysical Journal, 529, L41 Cited on page 101.

Hermes, J. J., Gänsicke, B. T., Kawaler, S. D., et al. 2017, The Astrophysical Journal Supplement Series, 232, 23 Cited on pages 12, 13, and 14.

Herschel, W. & William. 1801, RSPT, 91, 265 Cited on page 103.

Hill, F., Fischer, G., Grier, J., et al. 1994, Solar Physics, 152, 321 Cited on page 6.

Hoffleit. 1997, History of the Discovery of Mira Stars - NASA/ADS Cited on page 4.

Holdsworth, D. L., Smalley, B., Kurtz, D. W., et al. 2014 Cited on page 146.

Hon, M., Stello, D., García, R. A., et al. 2019, MNRAS, 485, 5616 Cited on page 151.

Hon, M., Stello, D., & Yu, J. 2018a, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 476, 3233 Cited on pages 144, 183, and 226.

Hon, M., Stello, D., & Zinn, J. C. 2018b, The Astrophysical Journal, 859, 64 Cited on pages 151 and 226.

Howell, S. B., Sobeck, C., Haas, M., et al. 2014, Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 126, 398 Cited on page 9.

Huber, D. 2017, Synergies between Asteroseismology and Exoplanetary Science, Tech. rep. Cited on page 11.

Huber, D., Aguirre, V. S., Matthews, J. M., et al. 2014, The Astrophysical Journal Supplement Series, 211 Cited on pages 100, 101, 102, and 144.

Huber, D., Bryson, S. T., Haas, M. R., et al. 2016, The Astrophysical Journal Supplement Series, 224, 2 Cited on pages 100 and 144.

Huber, D., Chaplin, W. J., Chontos, A., et al. 2019, The Astronomical Journal, 157, 245 Cited on pages 2, 102, and 123.

Huber, D., Chaplin, W. J., Christensen-Dalsgaard, J., et al. 2013, Astrophysical Journal, 767 Cited on page 102.

Janson, M., Reffert, S., Brandner, W., et al. 2008, Astronomy and Astrophysics, 488, 771 Cited on page 43.

Jenkins, J. M., Caldwell, D. A., Chandrasekaran, H., et al. 2010, Astrophysical Journal Letters, 713 Cited on page 110.

Johns, D., Marti, C., Huff, M., et al. 2018, The Astrophysical Journal Supplement Series, 239, 14 Cited on page 2.

Jørgensen, B. R. & Lindegren, L. 2005, Astronomy and Astrophysics, 436, 127 Cited on page 101.

Jouve, L., Brown, B. P., & Brun, A. S. 2010, Astronomy and Astrophysics, 509, 1 Cited on pages 39 and 40.

Jouve, L. & Brun, A. S. 2007, Astronomy and Astrophysics, 474, 239 Cited on pages 39 and 40.

Jouve, L., Gastine, T., & Lignières, F. 2015, Astronomy & Astrophysics, 575 Cited on page 51.

Joy, A. H. 1945, The Astrophysical Journal, 102, 168 Cited on page 23.

Jurcsik, J., Sódor, A., Szeidl, B., et al. 2009, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 400, 1006 Cited on page 148.

Jurcsik, J., K. G. 1996, A&A, 111 Cited on page 148.

J.W., E. & Michard, R. 1962, The Astrophysical Journal, 136 Cited on page 6.

Kallinger, T., Beck, P. G., Stello, D., & Garcia, R. A. 2018, Astronomy & Astrophysics, 616 Cited on page 81.

Kallinger, T., De Ridder, J., Hekker, S., et al. 2014, Astronomy and Astrophysics, 570, 1 Cited on pages 103, 104, 105, and 284.

Kallinger, T., Hekker, S., García, R. A., Huber, D., & Matthews, J. M. 2016, Science Advances, 2, 1500654 Cited on pages 123 and 284.

Kallinger, T. & Matthews, J. M. 2010, Astrophysical Journal Letters, 711, 1 Cited on page 103.

Kallinger, T., Weiss, W. W., Barban, C., et al. 2010, Astronomy and Astrophysics, 509, 1 Cited on page 81.

Kamchatnov, A. M. 1982, Sov JETP, 82 Cited on page 48.

Karoff, C., Metcalfe, T. S., Santos, R. G., et al. 2018, The Astrophysical Journal, 852, 46 Cited on page 103.

Kasting, J. F., Whitmire, D. P., & Reynolds, R. T. 1993, Icarus, 101, 108 Cited on page 1.

Kawaler, S. D. 1988, The Astrophysical Journal, 333, 236 Cited on page 45.

Kawaler, S. D. 1989, The Astrophysical Journal, 343, L65 Cited on page 1.

Kawka, A., Vennes, S., & Thorstensen, J. R. 2004, The Astronomical Journal, 127, 1702 Cited on page 14.

Keenan, P. C. 1938, The Astrophysical Journal, 88, 360 Cited on page 103.

Kepler, S. & Bradley, P. 1995, Baltic Astronomy, 4, 166 Cited on page 149.

Kgoadi, R., Engelbrecht, C., Whittingham, I., & Tkachenko, A. 2019, 14, 1 Cited on pages 150 and 183.

Kiefer, R. & Roth, M. 2018, The Astrophysical Journal, 854, 74 Cited on pages 42, 92, and 93.

Kilkenny, D., Koen, C., O'Donoghue, & Stobie, R. 1997, MNRAS, 285, 640 Cited on page 148.

