



**HAL**  
open science

# Conséquences de l'asymétrie et de la compliance des bronches sur les propriétés hydrodynamiques du poumon, applications à la kinésithérapie respiratoire

Jonathan Stephano

## ► To cite this version:

Jonathan Stephano. Conséquences de l'asymétrie et de la compliance des bronches sur les propriétés hydrodynamiques du poumon, applications à la kinésithérapie respiratoire. Physique mathématique [math-ph]. Université Côte D'Azur, 2021. Français. NNT: . tel-03239006v2

**HAL Id: tel-03239006**

**<https://hal.science/tel-03239006v2>**

Submitted on 17 Aug 2021 (v2), last revised 16 May 2023 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \nabla \cdot T + f$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

# THÈSE DE DOCTORAT

Conséquences de l'asymétrie et de la  
compliance des bronches sur les  
propriétés hydrodynamiques du poumon,  
Applications à la kinésithérapie respiratoire

**Jonathan Stephano**

Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné (LJAD)

Présentée en vue de l'obtention du  
grade de docteur en mathématiques  
d'Université Côte d'Azur

Dirigée par : Benjamin Mauroy

Soutenue le : 17 Mai 2021

Devant le jury, composé de :

Médéric Argentina, Pr, Université Côte d'Azur

Julien Favier, Pr, Université Aix-Marseille

André Galligo, Pr ém., Université Côte d'Azur

Benjamin Mauroy, CR, Université Côte d'Azur

Anne-Virginie Salsac, Dr, Sorbonne Université

Marcela Szopos, Pr, Université de Paris

Invité : Jean-Claude Jeulin, Kinésithérapeute, Annecy



Université Côte d'Azur  
École Doctorale de Sciences Fondamentales et Appliquées

## Thèse

pour obtenir le titre de docteur de l'Université Côte d'Azur

Discipline : Mathématiques

présentée par  
Jonathan Stephano

# Conséquences de l'asymétrie et de la compliance des bronches sur les propriétés hydrodynamiques du poumon, Applications à la kinésithérapie respiratoire

Thèse dirigée par Benjamin Mauroy  
soutenue le 17 Mai 2021

devant le jury composé de

### **Président du jury :**

Médéric Argentina, Professeur des universités, Université Côte d'Azur

### **Rapporteurs :**

Julien Favier, Professeur des universités, Université Aix-Marseille

Marcela Szopos, Professeure des universités, Université de Paris

### **Examineurs :**

André Galligo, Professeur émérite, Université Côte d'Azur

Benjamin Mauroy, Chargé de recherche, Université Côte d'Azur

Anne-Virginie Salsac, Directrice de recherche, Sorbonne Université

### **Invité :**

Jean-Claude Jeulin, Kinésithérapeute, Annecy

## Conséquences de l'asymétrie et de la compliance des bronches sur les propriétés hydrodynamiques du poumon, applications à la kinésithérapie respiratoire

**Résumé :** Le poumon est un organe dont le rôle est de transporter l'oxygène de l'air ambiant vers le sang et d'en extraire le dioxyde de carbone. Il est constitué d'une structure arborescente de bronches, l'arbre bronchique, connecté à une surface d'échange, les acini.

Les bifurcations bronchiques sont asymétriques : les bronches se divisent en deux bronches filles de taille différente. La topologie de l'arbre est asymétrique : le nombre de bifurcations nécessaires pour connecter la trachée aux acini est variable. Les bronches ont une paroi déformable (compliance) et leur géométrie dépend de la pression transmurale, i.e. la différence de pression entre les tissus les entourant et l'air y circulant. Ces caractéristiques affectent leurs propriétés hydrodynamiques.

En tant qu'interface avec l'air extérieur, il est constamment sous l'afflux de particules externes. Le mucus bronchique joue un rôle protecteur en piégeant ces particules. En temps normal, le mucus est naturellement drainé hors du poumon. Si le mucus stagne dans les bronches, les risques de développement d'infections deviennent élevés. Dans ce cas, de la kinésithérapie respiratoire est souvent prescrite. Les kinésithérapeutes utilisent, entre autres, les forces de cisaillement de l'air pour aider à l'extraction du mucus. Toutefois, les conditions expiratoires qui permettent de mettre le mucus en mouvement ne sont pas clairement établies.

Cette thèse est constituée de trois étapes qui nous permettent d'analyser l'influence de l'asymétrie et de la compliance des bronches sur la distribution des contraintes de cisaillement induites par l'air dans les bronches. Nos trois études utilisent une modélisation 0D de chaque bronche. L'hydrodynamique de l'air à l'intérieur de chaque bronche est simplifiée, soit par un écoulement de Poiseuille, soit par un écoulement de « Poiseuille modifié » incluant certains effets inertiels.

La première étape consiste à comprendre d'abord la répartition du cisaillement dans un arbre symétrique avec des bronches compliantes. Nous montrons que cette répartition présente un maximum dont la position et l'amplitude sont déterminées en fonction du débit à la trachée et de la pression dans les tissus pulmonaires. Cette étude montre aussi qu'une obstruction partielle « cache » d'autres obstructions plus profondes dans le poumon. La comparaison des résultats avec un cisaillement seuil représentatif du mucus a permis de développer des techniques idéalisées de kinésithérapie visant à l'extraction de mucus.

La seconde étape vise à comprendre le lien entre l'asymétrie des bifurcations et l'hydrodynamique dans un arbre fractal et rigide. Nous proposons dans cette partie l'hypothèse que la sélection de l'asymétrie pulmonaire est associée à l'optimisation d'un coût lié à la résistance hydrodynamique de l'arbre, sous une contrainte de volume de l'arbre. Notre analyse permet de proposer un scénario pour expliquer les différences d'asymétrie observée chez les mammifères.

Enfin, la troisième étape vise à étudier la distribution des contraintes de cisaillement dans un arbre à bifurcations asymétriques et à bronches déformables. Nous montrons que les distributions du cisaillement dues à un écoulement de Poiseuille dans un arbre à bifurcations asymétrique et symétrique sont comparables. Toutefois, celle du cas asymétrique présente un étalement dans l'arbre distal, et des bronches avec des propriétés similaires peuvent avoir des cisaillements très différents.

Ces travaux, basés sur l'alliance des mathématiques, de la physique, de la biologie et de la médecine ont permis d'améliorer notre compréhension à la fois de l'asymétrie des bifurcations bronchiques, de la compliance bronchique et de leurs effets sur l'hydrodynamique de l'air en son sein. En particulier, cela nous a permis de mieux comprendre le rôle du cisaillement de l'air sur l'écoulement du mucus dans les techniques de kinésithérapie.

**Mots clefs :** ventilation pulmonaire, modélisation mathématique, modélisation computationnelle, kinésithérapie respiratoire, asymétrie pulmonaire, compliance bronchique

## **Consequences of asymmetry and bronchi compliance on the hydrodynamic properties of the lung, applications to chest physiotherapy.**

**Abstract :** The lung is an organ whose the role is to transport oxygen from the ambient air to the blood and to extract carbon dioxide from the blood. It is a tree-like structure of bronchi, the bronchial tree, connected to an exchange surface, the acini.

The bronchial bifurcations are asymmetric : the bronchi divides into two daughter bronchi of different sizes. The topology of the tree is asymmetric : the number of bifurcations that connect the trachea to the acini is not constant. The bronchi wall is deformable (compliance) and their geometries are affected by the transmural pressure, i.e., the pressure difference between the surrounding tissue and the air flowing inside the bronchi. These characteristics affect the hydrodynamic properties of the tree.

As an interface with the external air, it is constantly in contact with external particles. The bronchial mucus plays a protective role by capturing these particles. Normally, the mucus is naturally drained out of the lung. The mucus should not stagnate in the bronchi because stagnation increases the probability of developing an infection. When stagnation occurs, chest physiotherapy is often prescribed. The physiotherapists usually perform technics using the air shear stress to stimulate the mucus extraction. However, the expiratory conditions that allow to mobilize the mucus are not clearly defined.

This thesis is based on three steps that allow to analyze the influence of the bifurcations asymmetry and of the compliance on the distribution of the shear stress induced by the airflow in the bronchi. Our three studies use a 0D model for each bronchus. The air hydrodynamic into each bronchus is simplified, either with a Poiseuille flow or with a “modified Poiseuille” flow that includes some inertial effects.

The first step consists in understanding the air shear stress repartition in a symmetric tree with compliant bronchi. We show that this repartition exhibits a maximum whose location and amplitude depend on the flowrate in the trachea and on the pressure in the pulmonary tissue. This study shows also that one partial obstruction might “hide” others localized deeper in the lung. The comparison of our results with a typical yield shear stress of the mucus allows to develop, in the limits of our model, idealized chest physiotherapy technics for mucus draining.

The second step aims at understanding the link between the bifurcation’s asymmetry and the hydrodynamics in a fractal and rigid tree. We propose in this part the hypothesis that the pulmonary asymmetry selection is linked to the optimization of a cost linked to the tree’s hydrodynamic resistance, under a constraint on the tree’s volume. Our analysis allows to propose a scenario that explains the difference in asymmetry observed between mammals.

Finally, the third step aims at studying the shear stress repartition in a tree with asymmetric bifurcations and compliant bronchi. We show that the distribution of the air shear stress induced by a Poiseuille flow in trees with symmetric bifurcations and with asymmetric bifurcations have similar behaviors. However, the asymmetric case presents a spread of the shear stresses in the distal part of the tree, and bronchi with similar properties can have very different shear stresses.

This research, based on the alliance of mathematics, physics, biology and medicine, allowed to improve our understanding of both the bifurcation asymmetry, the bronchi compliance and their effect on the airflow hydrodynamic. Particularly, this allowed to further understand the influence of the air shear stress on the mucus flow during chest physiotherapy.

**Keywords :** Pulmonary ventilation, mathematic modelisation, computing modelisation, chest physiotherapy, pulmonary asymmetry, bronchi compliance

## REMERCIEMENTS

« Moi plus tard, je veux être chercheur !... (réfléchit)... Non ! Je veux être trouveur ! »

*Moi-même, 6 ans*

Qui l'aurait cru, il y a 26 ans, que ce rêve se concrétiserait. Le chemin vers le doctorat a été tout de même assez mouvementé. Bien que le parcours ait été assez lisse jusqu'au Master d'astrophysique, je n'ai pas réussi décrocher de bourse de thèse. Une pose de deux ans, à côtoyer la dépression, m'a néanmoins permis de découvrir mon autisme (ou mes troubles du spectre autistique pour les puristes) et de devenir père. Grâce à ma compagne, Julie, et ma thérapeute, Evelyne, je me suis relancé dans le monde académique en commençant un autre Master. C'est ainsi que j'ai rencontré Benjamin, qui enseignait la programmation avec Matlab, et sa thématique de recherche : la respiration, et notamment le poumon. Mon intérêt ne pouvait être plus élevé, ma fille avait eu la bronchiolite du nourrisson et était encore traumatisée par les manipulations de kinésithérapie respiratoire qu'elle a subies. Charmé par le sujet, j'ai fait le stage du Master 1 avec Benjamin. L'entente entre nous était telle que j'ai proposé de continuer l'aventure en thèse.

Et nous y voilà ! Mais le chemin du doctorat a eu son lot d'épreuves. Après une première année très (trop ?) enthousiaste, la seconde année fut marquée par la déprime causée par l'étude difficile de mon modèle. C'est pendant la troisième année que j'ai réussi à avoir les premières conclusions de mes recherches. Lors de la quatrième année, j'ai été confronté à mon absence de compétence de rédaction, à tout apprendre de zéro, à passer de longues semaines sans réussir à écrire quoique ce soit. Et la cinquième année avec son confinement, je suis devenu une deuxième fois père avec une nouvelle naissance dans la famille. Toutefois, j'ai enfin réussi à rédiger ma thèse. Alors je souhaite remercier toutes les personnes qui m'ont permis d'accomplir cette thèse, que cela soit directement ou indirectement, ainsi que toutes celles et ceux qui ont rendu cette période très agréable malgré ces épreuves.

Je souhaite remercier en premier mon directeur de thèse Benjamin Mauroy. Tu m'as accordé ta confiance, m'as supporté et m'as accompagné durant ces cinq années. Tu m'as permis de m'épanouir pleinement dans la recherche. J'ai beaucoup appris grâce à toi, tu m'as ouvert à des mondes qui m'étaient inconnus, le monde du poumon et celui des mathématiques. Cela a été un vrai plaisir de travailler avec toi pendant cette période.

J'aimerais remercier ma compagne Julie. Sans toi, cette thèse n'aurait même pas été envisageable. Le soutien que tu m'as apporté est considérable. Je t'aime.

Evelyne, tu m'as aidé à mieux me comprendre moi-même et mes limites. Toi aussi, tu m'as poussé sur le bon chemin vers la réalisation d'un de mes plus vieux rêves. Sans toi je n'en serai pas là. Merci beaucoup.

Papa et Maman, vous êtes la source de toute ma vie. Sans vous, il n'y aurait même pas de moi. Merci d'avoir accompagné mes rêves d'enfant. Merci papa de m'avoir initié à la curiosité scientifique. Merci maman pour m'avoir poussé à faire le stage de 4<sup>e</sup> à l'Observatoire de Nice. Merci.

Je remercie ces quelques enseignants qui m'ont aidé sur le chemin : Frédéric Blanc, Sylvie Robbe-Dubois, Eric Aristidi, Philipès Bendjoya et Gilles Niccolini. Vous m'avez beaucoup apporté pendant mes études, et nos discussions et les travaux que j'ai fait avec vous m'ont conforté dans l'idée de faire une thèse.

Je remercie aussi mes deux filles Idylle et Mélodie. Merci d'être là. Je vous aime fort !

Mehdi, compagnon de thèse, les nombreuses heures de discussion ensemble ne sont pas remplaçables, tout comme The Room, KungPow et le méta-Sporz.

Michael, Frédérique, Cyril, Thomas, Valentin et Riccardo, fratrie thésarde et post-doc, j'ai adoré travailler avec vous. Michael, merci pour tous tes conseils de sport.

Jean-Claude Jeulin et Dominique Pelca, merci pour vos explications sur les manipulations de kinésithérapie. Sans vous, le lien avec l'application de mes recherches aurait été beaucoup moins clair et de qualité.

Giulia Mezzadri, grâce à toi, j'ai pu mettre des mots sur ce que je pense et sur ce que je ressens. Tu m'as offert une occasion rare d'améliorer mes compétences sociales. Merci beaucoup !

Alexis Gilles, merci de m'avoir fait découvrir Sporz. Et merci aux joueure.e.s régulier.ère.s Julie Llobell, Zhixin Xie, Alexis Loyer, Maxime Pelletier, Billel Guelmame, Haroune Houamed, Yash Chopra, Léo Vivion, Kevin Atsou, Marco Corneli, Eliot Pachérie et ~~Armand Koenig~~. Ces soirées étaient vraiment géniales.

Je remercie tous les autres collègues avec qui j'ai partagé de très bons moments :

Laurence Beaude	Samira Amraoui	Reine Fares	Giulia Lissoni
Najwa Ghannoum	Nadine Dirani	Giulia Marchello	Cécile Gachet
Ludovick Gagnon	Luis Gomez	Victor Marx	
Benjamin Zarka	Thanos Vasileiadis	Gaetan Cane	

Jean-Marc Lacroix et Roland Ruelle, merci pour votre écoute et votre assistance informatique. Je me souviendrai des nombreux repas passés ensemble.

Gilles Scarella, Bochra Mejri, j'ai beaucoup aimé nos discussions à table. Merci.

Marc Monticelli, ta bonne volonté et ton enthousiasme sont très appréciables. Ça a été un plaisir de faire le VADER-Day et la fête de la science avec toi.

Je remercie ces chercheurs avec qui j'ai partagé de nombreuses discussions intéressantes : Patricia Reynaud-Bouret, Maxime Ingremeau, Emmanuel Militon, Bernard Rousselet, André Galligo, Patrick Cassam-Chenai et Yves d'Angelo.

Enfin, je remercie les gestionnaires Julia Blondel, Isabelle de Angelis, Clara Salaun, Cecile Ivon et Anita Ibrahim.

## Table des matières

1.	<i>Introduction</i> . . . . .	9
1.1	Avant propos . . . . .	9
1.2	Contexte . . . . .	9
1.2.1	Arbre bronchique . . . . .	9
1.2.2	Compliance bronchique et pulmonaire . . . . .	11
1.2.3	Mucus et kinésithérapie . . . . .	12
1.3	Objectif . . . . .	13
2.	<i>Distribution des flux d'air dans un arbre symétrique aux bronches compliantes</i> . . . . .	15
2.1	Introduction . . . . .	15
2.2	Hypothèses . . . . .	15
2.3	Méthode . . . . .	16
2.3.1	Modèle . . . . .	16
2.3.2	Résolution numérique . . . . .	16
2.4	Distribution du cisaillement . . . . .	18
2.4.1	Évolution du cisaillement dans une bifurcation et dans l'arbre fractal en fonction de la génération . . . . .	18
2.4.2	L'écoulement de Poiseuille . . . . .	19
2.4.3	Influence de l'inertie dans l'arbre de Lambert . . . . .	22
2.5	Application du modèle pour la kinésithérapie respiratoire . . . . .	24
2.5.1	Mobilisation de mucus . . . . .	25
2.5.2	Procédés idéalisés de kinésithérapie . . . . .	25
2.6	Discussion . . . . .	27
2.7	Conclusion . . . . .	27
2.A	Modèles . . . . .	33
2.A.1	Modèle de l'arbre bronchique . . . . .	33
2.A.2	Mucus et occlusion partielle . . . . .	35
2.A.3	Définition du modèle 0D . . . . .	37
2.A.4	Contraintes de cisaillement . . . . .	39
2.B	Méthode numérique . . . . .	41
2.B.1	Existence et unicité de la solution dans le cas $A_{\text{Mucus}} = 0$ . . . . .	41
2.B.2	Méthode numérique pour résoudre le cas sans obstruction . . . . .	42
2.B.3	Cas de l'obstruction partielle, $A_{\text{Mucus}} > 0$ . . . . .	43
2.C	Variation du cisaillement à travers une bifurcation symétrique . . . . .	43
3.	<i>Asymétrie et sélection naturelle</i> . . . . .	47
3.1	Introduction . . . . .	47
3.2	Asymétrie pulmonaire . . . . .	47
3.3	Modèle d'arbre taillé . . . . .	49
3.4	Changement de topologie d'arbre et nouveaux paramètres . . . . .	50
3.5	Caractéristiques des arbres modélisés . . . . .	50
3.5.1	Évolution du volume et de la résistance . . . . .	52
3.6	Résistance de l'arbre taillé à volume restreint . . . . .	53
3.6.1	Comportement en fonction du ratio d'asymétrie . . . . .	53

3.6.2	Sensibilité aux variations de paramètres du comportement de $\tilde{R}$ en fonction de $a$ . . . . .	55
3.7	Robustesse face aux variations biologiques . . . . .	55
3.8	Conclusion . . . . .	58
3.A	Modèle d'arbre . . . . .	63
3.B	Paramètres et arbre taillé . . . . .	65
3.C	Changement de topologie . . . . .	66
3.C.1	Nouvelle paramétrisation adaptée aux changements de topologie . . . . .	66
3.C.2	Les frontières entre topologie d'arbre . . . . .	67
3.D	L'arbre bronchique et ses propriétés . . . . .	69
3.D.1	Volume et résistance hydrodynamique . . . . .	69
3.D.2	Énergie minimale à débit fixe . . . . .	70
3.E	Variation des propriétés physiques de l'arbre . . . . .	71
3.E.1	Évolution du volume $V_{\text{tot}}$ en fonction de $g_+$ et de $g_-$ . . . . .	71
3.E.2	Évolution de la résistance $\tilde{R}$ en fonction de $g_+$ et de $g_-$ . . . . .	72
3.F	Résistance d'un arbre taillé à volume contraint . . . . .	76
3.F.1	Définition . . . . .	76
3.F.2	Recherche numérique du paramètre $F(\psi_{AV})$ . . . . .	77
4.	<i>Distribution des flux d'air dans un arbre asymétrique aux bronches compliantes</i> . . . . .	81
4.1	Introduction . . . . .	81
4.2	Hypothèses . . . . .	81
4.3	Méthode . . . . .	82
4.3.1	Modèle . . . . .	82
4.3.2	Résolution numérique . . . . .	82
4.4	Distribution du cisaillement dans l'arbre taillé défini par $g_+ = 25$ et $g_- = 12$ . . . . .	85
4.5	Discussion . . . . .	85
4.5.1	Le poids de la résistance des branches dans la résistance équivalente de leur sous arbre est-il une des causes de l'étalement ? . . . . .	85
4.5.2	Hypothèses sur l'influence de l'inertie et de la présence d'obstruction partielle . . . . .	88
4.6	Conclusion . . . . .	88
4.A	Le modèle . . . . .	95
4.A.1	Topologie de l'arbre et coefficient de génération $g$ . . . . .	95
4.A.2	Longueur $L$ et section $A$ : adaptation du modèle de Lambert et al. <sup>(24)</sup> . . . . .	97
4.A.3	Résistance $R$ et résistance équivalente $R_{\text{eq}}$ . . . . .	98
4.A.4	Différence de pression $q$ et pression transmurale $P$ . . . . .	100
4.A.5	Débit $\Phi$ et contrainte de cisaillement $\sigma$ . . . . .	101
4.B	Résolution numérique . . . . .	102
4.B.1	Mise à jour de $\tilde{\chi}$ . . . . .	102
4.C	Modèle simplifié . . . . .	104
4.C.1	Région proximale $(1 - k_+^{-1})^{-1} < k_-$ . . . . .	105
4.C.2	Région distale $(1 - k_+^{-1})^{-1} \geq k_-$ . . . . .	106
5.	<i>Conclusion générale et perspectives</i> . . . . .	107

# 1. INTRODUCTION

## 1.1 Avant propos

Bien que cette thèse soit une thèse de mathématiques appliquées, elle se situe à leur interface avec la physique mais aussi la biologie et la médecine. De plus, les objectifs de notre recherche sont d'apporter de nouvelles connaissances scientifiques au corps médical. Ainsi, nous avons choisi de faciliter au mieux la lecture de cette thèse pour les lecteurs sans formation mathématique. Le corps de texte principal ne détaillera aucun calcul. Les modèles et les méthodes numériques utilisés et développés pour cette recherche, et les analyses mathématiques des résultats y sont résumées au strict nécessaire pour la compréhension des résultats de notre recherche. Tous les détails mathématiques de ces sujets sont placés en annexe. Ces annexes restent une part très importante de mes travaux et nous vous invitons à les consulter selon votre aisance mathématique.

## 1.2 Contexte

### 1.2.1 Arbre bronchique

L'arbre pulmonaire désigne le réseau de bronche qui relie le larynx aux alvéoles. Il peut être séparé en deux catégories : une partie ventilatoire, que l'on appellera l'arbre bronchique, voir figure 1.1.A, et des zones respiratoires, les acini, voir figure 1.1.B, où il y a les échanges gazeux entre l'air et le sang. L'appellation *arbre* vient de la structure arborescente du réseau avec l'arbre bronchique comme l'ensemble des branches de l'arbre, avec la trachée en guise de tronc, et les acini comme les feuilles de l'arbre. Les bronches de l'arbre bronchique sont essentiellement reliées entre-elles par des bifurcations, voir figure 1.1.C et D. Ainsi, l'arbre bronchique peut être représenté par un arbre dichotomique. Les bronches de l'arbre peuvent être indexées selon leur génération qui correspond au nombre de bifurcations les reliant à la trachée. Au sein d'une même génération, les bronches peuvent être indexées selon un autre critère tel que présenté figure 1.1.E. L'arbre bronchique a une topologie asymétrique, c'est à dire que les acini n'appartiennent pas à la même génération.

Le long l'arbre bronchique, le rayon et la longueur de la majorité des bronches se réduisent de génération en génération. Il existe des exceptions dans les premières générations qui sont nécessaires au poumon pour s'adapter au volume thoracique disponible. Toutefois, à partir d'un certain stade, la réduction du rayon et de la longueur tend à se stabiliser. Les bifurcations tendent à être des homothéties. La réduction de taille est plus ou moins asymétrique, avec, à chaque bifurcation, des bronches filles de tailles différentes. Une manière de caractériser cette asymétrie de branchement est de faire le rapport entre les tailles des bronches filles. Des travaux ont étudié ce ratio et son évolution en fonction des générations pour plusieurs espèces <sup>(37,40,44)</sup>.

Comme on vient de le voir, l'arbre bronchique est complexe tant par sa structure arborescente que par la géométrie des bronches <sup>(12,26)</sup>. De nombreuses études ont été faites sur les écoulements d'air passant à travers. Ces études utilisent principalement deux types de modélisation. La première, la modélisation 3D, utilise les ressources numériques pour approcher la situation hydrodynamique dans une maquette numérique en trois dimensions, souvent réalisée à partir de CT-scan <sup>(20)</sup>. Ce type de modélisation permet d'avoir plus de détails sur la forme de l'écoulement et d'inclure facilement l'appareil respiratoire supérieur. Il est utilisé, par exemple, dans l'étude de la propagation d'aérosols dans les voies respiratoire <sup>(13,32,33)</sup>. Ce type de modèle est très coûteux numériquement et ne peut être utilisé que pour les premières générations de l'arbre bronchique. La seconde, la modélisation 0D, résume la situation hydrodynamique d'une bronche

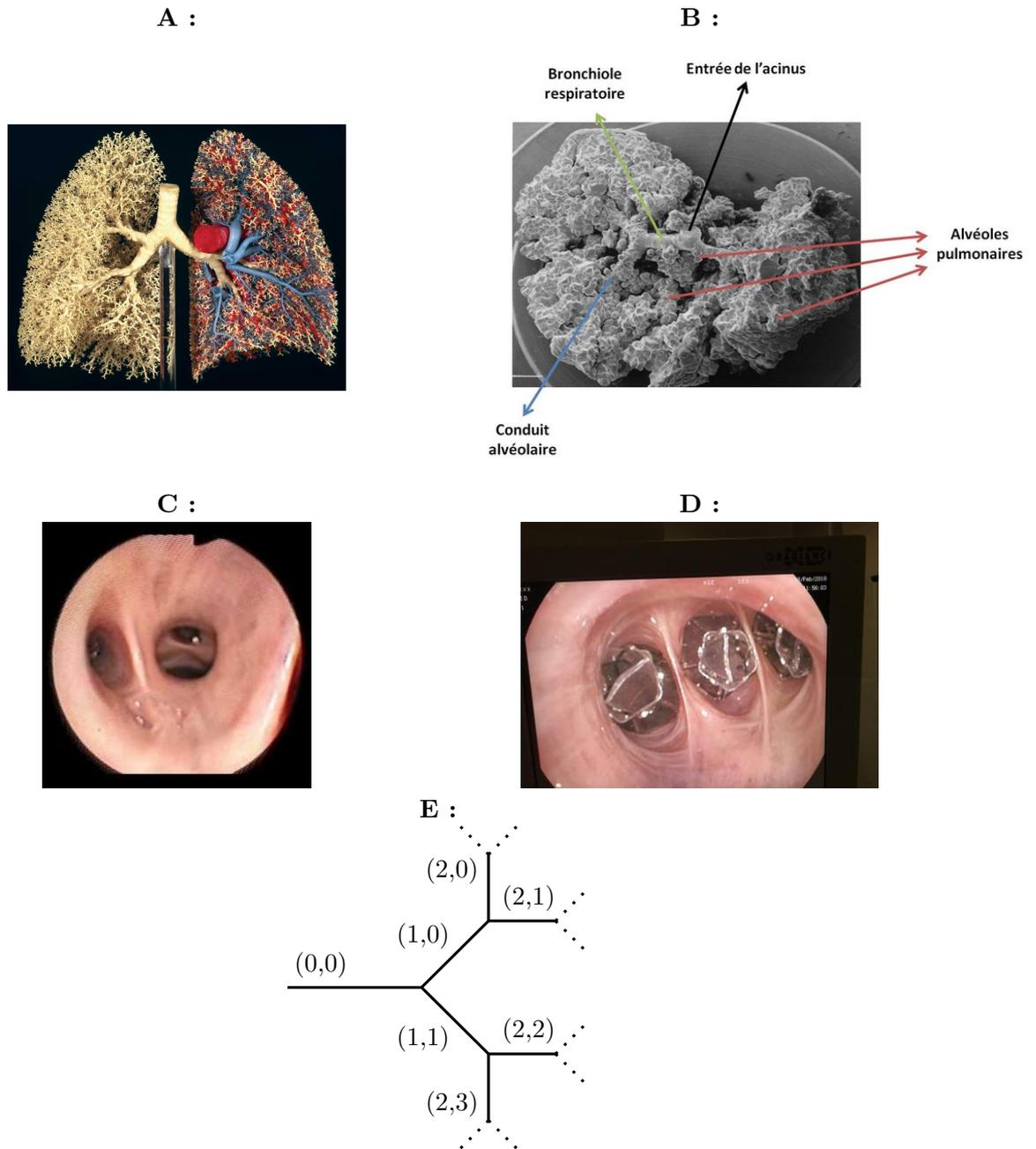


Fig. 1.1: **A :** Moulage effectué par Weibel<sup>(45)</sup> de l'arbre bronchique (jaune) et des veines (rouge) et artères (bleu) pulmonaires du poumon gauche. **B :** Moulage d'un acinus<sup>(18)</sup>. Dans l'arbre pulmonaire, c'est dans les acini qui il y les alvéoles, lieu d'échange gazeux entre l'air et le sang. Les bronches terminales de l'arbre bronchique donnent sur les entrées des acini. Les bronchioles respiratoires, bronchioles recouvertes de quelques alvéoles, mènent aux conduits alvéolaires, complètement recouverts d'alvéoles. **C :** Photo d'une bifurcation bronchique. **D :** Photo d'une trifurcation bronchique. Les trifurcations peuvent être représentées dans l'arbre dichotomique comme une succession de deux bifurcations reliées par une branche de longueur nulle. **E :** Les trois premières générations d'un arbre idéalisé. A côté de chaque branche est indiqué le couple d'indice  $(n, i)$  correspondant.  $n$  est la génération de la branche et  $i$  le numéro de la branche au sein de la même génération. Pour un arbre à topologie symétrique, toutes les branches terminales ont la même génération. Par exemple, l'arbre dessiné par les traits pleins a une topologie symétrique. Pour un arbre à topologie asymétrique, la génération des branches terminales n'est pas homogène. Par exemple, le même arbre dont on a oté les branches  $(2, 0)$  et  $(2, 1)$  a une topologie asymétrique.

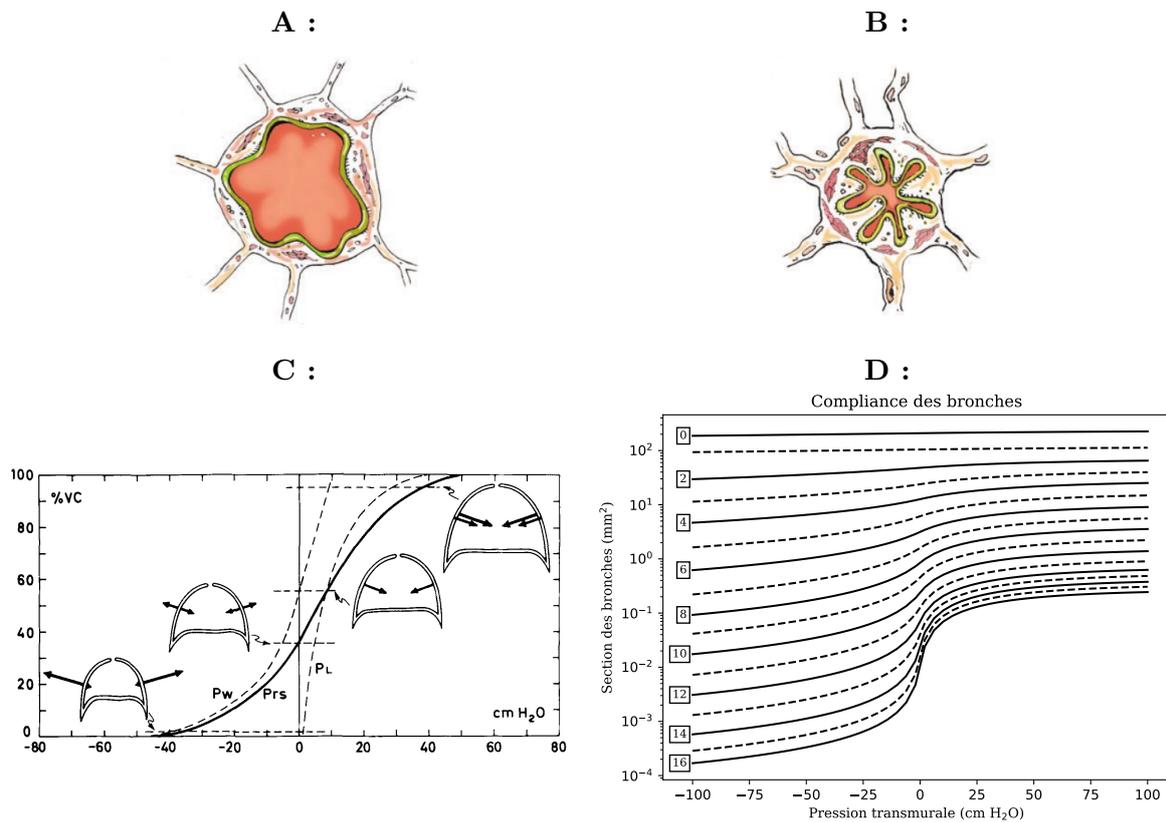


Fig. 1.2: **A** et **B** : Schémas représentant les comportements d'une bronche compliant<sup>(14)</sup>. **A** : section transversale de bronche lorsque la pression transmurale est forte, typiquement durant l'inspiration. **B** : Section transversale de bronche lorsque la pression transmurale est faible, typiquement en fin d'expiration. **C** : Courbes volume-pression statique du poumon ( $P_L$ ), de la cage thoracique ( $P_W$ ) et du système respiratoire complet ( $P_{RS}$ )<sup>(2)</sup>. **D** : Courbes section-pression transmurale statique des bronches données par le modèle de Lambert et al.<sup>(24)</sup>. Les générations sont annotées à gauche des courbes. Plus la génération augmente, plus la compliance est importante. Pour toutes les courbes, le maximum de compliance est situé à la pression transmurale nulle.

à un ensemble de données ponctuelles. Bien que ces modèles simplifiés ne nous permettent pas de détailler ce qu'il se passe exactement dans chaque bronche, leur légèreté nous permet de considérer l'ensemble de l'arbre bronchique et, dans certains cas, de l'étudier analytiquement<sup>(24,28-30,34,35)</sup>.

### 1.2.2 Compliance bronchique et pulmonaire

Les parois des bronches et des alvéoles sont flexibles<sup>(46)</sup>. Ainsi, si une force pousse les parois vers l'intérieur des bronches, elles se replient sur elle-même, tel que montré dans la figure 1.2.B, et réduisent la section disponible pour l'écoulement d'air, de même pour les alvéoles qui se dégonflent. Au contraire, lorsque qu'une force pousse les parois vers l'extérieur, elles se tendent et la bronche ou l'alvéole est dilatée, tel que présenté figure 1.2.A. De nombreux éléments peuvent provoquer ces forces ou modifier la flexibilité des parois. La pression transmurale, i.e. la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la bronche, est une des forces pouvant provoquer ce phénomène. Cette pression transmurale varie en fonction du débit ventilatoire et de la génération de la bronche. La pression interne croît avec les générations pendant l'expiration et décroît pendant l'inspiration. C'est la variation de cette pression transmurale au niveau des acini qui est le moteur de leur ouverture et leur fermeture, et donc de la ventilation. Des mécanismes altèrent de manière passive la compliance des parois, tels que la présence de cartilage dans les premières bronches ou encore celle du surfactant dans les alvéoles. D'autres agissent activement sur la compliance, tels que les muscles lisses bronchiques.

Le volume d'air dans le poumon étant principalement dû au volume des alvéoles, leur com-

pliance est mesurée globalement, sur l'ensemble du poumon. Le comportement du volume d'air du poumon en fonction de la différence de pression entre celle à l'intérieur des alvéoles et celle du tissu pulmonaire est mesuré par la compliance pulmonaire. Dans<sup>(2)</sup>, les auteurs ont mesuré la relation entre le volume pulmonaire et la pression pleurale dans le cas statique, voir figure 1.2.C. Lorsque les voies aériennes sont libres, sans occlusion, l'hydrostatique induit que la pression de l'air dans les alvéoles est égale à celle de l'air extérieur. Bien que notre recherche porte sur l'expiration, et que nous sommes dans le cas dynamique, leurs résultats nous donnent un aperçu de la compliance pulmonaire. De plus, nous pourrions comparer nos résultats avec le cas de la FRC (Functional Residual Capacity), i.e. cas statique sans effort musculaire, dont la pression transmurale est constante et égale à 5 cm H<sub>2</sub>O<sup>(30)</sup>.

Le volume des bronches est faible comparé au volume des alvéoles, environ 10% du volume pulmonaire<sup>(45)</sup>. Ainsi, la compliance bronchique intervient peu dans la compliance pulmonaire statique. Toutefois, la variation de la section des bronches influence fortement l'écoulement d'air passant à travers<sup>(30)</sup>. Plus elle est petite, plus la force nécessaire pour générer un écoulement d'un certain débit doit être élevée. Ce phénomène nous semble essentiel et doit être pris en compte dans nos modèles. Pour cela, nous utiliserons le modèle développé par<sup>(24)</sup>. Ce modèle propose une loi reliant la section interne des bronches à la pression transmurale, voir figure 1.2.D. Cette loi est identique quelle que soit la bronche concernée, et dépend de plusieurs paramètres dont les auteurs fournissent des estimations. Ces paramètres sont décrits pour les modèles d'arbre de type Weibel, symétrique et de 17 générations. Ils dépendent de la génération de la branche concernée. Leurs valeurs ont été déterminées à partir de mesure pour les premières générations et par extrapolation pour les autres. Nous utiliserons directement ce modèle dans le cas symétrique et nous adapterons les paramètres du modèle au cas asymétrique par interpolation.

### 1.2.3 Mucus et kinésithérapie

Le poumon est un organe interface entre l'air et le sang, en contact constant avec l'environnement ambiant. Pour lutter contre l'importation continue de particules extérieures, il possède des systèmes de défense. L'un d'eux est la production et l'extraction de mucus. Le mucus est un fluide viscoélastique, comme un gel. Ces fluides ont des comportements différents selon la force de cisaillement à laquelle ils sont soumis<sup>(23)</sup>. Dans le cas du mucus<sup>(22)</sup>, lorsque le cisaillement est faible, il se comporte comme un solide élastique, il se déforme jusqu'à une position d'équilibre. Cette propriété lui permet de rester "collé" à la paroi bronchique sans couler le long des bronches. Le battement mucociliaire, i.e. le mouvement des cils de l'épithélium respiratoire, permet le déplacement de cette couche de mucus vers la bifurcation œsopharyngée, où il est extrait du système respiratoire<sup>(8)</sup>. Lorsque le cisaillement devient suffisamment grand, il se comporte comme un liquide visqueux et coule. Ce comportement lui permet de piéger les particules extérieures et d'être décroché de la paroi bronchique lors de forts débits expiratoires, comme la toux<sup>(3,19,22,23,29,30)</sup>. La superposition de ces deux comportements est due à la présence de mucine, de longues chaînes protéiques qui ont tendance à s'emmêler entre elles. Le taux de concentration de mucine et sa qualité ont une forte influence sur les propriétés viscoélastiques du mucus<sup>(23)</sup>.

Chez une personne saine, le mucus ne forme qu'une fine couche de quelques micromètres sur la paroi<sup>(21)</sup>. Toutefois, lorsque les propriétés du mucus sont trop altérées, ou lorsque les mécanismes d'extraction du mucus ne fonctionnent plus correctement, le mucus stagne et peut devenir nocif pour le poumon. Premièrement, un excès de mucus localisé réduit l'espace disponible pour l'écoulement d'air. La ventilation peut devenir plus difficile ou moins efficace. Deuxièmement, lorsque le mucus stagne, les bactéries présentes dans les particules piégées peuvent proliférer et causer des infections. Lorsque ces cas apparaissent, de la kinésithérapie respiratoire est souvent préconisée<sup>(38)</sup>. Il existe de nombreuses techniques utilisées dans ces cas, et certaines d'entre-elles provoquent la fluidification et / ou le décrochage du mucus grâce à l'augmentation du cisaillement à l'interface air-mucus. Ces techniques bénéficient de nombreuses études cliniques qui évaluent leurs efficacités. Toutefois, à ce jour, la compréhension scientifique des phénomènes physiques et physiologiques impliqués dans ces thérapies reste empirique.

### 1.3 Objectif

Nous voulons, dans cette thèse, approfondir la compréhension de la biophysique de la kinésithérapie respiratoire et apporter des arguments scientifiques aux techniques utilisées ou à l'élaboration de nouvelles techniques. Toutefois, le développement d'un modèle complet du poumon dépasse de loin le cadre de cette thèse. De nombreux éléments sont imbriqués dans ce problème complexe, tels que la mécanique du poumon, celle des côtes et des muscles respiratoires, le comportement du flux d'air et du sang pendant la respiration, les altérations apportées par les maladies etc... Comprendre le poumon dans son ensemble s'inscrit dans une plus large dynamique de recherche telles que celles menées par VADER center<sup>1</sup> et par VirtualChest<sup>2</sup>.

Néanmoins, cette thèse participe à ces travaux en répondant, en partie, à ces questions, en se concentrant sur la répartition de flux d'air dans un arbre dichotomique asymétrique de bronches cylindriques compliantes et des forces de cisaillements qui en découlent. Pour mener à bien cette recherche, nous l'avons segmentée en trois étapes. Tout d'abord, je me suis intéressé à l'influence de la compliance bronchique sur la répartition du cisaillement dans l'arbre symétrique, chapitre 2. Les modèles d'arbre symétrique, notamment basé sur celui de Lambert et al. (24), ont souvent été étudiés (15,30). Ensuite, nous avons travaillé sur un modèle d'arbre fractal asymétrique, où la notion de génération est plus compliquée que dans le cas symétrique. Les propriétés des arbres décrits par ce modèle, tels que le volume ou encore la résistance hydrodynamique minimale, ont été étudiées dans le cadre théorique de la sélection naturelle, avec les aspects de robustesse face à la variabilité biologique entre individus, chapitre 3. Enfin, grâce au modèle d'arbre asymétrique précédemment construit, nous avons étudié l'influence de l'asymétrie sur la répartition du cisaillement dans l'arbre aux branches compliantes. Nous avons trouvé un autre critère, le coefficient de génération, plus significatif que la génération pour étudier ces répartitions, chapitre 4.

---

1. center of VirtAl moDEling of Respiration

2. <https://anr.fr/Projet-ANR-16-CE19-0014>



## 2. DISTRIBUTION DES FLUX D'AIR DANS UN ARBRE SYMÉTRIQUE AUX BRONCHES COMPLIANTES

### 2.1 Introduction

Dans cette partie, nous nous intéressons au comportement d'un arbre symétrique dont les bronches sont compliantes et à comment les bronches réagissent au débit d'air à la trachée et à la pression des tissus pulmonaires externes aux bronches. Nous montrons aussi où le mucus est susceptible d'être mobilisé par le flux d'air, dans les cas avec et sans obstruction partielle des bronches.

Le mucus est un système de défense du poumon. Sa structure viscoélastique permet de piéger les particules extérieures. Chez les sujets sains, il est évacué par le battement mucociliaire et par la force des flux d'air pendant la ventilation, comme lors de la toux. Ce dernier implique la mobilisation du mucus grâce à la force de frottement visqueuse de l'écoulement d'air contre la paroi bronchique. Cette force, appelée cisaillement, doit dépasser un seuil pour fluidifier et / ou décrocher le mucus de la paroi bronchique. Lorsqu'une personne éprouve des difficultés à évacuer son mucus, de la kinésithérapie respiratoire peut être prescrite afin d'éviter des occlusions totales de bronches et les infections dues à la stagnation du mucus.

Il existe de nombreuses techniques de kinésithérapie respiratoire. Bien qu'elles bénéficient d'arguments cliniques, aucun argument scientifique probant n'est disponible à ce jour.

Un des buts de cette étude est de visualiser où le mucus pourrait être mobilisé. Cette connaissance peut aider les kinésithérapeutes à mieux appréhender l'efficacité des techniques existantes via des arguments scientifiques et leur permettre d'optimiser leurs techniques ou d'en développer des nouvelles.

Nous verrons dans cette étude que la répartition du cisaillement est fortement liée à l'évolution du ratio de réduction, i.e le rapport de diamètre entre les bronches de deux générations consécutives, le long de l'arbre. Il existe notamment deux critères sur ce ratio qui détermine le comportement de la répartition du cisaillement dans l'arbre bronchique.

### 2.2 Hypothèses

Dans cette étude, nous considérons l'arbre bronchique comme un arbre aux bifurcations symétriques. De manière générale, nous indexons les branches selon leurs générations, le nombre de bifurcations les reliant à la première branche de l'arbre. Le modèle d'arbre considéré possède 17 générations de branches. La symétrie des bifurcations induit que toutes les branches de l'arbre appartenant à la même génération, ont leurs propriétés identiques.

Nous considérons que les branches de l'arbre sont compliantes. Leurs parois sont souples et leurs sections internes  $A$  varient en fonction de la pression transmurale  $P$ , i.e. la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la branche. Comme relation entre la section et la pression transmurale, nous utilisons le modèle de Lambert et al.<sup>(24)</sup>. Nous utilisons aussi les longueurs données par Lambert et al.<sup>(24)</sup> comme longueur pour nos branches.

