



HAL
open science

Développement de modèles vibro-acoustiques pour prédire le champ proche d'une coque cylindrique raidie munie de revêtements acoustiques

Maxime Dana

► To cite this version:

Maxime Dana. Développement de modèles vibro-acoustiques pour prédire le champ proche d'une coque cylindrique raidie munie de revêtements acoustiques. Acoustique [physics.class-ph]. Université de Lyon, 2019. Français. ⟨NNT : 2019LYSEI011⟩. ⟨tel-03255781⟩

HAL Id: tel-03255781

<https://hal.science/tel-03255781v1>

Submitted on 9 Sep 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



N° D'ORDRE NNT : 2019LYSEI011

THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

opérée au sein de

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

École Doctorale n° EDA162

MEGA de Lyon

Mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique

Spécialité de doctorat : ACOUSTIQUE

Soutenue publiquement le 04/03/2019, par :

Maxime DANA

Ingénieur diplômé de l'ENSTA ParisTech

**Développement de modèles vibro-acoustiques pour prédire le
champ proche d'une coque cylindrique raidie munie de
revêtements acoustiques**

Devant le jury composé de :

Mme SADOULET-REBOUL, EMELINE	HDR, FEMTO-st, Besançon	Rapporteure
M. SIMON, FRANCK	Maître de recherche HDR, ONERA	Rapporteur
M. MAURY, CÉDRIC	Professeur des Universités, LMA, Marseille	Examineur
M. BERRY, ALAIN	Professeur titulaire, Université de Sherbrooke	Examineur
M. LE BOT, ALAIN	Directeur de recherche CNRS, MSGMGC/LTDS, Lyon	Examineur
M. MAXIT, LAURENT	Maître de conférence HDR, LVA, INSA Lyon	Directeur de thèse
M. BERNARD, JULIEN	Docteur, THALES Underwater Systems	Invité

Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2016-2020

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://www.edchimie-lyon.fr Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage secretariat@edchimie-lyon.fr INSA : R. GOURDON	M. Stéphane DANIELE Institut de recherches sur la catalyse et l'environnement de Lyon IRCELYON-UMR 5256 Équipe CDFA 2 Avenue Albert EINSTEIN 69 626 Villeurbanne CEDEX directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://edeea.ec-lyon.fr Sec. : M.C. HAVGOUDOUKIAN ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI École Centrale de Lyon 36 Avenue Guy DE COLLONGUE 69 134 Écully Tél : 04.72.18.60.97 Fax 04.78.43.37.17 gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION http://e2m2.universite-lyon.fr Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 INSA : H. CHARLES secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr	M. Philippe NORMAND UMR 5557 Lab. d'Ecologie Microbienne Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment Mendel 43, boulevard du 11 Novembre 1918 69 622 Villeurbanne CEDEX philippe.normand@univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ http://www.ediss-lyon.fr Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 INSA : M. LAGARDE secretariat.ediss@univ-lyon1.fr	Mme Emmanuelle CANET-SOULAS INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 Avenue Jean CAPELLE INSA de Lyon 69 621 Villeurbanne Tél : 04.72.68.49.09 Fax : 04.72.68.49.16 emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES http://edinfomaths.universite-lyon.fr Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage Tél : 04.72.43.80.46 infomaths@univ-lyon1.fr	M. Luca ZAMBONI Bât. Braconnier 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69 622 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.26.23.45.52 zamboni@maths.univ-lyon1.fr
Matériaux	MATÉRIAUX DE LYON http://ed34.universite-lyon.fr Sec. : Stéphanie CAUVIN Tél : 04.72.43.71.70 Bât. Direction ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIÈRE INSA de Lyon MATEIS - Bât. Saint-Exupéry 7 Avenue Jean CAPELLE 69 621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.85.28 jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr
MEGA	MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://edmega.universite-lyon.fr Sec. : Stéphanie CAUVIN Tél : 04.72.43.71.70 Bât. Direction mega@insa-lyon.fr	M. Jocelyn BONJOUR INSA de Lyon Laboratoire CETHIL Bâtiment Sadi-Carnot 9, rue de la Physique 69 621 Villeurbanne CEDEX jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* http://ed483.univ-lyon2.fr Sec. : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS INSA : J.Y. TOUSSAINT Tél : 04.78.69.72.76 viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr	M. Christian MONTES Université Lyon 2 86 Rue Pasteur 69 365 Lyon CEDEX 07 christian.montes@univ-lyon2.fr

Quand il ne peut plus lutter contre le vent et la mer pour poursuivre sa route, il y a deux allures que peut encore prendre un voilier : la cape (le foc bordé à contre et la barre dessous) le soumet à la dérive du vent et de la mer, et la fuite devant la tempête en épaulant la lame sur l'arrière avec un minimum de toile. La fuite reste souvent, loin des côtes, la seule façon de sauver le bateau et son équipage. Elle permet aussi de découvrir des rivages inconnus qui surgiront à l'horizon des calmes retrouvés. Rivages inconnus qu'ignoreront toujours ceux qui ont la chance apparente de pouvoir suivre la route des cargos et des tankers, la route sans imprévu imposée par les compagnies de transport maritime.

Vous connaissez sans doute un voilié nommé « Désir ».

Henri Laborit - Éloge de la fuite

Souvent aussi, il part à vélo dans la campagne.

Il pédale de toutes ses forces, emplissant ses poumons de la saveur de l'éternité.

L'éternité de l'enfance est une éternité brève, mais il ne le sait pas encore ; le paysage défile.

Michel Houellebecq - Les particules élémentaires

Remerciements

Ces remerciements sont destinés à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à ce travail de thèse. Ce type d'aventure scientifique est toujours un travail collectif, et ce quel que soit l'aspect solitaire qu'il peut avoir en apparence.

Je tiens à remercier tout d'abord mon directeur de thèse Laurent Maxit et mon encadrant entreprise Julien Bernard, sans qui ces travaux n'auraient sans doute jamais vu le jour. Je vous remercie tous les deux pour votre disponibilité et votre patience dont vous avez su faire preuve durant ces trois ans, chacun à votre manière, pour tous les conseils précieux dont j'ai pu bénéficier en vous côtoyant, et enfin pour votre bienveillance constante. J'ai également une pensée pour Corentin Coguenanff, dont la bonne humeur n'a d'égale que ses qualités de numéricien ; ses remarques dont j'aurai bénéficié lors de la rédaction de mon manuscrit furent très utiles.

Je remercie plus largement tous mes collègues, que ce soit l'équipe PAA chez TUS ou bien tout le personnel du LVA à l'INSA Lyon. Un merci tout particulier aux doctorants ou post-doctorants dont la présence a contribué au bon déroulement de cette thèse. Barra, Benjamin, Christophe, Corentin, Edouard, Fabien, Felipe, Fulbert, Ge, Gianluigi, Jérémy, Philéas, Raissa, Roberto, Rémi, Souha, Valentin, William, le Physio vous remercie !

Je remercie également l'ensemble des membres du jury qui ont accepté de se pencher sur mes travaux : Emeline Sadoulet-Reboul et Franck Simon qui ont apporté un soin particulier à la relecture de ce manuscrit en acceptant d'être mes rapporteurs, Alain Le Bot qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse, et enfin Cédric Maury et Alain Berry.

J'ai une pensée maintenant pour toutes les amitiés que j'ai pu tisser ou entretenir durant ces trois années de thèse.

Aux amitiés lyonnaises d'abord, et notamment celles du théâtre d'improvisation.

À Adeline, Adrien, Éric, Esther, Frédéric, Gratien, Jean-Philippe, Julien M., Julien R., Lucie, Manu, Mohammed, Nadir, Nicolas, Samir, Séverine, Simon, Thibaud, tous les gens de la Bio, à Audrey, Vanessa, et bien sûr Maeva.

Mention spéciale à Tristan et Martin, pour toutes les fois où j'ai usé votre clic-clac, pour ce buffet à volonté à Givors (« Oui oui, Givors c'est à 15 min »), ou pour cet apéro claquettes-chaussettes en plein mois de Janvier. Une autre à Agnès, tu fus la seule téméraire à me suivre au wakeboard des quais du Rhône lorsque je proposais à la Terre entière de m'accompagner (« Et surtout, prends du plaisir ! »). Une dernière enfin à Camille (« Chouette, j'ai un 64 m² ! »), pour ne pas avoir coupé toute communication avec moi après ce poulet kung pao sur lequel je t'avais vendu du rêve pendant des semaines.

Aux autres rencontres de mes années de thèse, qui furent nombreuses.

Marine, évidemment, j'ai eu la chance de croiser ta route à Nantes et de ne pas te perdre de vue entretemps. Nos virées nocturnes dans le Vieux Lyon étaient toujours des plus rocambolesques. De plus, c'est peut-être un peu toi qui sans t'en rendre compte m'aura transmis ta passion pour la photographie.

Pauline bien sûr, pour tes blind-tests enflammés, apéros, pokers ou tarots au « Perchoir », pour les retours à vélo de Villeurbanne avec Julie où nous étions frappés de Gilles de la Tourette, ou pour les descentes à l'épicerie en caddie.

Arnaud et Coraline, Laura, Julien, Clara, Ludivine, cette période de fin de thèse ponctuée d'apéros réguliers fut infiniment plus agréable grâce à vous.

Anaëlle, « J'ai pas le temps ! » de te sortir une anecdote.

Cassandra, tu m'as appris que « les rhinocéros aussi violent les elephants, ou l'inverse, j'avais vu ça... »

Kevin, nos sessions de prod' étaient pas toujours productives, mais toujours marrantes ! Et ce concert de Justice à la Halle Tony Garnier était sans doute mon meilleur concert à Lyon durant ces 3 ans !

Marie-Caroline enfin, mes virées sur la « French Riviera » n'auraient pas été aussi

enrichissantes et agréables sans vos talents de ninja en cuisine, nos échanges de recettes, et les apéros improvisés.

À mes amitiés nantaises, forcément.

K2, j'ai beaucoup trop de Clément à remercier pour ne pas t'appeler par ton surnom, mais tous les fous rires que j'ai eu avec toi me font sentir chanceux de t'avoir croisé il y a 5 ans. Cacaloutre, « Pinkneyyyyy! » ne te remerciera jamais assez de lui avoir fait découvrir la joie de *Curvefever* sur vidéoprojecteur, ou comprendre l'intérêt de regarder une étape du Tour de France jusqu'au bout. Merio, tu m'as appris à laver des poireaux comme un chef, faire du foie gras et jouer du piano tout à la fois alors que nous étions tous deux SDF à l'Hôpital. Victoire, pour ta patience sans faille pour m'expliquer des règles de jeux de société obscurs lorsque je traversais la France en TGV Max. HIV, pour tes imitations de Jean-Claude Van Damme. Guano et PDD, ou devrais-je plutôt dire la Team Ibuprofène. Elsa, « il est très beau ton dessin », merci pour m'avoir convaincu de mes talents d'illustrateur. Toinon, Facteur, Bush, Padawan, bref, à tous les autres nantais, fanfarons ou non, merci à vous !

À mes amis de l'ENSTA, ensuite.

Quentin et Charles, pour ces vacances en Islande qui devaient marquer le début de ma thèse. Terre lunaire que nous avons foulé du pied pour y découvrir étrangement la prose de Michel Houellebecq, à 3000 km de la France, par le biais du livre « Plateforme », égaré sur un plateau islandais...

Clément (Jean-Michel « Lâche-moi ! ») et Clément (Jean-Michel Plante), nos rendez-vous à Cachan ou au Mauri 7 valaient largement les trajets Lyon-Paris en semaine pour vous voir, pendant cette période faste de TGV Max.

Puis à mes amitiés les plus anciennes, bien sûr.

À Guillaume, pour ta bonne humeur et ton rire communicatifs à toute épreuve. À ce France-Argentine et aux cacahuètes-olives de l'Akhaton, ou encore cette virée à Saint-Jean Cap-Ferrat.

À Joachim, pour m'avoir fait bénéficier depuis le collège de ta culture musicale immense, pour nos discussions de *fanboys* complets sur Savant ou Virtual Riot, pour avoir été le premier (et seul à ce jour !) sujet de ma série photographique consacrée aux « poteaux ».

À Marie-Pierre, pour ces vacances à Berlin ou au Portugal, pour ton écoute et ta gentillesse, et pour les fous rires nombreux que j'ai eu avec toi depuis notre rencontre en Turquie. J'ai enfin une pensée pour Clément (encore un !), mon plus vieil ami d'enfance. Toi qui es si curieux, je suis sûr que tu prendras un peu de temps pour te pencher sur ces travaux de là où tu es.

Et enfin un grand merci à ma famille, évidemment.

À ma grand-mère Éliane, d'abord. Pour nos dîners en tête-à-tête à Courbevoie, et pour tes conseils en amour, toujours hilarants (« Les filles, c'est comme les mouches ! »).

À Jean-François, mon oncle, pour sa générosité sans limites, pour ses currys thaïlandais rivalisant avec le *Rivière Kwai*, et pour m'avoir facilité mes derniers mois de thèse à Lyon en m'accueillant à la Vigie. Perché comme j'étais sur la colline de Fourvière, je ne pouvais espérer un meilleur cadre avant de quitter cette magnifique ville de Lyon pour de bon.

À mes deux frères, ensuite, Alexandre et Benjamin. La réussite du premier m'inspire chaque jour, quant au second elle ne tardera pas à venir !

À mes parents enfin, pour leur amour inconditionnel et qui chacun à leur manière m'ont toujours soutenu durant ces longues études. Mon père se lamentait régulièrement de ne pas avoir de fils médecin, mais il pourra se consoler à défaut d'en avoir un docteur. Quant à ma mère littéraire, elle sera sans doute fière que son fils ait pu produire un manuscrit de plus de 200 pages, même si celui-ci contient, il faut bien le dire, de nombreuses figures et équations...

Table des matières

Introduction	1
1 État de l'art	10
I Méthodes de discrétisation basées sur des éléments	10
I.1 Méthode par éléments finis	10
I.1.1 Principe	11
I.1.2 Limitations	12
I.2 Problème du rayonnement dans le fluide extérieur semi-infini	13
I.2.1 Couches absorbantes parfaitement adaptées (PML)	13
I.2.2 Méthode des éléments infinis	14
I.2.3 Méthode par éléments de frontière (BEM)	14
I.3 Applications aux structures immergées	15
I.4 Conclusion	17
II Structures multicouches : généralités	17
II.1 Ondes de volumes et ondes de surfaces dans les solides	17
II.2 Représentation d'une couche élastique élémentaire	19
II.2.1 Modèles réduits de Love-Kirchoff et de Reissner-Mindlin	19
II.2.2 État de déformation plane	22
III Structures multicouches : les équations à résoudre	23
III.1 Approche par sous-structuration	23
III.2 Équations de l'acoustique linéaire (couche fluide)	24
III.3 Équations de l'élastodynamique (couche solide)	24

IV	Structures multicouches : résolution de l'équation d'onde élastodynamique	26
IV.1	Équations différentielles d'ordre 2	28
IV.1.1	Géométrie plane	28
IV.1.2	Géométrie cylindrique	30
IV.2	Système différentiel d'ordre 1 et formalisme de Stroh	31
IV.2.1	Multicouches en géométrie plane	32
IV.2.2	Multicouches en géométrie cylindrique	33
V	Structures multicouches : méthodes d'assemblage	35
V.1	Conditions aux limites	35
V.2	Méthode de Thomson-Haskell : notion de matrices de transfert	36
V.2.1	Propagateur matriciel obtenu par recherche d'ondes solutions	37
V.2.2	Propagateur matriciel obtenu par intégration du système différentiel	38
V.3	Instabilités numériques de la méthode	38
V.3.1	Large fd problem	38
V.3.2	Prise en compte de couches fluides intermédiaires	40
V.4	Méthodes variantes	41
V.4.1	Opérateur delta	42
V.4.2	Méthode par matrice de raideur dynamique	43
V.4.3	Méthode par matrice hybride de souplesse-raideur	44
V.4.4	Méthode par matrice globale	45
VI	Modélisation des structures raidies périodiquement	46
VI.1	Différents cas de structures couplées à un réseau périodique de raidisseurs	47
VI.2	Modèles de raidisseurs	49
VI.3	Méthodes de couplage	51
VI.4	Modèle cylindrique multicouche retenu pour l'étude	54
VII	Plan du manuscrit	55

2	Décomposition de Helmholtz et matrice globale	58
I	Résolution du problème dans une couche élémentaire	59
I.1	Cas d'une couche élémentaire solide	59
I.2	Cas d'une couche élémentaire fluide	62
II	Assemblage du système multicouche	64
II.1	Relations de continuité aux interfaces de la structure	64
II.1.1	Interfaces internes	64
II.1.2	Interfaces extrémales du système multicouche	65
II.1.3	Conditions aux limites aux frontières du domaine	66
II.2	Construction de la matrice globale	67
II.2.1	Remplissage de la matrice globale	67
II.2.2	Nombre d'équations et d'inconnues du système à résoudre	68
II.2.3	Excitation par onde plane incidente	69
II.2.4	Calcul du champ de pression spectral à la cote antenne	70
III	Instabilités liés à la géométrie cylindrique	71
III.1	Choix des fonctions de Bessel	71
III.1.1	Propagation dans la cavité interne	73
III.1.2	Propagation dans les couches internes de la structure	73
III.1.3	Propagation dans le fluide extérieur semi-infini	75
III.1.4	Choix de la phase de la constante de propagation radiale	75
III.2	Évaluation des fonctions de Bessel : erreurs d'arrondis	77
III.2.1	Simple et double précision	77
III.2.2	Plage dynamique des fonctions de Bessel	79
III.2.3	Instabilité aux régimes élevés : normalisation des fonctions de Bessel	80
III.2.4	Instabilité aux bas régimes de $\gamma_w r$	82
III.2.5	Évaluation des fonctions de Bessel aux ordres supérieurs	85
III.2.6	Évaluation des dérivées successives des fonctions de Bessel	88
IV	Implémentation numérique	88
IV.1	Réponse d'antenne	88

IV.2	Architecture du code	89
IV.3	Méthode de résolution du système normalisé	91
IV.3.1	Conséquences de la normalisation du système	91
IV.3.2	Reconstruction du vecteur déplacements-contraintes	96
V	Illustration des problèmes d'instabilité numérique	97
V.1	Présentation des cas tests	97
V.2	Instabilités numériques aux régimes élevés de $\text{Im}(\gamma_w r)$	100
V.2.1	Sur le choix des fonctions de Bessel	100
V.3	Instabilités aux bas régimes de $\gamma_w r$	102
V.3.1	Sur les pôles des fonctions de Bessel : quadruple précision numérique	103
VI	Conclusion	106
3	Formalisme de Stroh et matrices de transfert	107
I	Résolution du problème dans une couche élémentaire	108
I.1	Cas d'une couche élémentaire solide	108
I.1.1	Formalisme de Stroh	108
I.1.2	Méthode de subdivision en sous-couches	113
I.1.3	Sur le comportement asymptotique de la matrice de Stroh	115
I.1.4	Sur le pas de subdivision utilisé pour les configurations tests	115
I.2	Cas d'une couche élémentaire fluide	116
II	Procédure classique d'assemblage du système multicouche : propagation du vecteur d'état	117
II.1	Configurations multicouches sans couches fluides intermédiaires	117
II.1.1	Relations de continuité	117
II.1.2	Établissement de la matrice de transfert élémentaire d'une couche solide	118
II.1.3	Construction de la matrice de transfert globale du multi- couche	119
II.2	Configurations multicouches avec couches fluides intermédiaires	119

II.2.1	Relations de continuité	119
II.2.2	Condensation des matrices de transfert des couches solides	120
II.2.3	Construction de la matrice de transfert globale du multi- couche	121
II.3	Nombre d'équations et d'inconnues du système à résoudre	122
II.4	Calcul du champ de pression spectral à la cote antenne	123
II.4.1	Cas d'un multicouche entièrement solide	124
II.4.2	Cas d'un multicouche comportant des couches fluides in- termédiaires	125
III	Instabilités numériques	125
III.1	Sur la difficulté d'établir un critère d'instabilité et d'utiliser la quadruple précision	125
III.2	Mise en évidence du <i>large fd problem</i>	127
III.3	Prise en compte des couches fluides intermédiaires	129
III.3.1	Configurations tests avec lame d'eau fluide	129
III.3.2	Condensation des matrices solides	131
III.3.3	Introduction d'une vitesse de cisaillement dans l'eau . . .	133
IV	Assemblage des matrices de transfert par matrice globale	135
IV.1	Construction de la matrice globale	136
IV.1.1	Relations de continuité aux interfaces de la structure . . .	137
IV.1.2	Nombre d'équations et d'inconnues du système à résoudre	141
IV.1.3	Calcul du champ de pression spectral à la cote antenne . .	143
V	Résolution des deux types d'instabilités observées sur la TMM	143
V.1	Étude dans le domaine spectral	143
V.2	Réponse d'antenne	144
VI	Conclusion	146
4	Couplage du système multicouche au réseau de raidisseurs	147
I	Modèle retenu pour la structure multicouche raidie	148
II	Approche par sous-structuration et principe de superposition	149

III	Méthode de couplage : formalisme commun aux deux méthodes	151
III.1	Réponse du sous-système SS1	151
III.1.1	Réponse à l'onde plane incidente	152
III.1.2	Réponse à la réaction du réseau de raidisseurs	153
III.2	Réponse du sous-système SS2	154
III.2.1	Géométrie retenue pour chaque raidisseur	155
III.2.2	Modélisation par éléments finis des raidisseurs	155
III.3	Couplage des deux sous-systèmes SS1 et SS2	157
III.3.1	Compatibilité des sous-systèmes	157
III.3.2	Force de réaction du réseau périodique sur le multicouche	158
III.3.3	Cas particulier de l'excitation par onde plane	160
III.4	Calcul du champ de pression au rayon d'antenne	161
III.4.1	Spectre du champ de contraintes au rayon d'antenne	161
III.4.2	Reconstruction dans le domaine physique	163
IV	Conclusion	165
5	Validation numérique des modèles	166
I	Réponse en signal des structures lisses en géométrie plane	167
I.1	Plaque épaisse multicouche et modèle simplifié	168
I.2	Modèle simplifié : cas d'un réflecteur idéal	170
I.2.1	Calcul du champ de pression	171
I.2.2	Modes d'épaisseur et interférences destructives	171
I.3	Plaque multicouche : comportement de la plaque d'acier	173
I.4	Plaque multicouche sans matériau de revêtement : interférences destructives	175
I.5	Plaque multicouche avec matériau de revêtement : modes d'épaisseur	178
I.6	Plaque d'acier nue : observation dans le plan site-gisement	181
II	Validation numérique : configurations lisses	182
II.1	Confrontation au modèle plan	182
II.1.1	Incidence normale	182

II.1.2	Incidence oblique	185
II.2	Validation par comparaison à un modèle éléments finis	188
II.3	Incidence oblique	193
II.4	Coût numérique	194
III	Validation numérique des modèles complets sur les configurations raidies .	196
III.1	Stabilité et convergence numérique	197
III.1.1	Comparaison de la stabilité numérique entre les deux modèles	198
III.1.2	Précision numérique et différences observées entre les méthodes hDGM et sDGM	201
III.1.3	Instabilités numériques	203
III.1.4	Amortissement fluide : atténuation des instabilités	206
III.1.5	Étude de la convergence numérique	209
III.2	Comparaison à un modèle éléments finis	211
III.2.1	Critère de discrétisation	211
III.2.2	Confrontation du modèle hDGM aux modèles éléments finis	212
III.2.3	Coût numérique	214
III.3	Intérêt de la prise en compte des renforts internes	215
IV	Conclusion	217
Conclusion générale et perspectives		219
Annexe A Autour de la décomposition de Helmholtz		223
I	Expressions des matrices élémentaires solide et fluide	223
I.1	Matrice élémentaire solide	224
I.2	Matrice élémentaire fluide	224
Annexe B Autour de la méthode par matrices de transfert		225
I	Formalisme de Stroh	225
I.1	Formulaire	225
I.2	Démonstration de l'établissement du système différentiel	226
I.3	Matrice des admittances au rayon interne dans le cas lisse	227

II	Interprétation du <i>large fd problem</i>	227
II.1	Instabilité du système différentiel de Stroh	228
II.1.1	Rappels sur les notions de stabilité et de stabilité asymptotique	228
II.1.2	Cas d'un système linéaire à coefficients constants	229
II.1.3	Amplitude des valeurs propres du système de Stroh	231
II.2	Influence de la procédure d'assemblage sur la stabilité de la solution	233
II.2.1	Rappels sur la stabilité des schémas numériques à 1 pas	234
II.2.2	Analogie avec la procédure classique d'assemblage de la TMM	235
II.2.3	Subdivision en sous-couches	236

Bibliographie		239
----------------------	--	------------

Introduction

Contexte industriel

Modéliser le comportement vibro-acoustique d'une structure industrielle est un enjeu majeur, et la modélisation des sous-marins ne fait pas exception. En effet, pour vérifier les exigences acoustiques et vibratoires sans entraîner un coût de développement prohibitif, il est important de pouvoir effectuer la conception de ces systèmes avant production. Par conséquent, les simulations numériques se révèlent indispensables.

Les sous-marins sont conçus pour générer le moins de bruit possible afin de ne pas être détectés par des navires adverses, tout en étant eux-mêmes équipés de systèmes de détection SONAR, actifs ou passifs. Les premiers émettent des trains d'onde pour explorer le fond marin en analysant les réflexions des ondes émises sur les objets rencontrés, quand les seconds doivent rester discrets en écoutant les sons qui leur parviennent.

Les antennes de flanc font partie de la catégorie des SONARS passifs, et sont de première importance puisque les SONARS actifs ne peuvent pas être utilisés en patrouille opérationnelle sans risque de détection. Le rôle des antennes de flanc est de garantir la sécurité du sous-marin lors des phases de veille passive, par la détection, l'identification et la localisation d'éventuels *bruiteurs*, c'est-à-dire les cibles à détecter, potentiellement des navires adverses. Les performances de l'antenne de flanc vont dépendre tout à la fois *du réseau de capteurs* en lui-même, de *la structure d'antenne*, mais également de *la plateforme porteuse* sur laquelle elle est intégrée.

Description physique de l'antenne de flanc

Le réseau de capteurs

On parle d'antenne pour désigner le récepteur étendu constitué d'un groupe de plusieurs hydrophones élémentaires. Chacun de ces hydrophones consiste en un transducteur électroacoustique sensible à la pression acoustique à sa surface et capable de la convertir en un signal électrique [1]. La technologie de ce type de transducteur repose sur les propriétés piézoélectriques de certains cristaux, naturels ou obtenus artificiellement.

La structure d'antenne

La structure de l'antenne permet l'intégration de celle-ci sur le flanc du sous-marin. Elle comprend les éléments suivants :

- Une *fenêtre acoustique* située sur la face avant qui permet d'éloigner les capteurs de l'écoulement, et ainsi le découplage vis-à-vis du bruit hydrodynamique sur l'antenne. Pour maintenir une bonne transparence acoustique, les hydrophones sont généralement noyés dans une matrice polyuréthane dont l'impédance est adaptée à celle du fluide extérieur.
- Une *structure mécanique* qui assure l'encapsulation, le positionnement, l'isolation vis-à-vis des vibrations de coque, et la tenue au choc des capteurs, de la connectique et de l'électronique.
- Un éventuel *baffle acoustique* situé sur la face arrière, et qui assure l'homogénéité de la réponse signal de tous les capteurs, une éventuelle amplification du signal, et le découplage vis-à-vis des vibrations de la coque.

En ce qui concerne le choix du baffle acoustique, plusieurs solutions sont envisageables :

- Un réflecteur dur, réalisé en pratique par un matériau haute impédance type acier ou plomb.
- Un réflecteur mou, c'est-à-dire un matériau basse impédance.
- Un matériau anéchoïque, caractérisé par une impédance adaptée à celle de l'eau, mais fortement amorti.

La plateforme

La plateforme (ou le porteur) de l'antenne de flanc n'est rien d'autre que la coque du sous-marin. Celle-ci est constituée d'une coque cylindrique en acier, nue ou surmontée de matériaux viscoélastiques de revêtement. Par ailleurs, elle est renforcée par un réseau de raidisseurs axisymétriques, nécessaires pour tenir la pression hydrostatique aux grandes profondeurs. L'épaisseur de la coque, la géométrie et l'espacement des raidisseurs peuvent varier le long du sous-marin, mais sont généralement considérés comme constants sur la longueur de l'antenne de flanc en première approximation. Dans ce cas, le réseau de renforts internes est dit *périodique*.

On représente en Fig. 1 la structure d'antenne une fois intégrée à la coque résistante du véhicule :



FIGURE 1 – Exemple d'une antenne de flanc intégrée à un véhicule sous-marin

Les matériaux de revêtement viscoélastiques qui surmontent la coque ont des propriétés très différentes de celles de l'acier, et sont généralement utilisés à la fois pour maîtriser la signature acoustique du bâtiment, mais également l'environnement acoustique dans lequel l'antenne est intégrée, afin d'optimiser ses performances.

Par ailleurs, les renforts internes, axisymétriques, sont destinés à renforcer la structure afin de réduire l'épaisseur et le poids de la coque cylindrique tout en permettant de supporter la pression hydrostatique exercée sur le véhicule en eaux profondes.

La présence de ce réseau est responsable d'inhomogénéités locales suivant l'axe de la structure, et modifie donc son comportement vibro-acoustique : d'une part celle-ci augmente

l'efficacité de rayonnement de la structure immergée, ainsi que ses fréquences propres de rayonnement [2, 3]. D'autre part, ils sont responsables de phénomènes caractéristiques de diffusion acoustique aux basses fréquences qui contribuent significativement à la détection et l'identification du sous-marin : la diffraction de Bragg d'une part, et les ondes de Bloch-Floquet d'autre part [4]. Si ces phénomènes peuvent être diminués à moyenne et haute fréquence par l'emploi de matériaux fortement atténuants, ils restent problématiques aux basses fréquences, de l'ordre du kHz. La dépendance de la réponse vibro-acoustique quant à la présence du réseau de raidisseurs motive sa prise en compte pour la modélisation envisagée.

Enfin, les effets de courbure de la coque, qui sont de moindre importance seulement au-delà de sa fréquence d'anneau, vont également impacter aux basses fréquences le comportement vibro-acoustique au niveau des capteurs. Cela motive la prise en compte de la géométrie cylindrique pour la suite de l'étude.

Principe de fonctionnement de l'antenne

Rapport signal à bruit

La performance en détection de l'antenne SONAR est mesurée par le rapport signal à bruit RSB_{FV} en sortie de la formation de voie (FV) opérée par la chaîne de traitement électronique qui récupère le signal reçu par chacun des hydrophones [5]. Ce rapport signal à bruit peut être décomposé comme le produit du rapport signal à bruit moyen en sortie d'hydrophone RSB_{hydro} par le gain de formation de voie G_{FV} qui dépend de la technologie et du traitement d'antenne, comme écrit dans l'équation (1) :

$$RSB_{FV} = RSB_{hydro}G_{FV} \quad (1)$$

D'une part, le rapport signal à bruit sur capteur RSB_{hydro} est basé sur la *réponse en signal moyenne* sur capteur et la *réponse en bruit moyenne* sur capteur. Ces quantités sont calculées à partir des différentes réponses en signal et réponses en bruit mesurées sur chacun des capteurs d'antenne, qui sont différentes entre chaque hydrophone du fait de l'inhomogénéité de l'environnement acoustique.

D'autre part, le gain de formation de voies appliqué par la chaîne électronique de l'antenne n'est pas sensible à la valeur absolue des réponses en signal, mais est par contre fortement influencé par les dispersions éventuelles des réponses en signal collectées depuis les différents hydrophones.

Réponse en signal

Les capteurs d'antenne étant situés à proximité de la coque, ceux-ci ne mesurent non pas la pression incidente, mais la pression totale, somme de la pression incidente et de la pression diffractée par la coque. On parlera de *réponse en signal* pour désigner la pression totale générée par une pression incidente au niveau des capteurs d'antenne. Celle-ci est fortement dépendante des caractéristiques de la coque, si aucune opération de découplage n'est entreprise. De plus, le réseau de renforts internes constitue des inhomogénéités locales suivant l'axe de la structure, et justifient également le choix pouvant être fait d'isoler les hydrophones de la coque.

Inclure un baffle acoustique dans la structure d'antenne est justifié par cette problématique, et a pour but de garantir l'homogénéité des réponses en signal mesurées par chaque capteur. On parle alors d'antenne *bafflée*, cependant l'indépendance des différentes réponses en signal quant à la présence de la coque n'est vérifiée en pratique qu'au-delà d'une certaine fréquence, du fait des contraintes de poids et d'encombrement. En particulier le choix d'un baffle dur va considérablement alourdir la structure d'antenne. Par ailleurs, un autre inconvénient concerne le choix d'un baffle mou ou anéchoïque, qui présentent des caractéristiques variables en température et pression, ce qui entraîne des dispersions sur la réponse en signal élémentaire des hydrophones en fonction de leur positionnement.

À l'inverse, on parle d'antenne *non bafflée* lorsque l'intégration de la structure mécanique et des capteurs est faite directement par-dessus la coque d'acier, sans aucun baffle acoustique. La réponse en signal sur chaque capteur est alors entièrement dépendante de la plateforme porteuse dans toute la bande d'étude.

Même si l'absence de baffle acoustique conduit à des dispersions des réponses en signal sur les différents hydrophones dues aux inhomogénéités locales de la coque (raidisseurs, cloisons), ce type d'antenne comporte néanmoins plusieurs avantages par rapport à une

solution *bafflée* :

- Un gain de signal de +6dB dès les basses fréquences, difficile à obtenir pour une antenne bafflée.
- Une épaisseur et un poids de l'antenne faibles par rapport aux solutions bafflées.
- Une stabilité de la réponse en signal en sortie d'hydrophone en fonction de la température et de la pression.

Réponse en bruit

La réponse en bruit moyenne sur capteur obtenue à partir des différentes réponses en bruit mesurées sur chaque hydrophone va inclure le *bruit ambient* (ou bruit de surface) généré par le milieu marin, le *bruit de trafic* rayonné par les navires commerciaux, et enfin le *bruit propre* généré par le porteur sur l'antenne.

Ce dernier type de bruit décrit le champ de pression généré au niveau des capteurs d'antenne dû à des sources de bruit autres que la cible à détecter. Les différentes contributions de ce niveau de bruit propre peuvent être caractérisées par le type d'excitation de la structure :

BRUIT MÉCANIQUE

Les vibrations engendrées par des éléments internes au sous-marin (moteur, générateurs, équipage) peuvent dégrader le rapport signal sur bruit de l'antenne à cause d'un rayonnement en champ proche au niveau des capteurs. De plus, ces vibrations peuvent être une cause de détection par un SONAR passif adverse, car les vibrations du véhicule en mouvement impactent directement la *discrétion acoustique* en champ lointain.

En pratique, la solution industrielle classique apportée pour maîtriser le bruit mécanique est d'utiliser des revêtements de masquage, constituées de matériaux passifs à faible impédance acoustique, afin de limiter la transmission des vibrations de la coque d'acier jusqu'aux capteurs d'antenne ou dans le fluide extérieur.

De plus, tous les éléments internes susceptibles de vibrer qui sont en contact avec la coque seront découplés le plus possible de celle-ci en étant montés par des dispositifs de type « silent blocks », réalisés par exemple avec des plots en élastomère.

BRUIT HYDRODYNAMIQUE

L'écoulement de l'eau sur la surface de l'antenne en mouvement et les turbulences associées génèrent également un bruit hydrodynamique d'écoulement au niveau des capteurs. Ce bruit est atténué par l'éloignement des capteurs de la face avant de l'antenne par la fenêtre acoustique discutée précédemment.

L'environnement acoustique dans lequel seront enfouis les hydrophones d'une antenne de flanc est donc très influent sur le signal mesuré par les capteurs. Si celui-ci est très inhomogène, les dispersions engendrées seront responsables d'écarts significatifs sur la réponse en signal de la structure et d'une dégradation des performances d'antenne. C'est ce qui motive dans cette étude de considérer un modèle pour la plateforme porteuse d'un degré de complexité élevé, afin de développer un outil prédictif de ces écarts.

Objectifs et contenu de la thèse

Dans ce contexte, l'objectif de la thèse a été de modéliser la réponse en signal d'une coque cylindrique munie de revêtements et renforcée par un réseau périodique de raidisseurs axisymétriques à une onde plane incidente.

Pour avoir une finalité industrielle, le modèle à développer doit respecter différents critères :

- une plage fréquentielle étendue, de quelques Hz à plusieurs kHz pour des configurations réalistes de sous-marins.
- la prise en compte des matériaux de revêtement acoustiques surmontant la coque.
- la prise en compte de la géométrie cylindrique de la structure.
- la prise en compte des renforts internes, en autorisant une flexibilité sur la géométrie retenue pour les raidisseurs.
- un coût numérique qui restera compétitif par rapport à des méthodes classiques de type éléments finis et qui ne deviendra pas prohibitif même aux fréquences élevées.

Dans le but d'atteindre l'ensemble de ces fonctionnalités, deux axes de performances ont été gardés à l'esprit pour décider des méthodes implémentées :

LA COMPLEXITÉ PHYSIQUE

Tout d'abord, les caractéristiques particulières des matériaux de revêtement vont motiver le développement d'un outil basé sur un modèle multicouche. De tels matériaux peuvent être très mous (célérités de compression et de cisaillement très faibles), c'est-à-dire que les longueurs d'onde sont très petites devant l'épaisseur.

Par conséquent, un modèle de coque épaisse s'appuyant sur les équations complètes de l'élastodynamique sera nécessaire pour décrire correctement ces matériaux, là où un modèle réduit de type coque mince limitera forcément les performances de l'outil développé, ainsi que sa fiabilité.

La généralité des matériaux décrits par le modèle sera également discutée, le cas d'anisotropie le plus général étant souhaitable pour l'outil final, toutes choses égales par ailleurs.

De plus, on accordera un soin particulier à la prise en compte de la géométrie cylindrique, pour tenir compte des effets de courbure aux basses fréquences qui influent sur la réponse. Enfin, le modèle devra coupler les méthodes retenues pour la structure multicouche à un deuxième sous-système représentant le réseau périodique de raidisseurs axisymétriques.

L'EFFICACITÉ NUMÉRIQUE

Le deuxième axe de développement de l'outil sera son efficacité numérique.

Si une méthode semi-analytique sera retenue, elle devra se montrer compétitive par rapport à des techniques classiques de résolution type éléments finis, pour lesquels la modélisation d'une structure complète en échelle 1 peut très vite être coûteuse numériquement.

Par exemple, la prise en compte d'un nombre indéterminé de matériaux de revêtement supposés très mous nécessiterait des maillages très fins et volumineux en termes de taille et nombre de mailles, qui se révéleraient d'un coût prohibitif aux hautes fréquences avec ces approches, et ce même en réduisant le domaine de calcul en exploitant l'axisymétrie et la périodicité de la structure.

Dans le chapitre suivant, on décrit le contexte scientifique dans lequel ce travail de

thèse s'inscrit, puis on présente la stratégie de modélisation envisagée.

Communications et publications liées à la thèse

Les travaux décrits dans ce manuscrit ont également fait l'objet des communications et publications suivantes :

- Communications orales
 - M. Dana, L. Maxit, and J. Bernard. Modélisation numérique de structures cylindriques multicouches excitées par une onde plane : comparaison de différentes méthodes. Communication orale donnée aux *JAAN2017*, 5^{ème} édition des *Journées Acoustique et Applications Navales*, déroulée les 26-27 Octobre 2017 à Ollioules, France - [6]
- Actes de conférences internationales
 - M. Dana, L. Maxit, and J. Bernard. Prédiction de la réponse vibro-acoustique de coques cylindriques revêtues immergées. Actes du *CFA '18*, 14^{ème} Congrès Français d'Acoustique (pages 1147-1153), déroulé du 23 au 27 Avril 2018 au Havre, France - [7]
 - M. Dana, L. Maxit, and J. Bernard. Vibroacoustic response of an immersed stiffened multilayered shell excited by a plane wave. Actes de *Inter-Noise 2018 - 47th International Congress and Exposition on Noise Control Engineering*, déroulé du 26 au 29 Août 2018 à Chicago, Illinois, USA - [8]
- Articles en cours de publication dans un journal international à comité de lecture
 - M. Dana, L. Maxit, and J. Bernard. A spectral global matrix method for modelling the response of a fluid-loaded multilayered cylindrical shell excited by an acoustic plane wave. (*en cours de publication*), 2019 - [9]

Chapitre 1

État de l'art

Dans cet état de l'art, on s'intéresse dans un premier temps aux méthodes de simulation vibro-acoustique basées sur une discrétisation par éléments. Ces méthodes permettent de simuler le comportement vibro-acoustique de systèmes mécaniques complexes. On met cependant en lumière leurs limitations pour les cas que l'on souhaite traiter. On s'intéresse alors dans un second temps aux différentes méthodes dédiées à la modélisation d'un cylindre multicouche immergé puis on se focalise sur la modélisation des structures raidies périodiquement. De cette étude bibliographique découle la méthode considérée dans cette thèse. On conclut donc ce chapitre par le plan du manuscrit.

I Méthodes de discrétisation basées sur des éléments

Dans cette section on s'intéresse aux méthodes classiques de type éléments finis ou éléments de frontière pour représenter le problème considéré tel qu'il est décrit dans l'introduction.

I.1 Méthode par éléments finis

La méthode des éléments finis a progressivement fait son apparition depuis les années 1950, notamment grâce au travail de Hrennikoff [10] ou encore celui de Courant [11]. Elle repose sur la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles en établissant une

formulation variationnelle des équations locales à résoudre. Il s'agit donc d'une méthode de résolution approchée, et les solutions du problème obtenu par la formulation variationnelle vérifient alors des conditions d'existence plus faibles que les solutions du problème initial. Adaptée à la résolution de problèmes physiques, elle est couramment utilisée comme méthode de discrétisation afin de simuler le comportement de structures complexes proches de cas pratiques. Ses principes généraux ainsi qu'un certain nombre de variantes quant à sa mise en oeuvre sont regroupés dans l'ouvrage de Zienkiewicz & Taylor [12].

I.1.1 Principe

Pour une structure raidie *in vacuo* (i.e sans tenir compte du couplage avec un fluide intérieur ou extérieur), on peut la représenter par un modèle éléments finis. Le principe général de la méthode est d'établir une version *approchée* du problème à résoudre, obtenue par une formulation variationnelle appliquée sur les équations du problème exact. Le champ de déplacements du problème résolu est approximé par interpolation sur les *déplacements nodaux*. L'interpolation est faite via les *fonctions de forme*, qui dépendent du type d'éléments choisi pour la modélisation. Après application du principe des déplacements virtuels, le problème approché relie tous les déplacements nodaux du maillage aux efforts nodaux appliqués via les matrices de raideur, d'amortissement et de masse du système discrétisé. Différentes approches peuvent alors être envisagées pour résoudre le système approché :

CALCUL DIRECT : La résolution est directement effectuée par inversion matricielle, sans réduire le nombre de degrés de liberté du système. Cette approche permet une bonne précision numérique sur les résultats obtenus mais souffre d'un coût numérique élevé, qui peut devenir prohibitif pour des applications industrielles où les systèmes peuvent avoir des millions de degrés de liberté.

SUPERPOSITION MODALE : Une alternative pour réduire le nombre de degrés de liberté est de résoudre le système discrétisé sur une base modale réduite, déterminée en résolvant le problème aux valeurs propres pour le système conservatif associé. Une procédure d'orthogonalisation effectuée sur la base infinie des modes propres

permet alors de réduire le système à une série d'équations découplées. La solution en déplacements est alors recomposée par combinaison linéaire de toutes les solutions modales.

Cette approche a l'avantage d'être beaucoup plus rapide que la méthode d'inversion directe, car elle réduit drastiquement le nombre de degrés de liberté du système. En revanche, sa convergence numérique est mauvaise en-dehors des résonances du système, et ce à cause de la troncature numérique de la base modale infinie.

SUPERPOSITION MODALE ET MODES RÉSIDUELS : Pour compenser les erreurs dues à la troncature de la base modale, certains auteurs [13, 14, 15] complètent celle-ci par la solution du problème quasi-statique, calculée en résolvant le problème aux valeurs propres pour une fréquence très basse. L'idée est de tenir compte des contributions des modes résiduels, oubliées du fait de la troncature. La nouvelle base est ensuite diagonalisée en base orthogonale pour maintenir les propriétés d'orthogonalité des différents modes. On peut alors recomposer une solution pour les déplacements dont la convergence numérique est bien meilleure que dans la précédente approche, tout en conservant le gain numérique de celle-ci par rapport à la méthode par inversion directe.

I.1.2 Limitations

Si la méthode par éléments finis s'est rapidement répandue dans le milieu industriel, elle présente néanmoins certaines limites quand elle est appliquée à des configurations industrielles nécessitant de discrétiser la structure avec un grand nombre de mailles. L'analyse n'est alors souvent réalisable que pour une plage fréquentielle relativement basse, en raison du théorème d'échantillonnage de Shannon [16], qui énonce qu'au moins 2 échantillons par longueur d'onde (ou par cycle d'une certaine fonction périodique) sont nécessaires pour détecter la fréquence vibratoire correspondante. Par conséquent, l'application de ce théorème entraîne pour la modélisation par éléments finis la nécessité de choisir une taille de maille suffisamment petite pour décrire correctement les phénomènes physiques en jeu. Plus la fréquence de calcul sera élevée, plus cette taille de maille sera

petite.

Dans la pratique, deux points de calcul par longueur d'onde ne sont pas suffisants, en particulier Schmiechen [17] le met en évidence pour l'analyse modale de structures axisymétriques. Il énonce que cette précaution ne permet pas de trouver précisément les modes de la structure, et préconise de raffiner davantage le maillage à un facteur 3 ou 5 supplémentaire. Ceci est équivalent à 6 ou 10 noeuds par longueur d'onde, dans le cas d'éléments coque bilinéaires. Cependant, la règle des 6 points par longueur d'onde quel que soit le type d'éléments choisi est généralement adoptée et assure la convergence numérique. Une limitation aux méthodes éléments finis est la résolution des systèmes non bornés, comme le rayonnement d'une structure dans un milieu infini.

I.2 Problème du rayonnement dans le fluide extérieur semi-infini

Le problème de structures rayonnant dans des milieux de propagation non bornés a motivé le développement de nombreuses méthodes numériques qui sont toutes confrontées au même problème, à savoir vérifier la condition de rayonnement à l'infini de Sommerfeld pour la solution calculée. Celle-ci assure que l'énergie acoustique est bien rayonnée vers l'*extérieur* de la structure et que les ondes divergentes sont bien dissipées aux bords du domaine. Cela empêche ainsi toute réflexion de ces ondes à la frontière, et donc la génération d'ondes convergentes qui conduisent à une accumulation de l'énergie dans le domaine numérique, provoquant des erreurs numériques désastreuses. On distingue ici trois approches classiquement employées pour traiter le problème de rayonnement dans un milieu non borné.

I.2.1 Couches absorbantes parfaitement adaptées (PML)

Une première solution est de recourir aux éléments finis également dans le fluide extérieur, mais en s'assurant que les ondes rayonnées par la structure ne se réfléchiront pas aux bords du domaine. L'approche par couches absorbantes parfaitement adaptées (en anglais *Perfectly Matched Layers*, d'où son acronyme PML) est à l'origine proposée par

Bérenger [18] en 1994. Elle consiste à étendre le domaine de calcul derrière le domaine fluide par une couche artificielle absorbante. Celle-ci est conçue pour absorber les ondes se propageant à l'infini et dissiper leur énergie en modifiant la dérivée spatiale dans l'équation d'onde. Le domaine de calcul numérique peut alors être tronqué sans que des ondes réfléchies à sa frontière ne soient générées et faussent la solution.

I.2.2 Méthode des éléments infinis

La méthode des éléments infinis adapte la méthode par éléments finis classique aux problèmes de propagation dans des milieux non bornés, en modélisant entièrement le milieu semi-infini par des éléments d'étendue infinie. Les fonctions d'interpolation utilisées pour de tels éléments sont choisies de façon à représenter des trains d'onde s'éloignant à l'infini. L'approche qui s'est rapidement imposée [19, 20, 21, 22, 23] pour appliquer la méthode des éléments infinis porte le nom de *Wave Envelope method* (WE), et se distingue par l'utilisation de fonctions tests construites à partir des conjugués des fonctions de forme. Elle permet l'utilisation des méthodes classique d'intégration de quadrature de Gauss utilisées en éléments finis pour évaluer les matrices élémentaires du système.

I.2.3 Méthode par éléments de frontière (BEM)

Une autre alternative est spécifiquement développée pour s'adapter aux problèmes de rayonnement dans des milieux de propagation infinis. Il s'agit de la méthode des éléments de frontière [24, 25, 26] (en anglais *Boundary Element Method*, désignée sous l'acronyme BEM). Celle-ci repose sur la formulation intégrale de la solution de l'équation de Helmholtz utilisée uniquement sur la *surface* rayonnante de la structure, une fois celle-ci discrétisée. Par conséquent, cette méthode réduit la dimension du problème et apparaît plus appropriée aux problèmes de rayonnement dans des milieux infinis, car seule la surface de la frontière du domaine nécessite d'être maillée. En outre la condition de Sommerfeld de rayonnement à l'infini est satisfaite automatiquement avec cette méthode via le noyau des formulations intégrales qui répond exactement aux conditions aux limites pour des domaines infinis, contrairement à la méthode par éléments finis [22]. Néanmoins, cette méthode n'est pas

idéale en termes de coût numérique, car même si la formulation intégrale permet de s'affranchir du maillage du domaine de propagation, celle-ci conduit à la résolution d'un problème impliquant des matrices très denses, si bien que le coût numérique en temps et en mémoire croît de manière quadratique avec le nombre de degrés de liberté [27].

Par conséquent, plusieurs méthodes ont été développées pour optimiser la formulation par éléments de frontière en permettant de se ramener à une complexité algorithmique quasilinear. Elles sont généralement regroupées sous le terme de *Fast Boundary Element Method*, et en particulier Brunner & Al. [27] en présentent deux sur le cas d'une structure immergée dans l'eau :

- La méthode multipolaire rapide, désignée en anglais par l'acronyme FMM (pour *Fast Multipole Method*), et qui utilise une décomposition en série de la solution.
- L'approche par matrices hiérarchiques (*H-matrix*) qui repose sur une approximation de rang faible d'une matrice dense par une matrice creuse structurée récursivement.

En conclusion, la perception selon laquelle la BEM est l'option numérique la plus efficace pour traiter les problèmes non bornés est discutable. D'une part les approches FMM ou par matrices hiérarchiques reformulent la méthode BEM d'origine et permettent la résolution de problèmes avec un très grand nombre de degrés de libertés. D'autre part, le recours à la BEM a été peu à peu remis en question par l'émergence croissante des méthodes utilisant des éléments infinis comme celles dont on vient de discuter plus haut.

I.3 Applications aux structures immergées

Les différentes méthodes discutées précédemment sont appliquées largement dans la littérature au cas d'une structure immergée, raidie ou non.

Zampolli & al. [28] utilisent une méthode par éléments finis pour discrétiser à la fois la structure et le fluide extérieur, en recourant à une PML pour fermer le domaine de calcul. Les auteurs effectuent une mise à l'échelle dépendante de la longueur d'onde qui leur permet de définir des couches absorbantes d'une même épaisseur pour tout le régime de fréquence étudié. Merz & al. [29, 30] utilisent une méthode couplée en discrétisant une coque mince raidie par des éléments finis de Reissner-Mindlin, autorisant le cisaillement

transverse, et traitent le problème de propagation dans le fluide extérieur par la méthode d'éléments de frontière. Cependant, l'analyse se limite aux seules basses fréquences, i.e inférieures à quelques Hz, car le coût numérique de la méthode est élevé. Peters & al. [31] développent un modèle réduit en utilisant une décomposition modale, moins coûteux numériquement. Néanmoins, en considérant une configuration réaliste de sous-marin (coque d'acier d'épaisseur 40 mm, de diamètre 6,5 m et de longueur 45 m), les auteurs ne présentent pas de résultats dans un régime fréquentiel au-delà de la centaine de Hertz avec cette approche.

L'approche de Zhou & Joseph [32] est encore différente. Par une technique de décomposition du potentiel des vitesses, ils établissent une formulation BEM *découplée* pour le chargement fluide, où les coefficients de masse ajoutée et d'amortissement dus à celui-ci sont indépendants de la structure. Leur calcul BEM est ainsi utilisé en donnée d'entrée du calcul éléments finis effectué sur la coque.

Toutes ces méthodes souffrent d'un coût numérique élevé, qui réduit d'autant la plage fréquentielle d'applicabilité, et mettent en relief l'avantage que peut avoir le recours à des méthodes analytiques. En particulier, Remillieux & Burdisso [33] vérifient la précision d'une méthode analytique développée par Hull & Welch [34] pour la réponse d'une plaque revêtue immergée et couplée à un réseau de raidisseurs. Les auteurs utilisent un calcul éléments finis, et exploitent la périodicité du réseau pour diminuer le nombre de mailles en appliquant des conditions de Bloch périodiques aux bords du domaine de maillage réduit. De plus, ils font l'hypothèse d'un état de déformation plane afin de réduire encore davantage le coût numérique et calculer sur un domaine bidimensionnel. Pourtant, malgré ces précautions, le maillage des domaines solide et acoustique qu'ils utilisent comporte 120 497 éléments finis triangulaires, et est raffiné aux jonctions plaque-revêtement et plaque-raisseurs de façon à atteindre une taille de maille inférieure au millimètre. Leur calcul a un coût numérique 140 fois plus élevé que celui de Hull & Welch. Par ailleurs, un seul revêtement acoustique est pris en compte, or le modèle attendu pour cette étude devra gérer un nombre arbitraire de revêtements acoustiques, qui plus est des matériaux aux célérités encore plus basses que celles du matériau anéchoïque considéré dans la configuration de Hull & Welch. À fréquence donnée, cela implique des longueurs d'onde

encore plus petites, donc une taille de maille davantage réduite, et un coût numérique plus coûteux encore.

I.4 Conclusion

Pour cette étude, on écartera donc les méthodes de type éléments finis pour résoudre le problème d'interaction fluide-structure de la coque multicouche couplée aux fluides. On privilégiera à la place des méthodes analytiques, en particulier appliquées dans le domaine spectral. En revanche, on aura recours aux éléments finis pour caractériser la dynamique de chaque raidisseur du réseau de renforts internes couplé à la coque. Le formalisme pour coupler le modèle multicouche analytique au modèle éléments finis des raidisseurs fera l'objet d'un développement dédié lors de l'étude.

II Structures multicouches : généralités

II.1 Ondes de volumes et ondes de surfaces dans les solides

L'intérêt d'étudier les structures multicouches n'a cessé de croître dans les dernières décennies du fait de leur large spectre d'applications industrielles, notamment dans le domaine naval. Néanmoins, ce sujet d'étude ne date pas d'hier, et les premiers travaux sont principalement l'oeuvre des sismologues et des géophysiciens qui se sont penchés sur la propagation d'ondes dans les solides.

En 1906, Oldham [35] identifie les *ondes de volumes* longitudinales P et transversales S en mettant en évidence l'existence du manteau terrestre. Celles-ci sont identifiées par leurs célérités relatives, les ondes longitudinales étant habituellement plus rapides que les ondes transversales, mais aussi par la direction du déplacement des particules excitées à leur passage, qu'on appelle la polarisation de l'onde : pour une onde longitudinale, celle-ci est parallèle à la direction de propagation de l'onde, tandis que pour une onde de cisaillement la propagation est perpendiculaire à la polarisation, ce qui est représenté en Fig. 1.1.

On distingue les ondes transversales polarisées dans le plan vertical du solide (ondes SV) de celles polarisées dans le plan horizontal (ondes SH). Dès lors que le solide possède

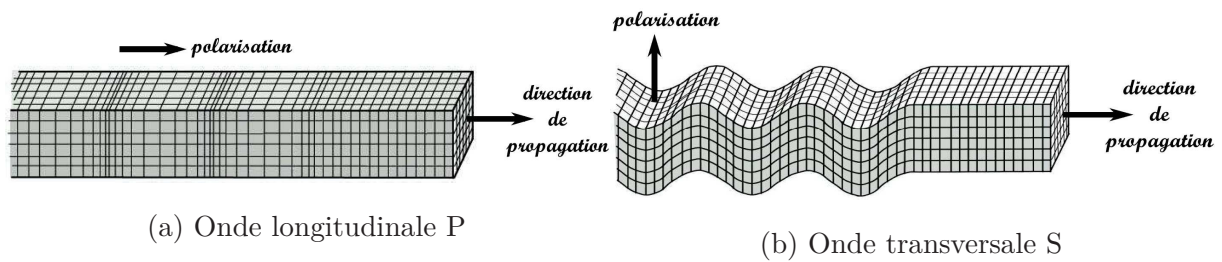


FIGURE 1.1 – Ondes P et S - Directions de polarisation (Source : [36])

une interface, les différentes ondes de volume vont y interagir. Cette interaction ne concerne pas les ondes transversales horizontales (SH) dont la polarisation n'est pas modifiée lors d'une réflexion sur l'interface [37], mais ces phénomènes de conversion vont donner lieu à de nouveaux types d'ondes qui vont dépendre de la nature de l'interface et des milieux de propagation. Ces ondes générées sont dites *ondes de surface* : tandis que les ondes de volume s'étendent dans tout le milieu de propagation, celles-ci sont guidées par l'interface et y restent confinées sur une épaisseur d'environ une longueur d'onde.

En 1885, Lord Rayleigh [38] développe un formalisme pour étudier les ondes se propageant à la surface libre d'un milieu solide élastique semi-infini. Les racines d'une équation de troisième ordre permet de déterminer la vitesse de phase des ondes de Rayleigh se propageant parallèlement à cette surface.

Stoneley généralise en 1924 [39] le problème de l'interface simple pour décrire les ondes se propageant à l'interface entre deux solides élastiques différents. On parle d'onde de Stoneley pour décrire l'onde de surface se propageant à une interface solide-solide, et d'ondes de Scholte à une interface solide-fluide. Ce dernier précise les conditions d'existence des modes propagatifs dans l'un ou l'autre des deux solides en 1947 [40], tandis que celles des modes évanescents le sont par Pilant en 1972 [41].

En 1917, Lamb [42] introduit la notion d'épaisseur finie et permet de décrire de manière plus réaliste les ondes de surface se propageant dans une couche solide. Son formalisme est développé pour une plaque dans le vide et il établit deux équations, l'une pour les modes symétriques et l'autre pour les modes antisymétriques, dont les racines déterminent les courbes de dispersion des ondes de Lamb.

Love quant à lui montre [43] que les modes transverses impliquant des effets de cisaillement

dans le plan du milieu, pouvaient se développer dans des couches d'épaisseur finie. Introduire la notion d'épaisseur de couches a ouvert davantage de champs de recherche, et notamment dans le domaine naval, où l'étude des structures multicouches a un intérêt majeur.

II.2 Représentation d'une couche élastique élémentaire

Plusieurs méthodes existent pour résoudre la solution dans une couche élémentaire, mais reposent sur des modèles simplifiés de l'élasticité tridimensionnelle ; en sortant de ce cadre, elles permettent une analyse beaucoup plus simple du système étudié, mais ne sont valides que sous la réserve d'hypothèses supplémentaires, ou pour des régimes de fréquences bien particuliers.

II.2.1 Modèles réduits de Love-Kirchoff et de Reissner-Mindlin

Deux modèles réduits par rapport au modèle élastique complet sont généralement choisis pour la résolution des structures multicouches :

1. La théorie de Love-Kirchoff, ou théorie classique des plaques minces
2. La théorie de Reissner et Mindlin, ou théorie des plaques épaisses

Les deux théories se placent dans le cadre des petites déformations comme le modèle élastique complet et supposent que le plan moyen est initialement plan. De plus, elles partagent la première hypothèse de la théorie de Love-Kirchoff, à savoir :

L-K1 : Le feuillet moyen ne subit pas de déformation dans son plan.

Celle-ci implique que les déplacements dans le plan sont nuls sur le feuillet moyen, et pour les points d'une fibre normale situés en-dehors, ceux-ci sont uniquement induits par la rotation de la fibre autour des axes x et y , repérée par les angles θ_x et θ_y .

Sous l'hypothèse des petites déformations, le champ de déplacements peut alors s'écrire :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} z\theta_y \\ -z\theta_x \\ u_z(x, y, t) \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

II.2.1.1 Insuffisance du modèle de Love-Kirchhoff

La théorie de Love-Kirchhoff renforce encore l'hypothèse L-K1. D'une part, elle suppose l'épaisseur de la plaque faible et invariante durant la déformation, et de plus néglige le cisaillement transverse (suivant l'épaisseur) en faisant l'hypothèse supplémentaire suivante :

L-K2 : Les sections normales au feuillet moyen restent normales lors de la déformation.

Celle-ci entraîne que les angles θ_x et θ_y représentent également la pente du feuillet moyen, ainsi on peut écrire :

$$\begin{aligned}\theta_x &= \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \theta_y &= -\frac{\partial u_z}{\partial x}\end{aligned}\tag{1.2}$$

Dans ce cadre, les déformations suivant l'épaisseur de la plaque sont nulles, et l'hypothèse de faible épaisseur implique également la nullité des contraintes dans le sens de l'épaisseur. Ce comportement simplifié de plaque comporte des lacunes rédhibitoires :

- l'énergie de cisaillement est négligée, ce qui est très peu réaliste de la configuration réelle pour les cas d'excitation envisagés. Pour le seul cas de la réponse signal, le cisaillement, au moins en incidence oblique, ne peut être négligé.
- les contraintes suivant l'épaisseur sont nulles, ce qui encore une fois est rédhibitoire car l'outil développé doit pouvoir tenir compte notamment des modes d'épaisseur se propageant dans les revêtements basse célérité surmontant la coque d'acier.
- Enfin, négliger le cisaillement pose un problème d'incompatibilité du modèle de Love-Kirchhoff si on veut imposer des conditions aux limites en cisaillement. Ce problème constitue le "paradoxe de Poisson", qui est largement discuté dans la littérature [44, 45]

II.2.1.2 Insuffisance du modèle de Reissner-Mindlin

Éric Reissner en 1945 [46], puis Mindlin [47] d'une manière similaire en 1951, proposent une extension de la théorie des plaques de Love-Kirchhoff qui tient compte du cisaillement transverse. Aujourd'hui leur modèle est l'un des modèles réduits de plaques élastiques le

plus fréquemment utilisé, et son développement a été motivé principalement pour résoudre le paradoxe de Poisson évoqué précédemment.

Ce paradoxe tient au fait que dans la théorie de Love-Kirchhoff, le déplacement normal à la plaque vérifie une équation aux dérivées partielles (EDP) d'ordre 4. Or une EDP d'ordre 4 ne peut satisfaire que *deux* conditions aux limites sur son bord. Étant donné qu'en un point du bord du domaine *trois* conditions de Poisson doivent être appliquées pour imposer l'effort de cisaillement, le moment fléchissant, et le moment de torsion, il y a incompatibilité du modèle de Love-Kirchhoff pour imposer en contraintes [45].

Le modèle de Reissner-Mindlin est introduit pour résoudre ce problème en permettant la prise en compte d'une déformation de cisaillement transverse. Les fibres normales restent rectilignes après déformation, par contre elles ne restent plus nécessairement normales au feuillet moyen lors de la déformation, et l'hypothèse L-K2 est relaxée.

Ce modèle est généralement dit de "plaques épaisses", bien que la preuve de sa capacité à modéliser une plaque de n'importe quelle épaisseur et pour n'importe quel type d'efforts imposés est sujet à discussion. Le modèle de Reissner-Mindlin se révèle en effet plus précis que le modèle de Love-Kirchhoff, mais surtout pour des plaques relativement peu épaisses, ou lorsque l'effort de cisaillement prédomine le comportement de la plaque [45, 48].

Surtout, il ne converge pas systématiquement vers le modèle complet d'élasticité, en particulier Zhang [45] discute du comportement du modèle de Reissner-Mindlin dans trois cas distincts : si la plaque est dominée par un mouvement de flexion, par un effort de cisaillement, ou le cas intermédiaire où aucun des deux effets ne dominant. Si dans le premier cas les deux modèles réduits se révèlent fiables, celui de Reissner-Mindlin réussit lorsque le cisaillement est prépondérant, là où le modèle de Love-Kirchhoff échoue, comme on pouvait le prévoir.

En revanche, dans le cas intermédiaire, le modèle de Reissner-Mindlin comparé au modèle élastique complet présente une erreur relative, qui n'est pas proportionnelle à l'épaisseur de la plaque, donc persiste même si on fait tendre celle-ci vers des valeurs très faibles.

Dans ces conditions, il a paru prudent d'écartier également le modèle de Reissner-Mindlin pour la suite de l'étude.

Ces deux modèles de plaques ont été évoqués car ils constituent la base de modèles

similaires adaptés à l'étude de multicouches stratifiés : la CLPT (Classical Laminated Plate Theory) [49] qui reprend les hypothèses cinématiques de Love-Kirchhoff, et la FSDT (First-Order Shear Deformation Theory) [49] qui généralise celui de Reissner-Mindlin.

Cependant, ils ne s'appliquent qu'aux matériaux composites pour prendre en compte les orientations différentes des fibres des empilements orthotropes du matériau, et seraient inadaptés rapidement en fréquence pour représenter une coque d'acier épaisse munie de revêtements.

II.2.2 État de déformation plane

Une autre hypothèse cinématique pour simplifier les équations est de considérer un état de déformation plane, ce qui se justifie lorsqu'une dimension de la structure dans une direction est très grande devant celles des deux autres directions.

Autrement dit, lorsque la longueur d'onde reste petite devant cette dimension, on peut supposer qu'il n'y a pas de propagation dans cette direction, et le problème tridimensionnel est ramené à un problème à deux dimensions.

Dans le domaine ultrasonore, cette hypothèse est par conséquent largement utilisée pour traiter le problème des multicouches plans [50, 51, 52], en particulier pour le cas d'excitation par onde plane incidente. Cependant, elle contraint d'une part à limiter la plage fréquentielle de validité, et d'autre part à ne considérer que le cas isotrope.

Concernant le problème de la géométrie cylindrique, Dutrion [53] utilise également une hypothèse de déformation plane, et restreint de ce fait l'étude de la coque dans un plan de coupe. Bien que la coque soit supposée infinie, ce type d'approche n'est pas adaptable à notre problème :

- D'une part, on ne peut étudier que les modes circonférentiels de la structure, et non plus les modes axiaux se propageant le long de l'axe de la coque. Or, ceux-ci interagissent fortement avec les raidisseurs axisymétriques placés périodiquement le long de la coque.
- Dans le cas d'une réponse à l'onde plane, ces modes axiaux sont excités dans la structure axisymétrique pour une incidence oblique, par conséquent cette hypothèse

contraindrait l'étude dans le cas cylindrique au seul cas d'incidence normale.

Les deux hypothèses présentées ci-dessus et rencontrées dans la littérature ne sont pas envisageables pour la suite de l'étude. Ces différents constats nous font écarter les modèles réduits qui viennent d'être discutés, et on s'en tiendra donc au modèle d'élasticité complet.

III Structures multicouches : les équations à résoudre

III.1 Approche par sous-structuration

En 1997, Skelton et James [54] présentent la plupart des théories développées relatives aux structures multicouches, à géométrie cylindrique ou plane.

Pour résoudre ce type de système, une approche par sous-structuration est classiquement adoptée. Celle-ci considère la structure multicouche comme un assemblage de couches élémentaires. Dans cette étude, celles-ci seront supposées constituées soit de matériaux solides homogènes, c'est-à-dire sans gradient de propriété, soit de couches fluides, ce qui dans la pratique permet la prise en compte de lames d'eau dans la structure.

On présente ici les équations à résoudre dans chaque couche élémentaire. Le cas d'une couche fluide se place dans le cadre de l'acoustique linéaire, tandis que sous l'hypothèse des petites déformations, le modèle d'élasticité complet délimite celui adopté pour une couche solide.

La présentation des différentes méthodes existantes pour chaque étape de la résolution sera l'occasion de discuter également des différences qu'impliquent dans les méthodes de résolution :

- les hypothèses faites sur les équations à résoudre
- la prise en compte de la géométrie cylindrique
- la généralité du matériau décrite

III.2 Équations de l'acoustique linéaire (couche fluide)

Pour une couche fluide élémentaire, pour lesquelles on désigne par ρ , c_L et \mathbf{u} respectivement la masse volumique, la célérité des ondes acoustiques, et le déplacement particulaire, les trois lois fondamentales de l'acoustique linéaire en milieu fluide sont l'équation d'Euler, l'équation de conservation de la masse et l'équation d'état du fluide, écrites ci-dessous en l'absence de terme source :

$$\begin{aligned} -\nabla p &= \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= c_L^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.3)$$

En supposant le fluide homogène, on peut aboutir à partir de ces trois équations à une équation d'onde vérifiée par la pression acoustique, dite *équation des ondes* :

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4)$$

L'équation (1.4) est une équation d'onde longitudinale dite de dilatation-compression, dont la célérité c dépend du support fluide dans laquelle l'onde acoustique se propage.

III.3 Équations de l'élastodynamique (couche solide)

L'hypothèse des petites perturbations permet de linéariser les équations dynamiques décrivant l'état de chaque couche élémentaire.

Pour un solide homogène d'anisotropie quelconque, les trois relations fondamentales de l'élasticité linéaire sont rappelées ci-dessous.

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

Celles-ci résultent du principe fondamental de la dynamique appliqué à un élément volumique infinitésimal de matière :

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \rho \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1.5)$$

en notant $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ le tenseur des contraintes, \mathbf{f} les forces volumiques et \mathbf{u} le champ de déplacements.

RELATION DE CAUCHY

Dans l'hypothèse des petites déformations, on peut exprimer les déformations linéairement aux déplacements, via la relation de Cauchy, en notant $\underline{\underline{\epsilon}}$ le tenseur des déformations :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}}\mathbf{u} + \underline{\underline{\nabla}}^T\mathbf{u}) \quad (1.6)$$

LOI DE HOOKE

La loi de Hooke découle de l'hypothèse de petites déformations et suppose une déformation élastique fonction linéaire des contraintes.

En adoptant la convention d'Einstein pour les tenseurs des contraintes et de déformations, elle s'exprime comme suit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{ij} \quad (1.7)$$

où le tenseur des rigidités C_{ijkl} , symétrique d'ordre 4, caractérise le matériau d'une couche donnée.

On peut éliminer le tenseur des déformations en injectant son expression (1.6) dans (1.7), ce qui conduit au système d'équations de l'élastodynamique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i &= \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \end{aligned} \quad (1.8)$$

On précise que les tenseurs des déformations et des contraintes sont symétriques d'ordre 2, tandis que le tenseur des rigidités est symétrique d'ordre 4. En exploitant ces symétries, on peut caractériser le tenseur des rigidités par seulement 21 constantes élastiques indépendantes dans le cas d'anisotropie le plus général, tandis que l'hypothèse d'isotropie réduit à 2 le nombre de composantes indépendantes pour caractériser le matériau.

Dans ce dernier cas, les constantes élastiques C_{11} et C_{12} , les coefficients de Lamé λ et μ ou encore le couple (E, ν) constitué du module d'Young et du coefficient de Poisson permettent de décrire le comportement élastique du solide. Le coefficient de Poisson caractérise la contraction de la matière perpendiculairement à la direction de l'effort appliqué, et le

module d'Young la rigidité du matériau par le rapport de la contrainte de traction ou de compression appliquée sur la déformation résultante.

La loi de Hooke se réduit alors à :

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad (1.9)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, valant 1 pour $i = j$, 0 sinon.

On établit dans la section suivante l'équation d'onde de l'élastodynamique vérifiée par le champ de déplacement dans une couche élémentaire, en combinant les équations (1.5), (1.6) et (1.7). La forme et la complexité de cette équation d'onde conditionnent le choix de la méthode de résolution pour les déplacements et contraintes dans chaque couche solide élémentaire.

IV Structures multicouches : résolution de l'équation d'onde élastodynamique

Le système d'équations (1.8) conduit à une formulation en déplacements en éliminant le tenseur des contraintes des équations du mouvement :

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.10)$$

L'équation précédente (1.10) ne peut être résolue simplement dans le cas le plus général, et les différentes hypothèses formulées sur la généralité du matériau décrit ou la géométrie de la structure vont contribuer à différencier les méthodes de résolution.

Toutes les couches sont d'abord supposées homogènes, sans gradient de propriété, par conséquent le tenseur des constantes élastiques associé à chaque couche est indépendant des variables d'espace, si bien que le deuxième terme du membre de gauche de (1.10) disparaît.

Ce terme peut être vu comme un terme d'hétérogénéité, qui introduit une dépendance des coefficients des équations différentielles par rapport aux variables d'espace, rendant sa résolution exacte directe impossible.

Dans ces conditions, le système d'équations différentielles d'ordre 2 à résoudre pour les déplacements s'exprime :

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.11)$$

Cependant, exprimé dans le système de coordonnées cylindriques, le système d'équations (1.11) n'est pas non plus à coefficients matriciels constants, du fait de la dépendance de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ en la variable radiale :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.12)$$

Ainsi, le déplacement dans un cylindre multicouche constitué de matériaux homogènes ne peut pas être résolu dans le repère cylindrique de la même manière qu'en géométrie plane.

C'est une différence majeure entre les deux types de géométrie, qui se retrouve au niveau des trois équations différentielles d'ordre 2 vérifiées par les composantes du déplacement. Dans le cas plan, ces équations sont à coefficients constants, autorisant la recherche de solutions sous la forme d'ondes planes harmoniques [54, 55].

Par contre, dans le cas cylindrique, les coefficients des équations différentielles d'ordre 2 ne sont pas constants. Dans le cas particulier d'isotropie, on peut résoudre analytiquement ces équations car l'équation (1.10) dégénère en l'équation de Navier [54] (valable également en coordonnées cartésiennes) :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.13)$$

Cependant, les solutions font intervenir dans le cas cylindrique des fonctions spéciales (Bessel, Hankel) et un autre axe de résolution préféré par certains auteurs [53, 56, 57] consiste à écrire une autre formulation, qui repose sur le formalisme de Stroh. Celle-ci est plus adaptée pour la résolution du cas général de couches cylindriques anisotropes.

En l'absence de forces volumiques, l'équation (1.10) homogène peut être vue comme une généralisation à trois dimensions pour un solide anisotrope de l'équation de propagation acoustique dans un fluide établie en (1.4) [37].

C'est un système de trois équations à trois inconnues à coefficients éventuellement non

constants car potentiellement dépendants des seules variables d'espace, puisqu'on considère le régime forcé et par conséquent une indépendance en temps. Ces équations sont des équations différentielles d'ordre deux, pour lesquelles 6 solutions élémentaires existent.

On va détailler dans les paragraphes suivant les avantages et inconvénients d'utiliser soit l'équation d'onde de l'élastodynamique sous sa forme brute, soit une reformulation du problème basée sur le formalisme de Stroh.

IV.1 Équations différentielles d'ordre 2

IV.1.1 Géométrie plane

Dans le cas d'une géométrie plane, l'hypothèse d'homogénéité des matériaux suffit à rendre les coefficients matriciels du système d'équations (1.11) indépendants des variables d'espace. L'indépendance spatio-temporelle des caractéristiques du milieu, et donc des coefficients des équations différentielles (1.10), autorise la recherche de solutions sous la forme d'ondes planes progressives harmoniques :

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x}}{c} \right) \right] \quad (1.14)$$

pour une onde se propageant avec une vitesse de phase c , dans une direction définie par le vecteur unitaire $\boldsymbol{\tau}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, perpendiculaire aux plans d'onde d'équation $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x}$, et de polarisation \mathbf{p} (i.e la direction du mouvement des particules).