Kippenhahn, R. 1963, The Astrophysical Journal, 137, 664 Cited on page 13.

Kippenhahn, R. & Weigert, A. 1990, Stellar Structure and Evolution Cited on page 63.

Kippenhahn, R., Weigert, A., & Weiss, A. 2012, Stellar Structure and Evolution, Astronomy and Astrophysics Library (Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg) Cited on pages 19, 22, and 80.

Kissin, Y. & Thompson, C. 2015a, The Astrophysical Journal, 808 Cited on page 14.

Kissin, Y. & Thompson, C. 2015b, ApJ, 809, 108 Cited on page 14.

Kitchatinov, L. L. 2016, Geomagnetism and Aeronomy, 56 Cited on page 5.

Kjeldsen, H. & Bedding, T. R. 2011, Astronomy and Astrophysics, 529, 2 Cited on page 104.

Kjeldsen, H., Bedding, T. R., Arentoft, T., et al. 2008, The Astrophysical Journal, 682, 1370 Cited on pages 72 and 224.

Kochukhov, O., Makaganiuk, V., & Piskunov, N. 2010, Astronomy and Astrophysics, 524 Cited on page 42.

Kohonen, T. 1990, Nature, 346, 24 Cited on pages 150 and 183.

Kolenberg, K., Szabó, R., Kurtz, D. W., et al. 2010, Astrophysical Journal Letters, 713 Cited on page 144.

Kosovichev, A. G. & G., A. 1988, SvAL, 14, 145 Cited on page 6.

Krizhevsky, A., Sutskever, I., & Hinton, G. E. 2012, ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks, Tech. rep. Cited on page 226.

Kurtz, D. 1982, MNRAS, 200, 807 Cited on page 93.

Kurtz, D. W. 1990, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 28, 607 Cited on page 146.

Kurtz, D. W., Saio, H., Takata, M., et al. 2014, MNRAS, 444, 102 Cited on pages 13 and 146.

Kurtz, D. W., Shibahashi, H., Murphy, S. J., Bedding, T. R., & Bowman, D. M. 2015, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 450, 3015 Cited on page 144.

Lagarde, N., Robin, A. C., Reylé, C., & Nasello, G. 2017, Astronomy and Astrophysics, 601 Cited on page 29.

Lamb, H. 1932, Hydrodynamics Cited on page 69.

Landstreet, J. D. 1992, The Astronomy and Astrophysics Review, 4, 35 Cited on page 200.

Lanza, A. F. 2009, Proceedings of the International Astronomical Union, 5, 120 Cited on page 9.

Lanzafame, A. C., Distefano, E., Messina, S., et al. 2018, Astronomy and Astrophysics, 616 Cited on page 41.

Larson, R. B. & Tinsley, B. M. 1978, The Astrophysical Journal, 219, 46 Cited on page 1.

Latham, G., Ewing, M., Press, F., & Sutton, G. 1969, Science, 165, 241 Cited on page 3.

Lebreton, Y., Goupil, M. J., & Montalbán, J. 2014a, in EAS Publications Series, Vol. 65 (EDP Sciences), 99–176 Cited on page 12.

Lebreton, Y., Goupil, M. J., & Montalbán, J. 2014b, in EAS Publications Series, Vol. 65 (EDP Sciences), 177–223 Cited on pages 2 and 10.

Lebreton, Y. & Montalbán, J. 2008, Proceedings of the International Astronomical Union, 4, 419 Cited on page 10.

Lecoanet, D., Vasil, G. M., Fuller, J., Cantiello, M., & Burns, K. J. 2017, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 466, 2181 Cited on pages 88, 91, and 222.

Lehmann, F. E. 1936, Die Naturwissenschaften, 24, 401 Cited on page 3.

Leibacher, J. W. & Stein, R. F. 1971, ApL, 7, 191 Cited on page 6.

Leighton, R. B. 1969, The Astrophysical Journal, 156, 1 Cited on page 41.

Leighton, R. B., Noyes, R. W., & Simon, G. W. 1962, The Astrophysical Journal, 135, 474 Cited on page 6.

Leone, F. 2007, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 382, 1690 Cited on page 2.

Li, G., Bedding, T. R., Murphy, S. J., et al. 2019a, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 482, 1757 Cited on page 155.

Li, G., Van Reeth, T., Bedding, T. R., Murphy, S. J., & Antoci, V. 2019b, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 487, 782 Cited on page 155.

Liebert, J., Bergeron, P., & Holberg, J. B. 2002, The Astronomical Journal, 125, 348 Cited on page 14.

Lim, J., Carilli, C. L., White, S. M., Beasley, A. J., & Marson, R. G. 1998, Nature, 392, 575 Cited on page 103.

Lin, C., Antia, H. M., & Basu, S. 2007, The Astrophysical Journal, 668, 603 Cited on page 149.

Lindsey, C. & Braun, D. C. 2005, The Astrophysical Journal, 620, 1107 Cited on page 6.

Line, M. R., Teske, J., Burningham, B., Fortney, J., & Marley, M. 2015, ApJ, 807, 183 Cited on page 43.

Lognonne, P., Banerdt, W., Pike, T., et al. 2014, EGUGA, 12183 Cited on page 3.

Lognonné, P., Banerdt, W. B., Giardini, D., et al. 2019, Space Science Reviews, 215, 12 Cited on page 3.

Loi, S. T. 2020, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, accepted Cited on page 92.

Loi, S. T. & Papaloizou, J. C. B. 2017, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 3225, 3212 Cited on page 14.