Nous considérons la possibilité d'une obstruction partielle due à la stagnation du mucus localisé dans toutes les branches d'une génération. Au niveau de l'obstruction, la section de la branche est égale à la section calculé avec le modèle de Lambert et al.<sup>(24)</sup> retranchée d'une valeur constante et connue.

Nous considérons que le volume interne des branches reste cylindrique quelle que soit la pression transmurale. Ainsi, nous réduisons les propriétés géométriques des branches à leurs longueurs  $L$  et leurs sections  $A$ .

Nous résumons l'hydrodynamique de chaque branche à un modèle 0D. Ce type de modèle relie le gain de pression  $q$ , i.e. la différence de pression entre la section d'entrée et celle de la sortie, au débit d'air circulant dans celle-ci  $\Phi$  et à sa résistance hydrodynamique  $R$ . La résistance des branches dépend du type d'écoulement considéré, Poiseuille ou tel qu'utilisé par Florens et al. <sup>(15)</sup> ou Tawhai and Hunter <sup>(43)</sup>. De plus, nous considérons connu le débit expiratoire à la branche d'origine, modélisant la trachée.

Nous considérons que les écoulements sont stationnaires, coaxiaux à la branche et axisymétriques. Cette hypothèse permet de relier le gain de pression, la longueur et la section aux forces moyennes de cisaillement aux parois pour chaque branche.

Nous négligeons l'influence des bifurcations sur l'hydrodynamique. Ainsi, les différences de pression entre les entrées et sorties des bifurcations sont nulles.

Enfin, nous considérons que la pression entourant les branches  $P_{\text{tissus}}$  est connue et homogène, et que la pression de l'air au fond des acini est homogène. La pression de référence du système est celle de l'air au début de la trachée, après le larynx.

## 2.3 Méthode

Cette section est un résumé des annexes 2.A et 2.B. Nous vous invitons à les consulter pour les détails du modèle et de méthode numérique développée.

### 2.3.1 Modèle

Le modèle dépend de quatre paramètres : le débit à la trachée  $\Phi_0$ , la pression entourant les branches  $P_{\text{tissus}}$  et, dans le cas avec obstruction partielle, la génération  $m$  des branches obstruées par du mucus et la section  $A_{\text{Mucus}}$  occupé par l'obstruction. Le système d'équation relie sept quantités par génération  $n$  : la longueur invariante  $L_n$  des branches, le débit  $\Phi_n$ , qui ne dépend que du débit à la trachée et de la génération, la section  $A_n$  de la branche, le préfacteur de la résistance  $Z_n$ , le gain de pression  $q_n$ , la pression transmurale moyenne  $P_n$  et les forces de cisaillement  $\sigma_n$ . Le préfacteur de la résistance  $Z_n$  corrige la résistance de Poiseuille en modélisant divers effets dus aux propriétés de l'écoulement. Il est égale à 1 lorsque c'est un écoulement de Poiseuille et est supérieur à 1 pour tout autre écoulement. Au sein d'une même génération, certaines quantités sont interdépendantes entre elles. Entre générations, les quantités sont reliées par une dépendance unidirectionnelle de la génération ascendante  $n$  vers la génération suivante  $n + 1$ . Un résumé des dépendances entre ces quantités est schématisé dans le diagramme 2.1.

Pour chaque branche de génération  $n$ , lorsqu'elle est traversée par un écoulement d'air de débit  $\Phi_n$ , il provoque un gain de pression  $q_n$ . Ce gain de pression augmente la pression transmurale moyenne  $P_n$ , ce qui induit la dilatation de la branche, car elle est compliant. Sa section interne augmente, de même que la section disponible pour l'écoulement  $A_n$ . Toutefois, si la section est plus large, le gain de pression est diminué. Nous cherchons l'état d'équilibre de ce système pour chaque génération de l'arbre.

La non-linéarité de certaines équations du modèle nécessite le développement et l'usage d'outils numériques adaptés.

### 2.3.2 Résolution numérique

Pour trouver numériquement la solution du système d'équations lié au modèle, nous résolvons génération par génération en partant de la génération 0. À chaque étape, la solution est déterminée par une recherche de point fixe avec un algorithme de Newton. Pour les générations  $n > 0$ , l'algorithme prend en paramètre supplémentaire la solution de la génération précédente.

Certaines adaptations de l'algorithme ont dû être faites dans le cas du modèle d'écoulement proposé par Tawhai and Hunter <sup>(43)</sup> et dans le cas avec obstruction partielle de mucus. Dans le premier cas, l'écoulement peut être celui de Poiseuille, lorsque le nombre de Reynolds est bas, ou être déformé par des effets d'inertie (profil bouchon). Ainsi, pour chaque génération, nous

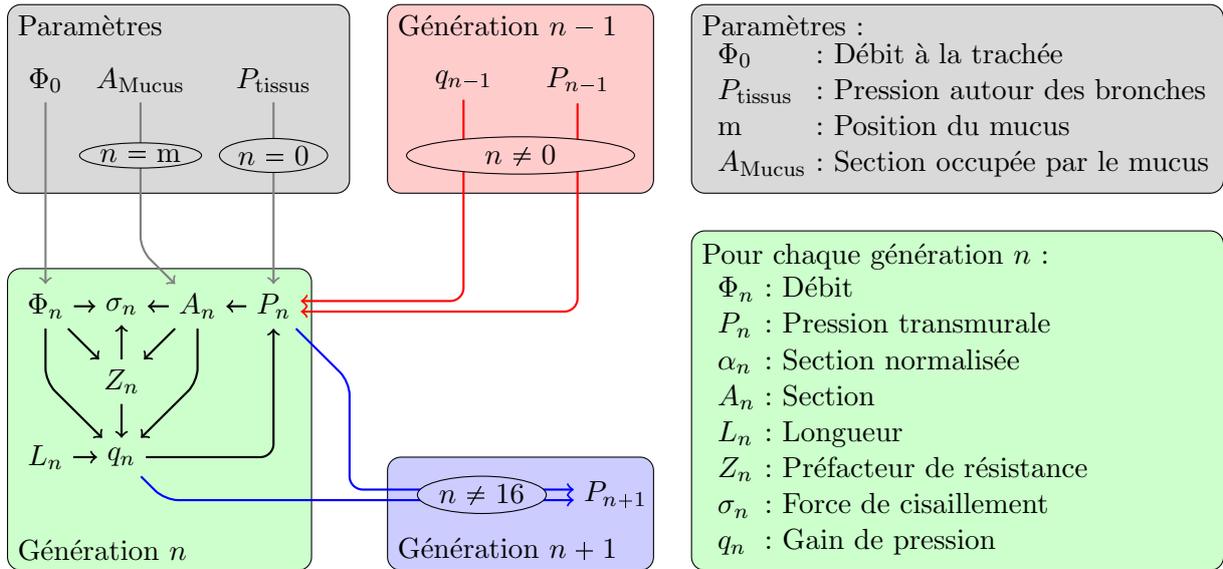


Fig. 2.1: Diagramme des influences et dépendances des variables associées à la génération  $n$ , à gauche, et définitions des paramètres et des variables, à droite. Les variables sont catégorisées : dans le rectangle gris sont rassemblés les paramètres du modèle ; dans le rectangle vert, les variables associées à la génération  $n$  ; dans le rectangle rouge, les variables associées à la génération  $n - 1$  ; et dans le rectangle bleu, les variables associées à la génération  $n + 1$ . Pour les générations  $n - 1$  et  $n + 1$ , seules les variables influençant directement ou étant directement influencées par les variables de la branche  $b$  sont affichées. Les flèches montrent quelles variables influencent quelles autres. Par exemple :  $A \rightarrow B$ ,  $A$  influence  $B$  ou  $B$  dépend de  $A$ . Les flèches noires montrent les dépendances entre variables associées à la génération  $n$ , les flèches grises montrent les dépendances aux paramètres, les flèches rouges montrent les dépendances des variables de la génération  $n$  à celles associées à la génération  $n - 1$  et les flèches bleues montrent l'influence des variables de la génération  $n$  sur celles de la génération  $n + 1$ . Les ellipses indiquent les conditions de l'influence, par exemple :  $P_{n-1}$  influence  $P_n$  seulement si  $n \neq 0$ .

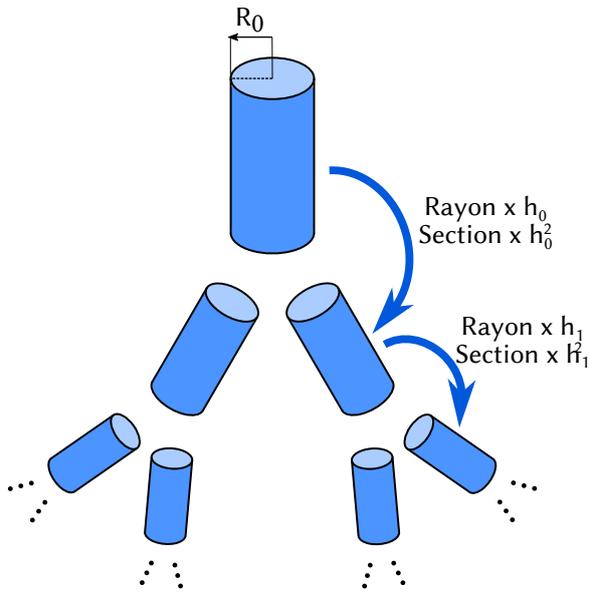


Fig. 2.2: Arbre symétrique aux branches cylindriques. Chaque cylindre a une section qui dépend de la génération de la branche. Nous pouvons relier la section de deux générations consécutives,  $i$  et  $i + 1$ , avec le ratio de réduction  $h_i^2 = A_{i+1}/A_i$ .

$h$		$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$		1		
$A$		↘	↘	↘	↘	→	↗
$\sigma_\mu$		↗	↗	↗	→	↘	↘
$\sigma_\rho$		↗	→	↘	↘	↘	↘

Tab. 2.1: Évolution de la section  $A$ , du cisaillement visqueux  $\sigma_\mu$  et du cisaillement inertiel  $\sigma_\rho$  dans une bifurcation symétrique selon la valeur du ratio  $h$  entre les diamètres des branches filles et de la branche mère. Les flèches ascendantes indiquent que la quantité augmente de la branche mère aux branches filles, les flèches horizontales indiquent la conservation de la quantité et les flèches descendantes leur décroissance.

déterminons le régime de l'écoulement avant d'utiliser l'algorithme. Pour le second cas, l'étape de mise à jour de l'algorithme a été modifiée pour l'empêcher de chercher la solution hors du domaine physique, i.e. rester dans les cas où la section  $A$  de la branche est positive.

## 2.4 Distribution du cisaillement

### 2.4.1 Évolution du cisaillement dans une bifurcation et dans l'arbre fractal en fonction de la génération

Une analyse du modèle faite en annexe 2.C relie l'évolution du cisaillement entre la branche mère et les branches filles d'une bifurcation symétrique au ratio des diamètres  $h$  la caractérisant. Le ratio des diamètres est le rapport entre le diamètre des branches filles et celui de la branche mère, voir la figure 2.2. Dans cette analyse, il y est montré que le cisaillement peut être décomposé en une somme de deux cisaillements, le visqueux et l'inertiel. Le cisaillement visqueux est relié à la viscosité de l'air, le cisaillement inertiel à sa densité. De plus, la croissance ou décroissance de chaque cisaillement le long de la bifurcation est conditionnée par deux critères,  $h_\rho = \sqrt{1/2}$  et  $h_\mu = \sqrt[3]{1/2}$ , sur le ratio des diamètres  $h$ . Si  $h$  est inférieur à  $h_\rho$ , les deux types de cisaillement croissent dans la bifurcation. Si  $h$  est compris entre  $h_\rho$  et  $h_\mu$ , le cisaillement visqueux croît tandis que l'inertiel diminue. Au-delà de  $h_\mu$ , les deux types de cisaillement décroissent. Les différents cas sont résumés dans le tableau 2.1.

De plus, il est montré que dans un arbre fractal, i.e. arbre dont le ratio  $h$  est homogène pour toutes les bifurcations, le comportement des cisaillements visqueux et inertiel sont expo-

	$h < 1/2$	$h > 1/2$
$\sigma_{\mu,0} > \sigma_{\rho,0}$	$\begin{cases} \sigma_n \approx \sigma_{\mu,n} \text{ si } n \leq i \\ \sigma_n \approx \sigma_{\rho,n} \text{ si } n > i \end{cases}$ avec $i \in \mathbb{N}$	$\sigma \approx \sigma_{\mu}$
$\sigma_{\mu,0} < \sigma_{\rho,0}$	$\sigma \approx \sigma_{\rho}$	$\begin{cases} \sigma_n \approx \sigma_{\rho,n} \text{ si } n \leq i \\ \sigma_n \approx \sigma_{\mu,n} \text{ si } n > i \end{cases}$ avec $i \in \mathbb{N}$

Tab. 2.2: Le comportement du cisaillement total dans un arbre fractal de ratio  $h$  dépend de la valeur du ratio  $h$  et du cisaillement dominant à la première branche. Dans le cas  $h < 1/2$  et  $\sigma_{\mu,0} < \sigma_{\rho,0}$ , le cisaillement total se comporte comme le cisaillement inertiel. Dans le cas  $h > 1/2$  et  $\sigma_{\mu,0} > \sigma_{\rho,0}$ , le cisaillement total se comporte comme le cisaillement visqueux. Dans le cas  $h < 1/2$  et  $\sigma_{\mu,0} > \sigma_{\rho,0}$  et le cas  $h > 1/2$  et  $\sigma_{\mu,0} < \sigma_{\rho,0}$ , il existe une génération  $i$  telle que le comportement du cisaillement total est différent de part et d'autre de la génération  $i$ .

nentiels. Un troisième critère,  $h = 1/2$ , indique quel cisaillement,  $\sigma_{\mu}$  ou  $\sigma_{\rho}$ , à la croissance ou la décroissance en fonction de la génération la plus forte. En dessous de ce critère, la croissance du cisaillement inertiel en fonction de la génération est plus importante que celle du cisaillement visqueux. Au dessus, il croît plus faiblement ou décroît plus rapidement que ce dernier. Toutefois, le comportement du cisaillement total, somme des cisaillement visqueux et inertiel, dépend aussi de la valeur de chaque cisaillement dans la première branche. Par exemple, si  $h < 1/2$  et que  $\sigma_{\mu,0} > \sigma_{\rho,0}$  dans la première génération, la croissance plus rapide de  $\sigma_{\rho}$  fait qu'à partir d'une génération  $i$ , le cisaillement inertiel dépasse le cisaillement visqueux. Le comportement exponentiel des deux cisaillements induit que le comportement total adopte le comportement du cisaillement visqueux lorsque la génération est inférieure à  $i$  et le comportement du cisaillement inertiel lorsque la génération est supérieure à  $i$ . Tous, les différents scenarii sont résumés dans le tableau 2.2

Ces éléments nous serviront à mieux comprendre la répartition du cisaillement  $\sigma$  dans l'arbre de Lambert à partir de l'évolution du ratio  $h$ .

#### 2.4.2 L'écoulement de Poiseuille

Maintenant que nous connaissons le comportement du cisaillement dans les bifurcations, nous allons étudier son comportement dans l'arbre de Lambert dans le cas d'un écoulement de Poiseuille. Avec ce modèle d'écoulement, le cisaillement inertiel est nul, seul compte le cisaillement visqueux. Cela veut dire qu'avec la seule connaissance de l'évolution du ratio  $h$ , nous pouvons déterminer le comportement du cisaillement.

##### *Évolution du ratio $h$ en fonction de la génération dans l'arbre de Lambert*

Nous pouvons voir dans la figure 2.3.A que, quel que soit le débit  $\Phi_0$  ou la pression entourant les branches  $P_{\text{tissus}}$ , le ratio de diamètre adopte le même comportement. À partir de la génération 2, le ratio ne varie pas beaucoup jusqu'à une certaine profondeur. Nous appelons cette région, la *région proximale*. En dessous de la région proximale, le ratio croît de manière quasi-linéaire. Nous appelons cette région, la *région transitoire*. Enfin, dans les cas à haut débit, le ratio se stabilise autour d'une nouvelle valeur. Nous appelons cette dernière région, la *région distale*.

Dans le cas sans écoulement, la pression transmurale est identique pour toutes les branches de l'arbre. Le ratio de diamètre  $h$  a tendance à être constant tout le long de l'arbre, la région proximale s'étend dans presque tout l'arbre. Toutefois, les branches deviennent de plus en plus compliantes avec la génération. À partir d'une certaine génération, la compliance est telle que la région transitoire est visible, même sans écoulement. Le début de la région transitoire est sensible à la pression  $P_{\text{tissus}}$  car plus la pression transmurale  $P$  est éloignée de 0, moins la compliance est sensible à  $P$ . Nous pouvons le voir par l'aplatissement des courbes dans la figure 2.3.B.

Lorsque l'air sort de l'arbre, la pression à l'intérieur des branches augmente avec la génération. La pression transmurale augmente donc de la même manière. Toutefois, le gain de pression transmurale d'une génération à l'autre dans les premières générations est trop faible comparé

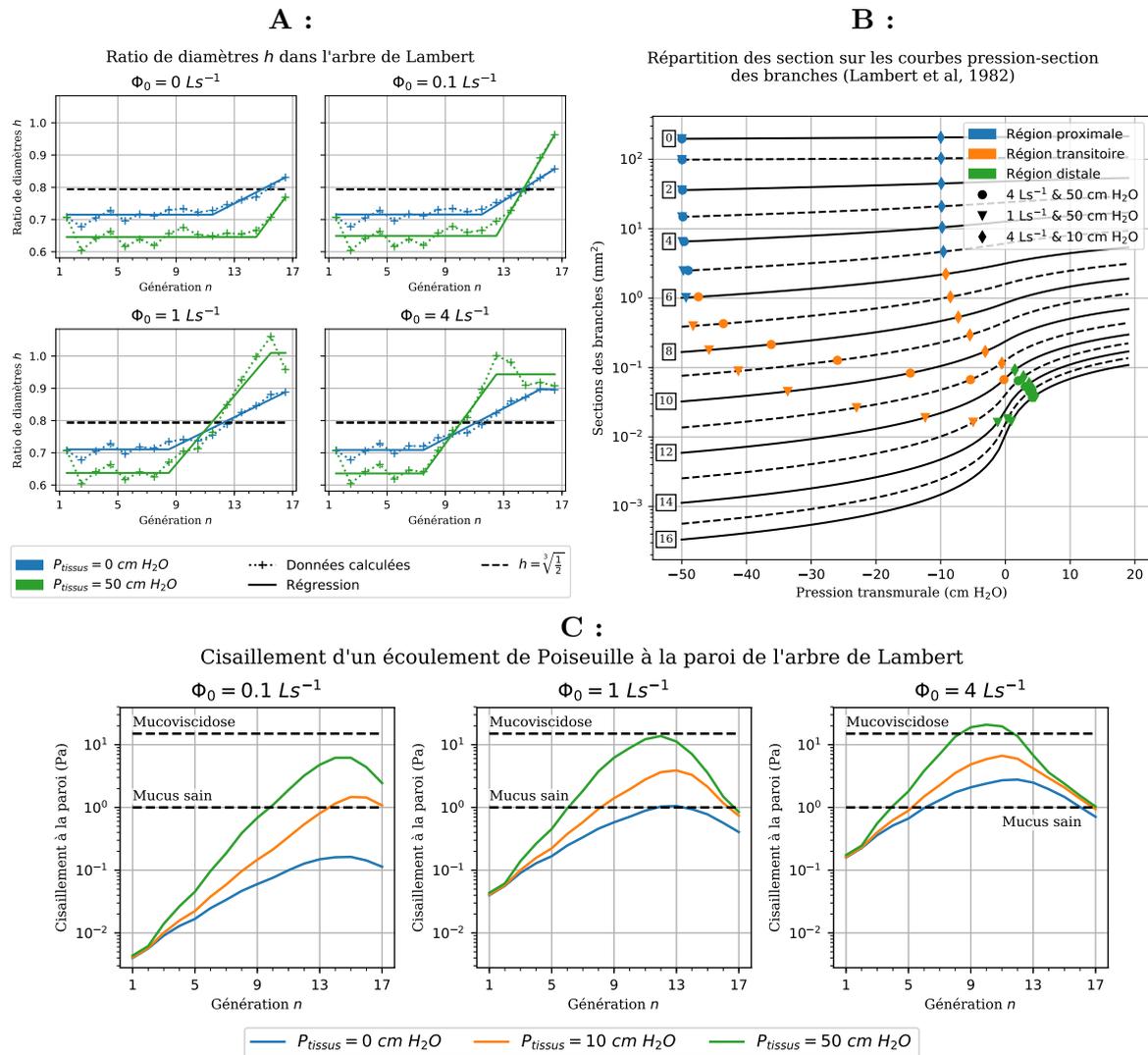


Fig. 2.3: **A :** Évolution du ratio de diamètre le long de l'arbre de Lambert, sans écoulement, en haut à gauche ↖, et dans le cas d'un écoulement de Poiseuille pour trois débits  $\Phi_0$  différents (0.1 L/s en haut à droite, 1 L/s en bas à gauche et 4 L/s en bas à droite) et deux pressions  $P_{\text{tissus}}$  différentes dans les tissus (0 cm H<sub>2</sub>O en bleu et 50 cm H<sub>2</sub>O en vert). Les tracés symbolisés avec les croix et les pointillés sont faits à partir des résultats calculés via le modèle, les tracés en ligne pleine sont des régressions de ces résultats. Les régressions sont une combinaison de trois régressions simples : une première partie constante, une seconde linéaire et une dernière constante à nouveau. La ligne horizontale en tiret marque la valeur  $h = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ , en deçà de cette valeur le cisaillement augmente le long de l'arbre, au-delà il diminue. **B :** Répartition des sections sur les courbes section - pression transmurale du modèle de Lambert pour trois cas, 4 Ls<sup>-1</sup> à 50 cm H<sub>2</sub>O (●), 1 Ls<sup>-1</sup> à 50 cm H<sub>2</sub>O (▼) et 4 Ls<sup>-1</sup> à 10 cm H<sub>2</sub>O (◆). Les symboles sont colorés différemment selon la région de la génération, si la génération est dans la région proximale, le symbole est bleu ; si elle est dans la région transitoire, il est orange ; et si elle est dans la région distale, il est vert. **C :** Répartition du cisaillement  $\sigma$  le long d'un arbre de Lambert lors d'un écoulement de Poiseuille pour trois débits,  $\Phi_0 = 0.1 \text{ Ls}^{-1}$  à gauche,  $\Phi_0 = 1 \text{ Ls}^{-1}$  au centre et  $\Phi_0 = 4 \text{ Ls}^{-1}$  à droite, et trois pressions entourant les branches,  $P_{\text{tissus}} = 0 \text{ cm H}_2\text{O}$  en bleu,  $P_{\text{tissus}} = 10 \text{ cm H}_2\text{O}$  en orange et  $P_{\text{tissus}} = 50 \text{ cm H}_2\text{O}$  en vert. A titre de comparaison, les deux lignes en tirets affichent les valeurs seuils du mucus sain, 1 Pa, et du mucus chez un patient atteint de mucoviscidose, 15 Pa.

à la sensibilité de la compliance des branches. Seule la pression entourant les branches est significative dans cette région proximale. La compliance bronchique étant négligeable dans cette région, le gain de pression transmurale est linéaire avec le débit expiratoire. Ainsi, il augmente d'autant plus à haut débit.

Toutefois, plus l'on descend dans l'arbre, plus la pression transmurale augmente et, d'un autre côté, plus les branches sont compliantes. Ainsi, à partir d'une certaine profondeur, le gain de pression transmurale devient significatif par rapport à  $P_{\text{tissus}}$ . La section des branches se réduit de moins en moins, c'est la région transitoire. À haut débit, ce stade est atteint plus rapidement car les gains de pression transmurale de la région proximale sont plus élevés. Lorsque l'on augmente la pression  $P_{\text{tissus}}$ , la section des branches  $A$  est plus petite, car cela a diminué le ratio  $h$  dans la région proximale. La réduction des section  $A$  augmente aussi le gain de pression transmurale. Toutefois, la valeur absolue de la pression transmurale est plus élevée, car c'est la différence entre la pression interne, proche de 0 à la génération 0, et la pression entourant les branches  $P_{\text{tissus}}$ . Le seuil à atteindre pour que le gain de pression transmurale devient significatif est autant augmenté que  $P_{\text{tissus}}$ . Ainsi, l'effet de  $P_{\text{tissus}}$  sur l'étendu de la région proximale est significatif seulement lorsque le débit est très faible, où l'augmentation du ratio  $h$  n'est dû qu'à la compliance, comme dans le cas sans écoulement.

Dans la région transitoire, le ratio augmente progressivement, dépasse la valeur  $h_{\mu} = \sqrt[3]{1/2}$  et atteint un maximum dans les dernières générations de l'arbre. Lorsque le débit est modifié, la différence de gain de pression transmurale altère la position de cette région dans l'arbre. Ce déplacement de la zone fait que la compliance des branches de la région est aussi modifiée. Par exemple, si la région remonte vers les génération moins élevées, la compliance des branches en partant du début de la région est plus faible. La modification de la compliance compense la différence de gain de pression transmurale. Ainsi, la croissance du ratio de cette région n'est que faiblement altérée par les variations de débits et la génération où le ratio dépasse  $\sqrt[3]{1/2}$  est décalée. Les variations de  $P_{\text{tissus}}$ , quant à elles, modifient les gains de pression transmurale sans déplacer la région transitoire, la compliance des bronches de la zone reste identique. Ainsi, ces variations de  $P_{\text{tissus}}$  entraînent une croissance plus rapide ou plus lente du ratio dans la région transitoire. Toutefois, les variations de  $P_{\text{tissus}}$  entraînent aussi une variation du ratio de la région proximale. Cette variation compense en partie celle de la croissance du ratio et le niveau où le ratio dépasse la valeur  $\sqrt[3]{1/2}$  n'est que très peu altéré.

À la fin de la région transitoire, le gain de pression transmurale diminue jusqu'à ne plus être significatif comparé à la compliance des branches. C'est le début de la région distale. Dans certains cas, à pression  $P_{\text{tissus}}$  et à fort débit expiratoire, le ratio atteint un maximum avant de redescendre vers la valeur du ratio de la région distale. Ce "sursaut" du ratio vient de la particularité de la compliance décrite par Lambert et al.<sup>(24)</sup>. Nous pouvons voir dans la figure 2.3.B que, lorsque la pression  $P_{\text{tissus}}$  est élevée, les sections des branches dans la région transitoire sont proches de la section de la dernière génération à pression transmurale nulle, là où la compliance est maximale. Toutefois, la région distale n'est atteinte que dans les cas avec un débit et une pression  $P_{\text{tissus}}$  élevés. Les effets dus à l'inertie ne sont plus négligeables dans ces conditions. Nous verrons plus tard que le comportement du ratio dans la partie distale est légèrement différent lorsque l'on tient compte de l'inertie.

#### *Répartition du cisaillement $\sigma$ dans l'arbre de Lambert*

Dans l'analyse précédente, nous avons vu que le ratio de diamètre  $h$  évolue le long de l'arbre de Lambert, en partant d'une valeur inférieure à  $h_{\mu}$  à la génération 0 et en atteignant une valeur supérieure à  $h_{\mu}$  à la fin de l'arbre, génération 17. Ainsi, nous pouvons prédire que le cisaillement  $\sigma$  est croissant dans une première partie de l'arbre, puis est décroissant dans la seconde partie. Dans les régions proximale et distale, le cisaillement a un comportement quasi-exponentiel car le ratio  $h$  est presque constant. Sa croissance dans la région proximale est fortement influencée par la pression entourant les branches  $P_{\text{tissus}}$  tandis que la position de son maximum dépend fortement du débit expiratoire  $\Phi_0$ .

Les résultats affichés en figure 2.3 concordent avec cette prédiction. De plus, nous pouvons

voir que le cisaillement à la paroi de la première branche augmente linéairement avec le débit expiratoire car, la compliance et gain de pression transmurale sont très faibles dans les premières générations. Toutefois, le maximum du cisaillement étant dans la région transitoire, la compliance a déjà commencé à altérer cette relation linéaire. Ainsi, l'augmentation du cisaillement maximal dans l'arbre est non-linéaire avec celle du débit expiratoire.

En comparaison avec la valeur seuil du mucus sain, dans les limites des hypothèses du modèle, le cisaillement induit par l'écoulement d'air est suffisant pour mobiliser le mucus dans la quasi-totalité de l'arbre de Lambert, tant que la pression  $P_{\text{tissus}}$  ou le débit  $\Phi_0$  sont suffisamment élevés. En revanche, dans le cas de la mucoviscidose, la valeur seuil est difficilement atteinte dans quelques générations; le cisaillement reste en majeure partie insuffisant pour mobiliser le mucus, même à pression  $P_{\text{tissus}}$  et débit  $\Phi_0$  élevés.

### 2.4.3 Influence de l'inertie dans l'arbre de Lambert

Nous venons de voir comment se comporte l'arbre de Lambert traversé par un écoulement de Poiseuille. Toutefois, à haut débit expiratoire, les effets dus à l'inertie sur le gain de pression  $q$  et sur le cisaillement  $\sigma$  deviennent non négligeables. Nous avons vu en 2.4.1 que ses effets sur le cisaillement peuvent même augmenter de générations en générations selon la valeur du ratio  $h$ . De plus, si le gain de pression transmurale dû aux effets d'inertie est suffisant, ils peuvent affecter indirectement la section des branches distales.

Les résultats présentés ici sont basés sur le modèle d'écoulement inertiel proposé par Tawhai and Hunter<sup>(43)</sup>. Ce modèle est plus proche de l'écoulement de Poiseuille que l'écoulement proposé par Florens et al.<sup>(15)</sup>. Il nous est donc plus aisé de comparer ces résultats avec les précédents.

En comparant nos résultats avec les modèles d'écoulements de Tawhai et de Florens, nous avons déterminé que les comportements du cisaillement sont similaires. De plus, quantitativement, les valeurs du cisaillement avec le modèle d'écoulement de Florens sont très proches de celles avec le modèle d'écoulement de Tawhai avec un débit expiratoire environ deux fois supérieur. Cela vient du fait que, en moyenne, le préfacteur  $Z$  du modèle d'écoulement de Florens est environ deux fois supérieur à celui du modèle d'écoulement de Tawhai. Le gain de pression  $q$  et le cisaillement  $\sigma$  sont reliés linéairement au préfacteur  $Z$  et aux débit  $\Phi_0$ . Modifier le débit  $\Phi_0$  peut compenser les variations de  $Z$ .

### Évolution du ratio $h$ en fonction la génération

En comparant les résultats du cas de l'écoulement de Poiseuille 2.3 et ceux du cas avec la prise en compte des effets d'inerties 2.4, nous constatons que l'évolution du ratio le long de l'arbre de Lambert est très peu sensible aux effets d'inertie du fluide. Les trois régions, proximale, transitoire et distale, et leurs propriétés respectives sont conservées. Les seules différences notables sont un aplatissement de la région distale, avec la suppression du "sursaut" de ratio, et une région proximale moins étendue lorsque le débit est élevé. Ces deux changements sont issus de l'augmentation du gain de pression transmurale dans la région proximale. Il faut moins de générations pour qu'il devienne significatif par rapport à la pression  $P_{\text{tissus}}$ .

Précédemment, en 2.4.1, nous avons vu que le cisaillement peut être décomposé en une somme de deux cisaillements, l'un lié à la viscosité, l'autre lié à la densité de l'air. Le comportement exponentiel de ces cisaillements dans l'arbre fractal peut induire un comportement non-monotone du cisaillement total selon le ratio  $h$  et les valeurs initiales des cisaillements visqueux  $\sigma_\mu$  et inertiels  $\sigma_\rho$ . Toutefois, le ratio  $h$  est toujours supérieur à  $1/2$ , le cisaillement adopte alors le comportement du cisaillement inertiel dans les premières branches, si  $\sigma_\rho > \sigma_\mu$ , et celui du cisaillement visqueux dans le reste de l'arbre.

D'après les résultats 2.4, le cisaillement inertiel atteint son maximum moins profondément que le cisaillement visqueux. D'ailleurs, les cas avec une pression  $P_{\text{tissus}}$  égale à 0 cm H<sub>2</sub>O présentent une valeur du ratio de la région proximale proche de  $\sqrt{1/2}$ , valeur critique du ratio où le cisaillement inertiel est constant d'une génération à l'autre. Pour ces cas, le cisaillement inertiel est presque constant sur toute la largeur de la région proximale. Nous pouvons distinguer

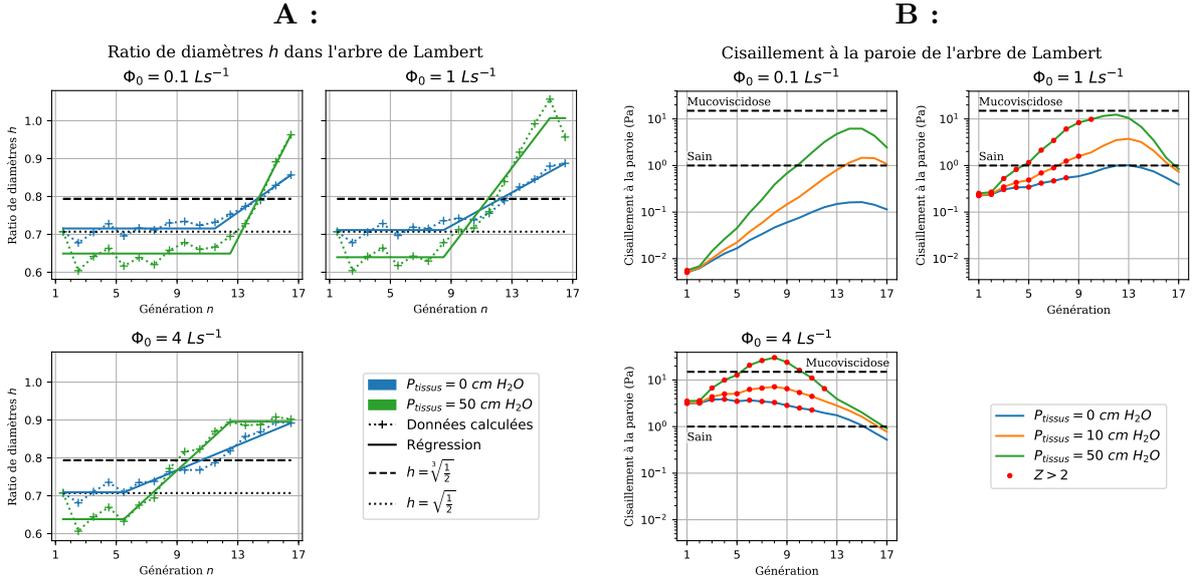


Fig. 2.4: **A** : Évolution du ratio de réduction le long de l'arbre de Lambert, dans le cas du modèle d'écoulement proposé par Tawhai pour trois débits  $\Phi_0$  différents ( $0.1 \text{ Ls}^{-1}$  en haut à gauche,  $1 \text{ Ls}^{-1}$  en haut à droite et  $4 \text{ Ls}^{-1}$  en bas à gauche) et deux pressions  $P_{\text{tissus}}$  différentes dans les tissus ( $0 \text{ cm H}_2\text{O}$  en bleu et  $50 \text{ cm H}_2\text{O}$  en vert). Les tracés symbolisés avec les croix et les pointillés sont faits à partir des résultats calculés via le modèle, les tracés en ligne pleine sont des régressions de ces résultats. Les régressions sont une combinaison de trois régressions simples : une première partie constante, une seconde linéaire et une dernière constante à nouveau. La ligne horizontale en tiret et en pointillé marquent respectivement les valeurs  $h = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$  et  $h = \sqrt{\frac{1}{2}}$ . En deçà de ces deux valeurs, les cisaillement visqueux et inertiel augmentent le long de l'arbre ; au-delà, ils diminuent ; entre, le cisaillement visqueux augmente tandis que le cisaillement inertiel diminue. **B** : Répartition du cisaillement  $\sigma$  le long d'un arbre de Lambert en utilisant le modèle de Tawhai pour trois débits,  $\Phi_0$  :  $0.1 \text{ Ls}^{-1}$ ,  $1 \text{ Ls}^{-1}$  et  $4 \text{ Ls}^{-1}$  ; et trois pressions dans les tissus  $P_{\text{tissus}}$  :  $0 \text{ cm H}_2\text{O}$ ,  $10 \text{ cm H}_2\text{O}$  et  $100 \text{ cm H}_2\text{O}$ . A titre de comparaison, les deux lignes en tirets affichent les valeurs seuils du mucus sain,  $1 \text{ Pa}$ , et du mucus chez un patient atteint de mucoviscidose,  $15 \text{ Pa}$ . Les points rouges marquent les générations où le cisaillement est majoritairement causé par les effets d'inertie, entre autre quand le préfacteur  $Z$ , i.e le facteur corrigeant la résistance de Poiseuille, est supérieur à 2.

trois cas différents :

Cas 1 : Le cisaillement inertiel est trop faible. Le cisaillement se comporte comme dans le cas avec un écoulement de Poiseuille. Quantitativement, les valeurs du cisaillement dans les premières générations sont supérieures aux cisaillement visqueux sans altérer le comportement quasi-exponentiel. Le maximum du cisaillement est situé à la génération où le ratio dépasse  $h_\mu = \sqrt[3]{1/2}$ .

Cas 2 : La valeur des maxima des cisaillements visqueux et inertiel sont proches. Le gain de pression transmurale est suffisamment accru pour rapprocher la région transitoire vers les premières générations. Le maximum du cisaillement se retrouve décalé par rapport aux cas de l'écoulement de Poiseuille.

Cas 3 : Le cisaillement inertiel est suffisamment élevé, avec un maximum supérieur à celui du cisaillement visqueux. La région transitoire est décalée vers les premières générations et le cisaillement total se comporte comme le cisaillement inertiel, avec un maximum positionné là où le ratio dépasse  $h_\rho = \sqrt{1/2}$ . Quantitativement, seules les dernières générations auront la décroissance exponentielle du cisaillement visqueux.

### *Répartition du cisaillement dans l'arbre de Lambert*

Dans les résultats présentés figure 2.4.B, nous avons choisi d'indiquer lorsque le préfacteur de la résistance hydrodynamique  $Z$  est supérieur à 2. Dans ces conditions, le cisaillement avec le modèle d'écoulement proposé par Tawhai est significativement plus important que celui avec le modèle d'écoulement de Poiseuille.

À bas débit expiratoire  $\Phi_0$ , la valeur initiale du cisaillement inertiel est trop faible. L'inertie n'affecte pas le cisaillement, même quantitativement. Les courbes du cisaillement se superposent aux résultats avec l'écoulement de Poiseuille, voir le graphique en haut à gauche de la figure 2.4.B.

Pour des débits moyens, voir le graphique en haut à droite de la figure 2.4.B, la valeur initiale du cisaillement inertiel est bien supérieure à celle du cisaillement visqueux. Toutefois, le maximum du cisaillement inertiel reste inférieur à celui du cisaillement visqueux. Nous sommes dans le premier cas décrit précédemment. Le comportement du cisaillement est calqué sur celui du cisaillement visqueux, avec son maximum localisé où le ratio de diamètre  $h$  dépasse  $\sqrt[3]{1/2}$ . Seule la partie croissante du cisaillement est altérée avec des valeurs supérieures à celles du cisaillement visqueux et un taux de croissance plus faible.

À haut débit, voir le graphique en bas à gauche de la figure 2.4.B, la valeur initiale du cisaillement inertiel est grandement supérieure à celle du cisaillement visqueux. Sa valeur maximale dépasse celle du cisaillement visqueux. Ici, nous sommes dans le troisième cas décrit précédemment. Le comportement du cisaillement est calqué sur celui du cisaillement inertiel, avec son maximum localisé où le ratio de diamètre  $h$  dépasse  $\sqrt{1/2}$ . Seule la partie décroissante du cisaillement est altérée par les valeurs du cisaillement visqueux au taux de décroissance plus faible que le cisaillement inertiel.

### 2.5 Application du modèle pour la kinésithérapie respiratoire

Dans cette partie, nous utiliserons les résultats du modèle avec les effets d'inertie pour visualiser où le mucus pourrait être mobilisé par l'écoulement de l'air. Nous analyserons deux situations :

- Le cas d'une répartition saine de mucus, il forme alors une couche d'épaisseur négligeable quelle que soit la génération ;
- Le cas d'une obstruction partielle dans la génération 8 à la hauteur de 7 % de sa lumière maximale ou environ 23 % de sa lumière à la FRC (-5 cm H<sub>2</sub>O de pression entourant les branches).

Ensuite nous détaillerons deux procédés idéalisés pour soigner les patients modèles correspondants à différentes situations idéalisées mimées par notre modèle.

### 2.5.1 Mobilisation de mucus

En considérant que le mucus sain et celui des patients atteints de mucoviscidose sont mobilisés lorsque le cisaillement excède respectivement 1 Pa et 15 Pa<sup>(23)</sup>, nous pouvons établir des cartes de mobilisation du mucus en fonction de la génération et de la pression entourant les branches. Dans la figure 2.5.A, nous pouvons voir ces informations, pour le cas d'une répartition saine de mucus et pour le cas d'une obstruction partielle.

Dans le premier cas, on peut voir que le mucus sain est mobilisé dans l'ensemble des générations dès que le débit est suffisamment élevé. Cependant, le mucus de la mucoviscidose n'est pas mobilisable dans l'ensemble de l'arbre de Lambert.

Dans le second cas, l'obstruction réduisant l'espace disponible pour l'écoulement de l'air, le cisaillement est, de fait, beaucoup plus élevé localement. Cette augmentation est suffisante pour mobiliser les deux types de mucus, même à bas débit. De plus nous pouvons remarquer que la sensibilité du cisaillement à la pression  $P_{\text{tissus}}$  est plus forte avec un débit élevé. L'augmentation du cisaillement entraîne aussi une augmentation de la pression transmurale des générations distales à l'obstruction. Cela induit une dilatation des branches et donc une diminution du cisaillement dans ces générations. Cette diminution peut être négligeable à basse pression tissulaire, mais, à haute pression, elle peut être suffisante pour que le mucus ne soit plus mobilisé.

### 2.5.2 Procédés idéalisés de kinésithérapie

De ces résultats, nous avons imaginé des techniques idéalisées de kinésithérapie respiratoire, valables pour des patients modèles, c'est à dire avec un arbre bronchique de Lambert. De plus, par mesure de précaution, nous faisons l'hypothèse qu'un cisaillement trop important peut causer des lésions aux parois bronchiques. Ainsi, les techniques présentées visent à concerver le cisaillement légèrement au dessus du seuil de mobilité du mucus sain ou d'un patient atteint de la mucoviscidose.

Le fait que la pression de référence soit celle de l'air entre la trachée et le larynx induit cependant un biais entre le paramètre  $P_{\text{tissus}}$  et la pression réelle entourant les bronches qui, de plus, dépend du débit de l'écoulement et des particularités du patient, taille, pathologie, etc. De plus, nous avons remarqué, selon le modèle d'écoulement, une répartition de cisaillement donnée nécessite un débit à la trachée  $\Phi_0$  différent. Ainsi, nous nous limitons à une étude comparative des résultats du modèle pour développer ces modèles de technique kinésithérapique.

#### *La file d'attente du mucus*

La file d'attente du mucus, schémas 2.5.B, est une technique qui vise à mobiliser le mucus sur l'ensemble de l'arbre à chaque expiration. Ce déplacement se fait à la manière d'une file d'attente, où les premiers occupants avancent, suivit des derniers qui prennent leur place. Pour ce faire, les expirations commencent à fort débit expiratoire et faible pression  $P_{\text{tissus}}$ , pour mobiliser surtout le mucus des voies proximales, et se terminent à faible débit et forte pression  $P_{\text{tissus}}$ , pour mobiliser le mucus des voies distales.

Toutefois, cette technique peut entraîner des lésions aux niveaux des obstructions partielles, dues au débit élevé utilisé. Aussi, elle ne peut suffire pour évacuer le mucus d'un patient atteint de mucoviscidose. Le cisaillement dans les voies proximales reste insuffisant pour mobiliser ce mucus dont le seuil de mobilisation est plus élevé.