En remplaçant l'expression (1.14) dans l'équation d'onde de l'élastodynamique en l'absence de forces volumiques, on obtient l'équation de Christoffel, qui donne les vitesses de phase et les polarisations des ondes planes susceptibles de se propager suivant une même direction dans un matériau d'anisotropie quelconque [37] :

$$c_{ijkl}\tau_j\tau_k p_l = \rho c^2 p_i \quad (1.15)$$

que l'on peut écrire sous forme vectorielle :

$$\Gamma(\boldsymbol{\tau})\mathbf{p} = \rho c^2 \mathbf{p} \quad (1.16)$$

où on a introduit le tenseur $\Gamma_{il}(\boldsymbol{\tau}) = C_{ijkl}\tau_j\tau_k$.

Pour une direction $\boldsymbol{\tau}$ fixée, on a donc à résoudre un problème aux valeurs propres : les valeurs propres $\gamma = \rho c^2$ donnent les vitesses de phase des ondes planes se propageant dans un solide de rigidité c_{ijkl} et les vecteurs propres correspondent aux polarisations \mathbf{p} .

À partir des propriétés de symétrie de c_{ijkl} , on peut montrer que le tenseur Γ est d'une part symétrique, et de plus défini positif : ses valeurs propres $\gamma = \rho c^2$ sont donc réelles et positives et ses vecteurs propres orthogonaux.

En conclusion trois ondes planes peuvent se propager dans une même direction, leurs polarisations sont orthogonales et leurs vitesses de propagation éventuellement différentes. Les trois vecteurs propres du tenseur Γ_{il} , i.e les champs de déplacement associés à ces trois ondes planes, ne sont en général pas colinéaires ni perpendiculaires à la direction de propagation $\boldsymbol{\tau}$.

L'onde dont la polarisation est la plus proche de $\boldsymbol{\tau}$ est appelée onde quasi-longitudinale L (analogue à l'onde P pour un solide isotrope, purement longitudinale et associée à la valeur propre $\gamma_L = \rho c_L^2$). Les deux autres ondes sont appelées quasi-transversales, celle polarisée presque horizontalement est notée T_1 , celle polarisée presque verticalement suivant la direction d'épaisseur est notée T_2 .

Dans le cas particulier d'un solide isotrope, les ondes T_1 et T_2 se propagent à la même vitesse de propagation c_T (car alors la valeur propre $\gamma_T = \rho c_T^2$ associée est dégénérée). La vitesse de chacune de ces deux ondes est, le plus souvent, inférieure à celle de l'onde quasi-longitudinale L .

En principe, on peut chercher une solution en déplacement dans une couche élémentaire comme somme des trois ondes planes volumiques montantes et descendantes, soit sur la base de 6 vecteurs propres au total, que l'on notera $(\mathbf{u}_L^\pm, \mathbf{u}_{T_1}^\pm, \mathbf{u}_{T_2}^\pm)$, associées aux valeurs propres $(\gamma_L^\pm, \gamma_{T_1}^\pm, \gamma_{T_2}^\pm)$, qui sont les constantes de propagation des ondes planes associées suivant l'épaisseur du multicouche.

Plusieurs auteurs ont utilisé la décomposition en ondes volumiques pour établir une formulation du problème multicouche anisotrope en configuration plane [54, 58, 59, 60, 61, 62]. Parfois, des hypothèses supplémentaires sont formulées dans la pratique pour mener la résolution analytique à son terme, notamment en réduisant le problème au cas bidimension-

nel. Les deux ondes quasi-transverses dégénèrent alors en une seule, et le champ solution dans la couche peut être décrit par seulement 4 ondes volumiques (deux montantes et deux descendantes). En supposant un état de déformation plane et en ne considérant que le cas d'isotropie, certains [59, 63, 64] établissent l'expression analytique des coefficients d'une matrice élémentaire reliant un vecteur d'état déplacements-contraintes aux amplitudes des ondes L et T_1 ; en considérant une direction de propagation dans l'un des plans de symétrie principaux du matériau anisotrope étudié, Hosten & Castaings [65] dérivent également une matrice de transfert élémentaire de taille 4×4 réduite.

D'autres auteurs simplifient seulement l'anisotropie du matériau à la symétrie orthorhombique et étudient le problème tridimensionnel pour une direction de propagation quelconque [54, 60].

Alors que Hosten & Castaings [60] établissent l'expression analytique de la matrice de passage entre le vecteur d'état des déplacements-contraintes et les amplitudes des ondes L , T_1 et T_2 , Skelton [54] résout une équation caractéristique pour obtenir les composantes suivant l'épaisseur du nombre d'onde des ondes solutions, pour construire une matrice de raideur dynamique élémentaire.

IV.1.2 Géométrie cylindrique

En géométrie cylindrique, le système d'équations (1.10) est à coefficients non constants, et peut être résolu tel quel uniquement dans le cas particulier d'isotropie, pour laquelle la recherche de solutions sous la forme d'ondes volumiques s'identifie à la méthode de décomposition de Helmholtz, qu'on détaille dans le paragraphe qui suit.

IV.1.2.1 Décomposition en potentiels de Helmholtz

L'équation (1.10), réduite désormais à l'équation de Navier (1.13) sous l'hypothèse d'isotropie, est un système de trois équations couplées.

Le point essentiel qu'exploite la décomposition de Helmholtz est qu'il est possible alors de découpler ces équations en supposant que le champ des déplacements solution dérive d'un

potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \nabla \Psi_L + \nabla \times \mathbf{X}, \\ \mathbf{X} &= \Psi_{T_1} \mathbf{e}_z + \nabla \times (-\Psi_{T_2} \mathbf{e}_z)\end{aligned}\tag{1.17}$$

En injectant la décomposition (1.17) dans l'équation de Navier (1.13), celle-ci se réduit à un système d'équations d'ondes vérifiées par les trois potentiels Ψ_L , Ψ_{T_1} et Ψ_{T_2} :

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Psi_L - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \Psi_L}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \Psi_{T_1} - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \Psi_{T_1}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \Psi_{T_2} - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \Psi_{T_2}}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}\tag{1.18}$$

Ce résultat mathématique est initialement appliqué aux cylindres élastiques isotropes excités par une onde plane acoustique sous incidence normale par Faran [66] en 1951. Elle est reprise par différents auteurs, en particulier White [67] introduit en 1958 la possibilité d'une incidence oblique de l'onde excitant le cylindre élastique, tandis que Doolittle et Überall [68] adaptent en 1966 la méthode au cas de couches cylindriques, en ajoutant la prise en compte des conditions de continuité au niveau des interfaces entre couches.

Dans un cas particulier d'isotropie transverse où la direction de renforcement des fibres est dirigée suivant l'axe du cylindre, une extension de la méthode de décomposition en potentiels est envisageable, par des techniques décomposant le vecteur déplacement en trois termes, les deux premiers correspondant au cas isotrope. Le troisième terme varie d'un auteur à l'autre, certains [69, 70, 71, 72] choisissent de l'exprimer en fonction des potentiels des deux premiers termes, tandis que d'autres [73, 74, 75] utilisent un troisième potentiel. Honarvar et al. [76] montrent que dans ce cas, l'onde se propageant dans le matériau peut être vue comme une combinaison d'une onde de compression et de deux ondes de cisaillement, l'une polarisée horizontalement (onde SH), l'autre verticalement (onde SV).

IV.2 Système différentiel d'ordre 1 et formalisme de Stroh

Le formalisme de Stroh réarrange les équations (1.10) de l'élastodynamique en un système différentiel d'ordre 1 vérifié par un vecteur d'état constitué des déplacements et

du vecteur traction suivant l'épaisseur. Nombre d'auteurs de la littérature anglosaxonne le désignent également *sextic-formalism* ou encore *state-vector formalism*.

Stroh [77] établit ce formalisme en 1962 pour traiter un certain nombre de problèmes bidimensionnels en élastostatique, mais l'extension au problème élastique complet a été réalisée par la suite par d'autres auteurs [78, 79, 80]. Si ce formalisme s'adapte très bien pour traiter les structures multicouches planes constituées de matériaux homogènes, il présente surtout un vif intérêt pour traiter les milieux continûment variables ou à géométrie cylindrique, lorsque le système (1.10) est à coefficients non constants.

Le système réarrangé est de la forme :

$$\frac{d}{dr}\mathbf{V}(r) = \mathbf{Q}(r)\mathbf{V}(r) \quad (1.19)$$

où la matrice \mathbf{Q} supposée de dimension n ne dépend que de la variable radiale, et le vecteur d'état s'écrit à l'aide du champ de déplacement et des contraintes radiales :

$$\mathbf{V}(r) = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma}_r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_r = [\sigma_{rr} \quad \sigma_{r\phi} \quad \sigma_{rz}]^T \quad (1.20)$$

Si une condition initiale vient compléter le système (1.19), alors le théorème de Picard-Lindelöf assure l'existence et l'unicité de la solution au problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\mathbf{V}(r) &= \mathbf{Q}(r)\mathbf{V}(r) \\ \mathbf{V}(r_0) &= \mathbf{V}^0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

IV.2.1 Multicouches en géométrie plane

Dans le cas de la géométrie plane, la matrice \mathbf{Q} est à coefficients constants, et la solution exacte du système (1.21) prend l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(r) &= \mathbf{M}(r, r_0)\mathbf{V}^0, \\ \text{avec } \mathbf{M}(r, r_0) &= \exp[(r - r_0)\mathbf{Q}] \end{aligned} \quad (1.22)$$

Dans ce cas particulier, la formulation ne nécessite pas de méthode d'intégration particulière et la solution exacte s'exprime alors au moyen d'une exponentielle matricielle classique.

L'évaluation de la matrice $\mathbf{M}(r, r_0)$ peut être obtenue de différentes façons :

- En la diagonalisant, ce qui nécessite la connaissance de ses valeurs propres et de ses vecteurs propres.
- Par la formule de Sylvester, qui nécessite seulement la connaissance des valeurs propres λ_k de $\mathbf{A} = (r - r_0)\mathbf{Q}$, ce qui permet de contourner le calcul des vecteurs propres pouvant parfois être lourd :

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n \exp(\lambda_k) \frac{\prod_{p \neq k} (\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I})}{\prod_{p \neq k} \lambda_p - \lambda_k} \quad (1.23)$$

- Par un développement de l'exponentielle sous forme de série, où seule la connaissance de \mathbf{Q} suffit :

$$\mathbf{M}(r, r_0) = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (r - r_0)^n \mathbf{Q}^n \quad (1.24)$$

En pratique, ces méthodes analytiquement exactes finissent par être approchées à un certain moment de la résolution numérique. La détermination des valeurs propres de la matrice \mathbf{Q} nécessite la résolution d'une équation caractéristique cubique en λ^2 , tandis qu'un développement limité de la fonction exponentielle se substitue en pratique à son développement en série. La précision numérique dépend alors des termes d'ordre plus élevé ayant été tronqués. En particulier Huang & Nutt [55] utilisent le formalisme de Stroh suivi d'un assemblage par matrices de transfert pour calculer les coefficients de transmission et de réflexion de panneaux sandwichs dans le cas tridimensionnel et anisotrope le plus général. Ils évaluent l'exponentielle matricielle par un développement limité poussé au troisième ordre, et précisent que si cette approximation permet une résolution fiable pour des panneaux minces, elle semble être insuffisante pour des panneaux plus épais.

IV.2.2 Multicouches en géométrie cylindrique

IV.2.2.1 Méthode exacte

Dans le cas où la matrice \mathbf{Q} est à coefficients non constants, en supposant tous ses coefficients bornés sur l'intervalle d'étude, et celui-ci fini et intégrable au sens de Riemann

[81], Pease [82] démontre en 1965 l'existence d'une solution au système (1.21), nommée *matricant*, et dont l'expression analytique peut être mise sous la forme d'une série de Peano :

$$\mathbf{M}(r, r_0) = \mathbf{I} + \int_{r_0}^r \mathbf{Q}(\xi) d\xi + \int_{r_0}^r \mathbf{Q}(\xi) \int_{r_0}^{\xi} \mathbf{Q}(\xi_1) d\xi_1 d\xi + \dots \quad (1.25)$$

À l'époque, Pease décrit cette solution analytique en émettant des réserves sur sa mise en oeuvre dans la pratique, du fait de son coût numérique élevé.

Mais les progrès effectués en informatique et l'accroissement des puissances de calcul ont rendu possible aujourd'hui l'implémentation de cette méthode. Baron [83] l'applique en 2005 au cas des milieux continûment variables lors de sa thèse de doctorat, et transpose ensuite sa méthode en 2011 [84] au cas des cylindres anisotropes à gradient de propriété radial.

IV.2.2.2 Méthode approchée

Cependant, pour des raisons de facilité d'implémentation et de coût numérique, d'autres méthodes analytiquement approchées peuvent fournir une alternative à la décomposition en série de Peano de la matrice *matricant*.

La méthode la plus simple suppose la variable radiale r constante dans la matrice $\mathbf{Q}(r)$ de façon à pouvoir intégrer le système (1.21) de la même manière que dans le cas plan, et se ramener à la solution (1.22).

Une telle hypothèse est valide si la couche élémentaire considérée est "suffisamment fine", par conséquent la méthode ne se justifie qu'à condition de subdiviser chaque couche élémentaire en plusieurs sous-couches indépendantes, dans lesquelles r peut être approximé constant.

Dans la pratique, peu d'auteurs privilégient la méthode exacte utilisée par Baron pour traiter le cas de l'anisotropie cylindrique. L'implémentation fastidieuse de la décomposition en série de Peano du *matricant*, et son coût numérique qui reste élevé malgré les progrès en puissance calculatoire effectués ces dernières décennies, poussent beaucoup d'auteurs à se tourner vers la méthode de subdivision en sous-couches de chaque couche élémentaire, qui est largement utilisée pour traiter le cas de cylindres anisotropes [53, 56, 57, 85].

Ces méthodes supposent des propriétés physiques constantes dans chaque sous-couche et les méthodes d'assemblage des sous-couches sont les mêmes que celles utilisées pour l'assemblage des couches évoquées dans la section qui suit.

V Structures multicouches : méthodes d'assemblage

Après ce tour d'horizon, qui ne saurait être exhaustif, des méthodes existantes pour obtenir un champ de déplacement solution dans la couche élémentaire, il est naturel de se pencher sur les différentes méthodes d'assemblage du système multicouche. On peut résumer le choix d'une méthode d'assemblage à deux étapes :

- le choix du vecteur d'état
- la façon d'écrire la continuité des déplacements et des contraintes aux interfaces entre les couches

Tout d'abord, on précise les hypothèses qui sont faites à chaque interface *solide-solide* ou *solide-fluide*, afin d'écrire les conditions aux limites entre deux couches élémentaires, ou aux abords des fluides interne et externe.

V.1 Conditions aux limites

On considère deux types d'interfaces différents, les interfaces *solide-solide*, et les interfaces du type *solide-liquide*. D'une part, les interfaces entre deux couches solides seront supposées *parfaites*, ce qui implique la continuité des déplacements et du vecteur traction suivant l'épaisseur de la structure multicouche. Par ailleurs, les couches de fluide, ainsi que les deux fluides occupant la cavité interne et le milieu semi-infini extérieur, seront supposés parfaits. Par conséquent, le cisaillement ne pourra être propagé à une interface *solide-liquide* et les contraintes tangentielles devront s'y annuler. De plus, les déplacements tangentiels seront libres car il y a condition de glissement entre le fluide parfait et le solide. Seul le déplacement normal et la contrainte normale à l'interface devront être conservés,

ce qui est résumé ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}|_{r=a^+} \cdot \mathbf{e}_r &= \mathbf{u}|_{r=a^-} \cdot \mathbf{e}_r \\ \sigma_{rr}|_{r=a^+} &= \sigma_{rr}|_{r=a^-}\end{aligned}\tag{1.26}$$

V.2 Méthode de Thomson-Haskell : notion de matrices de transfert

Thomson [59] est le premier en 1950 à mettre en équation la propagation d'ondes élastiques dans un multicouche formé d'un nombre arbitraire N de couches solides homogènes *en géométrie plane*. Sa formulation est légèrement rectifiée en 1953 par Haskell [63], raison pour laquelle on parle usuellement de *méthode de Thomson-Haskell*.

En choisissant l'axe x pour direction suivant l'épaisseur du multicouche plan, on introduit une matrice de transfert élémentaire pour chaque couche solide, notée T_k , et les déplacements et contraintes normales à la face supérieure $x = x_k$ de la couche considérée sont reliés aux mêmes champs évalués sur la face inférieure $x = x_{k-1}$. On parle alors de vecteur d'état, noté $\mathbf{V}_k = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}_x)_k^T$, avec $\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \end{bmatrix}^T$:

$$\mathbf{V}_k(x_k) = \mathbf{T}_k \mathbf{V}_k(x_{k-1})\tag{1.27}$$

La continuité des déplacements et des contraintes normales à chaque interface du multicouche, $\mathbf{V}_k(x_k) = \mathbf{V}_{k+1}(x_k)$, permet de propager le vecteur d'état d'un bord à l'autre du multicouche par simple produit matriciel, et on peut définir une matrice de transfert globale décrivant le comportement de la structure complète :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{n+1}(x_N) &= \mathbf{T}_{\text{globale}} \mathbf{V}_0(x_0) \\ \text{avec : } \mathbf{T}_{\text{globale}} &= \prod_{k=1}^N \mathbf{T}_k\end{aligned}\tag{1.28}$$

en ayant noté x_0 et x_N les abscisses extrémales du multicouche. Les différentes matrices de transfert élémentaires T_k sont les propagateurs matriciels du vecteur d'état évalué aux différentes interfaces, mais l'expression de ces coefficients peut être obtenue avec l'une ou l'autre des approches décrites en IV, c'est-à-dire soit en recherchant la base de solutions d'ondes volumiques, soit en intégrant le système différentiel d'ordre 1 obtenu avec le formalisme de Stroh.

V.2.1 Propagateur matriciel obtenu par recherche d'ondes solutions

La formulation d'origine de la méthode de Thomson pour établir les matrices de transfert élémentaires repose sur la recherche préalable des ondes volumiques solutions particulières, décrite dans la section IV.1.1.

Les vecteurs d'état évalués aux faces supérieure et inférieure de la couche k considérée sont d'abord reliés aux amplitudes des ondes L , T_1 et T_2 montantes et descendantes dans la couche par des matrices notées $\mathbf{D}_k(x_k)$ et $\mathbf{D}_k(x_{k-1})$.

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_k(x_k) &= \mathbf{D}_k(x_k) \begin{pmatrix} A_w^+ \\ A_w^- \end{pmatrix} \\ \mathbf{V}_k(x_{k-1}) &= \mathbf{D}_k(x_{k-1}) \begin{pmatrix} A_w^+ \\ A_w^- \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.29}$$

avec A_w^\pm les amplitudes des trois ondes volumiques montantes et descendantes, $w = L, T_1, T_2$. En éliminant ensuite les amplitudes des ondes, on aboutit à une expression analytique de la matrice de transfert élémentaire :

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{D}_k(x_k) [\mathbf{D}_k(x_{k-1})]^{-1}\tag{1.30}$$

La méthode de Thomson-Haskell donnait à l'époque l'expression analytique des matrices \mathbf{D}_k et du produit $\mathbf{T}_k = \mathbf{D}_k(x_k) [\mathbf{D}_k(x_{k-1})]^{-1}$ mais sous l'hypothèse d'un état de déformation plane, dans le cas bidimensionnel [59, 63, 64].

Le cas élastique complet est plus compliqué analytiquement, et est résolu par Hosten & Castaings [60] en 1993 pour une couche de matériau de symétrie orthorhombique excité par une onde plane incidente, de plan d'incidence non coplanaire à un des plans de symétrie du matériau. Les auteurs donnent l'expression des matrices \mathbf{D}_k mais précisent qu'il vaut mieux pour la stabilité numérique calculer préalablement l'expression analytique du produit $\mathbf{D}_k(x_k) [\mathbf{D}_k(x_{k-1})]^{-1}$ (ce qui reste valable également sous l'hypothèse d'un état de déformation plane [64]). Cependant, ils ne donnent pas l'expression des coefficients de ce produit matriciel, du fait de leur complexité, et déclarent avoir eu recours à une librairie de calcul symbolique pour l'établir.

Dans cette démarche il est nécessaire de calculer les polarisations des différentes ondes

planes élastiques susceptibles de se propager dans chacune des couches. Les calculs peuvent être très longs notamment dans le cas d'un nombre de couches élevé [83].

V.2.2 Propagateur matriciel obtenu par intégration du système différentiel

L'alternative à la recherche d'ondes planes solutions est d'intégrer directement le système différentiel d'ordre 1 vérifié par le vecteur d'état.

En effet, la formulation des matrices de transfert élémentaires conduit naturellement à un formalisme de Stroh, et le vecteur d'état vérifie l'équation (1.21). En prenant la couche inférieure $z = x_{k-1}$ pour cote radiale de référence, la solution analytique est connue *dans le cas de géométrie plane* et pour une couche élémentaire k , on a :

$$\mathbf{T}_k = \exp[(x_k - x_{k-1})\mathbf{Q}_k] \quad (1.31)$$

avec \mathbf{Q}_k la matrice du système différentiel pour la couche k dépendant des constantes élastiques, des nombres d'ondes horizontaux, de la masse volumique et de la fréquence angulaire. Elle est donc obtenue par réarrangement de l'équation d'onde de l'élastodynamique [55, 86].

V.3 Instabilités numériques de la méthode

Bien que l'approche par matrices de transfert ne pose pas de problème au niveau de son formalisme, sa résolution numérique directe entraîne des instabilités numériques.

V.3.1 Large fd problem

Le type d'instabilités le plus connu survient en incidence oblique lorsque le produit de la fréquence par l'épaisseur augmente.

Le problème est initialement pointé par Dunkin [87], et depuis plusieurs méthodes ont été présentées dans la littérature pour tenter de résoudre ou de contourner le problème, la plupart d'entre elles étant discutées par Lowe [64], ou encore Lévesque & Piché [52].

En 1965, Dunkin montre que la matrice élémentaire T_k d'une couche k comporte des

coefficients de la forme :

$$A = g \pm 1/g, \quad g = \exp \left[i \left(\frac{\omega^2}{c_w^2} - \alpha^2 - \beta^2 \right)^{\frac{1}{2}} d_k \right] \quad (1.32)$$

avec c_w la célérité des ondes volumiques se propageant dans la couche solide (w indiquant les ondes L , T_1 ou T_2), d_k son épaisseur et α et β les nombres d'onde suivant les directions x et y de la plaque multicouche.

La quantité $\left(\frac{\omega^2}{c_w^2} - \alpha^2 - \beta^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ dépend linéairement du produit ωd , ou fd , si on note f la fréquence de l'onde, est réelle dans le cas d'ondes propagatives, et imaginaire dans le cas d'ondes évanescentes.

Dans ce dernier cas, la quantité A est la somme ou la différence de deux exponentielles réelles, de monotonie opposée lorsque le produit fd augmente. Pour des trop grandes valeurs, la matrice élémentaire contient des coefficients étant la somme ou la différence d'un nombre très grand avec un nombre très petit, rendant la matrice de transfert mal conditionnée, et entraînant des erreurs d'arrondi qui se répercutent sur la stabilité numérique [64].

La condition pour que des ondes évanescentes s'établissent dans le milieu s'écrit :

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{\omega^2}{c_w^2} \quad (1.33)$$

Par conséquent, dans le cas d'une excitation par onde plane incidente, $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ représente la norme du projeté du nombre d'onde dans le plan contenant le multicouche. On en déduit qu'en augmentant le régime fd , les instabilités numériques apparaissent d'abord aux incidences obliques. Au vu de ces considérations, il paraît plus clair pourquoi le problème d'instabilité qui survient avec l'utilisation des matrices de transfert est appelé *large fd problem*, et également en quoi il est dû à la propagation d'ondes fortement évanescentes le long des couches.

Concernant le mauvais conditionnement des matrices de transfert élémentaires, un point de vue intéressant est de considérer les ondes planes volumiques dans une couche élémentaire, et de rechercher les déplacements et contraintes solutions sur la base des vecteurs propres :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_{w=1}^3 A_w^+ \mathbf{u}_w^+ \exp(i\gamma_w^+ (x - x_k)) + A_w^- \mathbf{u}_w^- \exp(i\gamma_w^- (x - x_{k-1})) \\ \boldsymbol{\sigma}_z &= \sum_{w=1}^3 A_w^+ \boldsymbol{\sigma}_w^+ \exp(i\gamma_w^+ (x - x_k)) + A_w^- \boldsymbol{\sigma}_w^- \exp(i\gamma_w^- (x - x_{k-1})) \end{aligned} \quad (1.34)$$

avec σ_w^\pm reliés aux polarisations \mathbf{u}_w^\pm par (1.6) et (1.7). Le choix de normaliser différemment les coefficients A_w^\pm par des exponentielles évaluées aux deux cotes inférieure et supérieure de la couche va permettre de mettre en évidence l'instabilité aux grands produits fd .

On peut alors écrire le vecteur d'état \mathbf{V}_k de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_k(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \sigma_z \end{pmatrix}(z) &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_w^+ & \mathbf{u}_w^- \\ \sigma_w^+ & \sigma_w^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\gamma_w^+(x-x_k)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{i\gamma_w^-(x-x_{k-1})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_w^+ \\ A_w^- \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_w^+ e^{i\gamma_w^+(x-x_k)} & \mathbf{u}_w^- e^{i\gamma_w^-(x-x_{k-1})} \\ \sigma_w^+ e^{i\gamma_w^+(x-x_k)} & \sigma_w^- e^{i\gamma_w^-(x-x_{k-1})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_w^+ \\ A_w^- \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Alors la matrice de transfert élémentaire, en éliminant les coefficients $(A_w^+, A_w^-)^T$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_k(x_k) &= \mathbf{T}_k \mathbf{V}_k(x_{k-1}) \\ \mathbf{T}_k &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_w^+ & \mathbf{u}_w^- \exp(i\gamma_w^- h_k) \\ \sigma_w^+ & \sigma_w^- \exp(i\gamma_w^- h_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_w^+ \exp(-i\gamma_w^+ h_k) & \mathbf{u}_w^- \\ \sigma_w^+ \exp(-i\gamma_w^+ h_k) & \sigma_w^- \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (1.36)$$

avec h_k l'épaisseur de la couche k considérée.

En choisissant le repère de telle sorte que chaque terme exponentiel décroisse lorsque des ondes évanescentes se propagent (γ_w^\pm imaginaires) et que l'épaisseur de couche h_k augmente, la matrice de transfert élémentaire dégénère asymptotiquement vers l'expression suivante :

$$\mathbf{T}_k \xrightarrow{h_k \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_w^+ & \mathbf{0} \\ \sigma_w^+ & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{u}_w^- \\ \mathbf{0} & \sigma_w^- \end{pmatrix}^{-1} \quad (1.37)$$

qui n'est clairement pas continue du fait de la matrice inversée singulière.

Nous reviendrons en V.4 au moment d'introduire les méthodes variantes choisissant un autre vecteur d'état \mathbf{V}_k pour chaque couche élémentaire comment l'instabilité décrite ci-dessus peut être contournée.

V.3.2 Prise en compte de couches fluides intermédiaires

Un deuxième type d'instabilités survient lorsque le multicouche comporte des couches fluides intermédiaires. Il s'agit d'abord d'une incompatibilité entre les matrices de transfert élémentaires des couches solides, et celles des couches fluides, du fait des conditions aux

limites moins restrictives à une interface *solide-liquide*.

Le fluide d'une couche fluide f étant supposé parfait, seul le déplacement normal et la contrainte normale peuvent se propager entre une couche solide et une couche fluide, et les matrices de transfert élémentaires des couches solides et des couches fluides ne sont pas de même taille.

Une façon équivalente de considérer le problème est de constater que 6 ondes volumiques (trois montantes et trois descendantes) peuvent se propager dans une couche solide, tandis que deux ondes de compression-dilatation seulement (une montante et une descendante) peuvent se propager dans une couche fluide.

Une façon pratique de gérer le cas d'une couche fluide intermédiaire est de considérer une couche solide en déclarant une vitesse de cisaillement très faible, pour que le mouvement de cisaillement puisse être négligé [64, 88].

Une deuxième solution pour effectuer le découplage des contraintes de cisaillement entre les deux couches de nature différente est d'inclure une matrice intermédiaire à chaque interface *solide-liquide* lors de l'assemblage de la structure qui traduit ces conditions aux limites différentes [89, 90].

Enfin, Cervenka et Challande ont présenté une reformulation du problème multicouche bidimensionnel pour prendre en compte des couches fluides intermédiaires [91]. Leur méthode nécessite la condensation des matrices élémentaires des couches solides pour rendre le problème compatible, mais comme le fait remarquer Lévesque [52], la robustesse de leur formulation quant aux instabilités numériques éventuelles dues à cette condensation matricielle n'a pas été clairement établie par les auteurs. De plus, ils ne modifient rien dans la formulation pour des configurations multicouches solides uniquement qui permettrait la suppression du *large fd problem*.

V.4 Méthodes variantes

Depuis l'identification du *large fd problem* par Dunkin, beaucoup de publications ont proposé des méthodes qui établissent une reformulation de la méthode par matrices de transfert, et ce dans le but d'améliorer la stabilité numérique. On peut classer en deux

catégories l'ensemble de ces méthodes, qui diffèrent sur la façon d'écrire les équations de continuité :

- Premièrement, celles qui conservent la forme compacte de la formulation d'origine et *propagent* le vecteur d'état retenu d'un bord à l'autre du multicouche. Ceci est réalisé au prix d'algorithmes récursifs.

Le coût numérique sera alors très dépendant de l'optimisation de l'algorithme retenu.

- Deuxièmement, les méthodes qui choisissent un assemblage *matriciel* du système multicouche dans une matrice dont la taille augmente avec le nombre de couches de la structure.

Dans ce cas, le coût numérique dépendra surtout de la taille de la matrice assemblée et donc du nombre de couches dans la structure.

La plupart de ces méthodes variantes ne conservent également plus le même vecteur d'état que dans la méthode de Thomson-Haskell, et ce souvent pour contourner les erreurs d'arrondi dues au *large fd problem*. Cependant, le choix du vecteur d'état ne décide pas systématiquement de l'utilisation d'un algorithme récursif ou d'un assemblage matriciel.

V.4.1 Opérateur delta

Une première alternative de calcul est proposée par Dunkin lui-même, qui introduit un opérateur connu sous le nom d'opérateur Delta, censé éviter toute évaluation des termes du type de (1.32) identifiés comme source d'instabilité.

Plutôt que d'évaluer le déterminant de la matrice de transfert globale du multicouche, il associe à chaque matrice de transfert élémentaire \mathbf{T}_k une matrice $\mathbf{T}_k^{\Delta p}$ dont les coefficients sont tous les sous-déterminants $p \times p$ de la matrice \mathbf{T}_k .

La matrice ainsi obtenue est appelée opérateur Delta d'ordre p .

Dunkin développe sa méthode de l'opérateur Delta pour les milieux isotropes et dans le cas bidimensionnel pour $p = 2$. Cependant celle-ci ne semble pas résoudre toutes les instabilités et ne se montre performante que pour améliorer le calcul du coefficient de réflexion, tandis que des aberrations numériques persistent sur celui du coefficient de transmission [52, 92]. Lévesque & Piché [52] ont présenté une variante de la technique proposée par Dunkin pour

rendre également stable le coefficient de transmission, mais celle-ci ne se limite qu'aux multicouches isotropes et de moins de 4 couches.

Quant à Castaings & Hosten [92], ils généralisent la méthode de l'opérateur Delta aux milieux anisotropes, en considérant le modèle élastique complet, et pour des directions de propagation non contenues dans un plan de symétrie du matériau. Ils calculent les coefficients de réflexion et de transmission d'un matériau composite en utilisant à la fois les opérateurs Delta d'ordre 2 et d'ordre 3.

V.4.2 Méthode par matrice de raideur dynamique

La méthode par matrice de raideur dynamique [54, 93, 94] se différencie de la méthode par matrices de transfert par son vecteur d'état retenu pour décrire le comportement d'une couche élémentaire.

Au lieu d'établir une relation pour le vecteur des déplacements et contraintes normales aux deux interfaces d'une même couche élémentaire, la matrice de raideur dynamique relie le vecteur des contraintes évaluées aux interfaces supérieure et inférieure avec les déplacements évalués aux mêmes interfaces :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_k(x_{k-1}) \\ \boldsymbol{\sigma}_k(x_k) \end{pmatrix} = K_k \begin{pmatrix} \mathbf{u}_k(x_{k-1}) \\ \mathbf{u}_k(x_k) \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

avec K_k la matrice de raideur dynamique de la couche k considérée.

En reprenant les développements effectués à partir de (1.34) pour mettre en évidence l'instabilité de la matrice de transfert aux grands fd , on peut établir pour expression de la matrice de raideur dynamique :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_k(x_{k-1}) \\ \boldsymbol{\sigma}_k(x_k) \end{pmatrix} = \mathbf{K}_k \begin{pmatrix} \mathbf{u}_k(x_{k-1}) \\ \mathbf{u}_k(x_k) \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

$$\mathbf{K}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_w^+ & \mathbf{u}_w^- e^{i\gamma_w^- h_k} \\ \mathbf{u}_w^+ e^{i\gamma_w^+ h_k} & \mathbf{u}_w^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_w^+ & \boldsymbol{\sigma}_w^- e^{i\gamma_w^- h_k} \\ \boldsymbol{\sigma}_w^+ e^{i\gamma_w^+ h_k} & \boldsymbol{\sigma}_w^- \end{pmatrix}^{-1}$$

En étudiant le comportement asymptotique de la matrice de raideur dynamique (1.39) lorsque $h_k \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\mathbf{K}_k \xrightarrow{h_k \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_w^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{u}_w^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_w^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}_w^- \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_w^+ (\boldsymbol{\sigma}_w^+)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{u}_w^- (\boldsymbol{\sigma}_w^-)^{-1} \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

Au vu de (1.40), la matrice de raideur élémentaire est régulière et ne présentera pas les instabilités numériques rencontrées aux grands fd avec la matrice de transfert. Cela est dû au fait que les deux termes exponentiels restent en-dehors des diagonales et sur des colonnes différentes dans les matrices reliant les déplacements ou les contraintes aux amplitudes des ondes volumiques.

Pour propager les déplacements et contraintes à l'interface suivante à partir de (1.39), plusieurs méthodes utilisent des algorithmes récursifs [93, 95, 96].

En particulier, Tan compare la stabilité et l'efficacité numérique de plusieurs algorithmes propageant l'équation (1.38), certains construits à partir de la base de vecteurs propres, d'autres en exprimant les sous-blocs de la matrice de raideur dynamique à partir de ceux des matrices de transfert élémentaires [93].

À l'inverse, Skelton & James [54], ou encore Coguenanff & Duval [97] utilisent également des matrices de raideur dynamique pour chaque couche élémentaire, mais assemble le système par une approche de type éléments finis, en écrivant les équations de continuité aux interfaces dans un système matriciel de taille $3 \times (N + 1)$, si N désigne le nombre de couches du système.

V.4.3 Méthode par matrice hybride de souplesse-raideur

Si la matrice de raideur dynamique est stable aux grandes valeurs de fd , son expression asymptotique est en revanche instable lorsque l'épaisseur de couche tend vers 0 (alors que ce n'est pas le cas pour la matrice de transfert) :

$$\mathbf{K}_k \xrightarrow{h_k \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_w^+ & \mathbf{u}_w^- \\ \mathbf{u}_w^+ & \mathbf{u}_w^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_w^+ & \boldsymbol{\sigma}_w^- \\ \boldsymbol{\sigma}_w^+ & \boldsymbol{\sigma}_w^- \end{pmatrix}^{-1} \quad (1.41)$$

L'expression (1.41) montre que les deux facteurs de la matrice de raideur dynamique ne sont pas des matrices régulières, car elles présentent plusieurs lignes identiques. Par conséquent elles ne sont pas inversibles.

Par conséquent, Tan [94] propose en 2006 une formulation encore différente pour relier les déplacements et contraintes évalués aux deux interfaces d'une couche élémentaire et établit une matrice élémentaire hybride, dite de souplesse-raideur (en anglais *hybrid compliance-stiffness matrix*).

Celle-ci, notée \mathbf{H}_k , est stable à la fois aux grands fd , ou lorsque l'épaisseur de la couche diminue sensiblement, et vérifie pour une couche élémentaire k :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_k(x_{k-1}) \\ \boldsymbol{\sigma}_k(x_k) \end{pmatrix} = \mathbf{H}_k \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_k(x_{k-1}) \\ \mathbf{u}_k(x_k) \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

$$\mathbf{H}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_w^+ & \mathbf{u}_w^- \exp(i\gamma_w^- h_k) \\ \boldsymbol{\sigma}_w^+ \exp(i\gamma_w^+ h_k) & \boldsymbol{\sigma}_w^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_w^+ & \boldsymbol{\sigma}_w^- \exp(i\gamma_w^- h_k) \\ \mathbf{u}_w^+ \exp(i\gamma_w^+ h_k) & \mathbf{u}_w^- \end{pmatrix}^{-1}$$

L'étude asymptotique quand $h_k \rightarrow 0$ et lorsque $h_k \rightarrow +\infty$ donne :

$$\mathbf{H}_k \xrightarrow{h_k \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_w^+ & \mathbf{u}_w^- \\ \boldsymbol{\sigma}_w^+ & \boldsymbol{\sigma}_w^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_w^+ & \boldsymbol{\sigma}_w^- \\ \mathbf{u}_w^+ & \mathbf{u}_w^- \end{pmatrix}^{-1} \quad (1.43)$$

$$\mathbf{H}_k \xrightarrow{h_k \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_w^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}_w^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_w^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{u}_w^- \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_w^+ (\boldsymbol{\sigma}_w^+)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}_w^- (\mathbf{u}_w^-)^{-1} \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

Les deux expressions (1.43) et (1.44) sont donc stables, et Tan utilise ensuite un algorithme récursif pour propager les déplacements et contraintes d'un bord à l'autre du multicouche.

V.4.4 Méthode par matrice globale

En 1964, Knopoff [61] présente une formulation matricielle pour établir une solution au problème de propagation d'ondes élastiques dans un système multicouche radicalement différente de la méthode de Thomson-Haskell. Elle fut implémentée pour la première fois par Randall [98] en 1967, seulement une quinzaine d'années après que la méthode de Thomson-Haskell fut développée.

La méthode d'origine effectue une décomposition en potentiels du champ de déplacements

et écrit les relations de continuité pour chaque interface en fonction des coefficients inconnus. La caractéristique de la méthode est d'assembler ces différentes équations de continuité dans une matrice globale, reliant les coefficients de la décomposition aux efforts appliqués. Cette méthode présente l'avantage de pouvoir gérer indifféremment des interfaces *solide-solide* ou *solide-liquide*. De plus, elle s'adapte aussi bien au cas d'une résolution directe (par inversion de la matrice globale) ou modale (en établissant l'équation caractéristique à partir de son déterminant), Enfin, elle a l'avantage d'être stable numériquement, notamment pour gérer les phénomènes d'ondes évanescentes se propageant le long des couches. Sur ce dernier point, une résolution directe par élimination de Gauss avec pivotement partiel est opérée par Schmidt & Jensen [62] dans le cas de la géométrie plane. Les auteurs précisent que la stabilité de l'algorithme de Gauss sera assuré pour toutes les configurations à condition d'adimensionner les coefficients pour éviter des erreurs numériques dues à des troncatures. Quant au cas de la géométrie cylindrique, les solutions exponentielles sont substituées par des fonctions de Bessel, qui posent des problèmes numériques supplémentaires, propres à leur évaluation aux pôles de ces fonctions.

VI Modélisation des structures raidies périodiquement

Dans le cadre de notre étude, le cylindre multicouche est couplé à un réseau périodique de raidisseurs internes axisymétriques. Son rôle est de renforcer la coque du sous-marin pour la tenue en eaux profondes, c'est-à-dire lui faire supporter la pression hydrostatique élevée à ces profondeurs.

Cependant, les raidisseurs ont une influence importante sur le comportement vibro-acoustique de la coque, par conséquent les inclure dans la modélisation de la structure vibrante a fait l'objet de nombreuses études.

La structure considérée dans la suite, et présentée en Fig. 1.2a, est l'assemblage des deux sous-systèmes couplés, à savoir la coque multicouche et le réseau périodique de renforts internes.

Deux profils différents pour la section d'un raidisseur sont présentés sur la Fig. 1.2b : une forme en "T", classiquement utilisée pour ce type de structures en architecture navale, et une forme rectangulaire, souvent choisie en première approximation dans la littérature.

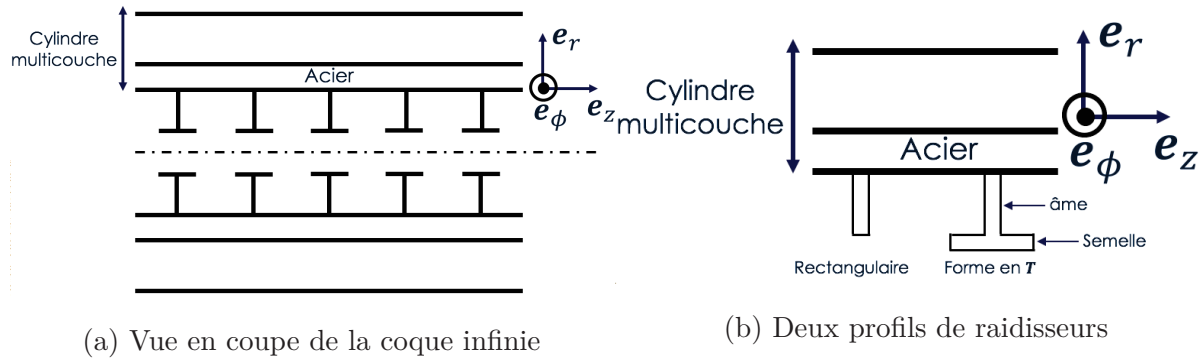


FIGURE 1.2 – Structure cylindrique multicouche raidie

On discute à présent des différentes méthodes analytiques existantes dans la littérature pour modéliser une telle structure, en distinguant plusieurs axes de simplification couramment choisis :

- D'une part, sur le modèle utilisé pour le système multicouche, et les hypothèses qui sont formulées par rapport à la configuration de coque épaisse cylindrique que l'on envisage dans cette étude.
- D'autre part, sur le modèle de raidisseur utilisé, et nous justifierons le modèle de coque mince qui a été retenu pour l'étude, qui permet de prendre en compte la déformée tridimensionnelle de la section du renfort.
- Enfin, sur la méthode de couplage employée entre le modèle multicouche et le réseau de raidisseurs.

VI.1 Différents cas de structures couplées à un réseau périodique de raidisseurs

L'étude des structures raidies ne se limite pas nécessairement au couplage d'un réseau de raidisseurs avec un système multicouche à géométrie cylindrique.

Plusieurs auteurs ont modélisé des structures similaires en se plaçant dans un cadre plus

ou moins restrictif par rapport à la modélisation envisagée dans cette étude.

Les hypothèses peuvent concerner :

- la géométrie de la structure.

De nombreuses applications concernent des objets à géométrie plane [34, 99, 100, 101, 102, 103, 104], et la spécificité de la géométrie cylindrique est absente de nombreuses études.

- la non-prise en compte des revêtements.

La modélisation des structures raidies n'étant pas limitée aux multicouches, de nombreuses études modélisent des systèmes couplés à un réseau de raidisseurs sans tenir compte de la présence éventuelle de revêtements.

- le modèle élastique complet qui a été retenu pour la suite de cette étude.

Les hypothèses cinématiques discutées plus haut sont souvent utilisées et réduisent les équations du mouvement de la plaque ou de la coque soit aux théories de Love-Kirchhoff ou de Reissner-Mindlin, soit à un problème bidimensionnel.

D'une part, la géométrie cylindrique de la structure multicouche peut souvent ne pas être prise en compte, et est souvent délaissée au profit d'un modèle de plaque infinie suivant ses deux dimensions, les plus anciens travaux simplifiant même à l'extrême en se ramenant à un problème unidimensionnel et en considérant une poutre de longueur infinie reposant sur des supports régulièrement espacés [105].

De plus, les études sur les plaques infinies raidies sont souvent réalisées dans le cadre des hypothèses de Love-Kirchhoff, simplifiant encore davantage le problème en négligeant le cisaillement transverse [99, 100, 104, 106].

Certains auteurs résolvent cependant les équations complètes de l'élastodynamique pour une structure plane couplée à un réseau de raidisseurs : Hull & Maguire [107] considèrent une plaque nue renforcée orthogonalement, tandis que Hull & Welch [34] ou encore Xin [108] considèrent le cas d'une plaque infinie revêtue d'un matériau anéchoïque et couplée à un simple réseau périodique.

D'autre part, peu d'articles étudient le couplage d'une coque cylindrique revêtue avec un réseau de renforts internes, et là encore, des hypothèses sur la complexité du modèle

sont en plus généralement formulées.

En effet, plusieurs auteurs utilisent un modèle de coque cylindrique infinie supposée *mince*, pour laquelle les hypothèses de Love-Kirchhoff conduisent à la résolution d'équations vérifiées par les déplacements du feuillet moyen. Plusieurs formulations variantes conduisent à différentes équations, certains auteurs choisissent les équations de Flügge [109, 110, 111, 112], d'autres celles de Love-Timoshenko [113] et d'autres encore le modèle d'Arnold-Warburton [114]. Ces différents modèles réduits de coque mince sont notamment discutés par Farshidianfar [115] en 2012. Enfin, si la coque cylindrique couplée à un réseau de raidisseurs est supposée multicouche, ce n'est pas en général pour traiter le cas des revêtements mais celui des matériaux composites stratifiés, car les théories employées, CLPT [49] ou FSDT [49, 116, 117], sont des modèles réduits analogues à ceux de Love-Kirchhoff ou de Reissner-Mindlin, adaptés à l'étude de ces matériaux mais très peu à celle d'une coque épaisse revêtue.

VI.2 Modèles de raidisseurs

Parmi les travaux les plus anciens, les raidisseurs ne sont parfois même pas modélisés en tant que tel pour simplifier la structure considérée. Les premiers auteurs, parmi lesquels Hoppmann en 1958 [118] ou encore Heckl en 1962 [119], tiennent en effet compte de la présence des renforts en considérant en première approximation une plaque ou une coque orthotrope équivalente. Cette simplification ne se justifie qu'aux basses fréquences lorsque la longueur d'onde se propageant dans la plaque ou la coque est très grande devant l'espacement inter-raideurs. D'autre part, ce type de méthode est limitée par son incapacité à prédire précisément les fréquences propres des modes de vibration couplés coque-raideurs, notamment parce que l'amplitude du cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque excède de beaucoup celle des renforts [120] pour ces méthodes équivalentes.

D'autres auteurs discutent de l'influence des raidisseurs sur la réponse vibro-acoustique en considérant que ceux-ci auront une action similaire aux conditions aux limites imposées à la plaque. Maidanik [3] par exemple, étudie en 1962 la réponse de plaques raidies à un champ acoustique réverbérant en raisonnant sur une plaque mince infinie simplement

supportée, c'est-à-dire en imposant la nullité du déplacement normal aux points d'attache entre la coque et les raidisseurs. Il discute de l'influence d'éventuelles discontinuités, comme celles engendrées par la présence de raidisseurs, au travers d'un terme source au second membre de l'équation du mouvement de flexion. Il montre ainsi que les supports linéiques attachés à la plaque infinie augmentent son efficacité de radiation aux fréquences inférieures à la fréquence critique. Par ailleurs, Crighton & Maidanik [121, 122] montrent que les raidisseurs convertissent des modes non-propagatifs, (subsoniques, évanescents, hautes fréquences) en des modes propagatifs (basses fréquences, supersoniques). Cependant, ces conditions idéales ne permettent malheureusement pas de décrire la dynamique du raidisseur lui-même. L'énergie dissipée dans les modes de raidisseurs, ou les résonances associées, influencent la réponse de la coque, et il est donc important de pouvoir décrire la dynamique des renforts avec une plus grande complexité que le simple appui.

En particulier, la résonance liée au mouvement de flexion de la section du raidisseur lorsque celui-ci est encastré à la coque, représentée en Fig. 1.3, doit pouvoir être décrite.

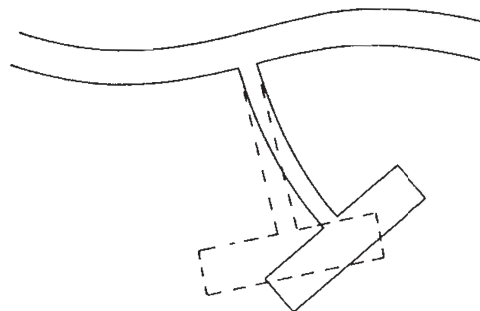


FIGURE 1.3 – Déformée de la section du raidisseur

La configuration en pointillé (section droite indéformable) représente le raidisseur si un degré de liberté n'est pas introduit pour décrire ce mouvement.

Par conséquent, Hodges, Power et Woodhouse [114] introduisent un tel degré de liberté en recherchant la déformée le long de l'âme du raidisseur comme un polynôme de degré 3. La forme recherchée est une solution exacte pour le cas de flexion pure statique, et se justifie tant que la masse de l'âme ne joue pas un rôle dominant pour la dynamique.

Les raidisseurs peuvent également être modélisés différemment, en particulier nombre

d'auteurs étudient des modèles de plaques ou de coques raidies en décrivant les renforts internes avec un modèle de *poutre*. Les hypothèses cinématiques formulées sur la plaque ou la coque orientent alors souvent le choix du modèle retenu pour les raidisseurs. En effet, si le cisaillement est négligé pour la plaque ou la coque par des hypothèses de Love-Kirchhoff, alors les raidisseurs sont généralement décrits par le modèle d'Euler-Bernoulli [104, 109, 110, 111, 112], qui est le modèle de poutre qui repose sur les mêmes hypothèses. À l'inverse, le modèle de Timoshenko reprend celles du modèle de Reissner-Mindlin, et permet de prendre en compte le cisaillement transverse en supposant une rotation des sections droites autour de la fibre neutre (axe moyen) de la poutre. Ainsi, lorsque la plaque ou la coque raidie est décrite avec le modèle élastique complet [34, 108], les raidisseurs sont modélisés à minima par des poutres de Timoshenko. Et de même lorsqu'au moins le cisaillement transverse est pris en compte par la théorie de Reissner-Mindlin, ou la théorie FSDT pour les structures composites stratifiées [116, 117].

Cependant, décrire le raidisseur avec un modèle de poutre ramène le problème tridimensionnel à un problème monodimensionnel dans la direction circonférentielle du renfort. On ne peut pas décrire la déformée tridimensionnelle de sa section, puisque seuls les déplacements et rotations le long de la fibre neutre sont connus.

En particulier, Maxit & Ginoux [103] écartent cette simplification dans leur modélisation et mettent en évidence l'erreur commise par le modèle unidimensionnel de poutre comparé à un calcul éléments finis s'appuyant sur la théorie de coque mince pour décrire chaque raidisseur. Cette approche sera retenue dans la présente étude, tout d'abord parce qu'elle permettra de modéliser la déformée tridimensionnelle de la section des raidisseurs, mais également par sa versatilité à la forme retenue pour celui-ci.

VI.3 Méthodes de couplage

Concernant les méthodes de couplage employées pour assembler la structure multicouche au réseau de raidisseurs, celles-ci dépendent fortement de la nature de ce dernier. En supposant la structure raidie axisymétrique, on peut distinguer trois formalismes différents pour effectuer le couplage de la structure avec le réseau de raidisseurs :

- Si le réseau est périodique, la méthode la plus répandue dans la littérature est spectrale et utilise la décomposition en harmoniques de Fourier. La périodicité du réseau est exploitée par utilisation de la relation de Poisson [54, 110, 111, 112, 116, 117], et différentes structures raidies sont étudiées avec ce formalisme. Mace considère une plaque mince infinie et des raidisseurs modélisés par des poutres d'Euler-Bernoulli. Il envisage dans un premier temps un simple réseau [99], puis un double réseau orthogonal [101]. Maxit [102] considère également une plaque mince raidie simplement et propose une méthode de résolution par transformée de Fourier discrète pour déduire les déplacements spatiaux dans le cas d'une excitation mécanique. Mejdi [123] considère également un réseau orthogonal, mais cette fois prend en compte le cisaillement transverse, les raidisseurs étant modélisés par des poutres de Timoshenko couplées à une plaque composite stratifiée représentée par la théorie FSDT. D'autres auteurs considèrent une géométrie cylindrique, et certains réalisent le couplage d'une coque mince régie par les équations de Flugge, en considérant un réseau simple [111, 112], ou un double réseau périodique [54, 110]. Les raidisseurs sont alors modélisés par des poutres d'Euler-Bernoulli. Quant à Tang [117] ou Cao [116], ceux-ci tiennent compte du cisaillement transverse en considérant une coque composite stratifiée représentée avec la théorie FSDT.
- Si l'hypothèse d'axisymétrie est conservée pour la structure, mais que le réseau est supposé apériodique, la méthode souvent adoptée est dite spatiale, car elle résout le problème pour des déplacements qui n'ont pas subi de transformée de Fourier suivant la variable axiale de la coque. Maxit & Ginoux [103] développent une approche d'admittances circonférentielles (CAA) pour prédire la réponse de la coque supposée mince couplée à un réseau fini de renforts internes, pouvant être constitué tout à la fois de raidisseurs, cloisons, ou embouts hémisphériques. Leur méthode exploite la 2π -périodicité du problème et repose sur le calcul des admittances de la coque et de chaque type de renforts dans l'espace des nombres d'ondes circonférentiels. L'inversion d'un système global dont la taille dépend du nombre de renforts considérés permet d'obtenir les forces et moments appliqués sur la coque, qui sont ensuite réinjectés dans les équations de Flugge.

Une approche similaire est présentée par Skelton [54] pour traiter le même problème.

- On peut également mentionner une dernière méthode originale et présentée par Hull & Welch en 2010, qui traitent le cas du couplage entre une plaque épaisse revêtue et un réseau périodique de renforts internes modélisés par des poutres de Timoshenko. Celle-ci repose sur une procédure d'orthogonalisation des équations à résoudre, une fois que la forme des déplacements et contraintes a été supposée à l'aide d'une décomposition en ondes volumiques. Les systèmes matriciels qui en découlent, établis pour chaque alias (ou harmonique) d'un nombre d'onde du domaine spectral, sont assemblés en un système global de taille infinie, qui est numériquement résolu par inversion matricielle, après sa troncature au nombre d'harmoniques considérées. Néanmoins, si le modèle présenté par Hull & Welch a été proposé spécifiquement pour analyser la structure aux hautes fréquences, les auteurs reconnaissent eux-mêmes que la modélisation des raidisseurs par des poutres de Timoshenko limite dans la pratique la plage fréquentielle de validité.

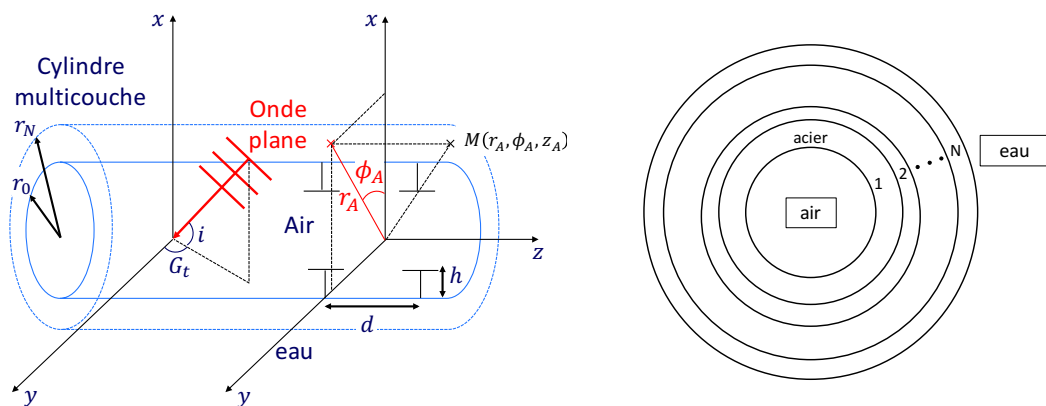
Par ailleurs, cette méthode analytique semble très instable quant au nombre de modes choisi lors de la troncature du système global à résoudre. En particulier Remillieux & Burdisso [33] mettent en évidence la sensibilité de la méthode quant à ce paramétrage. Ils comparent le calcul effectué avec la mise en données de Hull & Welch à un calcul éléments finis de référence, et montrent qu'un autre choix du nombre de modes pour la méthode analytique permet de recoller au calcul éléments finis. Pourtant, si les auteurs insistent sur la non trivialité du choix de cette troncature, ils n'expliquent pas comment ils procèdent ni n'établissent un critère pour fixer le nombre de modes. Enfin, cette méthode semblerait avantageuse en termes de coût numérique pour une excitation large bande, typiquement une excitation mécanique ou en bruit. Dans le cas d'une excitation par onde plane considérée dans cette étude, pour lequel seule une famille discrète de nombres d'onde dérivés du nombre d'onde incident sont excités dans le domaine spectral, cet avantage perd de fait son intérêt majeur. Par conséquent, cette méthode pour le couplage de la structure n'a pas été développée dans la suite.

VI.4 Modèle cylindrique multicouche retenu pour l'étude

Dans cette étude, on se limitera au développement d'un modèle de coque infinie raidie périodiquement, et la première méthode spectrale discutée en VI.3 sera retenue pour le couplage.

Sur la figure 1.4a ci-dessous, la coque cylindrique revêtue, supposée infinie suivant son axe z , de rayons interne et externe r_0 et r_N respectivement, est excitée par une onde plane incidente à la fréquence angulaire ω . Celle-ci est repérée par les angles gisement G_t et site i faits par son vecteur d'onde incident.

La vue en coupe de la même structure est présentée en Fig. 1.4b, les différentes couches étant numérotées de 1 à N de l'intérieur vers l'extérieur. La structure est immergée dans l'eau occupant le milieu semi-infini extérieur, et de l'air occupe la cavité interne du cylindre.



(a) Multicouche excité par l'onde plane incidente

(b) Numérotation des différentes couches

FIGURE 1.4 – Modèle retenu pour le cylindre multicouche

On notera M le point de l'espace, repéré par les coordonnées cylindriques (r_A, ϕ_A, z_A) , en lequel est situé un capteur d'antenne, qui sera toujours supposé ponctuel. Sauf mention contraire, celui-ci sera placé dans le plan équatorial ($\phi_A = 0$) de la coque, ce qui équivaut à choisir un angle site i nul.

On cherchera à déterminer la réponse au niveau de ce capteur. Celle-ci sera exprimée en contraintes si le capteur est enfoui dans un matériau élastique, ou en pression acoustique si il est immergé dans l'eau. On ne présentera que des réponses pour un capteur ponctuel. Dans

cette thèse, on ne cherchera pas à décrire d'autres types de capteurs (tels que les capteurs surfaciques) ainsi qu'à déterminer la réponse d'antenne en sortie de formation de voies. Ces deux aspects pourront être traités par la suite en post-traitement du modèle développé en tenant compte de la fonction de filtrage du capteur et en appliquant la formation de voies aux quantités calculées aux différentes positions des capteurs de l'antenne.

On détaille maintenant le plan de ce manuscrit, en conclusion de notre état de l'art.

VII Plan du manuscrit

L'état de l'art a permis d'établir plusieurs constats quant aux travaux déjà entrepris pour modéliser une structure multicouche couplée à un réseau de raidisseurs. Ces constats ont orienté les développements de la présente étude.

Tout d'abord, il a semblé important de se concentrer sur des méthodes analytiques pour modéliser la structure multicouche et le problème d'interaction fluide-structure. En effet, il est apparu que des calculs éléments finis avec des PML sur une configuration réaliste de sous-marin se révèlent très coûteux numériquement, notamment dans le cas d'un couplage fort avec l'eau. Le coût est encore plus prohibitif lorsque des revêtements acoustiques basse célérité surmontent la coque d'acier. De même, l'approche BEM pour déterminer le champ de pression dans le fluide extérieur implique la mise en jeu de ressources numériques importantes. Limitées à une analyse vibratoire aux basses fréquences, ces approches ont donc été écartées au profit de méthodes analytiques dans le domaine spectral pour traiter le problème d'interaction fluide-structure de la structure multicouche avec les fluides interne et externe.

Pour les mêmes raisons, à savoir l'ambition de monter aux régimes fréquentiels élevés et de modéliser les revêtements acoustiques surmontant la coque, le recours à des modèles réduits n'était pas envisageable. Le choix a donc été fait d'implémenter des modèles analytiques résolvant les équations complètes de l'élastodynamique.

- Parmi ces méthodes, l'approche par matrice globale s'est démarqué en termes de stabilité numérique contrairement à la méthode par matrices de transfert, même si dans le cas d'une géométrie cylindrique, l'introduction des fonctions de Bessel entraîne des instabilités

numériques spécifiques pour lesquelles un soin particulier devra être apporté. Cependant, cette méthode est limitée à l'étude de couches solides isotropes pour les configurations cylindriques, ce qui restreint la généralité de son cadre d'application. Le chapitre 2 est consacré à exposer le formalisme de la méthode par matrice globale développée dans l'étude, ainsi qu'à la gestion des instabilités numériques liées à la géométrie cylindrique.

- À l'inverse, la méthode par matrices de transfert présente en l'état des instabilités numériques rédhibitoires à son application à des configurations industrielles, bien qu'un formalisme de Stroh pour établir les matrices de transfert élémentaires permette d'envisager une plus grande généralité de la méthode, à savoir la gestion de couches solides anisotropes. Le chapitre 3 lui est donc consacré, dans lequel on pointe les deux grands types d'instabilités numériques identifiées dans la littérature et qui freinent son application au cas d'étude : d'une part, la prise en compte de couches fluides intermédiaires, et d'autre part l'instabilité rencontrée aux régimes élevés du produit *fréquence-épaisseur*. On montrera en particulier que ces deux types d'instabilités sont très sensibles à la procédure retenue pour l'assemblage des différentes couches élémentaires de la structure. Par conséquent, une nouvelle procédure d'assemblage, inspirée de celle classiquement employée dans l'approche par matrice globale, sera proposée pour résoudre les instabilités numériques et rendre l'outil stable sur toute la plage fréquentielle d'intérêt.

- Pour des raisons similaires, la modélisation des raidisseurs par des modèles de poutres d'Euler-Bernoulli ou de Timoshenko mettrait en péril la montée en fréquence attendue pour le modèle développé. De plus, ces modèles de poutres ne permettraient pas la prise en compte de la déformée tridimensionnelle de la section du raidisseur, par conséquent il a été retenu de modéliser chaque renfort à l'aide de la théorie des coques minces par une méthode éléments finis. Celle-ci étant versatile à la forme retenue de la section modélisée, l'outil développé pourra être décliné à différents profils de raidisseurs. Le chapitre 4 sera consacré à la présentation du formalisme retenu pour le couplage de la structure multicouche avec le réseau périodique de raidisseurs, ainsi que l'évaluation de la dynamique de chaque raidisseur effectuée en précalcul par éléments finis.

- Enfin, le chapitre 5 fera l'objet de la validation numérique des modèles développés, que ce soit pour les multicouches cylindriques supposés lisses, ou pour les mêmes structures raidies

périodiquement. Celles-ci seront validées par validation croisée, et également confrontées à un modèle plan pour les configurations lisses, et à une méthode éléments finis pour les configurations raidies.

Finalement, on présentera une synthèse des différents apports de l'étude dans une conclusion générale où les différentes perspectives à ces travaux seront également envisagées.

Chapitre 2

Décomposition en ondes volumiques et méthode par matrice globale

Ce chapitre est consacré au calcul par la méthode par matrice globale de la réponse du multicouche cylindrique immergé et excité par une onde plane à la fréquence angulaire ω . Une décomposition en potentiels a été retenue pour la résolution dans une couche élémentaire solide, limitant la méthode aux matériaux isotropes.

Après formulation du problème mathématique, on détaillera les étapes nécessaires à sa résolution.

Lors de l'implémentation numérique de la méthode, des instabilités numériques sont apparues dans la partie haute du domaine fréquentiel d'intérêt et/ou pour les ordres circonférentiels élevés. Une attention particulière est portée dans ce chapitre pour décrire ces problèmes numériques et les solutions mises en oeuvre pour contourner ces obstacles.

I Résolution du problème dans une couche élémentaire

I.1 Cas d'une couche élémentaire solide

La méthode employée est la décomposition de Helmholtz, qui raisonne en termes d'amplitudes des ondes volumiques se propageant dans chaque couche élémentaire. Il est alors possible de construire une matrice élémentaire solide reliant les déplacements et contraintes spectrales aux amplitudes des trois modes propagatifs L , T_1 , T_2 [60, 83, 124]. Les deux derniers modes de cisaillement T_1 et T_2 sont confondus dans le cas d'une couche élémentaire isotrope, et il est possible dans ce cas d'établir une solution exacte pour le champ déplacement.

On représente schématiquement à la figure 1 la vue en coupe d'une couche cylindrique solide, et les grandeurs caractérisant le comportement de la couche, à savoir les contraintes et déplacements. Le vecteur traction est noté \mathbf{T} , dont les composantes T_r , T_ϕ , T_z suivant les trois axes de coordonnées cylindriques sont positives lorsqu'elles agissent dans le sens positif de ces axes.

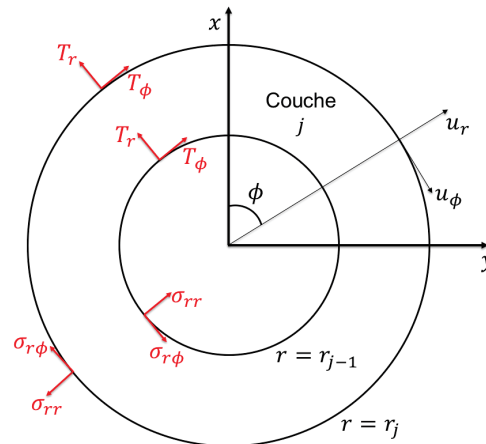


FIGURE 2.1 – Degrés de liberté pour une couche solide quelconque

La couche j est délimitée par les interfaces j et $j + 1$, respectivement situées aux cotes

radiales $r = r_{j-1}$ et $r = r_j$.

Pour un matériau isotrope, l'équation de Navier (1.13) dérivée des équations de l'élastodynamique (1.8) est un système de trois équations couplées, réécrit ci-dessous sous forme vectorielle et en l'absence de forces volumiques :

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

où \mathbf{u} est le vecteur des déplacements, λ, μ sont les coefficients de Lamé du matériau supposé isotrope, et ρ est la masse volumique de celui-ci.

Dans ce cas particulier, les équations (2.1) peuvent être découplées en recherchant un champ de déplacement solution sous la forme (2.2) [124] :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla \Psi_L + \nabla \times \mathbf{X}, \\ \mathbf{X} &= \Psi_{T_1} \mathbf{e}_z + \nabla \times (-\Psi_{T_2} \mathbf{e}_z) \end{aligned} \quad (2.2)$$

On peut noter que plusieurs substitutions similaires à (2.2) pour le déplacement sont admissibles. On a retenu ici celle utilisée par Lester [125], ou encore Skelton [54].

En supposant déjà des solutions harmoniques en temps, en adoptant par convention une dépendance en $e^{-i\omega t}$ omise par la suite dans la notation, celles-ci conduisent en coordonnées cylindriques au système d'équations d'onde vérifiées par les trois potentiels Ψ_L , Ψ_{T_1} et Ψ_{T_2} :

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_L + k_L^2 \Psi_L &= 0 \\ \Delta \Psi_{T_1} + k_T^2 \Psi_{T_1} &= 0 \\ \Delta \Psi_{T_2} + k_T^2 \Psi_{T_2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

où $\left\{ \begin{array}{l} k_L = \frac{\omega}{c_L}, \quad c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\ k_T = \frac{\omega}{c_T}, \quad c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{array} \right.$

en ayant noté c_L et c_T respectivement les célérités de l'onde longitudinale L et des ondes de cisaillement T_1 et T_2 .

La résolution de (2.3) s'appuie sur la transformée de Fourier suivant z et la décomposition en série de Fourier suivant ϕ des différentes grandeurs évaluées dans le domaine physique,

et qui sont reliées aux grandeurs spectrales associées dans le système de coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} F(r, \phi, z) &= \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\phi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(r, n, \alpha) e^{i\alpha z} d\alpha \\ F(r, n, \alpha) &= \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\phi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(r, \phi, z) e^{-i\alpha z} dz d\phi \end{aligned} \quad (2.4)$$

Les grandeurs spectrales associées sont distinguées des grandeurs physiques uniquement par leurs variables d'entrée n et α .

En utilisant les relations de passage (2.4) sur les équations (2.3), chaque potentiel spectral Ψ_w , $w = L, T_1, T_2$ vérifie l'équation de Bessel cylindrique suivante :

$$\frac{\partial^2 \Psi_w}{\partial r^2}(r, n, \alpha) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_w}{\partial r}(r, n, \alpha) + (k_w^2 - \alpha^2 - \frac{n^2}{r^2}) \Psi_w(r, n, \alpha) = 0 \quad (2.5)$$

avec $k_w = \frac{\omega}{c_w}$ le nombre d'onde de l'onde w considérée.

L'équation (2.5) est différentielle d'ordre 2, la solution générale s'exprime donc sur la base de deux solutions indépendantes. En théorie, n'importe quel couple de solutions choisi parmi les fonctions de Bessel cylindriques J_n et Y_n , les fonctions de Bessel modifiées I_n et K_n , et enfin les fonctions de Hankel $H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$, peut convenir.

Cependant, de nombreuses instabilités numériques peuvent survenir du choix du couple de solutions retenu [126].

Le choix retenu pour le couple de solutions indépendantes sera justifié au moment de discuter des instabilités numériques liées à l'évaluation des fonctions de Bessel. Pour le moment, on se contente de donner les solutions générales retenues pour les potentiels spectraux Ψ_w sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions solutions de (2.5) :

$$\begin{aligned} \Psi_L(r, n, \alpha) &= \mathcal{A}_n^L(\gamma_L r), \gamma_L = \sqrt{k_L^2 - \alpha^2} \\ \Psi_{T_1}(r, n, \alpha) &= \mathcal{A}_n^{T_1}(\gamma_{T_1} r), \gamma_{T_1} = \sqrt{k_{T_1}^2 - \alpha^2} \\ \Psi_{T_2}(r, n, \alpha) &= \mathcal{A}_n^{T_2}(\gamma_{T_2} r) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Les quantités $\mathcal{A}_n^w(\gamma_w r)$ sont des combinaisons linéaires de deux solutions indépendantes de l'équation de Bessel cylindrique, indexées par l'ordre circonférentiel n et prenant en argument la quantité $\gamma_w r$ complexe. Elles peuvent se mettre sous la forme :

$$\mathcal{A}_n^w(\gamma_w r) = C_1^w f_1(\gamma_w r) + C_2^w f_2(\gamma_w r) \quad (2.7)$$

en notant (f_1, f_2) le couple de solutions linéairement indépendantes de l'équation de Bessel choisi.

La décomposition (2.2), exprimée dans le domaine spectral, permet d'expliciter le champ déplacement solution en fonction des potentiels Ψ_w et de leurs dérivées par rapport à la variable radiale r :

$$\begin{aligned} u_r(r, n, \alpha) &= \frac{\partial \Psi_L}{\partial r} + \frac{in}{r} \Psi_{T_1} - i\alpha \frac{\partial \Psi_{T_2}}{\partial r} \\ u_\phi(r, n, \alpha) &= \frac{in}{r} \Psi_L - \frac{\partial \Psi_{T_1}}{\partial r} + \frac{n\alpha}{r} \frac{\partial \Psi_{T_2}}{\partial r} \\ u_z(r, n, \alpha) &= i\alpha \Psi_L + (\alpha^2 - k_T^2) \Psi_{T_2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

De même, la loi de Hooke pour un matériau isotrope (1.9) permet de dériver le champ de contraintes spectral à partir des déplacements spectraux en fonction des mêmes potentiels d'onde Ψ_w .

En injectant la forme (2.7) de chaque potentiel dans l'expression établie pour les déplacements (2.8) ou celle pouvant être dérivée pour le champ de contraintes, il est donc possible d'établir une matrice solide élémentaire 6×6 notée $[\mathbf{S}]$ qui relie les déplacements \mathbf{u} et les composantes normales du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{e}_r$ aux amplitudes C^w des ondes dans le domaine spectral :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} (r, n, \alpha) = [\mathbf{S}] \mathbf{C}(n, \alpha) \quad (2.9)$$

où $\mathbf{C}(n, \alpha)$ est un vecteur 6×1 contenant les coefficients inconnus des trois combinaisons linéaires \mathcal{A}_n^w , $w = L, T_1, T_2$.

L'expression de la matrice $[\mathbf{S}]$ est également donnée en appendice A.

I.2 Cas d'une couche élémentaire fluide

Dans chaque couche intermédiaire de fluide parfait, la pression acoustique vérifie l'équation d'onde longitudinale de dilatation-compression (1.4), qui n'autorise par conséquent qu'un seul mode propagatif à exister dans la couche, qu'on note L comme pour une couche solide. Le déplacement est purement radial, seule la contrainte normale σ_{rr} est non nulle et égale à l'opposé de la pression acoustique :

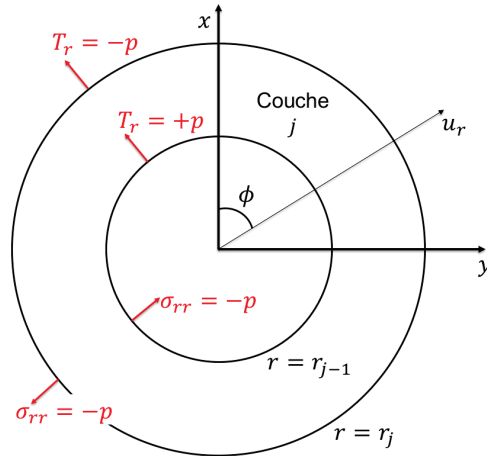


FIGURE 2.2 – Degrés de liberté pour une couche fluide quelconque

L'équation de Helmholtz exprimée en coordonnées cylindriques dans le domaine spectral n'est autre que l'équation de Bessel cylindrique, pour laquelle on a exprimé la solution générale sous forme d'une combinaison linéaire de solutions indépendantes à la section I.1 précédente.

En définissant un potentiel des déplacements Ψ_L tel que $\mathbf{u} = \nabla \Psi_L$, le potentiel spectral associé est donc solution d'une équation de Bessel cylindrique et peut se mettre sous une forme identique à (2.6) :

$$\Psi_L = \mathcal{A}_n^L(\gamma_L r), \gamma_L = \sqrt{k_L^2 - \alpha^2} \quad (2.10)$$

avec ici $k_L = \frac{\omega}{c_L}$ le nombre d'onde des ondes acoustiques se propageant dans la couche fluide à la célérité c_L .