Loi, S. T. & Papaloizou, J. C. B. 2018, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 477, 5338 Cited on pages 88 and 92.

Loi, S. T. & Papaloizou, J. C. B. 2020, MNRAS, 491, 1 Cited on pages 14, 95, 199, 201, and 222.

Lomb, N. R. 1976, Astrophysics and Space Science, 39, 447 Cited on page 149.

Luger, R., Agol, E., Kruse, E., et al. 2016, AJ, 152, 100 Cited on page 285.

Lund, M. N., Handberg, R., Kjeldsen, H., Chaplin, W. J., & Christensen-Dalsgaard, J. 2017, EPJ Web of Conferences, 160 Cited on page 177.

Lundberg, S. M., Allen, P. G., & Lee, S.-I. 2017, in t Conference on Neural Information Processing Systems Cited on page 181.

MacGregor, K. B. & Cassinelli, J. P. 2002, The Astrophysical Journal, 586, 480 Cited on page 47.

MacGregor, K. B. & Charbonneau, P. 1999, The Astrophysical Journal, 519, 911 Cited on page 52.

Maeder, A. 2009, Springer, 520 Cited on pages 12 and 19.

Maeder, A. & Meynet, G. 1996, A&A, 313, 140 Cited on page 13.

Maeder, A. & Meynet, G. 2003, Astronomy and Astrophysics, 411, 543 Cited on pages 35 and 53.

Maeder, A. & Zahn, J.-P. 1998, A&A, 334, 1000 Cited on pages 12, 13, and 51.

Mankovich, C., Marley, M. S., Fortney, J. J., & Movshovitz, N. 2019, The Astrophysical Journal, 871, 1 Cited on page 3.

Manset, N. & Donati, J.-F. 2003, in Polarimetry in Astronomy, Vol. 4843 (SPIE), 425 Cited on page 42.

Marchant, P., Reisenegger, A., & Akgün, T. 2010, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 415, 2426 Cited on page 48.

Markey, P. & Tayler, R. 1973, MNRAS, 77 Cited on pages 48, 199, and 200.

Markey, P. & Tayler, R. J. 1974, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 168, 505 Cited on page 48.

Marques, J. P., Goupil, M. J., Lebreton, Y., et al. 2013, Astronomy and Astrophysics, 549 Cited on pages 12, 13, and 51.

Martic, M., Schmitt, J., Lebrun, J.-C., et al. 1999, Astron. Astrophys, 351, 993 Cited on page 8.

Massarotti, A. 2008, The Astronomical Journal, 135, 2287 Cited on page 42.

Mathis, S. 2010, Astronomische Nachrichten, 331, 883 Cited on page 50.

Mathis, S. 2013, in LNP, Vol. 865, 23–47 Cited on pages 52 and 53.

Mathis, S., Duez, V., & Braithwaite, J. 2010in , 270–278 Cited on page 47.

Mathis, S., Palacios, A., & Zahn, J. P. 2004, Astronomy and Astrophysics, 425, 243 Cited on pages 12 and 13.

Mathis, S., Prat, V., Amard, L., et al. 2018, Astronomy and Astrophysics, 620, 1 Cited on pages 12 and 13.

Mathis, S. & Zahn, J. P. 2004, Astronomy and Astrophysics, 425, 229 Cited on pages 12, 13, and 51.

Mathis, S. & Zahn, J. P. 2005, Astronomy and Astrophysics, 440, 653 Cited on pages 35, 218, and 219.

Mathur, S., Eff-Darwich, A., García, R. A., & Turck-Chièze, S. 2008, Astronomy and Astrophysics, 484, 517 Cited on pages 84 and 198.

Mathur, S., García, R. A., Ballot, J., et al. 2014, Astronomy and Astrophysics, 562, 1 Cited on pages 41, 42, and 217.

Mathur, S., García, R. A., Bugnet, L., et al. 2019, Frontiers in Astronomy and Space Sciences, 6 Cited on page 123.

Mathur, S., García, R. A., Huber, D., et al. 2016, The Astrophysical Journal, 827, 50 Cited on page 144.

Mathur, S., García, R. A., Régulo, C., et al. 2010, Astronomy and Astrophysics, 511, 1 Cited on pages 109, 110, 111, 123, 227, and 284.

Mathur, S., Handberg, R., Campante, T. L., et al. 2011a, Astrophysical Journal, 733, 1 Cited on pages 104 and 107.

Mathur, S., Hekker, S., Trampedach, R., et al. 2011b, The Astrophysical Journal, 741 Cited on pages 103, 104, and 105.

Mathur, S., Hekker, S., Trampedach, R., et al. 2011c, Astrophysical Journal, 741, 1 Cited on page 284.

Mathur, S., Huber, D., Batalha, N. M., et al. 2017, The Astrophysical Journal Supplement Series, 229, 30 Cited on pages 11, 101, 109, 117, 118, 144, 155, 157, and 174.

Matteucci, F. 2010, in Galaxies and their Masks (Springer New York), 261–276 Cited on page 1.

McQuillan, A., Mazeh, T., & Aigrain, S. 2014, Astrophysical Journal, Supplement Series, 211 Cited on pages 41, 42, 107, and 149.

Mestel, L. 1953, MNRAS, 113, 716 Cited on pages 47 and 220.

Mestel, L., Moss, D., & Tayler, R. 1988, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 231, 873 Cited on page 47.

Mestel, L. & Weiss, . 1987, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 226, 123 Cited on pages 14, 47, 88, 218, 219, 220, and 288.