#### *Le ramassage de mucus*

Le ramassage de mucus, schémas 2.5.C, est une technique en deux étapes. La première, conditionnelle à l'absence d'obstruction partielle, vise à rassembler le mucus des voies distales dans les voies intermédiaires, comme balayer une pièce pour faire un "tas" de mucus à son entrée. Une fois formés, ces "tas" se comporteront comme des obstructions partielles. Si des obstructions partielles de mucus sont déjà présentes, il convient de passer à la deuxième étape. Ainsi, de brèves expirations successives sont utilisées à faible débit et forte pression  $P_{\text{tissus}}$ . Dans

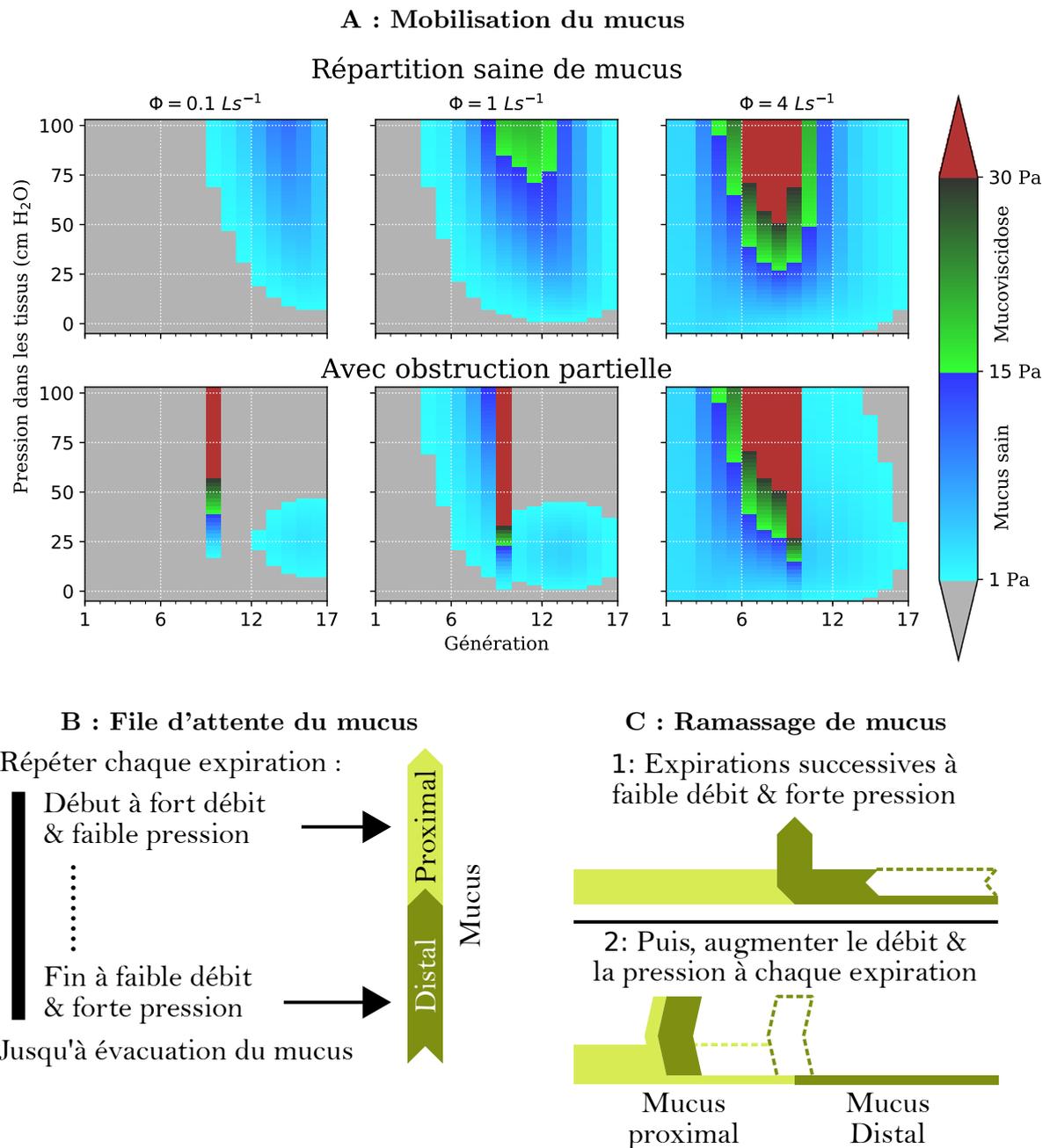


Fig. 2.5: **A** : Mobilisation du mucus par l'écoulement d'air dans l'arbre de Lambert en utilisant le modèle de Tawhai selon la pression dans les tissus  $P_{\text{tissus}}$ , pour les débits  $0.1 \text{ Ls}^{-1}$  (à gauche),  $1 \text{ Ls}^{-1}$  (au milieu) et  $4 \text{ Ls}^{-1}$  (à droite), dans le cas d'une répartition saine de mucus (en haut) et dans le cas d'une obstruction partielle à la 9<sup>e</sup> génération à la hauteur de 7 % de la section maximale (en bas). En gris, les zones où le mucus n'est pas mobilisé; du cyan au bleu, les zones où seul le mucus sain est mobilisé; du vert au vert foncé, les zones où tout type de mucus sont mobilisés; et en rouge, les zones où les forces de cisaillement excèdent 30 Pa. **A & B** : Deux modèles de techniques de kinésithérapie respiratoire. **B** : **File d'attente du mucus** mobilise le mucus dans les générations proximales en début d'expiration puis dans les générations distales en fin d'expiration. Ainsi, elle utilise des expirations répétées démarrant à grand volume pulmonaire et haut débit expiratoire, et terminant à petit volume et faible débit. **C** : **Ramassage de mucus** est une technique en deux parties. En premier temps, elle mobilise le mucus des voies distales jusqu'à provoquer des obstructions partielles dans les générations intermédiaires. Pour cela, elle utilise des expirations successives à petit volume pulmonaire et faible débit. En second temps, elle mobilise le mucus des générations obstruées et fait remonter les "tas" de mucus en ramassant le mucus des voies proximales au passage. Dans cette partie, le débit et le volume des expirations sont augmentés pour s'ajuster à la position de l'encombrement.

le cas de la mucoviscidose, le débit et la pression  $P_{\text{tissus}}$  doivent être plus important lors de cette étape.

La seconde étape permet de faire remonter les "tas" de mucus le long des voies proximales, tout en récoltant le mucus au passage. Pendant cette étape, le débit et la pression  $P_{\text{tissus}}$  de ces expirations successives sont progressivement adaptés à la position de l'obstruction due au mucus.

Cette technique, permet de mobiliser le mucus même dans le cas de la mucoviscidose, grâce à la présence de l'obstruction. En contrepartie, il est aussi très facile de provoquer des cisaillements très élevés au niveau de l'obstruction. Il vaut mieux tenter d'ajuster la pression  $P_{\text{tissus}}$  en priorité avant d'augmenter le débit si le mucus n'est pas mobilisé.

## 2.6 Discussion

Toutefois, ces procédés ne tiennent compte ni du point de vu des kinésithérapeutes, ce qu'ils peuvent percevoir aux diagnostics et pendant les séances, ni des particularités des patients. Il est donc important de mentionner plusieurs points.

Pour le premier point, nous sélectionnons le débit et la pression  $P_{\text{tissus}}$  de l'expiration, et le modèle nous dit où le mucus est mobilisé, tandis que les kinésithérapeutes peuvent, dans une certaine limite, sélectionner un débit expiratoire et un volume respiratoire apparent, et entendre s'il y a mobilisation de mucus et sa position approximative. Le lien entre la pression dans les tissus et le volume pulmonaire, dans le cas non-statique, nous est inconnu à ce jour. Nous pouvons, toutefois, nous inspirer de la relation faite dans le cas statique par Agostoni and Hyatt<sup>(2)</sup>. Ainsi, nous pouvons faire les hypothèses suivantes : à débit identique, une pression tissulaire plus élevée signifie un volume pulmonaire plus petit ; et à pression identique, un débit plus élevé signifie un volume plus grand.

Pour le second point, les patients qui nécessitent de la kinésithérapie respiratoire présentent des encombrements bronchiques. De plus, ces encombrements ne sont pas localisés seulement dans les bronches de la même génération, mais peuvent être répartis sur plusieurs générations, dans des sous arbres différents. De plus, nous avons vu qu'un encombrement provoque une baisse des forces de cisaillement dans les branches distales à celui-ci. Il est donc probable qu'un encombrement en cache d'autres là où le cisaillement est affaibli. La *file d'attente du mucus* est contre-indiquée dans ce cas-là et le *ramassage de mucus* peut ne pas être suffisant pour évacuer le mucus de l'ensemble de l'arbre.

Grâce à de nombreuses discussions avec des kinésithérapeutes, nous avons pu en déduire une autre technique qui alterne deux phases : une phase de sondage et une phase d'extraction, tel que schématisé dans la figure 2.6. Lors de la phase de sondage, le patient expire premièrement à faible débit. Si l'expiration ne mobilise pas de mucus, il recommence en augmentant le débit. S'il a atteint son débit maximal, la technique est terminée. Dès que du mucus est mobilisé, la phase d'extraction est engagée. Cette phase ressemble à la deuxième étape de la *file d'attente du mucus*, les expirations sont courtes et répétées aux mêmes conditions débit et volume qui viennent de mobiliser le mucus. Dès que le mucus n'est plus mobilisé, le volume, à prime abord, et le débit sont ajustés pour remobiliser le mucus. Lorsque le mucus est extrait, la phase s'arrête. La phase de sondage est réengagée depuis le début. Les obstructions de mucus étant extraites, elles ne cachent plus celles localisées dans leurs sous-arbres.

## 2.7 Conclusion

Cette étude nous permet de mieux comprendre la situation physique et physiologique lors de l'expiration, en particulier le comportement du cisaillement dans l'arbre bronchique, moteur du déplacement de mucus pendant les manipulations de kinésithérapie respiratoire. Le cisaillement adopte une répartition en "cloche" exponentielle le long des générations de l'arbre. Ce comportement est une conséquence de l'évolution du ratio de réduction le long de l'arbre, avec un faible *ratio proximal* et un fort *ratio distal*. Lorsque les effets d'inertie sont présents, ils altèrent

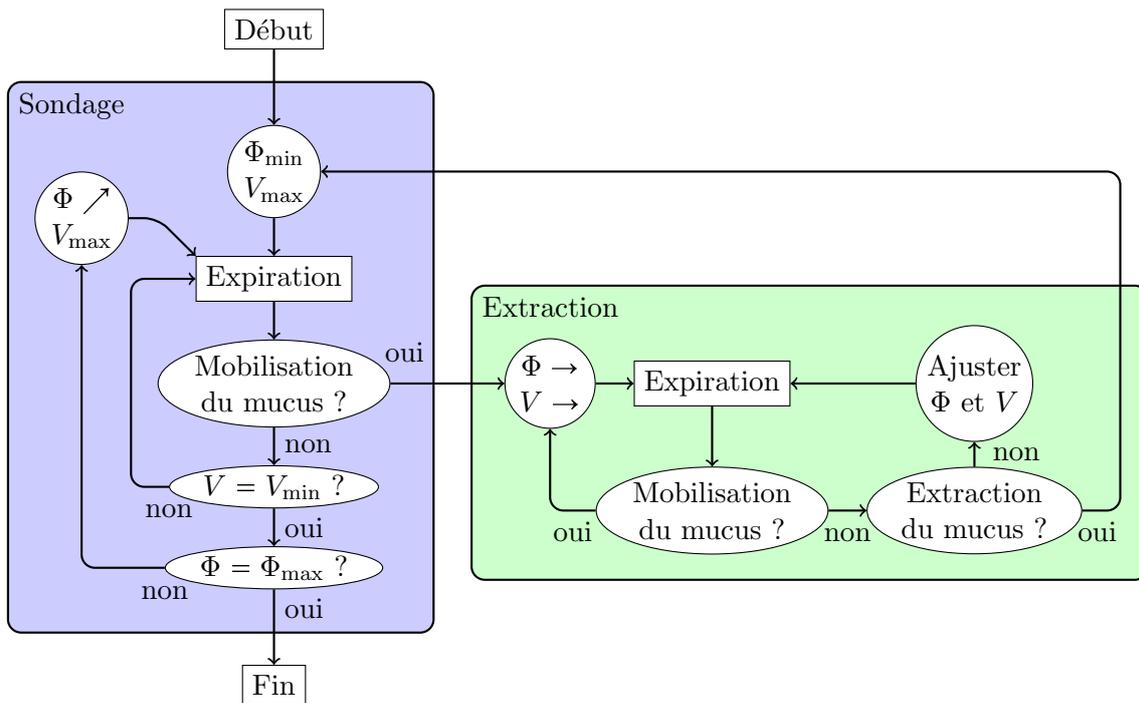


Fig. 2.6: Schémas de la technique *sondage et extraction* élaborée grâce aux discussions avec les kinésithérapeutes. Dans ce schémas, les expirations sont encadrées ; les cercles représentent les paramètres de l'expiration ; et les ellipses sont des étapes conditionnelles. Les expirations de la technique se font à débit constant. La phase de sondage, dans l'encadré bleu, commence les expirations à faible débit. Chaque expiration s'arrête lorsque le volume est épuisé, ou dès que du mucus est mobilisé. Si l'expiration est terminée et que le patient peut souffler plus fort, il expire à nouveau en augmentant le débit. Si le patient a atteint son débit maximal, la technique est terminée. Si du mucus est mobilisé, la phase de sondage se termine et celle d'extraction, dans l'encadré vert commence. Lors de cette phase, les expirations sont courtes et répétées aux mêmes condition débit et volume qui ont mobilisé le mucus. Dès que le mucus n'est plus mobilisé, le volume, à prime abord, et le débit sont ajustés pour remobiliser le mucus. Dès que le mucus est extrait hors de l'arbre bronchique, la phase s'arrête et celle de sondage recommence depuis le début.

---

le comportement du cisaillement proximal et, s'ils sont suffisamment importants, rapprochent le maximum du cisaillement de la première génération. Le débit expiratoire et la pression entourant les bronches modifient différemment les valeurs et le comportement du cisaillement. Sa sensibilité au débit est plus élevée que celle à la pression.

Les résultats nous permettent de mieux saisir les effets des techniques de kinésithérapie respiratoire sur la répartition du cisaillement dans l'arbre bronchique et ainsi de pouvoir comparer leurs effets sur la mobilisation du mucus. De plus, les résultats de notre modèle nous ont permis de concevoir des techniques idéalisées adaptées aux patients modèle, i.e. avec un arbre bronchique de Lambert. Une des techniques idéalisées décrites, *le ramassage de mucus*, se rapproche du *drainage autogène*, une des techniques actuellement utilisées par les praticiens, de par l'utilisation d'expirations successives à petit volume pulmonaire, puis à moyen volume, et, pour finir, à grand volume<sup>(1,31,41)</sup>. Grâce à de nombreuses discussions avec des kinésithérapeutes, nous avons pu établir une technique idéalisée plus respectueuse de la situation réelle des thérapeutes et de leurs patients.



# Annexes



## 2.A Modèles

Nous considérons que l'arbre bronchique est défini comme le modèle d'arbre proposé par Lambert et al. <sup>(24)</sup>. Ce modèle définit l'arbre comme une cascade de branches reliées entre elles par des bifurcations symétriques. Le nombre de bifurcations entre une branche  $b$  et la branche d'origine  $b_0$  est appelé génération  $n$ . Nous considérons la possibilité qu'une génération  $m$  soit partiellement obstruée par du mucus. Dans cette génération, le mucus occupe une partie de la section de la branche  $A_{\text{Mucus}}$ .

En plus de leurs conditions d'obstruction, nous considérons que les propriétés de l'écoulement dans chaque branche sont conditionnées par deux paramètres connus, le débit à la trachée  $\Phi_0$  et la pression entourant les bronches  $P_{\text{tissus}}$ . De plus, nous considérons homogène la pression au fond des acini. Nous appelons  $\psi$  l'ensemble de ces quatre paramètres :

$$\psi = \left( \begin{array}{c} \Phi_0 \\ P_{\text{tissus}} \\ m \\ A_{\text{Mucus}} \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \Phi_0 \in \mathbb{R}_+ \\ P_{\text{tissus}} \in \mathbb{R} \\ m \in \llbracket 0, 16 \rrbracket \\ A_{\text{Mucus}} \in [0, A_{\text{Max},m}] \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Du fait de la symétrie des bifurcations et de l'homogénéité de la pression au fond de l'arbre, toutes les branches d'une même génération et l'écoulement d'air les traversant ont les mêmes propriétés physiques et hydrodynamiques. Ainsi, pour étudier le comportement des branches et de l'écoulement expiratoire, nous associons plusieurs quantités à chaque génération de l'arbre. Pour chaque génération  $n$ , nous avons la longueur  $L_n$  qui est invariable et définie par le modèle de Lambert, le débit  $\Phi_n$  qui est déterminé par le débit à la trachée  $\Phi_0$ , la section  $A_n$ , le préfacteur de la résistance hydrodynamique  $Z_n$ , la différence de pression entre les deux extrémités des branches  $q_n$ , la moyenne des contraintes de cisaillement à la paroi  $\sigma_n$  et la pression transmurale  $P_n$ . Les variables  $A_n$ ,  $Z_n$ ,  $q_n$  et  $\sigma_n$  dépendent des quantités associées à la même génération. La pression transmurale  $P_n$  dépend de variables associées à la même génération  $n$  et de variables associées à la génération précédente  $n - 1$ . Un résumé des relations entre les quantités associées à la génération  $n$  est disponible dans le diagramme 2.7

### 2.A.1 Modèle de l'arbre bronchique

Nous utilisons le modèle d'arbre bronchique proposé par Lambert et al. <sup>(24)</sup>. Dans ce modèle, l'arbre bronchique est décrit comme une succession de branches cylindriques reliées entre elles par des bifurcations. Nous ordonnons les branches de l'arbre par génération  $n$ , un indice lié au nombre de bifurcations entre la première branche (génération 0) et la branche considérée. Le modèle d'arbre décrit par Lambert possède 17 générations de branches. Chaque branche a une longueur  $L$  fixe qui dépend de sa génération et une section  $A$  qui dépend de sa génération et de la pression transmurale  $P$ , i.e. la différence de pression entre l'extérieur et l'intérieur de la bronche. Les bifurcations sont considérées symétriques, en conséquence toutes les branches d'une même génération ont les mêmes propriétés physiques et leurs écoulements ont les mêmes propriétés hydrodynamiques. Ainsi, nous ne différencions pas les branches d'une même génération.

En conséquence, le débit d'air circulant dans une branche ne dépend que de la génération de la branche. À chaque bifurcation, la conservation de la masse et l'incompressibilité de l'air implique que le débit d'air de la branche mère est égal à la somme des débits des branches filles. Ces hypothèses nous permettent d'écrire la relation entre le débit de la branche mère et celui des branches filles :  $\Phi_n = 2\Phi_{n+1}$ . Le débit à la trachée étant donnée en paramètre, nous pouvons écrire la relation entre le débit de la génération  $n$  en fonction du débit à la trachée  $\Phi_0$  :  $\Phi_n = 2^{-n}\Phi_0$ .

Le modèle de Lambert propose une relation entre la section  $A$  de la branche et la pression transmurale  $P$ , telle qu'illustré dans la figure 2.8. Cette relation dépend de cinq paramètres, la section maximale  $A_{\text{Max}}$ , la section normalisée  $\alpha_0$  par rapport à  $A_{\text{Max}}$  et sa dérivée  $\alpha'_0$  en fonction de la pression transmurale à pression transmurale nulle et les puissances des lois  $n^+$  et  $n^-$ . Ces

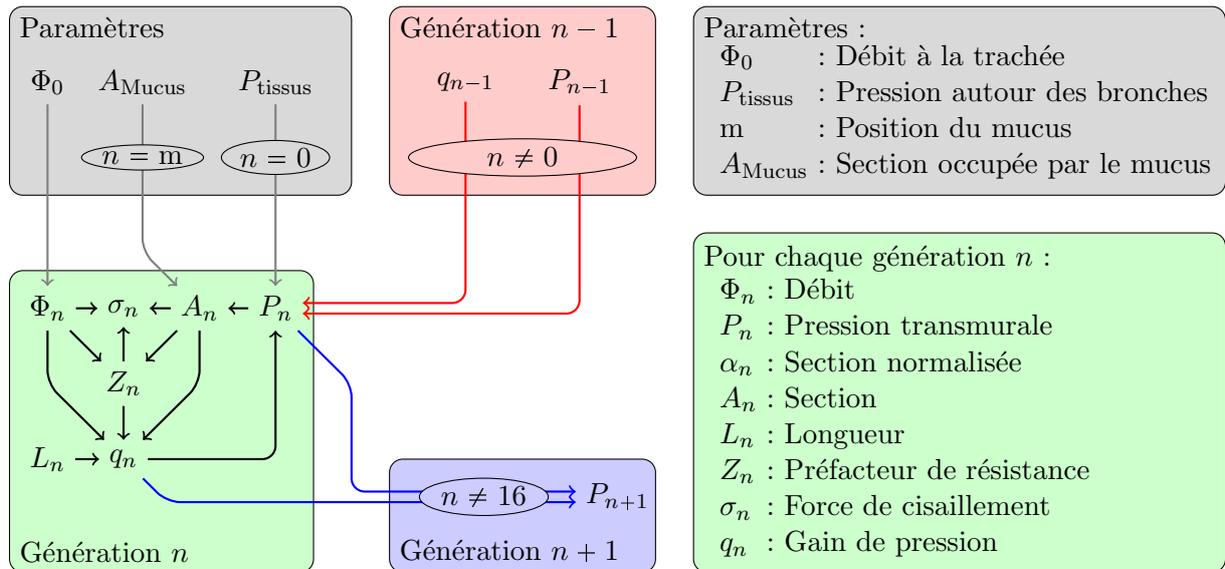


Fig. 2.7: Diagramme des influences et dépendances des variables associées à la génération  $n$ , à gauche, et définitions des paramètres et des variables, à droite. Les variables sont catégorisées : dans le rectangle gris sont rassemblés les paramètres du modèle ; dans le rectangle vert, les variables associées à la génération  $n$  ; dans le rectangle rouge, les variables associées à la génération  $n - 1$  ; et dans le rectangle bleu, les variables associées à la génération  $n + 1$ . Pour les générations  $n - 1$  et  $n + 1$ , seules les variables influençant directement ou étant directement influencées par les variables de la branche  $b$  sont affichées. Les flèches montrent quelles variables influencent quelles autres. Par exemple :  $A \rightarrow B$ ,  $A$  influence  $B$  ou  $B$  dépend de  $A$ . Les flèches noires montrent les dépendances entre variables associées à la génération  $n$ , les flèches grises montrent les dépendances aux paramètres, les flèches rouges montrent les dépendances des variables de la génération  $n$  à celles associées à la génération  $n - 1$  et les flèches bleues montrent l'influence des variables de la génération  $n$  sur celles de la génération  $n + 1$ . Les ellipses indiquent les conditions de l'influence, par exemple :  $P_{n-1}$  influence  $P_n$  seulement si  $n \neq 0$ .

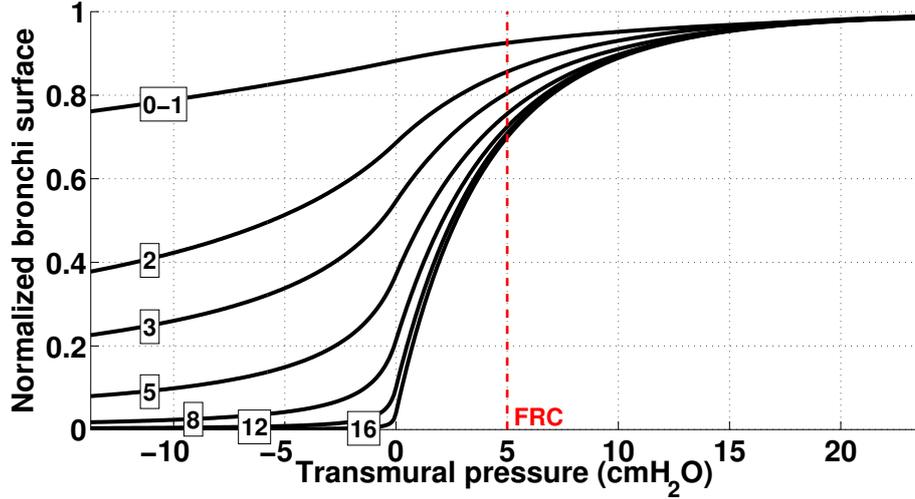


Fig. 2.8: Relation entre la pression transmurale et la section normalisée des bronches selon la génération de la bronche concernée indiquée par les nombres encadrés<sup>(24)</sup>.

paramètres dépendent de la génération de la branche considérée. Les valeurs de ces paramètres et de la longueur de chaque génération sont indiquées dans le tableau 2.3.

$$\begin{aligned}
 A_{\text{Lambert},n}(P_n) &=_{P_n \leq 0} A_{\text{Max},n} \alpha_{0,n} (1 - P_n/P_n^-)^{-n_n^-} \\
 A_{\text{Lambert},n}(P_n) &=_{P_n \geq 0} A_{\text{Max},n} \left( 1 - (1 - \alpha_{0,n}) (1 - P_n/P_n^+)^{-n_n^+} \right) \\
 P_n^- &= \frac{\alpha_{0,n}}{\alpha'_{0,n}} n_n^- \\
 P_n^+ &= -\frac{1 - \alpha_{0,n}}{\alpha'_{0,n}} n_n^+
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dans notre modèle, nous considérons que la pression transmurale  $P$  qui regit la section  $A$  de la branche est la moyenne des pressions transmursales de l'entrée et de la sortie de la branche. En définissant,  $q_n$  et  $q_{n-1}$  les gains de pression de la génération  $n$  et de la génération précédente  $n-1$  et avec l'hypothèse que les bifurcations n'ont pas d'effet sur l'hydrodynamique, nous pouvons écrire :

$$P_0 = \frac{q_0}{2} - P_{\text{tissus}} \tag{2.3}$$

$$P_{n \neq 0} = \frac{q_n + q_{n-1}}{2} + P_{n-1} \tag{2.4}$$

### 2.A.2 Mucus et occlusion partielle

Dans notre étude, nous considérons le mucus uniformément réparti sur la paroi interne de chaque cylindre. De plus, sa vitesse de déplacement, 2.4 mm/s dans les bronches principales<sup>(17)</sup>, est négligeable comparée la vitesse moyenne de l'air circulant dans la branche, environ 50 cm/s dans la trachée pour un débit de 0.1 L/s en dilatation maximale. En conséquence, l'écoulement d'air circule dans un cylindre statique quel que soit le volume de mucus occupant la branche, comme illustré dans la figure 2.9. De plus, nous négligeons les effets que pourrait avoir le mucus sur la compliance bronchique. Ainsi seule l'épaisseur de la couche de mucus a une influence sur l'écoulement, en réduisant la section  $A$  utilisé par l'écoulement d'air.

#### Occlusion partielle

Chez un cas sain, la couche de mucus reste très fine, environ 10  $\mu\text{m}$ <sup>(21)</sup>. Ainsi, son influence sur l'écoulement de l'air dans la branche peut être négligée. Toutefois, les malades nécessitant de

$n$	$\alpha_{0,n} (10^{-3})$	$\alpha'_{0,n} (10^{-6})$	$n_n^-$	$n_n^+$	$L_{\text{Lambert},n} (10^{-4}\text{m})$	$A_{\text{Max},n} (\text{mm}^2)$
0	882	11	0.5	10	1200	237
1	882	11	0.5	10	476	119
2	686	51	0.6	10	190	70.0
3	546	80	0.6	10	76	43.8
4	450	100	0.7	10	127	28.1
5	370	125	0.8	10	107	16.6
6	310	142	0.9	10	90	10.2
7	255	159	1.0	10	76	6.25
8	213	174	1.0	10	64	3.984
9	184	184	1.0	10	54	2.480
10	153	194	1.0	10	47	1.557
11	125	206	1.0	9	39	1.011
12	100	218	1.0	8	33	0.7031
13	75	226	1.0	8	27	0.5432
14	57	233	1.0	8	23	0.4236
15	45	239	1.0	7	20	0.3448
16	39	243	1.0	7	17	0.2747

Tab. 2.3: Paramètres du modèle de Lambert :  $\alpha_{0,n}$  et  $\alpha'_{0,n}$  sont respectivement la section de la bronche normalisée par rapport à sa section maximale  $A_n$  et sa dérivé en fonction de la pression transmurale à pression transmurale nulle ;  $n_n^-$  et  $n_n^+$  sont les puissances des lois lorsque la pression transmurale est respectivement négative ou positive ;  $L_n$  est la longueur de la bronche ;  $A_n$  est la section maximal de la bronche.

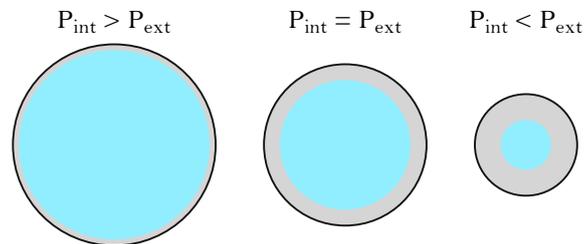


Fig. 2.9: Schémas du modèle d'obstruction pour trois états de compression de la bronche, en noir. L'aire occupée par le mucus, en gris, reste identique. La section de la voie aérienne, en bleu, est utilisée pour déterminer l'écoulement de l'air.

la kinésithérapie respiratoire souffrent souvent d'obstructions bronchiques. Le mucus stagne dans certaines bronches, réduisant considérablement la section utile. Ainsi, nous souhaitons modéliser un cas simple d'obstructions afin d'étudier leurs effets sur la répartition de cisaillement et de comparer au cas sain.

Notre modèle mime une réduction de la section utile de la branche dans une génération  $m$  de l'arbre. Nous considérons que le volume du mucus est fixe quelle que soit la déformation de la bronche. La longueur des branches étant invariante, la section occupé par le mucus l'est aussi. Ainsi, l'épaisseur de la couche de mucus est variable en fonction de la section de la branche, comme montré dans la figure 2.9. La section disponible  $A_m$  pour l'écoulement d'air est égale à la section calculée avec le modèle de Lambert  $A_{\text{Lambert}}$  retranchée de la section occupée par le mucus  $A_{\text{Mucus}}$ .

Ainsi, nous définissons la section  $A$  de chaque génération  $n$  comme :

$$\begin{aligned} A_{n \neq m} &= A_{\text{Lambert},n}(P_n) \\ A_m &= A_{\text{Lambert},m}(P_m) - A_{\text{Mucus}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

### Mobilité du mucus

Même si nous considérons le mucus comme statique et sans influence sur la compliance des branches, nous devons savoir sous quelle condition il est mobilisé par l'interaction air-mucus. Ainsi, nous avons besoin d'un critère, basé sur sa rhéologie, qui nous permette d'estimer s'il est mobilisé ou non. D'un point de vue rhéologique, le mucus peut être considéré comme un fluide viscoélastique et son comportement dépend des forces de cisaillement subies. Si les forces de cisaillement sont faibles, le mucus se comporte comme un matériau élastique, se déformant jusqu'à un état d'équilibre et reste statique. Au contraire, sous de grandes forces de cisaillement, il se comporte comme un liquide visqueux et s'écoule. Certaines pathologies, comme la mucoviscidose<sup>(23)</sup>, et le taux d'hydratation du mucus<sup>(21)</sup> peuvent modifier quantitativement la réponse du mucus aux forces de cisaillement. Dans notre étude, nous considérons le comportement du mucus comme celui d'un fluide de Bingham : en dessous d'une force de cisaillement seuil, le mucus est considéré comme solide statique ; au-dessus, il est considéré comme liquide. De précédentes études<sup>(29,30)</sup> ont déjà utilisé des fluides de Bingham pour modéliser le comportement du mucus.

Il est difficile d'obtenir une estimation précise du seuil puisque les propriétés du mucus peuvent être très différentes d'une personne à une autre, et ce même dans les cas sains. Toutefois, nous considérons que le mucus sain a un seuil à 1 Pa<sup>(23)</sup>. Ainsi, si la force moyenne de cisaillement induite par le déplacement d'air dans une bronche est inférieure à 1 Pa, le déplacement du mucus est assuré uniquement par le battement mucociliaire. Au-dessus de 1 Pa, Le mucus sain est mobilisé aussi par l'écoulement de l'air. À titre de comparaison, dans le cas de la mucoviscidose, nous considérons le seuil du mucus à 15 Pa<sup>(23)</sup>. Bien que la valeur du seuil du mucus peut grandement varier, l'ordre de grandeur respective des seuils du mucus sain et de celui du cas de la mucoviscidose sont satisfaisant.

### 2.A.3 Définition du modèle 0D

Nous choisissons de décrire la mécanique de l'écoulement de chaque branche avec un modèle à zéro dimension. Dans ce type de modèle, pour chaque branche, le gain de pression  $q$  entre ses deux extrémités est relié au débit de l'écoulement  $\Phi$  et à la résistance hydrodynamique  $R$  de la branche par :

$$q = R \times \Phi \quad (2.6)$$

La résistance dépend de la géométrie de la branche et du type d'écoulement considéré. Dans le cas d'un régime de Poiseuille, écoulement stationnaire à faible débit, la résistance hydrodynamique  $R_{\text{Pois}}$  dépend uniquement de la section  $A$ , de la longueur  $L$  de la branche et de la viscosité  $\mu$  du fluide. Mais pour des débit plus élevés, l'écoulement d'air peut être fortement perturbé par des effets d'inertie occasionnés par les bifurcations et la résistance hydrodynamique devient

supérieure à celle de Poiseuille :

$$R = Z R_{\mathcal{P}ois} \quad \text{avec :} \quad Z \geq 1 \quad (2.7)$$

$$R_{\mathcal{P}ois} = 8\pi\mu \frac{L}{A^2} \quad (2.8)$$

Il existe de nombreux modèles pour déterminer le préfacteur  $Z$ , notamment Pedley et al.<sup>(36)</sup>, Tawhai et al.<sup>(44)</sup>, Florens et al.<sup>(16)</sup> et Buess et al.<sup>(7)</sup> qui décrivent des modèles adaptés à la structure arborescente du réseau de bronches. Ces derniers décrivent des modèles impliquant notamment le nombre de Reynolds.

$$\mathcal{R}_e = \frac{4\rho\Phi}{\mu\sqrt{\pi A}} \quad (2.9)$$

Le travail de Pedley et al. décrit un modèle basé sur des mesures expérimentales dans un arbre de deux générations de tubes :

$$Z_{\text{Pedley}} = \frac{C}{4} \sqrt{\frac{\mathcal{R}_e}{L}} \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \frac{C}{4} \sqrt{\frac{4\rho\Phi}{\pi\mu L}} \quad (2.10)$$

Ici,  $C$  dépend de la géométrie de la bifurcation ascendante. Toutefois, dans leur rapport, Pedley et al. proposent d'utiliser la valeur moyenne  $C = 1.85$ . Malheureusement, les écoulements expérimentaux sont inspiratoires, du tronc de l'arbre vers les branches terminales, et ne correspondent pas à notre objectif.

Tawhai and Hunter<sup>(43)</sup> utilisent un modèle de profil de vitesse qui permet de décrire les profils bouchons observés à haut nombre de Reynolds dans des cylindres. Ce profils est décrit par une loi de puissance :

$$v_z(\mathbf{r}) = v_0 \left( 1 - \left( \frac{r}{r} \right)^\beta \right) \quad \text{avec } \beta = \max \left( 2, \frac{\mathcal{R}_e}{150} \right) \quad (2.11)$$

Ici,  $v_z(\mathbf{r})$  est la vitesse de l'air situé à la distance  $\mathbf{r}$  de l'axe du cylindre,  $v_0$  est la vitesse de l'air au centre du cylindre et  $r$  est le rayon du cylindre. Nous pouvons en déduire le débit  $\Phi = \frac{\beta}{\beta+2} v_0 A$ , et utiliser la relation (2.24), démontrée à la section suivante, pour obtenir  $q = \frac{\beta+2}{4} R_{\mathcal{P}ois} \Phi$ . Ainsi, l'expression du préfacteur  $Z$  pour ce modèle est :

$$Z_{\text{Tawhai}} = \max \left( 1, \frac{1}{2} + \frac{\mathcal{R}_e}{600} \right) \quad (2.12)$$

En conséquence, le préfacteur  $Z$  a une borne inférieure égale à 1 atteinte avec  $\mathcal{R}_e = 300$  et correspondant à un écoulement de Poiseuille.

Florens et al.<sup>(15)</sup> obtiennent un préfacteur similaire :

$$Z_{\text{Florens}} = 1.5 + 0.0035 \mathcal{R}_e \quad (2.13)$$

Bien que similaire à la relation utilisée par Tawhai et al., ce modèle implique une résistance hydrodynamique supérieure à la résistance de Poiseuille, et ceci même à très bas débit et une dépendance en  $\mathcal{R}_e$  plus grande.

Buess et al. décrivent un modèle issu de mesures numériques via la modélisation 3D de l'écoulement de l'air dans un arbre asymétrique de deux générations. Chaque bifurcation relie une branche mère à une grande et une petite branche fille. Cette combinaison rend de fait asymétrique les préfacteurs des bronches filles, ainsi les préfacteurs des grandes bronches filles  $Z_+$  et des petites bronche fille  $Z_-$  ont leur relation respective :

$$Z_+ = 1 + \left( c_1 - c_2 \frac{L}{r} \right) (1 + c_3 \delta) \left( \mathcal{R}_e - \frac{25L}{3r} \right) \quad (2.14)$$

$$Z_- = 1 + c_4 (1 - c_5 \delta) (\mathcal{R}_e - 50) \quad (2.15)$$

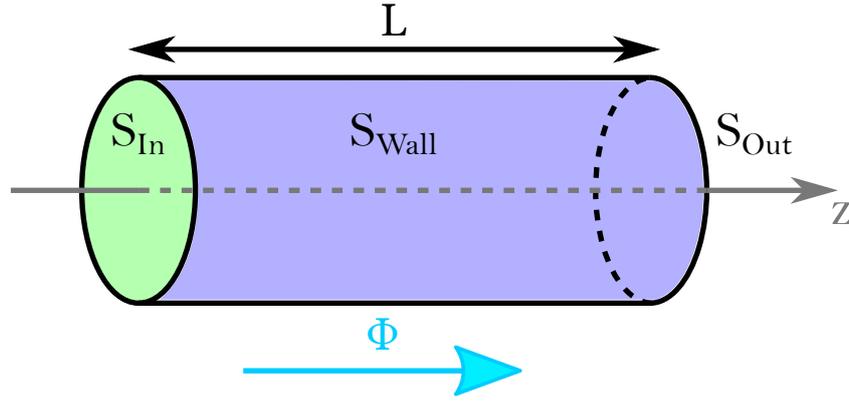


Fig. 2.10: Schémas d'une branche cylindrique : le cylindre à une longueur  $L$  et une section  $A$ . L'entrée est notée  $S_{In}$ , la sortie  $S_{Out}$  et la paroi  $S_{Wall}$ . Le débit d'air s'écoulant dans la branche est noté  $\Phi$ .

Avec  $c_1 = 4.17 \times 10^{-3}$ ,  $c_2 = 6.25 \times 10^{-5}$ ,  $c_3 = 0.103$ ,  $c_4 = 3.77 \times 10^{-3}$  et  $c_5 = 0.653$ . Ici,  $\delta$  est un paramètre d'asymétrie conçu tel que  $\delta = 0$  désigne un arbre symétrique et  $\delta = 1$  désigne un arbre dont les ratios de diamètre, rapports entre les diamètres des branches filles et celui de la branche mère,  $h_+$  et  $h_-$  sont semblables aux ratios décrits dans Florens et al.<sup>(15)</sup>. Le ratio  $L/r$  est un paramètre géométrique du modèle 3D utilisé. Notre modèle d'arbre bronchique étant symétrique, nous n'utiliserons pas non plus ce modèle. De plus, à l'instar du modèle de Pedley et al., les mesures ont été faite pour des débits inspiratoires.

Nous avons d'abord étudié la distribution des forces de cisaillement avec un modèle de Poiseuille  $Z = 1$ , puis nous avons comparé les résultats avec l'expression de  $Z$  basée sur les modèles de Tawhai et al. ou celui de Florens et al.

#### 2.A.4 Contraintes de cisaillement

A partir de l'équation de Navier-Stokes et de plusieurs hypothèses, les propriétés Newtoniennes de l'air, la stationnarité de l'écoulement, l'invariance du champ de vitesse le long de l'axe de la branche et les propriétés axiales et axisymétriques des vitesses, nous pouvons faire le lien entre la contrainte de cisaillement moyenne  $\sigma$  à la paroi de la branche et le gain de pression absolu  $|q|$ .

La branche  $b$  est constituée d'un cylindre de longueur  $L$  et de section  $A$ . Nous utilisons les coordonnées cylindriques et l'axe de la branche est orienté selon l'axe  $\hat{z}$ . La branche est délimitée par trois surfaces :

- La paroi de la branche est  $S_{Wall}$  où la vitesse de l'air est supposée nulle (condition de non-glissement), le vecteur normal sortant de  $S_{Wall}$  est noté  $\hat{r}$  ;
- L'entrée de la branche est  $S_{In}$ , où le débit d'air entrant est  $\Phi = \iint_{S_{In}} v_z dS$  avec  $v_z$  la composante de la vitesse de l'air le long de l'axe de la branche, le vecteur normal à  $S_{In}$  est  $-\hat{z}$  ;
- La sortie de la branche est  $S_{Out}$ , où le débit d'air sortant est égal au débit entrant  $\Phi = \iint_{S_{Out}} v_z dS$ , le vecteur normal à  $S_{Out}$  est  $\hat{z}$ .

La surface totale de la branche est notée  $S_b = S_{Wall} \cup S_{In} \cup S_{Out}$ . Un schémas de la branche est présenté dans la figure 2.10.

La dynamique de l'écoulement d'air dans la branche est régi par l'équation de Navier-Stokes qui relie la pression  $p$  et la vitesse  $\bar{v}$  de l'air.

$$\begin{cases} \rho \partial_t \bar{v} + \rho \bar{\nabla} \cdot (\bar{v} \otimes \bar{v}) = -\bar{\nabla} p + \mu \bar{\Delta} \bar{v} \\ \bar{\nabla} \cdot \bar{v} = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Le cisaillement est la conséquence des forces de friction entre couches d'air ou entre l'air et la paroi de la branche. Les frottements sont reliés à la viscosité de l'air, i.e. le terme  $\mu \bar{\Delta} \bar{v}$  de

l'équation de Navier-Stokes. Dû à l'hypothèse stationnaire, nous avons  $\partial_t \bar{v} = 0$ .

Nous notons  $p_{\text{In}}$  et  $p_{\text{Out}}$  les pressions moyennes aux sections d'entrée et de sortie :  $p_* = A^{-1} \iint_{S_*} p dS$  avec  $*$  = In ou Out. Nous définissons le cisaillement à la paroi  $\sigma$  comme la norme moyenne des force de frottement sur la paroi de la branche :

$$\sigma = \frac{\iint_{S_{\text{Wall}}} \|\partial_r \mu \bar{v}\| dS}{\iint_{S_{\text{Wall}}} dS} \quad (2.17)$$

$$= \mu \left(2L\sqrt{\pi A}\right)^{-1} \iint_{S_{\text{Wall}}} \|\partial_r \bar{v}\| dS \quad (2.18)$$

Puis, en intégrant l'équation de Navier-Stokes (2.16) sur le volume de la branche  $V_b$ , en utilisant le théorème de Stokes et en projetant sur l'axe de la branche  $\hat{z}$ , nous avons pour le terme  $\rho \bar{\nabla} \cdot (\bar{v} \otimes \bar{v})$  :

$$\rho \iint_{S_b} d\bar{S} \cdot \bar{v} \otimes \bar{v} \cdot \hat{z} = \iint_{S_{\text{Out}}} dS \rho v_z^2 - \iint_{S_{\text{In}}} dS \rho v_z^2 \quad (2.19)$$

Le terme  $\rho v_z^2$  est l'énergie cinétique locale de l'air dû à son déplacement dans l'axe de la branche. Dû à l'hypothèse de l'invariance de l'écoulement le long de la branche, cette énergie cinétique est conservée le long de la branche et le précédent terme est nul.

Le terme issu de  $\bar{\nabla} p$  peut être exprimé en fonction du gain de pression  $q = p_{\text{In}} - p_{\text{Out}}$  de la branche :

$$- \iint_{S_b} d\bar{S} \cdot \hat{z} p = \iint_{S_{\text{In}}} dS p - \iint_{S_{\text{Out}}} dS p \quad (2.20)$$

$$= A(p_{\text{In}} - p_{\text{Out}}) = Aq \quad (2.21)$$

Le terme visqueux  $\mu \bar{\Delta} \bar{v}$  devient :

$$\mu \iint_{S_b} d\bar{S} \cdot \bar{\nabla} \otimes \bar{v} \cdot \hat{z} = \mu \iint_{S_{\text{Out}}} dS \cdot \partial_z \mu_z - \mu \iint_{S_{\text{In}}} dS \partial_z v_z + v \iint_{S_{\text{Wall}}} dS \partial_r v_z \quad (2.22)$$

Avec la supposition de l'invariance de l'écoulement le long de l'axe de la branche, les dérivées  $\partial_z v_z$  sont nulles, ainsi :

$$\mu \iint_{S_b} d\bar{S} \cdot \bar{\nabla} \otimes \bar{v} \cdot \hat{z} = \mu \iint_{S_{\text{Wall}}} dS \partial_r v_z \quad (2.23)$$

Enfin, les hypothèses de l'invariance des vitesses le long de l'axe  $\hat{z}$  et de leur propriété axiale et axisymétrique nous permettent d'écrire  $\|\partial_r \bar{v}\| = |\partial_r v_z|$ . L'utilisation de notre définition des contraintes moyennes de cisaillement  $\sigma$  (2.18) conduit à :

$$\begin{aligned} \mu \iint_{S_b} d\bar{S} \cdot \bar{\nabla} \otimes \bar{v} \cdot \hat{z} &= \pm \mu \iint_{S_{\text{Wall}}} dS |\partial_r v_z| \\ &= \pm \mu \iint_{S_{\text{Wall}}} dS \|\partial_r \bar{v}\| \\ &= \pm 2\sqrt{\pi A} L \sigma \end{aligned}$$

Enfin, en regroupant tous les termes précédemment travaillés de l'équation (2.16), nous obtenons :

$$\sigma = \left| \frac{q}{2L} \sqrt{\frac{A}{\pi}} \right| \quad (2.24)$$

Quant au signe du cisaillement, nous savons que la force de frottement subie par la paroi est dirigée dans le sens contraire au gain de pression  $q$ . Donc le signe des contraintes de cisaillement est :  $\sigma = -\frac{q}{2L}\sqrt{\frac{A}{\pi}}$ . Toutefois, dans notre étude, tous les écoulements sont expiratoires et tous les cisaillements aux parois ont le même sens, vers les branches ascendantes. Ainsi, nous ne regardons que les valeurs absolues des débits  $\Phi$ , des gains de pression  $q$  et des contraintes moyennes de cisaillement à la paroi  $\sigma$ .