Le déplacement normal u_r et la pression acoustique s'expriment alors :

$$\begin{aligned} u_r(r, n, \alpha) &= \gamma_L \mathcal{A}_n^{L'}(r, n, \alpha) \\ p(r, n, \alpha) &= -\sigma_{rr}(r, n, \alpha) = \rho \omega^2 \mathcal{A}_n^L(r, n, \alpha) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Comme pour une couche solide, on peut établir une matrice fluide élémentaire 2×2 notée $[\mathbf{F}]$ qui relie le déplacement et la contrainte normale aux amplitudes C^w des ondes dans le domaine spectral :

$$\begin{pmatrix} u_r \\ \sigma_{rr} \end{pmatrix}(r, n, \alpha) = [\mathbf{F}] \mathbf{C}(n, \alpha) \quad (2.12)$$

où $\mathbf{C}(n, \alpha)$ est un vecteur 2×1 contenant les coefficients inconnus de la combinaison linéaire \mathcal{A}_n^L . L'équation (2.12) est toujours valable pour la cavité interne et le fluide extérieur semi-infini.

L'expression de la matrice $[\mathbf{F}]$ est également donnée en appendice A.

En remarquant que $\gamma_L \mathcal{A}_n^{L'} = (\gamma_L \mathcal{A}_n^L)'$, il est important de souligner qu'on retrouve la relation d'Euler entre la pression acoustique et le déplacement normal, à savoir :

$$\frac{\partial p}{\partial r}(r, n, \alpha) = \rho \omega^2 u_r(r, n, \alpha)$$

Ainsi, la contrainte normale intervenant dans la matrice fluide définie en (2.12) s'identifie à l'opposé de la pression *rayonnée* par la structure.

II Assemblage du système multicouche

La traduction des conditions aux limites à chaque interface séparant deux couches élémentaires est réalisée à l'aide des expressions (2.9) et (2.12). On peut alors assembler toutes les couches solides et fluides dans une matrice globale reliant les coefficients élémentaires C^w de toutes les couches à un vecteur second membre qui contient les excitations extérieures éventuellement appliquées aux interfaces des couches.

II.1 Relations de continuité aux interfaces de la structure

Soit N le nombre total de couches dans la structure, qui comprend donc $N + 1$ interfaces. On considérera dans la suite une interface quelconque notée $j + 1$ et d'équation $r_j = \text{Cte}$, pour $j \in \llbracket 0; N \rrbracket$, qui délimite deux couches élémentaires notées j et $j + 1$.

On écrit les relations de continuité à chacune des interfaces de la structure.

II.1.1 Interfaces internes

Pour une interface interne du multicouche, aucune excitation extérieure n'est imposée, et on discute des grandeurs conservées en fonction de la nature de chaque couche. La notation $\llbracket \mathbf{x} \rrbracket_{j+1}$ désigne le saut de la grandeur \mathbf{x} considérée à la cote r_j de l'interface $j + 1$,

i.e :

$$[[\mathbf{x}]]_{j+1} = \mathbf{x}(r_j^+, n, \alpha) - \mathbf{x}(r_j^-, n, \alpha)$$

INTERFACE SOLIDE-SOLIDE

En supposant l'interface parfaite, il y a continuité des déplacements et des composantes normales du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{e}_r$:

$$\begin{aligned} [[\mathbf{u}]]_{j+1} &= 0 \\ [[\boldsymbol{\sigma}]]_{j+1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

INTERFACE FLUIDE-SOLIDE

Les composantes normales du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{e}_r$ est également continu, mais les contraintes de cisaillement sont nulles dans le fluide supposé parfait. De plus, la condition de non-glissement ne sera pas imposée entre le fluide et le solide, et on se contentera de respecter la non-pénétration du fluide dans le solide en imposant la nullité du déplacement normal :

$$\begin{aligned} [[\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r]]_{j+1} &= 0 \\ [[\boldsymbol{\sigma}]]_{j+1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Exprimées en fonction des matrices solide et fluide élémentaires introduites en (2.9) et (2.12), les équations (2.13) et (2.14) se traduisent en :

INTERFACE SOLIDE-SOLIDE :

$$\bullet \left([[\mathbf{S}]_j \quad - [\mathbf{S}]_{j+1}] \Big|_{(r_j, n, \alpha)} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_j \\ \mathbf{C}_{j+1} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right) \quad (2.15)$$

INTERFACE FLUIDE-SOLIDE :

$$\bullet \left([[\mathbf{F}]_j \quad - [\mathbf{S}]_{j+1} ([1 \ 4, :])] \Big|_{(r_j, n, \alpha)} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_j \\ \mathbf{C}_{j+1} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right) \quad (2.16)$$

$$\bullet [\mathbf{S}]_{j+1} ([5 \ 6, :]) \Big|_{(r_j, n, \alpha)} \mathbf{C}_j = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

II.1.2 Interfaces extrémales du système multicouche

Pour les deux interfaces sièges du couplage entre la structure et les fluides interne et externe, on peut écrire les relations de continuité en tenant compte des éventuels

chargements extérieurs autres que ceux exercés par les fluides, en notant $\mathbf{T} = (T_r, T_\phi, T_z)^T$ les composantes du vecteur traction imposé soit au rayon interne r_0 , soit au rayon externe r_N :

INTERFACE 1 :

$$\bullet ([\mathbf{F}]_0 - [\mathbf{S}]_1 ([1 \ 4, :]))|_{(r_0, n, \alpha)} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_0 \\ \mathbf{C}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T_r^{\text{EXT}} \end{pmatrix} \Big|_{(r_0, n, \alpha)} \quad (2.18)$$

$$\bullet [\mathbf{S}]_1 ([5 \ 6, :])|_{(r_0, n, \alpha)} \mathbf{C}_1 = - \begin{pmatrix} T_\phi^{\text{EXT}} \\ T_z^{\text{EXT}} \end{pmatrix} \Big|_{(r_0, n, \alpha)} \quad (2.19)$$

INTERFACE N + 1 :

$$\bullet ([\mathbf{S}]_N ([1 \ 4, :]) - [\mathbf{F}]_{N+1})|_{(r_N, n, \alpha)} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_N \\ \mathbf{C}_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T_r^{\text{EXT}} \end{pmatrix} \Big|_{(r_N, n, \alpha)} \quad (2.20)$$

$$\bullet [\mathbf{S}]_N ([5 \ 6, :])|_{(r_N, n, \alpha)} \mathbf{C}_j = \begin{pmatrix} T_\phi^{\text{EXT}} \\ T_z^{\text{EXT}} \end{pmatrix} \Big|_{(r_N, n, \alpha)} \quad (2.21)$$

Dans le cas d'une excitation par onde plane incidente impactant la structure au rayon r_N , seule l'équation (2.20) aura un second membre non nul, la composante radiale du vecteur traction extérieur évalué au rayon externe s'identifiant à la pression bloquée :

$$T_r^{\text{EXT}} = -p_b(r_N, n, \alpha)$$

Celle-ci est explicitée en II.2.3, au moment de décrire l'excitation par onde plane incidente.

II.1.3 Conditions aux limites aux frontières du domaine

Les deux fluides interne et externe couplant la structure élargissent le domaine de $[r_0; r_N]$ à $[0; +\infty]$. Il est donc nécessaire d'établir des conditions aux limites également en $r = 0$ et en $r \rightarrow +\infty$ pour assurer la validité des solutions sur toute cette plage.

Les potentiels longitudinaux de la cavité interne et du fluide extérieur doivent vérifier :

- D'une part, le potentiel Ψ_L^{air} dans la cavité interne doit avoir une limite finie en $r = 0$.

Cette condition traduit l'absence de terme source en $r = 0$ capable de rayonner vers l'extérieur du cylindre.

- D'autre part, le potentiel Ψ_L^{eau} dans le fluide extérieur doit vérifier la condition de Sommerfeld à l'infini (condition de non-réflexion à l'infini).

Ces conditions seront explicitées également une fois que le couple de solutions linéairement indépendantes des équations de Bessel vérifiées par les différents potentiels aura été choisi.

II.2 Construction de la matrice globale

II.2.1 Remplissage de la matrice globale

À l'aide des relations (2.15) - (2.17), on peut alors construire une matrice globale notée $[\mathbf{G}]_{\text{hDGM}}$ telle que :

$$[\mathbf{G}]_{\text{hDGM}}(n, \alpha) \{\mathbf{C}\}(n, \alpha) = \mathbf{E}(n, \alpha) \quad (2.22)$$

avec :

- $[\mathbf{G}]_{\text{hDGM}}(n, \alpha)$ la matrice globale du système, remplie des différentes matrices solide et fluide élémentaires de chaque couche. Celle-ci peut être lue par blocs de lignes comme la traduction des équations de continuité (2.15)-(2.17).
- $\{\mathbf{C}\}(n, \alpha)$ le vecteur des coefficients d'onde $\mathbf{C}_j, j = 0..N + 1$ de chaque couche élémentaire, en comptant les fluides interne et externe
- $\mathbf{E}(n, \alpha)$ le vecteur second membre contenant les excitations éventuelles appliquées à chaque interface.

L'utilisation de la lettre minuscule « h » devant l'acronyme « DGM » rappelle la décomposition de Helmholtz effectuée sur le champ de déplacements pour résoudre le problème dans les couches élémentaires solides.

On fait le choix de remplir la matrice globale de la première interface *air-acier* jusqu'à la dernière interface séparant le dernier revêtement N du multicouche et le fluide semi-infini extérieur. Les deux dernières lignes restantes sont réservées pour imposer les conditions

aux limites aux frontières du domaine en $r = 0$ et en $r \rightarrow +\infty$.

La matrice globale peut alors être représentée de la manière suivante :

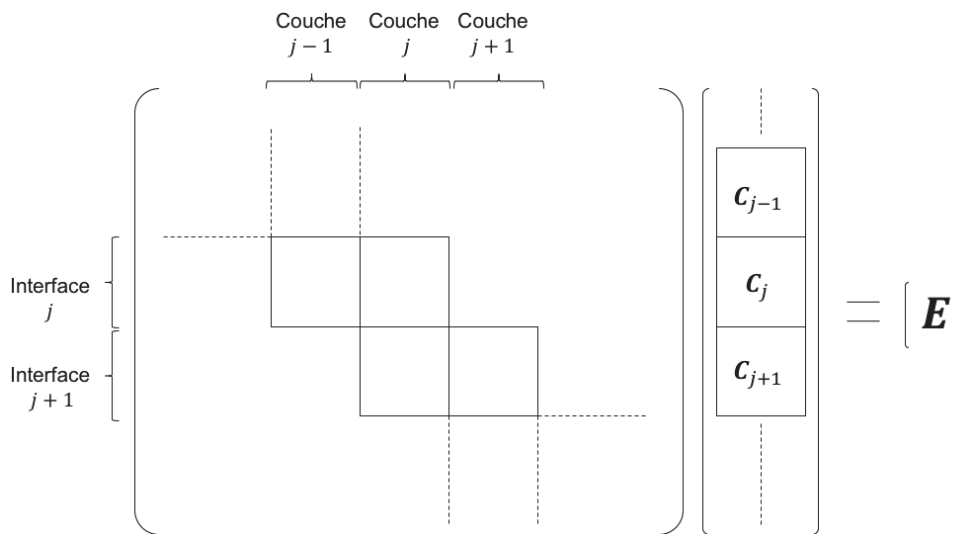


FIGURE 2.3 – Structure d’assemblage de la matrice globale

II.2.2 Nombre d’équations et d’inconnues du système à résoudre

On vérifie ici que le nombre d’équations pourvu pour résoudre le système est bien égal au nombre de coefficients d’onde inconnus à déterminer, et que celui-ci détermine bien la taille de la matrice globale, qui augmente donc avec le nombre de couches considéré dans la structure. Le nombre de colonnes de la matrice globale est identique au nombre de coefficients d’onde à déterminer pour chaque couche, tandis que le nombre de lignes correspond au nombre d’équations du système linéaire fourni par les relations de continuité aux interfaces, et par les deux conditions aux limites en $r = 0$ et en $r \rightarrow +\infty$.

Il y a 2 coefficients d’onde à déterminer pour chaque couche fluide, et 6 pour chaque couche solide. Pour un multicouche comportant N couches, on note n_s le nombre de couches solides, et n_f le nombre de couches fluides, sans compter les fluides interne et externe couplant la structure. On a donc $N = n_s + n_f$; chaque couche fluide sépare forcément deux couches solides, ce qui signifie qu’on ne peut pas superposer deux couches fluides successivement.

La nombre de colonnes de la matrice globale C_G est donc de :

$$C_G = 6 \times n_s + 2 \times (n_f + 2) \quad (2.23)$$

Par ailleurs, le nombre d'équations fourni par les relations de continuité et les conditions aux limites dépend du nombre d'interfaces dans la structure.

Pour une structure de N couches, il y a $N + 1 = (N - 1) + 2$ interfaces, avec $N - 1$ interfaces internes à la structure, et les deux interfaces extrémales forcément *solide-liquide* aux rayons interne et externe du multicouche.

Chaque interface *solide-solide* fournit 6 équations, tandis que chaque interface *solide-liquide* ne fournit que 4 équations, du fait que les fluides sont supposés parfaits.

Il y a $N - 1 - 2 \times n_f = n_s - n_f - 1$ interfaces *solide-solide*, et $2n_f + 2$ interfaces *solide-liquide*, en comptant les deux interfaces extrémales.

Les deux dernières équations sont données par les conditions aux limites en $r = 0$ et en $r \rightarrow +\infty$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} L_G &= 6 \times (n_s - n_f - 1) + 4 \times (2 \times n_f + 2) + 2 \\ &= 6 \times n_s + 2 \times (n_f + 2) \\ &= C_G \end{aligned} \quad (2.24)$$

On a donc bien un nombre de colonnes et de lignes identiques pour la matrice globale, ce qui traduit le fait que le système linéaire est bien posé et comporte autant d'équations que d'inconnues à résoudre. On notera par la suite $S_G = L_G = C_G$ la taille de la matrice globale.

II.2.3 Excitation par onde plane incidente

On explicite ici le vecteur du second membre du système (2.22) pour le cas d'excitation par onde plane incidente.

Les relations de continuité portant sur le champ de contraintes au rayon externe s'écrivent en fonction de la pression totale dans le fluide extérieur, qui se décompose suivant la pression bloquée et la pression rayonnée par le déplacement de la structure :

$$\sigma_N(r_N, n, \alpha) = -(p_b + p_e)(r_N, n, \alpha)\mathbf{e}_r \quad (2.25)$$

La pression bloquée est par définition associée à un déplacement nul au rayon externe de la coque, tandis que la pression rayonnée s'identifie avec la deuxième ligne de la matrice du fluide extérieur. En exprimant de même le champ de contraintes, l'équation (2.25) se ré-écrit :

$$([\mathbf{S}]_N ([4, :]) - [\mathbf{F}]_{N+1} ([2, :]))|_{(r_N, n, \alpha)} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_N \\ \mathbf{C}_{N+1} \end{pmatrix} = -p_b(r_N, n, \alpha) \quad (2.26)$$

La composante normale du vecteur traction $T_r^{\text{EXT}}(r_N, n, \alpha)$ s'identifie donc bien à l'opposé de la pression bloquée évaluée au rayon externe r_N , dont l'expression est explicitée ci-dessous :

$$p_b(r_N, n, \alpha) = \frac{2(-i)^{n+1} e^{-in\phi_i}}{\pi \gamma_L^{\text{eau}} r_N H_n^{(1)}(\gamma_L^{\text{eau}} r_N)} \delta(\alpha - \alpha^i) \quad (2.27)$$

II.2.4 Calcul du champ de pression spectral à la cote antenne

II.2.4.1 Résolution du système linéaire attaché à la matrice globale

Le calcul du champ de pression spectral au rayon d'antenne se fait par inversion du système (2.22). Du point de vue numérique, la matrice globale n'est pas inversée, mais un algorithme de pivot de Gauss avec pivotement partiel est effectué par le logiciel de calcul. Le vecteur $\{\mathbf{C}\}$ contenant les coefficients élémentaires de tous les potentiels d'onde Ψ_w^j est ainsi déterminé, permettant de reconstruire les déplacements et contraintes dans n'importe quelle couche et à n'importe quelle cote radiale.

II.2.4.2 Reconstruction du champ de pression spectral à la cote antenne

Pour une couche d'antenne j_A , et un rayon d'antenne dans cette couche noté r_A , les déplacements et contraintes spectraux à cette cote sont évalués à l'aide de la matrice fluide ou solide élémentaire de la couche d'antenne j_A , suivant si le capteur est enfoui dans une

couche solide ou fluide :

ANTENNE ENFOUÏE DANS UNE COUCHE SOLIDE :

$$\bullet \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \Big|_{(r_A, n, \alpha)} = [\mathbf{S}]_{j_A} \Big|_{(r_A, n, \alpha)} \mathbf{C}_{j_A} \quad (2.28)$$

ANTENNE ENFOUÏE DANS UNE COUCHE FLUIDE :

$$\bullet \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \Big|_{(r_A, n, \alpha)} = [\mathbf{F}]_{j_A} \Big|_{(r_A, n, \alpha)} \mathbf{C}_{j_A} \quad (2.29)$$

où \mathbf{C}_{j_A} fait apparaître un Dirac au nombre d'onde incident α^i dû à l'expression de la pression bloquée spectrale (2.27).

Ainsi, lors de la reconstruction du vecteur des déplacements et contraintes dans le domaine spatial, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \Big|_{(r_A, \phi, z)} = \text{TF}^{-1} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \Big|_{(r_A, n, \alpha)} \right) = \sum_n \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \Big|_{(r_A, n, \alpha^i)} e^{i\alpha^i z} e^{in\theta} \quad (2.30)$$

III Instabilités liés à la géométrie cylindrique

Le cas de la géométrie cylindrique pose des problèmes numériques propres au choix des fonctions de Bessel et à leur évaluation numérique.

III.1 Choix des fonctions de Bessel

On rappelle l'équation de Bessel cylindrique vérifiée par chacun des potentiels d'onde Ψ_w de chaque couche élémentaire :

$$\frac{\partial^2 \Psi_w}{\partial r^2}(r, n, \alpha) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_w}{\partial r}(r, n, \alpha) + \left(\gamma_w^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \Psi_w(r, n, \alpha) = 0 \quad (2.31)$$

Le changement de variable $u = \gamma_w r$ permet de se ramener à l'équation de Bessel cylindrique classiquement employée et d'exprimer les solutions générales de (2.31) sur une base de solutions linéairement indépendantes. Pour notre cas particulier, n est un entier naturel. Les solutions à l'équation (2.31) sont les fonctions de Bessel J_n , Y_n , $H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$, évaluées

aux arguments $\gamma_w r$. Les fonctions J_n et Y_n sont respectivement les fonctions de Bessel de première et de seconde espèce, tandis que les fonctions $H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$ sont généralement appelées les fonctions de Hankel de première et seconde espèce.

Les fonctions de Bessel J_n et Y_n s'apparentent à des modes stationnaires oscillants, analogues aux fonctions cosinus et sinus en coordonnées cartésiennes.

Les fonctions de Hankel $H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$ sont similaires à des exponentielles complexes, et représentent des ondes oscillantes divergentes ou convergentes suivant la direction radiale, suivant la convention en temps choisi.

À partir des expressions asymptotiques des fonctions de Hankel pour des grands arguments,

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(\gamma_w r) &\xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma_w r}} e^{i(\gamma_w r - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \\ H_n^{(2)}(\gamma_w r) &\xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma_w r}} e^{-i(\gamma_w r - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \end{aligned} \quad (2.32)$$

la quantité γ_w peut s'interpréter comme une constante de propagation dans la direction radiale, au même titre que l'est α pour la direction axiale.

En supposant donc $\text{Re}(\gamma_w)$ positive, la convention de temps choisie pour l'étude $e^{-i\omega t}$ implique que $H_n^{(1)}$ décrit une onde propagative divergente en r , tandis que $H_n^{(2)}$ décrit une onde propagative convergente vers l'axe du cylindre d'équation $r = 0$.

Une troisième catégorie de fonctions de Bessel mérite d'être citée, à la différence que ces fonctions sont solutions d'une équation de Bessel modifiée, écrite ci-dessous :

$$\frac{\partial^2 \Psi_w}{\partial r^2}(r, n, \alpha) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_w}{\partial r}(r, n, \alpha) - \left(\gamma_w^2 + \frac{n^2}{r^2}\right) \Psi_w(r, n, \alpha) = 0 \quad (2.33)$$

Les fonctions solutions de (2.33) sont appelées fonctions de Bessel modifiées de première et seconde espèce, et sont notées respectivement I_n et K_n . Elles croissent et décroissent respectivement et s'apparentent aux fonctions cosinus et sinus hyperboliques en coordonnées cartésiennes. Pour les retenir dans la suite de l'analyse, un changement de signe devrait être effectué sur l'opérateur différentiel.

Le choix des fonctions de Bessel à retenir pour décrire la propagation dépend de la nature de la couche considérée et des conditions aux interfaces, on discute du choix retenu en parcourant le domaine depuis la cavité interne du cylindre vers le fluide semi-infini.

III.1.1 Propagation dans la cavité interne

Dans la cavité interne du cylindre, supposée remplie d'air, une seule interface permet la transmission d'ondes dans la cavité depuis les couches supérieures de la structure. L'absence de terme source en $r = 0$ capable de rayonner vers les $r \rightarrow +\infty$ impose de supposer qu'aucune onde divergente suivant r ne se développe dans la cavité.

Par conséquent, une seule fonction de Bessel suffit pour exprimer la solution générale du potentiel Ψ_L^{air} , sous réserve que la fonction choisie décrive bien une onde radialement convergente, et qui ne diverge pas en $r = 0$. C'est le cas de la suite de fonctions de Bessel de première espèce J_n , qui sera retenue dans la suite de l'étude pour décrire la propagation dans la cavité interne.

III.1.2 Propagation dans les couches internes de la structure

Chaque couche interne de la structure, solide ou fluide, comporte deux interfaces à ses rayons inférieur et supérieur. Les réflexions sur chacune des deux interfaces d'une couche élémentaire entraîne que chaque potentiel d'onde Ψ_w doit être décrit comme une combinaison de deux ondes partielles. Physiquement, on est tenté de choisir naturellement le couple (J_n, Y_n) , car les ondes qu'elles décrivent s'apparentent à des ondes stationnaires pouvant s'établir dans une couche d'épaisseur finie. En pratique, ce choix n'est pas le plus pertinent pour la robustesse numérique, et on peut démontrer que certaines combinaisons sont plus stables que d'autres.

Ricks [126] identifie que les choix (J_n, Y_n) d'une part, ou $(H_n^{(1)}, H_n^{(2)})$ d'autre part, ne sont pas robustes numériquement. Le premier est fortement instable pour des arguments avec une partie imaginaire de grande amplitude, on montrera plus loin que cela peut correspondre soit à des matériaux fortement dissipatifs, soit à des ondes très évanescentes se propageant dans les couches. Pavlakovic [124] parvient au même constat que Ricks et fait une analogie entre cette instabilité et le *large fd problem* rencontré avec la méthode par matrice de transfert décrite au Chapitre 1, V.3. Le second couple $(H_n^{(1)}, H_n^{(2)})$ devient instable quant à lui pour les ordres circonférentiels élevés.

Ces deux choix à exclure peuvent se comprendre à partir du comportement asymptotique

des fonctions de Bessel et de Hankel aux larges arguments $\gamma_w r$ ou pour des ordres circonférentiels n élevés.

En effet, on a pour les arguments à partie imaginaire de grande amplitude [127] :

POUR $\text{Im}(\gamma_w) \gg 1$:

$$H_n^{(1)}(\gamma_w r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma_w r}} e^{-\text{Im}(\gamma_w)r} e^{i(\text{Re}(\gamma_w)r - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \quad (2.34)$$

$$H_n^{(2)}(\gamma_w r) \sim -2J_n(\gamma_w r) \sim -2iY_n(\gamma_w r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma_w r}} e^{+\text{Im}(\gamma_w)r} e^{-i(\text{Re}(\gamma_w)r - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \quad (2.35)$$

D'une part, les équations (2.34)-(2.35) montrent que pour des matériaux fortement dissipatifs ou des ondes très évanescentes, les fonctions J_n , Y_n et $H_n^{(2)}$ croissent à la même vitesse exponentielle le long de l'axe imaginaire.

En effet, pour $\gamma_w r \in i\mathcal{R}$ imaginaire pur,

$$H_n^{(2)}(\gamma_w r) \sim -2J_n(\gamma_w r) \sim -2iY_n(\gamma_w r) \propto e^{+\text{Im}(\gamma_w)r}$$

Ainsi, ces trois fonctions seront indifférenciées numériquement une fois la précision machine dépassée.

D'autre part, le comportement asymptotique aux ordres circonférentiels élevés fournit les relations suivantes [127] :

POUR $n \gg |\gamma_w|$:

$$J_n(\gamma_w r) \sim \frac{(\gamma_w r)^n}{2^n n!} \quad (2.36)$$

$$Y_n(\gamma_w r) \sim -iH_n^{(1)}(\gamma_w r) \sim iH_n^{(2)}(\gamma_w r) \sim -\frac{2^n (n-1)!}{\pi (\gamma_w r)^n} \quad (2.37)$$

De manière similaire, les équations (2.36)-(2.37) montrent que les fonctions Y_n , $H_n^{(1)}$, et $H_n^{(2)}$ deviennent indissociables numériquement pour des grandes valeurs de n .

Les couples (J_n, Y_n) et $(H_n^{(1)}, H_n^{(2)})$ sont donc écartés pour la suite de l'étude.

Par ailleurs, les comportements asymptotiques (2.34)-(2.37) montrent que le couple à priori le plus stable numériquement pour décrire les matériaux dissipatifs ou pour la prise en compte des ondes évanescentes est $(J_n, H_n^{(1)})$ [126]. Ce choix proposé par Ricks sera retenu pour la suite de l'étude.

On peut signaler que Pavlakovic choisit une alternative différente et utilise les fonctions de Bessel modifiées I_n et K_n pour décrire la propagation dans les couches internes. Cependant, l'implémentation de ces solutions pour les seules couches internes est fastidieuse. En effet, des relations de récurrence identiques relient les fonctions de Bessel ou de Hankel à leurs dérivées successives, mais sont différentes pour les fonctions de Bessel modifiées du fait du changement de l'équation (2.33). Ayant une stabilité numérique équivalente, le choix fait par Ricks a semblé le plus facile d'implémentation.

III.1.3 Propagation dans le fluide extérieur semi-infini

Pour les systèmes dont l'énergie est dissipée dans un milieu semi-infini entourant la structure (dans notre étude le fluide extérieur), il est nécessaire de pouvoir décrire l'onde radialement divergente qui s'éloigne du centre du cylindre, et dont l'énergie doit décroître à l'infini. De même que pour la cavité interne, l'absence de seconde interface pour ce milieu implique que le potentiel Ψ_w^{eau} n'a besoin d'être décrit que par une seule solution de l'équation de Bessel.

D'une part, les ondes décrites par les fonctions de Bessel de première et de seconde espèce J_n et Y_n ne sont pas adaptées pour une couche d'épaisseur infinie (le milieu semi-infini). Elles s'apparentent à des modes stationnaires établis dans une couche d'épaisseur finie et ne pourront décrire la propagation de l'énergie lorsqu'on s'éloigne du cylindre.

Par contre, les fonctions de Hankel qui représentent des ondes propagatives sont adaptées pour modéliser la dissipation d'énergie dans un milieu semi-infini, et ce quel que soit le régime fréquentiel [124]. Du fait que la convention de temps choisi implique que c'est la fonction $H_n^{(1)}$ qui est radialement divergente, c'est celle qu'on conservera pour la suite de l'étude.

III.1.4 Choix de la phase de la constante de propagation radiale

Les constantes de propagation radiale γ_w qui interviennent dans l'argument des fonctions de Bessel sont déterminées par la racine carrée suivante :

$$\gamma_w = \sqrt{k_w^2 - \alpha^2} \quad (2.38)$$

Dans notre cas d'excitation par onde plane incidente, seul le nombre d'onde incident α^i contribue dans le domaine spectral à la réponse, et par conséquent :

$$\begin{aligned}\gamma_w &= \sqrt{k_w^2 - (\alpha^i)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_w}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{v_\phi}\right)^2}\end{aligned}\quad (2.39)$$

en notant v_ϕ la vitesse de phase à laquelle se propage l'onde guidée dans le multicouche. Deux racines réelles ou complexes définies modulo π sont donc solutions et peuvent convenir pour former l'argument $\gamma_w r$ pris par les fonctions de Bessel. Le choix de la racine doit être cohérent avec la description assignée aux fonctions de Bessel choisies.

En reprenant l'équivalent asymptotique de la fonction $H_n^{(1)}$ dans (2.34) aux grandes valeurs de γ_w , on constate d'une part que pour une onde purement propagative, c'est-à-dire lorsque $\text{Im}(\gamma_w) = 0$, on doit choisir la partie réelle de la constante de propagation radiale positive afin que $H_n^{(1)}$ décrive une onde radialement divergente. Ce choix impose $\arg(\gamma_w) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. D'autre part, pour une onde évanescente, le choix de la phase doit permettre de décrire la décroissance suivant r de l'onde lorsqu'on s'éloigne de l'interface. Pour la fonction $H_n^{(1)}$ se développant dans le fluide semi-infini, par exemple, cela impose de fixer la partie imaginaire également positive, ou encore d'imposer $\arg(\gamma_w) \in [0; \pi]$. Ceci permet notamment d'assurer que le potentiel Ψ_L^{eau} dans le fluide semi-infini extérieur vérifie la condition de Sommerfeld à l'infini, qui s'exprime, avec la convention de temps choisie :

$$r \left(\frac{\partial \Psi_L^{\text{eau}}}{\partial r} - i\gamma_w \right) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \quad (2.40)$$

L'intersection de ces deux conditions impose finalement :

$$\arg(\gamma_w) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad (2.41)$$

À partir de l'équivalent asymptotique (2.35), la condition (2.41) est également cohérente pour décrire la fonction J_n comme une onde radialement convergente et dont l'amplitude décroît lorsque $r \rightarrow 0$ quand l'onde est évanescente.

Finalement, on peut toujours choisir le couple de fonctions $(J_n, H_n^{(1)})$ pour décrire les différents potentiels dans chacune des couches internes, et également dans la cavité interne

de la coque et dans le milieu semi-infini occupé par le fluide extérieur. Pour une couche j quelconque, on a donc :

$$\begin{aligned}\Psi_w^j &= \mathcal{A}_n^{w,j}(\gamma_w^j r) = C_1^{w,j} f_1(\gamma_w^j r) + C_2^{w,j} f_2(\gamma_w^j r) \\ &= C_1^{w,j} J_n(\gamma_w^j r) + C_2^{w,j} H_n^{(1)}(\gamma_w^j r)\end{aligned}\tag{2.42}$$

L'absence de terme source en $r = 0$ et la condition de Sommerfeld en $r \rightarrow +\infty$ imposent la nullité des coefficients suivants :

$$\begin{aligned}C_2^{L,\text{air}} &= 0 \\ C_1^{L,\text{eau}} &= 0\end{aligned}\tag{2.43}$$

III.2 Évaluation des fonctions de Bessel : erreurs d'arrondis

Dans ce paragraphe, on discute d'instabilités numériques survenant lors de l'évaluation des fonctions de Bessel dans 2 situations distinctes :

- D'une part aux fréquences élevées lorsque les ondes sont très évanescentes ou les matériaux fortement atténués.
- D'autre part aux basses fréquences, lorsqu'on évalue les fonctions de Bessel pour un ordre circonférentiel trop élevé.

On s'intéresse également à la stabilité des schémas de récurrence vérifiée par les suites numériques des fonctions de Bessel pour évaluer celles-ci aux ordres supérieurs à partir de conditions initiales.

Tous ces problèmes numériques sont liés aux erreurs d'arrondi et aux limites de la précision de l'ordinateur utilisé.

L'implémentation numérique a été réalisée sur le logiciel de calcul scientifique MATLAB sur une machine 64 bits. La précision la plus haute utilisée par défaut pour représenter des nombres à virgule flottante est la double précision construite sur la norme standard IEEE 754.

III.2.1 Simple et double précision

En informatique, la nécessité de trouver une écriture des nombres compatible avec la taille mémoire qu'on lui attribue a privilégié la notation scientifique et l'écriture en virgule

flottante.

La norme IEEE 754 est la norme la plus employée actuellement pour le calcul des nombres à virgule flottante en binaire.

Le format général d'un nombre flottant est constitué de trois éléments : la mantisse, l'exposant et le signe. La notation scientifique permet de facilement identifier chacun de ces trois éléments :

$$x = \pm \underbrace{a}_{\text{Mantisse}} \times 10^{\overbrace{n}^{\text{Exposant}}}, a \in [1; 10[, n \in \mathbb{Z} \quad (2.44)$$

Le stockage mémoire du nombre x effectué par la machine peut être alors schématisé de la manière suivante :



FIGURE 2.4 – Stockage d'un nombre à virgule flottante en représentation binaire

Source : Wikipédia

Le bit de poids le plus fort (en jaune) contiendra l'information du signe du nombre représenté (0 si positif, et 1 si négatif). Les e bits suivants (en vert) représentent l'exposant décalé, et les m bits suivants de poids les plus faibles (en bleu) représentent la mantisse. Dans la norme IEEE 754 utilisée par MATLAB, la simple précision alloue 32 bits pour la représentation d'un nombre à virgule flottante, dont 8 bits pour l'exposant et 23 pour la mantisse.

La double précision utilise 64 bits, dont 11 réservés à l'exposant, et 52 à la mantisse. On peut remarquer que le nombre de bits alloués à la mantisse est beaucoup plus étendu entre la simple et la double précision que le nombre de bits réservé à l'exposant, car une plus grande importance a été donnée à la précision numérique qu'à la plage dynamique. Dans ces conditions, la plage dynamique de nombres flottants pouvant être calculés en double

précision par le logiciel de calcul est bornée :

$$|x| \in [\text{realmin}; \text{realmax}]$$

$$\begin{cases} \text{realmin} &= 2.22507e^{-308} \\ \text{realmax} &= 1.79769e^{+308} \end{cases} \quad (2.45)$$

Suivant le signe positif ou négatif du nombre représenté, la plage dynamique de calcul numérique est donc la réunion de deux intervalles de même longueur, égale à $\text{realmax} - \text{realmin}$:

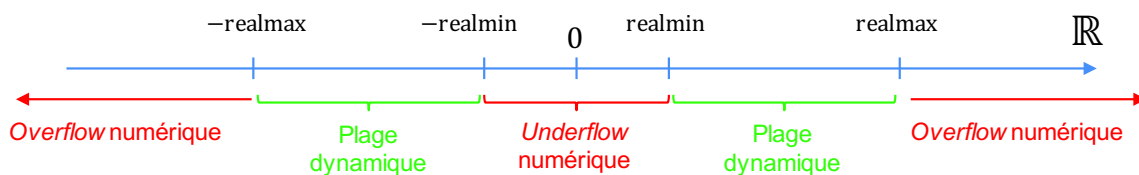


FIGURE 2.5 – Plage dynamique de calcul

Dans les régions d'*underflow* ou d'*overflow* numérique, la précision machine est insuffisante et le calcul renvoie à tort une valeur nulle ou infinie respectivement.

III.2.2 Plage dynamique des fonctions de Bessel

La plage dynamique des fonctions de Bessel est très étendue, de telle sorte que la double précision ne suffit pas à éviter leur évaluation dans les régions d'*underflow* ou d'*overflow* numérique. Les fonctions de Bessel sont évaluées aux arguments $\gamma_L^j r_j$ et $\gamma_T^j r_j$, $j \in \llbracket 0; N + 1 \rrbracket$ indiquant les différentes couches de la structure en comptant les fluides interne et externe, et r_j les cotes radiales des différentes interfaces. L'équation (2.38) montre que les arguments $\gamma_w^j r_j$ dépendent des célérités des ondes de compression et de cisaillement dans chaque couche j (uniquement de compression pour une couche fluide), de la fréquence, ainsi que du nombre d'onde incident projeté suivant l'axe de la coque, ou de la vitesse de phase de l'onde guidée, puisque le nombre d'onde axial vérifie $\alpha = \frac{\omega}{v_\phi}$. On discute dans ce qui suit de deux types d'instabilités numériques liées à la grande amplitude de la plage dynamique des fonctions de Bessel. D'une part des instabilités survenant aux régimes

élevés de la partie imaginaire de la quantité $\gamma_w r$, et d'autre part d'instabilités survenant aux bas régimes de cette même quantité.

III.2.3 Instabilité aux régimes élevés : normalisation des fonctions de Bessel

Pour des matériaux fortement dissipatifs ou des ondes évanescentes, la partie imaginaire de la constante de propagation radiale γ_w sera non nulle, et les fonctions J_n et $H_n^{(1)}$ vont tendre respectivement vers l'infini et s'écraser vers 0 aux régimes élevés du produit $\gamma_w r$ (cf (2.34)-(2.35)). La valeur de $J_n(\gamma_w r)$ va alors finir par se retrouver dans l'*overflow* numérique et celle de $H_n^{(1)}(\gamma_w r)$ dans l'*underflow* numérique.

Pour pallier ce problème, on réduit la plage dynamique des fonctions de Bessel, en effectuant les normalisations suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{J}_n(\gamma_w r) &= J_n(\gamma_w r) e^{-|\text{Im}(\gamma_w r)|} \\ \tilde{H}_n^{(1)}(\gamma_w r) &= H_n^{(1)}(\gamma_w r) e^{-i\gamma_w r} = H_n^{(1)}(\gamma_w r) e^{+\text{Im}(\gamma_w r)} e^{-i\text{Re}(\gamma_w r)}\end{aligned}\tag{2.46}$$

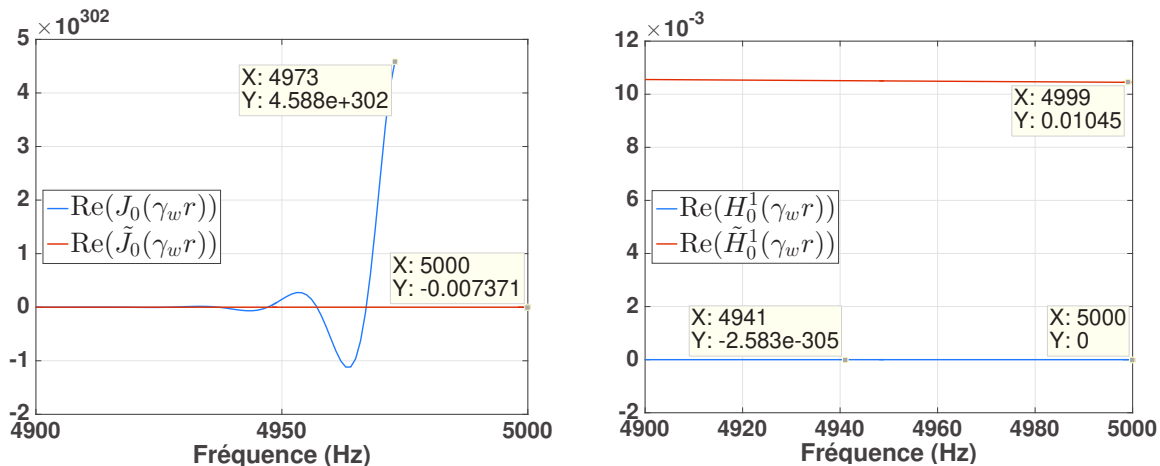
Comme la phase de l'argument $\gamma_w r$ a été choisie entre $[0; \frac{\pi}{2}]$, ces normalisations permettent aux grandes valeurs de $\text{Im}(\gamma_w r)$ de ralentir la divergence de J_n vers l'infini et la décroissance vers 0 de $H_n^{(1)}$ en réduisant la plage dynamique de chacune des fonctions. Cette opération améliore beaucoup la stabilité numérique de la méthode aux grands arguments dans les deux cas suivants :

- Lorsque les matériaux sont fortement dissipatifs, comme c'est le cas de certains matériaux de revêtements de coque.
- Lorsque l'onde guidée est fortement évanescente, sa vitesse de phase v_ϕ est beaucoup plus faible que la vitesse des ondes de compression ou de cisaillement c_w , $w = L, T_1, T_2$. En pratique, dans le cas d'une excitation par onde plane, cette configuration se manifeste pour des incidences fortement obliques.

Cas d'un matériau fortement dissipatif

Considérons un matériau de masquage, pour lequel l'onde volumique de cisaillement est fortement amortie, se propageant à la célérité $c_T = 100 \times (1 - i\eta)$ m.s⁻¹, et avec un amortissement $\eta = 0,45$. Le rayon pour l'interface de la coque considérée est fixé à $r = 6$ m, ce qui est réaliste d'une configuration sous-marine.

En se plaçant en incidence normale, on regarde pour l'ordre circonférentiel $n = 0$ l'évolution de la partie réelle des fonctions $J_n(\gamma_w r)$ et $H_n^{(1)}(\gamma_w r)$ avec ou sans normalisation faite sur la plage de fréquences [4900; 5000] Hz.



(a) Comparaison des fonction $J_0(\gamma_w r)$ avec et sans normalisation (b) Comparaison des fonction $H_0^1(\gamma_w r)$ avec et sans normalisation

FIGURE 2.6 – Évaluation des fonctions de Bessel pour une couche de matériau fortement dissipatif

On voit dans cette configuration que dès l'ordre 0, la fonction J_0 sans normalisation diverge vers l'infini avant la fréquence $f = 5000$ Hz, et ne peut être évaluée en double précision sur toute la plage de fréquence considérée. De même, la fonction H_0^1 renvoie à tort des valeurs strictement nulles à partir d'une certaine fréquence de la même plage fréquentielle.

À l'inverse, la normalisation appliquée sur les fonctions \tilde{J}_0 et \tilde{H}_n^1 permet de récupérer environ 300 ordres de grandeurs sur la plage dynamique et de repousser les problèmes d'underflow et d'overflow à des cas plus critiques.

III.2.4 Instabilité aux bas régimes de $\gamma_w r$

III.2.4.1 Nécessité d'un critère de convergence

On peut remarquer de l'équation (2.46) que la normalisation des fonctions de Bessel n'affecte que très peu leur comportement lorsque la partie imaginaire de la constante de propagation γ_w est faible.

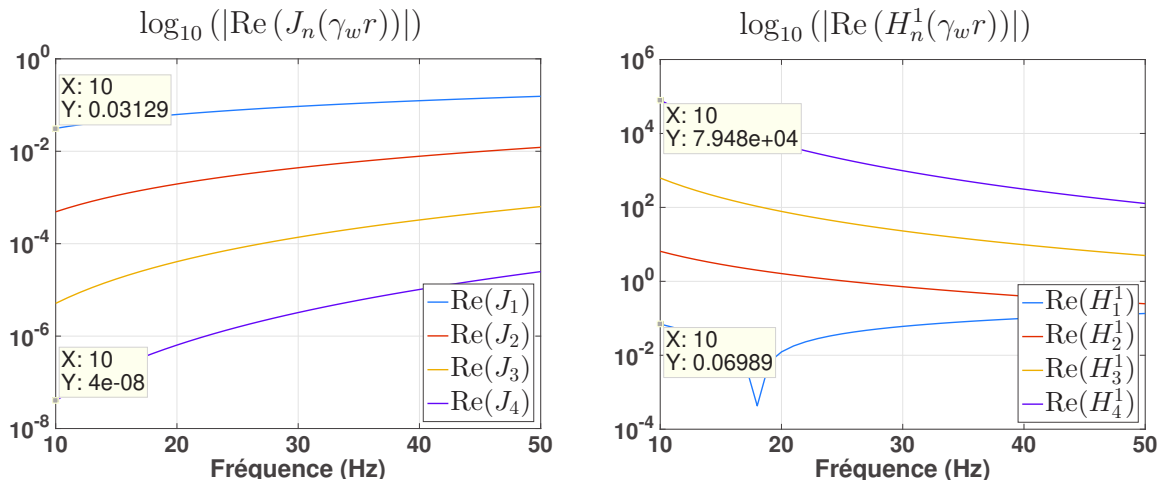
C'est le cas notamment aux basses fréquences pour lesquelles l'argument $\gamma_w r$ prend des valeurs faibles en valeur absolue. Les exponentielles réelles dans (2.46) censées réduire la plage dynamique des fonctions de Bessel sera proche de 1, et leur influence nulle. Or, pour un argument donné de module proche de 0, la suite $(J_n(\gamma_w r))_{n \in \mathbb{N}}$ s'écrase vers 0 de plus en plus vite lorsque n augmente tandis que la suite $(H_n^{(1)}(\gamma_w^j r_j))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers l'infini (cf (2.36)-(2.37)) :

$$\begin{aligned} (J_n(\gamma_w^j r_j))_{n \in \mathbb{N}} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ (H_n^{(1)}(\gamma_w^j r_j))_{n \in \mathbb{N}} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pm\infty \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ainsi, un autre type d'instabilité numérique survient aux faibles valeurs des arguments $\gamma_w^j r_j$ pour les ordres circonférentiels élevés, que la normalisation des fonctions de Bessel est incapable de corriger.

Pour la même coque d'acier que précédemment, et en considérant à nouveau l'onde volumique longitudinale L , on suppose une incidence normale et on trace en échelle logarithmique les différentes parties réelles des fonctions de Bessel pour plusieurs ordres, sur la plage de fréquences [10; 50] Hz : On constate sur les figures 2.7a et 2.7b un écart de 6 ordres de grandeur à la fréquence $f = 10$ Hz entre les premiers termes J_0 (resp. H_0^1) et J_4 (resp. H_4^1) des suites numériques des fonctions de Bessel. Cet écart ne va cesser de croître aux ordres circonférentiels supérieurs, qui finiront par occasionner un underflow et un overflow numérique dû à l'évaluation des fonctions de Bessel, et ce à des régimes où la procédure de normalisation sera inefficace.

On exploite alors le fait que le nombre d'harmoniques circonférentielles suffisant pour décrire correctement la réponse dépend de la fréquence. En effet, seuls les premiers ordres circonférentiels sont nécessaires pour faire converger le calcul aux basses fréquences. Il est



(a) Underflow numérique pour la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aux basses fréquences (b) Overflow numérique pour la suite $(H_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ aux basses fréquences

FIGURE 2.7 – Instabilités aux basses fréquences pour les ordres circonférentiels élevés

donc inutile de calculer les contributions négligeables aux ordres circonférentiels élevés et qui peuvent en revanche occasionner des problèmes numériques.

Par conséquent, il est préférable d'établir un critère de convergence qui détermine pour un nombre d'onde incident donné le nombre d'ordres circonférentiels nécessaire et suffisant pour décrire correctement la réponse d'antenne.

III.2.4.2 Pôles des fonctions de Bessel et valeurs d'annulation de la constante de propagation

Lorsque l'argument $\gamma_w r$ reste en module assez éloigné de la valeur nulle, le critère de convergence excluant les contributions des ordres circonférentiels les plus élevés suffira à éviter l'évaluation de fonctions de Bessel dans les zones d'underflow ou d'overflow numérique. Les instabilités numériques seront donc contournées pour les configurations industrielles visées et sur toute la plage de fréquence désirée pour la résolution.

Cependant, ce critère n'est plus suffisant au voisinage des *pôles des fonctions de Bessel*, c'est-à-dire au voisinage des valeurs d'annulation de la constante de propagation radiale γ_w .

Ces valeurs d'annulation d'après (2.39) correspondent aux coïncidences de la vitesse de

phase de l'onde guidée avec la célérité de l'onde volumique considérée dans la couche, soit celle de compression, soit l'une des deux ondes de cisaillement. Dans le cas de la réponse signal, ces valeurs d'annulation sont également les coïncidences entre le nombre d'onde incident projeté suivant l'axe de la coque et les nombres d'onde des ondes volumiques. Pour un matériau et un type d'onde volumique considérée dans ce matériau correspondra un angle d'incidence oblique pour lequel la quantité γ_w sera nulle.

On peut montrer que l'incidence sera d'autant plus rasante que le matériau considéré sera mou, c'est-à-dire dont les ondes volumiques se propageront à des célérités faibles.

En effet, on a :

$$\gamma_w = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_w}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c_0} \sin \Theta\right)^2} \quad (2.48)$$

en notant Θ l'angle entre le nombre d'onde incident et la normale à la coque.

Par conséquent, la coïncidence survient pour :

$$\gamma_w = 0 \iff \sin \Theta_{co} = \pm \frac{c_0}{c_w}$$

Ainsi, plus la célérité c_w de l'onde volumique considérée dans le matériau sera rapide, et plus le phénomène de coïncidence apparaîtra pour une valeur de Θ_{co} faible, i.e proche de l'incidence normale. D'autre part, ce phénomène ne sera observé que dans les couches de matériaux où les célérités des ondes volumiques sont supersoniques, la fonction sinus étant bornée dans l'intervalle $[-1; 1]$. Pour le domaine d'application sous-marine, c'est l'acier qui sera le matériau le plus rapide, et généralement le seul dont les célérités des ondes volumiques sont supersoniques. Par conséquent, les phénomènes de coïncidence surviendront pour la coque d'acier laissée nue ou en présence de revêtements, assez tôt en dépointant l'incidence de l'onde plane, et d'abord pour les coïncidences avec le nombre d'onde de compression.

On précise enfin qu'une fois le critère de convergence mis en place, ces instabilités ne sont observées en pratique qu'à des fréquences assez élevées, et s'aggravent d'autant plus que la fréquence augmente, même si elles sont à relier à des régimes faibles de la quantité $\gamma_w r$. Ceci est dû à la prise en compte d'un nombre d'ordres circonférentiels d'autant plus important que la fréquence augmente, lorsqu'est mis en place le critère de convergence. Or, l'underflow ou l'overflow numérique prédits par les comportements asymptotiques

(2.36)-(2.37) n'apparaissent qu'à des ordres circonférentiels suffisamment élevés, ce qui explique le comportement observé, même si cela n'est pas intuitif.

III.2.4.3 Quadruple précision numérique

Pour repousser les limites de calcul au voisinage des pôles des fonctions de Bessel, celles-ci sont évaluées en quadruple précision numérique aux valeurs de γ_w proches de 0. La quadruple précision est un format de représentation des nombres à virgule flottante qui étend le format double précision sur 128 bits. Jusqu'à 113 bits sont alloués dans l'espace mémoire pour représenter la mantisse, 15 bits pour l'exposant, et à nouveau un bit pour renseigner le signe. La précision de la mantisse est alors étendue de 16 à 34 décimales, et la plage dynamique élargie du fait du nombre de bits plus élevé pour représenter l'exposant s'étend entre :

$$|x| \in [\text{realmin}^{\text{quad}}; \text{realmax}^{\text{quad}}] \quad (2.49)$$

$$\begin{cases} \text{realmin}^{\text{quad}} &= 3.36210e^{-4932} \\ \text{realmax}^{\text{quad}} &= 1.18973e^{+4932} \end{cases}$$

Le calcul en quadruple précision est implémenté dans MATLAB à l'aide de la *Multiprecision Computing Toolbox* ADVANPIX. L'architecture du code de calcul prévoit un critère d'instabilité pour ne calculer les fonctions de Bessel avec cette précision accrue uniquement dans les zones de coïncidence où la double précision n'est plus suffisante, afin de ne pas rendre les temps calculs prohibitifs.

III.2.5 Évaluation des fonctions de Bessel aux ordres supérieurs

Les fonctions J_n et $H_n^{(1)}$ définissant des suites numériques pour l'ordre circonférentiel n , deux choix peuvent être faits pour calculer les fonctions de Bessel en un argument donné :

- Calculer numériquement les fonctions de Bessel à chaque ordre.
- Utiliser des *schémas de récurrence* pour déduire les ordres successifs des ordres 0 et 1.

L'évaluation des fonctions de Bessel peut être coûteuse numériquement, et il peut être tentant de recourir aux relations de récurrence vérifiées par les fonctions J_n et $H_n^{(1)}$ pour propager la suite numérique aux ordres supérieurs :

$$C_{n+1}(z) = \frac{2n}{z}C_n(z) - C_{n-1}(z) \quad (2.50)$$

pour C_n représentant le terme général de la suite numérique vérifiée par les fonctions J_n et $H_n^{(1)}$.

Le principe pour calculer les fonctions de Bessel aux ordres supérieurs consisterait donc à initialiser la suite numérique par les valeurs $C_0(z)$ et $C_1(z)$, puis de propager le terme général C_n par la relation (2.50).

Avant de substituer à la valeur brute celle obtenue par propagation du schéma de récurrence, il est nécessaire de vérifier la stabilité numérique de ces schémas de récurrence pour les fonctions de Bessel choisies.

Le schéma (2.50) décrit une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont une solution générale peut donc s'écrire sur une base de solutions linéairement indépendantes.

Ces schémas de récurrence à trois termes présentent une instabilité bien connue et détaillée dans la littérature [128, 129], qui dépend de la solution considérée (caractérisée par les conditions initiales $C_0(z)$ et $C_1(z)$), et de la direction de propagation du schéma numérique. Si on note $f_n(z)$ et $g_n(z)$ deux solutions linéairement indépendantes de (2.50), $f_n(z)$ sera dite minimale quand n tend vers l'infini si elle vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(z)}{g_n(z)} = 0 \quad (2.51)$$

La solution $g_n(z)$ est alors dite dominante.

La solution générale, de la forme $C_n(z) = \lambda_1 f_n(z) + \lambda_2 g_n(z)$ avec λ_1 et λ_2 non nuls, se comportera donc toujours numériquement comme la solution dominante $g_n(z)$, quelles que soient les conditions initiales imposées, car λ_2 ne pourra jamais être rigoureusement nul. La solution $\bar{f}_n(z)$ numériquement calculée de $f_n(z)$ sera donc de la forme

$$\bar{f}_n(z) = f_n(z) + \lambda_2 g_n(z)$$

Ainsi, même si λ_2 est de l'ordre de grandeur de la précision machine, l'erreur commise entre la solution \bar{f}_n numérique et la solution exacte $f_n(z)$ va diverger aux grandes valeurs

de n :

$$\left| \frac{\bar{f}_n(z) - f_n(z)}{f_n(z)} \right| = \left| \frac{\lambda_2 g_n(z)}{f_n(z)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (2.52)$$

Dans notre cas, on voit immédiatement de l'équation (2.36) que la fonction J_n est minimale pour le schéma numérique (2.50) quand n tend vers l'infini tandis que les fonctions Y_n , $H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$ sont dominantes.

Le schéma de récurrence (2.50) est donc fortement instable pour la fonction J_n si il est parcouru dans le sens des n croissants, tandis que la fonction $H_n^{(1)}$, elle, sera correctement calculée.

On compare pour les 20 premiers ordres circonférentiels les fonctions de Bessel J_n et $H_n^{(1)}$ pour un argument donné, évaluées d'une part avec les fonctions natives du logiciel MATLAB à chaque ordre (en bleu), et d'autre part en initialisant les suites numériques en $n = 0$ et $n = 1$ puis en propageant le schéma de récurrence (2.50) dans le sens croissant (en rouge).

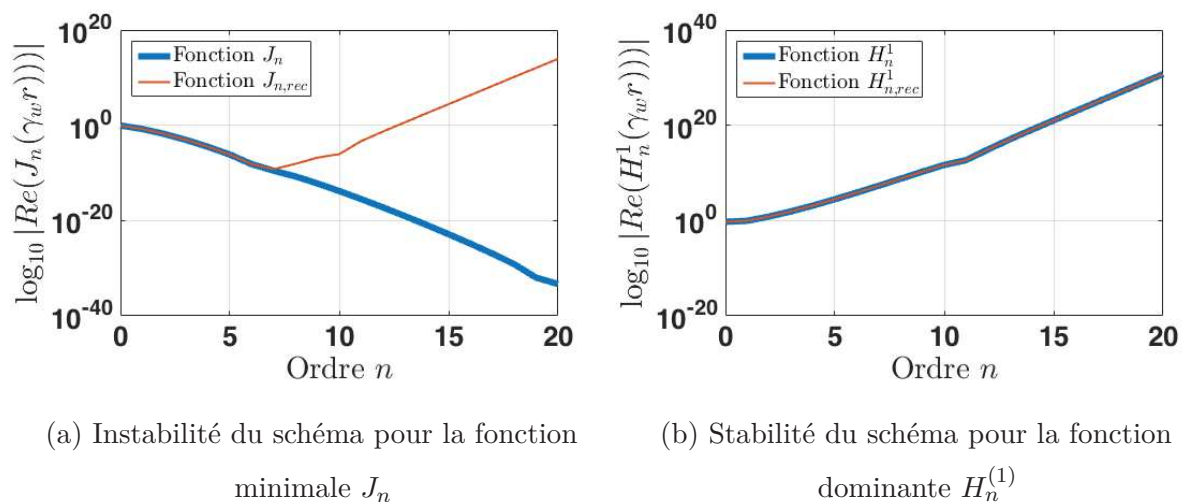


FIGURE 2.8 – Schéma de récurrence parcouru dans le sens des n croissants

Les figures 2.8a et 2.8b montrent d'une part la stabilité du schéma pour la fonction dominante $H_n^{(1)}$, d'autre part son instabilité pour décrire correctement la fonction J_n à des ordres supérieurs.

Néanmoins les définitions des fonctions minimale et dominante dépendent du sens de parcours du schéma de récurrence. Ainsi, pour calculer la fonction J_n avec un schéma de récurrence qui soit stable, il suffit de se donner une grande valeur de N pour initialiser la

suite avec les valeurs J_N et J_{N+1} , puis de parcourir le schéma de récurrence vers $n = 0$ [130].

Cependant, la nécessité d'un critère de convergence à chaque argument pour déterminer le nombre d'ordres circonférentiels à considérer pour la réponse ne rend pas pratique l'implémentation d'un schéma de récurrence inverse, et le gain numérique n'était pas assez substantiel pour le justifier. Par conséquent, la fonction de Bessel J_n est calculée à chaque ordre sans schéma de récurrence.

III.2.6 Évaluation des dérivées successives des fonctions de Bessel

Les coefficients des matrices fluide et solide élémentaire (2.9) et (2.12) dépendent des dérivées première et seconde des fonctions de Bessel, que l'on doit donc calculer avec les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned} C'_n(z) &= -\frac{n}{z}C_n(z) + C_{n-1}(z) \\ C''_n(z) &= \frac{n+n^2}{z^2}C_n(z) + \frac{1-2n}{z}C_{n-1}(z) + C_{n-2}(z) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Les schémas (2.53) font intervenir pour un ordre donné trois termes successifs de la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$, le choix a donc été fait de stocker en mémoire lors du calcul les valeurs des fonctions de Bessel aux deux ordres précédents pour un ordre donné, plutôt que de les recalculer.

IV Implémentation numérique

IV.1 Réponse d'antenne

En notant r_A le rayon d'antenne, l'expression générale de la réponse d'antenne du multicouche lisse à une excitation par onde plane peut s'écrire :

$$R^{\text{OP}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_T(r_A, n, \alpha^i) F^*(r_A, n, \alpha^i) \quad (2.54)$$

avec $p_T(r_A, n, \alpha^i)$ (respectivement $F(r_A, n, \alpha^i)$) la contribution spectrale à l'ordre n au champ de pression totale généré à la surface du capteur (respectivement à la fonction de

filtrage de l'antenne), pour un nombre d'onde incident α^i projeté suivant l'axe de la coque. En supposant le capteur d'antenne uniquement sensible à la contrainte normale sur sa surface, et que celui-ci est enfoui dans un matériau élastique, on peut écrire :

$$R^{\text{OP}} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma_{rr}(r_A, n, \alpha^i) e^{-in\phi_i} F^*(r_A, n, \alpha^i) \quad (2.55)$$

avec ϕ_i l'angle polaire de l'onde plane incidente, et $\sigma_{rr}(r_A, n, \alpha^i)$ la contrainte spectrale normale à l'antenne obtenue lorsque celle-ci est alignée avec l'axe de repérage $\phi_i = 0$. Pour une antenne réduite à un unique capteur ponctuel, ce qui sera toujours le cas dans cette étude, la fonction de filtrage se simplifie en :

$$F^*(r_A, n, \alpha^i) = \frac{1}{2\pi} e^{in\phi_A} e^{i\alpha^i z_A} \quad (2.56)$$

La réponse d'antenne devient donc :

$$R^{\text{OP}} = e^{i\alpha^i z_A} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma_{rr}(r_A, n, \alpha^i) e^{in(\phi_A - \phi_i)} \quad (2.57)$$

Pour économiser en temps calcul, on exploite l'axisymétrie du problème en écrivant $\sigma_{rr}(r_A, -\phi_A, z) = \sigma_{rr}(r_A, \phi_A, z)$, ce qui se traduit dans le domaine spectral par $\sigma_{rr}(r_A, -n, \alpha) = \sigma_{rr}(r_A, n, \alpha)$. Cette égalité est justifiée sous réserve de faire une rotation du repère cylindrique, afin de fixer l'origine de l'angle polaire ϕ_A à la position angulaire ϕ_i de l'onde plane incidente. On obtient finalement pour la réponse en signal d'un capteur ponctuel :

$$R^{\text{OP}} = e^{i\alpha^i z_A} \left[\sigma_{rr}(r_A, 0, \alpha^i) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{rr}(r_A, n, \alpha^i) \cos(n\phi) \right] \quad (2.58)$$

On réduit ainsi par deux le nombre d'ordres circonférentiels à calculer pour la réponse d'antenne.

IV.2 Architecture du code

Dans la pratique, une troncature numérique est nécessaire pour calculer la réponse d'antenne, et on notera :

$$R_{N_{\text{max}}}^{\text{OP}} = e^{i\alpha^i z_A} \left[\sigma_{rr}(r_A, 0, \alpha^i) + 2 \sum_{n=1}^{N_{\text{max}}} \sigma_{rr}(r_A, n, \alpha^i) \cos(n\phi) \right] \quad (2.59)$$

$$R_n^{\text{OP}} = R_{n-1}^{\text{OP}} + 2e^{i\alpha^i z_A} \sigma_{rr}(r_A, n, \alpha^i) \cos(n\phi)$$

On fait également la distinction entre les nombres d'onde incident α_{conv}^i auxquels la double précision suffit à évaluer le champ de contraintes, et ceux notés α_{div}^i pour lesquels la quadruple précision s'avère nécessaire.

L'architecture du code numérique pour le calcul de la réponse d'antenne est schématisé en Fig. 2.9.

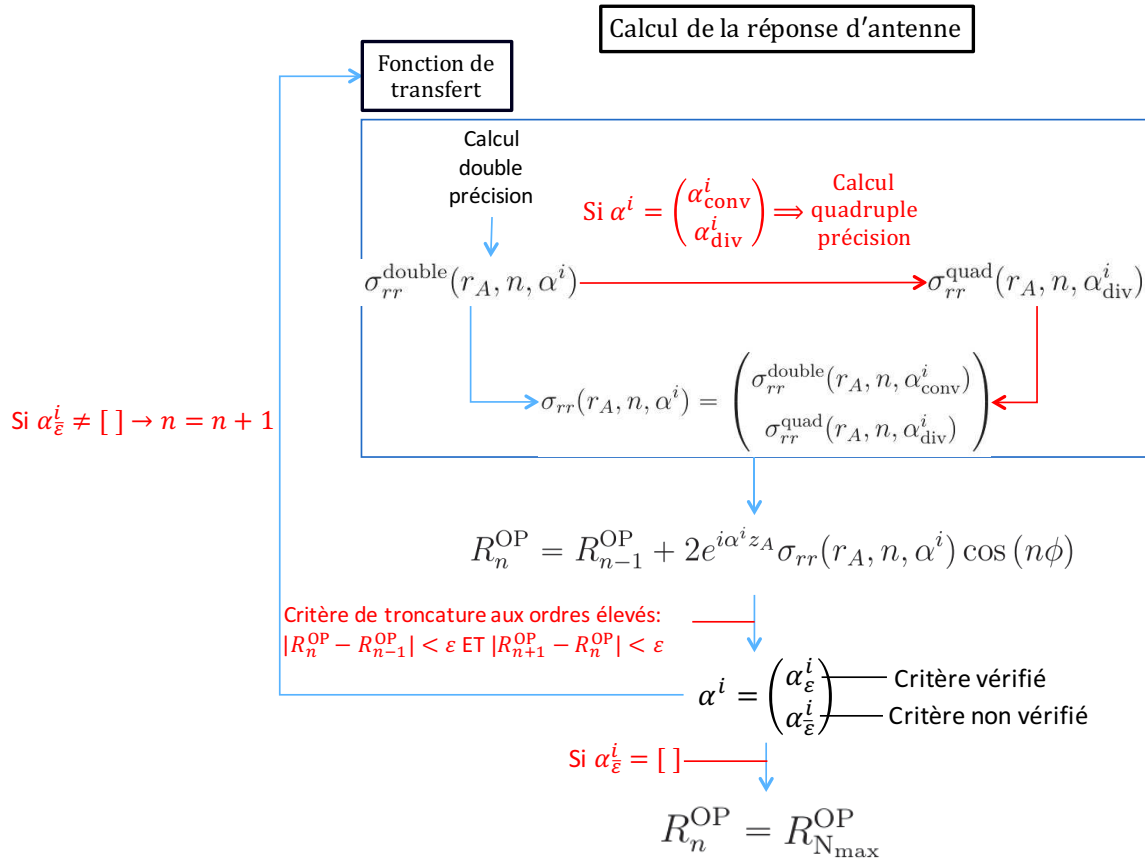


FIGURE 2.9 – Architecture du code numérique

On calcule pour un vecteur du nombre d'onde incident qui couvre à la fois la plage fréquentielle de calcul et les différentes directions du nombre d'onde repérées dans le plan site-gisement.

Une récurrence est effectuée sur les ordres circonférentiels pour calculer la réponse d'antenne. Tant que le critère de convergence n'est pas respecté, les étapes suivantes sont répétées :

- La fonction de filtrage relatif aux capteurs d'antenne et la fonction de transfert du multicouche sont calculées dans deux fonctions différentes.
- Le calcul de la fonction de transfert requiert l'évaluation des fonctions de Bessel, par conséquent un calcul quadruple précision est effectué si il existe certaines valeurs α_{div}^i du vecteur des nombres d'onde axiaux α^i pour lesquelles le calcul en double précision n'a pas convergé numériquement. Les valeurs calculées correctement en double précision sont alors concaténées à celles évaluées avec la quadruple précision pour établir la fonction de transfert pour l'ensemble des valeurs α^i .
- Les fonctions de transfert et de filtrage évaluées à l'ordre n permettent de calculer la contribution de cet ordre à la réponse d'antenne pour toutes les valeurs α^i .
- Le critère de convergence évalué pour chaque valeur de α^i si les contributions aux deux ordres précédents $n - 1$ et n sont inférieures en valeur relative à un palier ϵ . Les valeurs pour lesquelles le critère est vérifié sont notées α_{ϵ}^i , et on considère pour ces valeurs que la réponse d'antenne a convergé.
En revanche, pour les valeurs α_{ϵ}^i n'ayant pas encore convergé, la sommation se poursuit à l'ordre supérieur.

IV.3 Méthode de résolution du système normalisé

La normalisation des fonctions de Bessel altère inévitablement le système (2.22), et les coefficients élémentaires de chaque potentiel d'onde C_j stockés dans le vecteur $\{C\}$ ne sont pas calculés directement après résolution du système linéaire.

IV.3.1 Conséquences de la normalisation du système

À la section II.2, on a présenté la construction de la matrice globale. La normalisation des fonctions de Bessel évoquée en III.2.3 conduit à une version modifiée de la matrice globale que l'on présente dans ce paragraphe.

On explicite ci-dessous l'assemblage des trois types d'interfaces *fluide-solide*, *solide-solide* et *solide-fluide* sur la figure 2.10 :

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
 L^- & L^+ & L^- & L^+ & T_1^- & T_1^+ & T_2^- & T_2^+ & L^- & L^+ & T_1^- & T_1^+ & T_2^- & T_2^+ & L^- & L^+ \\
 \text{Couche} & & & & \text{Couche} & & & & \text{Couche} & & & & \text{Couche} & & & \\
 j-1 & & & & j & & & & j+1 & & & & j+1 & & & j+2 \\
 F_{11} & F_{12} & -S_{11} & -S_{12} & -S_{13} & -S_{14} & -S_{15} & -S_{16} & & & & & & & & \\
 F_{21} & F_{22} & -S_{41} & -S_{42} & -S_{43} & -S_{44} & -S_{45} & -S_{46} & \text{Interface } F-S & & & & & & & \\
 0 & 0 & -S_{51} & -S_{52} & -S_{53} & -S_{54} & -S_{55} & -S_{56} & j & & & & & & & \\
 0 & 0 & -S_{61} & -S_{62} & -S_{63} & -S_{64} & -S_{65} & -S_{66} & & & & & & & & \\
 \text{Interface } S-S & & S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} & -S_{11} & -S_{12} & -S_{13} & -S_{14} & -S_{15} & -S_{16} & & \\
 j+1 & & S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} & -S_{21} & -S_{22} & -S_{23} & -S_{24} & -S_{25} & -S_{26} & & \\
 & & S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} & -S_{31} & -S_{32} & -S_{33} & -S_{34} & -S_{35} & -S_{36} & & \\
 & & S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} & -S_{41} & -S_{42} & -S_{43} & -S_{44} & -S_{45} & -S_{46} & & \\
 & & S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} & -S_{51} & -S_{52} & -S_{53} & -S_{54} & -S_{55} & -S_{56} & & \\
 & & S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} & -S_{61} & -S_{62} & -S_{63} & -S_{64} & -S_{65} & -S_{66} & & \\
 & & & & & & \text{Interface } S-F & & S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} & -F_{11} & -F_{12} \\
 & & & & & & j+2 & & S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} & -F_{21} & -F_{22} \\
 & & & & & & & & S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} & 0 & 0
 \end{array} \right]$$

FIGURE 2.10 – Forme générale de la matrice globale $[\mathbf{G}]_{\text{hDGM}}$ pour les trois types d'interface

Les colonnes sont alternativement des combinaisons linéaires soit de la fonction J_n et de ses dérivées première et seconde, soit de la fonction $H_n^{(1)}$ et de ses dérivées première et seconde.

Suivant l'interface et la couche considérée, la quantité $\gamma_w r$ prise en argument par les fonctions de Bessel sera différente, et on peut représenter ci-dessous pour la couche j solide comment la normalisation va affecter différemment les lignes non nulles relatives à ses deux interfaces j et $j+1$:

$$\begin{pmatrix}
-S_{11}e^{-|\text{Im}(x_{j-1})|} & -S_{12}e^{-ix_{j-1}} & -S_{13}e^{-|\text{Im}(x_{j-1})|} & -S_{14}e^{-ix_{j-1}} & -S_{15}e^{-|\text{Im}(x_{j-1})|} & -S_{16}e^{-ix_{j-1}} \\
-S_{41}e^{-|\text{Im}(x_{j-1})|} & -S_{42}e^{-ix_{j-1}} & -S_{43}e^{-|\text{Im}(x_{j-1})|} & -S_{44}e^{-ix_{j-1}} & -S_{45}e^{-|\text{Im}(x_{j-1})|} & -S_{46}e^{-ix_{j-1}} \\
-S_{51}e^{-|\text{Im}(x_{j-1})|} & -S_{52}e^{-ix_{j-1}} & -S_{53}e^{-|\text{Im}(x_{j-1})|} & -S_{54}e^{-ix_{j-1}} & -S_{55}e^{-|\text{Im}(x_{j-1})|} & -S_{56}e^{-ix_{j-1}} \\
-S_{61}e^{-|\text{Im}(x_{j-1})|} & -S_{62}e^{-ix_{j-1}} & -S_{63}e^{-|\text{Im}(x_{j-1})|} & -S_{64}e^{-ix_{j-1}} & -S_{65}e^{-|\text{Im}(x_{j-1})|} & -S_{66}e^{-ix_{j-1}} \\
S_{11}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{12}e^{-ix_j} & S_{13}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{14}e^{-ix_j} & S_{15}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{16}e^{-ix_j} \\
S_{21}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{22}e^{-ix_j} & S_{23}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{24}e^{-ix_j} & S_{25}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{26}e^{-ix_j} \\
S_{31}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{32}e^{-ix_j} & S_{33}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{34}e^{-ix_j} & S_{35}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{36}e^{-ix_j} \\
S_{41}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{42}e^{-ix_j} & S_{43}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{44}e^{-ix_j} & S_{45}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{46}e^{-ix_j} \\
S_{51}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{52}e^{-ix_j} & S_{53}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{54}e^{-ix_j} & S_{55}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{56}e^{-ix_j} \\
S_{61}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{62}e^{-ix_j} & S_{63}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{64}e^{-ix_j} & S_{65}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{66}e^{-ix_j}
\end{pmatrix}$$

FIGURE 2.11 – Normalisation des colonnes relatives à la couche j

où on définit la quantité $x_j = \gamma_w r_j$, avec γ_w désignant la constante de propagation de la couche j mais ne portant pas ici d'indice de couche puisqu'il reste le même pour x_{j-1} et x_j .

Il est important de remarquer que pour une couche j donnée, on a la relation :

$$x_j - x_{j-1} = \gamma_w (r_j - r_{j-1}) = \gamma_w d_j \quad (2.60)$$

où $d_j = (r_j - r_{j-1})$ désigne l'épaisseur de la couche j .

Par conséquent, les coefficients d'une même colonne de la matrice globale $[\mathbf{G}]_{\text{hDGM}}$ sont modifiées à cause de la normalisation par un terme exponentiel qui diffère suivant la ligne considérée, relative soit à l'interface j inférieure, soit à l'interface $j + 1$ supérieure.

Les deux termes exponentiels de normalisation d'une même colonne sont donc définis *au facteur* $e^{-f(d_j)}$ près, en définissant une fonction f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} |\text{Im}(\gamma_w x)| & \text{si la colonne est impaire} \\ i\gamma_w x & \text{si la colonne est paire} \end{cases} \quad (2.61)$$

On voit d'après la Fig. 2.11 qu'une opération supplémentaire doit être effectuée sur les coefficients de la matrice globale pour compenser la normalisation des fonctions de Bessel

et se ramener au problème initial (2.22). Pour une colonne d'une couche j donnée, on harmonise toutes les lignes relatives à l'interface j à celles relatives à la couche $j + 1$. Les premières sont multipliées par le facteur $e^{-f(d_j)}$ tandis que les secondes sont inchangées.

Le choix d'harmoniser par rapport aux lignes relatives à l'interface supérieure $j + 1$ est arbitraire, mais une exception est faite pour la dernière interface $N + 1$ séparant le dernier revêtement de la structure du milieu semi-infini extérieur, puisque ce dernier n'est pas borné vers les r croissants. Pour cette seule interface, l'harmonisation sera faite par rapport à l'interface inférieure du fluide semi-infini.