Michel, E., Samadi, R., Baudin, F., et al. 2009, Astronomy and Astrophysics, 495, 979 Cited on page 224.

Miglio, A., Chiappini, C., Mosser, B., et al. 2017, 338, 644 Cited on page 10.

Miglio, A., Montalbán, J., Eggenberger, P., & Noels, A. 2008, Astronomische Nachrichten, 329, 529 Cited on page 146.

Minchev, I., Chiappini, C., & Martig, M. 2016, Astronomische Nachrichten, 337, 944 Cited on page 2.

Mitchell, P. D., Lacey, C. G., Baugh, C. M., & Cole, S. 2013, MNRAS, 435, 87 Cited on page 1.

Molnár, L., Plachy, E., Juhász, L., & Rimoldini, L. 2018, Astronomy and Astrophysics, 620, 1 Cited on page 144.

Monteiro, M. J., Christensen-Dalsgaard, J., & Thompson, M. J. 1996, in Inside the stars, IAU Colloquium. ASP Conference Series, Vol.40 Cited on page 5.

Montgomery, D. & Phillips, L. 1989, Physica D : Nonlinear Phenomena, 37, 215 Cited on page 50.

Montgomery, D. S., Afeyan, B. B., Cobble, J. A., et al. 1998, Physics of Plasmas, 5, 1973 Cited on page 46.

Morel, T., Castro, N., Fossati, L., et al. 2014, The B Fields in OB Stars (BOB) Survey, Tech. rep. Cited on pages 46 and 291.

Morel, T. & Miglio, A. 2012, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society : Letters, 419, 34 Cited on page 102.

Morsink, S. M. & Rezania, V. 2002, The Astrophysical Journal, 574, 908 Cited on page 202.

Mortier, A., Sousa, S. G., Zh Adibekyan, V., Brandão, I. M., & Santos, N. C. 2014, A&A, 572, 95 Cited on page 101.

Moss, D. 1989, MNRAS, 236, 629 Cited on page 47.

Moss, D. 1992, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 257, 593 Cited on page 52.

Mosser, B. 2015, EAS Publications Series, 73-74, 3 Cited on page 213.

Mosser, B., Barban, C., Montalbán, J., et al. 2011, Astronomy and Astrophysics, 532, 1 Cited on pages 9, 225, and 226.

Mosser, B., Baudin, F., Lanza, A. F., et al. 2009, Astronomy and Astrophysics, 506, 245 Cited on page 9.

Mosser, B., Belkacem, K., Pinçon, C., et al. 2017, Astronomy and Astrophysics, 598, 1 Cited on pages 75, 91, 92, 222, and 227.

Mosser, B., Benomar, O., Belkacem, K., et al. 2014, 5, 1 Cited on pages 33 and 218.

Mosser, B., Elsworth, Y., Hekker, S., et al. 2012a, Astronomy and Astrophysics, 537, 1 Cited on pages 14, 88, 89, 198, and 227.

Mosser, B., Gehan, C., Belkacem, K., et al. 2018, Astronomy and Astrophysics, 618 Cited on pages 14, 211, 215, and 218.

Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012b, Astronomy and Astrophysics, 548, 1 Cited on pages 2 and 9.

Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012c, Astronomy and Astrophysics, 540, 1 Cited on pages 76 and 77.

Mosser, B., Vrard, M., Belkacem, K., Deheuvels, S., & Goupil, M. J. 2015, Astronomy and Astrophysics, 584, 1 Cited on pages 11, 77, 85, 88, 201, 208, 212, 232, 286, and 288.

Müller, G. & Hartwig, E. 1920, gllv Cited on page 4.

Murphy, S. J., Bedding, T. R., Shibahashi, H., Kurtz, D. W., & Kjeldsen, H. 2014, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 441, 2515 Cited on page 146.

Murphy, S. J., Fossati, L., Bedding, T. R., et al. 2016, MNRAS, 459, 1201 Cited on page 146.

Murphy, S. J., Hey, D., Van Reeth, T., & Bedding, T. R. 2019, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 485, 2380 Cited on pages 149 and 155.

Murphy, S. J., Moe, M., Kurtz, D. W., et al. 2018, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 474, 4322 Cited on page 149.

Nakamura, Y. 2010, DGG-Mitteilungen, 3, 4 Cited on page 4.

Natekin, A. & Knoll, A. 2013, Frontiers in Neurorobotics, 7, 21 Cited on page 150.

Neiner, C., Mathis, S., Alecian, E., Emeriau, C., & Grunhut, J. 2015in , 61–66 Cited on page 47.

Nelson, N. J., Brown, B. P., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2011, The Astrophysical Journal Letters, 739, L38 Cited on page 41.

Nelson, N. J., Brown, B. P., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2012, Solar Physics, 289, 441 Cited on page 41.

Ngeow, C. C., Szabo, R., Szabados, L., et al. 2011 Cited on page 155.

November, L. J. & Simon, G. W. 1988, The Astrophysical Journal, 333, 427 Cited on page 103.

November, L. J., Toomre, J., Gebbie, K. B., & Simon, G. W. 1981, The Astrophysical Journal, 245, L123 Cited on page 103.

Noyes, R. W., Hartmann, L., Baliunas, S. L., Duncan, D., & Vaughan, A. 1984, The Astrophysical Journal, 763 Cited on page 41.

Olver, F. W. J. 1954, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 247, 307 Cited on page 71.