Nous pouvons réécrire (2.24) en fonction du débit, en utilisant les définitions (2.6), (2.7), (2.8) du gain de pression et de la résistance.

$$\sigma_n = 4\mu Z_n \Phi_n \sqrt{\frac{\pi}{A_n^3}} \quad (2.25)$$

## 2.B Méthode numérique

À partir des modèles présentés ci-dessus, nous pouvons écrire le système d'équations correspondant. Ce système peut être divisé en sous-systèmes pour chaque génération  $n$  du réseau. Chacun s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_n = 8\mu\pi Z_n L_n \Phi_n A_n^{-2} \\ Z_n = 1 \text{ ou } Z_{\text{Tawhai}}(\Phi_n, A_n) \text{ ou } Z_{\text{Florens}}(\Phi_n, A_n) \\ A_{n \neq m} = A_{\text{Lambert}}(P_n) \\ A_m = A_{\text{Lambert}}(P_m) - A_{\text{Mucus}} \\ P_{n \neq 0} = P_{n-1} + \frac{q_n + q_{n-1}}{2} \\ P_0 = \frac{q_0}{2} - P_{\text{tissus}} \\ \sigma_n = 4\mu Z_n \Phi_n \sqrt{\frac{\pi}{A_n^3}} \\ \Phi_n = 2^{-n} \Phi_0 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Les paramètres de notre modèle sont  $\Phi_0$  le débit d'air à la trachée,  $P_{\text{tissus}}$  la pression autour des bronches,  $A_{\text{Mucus}}$  la section occupée par le mucus et  $m$  sa position dans l'arbre. Nous pouvons voir que les variables au sein de chaque génération sont interdépendantes et que certaines équations sont non-linéaires. Ainsi, il est nécessaire d'utiliser les ressources numériques pour trouver les solutions du système. Toutefois, le sous-système de la génération  $n$  ne dépend que de la solution du sous-système de la génération précédente. Ainsi, nous pouvons résoudre le système en résolvant chaque sous-système un à un, en partant de la première génération.

Donc résoudre le système est équivalent à trouver un point fixe pour chaque sous-système d'équations (2.26). Ainsi, chaque sous-système peut être reformulé comme une recherche de point fixe d'une application  $F_n$  qui calcule une différence de pression  $q'$  à partir d'une autre  $q$ , i.e.  $q'_n = F_n(q)$ . Ici,  $q$  est la variable de l'application  $F_n$  et  $q'_n$  est l'image de  $q$  par  $F_n$ . Pour toutes les générations  $n > 0$ , l'application  $F_n$  est définie à partir des paramètres d'entrée du modèle, du gain de pression  $q_{n-1}$  et de la pression transmurale  $P_{n-1}$  de la génération précédente.

Un algorithme de Newton est utilisé pour trouver le zéro de chaque application  $F_n(q) - q$  pour déterminer le point fixe. Par la suite, nous montrons que chaque sous-système n'admet qu'une solution, nous assurant que l'algorithme de Newton converge bien vers la solution attendue dans le cas de la répartition saine de mucus,  $A_{\text{Mucus}} = 0$ . Nous avons aussi adapté l'algorithme afin d'assurer la convergence dans le cas de l'obstruction partielle.

### 2.B.1 Existence et unicité de la solution dans le cas $A_{\text{Mucus}} = 0$

Pour être certain de la convergence de notre algorithme vers une solution physique, nous devons prouver l'existence et l'unicité de la solution. La première étape est d'étudier le comportement de  $F_n(q) - q$ . La dérivé de  $F_n(q)$  par rapport à  $q$  s'écrit :

$$\frac{dF_n}{dq}(q) = \left( \frac{d\tilde{F}_n}{dA_n} \frac{dA_n}{dP_n} \frac{dP_n}{dq} \right) (q) \quad \text{avec} \quad F_n(q) = \tilde{F}_n(A_n(P_n(q))) \quad (2.27)$$

$F_n(q)$  dépend de  $A_n$  et peut s'exprimer comme  $F_n(q) = aA_n^{-2} + bA_n^{\frac{5}{2}}$ , avec  $a$  et  $b$  qui dépendent du débit et de la résistance hydrodynamique considérée,  $R_{\mathcal{P}ois}$ ,  $R_{\text{Tawhai}}$  ou  $R_{\text{Florens}}$ . D'après les expressions 2.7, 2.9, 2.13 et 2.12, nous savons que  $a$  et  $b$  sont toujours positifs,  $d\tilde{F}_n/dA_n$  est toujours négatif :

$$\frac{d\tilde{F}_n}{dA_n}(A_n) = -2aA_n^{-3} - \frac{5b}{2}A_n^{\frac{7}{2}} < 0 \quad (2.28)$$

Puis, pour  $dA_n/dP_n$ , nous avons :

$$\frac{dA_n}{dP_n}(P_n) \Big|_{P_n \leq 0} = A_{\text{Max},n} \alpha'_{0,n} (1 - P_n/P_n^-)^{-n^- - 1} > 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{dA_n}{dP_n}(P_n) \Big|_{P_n \geq 0} = A_{\text{Max},n} \alpha'_{0,n} (1 - P_n/P_n^+)^{-n^+ - 1} > 0 \quad (2.30)$$

Enfin, pour  $dP_n/dq$ , nous avons :

$$\frac{dP_n}{dq} = \frac{1}{2} > 0 \quad (2.31)$$

Ceci conduit à :

$$\forall q \in \mathbb{R} \quad \frac{dF_n}{dq}(q) - 1 < -1 \quad (2.32)$$

Donc  $F_n(q) - q$  est strictement décroissante et  $\lim_{q \rightarrow +\infty} F_n(q) - q = -\infty$ . Cette application est donc injective.

La seconde étape est de montrer que l'application  $F_n(q) - q$  est bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Avec sa stricte décroissance, cela prouve qu'elle est injective. Le modèle de la compliance bronchique donne une section de la branche  $A_n$  entre 0, à la pression transmural limite  $P_n = -\infty$ , et  $A_{\text{Max},n}$ , à la pression transmural limite  $P_n = +\infty$ . La dépendance de  $A_n(P_n(q))$  en  $q$  est identique, car la pression transmural  $P_n$  est linéaire et positivement dépendante au gain de pression  $q$ . Ainsi, l'application  $F_n(q)$  qui dépend de  $A_n^{-\alpha}$  varie entre  $+\infty$ , lorsque  $q$  tend vers  $-\infty$ , et la limite  $q_{\text{inf},n} = \tilde{F}_n(A_{\text{Max},n})$  avec  $A_{\text{Max},n}$  la section maximale de la branche de génération  $n$  donnée par Lambert et al. (24), lorsque  $q$  tend vers  $+\infty$ . Nous pouvons conclure que l'application  $F_n(q) - q$  varie entre  $+\infty$ , pour  $q \rightarrow -\infty$ , et  $-\infty$ , pour  $q \rightarrow +\infty$ . Cette application est donc surjective.

Étant injective et surjective de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F_n(q) - q$  est bijective. Il existe donc une unique solution de  $F_n(q) - q = 0$  pour chaque sous-système (2.26).

## 2.B.2 Méthode numérique pour résoudre le cas sans obstruction

Dans le cas de la résistance de Tawhai, à chaque génération, nous commençons par tester si la solution est en régime de Poiseuille,  $\mathcal{R}_e \leq 300$ , ou en régime inertiel. Pour avoir cette information, nous utilisons la décroissance de  $F_n(q)$ . Une analyse de graphique montre que, quel que soit le gain de pression  $q$ , la solution  $F_n(q_n) = q_n$  se situe entre les valeurs  $q$  et  $F_n(q)$ . Nous définissons la section  $A|_{\mathcal{R}_e=300}$  qui correspond à un nombre de Reynolds égal à 300 dans la génération à partir de l'équation 2.9. Puis à partir de  $A|_{\mathcal{R}_e=300}$ , nous calculons la valeur de  $q|_{\mathcal{R}_e=300} = P_n^{-1}(A_n^{-1}(A|_{\mathcal{R}_e=300}))$  et celle de  $F_n(A|_{\mathcal{R}_e=300})$ .

Comme la solution  $q_n$  de  $F_n(q) = q$  se situe entre  $q|_{\mathcal{R}_e=300}$  et  $F_n(q|_{\mathcal{R}_e=300})$ , deux cas sont possibles.

Le premier cas correspond à  $q_n \leq q|_{\mathcal{R}_e=300}$ . Dans ce cas la solution de l'équation a un gain de pression inférieur à  $q|_{\mathcal{R}_e=300}$ , la pression transmural est plus basse et la branche est plus resserrée qu'à  $\mathcal{R}_e = 300$ . Une section d'écoulement plus étroite signifie un nombre de Reynolds plus grand que 300. En conséquence, nous devons considérer les effets d'inertie pour cette génération.

Au contraire, le second cas présente une solution  $q_n$  supérieure à  $q|_{\mathcal{R}_e=300}$ . Un raisonnement similaire conduit à un nombre de Reynolds inférieur à 300 dans la génération, l'écoulement est alors en régime de Poiseuille.

Enfin, nous utilisons un algorithme de Newton pour trouver la solution de  $F_n(q) - q = 0$  pour chaque génération  $n$  en partant de la branche d'origine, vers les branches terminales de

l'arbre. Commenant par la condition initiale  $q_{0,n} = 0$ , le schéma numérique de la génération  $n$  s'écrit à l'étape  $i$  :

$$q_{i+1,n} \leftarrow q_{i,n} - \frac{F_n(q_{i,n}) - q_{i,n}}{\frac{dF_n}{dq}(q_{i,n}) - 1} \quad (2.33)$$

Nous avons remarqué que dans certain cas, la convergence de l'algorithme est très lente. Dans ces conditions, il arrive que  $q_{i+1,n} \approx q_{i,n}$  ou  $q_{i+2,n} \approx q_{i,n}$ . Lorsque ces cas apparaissent, nous procédons par dichotomie pour l'étape  $i$ .

$$q_{i+1,n} \leftarrow \frac{q_{i,n} + F_n(q_{i,n})}{2} \quad (2.34)$$

### 2.B.3 Cas de l'obstruction partielle, $A_{\text{Mucus}} > 0$

Dans le cas de l'obstruction partielle, nous retranchons la section de la génération  $m$  donnée par le modèle de compliance avec la section occupée par le mucus  $A_{\text{Mucus}}$ . La section donnée par ce modèle varie entre 0 et  $A_{\text{Max},m}$ , ainsi la différence  $A_{\text{Lambert},m} - A_{\text{Mucus}}$  peut être négative. Or, c'est une configuration non-physique.

Dans ce cas, nous restreignons l'espace des gains de pression  $q$  à l'encadrement  $]q_{\text{inf},m}, +\infty[$ . Ici, la borne inférieure du gain de pression est  $q_{\text{inf},m} = P_m^{-1}(A_m^{-1}(0))$ . En utilisant le même raisonnement que précédemment, nous pouvons montrer que  $F_m(q) - q$  est strictement décroissante sur  $]q_{\text{inf},m}, +\infty[$  et bijective de  $]q_{\text{inf},m}, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ .

Donc, il existe une unique solution du sous-système (2.26) dans le cas d'une obstruction partielle.

Toutefois, nous devons interdire à l'algorithme les valeurs de  $q$  inférieures à la borne inférieure  $q_{\text{inf},m}$ . Pour cela, nous modifions l'équation (2.33) de la mise à jour du gain de pression  $q$ .

$$q_{i+1,n} \leftarrow q_{i,n} - \frac{\max(F_n(q_{i,n}), q_{\text{inf},m}) - q_{i,n}}{\frac{dF_n}{dq}(q_{i,n}) - 1} \quad (2.35)$$

Comme il a été montré dans le cas sans obstruction que  $q_{i+1,n}$  était compris entre  $q_{i,n}$  et  $F_n(q_{i,n})$ , seul les cas où  $F_n(q_{i,n}) < q_{\text{inf},m}$  peuvent conduire l'algorithme à sortir du domaine de solution. Dans ces cas, borner ainsi la condition de mise à jour du gain de pression  $q$ , conditionne  $q_{i+1,n}$  à être entre  $q_{i,n}$  et  $q_{\text{inf}}$ .

## 2.C Variation du cisaillement à travers une bifurcation symétrique

Afin de mieux comprendre le comportement du cisaillement le long de l'arbre symétrique, nous analysons le cas simple de l'évolution du cisaillement dans une bifurcation. Dans cette section, nous mettons en relation le ratio du cisaillement entre branches mère et filles avec le ratio de réduction de diamètre  $h$ . De plus, nous y présentons les critères, sur ce ratio, qui déterminent si le cisaillement augmente ou diminue chez les branches filles, par rapport à la branche mère.

Le préfacteur  $Z$  peut se réécrire sous la forme  $Z = a + b\mathcal{R}_e$ , avec  $a$  et  $b$  des constantes qui dépendent du modèle utilisé. Dans le cas de l'écoulement de Poiseuille et lorsque  $\mathcal{R}_e \leq 300$  dans le modèle de Tawhai,  $a$  vaut 1 et  $b$  est nul. Dans le modèle Tawhai, lorsque  $\mathcal{R}_e > 300$ ,  $a$  et  $b$  valent respectivement 1/2 et 1/600. Dans le modèle de Florens,  $a$  et  $b$  valent respectivement 1.5 et 0.0035. En y intégrant la formule du nombre de Reynolds (2.9) et en intégrant le tout dans celle du cisaillement (2.25), nous avons :

$$\sigma_n = 4a\mu\sqrt{\pi}\frac{\Phi_n}{A_n^{\frac{3}{2}}} + 16b\rho\frac{\Phi_n^2}{A_n^2} \quad (2.36)$$

Nous pouvons distinguer ces deux termes en un lié à la viscosité  $\sigma_{\mu,n} = 4a\mu\sqrt{\pi}\frac{\Phi_n}{A_n^{\frac{3}{2}}}$ , appelé *cisaillement visqueux* et l'autre lié à la densité  $\sigma_{\rho,n} = 16b\rho\frac{\Phi_n^2}{A_n^2}$ , appelé *cisaillement inertiel*.

$h$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	1				
$A$	↘	↘	↘	↘	↘	→	↗
$\sigma_\mu$	↗	↗	↗	→	↘	↘	↘
$\sigma_\rho$	↗	→	↘	↘	↘	↘	↘

Tab. 2.4: Évolution de la section  $A$ , du cisaillement visqueux  $\sigma_\mu$  et du cisaillement inertiel  $\sigma_\rho$  dans une bifurcation symétrique selon la valeur du ratio  $h$  entre les diamètres des branches filles et de la branche mère. Les flèches ascendantes indiquent que la quantité augmente de la branche mère aux branches filles, les flèches horizontales indiquent la conservation de la quantité et les flèches descendantes leur décroissance.

Nous pouvons approfondir l'analyse en regardant comment varient ces termes à travers une bifurcation. Tout d'abord, à partir du ratio  $h_n$  entre les diamètres des branches mère et filles de génération respective  $n$  et  $n + 1$ , nous pouvons calculer ceux entre les cisaillements visqueux et entre les cisaillements inertiels.

$$A_{n+1} = h_n^2 A_n \quad (2.37)$$

$$\sigma_{\mu,n+1} = 4a \mu \sqrt{\pi} \frac{\Phi_0}{2^{n+1} A_n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2h_n^3} \sigma_{\mu,n} \quad (2.38)$$

$$\sigma_{\rho,n+1} = 16b \rho \frac{\Phi_0^2}{2^{2n+2} A_n^2} = \frac{1}{4h_n^4} \sigma_{\rho,n} \quad (2.39)$$

Nous pouvons voir que si  $h_n$  est le ratio entre les diamètres,  $(2h_n^3)^{-1}$  et  $(4h_n^4)^{-1}$  sont les ratios respectifs du cisaillement visqueux et du cisaillement inertiel. Ainsi, selon si ces ratios sont supérieurs ou inférieurs à 1, ces quantités augmenteront ou diminueront de part et d'autre de la bifurcation. Tous les différents cas sont détaillés dans le tableau 2.4.

Enfin, nous pouvons dégager un autre critère sur  $h$  lorsque l'on compare les croissances des cisaillements entre eux.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\mu,n+1}}{\sigma_{\mu,n}} &> \frac{\sigma_{\rho,n}}{\sigma_{\rho,n+1}} \\ \frac{1}{2h_n^3} &> \frac{1}{4h_n^4} \\ h &> \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Lorsque  $h$  est inférieur à  $1/2$ , le cisaillement inertiel croît plus fortement que le cisaillement visqueux. Entre  $1/2$  et  $\sqrt{1/2}$ , c'est le cisaillement visqueux qui croît plus fortement que le cisaillement inertiel. Entre  $\sqrt{1/2}$  et  $\sqrt[3]{1/2}$ , le cisaillement inertiel décroît tandis que le cisaillement visqueux croît. Et au-delà de  $\sqrt[3]{1/2}$ , le cisaillement inertiel décroît plus fortement que le cisaillement visqueux.

Ainsi, le comportement des contraintes de cisaillement le long de l'arbre dépend de comment le diamètre évolue dans les bifurcations. Par exemple, dans un arbre fractal avec un ratio  $h$  constant, les sections  $A$ , les cisaillements visqueux  $\sigma_\mu$  et les cisaillements inertiels  $\sigma_\rho$  croissent ou décroissent de manière exponentielle. Dans un tel arbre, le comportement du cisaillement total  $\sigma$  dépendra du ratio  $h$  et du terme dominant à la branche d'origine. Les différents scénarii sont résumés dans le tableau 2.5.

	$h < 1/2$	$h > 1/2$
$\sigma_{\mu,0} > \sigma_{\rho,0}$	$\begin{cases} \sigma_n \approx \sigma_{\mu,n} & \text{si } n \leq i \\ \sigma_n \approx \sigma_{\rho,n} & \text{si } n > i \end{cases}$ avec $i \in \mathbb{N}$	$\sigma \approx \sigma_{\mu}$
$\sigma_{\mu,0} < \sigma_{\rho,0}$	$\sigma \approx \sigma_{\rho}$	$\begin{cases} \sigma_n \approx \sigma_{\rho,n} & \text{si } n \leq i \\ \sigma_n \approx \sigma_{\mu,n} & \text{si } n > i \end{cases}$ avec $i \in \mathbb{N}$

Tab. 2.5: Le comportement du cisaillement total dans un arbre fractal de ratio  $h$  dépend de la valeur du ratio  $h$  et du cisaillement dominant à la première branche. Dans le cas  $h < 1/2$  et  $\sigma_{\mu,0} < \sigma_{\rho,0}$ , le cisaillement total se comporte comme le cisaillement inertiel. Dans le cas  $h > 1/2$  et  $\sigma_{\mu,0} > \sigma_{\rho,0}$ , le cisaillement total se comporte comme le cisaillement visqueux. Dans le cas  $h < 1/2$  et  $\sigma_{\mu,0} > \sigma_{\rho,0}$  et le cas  $h > 1/2$  et  $\sigma_{\mu,0} < \sigma_{\rho,0}$ , il existe une génération  $i$  telle que le comportement du cisaillement total est différent de part et d'autre de la génération  $i$ .



### 3. ASYMÉTRIE ET SÉLECTION NATURELLE

#### 3.1 Introduction

Nous avons étudié, précédemment, la répartition du cisaillement dans un arbre symétrique aux branches compliantes et l'application des résultats dans le cadre de la kinésithérapie respiratoire. Toutefois, cette étude ne tient pas compte de l'asymétrie de l'arbre bronchique.

Dans la nature, l'arbre bronchique est asymétrique. Cette asymétrie se manifeste notamment par deux aspects : une asymétrie de branchement, lorsque les bronches filles d'une bifurcation n'ont pas les mêmes tailles ; et une asymétrie de topologie, lorsque les chemins vers les acini ne passent pas par le même nombre de bifurcations. Ces asymétries sont grandement différentes selon les espèces de mammifères. Elles sont dues, d'une part, à une faible robustesse de l'arbre symétrique face aux altérations induites par la ventilation<sup>(28)</sup> et, d'autre part, à une tendance naturelle de la croissance des bronches pendant le développement du poumon lors de l'embryogenèse<sup>(9-11)</sup>. Ainsi, nous faisons l'hypothèse que l'asymétrie de branchement et l'asymétrie de topologie du poumon sont issues d'un processus d'optimisation induit par la sélection naturelle. Nous pensons que le critère d'optimisation est lié à la robustesse des performances ventilatoires face aux variations biologiques compte-tenu des limites physiologiques.

Ainsi, avant d'étudier la répartition du cisaillement dans un arbre asymétrique aux branches compliantes, nous devons développer un modèle d'arbre asymétrique. Pour ce faire, nous introduirons les deux aspects de l'asymétrie pulmonaire et nous la quantifions. Puis, nous décrirons de notre modèle d'arbre taillé, qui permet de décrire des arbres plus ou moins asymétriques. Ces arbres ont une asymétrie de branchement homogène dans toutes les bifurcations et son asymétrie topologique est reliée à l'asymétrie de branchement par une contrainte de taille de branche. Ce modèle permet d'étudier des arbres de différentes topologies et nous verrons que les changements topologiques des arbres induisent des discontinuités sur les propriétés globales des arbres. Nous étudierons leurs résistances hydrodynamiques, en lien avec les performances ventilatoires, et leurs volumes, en lien avec leurs limites physiologiques. Enfin, nous analyserons la robustesse de la résistance face aux variations de la contrainte sur le volume.

#### 3.2 Asymétrie pulmonaire

Avant de poursuivre plus en détail notre étude de l'asymétrie pulmonaire, nous allons introduire deux facettes de l'asymétrie : l'asymétrie de branchement et l'asymétrie topologique.

L'asymétrie de branchement concerne chaque bifurcation. En effet, les deux branches filles peuvent avoir des tailles différentes, comme dans le schéma en bas à gauche de la figure 3.1. Ainsi, nous distinguons la grande branche fille  $D_+$  de la petite branche fille  $D_-$ , de même que leur ratio de réduction respectif  $h_+$  et  $h_-$ , i.e le rapport de leurs tailles  $H(D_{\pm})$  avec celle de la branche mère  $H(M)$ . La taille  $H$  d'une branche est proportionnelle à son diamètre ou à sa longueur. De plus, nous choisissons de caractériser cette asymétrie par le coefficient  $a$  : pour chaque branche mère, ce coefficient est défini comme le ratio des tailles des branches filles  $a(M) = \frac{H(D_-)}{H(D_+)}$ . De même, il peut être relié au ratio de réduction de ses branches filles  $a = \frac{h_-}{h_+}$ . D'autres études utilisent des modèles d'arbre à branchement asymétrique<sup>(16,25,28)</sup>. Certaines ont montré les avantages de l'asymétrie de branchement. La nature aurait sélectionné des poumons à branchement asymétrique pour leur robustesse face aux variations de rayon des bronches pouvant survenir pendant la vie de l'individu<sup>(28)</sup>. De plus, l'asymétrie de branchement émerge naturellement dans des systèmes physiques qui miment le développement du poumon mais au prix d'un bruit géométrique qui soulève la question de la robustesse<sup>(9-11,27)</sup>.

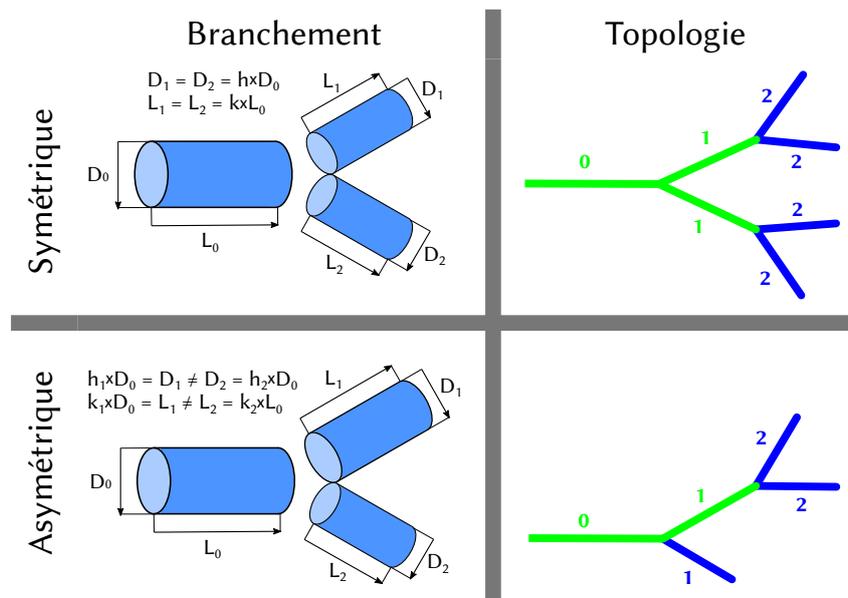


Fig. 3.1: Schémas de branchement et de topologie symétrique et asymétrique de l'arbre. Dans les branchements symétriques, en haut à gauche, les branches filles sont identiques en longueur et en diamètre. À l'opposé, dans les branchements asymétriques, en bas à gauche, les branches filles ont des propriétés géométriques différentes. Dans les schémas de topologie d'arbre, les branches terminales sont en bleu, celle possédant des branches filles sont en vert. À côté de chaque branche est annotée la génération correspondante. Dans les topologies symétriques, en haut à droite, toutes les branches terminales sont de la même génération. Dans les topologies asymétriques, les branches terminales peuvent être de générations différentes.

L'asymétrie topologique concerne la forme de l'arbre en elle-même, sans considérer la taille des branches. Au sein de l'arbre, nous pouvons distinguer deux types de branches : celles possédant une bifurcation et des branches filles, et les autres, dites branches terminales. Contrairement à un arbre symétrique, dont toutes les branches terminales appartiennent à la même génération, un arbre à topologie asymétrique a des branches terminales qui appartiennent à des générations différentes, comme montré par les deux schémas à droite de la figure 3.1. Une manière simplifiée de constater cette asymétrie est de référencer les générations maximales et minimales associées aux branches terminales d'un arbre. Nous les appelons respectivement  $G_+$  et  $G_-$ . Lorsque  $G_+ = G_-$ , l'arbre est symétrique. Dans les cas contraires, plus la différence entre  $G_+$  et  $G_-$  est grande, plus l'asymétrie topologique est prononcée. Malheureusement, ce type d'arbre implique une plus grande complexité analytique. Les travaux étudiant ou utilisant les topologies asymétriques restent rares.

Dans de précédentes études<sup>(39,40)</sup>, les arbres pulmonaires de différentes espèces ont été analysés. Leurs résultats sont résumés dans le tableau 3.1. Nous pouvons remarquer que l'asymétrie pulmonaire est différente selon les espèces, autant celle de branchement que de topologie.

L'arbre bronchique présente des irrégularités, surtout dans les premières générations, avec notamment la présence de trifurcations. Ces irrégularités sont nécessaires pour que la forme du poumon s'adapte au mieux à la forme du thorax et aux emplacements déjà pris par d'autres organes. Toutefois, à partir d'une certaine taille, la géométrie des bifurcations devient beaucoup plus régulière<sup>(37,40,44)</sup>. Ainsi, nous émettons l'hypothèse qu'à partir d'une certaine taille de bronche, certaines propriétés de l'arbre bronchique, notamment son asymétrie, sont les fruits d'une optimisation sur d'autres propriétés, telle que l'énergie absorbée par l'écoulement d'air lors de la ventilation, ce qui induit la régularité des propriétés des bifurcations. La régularité de ratio de réduction  $h_{\pm}$  nous suggère d'approcher l'arbre bronchique avec un modèle d'arbre fractal asymétrique, i.e avec des ratios de réduction uniformes pour toutes les bifurcations.

Afin de mieux comprendre l'impact de l'asymétrie topologique sur la répartition des débits dans l'arbre bronchique et l'origine de la différence entre les asymétries relevée chez plusieurs

	Grand ratio $h_+$	Petit ratio $h_-$	Coefficient d'asymétrie $a = h_+/h_-$	$G_+$	$G_-$
Chien	0.927	0.575	0.620	38	11
Rat	0.875	0.583	0.666	34	8
Lapin	0.887	0.529	0.596	ND	ND
Hamster	0.910	0.593	0.652	34	8
Humain	0.876	0.686	0.783	25	12

Tab. 3.1: Valeurs moyennes des propriétés de branchement<sup>(37,40)</sup> et nombre maximal et minimal de générations des bronches terminales<sup>(39)</sup>. Les grand et petit ratios,  $h_+$  et  $h_-$ , sont les valeurs moyennes des ratios de réduction de diamètre entre les bronches mères et leurs bronches filles, respectivement grande et petite. Le coefficient  $a$  est le rapport entre les valeurs moyennes des petits et grands ratios. Les quantités  $G_+$  et  $G_-$  sont les valeurs maximale et minimale des générations associées aux bronches terminales.

espèces, j'ai développé un nouveau modèle d'arbre asymétrique. Ce modèle permet de simuler des arbres bronchiques de différentes tailles, asymétries de branchement et asymétries de topologie. Ces arbres peuvent être comparés entre eux via des quantités globales comme le volume total ou la résistance hydrodynamique.

### 3.3 Modèle d'arbre taillé

Nous ferons, ici, une description simplifiée du modèle d'arbre taillé. Une description mathématique du modèle est disponible en annexe à partir de la page 63.

Tous les paramètres sont des quantités normalisées. Ainsi, la taille minimale  $H_t$  est le rapport entre le diamètre minimal des bronches de l'arbre bronchique, sans considérer les acini, et le diamètre de la première bronche modélisée. De même pour le volume des modèles d'acinus, il est le rapport entre le volume d'un acinus et le volume de la première bronche modélisée. Pareillement pour les caractéristiques d'une bronche  $b$ , son volume normalisé est  $H(b)^3$  et, pour des raisons détaillées en annexe 3.D.2, nous considérons sa résistance hydrodynamique normalisée égale à  $H(b)^{-3}$ .

Notre modèle permet d'étudier un arbre fractal défini par cinq paramètres, le grand ratio  $h_+$ , le petit ratio  $h_-$ , la taille minimale normalisée  $H_t$  des branches de l'arbre, le volume  $V_t$  des acini et la résistance hydrodynamique  $R_t$  des acini. Les ratios  $h_+$  et  $h_-$  sont les ratios de taille entre chaque branche mère  $b$  et ses branches filles,  $D_+(b)$  et  $D_-(b)$  :  $H(D_+(b)) = h_+ H(b)$  et  $H(D_-(b)) = h_- H(b)$ . Les branches dont la taille est supérieure à la taille minimale  $H_t$  donnent des branches filles. Les branches filles dont la taille est égale ou inférieure à  $H_t$  sont des branches terminales et ne donnent pas de branche fille. Chaque branche mère  $b$  est un modèle 0D d'une bronche qui est l'homothétie de ratio  $H(b)$  de la bronche modélisée par la première bronche de l'arbre. Chaque branche terminale est un modèle 0D d'un acinus de volume  $V_t$  et de résistance hydrodynamique  $R_t$ . Afin d'assurer l'existence de l'arbre dans notre modèle, nous imposons des conditions sur la taille minimale  $H_t < 1$  et sur les ratios de réductions  $1 > h_{\pm} \geq H_t$ .

Nous considérons que les propriétés des acini ne dépendent pas de celles de l'arbre bronchique. Ainsi, les paramètres liés aux acini,  $H_t$ ,  $V_t$  et  $R_t$ , sont considérés comme des méta-paramètres, qui sont invariants au sein d'une même espèce.

Nous considérons que l'influence des bifurcations sur le volume de l'arbre et sur sa résistance hydrodynamique est négligeable. Ainsi, le volume de l'arbre modélisé est la somme du volume de toutes les branches mères et terminales. Et sa résistance est la résistance équivalente du circuit dessiné par l'arbre dont les branches terminales sont reliées entre elles (même pression de l'aire au fond des branches terminales).

### 3.4 Changement de topologie d'arbre et nouveaux paramètres

Une des particularités du modèle est qu'il nous permet d'étudier une grande variété de topologie d'arbre. En effet, la condition d'existence d'une branche  $b$  est que sa taille soit supérieure à  $H_t$ . Sa taille dépend de sa position dans l'arbre et des deux paramètres  $h_+$  et  $h_-$ . Ainsi, une variation d'un de ces paramètres peut amener à la création ou suppression de branches.

Notre étude de cet aspect du modèle, disponible en annexe 3.C.1, nous indique un autre lot de paramètres canoniques. Si nous changeons les deux ratios  $h_+$  et  $h_-$  par les facteurs  $g_+ = \frac{\ln(H_t)}{\ln(h_+)}$  et  $g_- = \frac{\ln(H_t)}{\ln(h_-)}$ , les changements de topologie d'arbre ne dépendent plus que de ces deux paramètres. La carte 3.2A indique la position des différentes topologies d'arbre pour les premières générations. Les trois schémas 3.2B montrent chacun une topologie particulière afin d'illustrer leurs différences. Dans la même annexe, il est montré que les facteurs  $g_+$  et  $g_-$  sont reliés aux générations minimale et maximale des branches terminales  $G_+ = [g_+]$  et  $G_- = [g_-]$ . Les conditions d'existence de l'arbre de notre modèle se traduisent sur les facteurs  $g_+$  et  $g_-$  par les conditions  $g_{\pm} \geq 1$ .

Par la suite, nous appelons la limite entre chaque topologie *frontière*. Nous distinguons deux types de frontières : les frontières *entières* et les frontières *intermédiaires*.

Les frontières entières sont représentées sur la carte par les lignes horizontales et verticales en tiret. Elles sont situées aux valeurs entières de  $g_+$  et de  $g_-$ . De part et d'autre de ces frontières, les arbres voient leurs générations maximale ou minimale de leurs branches terminales,  $G_+$  ou  $G_-$ , augmenter ou diminuer de un. Par exemple, la génération minimale des branches terminales dans le schéma du milieu, côté bleu, est  $G_- = 2$  tandis que dans celui du bas, côté rouge, elle est  $G_- = 1$ .

Les frontières intermédiaires sont représentées par les morceaux d'hyperbole en point-tiret. Les arbres séparés par ces frontières ont les mêmes  $G_+$  et  $G_-$  tout en ayant un nombre différent de branches mères et de branches terminales. Par exemple, sur les schémas du haut, côté vert, et du milieu, côté bleu, les nombres  $G_+$  et  $G_-$  sont identiques, respectivement 3 et 2, pourtant l'arbre côté vert a deux branches mères et deux branches terminales supplémentaires.

Compte-tenu de ces remarques, l'utilisation des paramètres  $g_+$  et  $g_-$  est intuitive d'un point de vue global. Ces paramètres sont directement reliés aux générations maximale et minimale,  $G_+$  et  $G_-$ , des branches terminales de l'arbre. Ces paramètres aident à la visualisation de la forme globale de l'arbre.

### 3.5 Caractéristiques des arbres modélisés

Nous supposons que le critère d'optimisation du poumon par la sélection naturelle est lié à la performance respiratoire contrainte par les limites physiologiques.

Une des limites physiologiques est le volume disponible pour le poumon. Nous considérons que le volume pulmonaire est proportionnel au volume d'air contenu dans le poumon, volume qui correspond aux volumes des bronches et des acini. Nous approchons cette valeur avec la somme des volumes des branches mères  $\sum_{b \in \mathcal{P}} H(b)^3$ , avec  $\mathcal{P}$  l'ensemble des branches mères de l'arbre taillé, et celle des volumes des branches terminales  $\#_{\mathcal{A}} \times V_t$ , avec  $\#_{\mathcal{A}}$  le nombre de branches terminales dans l'arbre taillé.

Par rapport à notre modèle, les performances respiratoires peuvent être approchées par l'énergie minimale dissipée lors de la ventilation. En annexe 3.D.2, nous relierons l'énergie minimale dissipée par l'arbre pour un débit donné à sa résistance équivalente  $\tilde{R}$  lorsque toutes les bronches sont à leur dilatation maximale. Dans cette configuration, les bronches sont considérées comme des cylindres. La résistance équivalente  $R_{\text{eq}}$  de chaque arbre et sous-arbre est calculée de manière récursive grâce aux règles d'additivité des résistances en série ou en dérivation. La résistance équivalente des branches terminales est égale au méta-paramètre  $R_t$ . La résistance équivalente  $R_{\text{eq}}(b)$  d'un sous-arbre partant de la branche mère  $b$  est égale à la somme de sa résistance  $R(b)$

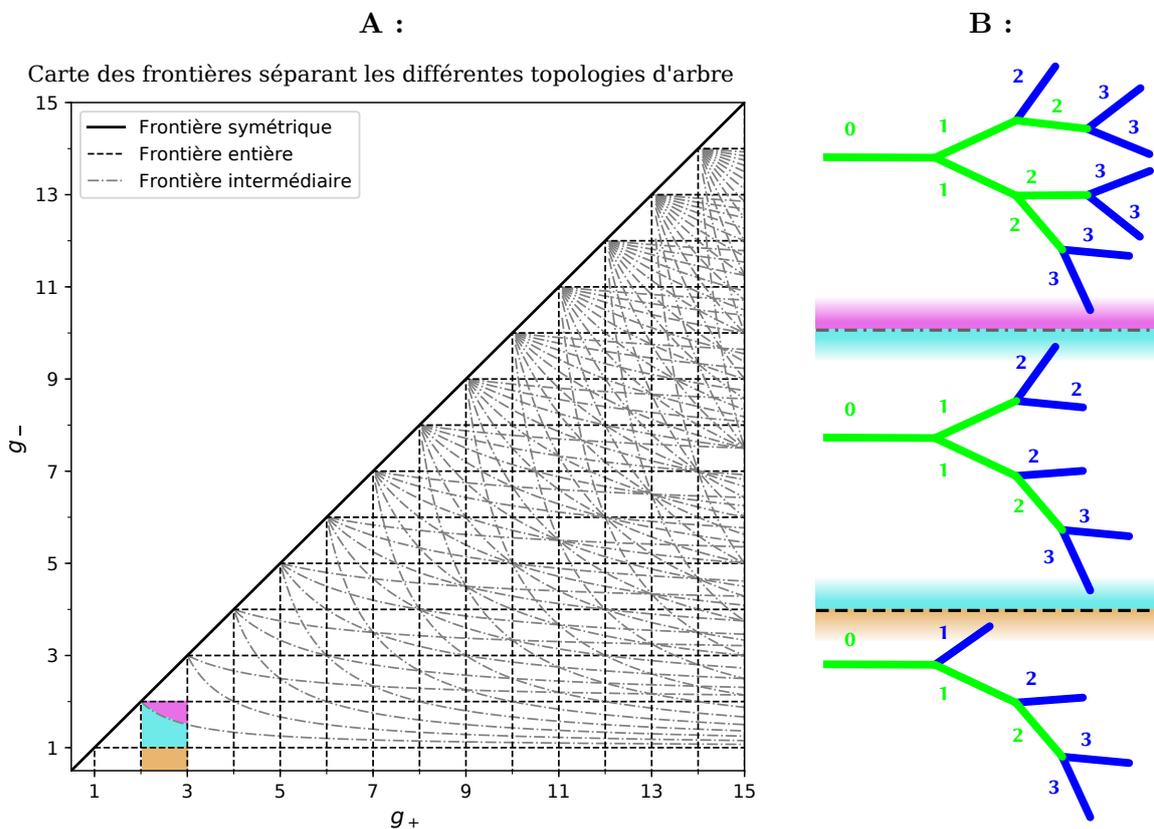


Fig. 3.2: **A :** Carte des frontières entre les différentes topologies de l'arbre taillé de 1 à 15 générations. Pour assurer l'existence de l'arbre de notre modèle, la valeur minimale des facteurs  $g_+$  et  $g_-$  est de 1. Toutefois, pour améliorer la visibilité des régions où  $g_- = 1$ , les bornes inférieures des axes sont inférieures à 1. La ligne pleine marque la frontière symétrique  $g_+ = g_-$ , la partie supérieure, non représentée ici, est symétrique à la partie inférieure. Les lignes en tiret marquent les frontières dites entières, les nombres entiers maximal  $G_+$  ou minimal  $G_-$  des générations des branches terminales changent de part et d'autre de cette limite. Les lignes grises en point-tiret marquent les frontières dites intermédiaires, elles séparent les différentes topologies d'arbres qui possèdent les mêmes  $G_+$  et  $G_-$ . Les trois zones colorées correspondent aux trois exemples présentés à droite. **B :** 3 exemples de topologies d'arbre  $(G_+, G_-)$  : en haut, correspondant à la zone mauve sur la carte, le plus grand des arbres (3,2); au milieu, correspondant à la zone cyan sur la carte, le plus petit des arbres (3,2); en bas, correspondant à la zone orange sur la carte, l'arbre (3,1). Les branches vertes sont des branches mères et les branches bleues sont des branches terminales. A côté de chaque branche est annotée la génération correspondante.

	Humain	Chien	Rat	Hamster
Rayon de la trachée $r_{\text{trachee}}$ (mm)	10,05	9,00	1,70	1,30
Volume de la trachée $V_{\text{trachee}}$ (mm <sup>3</sup> )	37,7 10 <sup>3</sup>	50,1 10 <sup>3</sup>	345	127
Rayon minimal $r_{\text{min}}$ (mm)	0,20	0,15	0,05	0,05
Volume des acinus $V_a$ (mm <sup>3</sup> )	150	??	0.90	0.50
Ratio terminal $H_t = \frac{r_{\text{min}}}{r_{\text{trachee}}}$	0,020	0.017	0,029	0,038
Volume terminal $V_t = \frac{V_a}{V_{\text{trachee}}}$	3,98 10 <sup>-3</sup>	3,56 10 <sup>-3</sup>	2,79 10 <sup>-3</sup>	3,88 10 <sup>-3</sup>
Résistance terminale $R_t = 1.5H_t^{-3}$	125 10 <sup>3</sup>	216 10 <sup>3</sup>	39,3 10 <sup>3</sup>	17,6 10 <sup>3</sup>

Tab. 3.2: Caractéristiques réelles et paramètres correspondant pour quatre espèces : humain, chien rat et hamster. Les rayons et volumes de la trachée et les rayons minimaux sont issus de<sup>(39)</sup>. Le volume des acinus humains et rats sont respectivement issus de<sup>(5)</sup> et<sup>(4)</sup>. Celui des acinus des hamsters est estimé en interpolant les données de<sup>(4)</sup> pour un rat de 150g. N'ayant pas trouvé celui des acinus de chien, nous fixons le volume terminal associé à la valeur moyenne des trois autres espèces.

et des résistances équivalentes des sous-arbres partant de ses branches filles  $\tilde{R}(D_{\pm}(b))$ .

$$R_{\text{eq}}(b) = R(b) + \frac{\tilde{R}(D_+(b)) R_{\text{eq}}(D_-(b))}{\tilde{R}(D_+(b)) + R_{\text{eq}}(D_-(b))}$$

Une définition plus complète du volume et de la résistance équivalente est décrite en annexe 3.D.1.

### 3.5.1 Évolution du volume et de la résistance

Dans l'objectif d'étudier la robustesse de la résistance hydrodynamique de l'arbre taillé face aux variations biologiques du ratio d'asymétrie sous les contraintes de volume, nous étudions, de prime abord, les variations du volume total  $V_{\text{tot}}$  et de la résistance hydrodynamique  $\tilde{R}$  des arbres taillés en fonction des facteurs  $g_+$  et  $g_-$ , au sein d'une même espèce. Les valeurs de  $H_t$ ,  $V_t$  et  $R_t$  utilisées lors de notre étude sont répertoriées dans le tableau 3.2.

Les méta-paramètres  $H_t$  et  $V_t$  sont issus de la littérature, tandis que  $R_t$  est une valeur estimée à partir d'une fourchette de valeurs. En considérant que les acini sont des arbres formés par des branches de taille minimale  $H_t$  et en négligeant l'influence des alvéoles, nous pouvons estimer que leur résistance est comprise entre la résistance d'une branche de taille minimale,  $H_t^{-3}$  et celle de la résistance d'un arbre infini de branches de tailles minimales,  $2 H_t^{-3}$ , tel que détaillé en annexe 3.D.1. Ainsi, nous prenons comme valeur pour  $R_t$  le milieu de cette fourchette :  $R_t = 1.5 H_t^{-3}$ .

Notre étude, disponible en annexe 3.E, nous montre le degré de complexité de la dépendance du volume et de la résistance de l'arbre aux deux facteurs  $g_+$  et  $g_-$ . Dû aux différences de topologies des arbres, le volume et la résistance des arbres présentent des discontinuités localisées aux frontières entre les différentes topologies d'arbre, représentées par les courbes dans la figure 3.2.

Les discontinuités du volume total  $V_{\text{tot}}$  entre chaque topologie d'arbre sont dans le même sens que sa variation au sein de chaque topologie. Le volume total  $V_{\text{tot}}$  est strictement croissant,

autant en fonction de  $g_+$  que de  $g_-$ . Ainsi, le volume minimal est atteint avec les paramètres  $g_+ = g_- = 1$ , qui correspondent à l'arbre constitué de seulement la première branche et de deux branches terminales. D'un autre côté, le volume tend vers l'infini lorsque  $g_+$  tend vers l'infini.