Les blocs matriciels relatifs à la couche j de la matrice $[\tilde{\mathbf{G}}]_{\text{hDGM}}$ qui résulte de cette opération supplémentaire, a la forme décrite en Fig. (2.12) :

$$\begin{pmatrix} -S_{11}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & -S_{12}e^{-ix_j} & -S_{13}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & -S_{14}e^{-ix_j} & -S_{15}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & -S_{16}e^{-ix_j} \\ -S_{41}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & -S_{42}e^{-ix_j} & -S_{43}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & -S_{44}e^{-ix_j} & -S_{45}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & -S_{46}e^{-ix_j} \\ -S_{51}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & -S_{52}e^{-ix_j} & -S_{53}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & -S_{54}e^{-ix_j} & -S_{55}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & -S_{56}e^{-ix_j} \\ -S_{61}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & -S_{62}e^{-ix_j} & -S_{63}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & -S_{64}e^{-ix_j} & -S_{65}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & -S_{66}e^{-ix_j} \\ S_{11}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{12}e^{-ix_j} & S_{13}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{14}e^{-ix_j} & S_{15}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{16}e^{-ix_j} \\ S_{21}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{22}e^{-ix_j} & S_{23}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{24}e^{-ix_j} & S_{25}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{26}e^{-ix_j} \\ S_{31}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{32}e^{-ix_j} & S_{33}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{34}e^{-ix_j} & S_{35}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{36}e^{-ix_j} \\ S_{41}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{42}e^{-ix_j} & S_{43}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{44}e^{-ix_j} & S_{45}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{46}e^{-ix_j} \\ S_{51}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{52}e^{-ix_j} & S_{53}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{54}e^{-ix_j} & S_{55}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{56}e^{-ix_j} \\ S_{61}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{62}e^{-ix_j} & S_{63}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{64}e^{-ix_j} & S_{65}e^{-|\text{Im}(x_j)|} & S_{66}e^{-ix_j} \end{pmatrix}$$

FIGURE 2.12 – Bloc matriciel de la matrice globale $[\tilde{\mathbf{G}}]_{\text{hDGM}}$ après harmonisation des colonnes

La matrice $[\tilde{\mathbf{G}}]_{\text{hDGM}}$ obtenue par normalisation des coefficients de la matrice globale et compensation décrite en Fig. 2.12 vérifie la relation suivante :

$$[\tilde{\mathbf{G}}]_{\text{hDGM}} = [\mathbf{G}]_{\text{hDGM}} \times [\mathbf{N}] \quad (2.62)$$

où $[\mathbf{N}]$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux comprennent les termes

exponentiels pouvant être mis en facteur sur chaque colonne de la matrice $[\tilde{\mathbf{G}}]_{\text{hDGM}}$:

$$[\mathbf{N}] = \begin{pmatrix} [\mathbf{N}]_{\text{air}}(r_0) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & [\mathbf{N}]_j(r_j) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & [\mathbf{N}]_{\text{eau}}(r_N) & & \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Les blocs matriciels $[\mathbf{N}]_j(r)$ relatifs à chaque couche j sont évalués à l'interface supérieure de rayon r_j (hormis pour le fluide extérieur), et ont l'expression suivante :

Pour une couche j solide :

$$[\mathbf{N}]_j(r) = \begin{pmatrix} e^{-|\text{Im}(\gamma_L^j r)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_L^j r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-|\text{Im}(\gamma_{T_1}^j r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\gamma_{T_1}^j r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-|\text{Im}(\gamma_{T_2}^j r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\gamma_{T_2}^j r} \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Pour une couche j fluide :

$$[\mathbf{N}]_j(r) = \begin{pmatrix} e^{-|\text{Im}(\gamma_L^j r)} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_L^j r} \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

Une transformation du vecteur des coefficients élémentaires $\{\mathbf{C}\}$ par la matrice $[\mathbf{N}]$ rend équivalent le système initial (2.22) au système suivant :

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{G}}]_{\text{hDGM}} \{\tilde{\mathbf{C}}\} &= \mathbf{E}(n, \alpha) \\ \{\mathbf{C}\} &= [\mathbf{N}] \{\tilde{\mathbf{C}}\} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Il est donc possible de remonter aux coefficients élémentaires en résolvant le système linéaire (2.66) de la matrice globale modifiée $[\tilde{\mathbf{G}}]_{\text{hDGM}}$, puis en se servant de la relation de transformation.

IV.3.2 Reconstruction du vecteur déplacements-contraintes

En pratique, on reconstruit le vecteur déplacements-contraintes à la cote antenne r_A en utilisant la matrice élémentaire de la couche j_A dans laquelle les capteurs sont enfouis. Pour une antenne enfouie dans une couche solide, on a la relation suivante issue de l'équation (2.9) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} (r_A, n, \alpha) = [\mathbf{S}]_{j_A} (r_{j_A}, n, \alpha) \mathbf{C}_{j_A} (n, \alpha) \quad (2.67)$$

$[\mathbf{S}]_{j_A}$ étant la matrice élémentaire de la couche j_A , et \mathbf{C}_{j_A} les coefficients élémentaires relatifs à cette couche stockés dans le vecteur $\{\mathbf{C}\}$ du système (2.22).

Comme les fonctions de Bessel ont été normalisées dans les coefficients des matrices élémentaires, il faut récrire la relation (2.67) en fonction de la matrice $[\tilde{\mathbf{S}}]_{j_A}$ et des coefficients $\tilde{\mathbf{C}}_{j_A}$. D'une part, les fonctions de Bessel sont évaluées aux arguments $\gamma_w^{j_A} r_A$ dans la matrice solide élémentaire de la couche d'antenne, de telle sorte qu'on obtient la relation :

$$[\tilde{\mathbf{S}}]_{j_A} (r_{j_A}, n, \alpha) = [\mathbf{S}]_{j_A} (r_{j_A}, n, \alpha) \times [\mathbf{N}]_{j_A} (r_A) \quad (2.68)$$

D'autre part, les coefficients de la couche d'antenne $\tilde{\mathbf{C}}_{j_A}$ normalisés sont reliés aux coefficients \mathbf{C}_{j_A} non normalisés par la relation :

$$\mathbf{C}_{j_A} = [\mathbf{N}]_{j_A} (r_{j_A}) \tilde{\mathbf{C}}_{j_A} \quad (2.69)$$

On peut donc reconstruire le vecteur déplacements-contraintes à l'aide des grandeurs normalisées après inversion de l'équation (2.68) et récriture du système (2.67) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} (r_A, n, \alpha) = [\tilde{\mathbf{S}}]_{j_A} (r_{j_A}, n, \alpha) \left([\mathbf{N}]_{j_A}^{-1} (r_A) \times [\mathbf{N}]_{j_A} (r_{j_A}) \right) \tilde{\mathbf{C}}_{j_A} \quad (2.70)$$

Le produit des matrices $[\mathbf{N}]_{j_A}$ évaluées au rayon d'antenne et au rayon supérieur de la

couche d'antenne est encore une matrice diagonale, dont l'expression est :

$$[\mathbf{N}]_{j_A}^{-1}(r_A) \times [\mathbf{N}]_{j_A}(r_{j_A}) = \text{diag} \begin{pmatrix} e^{|\text{Im}(\gamma_L^j(r_A - r_{j_A}))|} \\ e^{i\gamma_L^j(r_A - r_{j_A})} \\ e^{|\text{Im}(\gamma_{T_1}^j(r_A - r_{j_A}))|} \\ e^{i\gamma_{T_1}^j(r_A - r_{j_A})} \\ e^{|\text{Im}(\gamma_{T_2}^j(r_A - r_{j_A}))|} \\ e^{i\gamma_{T_2}^j(r_A - r_{j_A})} \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

La distance $|r_A - r_{j_A}|$ représente la distance des capteurs au rayon supérieur de la couche dans laquelle ils sont enfouis. Si d_{j_A} désigne l'épaisseur de la couche d'antenne, les termes exponentiels dans la relation (2.71) sont donc évalués à un argument de l'ordre de $\pm\gamma_w d_{j_A}$, plutôt qu'en des arguments d'un ordre de grandeur de $\pm\gamma_w r_A$, obligeant par conséquent l'évaluation de termes d'amplitude beaucoup plus élevée.

Ainsi, il est plus stable numériquement d'utiliser directement la relation (2.71) sans évaluer les matrices $[\mathbf{N}]_{j_A}$ évaluées aux deux cotes radiales r_{j_A} et r_A .

V Illustration des problèmes d'instabilité numérique

Dans cette section, on met en évidence les instabilités numériques discutées précédemment, et on cherche à montrer comment les différentes solutions mises en oeuvre ont permis de contourner ces problèmes.

En préambule, on décrit 4 cas tests parmi les 8 configurations qui seront considérées tout au long de l'étude. Dans le chapitre 3, on discutera de la prise en compte d'une couche fluide intermédiaire lors de la discussion sur les instabilités numériques de la méthode par matrices de transfert, et on introduira alors 4 autres configurations incluant une lame d'eau fluide dans le multicouche.

V.1 Présentation des cas tests

On présente ici 4 configurations multicouches retenues pour la validation numérique des méthodes implémentées.

Elles sont présentées en Fig. 2.13 et la coque revêtue ne comporte que des couches solides.

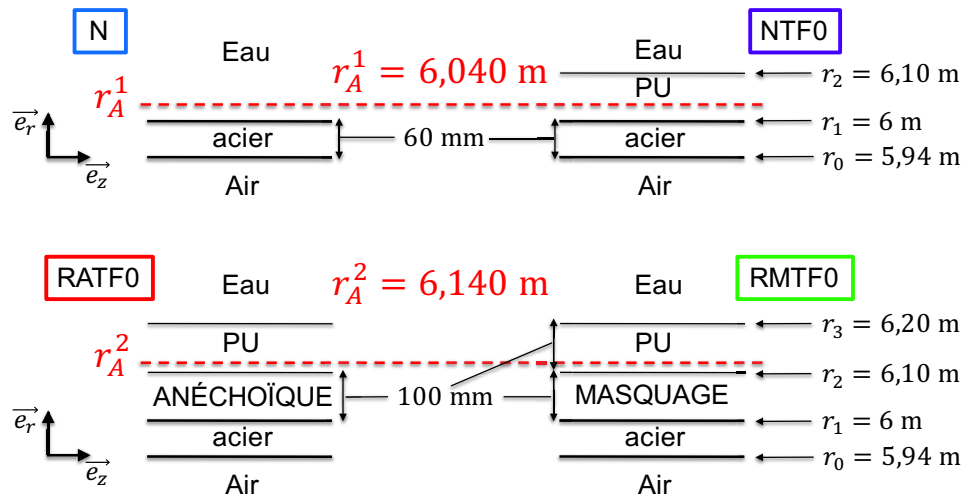


FIGURE 2.13 – Configurations tests de validation (vue en coupe des différentes couches)

On distingue 4 cas distincts, pour lesquels les couplages avec les fluides internes et externes sont toujours pris en compte. La coque d'acier a toujours une épaisseur de 60 mm, son rayon intérieur est $r_0 = 5,94$ m.

- Configuration **N** :

La coque d'acier est laissée nue, et le capteur ponctuel est placé dans le fluide extérieur à une distance 40 mm de la coque d'acier.

- Configuration **NTF0** :

La coque d'acier est surmontée d'une matrice de polyuréthane (notée PU) d'épaisseur 100 mm, et les capteurs d'antenne sont enfouis dans celle-ci, à la même cote radiale que pour la configuration **N**.

- Configuration **RATF0** :

La coque d'acier est surmontée d'un matériau anéchoïque d'épaisseur 100 mm, lui-même recouvert de la même matrice de polyuréthane que pour la configuration **NTF0**. Les capteurs d'antenne sont à nouveau enfouis dans la matrice PU, cette fois à une distance 40 mm de la surface du matériau de revêtement anéchoïque.

- Configuration **RMTF0** :

On remplace le matériau anéchoïque de la configuration précédente par un matériau

de masquage de même épaisseur. Les capteurs d'antenne sont enfouis dans la matrice PU à la même cote radiale que dans la configuration précédente.

La matrice polyuréthane a pour rôle principal d'être un support pour les capteurs. Elle doit donc laisser pénétrer les ondes acoustiques et éviter la réflexion des ondes à l'interface eau-PU. Par conséquent, son impédance acoustique est proche de celle de l'eau.

Le matériau anéchoïque a pour rôle d'absorber l'énergie de l'onde incidente et d'également limiter les réflexions, mais est placé en aval de la matrice polyuréthane (par rapport à l'onde plane incidente) et il présente un fort amortissement pour dissiper l'énergie de l'onde.

Le matériau de masquage a quant à lui une faible impédance acoustique pour limiter la transmission des vibrations de la coque d'acier vers l'extérieur, et son amortissement est le plus élevé de tous les matériaux considérés.

Le tableau (2.1) regroupe les propriétés des différents matériaux utilisés, et les valeurs d'amortissement sont données pour chacune des célérités des ondes volumiques de la couche considérée.

Avec la convention de dépendance en temps choisie, i.e $e^{-i\omega t}$, les célérités se mettent sous la forme $c_w = |c_w|(1 - i\eta)$.

Matériau	Acier	PU	anéch.	masq.	eau
c_L (m.s ⁻¹)	6020	1600	900	300	1500
η_{c_L}	0,01	0,02	0,25	0,25	0
c_T (m.s ⁻¹)	3220	150	150	100	0
η_{c_T}	0,01	0,1	0,35	0,45	0
ρ (kg.m ⁻³)	7800	1100	1400	1100	1000
$\frac{Z}{Z_{eau}}$	31	1,17	0,84	0,22	

TABLE 2.1 – Propriétés matériaux

À la dernière ligne du tableau 2.1, on présente le ratio ξ de l'impédance des ondes longitudinales dans le matériau considéré ($Z = \rho c_L$) sur l'impédance des ondes acoustiques

dans l'eau. Une valeur de ξ très différente de 1 signifie une forte rupture d'impédance. Vis-à-vis d'une onde acoustique dans l'eau, l'acier est ainsi vu comme un milieu très rigide alors que le matériau de masquage est à l'inverse vu comme un matériau très mou.

V.2 Instabilités numériques aux régimes élevés de $\text{Im}(\gamma_w r)$

V.2.1 Sur le choix des fonctions de Bessel

On met ici en évidence les instabilités numériques qui auraient résulté d'un choix inapproprié des fonctions de Bessel pour le problème étudié. On considère la configuration \mathbf{N} de la coque d'acier non revêtue, de rayon interne $r_0 = 5,94$ m, et d'épaisseur 60 mm. La coque est supposée lisse et excitée par une onde plane incidente.

On reconstruit les déplacements au rayon interne de la couche d'acier à l'aide des coefficients élémentaires, après résolution du système (2.22).

Ci-dessous sont représentés dans le domaine spectral les trois composantes du déplacement au rayon interne en réponse à l'excitation par onde plane, en fonction de l'ordre circumférentiel n et du nombre d'onde spectral α . La fréquence est de $f = 15000$ Hz, et on fait varier l'angle d'incidence depuis l'incidence normale jusqu'à une incidence rasante :

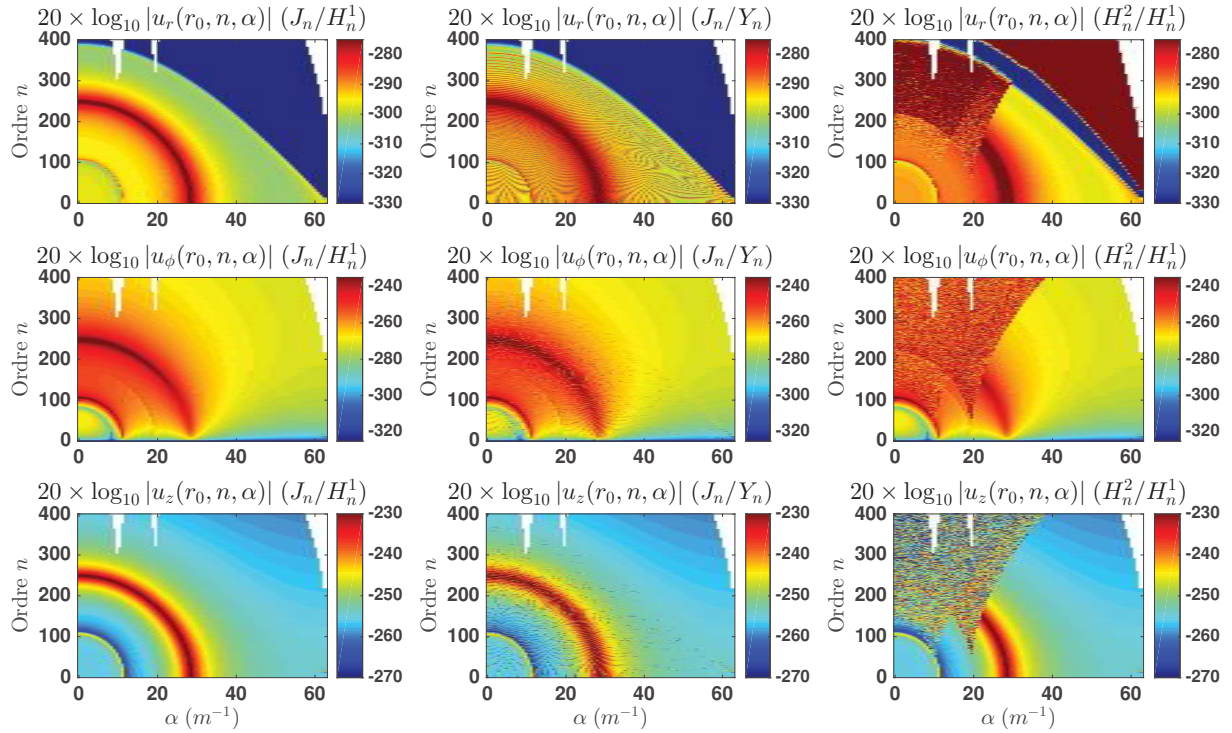


FIGURE 2.14 – Déplacements spectraux au rayon interne pour les différents couples possibles des fonctions de Bessel

On voit sur la Fig. 2.14 que les couples (J_n, Y_n) (colonne du milieu) et $(H_n^{(2)}, H_n^1)$ (colonne de droite) évaluent des déplacements spectraux fortement instables même pour les premiers ordres circonférentiels et dès l'incidence normale. Le couple (J_n, H_n^1) reste donc le seul admissible.

En blanc sur les figures sont indiquées les zones numériques aveugles en double précision, pour lesquelles des valeurs NaN sont renvoyées lors du calcul.

Sur chaque figure, on remarque que le coin en haut à droite est une zone aveugle. Sa courbe est telle que plus l'incidence sera rasante par rapport à la normale, ou la fréquence élevée - α augmente-, et plus les limites de la double précision surviendront pour un ordre circonférentiel n bas.

V.3 Instabilités aux bas régimes de $\gamma_w r$

On a montré en III.2.5 que les suites numériques des fonctions de Bessel pour un argument $\gamma_w r$ assez bas seraient difficiles à évaluer à partir d'un certain ordre. Les phénomènes d'underflow et d'overflow numérique décrits en III.2.1 apparaissent à nouveau et les contributions aux ordres élevés sont susceptibles de fausser le calcul de la réponse d'antenne.

Par ailleurs, le critère de convergence décrit en IV.2 (cf Fig. 2.9) permet d'évaluer le nombre de modes circonférentiels N_{\max} à prendre en compte dans la troncature modale pour que la réponse d'antenne converge à une fréquence donnée.

En Fig. 2.15 est représentée la réponse signal au niveau d'un capteur ponctuel pour la coque d'acier nue (configuration **N**) sur la plage fréquentielle $f \in [20; 4000]$ Hz. Le critère de convergence est appliqué sur la courbe en bleu, pour laquelle 124 ordres ont été nécessaires au maximum pour décrire correctement la réponse d'antenne sur cette plage fréquentielle. Sur les trois autres courbes, le critère de convergence n'est pas appliqué, et le même nombre d'ordres circonférentiels est calculé à chaque fréquence pour calculer la réponse d'antenne.

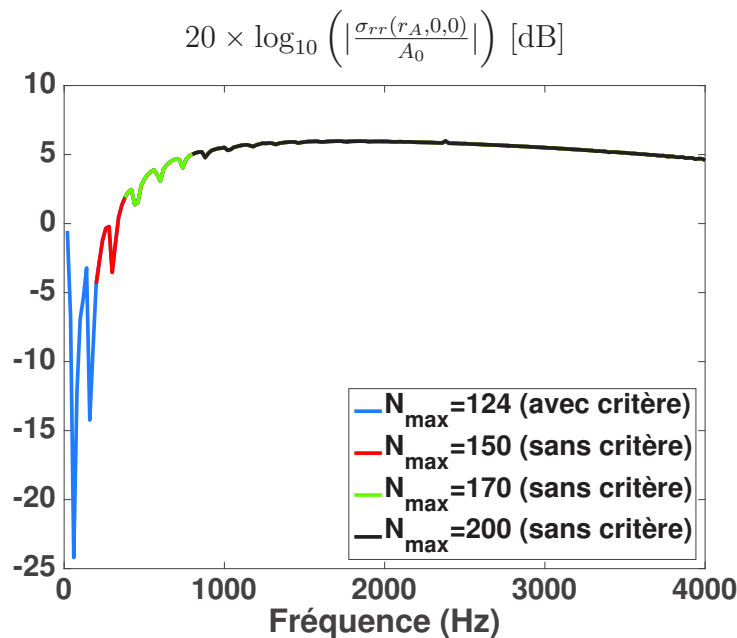


FIGURE 2.15 – Réponse signal avec et sans critère de convergence

Lorsque le critère de convergence n'est pas appliqué, la réponse d'antenne aux plus basses fréquences n'est pas calculée correctement et diverge vers des valeurs infinies. Par conséquent, des points de calcul manquent sur les courbes rouge, verte et noires. Ces points de calcul manquants sont d'autant plus nombreux que le nombre d'ordres circonférentiels N_{\max} augmente, élargissant la plage fréquentielle sur laquelle le calcul diverge.

V.3.1 Sur les pôles des fonctions de Bessel : quadruple précision numérique

Lorsque le critère de convergence n'est pas suffisant pour éviter l'underflow et l'overflow numérique résultant de l'évaluation des fonctions de Bessel au voisinage de leurs pôles, les instabilités persistent si le calcul est mené en double précision numérique. Elles correspondent à un nombre d'onde projeté suivant l'axe de la coque coïncidant avec les nombres d'ondes de compression ou de cisaillement de la couche d'acier.

On met en évidence ce phénomène en Fig. 2.16a sur laquelle est représentée la réponse d'antenne de la coque d'acier nue (configuration **N**) dans le plan site i -gisement G_t à la fréquence $f = 15000$ Hz, avec et sans le correctif effectué en quadruple précision.

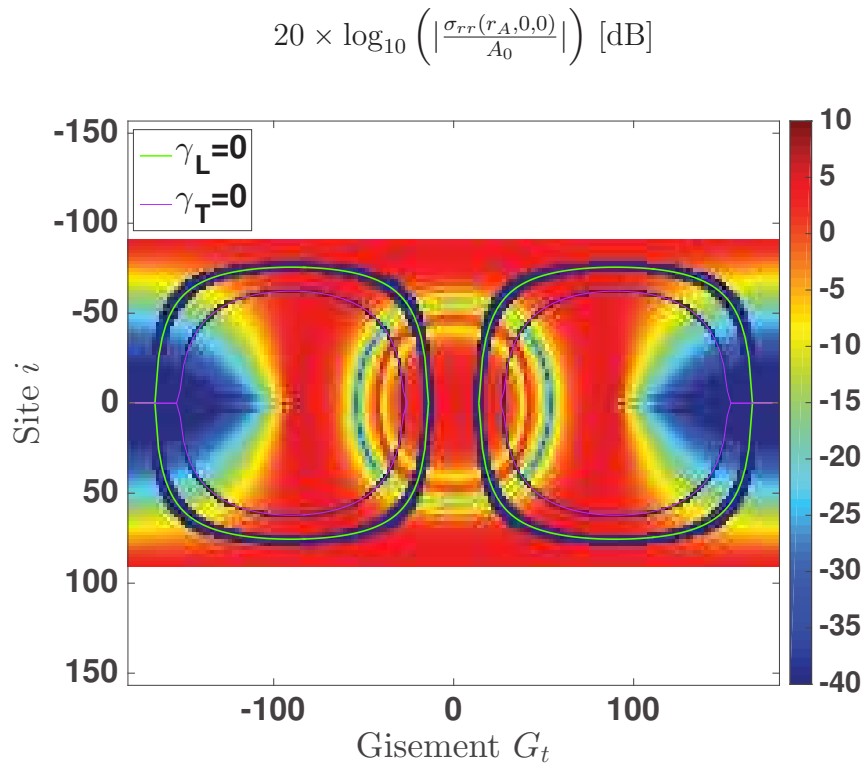
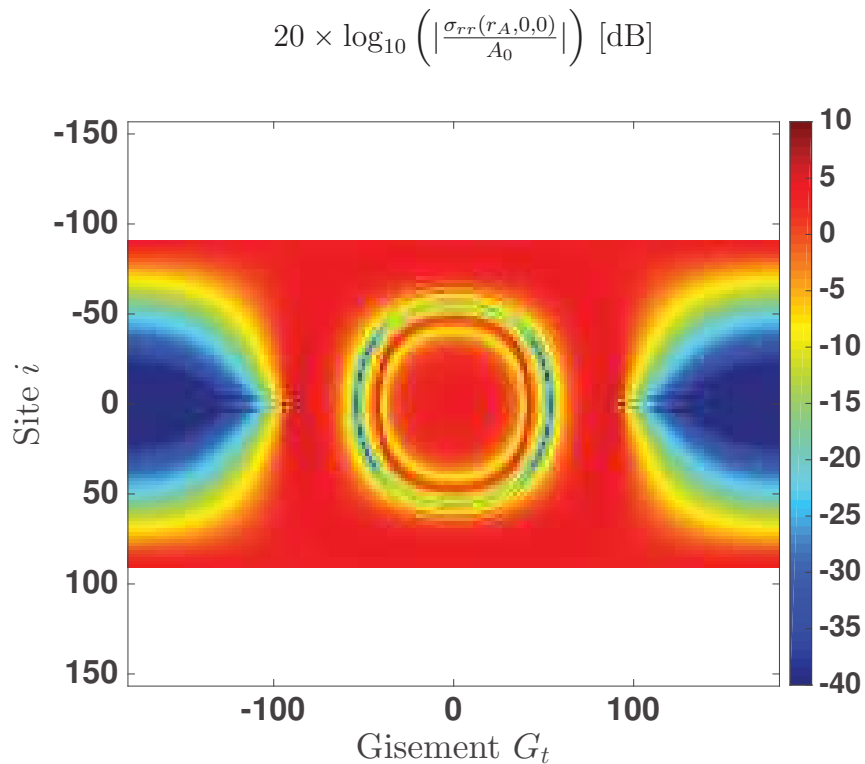
(a) $f = 15000$ Hz, sans quadruple précision(b) $f = 15000$ Hz, avec quadruple précision

FIGURE 2.16 – Réponse signal avec ou sans quadruple précision

Sur la figure 2.16a, on a également tracé les courbes correspondant à l'annulation de la constante de propagation. Celles-ci ont été obtenues ainsi : pour une onde plane incidente repérée par un angle de site i et un angle gisement G_t , le projeté α^i du nombre d'onde incident suivant l'axe de la coque peut s'écrire, en reprenant les conventions de la Fig. 1.4a présentée dans l'état de l'art (cf Chapitre 1, VI.4) :

$$\alpha^i = \frac{\omega}{c_0} \cos i \sin G_t \quad (2.72)$$

On peut alors définir les courbes dans le plan site-gisement telles que la constante de propagation radiale est nulle :

$$\begin{aligned} \gamma_w &= 0 \\ \iff k_w^2 - (\alpha^i)^2 &= 0 \\ \iff \left(\frac{\omega}{c_w}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \cos^2 i \sin^2 G_t &= 0 \\ \iff \cos i &= \pm \frac{1}{|\sin G_t|} \left| \frac{c_0}{c_w} \right| \end{aligned} \quad (2.73)$$

On constate sur la Fig. 2.16a que les courbes relatives à l'équation (2.73) correspondent bien aux zones d'instabilité numérique lorsque la double précision ne suffit plus pour la plage dynamique des fonctions de Bessel à ces régimes.

VI Conclusion

Ce chapitre a permis de préciser les bases théoriques et les méthodes d'implémentation utilisées pour appliquer la méthode par matrice globale à une structure multicouche lisse excitée par onde plane incidente.

Un accent a été porté sur des instabilités numériques liées à la géométrie cylindrique au domaine de fréquence d'intérêt étendu. Ces instabilités, induites par l'utilisation des fonctions de Bessel et aggravées par la prise en compte de matériaux à faible célérité et/ou très dissipatifs, ont été résolues de la manière suivante :

- En hautes fréquences, pour des arguments avec une partie imaginaire de grande amplitude, la normalisation des fonctions de Bessel d'une part, ainsi que le recours à la quadruple précision d'autre part, ont permis de résoudre les instabilités numériques.
- En basses fréquences, où les contributions des ordres supérieurs à la réponse d'antenne sont sources d'instabilité, la mise en place d'un critère de convergence a été nécessaire.

Ce chapitre a été également l'occasion de présenter 4 configurations tests parmi les 8 utilisées pour la validation dans le chapitre 5. Leur introduction a permis de mettre en évidence les instabilités discutées précédemment, et mettre en lumière la stabilité numérique accrue par la mise en place des solutions proposées.

Le modèle développé sera validé numériquement au chapitre 5 par confrontation des résultats à la fois à ceux obtenus par la méthode sDGM, développée lors de l'étude et présentée au chapitre suivant, et également à ceux obtenus par une méthode éléments finis. Ce modèle sera par ailleurs utilisé au chapitre 4 pour développer un des deux modèles de cylindre multicouche raidi périodiquement.

Chapitre 3

Formalisme de Stroh et matrices de transfert

Ce chapitre est consacré au calcul par la méthode par matrices de transfert de la réponse du multicouche cylindrique toujours excité par une onde plane à la fréquence angulaire ω . Basée sur la résolution d'un système différentiel d'ordre 1 établi avec le formalisme de Stroh, cette méthode rend possible la prise en compte de matériaux anisotropes plus complexes que la méthode par matrice globale, limitée au cadre restreint des matériaux isotropes.

Néanmoins, des instabilités numériques sont généralement rencontrées aux hautes fréquences ou lors de la prise en compte de couches fluides intermédiaires, avec la méthode par matrices de transfert.

Par conséquent, une attention particulière a été apportée pour décrire ces problèmes numériques et les résoudre. En particulier, une procédure d'assemblage originale et non classiquement employée a été proposée pour résoudre les instabilités numériques rencontrées. Celle-ci est similaire à l'assemblage matriciel employé pour la méthode par matrice globale et décrite dans le chapitre 2.

I Résolution du problème dans une couche élémentaire

I.1 Cas d'une couche élémentaire solide

Pour une couche élémentaire solide quelconque, aucune hypothèse n'est faite sur les propriétés du matériau élastique considéré. On pourra par la suite considérer indifféremment des matériaux isotropes, isotropes transverses, orthotropes voire anisotropes.

I.1.1 Formalisme de Stroh

La méthode employée pour obtenir les déplacements et contraintes à chaque interface de la couche repose sur le formalisme de Stroh [56, 57]. Un réarrangement des équations du mouvement, de la relation de Cauchy et de la loi de Hooke en un système différentiel d'ordre 1 est effectué.

On rappelle ci-dessous ces équations déjà évoquées sous leur forme tensorielle dans l'état de l'art effectué au chapitre 1 (voir §1.2.2) :

Équations du mouvement

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= -\rho\omega^2 u_r \\
 \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{2}{r} \sigma_{r\phi} + \frac{\partial \sigma_{z\phi}}{\partial z} &= -\rho\omega^2 u_\phi \\
 \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= -\rho\omega^2 u_z
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Relation de Cauchy

$$\begin{cases}
 \epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} & \gamma_{\phi z} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \right) \\
 \epsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} & \gamma_{rz} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\
 \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} & \gamma_{r\phi} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right)
 \end{cases} \tag{3.2}$$

Loi de Hooke

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\phi\phi} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\phi z} \\ \sigma_{zr} \\ \sigma_{r\phi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\phi\phi} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{\phi z} \\ \gamma_{zr} \\ \gamma_{r\phi} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

où l'on a supposé les champs déjà harmoniques en temps, avec une convention en $e^{-i\omega t}$ retenue. D'autre part, la notation de Voigt a été adoptée pour écrire la loi de Hooke à l'équation (3.3).

Les équations (3.1)-(3.3) peuvent se mettre sous les formes matricielles suivantes :

Équations du mouvement :

$$[\mathbf{A}] \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = [\mathbf{B}] \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r} + [\mathbf{E}] \mathbf{V} - \rho \mathbf{f} \quad (3.4)$$

Relation de Cauchy :

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = [\mathbf{H}] \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r} + [\mathbf{K}] \mathbf{V} \quad (3.5)$$

Loi de Hooke :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = [\mathbf{L}] \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.6)$$

où les matrices $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{E}]$, $[\mathbf{H}]$ et $[\mathbf{K}]$ sont données en annexe B, \mathbf{V} est le vecteur d'état des déplacements et contraintes radiales de la couche considérée, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ respectivement des réarrangements des vecteurs des contraintes et des déformations, et \mathbf{f} contient les forces volumiques extérieures éventuellement appliquées :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} u_z & u_\phi & u_r & \sigma_{rr} & \sigma_{r\phi} & \sigma_{rz} \end{bmatrix}^T \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \begin{bmatrix} \sigma_{zz} & \sigma_{\phi\phi} & \sigma_{z\phi} & \sigma_{r\phi} & \sigma_{rz} & \sigma_{rr} \end{bmatrix}^T \\ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} &= \begin{bmatrix} \epsilon_{zz} & \epsilon_{\phi\phi} & \gamma_{z\phi} & \gamma_{r\phi} & \gamma_{rz} & \epsilon_{rr} \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{f} &= \begin{bmatrix} f_z & f_\phi & f_r & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.7)$$

La matrice $[\mathbf{L}]$ est une permutation du tenseur de Cauchy des constantes élastiques, et vérifie :

$$[\mathbf{L}] = [\mathbf{P}]^{-1} [\mathbf{C}_a] [\mathbf{P}], \quad [\mathbf{P}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

En l'absence de forces volumiques extérieures appliquées, les équations (3.1)-(3.6) peuvent être réarrangées pour établir le système différentiel d'ordre 1 suivant, vérifié par le vecteur d'état [56] :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r}(r, \phi, z) = [\mathbf{Q}] \mathbf{V}(r, \phi, z) \quad (3.9)$$

avec : $[\mathbf{Q}] = ([\mathbf{ALH}] - [\mathbf{B}])^{-1} ([\mathbf{E}] - [\mathbf{ALK}])$

La démonstration pour obtenir le système (3.9) est donnée en annexe B.

Pour ne pas alourdir les notations et les calculs à suivre, on se place dans le cas des matériaux orthotropes. Néanmoins, la description d'un matériau anisotrope reste envisageable par la méthode proposée.

Dans le cas d'orthotropie, le tenseur de Cauchy ne présente que 9 constantes élastiques indépendantes, et prend donc la forme générale suivante :

$$[\mathbf{C}_a] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Par conséquent, l'opérateur matriciel $[\mathcal{Q}]$ a une expression simplifiée :

$$[\mathcal{Q}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{1}{c_{55}} \\ 0 & \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & \frac{1}{c_{66}} & 0 \\ -\frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{c_{12}}{c_{11}r} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{c_{12}}{c_{11}r} & \frac{1}{c_{11}} & 0 & 0 \\ \frac{e_{23}}{r} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{e_{22}}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{e_{22}}{r^2} - \rho\omega^2 & \frac{1}{r} \left(\frac{c_{12}}{c_{11}} - 1 \right) & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{1}{r} (c_{44} + e_{23}) \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} & -\left[\rho\omega^2 + \frac{e_{22}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] & -\frac{e_{22}}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{c_{12}}{c_{11}r} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{2}{r} & 0 \\ -\left[\rho\omega^2 + \frac{c_{44}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + e_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] & -\frac{1}{r} (c_{44} + e_{23}) \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} & -\frac{e_{23}}{r} \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

où les quantités e_{22} , e_{23} , et e_{33} sont définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} e_{22} &= \left(c_{22} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right) \\ e_{23} &= \left(c_{23} - \frac{c_{12}c_{13}}{c_{11}} \right) \\ e_{33} &= \left(c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

On passe du domaine physique au domaine spectral associé suivant les mêmes conventions qu'au chapitre 2, c'est-à-dire en effectuant une transformée de Fourier suivant z et une décomposition en série de Fourier suivant ϕ (voir chapitre 2, équation (2.4)). Appliquées au système différentiel (3.9), ces formules de passage permettent d'obtenir le système

matriciel recherché dans le domaine spectral :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dr}(r, n, \alpha) = [\mathbf{Q}(r)] \mathbf{V}(r, n, \alpha) \quad (3.12)$$

$$[\mathbf{Q}(r)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i\alpha & 0 & 0 & \frac{1}{c_{55}} \\ 0 & \frac{1}{r} & -\frac{in}{r} & 0 & \frac{1}{c_{66}} & 0 \\ -i\alpha \frac{c_{13}}{c_{11}} & -\frac{in}{r} \frac{c_{12}}{c_{11}} & -\frac{c_{12}}{c_{11}r} & \frac{1}{c_{11}} & 0 & 0 \\ i\alpha \frac{e_{23}}{r} & \frac{in}{r^2} e_{22} & \frac{e_{22}}{r^2} - \rho\omega^2 & \frac{1}{r} \left(\frac{c_{12}}{c_{11}} - 1 \right) & -\frac{in}{r} & -i\alpha \\ \alpha \frac{n}{r} (c_{44} + e_{23}) & \frac{n^2}{r^2} e_{22} + \alpha^2 c_{44} - \rho\omega^2 & -\frac{in}{r^2} e_{22} & -\frac{in}{r} \frac{c_{12}}{c_{11}} & -\frac{2}{r} & 0 \\ \frac{n^2}{r^2} c_{44} + \alpha^2 e_{33} - \rho\omega^2 & \frac{\alpha n}{r} (c_{44} + e_{23}) & -\frac{i\alpha}{r} e_{23} & -i\alpha \frac{c_{13}}{c_{11}} & 0 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

Comme détaillé dans le chapitre 1, le système différentiel (3.12) établi avec le formalisme de Stroh n'est pas à coefficients constants du fait de la géométrie cylindrique du problème. Il n'est donc pas intégrable par la même solution analytique que celle établie dans le cas plan *à priori*.

Pour l'étude de matériaux composites, la faible épaisseur de chaque couche de la structure dans le modèle de stratifié classiquement utilisé peut justifier de supposer la matrice $[\mathbf{Q}(r)]$ indépendante de r et d'intégrer le système (3.12) de la même manière qu'en configuration plane [57].

Dans le cas d'une coque épaisse revêtue, par contre, cette hypothèse peut ne pas être valide suivant l'ordre de grandeur des épaisseurs des couches devant le rayon moyen de la coque. On présente donc une méthode approchée de subdivision en sous-couches qui est généralement employée pour supposer dans chaque sous-couche l'indépendance de la matrice $[\mathbf{Q}(r)]$ par rapport à la variable radiale r . Utilisée notamment par Chen [56], et introduite précédemment au chapitre 1 de ce manuscrit, c'est cette méthode qui a été retenue dans cette étude pour l'implémentation de la méthode par matrices de transfert. Cependant, pour les configurations retenues dans ce manuscrit, on montrera que les épaisseurs des couches sont assez petites devant le rayon moyen de la coque cylindrique

pour qu'en pratique, celles-ci ne soient pas subdivisées.

I.1.2 Méthode de subdivision en sous-couches

Pour une couche élémentaire j donnée du multicouche, représentée en Fig. 3.1, et délimitée par les interfaces j et $j + 1$, on note $r_j^{\text{moy}} = \frac{r_j + r_{j-1}}{2}$ le rayon moyen de la couche et on effectue une subdivision en P sous-couches suivant l'épaisseur, d'un pas de subdivision constant égal à $\delta r = \frac{r_j - r_{j-1}}{P}$.

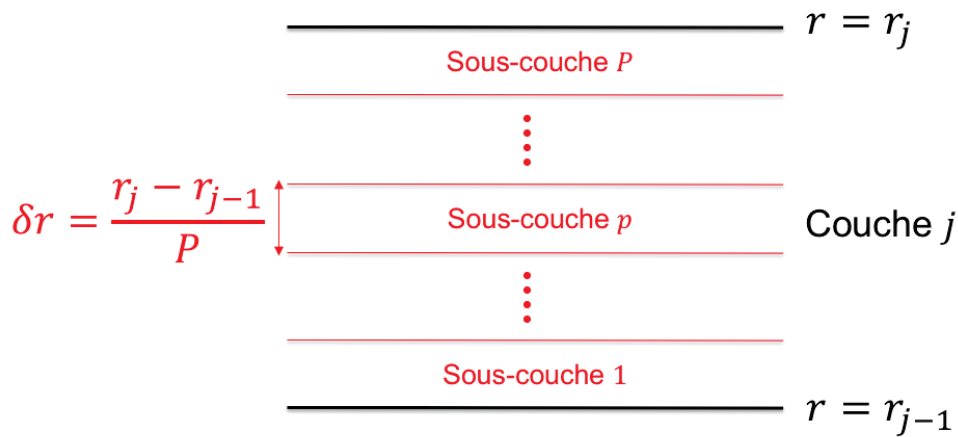


FIGURE 3.1 – Subdivision en sous-couches

Une sous-couche p quelconque de la subdivision est donc caractérisée par ses rayons inférieur r_p^{inf} et supérieur r_p^{sup} , et par son rayon moyen r_p^{moy} . Ces trois derniers vérifient :

$$\begin{aligned} r_p^{\text{inf}} &= r_{j-1} + (p - 1) \delta r \\ r_p^{\text{moy}} &= r_p^{\text{inf}} + \frac{\delta r}{2} \\ r_p^{\text{sup}} &= r_p^{\text{inf}} + \delta r \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pour un pas de subdivision suffisamment petit devant le rayon moyen $r_j^{\text{moy}} = \frac{r_j + r_{j-1}}{2}$ de la couche j considérée, on peut approximer r constant dans chaque sous-couche p , et le supposer égal au rayon moyen r_p^{moy} de cette sous-couche.

On retiendra donc comme critère empirique que les différentes couches de la structure

doivent être subdivisées de façon à avoir :

$$\forall j, \delta r \ll r_j^{\text{moy}}$$

Le système différentiel (3.12) vérifié dans la sous-couche p par le vecteur des déplacements et contraintes radiales \mathbf{V}_j^p de la sous-couche p , peut alors être supposé à coefficients constants. On le complète par la donnée du vecteur $\mathbf{V}_{j,0}^p$ à l'interface inférieure de la sous-couche de rayon r_p^{inf} :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}_j^p}{dr}(r, n, \alpha) &= [\mathbf{Q}_j^p(r_p^{\text{moy}})] \mathbf{V}_j^p(r, n, \alpha) \\ \mathbf{V}_j^p(r_p^{\text{inf}}, n, \alpha) &= \mathbf{V}_{j,0}^p \end{aligned} \quad (3.14)$$

On a précisé au chapitre 1 que l'unicité de la solution au système (3.14) est assurée par le théorème de Picard-Lindelöf, et elle s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_j^p(r, n, \alpha) &= e^{(r-r_p^{\text{inf}})[\mathbf{Q}_j^p(r_p^{\text{moy}})]} \mathbf{V}_{j,0}^p \\ \mathbf{V}_j^p(r, n, \alpha) &= e^{(r-r_p^{\text{inf}})[\mathbf{Q}_j^p(r_p^{\text{moy}})]} \mathbf{V}_j^p(r_p^{\text{inf}}, n, \alpha) \end{aligned} \quad (3.15)$$

On peut désormais calculer pour une sous-couche donnée les déplacements et contraintes partout dans l'épaisseur, à condition de disposer du vecteur d'état en une cote radiale arbitraire de la sous-couche (qu'on a choisi à la cote inférieure de celle-ci).

En particulier on peut définir la matrice de transfert pour la sous-couche p en écrivant la relation (3.15) à la cote radiale de son interface supérieure r_p^{sup} :

$$\mathbf{V}_j^p(r_p^{\text{sup}}, n, \alpha) = [\mathbf{T}_j]^p \mathbf{V}_j^p(r_p^{\text{inf}}, n, \alpha), \quad [\mathbf{T}_j]^p = e^{(r_p^{\text{sup}}-r_p^{\text{inf}})[\mathbf{Q}_j^p(r_p^{\text{moy}})]} \quad (3.16)$$

Ce sont les relations de continuité aux différentes interfaces (fictives entre les sous-couches, et réelles entre les couches élémentaires), qui permettent de propager le vecteur d'état d'un bord à l'autre du multicouche. On détaille dans la section II comment la propagation de ce vecteur d'état permet de tenir compte des relations de continuité aux différentes interfaces de la structure, et ainsi d'assembler le système multicouche.

I.1.3 Sur le comportement asymptotique de la matrice de Stroh

En géométrie plane, avec x décrivant la dimension d'épaisseur du multicouche, on considère le système suivant, résolu dans chaque couche élémentaire :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dx}(x, n, \alpha) = [\mathbf{Q}]_{\text{PLAN}} \mathbf{V}(x, n, \alpha) \quad (3.17)$$

où pour la géométrie considérée, le vecteur d'état devient désormais :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u_y & u_z & u_x & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \end{bmatrix}^T$$

La matrice $[\mathbf{Q}]_{\text{PLAN}}$, indépendante de la variable d'épaisseur, a l'expression suivante :

$$[\mathbf{Q}]_{\text{PLAN}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -ik_x & 0 & 0 & \frac{1}{c_{55}} \\ 0 & 0 & -ik_z & 0 & \frac{1}{c_{66}} & 0 \\ -ik_y \frac{c_{13}}{c_{11}} & -ik_z \frac{c_{12}}{c_{11}} & 0 & \frac{1}{c_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho\omega^2 & 0 & -ik_z & -ik_y \\ k_y k_z (c_{44} + e_{23}) & k_z^2 e_{22} + k_y^2 c_{44} - \rho\omega^2 & 0 & -ik_z \frac{c_{12}}{c_{11}} & 0 & 0 \\ k_z^2 c_{44} + k_y^2 e_{33} - \rho\omega^2 & k_y k_z (c_{44} + e_{23}) & 0 & -ik_y \frac{c_{13}}{c_{11}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

où e_{22} , e_{23} , et e_{33} sont toujours définis de la même manière que dans le cas cylindrique, et k_y et k_z sont les nombres d'onde suivant les directions planaires au multicouche.

On remarque que l'expression (3.18) n'est rien d'autre que la forme asymptotique de l'expression de la matrice $[\mathbf{Q}(r)]$ dans (3.12) lorsque $r \rightarrow +\infty$, et en identifiant les nombres d'onde de la coque circonférentiel et axial $\frac{n}{r}$ et α respectivement à k_y et k_z .

I.1.4 Sur le pas de subdivision utilisé pour les configurations tests

On retrouve de ce qui précède le résultat selon lequel la courbure de la coque peut être négligée pour des rayons suffisamment grands.

Par conséquent, cela explique également une constatation faite lors des validations numériques sur des configurations de coques réalistes de sous-marins, à savoir qu'il n'y avait pas besoin de subdiviser les couches élémentaires en plusieurs sous-couches pour obtenir la convergence numérique.

Les configurations cylindriques considérées dans les cas de validation, déjà présentées au chapitre 2, font intervenir des rayons de l'ordre de grandeur des coques de sous-marins et des épaisseurs de couches assez faibles devant ces derniers pour qu'on puisse considérer que $r \rightarrow +\infty$ dans la matrice $[\mathbf{Q}(r)]$ du système (3.12), ou encore que pour chaque couche j , on ait $r_j - r_{j-1} \ll r_j^{\text{moy}}$. Par conséquent, il n'y a pas besoin de subdiviser chaque couche élémentaire pour justifier l'intégration du système (3.12) avec la même solution que dans le cas plan.

Par conséquent, et sauf mention contraire, tous les résultats présentés dans ce chapitre auront été réalisés avec un pas de subdivision de $P = 1$.

I.2 Cas d'une couche élémentaire fluide

Pour une couche fluide élémentaire j quelconque, délimitée par les interfaces j et $j + 1$ de cotes radiales respectives r_{j-1} et r_j , la décomposition en potentiels des ondes longitudinales L^+ et L^- est effectuée de la même manière qu'au chapitre 2.

Le potentiel de l'onde longitudinale ϕ_L associé aux déplacements particuliers dans le fluide permettait d'établir l'équation (2.12) (cf Chapitre 2, I.2) reliant le déplacement et la contrainte normale aux coefficients d'onde $\mathbf{C}(n, \alpha)$ du potentiel longitudinal.

Pour établir la matrice de transfert élémentaire de la couche fluide considérée, qui permet de propager d'une interface à l'autre le vecteur d'état, on élimine les coefficients d'onde $\mathbf{C}(n, \alpha)$ en écrivant la relation (2.12) aux deux interfaces inférieure et supérieure de la couche fluide.

En notant \mathbf{V}_j le vecteur d'état 2×2 de la couche j contenant le déplacement et la contrainte normale, on obtient alors la matrice de transfert fluide pour la couche j , qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_j(r_j) &= [\mathbf{T}]_j \mathbf{V}_j(r_{j-1}) \\ \text{avec } [\mathbf{T}]_j &= [\mathbf{F}(r_j)] [\mathbf{F}(r_{j-1})]^{-1} \end{aligned} \tag{3.19}$$

II Procédure classique d'assemblage du système multicouche : propagation du vecteur d'état

Contrairement à la méthode par matrice globale, la procédure d'assemblage classiquement employée pour la méthode par matrices de transfert fait intervenir un produit matriciel qui rend nécessaire la distinction du formalisme quant à la résolution de deux types de configurations multicouches :

- D'une part, les configurations ne comprenant que des couches solides
- D'autre part, les configurations où la prise en compte d'une ou plusieurs couches fluides intermédiaires est envisagée.

En effet, les vecteurs d'état pour une couche fluide et pour une couche solide n'ayant pas la même taille, le produit matriciel qui permet de propager les déplacements et contraintes d'un bord à l'autre du multicouche n'est pas consistant *à priori* au cas où la structure présente des couches fluides intermédiaires.

Suivant le type d'interface, les mêmes hypothèses effectuées lors de la présentation de la méthode par matrice globale sont formulées : d'une part la continuité des contraintes radiales (i.e σ_{rr} , $\sigma_{r\phi}$, et σ_{rz}) à une interface *solide-solide* ou *solide-fluide* (et dans ce cas nullité des contraintes de cisaillement $\sigma_{r\phi}$, et σ_{rz}), d'autre part la continuité des déplacements (i.e u_r , u_ϕ , et u_z) pour une interface *solide-solide*, et uniquement du déplacement normal u_r pour une interface *solide-fluide*.

II.1 Configurations multicouches sans couches fluides intermédiaires

II.1.1 Relations de continuité

En considérant une interface *solide-solide* $j+1$ quelconque dans la structure multicouche ($j \in \llbracket 1; N-1 \rrbracket$) sur laquelle aucune excitation extérieure n'est imposée, d'équation $r_j = \text{Cte}$, et séparant deux couches solides élémentaires notées j et $j+1$, la continuité des déplacements

et des contraintes impose sur les vecteurs d'état l'égalité suivante :

$$\mathbf{V}_j(r_j, n, \alpha) = \mathbf{V}_{j+1}(r_j, n, \alpha) \quad (3.20)$$

II.1.2 Établissement de la matrice de transfert élémentaire d'une couche solide

Pour la même interface $j + 1$ considérée, on établit l'expression de la matrice de transfert de la couche élémentaire solide numérotée j , que l'on suppose subdivisée en P sous-couches fictives afin de rendre valable la solution (3.15) sur chaque sous-couche. La continuité des déplacements et des contraintes aux $P - 1$ interfaces fictives entre les P sous-couches conduit à une relation similaire à l'équation (3.20) énoncée pour deux couches élémentaires solides :

$$\forall p \in \llbracket 2; P \rrbracket, \mathbf{V}_j^p(r_p^{\text{inf}}, n, \alpha) = \mathbf{V}_j^{p-1}(r_{p-1}^{\text{sup}}, n, \alpha) \quad (3.21)$$

où le rayon de l'interface inférieure de la sous-couche p est identifié au rayon de l'interface supérieure de la sous-couche $p - 1$.

En reprenant la relation (3.16), valable pour toutes les sous-couches, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_j^p(r_p^{\text{sup}}, n, \alpha) &= [\mathbf{T}_j]^p \mathbf{V}_j^{p-1}(r_{p-1}^{\text{sup}}, n, \alpha) \\ &= [\mathbf{T}_j]^p [\mathbf{T}_j]^{p-1} \mathbf{V}_j^{p-1}(r_{p-1}^{\text{inf}}, n, \alpha) \end{aligned} \quad (3.22)$$

De proche en proche, on peut propager le vecteur d'état de l'interface supérieure de la sous-couche p jusqu'à l'interface inférieure de la première sous-couche, par simple produit matriciel des différentes matrices de transfert de chaque sous-couche. En écrivant la relation obtenue pour la dernière sous-couche P , on obtient :

$$\mathbf{V}_j^P(r_P^{\text{sup}}, n, \alpha) = \prod_{p=P}^1 [\mathbf{T}_j]^p \mathbf{V}_1^1(r_1^{\text{inf}}, n, \alpha) \quad (3.23)$$

En identifiant dans (3.23) les rayons extrémaux de la couche j considérée et les vecteurs d'état évalués à ces cotes, on peut alors définir la matrice de transfert de la couche élémentaire j comme le produit matriciel de toutes les matrices de transfert de chaque

sous-couche :

$$\mathbf{V}_j(r_j, n, \alpha) = [\mathbf{T}]_j \mathbf{V}_j(r_{j-1}, n, \alpha), \quad [\mathbf{T}]_j = \prod_{p=P}^1 [\mathbf{T}_j]^p \quad (3.24)$$

II.1.3 Construction de la matrice de transfert globale du multicouche

Pour une configuration multicouche que l'on suppose être un empilement de couches solides uniquement, la relation (3.24) établie pour une couche élémentaire j à partir des différentes sous-couches est alors à nouveau applicable pour construire la matrice de transfert globale du multicouche, à l'aide des matrices de transfert élémentaires de chaque couche :

$$\mathbf{V}_N(r_j, n, \alpha) = [\mathbf{T}]_{\text{struc}} \mathbf{V}_1(r_0, n, \alpha), \quad [\mathbf{T}]_{\text{struc}} = \prod_{j=N}^1 [\mathbf{T}]_j \quad (3.25)$$

II.2 Configurations multicouches avec couches fluides intermédiaires

II.2.1 Relations de continuité

L'interface $j + 1$ considérée est désormais supposée *solide-fluide*, et séparant la couche solide j et la couche $j + 1$ fluide. Les vecteurs d'état de chaque couche ne sont donc plus de la même taille, et on définit par conséquent le vecteur d'état réduit \mathbf{V}_j^r pour la couche solide j , obtenu par extraction du déplacement normal et de la contrainte normale du vecteur d'état \mathbf{V}_j :

$$\mathbf{V}_j = \begin{pmatrix} u_z^j \\ u_\phi^j \\ \mathbf{V}_j^r \\ \sigma_{r\phi}^j \\ \sigma_{rz}^j \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Cette procédure, dite de *condensation*, implique de condenser les matrices de transfert de chaque couche solide. Cette opération est décrite en détail au §II.2.2 qui suit, et sa stabilité numérique sera discutée plus loin en III.3.2.

La continuité du vecteur d'état réduit de la couche solide j à l'interface avec la couche

fluide $j + 1$ d'une part, et l'annulation des contraintes de cisaillement d'autre part, donnent finalement les relations de continuité suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_j^r(r_j, n, \alpha) &= \mathbf{V}_{j+1}(r_j, n, \alpha) \\ \begin{pmatrix} \sigma_{r\phi}^j \\ \sigma_{rz}^j \end{pmatrix} &= \mathbf{0}_2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

II.2.2 Condensation des matrices de transfert des couches solides

Du fait de la présence de couches fluides intermédiaires dans la structure multicouche, seuls le déplacement radial et la contrainte normale sont propagés, tandis que les contraintes de cisaillement s'annulent pour respecter les conditions de continuité avec le fluide.

Ainsi, le vecteur d'état réduit \mathbf{V}_j^r se substitue au vecteur d'état, et il convient de condenser les matrices de transfert élémentaires des couches solides pour rendre consistant le produit matriciel.

En pratique, on condense la matrice de transfert de chaque groupe solide encadré par deux couches fluides intermédiaires, obtenue par produit des matrices de transfert de chaque couche solide qui le constitue. On ne met pas d'indice dans les développements qui suivent, et on désigne simplement par \mathbf{V}^r le vecteur d'état réduit associé au vecteur d'état d'un groupe solide quelconque. De plus, la matrice de transfert de ce dernier, notée $[\mathbf{T}]$, est partitionnée par blocs matriciels 2×2 comme suit :

$$[\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} [\mathbf{T}_{11}] & [\mathbf{T}_{12}] & [\mathbf{T}_{13}] \\ [\mathbf{T}_{21}] & [\mathbf{T}_{22}] & [\mathbf{T}_{23}] \\ [\mathbf{T}_{31}] & [\mathbf{T}_{32}] & [\mathbf{T}_{33}] \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

On peut alors écrire la relation suivante entre les vecteurs d'état évalués aux interfaces supérieure et inférieure du groupe, notées respectivement r_{sup} et r_{inf} :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_z \\ u_\phi \end{pmatrix} \\ \mathbf{V}^r \\ \begin{pmatrix} \sigma_{r\phi} \\ \sigma_{rz} \end{pmatrix} \end{pmatrix} (r_{\text{sup}}, n, \alpha) = \begin{pmatrix} [\mathbf{T}_{11}] & [\mathbf{T}_{12}] & [\mathbf{T}_{13}] \\ [\mathbf{T}_{21}] & [\mathbf{T}_{22}] & [\mathbf{T}_{23}] \\ [\mathbf{T}_{31}] & [\mathbf{T}_{32}] & [\mathbf{T}_{33}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_z \\ u_\phi \end{pmatrix} \\ \mathbf{V}^r \\ \begin{pmatrix} \sigma_{r\phi} \\ \sigma_{rz} \end{pmatrix} \end{pmatrix} (r_{\text{inf}}, n, \alpha) \quad (3.29)$$

Les conditions de continuité avec les fluides situés de part et d'autre du groupe solide imposent la nullité des contraintes de cisaillement, de telle sorte que le système (3.29) devient :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_z \\ u_\phi \end{pmatrix} \\ \mathbf{V}^r \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} (r_{\text{sup}}, n, \alpha) = \begin{pmatrix} [\mathbf{T}_{11}] & [\mathbf{T}_{12}] & [\mathbf{T}_{13}] \\ [\mathbf{T}_{21}] & [\mathbf{T}_{22}] & [\mathbf{T}_{23}] \\ [\mathbf{T}_{31}] & [\mathbf{T}_{32}] & [\mathbf{T}_{33}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_z \\ u_\phi \end{pmatrix} \\ \mathbf{V}^r \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} (r_{\text{inf}}, n, \alpha) \quad (3.30)$$

En développant les 3^{ème} et 4^{ème} lignes d'une part, et les deux dernières lignes d'autre part du système (3.30), on obtient :

$$\mathbf{V}^r(r_{\text{sup}}, n, \alpha) = [\mathbf{T}_{21}] \begin{pmatrix} u_z \\ u_\phi \end{pmatrix} \Big|_{(r_{\text{inf}}, n, \alpha)} + [\mathbf{T}_{22}] \mathbf{V}^r(r_{\text{inf}}, n, \alpha) \quad (3.31)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [\mathbf{T}_{31}] \begin{pmatrix} u_z \\ u_\phi \end{pmatrix} \Big|_{(r_{\text{inf}}, n, \alpha)} + [\mathbf{T}_{32}] \mathbf{V}^r(r_{\text{inf}}, n, \alpha) \quad (3.32)$$

L'équation matricielle (3.32) permet d'éliminer les déplacements axial et orthoradial de l'équation (3.31) et d'établir la matrice de transfert 2×2 condensée du groupe solide considéré, notée $[\mathbf{T}]^r$:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^r(r_{\text{sup}}, n, \alpha) &= [\mathbf{T}]^r \mathbf{V}^r(r_{\text{inf}}, n, \alpha) \\ [\mathbf{T}]^r &= [[\mathbf{T}_{22}] - [\mathbf{T}_{21}] [\mathbf{T}_{31}]^{-1} [\mathbf{T}_{32}]] \end{aligned} \quad (3.33)$$

II.2.3 Construction de la matrice de transfert globale du multicouche

Une fois la condensation de tous les groupes solides effectués, il est alors possible de propager le vecteur d'état *réduit* d'un bord à l'autre du multicouche par simple produit matriciel.

Si n_f désigne à nouveau le nombre de couches fluides intermédiaires dans la structure multicouche, celle-ci comporte alors $n_f + 1$ groupes solides, et on peut écrire :

$$\mathbf{V}_N^r(r_j, n, \alpha) = [\mathbf{T}]_{\text{struc}} \mathbf{V}_1^r(r_0, n, \alpha), \quad [\mathbf{T}]_{\text{struc}} = \prod_{k=n_f+1}^1 [\mathbf{T}]_k^r [\mathbf{T}]_k \quad (3.34)$$

où l'exposant r fait la distinction entre les matrices de transfert réduites des groupes solides et les matrices de transfert des couches fluides.

II.3 Nombre d'équations et d'inconnues du système à résoudre

Dans le chapitre 2, on a vu que la méthode par matrice globale inverse un système prenant pour inconnues les coefficients d'onde de toutes les couches de la structure. Pour un nombre n_s de couches solides et n_f de couches fluides intermédiaires, le système à résoudre était de $6n_s + 2 \times (n_f + 2)$, et les déplacements et contraintes à chaque interface étaient déterminés par simple reconstruction matricielle.

À l'inverse, la méthode par matrices de transfert propage un vecteur d'état d'une interface à une autre, contenant 6 inconnues si la structure ne comporte pas de couches fluides intermédiaires, et seulement 2 si des lames d'eau sont incluses à la structure, et que la procédure de condensation des matrices solides décrite en II.2.2 est appliquée.

Les systèmes matriciels reliant les vecteurs d'état aux rayons interne et externe fournissent par conséquent 6 et 2 équations respectivement, alors que le problème comportera 12 ou 4 inconnues respectivement.

Par conséquent, afin que le problème soit bien posé, il manque dans chaque cas 6 ou 2 équations respectivement.

Celles-ci sont obtenues par la continuité des contraintes entre la coque d'acier au rayon interne et le fluide interne d'une part, et entre le dernier revêtement au rayon externe et le fluide semi-infini d'autre part.

Dans le cas d'un multicouche comprenant des couches fluides intermédiaires, seule la continuité de la contrainte normale est exploitée à chaque interface.

Par ailleurs, on peut commenter la réduction du nombre de degrés de libertés par rapport à la méthode par matrice globale, et qui est due à la condensation du système. Cette condensation rend inaccessible les vecteurs d'état aux interfaces internes sans avoir à repropager la solution obtenue à l'un des rayons extrémaux. Les relations de continuité pour ces degrés de liberté sont implicitement traduites par le produit matriciel des différentes matrices de transfert élémentaires.

II.4 Calcul du champ de pression spectral à la cote antenne

Les systèmes matriciels (3.25) et (3.34) sont résolus après fermeture du problème par les conditions aux limites.

Pour une structure multicouche supposée lisse et excitée par une onde plane incidente, la pression totale au rayon externe se décompose suivant la pression bloquée p_b et la pression rayonnée p_e :

$$p(r_N, n, \alpha) = p_b(r_N, n, \alpha) + p_e(r_N, n, \alpha) \quad (3.35)$$

où la pression rayonnée p_e peut être exprimée à l'aide de l'impédance du fluide extérieur Z_{fe} et du déplacement normal dans le dernier revêtement du multicouche :

$$p_e(r_N, n, \alpha) = Z_{fe} \mathbf{u}_N(r_N, n, \alpha) \cdot \mathbf{e}_r \quad (3.36)$$

De même, la pression au rayon interne r_0 dans la cavité peut s'exprimer à l'aide de l'impédance du fluide intérieur Z_{fi} et du déplacement normal dans la coque d'acier :

$$p_{1e}(r_0, n, \alpha) = Z_{fi} \mathbf{u}_1(r_0, n, \alpha) \cdot \mathbf{e}_r \quad (3.37)$$

Les expressions des impédances des fluides interne et externe sont données en appendice B.

Les contraintes aux interfaces extrémales s'expriment alors de la manière qui suit :

$$\boldsymbol{\sigma}_N(r_N, n, \alpha) = -\mathbf{P}_b(r_N, n, \alpha) - [\mathbf{T}_{fe}] \mathbf{u}_N(r_N, n, \alpha) \quad (3.38)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1(r_0, n, \alpha) = [\mathbf{T}_{fi}] \mathbf{u}_1(r_0, n, \alpha) \quad (3.39)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_b(r_N, n, \alpha) &= p_b(r_N, n, \alpha) \mathbf{e}_r \\ [\mathbf{T}_{fi}] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{fi} \end{pmatrix}, [\mathbf{T}_{fe}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{fe} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.40)$$

II.4.1 Cas d'un multicouche entièrement solide

Pour un multicouche ne comprenant pas de couches fluides intermédiaires, on repart du système (3.25) en partitionnant la matrice globale de la structure par blocs matriciels 3×3 , et en explicitant le vecteur d'état évalué dans une couche j quelconque suivant les déplacements et contraintes :

$$\mathbf{V}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_j \\ \boldsymbol{\sigma}_j \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{T}]_{\text{struc}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{T}]_{u_N u_1} & [\mathbf{T}]_{u_N \sigma_1} \\ [\mathbf{T}]_{\sigma_N u_1} & [\mathbf{T}]_{\sigma_N \sigma_1} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Le système (3.25) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_N \\ -\mathbf{P}_b - [\mathbf{T}_{\text{fe}}] \mathbf{u}_N \end{pmatrix} (r_N, n, \alpha) = \begin{bmatrix} [\mathbf{T}]_{u_N u_1} & [\mathbf{T}]_{u_N \sigma_1} \\ [\mathbf{T}]_{\sigma_N u_1} & [\mathbf{T}]_{\sigma_N \sigma_1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ [\mathbf{T}_{\text{fi}}] \mathbf{u}_1 \end{pmatrix} (r_0, n, \alpha) \quad (3.42)$$

En développant le système (3.42), on peut obtenir une relation entre les déplacements au rayon interne r_0 de la structure et la pression bloquée excitant le système :

$$\mathbf{u}_1(r_0, n, \alpha) = [\mathbf{R}]_{u_1 F_N} (-\mathbf{P}_b(r_N, n, \alpha)) \quad (3.43)$$

où $[\mathbf{R}]_{u_1 F_N}$ est la matrice des admittances reliant les efforts appliqués au rayon externe avec les déplacements au rayon interne.

L'expression de $[\mathbf{R}]_{u_1 F_N}$ est établie en appendice B.

Connaissant la pression bloquée \mathbf{P}_b , l'équation (3.43) permet de déduire les déplacements et contraintes au rayon interne.

Le vecteur d'état peut ensuite être propagé jusqu'à la cote antenne par simple produit matriciel des différentes matrices de transfert.

Pour une couche d'antenne j_A , et une antenne enfouie dans cette couche au rayon r_A , on définit la matrice de transfert $[\mathbf{T}]_{j_A \rightarrow r_A}$ qui propage le vecteur d'état comme suit :

$$\mathbf{V}_{j_A}(r_A, n, \alpha) = [\mathbf{T}]_{j_A \rightarrow r_A} \mathbf{V}_{j_A}(r_{j_A-1}, n, \alpha) \quad (3.44)$$

Le vecteur d'état au rayon interne de la structure multicouche est propagé jusqu'au rayon d'antenne par la relation :

$$\mathbf{V}_{j_A}(r_A, n, \alpha) = [\mathbf{T}]_{j_A \rightarrow r_A} \prod_{j=j_A-1}^1 [\mathbf{T}]_j \mathbf{V}_1(r_0, n, \alpha) \quad (3.45)$$

II.4.2 Cas d'un multicouche comportant des couches fluides intermédiaires

Dans le cas où la présence de couches fluides intermédiaires dans la structure a rendu nécessaire la condensation des matrices de transfert de chaque groupe solide, la matrice de transfert globale de la structure est une matrice 2×2 pouvant s'exprimer par blocs scalaires, et le vecteur d'état dans une couche j quelconque ne contient que le déplacement et la contrainte normale :

$$\mathbf{V}_j = \begin{pmatrix} u_r^j \\ \sigma_{rr}^j \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{T}]_{\text{struc}} = \begin{bmatrix} T_{u_N u_1} & T_{u_N \sigma_1} \\ T_{\sigma_N u_1} & T_{\sigma_N \sigma_1} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Le système (3.34) peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_N \cdot \mathbf{e}_r \\ -p_b - ([\mathbf{T}_{\text{fe}}] \mathbf{u}_N) \cdot \mathbf{e}_r \end{pmatrix} (r_N, n, \alpha) = \begin{bmatrix} T_{u_N u_1} & T_{u_N \sigma_1} \\ T_{\sigma_N u_1} & T_{\sigma_N \sigma_1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{e}_r \\ ([\mathbf{T}_{\text{fi}}] \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{e}_r \end{pmatrix} (r_0, n, \alpha) \quad (3.47)$$

et une relation peut à nouveau être obtenue entre le déplacement normal au rayon interne et la pression bloquée appliquée par l'onde plane incidente :

$$\mathbf{u}_1(r_0, n, \alpha) \cdot \mathbf{e}_r = R_{\mathbf{u}_1 \mathbf{F}_N} (-p_b(r_N, n, \alpha)) \quad (3.48)$$

L'expression du scalaire $R_{\mathbf{u}_1 \mathbf{F}_N}$ est donnée également en appendice B.

Le vecteur d'état une fois déterminé par la relation (3.48), on le propage jusqu'à la cote antenne à l'aide des différentes matrices de transfert fluide et solide condensées.

III Instabilités numériques

III.1 Sur la difficulté d'établir un critère d'instabilité et d'utiliser la quadruple précision

Premièrement, il est nécessaire de justifier pourquoi la quadruple précision numérique se prêtait à résoudre les problèmes d'overflow ou d'underflow numérique rencontrés au chapitre 2, et pourquoi il est beaucoup plus difficile de mettre en pratique cette solution pour résoudre les instabilités rencontrées avec la méthode par matrices de transfert, que

ce soit le *large fd problem* survenant aux hautes fréquences, ou bien lors de la prise en compte de couches fluides intermédiaires.

Il faut pour cela distinguer deux catégories distinctes quant aux erreurs d'arrondis et aux divergences numériques qui peuvent survenir :

- Soit d'un nombre de bits insuffisant pour représenter correctement l'*exposant*
- Soit d'un nombre de bits insuffisant pour représenter correctement la *mantisse*

Dans le chapitre 2, les problèmes d'overflow et d'underflow numérique étaient directement reliés à la première catégorie d'instabilité, ce qui finalement est plus simple à diagnostiquer et pour lequel un critère d'instabilité pouvait être mis en oeuvre facilement pour recalculer les valeurs singulières en quadruple précision sans pour autant dégrader considérablement le temps de calcul.

En étudiant de plus près les valeurs numériques lors de la résolution par la méthode par matrices de transfert, il est apparu notamment que le *large fd problem* appartenait clairement à la deuxième catégorie. En effet, même si les nombres évalués sont stockables en mémoire pour la précision machine utilisée, et que des valeurs finies sont renvoyées lors du calcul, la mantisse de ces valeurs n'est pas représentée avec une précision suffisante. Les opérations numériques élémentaires nécessaires à la résolution du système et à la reconstruction des déplacements et contraintes au rayon d'antenne mènent à une estimation de la solution complètement fautive.

Par conséquent, il est plus difficile d'établir un critère d'instabilité pour détecter la divergence numérique que dans le cas d'un problème d'underflow ou d'overflow numérique, où le diagnostic était finalement plus simple et où il suffisait d'appeler ponctuellement la quadruple précision en renfort.

Dans la section qui suit, on met en évidence les deux types d'instabilités numériques rencontrées sur les configurations retenues pour la validation des méthodes implémentées. Pour le cas de la gestion des couches fluides intermédiaires, plusieurs solutions qui se sont révélées insatisfaisantes sont discutées, en particulier la condensation des matrices de transfert des couches solides dont on a présenté le formalisme en II.2.2.

Dans un deuxième temps, on présentera la nouvelle procédure d'assemblage qui élimine

les deux types d'instabilités survenues.

Par ailleurs, en ce qui concerne le *large fd problem* rencontré aux hautes fréquences, un lecteur plus curieux pourra s'attarder sur l'annexe B où une discussion est entreprise à propos de la stabilité du système de Stroh à résoudre dans chaque sous-couche, et ce pour expliquer les écarts numériques observés sur la réponse.

III.2 Mise en évidence du *large fd problem*

L'instabilité aux régimes élevés du produit fd entraîne des erreurs numériques sur la réponse d'antenne calculée par la méthode par matrices de transfert, qui ne sont pas observées avec la méthode par matrice globale.

Pour les 4 configurations présentées au chapitre 2, les trois configurations revêtues (**NTF0**, **RATF0**, et **RMTF0**) sont bien plus sujettes à ce type d'instabilités que la configuration **N** de la coque d'acier nue, comme le montre la Fig. 3.2, où sont tracées les réponses d'antenne des 4 configurations pour un capteur ponctuel sur la plage fréquentielle $f \in [0; 20000]$ Hz, sous incidence normale (en notant A_0 l'amplitude de l'onde incidente) :

III.3 Prise en compte des couches fluides intermédiaires

La prise en compte des couches fluides intermédiaires dans la méthode par matrices de transfert est rendue difficile à une interface séparant deux couches de nature différente, ici une interface *solide-fluide*, par la non compatibilité des relations de continuité dans chaque milieu. Le produit matriciel qui assemble les différentes matrices de transfert élémentaires n'est alors pas consistant.

Plusieurs stratégies sont évoquées ici pour mettre en évidence et essayer de contourner le problème qui en résulte.

On illustrera les raisonnements qui suivent sur des configurations inspirées de celles introduites précédemment au chapitre 2 (**N**, **NTF0**, **RATF0** et **RMTF0**), et qui sont présentées ci-dessous.

III.3.1 Configurations tests avec lame d'eau fluide

Les 4 nouvelles configurations multicouches sont respectivement appelées **ND**, **NTD0**, **RATD0** et **RMTD0**, en fonction de la configuration précédente sans lame d'eau intermédiaire dont chacune s'inspire.

Celles-ci incluent désormais une lame d'eau fluide, surmontée d'un dôme acoustique en matériau composite de verre-résine (CVR), d'une épaisseur de 20 mm.

On suppose que la distance de la coque d'acier jusqu'à l'interface inférieure du dôme acoustique reste constante et égale à 300 mm pour les 4 configurations. Ainsi, la lame d'eau est d'épaisseur h_f variable, et vaut 300 mm pour la configuration **ND**, 200 mm pour la configuration **NTD0**, et plus que 100 mm pour les deux configurations **RATD0** et **RMTD0**.

En Fig. 3.3 sont représentées les 4 nouvelles configurations.

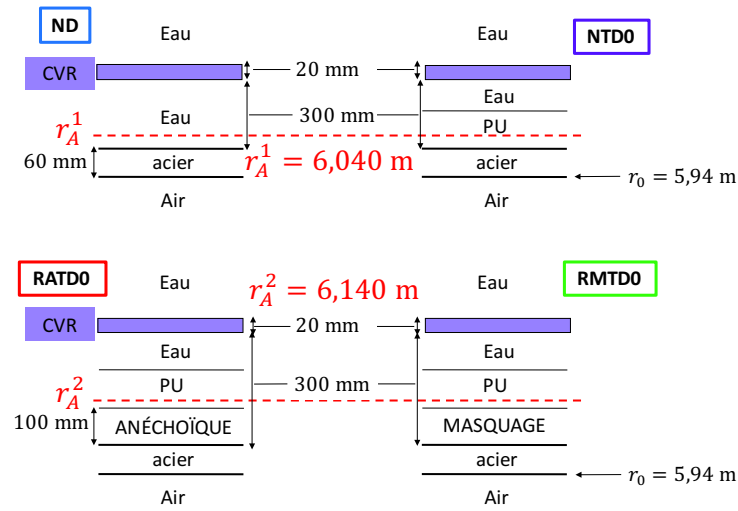


FIGURE 3.3 – Configurations tests avec lame d'eau fluide

La coque d'acier a toujours une épaisseur de 60 mm tandis que les différents matériaux de revêtements hormis le CVR ont toujours une épaisseur de 100 mm. Par ailleurs, le rayon intérieur de la coque reste égal à $r_0 = 5,94$ m.