Osaki, Y. 1977, PASJ, 29, 235 Cited on page 71.

Ouazzani, R.-M., Goupil, M. J., Dupret, M.-A., & Marques, J. P. 2013, Astronomy & Astrophysics, 554, A80 Cited on page 83.

Ouazzani, R.-M., Lignières, F., Dupret, M.-A., et al. 2020, Astronomy & Astrophysics Cited on page 83.

Ouazzani, R.-M., Salmon, S. J. A. J., Antoci, V., et al. 2017, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 465, 2294 Cited on page 83.

Paczynski, B. 1969, BAAS, 1, 256 Cited on page 6.

Paczyński, B. 1970, Acta Astronomica, 20, 47 Cited on page 9.

Paine, T., NATIONAL AERONAUTICS, ADMINISTRATION, & SPACE. 1969, Apollo 11 preliminary Science Report Cited on page 3.

Palacios, A., Charbonnel, C., Talon, S., & Siess, L. 2006, Astronomy and Astrophysics, 453, 261 Cited on page 54.

Pande, D., Bedding, T. R., Huber, D., & Kjeldsen, H. 2018, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 480, 467 Cited on pages 107, 123, and 284.

Pápics, P. I., Briquet, M., Baglin, A., et al. 2012, Astronomy and Astrophysics, 542 Cited on page 93.

Parker, E. N. 1955, The Astrophysical Journal, 122, 293 Cited on page 38.

Parker, E. N. 1966, The Astrophysical Journal, 145, 811 Cited on page 51.

Parker, E. N. 1979, The Astrophysical Journal, 234, 333 Cited on page 47.

Paxton, B., Bildsten, L., Dotter, A., et al. 2011, Astrophysical Journal, Supplement Series, 192, 1 Cited on pages 20, 21, 22, 34, 75, 86, and 205.

Pedregosa, F., Michel, V., Grisel, O., et al. 2011, Journal of Machine Learning Research, 12, 2825 Cited on pages 117 and 154.

Peterson, R. C. 1983, The Astrophysical Journal, 275, 737 Cited on page 42.

Petit, P., Dintrans, B., Solanki, S. K., et al. 2008, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 388, 80 Cited on page 42.

Petit, P., Donati, J. F., Oliveira, J. M., et al. 2004, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 351, 826 Cited on page 42.

Petit, P., Donati, J. F., Wade, G. A., et al. 2003, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 348, 1175 Cited on page 41.

Pevtsov, A. A., Bertello, L., & Uitenbroek, H. 2013, The Astrophysical Journal, 767, 56 Cited on page 41.

Pickering, E. C., Colson, H. R., Fleming, W. P., & Wells, L. D. 1901, The Astrophysical Journal, 13, 226 Cited on pages 4 and 148.

Pinçon, C., Belkacem, K., Goupil, M. J., & Marques, J. P. 2017, Astronomy and Astrophysics, 605 Cited on pages 13, 218, and 286.

Pinçon, C., Goupil, M. J., & Belkacem, K. 2020, Astronomy & Astrophysics, 634 Cited on pages 75 and 76.

Pinsonneault, M. H., Elsworth, Y. P., Tayar, J., et al. 2018, The Astrophysical Journal Supplement Series, 239, 32 Cited on page 120.

Pitts, E. & Tayler, R. 1985, MNRAS, 216, 139 Cited on page 48.

Platt, J. C. 1999, ADVANCES IN LARGE MARGIN CLASSIFIERS, 61 Cited on page 154.

Pokorny, F. T., Bekiroglu, Y., & Kragic, D. 2014, in Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation (Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.), 389–396 Cited on page 67.

Prat, V., Mathis, S., Buysschaert, B., et al. 2019, Astronomy and Astrophysics, 64, 1 Cited on pages 93, 94, 95, 199, and 202.

Prat, V., Mathis, S., Neiner, C., et al. 2020, Astronomy & Astrophysics, 636 Cited on page 94.

Prendergast, K. H. 1956, The Astrophysical Journal, 123, 498 Cited on page 48.

Prsa, A., Batalha, N., Slawson, R. W., et al. 2011, Astronomical Journal, 141, 83 Cited on pages 144 and 164.

Prusti, T. 2017, Proceedings of the International Astronomical Union, 12, 7 Cited on page 2.

Putney, A. 1999, in 11th European Workshop on White Dwarfs Cited on page 200.

Rädler, K. Bräuer, H. 987, Astronomische Nachrichten, 308, 101 Cited on page 53.

Raghavan, D., McAlister, H. A., Henry, T. J., et al. 2010, The Astrophysical Journal Supplement Series, 190, 1 Cited on page 42.

Rashba, T. I., Semikoz, V. B., Turck-Chièze, S., & Valle, J. W. 2007, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 377, 453 Cited on pages 93, 199, 232, and 264.

Rast, M. P. 1995, The Astrophysical Journal, 443, 863 Cited on page 103.

Rast, M. P. 2003, The Astronomy and Astrophysics Review, 597 Cited on page 103.

Rauer, H., Catala, C., Aerts, C., et al. 2014, 249–330 Cited on page 9.

Read, J. I. 2014, Journal of Physics G : Nuclear and Particle Physics, 41, 063101 Cited on page 1.

Reimers, D. 1975, Memoires of the Societe Royale des Sciences de Liege, 8, 369 Cited on pages 30 and 33.

Reisenegger, A. 2009, Astronomy and Astrophysics, 499, 557 Cited on page 46.