La résistance hydrodynamique de l'arbre taillé au sein d'une même topologie d'arbre est strictement décroissante autant en fonction de  $g_+$  qu'en fonction de  $g_-$ . Au niveau des frontières entre topologie d'arbre, le sens de la discontinuité de la résistance hydrodynamique de l'arbre taillé dépend de la valeur de la résistance des acini  $R_t$ . La discontinuité est négative autant en fonction de  $g_+$  qu'en fonction de  $g_-$  lorsque  $R_t > 2H_t^{-3}$ , et, à l'inverse, elle est positive lorsque  $R_t < 2H_t^{-3}$ . Or, dû à notre hypothèse sur la valeur des résistances des acini,  $H_t^{-3} < R_t < 2H_t^{-3}$ , les discontinuités de la résistance hydrodynamique de l'arbre taillé sont dans le sens opposé à celui de ses variations au sein de chaque topologie d'arbre. Ainsi, le long de toutes droites d'équation  $g_- = ag_+ + b$  avec  $a > 0$ , la résistance hydrodynamique de l'arbre  $\tilde{R}$  sera décroissante par morceau en fonction de  $g_+$ . Il existe une infinité de minima locaux. Chaque topologie d'arbre en possède au moins un. La position de ces minima est difficile à déterminer dans le cas général. Néanmoins, nous pouvons énumérer certaines règles :

1. Les minima locaux ne sont situés qu'au niveau des frontières qui sépare les différentes topologies d'arbre ;
2. Sauf aux intersections des frontières, i.e. les points qui cotoient plus de deux topologies d'arbre différentes, les minima locaux ne sont pas sur les frontières entières. Les frontières entières marquent la séparation entre deux topologies d'arbre dont le nombre maximal ou minimal des générations des branches terminales,  $G_+$  ou  $G_-$ , est différent ;
3. À chaque intersection entre frontières entières, il y a l'unique minimum de la topologie d'arbre dont  $g_+ \leq G_+$  et  $g_- \leq G_-$  ;
4. Le long des frontières intermédiaires, i.e les frontières qui séparent deux topologies d'arbre différentes dont les nombres maximal  $G_+$  et minimal  $G_-$  des générations des branches terminales sont identiques, la variation de la résistance dépend autant de la topologie d'arbre concernée que de la frontière longée. Ainsi, la position des minima locaux situés sur ces frontières est complexe à déterminer dans le cas général.

Nous pouvons néanmoins étudier la tendance des minima pour un ensemble de topologies spécifiques. Les arbres symétriques avec  $g_+ = g_-$  et les topologies dont  $g_- = 1$ , appelées *tiges*, ont leurs régions associées qui sont délimitées seulement par des frontières entières. Pour ces deux types de topologies d'arbre, les minima de la résistance sont situés aux intersections entre frontières entières, lorsque  $g_+ = G_+$  et  $g_- = G_-$ . Nous pouvons étudier l'évolution de la résistance minimal de ces deux types de topologies en fonction du nombre de générations. Ainsi, nous constatons, en annexe 3.E.2 page 76, qu'aux valeurs correspondantes à chaque espèce, la résistance minimale des topologies tend vers un minimum lorsque le nombre de générations tend vers l'infini. La limite est  $\tilde{R} = 2$  pour les topologies symétriques et  $\tilde{R} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + R_t}$  pour les topologies tiges.

Dans le cas où  $H_t$  correspond aux valeurs pour les espèces étudiées, voir tableau 3.2, et  $R_t = 1.5H_t^{-3}$ , la résistance minimale des arbres symétriques et tiges tend à diminuer lorsque le nombre de générations augmente, voir figure 3.3. De plus, à nombre de générations maximal  $G_+$  identique, les tiges ont une résistance plus importante que les arbres symétriques.

Nous émettons l'hypothèse que, dans le cas général, plus une topologie a de branches, plus sa résistance minimale est basse. Or, nous avons vu précédemment que plus un arbre a de branches, plus son volume est grand. Ainsi, si la nature sélectionne l'arbre pulmonaire qui a la résistance la moins élevée, son choix est limité par le volume disponible dans la cage thoracique de l'individu.

### 3.6 Résistance de l'arbre taillé à volume restreint

#### 3.6.1 Comportement en fonction du ratio d'asymétrie

Pour mimer les limites physiologiques qui pourraient influencer l'optimisation du poumon <sup>(28)</sup>, nous décidons de restreindre le volume total  $V_{\text{tot}}$  de l'arbre taillé. Nous imposons une limite

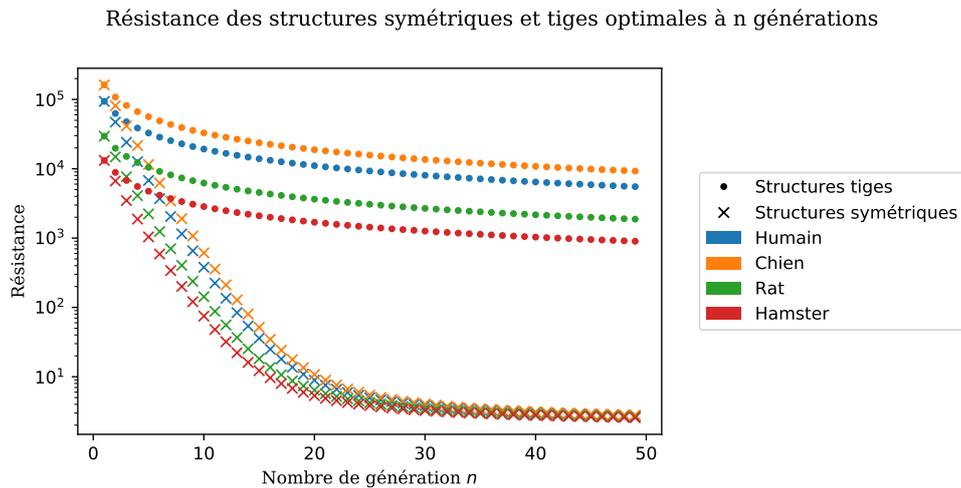


Fig. 3.3: Résistance optimale de chaque topologie symétrique ou tige en fonction du nombre de générations pour les quatre espèces étudiées. Les points • marquent les résistances des topologies tiges, les croix × marquent celles des topologies symétriques. Les marqueurs bleus marquent les valeurs des humains ; les marqueurs oranges, les chiens ; les marqueurs verts, les rats et les marqueurs rouges, les hamsters. Sur ce graphique, nous pouvons remarquer que la résistance des topologies symétriques converge rapidement vers leur limite 2.

maximale au volume total  $V_{\text{tot}}$ . De plus, au vu de la difficulté analytique et numérique de trouver les minima de la résistance hydrodynamique des arbres taillés  $\tilde{R}$ , nous étudions la résistance  $\tilde{R}$  des arbres taillés qui remplissent au maximum le volume disponible  $V_{\text{Disp}}$ . Afin de vérifier l'hypothèse d'une sélection d'un ratio d'asymétrie par le processus d'optimisation naturelle, nous étudions aussi la variation de cette résistance sous contrainte en fonction du ratio d'asymétrie  $a$ .

La présence de discontinuités sur le volume total implique que certaines valeurs ne sont pas atteintes quelle que soit la topologie d'arbre choisie, par exemple les valeurs de  $V_{\text{tot}}$  comprise entre  $1 + 2V_t$  et  $1 + 3V_t + H_t^3$  voir annexe 3.F.1 page 76. La première correspond au volume de l'arbre minimal, constitué de la première branche et de deux branches terminales ; et la seconde correspond au volume minimal de l'arbre tige de deux générations, constitué de la première branche, une branche de taille  $H_t$  et de trois branches terminales. Ainsi, quelque soit le volume disponible  $V_{\text{Disp}}$  choisi entre ces deux valeurs, l'arbre taillé le plus volumineux respectant cette contrainte est le même.

Ainsi nous aurions pu chercher la résistance minimale des arbres dont le ratio d'asymétrie  $a$  est connu et dont le volume total  $V_{\text{tot}}$  est inférieur à un volume disponible  $V_{\text{Disp}}$  donné. Cependant, les discontinuités de la résistance  $\tilde{R}$  rendent la recherche numérique du minimum très difficile. Nous avons opté pour l'étude des variations de la résistance  $\tilde{R}$  de l'arbre de ratio d'asymétrie  $a$  dont le volume  $V_{\text{tot}}$  est maximal tout en étant inférieur au volume disponible  $V_{\text{Disp}}$ . Les détails mathématiques et algorithmiques du calcul de cette valeur est disponible en annexe 3.F page 76.

Dans les cas correspondant aux valeurs biologiques, le volume total des arbres taillés est essentiellement dû au volume des branches terminales. Les variations du volume total pour une même topologie d'arbre est négligeable par rapport à celles entre deux topologies différentes. Ainsi, lorsque l'on limite le volume total  $V_{\text{tot}}$  par un volume disponible  $V_{\text{Disp}}$ , les facteurs  $g_+$  et  $g_-$  suivent essentiellement des frontières entre certaines topologies d'arbre. Comme le comportement de la résistance de l'arbre taillé dépend de la topologie de l'arbre et de la frontière longée, le comportement de la résistance  $\tilde{R}$  de l'arbre taillé remplissant au mieux le volume disponible  $V_{\text{Disp}}$  change dès que la frontière longée ou la topologie de l'arbre change. Nous pouvons voir figure 3.4 que la résistance  $\tilde{R}$  adopte de nombreux comportements différents, quelle que soit l'espèce étudiée. Toutefois, nous pouvons différencier deux types de changements qui peuvent se cumuler : un changement de topologie d'arbre et un changement de frontière longée. Lors d'un

changement de topologie d'arbre, par exemple le cas  $V_{\text{Disp}} = V_{\text{Ref}} + 10\%$  chez l'humain autour de  $a = 0.85$  (figure 3.4), la dépendance de  $\tilde{R}$  aux paramètres  $g_+$  et  $g_-$  est différente. Cela dit, outre la discontinuité de la résistance, la différence de comportement reste négligeable. Au contraire, lors d'un changement de frontière longée, par exemple les deux autres cas chez l'humain autour de  $a = 0.85$  (figure 3.4), c'est le comportement de  $g_+$  en fonction de  $g_-$  qui est grandement modifié. Cela induit un changement de comportement de la résistance de l'arbre beaucoup plus remarquable.

### 3.6.2 Sensibilité aux variations de paramètres du comportement de $\tilde{R}$ en fonction de $a$

Pour évaluer la robustesse de la résistance  $\tilde{R}$  de l'arbre taillé sous contrainte de volume face aux variations biologiques, nous devons savoir à quels éléments  $\tilde{R}$  est le plus sensible. Pour notre modèle, les variations biologiques peuvent être mimées par des variations des paramètres du modèle,  $V_{\text{Disp}}$ ,  $H_t$ ,  $V_t$  ou  $R_t$ .

La sensibilité de la résistance  $\tilde{R}$  aux paramètres est très variable selon les paramètres. L'influence de la résistance des branches terminales  $R_t$  est négligeable par rapport à celle du ratio d'asymétrie, voir en haut à gauche de la figure 3.5.

La résistance est plus sensible à la taille minimale  $H_t$  qu'au ratio d'asymétrie. Toutefois, le comportement de la résistance en fonction du ratio d'asymétrie  $a$  reste très similaire, la position des extrema ne varie pas beaucoup et les inversions d'extremum, i.e. la transformation d'un maximum en un minimum et vice versa, sont rares. Nous pensons donc que la variation de  $H_t$  ne joue pas un grand rôle dans la sélection d'un ratio d'asymétrie optimisé par l'évolution.

Les sensibilités aux variations de volume disponible  $V_{\text{Disp}}$  et à celles du volume des branches terminales  $V_t$  sont identiques, voir les figures 3.4 et 3.5. Nous pouvons nous y attendre car la quasi-totalité du volume pris par l'arbre est utilisé par les branches terminales. Ainsi, augmenter le volume disponible  $V_{\text{Disp}}$  de 10% a approximativement le même effet que de diminuer celui des branches terminales  $V_t$  de 10%. La résistance est un peu moins sensible à ces paramètres qu'à la taille minimale  $H_t$ . Toutefois, le comportement de la résistance en fonction de l'asymétrie varie grandement avec ces paramètres. La position des extrema peut changer, des extrema peuvent apparaître ou disparaître et les inversions d'extremum sont très courantes. Lorsque le volume disponible augmente, de nouvelles topologies d'arbre, auparavant trop volumineuses, deviennent acceptables. Les frontières suivies changent et les comportements des résistances aussi.

La sensibilité aux variations du rayon de la première branche  $r_0$  est plus importante car ces variations provoquent à la fois des variations du volume disponible  $V_{\text{Disp}}$  et de la taille minimale  $H_t$ . Ainsi, nous retrouvons à la fois les changements importants des comportements de la résistance en fonction de l'asymétrie et les variations de la résistance moyenne. Ces derniers sont moins visibles dans la figure 3.5 car les résistances affichées sont normalisées par rapport à la résistance de la première branche.

## 3.7 Robustesse face aux variations biologiques

Bien que les paramètres  $H_t$ ,  $V_a$  et  $V_{\text{Disp}}$  varient entre individus de la même espèce, leurs variations n'ont pas la même amplitude. De plus, d'après l'étude de Barré et al. <sup>(4)</sup>, chez les rats, la topologie de l'arbre bronchique ne varie pas avec l'âge. La taille des bronches et des acini s'adapte à la croissance de l'individu. Ainsi, pour notre modèle, la sélection des facteurs  $g_{\pm}$  se fait pendant la gestation alors que le volume disponible  $V_{\text{Disp}}$  une fois adulte est inconnu. De plus, le nombre d'acini étant différent selon les individus, la topologie de l'arbre n'est pas identique au sein d'une même espèce.

Nous voulons savoir s'il existe des asymétries de branchement  $a$  qui augmentent particulièrement la robustesse de la résistance hydrodynamique de l'arbre bronchique face aux variations de sa topologie. Ainsi, au sein d'une population, l'énergie consommée par la ventilation reste proche d'une moyenne quelles que soient les différentes topologies d'arbre bronchique entre individus.

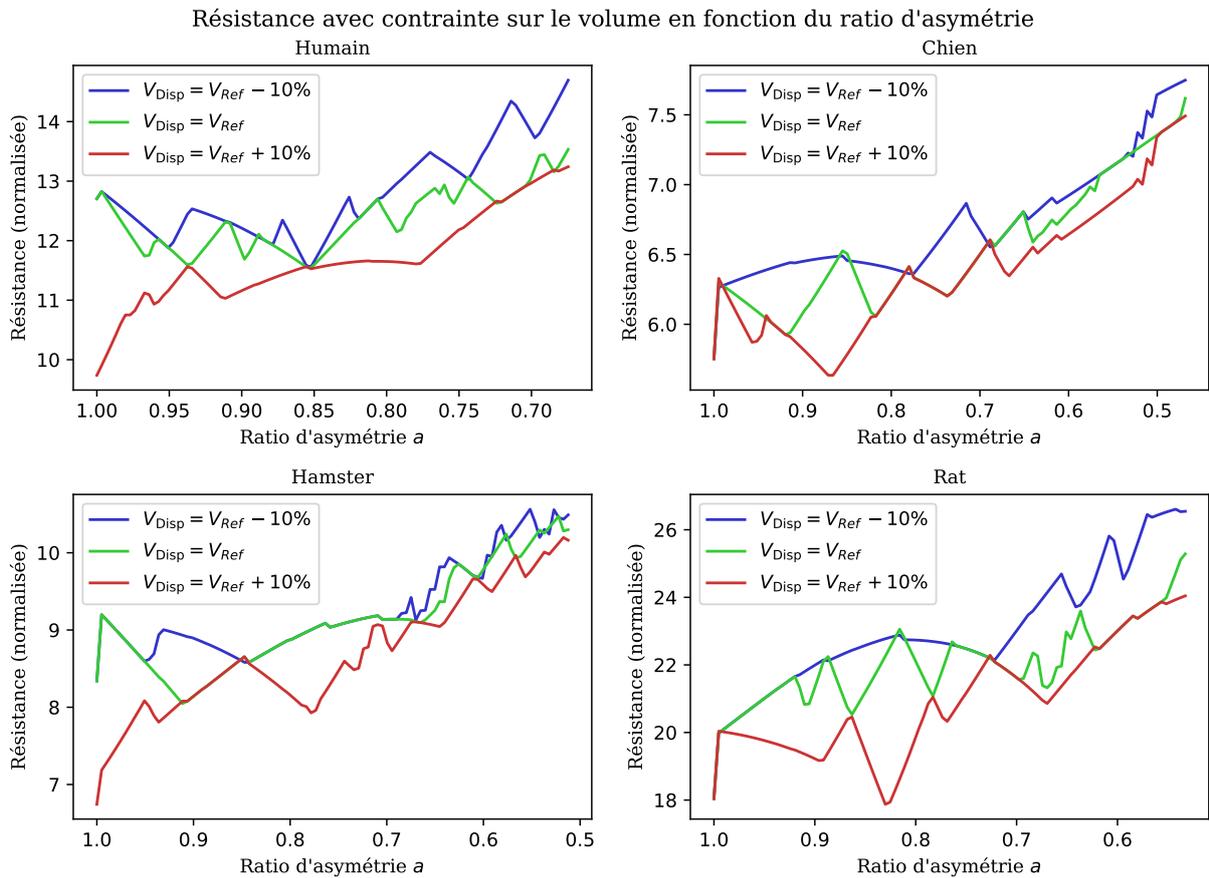


Fig. 3.4: Résistance  $\tilde{R}$  avec contrainte sur le volume  $V_{tot}$  en fonction du ratio d'asymétrie  $a$ . Chaque graphique montre les résultats des arbres modélisant les arbres bronchiques de différentes espèces : ↖ humain, ↗ chien, ↙ hamster et ↘ rat. Chaque courbe représente la résistance  $\tilde{R}$  avec des contraintes différentes sur le volume : courbe verte,  $V_{Disp} = V_{Ref}$  ; courbe rouge,  $V_{Disp} = V_{Ref} + 10\%$  ; et courbe bleue,  $V_{Disp} = V_{Ref} - 10\%$ . Pour des raisons numériques, nous avons limité le nombre de générations maximal  $G_+$  de l'arbre pour chaque espèce. Ainsi, les modèles d'arbre étudiés représentent un sous-arbre de l'arbre bronchique. Pour les humains, le rayon de la première branche est de 2.7 mm ; Pour les chiens, il est de .46 mm ; Pour les hamsters, il est de 0.22 mm ; Et pour les rats il est de 0.48 mm. Le volume de référence  $V_{Ref}$  est le volume du sous-arbre généré avec les petits et grands ratios affichés dans le tableau 3.1

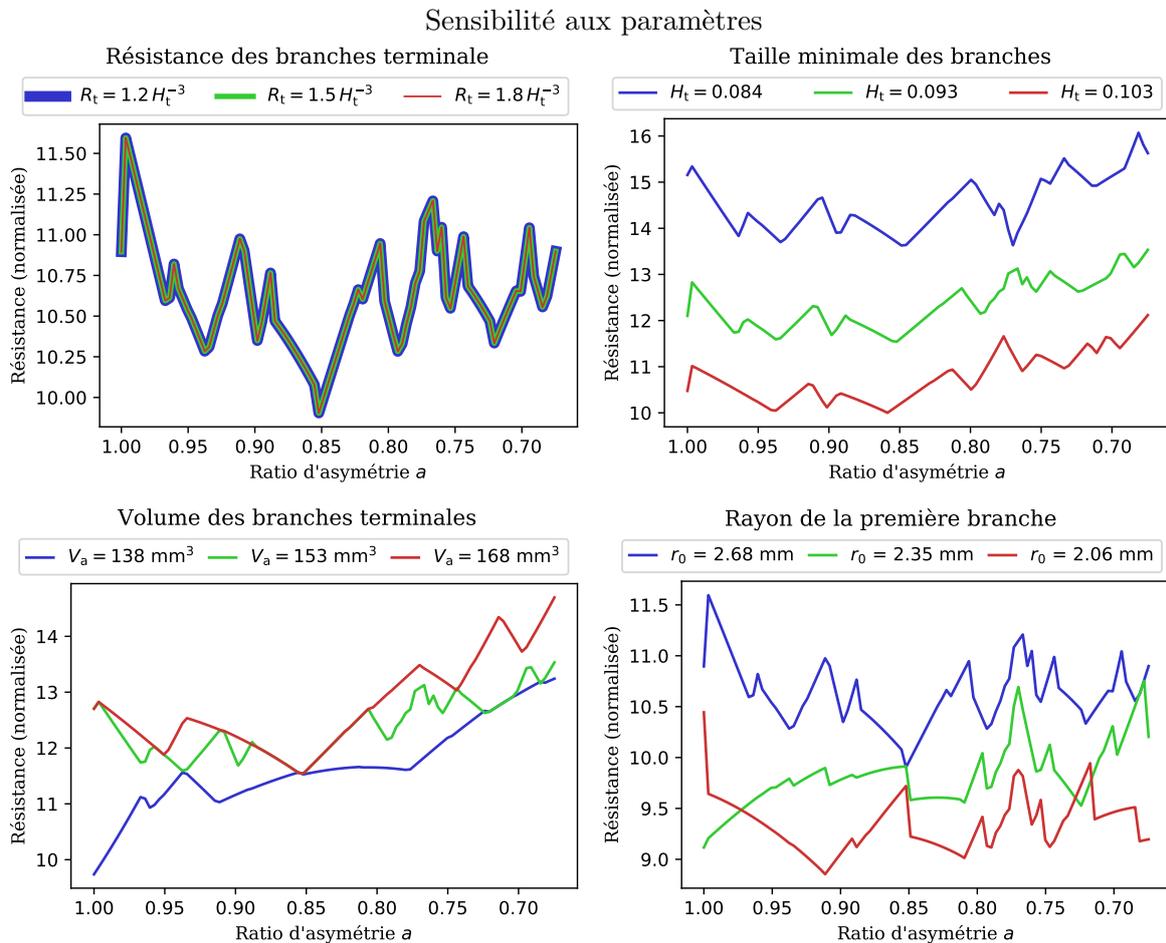


Fig. 3.5: Sensibilité aux paramètres  $R_t$ , en haut à gauche,  $H_t$ , en haut à droite, et  $V_t$ , en bas à gauche, et au rayon  $r_0$  de la première branche de l'arbre, en bas à droite. Toutes les courbes des trois premiers graphiques ont été calculées avec le même volume  $V_{\text{Disp}}$ , environ  $144 \text{ mm}^3$ . Ce volume a été calculé à partir des ratios  $h_{\pm}$  moyens, de la taille minimal  $H_t$  moyenne et du volume des acinis  $V_a$  moyen affichés dans les tableaux 3.1 et 3.2. À l'instar des résultats présentés figure 3.4, nous avons limité le nombre de génération maximal  $G_+$ . Le rayon de la première branche de ces cas est de  $2.68 \text{ mm}$ . Dans le cas de la sensibilité au rayon de la première branche, le volume  $V_{\text{Disp}}$  a été recalculé pour chaque valeur du rayon : environ  $144 \text{ cm}^3$  pour la courbe bleue,  $97 \text{ cm}^3$  pour la courbe verte et  $66 \text{ cm}^3$  pour la courbe rouge.

Pour cela, nous utilisons notre modèle pour calculer la distribution des résistances équivalentes  $\tilde{R}$  en fonction du ratio d'asymétrie  $a$  avec des contraintes sur le volume total  $V_{\text{tot}}$  uniformément réparties autour d'un volume de référence  $V_{\text{Ref}}$ . Ce volume de référence est calculé à partir de notre modèle avec les méta-paramètres,  $H_t$ ,  $V_t$  et  $R_t$ , indiqués dans le tableau 3.2 et les ratios de diamètre moyen indiqué dans le tableau 3.1. Cette distribution est estimée par le calcul de la moyenne et de l'écart-type des résistances en fonction de l'asymétrie à partir d'un tirage des contraintes  $V_{\text{Disp}}$ . Bien que la moyenne de la distribution des résistances à volume total contraint augmente en fonction de l'asymétrie, l'écart-type de la distribution a un comportement plus sophistiqué, avec de nombreux maxima et minima locaux, voir la figure 3.6.A. De plus, d'après les résultats figure 3.6.B, la position de ces extrema dépend fortement de la distribution des contraintes sur le volume total. La hauteur de cette distribution et sa moyenne influencent fortement le comportement de l'écart-type des résistances. Les inversions d'extremum sont fréquentes. La largeur de ces distributions influence plus légèrement le comportement de l'écart-type, les inversions d'extremum restent rares.

Ces inversions d'extrema sont situées là où beaucoup de frontières entre topologies d'arbre se croisent. En ces points, les différences de volume et de résistance entre la plus petite topologie d'arbre et la plus grande sont très élevées. Si l'étendue de la distribution de la contrainte de volume est plus faible que cette différence de volume, toutes les courbes de résistance passeront par ce point, l'écart-type sera nul. Au contraire, si elle est plus élevée ou que la distribution est suffisamment bien centrée, les deux topologies d'arbre seront présentes. La différence entre les résistances étant importante, son écart-type est beaucoup plus important. Ce faisant, l'écart-type de la résistance en ces points est fortement dépendante de la moyenne de la distribution des contraintes de volume.

Ainsi, il existe des zones où, à ratio d'asymétrie  $a$  constant, la concentration de différentes topologies d'arbre est élevée. En ces zones, la résistance minimale de chaque topologie d'arbre forme une multitude de paliers disponibles pour la population. Bien que les différences de résistance entraînent une variété dans les chances de survie, la grande variété de topologie d'arbre rend les mariages entre individu ayant différentes topologies d'arbre fréquents. Ces mélanges réduisent la tendance à la sélection de la topologie d'arbre optimale. Ainsi, cette tendance peut être facilement compensée par d'autres limites biologiques. Au contraire, dans les zones à faible densité de topologie d'arbre, il existe peu de paliers, avec une grande différence de résistance entre chaque. Les individus bénéficiant de la topologie d'arbre la plus optimale sont suffisamment nombreux pour réduire les mariages entre individus ayant différentes topologies d'arbre. La tendance à sélectionner la topologie d'arbre optimale est plus forte et moins facilement compensable par les autres limites biologiques.

### 3.8 Conclusion

Dans cette partie, nous avons développé un modèle d'arbre fractal asymétrique. Ce modèle est simple par sa conception, avec seulement deux paramètres pour définir toutes les topologies d'arbre fractal, et permet d'étudier des phénomènes complexes tels que la multiplicité des topologies d'arbres.

Nous avons mis en avant le lien complexe entre l'asymétrie et la stabilité évolutive d'une espèce. Selon le ratio d'asymétrie, la distribution des résistances hydrodynamique de l'arbre taillé est plus ou moins bien répartie due à la densité variable de topologies d'arbre disponible dans la population d'une espèce. Les arbres symétriques offrent la densité la plus faible de topologies différentes à distribution de volume fixée. Lorsque la densité de topologies disponible est faible, la topologie optimale est grandement avantagée par la faible résistance hydrodynamique de l'arbre et par la grande proportion de la population de l'espèce qui en bénéficie. Ceci induit une instabilité évolutive, avec une tendance à sélectionner les topologies optimales moins compensée par les autres limites biologiques. Ceci rejoint la conclusion d'autres études sur la faible robustesse des arbres symétriques face aux diverses variations biologiques. De plus, ce phénomène peut être une des causes de la forte différence d'asymétrie pulmonaire entre espèces

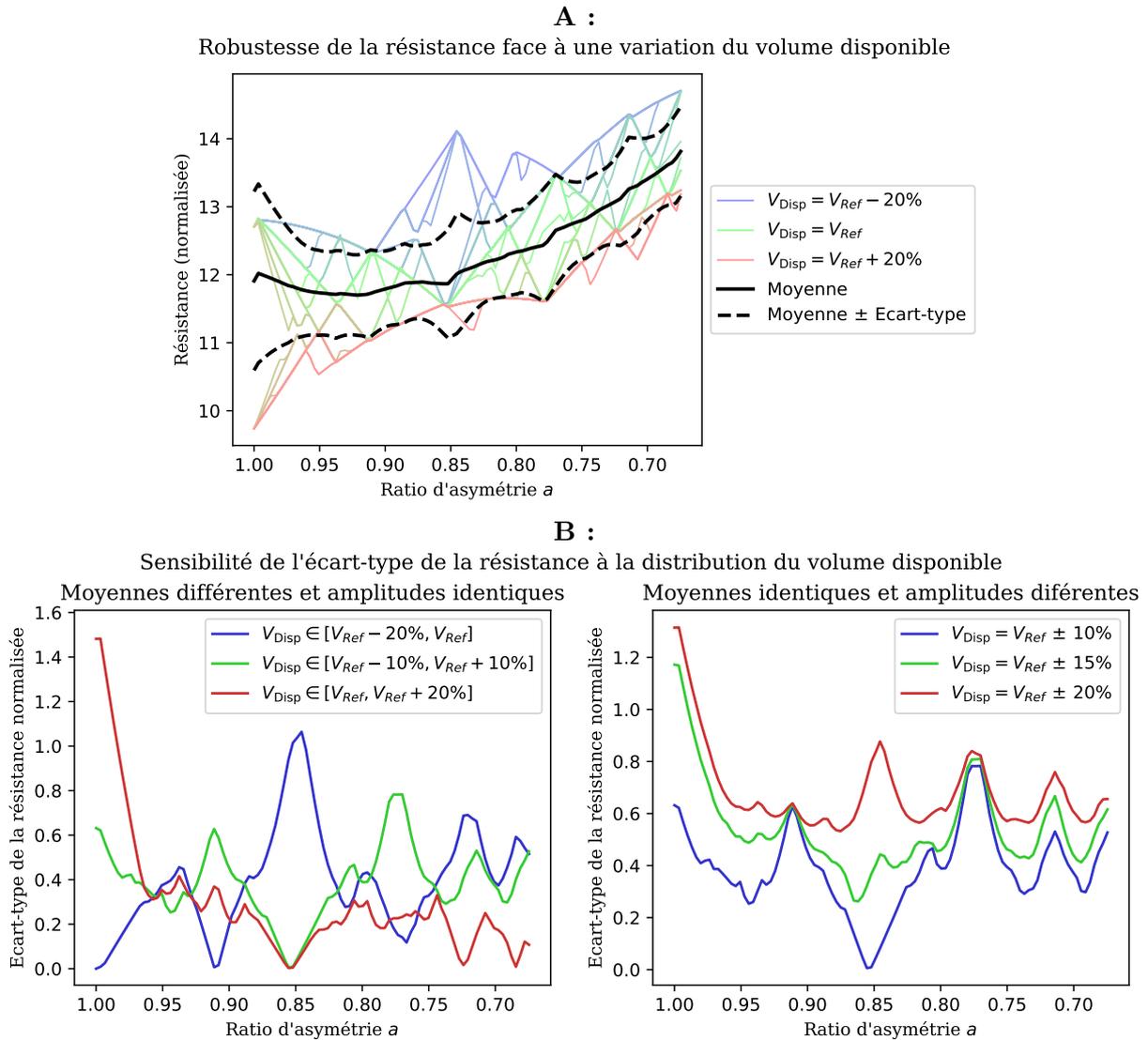


Fig. 3.6: **A** : Évolution de la résistance  $\tilde{R}$  avec contrainte sur le volume  $V_{\text{tot}}$  en fonction du ratio d'asymétrie  $a$ . Les 21 courbes de couleur représentent les résistances pour différentes contraintes, uniformément réparties entre  $V_{\text{Ref}} - 10\%$ , **bleu**, et  $V_{\text{Ref}} + 10\%$ , **rouge**, en passant par  $V_{\text{Ref}}$ , en **vert**. La courbe noire et pleine représente la moyenne de ces résistances en fonction de l'asymétrie. Les courbes noires en tiret représentent leur écart-type autour de la moyenne, elles sont égales à la moyenne plus ou moins l'écart-type de leur distribution en fonction de l'asymétrie. **B** : Ces deux graphiques montrent l'écart-type en fonction de l'asymétrie de la distribution des résistances  $\tilde{R}$  avec des contraintes uniformément réparties sur différents intervalles. Dans le graphique de gauche, les intervalles, de même amplitude, sont décalés entre elles : de  $V_{\text{Ref}} - 20\%$  à  $V_{\text{Ref}}$  en **bleu**; de  $V_{\text{Ref}} - 10\%$  à  $V_{\text{Ref}} + 10\%$  en **vert**; et de  $V_{\text{Ref}}$  à  $V_{\text{Ref}} + 20\%$  en **rouge**. Dans ce graphique, les écart-types ont été calculés à partir de 21 tirages. Dans le graphique de droite, les intervalles sont centrés sur  $V_{\text{Ref}}$  et ont une amplitude différente :  $\pm 10\%$  en **bleu** (21 tirages);  $\pm 15\%$  en **vert** (31 tirages); et  $\pm 20\%$  en **rouge** (41 tirages).

alors que parmi chaque espèce la variation du ratio d'asymétrie est faible.

Dans un autre contexte, ce modèle est le candidat idéal pour étudier l'influence de l'asymétrie sur la répartition du cisaillement dans un arbre aux branches compliantes. De plus, lors de son étude [3.C.1](#), nous avons défini un critère, le facteur de génération, qui évolue de manière linéaire dans l'arbre, partant de 0 à la première branche et se terminant à 1 aux branches terminales. Ce critère pourrait être un autre critère utile pour comparer les branches entre elles, entre des arbres aux topologies différentes.

# Annexes



Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur la modélisation de l'arbre bronchique du poumon. Les acini, i.e les zones d'échange gazeux entre l'air et le sang n'y sont pas étudiés. Dans cette annexe, nous définirons et étudierons le modèle d'arbre taillé utilisé dans le chapitre 3. Le but du modèle est de simuler un réseau arborescent et fractal de bronches rigides, connectées par des bifurcations. Le réseau forme un arbre dont les branches sont indexées selon leurs générations, i.e le nombre de bifurcations qui les séparent de la branche d'origine. Cet arbre a une topologie asymétrique, les branches terminales ne sont pas de la même génération. À chaque branche est associée une taille qui est liée aux dimensions géométriques de la bronche simulée. À chaque bifurcation, les ratios de réduction donnés en paramètres relient la taille des branches descendantes, dites branches filles, à celle de la branche ascendante, dite branche mère. Ces ratios de réduction sont différents pour la branche droite et la gauche, mais sont homogènes à toutes les bifurcations. Ainsi, la taille évolue de manière fractale et géométrique le long des générations de l'arbre. Lorsque la taille des branches est en dessous d'une taille minimale fixée par un troisième paramètre, ces branches sont considérées terminales et n'ont pas de branche fille. Deux autres paramètres, le volume terminal (le volume du modèle des branches terminales) et la résistance terminale (leur résistance hydrodynamique) seront utilisés pour étudier la résistance hydrodynamique et le volume des arbres modélisés. Dans notre étude, nous nous concentrons sur l'optimisation du réseau de bronches en considérant invariant l'environnement du réseau. Ainsi, la taille minimale, le volume terminal et la résistance terminale ne participent pas à l'optimisation du réseau de bronches et sont appelés méta-paramètres.

La définition d'un tel modèle peut être segmentée en trois étapes. Premièrement, nous commencerons par définir l'arbre infini et les outils mathématiques associés nécessaires à notre modèle. Puis, nous définirons les paramètres précédemment mentionnés, les ratios de réduction, la taille minimale des branches, le volume terminal et la résistance terminale, et l'arbre taillé qui en dépend. Nous en profiterons pour détailler la première complexité issue du modèle, les changements de topologie d'arbre, et nous verrons quel est l'ensemble de paramètres canoniques pour cet aspect. Ensuite, nous développerons le modèle physique attaché au modèle d'arbre taillé. Ici, nous verrons comment l'arbre taillé simule un arbre bronchique, les hypothèses sous-jacentes de la physique des bronches et les propriétés physiques de l'arbre. Puis, à partir du modèle, nous analyserons les variations du volume total de l'arbre et sa résistance hydrodynamique équivalente en fonction des paramètres. Enfin, nous définissons et détaillons la procédure de recherche numérique de l'arbre qui remplit aux mieux un volume disponible compte-tenu du ratio d'asymétrie.

### 3.A Modèle d'arbre

Tout d'abord nous définissons un arbre infini  $\mathcal{T}$  comme une cascade de générations  $\mathcal{T}_n$ . Chaque génération  $\mathcal{T}_n$  est un ensemble de  $2^n$  branches  $b$ . Chaque branche est identifiable à un couple d'indices entiers positifs  $b = (n, i)$ . L'entier  $n$  est appelé génération de  $b$ , et  $i$  est la position de  $b$  dans la génération  $\mathcal{T}_n$ . Par la suite, nous appelons la branche d'origine  $b_0$  la seule branche de génération 0, dont l'indice est  $(0, 0)$ . Le schéma 3.7 montre l'exemple avec les trois premières générations de l'arbre. Chaque branche  $b$  a deux sommets. Le sommet ascendant de la branche d'origine  $b_0$  n'est relié à rien. Les autres sommets sont appelés *bifurcation*. Chaque bifurcation relie une branche de génération  $n$ , appelée *mère*, à deux branches de génération  $n+1$ , appelées *filles*. Ainsi, hormis  $b_0$ , chaque branche possède une branche *sœur* de même génération reliée à la même bifurcation. De l'arbre  $\mathcal{T}$ , nous en distinguons l'ensemble de branches filles  $\mathcal{T}^*$ . De plus, nous scindons ce sous-ensemble en deux, l'ensemble de branches droites  $\mathcal{T}^+$  et celui de branches gauches  $\mathcal{T}^-$  :

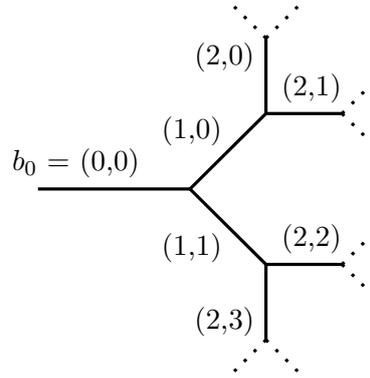


Fig. 3.7: Les trois premières générations de l'arbre infini  $\mathcal{T}$ . A côté de chaque branche est indiqué le couple d'indice  $(n, i)$  correspondant.

$$\mathcal{T}_n = \{(n, i) \mid i \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket\} \quad (3.1)$$

$$\mathcal{T} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n \quad (3.2)$$

$$b_0 = (0, 0) \quad (3.3)$$

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \setminus \{b_0\} \quad (3.4)$$

$$\mathcal{T}^+ = \{(n, i) \in \mathcal{T}^* \mid i \pmod{2} = 1\} \quad (3.5)$$

$$\mathcal{T}^- = \{(n, i) \in \mathcal{T}^* \mid i \pmod{2} = 0\} \quad (3.6)$$

Nous définissons les différentes relations entre branches comme les applications  $M(b)$ , pour désigner la branche mère de  $b$ ,  $D_+(b)$ , pour sa fille droite,  $D_-(b)$ , pour sa fille gauche, et  $S(b)$ , pour sa sœur :

$$M: \begin{array}{l} \mathcal{T}^* \rightarrow \mathcal{T} \\ (n, i) \mapsto (n-1, \lfloor i/2 \rfloor) \end{array} \quad (3.7)$$

$$D_+: \begin{array}{l} \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^+ \\ (n, i) \mapsto (n+1, 2i+1) \end{array} \quad (3.8)$$

$$D_-: \begin{array}{l} \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^- \\ (n, i) \mapsto (n+1, 2i) \end{array} \quad (3.9)$$

$$S: \begin{array}{l} \mathcal{T}^+ \leftrightarrow \mathcal{T}^- \\ (n, i) \mapsto (n, i+1-2(i \pmod{2})) \end{array} \quad (3.10)$$

Nous définissons aussi l'application  $G$  qui, pour chaque branche  $b$  de  $\mathcal{T}$ , donne sa génération :

$$G: \begin{array}{l} \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N} \\ (n, i) \mapsto n \end{array} \quad (3.11)$$

Maintenant, nous définissons pour chaque branche  $b$  l'ensemble des branches qui forme le chemin  $\mathcal{W}_b$  entre  $b_0$  et  $b$ , incluant  $b$  et  $b_0$ . À l'instar de  $\mathcal{T}^*$ , nous définissons aussi  $\mathcal{W}_b^*$ .

$$\mathcal{W}_b = \bigcup_{m=0}^{G(b)} \{M^m(b)\} \quad (3.12)$$

$$\mathcal{W}_b^* = \mathcal{W}_b \setminus \{b_0\} \quad (3.13)$$

Enfin, nous associons à chaque branche  $b$ , les entiers positifs  $N_+$  et  $N_-$ . Ceux-ci sont les nombres de branches droites, et, respectivement, de branches gauches qui forment le chemin  $\mathcal{W}_b$ .

$$N_{\pm} : \begin{cases} \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N} \\ b \mapsto \text{Card}(\mathcal{W}_b \cap \mathcal{T}^{\pm}) \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow n = N_+(b) + N_-(b) \quad (3.15)$$

Le couple  $(N_+, N_-)$  ne permet pas d'identifier les branches de l'arbre. Plusieurs branches peuvent avoir le même couple  $(N_+, N_-)$ . Par exemple, nous pouvons voir sur le schémas 3.7 que les branches  $(2, 1)$  et  $(2, 2)$  ont toutes les deux  $N_+ = 1$  et  $N_- = 1$ . Le chemin menant à  $(2, 1)$  passe par une branche gauche  $(1, 0)$  puis par une branche droite  $(2, 1)$ . Quant au chemin menant à  $(2, 2)$ , il passe par une branche droite  $(1, 1)$  puis par une branche gauche  $(2, 2)$ . Pour généraliser à toutes les branches de  $\mathcal{T}$ , chaque chemin menant vers les branches de génération  $n$  qui possèdent le même couple  $(N_+, N_-)$  est une combinaison différente de  $N_+$  branches droites et  $N_-$  branches gauches. Ainsi, il existe autant de branches ayant ce couple  $(N_+, N_-)$  que de combinaisons différentes.

$$\text{Card} \left( \left\{ b \in \mathcal{T}_n \mid \begin{pmatrix} N_+(b) \\ N_-(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n - m \end{pmatrix}, \forall m \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\} \right) = \binom{n}{m} \quad (3.16)$$

### 3.B Paramètres et arbre taillé

Tout d'abord, nous définissons les méta-paramètres,  $H_t$ ,  $V_t$  et  $R_t$ . Ces méta-paramètres sont considérés invariants. La taille normalisée minimale  $H_t$  est le rapport entre la taille minimale des bronches que l'on souhaite modéliser et celle de la bronche modélisée par la branche d'origine  $b_0$ . Le volume normalisé des modèles d'acinus,  $V_t$ , et leur résistance normalisée,  $R_t$ , seront détaillés en 3.D.1.

$$H_t \in ]0, 1[, \quad V_t \in \mathbb{R}_+, \quad R_t \in \mathbb{R}_+ \quad (3.17)$$

Avec ces méta-paramètre, nous définissons  $\psi_{\mathcal{L}}$  l'ensemble de paramètres constitué du doublet  $(h_+, h_-)$ , ratios de réduction droit et gauche. Ce doublet de paramètres est appelé paramètres locaux  $\psi_{\mathcal{L}}$ . Le caractère local vient du fait que ces paramètres définissent les propriétés locales de toutes les bifurcations. Afin d'éviter les symétries, nous prenons, par convention,  $h_+ \geq h_-$ . Ainsi, nous les appellerons désormais respectivement les ratios droit et gauche, grand et petit ratios. De même pour les branches, les branches droites sont appelées grandes branches et les branches gauches sont appelées petites branches. De plus, pour assurer l'existence de l'arbre de notre modèle, nous imposons les conditions  $h_+ \geq H_t$  et  $h_- \geq H_t$ .

$$\Psi_{\mathcal{L}} = \{(h_+, h_-) \mid h_+ \in [H_t, 1[, h_- \in [H_t, h_+]\} \quad (3.18)$$

À chaque branche de  $\mathcal{T}$ , nous associons une taille  $H$ , qui dépend des paramètres  $\psi_{\mathcal{L}}$ .

$$H_{\psi_{\mathcal{L}}} : \begin{cases} \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ b_0 \mapsto 1 \\ b \in \mathcal{T}^+ \mapsto h_+ H_{\psi_{\mathcal{L}}}(\mathbb{M}(b)) \\ b \in \mathcal{T}^- \mapsto h_- H_{\psi_{\mathcal{L}}}(\mathbb{M}(b)) \end{cases}$$

Nous pouvons démontrer par récurrence qu'en utilisant (3.14), nous pouvons réécrire  $H_{\psi_{\mathcal{L}}}(b)$ .

$$H_{\psi_{\mathcal{L}}}(b) = h_+^{N_+(b)} h_-^{N_-(b)} \quad (3.19)$$

Enfin, nous voulons tailler l'arbre infini  $\mathcal{T}$  en retirant toutes les branches dont la taille  $H_{\psi_{\mathcal{L}}}$  est inférieure à la taille minimale  $H_t$ . Ainsi, à partir de  $H_{\psi_{\mathcal{L}}}$ , nous définissons un critère  $C$ . Ce critère détermine quelles branches de  $\mathcal{T}$  forment l'arbre taillé  $\mathcal{P}$ . Et avec  $\mathcal{P}$ , nous pouvons définir

ses branches terminales  $\mathcal{A}$ , encore appelées les feuilles de  $\mathcal{P}$ . À l'instar de  $\mathcal{T}^*$ ,  $\mathcal{T}^+$  et  $\mathcal{T}^-$  pour  $\mathcal{T}$ , nous définissons des ensembles similaires pour  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{A}$  :

$$C_{\psi_{\mathcal{L}}} : \begin{array}{l} \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ b \mapsto H_t / H_{\psi_{\mathcal{L}}}(b) \end{array} \quad (3.20)$$

$$\mathcal{P}_{\psi_{\mathcal{L}}} = \{b \in \mathcal{T} \mid C_{\psi_{\mathcal{L}}}(b) < 1\} \quad (3.21)$$

$$\mathcal{A}_{\psi_{\mathcal{L}}} = \{b \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{P}_{\psi_{\mathcal{L}}} \mid M(b) \in \mathcal{P}_{\psi_{\mathcal{L}}}\} \quad (3.22)$$

$$\begin{array}{lll} \mathcal{P}^* = \mathcal{P} \setminus b_0 & \mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cap \mathcal{T}^+ & \mathcal{P}^- = \mathcal{P} \cap \mathcal{T}^- \\ \mathcal{A}^+ = \mathcal{A} \cap \mathcal{T}^+ & \mathcal{A}^- = \mathcal{A} \cap \mathcal{T}^- & \end{array}$$

### 3.C Changement de topologie

#### 3.C.1 Nouvelle paramétrisation adaptée aux changements de topologie

Avec les équations (3.19), (3.20) et (3.21), on voit que la topologie de l'arbre taillé dépend des paramètres,  $h_+$ ,  $h_-$  et  $H_t$ .

$$b \in \mathcal{P}_{\psi_{\mathcal{L}}} \Leftrightarrow h_+^{N_+(b)} h_-^{N_-(b)} > H_t \quad (3.23)$$

Afin de mieux étudier ces changements de topologie d'arbre, nous cherchons, au préalable, à reformuler la paramétrisation du modèle pour avoir une paramétrisation plus adaptée.

$$\begin{aligned} b \in \mathcal{P}_{\psi_{\mathcal{L}}} &\Leftrightarrow h_+^{N_+(b)} h_-^{N_-(b)} > H_t \\ &\Leftrightarrow N_+(b) \ln(h_+) + N_-(b) \ln(h_-) > \ln(H_t) \\ &\Leftrightarrow N_+(b) \frac{\ln(h_+)}{\ln(H_t)} + N_-(b) \frac{\ln(h_-)}{\ln(H_t)} < 1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

En faisant le changement de paramètres  $g_+ = \frac{\ln(H_t)}{\ln(h_+)}$  et  $g_- = \frac{\ln(H_t)}{\ln(h_-)}$  dans la dernière ligne, nous obtenons une condition simple pour l'existence de la branche  $b$  dans l'arbre taillé  $\mathcal{P}$  :

$$b \in \mathcal{P}_{\psi_{\mathcal{L}}} \Leftrightarrow \frac{N_+(b)}{g_+} + \frac{N_-(b)}{g_-} < 1 \quad (3.25)$$

La raison du choix des facteurs  $g_+$  et  $g_-$  comme nouveaux paramètres vient des propriétés de deux branches terminales particulières,  $a_+$  et  $a_-$ . Les chemins respectifs menant vers  $a_+$  et  $a_-$  sont uniquement constitués de grandes branches et de petites branches.

$$a_+ \in \mathcal{A}_{\psi_{\mathcal{L}}} \mid N_-(a_+) = 0 \quad \text{et} \quad a_- \in \mathcal{A}_{\psi_{\mathcal{L}}} \mid N_+(a_-) = 0 \quad (3.26)$$

Les générations de  $a_+$  et de  $a_-$  sont les générations maximale et minimale des branches terminales. Nous les nommons respectivement  $G_+$  et  $G_-$ . En considérant les conditions d'existence de  $a_+$  et  $a_-$  dans  $\mathcal{A}$ , nous pouvons voir que  $G_+$  et  $G_-$  sont les plus petits entiers supérieurs respectivement aux facteurs  $g_+$  et  $g_-$ , respectivement notés  $[g_+]$  et  $[g_-]$ .

$$\begin{aligned} \frac{N_+(M(a_+))}{g_+} < 1 &\leq \frac{N_+(a_+)}{g_+} &\text{et}& \quad \frac{N_-(M(a_-))}{g_-} < 1 &\leq \frac{N_-(a_-)}{g_-} \\ \frac{G_+ - 1}{g_+} < 1 &\leq \frac{G_+}{g_+} &\text{et}& \quad \frac{G_- - 1}{g_-} < 1 &\leq \frac{G_-}{g_-} \\ G_+ - 1 < g_+ &\leq G_+ &\text{et}& \quad G_- - 1 < g_- &\leq G_- \\ G_+ = [g_+] &&& \text{et} && G_- = [g_-] \end{aligned}$$

Avec ce changement de paramètre, les changements de topologie d'arbre ne dépendent que des deux facteurs  $g_+$  et  $g_-$ . Nous considérons donc un nouveau doublet de paramètres,  $(g_+, g_-)$ ,

que l'on nommera paramètres globaux  $\psi_{\mathcal{G}}$ , car ils nous donnent un aperçu de la topologie de l'arbre. Nous définissons  $\Psi_{\mathcal{G}}$ , l'ensemble de ces doublets :

$$\Psi_{\mathcal{G}} = \{(g_+, g_-) \mid g_+ \in [1, \infty[, g_- \in [1, g_+]\} \quad (3.27)$$

De plus, nous pouvons définir d'application bijective qui relie les deux paramétrisations :

$$\mathcal{L}\mathcal{G} : \begin{array}{l} \psi_{\mathcal{L}} \rightarrow \psi_{\mathcal{G}} \\ (h_+, h_-) \mapsto \left( \frac{\ln(H_t)}{\ln(h_+)}, \frac{\ln(H_t)}{\ln(h_-)} \right) \end{array} \quad (3.28)$$

Dont l'application inverse est :

$$\mathcal{L}\mathcal{G}^{-1}(g_+, g_-) = \left( {}^g\sqrt{H_t}, {}^g\sqrt{H_t} \right) \quad (3.29)$$

Avec le point de vue apporté par cet ensemble de paramètres, nous associons à chaque branche de  $\mathcal{T}$  un réel positif  $P$ , appelé facteur de génération.

$$P_{\psi_{\mathcal{G}}} : \begin{array}{l} \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ b \mapsto \frac{N_+(b)}{g_+} + \frac{N_-(b)}{g_-} \end{array} \quad (3.30)$$

Nous pouvons définir à nouveau l'arbre taillé à partir des paramètres globaux  $\psi_{\mathcal{G}}$ , tels que la topologie de l'arbre  $\mathcal{P}$  et la taille  $H$  sont identiques à celles définies avec les paramètres locaux  $\psi_{\mathcal{L}}$ .

$$\mathcal{P}_{\psi_{\mathcal{G}}} = \{b \in \mathcal{T} \mid P_{\psi_{\mathcal{G}}}(b) < 1\} \quad (3.31)$$

$$\mathcal{A}_{\psi_{\mathcal{G}}} = \{b \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{P}_{\psi_{\mathcal{G}}} \mid M(b) \in \mathcal{P}_{\psi_{\mathcal{G}}}\} \quad (3.32)$$

$$H_{\psi_{\mathcal{G}}} : \begin{array}{l} \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^* \\ b \mapsto H_t^{P_{\psi_{\mathcal{G}}}(b)} \end{array} \quad (3.33)$$

$$\psi_{\mathcal{G}} = \mathcal{L}\mathcal{G}(\psi_{\mathcal{L}}) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{P}_{\psi_{\mathcal{G}}} = \mathcal{P}_{\psi_{\mathcal{L}}} \\ \mathcal{A}_{\psi_{\mathcal{G}}} = \mathcal{A}_{\psi_{\mathcal{L}}} \\ \forall b \in \mathcal{T}, H_{\psi_{\mathcal{G}}}(b) = H_{\psi_{\mathcal{L}}}(b) \end{cases} \quad (3.34)$$

Ainsi, pour simplifier l'écriture, nous utiliserons  $\psi$  pour désigner les paramètres. Les applications utilisées dépendent de la paramétrisation de  $\psi$ .