Par conséquent, pour ces configurations, les ordres de grandeurs des épaisseurs des couches restant à nouveau faibles devant le rayon moyen de la structure, les couches élémentaires ne sont pas subdivisées.

Le tableau (3.1) rappelle les propriétés des différents matériaux utilisés, en y incluant celles du dôme acoustique surmontant la structure dans chaque configuration.

Matériau	Acier	PU	anéch.	masq.	eau	CVR
c_L (m.s ⁻¹)	6020	1600	900	300	1500	3000
η_{c_L}	0,01	0,02	0,25	0,25	0	0,05
c_T (m.s ⁻¹)	3220	150	150	100	0	2000
η_{c_T}	0,01	0,1	0,35	0,45	0	0,1
ρ (kg.m ⁻³)	7800	1100	1400	1100	1000	2000
$\frac{Z}{Z_{eau}}$	31	1,17	0,84	0,22		4

TABLE 3.1 – Propriétés matériaux

Même si celui-ci est généralement constitué d'un matériau composite anisotrope, on le suppose ici isotrope comme les autres matériaux pour la simplicité de la résolution.

III.3.2 Condensation des matrices solides

La première solution pour la prise en compte de la lame d'eau fluide est celle empruntée à Cervenka et Challande [91], et dont les fondements théoriques ont été exposés en II.2.2. Celle-ci consiste à condenser les matrices solides élémentaires pour rendre le produit matriciel consistant entre des couches fluides et des couches solides.

Cependant, cette condensation supplémentaire génère de nouvelles instabilités aux basses fréquences, comme le montre la Fig. 3.4 ci-dessous, où la réponse d'antenne dans le cas de l'incidence normale est tracée pour la plage fréquentielle $f \in [0; 3000]$ Hz pour les 4 configurations :

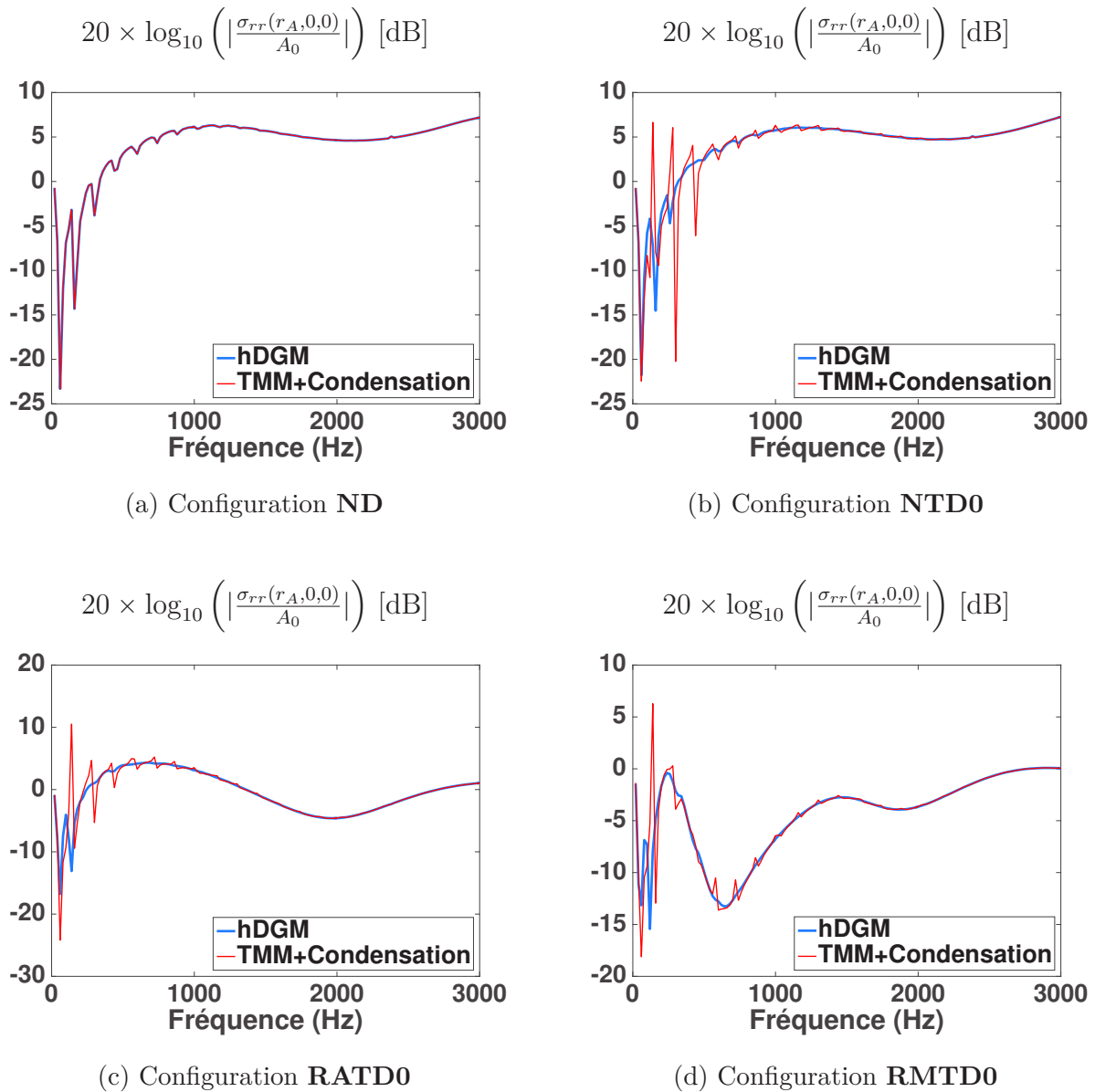


FIGURE 3.4 – Instabilité aux basses fréquences lors de la prise en compte de la lame d'eau par condensation des matrices solides élémentaires

Hormis sur la seule configuration **ND**, la méthode par matrices de transfert présente des instabilités aux basses fréquences sur les trois configurations revêtues incluant une lame d'eau intermédiaire lorsque la condensation des matrices solides est effectuée. Or, cette zone fréquentielle est de première importance, en particulier lors du couplage de la structure avec le réseau périodique de raidisseurs, c'est dans cette plage que les modes de résonance des raidisseurs sont susceptibles d'apparaître. Ainsi, il n'est pas

envisageable que des instabilités numériques polluent la réponse d'antenne à ces fréquences.

III.3.3 Introduction d'une vitesse de cisaillement dans l'eau

Une autre alternative est de considérer de manière fictive l'eau comme un solide, en rajoutant une vitesse de cisaillement très basse lors de la résolution numérique.

Ainsi, la condensation des couches solides devient inutile et il est possible d'effectuer le produit matriciel (3.25) pour propager le vecteur d'état d'un bord à l'autre du multicouche uniquement entre des matrices de taille 6×6 . En Fig. 3.5 sont représentées les réponses d'antenne sur la plage fréquentielle $f \in [0; 3000]$ Hz obtenues pour les 4 configurations avec la méthode par matrice globale d'une part, et la méthode par matrices de transfert d'autre part, en introduisant une célérité de cisaillement sur la lame d'eau afin de la traiter comme un solide :

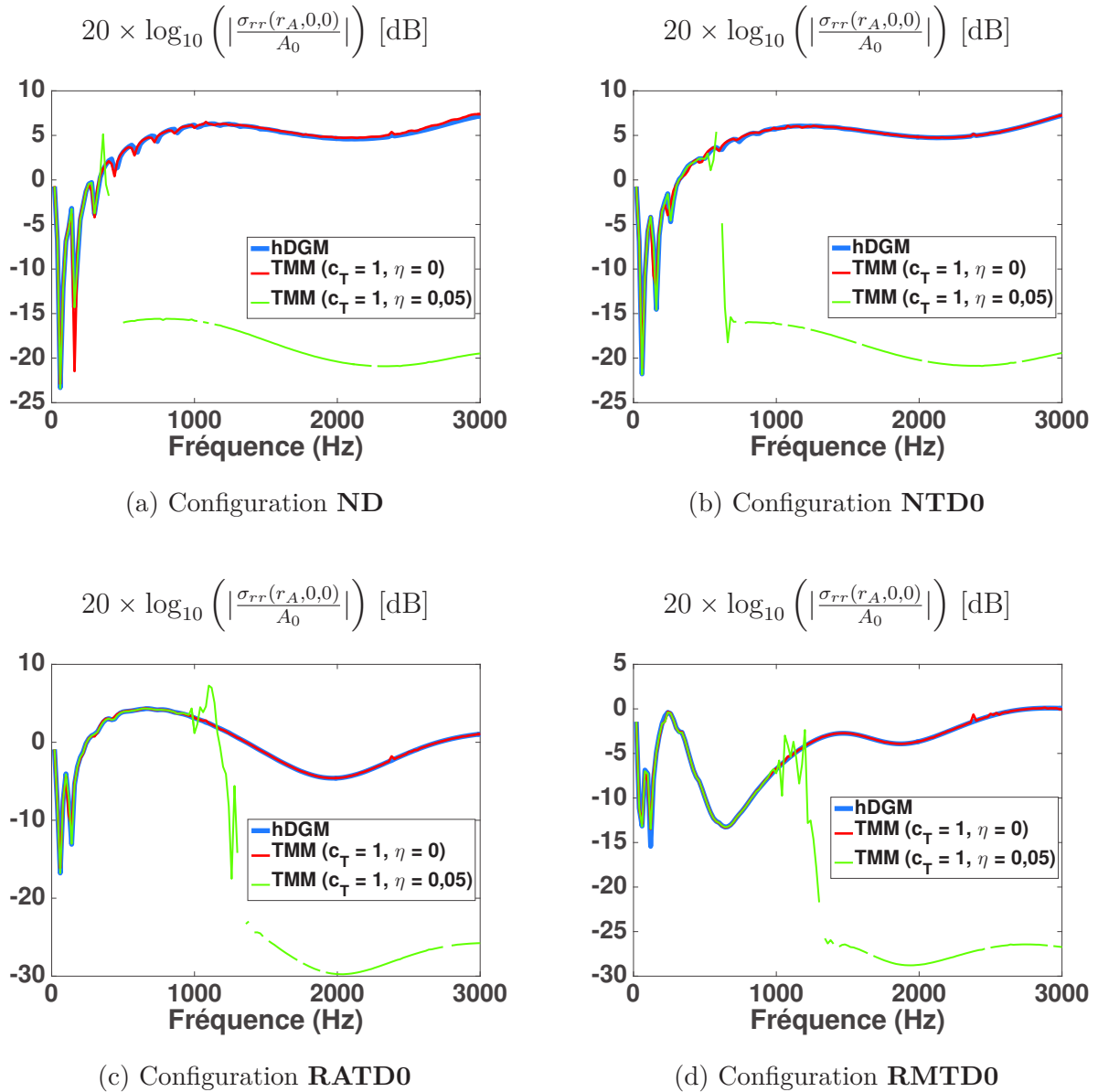


FIGURE 3.5 – Introduction d’une célérité de cisaillement faible pour la prise en compte de la lame d’eau fluide

On voit que pour une célérité de cisaillement $c_T^{\text{eau}} = 1 \text{ m.s}^{-1}$, sans amortissement, la réponse d’antenne calculée par méthode par matrices de transfert recolle à la méthode par matrice globale pour chaque configuration.

Cependant, le choix de la célérité de cisaillement c_T^{eau} est empirique, et on a superposé également sur les Fig. 3.5 les réponses d’antenne obtenues en ajoutant de l’amortissement sur la célérité de cisaillement fictive. On voit que la réponse d’antenne est alors totalement

fausse pour les 4 configurations, par conséquent cette méthode va être très sensible au choix de la célérité c_T^{eau} fictive effectué pour gérer la couche solide, et de plus ne donnait pas de résultats satisfaisants à tous les angles d'incidence et à tous les régimes fréquentiels.

IV Assemblage des matrices de transfert par matrice globale

La section précédente a permis de mettre en évidence deux instabilités majeures découlant de l'établissement des matrices de transfert et de leur procédure d'assemblage classiquement employée :

- D'une part, aux régimes élevés du produit *fréquence-épaisseur*, la stabilité de la solution du système différentiel résolu dans chaque sous-couche entraîne par la suite des erreurs d'arrondis lors des opérations élémentaires qui résultent du produit matriciel de chacune des matrices de transfert.
- Pour des raisons similaires, la condensation des matrices solides lors de la prise en compte de couches fluides intermédiaires entraîne un autre type d'instabilités. Celle-ci peut être contournée en introduisant une vitesse de cisaillement pour la couche de fluide intermédiaire, et en poursuivant la résolution de la même manière que pour une structure constituée uniquement de couches solides. Cependant, cette méthode n'est pas pleinement satisfaisante, du fait du choix très empirique de la valeur à donner à la vitesse de cisaillement fictive dans le fluide.

Ces deux types d'instabilités peuvent être contournées tout à la fois en s'inspirant de la procédure d'assemblage de la matrice globale présentée au chapitre 2.

En assemblant les différentes relations de continuité d'une manière similaire au précédent chapitre, les vecteurs d'état aux interfaces internes ne sont alors plus condensés par le produit matriciel, et le système ne se réduit plus à exprimer une relation unique pour le multicouche reliant les seuls vecteurs d'état évalués aux interfaces extrémales.

En effet, on conserve dans l'approche proposée tous les vecteurs d'état aux interfaces inférieures de chaque couche comme inconnus du système.

La solution du système différentiel sera moins sensible à l'instabilité de celui-ci, car on raisonne à nouveau en termes d'interfaces, et non plus en termes de propagation à travers les couches.

Le système à résoudre sera alors de plus grande taille que celui de la TMM classique. Les développements présentés dans cette section seront faits sur des couches élémentaires qui ne sont pas subdivisées. Pour des couches trop épaisses, la méthode présentée s'appliquera rigoureusement de la même manière en subdivisant les différentes couches élémentaires et en écrivant les relations de continuité à chaque interface fictive.

Dans tout ce qui suit, la méthode par matrices de transfert appliquée avec cette nouvelle procédure d'assemblage, similaire à l'assemblage matriciel global de la méthode hDGM, sera appelée sDGM. La lettre minuscule « s » devant l'acronyme « DGM » rappellera cette fois le formalisme de Stroh utilisé dans les couches solides élémentaires. Les méthodes sDGM et TMM ne diffèrent donc que par la procédure d'assemblage du système multicouche, la méthode TMM utilisant la procédure classique d'assemblage par produit matriciel des différentes matrices de transfert des couches de la structure.

IV.1 Construction de la matrice globale

Le principe de la méthode proposée est de remplir à l'aide des relations de continuité une matrice globale notée $[\mathbf{G}]_{\text{sDGM}}$ telle que :

$$[\mathbf{G}]_{\text{sDGM}}(n, \alpha) \{\mathbf{V}\}_{\text{GLOB}}(n, \alpha) = \mathbf{E}(n, \alpha) \quad (3.49)$$

avec :

- $[\mathbf{G}]_{\text{sDGM}}(n, \alpha)$ la matrice globale qui assemble les différentes matrices de transfert élémentaires de chaque couche.
- $\{\mathbf{V}\}_{\text{GLOB}}(n, \alpha)$ un vecteur global de tous les vecteurs d'état évalués aux N premières interfaces de la structure.

On retrouve ce qui était annoncé au début de cette section, à savoir l'absence de condensation du nombre d'inconnues du problème qu'entraîne la procédure classique d'assemblage de la méthode TMM, à savoir le produit matriciel des différentes matrices de transfert.

- $\mathbf{E}(n, \alpha)$ le vecteur second membre contenant les excitations éventuelles appliquées à chaque interface.

IV.1.1 Relations de continuité aux interfaces de la structure

On détaille ici les différentes relations de continuité aux interfaces de la structure, et comment celles-ci remplissent la matrice $[\mathbf{G}]_{\text{sDGM}}(n, \alpha)$.

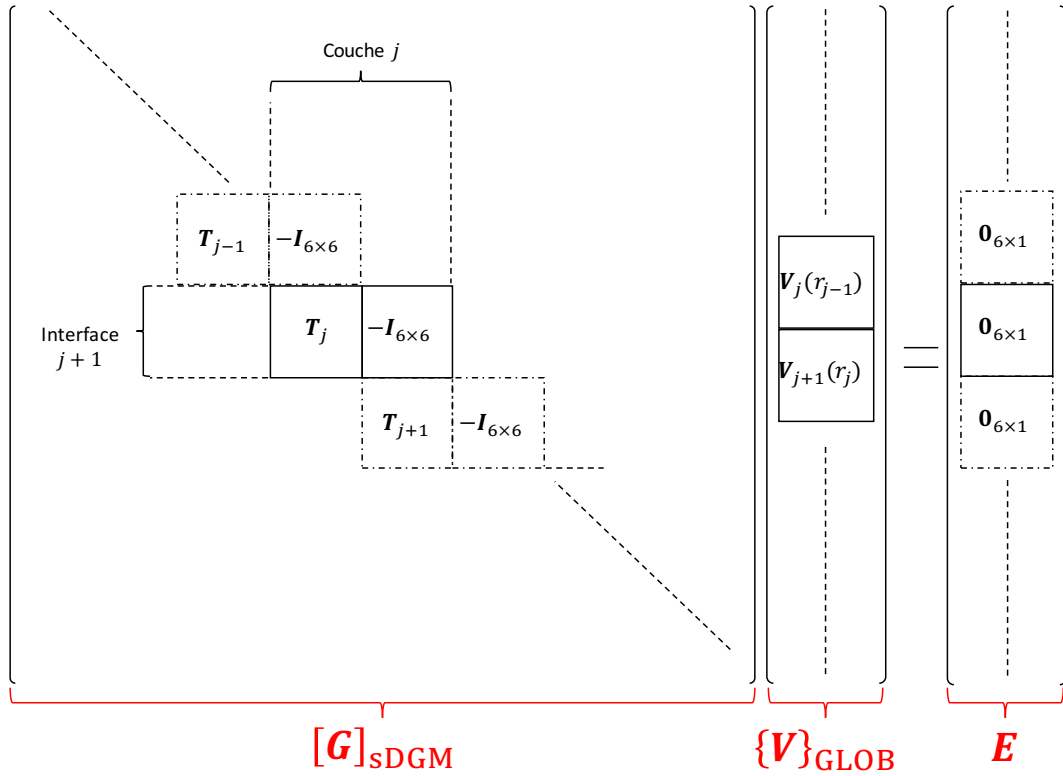
IV.1.1.1 Interfaces internes

On raisonne à nouveau sur une interface $j + 1$ quelconque de la structure ($j \in \llbracket 2; N - 1 \rrbracket$), d'équation $r_j = \text{Cte}$, qui sépare deux couches élémentaires notées j et $j + 1$. Aucune excitation extérieure n'est imposée et on a :

- Interface *solide-solide*

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{j+1}(r_j, n, \alpha) &= [\mathbf{T}]_j \mathbf{V}_j(r_{j-1}, n, \alpha) \\ \iff \begin{pmatrix} [\mathbf{T}]_j & -[\mathbf{I}_{6 \times 6}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_j(r_{j-1}, n, \alpha) \\ \mathbf{V}_{j+1}(r_j, n, \alpha) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ \mathbf{0}_{6 \times 1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Le schéma 3.6 ci-dessous résume l'assemblage des relations de continuité relatives à une interface $j + 1$ *solide-solide* :

FIGURE 3.6 – Assemblage des interfaces *solide-solide*

- Interface *solide-fluide*

En supposant une couche j fluide prise en sandwich par deux couches $j - 1$ et $j + 1$ solides, la continuité du déplacement normal et des contraintes à chaque interface $j - 1$ et j donne 8 équations au total :

- Interface $j - 1$

$$\begin{cases} \mathbf{V}_j(r_{j-1}, n, \alpha) = [\mathbf{T}^{[3;4]}]_{j-1} \mathbf{V}_{j-1}(r_{j-2}, n, \alpha) \\ \mathbf{V}_{j-1}^{[5;6]}(r_{j-1}, n, \alpha) = [\mathbf{T}^{[5;6]}]_{j-1} \mathbf{V}_{j-1}(r_{j-2}, n, \alpha) = \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{cases} \quad (3.51)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} [\mathbf{T}^{[3;4]}]_{j-1} & -[\mathbf{I}_{2 \times 2}] \\ [\mathbf{T}^{[5;6]}]_{j-1} & [\mathbf{0}_{2 \times 2}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{j-1}(r_{j-2}, n, \alpha) \\ \mathbf{V}_j(r_{j-1}, n, \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{pmatrix}$$

□ Interface j

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{j+1}^{[3;4]}(r_j, n, \alpha) = \mathbf{V}_j(r_j, n, \alpha) = [\mathbf{T}]_j \mathbf{V}_j(r_{j-1}, n, \alpha) \\ \mathbf{V}_{j+1}^{[5;6]}(r_j, n, \alpha) = \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{cases} \quad (3.52)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} [\mathbf{T}]_j & [\mathbf{0}_{2 \times 2}] & -[\mathbf{I}_{2 \times 2}] & [\mathbf{0}_{2 \times 2}] \\ [\mathbf{0}_{2 \times 2}] & [\mathbf{0}_{2 \times 2}] & [\mathbf{0}_{2 \times 2}] & [\mathbf{I}_{2 \times 2}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_j(r_{j-1}, n, \alpha) \\ \mathbf{V}_{j+1}(r_j, n, \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{pmatrix}$$

où les exposants [3; 4] et [5; 6] désignent les lignes correspondantes dans les vecteurs d'état des couches solides considérées.

Le schéma 3.7 résume l'assemblage des relations de continuité relatives aux deux interfaces *solide-fluide* d'une couche fluide intermédiaire j :

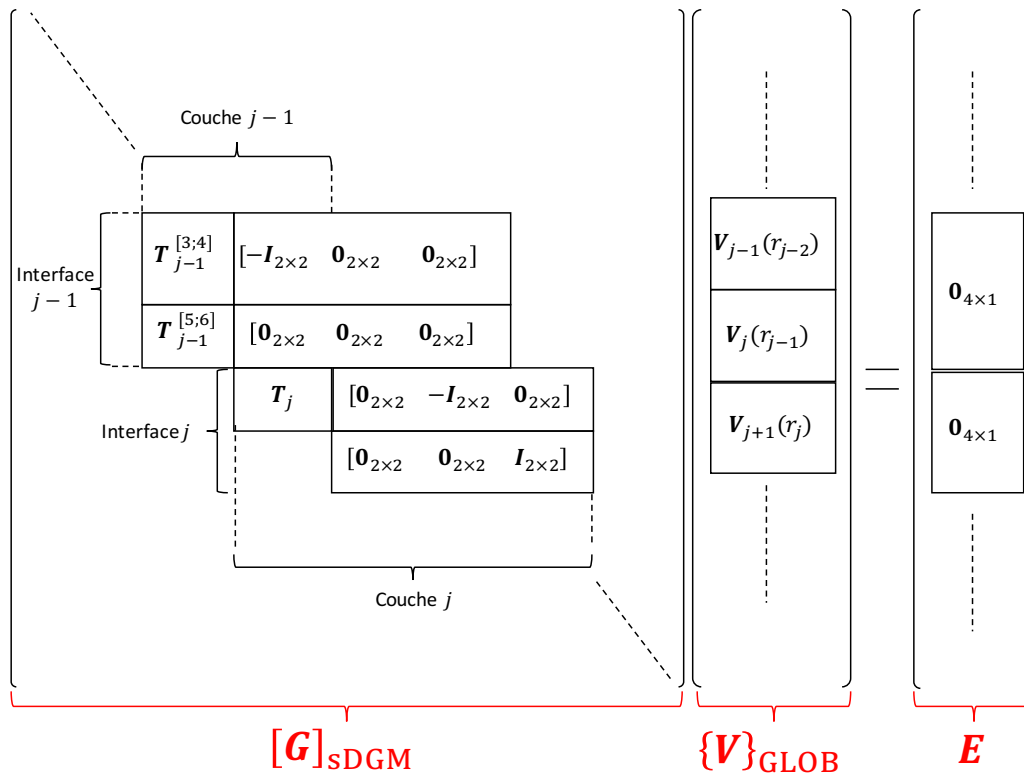


FIGURE 3.7 – Assemblage des interfaces *solide-fluide*

IV.1.1.2 Interfaces extrémales du système multicouche

La continuité des contraintes aux rayons interne et externe fournit 6 équations au total, et on peut récrire les composantes des vecteurs d'état en r_0 et r_N données par les

conditions aux limites de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1^{[4;6]}(r_0, n, \alpha) &= \begin{bmatrix} [\mathbf{0}_{3 \times 3}] & [\mathbf{I}_{3 \times 3}] \end{bmatrix} \mathbf{V}_1(r_0, n, \alpha) \\ \mathbf{V}_N^{[4;6]}(r_N, n, \alpha) &= \begin{bmatrix} [\mathbf{0}_{3 \times 3}] & [\mathbf{I}_{3 \times 3}] \end{bmatrix} \mathbf{V}_N(r_N, n, \alpha)\end{aligned}\quad (3.53)$$

Dans le cas de l'excitation par onde plane, on peut par ailleurs écrire :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1^{[4;6]}(r_0, n, \alpha) &= \begin{bmatrix} [\mathbf{T}_{\text{fi}}] & [\mathbf{0}_{3 \times 3}] \end{bmatrix} \mathbf{V}_1(r_0, n, \alpha) \\ \mathbf{V}_N^{[4;6]}(r_N, n, \alpha) &= -\mathbf{P}_b(r_N, n, \alpha) - \begin{bmatrix} [\mathbf{T}_{\text{fe}}] & [\mathbf{0}_{3 \times 3}] \end{bmatrix} \mathbf{V}_N(r_N, n, \alpha)\end{aligned}\quad (3.54)$$

où les matrices $[\mathbf{T}_{\text{fi}}]$ et $[\mathbf{T}_{\text{fe}}]$ ont déjà été définies précédemment en section II.4, et où on a $\mathbf{P}_b(r_N, n, \alpha) = p_b(r_N, n, \alpha)\mathbf{e}_r$. Les équations (3.53)-(3.54) permettent d'obtenir l'écriture par blocs matriciels des relations de continuité aux interfaces extrémales :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} -[\mathbf{T}_{\text{fi}}] & [\mathbf{I}_{3 \times 3}] \end{bmatrix} \mathbf{V}_1(r_0, n, \alpha) &= \mathbf{0}_3 \\ \begin{bmatrix} [\mathbf{T}_{\text{fe}}] & [\mathbf{I}_{3 \times 3}] \end{bmatrix} \mathbf{V}_N(r_N, n, \alpha) &= -\mathbf{P}_b(r_N, n, \alpha)\end{aligned}\quad (3.55)$$

Le vecteur d'état évalué à la dernière interface r_N n'est cependant pas stocké dans le vecteur contenant les différentes valeurs des déplacements et contraintes, et l'on exploite la matrice de transfert élémentaire de la dernière couche pour récrire finalement :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{T}_{\text{fe}}] & [\mathbf{I}_{3 \times 3}] \end{bmatrix} [\mathbf{T}_N] \mathbf{V}_N(r_{N-1}, n, \alpha) = -\mathbf{P}_b(r_N, n, \alpha)\quad (3.56)$$

Le schéma 3.8 ci-dessous résume l'assemblage des relations de continuité relatives aux deux interfaces *solide-fluide* d'une couche fluide intermédiaire j :

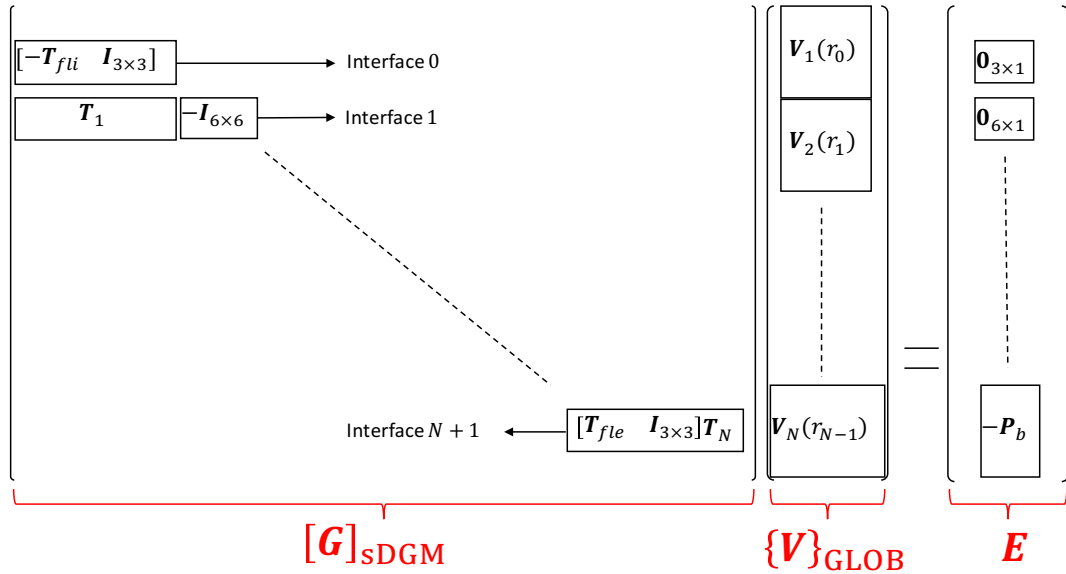


FIGURE 3.8 – Assemblage des relations de continuité aux interfaces extrémales

IV.1.2 Nombre d'équations et d'inconnues du système à résoudre

Comme au chapitre 2, on vérifie ici que le nombre d'équations pourvu pour résoudre le système est bien égal au nombre de déplacements et contraintes inconnus à chaque interface de la structure, et que celui-ci détermine bien la taille de la matrice globale, qui augmente donc avec le nombre de couches.

Le nombre de colonnes de la matrice globale est identique au nombre de déplacements et contraintes des N vecteurs d'état aux N premières interfaces, soit

$$C_G = 6 \times (n_s - n_f) + 2 \times n_f,$$

si n_s désigne le nombre de couches solides de la structure, et n_f le nombre de couches fluides intermédiaires.

Quant au nombre de lignes, il est donné par le nombre d'équations fourni par les relations de continuité aux $N+1$ interfaces.

Les $N - 1 - 2n_f = n_s - n_f - 1$ interfaces *solide-solide* internes donnent chacune 6 équations, quant aux $2n_f$ interfaces *solide-fluide* autres que les deux interfaces extrémales, elles fournissent 4 équations chacune. Le déplacement normal dans les fluides interne et externe n'étant pas déterminé, les deux interfaces extrémales ne fournissent chacune que 3 équations

qui traduisent l'imposition des contraintes.

Le nombre total d'équations est donc :

$$\begin{aligned}
 L_G &= 3 + 6 \times (n_s - n_f - 1) + 4 \times 2n_f + 3 \\
 &= 3 + 6 \times (n_s - 1) + 2 \times n_f + 3 \\
 &= 6 \times (n_s - n_f) + 2 \times n_f \\
 &= C_G
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

et on a bien un nombre de colonnes et de lignes de la matrice $[\mathbf{G}]_{\text{sDGM}}$ identique.

Le système linéaire est donc bien posé et comporte autant d'équations que d'inconnues à résoudre.

Si le coût numérique augmente bien évidemment du fait de l'accroissement de la taille du système assemblé avec le nombre de couches de la structure, cette méthode présente plusieurs avantages :

- Premièrement, elle ne fait plus de distinction entre des interfaces de milieux différents, tout comme la méthode par matrice globale présentée au chapitre 2. Ainsi, la prise en compte de couches fluides intermédiaires est rendue transparente.
- La procédure classique d'assemblage de la TMM, à savoir le produit matriciel qui condense le système, présente un défaut majeur : il est alors difficile d'exciter la structure à une interface interne. Même si la présente étude se concentre sur le cas d'excitation par onde plane incidente et que les seules excitations considérées s'appliquent aux interfaces extrémales, il est utile de préciser que cette nouvelle procédure d'assemblage rend beaucoup plus simple le changement d'excitation pour les développements futurs.
- Enfin, les instabilités numériques en hautes fréquences ou survenant lors de la prise en compte de couches fluide intermédiaires sont contournées, ce qui permet de disposer d'une méthode stable pouvant adresser tout à la fois les problèmes d'anisotropie dans les couches solides, et la prise en compte de couches fluide intermédiaires. Cette dernière fonctionnalité est de première importance pour le besoin industriel afin

de justifier d'un outil capable de traiter les couches solides anisotropes. En effet, les principaux matériaux anisotropes utilisés pour ce type de configuration sont les dômes acoustiques en matériau composite qui surmontent justement une lame d'eau intermédiaire.

IV.1.3 Calcul du champ de pression spectral à la cote antenne

Le calcul du champ de pression spectral au rayon d'antenne est effectué par inversion du système (3.49).

On récupère de ce fait tous les vecteurs déplacements-contraintes dans chaque couche évalués aux cotes inférieures.

Pour une couche d'antenne j_A , et un rayon d'antenne dans cette couche noté r_A , on dispose donc après inversion du système (3.49) du vecteur d'état $\mathbf{V}_{j_A}(r_{j_A-1}, n, \alpha)$.

Il suffit alors de reconstruire la matrice de transfert dans la couche d'antenne qui propage ces déplacements et contraintes jusqu'au rayon d'antenne et de multiplier celle-ci au vecteur d'état $\mathbf{V}_{j_A}(r_{j_A-1}, n, \alpha)$.

V Résolution des deux types d'instabilités observées sur la TMM

V.1 Étude dans le domaine spectral

Dans un premier temps, on met en évidence l'amélioration de la stabilité numérique quant au *large fd problem* en comparant dans le domaine spectral les déplacements de la coque d'acier au rayon interne r_0 obtenus avec les méthodes TMM et sDGM. Pour la configuration **RMTF0** excitée par l'onde plane sous incidence normale, les déplacements spectraux sont représentés en Fig. 3.9 dans le plan *Ordre circonférentiel - Fréquence*, sur la plage fréquentielle $f \in [15000; 20000]$ Hz, où la réponse d'antenne est connue instable en utilisant la procédure classique d'assemblage (TMM).

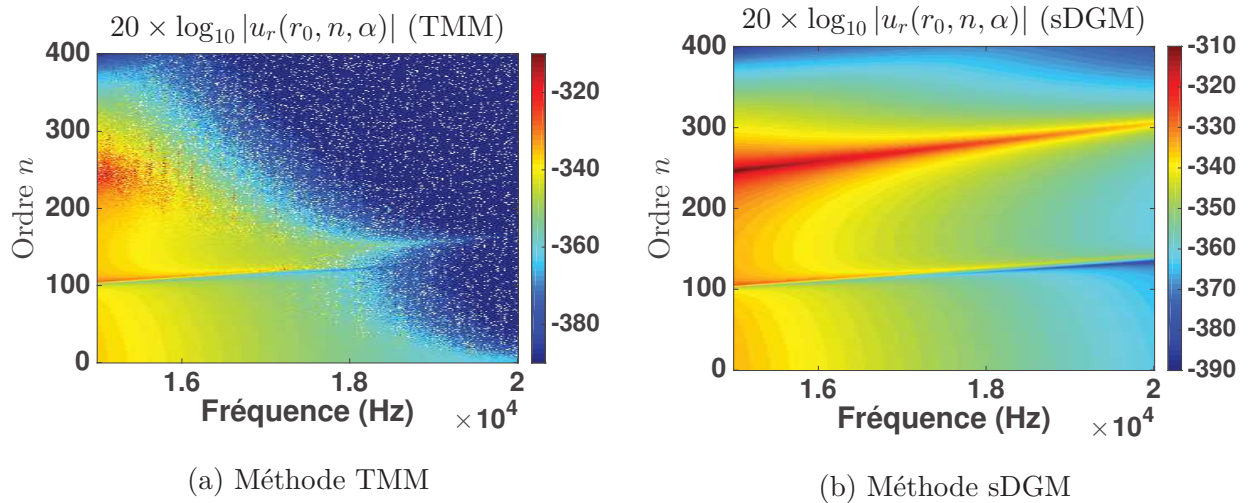
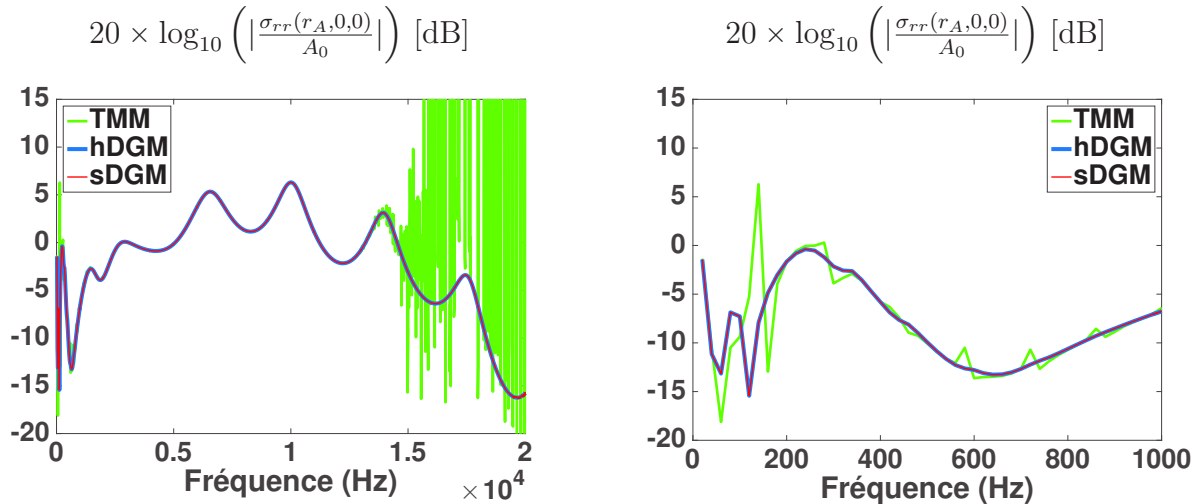


FIGURE 3.9 – Comparaison des méthodes TMM et sDGM sur la configuration **RMTF0**.
Déplacement radial au rayon interne dans le domaine spectral

On voit en Fig. 3.9a que les déplacements spectraux sont très rapidement bruités et mal évalués pour les valeurs élevées de l'ordre circulaire n . De nombreuses valeurs NaN polluent également la cartographie dans tout le coin supérieur droit du plan *Ordre - Fréquence*, correspondant aux fréquences et aux ordres circulaires les plus élevés. En revanche, sur la Fig. 3.9b où les mêmes déplacements spectraux sont obtenus avec la nouvelle procédure d'assemblage (sDGM), on constate que la stabilité numérique est obtenue sur toute la plage fréquentielle d'observation et que les déplacements spectraux sont correctement évalués.

V.2 Réponse d'antenne

On compare en Fig. 3.10 les 3 méthodes hDGM, TMM et sDGM sur la réponse d'antenne de la configuration **RMTD0** en incidence normale. Sur cette configuration qui prend en compte une lame d'eau fluide, ainsi que le matériau de masquage, très mou, qui met en évidence le *large fd problem*, on montre ce qu'apporte la procédure d'assemblage proposée par la sDGM à la fois quant au *large fd problem* et également quant à la prise en compte de couches fluides intermédiaires.



(a) Résolution du *large fd problem* aux hautes fréquences (b) Résolution de l'instabilité de condensation des matrices de transfert solides

FIGURE 3.10 – Réponse d'antenne de la configuration **RMTD0** en incidence normale. Comparaison des méthodes hDGM, TMM et sDGM.

À gauche est représentée la réponse sur toute la plage fréquentielle, afin de mettre en évidence le *large fd problem* survenant aux hautes fréquences avec la TMM classique, et comment celui-ci disparaît avec la nouvelle procédure d'assemblage. En effet la sDGM proposée dans ce chapitre permet de calculer une réponse qui recolle parfaitement à celle obtenue par la méthode par matrice globale présentée au chapitre 2.

À droite, on a réduit la plage fréquentielle affichée afin de mettre en évidence les écarts numériques aux basses fréquences dûs à la condensation des matrices de transfert des couches solides avec la TMM. Ces écarts numériques ne sont également plus observés avec la sDGM, dont la réponse recolle encore une fois avec celle obtenue par la hDGM.

VI Conclusion

De manière analogue au chapitre précédent, ce chapitre a permis de préciser les bases théoriques relatives à la méthode par matrices de transfert afin de l'appliquer à une structure multicouche lisse excitée par onde plane incidente.

En particulier, les instabilités numériques suivantes ont été mises en évidence :

- En hautes fréquences d'une part, il a été montré que l'instabilité de la solution du système de Stroh résolu dans chaque sous-couche élémentaire entraînait un écart sur la réponse d'antenne quand la procédure d'assemblage classique était employée.
- Aux basses fréquences d'autre part, dans le cas de la prise en compte d'une couche fluide intermédiaire. La condensation des matrices solides rend alors le produit matriciel non consistant pour assembler le multicouche.

Pour contourner ces deux obstacles, on s'est inspiré du formalisme développé pour la méthode par matrice globale présentée au chapitre 2 en proposant une méthode matricielle conservant pour inconnues du problème tous les vecteurs d'état évalués aux interfaces inférieures de chaque couche. Cette nouvelle procédure d'assemblage ne condense plus le nombre d'équations et d'inconnues du système à résoudre à l'inverse de la TMM classique, et apporte un gain substantiel en termes de stabilité numérique, et par conséquent étend considérablement la plage de fonctionnement de la méthode. Par ailleurs, alors que la hDGM présentée au chapitre 2 n'était limitée qu'aux matériaux isotropes, la méthode proposée qui s'adapte désormais aussi bien que la hDGM à la gestion de couches fluides intermédiaires, permet également la prise en compte de matériaux plus complexes, à savoir les couches solides d'anisotropie quelconque.

Chapitre 4

Couplage du système multicouche au réseau de raidisseurs

Ce chapitre a pour rôle de présenter le formalisme employé pour le couplage de la structure multicouche aux renforts internes axisymétriques uniformément espacés.

Une approche par sous-structuration du système multicouche raidi est adoptée, qui décompose celui-ci en deux sous-systèmes distincts :

- D'une part le système multicouche (SS1) couplé aux milieux fluides intérieur et extérieur ;
- D'autre part le réseau de renforts internes (SS2).

Le principe de superposition pour les systèmes linéaires sera appliqué pour assembler les deux sous-systèmes, ainsi la réponse à l'onde plane du cylindre multicouche raidi sera déterminée par sommation des réponses de la coque lisse respectivement à l'excitation par onde plane et à la réaction du réseau de raidisseurs. En particulier le comportement vibratoire de la coque multicouche sera caractérisé par une matrice d'admittances calculée à partir des modèles développés aux chapitres 2 et 3. Par ailleurs, chaque renfort interne du réseau périodique est caractérisé par une matrice de raideur dynamique évaluée par méthode éléments finis en s'appuyant sur la théorie de coque mince. Le formalisme pour le couplage de la coque multicouche au réseau périodique de raidisseurs est une méthode spectrale, basée sur la formule sommatoire de Poisson.

I Modèle retenu pour la structure multicouche raidie

On considère désormais la structure multicouche raidie par le réseau de renforts internes axisymétriques.

Les hypothèses suivantes sont formulées :

- La coque cylindrique multicouche est toujours supposée de longueur infinie suivant son axe. On reprend ici les hypothèses des modèles développés aux chapitres 2 et 3.
- Le réseau de renforts internes est supposé périodique et infini suivant l'axe de la coque.
- Chaque raidisseur du réseau est supposé identique, axisymétrique et couplé rigidement au cylindre multicouche au niveau de sa surface interne, de rayon r_0 .

Sous ces hypothèses, un schéma de la structure multicouche raidie excitée par l'onde plane incidente est représenté à nouveau en Fig. 4.1 :

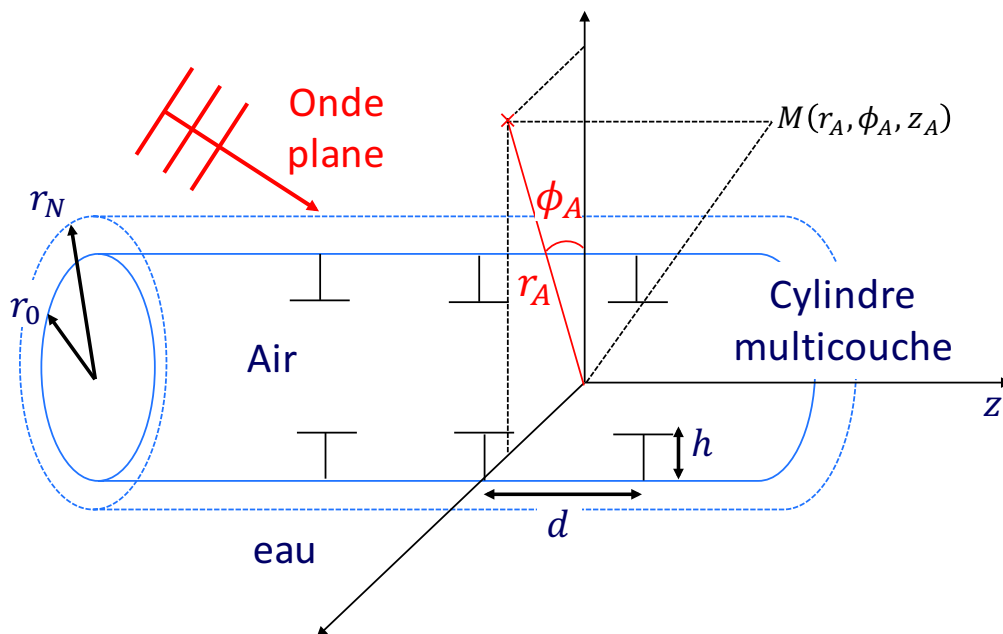


FIGURE 4.1 – Structure multicouche cylindrique couplée au réseau périodique de renforts internes

Le capteur ponctuel situé au point M est toujours repéré par ses coordonnées (r_A, ϕ_A, z_A) . On détaillera le calcul de la réponse en signal du capteur pour ce cas particulier de capteur à la fin de ce chapitre.

II Approche par sous-structuration et principe de superposition

Une approche classique de sous-structuration est employée pour décomposer le problème d'une structure multicouche raidie semblable à celle de la Fig. 4.1 [110, 131].

On décompose celle-ci en deux sous-systèmes distincts :

- D'une part, la structure multicouche lisse couplée aux milieux fluides, qu'on désignera comme le sous-système 1 (SS1).
- D'autre part, le second sous-système, qui est le réseau périodique de raidisseurs axisymétriques (SS2).

Ce point de vue est illustré en Fig. 4.2 ci-dessous, où le système global est représenté à gauche, et les deux sous-systèmes SS1 et SS2 encadrés en vert sur les schémas du milieu et de droite :

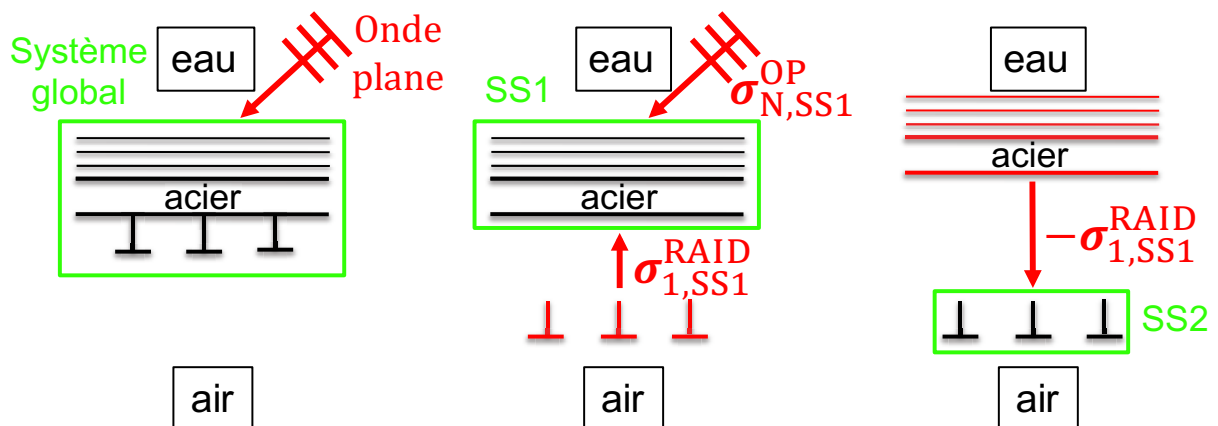


FIGURE 4.2 – Principe de superposition et sous-structuration du système

On applique alors le principe de superposition des réponses des systèmes linéaires

passifs à différentes excitations. Pour le sous-système 1, on en déduit que la réponse de la structure raidie peut s'obtenir par sommation des réponses de SS1 aux différentes excitations auxquelles il est soumis :

- L'excitation due à l'onde plane incidente
- La réaction appliquée par le réseau de raidisseurs, c'est-à-dire par le sous-système 2.

La première est une excitation externe au système global, dont le champ de contraintes $\sigma_{N,SS1}^{OP} = -\mathbf{P}_b$ est purement radial et sa norme égale à l'opposé de la pression bloquée. La seconde excitation représente au contraire un effort interne du sous-système 2 sur le sous-système 1, représenté par le champ de contraintes $\sigma_{1,SS1}^{RAID}$. Pour ce dernier, le principe des actions réciproques permet d'écrire qu'il est opposé au champ de contraintes appliquées par la structure multicouche sur le réseau de raidisseurs, aux différents points d'attaches de celui-ci, de telle sorte qu'on a :

$$\sigma_{1,SS1}^{RAID} = -\sigma_{1,SS2}^{RAID} \quad (4.1)$$

Par ailleurs, les couplages aux interfaces extrémales avec les fluides interne et externe sont toujours considérés dans les calculs, par conséquent les champs de contraintes exercés sur le sous-système SS1 aux rayons interne et externe prennent la forme suivante dans le domaine spectral :

$$\begin{aligned} \sigma_1(r_0, n, \alpha) &= \sigma_{1,SS1}^{RAID} + [\mathbf{T}_f] \mathbf{u}_1(r_0, n, \alpha) \\ \sigma_N(r_N, n, \alpha) &= -\mathbf{P}_b(r_N, n, \alpha) - [\mathbf{T}_{fe}] \mathbf{u}_N(r_N, n, \alpha) \end{aligned} \quad (4.2)$$

en ayant repris les mêmes notations pour les matrices des impédances de chaque fluide qu'aux chapitres 2 et 3.

Le principe de superposition permet d'écrire le champ de déplacement au rayon interne du cylindre multicouche SS1 comme la somme des déplacements induits par les chargements imposés à ce système. Par ailleurs, comme la transformée de Fourier et la décomposition en série de Fourier sont toutes deux des opérations linéaires, on en déduit la relation dans le domaine spectral pour la solution en déplacements :

$$\mathbf{u}_1(r_0, n, \alpha) = \mathbf{u}_{1,SS1}^{OP}(r_0, n, \alpha) + \mathbf{u}_{1,SS1}^{RAID}(r_0, n, \alpha) \quad (4.3)$$

où $\mathbf{u}_{1,SS1}^{OP}$ et $\mathbf{u}_{1,SS1}^{RAID}$ sont respectivement les réponses en déplacement du sous-système SS1 au rayon interne r_0 à l'excitation par onde plane et à la réaction du réseau.

III Méthode de couplage : formalisme commun aux deux méthodes

On détaille la méthode pour déterminer la réponse du système SS1 aux 2 excitations (i.e l'excitation de l'onde plane et la réaction du réseau). Le formalisme présenté dans cette section pour coupler la structure multicouche au réseau périodique de raidisseurs axisymétriques reste commun aux deux méthodes hDGM et sDGM présentées aux chapitres 2 et 3. On explicite ensuite le champ de contraintes $\sigma_{1,SS1}^{RAID}$ dû au réseau de raidisseurs, après application du principe des actions réciproques, au moment de calculer la réponse du système SS2.

III.1 Réponse du sous-système SS1

Dans les deux chapitres précédents, on a établi à chaque fois un système matriciel global qui permettait de décrire la réponse du multicouche lisse. Dans le cas de la méthode par matrice globale (hDGM), ou celle de la méthode par matrices de transfert assemblée par matrice globale (sDGM), le formalisme suivant peut être commun aux deux approches :

$$[\mathbf{G}](n, \alpha)\{\mathbf{X}\}(n, \alpha) = \mathbf{E}(n, \alpha) \quad (4.4)$$

Le tableau (4.1) précise la taille du système matriciel assemblé suivant chacune des méthodes, en notant toujours n_s le nombre de couches solides et n_f le nombre de couches fluides :

Méthode	hDGM	sDGM
$[\mathbf{G}]$	$[\mathbf{G}]_{\text{hDGM}}$	$[\mathbf{G}]_{\text{sDGM}}$
$\{\mathbf{X}\}$	$\{\mathbf{C}\}$	$\{\mathbf{V}\}_{\text{GLOB}}$
$L_G = C_G$ (Taille du système)	$6 \times n_s + 2 \times (n_f + 2)$	$6 \times (n_s - n_f) + 2 \times n_f$

TABLE 4.1 – Identification des termes de (4.4)

Alors que la méthode hDGM résout le système pour les coefficients élémentaires $\{\mathbf{C}\}$ des ondes volumiques se propageant dans chaque couche, nécessitant la reconstruction des déplacements et contraintes à l'aide des matrices solide ou fluide, la méthode sDGM inverse un système matriciel pour obtenir directement les déplacements et contraintes aux interfaces inférieures de chaque couche de la structure.

Quant au second membre $\mathbf{E}(n, \alpha)$, il caractérise l'excitation appliquée sur le sous-système 1. Il est important de souligner qu'indépendamment de la méthode appliquée, la matrice globale $[\mathbf{G}]$ est indépendante de l'excitation, celle-ci étant entièrement imposée au second membre.

III.1.1 Réponse à l'onde plane incidente

La réponse à l'onde plane incidente a déjà été détaillée pour chacune des méthodes dans les chapitres 2 et 3.

Le couplage des fluides interne et externe étant déjà pris en compte dans les matrices globales assemblées pour chaque méthode, le second membre $\mathbf{E}^{\text{OP}}(n, \alpha)$ caractérisant l'excitation par onde plane ne contient que le terme de pression bloquée $p_b(r_N, n, \alpha)$ évaluée au rayon externe, à la ligne traduisant l'équation de continuité de la contrainte normale à cette cote (ligne $L_G - 4$ pour la hDGM, et $L_G - 2$ pour la sDGM).

Cette étape est la première du calcul, à savoir reconstruire la réponse du multicouche lisse, d'une part celle en déplacement au rayon interne $\mathbf{u}_{1, \text{SS1}}^{\text{OP}}(r_0, n, \alpha)$, mais également le spectre des contraintes au rayon d'antenne $\sigma_{j_A, \text{SS1}}^{\text{OP}}(r_A, n, \alpha)$, nécessaire pour la reconstruction du champ de pression à la cote capteur.

III.1.2 Réponse à la réaction du réseau de raidisseurs

Pour prendre en compte l'influence des raidisseurs, on ne peut procéder de la même manière pour déduire le champ de déplacements $\mathbf{u}_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha)$, c'est-à-dire en imposant la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha)$ au second membre du système (4.4).

En effet, cette dernière n'est pas à priori connue comme la pression bloquée de l'onde plane incidente. Il est donc nécessaire de caractériser le comportement vibratoire du sous-système 1 lorsque celui-ci est excité en effort à son rayon interne.

On définit la matrice des admittances $[\mathbf{R}]_{u_1\sigma_1}(\phi, z)$ qui caractérise la réponse en déplacement du système multicouche à son rayon interne r_0 pour une force appliquée à la même cote en $(\phi, z) = (0, 0)$. Comme le système multicouche est linéaire et invariant en translation suivant z et en rotation suivant ϕ , on peut en déduire la réponse en déplacement $\mathbf{u}_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, \phi, z)$ à la cote r_0 due à la réaction $\boldsymbol{\sigma}_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, \phi, z)$ du réseau de raidisseurs appliquée à la même cote :

$$\mathbf{u}_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, \phi, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} [\mathbf{R}]_{u_1\sigma_1}(\phi - \tilde{\phi}, z - \tilde{z}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, \tilde{\phi}, \tilde{z}) r_0 d\tilde{\phi} d\tilde{z} \quad (4.5)$$

Dans le domaine spectral, cette équation devient :

$$\mathbf{u}_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha) = [\mathbf{R}]_{u_1\sigma_1}(n, \alpha) \boldsymbol{\sigma}_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha) \quad (4.6)$$

La matrice des admittances est construite colonne par colonne en considérant trois excitations mécaniques dont générant un champ de contraintes unitaire dans le domaine spectral, appliquées au rayon interne du sous-système 1 et dirigées suivant les trois directions du repère cylindrique. Les champs de contraintes associés prennent l'expression suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_1^m(r_0, n, \alpha) = \mathbf{1} \cdot \mathbf{e}_m \quad (4.7)$$

avec \mathbf{e}_m représentant successivement les trois vecteurs de la base cylindrique \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_ϕ ou \mathbf{e}_z . Les trois cas d'excitation décrits par (4.7) correspondent à imposer au rayon interne soit la contrainte normale σ_{rr} , soit les contraintes de cisaillement $\sigma_{r\phi}$ ou σ_{rz} .

Les déplacements générés au rayon interne pour chaque cas sont construits en résolvant le système (4.4) pour le second membre \mathbf{E}^m imposé correspondant, et les couplages avec les

fluides interne et externe sont toujours considérés dans la matrice globale $[\mathbf{G}]$, comme dans le cas de l'excitation par onde plane incidente.

On note les trois déplacements au rayon interne générés pour chaque cas d'excitation respectivement par $\mathbf{u}_{1|\sigma_1^r}(r_0, n, \alpha)$, $\mathbf{u}_{1|\sigma_1^\phi}(r_0, n, \alpha)$, et $\mathbf{u}_{1|\sigma_1^z}(r_0, n, \alpha)$. Leur procédure d'obtention peut être représentée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_1^r \text{ imposé} &\longrightarrow [\mathbf{G}] \{ \mathbf{X} \} = \mathbf{E}^r \rightsquigarrow \mathbf{u}_{1|\sigma_1^r} \\ \sigma_1^\phi \text{ imposé} &\longrightarrow [\mathbf{G}] \{ \mathbf{X} \} = \mathbf{E}^\phi \rightsquigarrow \mathbf{u}_{1|\sigma_1^\phi} \\ \sigma_1^z \text{ imposé} &\longrightarrow [\mathbf{G}] \{ \mathbf{X} \} = \mathbf{E}^z \rightsquigarrow \mathbf{u}_{1|\sigma_1^z} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Chaque colonne de la matrice des admittances $[\mathbf{R}]_{\mathbf{u}_1\sigma_1}$ est alors construite par l'un des déplacements définis en (4.8) :

$$[\mathbf{R}]_{\mathbf{u}_1\sigma_1}(n, \alpha) = \left(\mathbf{u}_{1|\sigma_1^r} \middle| \mathbf{u}_{1|\sigma_1^\phi} \middle| \mathbf{u}_{1|\sigma_1^z} \right) \quad (4.9)$$

En appliquant le principe de superposition, la réponse en déplacement au rayon interne r_0 de la structure raidie s'obtient finalement par sommation des réponses de SS1 à l'excitation par onde plane d'une part, et à la réaction du réseau d'autre part :

$$\mathbf{u}_1(r_0, n, \alpha) = \mathbf{u}_{1,SS1}^{\text{OP}}(r_0, n, \alpha) + [\mathbf{R}]_{\mathbf{u}_1\sigma_1}(n, \alpha) \boldsymbol{\sigma}_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha) \quad (4.10)$$

Il reste désormais à expliciter le champ de contraintes appliqué par le réseau de raidisseurs, ce qui fait l'objet des deux sections suivantes.

III.2 Réponse du sous-système SS2

Dans cette section on détaille la manière d'expliciter la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{1,SS2}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha)$ exercée sur le réseau de raidisseurs par la coque multicouche.

La réaction des raidisseurs sur la structure multicouche sera déduite en appliquant simplement le principe des actions réciproques déjà énoncé en (4.1).

III.2.1 Géométrie retenue pour chaque raidisseur

Chaque raidisseur du réseau périodique couplé à la structure multicouche est supposé identique, et sa géométrie est la même que celle retenue par Maxit & Ginoux [103] en 2010. La section du raidisseur a une forme en « T », classique pour ce type de structures, et les dimensions de la section sont $300 \times 60 \text{ mm}^2/60 \times 300 \text{ mm}^2$, représentées en Fig. 4.3 ci-dessous :

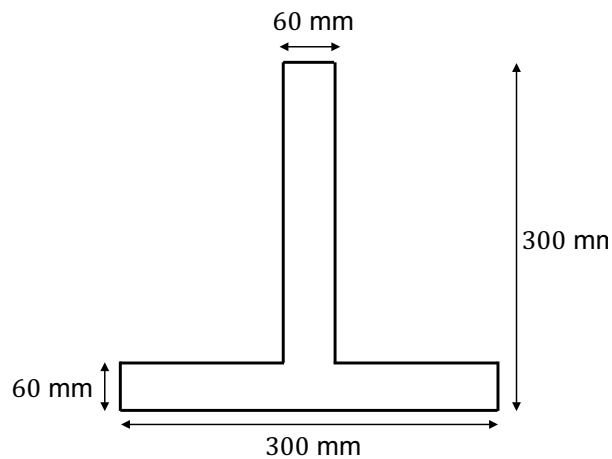


FIGURE 4.3 – Géométrie du raidisseur

III.2.2 Modélisation par éléments finis des raidisseurs

Chaque raidisseur est modélisé par éléments finis sous le logiciel COMSOL Multiphysics, à l'aide d'éléments coque. Le modèle coque mince employé réduit la géométrie de la Fig. 4.3 à sa fibre neutre, ce qui est représenté en Fig. 4.4 :

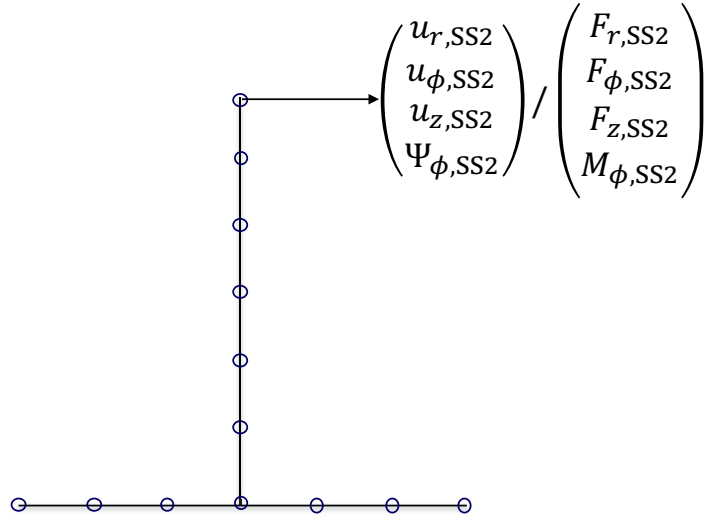


FIGURE 4.4 – Modélisation éléments finis du raidisseur

Par conséquent, la déformée tridimensionnelle de la section est prise en compte, et la cinématique comprend 4 degrés de liberté pour le raidisseur, à savoir les trois déplacements et la rotation autour de l'axe circonférentiel.

On définit la matrice de raideur dynamique $[\mathbf{B}(n)]$ caractérisant le comportement vibratoire de chaque raidisseur aux points d'attache $(r_0, z = qd)$ du réseau avec le cylindre multicouche :

$$[\mathbf{B}(n)] \begin{pmatrix} u_{r,SS2} \\ u_{\phi,SS2} \\ u_{z,SS2} \\ \Psi_{\phi,SS2} \end{pmatrix} (r_0, n, z = qd) = \begin{pmatrix} F_{r,SS2} \\ F_{\phi,SS2} \\ F_{z,SS2} \\ M_{\phi,SS2} \end{pmatrix} (r_0, n, z = qd) \quad (4.11)$$

où les efforts imposés dans (4.11) sont des forces par unité de longueur suivant la direction circonférentielle.

On a finalement, aux différents points d'attache $z = qd$ du réseau avec la structure

multicouche, le champ de contraintes suivant :

$$\begin{aligned}\sigma_{1,SS2}^{\text{RAID}}(r_0, n, z) &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} F_{z,SS2} \\ F_{\phi,SS2} \\ F_{r,SS2} \\ M_{\phi,SS2} \end{pmatrix} (r_0, n, z = qd) \delta(z - qd) \\ &= [\mathbf{B}(n)] \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_1(r_0, n, z = qd) \delta(z - qd)\end{aligned}\quad (4.12)$$

Les efforts par unité de longueur sont convertis en un effort par unité de surface par la fonction de Dirac qui a pour unité des $[m^{-1}]$. Ainsi, le chargement interne appliqué sur le réseau de raidisseurs est bien homogène à une force surfacique.

On notera également que le chargement du fluide interne est négligé lors du précalcul des matrices de raideur dynamique $[\mathbf{B}(n)]$, ce qui est justifié par le fait que la cavité ne contient qu'un fluide léger, à savoir de l'air.

Par ailleurs, ce précalcul éléments finis ne fait pas partie des développements numériques de cette étude. Les matrices de raideur dynamique caractérisant les raidisseurs ont été calculées par des routines internes propres à l'entreprise.

III.3 Couplage des deux sous-systèmes SS1 et SS2

III.3.1 Compatibilité des sous-systèmes

Le réseau périodique de raidisseurs introduit un 4^{ème} degré de liberté pour décrire la rotation autour de l'axe circonférentiel. Par conséquent, les sous-systèmes SS1 et SS2 ne sont pas compatibles. Il faut donc étendre les champs des déplacements et contraintes du sous-système SS1 aux jonctions de couplage avec le sous-système SS2. L'angle de rotation défini aux points d'attache de la coque avec le réseau, noté $\Psi_{\phi,SS2}$, vérifie la relation suivante :

$$\Psi_{\phi,SS2}(r_0, \phi, z) = \frac{\partial u_{r,SS2}}{\partial z}(r_0, \phi, z) \quad (4.13)$$

Par ailleurs, le moment par unité de surface $M_{\phi,SS2}$ qu'induit la rotation est supposée équivalente à une excitation mécanique agissant dans la direction radiale, d'expression

[54] :

$$F_{r,SS2}(r_0, \phi, z) = -\frac{\partial M_{\phi,SS2}}{\partial z}(r_0, \phi, z) \quad (4.14)$$

Par conséquent, les déplacements et les contraintes au rayon interne, ainsi que la matrice d'admittance $[\mathbf{R}]_{u_1\sigma_1}$ définie en (4.9), sont étendus à ce nouveau degré de liberté afin d'accomplir le couplage des sous-systèmes SS1 et SS2.

En utilisant les relations (4.13)-(4.14), on obtient pour la matrice $[\mathbf{R}]_{u_1\sigma_1}$ [54] :

$$[\mathbf{R}]_{u_1\sigma_1}(n, \alpha) = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

avec :

$$\begin{cases} R_{14}(n, \alpha) = -i\alpha R_{13}(n, \alpha), & R_{41}(n, \alpha) = i\alpha R_{31}(n, \alpha) \\ R_{24}(n, \alpha) = -i\alpha R_{23}(n, \alpha), & R_{42}(n, \alpha) = i\alpha R_{32}(n, \alpha) \\ R_{34}(n, \alpha) = -i\alpha R_{33}(n, \alpha), & R_{43}(n, \alpha) = i\alpha R_{33}(n, \alpha) \\ R_{44}(n, \alpha) = \alpha^2 R_{33}(n, \alpha) \end{cases}$$

On considérera désormais uniquement la forme de la matrice $[\mathbf{R}]_{u_1\sigma_1}$ étendue au 4^{ème} degré de liberté de rotation, et de même pour les déplacements et contraintes au rayon interne r_0 .

III.3.2 Force de réaction du réseau périodique sur le multicouche

La réaction interne exercée par le sous-système SS2 sur le sous-système SS1 est obtenue à partir de (4.12) en appliquant le principe des actions réciproques (4.1) :

$$\sigma_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, n, z) = -[\mathbf{B}(n)] \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_1(r_0, n, z = qd)\delta(z - qd) \quad (4.16)$$

La transformée de Fourier suivant l'axe de la coque entraînée pour le champ de contraintes spectral :

$$\sigma_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha) = -[\mathbf{B}(n)] \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_1(r_0, n, qd) e^{-i\alpha qd} \quad (4.17)$$

On a ensuite recours à la relation de Poisson :

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_1(r_0, n, qd) e^{-i\alpha qd} = \frac{1}{d} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_1\left(r_0, n, \alpha + \frac{2\pi q}{d}\right),$$

qui permet d'obtenir le champ de contraintes spectral dû au réseau de raidisseurs en fonction des déplacements spectraux dans la coque d'acier au rayon interne :

$$\boldsymbol{\sigma}_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha) = -\frac{1}{d} [\mathbf{B}(n)] \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_1\left(r_0, n, \alpha + \frac{2\pi q}{d}\right) \quad (4.18)$$

Par conséquent, en injectant l'équation (4.18) dans (4.10), on va pouvoir déterminer la quantité $\sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_1\left(r_0, n, \alpha + \frac{2\pi q}{d}\right)$ et ainsi déterminer la force de réaction du réseau.

En effet, on obtient dans un premier temps :

$$\mathbf{u}_1(r_0, n, \alpha) = \mathbf{u}_{1,SS1}^{\text{OP}}(r_0, n, \alpha) - \frac{1}{d} [\mathbf{R}]_{\mathbf{u}_1\sigma_1}(n, \alpha) [\mathbf{B}(n)] \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_1\left(r_0, n, \alpha + \frac{2\pi q}{d}\right) \quad (4.19)$$

Puis, comme l'équation (4.19) est valable sur tout le domaine spectral, on l'écrit en particulier pour tout nombre d'onde $\alpha_p = \alpha + \frac{2\pi p}{d}, p \in \mathbb{Z}$:

$$\mathbf{u}_1(r_0, n, \alpha_p) = \mathbf{u}_{1,SS1}^{\text{OP}}(r_0, n, \alpha_p) - \frac{1}{d} [\mathbf{R}]_{\mathbf{u}_1\sigma_1}(n, \alpha_p) [\mathbf{B}(n)] \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_1\left(r_0, n, \alpha_p + \frac{2\pi q}{d}\right) \quad (4.20)$$

En exploitant la relation de périodicité suivante :

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_1\left(r_0, n, \alpha + \frac{2\pi p}{d} + \frac{2\pi q}{d}\right) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_1\left(r_0, n, \alpha + \frac{2\pi q}{d}\right),$$

puis en sommant l'équation (4.20) sur tous les entiers relatifs $p \in \mathbb{Z}$, on détermine finalement la quantité $\sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_1(r_0, n, \alpha_q)$ (après réindexation $q \leftarrow p$) :

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_1(r_0, n, \alpha_q) = \left[[\mathbf{I}_4] + \frac{1}{d} \left\{ \sum_{q=-\infty}^{\infty} [\mathbf{R}]_{\mathbf{u}_1\sigma_1}(n, \alpha_q) \right\} [\mathbf{B}(n)] \right]^{-1} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_{1,SS1}^{\text{OP}}(r_0, n, \alpha_q) \quad (4.21)$$

L'équation (4.21) permet alors d'expliciter la relation (4.18) et d'établir l'expression

pour la force de réaction du réseau :

$$\sigma_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha) = -\frac{1}{d} [\mathbf{B}(n)] \left[[\mathbf{I}_4] + \frac{1}{d} \left\{ \sum_{q=-\infty}^{\infty} [\mathbf{R}]_{\mathbf{u}_1\sigma_1}(n, \alpha_q) \right\} [\mathbf{B}(n)] \right]^{-1} \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_{1,SS1}^{\text{OP}}(r_0, n, \alpha_q) \quad (4.22)$$

D'après l'équation (4.22), on remarque que le champ de contraintes exercé par le réseau de raidisseurs sur le multicouche dépend du pas inter-raideurs d , de la dynamique de chaque raidisseur caractérisée par les matrices de raideur $[\mathbf{B}(n)]$, et également du comportement vibratoire de la coque non raidie, par la quantité $\sum_{q=-\infty}^{\infty} [\mathbf{R}]_{\mathbf{u}_1\sigma_1}(n, \alpha_q)$.

Enfin, elle est également proportionnelle à la quantité $\sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_{1,SS1}^{\text{OP}}(r_0, n, \alpha_q)$, et par conséquent dépend de l'excitation extérieure qui s'exerce sur la structure raidie. Dans notre cas d'étude il s'agit de l'onde plane incidente, dont les spectres en déplacements ou en contraintes sont des pics de Dirac centrés autour du projeté suivant z du nombre d'onde incident noté α^i . Par conséquent, on va voir dans le paragraphe qui suit que le spectre des contraintes exercées par le réseau sera lui aussi discrétisé suivant un peigne de Dirac qui dépend du pas inter-raideurs.

III.3.3 Cas particulier de l'excitation par onde plane

L'excitation de la structure raidie par l'onde plane incidente conduit à la résolution du système (4.4) pour un second membre imposé de la forme suivante :

$$\mathbf{E}^{\text{OP}}(n, \alpha) = \tilde{\mathbf{E}}^{\text{OP}}(n) \delta(\alpha - \alpha^i), \quad (4.23)$$

En effet, d'après (2.27) le terme de pression bloquée introduit un pic de Dirac centré autour du projeté suivant z du nombre d'onde incident α^i de l'onde plane. Par conséquent l'inversion du système (4.4) conduit pour ce cas d'excitation à un vecteur inconnu $\{\mathbf{X}\}(n, \alpha)$ dont le spectre est non nul qu'au seul nombre d'onde incident :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{X}\}(n, \alpha) &= \{\tilde{\mathbf{X}}\}(n, \alpha) \delta(\alpha - \alpha^i) \\ \text{avec } \{\tilde{\mathbf{X}}\}(n, \alpha) &= [\mathbf{G}]^{-1}(n, \alpha) \tilde{\mathbf{E}}^{\text{OP}}(n). \end{aligned} \quad (4.24)$$

De même, le champ de déplacements $\mathbf{u}_{1,SS1}^{\text{OP}}(r_0, n, \alpha)$ dans la coque d'acier au rayon interne, qui s'obtient à partir du vecteur inconnu $\{\mathbf{X}\}(n, \alpha)$ indépendamment de la méthode hDGM

et sDGM choisie, vérifie une expression similaire :

$$\mathbf{u}_{1,SS1}^{\text{OP}}(r_0, n, \alpha) = \tilde{\mathbf{u}}_{1,SS1}^{\text{OP}}(r_0, n, \alpha)\delta(\alpha - \alpha^i)$$

Ainsi, le spectre des contraintes exercées par le réseau sur le multicouche et donné par l'équation (4.22) n'est pas continu dans le cas d'excitation par onde plane, et prend la forme suivante :

$$\sigma_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \tilde{\sigma}_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha, q)\delta(\alpha_q - \alpha^i) \quad (4.25)$$

$$\text{avec } \tilde{\sigma}_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha, q) = -\frac{1}{d} [\mathbf{B}(n)] \left[[\mathbf{I}_4] + \frac{1}{d} \left\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} [\mathbf{R}]_{u_1\sigma_1} \left(n, \alpha + \frac{2\pi p}{d} \right) \right\} [\mathbf{B}(n)] \right]^{-1} \times \tilde{\mathbf{u}}_{1,SS1}^{\text{OP}}(r_0, n, \alpha + \frac{2\pi q}{d})$$

D'après l'équation (4.25), et lorsque la structure est excitée par une onde plane incidente, on remarque que le spectre des contraintes spectrales dues à l'action des renforts a la forme d'un peigne de Dirac pondérée par la fonction $\tilde{\sigma}_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha, q)$. Les seuls nombres d'onde contribuant à la réponse de la structure raidie excitée par une onde plane incidente sont par conséquent la famille d'alias du projeté suivant z du nombre d'onde incident, ou harmoniques spatiales, notées α_q^i et définies comme suit :

$$\alpha_q^i = \alpha^i + \frac{2\pi q}{d}, q \in \mathbb{Z}$$

III.4 Calcul du champ de pression au rayon d'antenne

III.4.1 Spectre du champ de contraintes au rayon d'antenne

Pour déterminer le spectre du champ de contraintes au rayon d'antenne r_A , on applique une fois de plus le principe de superposition en considérant les spectres des contraintes exercées sur le sous-système SS1 par l'onde plane d'une part, et par le réseau de raidisseurs d'autre part :

$$\sigma_{j_A}(r_A, n, \alpha) = \sigma_{j_A,SS1}^{\text{OP}}(r_A, n, \alpha) + \sigma_{j_A,SS1}^{\text{RAID}}(r_A, n, \alpha) \quad (4.26)$$

On explicite ci-dessous chacune des deux contributions $\sigma_{j_A,SS1}^{\text{OP}}$ et $\sigma_{j_A,SS1}^{\text{RAID}}$ dans le cas d'excitation par onde plane de la structure raidie.