Réville, V., Brun, A. S., Strugarek, A., et al. 2015, The Astrophysical Journal, 814, 99 Cited on page 45.

Ricker, G. R., Winn, J. N., Vanderspek, R., et al. 2014, Space Telescopes and Instrumentation 2014 : Optical, Infrared, and Millimeter Wave, 9143, 914320 Cited on pages 9 and 173.

Rieutord, M. & Michel. 2017, EPJWC, 160, 02011 Cited on pages 92 and 232.

Rieutord, M. & Rincon, F. 2010, Living Reviews in Solar Physics, 7, 2 Cited on page 103.

Rieutord, M., Roudier, T., Malherbe, J. M., & Rincon, F. 2000, On mesogranulation, network formation and supergranulation, Tech. rep. Cited on page 103.

Rincon, F., Rieutord, M., Eu, O., Rincon, F., & Rieutord, M. 2018, Living Reviews in Solar Physics, 15, 6 Cited on page 103.

Rix, H.-W. & Bovy, J. 2013, The Astronomy and Astrophysics Review, 21, 61 Cited on page 1.

Roettenbacher, R. M., Monnier, J. D., Korhonen, H., et al. 2017, Nature, 533, 217 Cited on page 42.

Rüdiger, G. & Kitchatinov, L. L. 1997, Astronomische Nachrichten, 318, 273 Cited on page 220.

Rüdiger, G., Kitchatinov, L. L., & Elstner, D. 2012, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 425, 2267 Cited on page 52.

Sachkov, M. E. 2014, Astrophysical Bulletin, 69, 40 Cited on page 155.

Saio, H., Kurtz, D. W., Takata, M., et al. 2015, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 447, 3264 Cited on page 13.

Salaris, M., Pietrinferni, A., Piersimoni, A. M., & Cassisi, S. 2015, Astronomy and Astrophysics, 583 Cited on page 29.

Samadi, R., Belkacem, K., & Sonoi, T. 2015, in EAS Publications Series, Vol. 73-74 (EDP Sciences), 111–191 Cited on pages 4, 5, 71, and 78.

Samadi, R. & Goupil, M.-J. 2001, Astronomy and Astrophysics, 370, 136 Cited on page 5.

Samadi, R., Goupil, M. J., Alecian, E., et al. 2005, Journal of Astrophysics and Astronomy, 26, 171 Cited on page 5.

Sanchez, S., Fournier, A., Pinheiro, K. J., & Aubert, J. 2014, An Acad Bras Cienc, 86 Cited on page 38.

Sans Fuentes, S. A., De Ridder, J., & Debosscher, J. 2017, Astronomy and Astrophysics, 599, 143 Cited on page 183.

Santos, A. R. G., García, R. A., Mathur, S., et al. 2019, The Astrophysical Journal Supplement Series, 244, 21 Cited on pages 41, 42, 82, 107, 123, 149, 160, and 217.

Saslaw, W. C. & C., W. 1985, Gravitational physics of stellar and galactic systems, cambridge edn. Cited on page 1.

Scargle, J. D. 1982, Astrophysical Journal, 263, 835 Cited on page 149.

Schatzman, E. 1962, AnAp, 25, 18 Cited on pages 45 and 51.

Scherrer, P. H., Bogart, R. S., Bush, R. I., et al. 1995, Solar Physics, 162, 129 Cited on page 6.

Scherrer, P. H., Schou, J., Bush, R. I., et al. 2012, Solar Physics, 275, 207 Cited on page 6.

Schmidt, G. D., Vennes, S., Wickramasinghe, D. T., & Ferrario, L. 2001, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 328, 203 Cited on page 200.

Schofield, M., Chaplin, W. J., Huber, D., et al. 2019, The Astrophysical Journal Supplement Series, 241, 12 Cited on page 144.

Schönberg, M. & Chandrasekhar, S. 1942, The Astrophysical Journal, 96, 161 Cited on page 27.

Schroder, K.-P. & Cuntz, M. 2007, Astronomy and Astrophysics, 465, 593 Cited on page 30.

Schüssler, M., Caligari, P., Ferriz-Mas, A., Solanki, S., & Stix, M. 1996, A&A, 314, 503 Cited on page 41.

Schwarzschild, M. 1975, The Astrophysical Journal, 195, 137 Cited on page 283.

Scornet, E., Biau, G., & Vert, J.-P. 2015, The Annals of Statistics, 43, 1716 Cited on page 117.

Seager, S. & Mallen-Ornelas, G. 2003, The Astrophysical Journal, 585, 1038 Cited on page 101.

See, V., Jardine, M., Vidotto, A. A., et al. 2017, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 466, 1542 Cited on page 43.

Semel, M. 1989, A&A, 225, 456 Cited on pages 40 and 41.

Serenelli, A., Johnson, J., Huber, D., et al. 2017, The Astrophysical Journal Supplement Series, 233, 23 Cited on pages 11, 16, and 155.

Shafranov, V. D. & D., V. 1966, RvPP, 2, 103 Cited on page 50.

Shibahashi, H. 1979, PASJ, 31, 87 Cited on pages 71, 262, and 263.

Shibahashi, H. & Aerts, C. 2000, The Astrophysical Journal, 531, L143 Cited on page 93.

Shibahashi, H. & Osaki, Y. 1976, PASJ, 28, 199 Cited on page 76.

Siess, L., Dufour, E., & Forestini, M. 2000, Astronomy and Astrophysics, 358, 593 Cited on page 54.

Skumanich, A. 1972, The Astrophysical Journal, 767, 1 Cited on page 1.