### 3.C.2 Les frontières entre topologie d'arbre

Nous venons de voir dans l'équation (3.25), que la topologie de l'arbre taillé change lorsque l'une des variables  $\frac{k}{g_+} + \frac{l}{g_-} - 1$ , avec  $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ , change de signe. Ainsi, l'ensemble de paramètres qui correspondent à la même topologie d'arbre est séparé du reste de l'ensemble par plusieurs frontières définies par des équations du type  $\frac{k}{g_+} + \frac{l}{g_-} = 1$ , avec  $k$  et  $l$  uniques pour chaque frontière. Nous pouvons facilement représenter l'ensemble de ces frontières sur une carte en fonction des deux facteurs  $g_+$  et  $g_-$ , voir figure 3.8A.

Nous pouvons distinguer deux types de changement de topologie de l'arbre taillé. Le premier type concerne les branches  $b$  telles que  $N_+(b) = 0$  ou  $N_-(b) = 0$ . Les frontières qui délimitent ces changements sont situées en  $g_+$  ou  $g_-$  entier. Nous les appelons les frontières *entières*. De part et d'autre de ces frontières, un des entiers  $G_+$  ou  $G_-$  a sa valeur augmentée de 1. Par exemple, entre la topologie d'arbre de la zone rouge et celle de la zone bleue de la figure 3.8,  $G_-$  a une valeur de 1 dans la zone rouge, et une valeur de 2 dans la zone bleue. Le second type concerne les autres cas,  $N_+(b)$  et  $N_-(b)$  non-nuls. Nous les appelons frontières *intermédiaires*. De part et d'autre de ces frontières, les entiers  $G_+$  et  $G_-$  restent inchangés. Par exemple, entre la topologie d'arbre de la zone bleue et celle de la zone verte de la figure 3.8,  $G_+ = 3$  et  $G_- = 2$  dans les

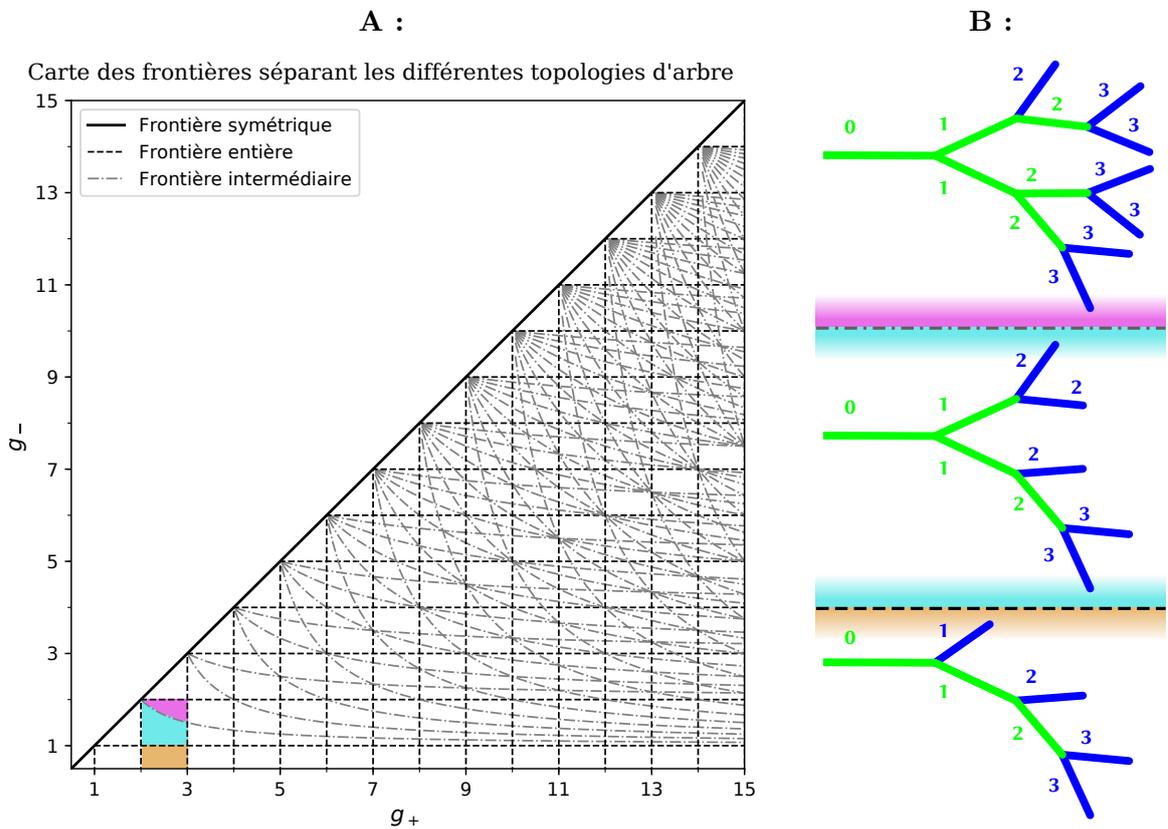


Fig. 3.8: **A :** Carte des frontières entre les différentes topologies de l'arbre taillé de 1 à 15 générations. Pour assurer l'existence de l'arbre de notre modèle, la valeur minimale des facteurs  $g_+$  et  $g_-$  est de 1. Toutefois, pour améliorer la visibilité des régions où  $g_- = 1$ , les bornes inférieures des axes sont inférieures à 1. La ligne pleine marque la frontière symétrique  $g_+ = g_-$ , la partie supérieure, non représentée ici, est symétrique à la partie inférieure. Les lignes en tiret marquent les frontières dites entières, les nombres entiers maximal  $G_+$  ou minimal  $G_-$  des générations des branches terminales changent de part et d'autre de cette limite. Les lignes grises en point-tiret marquent les frontières dites intermédiaires, elles séparent les différentes topologies d'arbres qui possèdent les mêmes  $G_+$  et  $G_-$ . Les trois zones colorées correspondent aux trois exemples présentés à droite. **B :** 3 exemples de topologies d'arbre  $(G_+, G_-)$  : en haut, correspondant à la zone mauve sur la carte, le plus grand des arbres (3,2); au milieu, correspondant à la zone cyan sur la carte, le plus petit des arbres (3,2); en bas, correspondant à la zone orange sur la carte, l'arbre (3,1). Les branches vertes sont des branches mères et les branches bleues sont des branches terminales. A côté de chaque branche est annotée la génération correspondante.

deux zones, bien que la topologie d'arbres de la zone verte a deux branches et deux branches terminales supplémentaires.

D'après (3.16), entre deux topologies d'arbres séparés par la frontière d'équation  $\frac{k}{g_+} + \frac{n-k}{g_-} = 1$ , de paramètres respectifs  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , il y a une différence de  $\binom{n}{k}$  branches. Dans le cas  $\mathcal{P}_{\psi_1} \subset \mathcal{P}_{\psi_2}$ , ces branches sont dans les branches terminales de  $\mathcal{P}_{\psi_1}$ , i.e  $\mathcal{A}_{\psi_1}$ , et dans les branches  $\mathcal{P}_{\psi_2}$ . De plus, leurs deux branches filles sont dans les branches terminales de  $\mathcal{P}_{\psi_2}$ , i.e  $\mathcal{A}_{\psi_2}$ . Ainsi, nous pouvons établir plusieurs relations :

$$\text{Card}(\mathcal{A}_{\psi_1} \cap \mathcal{P}_{\psi_2}) = \text{Card}(\mathcal{P}_{\psi_2} \setminus \mathcal{P}_{\psi_1}) = \binom{n}{k} \quad (3.35)$$

$$\text{Card}(\mathcal{A}_{\psi_2} \setminus \mathcal{A}_{\psi_1}) = 2 \binom{n}{k} \quad (3.36)$$

$$\text{Card}(\mathcal{P}_{\psi_2}) - \text{Card}(\mathcal{P}_{\psi_1}) = \text{Card}(\mathcal{A}_{\psi_2}) - \text{Card}(\mathcal{A}_{\psi_1}) = \binom{n}{k} \quad (3.37)$$

Nous pouvons généraliser la dernière équation à toutes les topologies d'arbre. Une différence du nombre de branches entre  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  est équivalent à la même différence entre  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$ . Ainsi, la différence entre le nombre de branches de l'arbre  $\mathcal{P}_\psi$  et le nombre de ses branches terminales  $\mathcal{A}_\psi$  est identique quelle que soit la topologie de l'arbre. Or, dans l'arbre le plus petit possible,  $\mathcal{P}_0 = \{b_0\}$ , il y a une branche et deux branches terminales,  $\mathcal{A}_0 = \{D_+(b_0), D_-(b_0)\}$ .

$$\text{Card}(\mathcal{A}_0) = \text{Card}(\mathcal{P}_0) + 1 = 2$$

Ainsi, quelle que soit la topologie de l'arbre taillé, nous avons la relation :

$$\text{Card}(\mathcal{A}_\psi) - \text{Card}(\mathcal{P}_\psi) = \text{Card}(\mathcal{A}_0) - \text{Card}(\mathcal{P}_0) = 1 \quad (3.38)$$

### 3.D L'arbre bronchique et ses propriétés

#### 3.D.1 Volume et résistance hydrodynamique

La dernière étape pour développer notre modèle d'arbre bronchique est de relier chaque branche  $b$  de l'arbre taillé  $\mathcal{P}$  à un modèle de branche 0D et chaque branche terminale à un modèle d'acinus 0D. À chaque branche  $b$  est associé un modèle de branche qui est une homothétie du modèle associé à la branche d'origine  $b_0$  avec  $H_\psi(b)$  comme ratio. Tous les modèles d'acinus sont identiques et ont les mêmes caractéristiques.

À partir de notre modèle d'arbre bronchique, nous étudierons le comportement de deux caractéristiques physiques de l'arbre. La première est le volume total  $V_{\text{tot}}$  de l'arbre. La seconde est l'énergie minimale absorbée lors du passage d'un flux d'air dans l'arbre avec un débit fixe dans  $b_0$ . Nous verrons que ce minimum est obtenu avec trois conditions :

- Une pression uniforme au bout de chaque branche terminale. Cette condition relie l'énergie minimale à la résistance hydrodynamique équivalente  $\tilde{R}$  de l'arbre.
- Les bronches modélisées sont dilatées au maximum. Elles adoptent une forme cylindrique.
- L'écoulement dans chaque bronche est un écoulement de Poiseuille. Ainsi, la résistance hydrodynamique de chaque modèle de bronche ne dépend que de leurs caractéristiques géométriques.

Pour chaque branche  $b$  de  $\mathcal{P}_\psi$ , le modèle de bronche est associé à un volume  $V_\psi(b)$  et à une résistance hydrodynamique  $R_\psi(b)$  qui dépendent du ratio  $H_\psi(b)$  :

$$V_\psi(b) = \pi L(b) A(b) \quad R_\psi(b) = 8\pi\mu \frac{L(b)}{A(b)^2} \quad (3.39)$$

$$= \pi L(b_0) A(b_0) H(b)^3 \quad 8\pi\mu \frac{L(b_0)}{A(b_0)^2} H(b)^{-3} \quad (3.40)$$

$$= V_\psi(b_0) H(b)^3 \quad R_\psi(b_0) H(b)^{-3} \quad (3.41)$$

Avec  $L(b)$  la longueur du modèle de bronche associé à  $b$ ,  $R(b)$  sa résistance hydrodynamique et  $\mu$  est la viscosité de l'air. Pour simplifier l'écriture, nous normalisons le volume et la résistance de chaque modèle de bronche à celui associé à la branche d'origine. À chaque branche terminale de  $\mathcal{P}_\psi$ , i.e chaque branche de  $\mathcal{A}_\psi$ , est associé un modèle d'acinus dont le volume est donné par le méta-paramètre  $V_t$  et la résistance hydrodynamique par le méta-paramètre  $R_t$

Ainsi, nous pouvons définir le volume normalisé  $V_\psi$  et la résistance normalisée  $R_\psi$  de chaque branche de  $\mathcal{P}_\psi$  et de chaque branche terminale :

$$V_\psi : \begin{cases} \mathcal{P}_\psi \cup \mathcal{A}_\psi \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ b \in \mathcal{P}_\psi \mapsto H_\psi(b)^3 \\ b \in \mathcal{A}_\psi \mapsto V_t \end{cases} \quad R_\psi : \begin{cases} \mathcal{P}_\psi \cup \mathcal{A}_\psi \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ b \in \mathcal{P}_\psi \mapsto H_\psi(b)^{-3} \\ b \in \mathcal{A}_\psi \mapsto R_t \end{cases} \quad (3.42)$$

Les volumes normalisés des modèles d'acinus  $V_t$  sont issus de la littérature, voir tableau 3.2, et dépendent de l'espèce et du volume de la bronche d'origine. Quand à l'acinus, il est un réseau arborescent de bronchioles respiratoires qui mènent à plusieurs conduits alvéolaires<sup>(5,42)</sup>. La structure des acini est très complexe, tant par leur topologie que par la présence d'alvéoles<sup>(5)</sup>. Sa complexité rend difficile l'évaluation de sa résistance hydrodynamique. Nous supposons qu'une valeur comprise entre la résistance hydrodynamique d'une bronche terminale, de taille  $H_t$  et celle d'un arbre dichotomique infini de bronches de même taille que les bronches terminales est une évaluation raisonnable de la résistance hydrodynamique des acini. Dans notre modèle, la résistance des bronches terminales normalisée par rapport à celle associée à  $b_0$  est égale à  $H_t^{-3}$ .

$$H_t^{-3} < R_t < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_t^{-3}}{n} \\ H_t^{-3} < R_t < 2 H_t^{-3}$$

Ainsi, le volume total de notre modèle d'arbre bronchique correspond à la somme de tous les volumes individuels associés à chaque branche de l'arbre taillé :

$$V_{\text{tot}}(\psi) = \sum_{b \in \mathcal{P}_\psi \cup \mathcal{A}_\psi} V_\psi(b) = \sum_{b \in \mathcal{P}_\psi} H_\psi(b)^3 + \text{Card}(\mathcal{A}_\psi) V_t \quad (3.43)$$

Grâce à l'hypothèse sur l'homogénéité des pressions à la sortie des branches terminales, la résistance équivalente  $\tilde{R}$  est calculée grâce aux règles d'additivité des résistances en série et en dérivation. Pour ce faire, nous associons à chaque branche  $b$  une résistance équivalente  $R_{\text{eq}\psi}(b)$  à la résistance du sous-arbre partant de cette branche :

$$R_{\text{eq}\psi} : \begin{cases} \mathcal{P}_\psi \cup \mathcal{A}_\psi \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ b \in \mathcal{P}_\psi \mapsto R(b) + \left( R_{\text{eq}\psi}(D_+(b))^{-1} + R_{\text{eq}\psi}(D_-(b))^{-1} \right)^{-1} \\ b \in \mathcal{A}_\psi \mapsto R(b) \end{cases} \quad (3.44)$$

$$\tilde{R}(\psi) = R_{\text{eq}\psi}(b_0) \quad (3.45)$$

### 3.D.2 Énergie minimale à débit fixe

Ici, nous prouverons que l'énergie minimale à débit fixé est atteinte lorsque les pressions au bout de chaque branche terminale sont identiques.

*Cas d'une bronche* Dans le cas d'une bronche de résistance hydrodynamique  $R$  traversée par un écoulement de débit  $\Phi$ , l'écoulement provoque une perte de pression  $q = R\Phi$ . L'énergie dissipée par cet écoulement est proportionnelle à  $q\Phi = R\Phi^2$ , elle est donc aussi proportionnelle à la résistance hydrodynamique de la bronche.

Les bronches du poumon sont compliantes, leur paroi est flexible et leur résistance hydrodynamique dépend de la pression transmurale, i.e la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la bronche. Toutefois, la configuration qui minimise la résistance est celle avec des bronches complètement dilatées. Elle sont alors similaires à des cylindres.

Enfin, l'écoulement qui minimise la dissipation d'énergie est l'écoulement de Poiseuille.

*Cas d'une bifurcation simple* Un système de deux branches de résistances de Poiseuille respectives  $R_1$  et  $R_2$  sont traversées par des écoulements de Poiseuille de débits respectifs  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ . Nous pouvons calculer l'énergie minimale dissipée par l'écoulement total de débit  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ . Nous cherchons les débits  $\Phi_1^*$  et  $\Phi_2^*$  qui minimisent l'énergie dissipée.

$$\begin{aligned}
E &\propto R_1\Phi_1^2 + R_2\Phi_2^2 \\
E &\propto (R_1 + R_2)\Phi_1^2 + R_2(2\Phi\Phi_1 + \Phi^2) \\
\frac{\partial E}{\partial \Phi_1} &\propto 2(R_1 + R_2)\Phi_1 - 2R_2\Phi \\
\Phi_1^* &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \Phi & \Phi_2^* &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \Phi \\
E_{min} &\propto \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Phi \Phi_1^* + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Phi \Phi_2^* \\
E_{min} &\propto R_{eq} \Phi^2 & \text{avec } R_{eq} &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = (R_1^{-1} + R_2^{-1})^{-1}
\end{aligned}$$

Lorsque l'énergie dissipée est minimale, les pertes de pression  $q_1 = R_1\Phi_1^*$  et  $q_2 = R_2\Phi_2^*$  sont identiques  $q_1 = q_2 = R_{eq}\Phi$ . Ainsi, calculer l'énergie minimale dissipée à débit total fixé revient à calculer la résistance hydrodynamique équivalente du système.

*Cas général (récurrence)* Soit un système de deux sous-arbres dont les écoulements respectifs minimisent les énergies dissipées. Nous avons pour chaque sous-arbre  $E_* \propto R_{eq,*}\Phi_*^2$ , avec  $*$  = 1 ou 2 selon le sous-arbre concerné. Avec un raisonnement similaire nous pouvons minimiser l'énergie totale dissipée  $E = E_1 + E_2$  en conservant le débit total  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ . Nous obtenons un résultat similaire avec des pertes de pression identiques  $q_1 = q_2 = R_{eq}\Phi$  et une résistance équivalente  $R_{eq} = (R_{eq,1}^{-1} + R_{eq,2}^{-1})^{-1}$ .

### 3.E Variation des propriétés physiques de l'arbre

#### 3.E.1 Évolution du volume $V_{tot}$ en fonction de $g_+$ et de $g_-$

À partir des équations (3.42), (3.33), (3.30) et de la relation (3.38), nous pouvons réécrire l'équation (3.43) :

$$V_{tot}(\psi) = V_t + \sum_{b \in \mathcal{P}_\psi} \left( H_t^{3\left(\frac{N_+(b)}{g_+} + \frac{N_-(b)}{g_-}\right)} + V_t \right)$$

En considérant la condition d'appartenance de  $b$  dans  $\mathcal{P}$  (équations (3.31) et (3.30)) et le nombre de branches ayant la même taille  $H_\psi$  (équation (3.16)) nous pouvons détailler la somme :

$$V_{tot}(\psi) = V_t + \sum_{k=0}^{\lfloor g_+ \rfloor} \sum_{n=k}^{\lfloor k+g_--\left(1-\frac{k}{g_+}\right) \rfloor} \binom{n}{k} \left( H_t^{3\left(\frac{k}{g_+} + \frac{n-k}{g_-}\right)} + V_t \right) \quad (3.46)$$

Ici,  $\lfloor g_+ \rfloor$  désigne la partie entière de  $g_+$ .

Cette écriture de  $V_{tot}$  rend explicite deux particularités. Premièrement, tous les termes de la somme sont supérieurs à  $H_t^3 + V_t$ . Ainsi, le volume total  $V_{tot}$  tend vers l'infini lorsque le nombre de branches tend aussi vers l'infini. Deuxièmement, à chaque changement de topologie de l'arbre, un terme supplémentaire est ajouté ou retranché à la somme. Entre deux arbres séparés par la frontière d'équation  $\frac{k}{g_+} + \frac{n-k}{g_-} = 1$ , il y a une différence de volume d'au moins  $\binom{n}{k} (H_t^3 + V_t)$ .

Il ne nous reste qu'à étudier la variation de  $V_{tot}$  en fonction de  $g_+$  et de  $g_-$  pour une topologie d'arbre. Ainsi, pour la suite, nous nous limitons au sous-domaine  $\Psi_\kappa = \{\psi \in \Psi \mid \mathcal{P}_\psi = \mathcal{P}_\kappa\}$  pour chaque topologie  $\mathcal{P}_\kappa$ .

En se rappelant que  $H_t$  est inférieur à 1, nous pouvons déduire que chaque terme de  $V_{\text{tot}}$  est croissant en fonction de  $g_+$  et de  $g_-$  :

$$\frac{d}{dg_+} \left( H_t^{3\left(\frac{k}{g_+} + \frac{n-k}{g_-}\right)} + V_t \right) = -3 \frac{k}{g_+^2} \ln(H_t) H_t^{3\left(\frac{k}{g_+} + \frac{n-k}{g_-}\right)} \geq 0 \quad (3.47)$$

$$\frac{d}{dg_-} \left( H_t^{3\left(\frac{k}{g_+} + \frac{n-k}{g_-}\right)} + V_t \right) = -3 \frac{n-k}{g_-^2} \ln(H_t) H_t^{3\left(\frac{k}{g_+} + \frac{n-k}{g_-}\right)} \geq 0 \quad (3.48)$$

La première équation est nulle pour les termes avec  $k = 0$ . Pour que  $\frac{\partial}{\partial g_+} V_{\text{tot}} = 0$ , il faut que l'arbre ne possède que la branche d'origine. Cette situation ne se produit que lorsque  $g_+ = 1$ . Ce raisonnement est aussi applicable à la seconde équation avec  $g_-$ . Ainsi, quel que soit le couple  $(g_+, g_-)$  dans le domaine  $\Psi_{\mathcal{G}}$ , le volume total  $V_{\text{tot}}$  croît strictement, autant avec le facteur  $g_+$  qu'avec  $g_-$ .

En conclusion, l'évolution du volume total de l'arbre modélisé sur l'espace de paramètres global  $\Psi_{\mathcal{G}}$  présente des discontinuités accompagnant chaque changement de topologie de l'arbre. Cependant, ces discontinuités sont dans le même sens que la variation du volume total dans les régions où il y a continuité, i.e les régions associées à la même topologie d'arbre. Ainsi, le volume total reste croissant en fonction de  $g_+$  et de  $g_-$ , quelles que soient leurs valeurs.

### 3.E.2 Évolution de la résistance $\tilde{R}$ en fonction de $g_+$ et de $g_-$

Nous rappelons les équations (3.45) et (3.44) définissant la résistance équivalente de la totalité de l'arbre et celle de chaque sous-arbre :

$$\mathbf{R}_{\text{eq}\psi} : \begin{cases} \mathcal{P}_\psi \cup \mathcal{A}_\psi \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ b \in \mathcal{P}_\psi \mapsto \mathbf{R}(b) + \left( \mathbf{R}_{\text{eq}\psi}(\mathbf{D}_+(b))^{-1} + \mathbf{R}_{\text{eq}\psi}(\mathbf{D}_-(b))^{-1} \right)^{-1} \\ b \in \mathcal{A}_\psi \mapsto \mathbf{R}(b) \end{cases} \quad (3.44)$$

$$\tilde{R}(\psi) = \mathbf{R}_{\text{eq}\psi}(b_0) \quad (3.45)$$

La conséquence des changements de topologie d'arbre n'étant pas explicite dans ces équations, nous étudierons d'abord l'évolution de la résistance équivalente  $\tilde{R}$  à topologie fixée.

#### Variation de $\tilde{R}$ en fonction de $g_+$ et de $g_-$ à topologie d'arbre fixée

Ici, comme précédemment avec le volume total  $V_{\text{tot}}$ , nous étudierons la variation de  $\tilde{R}$  à topologie d'arbre  $\mathcal{P}_\kappa$  fixée, c'est-à-dire au sous-domaine  $\Psi_\kappa = \{\psi \in \Psi \mid \mathcal{P}_\psi = \mathcal{P}_\kappa\}$ .

Nous reformulons la résistance  $\tilde{R}$  comme une fonction des résistances des branches. Ainsi, l'évolution de  $\tilde{R}$  en fonction de  $g_+$  et de  $g_-$  dépend de l'évolution de chaque résistance  $\mathbf{R}$  en fonction de  $g_+$  et de  $g_-$ .

$$d\tilde{R}(\psi) = \sum_{b \in \mathcal{P}_\kappa \cup \mathcal{A}_\kappa} \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{eq}\psi}(b_0)}{\partial \mathbf{R}_\psi(b)} d\mathbf{R}_\psi(b) \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{eq}\psi}(b_0)}{\partial \mathbf{R}_\psi(b)} &= \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{eq}\psi}(b)}{\partial \mathbf{R}_\psi(b)} \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{eq}\psi}(b_0)}{\partial \mathbf{R}_{\text{eq}\psi}(b)} \\ &= \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{eq}\psi}(b)}{\partial \mathbf{R}_\psi(b)} \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{eq}\psi}(b_0)}{\partial \mathbf{R}_{\text{eq}\psi}(M(b))} \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{eq}\psi}(M(b))}{\partial \mathbf{R}_{\text{eq}\psi}(b)} \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{eq}\psi}(b)}{\partial \mathbf{R}_\psi(b)} \prod_{\beta \in \mathcal{W}_b^*} \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{eq}\psi}(M(\beta))}{\partial \mathbf{R}_{\text{eq}\psi}(\beta)} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Or d'après (3.44), nous pouvons déduire que toutes les dérivées partielles  $\frac{\partial R_{\text{eq}\psi}(b_0)}{\partial R_\psi(b)}$  sont strictement positives :

$$\frac{\partial R_{\text{eq}\psi}(b)}{\partial R_\psi(b)} = 1 \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial R_{\text{eq}\psi}(M(b))}{\partial R_{\text{eq}\psi}(b)} = \frac{R_{\text{eq}\psi}(S(b))^2}{\left(R_{\text{eq}\psi}(b) + R_{\text{eq}\psi}(S(b))\right)^2} > 0 \quad (3.52)$$

En utilisant les définitions (3.42), (3.33), (3.30) et celle de la résistance des branches terminales, nous exprimons la variation  $dR_\psi(b)$  en fonction de la variation de  $g_+$  et de  $g_-$ . Dans le cas particulier de  $b_0$ , la résistance est constante,  $R_\psi(b_0) = 1$ .

$$\begin{aligned} R_\psi(b)|_{b \in \mathcal{P}_k} &= H_t^{-3 \left( \frac{N_+(b)}{g_+} + \frac{N_-(b)}{g_-} \right)} & R_\psi(b)|_{b \in \mathcal{A}_k} &= 1.5 H_t^{-3} \\ \frac{d}{dg_+} R_\psi(b)|_{b \in \mathcal{P}_k} &= 3 \frac{N_+(b)}{g_+^2} \ln(H_t) R_\psi(b) \leq 0 & \text{car } H_t < 1 & \\ \frac{d}{dg_-} R_\psi(b)|_{b \in \mathcal{P}_k} &= 3 \frac{N_-(b)}{g_-^2} \ln(H_t) R_\psi(b) \leq 0 & & \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ces dérivées sont nulles uniquement pour des branches particulières  $\mathcal{P}$ .

$$\frac{d}{dg_+} R_\psi(b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_+(b) = 0 \quad (3.54)$$

$$\frac{d}{dg_-} R_\psi(b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_-(b) = 0 \quad (3.55)$$

Avec la négativité des dérivées de  $R_\psi(b)$  en fonction des paramètres,  $g_+$  et  $g_-$ , et la positivité stricte des dérivées partielles  $\frac{\partial R_{\text{eq}\psi}(b_0)}{\partial R_\psi(b)}$ , nous en déduisons que les dérivées de  $\tilde{R}(\psi)$  en fonction des paramètres sont des sommes de termes négatifs.

$$\frac{d}{dg_+} \tilde{R}(\psi) = \sum_{b \in \mathcal{P}_k \cup \mathcal{A}_k} \frac{\partial R_{\text{eq}\psi}(b_0)}{\partial R_\psi(b)} \frac{d}{dg_+} R_\psi(b) \leq 0 \quad (3.56)$$

$$\frac{d}{dg_-} \tilde{R}(\psi) = \sum_{b \in \mathcal{P}_k \cup \mathcal{A}_k} \frac{\partial R_{\text{eq}\psi}(b_0)}{\partial R_\psi(b)} \frac{d}{dg_-} R_\psi(b) \leq 0 \quad (3.57)$$

$$(3.58)$$

Ici aussi, les dérivées de  $\tilde{R}$  sont nulles si et seulement si les conditions respectives (3.54), (3.55) sont respectées pour chacune de leurs branches. Seuls certains arbres répondent à ces critères, imposant des conditions fortes aux paramètres. Or, ces conditions sont respectées uniquement aux bords de l'espace des paramètres  $\Psi$  :

$$\frac{d}{dg_+} \tilde{R}(\psi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_+ = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_\kappa = \{b_0\} \quad (3.59)$$

$$\frac{d}{dg_-} \tilde{R}(\psi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_- = 1 \quad (3.60)$$

La dérivée de  $\tilde{R}$  étant strictement négative, le minimum de résistance hydrodynamique correspondant à une topologie  $\mathcal{P}_\kappa$  est situé à une frontière avec une topologie voisine plus grande, i.e  $\mathcal{P}_\lambda \supset \mathcal{P}_\kappa$ . De plus, sur une frontière entière, i.e avec  $g_+$  ou  $g_-$  constant, la résistance est décroissante respectivement en fonction de  $g_-$  ou en fonction de  $g_+$ . Nous en déduisons que le minimum n'est pas situé le long d'une frontière entière. En utilisant l'équation des frontières intermédiaires,  $\frac{k}{g_+} + \frac{n-k}{g_-} = 1$ , les équations (3.49) et (3.53), nous pouvons étudier la variation de

$\tilde{R}$  en fonction de  $g_+$  le long des frontières. Nous verrons que l'étude analytique de ces variations est limitée à de petits arbres et ne peut être généralisée.

$$\frac{k}{g_+} + \frac{n-k}{g_-} = 1 \quad \Rightarrow \quad dg_- = -\frac{g_-^2}{g_+^2} \frac{k}{n-k} dg_+ \quad (3.61)$$

$$\frac{d}{dg_+} \tilde{R}(\psi) \Big|_{\frac{k}{g_+} + \frac{n-k}{g_-} = 1} = \frac{d\tilde{R}(\psi)}{dg_+} - \frac{d\tilde{R}(\psi)}{dg_-} \frac{g_-^2}{g_+^2} \frac{k}{n-k} \quad (3.62)$$

$$= \sum_{b \in \mathcal{P}_k \cup \mathcal{A}_k} \frac{\partial \text{Req}_\psi(b_0)}{\partial R \psi(b)} \left( \frac{dR(b)}{dg_+} - \frac{dR(b)}{dg_-} \frac{g_-^2}{g_+^2} \frac{k}{n-k} \right) \quad (3.63)$$

Ne pouvant pas étudier cette somme dans le cas général, nous étudierons le signe de chaque terme indépendamment.

$$\begin{aligned} \frac{dR(b)}{dg_+} - \frac{dR(b)}{dg_-} \frac{g_-^2}{g_+^2} \frac{k}{n-k} > 0 &\Leftrightarrow 3 \ln(H_t) R_\psi(b) \left( \frac{N_+(b)^2}{g_+} - \frac{N_-(b)}{g_-^2} \frac{g_-^2}{g_+^2} \frac{k}{n-k} \right) > 0 \\ &\Leftrightarrow N_+(b) g_-^4 (n-k) > N_-(b) g_+^4 k \end{aligned}$$

Outre les arbres particuliers obtenus lorsque  $g_- = 1$ , tous les arbres possèdent des branches  $b$  telles que  $N_+(b)$  ou  $N_-(b)$  est égal à zéro. Ainsi, nous sommes certains du signe de certains termes de la somme :

$$\begin{aligned} N_-(b) = 0 &\quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \text{Req}_\psi(b_0)}{\partial R \psi(b)} \left( \frac{dR(b)}{dg_+} - \frac{dR(b)}{dg_-} \frac{g_-^2}{g_+^2} \frac{k}{n-k} \right) > 0 \\ N_+(b) = 0 &\quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \text{Req}_\psi(b_0)}{\partial R \psi(b)} \left( \frac{dR(b)}{dg_+} - \frac{dR(b)}{dg_-} \frac{g_-^2}{g_+^2} \frac{k}{n-k} \right) < 0 \end{aligned}$$

Étant donné que certains termes de la somme (3.63) ont des signes opposés, nous avons besoin d'approches numériques pour connaître les paramètres  $g_+$  et  $g_-$  qui minimisent la résistance hydrodynamique d'une topologie d'arbre  $\mathcal{P}_\kappa$  quelconque.

#### Variation de $\tilde{R}$ entre deux topologies d'arbre voisines en fonction de la frontière commune

Ici, nous étudierons la variation et les propriétés de  $\tilde{R}$  entre deux topologies d'arbre voisine en fonction de la frontière commune, s'il y a discontinuité.

Nous comparons deux topologie  $\mathcal{P}_\kappa$  et  $\mathcal{P}_\lambda$ , telles que  $\mathcal{P}_\kappa \subset \mathcal{P}_\lambda$ , qui sont voisines directes de part et d'autre de la frontière d'équation  $\frac{k}{g_+} + \frac{n-k}{g_-} = 1$ , avec  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$  et  $n \geq k$ . Nous regardons la variation de  $\tilde{R}$  autour de  $\psi = (g_+, g_-)$  situé à la frontière. Ainsi nous avons  $\mathcal{P}_\kappa = \mathcal{P}_\psi$  et  $\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{P}_{\psi'}$  avec  $\psi' = \psi + \epsilon \vec{n}$ , avec  $\vec{n}$  le vecteur normal à la frontière au point  $\psi$ . Et nous étudions la différence de résistance lorsque  $\epsilon$  tend vers 0.

$$R_\psi(b) \Big|_{b \in \mathcal{P}_\kappa} = H_t \frac{N_+(b)}{g_+} + \frac{N_-(b)}{g_-} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} R_{\psi'}(b) \Big|_{b \in \mathcal{P}_\lambda} = H_t \frac{N_+(b)}{g_+} + \frac{N_-(b)}{g_-} \quad (3.64)$$

$$R_\psi(b) \Big|_{b \in \mathcal{A}_\kappa} = R_t \quad R_{\psi'}(b) \Big|_{b \in \mathcal{A}_\lambda} = R_t \quad (3.65)$$

La différence de résistance est due aux branches concernées par le changement de topologie. Ainsi, nous pouvons réécrire les équations précédentes pour ces branches :

$$b \in \mathcal{P}_\kappa \cup (\mathcal{A}_\kappa \cap \mathcal{A}_\lambda) : \quad R_\psi(b) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} R_{\psi'}(b) \quad (3.66)$$

$$b \in \mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{A}_\kappa : \quad R_\psi(b) = R_t \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} R_{\psi'}(b) = H_t^{-3} \quad (3.67)$$

$$b \in \mathcal{A}_\lambda \setminus \mathcal{A}_\kappa : \quad R_{\psi'}(b) = R_t \quad (3.68)$$

Et nous pouvons comparer les résistances équivalentes  $R_{\text{eq}}$  des branches  $b \in \mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{A}_\kappa$ . Dans le cas du petit arbre  $\mathcal{P}_\psi$ , les sous-arbres partant de ces branches ne contiennent chacun qu'une branche terminale. Dans le cas du grand arbre  $\mathcal{P}_{\psi'}$ , ces sous-arbres contiennent chacun une branche de taille  $H_t$  et deux branches terminales :

$$R_{\text{eq}\psi}(b)|_{b \in \mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{A}_\kappa} = R_t \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} R_{\text{eq}\psi'}(b)|_{b \in \tilde{\mathcal{P}}_\lambda \cap \mathcal{A}_\kappa} = H_t^{-3} + \frac{R_t}{2} \quad (3.69)$$

Ainsi, d'après (3.52), une augmentation de la résistance équivalente  $R_{\text{eq}}$  d'une branche augmente celles des branches ascendantes, notamment celle de la branche d'origine  $\tilde{R}$  :

$$\tilde{R}(\psi) > \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{R}(\psi') \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{A}_\kappa \neq \emptyset \quad \text{et} \quad R_t > 2H_t^{-3}$$

Dans le cas  $R_t = 2H_t^{-3}$ , il n'y a pas de discontinuité entre les deux topologies  $\mathcal{P}_\kappa$  et  $\mathcal{P}_\lambda$ . Si  $R_t > 2H_t^{-3}$ , la discontinuité est dans le même sens que la variation  $d\tilde{R}$  dans chaque topologie et la résistance équivalente  $\tilde{R}$  est minimale pour  $\psi \rightarrow (\infty, \infty)$ . Or, pour notre modèle d'arbre bronchique, nous considérons l'encadrement  $H_t^{-3} < R_t < 2H_t^{-3}$ . Ainsi, les discontinuités aux frontières entre topologies d'arbre sont opposées à la variation  $d\tilde{R}$  à topologie fixée.

Nous désirons étudier les conditions où les discontinuités sont moins fortes que la variation  $d\tilde{R}$ , c'est à dire, lorsque la résistance minimale de  $\mathcal{P}_l$  est inférieure à celle de  $\mathcal{P}_k$  avec  $\mathcal{P}_k \subset \mathcal{P}_l$ . Bien que cela ne soit pas possible pour des arbres  $\mathcal{P}$  quelconques, car nous ne connaissons pas analytiquement leur résistance minimale, certaines topologies d'arbre simples permettent une analyse de la tendance des minima de  $\tilde{R}$ . Nous allons comparer cinq arbres entre eux : l'arbre minimal  $\mathcal{P}_{\psi_0} = \{b_0\}$ , l'arbre symétrique à deux générations  $\mathcal{P}_{\sigma_2} = \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1$ , l'arbre symétrique infini  $\mathcal{P}_{\sigma_\infty} = \mathcal{T}$ , la tige à deux générations  $\mathcal{P}_{\tau_2} = \{b_0, D_+(b_0)\}$  et la tige infinie  $\mathcal{P}_{\tau_\infty} = \{D_+^n(b_0) | n \in \mathbb{N}\}$ .