III.4.1.1 Contribution de l'onde plane

La contribution au champ de contraintes au rayon d'antenne r_A due à l'excitation par onde plane s'obtient lors de la résolution du système (4.4) pour le second membre imposé de la forme donnée par (4.23). De manière similaire au champ de déplacements calculé au rayon interne, le spectre du champ de contraintes $\sigma_{j_A,SS1}^{OP}$ au rayon d'antenne prend la forme d'un pic de Dirac centré autour du projeté suivant z du nombre d'onde incident α^i :

$$\sigma_{j_A,SS1}^{OP}(r_A, n, \alpha) = \tilde{\sigma}_{j_A,SS1}^{OP}(r_A, n, \alpha) \delta(\alpha - \alpha^i) \quad (4.27)$$

III.4.1.2 Contribution des renforts internes

Pour calculer la contribution au champ de contraintes au rayon d'antenne r_A due à la réaction du réseau de raidisseurs, il faut considérer à nouveau une excitation mécanique quelconque appliquée au rayon interne r_0 , mais caractériser cette fois-ci la réponse du sous-système SS1 non plus en déplacements au rayon interne, mais en contraintes au rayon d'antenne.

Par conséquent, lors de la construction de la matrice d'admittances $[\mathbf{R}]_{u_1\sigma_1}$ en excitant le sous-système SS1 par 3 excitations mécaniques unitaires, on établit également l'expression d'une matrice d'admittances croisées pour les contraintes au rayon d'antenne, notée $[\mathbf{R}]_{\sigma_{j_A}\sigma_1}$, et définie comme suit :

$$[\mathbf{R}]_{\sigma_{j_A}\sigma_1}(n, \alpha) = \left(\sigma_{j_A|\sigma_1^r} \left| \sigma_{j_A|\sigma_1^\phi} \right| \sigma_{j_A|\sigma_1^z} \right) \quad (4.28)$$

où $\sigma_{j_A|\sigma_1^r}(r_A, n, \alpha)$, $\sigma_{j_A|\sigma_1^\phi}(r_A, n, \alpha)$, et $\sigma_{j_A|\sigma_1^z}(r_A, n, \alpha)$ sont les champs de contraintes spectraux au rayon d'antenne en réponse à chaque excitation mécanique unitaire appliquée au rayon interne. On souligne que le calcul de cette seconde matrice d'admittances ne prend que très peu de temps numériquement étant donné les calculs hDGM ou sDGM déjà effectués pour calculer la matrice $[\mathbf{R}]_{u_1\sigma_1}$.

Ainsi, le spectre du champ de contraintes au rayon d'antenne due à la réaction du réseau s'obtient par le produit du champ de contraintes $\sigma_{1,SS1}^{RAID}$ au rayon interne par la matrice de

cross-admittance $[\mathbf{R}]_{\sigma_{j_A}\sigma_1}$:

$$\sigma_{j_A,SS1}^{\text{RAID}}(r_A, n, \alpha) = [\mathbf{R}]_{\sigma_{j_A}\sigma_1}(n, \alpha)\sigma_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha) \quad (4.29)$$

D'après l'équation (4.25), on peut à nouveau établir une expression en peigne de Dirac pour le spectre des contraintes $\sigma_{j_A,SS1}^{\text{RAID}}$:

$$\sigma_{j_A,SS1}^{\text{RAID}}(r_A, n, \alpha) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \tilde{\sigma}_{j_A,SS1}^{\text{RAID}}(r_A, n, \alpha, q)\delta(\alpha_q - \alpha^i) \quad (4.30)$$

$$\text{avec } \tilde{\sigma}_{j_A,SS1}^{\text{RAID}}(r_A, n, \alpha, q) = [\mathbf{R}]_{\sigma_{j_A}\sigma_1}(n, \alpha)\tilde{\sigma}_{1,SS1}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha, q)$$

III.4.2 Reconstruction dans le domaine physique

Le champ de contraintes au rayon d'antenne, nécessaire pour tracer la réponse en signal du capteur se déduit du spectre des contraintes à la même cote par transformée de Fourier inverse et reconstruction modale.

Pour un capteur ponctuel situé au point de coordonnées (r_A, ϕ_A, z_A) , le champ de contrainte normale est obtenu à partir du champ de contraintes reconstruit dans l'espace physique :

$$\sigma_{j_A}(r_A, \phi_A, z_A) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\phi_A} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{j_A}(r_A, n, \alpha) e^{i\alpha z_A} d\alpha \quad (4.31)$$

En exploitant le principe de superposition et les expressions (4.27) et (4.30), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{j_A}(r_A, n, \alpha) e^{i\alpha z_A} d\alpha &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{j_A,SS1}^{\text{OP}}(r_A, n, \alpha) e^{i\alpha z_A} d\alpha + \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{j_A,SS1}^{\text{RAID}}(r_A, n, \alpha) e^{i\alpha z_A} d\alpha \\ &= \tilde{\sigma}_{j_A,SS1}^{\text{OP}}(r_A, n, \alpha^i) e^{i\alpha^i z_A} + \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{j_A,SS1}^{\text{RAID}}(r_A, n, \alpha) e^{i\alpha z_A} d\alpha \end{aligned} \quad (4.32)$$

où la contribution due à l'onde plane est explicitée immédiatement car est non nulle uniquement au nombre d'onde incident α^i . En utilisant l'équation (4.30), la contribution

des renforts internes peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{j_A, \text{SS1}}^{\text{RAID}}(r_A, n, \alpha) e^{i\alpha z_A} d\alpha \\
 &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{R}]_{\sigma_{j_A} \sigma_1}(n, \alpha) \tilde{\sigma}_{1, \text{SS1}}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha, q) e^{i\alpha z_A} \delta\left(\alpha + \frac{2\pi q}{d} - \alpha^i\right) d\alpha \\
 &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} [\mathbf{R}]_{\sigma_{j_A} \sigma_1}\left(n, \alpha^i - \frac{2\pi q}{d}\right) \tilde{\sigma}_{1, \text{SS1}}^{\text{RAID}}\left(r_0, n, \alpha^i - \frac{2\pi q}{d}, q\right) e^{i\left(\alpha^i - \frac{2\pi q}{d}\right) z_A} \\
 & \stackrel{(q \leftarrow -q)}{=} \sum_{q=-\infty}^{\infty} [\mathbf{R}]_{\sigma_{j_A} \sigma_1}\left(n, \alpha^i + \frac{2\pi q}{d}\right) \tilde{\sigma}_{1, \text{SS1}}^{\text{RAID}}\left(r_0, n, \alpha^i + \frac{2\pi q}{d}, -q\right) e^{i\left(\alpha^i + \frac{2\pi q}{d}\right) z_A} \\
 &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} [\mathbf{R}]_{\sigma_{j_A} \sigma_1}\left(n, \alpha_q^i\right) \tilde{\sigma}_{1, \text{SS1}}^{\text{RAID}}\left(r_0, n, \alpha_q^i, 0\right) e^{i\alpha_q^i z_A}
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Pour établir que $\tilde{\sigma}_{1, \text{SS1}}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha^i + \frac{2\pi q}{d}, -q) = \tilde{\sigma}_{1, \text{SS1}}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha^i, 0)$, on a à nouveau utilisé une relation de périodicité dans l'expression (4.25) pour simplifier :

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} [\mathbf{R}]_{u_1 \sigma_1}\left(n, \alpha^i + \frac{2\pi p}{d} + \frac{2\pi q}{d}\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} [\mathbf{R}]_{u_1 \sigma_1}\left(n, \alpha^i + \frac{2\pi p}{d}\right)$$

On a alors pour la réponse en signal du capteur :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{j_A}(r_A, \phi_A, z_A) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\sigma}_{j_A, \text{SS1}}^{\text{OP}}(r_A, n, \alpha^i) e^{i(n\phi_A + \alpha^i z_A)} \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} [\mathbf{R}]_{\sigma_{j_A} \sigma_1}(n, \alpha_q^i) \tilde{\sigma}_{1, \text{SS1}}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha_q^i, 0) e^{i(n\phi_A + \alpha_q^i z_A)}
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\text{avec } \tilde{\sigma}_{1, \text{SS1}}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha^i, 0) = -\frac{1}{d} [\mathbf{B}(n)] \left[[\mathbf{I}_4] + \frac{1}{d} \left\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} [\mathbf{R}]_{u_1 \sigma_1}(n, \alpha_p^i) \right\} [\mathbf{B}(n)] \right]^{-1} \tilde{\mathbf{u}}_{1, \text{SS1}}^{\text{OP}}(r_0, n, \alpha^i)$$

IV Conclusion

Ce chapitre a exposé un formalisme commun pour les deux méthodes hDGM et sDGM retenues pour la modélisation de la structure multicouche, qui permet le couplage de la structure au réseau périodique de renforts internes.

Les différentes étapes du calcul sont les suivantes :

1. Calcul des matrices $[\mathbf{R}]_{u_1\sigma_1}$ et $[\mathbf{R}]_{\sigma_{jA}\sigma_1}$ des admittances du multicouche cylindrique, pour les couples (n, α_p^i) à partir des méthodes hDGM ou sDGM.
2. Calcul des matrices $[\mathbf{B}(n)]$ de raideur dynamique caractérisant la dynamique des raidisseurs par éléments finis
3. Reconstruction de la réponse en signal du capteur dans l'espace physique à partir de l'équation (4.34).

En pratique, les sommes indicées par p et q dans cette équation (4.34) sont tronquées à un certain entier Q . On étudiera la convergence de cette série lors des applications numériques détaillées au chapitre 5.

Les considérations qui précèdent pour le couplage de la structure multicouche avec le réseau périodique de raidisseurs clôturent le formalisme établi pour les modèles développés. Ceux-ci sont validés numériquement et appliqués à différents cas tests au chapitre suivant.

Chapitre 5

Validation numérique des modèles

Ce chapitre est consacré à la validation des modèles développés au cours des chapitres précédents pour le calcul de la réponse en champ proche de la structure multicouche lisse ou raidie excitée par une onde plane incidente.

Afin de mieux appréhender les phénomènes observés sur les réponses en signal obtenues pour les configurations de validation, on présente dans un premier temps les réponses en signal obtenues sous l'hypothèse de *géométrie plane*. Ces premiers résultats sont l'occasion d'illustrer la physique en jeu dans le problème de *réponse en signal* de l'antenne, dont la compréhension est cruciale à l'architecture navale et à la conception de la coque du sous-marin.

Dans un second temps, on cherche à valider les modèles développés pour les configurations cylindriques multicouches, par validation croisée des méthodes hDGM et sDGM d'une part, et en les confrontant à des résultats obtenus par des méthodes éléments finis d'autre part.

Dans une 3^{ème} partie, on présente les réponses signal en champ proche de ces structures cylindriques multicouches couplées à une configuration de référence retenue pour le réseau de raidisseurs, en fixant la distance inter-raisseurs. Tout d'abord, un nouveau type d'instabilités numériques lié à la présence des renforts internes sera mis en évidence. On proposera une méthode simple pour les contourner. Puis une étude paramétrique suivra afin de discuter de la convergence numérique des série numériques intervenant dans le

calcul de la réponse en signal, et induite par la présence des raidisseurs. Par ailleurs, on comparera certaines des configurations de validation raidies à des calculs éléments finis complets. Enfin, on mettra en relief l'influence du réseau de raidisseurs en comparant les réponses des configurations raidies à celles des configurations lisses.

I Réponse en signal des structures lisses en géométrie plane

On présente dans cette section les réponses en signal obtenues avec un modèle multicouche supposant la géométrie plane, pour les configurations de plaques dérivées des configurations cylindriques présentées aux chapitres 2 et 3. L'outil utilisé dans cette section n'a pas fait l'objet de développements durant cette étude. Il s'appuie également sur une méthode spectrale effectuant une décomposition de Helmholtz du champ de déplacements, suivie d'un assemblage matriciel par matrice globale. On pourra se référer à plusieurs auteurs pour les détails de cette méthode, notamment Schmidt et Jensen [62] ou encore Knopoff [61]. La différence majeure avec le cas cylindrique est l'absence des instabilités numériques liées à la géométrie dont on a discuté au chapitre 2, et qui surviennent avec l'introduction des fonctions de Bessel. La nomenclature employée pour les 8 configurations (sans/avec dôme CVR) est rappelée ci-dessous, le suffixe **p** rappelant la géométrie plane pour les distinguer des configurations cylindriques :

- Configuration **N_p/ND_p** :

La plaque d'acier d'épaisseur 60 mm est laissée nue, et le capteur d'antenne est placé dans l'eau à une distance $d = 40$ mm de la plaque.

- Configuration **NTF0_p/NTD0_p** :

La plaque d'acier est surmontée d'une matrice de polyuréthane (notée PU) d'épaisseur 100 mm, et les capteurs d'antenne sont enfouis dans celle-ci, à la même distance $d = 40$ mm que pour la configuration **N_p**.

- Configuration **RATF0_p/RATD0_p** :

La plaque d'acier est surmontée d'un matériau anéchoïque d'épaisseur 100 mm,

lui-même recouvert par une matrice PU d'épaisseur 100 mm. Le capteur d'antenne est enfoui dans la matrice PU, à une distance $d = 40$ mm de la surface du matériau anéchoïque.

- Configuration **RMTF0p/RMTD0p** :

On remplace le matériau anéchoïque de la configuration précédente par un matériau de masquage de même épaisseur. Les capteurs d'antenne sont enfouis dans la matrice PU à la même cote.

On notera $Z = \rho c$ les différentes impédances pour chaque milieu, produit de la masse volumique ρ par la célérité des ondes de compression c .

I.1 Plaque épaisse multicouche et modèle simplifié

Les deux milieux englobant le multicouche plan, occupés par l'air et l'eau, sont supposés semi-infinis. La plaque épaisse multicouche est présentée sur la Fig. 5.1a, tandis qu'un modèle simplifié de plaque multicouche, qui sera exploité pour l'interprétation, est représenté conjointement en Fig. 5.1b. Celui-ci est constitué d'un réflecteur idéal surmonté d'un matériau de revêtement, et sera utile pour mieux appréhender les phénomènes observés sur les réponses signal obtenues. La dimension x désigne la variable d'épaisseur de la plaque multicouche, et l'origine de l'axe associé est fixée à l'interface entre le matériau de revêtement et le PU.

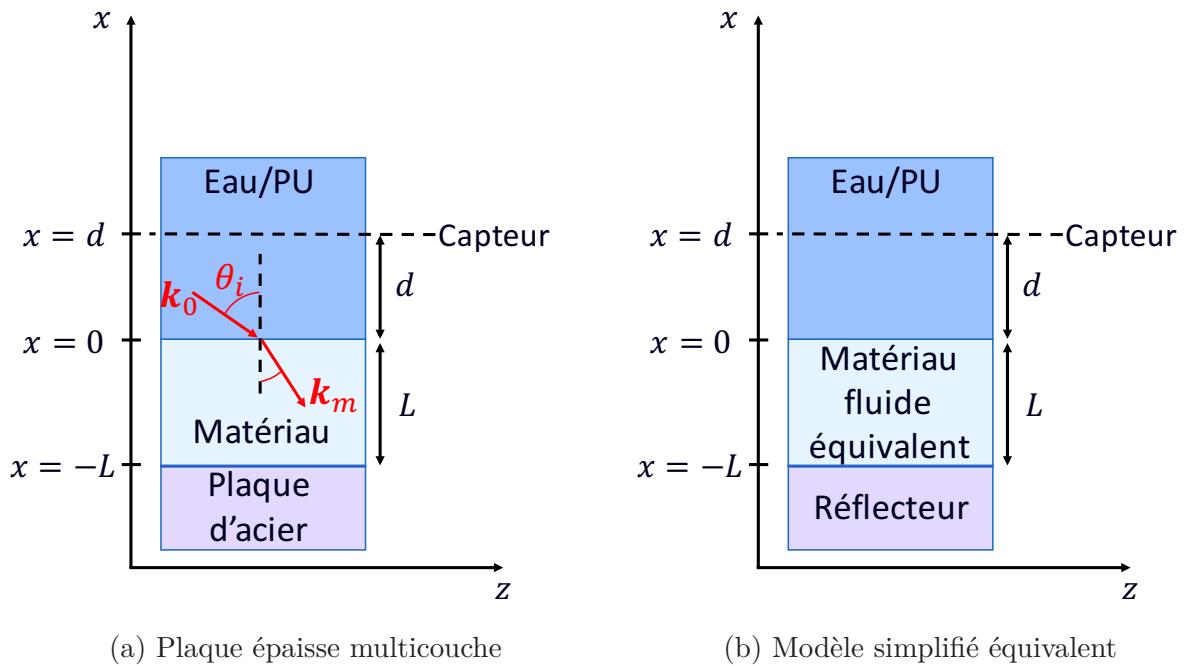


FIGURE 5.1 – Plaque multicouche (à gauche), et modèle simplifié (à droite)

Le multicouche plan est excité par une onde plane d'angle d'incidence θ_i avec la normale et de fréquence angulaire ω , se propageant dans le milieu de propagation extérieur rempli par de l'eau. La matrice de polyuréthane recouvrant les matériaux de revêtement des configurations revêtues sera dans tout ce qui suit supposée transparente, laissant ainsi toute l'énergie de l'onde incidente être transmise sans réflexion à l'interface eau-PU. Cette hypothèse est justifiée par le fait que le PU a une impédance très proche de celle de l'eau ($\frac{Z_{PU}}{Z_{eau}} = 1,17$), et présente un amortissement assez faible sur ses deux célérités. Ainsi, on pourra le considérer en 1^{ère} approximation comme transparent sur toute la gamme de fréquence étudiée dans les interprétations qui vont suivre.

Par conséquent, le nombre d'onde acoustique incident \mathbf{k}_0 reste inchangé dans la couche de PU jusqu'à l'interface avec le matériau de revêtement (anéchoïque ou masquage), et le vecteur d'onde transmis alors dans celui-ci est noté \mathbf{k}_m . On notera respectivement γ_x et γ_x^m les projetés de ces deux nombres d'onde suivant l'axe x , qui vérifient :

$$\begin{aligned}\gamma_x &= \frac{\omega}{c_L^{eau}} \cos \theta_i \\ \gamma_x^m &= \frac{\omega}{c_L^m} \cos \theta_m\end{aligned}\tag{5.1}$$

où c_L^{eau} et c_L^m désignent respectivement les célérités des ondes de compression dans l'eau et le matériau de revêtement, et θ_m l'angle entre la normale au multicouche et le vecteur d'onde transmis dans le matériau de revêtement.

Enfin, la variable d repère toujours la distance du capteur soit à la surface du matériau de revêtement pour les configurations avec matériau de revêtement (anéchoïque ou masquage), soit à la plaque d'acier pour les configurations sans matériau de revêtement. Le matériau est supposé homogène élastique isotrope d'épaisseur L , et on repérera dans la suite le capteur par le couple (L, d) , exprimé en mm. On fait pour le modèle simplifié l'hypothèse très simplificatrice que seuls les modes de traction-compression se propagent dans le matériau, ce qui revient à le considérer comme un fluide équivalent pour le cas d'incidence oblique.

Deux phénomènes principaux surviennent lors de l'excitation de l'ensemble plaque d'acier-matériau par une onde plane incidente, dont le modèle simplifié réflecteur-matériau va faciliter l'interprétation :

- D'une part les interférences dues au déphasage entre l'onde incidente et l'onde réfléchie sur le réflecteur.
- D'autre part les modes d'épaisseur générés dans le revêtement surmontant le réflecteur et qui se traduisent par des zéros et des maxima de pression suivant l'épaisseur de la couche de matériau. Les fréquences de ces zéros et maxima de pression vont dépendre de la célérité des ondes dans le matériau.

I.2 Modèle simplifié : cas d'un réflecteur idéal

Le modèle simplifié introduit en Fig. 5.1b permet de raisonner sur deux cas limites de réflecteur idéal :

- Un réflecteur parfaitement rigide ($Z_{\text{réflecteur}} \rightarrow +\infty$), à la surface duquel le déplacement normal u est supposé nul.

- Un réflecteur parfaitement mou ($Z_{\text{réflecteur}} \rightarrow 0$), à la surface duquel la pression p est supposée nulle.

Ainsi, par continuité du déplacement normal et du champ de pression, on a dans chaque cas les conditions à la limite suivantes dans le matériau de revêtement :

$$\begin{aligned} \text{Réflecteur dur} : \rightsquigarrow u_m(z = -L) &= 0 \\ \text{Réflecteur mou} : \rightsquigarrow p_m(z = -L) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

On détaille dans ce qui suit l'expression du champ de pression dans les deux cas de réflecteur, puis on discute des phénomènes d'interférences destructives et de modes d'épaisseur.

I.2.1 Calcul du champ de pression

Tous calculs faits, le champ de pression généré pour une cote capteur $x = d$ prend les expressions suivantes dans chaque cas de réflecteur idéal, en notant A_0 l'amplitude de l'onde incidente :

$$\begin{aligned} p_{\text{dur}} &= 2 \frac{Z_m \cos k_z^m L \cos k_z d - Z_0 \sin k_z^m L \sin k_z d}{Z_m \cos k_z^m L + j Z_0 \sin k_z^m L} A_0 \\ p_{\text{mou}} &= 2j \frac{Z_0 \cos k_z^m L \sin k_z d + Z_m \sin k_z^m L \cos k_z d}{Z_0 \cos k_z^m L + j Z_m \sin k_z^m L} A_0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

en notant p_{dur} et p_{mou} les pressions calculées respectivement dans le cas d'un réflecteur idéal parfaitement rigide ou parfaitement mou. En l'absence de matériau de revêtement ($L = 0$), les expressions du champ de pression dans l'eau (qui peuvent être utilisées en première approximation également pour les configurations **NTF0** ou **NTD0**) se déduisent également de l'équation (5.3) pour un capteur situé à une distance d de la plaque :

$$\begin{aligned} p_{\text{dur}}^{\text{nue}} &= 2 \cos(\gamma_x d) e^{-j\gamma_x d} A_0 \\ p_{\text{mou}}^{\text{nue}} &= 2j \sin(\gamma_x d) e^{-j\gamma_x d} A_0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

I.2.2 Modes d'épaisseur et interférences destructives

Les équations (5.3) permettent également de prévoir les fréquences f_n des zéros de pression (i.e $p = 0$) pour les deux types de réflecteur idéal, dans le cas simple où $d = 0$, i.e lorsque le capteur est placé à la surface du matériau de revêtement. De plus, on fait

une hypothèse de matériau conservatif, i.e on néglige l'amortissement. Tous calculs faits, on obtient l'expression suivante, en fonction du projeté α^i du nombre d'onde incident \mathbf{k}_0 suivant l'axe z de la plaque :

$$f_n(\alpha^i) = \sqrt{f_n(0)^2 + \left(\frac{\alpha^i c_L^m}{2\pi}\right)^2},$$

$$\text{avec : } f_n(0) = \begin{cases} \frac{(1+2n)c_L^m}{4L} & \forall n \in \mathbb{N} \text{ si réflecteur dur} \\ \frac{nc_L^m}{2L} & \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ si réflecteur mou} \end{cases} \quad (5.5)$$

Ces conditions correspondent à des modes d'épaisseur dans le revêtement, générant une pression nulle à sa surface. La localisation des zéros de pression est renseignée à chaque ordre n par la fréquence f_n d'apparition du trou, qui est minimale en incidence normale ($\alpha^i = 0$), et donnée par la quantité $f_n(0)$. Cette dernière est d'autant plus basse que la célérité du matériau est faible. De plus, la densité de zéros dans une bande donnée est d'autant plus importante que la célérité du matériau est faible.

Dans la pratique, le matériau de revêtement est dissipatif. Les trous de pression observés ne sont pas des zéros parfaits, mais davantage des minima de pression, dont la profondeur est d'autant plus faible que l'amortissement est élevé, i.e la partie imaginaire de c_L^m .

À nouveau, les équations (5.4) permettent d'établir les fréquences pour les trous de pression successifs survenant à une cote capteur d décalée dans l'eau par rapport au réflecteur en l'absence de matériau de revêtement :

$$f_n(\alpha^i) = \sqrt{f_n(0)^2 + \left(\frac{\alpha^i c_L^{\text{eau}}}{2\pi}\right)^2}$$

$$\text{avec : } f_n(0) = \begin{cases} \frac{(1+2n)c_L^{\text{eau}}}{4d} & \forall n \in \mathbb{N} \text{ si réflecteur dur} \\ \frac{nc_L^{\text{eau}}}{2d} & \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ si réflecteur mou} \end{cases} \quad (5.6)$$

À titre d'illustration pour ce cas particulier, on trace en Fig. 5.2 le module du champ de pression en fonction de la fréquence, pour un capteur ponctuel situé à une distance $(L, d) = (0, 40)$ mm d'un réflecteur idéal laissé nu :

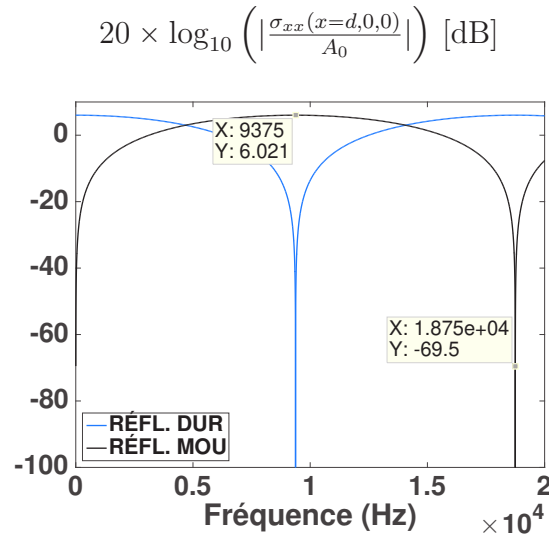


FIGURE 5.2 – Différences de comportement entre réflecteur parfaitement rigide (en noir) et parfaitement mou (en bleu)

Module du champ de pression en incidence normale

On constate le comportement prédit par les équations (5.4) et les formules (5.6) aux deux premières fréquences d'interférence pour chaque type de réflecteur idéal, à savoir $f_0^{\text{dur}} = 9375$ Hz et $f_1^{\text{mou}} = 18750$ Hz. Les pressions totales par les deux types de réflecteur idéal sont par ailleurs en quadrature de phase, i.e déphasées de $\frac{\pi}{2}$ à une même cote capteur.

I.3 Plaque multicouche : comportement de la plaque d'acier

L'acier a une impédance très supérieure à celle de l'eau ($\frac{Z_{\text{acier}}}{Z_{\text{eau}}} = 31$), et va donc se comporter au-delà d'une certaine fréquence comme un réflecteur parfaitement rigide. Il est donc utile à ce stade de déterminer dans quel régime de fréquence cette approximation sera valable, afin de pouvoir prédire les fréquences d'apparition des trous de pression observés sur les réponses signal des 4 configurations à l'aide des formules (5.5).

Le capteur ponctuel est placé momentanément sur la surface de la plaque d'acier nue, i.e de la configuration **Np** avec $(L, d) = (0, 0)$, et on observe sur la Fig. 5.3 les variations du module du champ de pression respectivement dans le plan *fréquence-nombre d'onde* α , où α désigne le nombre d'onde spectral suivant la dimension axiale de la coque. En se plaçant dans le plan (Oxz) , i.e en supposant $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{e}_y = 0$:

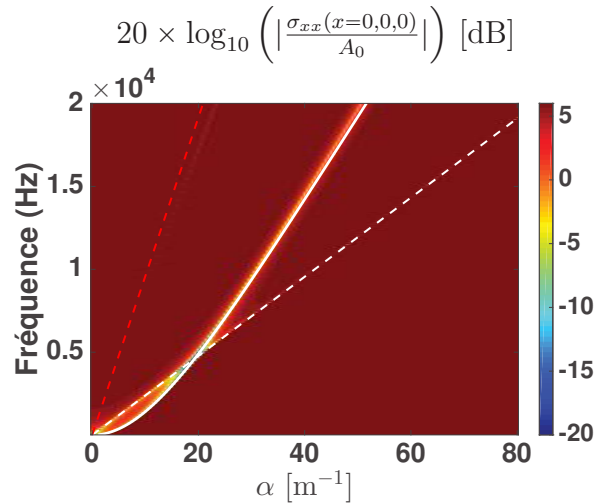


FIGURE 5.3 – Module du champ de pression pour un capteur ponctuel placé sur la surface de la plaque d’acier dans le plan *fréquence- α*

On constate à la Fig. 5.3 un gain proche de +6dB sur la réponse en signal quasiment partout dans le plan *fréquence- α* . Dans ces zones, la plaque peut donc être approximée par une surface parfaitement rigide où le déplacement du fluide s’annule, ce qui entraîne une pression doublée et le gain de +6dB observé. Néanmoins, il faut monter suffisamment haut en fréquence (environ 2-3 kHz), pour que la plaque d’acier puisse se comporter comme un baffle dur et ne soit pas transparente pour l’onde plane incidente.

De plus, on observe des niveaux plus faibles pour les nombres d’onde α correspondants au nombre d’onde naturel de flexion de la plaque supposée mince (surlignée en trait plein blanc), ou encore au nombre d’onde de compression dans l’acier (surligné en pointillés rouges). Les célérités de compression et de cisaillement ayant été supposées non dispersives pour tous les matériaux considérés, l’équation de dispersion pour la célérité de compression est une droite linéaire, d’équation $f = \frac{c_L^{\text{acier}} \alpha}{2\pi}$. Cette équation est valable *in vacuo*, et par conséquent la célérité prédite est légèrement plus rapide que celle mesurée numériquement, l’écart observé pouvant s’expliquer par un effet de masse ajoutée du fluide lourd exercé sur la plaque.

Quant à la coïncidence de flexion, celle-ci est prédite en trait plein blanc par l’équation de dispersion d’une plaque mince infinie *in vacuo* décrite avec la théorie de Mindlin, i.e en prenant en compte le cisaillement transverse. Pour ce modèle, le nombre d’onde de flexion

k_f^{Mindlin} vérifie [36, 132] :

$$k_f^{\text{Mindlin}} = \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{1}{(c_L^{\text{acier}})^2} + \frac{1}{(c_T^{\text{acier}})^2} \right) + \sqrt{k_f^{\text{Kirchhoff}} + \frac{\omega^2}{4} \left(\frac{1}{(c_L^{\text{acier}})^2} + \frac{1}{(c_T^{\text{acier}})^2} \right)} \quad (5.7)$$

où ω désigne la pulsation angulaire, c_L^{acier} et c_T^{acier} sont respectivement les célérités de compression et de cisaillement dans la plaque d'acier. Le nombre d'onde du mode de flexion $k_f^{\text{Kirchhoff}}$ est celui prédit par le modèle de Kirchhoff pour une plaque mince infinie en négligeant le cisaillement transverse, et vérifie [36, 132] :

$$(k_f^{\text{Kirchhoff}})^2 = \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$$

où h est l'épaisseur de la plaque mince d'acier, ρ sa masse volumique, D sa rigidité de flexion dans le vide.

On voit que le comportement en flexion de la plaque immergée est prédit correctement par l'équation (5.7), et qu'ici le couplage avec le fluide ne semble pas modifier sensiblement la courbe de dispersion.

De plus, la courbe de dispersion est dispersive et croise sur la Fig. 5.3 le domaine acoustique délimité par la droite en pointillés blanc d'équation $f = \frac{c_L^{\text{eau}} \alpha}{2\pi}$. Ce croisement détermine la fréquence critique f_c au-delà de laquelle la plaque vibrant en flexion rayonne efficacement dans le fluide extérieur.

I.4 Plaque multicouche sans matériau de revêtement : interférences destructives

On présente en Fig. 5.4a et Fig. 5.4b le module de la réponse en signal à la cote capteur pour les deux configurations **Np** et **NTF0p** dans le plan *fréquence*- α , en supposant toujours k_y nul :

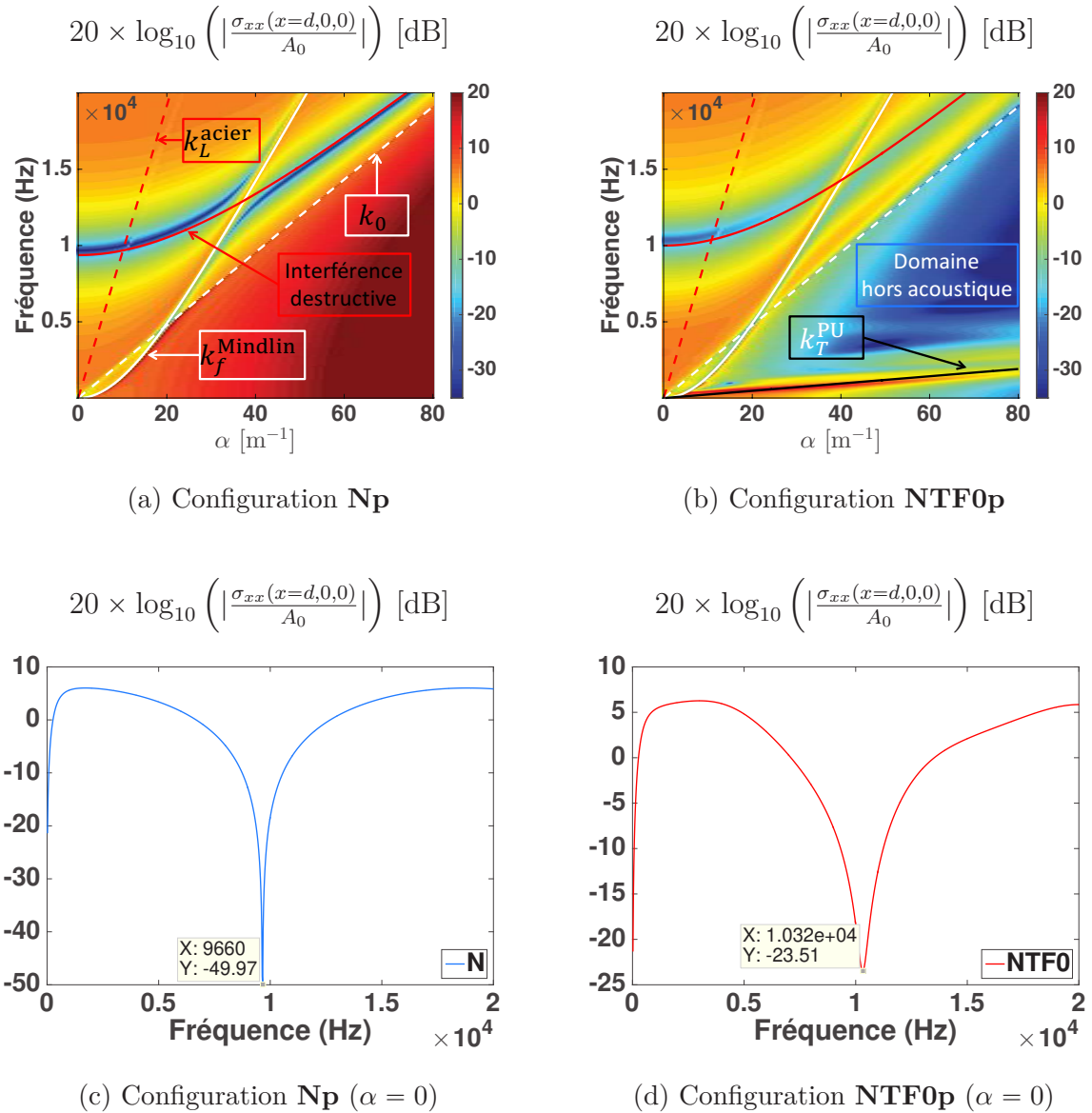


FIGURE 5.4 – Interférences destructives à la cote capteur, configurations **N** et **NTF0**
Spectres *fréquence* - α (en haut) et réponses en incidence normale (en bas)

On retrouve sur les Fig. 5.4a et Fig. 5.4b les éléments caractéristiques de la plaque d'acier (résonances d'épaisseur en compression et en flexion) déjà discutés en Fig. 5.3 lorsque le capteur était placé directement à la surface. On peut également repérer sur la Fig. 5.4b une coïncidence avec la célérité de cisaillement c_T^{PU} du PU. Cette coïncidence cependant ne rayonne pas et se situe dans le domaine hors acoustique.

En revanche, la position $(L, d) = (0, 40)$ mm du capteur, décalé soit dans l'eau pour

la configuration **Np**, soit enfoui dans le PU pour la configuration **NTF0p**, conduit à l'apparition d'un trou d'interférence destructive due au déphasage entre l'onde plane incidente et l'onde réfléchi sur l'acier. La position de ce trou est prédite correctement à l'aide de la formule (5.6) valable pour la plaque d'acier nue. Le trou de pression survenant dans un régime fréquentiel où la plaque d'acier peut être approximée par un réflecteur parfaitement rigide, on exploite la formule (5.6) donnée pour le premier mode $n = 0$ pour ce type de réflecteur, en substituant seulement pour la configuration **NTF0p** la célérité de compression c_L^{PU} du PU à la célérité c_L^{eau} de l'eau, afin d'expliquer le décalage fréquentiel du trou observé. On obtient alors, pour la distance $d = 40$ mm du capteur à la plaque d'acier :

$$\begin{aligned} \mathbf{Np} : \quad f_0^{\text{dur}}(\alpha) &= \sqrt{\left(\frac{c_L^{\text{eau}}}{4d}\right)^2 + \left(\frac{\alpha c_L^{\text{eau}}}{2\pi}\right)^2} \underset{\text{A.N.}(\alpha=0)}{=} 9375 \text{ Hz} \\ \mathbf{NTF0p} : \quad f_0^{\text{dur}}(\alpha) &= \sqrt{\left(\frac{c_L^{\text{PU}}}{4d}\right)^2 + \left(\frac{\alpha c_L^{\text{eau}}}{2\pi}\right)^2} \underset{\text{A.N.}(\alpha=0)}{=} 10000 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Sur les Fig.5.4c et 5.4d, le module du champ de pression est représenté sur la plage fréquentielle d'étude en incidence normale ($\alpha = 0$), et on retrouve des valeurs pour les minima de pression, respectivement $f_{0,\text{num}}^{\mathbf{Np}} = 9660$ Hz et $f_{0,\text{num}}^{\mathbf{NTF0p}} = 10320$ Hz, très proches de celles calculées avec les formules (5.8) du modèle simplifié de réflecteur dur. Logiquement on retrouve, hormis aux très basses fréquences où la réponse en signal décroche, l'allure générale de la courbe bleue tracée en Fig. 5.2 pour ce type de réflecteur.

Enfin, les courbes tracées en trait plein rouge sur les Fig. 5.4a et 5.4b sont obtenues à l'aide de ces formules, et recollent correctement aux minima de pression observés sur chaque figure, hormis dans la zone de croisement avec la résonance en flexion de la plaque, où ceux-ci sont moins nets.

Le comportement du PU sera à nouveau rapproché de celui d'une simple couche d'eau dans la suite, afin de simplifier les interprétations effectuées.

I.5 Plaque multicouche avec matériau de revêtement : modes d'épaisseur

Les matériaux anéchoïque et de masquage présentent de forts amortissements sur leurs deux célérités, les rendant absorbants. Par conséquent, des modes suivant l'épaisseur de ces couches vont générer des zéros de pression à leur surface, prédits par les formules (5.5). Si le matériau anéchoïque a une impédance adaptée à celle de l'eau ($\frac{Z_{\text{anéchoïque}}}{Z_{\text{eau}}} = 0,84$), laissant donc facilement traverser l'onde incidente, le matériau de masquage présente au contraire une impédance acoustique très faible devant celle du fluide extérieur ($\frac{Z_{\text{masquage}}}{Z_{\text{eau}}} = 0,22$), et se comportera donc comme un réflecteur parfaitement mou au-delà d'une certaine fréquence. Néanmoins, la transmission de l'onde incidente ne sera tout de même pas négligeable avant sa fréquence de fonctionnement et des trous de pression liés à des modes d'épaisseur seront également visibles aux basses fréquences comme pour le matériau anéchoïque. Il est important de remarquer que le matériau de masquage n'est pas destiné à améliorer la *furtivité acoustique* du sous-marin, au contraire il est généralement utilisé pour le problème de *discrétion acoustique*, donc pour limiter la transmission des vibrations de la coque d'acier dans le fluide extérieur.

On préfère représenter uniquement les réponses en signal des deux configurations **RATF0p** (colonne de gauche) et **RMTF0p** (colonne de droite) en fonction de la fréquence pour le cas restreint d'incidence normale, car ces trous de pression étaient difficilement observables dans le domaine spectral, contrairement aux configurations **Np** et **NTF0p**, du fait de l'amortissement élevé de ces matériaux.

Les formules (5.5) établies avec le modèle simplifié supposent qu'on observe le champ de pression à la surface du matériau de revêtement, par conséquent les Fig. 5.5a et Fig. 5.5b représentent le module du champ de pression à cette cote ($x = 0$). Pour les Fig. 5.5c et Fig. 5.5d, le capteur est enfoui dans le PU, sa cote est rétablie à $x = d$ ($d = 40$ mm) de la surface du matériau de revêtement (anéchoïque ou masquage).

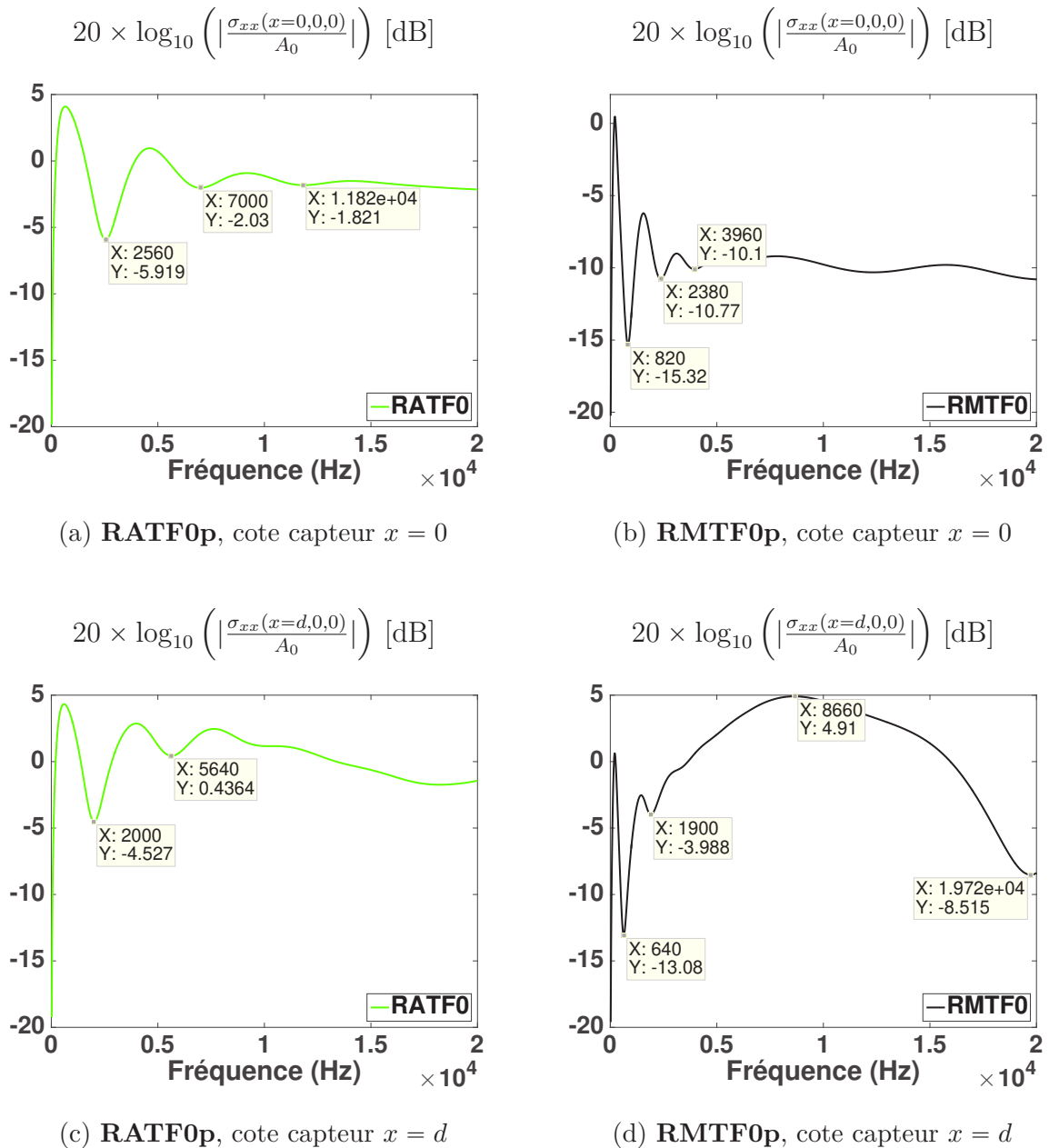


FIGURE 5.5 – Module du champ de pression en incidence normale
(configurations **RATF0p** et **RMTF0p**)

Sur les Fig. 5.5a et Fig. 5.5b ont été relevées les valeurs des fréquences des minima de pression pour les trois premiers modes d'épaisseur générés dans la couche du matériau de revêtement. On donne dans le tableau 5.1 les valeurs théoriques de ces fréquences de minima de pression prédites avec les formules (5.5) des modèles simplifiés (réflecteur

idéal + matériau de revêtement), et celles mesurées pour les configurations de validation **RATF0p** et **RMTF0p**, d'une part à la surface du matériau ($x = 0$) et d'autre part pour la cote capteur décalée à 40 mm dans le PU ($x = d$) :

Configuration \ Réflecteur	Dur		Mou		Dur		Mou	
	Mode 1		Mode 2		Mode 3			
Modèle simplifié Réflecteur + Anéchoïque ($x = 0$)	2250 Hz	4500 Hz	6750 Hz	9000 Hz	11250 Hz	13500 Hz		
RATF0p , ($x = 0$)	2560 Hz		7000 Hz		11820 Hz			
RATF0p , ($x = d$)	2000 Hz		5640 Hz					
Modèle simplifié Réflecteur + Masquage ($x = 0$)	750 Hz	1500 Hz	2250 Hz	3000 Hz	3750 Hz	4500 Hz		
RMTF0p , ($x = 0$)	820 Hz		2380 Hz		3960 Hz			
RMTF0p , ($x = d$)	640 Hz		1900 Hz					

TABLE 5.1 – Modes d'épaisseur, fréquences d'annulation
Modèle simplifié et configurations de validation

On constate pour les deux configurations revêtues que les fréquences des trous de pression observés à la surface du revêtement pour les trois premiers modes sont encadrées par les valeurs théoriques des modèles simplifiés où la plaque d'acier est considérée comme un réflecteur parfaitement rigide ou parfaitement mou.

Par ailleurs, on constate pour les modes 2 et 3 un comportement plus proche du cas du réflecteur que pour le mode 1, car à la fréquence de ce premier mode, l'approximation selon laquelle la plaque d'acier se comporte comme un réflecteur dur est plus discutable. D'autre part, lorsque la cote capteur est décalée à 40 mm ($x = d$) de la surface du matériau de revêtement, enfouie dans le PU, les valeurs de ces fréquences d'annulation diminuent par rapport aux valeurs mesurées à la surface du matériau ($x = 0$). Seules les valeurs des deux premiers minima de pression ont été reportées sur les Fig. 5.5c et Fig. 5.5d, car le troisième mode d'épaisseur ne génère pas un zéro de pression assez marqué à la

véritable cote capteur $x = d$. Par contre, on reconnaît sur la Fig. 5.5d le comportement caractéristique du réflecteur mou présenté à la Fig. 5.2 en milieu de bande, qui se traduit ici par un gain proche de +6dB observé vers 8660 Hz. Le matériau de masquage se comporte dans ce régime fréquentiel à peu près comme un réflecteur parfaitement mou, et réfléchit pratiquement toute l'énergie de l'onde incidente.

Pour la même raison, la première interférence destructive entre les pressions incidente et réfléchie à la surface du réflecteur est observée à $f_1^{\text{RMTF0p}}(0) = 19720$ Hz, valeur très proche de celle $f_1^{\text{mou}}(0) = \frac{nc_0}{2d} = 18750$ Hz calculée avec le modèle simplifié de réflecteur mou.

I.6 Plaque d'acier nue : observation dans le plan site-gisement

On présente enfin les réponses en signal dans le plan site-gisement uniquement pour la configuration **Np**, pour mettre en évidence l'un des intérêts de développer un modèle prenant en compte la géométrie cylindrique. En Fig. 5.6 est représenté le module du champ de pression à la cote capteur, dans le plan site i -gisement G_t , pour trois fréquences distinctes $f \in \{7000; 10000; 18000\}$ Hz :

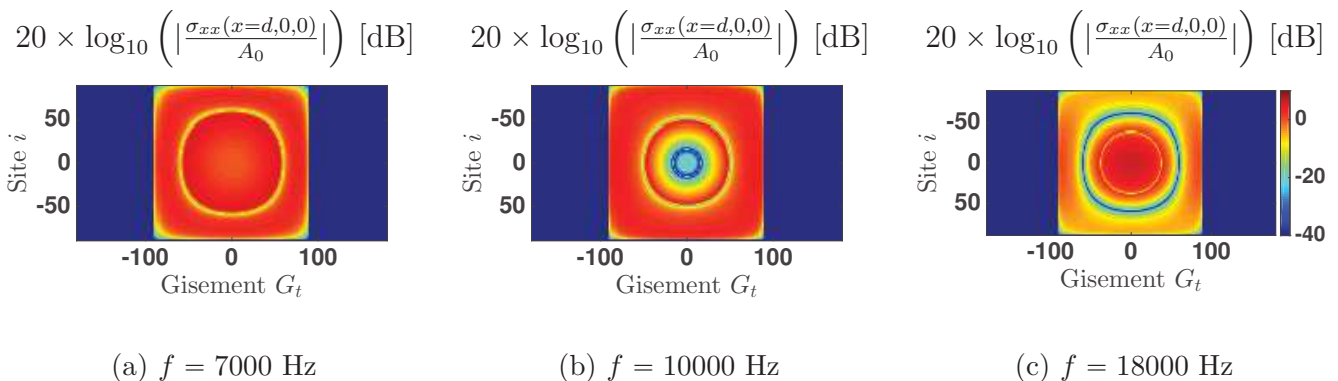


FIGURE 5.6 – Module du champ de pression dans le plan *site-gisement*

Configuration **Np**

On retrouve les comportements décrits plus hauts :

- À $f = 7000$ Hz, le gain de signal pour le module du champ de pression est relativement élevé et uniforme, et le cercle jaune observé sur la Fig. 5.6a repère la coïncidence

de flexion de la plaque, possible puisque $f > f_c$, et qui apparaît aux plus basses fréquences d'abord en incidence rasante.

- À $f = 10000$ Hz, le trou d'interférence destructive apparu en incidence normale vient d'apparaître et se déplace aux angles site et gisement dépointés. On peut le repérer par le cercle bleu au centre de la Fig. 5.6b. Par ailleurs, le rayon du cercle de la résonance en flexion diminue.
- À $f = 18000$ Hz, le cercle repérant le trou d'interférence destructive lié à la distance capteur-réfecteur englobe désormais celui repérant la coïncidence de flexion de la plaque sur la Fig. 5.6c.

En revanche, l'hypothèse de géométrie plane restreint l'analyse sur le cas d'excitation. En effet, pour un angle gisement G_t repérant le nombre d'onde incident tel que $|G_t| > 90^\circ$, le modèle cylindrique permet d'exciter par une onde plane incidente impactant l'arrière de la coque par rapport au capteur d'antenne, ce qui n'est pas le cas en géométrie plane. En effet, cela équivaut à générer une onde plane incidente depuis la cavité d'air, ce qui ne signifie rien de physique pour notre cas d'étude.

II Validation numérique : configurations lisses

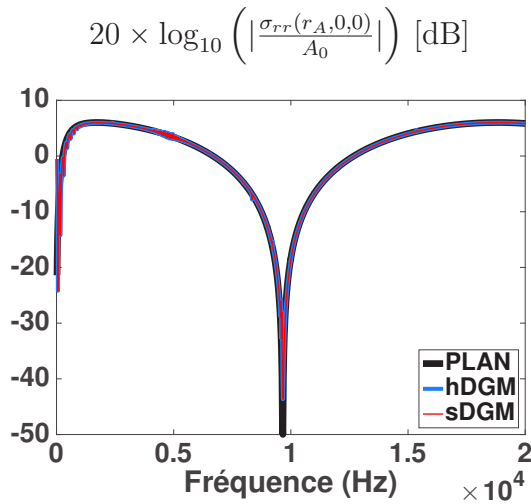
On présente dans cette section une validation numérique des méthodes développées pour la modélisation du multicouche cylindrique, en l'absence des renforts internes. Les méthodes hDGM et sDGM sont d'abord confrontées au modèle plan utilisé pour les considérations de la section I précédente, puis comparées à un modèle cylindrique utilisant une méthode éléments finis classique.

II.1 Confrontation au modèle plan

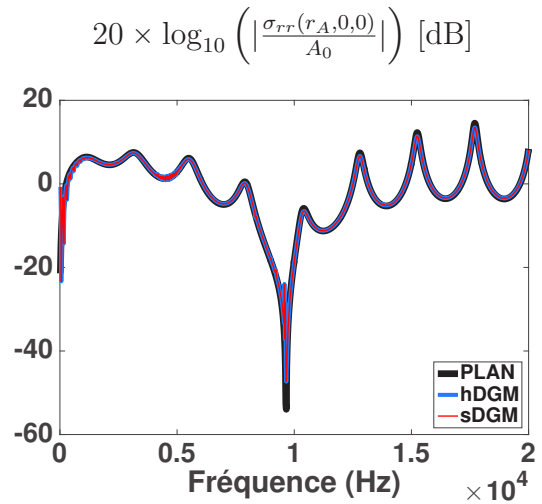
II.1.1 Incidence normale

On présente en Fig. 5.7 le module du champ de pression à la cote capteur pour le cas d'incidence normale. La plage fréquentielle de calcul s'étend sur $f \in [20; 20000]$ Hz, avec un pas fréquentiel de $\Delta f = 20$ Hz, assez fin pour capter les différences de comportement

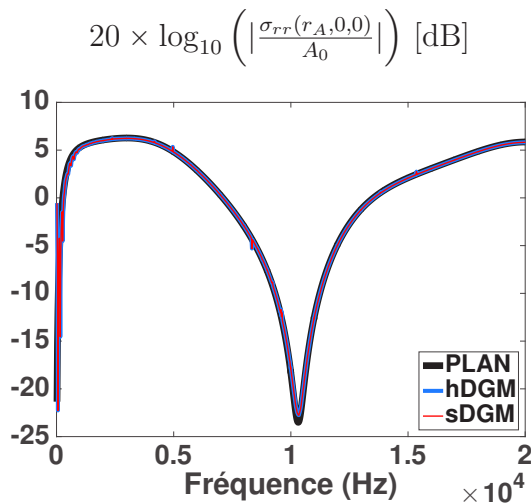
aux basses fréquences entre les modèles cylindriques développés et le modèle plan. Les colonnes de gauche et de droite représentent respectivement les configurations sans ou avec dôme CVR. On peut constater des pics et trous de pression supplémentaires sur les configurations avec dôme CVR, qui correspondent à des ventres et des noeuds de pression de modes générés dans la lame d'eau d'épaisseur finie.



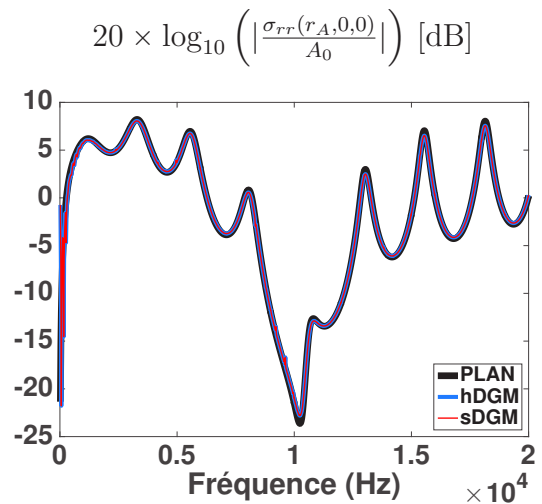
(a) Configuration N



(b) Configuration ND



(c) Configuration NTF0



(d) Configuration NTD0

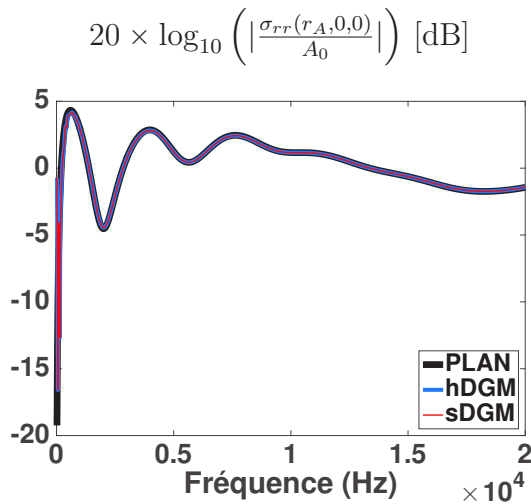
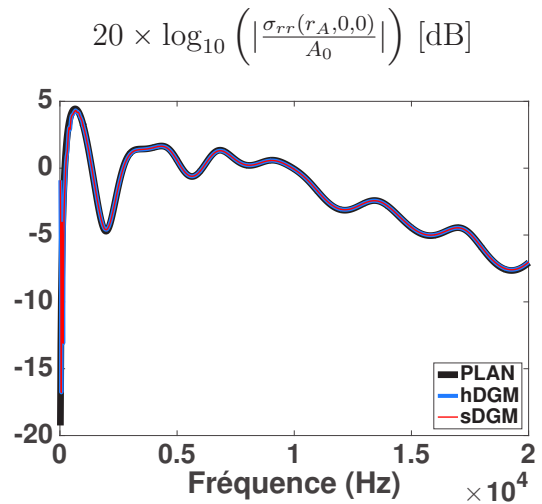
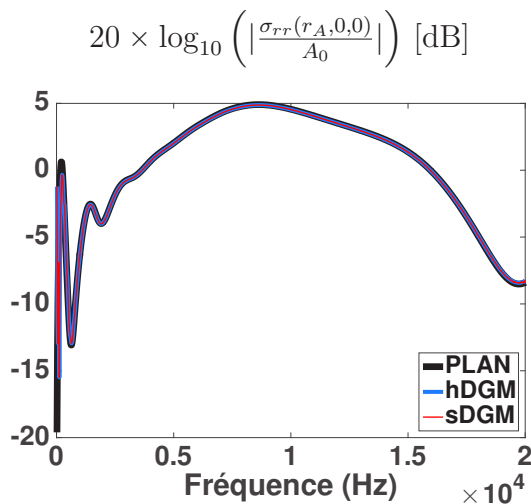
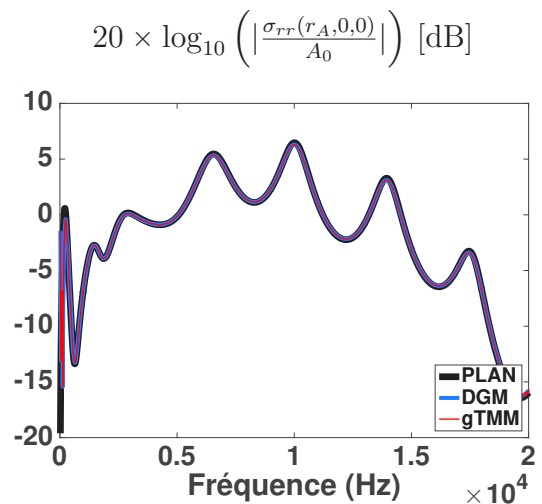
(e) Configuration **RATF0**(f) Configuration **RATD0**(g) Configuration **RMTF0**(h) Configuration **RMTD0**

FIGURE 5.7 – Module du champ de pression en incidence normale
Confrontation des méthodes hDGM et sDGM au modèle plan

On observe une très bonne corrélation des deux méthodes implémentées pour la géométrie cylindrique, de même qu'avec le modèle de géométrie plane, hormis aux très basses fréquences. En effet, un écart est constaté entre le modèle plan et le modèle cylindrique, intrinsèque à l'hypothèse faite sur la géométrie, et plus facilement observable sur la seule configuration **N** et en réduisant la plage fréquentielle sur l'intervalle $f \in [1; 1000]$ Hz. En Fig. 5.8 est représenté le module du champ de pression reconstruit dans le domaine

physique à la cote capteur, et on constate que le modèle plan converge aux basses fréquences vers un zéro de pression, tandis que les modèles cylindriques tendent vers 0 dB lorsque $f \rightarrow 0$. De plus, des trous de pression successifs sont observés sur les modèles cylindriques, qui sont à relier avec des résonances de modes circonférentiels de la coque d'acier.

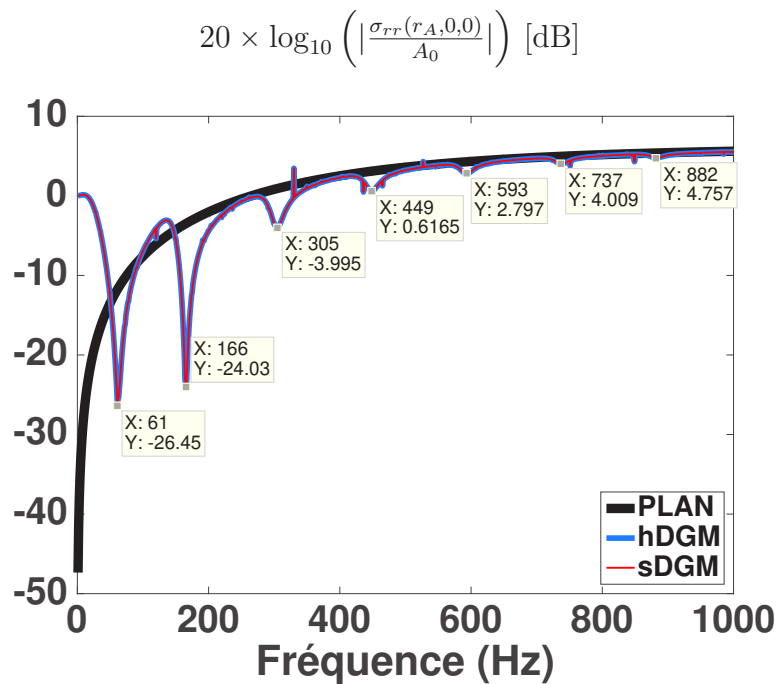
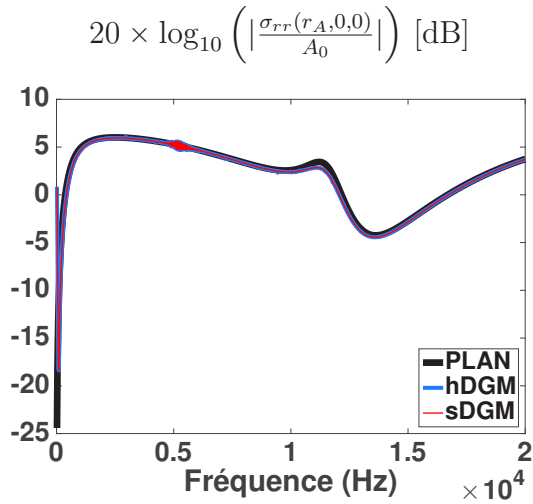


FIGURE 5.8 – Configuration N - Module du champ de pression en incidence normale
Confrontation des méthodes hDGM et sDGM au modèle plan

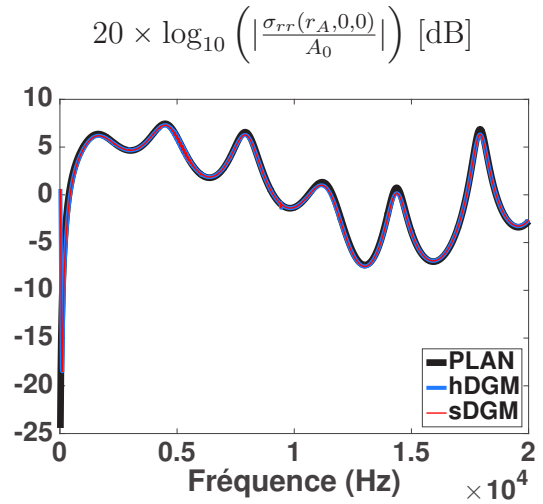
II.1.2 Incidence oblique

II.1.2.1 Réponse fréquentielle à incidence donnée

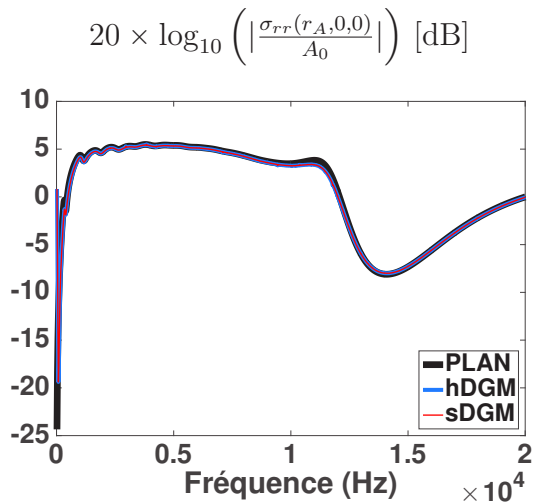
On trace en Fig. 5.7 le module du champ de pression à la cote capteur pour le cas d'incidence oblique $(G_t, i) = (45^\circ, 0^\circ)$, i.e un angle gisement de 45° . Les colonnes de gauche et de droite représentent à nouveau les configurations sans ou avec dôme CVR.



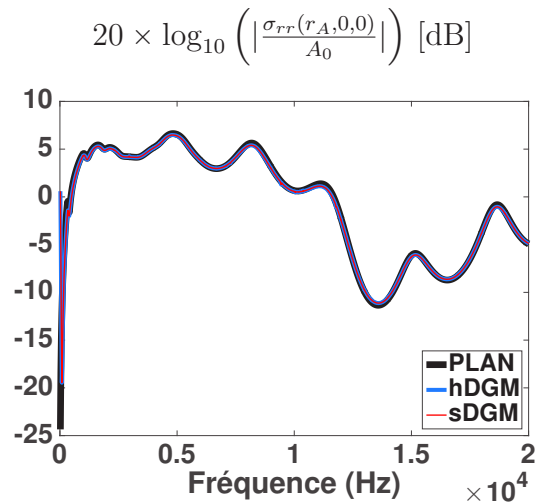
(a) Configuration N



(b) Configuration ND



(c) Configuration NTF0



(d) Configuration NTD0

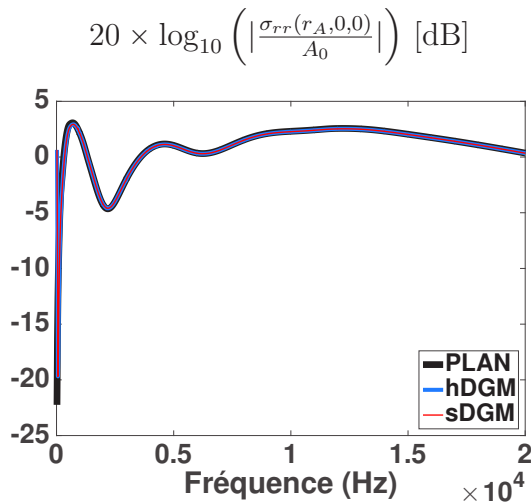
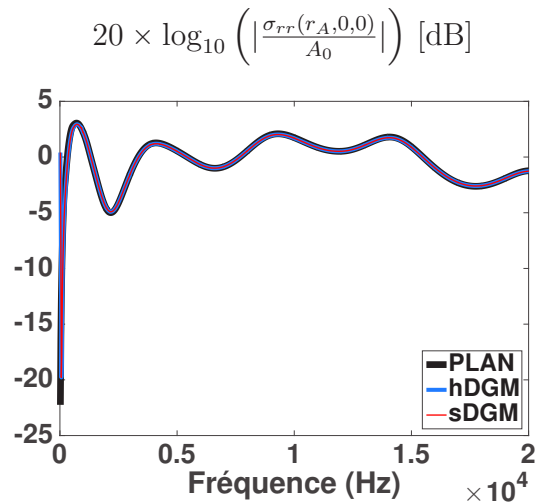
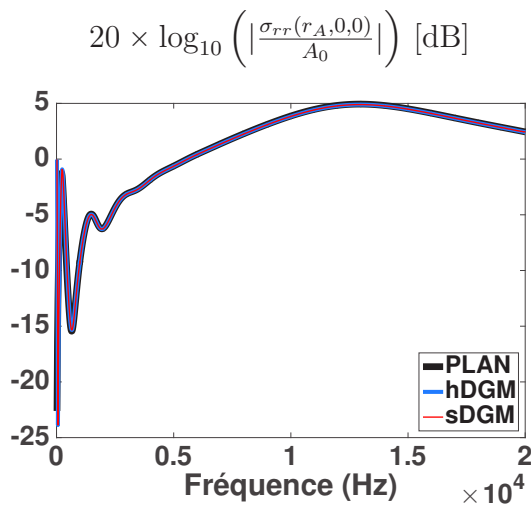
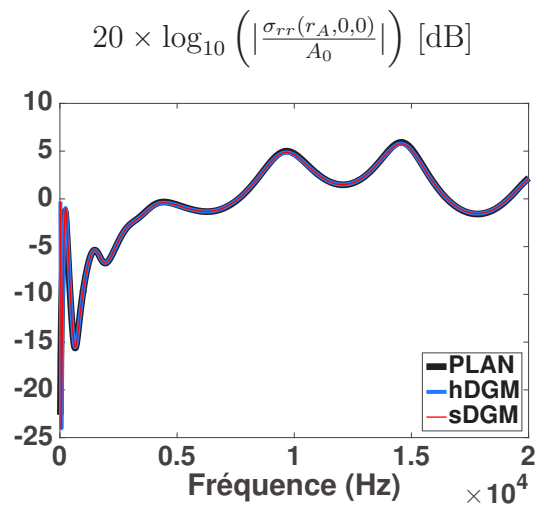
(e) Configuration **RATF0**(f) Configuration **RATD0**(g) Configuration **RMTF0**(h) Configuration **RMTD0**

FIGURE 5.9 – Module du champ de pression en incidence oblique, $(G_t, i) = (45^\circ, 0^\circ)$
Confrontation des méthodes hDGM et sDGM au modèle plan

Une fois encore, les réponses en signal données par les méthodes analytiques développées en géométrie cylindrique recollent très bien aux hautes fréquences avec le modèle de géométrie plane.

II.1.2.2 Observation dans le plan *site-gisement*

On complète ici l'argument évoqué en I.6 concernant l'intérêt de développer des modèles en géométrie cylindrique, à savoir celui de pouvoir calculer la réponse à une incidence supérieure à 90° .

On montre donc en Fig. 5.10 le module du champ de pression à la cote capteur dans le plan *site i-gisement* G_t de la coque d'acier nue (configuration **N**), pour les trois mêmes fréquences $f \in \{7000; 10000; 18000\}$ Hz présentées en I.6, et obtenues avec la méthode sDGM (la méthode hDGM donne des cartographies rigoureusement similaires). La direction du vecteur d'onde incident varie et est repérée par les angles i et G_t , et le capteur est toujours supposé ponctuel, à la cote $(r_A, \phi_A = 0, z_A = 0)$:

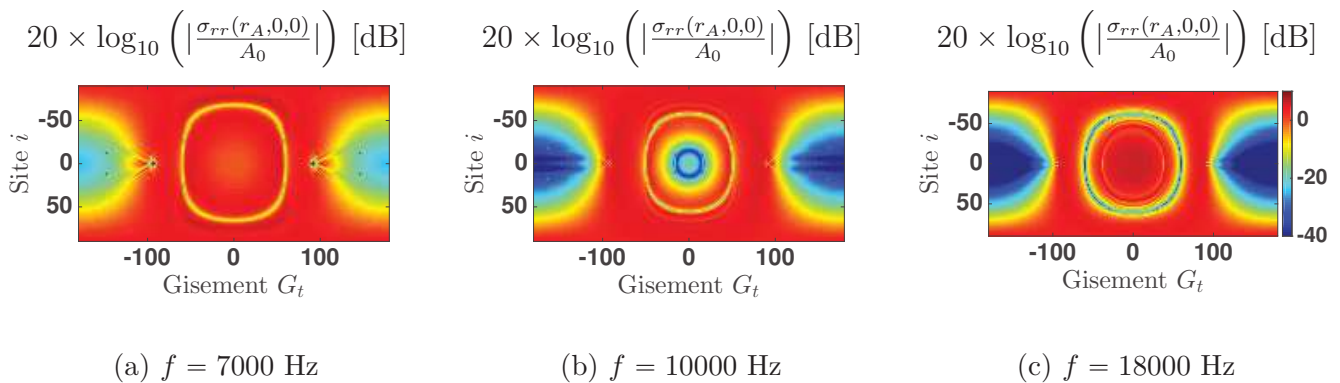


FIGURE 5.10 – Module du champ de pression dans le plan *site-gisement* (Configuration **N**)

Les Fig. 5.10 mettent en évidence la possibilité d'observer le champ de pression pour un angle gisement supérieur à 90° . On retrouve à nouveau les caractéristiques de résonance en flexion de la coque, et le trou d'interférence destructive observable proche de l'incidence normale à $f = 10000$ Hz, et à une incidence plus rasante pour $f = 18000$ Hz.

II.2 Validation par comparaison à un modèle éléments finis

On présente dans cette section une seconde validation effectuée sur les configurations lisses, à l'aide d'un modèle cylindrique résolu par une méthode éléments finis classique. La résolution a été exclusivement réalisée sous COMSOL MULTIPHYSICS, et ne fait pas partie des développements de cette étude.