Smalley, B., Niemczura, E., Murphy, S. J., et al. 2015, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 452, 3334 Cited on pages 146 and 155.

Soderblom, D. R. 2010, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 48, 581 Cited on page 10.

Soker, N. 2004, The Astrophysical Journal, 612, 1060 Cited on page 42.

Sozzetti, A., Torres, G., Charbonneau, D., et al. 2007, Improving Stellar and Planetary Parameters of Transiting Planet Systems : The Case of TrES-2, Tech. rep. Cited on page 101.

Spada, F., Gellert, M., Arlt, R., & Deheuvels, S. 2016, Astronomy and Astrophysics, 589, 1 Cited on page 218.

Spruit, H. C. 1999, Astronomy and Astrophysics, 349, 189 Cited on pages 35, 53, 218, and 291.

Spruit, H. C. 2002, Astronomy and Astrophysics, 381, 923 Cited on pages 13, 52, 53, 59, 90, 198, and 291.

Spruit, H. C. 2003, Solar Physics, 213, 1 Cited on page 53.

Stein, S. & Wysession, M. 2003, An Introduction to Seismology, Earthquakes, and Earth Structure (Blackwell) Cited on page 3.

Stello, D., Cantiello, M., Fuller, J., Garcia, R. A., & Huber, D. 2016a, Publications of the Astronomical Society of Australia, 33, 1 Cited on pages 14, 15, 89, 198, and 225.

Stello, D., Cantiello, M., Fuller, J., et al. 2016b, Nature, 529, 364 Cited on pages 15 and 89.

Stello, D., Huber, D., Grundahl, F., et al. 2017, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 472 Cited on page 14.

Strugarek, A., Beaudoin, P., Charbonneau, P., Brun, A. S., & Nascimento, J. D. d. 2017, Science, 357, 185 Cited on pages 40 and 43.

Strugarek, A., Brun, A. S., Matt, S. P., & Réville, V. 2014, Astrophysical Journal, 795 Cited on page 88.

Strugarek, A., Brun, A. S., & Zahn, J. P. 2011, Astronomy and Astrophysics, 532 Cited on pages 12, 14, 47, 58, 88, and 220.

Suijs, L., Langer, N., Poelarends, A. J., et al. 2008, Astronomy and Astrophysics, 481, 87 Cited on page 14.

Szegedy, C., Ioffe, S., Vanhoucke, V., & Alemi, A. A. 2017, in 31st AAAI Conference on Artificial Intelligence, AAAI 2017 (AAAI press), 4278–4284 Cited on page 227.

Szegedy, C., Liu, W., Jia, Y., et al. 2015, in Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Vol. 07-12-June (IEEE Computer Society), 1–9 Cited on page 227.

Takata, M. 2016, Publ. Astron. Soc. Japan, 68, 91 Cited on page 75.

Takata, M. & Shibahashi, H. 1994, PASJ, 46, 301 Cited on pages 93 and 198.

Talon, S. & Zahn, J. P. 1997, Astronomy & Astrophysics, 317, 749 Cited on page 13.

Tassoul, M. 1980, The Astrophysical Journal Supplement Series, 43, 469 Cited on pages 72, 146, 149, and 225.

Tayar, J., Beck, P. G., Pinsonneault, M. H., García, R. A., & Mathur, S. 2019, The Astrophysical Journal, 887 Cited on pages 12 and 88.

Tayar, J., Ceillier, T., García-Hernández, D. A., et al. 2015, Astrophysical Journal, 807 Cited on page 42.

Tayar, J. & Pinsonneault, M. H. 2013, Astrophysical Journal Letters, 775, 1 Cited on page 12.

Tayler, R. 1973, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 365 Cited on pages 13, 48, 50, 198, 199, 200, 220, and 291.

Tayler, R. 1980, MNRAS.191. .151T Mon. Not. R. astr. Soc, 191, 151 Cited on pages 48, 90, and 200.

Théado, S., Dupret, M. A., Noels, A., & Ferguson, J. W. 2008, Astronomy and Astrophysics, 493, 159 Cited on page 146.

Thompson, M., Christensen-Dalsgaard, J., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2003in , 81–86 Cited on pages 6, 12, and 83.

Title, A. M., Tarbell, T. D., Topka, K. P., et al. 1989, The Astrophysical Journal, 336, 475 Cited on page 103.

Tkachenko, A., Lehmann, H., Smalley, B., Debosscher, J., & Aerts, C. 2012, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 422, 2960 Cited on page 144.

Tong, V. C. H. & García, R. A. 2015, Extraterrestrial seismology, 441 Cited on page 3.

Torrence, C. & Compo, G. P. 1998, BAMS, 79, 61 Cited on page 149.

Tout, C. A., Wickramasinghe, D. T., & Ferrario, L. 2004, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 355, L13 Cited on page 291.

Townsend, R. H. & Teitler, S. A. 2013, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 435, 3406 Cited on pages 75, 86, and 205.

Townsend, R. H. D. 2005, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 364, 573 Cited on page 147.

Trampedach, R., Asplund, M., Collet, R., Nordlund, , & Stein, R. F. 2013, The Astrophysical Journal, 769, 18 Cited on page 283.

Triana, S. A., Corsaro, E., De Ridder, J., et al. 2017, Astronomy and Astrophysics, 602, 1 Cited on page 13.

Triana, S. A., Moravveji, E., Pápics, P. I., et al. 2015, The Astrophysical Journal, 810, 16 Cited on page 13.