Les arbres symétriques et les tiges sont délimités uniquement par des frontières entières. Ainsi, les paramètres  $g_+$  et  $g_-$  qui minimisent leur résistance  $\tilde{R}$  sont entiers :  $\sigma_n = (n, n)$  pour les arbres symétriques et  $\tau_n = (n, 1)$  pour les tiges. Nous pouvons calculer la résistance  $\tilde{R}(\sigma_n)$  analytiquement et celle de  $R(\tau_n)$  par récurrence.

$$\tilde{R}(\sigma_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{H_t^{-3 \frac{i}{n}}}{2^i} + \frac{R_t}{2^n} = \frac{1 - 2^{-n} H_t^{-3}}{1 - 2^{-1} \sqrt[n]{H_t^{-3}}} + \frac{R_t}{2^n} \quad (3.70)$$

$$\tilde{R}(\tau_n) = R_{\text{eq}}(b_0) \quad \text{avec :} \quad \begin{aligned} R_{\text{eq}}(D_+^i(b_0)) &= H_t^{-3 \frac{i}{n}} + (R_t^{-1} + R_{\text{eq}}(D_+^{i+1}(b_0))^{-1})^{-1} \\ R_{\text{eq}}(D_+^n(b_0)) &= R_t \end{aligned} \quad (3.71)$$

Nous pouvons alors calculer les résistances des cas particuliers des arbres de paramètre  $\psi_0$ ,  $\sigma_2$  et  $\tau_2$  :

$$\tilde{R}(\psi_0) = 1 + \frac{R_t}{2} = 1 + (2R_t^{-1})^{-1} \quad (3.72)$$

$$\tilde{R}(\sigma_2) = 1 + \left[ 2 \left( \sqrt{H_t^{-3}} + \frac{R_t}{2} \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (3.73)$$

$$\tilde{R}(\tau_2) = 1 + \left[ R_t^{-1} + \left( \sqrt{H_t^{-3}} + \frac{R_t}{2} \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (3.74)$$

Nous pouvons aussi calculer leurs limites quand le nombre de générations tend vers l'infini. Dans ces cas limites, toutes les branches de  $\mathcal{P}$  ont une taille de 1. Ainsi, tout sous-arbre de  $\mathcal{P}$  a les mêmes propriétés : c'est un arbre symétrique ou une tige de longueur infinie dont toutes les branches ont une taille de 1. En utilisant ces propriétés, nous pouvons établir l'expression

analytique de leur résistance :

$$\tilde{R}(\sigma_\infty) = 1 + \frac{\tilde{R}(\sigma_\infty)}{2} = 2 \quad (3.75)$$

$$\tilde{R}(\tau_\infty) = 1 + \left[ R_t^{-1} + \tilde{R}(\tau_\infty)^{-1} \right]^{-1} = 1 + \frac{R_t \tilde{R}(\tau_\infty)}{R_t + \tilde{R}(\tau_\infty)} \quad (3.76)$$

$$= \frac{1 + \sqrt{1 + 4R_t}}{2} \quad (3.77)$$

L'équation (3.76) mène à un polynôme du second degré,  $0 = \tilde{R}(\tau_\infty)^2 - \tilde{R}(\tau_\infty) - R_t$ , qui n'admet qu'une solution positive (3.77).

Nous en déduisons que les inégalités  $\tilde{R}(\psi_0) > \tilde{R}(\sigma_2)$  et  $\tilde{R}(\psi_0) > \tilde{R}(\tau_2)$ , d'une part, et  $\tilde{R}(\psi_0) > \tilde{R}(\sigma_\infty)$  et à  $\tilde{R}(\psi_0) > \tilde{R}(\tau_\infty)$ , d'autre part, sont équivalentes.

$$\tilde{R}(\psi_0) > \tilde{R}(\sigma_2) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{R}(\psi_0) > \tilde{R}(\tau_2) \quad \Leftrightarrow \quad R_t > 2\sqrt{H_t^{-3}} \quad (3.78)$$

$$\tilde{R}(\psi_0) > \tilde{R}(\sigma_\infty) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{R}(\psi_0) > \tilde{R}(\tau_\infty) \quad \Leftrightarrow \quad R_t > 2 \quad (3.79)$$

Notons que la première condition,  $R_t > 2\sqrt{H_t^{-3}}$ , implique la seconde,  $R_t > 2$ , car  $H_t < 1$ .

Nous récapitulons. À topologie fixée de l'arbre taillé, sa résistance est strictement décroissante en fonction de  $g_+$  et en fonction de  $g_-$ . Toutefois, le sens de la discontinuité de la résistance entre deux topologies dépend de la valeur de la résistance des branches terminales  $R_t$ . Or, dans les cas étudiés, i.e  $H_t^{-3} < R_t < 2H_t^{-3}$ , il est opposé au comportement de la résistance pour ces deux topologies. Ainsi, le long de toutes droites d'équation  $g_- = ag_+ + b$  avec  $a > 0$ , la résistance hydrodynamique de l'arbre  $\tilde{R}$  sera décroissante par morceau en fonction de  $g_+$ . Nous pouvons en conclure que, dans les cas étudiés, il existe une infinité de minima locaux et que chaque topologie en a au moins un.

### 3.F Résistance d'un arbre taillé à volume contraint

#### 3.F.1 Définition

Nous avons vu que, lorsque  $R_t > 2H_t^{-3}$ , la résistance minimale de chaque topologie d'arbre a tendance à diminuer lorsque le nombre de branches augmente. Or si la nature sélectionne les arbres bronchiques de faible résistance, ce choix est contraint par la capacité volumique de la cage thoracique de l'individu. Ainsi, nous voulons étudier l'évolution de la résistance  $\tilde{R}$  en fonction de l'asymétrie de branchement  $a$  en contraignant le volume  $V_{\text{tot}}$ , voir section 3.6. En conséquence de la présence des discontinuités, nous ne pouvons pas utiliser une contrainte d'égalité. En effet, certains volumes ne sont pas atteignables par un paramètre  $\psi$ , par exemple un volume compris entre  $V_{\text{tot}}(\psi_0) = 1 + 2V_t$  et  $\liminf_{\psi \rightarrow \psi_0^+} V_{\text{tot}}(\psi) = 1 + H_t^3 + 3V_t$ . Une autre approche serait d'étudier la résistance minimale des arbres dont le volume  $V_{\text{tot}}$  est inférieur à un volume disponible  $V_{\text{Disp}}$ . Cela dit, les discontinuités de la résistance  $\tilde{R}$  rendent la recherche du minimum très difficile, même via des outils numériques. Nous rappelons que, sous l'hypothèse  $R_t < 2H_t^{-3}$ , les discontinuités sont opposées à la variation régulière de la résistance  $\tilde{R}$ . Nous décidons d'approcher ce minimum par la résistance de l'arbre le plus volumineux dont le volume  $V_{\text{tot}}$  reste inférieur au volume disponible  $V_{\text{Disp}}$ .

Ainsi, nous définissons un nouvel ensemble de paramètre  $\Psi_{\mathcal{AV}}$  qui contient le ratio d'asymétrie  $a$ , rapport entre le petit et le grand ratio de réduction,  $a = h_-/h_+$  et le volume disponible  $V_{\text{Disp}}$ .

$$\Psi_{\mathcal{AV}} = \left\{ \left( \begin{array}{c} a \\ V_{\text{Disp}} \end{array} \right) \middle| \begin{array}{l} a \in [H_t, 1] \\ V_{\text{Disp}} \in [1 + 2V_t, \infty[ \end{array} \right\} \quad (3.80)$$

À chaque élément de  $\Psi_{\mathcal{AV}}$ , nous associons le sous-ensemble  $\Psi_{\psi_{\mathcal{AV}}}$  de  $\Psi_{\mathcal{L}}$  dont le volume total  $V_{\text{tot}}$  est inférieur au volume disponible  $V_{\text{Disp}}$  et dont le rapport entre grand et petit ratio est égal au ratio d'asymétrie  $a$ . Plus particulièrement, nous associons à chaque élément de  $\Psi_{\mathcal{AV}}$

l'élément de  $\Psi_{\psi_{\mathcal{AV}}}$  qui maximise le volume total  $V_{\text{tot}}$ . Nous associons aussi l'arbre taillé  $\mathcal{P}_{\psi_{\mathcal{AV}}}$  et ses caractéristiques  $V_{\text{tot}}(\mathcal{AV})$  et  $\tilde{R}(\mathcal{AV})$ .

$$\Psi_{\psi_{\mathcal{AV}}} = \{\psi \in \Psi_{\mathcal{L}} \mid h_- = a \times h_+, V_{\text{tot}}(\psi) \leq V_{\text{Disp}}\} \quad (3.81)$$

$$F : \begin{cases} \Psi_{\mathcal{AV}} \mapsto \Psi_{\psi_{\mathcal{AV}}} \\ \psi_{\mathcal{AV}} \rightarrow \psi \mid V_{\text{tot}}(\psi) = \max_{\psi' \in \Psi_{\psi_{\mathcal{AV}}}} V_{\text{tot}}(\psi') \end{cases} \quad (3.82)$$

$$\mathcal{P}_{\psi_{\mathcal{AV}}} = \mathcal{P}_{F(\psi_{\mathcal{AV}})} \quad \mathcal{A}_{\psi_{\mathcal{AV}}} = \mathcal{A}_{F(\psi_{\mathcal{AV}})} \quad (3.83)$$

$$V_{\text{tot}}(\psi_{\mathcal{AV}}) = V_{\text{tot}}(F(\psi_{\mathcal{AV}})) \quad \tilde{R}(\psi_{\mathcal{AV}}) = \tilde{R}(F(\psi_{\mathcal{AV}})) \quad (3.84)$$

Il est important de noter que, contrairement à l'association entre les paramètres locaux et globaux,  $\psi_{\mathcal{L}}$  et  $\psi_{\mathcal{G}}$ , l'association des paramètres de l'ensemble  $\Psi_{\mathcal{AV}}$  à  $\Psi_{\mathcal{L}}$  n'est pas injective. Nous pouvons utiliser l'exemple précédent, si le volume disponible est compris entre  $1 + 2V_t$  et  $1 + H_t^3 + 3V_t$ , les petit et grand ratios associés seront tous les deux égaux à  $H_t$  car il n'existe que  $\mathcal{P}_{\psi_0} = \{b_0\}$  qui à un volume inférieur à  $1 + H_t^3 + 3V_t$ .

### 3.F.2 Recherche numérique du paramètre $F(\psi_{\mathcal{AV}})$

Au vu de l'expression analytique du volume, il est difficile de chercher analytiquement le volume maximal inférieur au volume disponible  $V_{\text{Disp}}$ . De plus, les nombreuses discontinuités ne permettent pas d'utiliser un algorithme de descente tel que l'algorithme de Newton ou tout autre algorithme à convergence rapide. Nous utilisons donc une recherche par dichotomie entre deux valeurs initiales préalablement calculées. On distingue deux types de convergence, l'algorithme converge vers la valeur de  $V_{\text{Disp}}$  ou converge vers une valeur de  $\psi_{\mathcal{L}}$ .

Pour la suite des explications, nous appelons  $\psi_i^+$  et  $\psi_i^-$  les bornes supérieure et inférieure de l'algorithme à  $i^{\text{e}}$  itération.

Le volume minimal des arbres symétriques à topologie fixée est facile à calculer. Par analogie à l'expression (3.70), nous connaissons le volume des arbres de  $n$  générations, de paramètre  $\sigma_{n-x}$  dont  $g_+ = g_- = n - x$ , avec  $x \in [0, 1[$  :

$$V_{\text{tot}}(\sigma_{n-x}) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i H_t^{3 \frac{i}{n-x}} + 2^n V_t \quad (3.85)$$

$$= \frac{1 - 2^n H_t^{3 \frac{n}{n-x}}}{1 - 2 H_t^{3 \frac{1}{n-x}}} + 2^n V_t \quad (3.86)$$

Le premier terme de (3.85) est la somme d'une suite géométrique de raison  $2H_t^{3 \frac{1}{n-x}}$ .

Les bornes supérieure et inférieure du volume des arbres symétriques de  $n$  générations sont, respectivement, la valeur de  $V_{\text{tot}}(\sigma_{n-x})$  lorsque  $x = 0$  et sa limite lorsque  $x$  tend vers 1, car le volume est strictement décroissant en fonction de  $x$ .

$$V_{\text{tot}}(\sigma_n) = \frac{1 - 2^n H_t^3}{1 - 2 H_t^{3 \frac{1}{n}}} + 2^n V_t \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} V_{\text{tot}}(\sigma_{n-x}) = \frac{1 - 2^n H_t^{3 \frac{n}{n-1}}}{1 - 2 H_t^{3 \frac{1}{n-1}}} + 2^n V_t \quad (3.87)$$

Ainsi, dans le cas symétrique, pour tout volume disponible  $V_{\text{Disp}}$ , nous cherchons facilement les bornes  $\psi_i^+$  et  $\psi_i^-$  en comparant les bornes supérieure et inférieure à  $V_{\text{Disp}}$  pour chaque génération  $n$ . Il y a deux cas possibles :

- S'il existe un  $n$  tel que  $V_{\text{tot}}(\sigma_n) \geq V_{\text{Disp}} > \lim_{x \rightarrow 1^-} V_{\text{tot}}(\sigma_{n-x})$ , l'équation  $V_{\text{tot}}(\sigma_g) = V_{\text{Disp}}$  a une solution :

$$\psi_0^- = \sigma_{n-1} \quad \psi_0^+ = \sigma_n$$

- Sinon il existe un  $n$  tel que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} V_{\text{tot}}(\sigma_{n-x}) \geq V_{\text{Disp}} > V_{\text{tot}}(\sigma_{n-1})$ . L'équation  $V_{\text{tot}}(\sigma) = V_{\text{Disp}}$  n'a pas de solution :

$$\psi_0^+ = \psi_0^- = \sigma_{n-1} = F(\psi_{\mathcal{AV}}) \quad (3.88)$$

Dans le cas général, nous pouvons connaître la variation des ratios  $h_+$  et  $h_-$  en fonction de la variation du ratio d'asymétrie  $a$  à volume disponible constant. La variation des ratios dépend de si  $V_{\text{tot}}(\sigma) = V_{\text{Disp}}$  a une solution ou non. Cependant, dans les deux cas, le sens des variations sont les mêmes. Lorsque le ratio d'asymétrie  $a$  diminue, le grand ratio  $h_+$  augmente et le petit ratio  $h_-$  diminue.

Lorsque la solution de  $V_{\text{tot}}(\sigma) = V_{\text{Disp}}$  existe, la variation des ratios en fonction de celle de l'asymétrie peut être déduite des expressions de la variation du volume  $V_{\text{tot}}$  (équations (3.46), (3.47) et (3.48)) et de la définition des facteurs  $g_+$  et  $g_-$ , donnés par (3.24) et (3.25) :

$$\begin{aligned} dV_{\text{tot}} &= \frac{\partial V_{\text{tot}}}{\partial g_+} dg_+ + \frac{\partial V_{\text{tot}}}{\partial g_-} dg_- \quad \text{avec :} \quad \frac{\partial V_{\text{tot}}}{\partial g_+} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial V_{\text{tot}}}{\partial g_-} > 0 \\ g_{\pm} &= \frac{\ln(H_t)}{\ln(h_{\pm})} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g_{\pm}}{\partial h_{\pm}} = -\frac{\ln(H_t)}{h_{\pm} \ln(h_{\pm})^2} > 0 \\ h_- &= a h_+ \quad \Rightarrow \quad dh_- = a dh_+ + h_+ da \\ dV_{\text{tot}} = 0 &\Leftrightarrow dg_+ = \frac{\partial g_+}{\partial g_-} dg_- \quad \text{avec :} \quad \frac{\partial g_+}{\partial g_-} < 0 \\ &\Leftrightarrow dh_+ = \frac{\partial h_+}{\partial h_-} dh_- \quad \text{avec :} \quad \frac{\partial h_+}{\partial h_-} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{dh_+}{da} = \frac{h_+ \frac{\partial h_+}{\partial h_-}}{1 - a \frac{\partial h_+}{\partial h_-}} < 0 \end{aligned}$$

Lorsque la solution n'existe pas, le paramètre  $F(\psi_{\mathcal{AV}})$  est à la frontière entre deux topologies d'arbre. Les ratios respectent l'équation de la frontière (3.23).

$$\begin{aligned} h_+^{n-k} h_-^k &= H_t & h_- &= a h_+ \\ \frac{dh_+}{da} &= -\frac{k h_+}{n a} < 0 & \frac{dh_-}{da} &= \frac{n h_-}{k a} > 0 \end{aligned} \quad (3.89)$$

Du fait que le grand et petit ratio évoluent de manière monotone en fonction du ratio d'asymétrie, nous pouvons déterminer des bornes supérieure et inférieure d'un petit ratio  $h_-$  quelconque, connaissant le petit ratio  $h'_-$  pour un ratio asymétrie  $a'$  plus grand :

$$\begin{aligned} a' > a &\Leftrightarrow h'_- > h_- \quad \text{et} \quad h'_+ < h_+ \\ &\Leftrightarrow h'_- > h_- = a h_+ > a h'_+ = \frac{a}{a'} h'_- \\ &\Leftrightarrow h'_- > h_- > \frac{a}{a'} h'_- \end{aligned} \quad (3.90)$$

En pratique, l'algorithme procède de cette manière :

- Étape initiale : Ratio d'asymétrie  $a_0 = 1$ 
  - Recherche des bornes inférieure et supérieure,  $\psi_0^-$  et  $\psi_0^+$ , grâce aux équations (3.87)
  - Si  $V_{\text{tot}}(\sigma_g) = V_{\text{Disp}}$  a une solution, recherche par dichotomie de  $F(\psi_{\mathcal{AV}0})$
- Pour chaque ratio d'asymétrie  $a_i < a_{i-1}$  :
  - Calcul des bornes inférieure et supérieure,  $\psi_i^-$  et  $\psi_i^+$ , grâce aux paramètres  $F(\psi_{\mathcal{AV}i-1})$  recherchés à l'itération précédente en utilisant l'inégalité (3.90)
  - Recherche par dichotomie de  $F(\psi_{\mathcal{AV}i})$

Comme pour toute recherche par dichotomie, à chaque itération, nous calculons le volume total du milieu des deux bornes  $\psi_i^+$  et  $\psi_i^-$ . Puis, nous remplaçons l'une des bornes selon si le volume total  $V_{\text{tot}}$  est supérieur ou inférieur au volume disponible  $V_{\text{Disp}}$ . Nos expériences nous ont montrés que prendre le milieu dans l'espace des paramètres globaux est plus efficace que dans celui des paramètres locaux.

A l'instar du cas symétrique, deux types de convergence sont possibles :

- 
- Convergence du volume  $0 < 1 - \frac{V_{\text{tot}}(\psi_i)}{V_{\text{Disp}}} < \epsilon_V$  : nous obtenons une solution approchée  $\psi_i \approx F(\psi_{\mathcal{AV}})$  telle que  $V_{\text{tot}}(\psi_i) \lesssim V_{\text{Disp}}$ .
  - Convergence du paramètre  $\|\psi_i^+ - \psi_i^-\| < \epsilon_\psi$  : aucune solution n'existe pour  $V_{\text{tot}}(F(\psi_{\mathcal{AV}})) = V_{\text{Disp}}$ . Nous pouvons déterminer avec  $\psi_i^+$  et  $\psi_i^-$  la frontière qui les sépare et calculer exactement  $F(\psi_{\mathcal{AV}})$  avec (3.89).



## 4. DISTRIBUTION DES FLUX D'AIR DANS UN ARBRE ASYMÉTRIQUE AUX BRONCHES COMPLIANTES

### 4.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre 2 que la compliance bronchique a un effet sur la répartition du cisaillement dans un arbre symétrique. L'étude de ses effets nous a permis d'en tirer des conclusions sur le comportement global du cisaillement dans l'arbre et ses causes. De plus, mes résultats éclairent sur la situation hydrodynamique à l'intérieur des bronches lors de certaines pratiques de kinésithérapie. Avec cette connaissance, nous en avons déduit des suggestions quant aux techniques de kinésithérapie employées lors d'encombrement bronchique par le mucus.

Toutefois, l'arbre bronchique réel est asymétrique. Cette asymétrie se manifeste autant au niveau des branchements, avec des bronches filles de différents diamètres à chaque bifurcation, qu'au niveau de sa topologie, avec des acini reliés à la trachée par un nombre différent de bifurcations. Ainsi, dans cette étude, nous étendons la réflexion de l'effet de la compliance sur la répartition du cisaillement aux arbres asymétriques.

Pour ce faire, nous définissons un nouvel index pour chaque branche, le coefficient de génération  $g$ , inspiré du facteur de génération de la partie précédente, qui ne dépend que de la position de celles-ci. Les branches ayant un coefficient proche auront des propriétés physiques similaires. L'utilisation de ce coefficient nous permet aussi de pouvoir comparer les résultats avec ceux du cas symétrique.

À l'instar du chapitre 2, nous définissons des critères sur les ratios de diamètre pour mieux comprendre l'évolution du cisaillement le long de l'arbre.

### 4.2 Hypothèses

Nous considérons que le réseau de bronches forme un arbre taillé tel que défini en 3.8. Chaque branche de l'arbre est ainsi associée à une bronche et chaque branche terminale à un acinus. Chaque branche est associée à un index, le coefficient de génération  $g$ , qui progresse linéairement dans l'arbre à partir de 0 pour la première branche jusqu'à atteindre 17 pour les branches terminales.

À l'instar du chapitre 2, nous considérons que les branches sont compliantes. Leurs parois sont souples et leurs sections internes  $A$  varient en fonction de la pression transmurale  $P$ , i.e. la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la branche. Pour relation entre la section et la pression transmurale, nous utilisons le modèle de Lambert et al.<sup>(24)</sup>, que nous avons adapté à la géométrie particulière de l'arbre. La relation qui relie la section des branches à la pression transmurale est conservée mais les paramètres de la relation dépendent du coefficient de génération  $g$  et non de la génération  $n$ . De manière similaire, la longueur des branches de l'arbre taillé est calculée en fonction du coefficient de génération  $g$  et des longueurs données par Lambert et al.<sup>(24)</sup>.

Nous considérons que le volume intérieur des branches reste cylindrique quelle que soit la pression transmurale. Ainsi, nous pouvons réduire les propriétés géométriques de chaque branche à sa longueur  $L$  et à sa section  $A$ .

Nous considérons que l'hydrodynamique est en régime stationnaire de Poiseuille. Cette hypothèse permet de résumer la physique des fluides dans chaque branche à un modèle 0D. Ce modèle relie le gain de pression  $q$ , ou la différence de pression entre les extrémités de la branche, au débit d'air circulant dans celle-ci  $\Phi$  et à sa résistance hydrodynamique  $R$ . Cette hypothèse permet aussi de relier cette résistance à la longueur et la lumière de la branche, et d'utiliser la

relation (2.24) du chapitre 2 qui relie le gain de pression, la longueur et la section des branches aux contraintes de cisaillement à ses parois  $\sigma$ .

Nous négligeons l'influence des bifurcations sur l'hydrodynamique. Ainsi, les pressions à l'entrée d'une branche  $b$  et aux sorties de ses branches filles  $D_{\pm}(b)$  sont considérées identiques.

Enfin, nous pensons que lors de l'expiration, la pression induite par la cage thoracique et les muscles expiratoires sur le poumon est répartie de manière homogène. Ainsi, nous considérons que la pression autour des branches  $P_{\text{tissus}}$  est la même partout et que celle au fond des branches terminales  $p_t$  est la même pour toutes les branches terminales.

### 4.3 Méthode

Cette section résume les sections de l'annexe 4.A et 4.B. Nous vous invitons à la consulter pour les détails du modèle et de la méthode numérique développée.

#### 4.3.1 Modèle

Le modèle dépend de quatre paramètres : les facteurs  $g_+$  et  $g_-$  qui définissent la topologie de l'arbre taillé, le débit à la trachée  $\Phi_0$  et la pression dans les tissus  $P_{\text{tissus}}$ . Le système d'équations défini par le modèle relie neuf variables par branche : Le coefficient de génération  $g$  qui représente la génération apparente de la branche, les branches de coefficient de génération identique auront les mêmes propriétés géométriques et la même compliance ; la longueur  $L$  ; la section  $A$  ; la résistance hydrodynamique  $R$  ; la résistance équivalente  $R_{\text{eq}}$  du sous-arbre partant de la branche ; le débit  $\Phi$  de l'écoulement d'air circulant dans la branche ; le gain de pression  $q$  entre les deux extrémités de la branche ; la pression transmurale  $P$  moyenne ; et le cisaillement à la paroi  $\sigma$ . A titre indicatif, un arbre défini par  $g_+ = 25$  et  $g_- = 12$ , valeurs des nombres minimum et maximum de générations des acini relevées dans le poumon humain par Raabe et al. (39), compte plus de 170 000 branches. Les variables associées à la même branche sont fortement inter-dépendantes entre elles. Certaines variables sont interdépendantes entre branches voisines, de branches mères à branches filles et entre branche sœurs. Un résumé des dépendances entre variables est schématisé dans le diagramme 4.1.

La complexité d'un tel système, autant par le nombre de variable que par la non-linéarité de certaines relations, nécessite l'utilisation et le développement d'outils numériques adaptés.

#### 4.3.2 Résolution numérique

Pour résoudre numériquement ce système, nous proposons un algorithme itératif similaire à la méthode de point fixe, pour ce qui est de la direction de descente, avec une optimisation linéaire sur la direction.

Nous avons défini un sous-paramètre  $\vec{\chi}$ , qui regroupe les ratios de répartition du débit entre les branches mères et leurs grandes branches filles. À partir de  $\vec{\chi}$ , notre algorithme utilise deux applications,  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$ , pour calculer des nouveaux ratios de débit  $\vec{\chi}'$ . À partir des débits donnés par le paramètre  $\Phi$  et le sous-paramètre  $\vec{\chi}$ , l'application  $\mathbf{A}_1$ , similaire à l'algorithme utilisé dans le chapitre 2, calcule l'état hydrodynamique de l'arbre, notamment la résistance  $R$  de chaque branche et la pression au fond des branches terminales  $p_t$ .  $\mathbf{A}_1$  ne tient pas compte de l'homogénéité de la pression au fond des branches terminales. Ensuite, l'application  $\mathbf{A}_2$  calcule, à partir des résistances calculées par  $\mathbf{A}_1$ , les ratios de débit  $\vec{\chi}'$  tel que la pression  $p_t$  est homogène. La différence terme à terme entre  $\vec{\chi}$  et  $\vec{\chi}'$  nous donne la direction de descente. L'algorithme s'arrête lorsque la pression au fond des branches terminales  $p_t$  calculée par  $\mathbf{A}_1$  est suffisamment homogène.

Les cisaillements  $\sigma$  n'influençant aucune variable, ils sont calculés une fois que l'on a déterminé une approximation de la solution satisfaisante.

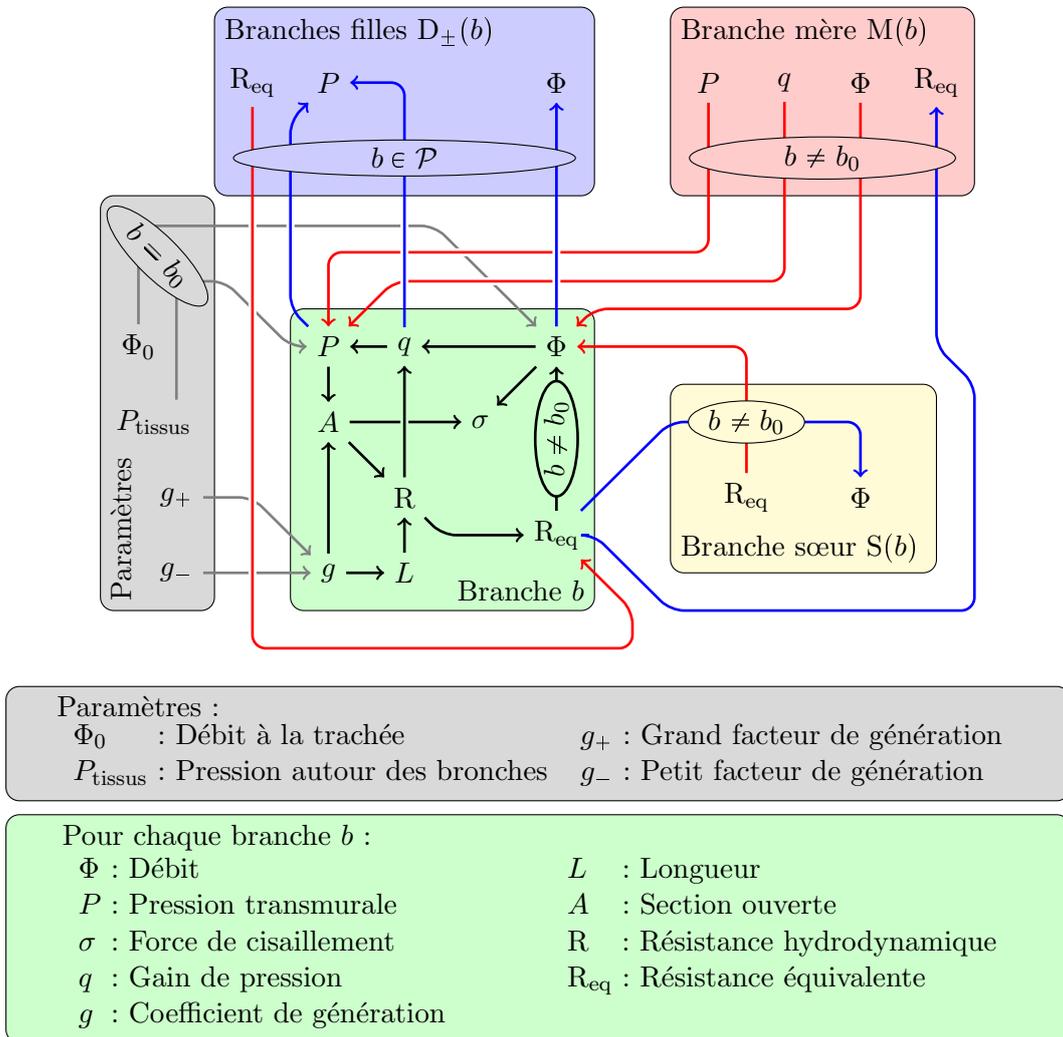


Fig. 4.1: Définitions des paramètres et des variables du modèle et diagramme des influences et dépendances des variables associées à la branche  $b$ . Les variables sont catégorisées : dans le rectangle gris sont rassemblés les paramètres du modèle ; dans le rectangle vert, les variables associées à la branche concernée  $b$  ; dans le rectangle rouge, les variables associées à la mère de la branche concernée  $M(b)$  ; dans le rectangle jaune, les variables associées à la sœur de la branche concernée  $S(b)$  ; et dans le rectangle bleu, les variables associées aux filles de la branche concernée  $D_{\pm}(b)$ . Pour les branches mère, sœur et filles, seules les variables influençant directement, ou étant directement influencées par, les variables de la branche  $b$  sont représentées. Les flèches montrent quelles variables influencent quelles autres. Par exemple :  $A \rightarrow B$ ,  $A$  influence  $B$  ou  $B$  dépend de  $A$ . Les flèches noires montrent les dépendances entre variables associées à  $b$ , les flèches grises montrent les dépendances aux paramètres, les flèches rouges montrent les dépendances aux variables non associées à  $b$ , les flèches bleues montrent l'influence des variables associées à  $b$  sur celles non associées à  $b$ . Les ellipses indiquent les conditions de l'influence, par exemple : le paramètre  $\Phi_0$  influence  $\Phi(b)$  seulement si  $b = b_0$ .

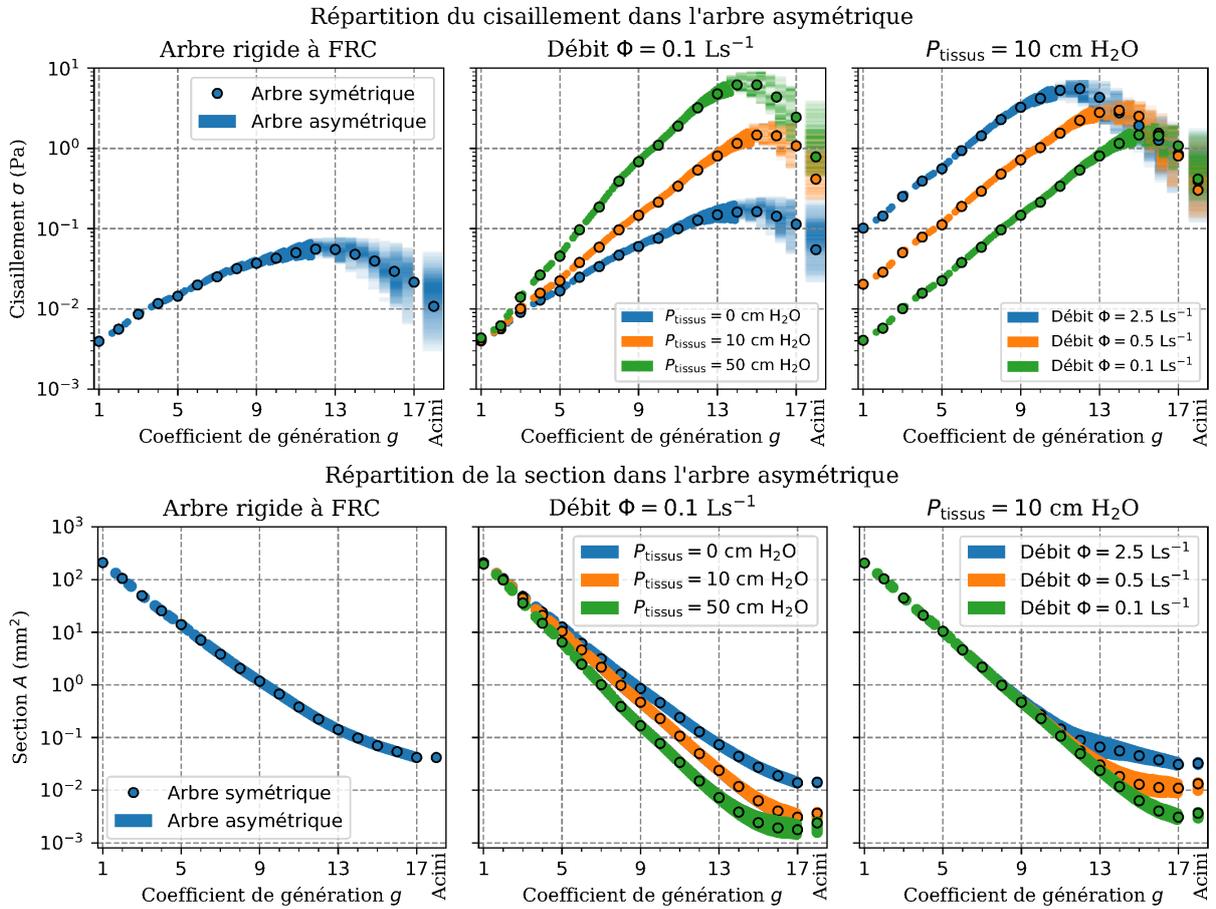


Fig. 4.2: Répartition du cisaillement  $\sigma$  (en haut) et de la section  $A$  (en bas) le long de l'arbre taillé. Les données des cas symétriques sont représentées en fonction de la génération  $n$  par les points bordés de noir. Les données des cas asymétriques sont représentées en fonction du coefficient de génération  $g$  par des points de couleur unie ou par un dégradé de la couleur. Au niveau des dégradés, l'intensité de la couleur est proportionnelle au nombre de branches avec la même valeur de cisaillement. La couleur des dégradés est normalisée indépendamment colonne par colonne. La colonne dédiée aux branches terminales, modélisant les acini, est mise à part car leurs propriétés physiques sont identiques entre elles et différentes des autres branches. Dans les graphiques de gauche  $\leftarrow$  sont affichées les données pour un arbre rigide dont la taille des branches est celle donnée par l'interpolation du modèle de Lambert à la FRC,  $-5 \text{ cmH}_2\text{O}$ , avec un débit de  $0.1 \text{ Ls}^{-1}$ . Dans les graphiques du milieu sont affichées les données pour des débits identiques,  $0.1 \text{ Ls}^{-1}$  et pressions externes différentes,  $0, 10$  et  $50 \text{ cmH}_2\text{O}$ . Dans les graphiques de droite  $\rightarrow$  sont affichées les données pour des pressions externes identiques,  $10 \text{ cmH}_2\text{O}$  et débits différents,  $0.1, 0.5$  et  $2.5 \text{ Ls}^{-1}$ . Nous pouvons voir que, quels que soit le débit  $\Phi$  ou la pression  $P_{\text{tissus}}$ , la répartition du cisaillement dans l'arbre taillé est exponentielle en fonction du coefficient de génération  $g$ , comme dans le cas de l'arbre symétrique, jusqu'à un maximum où la répartition commence à s'étaler. C'est à dire que la distribution du cisaillement dans les branches au coefficient de génération  $g$  identique. La répartition de la section des branches suit celle du cas de l'arbre symétrique sans trop s'étaler.

#### 4.4 Distribution du cisaillement dans l'arbre taillé défini par $g_+ = 25$ et $g_- = 12$

En observant la répartition du cisaillement dans l'arbre asymétrique en fonction du coefficient de génération  $g$ , dans les graphiques du haut de la figure 4.2, nous remarquons qu'elle est comparable à celle de l'arbre symétrique en fonction de la génération  $n$ . Son comportement est similaire à celui de l'arbre symétrique, avec une croissance exponentielle jusqu'à atteindre un maximum, puis une décroissance exponentielle. En plus du comportement, l'amplitude du cisaillement du cas asymétrique reste très proche de celle du cas symétrique dans l'arbre proximal. Ainsi, les causes de l'évolution du cisaillement le long des bifurcations semblent similaires au cas symétrique.

Toutefois, le cas asymétrique présente un étalement de la répartition du cisaillement dans les régions distales de l'arbre. C'est à dire que les branches qui ont des propriétés physiques (taille et compliance) similaires subissent des forces de cisaillement de différentes intensités. Cet étalement croît faiblement dans la région proximale de l'arbre jusqu'aux environs du maximum de cisaillement. Dans les régions distales au maximum de cisaillement, la croissance de l'étalement accélère grandement.

Le cisaillement  $\sigma$  est relié à deux quantités, le débit  $\Phi$  et la section  $A$ . Ainsi, l'étalement de la répartition du cisaillement est causé au minimum par l'étalement de l'une de ces quantités. Or, la section  $A$  ne peut subir un fort étalement, surtout aux extrémités, comme montré par les graphiques du bas de la figure 4.2. Celle-ci dépend de la pression transmurale qui dépend de la pression interne. Par définition, la pression interne de la branche d'origine est unique et, par hypothèse, elle est homogène au fond des branches terminales. Celle-ci étant conditionnée à chaque extrémité de l'arbre, elle ne peut pas beaucoup varier entre branches de propriétés physiques similaires.

Au vu des graphiques du haut de la figure 4.3, la répartition du débit expiratoire  $\Phi$  semble suivre celle du débit du cas symétrique sans trop de dispersion. Nous savons que le débit du cas symétrique est divisé par deux à chaque génération (voir chapitre 2). Or dans le cas symétrique, la génération est identique au coefficient de génération. Ainsi, nous en déduisons la relation entre le débit et le coefficient de génération :  $\Phi = 2^{-g}\Phi_0$ . Pour mieux comparer les répartitions du débit du cas asymétrique à celle du débit du cas symétrique, nous normalisons le débit  $\Phi$  par  $\Phi = 2^{-g}\Phi_0$ .

Les graphiques en bas de la figure 4.3 montrent la répartition de ce débit normalisé. Nous pouvons voir que l'étalement, bien que faible dans la région proximale, s'évase grandement dans les régions distales. Le fait que le rapport a tendance à augmenter avec le coefficient de génération  $g$  vient du fait que l'arbre asymétrique a légèrement moins de branches que l'arbre symétrique. Ainsi la moyenne des débits passants par des branches de coefficients de génération proches est plus élevée dans l'arbre asymétrique que dans l'arbre symétrique.

### 4.5 Discussion

#### 4.5.1 Le poids de la résistance des branches dans la résistance équivalente de leur sous arbre est-il une des causes de l'étalement ?

##### *Étude d'un modèle simplifié*

Nous émettons l'hypothèse que le fait que le débit reste proche de  $2^{-g}\Phi_0$  dans la région proximale est dû à la faible valeur de la résistance de chaque branche devant la résistance équivalente du sous-arbre partant de la branche respective  $R(b) \ll R_{eq}(b)$ . Pour vérifier cette hypothèse, nous proposons un modèle simplifié qui sépare l'arbre en une région proximale et une région distale et qui considère que l'étalement de la répartition des sections  $A$  est négligeable. Ce modèle est détaillé en annexe 4.C page 104.

L'étude du modèle simplifié montre que la condition  $R(b) \ll R_{eq}(b)$  est équivalente à  $h_- \ll \sqrt[3]{1 - h_+}$ . Ainsi, nous discriminons les branches de l'arbre en fonction de leurs ratios de diamètres  $h_+$  et  $h_-$  calculés précédemment. Pour chaque branche  $b$ , si ses ratios de diamètre remplissent la

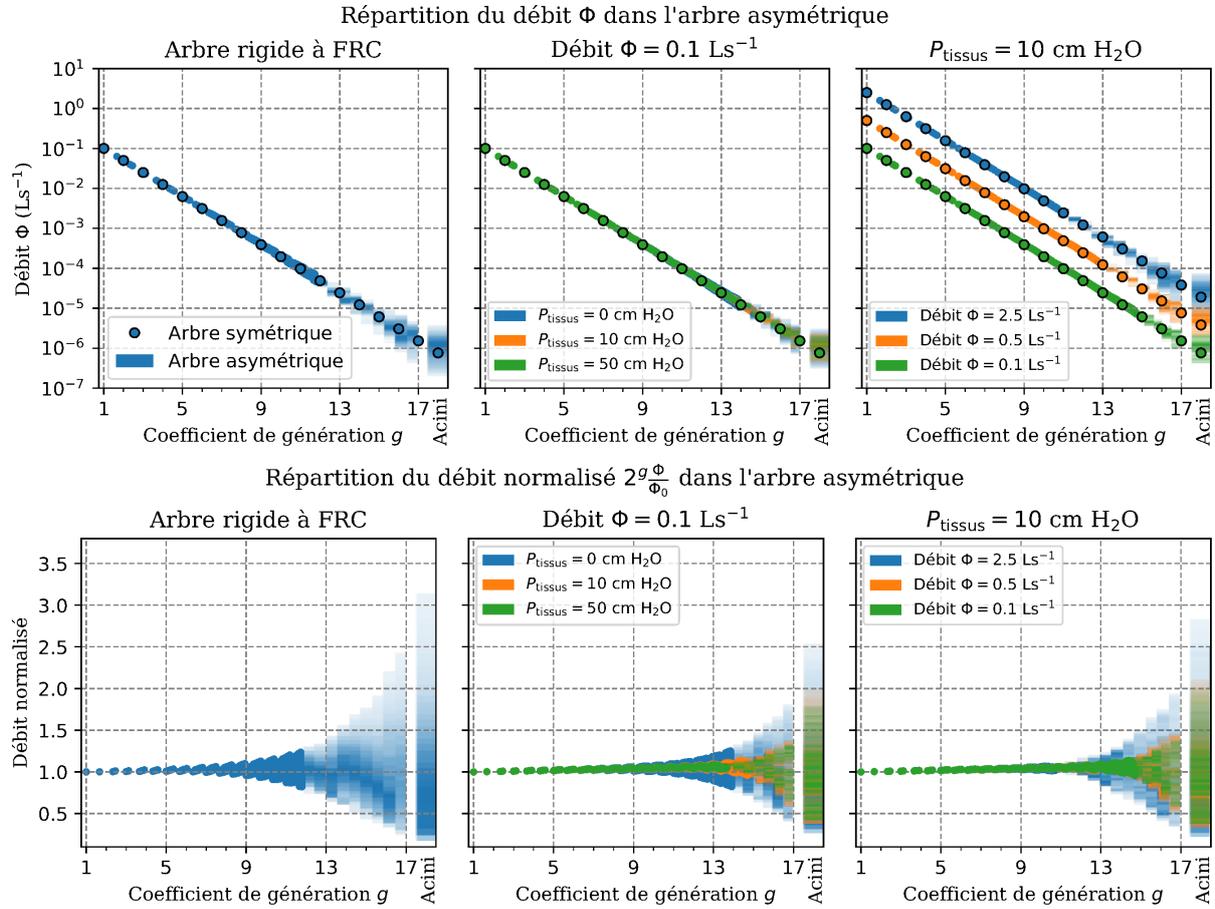


Fig. 4.3: Répartition du débit  $\Phi$  (en haut) et du débit normalisé  $2^g \frac{\Phi}{\Phi_0}$  (en bas) le long de l'arbre. Les débits des cas symétriques sont représentés en fonction de la génération  $n$  par les points bordés de noir. Les débits normalisés des cas symétriques ne sont pas représentés car ils sont tous égaux à 1. Les données des cas asymétriques sont représentées en fonction du coefficient de génération  $g$  par des points de couleur unie ou par un dégradé de la couleur. Au niveau des dégradés, l'intensité de la couleur est proportionnelle au nombre de branche avec la même valeur de débit. La couleur des dégradés est normalisée indépendamment colonne par colonne. La colonne dédiée aux branches terminales, modélisant les acini, est mise à part car leurs propriétés physiques sont identiques entre elles et différentes des autres branches. Dans les graphiques de gauche ← sont affichées les données pour un arbre rigide dont la taille des branches est celle donnée par l'interpolation du modèle de Lambert à la FRC,  $-5 \text{ cmH}_2\text{O}$ , avec un débit de  $0.1 \text{ Ls}^{-1}$ . Dans les graphiques du milieu sont affichées les données pour des débits identiques,  $0.1 \text{ Ls}^{-1}$  et pressions externes différentes, 0, 10 et  $50 \text{ cmH}_2\text{O}$ . Dans les graphiques de droite → sont affichées les données pour des pressions externes identiques,  $10 \text{ cmH}_2\text{O}$  et débits différents,  $0.1, 0.5$  et  $2.5 \text{ Ls}^{-1}$ . Dans les graphiques du haut, nous pouvons voir que la répartition des débits des cas asymétriques semble suivre celle des débits des cas symétriques respectifs. Dans le cas symétrique, le débit est relié au coefficient de génération  $g$  par  $\Phi = 2^{-g}\Phi_0$ . Ainsi pour mieux comparer le cas asymétrique au cas symétrique, nous affichons, dans les graphiques du bas, le débit normalisé par rapport à  $2^{-g}\Phi_0$ .

condition  $h_-(b) < \sqrt[3]{1 - h_+(b)}$  alors elle est considérée comme appartenant à la région proximale. Sinon, elle est considérée comme appartenant à la région distale.