La méthode repose sur l'exploitation de l'axisymétrie du système, et est basée sur une décomposition en ordres circonférentiels en ϕ , i.e une décomposition des champs en série de Fourier suivant la circonférence. De plus, le domaine de maillage est réduit à un seul élément dans la direction axiale, par l'application de conditions de périodicité de Bloch-Floquet sur chaque face du domaine suivant cette dimension. En Fig. 5.11 est schématisée la géométrie du domaine de résolution, pour l'une des deux configurations **RATF0** ou **RMTF0** incluant un matériau de revêtement (anéchoïque ou masquage) :

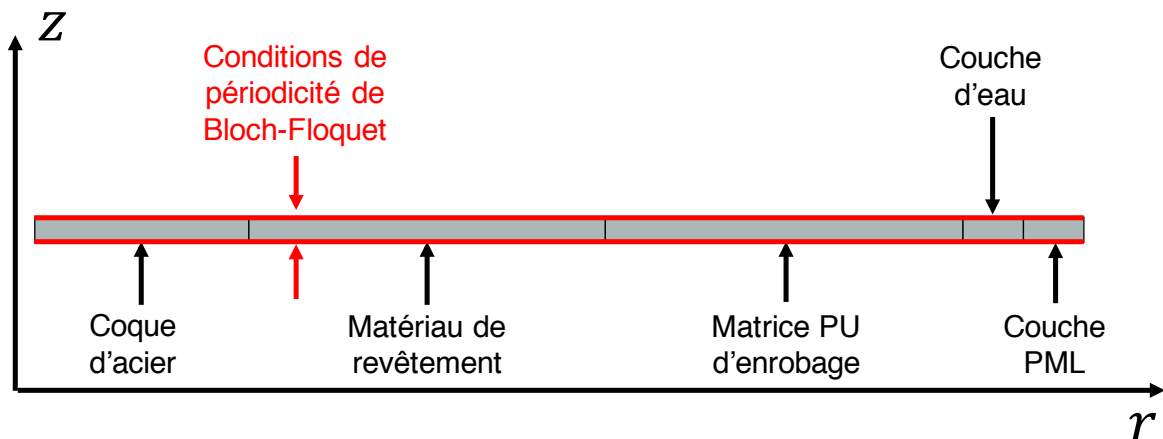


FIGURE 5.11 – Géométrie du modèle axi-harmonique

La couche PML (*Perfectly Matched Layer*) fermant le domaine en aval de la couche d'eau modélisant le fluide extérieur est discrétisée en 6 éléments. Elle permet d'imposer des conditions de non-réflexion aux bords du domaine des ondes acoustiques.

Les équations de l'élasticité 3D sont résolues dans les couches solides, et l'équation de Helmholtz est résolue dans la couche d'eau fluide. Le critère appliqué sur chacun des maillages est d'avoir un minimum de 6 éléments quadratiques par longueur d'onde, déterminée par la célérité des ondes de cisaillement dans les couches solides, et des ondes longitudinales pour les couches fluides, à la fréquence maximale de calcul. La taille maximale d'un élément suivant l'épaisseur d'une couche j quelconque vérifie donc :

$$L_j < \frac{c_T^j}{6 \times f_{\max}} \quad (5.9)$$

avec f_{\max} la fréquence maximale de calcul. Les éléments utilisés sous COMSOL MULTIPHYSICS sont des quadrangles réguliers pour toutes les configurations lisses, et en Fig. 5.12 est

représenté le maillage de la configuration **RATF0** respectant le critère de taille de maille retenu :

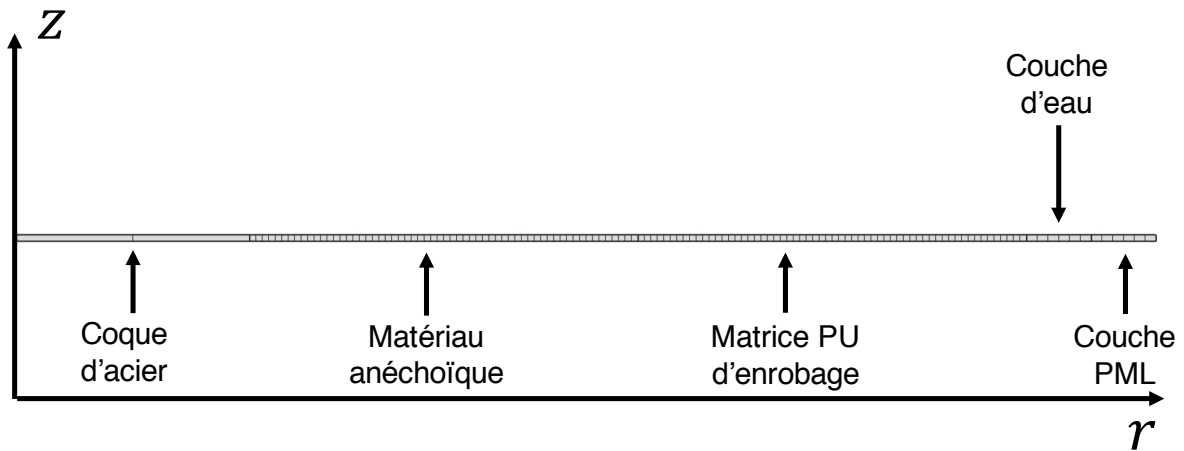
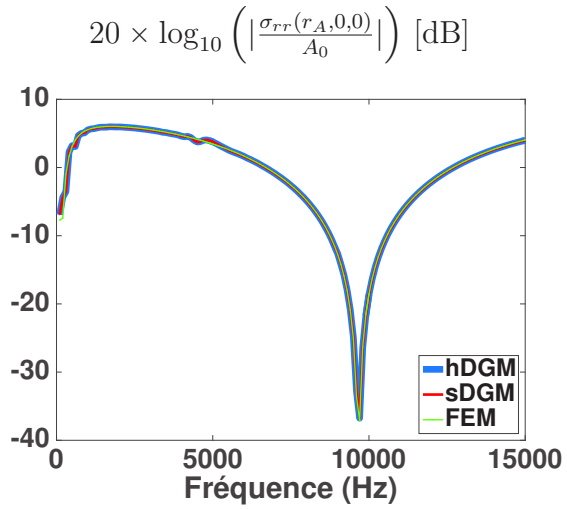
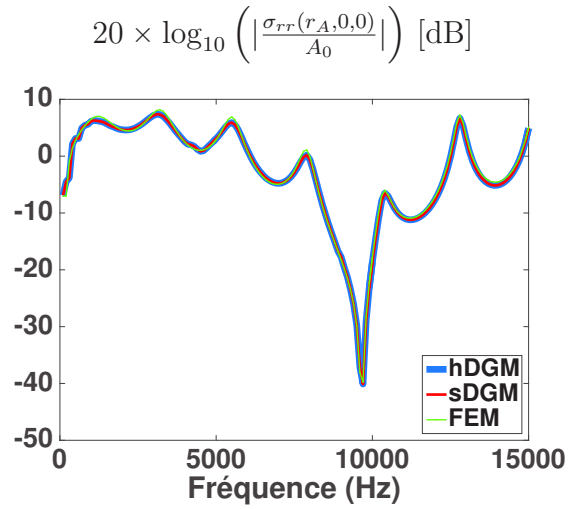


FIGURE 5.12 – Maillage COMSOL - Configuration **RATF0**

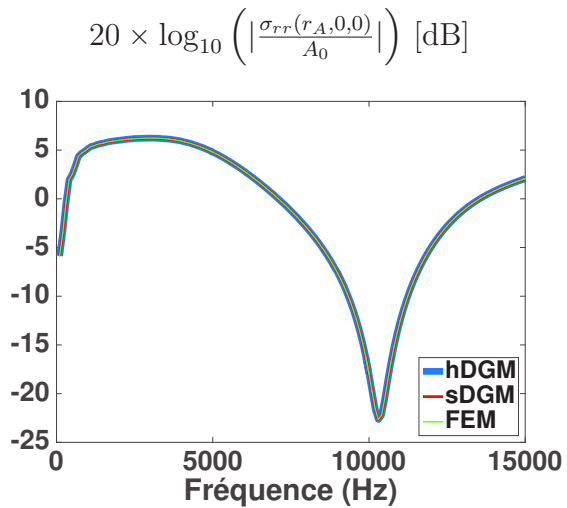
On compare maintenant en Fig. 5.13 le module du champ de pression à la cote capteur pour le cas d'incidence normale, obtenu soit avec les méthode hDGM (en bleu) ou sDGM (en rouge), soit avec un calcul éléments finis (en vert). La plage fréquentielle de calcul s'étend cette fois sur $f \in [100; 15000]$ Hz, avec un pas fréquentiel de $\Delta f = 100$ Hz. Les colonnes de gauche et de droite représentent respectivement les configurations sans ou avec dôme CVR :



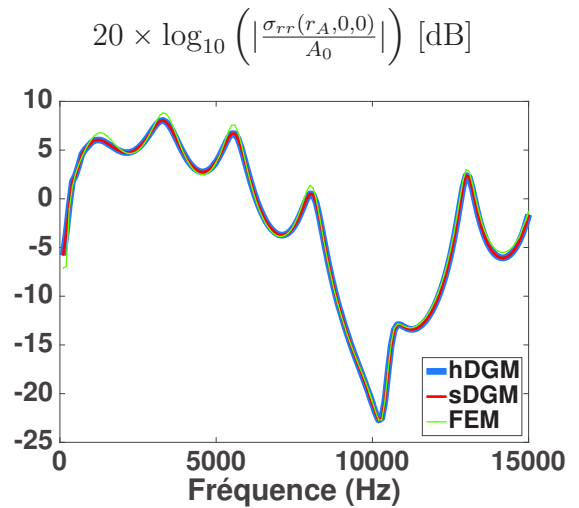
(a) Configuration N



(b) Configuration ND



(c) Configuration NTF0



(d) Configuration NTD0

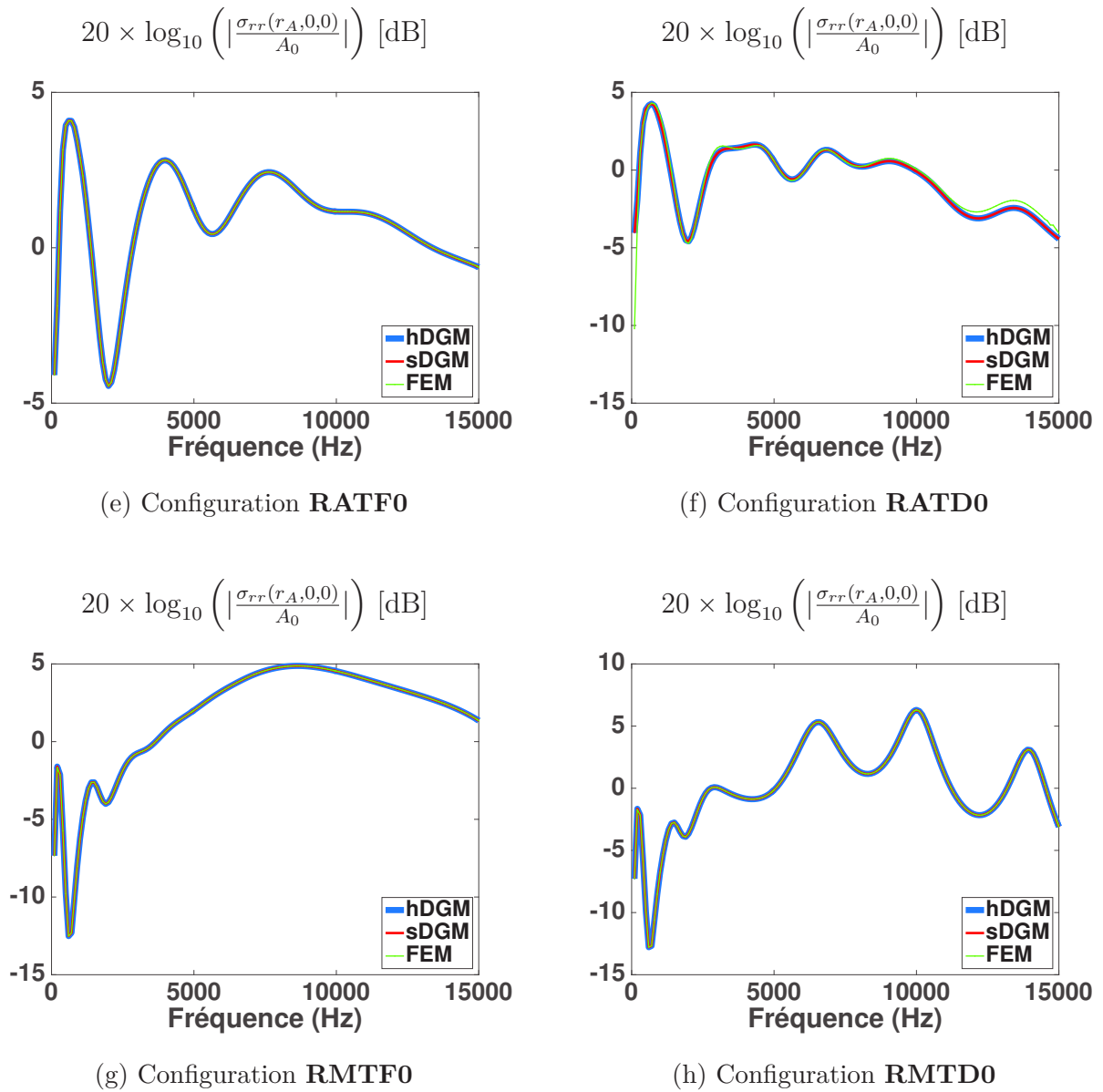


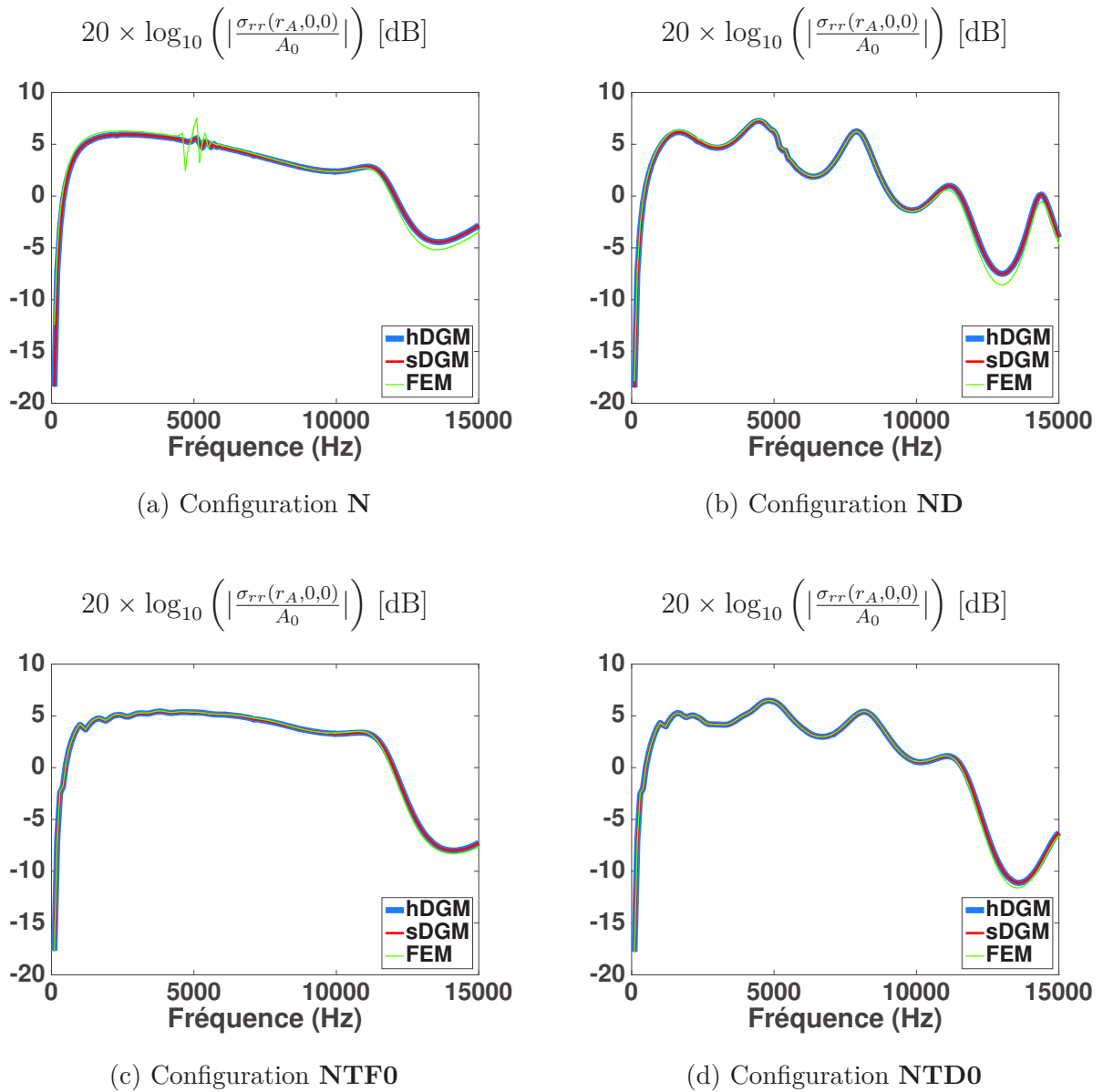
FIGURE 5.13 – Module du champ de pression en incidence normale

Confrontation des méthodes hDGM et sDGM à un modèle cylindrique résolu par méthode éléments finis

On constate que les méthodes hDGM et sDGM recollent très bien avec la méthode par éléments finis.

II.3 Incidence oblique

On présente également en Fig. 5.14 les réponses en signal pour le cas d'incidence oblique $(G_t, i) = (45^\circ, 0^\circ)$:



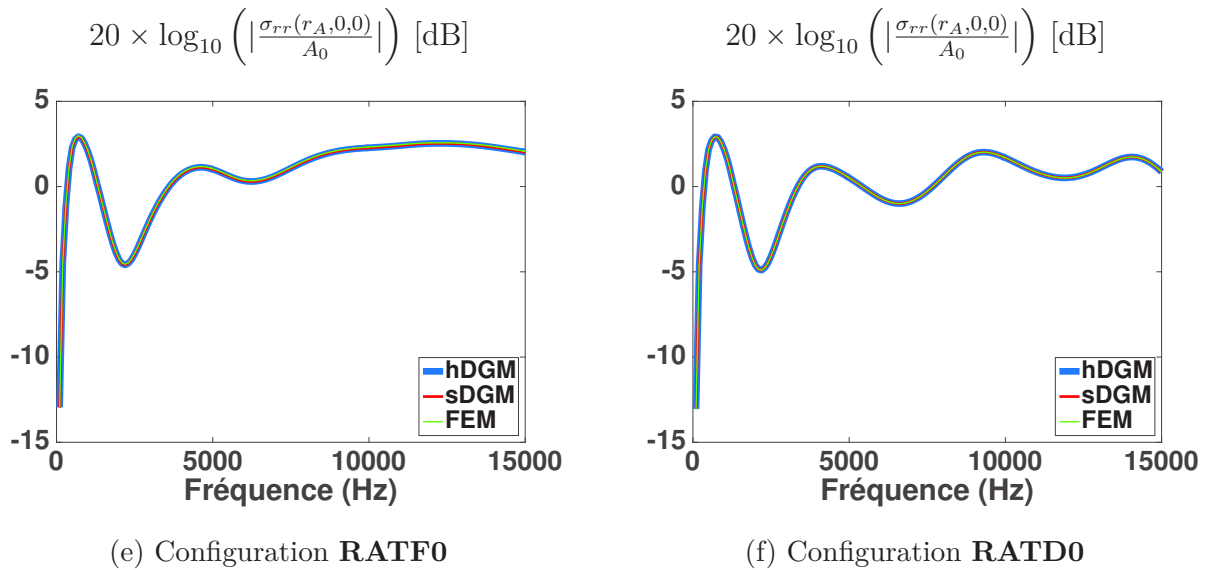


FIGURE 5.14 – Module du champ de pression en incidence oblique, $(G_t, i) = (45^\circ, 0^\circ)$
Confrontation des méthodes hDGM et sDGM à un modèle cylindrique résolu par méthode éléments finis

On constate que les deux modèles développés recollent avec la réponse prédite par le modèle éléments finis.

Néanmoins, les réponses des deux dernières configurations impliquant le matériau de masquage n'ont pas été représentées sur la Fig. 5.14, car des difficultés ont été rencontrées en incidence oblique pour obtenir des calculs COMSOL éléments finis fiables.

II.4 Coût numérique

On compare ici le coût numérique entre les modèles développés et la méthode par éléments finis utilisée pour la seconde validation. Cette comparaison n'est là que pour donner un ordre d'idée sur le gain significatif que permettent les méthodes analytiques implémentées par rapport à une méthode éléments finis classique. Il convient de préciser que les temps calculs donnés pour les méthodes hDGM et sDGM ont été obtenus avec un MacBook Pro fin 2011, processeur Intel Core i7 2,8 GHz, 16 Go de RAM, tandis que les calculs éléments finis ont été réalisés sur une machine beaucoup plus puissante, comptant 2 processeurs Intel Core (R) Xeon à 3,40 GHz, comportant 128 Go de RAM.

Pour chaque configuration, on donne dans le tableau 5.2 le coût numérique du calcul de la réponse en signal en incidence normale, pour la plage fréquentielle $f \in [100; 15000]$ Hz, avec un pas fréquentiel $\Delta f = 100$ Hz.

Configuration	Incidence Normale (90°)			
	hDGM	sDGM	FEM Nb d'éléments	FEM Temps CPU
N	42 s	32 s	24	11 min
ND	48 s	68 s	56	12 min
NTF0	34 s	81 s	74	43 min
NTD0	41 s	110 s	87	57 min
RATF0	39 s	81 s	134	35 min
RATD0	45 s	133 s	141	51 min
RMTF0	37 s	80 s	164	2h42 min
RMTD0	44 s	102 s	171	3h32 min
Configuration	A		B	
A :	Processeur Intel Core i7, 2,8 GHz RAM 16 Go			
B :	2 processeurs Intel Core(R) Xeon, 3,40 GHz RAM 128 Go			

TABLE 5.2 – Coût numérique en incidence normale pour la réponse en signal
Plage fréquentielle : $f = 100 : 100 : 15000$ Hz

En gardant à l'esprit qu'aucun critère de troncature des ordres circonférentiels supérieurs n'est appliqué pour le modèle éléments finis 2D axiharmonique, lors de la sommation des différentes contributions, le tableau 5.2 permet néanmoins de constater un gain significatif en temps calcul pour les méthodes hDGM et sDGM par rapport à la méthode

classique éléments finis.

Cette première validation a montré d'une part l'efficacité numérique des méthodes implémentées pour gérer les configurations multicouches lisses, mais également leurs stabilités respectives. En effet, sur les Fig. 5.7 ou 5.9 il n'y a plus trace des instabilités numériques évoquées au chapitre 3, qui survenaient soit aux hautes fréquences ou bien aux basses fréquences pour des configurations incluant le dôme CVR, lorsque l'ancienne procédure d'assemblage classique de TMM était utilisée. Celles-ci ont résolues avec la procédure d'assemblage caractérisant la méthode sDGM.

D'autre part, les instabilités numériques qui apparaissaient pour la méthode hDGM dans les zones de coïncidence avec les nombres d'onde des célérités de l'acier ont également disparues des Fig. 5.10, du fait du recours ponctuel à la quadruple précision dans ces zones numériquement difficiles.

III Validation numérique des modèles complets sur les configurations raidies

On s'intéresse désormais à la validation numérique des modèles complets, i.e des deux méthodes spectrales dédiées à la modélisation des configurations multicouches (hDGM et sDGM), mais une fois le formalisme de couplage utilisé pour tenir compte de l'action des renforts internes.

Par conséquent, on considère toujours le cas d'excitation par onde plane, la validation a lieu sur les configurations déjà introduites dans le cas non raidi, mais cette fois elles sont couplées au réseau périodique de raidisseurs. Ceux-ci sont supposés régulièrement espacés d'une distance $d = 750$ mm. On rappelle que chacun des renforts internes a la même géométrie que celle utilisée par Maxit & Ginoux en 2010 [103], à savoir une section en « T » classique pour ce type de structures, dont les dimensions sont 300×60 mm²/ 60×300 mm². L'origine de l'axe z de la coque est tel qu'un raidisseur est placé en $z = 0$, et que $z = \frac{d}{2}$ correspond à une position à mi-chemin entre deux raidisseurs. Le capteur est toujours supposé ponctuel, repéré par les coordonnées (r_A, ϕ_A, z_A) .

III.1 Stabilité et convergence numérique

On discute ici de l'influence de deux paramètres introduits par le couplage du système multicouche avec le réseau périodique de renforts internes.

Tout d'abord, on rappelle en (5.10) l'expression de la réponse en signal pour un capteur ponctuel donnée à la fin du chapitre 4, en l'adaptant néanmoins pour introduire le paramètre Q de troncature numérique nécessaire pour calculer la contribution du réseau de renforts internes. On laisse dans l'équation (5.10) la série de Fourier suivant la direction circonférentielle sous la forme d'une somme infinie, même si celle-ci est également tronquée à un certain $N_{\max}(\omega)$ qui dépend de la fréquence, du fait de la troncature appliquée aux ordres circonférentiels les plus élevés. La contribution spectrale à la réponse en signal du capteur pour l'ordre circonférentiel n prend alors l'expression suivante :

$$\sigma_{j_A}(r_A, n, \alpha) = \tilde{\sigma}_{j_A, \text{SS1}}^{\text{OP}}(r_A, n, \alpha) \delta(\alpha - \alpha^i) + \left\{ \sum_{q=-Q}^Q [\mathbf{R}]_{\sigma_A \sigma_1}(n, \alpha) \delta(\alpha - \alpha_q^i) \right\} \tilde{\sigma}_{1, \text{SS1}}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha^i)$$

avec $\tilde{\sigma}_{1, \text{SS1}}^{\text{RAID}}(r_0, n, \alpha^i) = -\frac{1}{d} [\mathbf{B}(n)] \left[[\mathbf{I}_4] + \frac{1}{d} \left\{ \sum_{p=-Q}^Q [\mathbf{R}]_{u_1 \sigma_1}(n, \alpha_p^i) \right\} [\mathbf{B}(n)] \right]^{-1} \tilde{\mathbf{u}}_{1, \text{SS1}}^{\text{OP}}(r_0, n, \alpha^i)$

(5.10)

De plus, on rappelle l'expression de la famille d'harmoniques de chaque nombre d'onde incident projeté suivant z de l'onde plane excitatrice, qui dépendent du pas inter-raideurs :

$$\alpha_q^i = \alpha^i + \frac{2\pi q}{d}, q \in \llbracket -Q; Q \rrbracket$$
(5.11)

On fait le constat à partir de l'équation (5.11) que pour un nombre d'onde incident donné, les alias du projeté suivant z auxquels seront évalués les matrices d'admittances $[\mathbf{R}]_{\sigma_A \sigma_1}(n, \alpha_p^i)$ et $[\mathbf{R}]_{u_1 \sigma_1}(n, \alpha_p^i)$ atteindront des valeurs d'autant plus élevées que le paramètre Q de troncature numérique retenu sera grand, ou que le pas inter-raideurs d sera petit.

Notamment, la stabilité numérique du formalisme développé dépendra particulièrement de la capacité des modèles à inverser la quantité matricielle $\mathcal{H} = \left[[\mathbf{I}_4] + \frac{1}{d} \left\{ \sum_{p=-Q}^Q [\mathbf{R}]_{u_1 \sigma_1}(n, \alpha_p^i) \right\} [\mathbf{B}(n)] \right]$ intervenant dans l'équation (5.10), et cette stabilité sera d'autant plus difficile à atteindre que le paramètre de troncature numérique

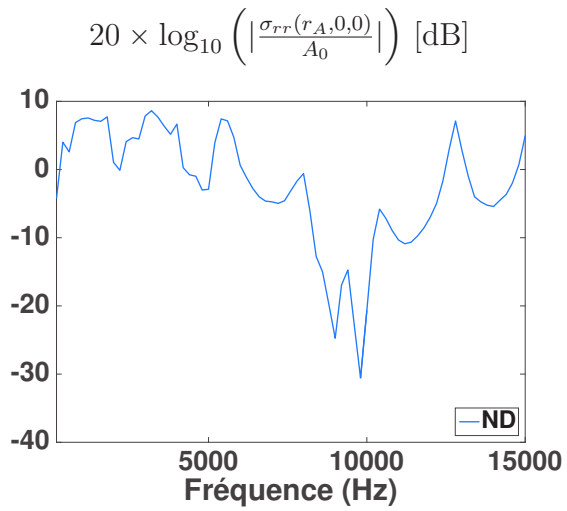
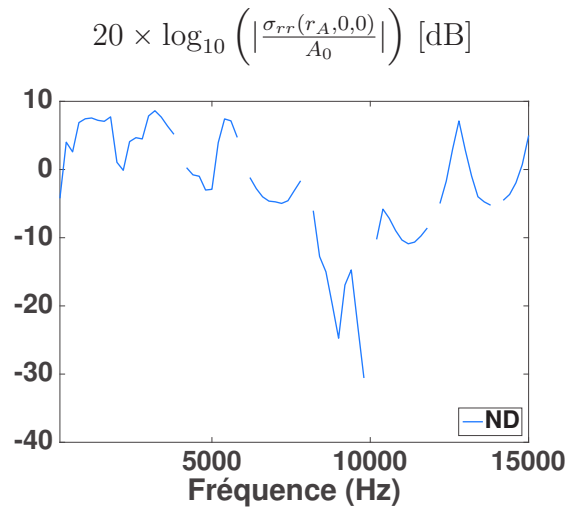
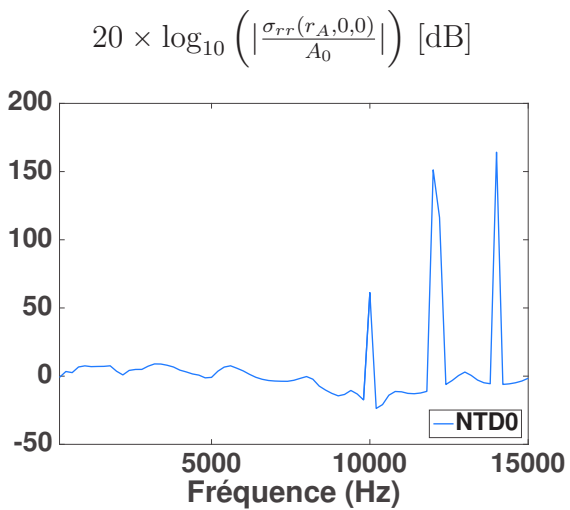
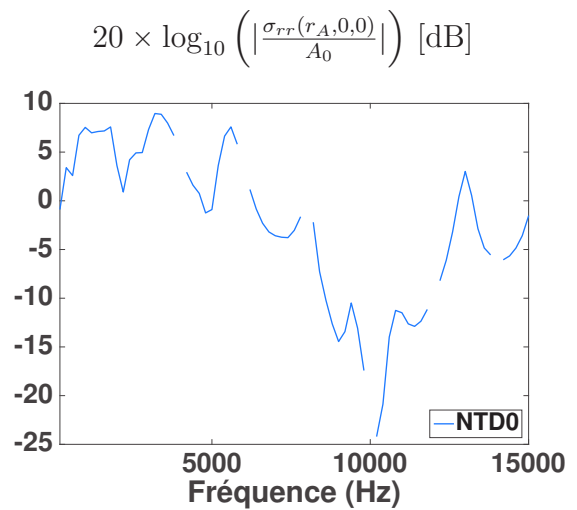
sera choisi élevé.

En revanche, ce même paramètre Q de troncature numérique devra être choisi suffisamment élevé pour assurer la convergence de la solution, et décrire correctement l'influence du réseau de raidisseurs sur la réponse de la structure.

Dans ce qui suit, les limites des modèles de coque multicouche raidie seront illustrées par la stabilité de la quantité \mathcal{H} quant aux paramètres Q et d , ainsi que par la convergence de la solution en fonction du paramètre Q de troncature numérique.

III.1.1 Comparaison de la stabilité numérique entre les deux modèles

On étudie d'abord le comportement des deux modèles développés sur une plage fréquentielle aussi étendue, ou presque, que celle retenue pour les configurations lisses. On représente donc en Fig. 5.15 les réponses en signal en incidence normale pour les 4 configurations avec dôme CVR, raidies, sur la plage fréquentielle $f \in [200; 15000]$ Hz, et un pas fréquentiel $\Delta f = 200$ Hz. Le paramètre Q de troncature est fixé arbitrairement à une valeur $Q = 10$, dont on montrera ensuite qu'elle est suffisante pour faire converger la solution. Le capteur supposé ponctuel est placé au-dessus du raidisseur, dans le plan d'incidence de l'onde plane, d'équation $\phi_A = 0$.

(a) Configuration **ND**, (hDGM)(b) Configuration **ND**, (sDGM)(c) Configuration **NTD0**, (hDGM)(d) Configuration **NTD0**, (sDGM)

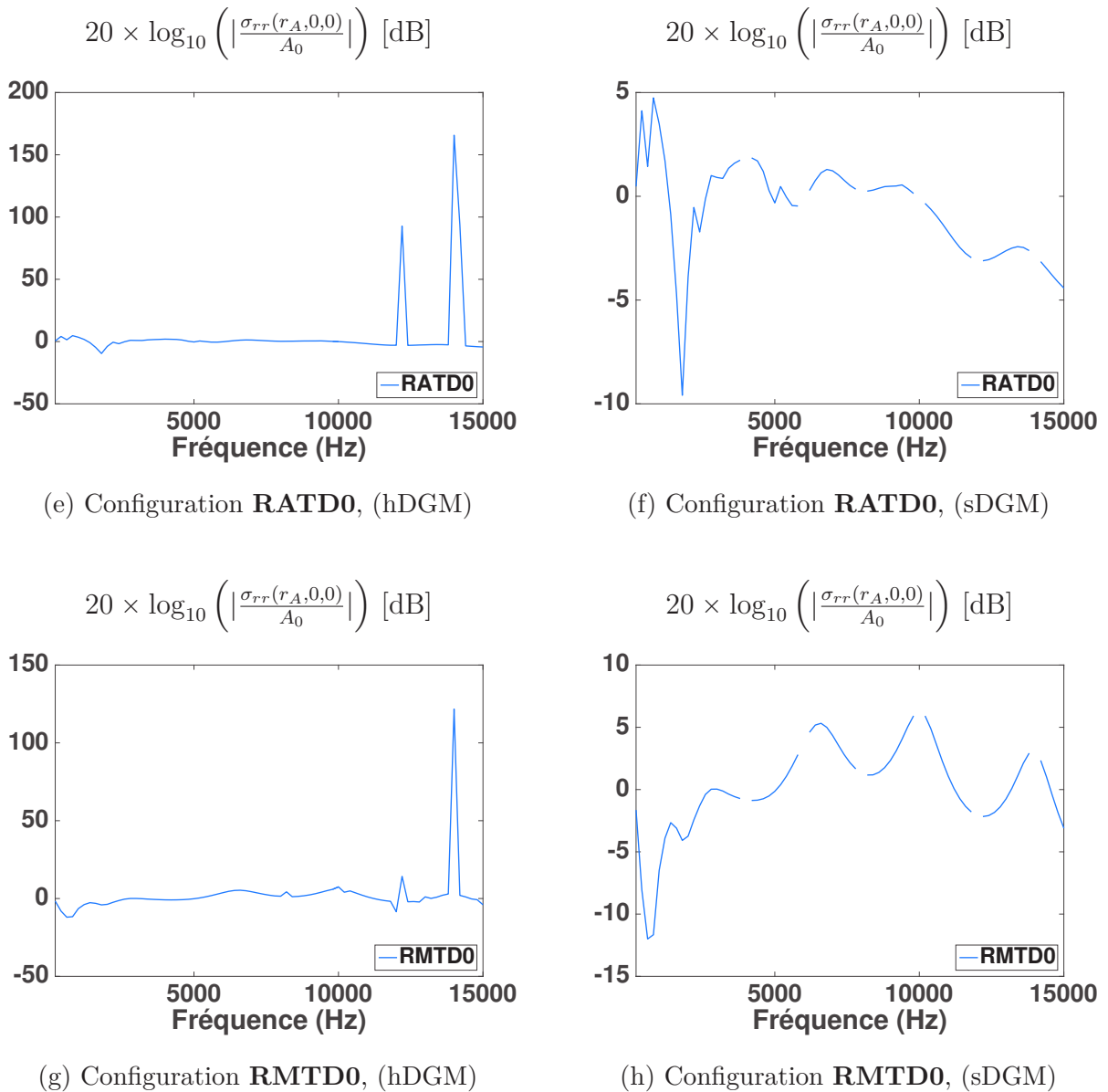


FIGURE 5.15 – Module du champ de pression en incidence normale

Configurations avec dôme CVR

Méthode hDGM (à gauche) et sDGM (à droite)

Les constats suivants sont faits à partir de la Fig. 5.15 :

- La méthode hDGM présente de fortes instabilités numériques aux hautes fréquences (pics aberrants sur la réponse en signal du capteur) pour les configurations revêtues.
- Par ailleurs, la méthode sDGM présente également des instabilités numériques, qui se

manifestent par des décrochages de la réponse en signal du capteur. Celle-ci présente des valeurs NaN qui se traduisent par les décrochages observés, et qui surviennent également en milieu de bande (premier décrochage vers $f = 4000$ Hz environ), pour toutes les configurations.

On notera que les constats qui viennent d'être énoncés sont également observés sur les configurations sans dôme CVR.

III.1.2 Précision numérique et différences observées entre les méthodes hDGM et sDGM

Encore une fois la précision numérique est en jeu dans les phénomènes observés, puisque des différences flagrantes entre les deux modèles sont constatés entre les deux colonnes de la Fig. 5.15. Une raison simple permet d'expliquer ces différences, à savoir l'absence du recours à la quadruple précision numérique dans le cas de la méthode sDGM.

Celle-ci, implémentée pour la méthode hDGM, a été introduite au chapitre 2 spécifiquement pour gérer les singularités dues aux fonctions de Bessel décrivant la propagation dans les couches solides. Ainsi, on parvenait correctement à décrire la physique du problème pour les configurations lisses y compris dans les zones proches des valeurs d'annulation des fonctions de Bessel.

Par ailleurs, l'implémentation de cette solution n'apparassait pas nécessaire lors du développement du modèle multicouche qui s'appuyait sur la méthode sDGM, avant le couplage avec le réseau périodique de renforts internes. En effet, la décomposition de Helmholtz dans chaque couche élémentaire, responsable de l'introduction des fonctions de Bessel dans le cas de la hDGM, était alors contournée par le formalisme de Stroh.

Cependant, il apparaît bien net que les décrochages dans la réponse en signal du capteur observés sur la méthode sDGM sont dues à un nouveau type d'instabilités numériques assez similaire, et introduites par le couplage avec les renforts internes. Ces instabilités numériques sont en partie résolues dans le modèle hDGM grâce au recours à la quadruple précision, qui diagnostique les valeurs NaN susceptibles d'apparaître dans le vecteur d'état spectral à chaque ordre circonferentiel et pour chaque valeur α^i du projeté suivant z du

nombre d'onde incident. Ce diagnostic soigne indifféremment les problèmes liés aux valeurs d'annulation des fonctions de Bessel dans les différentes couches que l'instabilité introduite par le réseau de renforts internes, et on s'aperçoit que la quadruple précision numérique ne suffit pas entièrement, du fait des pics aberrants de niveaux très élevés observés sur les configurations revêtues en Fig. 5.15c, 5.15e et 5.15g. Pour renforcer ces arguments, et expliquer la différence de comportement observée entre les deux méthodes, on retire la quadruple précision du modèle hDGM et on représente en Fig. 5.16 la réponse en signal obtenue pour la configuration N la plus simple, sans dôme CVR ni matériau de revêtement, raidie. On fixe toujours le paramètre de troncature numérique à $Q = 10$. On obtient alors une réponse très similaire à celle obtenue avec la méthode sDGM, qui présente les mêmes décrochages caractéristiques évoqués en III.1.1.

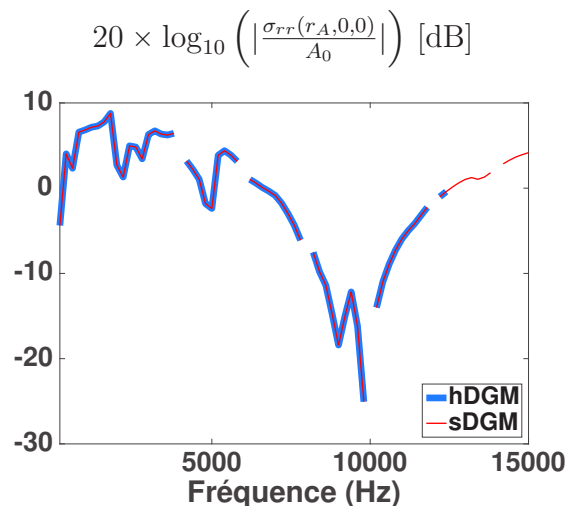


FIGURE 5.16 – Module du champ de pression en incidence normale
Configuration N raidie

Comparaison des méthodes hDGM (sans quadruple précision) et sDGM

On voit donc que le couplage avec le réseau de renforts internes nécessite à nouveau de renforcer la précision numérique du calcul, si les instabilités numériques introduites par celui-ci ne sont pas contournées autrement.

Cependant, ces instabilités peuvent être grandement atténuées, et elles correspondent à de nouvelles coïncidences du nombre d'onde projeté suivant z , cette fois avec le nombre

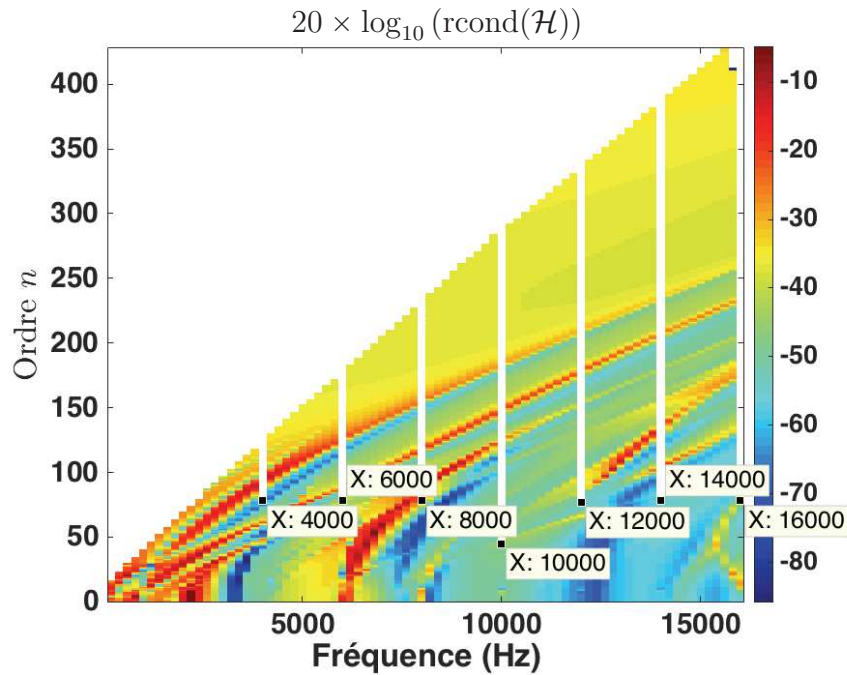
d'onde acoustique k_0 .

On va illustrer dans la section suivante le phénomène de coïncidence conduisant à de nouvelles instabilités, puis on montrera comment l'introduction d'un amortissement fluide dans l'eau permet d'atténuer celles-ci. Les réponses obtenues avec la méthode sDGM seront présentées en premier lieu, pour différentes valeurs de l'amortissement fluide. Puis on montrera les réponses en signal obtenues avec la méthode hDGM, pour mettre en relief que la valeur de l'amortissement à introduire peut être choisie beaucoup plus basse lorsque la quadruple précision numérique est également utilisée conjointement à cette procédure.

III.1.3 Instabilités numériques

III.1.3.1 Coïncidences au nombre d'onde acoustique

On a pointé en introduction la difficulté que pouvait poser l'inversion de la matrice \mathcal{H} dans l'expression (5.10) en fonction des valeurs prises par le paramètre de troncature numérique Q et la distance inter-raisseurs d . Par conséquent, la première intuition suivie dans l'étude pour expliquer les décrochages observés sur les réponses en signal a été de diagnostiquer la valeur logarithmique du conditionnement de la matrice \mathcal{H} (fonction MATLAB `rcond`). En raisonnant à nouveau sur la configuration \mathbf{N} raidie la plus simple, sans dôme CVR ni aucun matériau de revêtement, celle-ci est représentée sur la Fig. 5.17 dans le plan *Ordre circonférentiel-fréquence*, toujours pour un paramètre $Q = 10$:

FIGURE 5.17 – Conditionnement de la matrice \mathcal{H}

Configuration N raidie, instabilités numériques dans le fluide extérieur

La Fig. 5.17 montre clairement les instabilités numériques introduites par le réseau périodique de raidisseurs. En blanc sont représentés les zéros absolus du conditionnement de la matrice \mathcal{H} , dont la valeur est comprise entre 0 (mauvais conditionnement) et 1 (bon conditionnement). Outre le coin supérieur gauche qui n'est dû qu'à la troncature effectuée sur les ordres circonférentiels les plus élevés à chaque fréquence, on peut observer des fréquences discrètes pour lesquelles le conditionnement de la matrice \mathcal{H} devient rigoureusement nul au-delà d'un ordre circonférentiel donné. Ces fréquences correspondent aux coïncidences des alias α_q^i du nombre d'onde incident projeté suivant z avec le nombre d'onde acoustique dans l'eau. Par conséquent, les instabilités observées ne sont pas directement liées à un mauvais conditionnement de la matrice \mathcal{H} , mais à des valeurs infinies apparaissant dans ces zones de coïncidences.

Pour le cas d'incidence normale considéré dans ce paragraphe, on rappelle l'expression de la quantité γ_L déjà introduite dans les chapitres précédents, cette fois-ci évaluée sur la

famille d'alias α_q^i , et se simplifiant dans le cas d'incidence normale :

$$\begin{aligned}\gamma_L &= \sqrt{k_L^2 - (\alpha_q^i)^2} \\ &= \sqrt{k_L^2 - \left(\frac{2\pi q}{d}\right)^2}\end{aligned}\quad (5.12)$$

Pour l'eau, les fréquences de coïncidences pour lesquelles cette quantité γ_L s'annule sont données par :

$$\begin{aligned}\gamma_L^{\text{eau}} &= 0 \\ \iff f_q^{\text{insta}} &= \frac{c_L^{\text{eau}} q}{d}, q \in \llbracket -Q; Q \rrbracket\end{aligned}\quad (5.13)$$

Pour le pas inter-raisseurs $d = 750$ mm retenu pour l'étude, ces fréquences d'instabilité sont données par la liste de valeurs suivante :

$$f_q^{\text{insta}} = |q| \times 2000 \text{ Hz}, q \in \llbracket 0; Q \rrbracket$$

On retrouve ainsi les fréquences pour lesquelles les instabilités numériques sont observées en Fig. 5.17, à l'exception de la fréquence nulle, exclue de la plage de calcul, et de la première fréquence f_1^{insta} prédite à 2000 Hz, ce qui est à relier au comportement de la fonction de Hankel $H_n^{(1)}$.

En effet, la quantité $\left\{ \sum_{p=-Q}^Q [\mathbf{R}]_{u_1 \sigma_1} (n, \alpha_p^i) \right\}$ intervenant dans la matrice \mathcal{H} implique la matrice des admittances $[\mathbf{R}]_{u_1 \sigma_1}$, qui tient compte du couplage avec les fluides extérieur et intérieur au travers de termes proportionnels aux fonctions de Bessel. Or, on a vu au chapitre 2 que c'est la fonction $H_n^{(1)}$ qui a été retenue pour décrire la propagation dans le fluide extérieur, indépendamment de la méthode hDGM ou sDGM choisie par ailleurs. La grande plage dynamique de cette fonction génère un overflow numérique pour les arguments faibles, mais seulement pour des valeurs assez élevées de l'ordre circonferentiel n . Ce dernier point permet d'interpréter les deux comportements observés sur la Fig. 5.17 :

- D'une part, les instabilités observées n'apparaissent qu'au-delà d'un certain ordre circonferentiel, puis persistent ensuite aux ordres supérieurs.
- D'autre part, à la première fréquence f_1^{insta} prédite à 2000 Hz, le critère de troncature des ordres circonferentiels élevés stoppe la sommation des contributions supérieures suffisamment tôt pour que la valeur renvoyée par la fonction $H_n^{(1)}$ n'excède pas la limite de la double précision numérique.

Les valeurs infinies (valeurs Inf) apparaissant alors dans l'une des matrices d'admittances $[\mathbf{R}]_{u_1\sigma_1}$ évaluées aux alias α_q^i , rendent la matrice \mathcal{H} singulière et non inversible.

III.1.3.2 Influence du paramètre de troncature numérique et du pas inter-raideurs

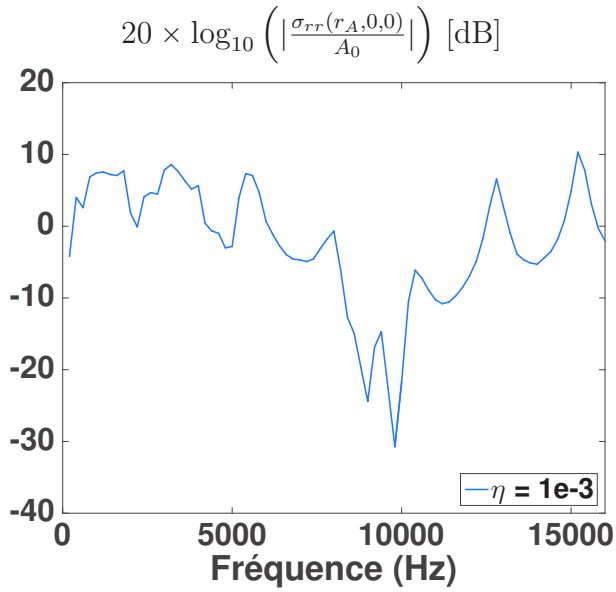
En reprenant l'expression (5.13) des fréquences de coïncidences au nombre d'onde acoustique, on voit que les instabilités décrites en Fig. 5.17 vont être d'autant plus nombreuses que le paramètre de troncature sera élevé, ou que le pas inter-raideurs d sera faible.

On notera cependant que réduire le paramètre de troncature numérique Q résoudra les instabilités aux hautes fréquences, et celles survenant aux premières harmoniques persisteront le plus longtemps, ce qui n'est pas exploitable pour une analyse aux basses fréquences. De plus, la convergence de la solution doit être garantie par le choix d'un paramètre de troncature numérique suffisamment élevé.

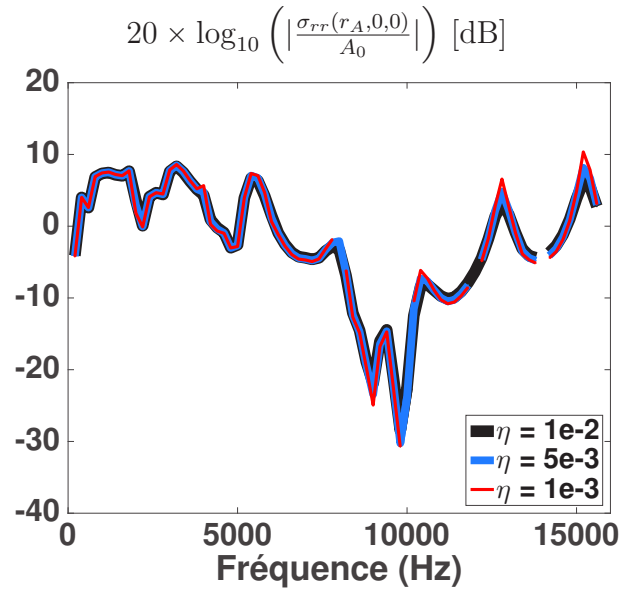
On va donc dans le paragraphe qui suit proposer une autre procédure numérique simple qui permet d'atténuer ces instabilités.

III.1.4 Amortissement fluide : atténuation des instabilités

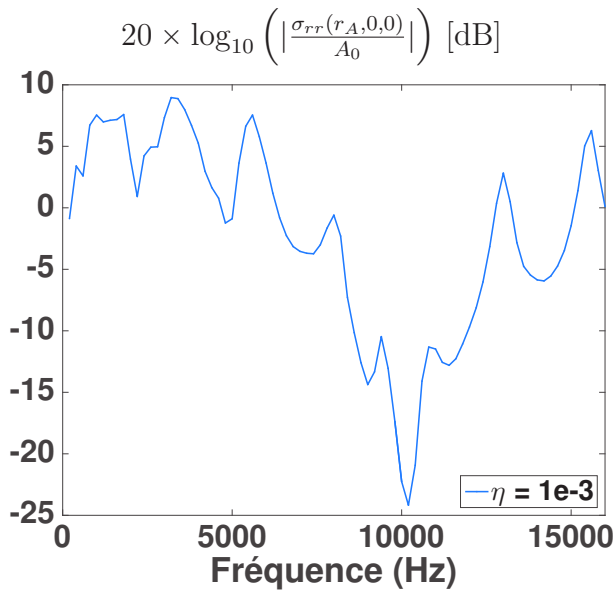
Le problème d'overflow numérique décrit au paragraphe précédent peut être atténué en ajoutant un amortissement fluide sur les couches d'eau intermédiaires, ainsi que sur le fluide extérieur occupant le milieu semi-infini. On arrive alors à s'éloigner des zones de coïncidence critiques où la fonction $H_n^{(1)}$ devient instable. Cependant, la valeur de l'amortissement imposé va influencer l'efficacité de cette procédure numérique quant à la résolution des instabilités. En Fig. 5.18 sont présentées les réponses en signal à la cote capteur pour les 4 configurations avec dôme CVR, toujours pour une valeur fixée du paramètre de troncature numérique à $Q = 10$. À gauche, la méthode hDGM est utilisée en fixant une valeur $\eta = 0,001$ pour l'amortissement fluide. À droite, on représente pour différentes valeurs d'amortissement les réponses obtenues avec la méthode sDGM.



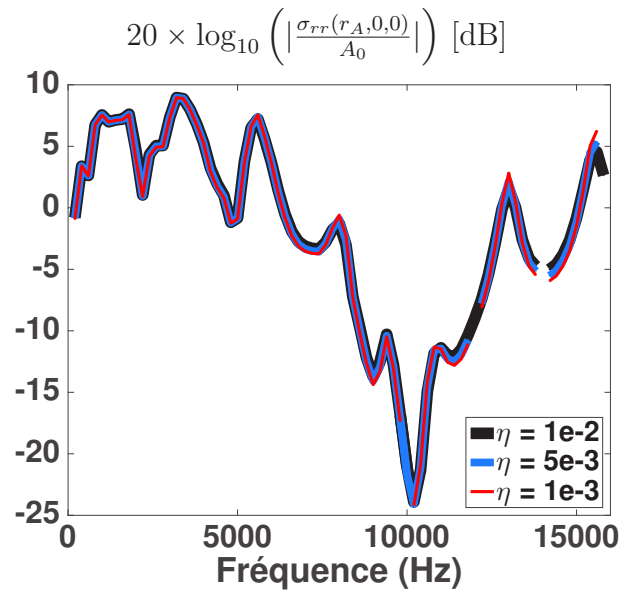
(a) Configuration ND, (hDGM)



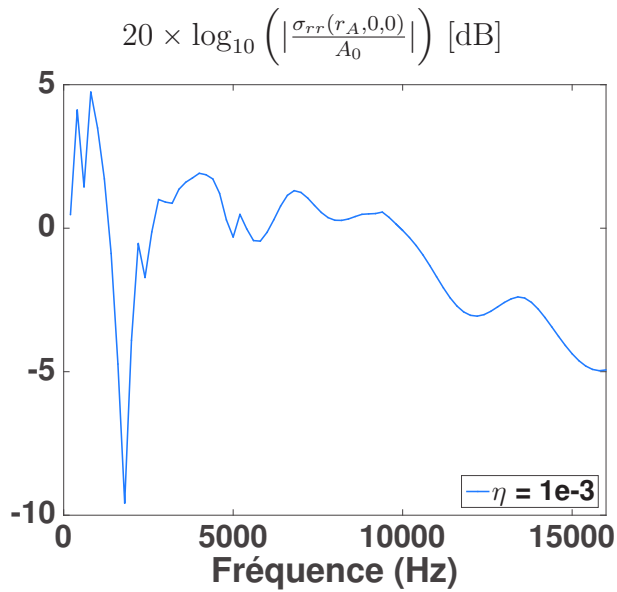
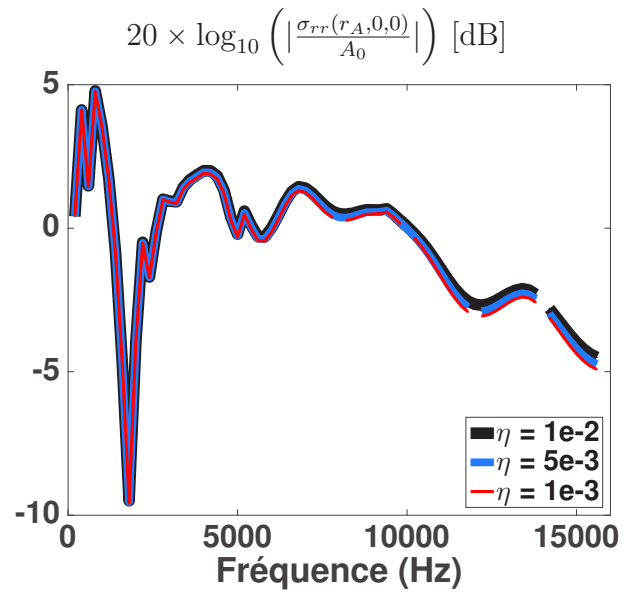
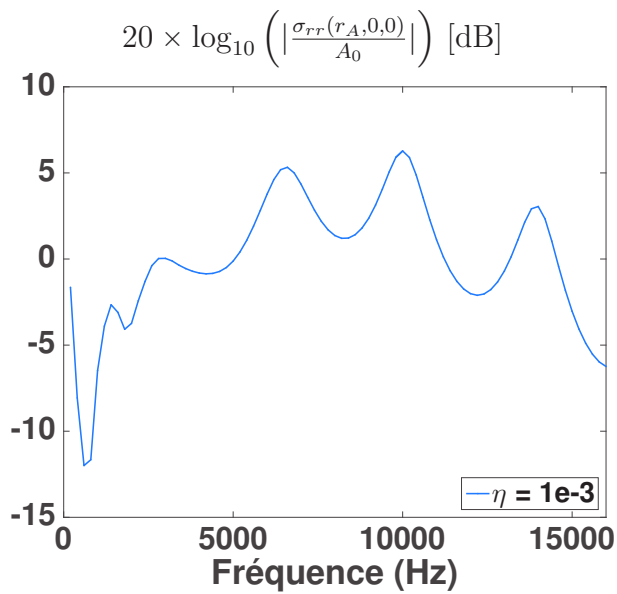
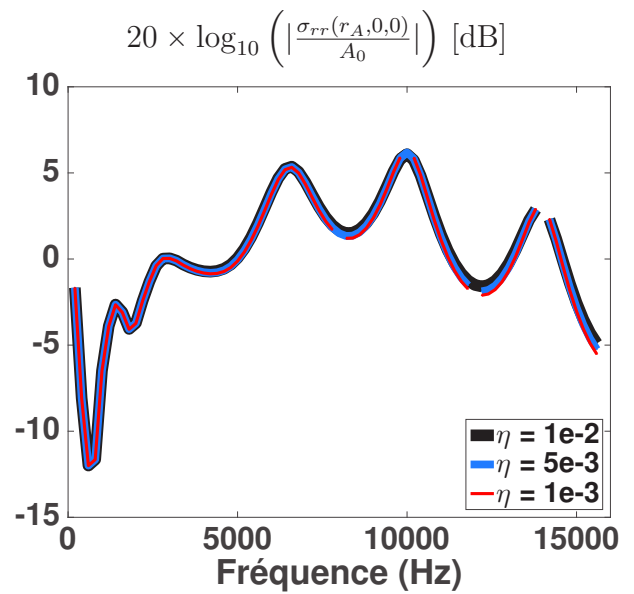
(b) Configuration ND, (sDGM)



(c) Configuration NTD0, (hDGM)



(d) Configuration NTD0, (sDGM)

(e) Configuration **RATD0**, (hDGM)(f) Configuration **RATD0**, (sDGM)(g) Configuration **RMTD0**, (hDGM)(h) Configuration **RMTD0**, (sDGM)FIGURE 5.18 – Module du champ de pression en incidence normale, $Q = 10$

Influence de l'amortissement fluide

Modèles hDGM (avec quadruple précision) à gauche et sDGM à droite

Si la méthode hDGM ne présente plus aucune instabilité liée à une coïncidence au nombre d'onde acoustique, c'est grâce au recours à la quadruple précision numérique. Par

conséquent, une valeur faible et réaliste $\eta = 0,001$ d'amortissement fluide imposé sur les couches d'eau et le fluide extérieur suffit à éviter les dernières zones numériquement difficiles qui sortaient sous la forme de pics aberrants sur la Fig. 5.15. En revanche, cette même valeur d'amortissement ne suffit pas à résoudre toutes les instabilités numériques dans le cas de la méthode sDGM, du fait que seule la double précision numérique est utilisée pour ce modèle. On remarque que même une valeur élevée $\eta = 0,01$ choisie pour l'amortissement fluide ne suffit pas à résoudre les instabilités numériques sur l'ensemble de la plage fréquentielle. On en conclut que l'implémentation de la quadruple précision numérique devient nécessaire également pour le modèle sDGM afin de résoudre les instabilités liées aux coïncidences dans les lames d'eau ou le fluide extérieur. Ce dernier développement n'aura pas été achevé dans le temps imparti de cette étude, par conséquent on raisonnera par la suite sur la méthode hDGM exclusivement, qui résout entièrement les décrochages sur la réponse d'antenne grâce au recours conjoint de la quadruple précision numérique et d'un faible amortissement fluide.

III.1.5 Étude de la convergence numérique

On présente maintenant les réponses en signal obtenues avec la méthode hDGM pour différentes valeurs du paramètre de troncature numérique Q , en incidence normale, sur la Fig. 5.19.

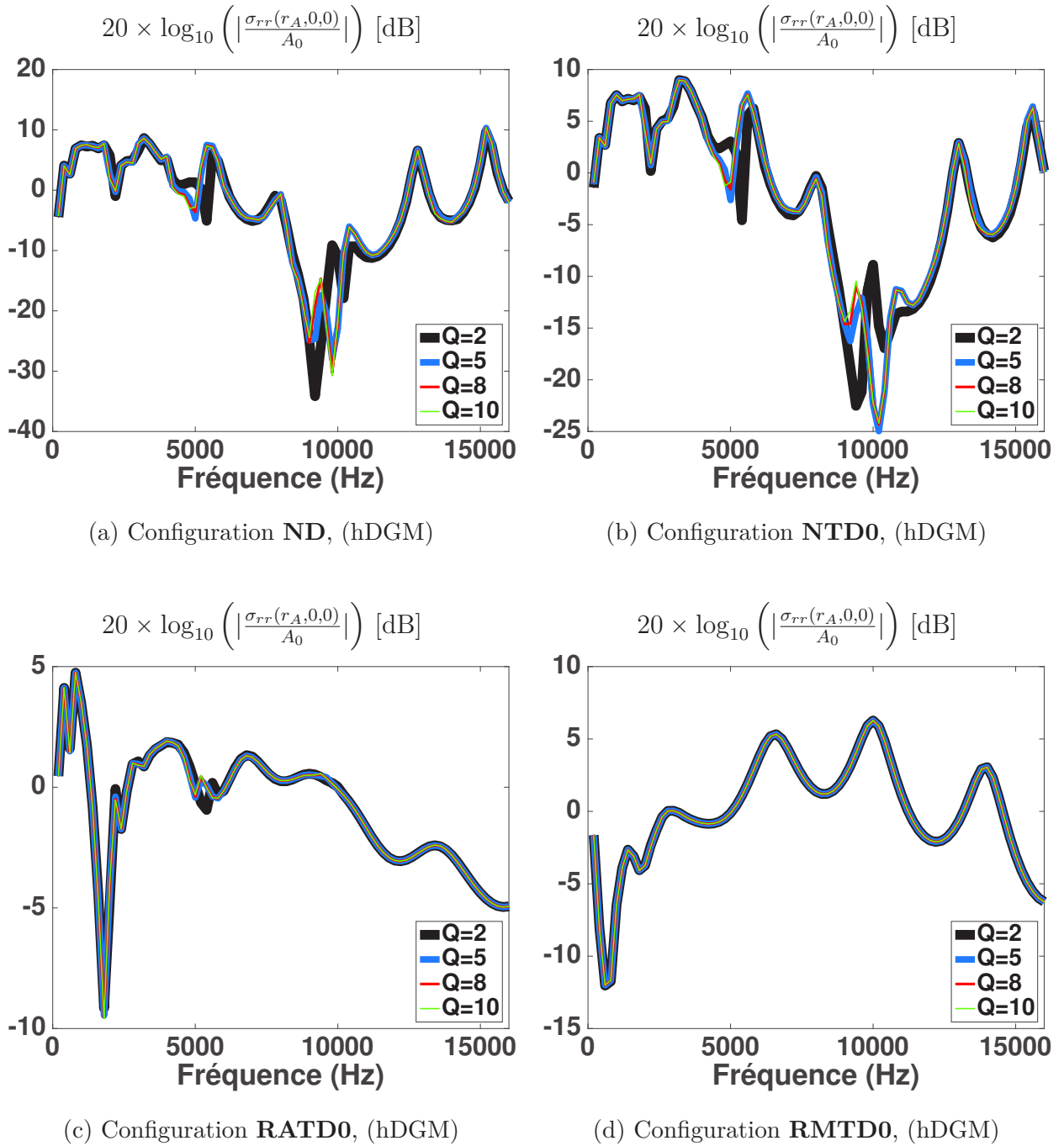


FIGURE 5.19 – Configurations avec dôme CVR, incidence normale
Convergence numérique et paramètre de troncature numérique

Comme annoncé en III.1.1, la valeur $Q = 10$ utilisée précédemment pour illustrer les phénomènes d'instabilité suffisait à assurer la convergence de la solution, puisqu'on peut voir sur la Fig. 5.19 que celle-ci est même atteinte dès $Q = 8$.

III.2 Comparaison à un modèle éléments finis

On cherche dans cette section à confronter les modèles développés à un calcul éléments finis complet de la structure, c'est-à-dire la coque couplée au réseau de raidisseurs. Le modèle éléments finis exploite à nouveau l'axisymétrie du problème, ainsi que la périodicité du réseau. Ainsi, la structure n'est maillée que sur la distance d inter-raisseurs suivant la direction axiale.

Deux configurations sont confrontées au modèle éléments finis :

- La configuration **N** raidie correspondant à la coque d'acier nue.
- Une des configurations revêtues **NTF0** correspondant à la coque d'acier revêtue de la matrice polyuréthane.

Les simulations éléments finis de ces modèles complets sont à nouveau effectuées sur le logiciel COMSOL MULTIPHYSICS. Afin que le coût numérique de ces modèles reste raisonnable par rapport aux capacités de calcul à disposition, on décide de réduire la plage fréquentielle d'étude, en choisissant un pas fréquentiel plus fin.

On raisonnera donc sur la plage $f \in [25; 6000]$ Hz plus étroite, avec un pas fréquentiel $\Delta f = 25$ Hz plus fin.

III.2.1 Critère de discrétisation

Les maillages réalisés pour les deux configurations sont présentés en Fig. 5.20 :

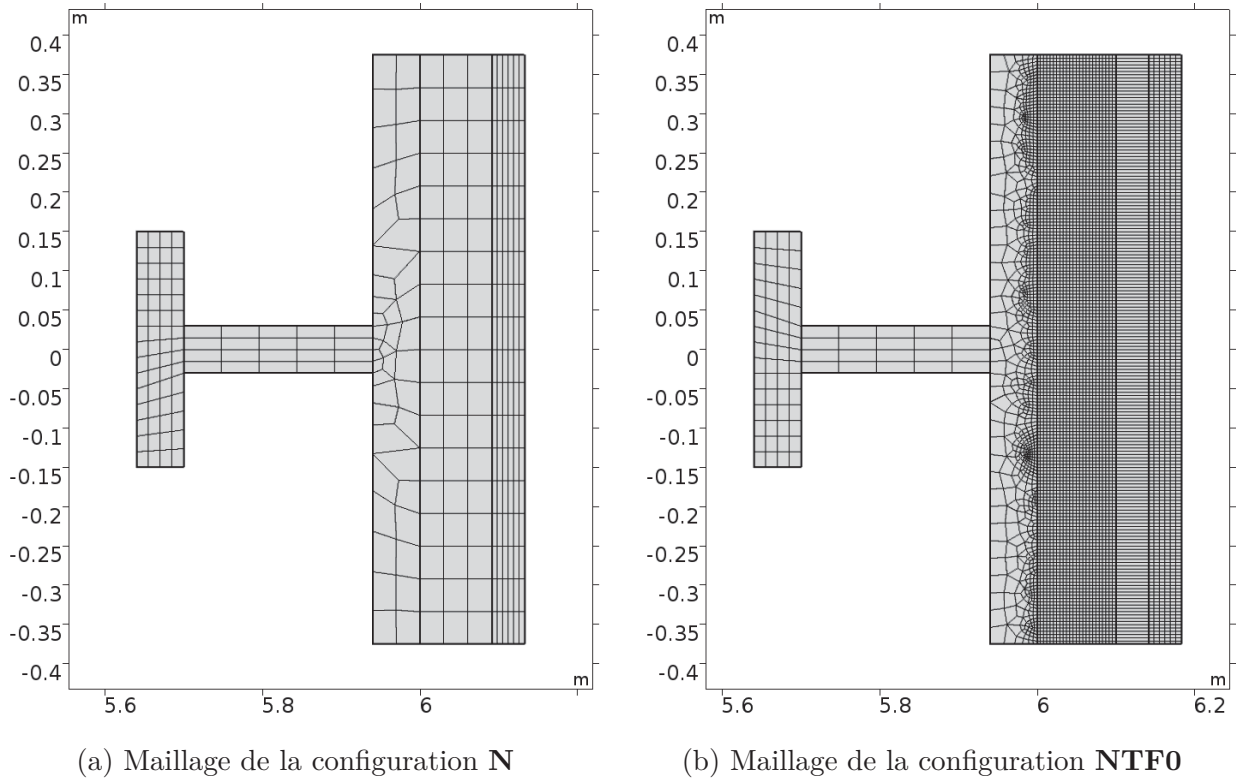


FIGURE 5.20 – Présentation des maillages éléments finis pour les deux configurations tests

Le même critère que pour les configurations lisses est encore appliqué sur chacun des maillages, à savoir de fixer un minimum de 6 éléments par longueur d'onde de cisaillement dans chaque matériau.

III.2.2 Confrontation du modèle hDGM aux modèles éléments finis

On présente en Fig. 5.21 les réponses en signal en incidence normale et oblique $(G_t, i) = (45^\circ, 0^\circ)$ pour les configurations tests obtenues avec le modèle hDGM d'une part (en bleu), et avec le calcul éléments finis (en rouge) :

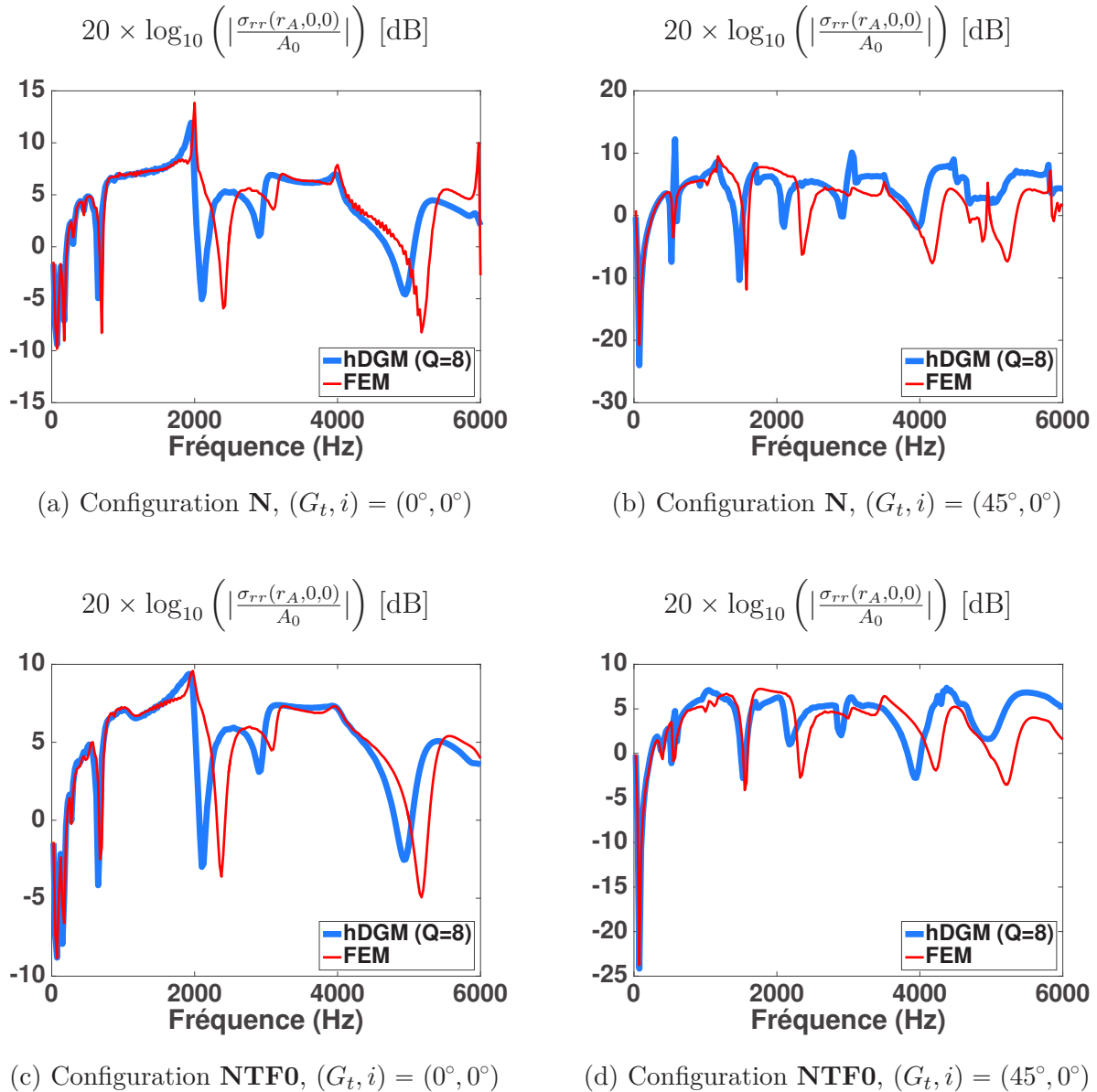


FIGURE 5.21 – Confrontation du modèle hDGM au modèle éléments finis complet
Configuration N et **NTF0**, incidence normale (à gauche) et oblique (à droite)

On conclut d'une bonne corrélation du modèle analytique avec les calculs éléments finis sur une plage fréquentielle réduite par rapport à la plage d'étude, environ jusqu'à 2000 Hz, et ce pour les deux configurations nue et revêtue. Les écarts observés aux fréquences plus élevées sont dues à une différence entre les deux méthodes concernant la modélisation du raidisseur. Les équations de l'élasticité 3D sont utilisées pour décrire le raidisseur dans le calcul éléments finis, tandis qu'un modèle coque mince a été retenu pour caractériser

la dynamique de celui-ci avant le couplage avec la structure multicouche dans le modèle développé.