Tromp, J. 2001, Annual Review of Earth and Planetary Sciences, 29, 47 Cited on page 3.

Turck-Chièze, S., Appourchaux, T., Ballot, J., et al. 2005, European Space Agency, (Special Publication) ESA SP, 193 Cited on page 291.

Turck-Chièze, S. & Couvidat, S. 2011, Reports on Progress in Physics, 74 Cited on page 6.

Udalski, A., Soszyński, I., Szymański, M. K., et al. 2008, Acta Astronomica, 58, 329 Cited on page 151.

Udalski, A., Szymański, M. K., & Szymański, G. 2015, Acta Astronomica, 65, 1 Cited on page 151.

Ulrich, R., K. 1983 Cited on page 8.

Ulrich, R. K. 1970, The Astrophysical Journal, 162, 993 Cited on page 6.

Ulrich, R. K. 1986, The Astrophysical Journal, 306, L37 Cited on page 10.

Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, Nonradial oscillations of stars (University of Tokyo Press) Cited on pages 70, 72, 83, and 202.

Uytterhoeven, K., Moya, A., Grigahcène, A., et al. 2011, Astronomy and Astrophysics, 534 Cited on pages 144 and 155.

Valenti, J. A. & Fischer, D. A. 2005, The Astrophysical Journal Supplement Series, 159, 141 Cited on pages 10 and 284.

Valyavin, G., Bagnulo, S., Monin, D., et al. 2005, Astronomy & Astrophysics, 439, 1099 Cited on page 291.

van Beeck, J., Prat, V., Van Reeth, T., et al. 2020, Astronomy & Astrophysics Cited on pages 199 and 202.

van der Maaten, L. & Hinton, G. 2008, Journal of Machine Learning Research, 9, 2579 Cited on page 229.

van Eylen, V., Dai, F., Mathur, S., et al. 2018, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 478, 4866 Cited on page 123.

van Saders, J. L., Ceillier, T., Metcalfe, T. S., et al. 2016, Nature, 529, 181 Cited on pages 10 and 45.

Velikhov, E. P. 1959, Stability of an ideally conducting liquid flowing between cylinders rotating in a magnetic field, Tech. Rep. 9 Cited on page 51.

Ventura, P., D'Antona, F., & Mazzitelli, I. 2008, Astrophysics and Space Science, 316, 93 Cited on page 8.

Verner, G. A., Elsworth, Y., Chaplin, W. J., et al. 2011, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 415, 3539 Cited on page 101.

Vida, K. & Oláh, K. 2013, Proceedings of the International Astronomical Union, 9, 224 Cited on page 41.

Vidotto, A. A., Gregory, S. G., Jardine, M., et al. 2014, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 441, 2361 Cited on page 45.

Vrard, M., Mosser, B., & Barban, C. 2015, EPJ Web of Conferences, 101, 06067 Cited on pages 84, 85, 86, 201, 208, 212, 232, and 288.

Vrard, M., Mosser, B., & Barban, C. 2017, EPJ Web of Conferences, 160, 2 Cited on page 215.

Vrard, M., Mosser, B., & Samadi, R. 2016, PhD thesis Cited on page 11.

Wade, G. A., Neiner, C., Alecian, E., et al. 2016, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 456, 2 Cited on pages 46, 47, and 291.

Waelkens, C. 1991, Astronomy and Astrophysics, 246, 453 Cited on page 147.

Wang, J. & Zhong, Z. 2018, A&A, 619, 1 Cited on page 26.

Watters, T. R., Weber, R. C., Collins, G. C., et al. 2019, Nature Geoscience, 12, 411 Cited on page 3.

Weber, E. J. & Davis, Leverett, J. 1967, The Astrophysical Journal, 148, 217 Cited on page 45.

Wei, X. & Goodman, J. 2015, ApJ, 806, 50 Cited on pages 52 and 53.

Wieczorek, M. A., Jolliff, B. L., Khan, A., et al. 2006, The constitution and structure of the Lunar interior Cited on page 4.

Winget, D. 1988, in IAUS, Vol. 123 Cited on page 149.

Winn, J. N., Fabrycky, D., Albrecht, S., & Johnson, J. A. 2010, The Astrophysical Journal Letters, 718, 145 Cited on page 101.

Witze, A. 2019, Nature, 576, 348 Cited on page 3.

Woltjer, L. 1959, The Astrophysical Journal, 130, 405 Cited on page 50.

Wright, G. A. E. 1973, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 162, 339 Cited on page 48.

Xiang, M., Shi, J., Liu, X., et al. 2018, The Astrophysical Journal, 237 Cited on page 1.

Yu, J., Bedding, T. R., Stello, D., et al. 2020, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 493, 1388 Cited on pages 11 and 144.

Yu, J., Huber, D., Bedding, T. R., et al. 2018, The Astrophysical Journal Supplement Series, 236, 42 Cited on pages 9, 11, and 144.

Zadrozny, B. & Elkan, C. 2001, in In Proceedings of the Eighteenth International Conference on Machine Learning Cited on pages 154 and 158.

Zahn, J. P., Brun, A. S., & Mathis, S. 2007, Astronomy and Astrophysics, 474, 145 Cited on pages 13, 52, 53, and 59.

Zahn, J. P. & P., J. 1992, A&A, 265, 115 Cited on pages 12, 13, and 51.

Zakharov, A. V. & V., A. 1994, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Physical and Engineering Sciences, 349, 295 Cited on page 3.