III.2.3 Coût numérique

On présente le tableau 5.3 comparatif du coût numérique entre les modèles développés et la méthode par éléments finis sur les deux configurations raidies qui ont été comparées, pour le cas d'incidence normale. Les mêmes machines ont été utilisées respectivement pour faire tourner les modèles hDGM et sDGM d'une part, et éléments finis d'autre part.

Configuration	Incidence Normale (90°)			
	hDGM	sDGM	FEM Nb d'éléments	FEM Temps CPU
N	11 min	4 min 30 s	286	1h30 min
NTF0	13 min	17 min	6502	29h 56 min
Configuration	A		B	
A :	Processeur Intel Core i7, 2,8 GHz RAM 16 Go			
B :	2 processeurs Intel Core(R) Xeon, 3,40 GHz RAM 128 Go			

TABLE 5.3 – Coût numérique de la réponse en signal des configurations **N** et **NTF0** raidies en incidence normale
 $f \in [25; 6000]$ Hz, $\Delta f = 25$ Hz

On constate à nouveau un gain significatif en temps calcul pour les deux modèles développés comparés aux calculs éléments finis complets.

III.3 Intérêt de la prise en compte des renforts internes

On met enfin en relief l'intérêt du développement d'un modèle multicouche couplé au réseau de raidisseurs, en illustrant l'influence des renforts internes sur la réponse en signal du capteur en Fig. 5.22, pour les configurations avec dôme CVR. Les réponses sont obtenues avec le modèle hDGM développé, sur la plage fréquentielle étendue $f \in [100; 15000]$, avec un pas fréquentiel $\Delta f = 200$ Hz. La réponse obtenue avec la configuration lisse (en trait plein noir) est comparée avec les réponses obtenues pour la configuration raidie, pour deux positions de capteur suivant l'axe de la coque :

- En trait plein rouge, le capteur ponctuel est placé au-dessus d'un raidisseur ($z_A = 0$).
- En trait plein vert, le capteur ponctuel est placé à mi-chemin entre deux raidisseurs ($z_A = \frac{d}{2}$).

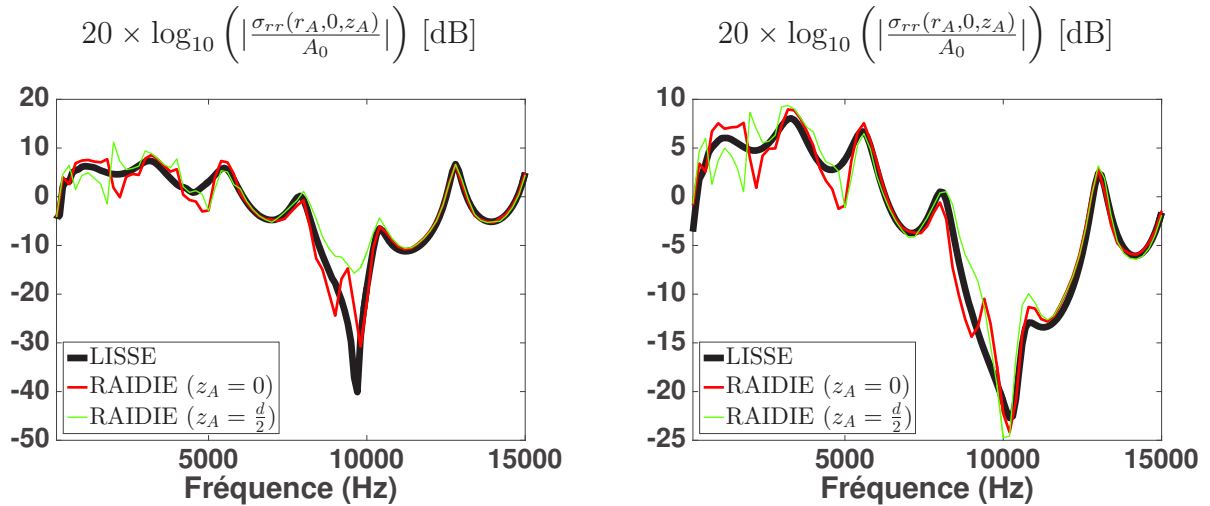
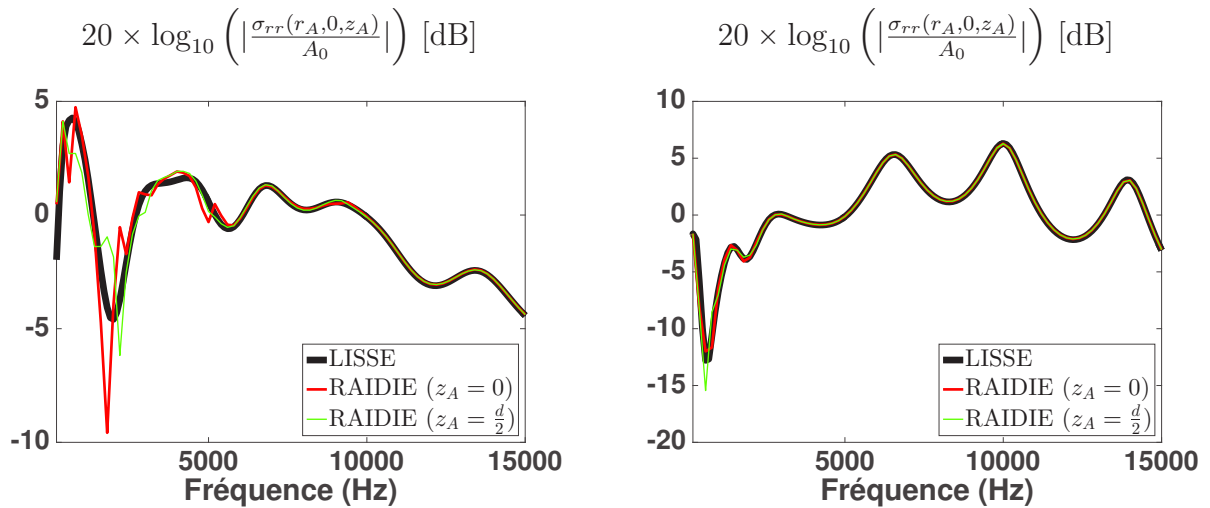
(a) Configuration **ND**, incidence normale(b) Configuration **NTD0**, incidence normale(c) Configuration **RATD0**, incidence normale(d) Configuration **RMTD0**, incidence normale

FIGURE 5.22 – Comparaison des réponses obtenues pour les 4 configurations avec dôme CVR avec et sans couplage avec les raidisseurs

Deux constats majeurs peuvent être faits à partir de la Fig. 5.22, et mettent en valeur les développements effectués et la prise en compte des renforts internes :

- D'une part, les réponses obtenues pour les configurations raidies aux deux positions axiales du capteur ponctuel présentent de larges écarts par rapport à la réponse en signal de la configuration lisse correspondante, hormis éventuellement pour

la configuration **RMTD0** impliquant le matériau de masquage. Cette première observation souligne l'influence des renforts internes sur la réponse, et ce d'autant plus aux basses fréquences.

- D'autre part, la réponse en signal du capteur est rendue très inhomogène en fonction de sa position le long de l'axe de la coque, en présence des raidisseurs. Ce deuxième constat met en relief les dispersions engendrées par le réseau de raidisseurs sur la réponse d'un hydrophone suivant sa position axiale sur le flanc de la coque, ce qui peut entraîner une dégradation des performances d'une véritable antenne.

Par ailleurs, on peut commenter l'influence des matériaux de revêtement sur cette inhomogénéité induite par le réseau de renforts internes. En effet, on observe sur toutes les configurations que les réponses obtenues pour les configurations raidies recollent à celle de la configuration lisse au-delà d'une certaine fréquence, et qu'alors les dispersions engendrées par les renforts internes deviennent négligeables.

Cependant, cette indépendance de la réponse quant au réseau de raidisseurs survient d'autant plus tôt pour la configuration **RMTD0**, comprenant une couche de matériau de masquage, et dans une moindre mesure pour la configuration **RATD0** incluant une couche de matériau anéchoïque. Le matériau de masquage, qui présente une très forte rupture d'impédance, peut être considéré comme un réflecteur parfaitement mou au-delà de sa fréquence de fonctionnement, et va rendre invisible le réseau de renforts internes pour le capteur ponctuel enfoui dans le PU.

Par ailleurs, le fort amortissement imposé sur le matériau anéchoïque explique qu'au-delà des 6000 Hz, les réponses obtenues avec la configuration **RATD0** raidie recollent avec celle de la configuration lisse.

IV Conclusion

Cette partie a discuté d'une part de la physique du problème considéré, et d'autre part a présenté différentes validations numériques quant aux outils développés durant l'étude. Les réponses en signal obtenues en configuration plane ont mis en évidence l'influence des matériaux de revêtements sur la réponse en signal de l'antenne, justifiant

ainsi l'importance d'avoir considéré un modèle multicouche dans les développements. De plus, celles-ci ont permis de confronter les réponses en signal obtenues avec les modèles cylindriques développés, en plus de la validation croisée effectuée entre les deux méthodes hDGM et sDGM. Concernant les configurations lisses, on a pu constater une excellente corrélation des deux méthodes avec le modèle plan sur toute la plage fréquentielle d'étude, hormis aux plus basses fréquences où les différences entre les géométries se manifestent. Ces différences, ainsi que l'impossibilité dans le modèle plan de considérer le cas d'excitation par l'arrière de la coque, ont mis en relief l'avantage de tenir compte de la géométrie cylindrique dans les modèles développés. Par ailleurs, l'introduction des renforts internes grâce au formalisme de couplage présenté au chapitre 4 a montré l'apparition de nouvelles instabilités numériques sur les configurations raidies, aux zones de coïncidence entre les différents alias harmoniques du nombre d'onde incident et le nombre d'onde acoustique dans l'eau. Ces instabilités étaient aggravées par l'augmentation du paramètre de troncature numérique utilisé pour le calcul de la contribution du réseau de raidisseurs, ou encore par la diminution du pas inter-raisseurs. Or, la quadruple précision numérique utilisée par la méthode hDGM ne permettait pas de résoudre entièrement ces instabilités. Cependant, l'introduction d'un faible amortissement sur le fluide extérieur et les couches d'eau intermédiaires, utilisé conjointement au recours à la quadruple précision, s'est révélé efficace pour éviter ces zones numériquement difficiles. Par conséquent, l'implémentation de la quadruple précision numérique sur le modèle sDGM sera la piste naturelle à développer pour le prolongement de cette étude afin de mettre à niveau le modèle sDGM quant à ces instabilités.

Enfin, la comparaison de deux configurations raidies à des calculs éléments finis ont montré une bonne corrélation entre les deux méthodes au moins aux basses fréquences. Les écarts observés au-delà sont supposés être dus à une différence de modélisation du raidisseur entre les deux modèles, puisque l'outil développé utilisait un modèle coque mince, contrairement au modèle éléments finis décrivant le raidisseur avec des éléments volumiques.

Conclusion générale et perspectives

Bilan général de l'étude

Dans cette thèse, on s'est intéressé à la prédiction dans une large gamme de fréquence de la réponse d'une structure cylindrique multicouche immergée, couplée à un réseau périodique de renforts internes, et excitée par une onde plane incidente. Dans cette optique, deux méthodes analytiques spectrales ont été développées pour la modélisation de la structure multicouche, et reposent sur un assemblage matriciel global des équations de continuité à chaque interface. Celles-ci sont obtenues dans chaque couche élémentaire soit par une décomposition de Helmholtz du champ de déplacements (méthode hDGM), soit par l'utilisation du formalisme de Stroh et l'établissement de matrices de transfert élémentaires (méthode sDGM). L'avantage de ces deux méthodes repose tout à la fois sur leur stabilité numérique dans une large plage fréquentielle que sur leur abilité à gérer de manière transparente des couches fluides intermédiaires. D'autre part, si la validation numérique n'a pas mis en évidence cet aspect, la méthode sDGM basée sur le formalisme de Stroh confère également un avantage majeur en termes de généralité, puisqu'elle permet la prise en compte de couches solides d'anisotropie quelconque.

Par ailleurs, le formalisme de couplage établi pour tenir compte de l'influence des renforts internes permet la modélisation d'un réseau de raidisseurs périodiquement espacés suivant l'axe de la structure, en conservant un modèle de coque épaisse pour celle-ci. De plus, chaque raidisseur est représenté par un modèle coque mince calculé sous éléments finis, permettant de tenir compte de la déformée tridimensionnelle de la section de chaque renfort.

Les modèles développés sont par conséquent des outils de prototypage rapide pour l'analyse

des structures *cylindriques, raidies périodiquement et revêtues*. Grâce à l'approche par sous-structuration adoptée, ceux-ci autorisent une polyvalence sur la géométrie des raidisseurs retenue et sur le nombre de revêtements acoustiques éventuels surmontant la coque d'acier, sans pour autant impacter significativement le coût numérique contrairement à un modèle éléments finis complet, ni en restreignant le modèle par une hypothèse de géométrie plane, ou encore de coque mince.

Difficultés rencontrées et apports de l'étude

Discutées au chapitre 2, la méthode hDGM présentait des instabilités numériques localement restreintes dans les zones de coïncidences du nombre d'onde avec les nombres d'onde de compression et de cisaillement de la coque d'acier. Le recours à la quadruple précision uniquement dans ces zones numériquement difficiles a permis de supprimer ces instabilités sur la plage de fonctionnement escomptée, sans pour autant faire exploser le coût numérique.

Par ailleurs, la méthode sDGM, présentée au chapitre 3, repose sur une écriture du problème dans chaque couche élémentaire par matrices de transfert. La procédure classique d'assemblage par produit matriciel de cette méthode entraînait des instabilités numériques aux hautes fréquences bien identifiées dans la littérature, tout comme rendait difficile la prise en compte de couches fluides intermédiaires. Ces deux types d'instabilités ont été résolues en reprenant une procédure d'assemblage matriciel global similaire à celle de la méthode hDGM. Cette procédure d'assemblage effectuée à la suite d'une résolution dans chaque couche élémentaire basée sur le formalisme de Stroh n'a pas été retrouvée dans la littérature à notre connaissance, et constituerait alors une originalité de la thèse concernant les méthodes spectrales analytiques des structures multicouches.

La validation numérique, par confrontation croisée ainsi qu'à un modèle éléments finis, a permis de statuer quant à la robustesse des modèles multicouches sur les configurations lisses, avec ou sans dôme CVR, une fois que ces solutions furent apportées.

D'autre part, l'investigation du comportement des modèles complets, une fois le couplage effectué, a mis en évidence l'apparition d'un autre type d'instabilités numériques spécifiques

au couplage avec les renforts internes, cette fois liées aux coïncidences des différents alias du nombre d'onde incident avec le nombre d'onde acoustique. La gestion de ces instabilités par l'utilisation conjointe de la quadruple précision numérique et l'introduction d'un faible amortissement fluide dans l'eau permet de repousser ces instabilités à des valeurs plus élevées du paramètre de troncature, ainsi qu'à des valeurs plus faibles du pas inter-raideurs. Cette procédure permet de faire converger la solution sur une plage fréquentielle plus élevée, et a été illustrée par les résultats obtenues avec la méthode hDGM. Un développement mineur à poursuivre sera d'implémenter la quadruple précision numérique pour mettre à niveau le modèle sDGM à la même stabilité numérique que le modèle hDGM.

Perspectives d'étude

Dans les perspectives d'étude, on peut mentionner le fait qu'aucune configuration n'a été traitée pour mettre en valeur la possibilité avec la méthode sDGM de modéliser des couches solides élastiques d'anisotropie quelconque. En particulier, le dôme CVR utilisé dans les configurations avec couche fluide intermédiaire n'est pas constitué d'un matériau isotrope, et une validation numérique sur une configuration prenant en compte cette anisotropie serait intéressante.

Par ailleurs, l'extension des outils proposés à d'autres types d'excitation (excitation mécanique et en bruit hydrodynamique) sera l'une des pistes de travail prioritaires pour la suite de cette étude. D'une part, la réponse à une excitation mécanique permettrait d'étendre l'analyse des structures multicouches raidies périodiquement au problème de *discrétion acoustique*. D'autre part, les bruits liés à l'interaction de l'écoulement avec la structure sont d'une importance majeure dans la réponse vibro-acoustique en hydrodynamique navale. Enfin, la polyvalence de l'outil proposé concerne uniquement le modèle de raidisseur choisi, mais le réseau est en revanche toujours supposé périodique infini. Par conséquent, une autre piste de travail sera d'étendre la généralité du réseau de renforts internes, d'une part au cas de double réseau périodique, d'autre part au cas d'apériodicité. Ce dernier cas permettrait de prendre en compte la présence d'autres types de discontinuités que

les raidisseurs, typiquement les cloisons internes séparant les différents compartiments du sous-marin. Une stratégie crédible pour exploiter les développements déjà menés serait de reprendre la méthodologie adoptée pour la modélisation de la structure multicouche, mais de choisir désormais un autre formalisme pour le couplage, par exemple l'approche des admittances circonférentielles (CAA) présentée par Maxit [131]. Enfin, les développements menés ne concernaient pas le traitement d'antenne, mais s'intéressaient bien à la fonction de transfert de la structure raidie. Par conséquent, tous les résultats présentés étaient calculés pour un simple capteur ponctuel. Néanmoins, les modèles développés s'adaptent rapidement au cas d'une antenne constituée de plusieurs capteurs surfaciques, et pourront donc être exploités par la suite pour étudier l'influence des raidisseurs sur les performances de l'antenne.

Annexe A

Autour de la décomposition de Helmholtz

I Expressions des matrices élémentaires solide et fluide

Les matrices élémentaires fluide et solide introduites au chapitre 2 établissent les relations entre les coefficients d'ondes volumiques de la décomposition de Helmholtz et les déplacements et contraintes. Celles-ci vérifient dans chaque couche les expressions suivantes :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}(r, n, \alpha) = [\mathbf{S}] \mathbf{C}(n, \alpha) \tag{A.1}$$
$$\begin{pmatrix} u_r \\ \sigma_{rr} \end{pmatrix}(r, n, \alpha) = [\mathbf{F}] \mathbf{C}(n, \alpha)$$

avec pour la matrice solide l'arrangement suivant pour les déplacements et contraintes :

$$\mathbf{u} = (u_r, u_\phi, u_z)^T \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{rr}, \sigma_{r\phi}, \sigma_{rz})^T$$

I.1 Matrice élémentaire solide

Pour une couche solide quelconque de la structure multicouche, les coefficients S_{ij} de la matrice élémentaire $[\mathbf{S}]$ sont explicitées ci-dessous :

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \gamma_L J'_n(\gamma_L r) & S_{21} &= \frac{in}{r} J_n(\gamma_L r) & S_{31} &= i\alpha J_n(\gamma_L r) \\
S_{12} &= \gamma_L H'_n(\gamma_L r) & S_{22} &= \frac{in}{r} H_n(\gamma_L r) & S_{32} &= i\alpha H_n(\gamma_L r) \\
S_{13} &= \frac{in}{r} J_n(\gamma_T r) & S_{23} &= -\gamma_T J'_n(\gamma_T r) & S_{33} &= 0 \\
S_{14} &= \frac{in}{r} H_n(\gamma_T r) & S_{24} &= -\gamma_T H'_n(\gamma_T r) & S_{34} &= 0 \\
S_{15} &= -i\alpha \gamma_T J'_n(\gamma_T r) & S_{25} &= \frac{n\alpha}{r} J_n(\gamma_T r) & S_{35} &= (\alpha^2 - k_s^2) J_n(\gamma_T r) \\
S_{16} &= -i\alpha \gamma_T H'_n(\gamma_T r) & S_{26} &= \frac{n\alpha}{r} H_n(\gamma_T r) & S_{36} &= (\alpha^2 - k_s^2) H_n(\gamma_T r)
\end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
S_{41} &= 2\mu\gamma_L^2 J''_n(\gamma_L r) - \lambda k_i^2 J_n(\gamma_L r) & S_{51} &= \frac{2\mu in}{r^2} (\gamma_L r J'_n(\gamma_L r) - J_n(\gamma_L r)) & S_{61} &= 2\mu i\alpha \gamma_L J'_n(\gamma_L r) \\
S_{42} &= 2\mu\gamma_L^2 H''_n(\gamma_L r) - \lambda k_i^2 H_n(\gamma_L r) & S_{52} &= \frac{2\mu in}{r^2} (\gamma_L r H'_n(\gamma_L r) - H_n(\gamma_L r)) & S_{62} &= 2\mu i\alpha \gamma_L H'_n(\gamma_L r) \\
S_{43} &= \frac{2\mu in}{r^2} (\gamma_T r J'_n(\gamma_T r) - J_n(\gamma_T r)) & S_{53} &= \frac{\mu}{r^2} (-\gamma_T^2 r^2 J''_n(\gamma_T r) + \gamma_T r J'_n(\gamma_T r) - n^2 J_n(\gamma_T r)) & S_{63} &= -\frac{\mu n\alpha}{r} J_n(\gamma_T r) \\
S_{44} &= \frac{2\mu in}{r^2} (\gamma_T r H'_n(\gamma_T r) - H_n(\gamma_T r)) & S_{54} &= \frac{\mu}{r^2} (-\gamma_T^2 r^2 H''_n(\gamma_T r) + \gamma_T r H'_n(\gamma_T r) - n^2 H_n(\gamma_T r)) & S_{64} &= -\frac{\mu n\alpha}{r} H_n(\gamma_T r) \\
S_{45} &= -2\mu i\alpha \gamma_T^2 J''_n(\gamma_T r) & S_{55} &= \frac{2\mu\alpha n}{r^2} (\gamma_T r J'_n(\gamma_T r) - J_n(\gamma_T r)) & S_{65} &= \mu\gamma_T (2\alpha^2 - k_s^2) J'_n(\gamma_T r) \\
S_{46} &= -2\mu i\alpha \gamma_T^2 H''_n(\gamma_T r) & S_{56} &= \frac{2\mu\alpha n}{r^2} (\gamma_T r H'_n(\gamma_T r) - H_n(\gamma_T r)) & S_{66} &= \mu\gamma_T (2\alpha^2 - k_s^2) H'_n(\gamma_T r)
\end{aligned} \tag{A.3}$$

I.2 Matrice élémentaire fluide

Pour une couche fluide quelconque de la structure multicouche, les coefficients F_{ij} de la matrice élémentaire $[\mathbf{F}]$ sont explicitées ci-dessous :

$$\begin{aligned}
F_{11} &= \gamma_L J'_n(\gamma_L r) & F_{12} &= \gamma_L H'_n(\gamma_L r) \\
F_{21} &= -\rho\omega^2 J_n(\gamma_L r) & F_{22} &= -\rho\omega^2 H_n(\gamma_L r)
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Annexe B

Autour de la méthode par matrices de transfert

I Formalisme de Stroh

I.1 Formulaire

Les matrices introduites au chapitre 3 pour établir le système différentiel d'ordre 1 basé sur le formalisme de Stroh ont pour expressions :

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} & \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} & \mathbf{0}_3 \\ 0 & -\frac{1}{r} & 0 & \\ & \mathbf{0}_3 & & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} & \\ \mathbf{0}_3 & -\mathbf{J}_3 \\ & \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{H}] = \begin{pmatrix} & & & \\ & \mathbf{0}_3 & & \mathbf{0}_3 \\ 0 & 1 & 0 & \\ & & & \\ 1 & 0 & 0 & \mathbf{0}_3 \\ & & & \\ 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{E}] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{r} \\ -\rho\omega^2 \mathbf{I}_3 & 0 & -\frac{2}{r} & 0 \\ -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0}_3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{1}{r} & \mathbf{0}_3 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \mathbf{0}_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1}) \\
\mathbf{0}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

I.2 Démonstration de l'établissement du système différentiel

Pour se ramener au système différentiel d'ordre 1 et au formalisme de Stroh à partir des équations du mouvement, de la relation de Cauchy et de la loi de Hooke, exprimées en fonction des matrices explicitées en I.1, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&\left\{ \begin{aligned} [\mathbf{A}] \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= [\mathbf{B}] \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r} + [\mathbf{E}] \mathbf{V} - \rho \mathbf{f} & (L_1) \\ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} &= [\mathbf{H}] \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r} + [\mathbf{K}] \mathbf{V} & (L_2) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= [\mathbf{L}] \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} & (L_3) \end{aligned} \right. \\
\iff &\left\{ \begin{aligned} ([\mathbf{ALH}] - [\mathbf{B}]) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r} &= ([\mathbf{E}] - [\mathbf{ALK}]) \mathbf{V} - \rho \mathbf{f} & (L_1) \longleftarrow [\mathbf{AL}] \times (L_2) - (L_1) \\ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} &= [\mathbf{H}] \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r} + [\mathbf{K}] \mathbf{V} & (L_2) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= [\mathbf{L}] \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} & (L_3) \end{aligned} \right. \\
\iff &\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r} &= ([\mathbf{ALH}] - [\mathbf{B}])^{-1} [([\mathbf{E}] - [\mathbf{ALK}]) \mathbf{V} - \rho \mathbf{f}] \\ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} &= [\mathbf{H}] \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r} + [\mathbf{K}] \mathbf{V} \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= [\mathbf{L}] \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

La première équation du dernier système d'équations ci-dessus donne finalement, en l'absence de forces volumiques extérieures appliquées :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r} = [\mathcal{Q}] \mathbf{V} \quad (\text{B.2})$$

avec : $[\mathcal{Q}] = ([\mathbf{ALH}] - [\mathbf{B}])^{-1}([\mathbf{E}] - [\mathbf{ALK}])$

I.3 Matrice des admittances au rayon interne dans le cas lisse

Pour une excitation extérieure imposée au rayon externe r_N de la structure, la réponse en déplacements est caractérisée par la matrice d'admittance $[\mathbf{R}]_{u_1 F_N}$ dans le cas où il n'y a pas de couches fluides intermédiaires, et par le scalaire $R_{u_1 F_N}$ dans le cas où la structure comporte des couches fluides intermédiaires :

$$[\mathbf{R}]_{u_1 F_N} = \frac{[[\mathbf{T}_{fe}] [\mathbf{T}]_{u_N u_1} + [\mathbf{T}]_{\sigma_N u_1} + [[\mathbf{T}]_{\sigma_N \sigma_1} + [\mathbf{T}_{fe}] [\mathbf{T}]_{u_N \sigma_1}] [\mathbf{T}_{fi}]]^{-1}}{1} \quad (\text{B.3})$$

$$R_{u_1 F_N} = \frac{1}{([\mathbf{T}_{fe}] \cdot \mathbf{e}_r) T_{u_N u_1} + T_{\sigma_N u_1} + [T_{\sigma_N \sigma_1} + ([\mathbf{T}_{fe}] \cdot \mathbf{e}_r) T_{u_N \sigma_1}] ([\mathbf{T}_{fi}] \cdot \mathbf{e}_r)}$$

II Interprétation du *large fd problem*

On se propose ici de donner des éléments de réponse quant à l'instabilité du *large fd problem* rencontrée avec la méthode par matrices de transfert.

Dans le chapitre 1, on a discuté de la même instabilité mais en raisonnant sur les matrices de transfert élémentaires établies par décomposition des ondes solutions sur la base des ondes volumiques se propageant dans la couche considérée.

Cette approche limite la résolution au cas isotrope pour une configuration cylindrique, car il n'est alors pas possible de résoudre simplement les équations différentielles d'ordre 2 à coefficients non constants sans restreindre la généralité du matériau.

Dans cette section en revanche, on va mettre en évidence le *large fd problem* en discutant de la stabilité du système différentiel résolu dans chaque sous-couche et établi par le formalisme de Stroh.

Les développements qui suivent vont permettre de pointer le *large fd problem* sous un autre angle de vue, non plus via les sous-blocs matriciels des matrices de couches reliant le

vecteur d'état aux coefficients des ondes volumiques, mais au travers de la stabilité des solutions d'un système différentiel d'ordre 1.

Dans un premier temps, on établit un critère d'instabilité pour la solution de ce système, puis on montre pourquoi cette instabilité entraîne ou non des écarts numériques sur la solution calculée suivant la procédure d'assemblage retenue pour la structure multicouche.

II.1 Instabilité du système différentiel de Stroh

II.1.1 Rappels sur les notions de stabilité et de stabilité asymptotique

On considère le problème de Cauchy associé à une équation différentielle :

$$y' = f(t, y) \quad (\text{B.4})$$

avec condition initiale $y(t_0) = z_0$, dont la solution est supposée définie sur $[t_0; +\infty[$. On définit les notions de stabilité et de stabilité asymptotique ci-dessous pour une solution d'un problème de Cauchy associé à l'équation (B.4) :

Définition. Soit $y_{z_0}(t)$ la solution maximale de (B.4) telle que $y(t_0) = z_0$.

La solution $y_{z_0}(t)$ est dite stable s'il existe une boule fermée $\bar{B}(z_0, R)$, centrée en z_0 et de rayon R , une constante $C \geq 0$ telles que :

$$(i) \forall z \in \bar{B}(z_0, R), t \mapsto y_z(t) \text{ est définie sur } [t_0; +\infty[$$

$$(ii) \forall z \in \bar{B}(z_0, R) \text{ et } t \geq t_0, \text{ on a } \|y_z(t) - y_{z_0}(t)\| \leq C \|z - z_0\|$$

La solution $y_{z_0}(t)$ est dite asymptotiquement stable si elle est stable et si elle vérifie la condition (iii) plus forte que (ii) :

(iii) Il existe une boule $\bar{B}(z_0, R)$ et une fonction $\gamma : [t_0; +\infty[\mapsto \mathbb{R}_+$ continue avec

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = 0 \text{ telles que :}$$

$$\forall z \in \bar{B}(z_0, R), \forall t \geq t_0, \|y_z(t) - y_{z_0}(t)\| \leq \gamma(t) \|z - z_0\|$$

Géométriquement, les notions de stabilité définies précédemment sont illustrées sur le schéma ci-dessous :

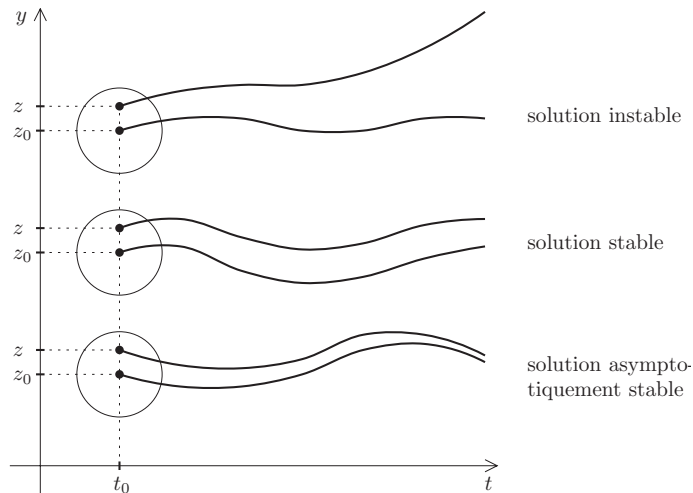


FIGURE B.1 – Stabilité de la solution au système différentiel (B.4)

II.1.2 Cas d'un système linéaire à coefficients constants

Le système différentiel établi dans chaque sous-couche par le formalisme de Stroh, et intégré par une exponentielle matricielle, est linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, et peut être représenté sous forme matricielle de la manière suivante :

$$Y' = AY, \quad Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}, \quad A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad (\text{B.5})$$

La solution du problème de Cauchy de condition initiale $Y(t_0) = Z_0$ est donnée par $Y_{Z_0}(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot Z_0$.

On a donc :

$$Y_Z(t) - Y_{Z_0}(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot (Z - Z_0)$$

et la stabilité est liée au comportement de $e^{(t-t_0)A}$ quand $t \rightarrow +\infty$, dont la norme $\|e^{(t-t_0)A}\|$ doit rester bornée.

- En dimension 1, le système (B.5) est réduit à une seule équation scalaire, et la matrice $A = a$, $a \in \mathbb{C}$.

Alors la quantité $\|e^{(t-t_0)A}\|$ se réduit à $|e^{(t-t_0)a}| = e^{(t-t_0)\text{Re}(a)}$.

Les solutions sont donc stables si et seulement si cette quantité reste bornée quand t tend vers $+\infty$, c'est-à-dire pour $\text{Re}(a) \leq 0$.

• En dimension n quelconque, et pour une matrice A diagonalisable, le système différentiel (B.5) se ramène après un changement de base à :

$$\tilde{Y}' = \tilde{A}\tilde{Y}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ désigne la liste des valeurs propres de la matrice A .

Le système se ramène donc aux équations indépendantes $y_j' = \lambda_j y_j$, et admet pour solution :

$$y_j(t) = z_j e^{\lambda_j(t-t_0)}, 1 \leq j \leq m \quad (\text{B.7})$$

La forme de la solution (B.7) permet d'énoncer le théorème suivant quant à la stabilité de la solution du système (B.6) [133] :

Théorème. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes d'une matrice A diagonalisable. Alors les solutions du système linéaire $V' = AV$ sont :

- stables si et seulement si $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$.
- asymptotiquement stables si et seulement si $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$.

Dans notre cas d'étude, la matrice A s'identifie à la matrice $[Q_j^p(r_p^{\text{moy}})]$ du système de Stroh, évaluée dans chaque sous-couche p d'une couche élémentaire j , et la quantité $t - t_0$ à l'épaisseur de matériau $\delta r = r_p^{\text{sup}} - r_p^{\text{inf}}$ parcourue suivant la direction radiale pour propager le vecteur des déplacements et contraintes.

Par conséquent, on retrouve le résultat que le *large fd problem* est une instabilité d'autant plus marquée que l'épaisseur de couche est élevée. En effet, l'erreur sur la solution du système (B.5) numériquement intégré sera d'autant plus grande que la longueur d'intégration $r - r_0$ parcourue.

On a mis en évidence le *large fd problem* au chapitre 3 en présentant les réponses d'antenne pour un capteur ponctuel des 4 configurations tests **N**, **NTF0**, **RATF0**, et

RMTF0. Il apparaissait que seule la configuration de coque nue **N** était correctement résolue sur toute la plage fréquentielle considérée.

Ce constat peut désormais s'interpréter en observant la liste des valeurs propres de la matrice $[Q_j]$ du système de Stroh résolu dans chaque couche élémentaire.

II.1.3 Amplitude des valeurs propres du système de Stroh

Pour chaque couche, la matrice $[Q_j]$ évaluée au rayon moyen du système de Stroh résolu ne diffère que par la cote radiale et les coefficients c_{ij} du tenseur de Cauchy.

Ce sont ces derniers qui vont conditionner majoritairement la liste des valeurs propres de la matrice $[Q_j]$, et on intuite par conséquent que pour les matériaux de revêtement choisis, la liste des valeurs propres présente des parties réelles positives, qui sont probablement de plus grande amplitude que celles de la coque d'acier pour un même point de calcul (n, f) . On se propose de le vérifier.

En distinguant les valeurs propres λ_i^+ ayant une partie réelle positive de celles ayant une partie réelle négative λ_i^- , on décide de représenter la quantité $\max_i (\text{Re}(\lambda_i^+))$, à savoir la partie réelle positive la plus grande figurant dans la liste des valeurs propres du système résolu, pour chaque ordre circonférentiel n et à chaque fréquence f .

Pour cette comparaison, on a considéré la même géométrie que la configuration **N** de la coque non revêtue, mais en remplaçant successivement l'acier par les différents matériaux de revêtement :

- le polyuréthane (configuration **monoPU**)
- le matériau anéchoïque (configuration **monoA**)
- le matériau de masquage (configuration **monoM**)

Les couches élémentaires ne sont toujours pas subdivisées, et la plage fréquentielle est réduite sur $f \in [2000; 6000]$ Hz, où on a remarqué la transition pour les configurations **RATF0** et **RMTF0** entre le domaine de stabilité et celui d'instabilité de la solution.

Les résultats sont présentés en Fig. B.2 où on signale que la dynamique n'est pas la même pour les 4 graphes :

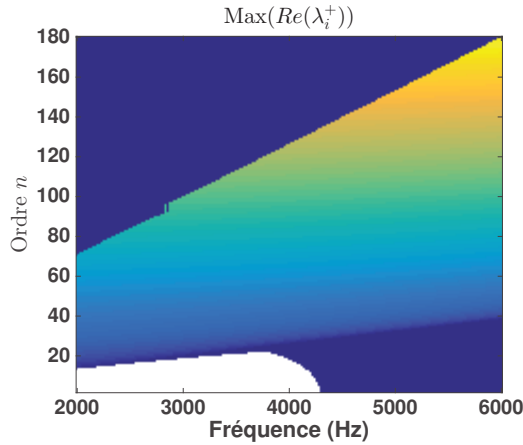
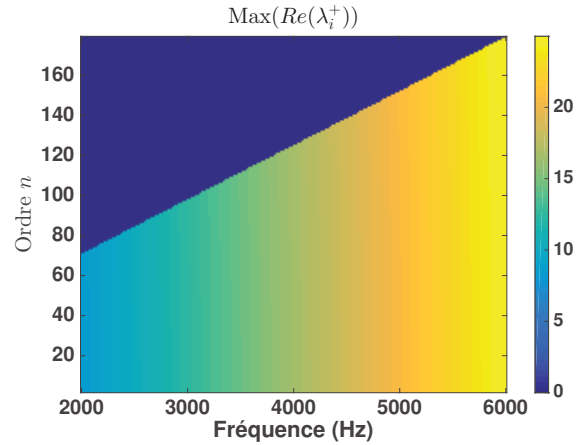
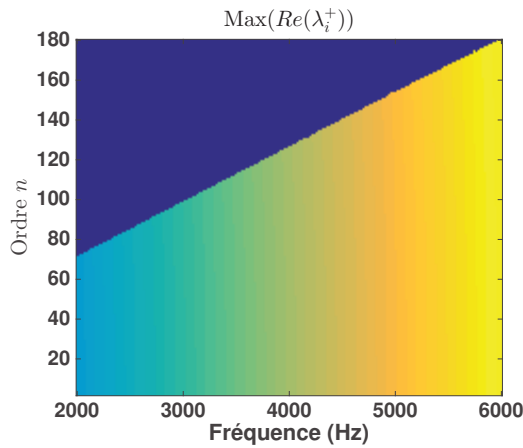
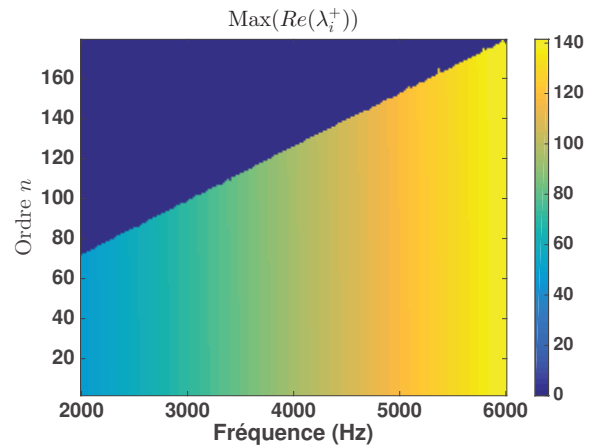
(a) Configuration **N**(b) Configuration **monoPU**(c) Configuration **monoA**(d) Configuration **monoM**

FIGURE B.2 – Tracé de la quantité $\max_i (\text{Re}(\lambda_i^+))$ pour les 4 matériaux des configurations tests dans le plan (f, n)

Comme pour la méthode hDGM présentée au chapitre 2, un critère de convergence sur les ordres circonférentiels est mis en place, excluant aux basses fréquences les contributions des ordres élevés. Par conséquent, les coins supérieurs gauches de chaque graphe de la Fig. B.2 ont un niveau rigoureusement égal à 0 et correspondent aux ordres circonférentiels n'ayant pas contribué à la réponse d'antenne pour une fréquence donnée.

On constate des différences importantes entre la couche d'acier et les couches de revêtement : d'une part, il existe une plage fréquentielle assez étendue pour laquelle aux premiers ordres aucune des valeurs propres du système de Stroh pour la couche d'acier n'a

une partie réelle positive, ce qui est représenté par une zone numérique aveugle en blanc sur la Fig. B.2a.

La solution au problème de Cauchy associé à (3.12) pour la condition initiale $\mathbf{V}(r_0) = \mathbf{V}_0$ est donc stable à ces points de calcul (on pourrait propager le vecteur d'état spectral à ces ordres circonférentiels et pour ces fréquences sur une épaisseur de couche infiniment épaisse sans occasionner d'instabilité numérique).

D'autre part, la quantité $\max_i (\text{Re}(\lambda_i^+))$ a une valeur toujours beaucoup plus faible pour l'acier que pour les matériaux de revêtement.

Enfin, on retrouve le résultat que le *large fd problem* est une instabilité d'autant plus marquée que la fréquence est élevée : en effet, l'indicateur $\max_i (\text{Re}(\lambda_i^+))$ est d'autant plus grand en valeur absolue que la fréquence est élevée pour les configurations **monoPU**, **monoA** et **monoM**. De plus, pour cette dernière configuration l'indicateur a le niveau le plus fort, ce qui confirme la tendance observée sur les réponses d'antenne présentées au chapitre 3, où la configuration **RMTF0** conduisait à la réponse la plus instable.

Ainsi, au-delà d'une certaine fréquence où la solution du système devient instable pour les matériaux de revêtement, toutes les contributions des ordres circonférentiels à la réponse d'antenne sont susceptibles d'être mal évaluées. À contrario, ce comportement n'est pas retrouvé pour la couche d'acier : au contraire, pour un ordre circonférentiel donné, la quantité $\max_i (\text{Re}(\lambda_i^+))$ a tendance à rester de valeur constante avec la fréquence, voire de décroître dans certaines zones de la Fig. B.2a.

II.2 Influence de la procédure d'assemblage sur la stabilité de la solution

On vient de mettre en évidence que le système différentiel résolu dans chaque couche élémentaire de la structure pouvait être fortement instable suivant les matériaux considérés. On discute maintenant de l'influence que peut avoir la procédure d'assemblage retenue sur la stabilité de la solution.

En effet, les méthodes dites *propagatives* du vecteur d'état d'un bord à l'autre du multi-

couche, si elles n'apportent pas un soin particulier à la gestion des valeurs propres à partie réelle positive de la matrice de Stroh $[Q]$, conduisent à de fortes instabilités de la solution calculée. En particulier, la procédure d'assemblage classique de la méthode par matrices de transfert, qui consiste à propager le vecteur d'état par simple produit matriciel des différentes matrices de transfert élémentaires, entraîne de très grandes erreurs numériques. On va dans le paragraphe qui suit faire une analogie entre ce produit matriciel et la propagation de la solution d'un système différentiel d'ordre 1 par un schéma numérique à un pas (cf Chapitre 3, (3.25) et (3.34)).

Dans un deuxième temps, on discute de pourquoi la procédure d'assemblage proposée au chapitre 3 réduit considérablement l'instabilité de la solution.

II.2.1 Rappels sur la stabilité des schémas numériques à 1 pas

Reprenons la forme générale du système différentiel d'ordre 1 résolu dans chaque sous-couche élémentaire :

$$Y'(t) = AY(t) \quad (\text{B.8})$$

La solution de ce système pour une condition initiale $Y(t_0) = Z_0$ s'écrit $Y_{Z_0}(t) = e^{(t-t_0)A}Z_0$. En considérant une famille de schémas numériques à un pas pour intégrer le système différentiel (B.5) et propager sa solution, ceux-ci peuvent s'écrire de la forme :

$$y_p = By_{p-1} + r_p, \forall p \in \mathbb{N} \quad (\text{B.9})$$

avec B une matrice carrée d'ordre n , et $r_p \in \mathbb{C}$ une famille de vecteurs donnés.

Pour un schéma numérique donné de la forme de (B.9), les vecteurs y_p de taille n sont calculés numériquement après initialisation par un vecteur u_0 . Pour étudier la stabilité numérique de cette famille de schémas, supposons que ceux-ci propagent une solution avec un vecteur initial approché \tilde{Z}_0 au lieu de Z_0 . L'approximation numérique de la solution exacte y_p propagée à l'ordre p est désignée alors par \tilde{y}_p , et on notera l'erreur d'arrondi commise sur la solution au pas p par $v_p = \tilde{y}_p - y_p$.

L'enjeu est de savoir si l'erreur v_p propagée peut être bornée en fonction de l'erreur commise sur la condition initiale v_0 , ou si celle-ci est amplifiée au pas p par le schéma numérique.

Il vient immédiatement que :

$$\begin{aligned} v_p &= \tilde{y}_p - y_p = [B\tilde{y}_{p-1} + r_p] - [By_{p-1} + r_p] \\ &= Bv_{p-1} \end{aligned}$$

d'où on déduit la relation :

$$v_n = B^n v_0 \quad (\text{B.10})$$

L'équation (B.10) montre qu'un point crucial de la stabilité du système (B.5), *si il est intégré par un schéma de la famille* (B.9), est le caractère uniformément borné des puissances successives de la matrice B , c'est-à-dire que la propriété suivante s'avère une condition nécessaire de la stabilité de la solution :

$$\exists M_0 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \|B^n\| \leq M_0 \quad (\text{B.11})$$

Les numériciens rechercheront l'existence d'une constante M_0 valable pour n'importe quelle matrice B , c'est-à-dire pour tous les schémas numériques de la famille décrite en (B.9). Cette recherche de généralité n'est pas l'objet de cette étude, et on énonce simplement le résultat suivant qui assure le caractère borné des puissances successives d'une matrice B donnée *diagonalisable* [134] :

Théorème (Critère aux valeurs propres). *Soit une matrice B donnée diagonalisable.*

Alors :

$$\exists M_0 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \|B^n\| \leq M_0 \Leftrightarrow \forall \mu \text{ valeur propre de } B, |\mu| \leq 1$$

On fait maintenant le rapprochement entre la famille de schémas numériques (B.9), et la procédure classique d'assemblage de la méthode par matrices de transfert.

II.2.2 Analogie avec la procédure classique d'assemblage de la TMM

La propagation du vecteur d'état par produit matriciel, soit à travers les différentes sous-couches d'une couche élémentaire, soit à travers les différentes couches de la structure, peut être rapproché du schéma numérique de la forme de (B.9).

En effet, la solution au système de Stroh résolu dans chaque sous-couche fait intervenir

l'exponentielle matricielle $\exp \left[(r_j - r_{j-1}) [\mathbf{Q}]_j^p \right]$ évaluée au rayon moyen de la sous-couche, qui s'identifie avec la matrice B des développements précédents. Comme la quantité $\exp \left[(r_j - r_{j-1}) [\mathbf{Q}]_j^p \right]$ change à chaque sous-couche, contrairement à la matrice B du schéma numérique à un pas considéré, cette analogie n'est pas strictement rigoureuse, ou alors uniquement sur l'épaisseur d'une sous-couche élémentaire. Cependant, elle permet d'une part de retrouver le critère aux valeurs propres énoncé au paragraphe précédent. Pour des valeurs propres de la matrice $[\mathbf{Q}]_j^p$ à partie réelle strictement positive, les valeurs propres de l'exponentielle matricielle $\exp \left[(r_j - r_{j-1}) [\mathbf{Q}]_j^p \right]$ intervenant dans la solution seront de module strictement supérieur à 1, et la condition nécessaire de stabilité n'est alors pas vérifiée. Ainsi, les erreurs d'arrondis sont amplifiées lorsque le vecteur d'état est propagé sur un nombre élevé de couches, ou sur des épaisseurs très grandes.

Ce raisonnement a justifié la vérification du comportement suivant :

Est-ce que la subdivision des couches élémentaires en sous-couches plus fines permet d'améliorer sensiblement la stabilité de l'intégration numérique et de repousser plus haut en fréquence le large fd problem ?

Au prix d'intégrer P systèmes différentiels d'ordre 1 au lieu d'un seul pour propager le vecteur d'état sur la même distance, on peut se demander si la stabilité de la solution serait améliorée, au cas où chacune des matrices $[\mathbf{Q}]$ des P sous-couches ne présente alors aucune valeur propre à partie réelle positive, ou du moins de bien moindre amplitude.

II.2.3 Subdivision en sous-couches

En géométrie cylindrique, la subdivision en sous-couches élémentaires a été introduite pour justifier l'intégration du système différentiel d'ordre 1 à coefficients non constants par la même solution analytique que dans le cas où ce système est supposé à coefficients constants. Sur une épaisseur radiale suffisamment fine, la courbure peut alors être négligée, et la matrice $[\mathbf{Q}]$ du système de Stroh être considéré comme invariante suivant r .

Pour les configurations étudiées, il est apparu durant l'étude que la convergence numérique de la solution dans les plages fréquentielles où celle-ci était stable était obtenue avec une seule sous-couche de subdivision dans chaque couche élémentaire.

La question s'est alors posée de savoir si les instabilités aux hautes fréquences étaient repoussées à des régimes plus élevés si on augmentait le nombre de sous-couches de subdivision.

Malheureusement, le *large fd problem* n'est pas impacté du tout par ce paramètre. Les matrices $[Q_j^p(r_p^{\text{moy}})]$ évalués dans chaque sous-couche ne diffèrent que par leur cote radiale avec la matrice $[Q_j(\frac{r_j+r_{j-1}}{2})]$ qui est établie lorsque la couche n'est pas subdivisée.

L'instabilité de la solution n'est donc pas impactée par la subdivision en sous-couches élémentaires.

À la figure B.3 est représentée sur la plage fréquentielle $f \in [4000; 6000]$ Hz la réponse signal pour la configuration monocouche constitué du matériau anéchoïque, obtenue avec la méthode hDGM d'une part, et avec la méthode TMM d'autre part, pour des pas de subdivision dans la couche élémentaire de $P = 1, 10$ et 100 :

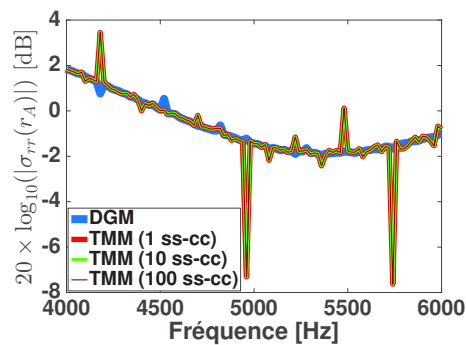


FIGURE B.3 – Subdivision en sous-couches

La figure B.3 montre que la réponse d'antenne n'est aucunement améliorée lorsque le nombre de sous-couches augmente aux régimes où le *large fd problem* est observable pour la méthode par matrices de transfert.

À titre d'information, une seule méthode trouvée dans la littérature et stable numériquement quant au *large fd problem*, pourrait néanmoins être catégorisée dans la classe des méthodes dites *propagatives*. Développée par Dazel et Al. [135] en 2013, celle-ci se base également sur la résolution du système de Stroh, et isole les valeurs propres à partie réelle positive problématiques de la matrice $[Q]$.

Par des manipulations algébriques, les auteurs établissent une reformulation de la méthode

par matrices de transfert, qui peut également traiter des milieux de nature différente, cependant ce n'est plus le vecteur d'état des déplacements et contraintes qui est propagé, mais un vecteur dit d'*information*, et qui lui est directement relié.

Cette méthode n'a cependant pas été reproduite dans cette étude.

Bibliographie

- [1] X. Lurton. *Acoustique sous-marine : présentation et applications*. Éditions Quae, 1998.
- [2] X. Pan, I. MacGillivray, and J. Forrest. The effect of boundary conditions and ribs on the total radiation efficiency of submerged plates. *Proceedings of ACUSTICS*, 2016.
- [3] G. Maidanik. Response of ribbed panels to reverberant acoustic fields. *the Journal of the Acoustical Society of America*, 34(6) :809–826, 1962.
- [4] D.M. Photiadis, J.A. Bucaro, and B.H. Houston. Scattering from flexural waves on a ribbed cylindrical shell. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 96(5) :2785–2790, 1994.
- [5] R.J. Urick. *Principles of underwater sound for engineers*. Tata McGraw-Hill Education, 1967.
- [6] M. Dana, L. Maxit, and J. Bernard. Modélisation numérique de structures cylindriques multicouches excitées par une onde plane : comparaison de différentes méthodes. Communication orale donnée aux *JAAN2017*, 5^{ème} édition des *Journées Acoustique et Applications Navales*, déroulée les 26-27 Octobre 2017 à Ollioules, France.
- [7] M. Dana, L. Maxit, and J. Bernard. Prédiction de la réponse vibro-acoustique de coques cylindriques revêtues immergées. Actes du *CFA '18*, 14^{ème} *Congrès Français d'Acoustique* (pages 1147-1153), déroulé du 23 au 27 Avril 2018 au Havre, France.

- [8] M. Dana, L. Maxit, and J. Bernard. Vibroacoustic response of an immersed stiffened multilayered shell excited by a plane wave. *Actes de Inter-Noise 2018 - 47th International Congress and Exposition on Noise Control Engineering*, déroulé du 26 au 29 Août 2018 à Chicago, Illinois, USA.
- [9] M. Dana, L. Maxit, and J. Bernard. A spectral global matrix method for modelling the response of a fluid-loaded multilayered cylindrical shell excited by an acoustic plane wave. (*en cours de publication*), 2019.
- [10] A. Hrennikoff. Solution of problems of elasticity by the framework method. *J. appl. Mech.*, 1941.
- [11] R. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49, 1943.
- [12] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The finite element method*, volume 36. McGraw-hill London, 1977.
- [13] S. Rubin. Improved component-mode representation for structural dynamic analysis. *AIAA journal*, 13(8) :995–1006, 1975.
- [14] E. Balmes. Modes and regular shapes. how to extend component mode synthesis theory. *Proceedings of the XI DINAME, 28th February-4th March, 2005 - Ouro Preto - MG - Brazil*, 101, 2005.
- [15] N. Roy and M. Lapi. Efficient computation of the radiated sound power of vibrating structures using a modal approach. *Journal of the Acoustical Society of America*, 123(5) :3062, 2008.
- [16] A.J. Jerri. The shannon sampling theorem—its various extensions and applications : A tutorial review. *Proceedings of the IEEE*, 65(11) :1565–1596, 1977.
- [17] P. Schmiechen. *Travelling Wave Speed Coincidence*. PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Imperial College, 1997.

- [18] J.-P. Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of computational physics*, 114(2) :185–200, 1994.
- [19] R.J. Astley. Wave envelope and infinite elements for acoustical radiation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3 :507–526, 1983.
- [20] R.J. Astley and A. Cummings. A finite element scheme for acoustic transmission through the walls of rectangular ducts : Comparison with experiment. *Journal of Sound and Vibration*, 92 :387–409, 1984.
- [21] R.J. Astley. Transient spheroidal elements for unbounded wave problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 164 :3–15, 1998.
- [22] L. Cremers. On the use of variable order infinite wave envelope elements for acoustic radiation and scattering. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 97 :2028–, 1995.
- [23] J.-P. Coyette. Validation of a new wave envelope formulation for handling exterior acoustic and elasto-acoustic problems in the frequency domain. In *14th DGLR/AIAA Aeroacoustics Conference*, volume 1, pages 421–427, 1992.
- [24] R.D. Ciskowski and C.A. Brebbia. *Boundary Element Methods in Acoustics*. Springer Netherlands, 1991.
- [25] J.J. do Rêgo Silva. *Acoustic and elastic wave scattering using boundary elements*. Computational Mechanics Publications, 1994.
- [26] M. Bonnet. Regularized bie formulations for first-and second-order shape sensitivity of elastic fields. *Computers and Structures*, 56 :799–811, 1995.
- [27] D. Brunner, M. Junge, P. Rapp, M. Bebendorf, and L. Gaul. Comparison of the fast multipole method with hierarchical matrices for the helmholtz-bem. *CMES*, 58(2) :131–158, 2010.
- [28] M. Zampolli, A. Tesei, F.B. Jensen, N. Malm, and J.B. Blottman III. A computationally efficient finite element model with perfectly matched layers applied to

- scattering from axially symmetric objects. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 122 :1472–1485, 2007.
- [29] S. Merz, R. Kinns, and N. Kessissoglou. Structural and acoustic responses of a submarine hull due to propeller forces. *Journal of Sound and Vibration*, 325 :266–286, 2009.
- [30] S. Merz, N. Kessissoglou, R. Kinns, and S. Marburg. Minimisation of the sound power radiated by a submarine through optimisation of its resonance changer. *Journal of Sound and Vibration*, 329 :980–993, 2010.
- [31] H. Peters, N. Kessissoglou, and S. Marburg. Modal decomposition of exterior acoustic-structure interaction problems with model order reduction. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 135 :2706–2717, 05 2014.
- [32] Q. Zhou and P.F. Joseph. A numerical method for the calculation of dynamic response and acoustic radiation from an underwater structure. *Journal of Sound and Vibration*, 283 :853–873, 2005.
- [33] M.C. Remillieux and R.A. Burdisso. Vibro-acoustic response of an infinite, rib-stiffened, thick-plate assembly using finite-element analysis. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 132 :EL36–, 2012.
- [34] A.J. Hull and J.R. Welch. Elastic response of an acoustic coating on a rib-stiffened plate. *Journal of Sound and Vibration*, 329 :4192–4211, 2010.
- [35] R.D. Oldham. The constitution of the interior of the earth, as revealed by earthquakes. *Quarterly Journal of the Geological Society*, 62(1-4) :456–475, 1906.
- [36] O. Xeridat. *Etude expérimentale de la propagation, de la diffusion et de la localisation des ondes de Lamb*. PhD thesis, Université Nice Sophia Antipolis, 2011.
- [37] D. Royer and E. Dieulesaint. *Ondes élastiques dans les solides : propagation libre et guidée*. Masson, 1996.

- [38] L. Rayleigh. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1(1) :4–11, 1885.
- [39] R. Stoneley. Elastic waves at the surface of separation of two solids. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 106(738) :416–428, 1924.
- [40] J.G. Scholte. The range of existence of rayleigh and stoneley waves. *Geophysical Journal International*, 5 :120–126, 1947.
- [41] W.L. Pilant. Complex roots of the stoneley-wave equation. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 62(1) :285–299, 1972.
- [42] H. Lamb. On waves in an elastic plate. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 93(648) :114–128, 1917.
- [43] A.E.H. Love. *Some problems of geodynamics*. Cambridge University Press, 2015.
- [44] I. Babuška and J. Pitkäranta. The plate paradox for hard and soft simple support. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 21(3) :551–576, 1990.
- [45] S. Zhang. On the accuracy of reissner–mindlin plate model for stress boundary conditions. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 40(2) :269–294, 2006.
- [46] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. appl. Mech.*, pages A69–A77, 1945.
- [47] R.D. Mindlin. Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates. *Journal of applied physics*, 22(3) :316–323, 1951.
- [48] T.J.R. Hughes. *The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*. Courier Corporation, 2012.
- [49] J.N. Reddy. *Mechanics of laminated composite plates and shells : theory and analysis*. CRC press, 2004.

- [50] D.L. Anderson. Elastic wave propagation in layered anisotropic media. *Journal of Geophysical Research*, 66(9) :2953–2963, 1961.
- [51] D.L. Folds and C.D. Loggins. Transmission and reflection of ultrasonic waves in layered media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 62(5) :1102–1109, 1977.
- [52] D. Lévesque and L. Piché. A robust transfer matrix formulation for the ultrasonic response of multilayered absorbing media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 92(1) :452–467, 1992.
- [53] C. Dutrion. *Étude de faisabilité d'un revêtement élastique pour la furtivité acoustique*. PhD thesis, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace-ISAIE, 2014.
- [54] E.A. Skelton and J.H. James. *Theoretical acoustics of underwater structures*. World Scientific Publishing Company, 1997.
- [55] C. Huang and S. Nutt. Sound transmission prediction by 3-d elasticity theory. *Applied Acoustics*, 70(5) :730–736, 2009.
- [56] W.Q. Chen, Z.G. Bian, and H.J. Ding. Three-dimensional vibration analysis of fluid-filled orthotropic fgm cylindrical shells. *International Journal of Mechanical Sciences*, 46(1) :159–171, 2004.
- [57] J. Jamali, M.H. Naei, F. Honarvar, and M. Rajabi. Acoustic scattering from functionally graded cylindrical shells. *Archives of Mechanics*, 63(1) :25–56, 2011.
- [58] A.H. Nayfeh and D.E. Chimenti. Ultrasonic wave reflection from liquid-coupled orthotropic plates with application to fibrous composites. *Journal of Applied Mechanics*, 55(4) :863–870, 1988.
- [59] W.T. Thomson. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *Journal of applied Physics*, 21(2) :89–93, 1950.
- [60] B. Hosten and M. Castaings. Transfer matrix of multilayered absorbing and anisotropic media. measurements and simulations of ultrasonic wave propagation through

- composite materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 94(3) :1488–1495, 1993.
- [61] L. Knopoff. A matrix method for elastic wave problems. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 54(1) :431–438, 1964.
- [62] H. Schmidt and F.B. Jensen. A full wave solution for propagation in multilayered viscoelastic media with application to gaussian beam reflection at fluid–solid interfaces. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 77(3) :813–825, 1985.
- [63] N.A Haskell. The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bulletin of the seismological Society of America*, 43(1) :17–34, 1953.
- [64] M.J.S Lowe. Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 42(4) :525–542, 1995.
- [65] B. Hosten and M. Castaings. Validation at lower frequencies of the effective elastic constants measurements for orthotropic composite materials. In *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, pages 1193–1199. Springer, 1993.
- [66] J.J Faran Jr. Sound scattering by solid cylinders and spheres. *The Journal of the acoustical society of America*, 23(4) :405–418, 1951.
- [67] R.M. White. Elastic wave scattering at a cylindrical discontinuity in a solid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 30(8) :771–785, 1958.
- [68] R.D. Doolittle and H. Überall. Sound scattering by elastic cylindrical shells. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 39(2) :272–275, 1966.
- [69] V.T. Buchwald. Rayleigh waves in transversely isotropic media. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 14(3) :293–318, 1961.
- [70] I. Mirsky. Wave propagation in transversely isotropic circular cylinders part i : Theory. *The journal of the Acoustical Society of America*, 37(6) :1016–1021, 1965.

- [71] F. Ahmad and A. Rahman. Acoustic scattering by transversely isotropic cylinders. *International Journal of Engineering Science*, 38(3) :325–335, 2000.
- [72] Y. Pan, C. Rossignol, and B. Audoin. Acoustic waves generated by a laser line pulse in a transversely isotropic cylinder. *Applied physics letters*, 82(24) :4379–4381, 2003.
- [73] P.M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. Mc Graw-Hill Book Company, 1953.
- [74] B. Zhang, H. Dong, and K. Wang. Multipole sources in a fluid-filled borehole surrounded by a transversely isotropic elastic solid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 96(4) :2546–2555, 1994.
- [75] F. Honarvar and A.N. Sinclair. Acoustic wave scattering from transversely isotropic cylinders. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 100(1) :57–63, 1996.
- [76] F. Honarvar, E. Enjilela, A.N. Sinclair, and S.A. Mirnezami. Wave propagation in transversely isotropic cylinders. *International journal of solids and structures*, 44(16) :5236–5246, 2007.
- [77] A.N. Stroh. Steady state problems in anisotropic elasticity. *Journal of Mathematics and Physics*, 41(1-4) :77–103, 1962.
- [78] J. Lothe and D.M. Barnett. On the existence of surface-wave solutions for anisotropic elastic half-spaces with free surface. *Journal of Applied Physics*, 47(2) :428–433, 1976.
- [79] P. Chadwick and G.D. Smith. Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials. In *Advances in applied mechanics*, volume 17, pages 303–376. Elsevier, 1977.
- [80] T.C.T. Ting. Pressuring, shearing, torsion and extension of a circular tube or bar of cylindrically anisotropic material. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 452(1954) :2397–2421, 1996.

- [81] F.R. Gantmacker. The theory of matrices, 1959.
- [82] M.C. Pease. Methods of matrix algebra. Technical report, 1965.
- [83] C. Baron. *Le développement en série de Peano du matricant pour l'étude de la propagation des ondes élastiques en milieux à propriétés continûment variables*. PhD thesis, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2005.
- [84] C. Baron. Propagation of elastic waves in an anisotropic functionally graded hollow cylinder in vacuum. *Ultrasonics*, 51(2) :123–130, 2011.
- [85] S.M. Hasheminejad and M. Rajabi. Acoustic scattering characteristics of a thick-walled orthotropic cylindrical shell at oblique incidence. *Ultrasonics*, 47(1-4) :32–48, 2007.
- [86] C. Baron and S. Naili. Propagation of elastic waves in a fluid-loaded anisotropic functionally graded waveguide : Application to ultrasound characterization. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 127(3) :1307–1317, 2010.
- [87] J.W. Dunkin. Computation of modal solutions in layered, elastic media at high frequencies. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 55(2) :335–358, 1965.
- [88] T.P. Pialucha. *The reflection coefficient from interface layers in NDT of adhesive joints*. PhD thesis, University of London, 1992.
- [89] A. Pilarski. Ultrasonic evaluation of the adhesion degree in layered joints. *Mayrt. Eval.*, 43(6) :765–770, 1985.
- [90] A.H. Nayfeh and T.W. Taylor. Surface wave characteristics of fluid-loaded multi-layered media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 84(6) :2187–2191, 1988.
- [91] P. Cervenka and P. Challande. A new efficient algorithm to compute the exact reflection and transmission factors for plane waves in layered absorbing media (liquids and solids). *The Journal of the Acoustical Society of America*, 89(4) :1579–1589, 1991.

- [92] M. Castaings and B. Hosten. Delta operator technique to improve the thomson–haskell-method stability for propagation in multilayered anisotropic absorbing plates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 95(4) :1931–1941, 1994.
- [93] E.L. Tan. Stiffness matrix method with improved efficiency for elastic wave propagation in layered anisotropic media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118(6) :3400–3403, 2005.
- [94] E.L. Tan. Hybrid compliance-stiffness matrix method for stable analysis of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 119(1) :45–53, 2006.
- [95] S.I. Rokhlin and L. Wang. Stable recursive algorithm for elastic wave propagation in layered anisotropic media : Stiffness matrix method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 112(3) :822–834, 2002.
- [96] A. Kamal and V. Giurgiutiu. Stiffness transfer matrix method (stmm) for stable dispersion curves solution in anisotropic composites. In *Health Monitoring of Structural and Biological Systems 2014*, volume 9064, page 906410. International Society for Optics and Photonics, 2014.
- [97] C. Coguenanff, A. Duval, and M. Goret. A spectral method for fast broadband insertion loss modeling of curved sound packages : correlation with poroelastic finite elements.
- [98] M.J. Randall. Fast programs for layered half-space problems. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 57(6) :1299–1315, 1967.
- [99] B.R. Mace. Periodically stiffened fluid-loaded plates, i : Response to convected harmonic pressure and free wave propagation. *Journal of Sound and Vibration*, 73(4) :473–486, 1980.
- [100] B.R. Mace. Periodically stiffened fluid-loaded plates, ii : response to line and point forces. *Journal of Sound and Vibration*, 73(4) :487–504, 1980.

- [101] B.R. Mace. Sound radiation from fluid loaded orthogonally stiffened plates. *Journal of Sound and Vibration*, 79(3) :439–452, 1981.
- [102] L. Maxit. Wavenumber space and physical space responses of a periodically ribbed plate to a point drive : A discrete approach. *Applied acoustics*, 70(4) :563–578, 2009.
- [103] L. Maxit and J.-M. Ginoux. Prediction of the vibro-acoustic behavior of a submerged shell non periodically stiffened by internal frames. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 128(1) :137–151, 2010.
- [104] L. Maxit and V. Denis. Prediction of flow induced sound and vibration of periodically stiffened plates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 133(1) :146–160, 2013.
- [105] D.J. Mead. Free wave propagation in periodically supported, infinite beams. *Journal of Sound and Vibration*, 11(2) :181–197, 1970.
- [106] M.L. Rumerman. Vibration and wave propagation in ribbed plates. *The journal of the acoustical society of America*, 57(2) :370–373, 1975.
- [107] A.J. Hull and J.M. Maguire. Elastic response of an orthogonally reinforced plate. *Journal of Sound and Vibration*, 333(8) :2327–2346, 2014.
- [108] F.X. Xin. An exact elasticity model for rib-stiffened plates covered by decoupling acoustic coating layers. *Composite Structures*, 119 :559–567, 2015.
- [109] T. Wah and W.C.L. Hu. Vibration analysis of stiffened cylinders including inter-ring motion. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 43(5) :1005–1016, 1968.
- [110] C.B. Burroughs. Acoustic radiation from fluid-loaded infinite circular cylinders with doubly periodic ring supports. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 75(3) :715–722, 1984.
- [111] J. Yan, T.Y. Li, T.G. Liu, and J.X. Liu. Characteristics of the vibrational power flow propagation in a submerged periodic ring-stiffened cylindrical shell. *Applied acoustics*, 67(6) :550–569, 2006.

- [112] J. Yan, T.Y. Li, J.X. Liu, and X. Zhu. Space harmonic analysis of sound radiation from a submerged periodic ring-stiffened cylindrical shell. *Applied acoustics*, 67(8) :743–755, 2006.
- [113] J.-H. Lee and J. Kim. Sound transmission through periodically stiffened cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*, 251(3) :431–456, 2002.
- [114] C.H. Hodges, J. Power, and J. Woodhouse. The low frequency vibration of a ribbed cylinder, part 1 : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 101(2) :219–235, 1985.
- [115] A. Farshidianfar and P. Oliazadeh. Free vibration analysis of circular cylindrical shells : comparison of different shell theories. *International Journal of Mechanics and Applications*, 2, 2012.
- [116] X. Cao, H. Hua, and C. Ma. Acoustic radiation from shear deformable stiffened laminated cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*, 331(3) :651–670, 2012.
- [117] D. Tang, X. Yao, Y. Jin, and F. Pang. Acoustic radiation from shear deformable ring-stiffened laminated composite cylindrical shell submerged in flowing fluid. *Applied Ocean Research*, 61 :65–80, 2016.
- [118] W.H. Hoppmann. Some characteristics of the flexural vibrations of orthogonally stiffened cylindrical shells. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 30(1) :77–82, 1958.
- [119] M. Heckl. Vibrations of point-driven cylindrical shells. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34(10) :1553–1557, 1962.
- [120] D.J. Mead and N.S. Bardell. Free vibration of a thin cylindrical shell with periodic circumferential stiffeners. *Journal of Sound and Vibration*, 115(3) :499–520, 1987.
- [121] G. Maidanik. Surface-impedance nonuniformities as wave-vector convertors. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 46(5A) :1062–1073, 1969.

- [122] D.G. Crighton and G. Maidanik. Acoustic and vibration fields generated by ribs on a fluid-loaded panel, i : Plane-wave problems for a single rib. *Journal of sound and vibration*, 75(3) :437–452, 1981.
- [123] A. Mejdı, J. Legault, and N. Atalla. Transmission loss of periodically stiffened laminate composite panels : Shear deformation and in-plane interaction effects. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 131(1) :174–185, 2012.
- [124] B.N. Pavlakovic. *Leaky guided ultrasonic waves in NDT*. PhD thesis, 1998.
- [125] S.A. Lester. Free-wave propagation in fluid-loaded thick-walled circular pipes. Technical report, Admiralty marine technology establishment teddington (England), 1981.
- [126] D.C. Ricks and H. Schmidt. A numerically stable global matrix method for cylindrically layered shells excited by ring forces. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 95(6) :3339–3349, 1994.
- [127] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. Courier Corporation, 1965.
- [128] J.R. Cash. Stability concepts in the numerical solution of difference and differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 28(1-3) :45–53, 1994.
- [129] A. Deaño, J. Segura, and N.M. Temme. Computational properties of three-term recurrence relations for kummer functions. *Journal of computational and applied mathematics*, 233(6) :1505–1510, 2010.
- [130] J.C.P. Miller. Bessel functions, part ii, math, 1952.
- [131] L. Maxit. Scattering model of a cylindrical shell with internal axisymmetric frames by using the circumferential admittance approach. *Applied Acoustics*, 80 :10–22, 2014.
- [132] M. Dubois. *Contrôle des ondes de flexion dans les plaques*. PhD thesis, Université Paris Diderot-Paris 7-Sorbonne Paris Cité, 2014.

-
- [133] J.-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles-4ème Ed.* EDP sciences, 2016.
- [134] M.N. Spijker. Numerical stability, lecture notes, univ, 1998.
- [135] O. Dazel, J.-P. Groby, B. Brouard, and C. Potel. A stable method to model the acoustic response of multilayered structures. *Journal of Applied Physics*, 113(8) :083506, 2013.



FOLIO ADMINISTRATIF

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON OPEREE AU SEIN DE L'INSA LYON

NOM : DANA

DATE de SOUTENANCE : 04/03/2019

Prénoms : Maxime François Samy

TITRE : Développement de modèles vibro-acoustiques pour prédire le champ proche d'une coque cylindrique raidie munie de revêtements acoustiques

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2019LYSEI011

Ecole doctorale : MEGA

Spécialité : Acoustique

RÉSUMÉ : Les antennes SONAR sont utilisées en lutte sous-marine pour la détection acoustique des navires adverses. Leurs performances dépendent de la capacité de l'antenne et de son traitement par formation de voies à faire ressortir le signal à détecter, et à sa capacité à s'affranchir du bruit de fond environnant après traitement.

On cherchera à développer des modèles vibro-acoustiques simulant la réponse en signal au niveau des capteurs d'une antenne de flanc fixée sur la coque résistante du bâtiment. Ces modèles devront prendre en compte des revêtements viscoélastiques fixés sur la coque d'acier et permettre la simulation des réponses en signal sur une large plage fréquentielle. Deux modèles robustes numériquement sont développés, permettant la gestion d'un nombre arbitraire de couches solides élastiques homogènes ou de couches fluides intermédiaires. Les deux modèles assemblent la structure multicouche par un système matriciel global, tenant compte du couplage avec les fluides interne (l'air) et externe (l'eau). Une attention particulière est portée sur le contournement des problèmes numériques rencontrés lors des développements.

Par ailleurs, les raidisseurs internes destinés à renforcer la structure sont des inhomogénéités locales suivant l'axe de la coque introduisant des dispersions sur la réponse en signal des capteurs en fonction de leur position. Leur influence est prise en compte en considérant un réseau périodiquement espacé, et la dynamique de chaque renfort sera modélisée par un modèle coque mince sous éléments finis. Un formalisme spectral développé lors de l'étude permet le couplage de la structure multicouche avec le réseau périodique de renforts internes.

Les modèles sont validés à partir de comparaisons croisées avec des simulations éléments finis très coûteuses en ressources informatiques. Les résultats obtenus sur des configurations réalistes de sous-marins, en présence ou non du réseau de raidisseurs, montrent leur intérêt pour appréhender la réponse en signal des antennes de flanc.

MOTS-CLÉS : Acoustique, Vibrations

Laboratoire (s) de recherche : Laboratoire Vibrations Acoustique (LVA), INSA Lyon

Directeur de thèse : Laurent MAXIT

Président de jury :

Composition du jury : Emeline SADOULET-REBOUL, Franck SIMON, Cédric MAURY, Alain BERRY, Alain LE BOT, Laurent MAXIT

Invité : Julien BERNARD