Dans la région proximale, à partir de l'hypothèse sur le débit,  $\Phi = 2^{-g}\Phi_0$ , nous avons déterminé un critère sur chaque ratio de diamètre,  $h_{+,\text{crit}} = 2^{\frac{16}{g_+}}$  et  $h_{-,\text{crit}} = 2^{\frac{16}{g_-}}$ , qui détermine l'évolution du cisaillement dans la bifurcation de chaque branche  $b$ . Le cisaillement de la grande branche fille  $\sigma(D_+(b))$  est supérieur à celui de branche mère  $\sigma(b)$  si et seulement si  $h_+(b) < h_{+,\text{crit}}$ . L'équivalence est similaire avec la petite branche fille  $D_-(b)$  et le petit ratio de réduction  $h_-(b)$ .

Dans la région distale, à partir de l'hypothèse  $R_{\text{eq}} = R$ , nous en déduisons qu'à chaque bifurcation le cisaillement dans les branches filles est identique et inférieur à celui de la branche mère,  $\sigma(b) > \sigma(D_+(b)) = \sigma(D_-)$ .

#### *Transposition du modèle aux résultats précédemment calculés*

Ainsi, dans le cas de l'arbre taillé défini par  $g_+ = 25$  et  $g_- = 12$ , le modèle simplifié met en avant quatre zones où, selon les ratios  $h_+$  et  $h_-$  de la bifurcation, le cisaillement des branches filles ont des comportements différents.

- Dans la première zone, les deux ratios de diamètre  $h_+$  et  $h_-$  sont inférieurs à leur critère respectif  $h_{+,\text{crit}}$  et  $h_{-,\text{crit}}$ . Les cisaillements des branches filles sont supérieurs à celui de la branche mère. Les premières bifurcations de l'arbre sont dans cette configuration.
- Dans la seconde zone de la région proximale, le petit ratio de diamètre  $h_-$  est supérieur au critère  $h_{-,\text{crit}}$ . Le cisaillement de la grande branche fille est plus important que celui de la branche mère tandis que celui de la petite branche fille est inférieur. Cette configuration est atteinte lorsque le débit à la trachée  $\Phi_0$  et la pression des tissus  $P_{\text{tissus}}$  sont faibles. Dans cette configuration, la variation du cisaillement  $\sigma$  par rapport à celle du coefficient de génération  $g$  entre la branche mère et la petite branche fille est plus faible que celle entre la branche mère et la grande branche fille. Toutefois, la variation du cisaillement a tendance à diminuer avec le coefficient de génération  $g$ . Ainsi, la répartition du cisaillement est le bilan de ces deux conditions et peut éventuellement conduire à un étalement.
- Dans la troisième zone de la région proximale, le grand ratio de diamètre  $h_+$  est supérieur au critère  $h_{+,\text{crit}}$ . Contrairement à la deuxième zone, c'est le cisaillement de la petite branche fille qui est supérieur à celui de la branche mère et celui de la grande branche fille qui est inférieur. Dans cette configuration, la variation du cisaillement  $\sigma$  par rapport à celle du coefficient de génération  $g$  entre la branche mère et la petite branche fille est plus élevée que celle entre la branche mère et la grande branche fille. Or, la variation du cisaillement a tendance à diminuer avec le coefficient de génération  $g$ . Ainsi, sous les hypothèses du modèle dans la région proximale, il est certain que la répartition du cisaillement s'étale.
- La quatrième zone est celle de la région distale. Dans cette région, le cisaillement diminue à chaque bifurcation de manière égale pour les deux branches filles. Comme dans la troisième zone, la variation de cisaillement  $\sigma$  par rapport à celle du coefficient de génération  $g$  entre la branche mère et la petite branche fille est plus élevée que celle entre la branche mère et la grande branche fille. Et donc, pour les mêmes raisons, il est certain que la répartition du cisaillement s'étale.

Si nous reportons ces zones sur les données précédemment calculées, comme affichées dans le graphique en haut à gauche des figures 4.4, 4.5 et 4.6, nous pouvons nous rendre compte que le modèle simplifié décrit suffisamment bien le comportement de l'hydrodynamique dans l'arbre pour la région proximale. La répartition du cisaillement reste croissante lorsque la configuration des ratios est dans la première zone et les premières décroissances apparaissent lorsque la configuration rentre dans la troisième zone.

De plus, les régions proximale et distale semblent bien correspondre respectivement à la partie de l'arbre où le débit reste concentré autour de  $2^{-g}\Phi_0$  et à celle où son étalement croît fortement. La limite entre les deux régions semble être beaucoup plus visible dans le cas où le débit à la trachée est important ou dans le cas la pression des tissus est importante. Ceci semble

confirmer le lien entre l'étalement des débits et des cisaillements avec le poids de la résistance des branches dans les résistances équivalentes de leurs sous-arbres.

L'évolution en fonction du coefficient de génération des ratio  $h_{\pm}$  dans la région à faible étalement suit les mêmes comportements que celle du ratio  $h$  du cas symétrique, évolution quasi-constante au début, puis augmentation presque linéaire, voir le graphique en haut à droite des figures 4.4, 4.5 et 4.6. Ces comportements ont probablement la même origine que dans le cas symétrique : dans la première région, le gain de pression transmurale est trop faible par rapport à la sensibilité de la compliance, la section des branches est approximativement égale à celle qu'elles auraient si leur pression interne était nulle ; dans la région transitoire, le gain de pression transmurale devient significatif et / ou la sensibilité de la compliance des branches augmente suffisamment.

Toutefois, le modèle simplifié pour la région distale n'est pas suffisant pour représenter les résultats des calculs du cas général. La répartition du cisaillement n'est ni symétrique ni décroissante dans l'ensemble de la zone. L'hypothèse du modèle,  $R_{eq}(b) \approx R(b)$ , reste trop forte et cache des éléments qui jouent un rôle important.

#### 4.5.2 Hypothèses sur l'influence de l'inertie et de la présence d'obstruction partielle

Dans le cas symétrique, nous avons vu que, lorsque les effets d'inertie sont importants, la région transitoire, où le ratio  $h$  augmente, est avancée vers les premières générations. Il est hautement probable que ce phénomène soit identique dans le cas asymétrique. Ainsi, nous émettons l'hypothèse qu'à haut débit expiratoire, les ratios  $h_{\pm}$  augmentent à partir d'un coefficient de génération  $g$  moins élevé. En conséquence, la limite  $h_{-,lim} = \sqrt[3]{1 - h_{+,lim}^3}$  sera atteinte plus tôt et le début de l'étalement du cisaillement en sera décalé vers les premières générations. De plus, les limites de la première zone,  $h_{\pm,crit} = 2^{\frac{16}{g\pm}}$ , sont les critères asymétriques correspondant au critère  $h_{\mu}$  du cas symétrique. Lorsque les effets de l'inertie sont importants, dans le cas symétrique, le critère  $h_{\rho}$  devient significatif dans l'évolution du cisaillement. Dans le cas asymétrique, nous émettons l'hypothèse que les critères asymétriques correspondant à  $h_{\rho}$  deviennent autant significatifs dans la répartition du cisaillement et, probablement, dans le début de son étalement. Une prochaine étude nous éclairera sur la portée de cette influence.

Enfin, bien que le modèle ne permette pas d'obstruer complètement une branche et que le débit à la trachée soit imposé, nous pouvons prédire qu'une obstruction partielle de quelques branches isolées aura un impact plus important sur la répartition du cisaillement dans leurs sous-arbres que dans le cas symétrique. L'augmentation de la résistance des branches concernées les ferait quitter le régime avec faible étalement. Le débit d'air s'écoulant à travers celles-ci diminuerait grandement, n'étant plus imposé comme lors du cas symétrique. Ceci causerait une grande baisse du cisaillement dans leurs sous-arbres. Ainsi, les obstructions partielles situées dans ces sous-arbres seraient d'autant plus "invisibles" pour les kinésithérapeutes.

## 4.6 Conclusion

Pour cette étude, nous avons mis en place une méthode numérique adaptée au très grand nombre de variables considérées dans le modèle. Cette méthode à l'avantage d'être peu gourmande en calcul numérique.

Les résultats du modèle asymétrique peuvent être comparés à ceux du modèle symétrique si nous les affichons en fonction du coefficient de génération au lieu de la génération. Cette manière d'indexer regroupe les branches aux propriétés physiques similaires. De cette façon, nous retrouvons une répartition en forme de cloche dont la position dépend essentiellement du débit à la trachée et dont la valeur du maximum dépend aussi de la pression dans les tissus. Au-delà de la tendance, les valeurs du cisaillement dans l'arbre asymétrique proximal ont le même comportement que celles de l'arbre symétrique.

De plus, l'asymétrie du modèle apporte une nouveauté dans le comportement du cisaillement. Sa répartition dans l'arbre a tendance à s'étaler. Visualiser cette répartition en fonction du coefficient de génération met en avant deux situations. Dans l'arbre proximal, l'étalement semble

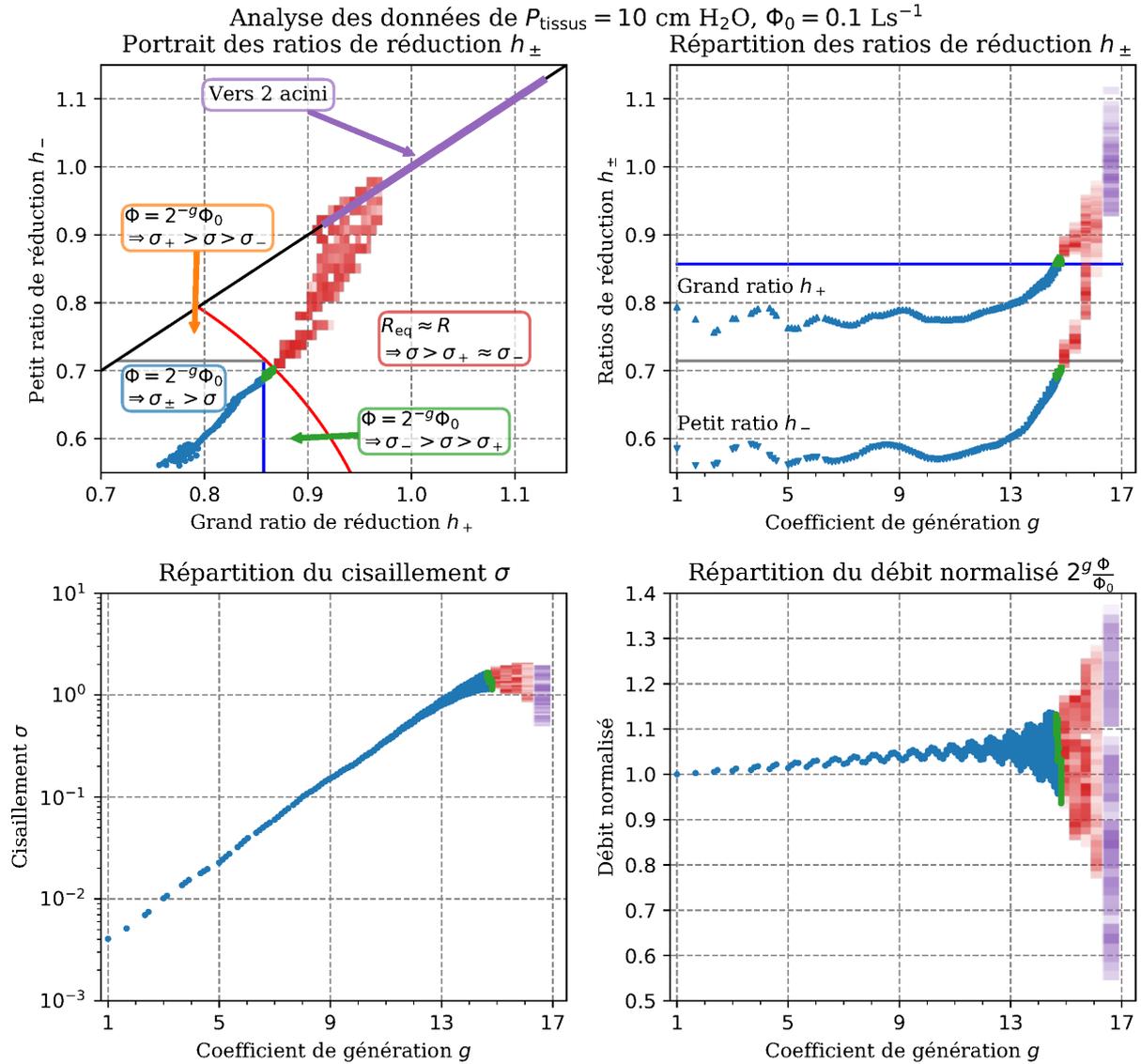


Fig. 4.4: Analyse des données du cas  $P_{\text{tissus}} = 10 \text{ cm H}_2\text{O}$  et  $\Phi = 0.1 \text{ Ls}^{-1}$  selon le modèle simplifié. Le graphique en haut à gauche  $\nwarrow$  montre le portrait des grand et petit ratios de chaque bifurcation et les différents critères issus du modèle. Chaque point représente une bifurcation. Sa couleur dépend de la configuration de ses grand et petit ratios. Lorsque le point est dans la première zone, il est bleu ; dans la seconde, il est orange ; et dans la troisième, il est vert. La densité des configurations est représentée en dégradé de rouge dans la quatrième zone. Enfin, la couleur violette représentent les configurations des dernières branches mère. Celles-ci ont deux branches terminales pour filles, leurs propriétés physiques étant identiques, la bifurcation est symétrique. Pour chaque zone, un encadré de couleur rappelle l'hypothèse principale du modèle simplifié et sa conséquence sur le cisaillement. Dans les trois autres graphiques, le même code couleur est utilisé. Ainsi, les points bleus représentent les quantités des bifurcations dont la configuration des ratios est dans la première zone, de même pour la deuxième et la troisième zones. La quatrième zone est représentée en dégradé de rouge dont l'intensité est proportionnelle au nombre de bifurcations aux ratios, cisaillements ou débits normalisés identiques. Les couleurs sont normalisées colonnes par colonnes. Les bifurcations donnant sur deux acini sont représentées par un dégradé violet. Le graphique en haut à droite  $\nearrow$  représente la répartition des grand et petit ratios le long de l'arbre. Les triangles pointant vers le haut  $\blacktriangle$  sont pour les grands ratios  $h_+$  et ceux pointant vers le bas  $\blacktriangledown$  pour les petits ratios  $h_-$ . Le graphique en bas à gauche  $\swarrow$  affiche le cisaillement  $\sigma$  et celui en bas à droite  $\searrow$  affiche le débit normalisé. Nous pouvons voir dans ces graphiques que la répartition de cisaillement des branches qui sont dans la région distale subit un étalement plus important que pour les branches qui sont dans la région proximale. De plus, nous pouvons voir que les premiers cisaillements maximums sont obtenu lorsque les configurations de ratios de diamètre sont dans la troisième zone.

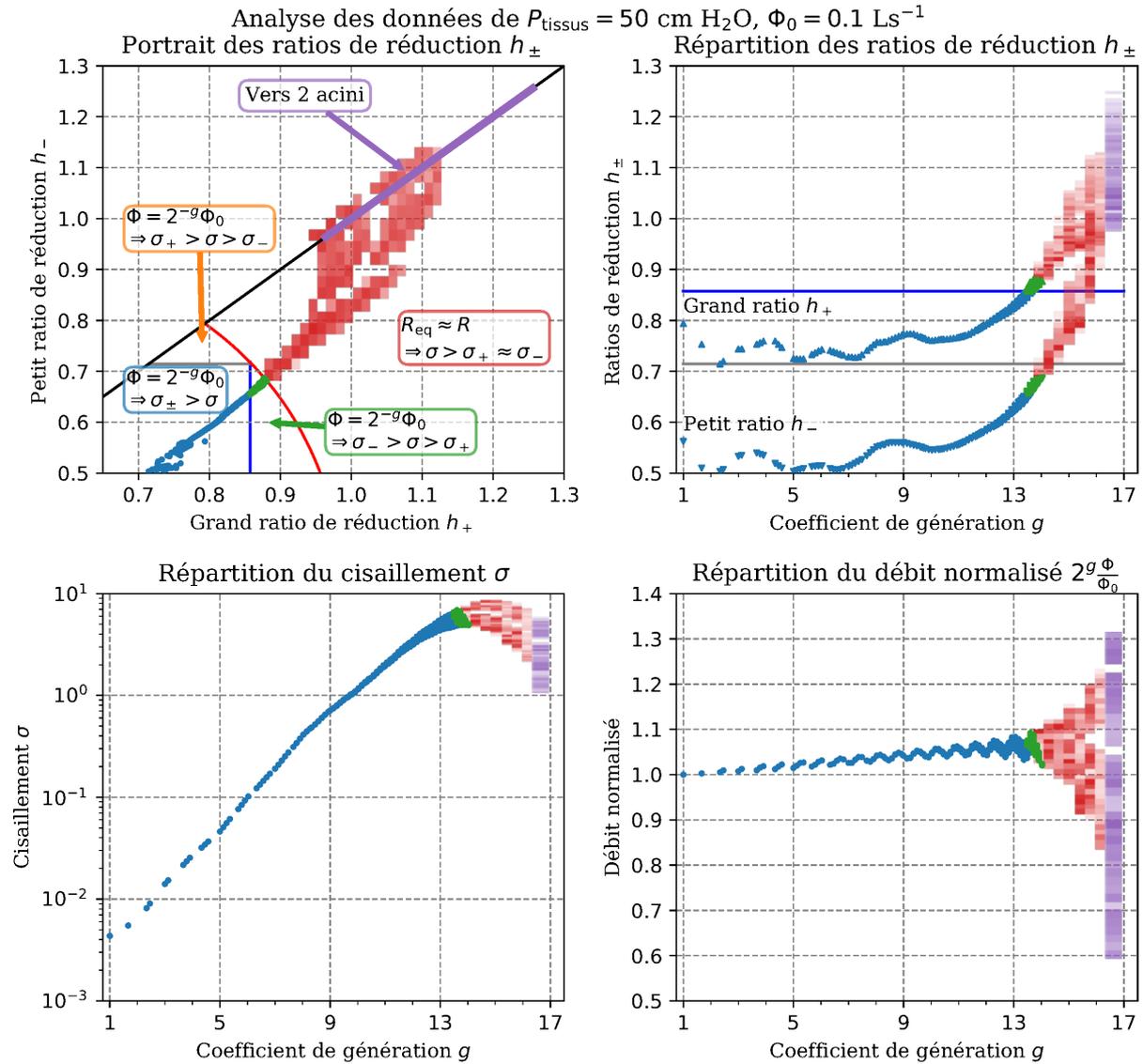


Fig. 4.5: Même description que la figure 4.4 : Analyse des données du cas  $P_{\text{tissus}} = 50 \text{ cm H}_2\text{O}$  et  $\Phi = 0.1 \text{ Ls}^{-1}$  selon le modèle simplifié. Le graphique en haut à gauche  $\nwarrow$  montre le portrait des grand et petit ratios de chaque bifurcation et les différents critères issus du modèle. Chaque point représente une bifurcation. Sa couleur dépend de la configuration de ses grand et petit ratios. Lorsque le point est dans la première zone, il est bleu ; dans la seconde, il est orange ; et dans la troisième, il est vert. La densité des configurations est représentée en dégradé de rouge dans la quatrième zone. Enfin, la couleur violette représentent les configurations des dernières branches mère. Celles-ci ont deux branches terminales pour filles, leurs propriétés physiques étant identiques, la bifurcation est symétrique. Pour chaque zone, un encadré de couleur rappelle l'hypothèse principale du modèle simplifié et sa conséquence sur le cisaillement. Dans les trois autres graphiques, le même code couleur est utilisé. Ainsi, les points bleus représentent les quantités des bifurcations dont la configuration des ratios est dans la première zone, de même pour la deuxième et la troisième zones. La quatrième zone est représentée en dégradé de rouge dont l'intensité est proportionnelle au nombre de bifurcations aux ratios, cisaillements ou débits normalisés identiques. Les couleurs sont normalisées colonnes par colonnes. Les bifurcations donnant sur deux acini sont représentées par un dégradé violet. Le graphique en haut à droite  $\nearrow$  représente la répartition des grand et petit ratios le long de l'arbre. Les triangles pointant vers le haut  $\blacktriangle$  sont pour les grands ratios  $h_+$  et ceux pointant vers le bas  $\blacktriangledown$  pour les petits ratios  $h_-$ . Le graphique en bas à gauche  $\swarrow$  affiche le cisaillement  $\sigma$  et celui en bas à droite  $\searrow$  affiche le débit normalisé. Nous pouvons voir dans ces graphiques que la répartition de cisaillement et du débit des branches qui sont dans la région distale subit un étalement plus important que pour les branches qui sont dans la région proximale. De plus, nous pouvons voir que les premiers cisaillements maximums sont obtenu lorsque les configurations de ratios de diamètre sont dans la troisième zone.

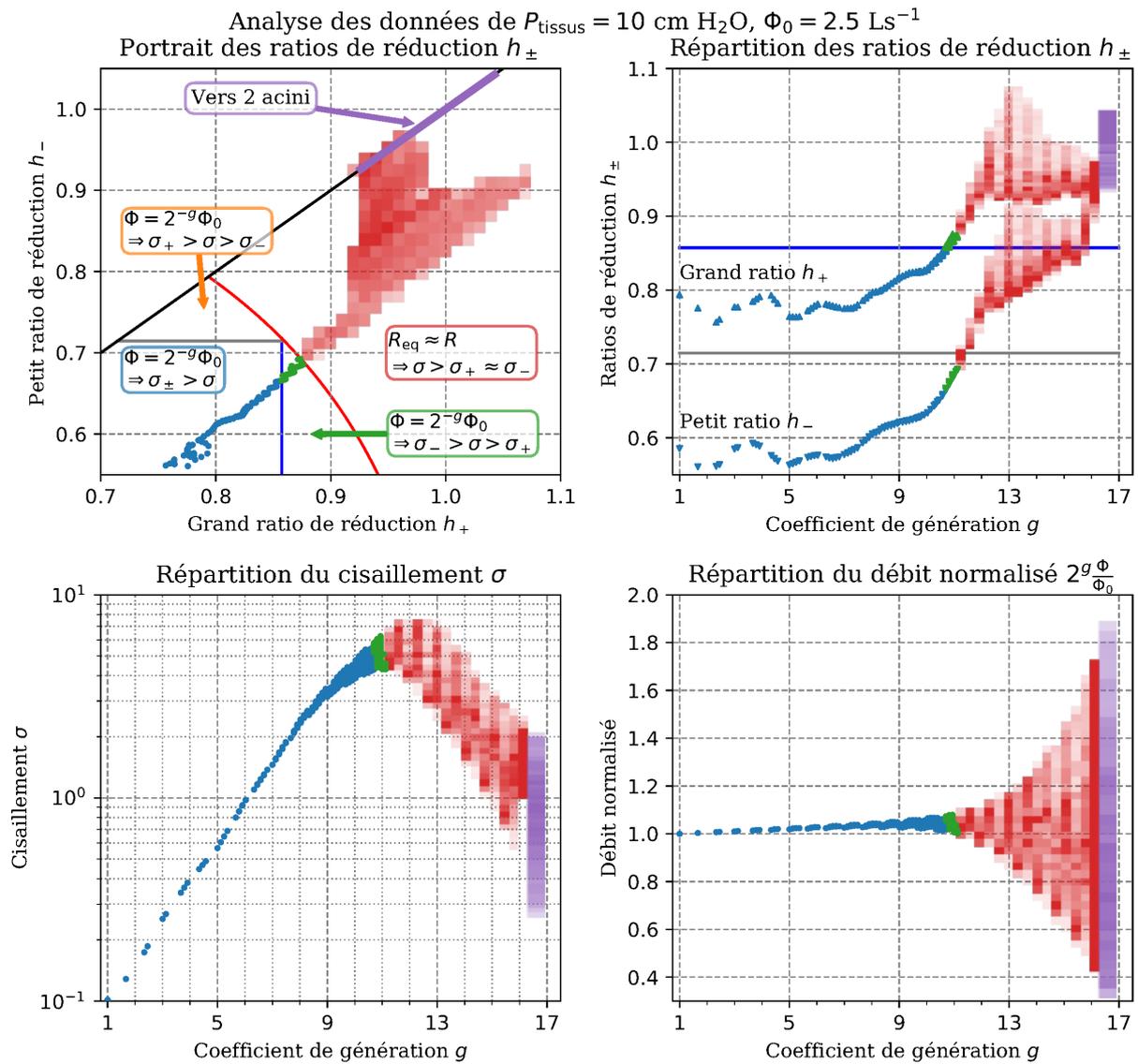


Fig. 4.6: Même description que la figure 4.4 : Analyse des données du cas  $P_{\text{tissus}} = 10 \text{ cm H}_2\text{O}$  et  $\Phi = 2.5 \text{ Ls}^{-1}$  selon le modèle simplifié. Le graphique en haut à gauche  $\nwarrow$  montre le portrait des grand et petit ratios de chaque bifurcation et les différents critères issus du modèle. Chaque point représente une bifurcation. Sa couleur dépend de la configuration de ses grand et petit ratios. Lorsque le point est dans la première zone, il est bleu ; dans la seconde, il est orange ; et dans la troisième, il est vert. La densité des configurations est représentée en dégradé de rouge dans la quatrième zone. Enfin, la couleur violette représentent les configurations des dernières branches mère. Celles-ci ont deux branches terminales pour filles, leurs propriétés physiques étant identiques, la bifurcation est symétrique. Pour chaque zone, un encadré de couleur rappelle l'hypothèse principale du modèle simplifié et sa conséquence sur le cisaillement. Dans les trois autres graphiques, le même code couleur est utilisé. Ainsi, les points bleus représentent les quantités des bifurcations dont la configuration des ratios est dans la première zone, de même pour la deuxième et la troisième zones. La quatrième zone est représentée en dégradé de rouge dont l'intensité est proportionnelle au nombre de bifurcations aux ratios, cisaillements ou débits normalisés identiques. Les couleurs sont normalisées colonnes par colonnes. Les bifurcations donnant sur deux acini sont représentées par un dégradé violet. Le graphique en haut à droite  $\nearrow$  représente la répartition des grand et petit ratios le long de l'arbre. Les triangles pointant vers le haut  $\blacktriangle$  sont pour les grands ratios  $h_+$  et ceux pointant vers le bas  $\blacktriangledown$  pour les petits ratios  $h_-$ . Le graphique en bas à gauche  $\swarrow$  affiche le cisaillement  $\sigma$  et celui en bas à droite  $\searrow$  affiche le débit normalisé. Nous pouvons voir dans ces graphiques que la répartition de cisaillement et du débit des branches qui sont dans la région distale subit un étalement plus important que pour les branches qui sont dans la région proximale. De plus, nous pouvons voir que les premiers cisaillements maximums sont obtenu lorsque les configurations de ratios de diamètre sont dans la troisième zone.

contenu, tandis que dans l'arbre distal, il croît grandement. Nous avons pu déterminer qu'il existait un lien fort entre cet étalement et le poids de la résistance hydrodynamique des branches dans la résistance équivalente de leurs sous-arbres. La nature de ce lien reste encore à découvrir.

A l'instar du comportement de la répartition du cisaillement dans le cas symétrique, nous pensons que ce nouveau comportement sera affecté par les effets d'inertie. De plus, nous prédisons que les obstructions partielles diminueront grandement le cisaillement de l'ensemble des sous-arbres concernés. Nous envisageons d'étudier prochainement ces deux aspects.

# Annexes



## 4.A Le modèle

Nous considérons connue la topologie de l'arbre bronchique, définie par les paramètres  $g_+$  et  $g_-$  (Définition dans le chapitre précédent en section 3.4). De plus, nous considérons connus deux autres paramètres, le débit à la trachée  $\Phi_0$  et la pression entourant les bronches  $P_{\text{tissus}}$ . Nous appelons l'ensemble formé par ces quatre paramètres  $\psi$  :

$$\psi = \left( \begin{array}{c} g_+ \\ g_- \\ \Phi_0 \\ P_{\text{tissus}} \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} g_+ \in [1, \infty[ \\ g_- \in [1, g_+] \\ \Phi_0 \in \mathbb{R}_+ \\ P_{\text{tissus}} \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Afin d'étudier le comportement des branches et de l'écoulement expiratoire, nous associons à chaque branche plusieurs variables définies à partir de ces paramètres. Le coefficient de génération  $g$ , proportionnelle au facteur de génération  $P$  utilisé par le modèle du chapitre précédent et défini par (3.30) page 67, ne dépend que des paramètres  $g_{\pm}$  et de la position des bronches dans l'arbre. La longueur  $L$  et la section  $A$  des branches sont issues de l'adaptation du modèle de Lambert au coefficient de génération détaillé à la sous-section 4.A.2. Pour chaque branche, sa section  $A$ , sa résistance hydrodynamique  $R$ , la différence de pression entre ses extrémités  $q$  et la moyenne des forces de cisaillement à sa paroi  $\sigma$  dépendent aussi de ses autres variables associées. Sa pression transmurale  $P$ , son débit expiratoire  $\Phi$  et la résistance équivalente de son sous-arbre  $\tilde{R}$  dépendent aussi de variables des branches voisines. Un résumé des différentes influences et dépendances entre variables est donné dans le diagramme 4.7.

4.A.1 Topologie de l'arbre et coefficient de génération  $g$ 

La topologie de l'arbre  $\mathcal{P}_{\psi}$  modélisée dépend des facteurs  $g_+$  et  $g_-$ , inclus dans l'ensemble des paramètres  $\psi$ . L'ensemble des bronches modélisées avec les paramètres  $\psi$  est associé à l'ensemble de branches  $\mathcal{P}_{\psi}$ . L'ensemble des acini est modélisé par l'ensemble de branches terminales  $\mathcal{A}_{\psi}$ . Leurs définition est la même que dans le chapitre 3.8, page 66. Nous empruntons par la suite d'autres notations du chapitre 3.8 :

- $\mathcal{P}^*$  L'ensemble de branches excepté la branche d'origine ;
- $\mathcal{P}^+$  L'ensemble des grandes branches ;
- $\mathcal{P}^-$  L'ensemble des petites branches ;
- $\mathcal{A}^+$  L'ensemble des grandes branches terminales ;
- $\mathcal{A}^-$  L'ensemble des petites branches terminales ;
- $M(b)$  La branche mère de  $b$  ;
- $S(b)$  La branche sœur de  $b$  ;
- $D_+(b)$  La grande branche fille de  $b$  ;
- $D_-(b)$  La petite branche fille de  $b$  ;
- $\mathcal{W}_b$  L'ensemble de branche composant le chemin entre la branche d'origine  $b_0$  et  $b$ , y compris celles-ci.
- $N_+(b)$  Le nombre de grandes branches dans  $\mathcal{W}_b$  ;
- $N_-(b)$  Le nombre de petites branches dans  $\mathcal{W}_b$ .

Le coefficient de génération nous servira à adapter le modèle de Lambert et al. <sup>(24)</sup> à l'arbre taillé, en remplaçant la génération  $n$ . Ainsi, le coefficient de génération  $g$  est un réel compris entre 0 et 16, comme les générations  $n$  utilisées dans le modèle de Lambert. Il est proportionnel au facteur de génération  $P$ , utilisé par le modèle du chapitre précédent et défini par (3.30) page 67 qui croit linéairement dans l'arbre  $\mathcal{P}_{\psi}$ . Sa valeur pour la branche initiale  $b_0$  est 0 et pour celle des branches terminales  $b \in \mathcal{A}_{\psi}$  est 16. Pour les autres branches de  $\mathcal{P}_{\psi}^*$ , il est égal au coefficient de sa branche mère incrémenté de  $\frac{16}{g_+}$  ou de  $\frac{16}{g_-}$  selon si c'est une grande ou une petite branche.

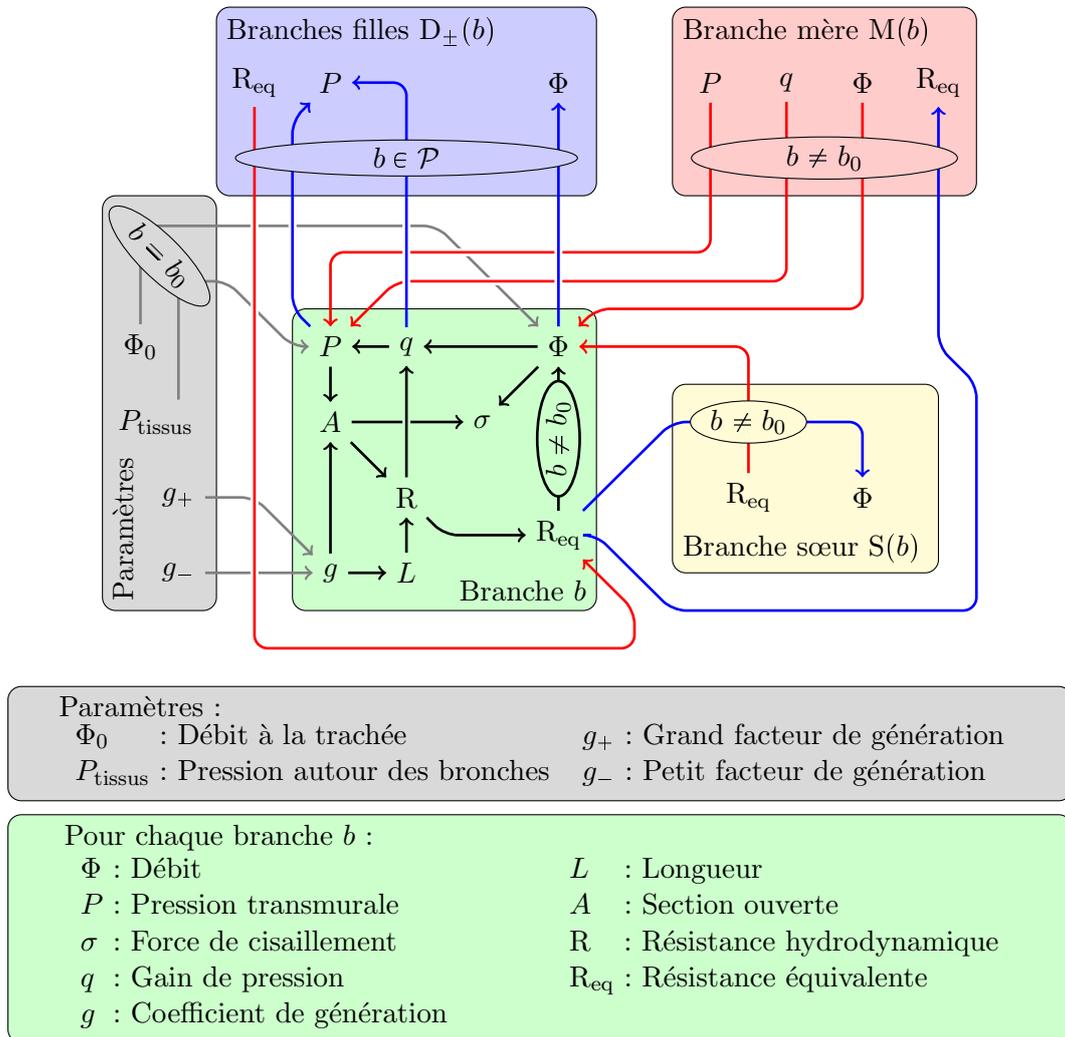


Fig. 4.7: Définitions des paramètres et des variables du modèle et diagramme des influences et dépendances des variables associées à la branche  $b$ . Les variables sont catégorisées : dans le rectangle gris sont rassemblés les paramètres du modèle ; dans le rectangle vert, les variables associées à la branche concernée  $b$  ; dans le rectangle rouge, les variables associées à la mère de la branche concernée  $M(b)$  ; dans le rectangle jaune, les variables associées à la sœur de la branche concernée  $S(b)$  ; et dans le rectangle bleu, les variables associées aux filles de la branche concernée  $D_{\pm}(b)$ . Pour les branches mère, sœur et filles, seules les variables influençant directement, ou étant directement influencées par, les variables de la branche  $b$  sont représentées. Les flèches montrent quelles variables influencent quelles autres. Par exemple :  $A \rightarrow B$ ,  $A$  influence  $B$  ou  $B$  dépend de  $A$ . Les flèches noires montrent les dépendances entre variables associées à  $b$ , les flèches grises montrent les dépendances aux paramètres, les flèches rouges montrent les dépendances aux variables non associées à  $b$ , les flèches bleues montrent l'influence des variables associées à  $b$  sur celles non associées à  $b$ . Les ellipses indiquent les conditions de l'influence, par exemple : le paramètre  $\Phi_0$  influence  $\Phi(b)$  seulement si  $b = b_0$ .

$n$	$\alpha_{0,n} (10^{-3})$	$\alpha'_{0,n} (10^{-6})$	$n_n^-$	$n_n^+$	$L_{\text{Lambert},n} (10^{-4}\text{m})$	$A_{\text{Max},n} (\text{mm}^2)$
0	882	11	0.5	10	1200	237
1	882	11	0.5	10	476	119
2	686	51	0.6	10	190	70.0
3	546	80	0.6	10	76	43.8
4	450	100	0.7	10	127	28.1
5	370	125	0.8	10	107	16.6
6	310	142	0.9	10	90	10.2
7	255	159	1.0	10	76	6.25
8	213	174	1.0	10	64	3.984
9	184	184	1.0	10	54	2.480
10	153	194	1.0	10	47	1.557
11	125	206	1.0	9	39	1.011
12	100	218	1.0	8	33	0.7031
13	75	226	1.0	8	27	0.5432
14	57	233	1.0	8	23	0.4236
15	45	239	1.0	7	20	0.3448
16	39	243	1.0	7	17	0.2747

Tab. 4.1: Paramètres du modèle de Lambert :  $\alpha_{0,n}$  et  $\alpha'_{0,n}$  sont respectivement l'ouverture de la bronche et sa dérivée à pression transmurale nulle ;  $n_n^-$  et  $n_n^+$  sont les puissances des lois lorsque la pression transmurale est respectivement négative ou positive ;  $L_{\text{Lambert},n}$  est la longueur de la bronche ;  $A_{\text{Max},n}$  est la section maximal de la bronche de génération  $n$

En réutilisant la définition de (3.14), nous pouvons définir  $g$  tel qu'il dépende uniquement des facteurs  $g_+$  et  $g_-$  et de la position des branches dans l'arbre.

$$g_\psi : \begin{cases} \mathcal{P}_\psi \cup \mathcal{A}_\psi \rightarrow [0; 16] \\ b \in \mathcal{P}_\psi \mapsto 16 \left( \frac{N_+(b)}{g_+} + \frac{N_-(b)}{g_-} \right) \\ b \in \mathcal{A}_\psi \mapsto 16 \end{cases} \quad (4.2)$$

Notons que, dans le cas d'un arbre symétrique de 17 générations, le coefficient de génération  $g$  est égale à la génération  $n$ .

#### 4.A.2 Longueur $L$ et section $A$ : adaptation du modèle de Lambert et al. <sup>(24)</sup>

La longueur  $L$  et la section ouverte  $A$  des branches sont calculées à partir des données et du modèle de Lambert et al. <sup>(24)</sup>. Ce modèle décrit la compliance des bronches selon leur génération, et donne l'évolution de la section  $A$  d'une bronche en fonction de la pression transmurale  $P$  qu'elle subit. Lambert donne ainsi la longueur  $L$  des branches, leur section maximale  $A_{\text{Max}}$ , leur section normalisée par rapport à sa section maximale  $A_{\text{Max}}$  et leur dérivée,  $\alpha_0$  et  $\alpha'_0$ , à pression transmurale  $P$  nulle et les puissances des lois  $n^-$  et  $n^+$  pour chaque génération, voir le tableau 4.1. Les équations (2.2) régissant le modèle ont été précédemment donnée page 35. Nous pouvons remarquer, dans la figure 2.8, que les comportements de la longueur  $L$ , de la section maximale  $A_{\text{Max}}$ , de la section normalisée à pression transmurale nulle  $\alpha_0$  et de la différence entre 2.80 et  $\alpha'_0$  semblent exponentiels. Les puissances  $n^-$  et  $n^+$  ne semblent pas suivre un comportement identifiable.

Cependant, les branches d'une même génération ont des longueurs identiques et la même compliance. Afin de prendre en compte l'asymétrie de l'arbre, nous voulons que la longueur et la compliance des branches dépendent du coefficient de génération  $g$  et non de sa génération  $n$ . Ainsi, les branches de coefficient  $g$  ont l'apparence et le comportement de la génération  $n \approx g$ . Toutefois,  $n$  est un entier et  $g$  est un réel. Il nous faut adapter le modèle de Lambert à ce coefficient.

Nous décidons d'adapter le modèle de Lambert en prenant des paramètres continus qui dépendent de  $g$ . Ainsi, les équations du modèle deviennent :

$$A_{\text{Lambert}}(g(b), P(b)) \underset{P(b) \leq 0}{=} A_{\text{Max}}(g(b)) \alpha_0(g(b)) \left(1 - \frac{P(b)}{P^-(g(b))}\right)^{-n^-(g(b))} \quad (4.3)$$

$$A_{\text{Lambert}}(g(b), P(b)) \underset{P(b) \geq 0}{=} A_{\text{Max}}(g(b)) \left(1 - (1 - \alpha_0(g(b))) \left(1 - \frac{P(b)}{P^+(g(b))}\right)^{-n^+(g(b))}\right) \quad (4.4)$$

$$P^-(g(b)) = \frac{\alpha_0(g(b))}{\alpha'_0(g(b))} n^-(g(b)) \quad (4.5)$$

$$P^+(g(b)) = -\frac{1 - \alpha_0(g(b))}{\alpha'_0(g(b))} n^+(g(b)) \quad (4.6)$$

Les paramètres  $A_{\text{Max}}(g(b))$ ,  $\alpha_0(g(b))$ ,  $\alpha'_0(g(b))$ ,  $n^-(g(b))$  et  $n^+(g(b))$  sont des valeurs interpolées des paramètres de Lambert. Les interpolations sont faites telles que représentées sur les graphiques 4.8. Au vu du comportement de la longueur  $L$ , de la section maximale  $A_{\text{Max}}$ , de la section normalisée à pression transmurale nulle  $\alpha_0$  et de la différence entre 2.80 et  $\alpha'_0$ , leurs interpolations sont exponentielle. Aucun comportement particulier n'étant remarquable pour les deux puissances  $n^+$  et  $n^-$ , nous choisissons de les interpoler linéairement.

$$g(b) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \Pi(g(b)) = \Pi_{g(b)}, \quad \forall \Pi \in \{L_{\text{Lambert}}, A_{\text{Max}}, \alpha_0, \alpha'_0, n^+, n^-\} \quad (4.7)$$

$$g(b) \notin \mathbb{N} \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi(g(b)) = \Pi_{[g(b)]}^{[g(b)]-g(b)} \times \Pi_{[g(b)]}^{g(b)-[g(b)]}, & \forall \Pi \in \{L_{\text{Lambert}}, A_{\text{Max}}, \alpha_0\} \\ \alpha'_0(g(b)) = 2.80 - \left(2.80 - \alpha'_{0,[g(b)]}\right)^{[g(b)]-g(b)} \times \left(2.80 - \alpha'_{0,[g(b)]}\right)^{g(b)-[g(b)]} \\ n^\pm(g(b)) = n^\pm_{[g(b)]}([g(b)] - g(b)) + n^\pm_{[g(b)]}(g(b) - [g(b)]) \end{cases} \quad (4.8)$$

Ainsi nous pouvons définir la longueur  $L$  et la section ouverte  $A$  de chaque branche.

$$L_\psi : \begin{cases} \mathcal{P}_\psi \cup \mathcal{A}_\psi \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ b \mapsto L_{\text{Lambert}}(g(b)) \end{cases} \quad A_\psi : \begin{cases} \mathcal{P}_\psi \cup \mathcal{A}_\psi \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ b \mapsto A_{\text{Lambert}}(g(b), P(b)) \end{cases} \quad (4.9)$$

#### 4.A.3 Résistance $R$ et résistance équivalente $R_{\text{eq}}$

Les hypothèses sur le régime de l'écoulement et sur la forme des branches nous permettent d'utiliser la formule de la résistance de Poiseuille pour des conduits cylindriques. De même que pour le chapitre 3, nous considérons que la résistance des branches terminales est égale à 1.5 fois la résistance des branches de génération 16. Dans la section 4.A.1, nous avons défini que pour les branches terminales  $g = 16$ , ainsi nous multiplions seulement la résistance de Poiseuille de ces branches par 1.5.

$$R_\psi : \begin{cases} \mathcal{P}_\psi \cup \mathcal{A}_\psi \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ b \in \mathcal{P}_\psi \mapsto 8\mu\pi \frac{L(b)}{A(b)^2} \\ b \in \mathcal{A}_\psi \mapsto 12\mu\pi \frac{L(b)}{A(b)^2} \end{cases} \quad (4.10)$$

Grâce à l'hypothèse sur l'homogénéité de la pression de l'air au fond des branches terminales, nous pouvons calculer la résistance équivalente du sous-arbre partant de chaque branche  $b$  avec les lois d'additivité des résistances. Le sous-arbre partant de  $b$  contient la branche  $b$  reliée en série aux deux sous-arbres de ses branches filles  $D_\pm(b)$ . Ces deux sous-arbres sont parallèles entre eux, voir schémas 4.9. Ainsi nous pouvons définir la résistance équivalente  $R_{\text{eq}}$  du sous-arbre partant de  $b$  à partir des résistances équivalentes des sous-arbres partants de ses filles  $D_+(b)$  et  $D_-(b)$ . Les branches terminales n'ayant pas de filles, les résistances équivalentes de leurs sous-arbres sont égales à leurs propres résistances :

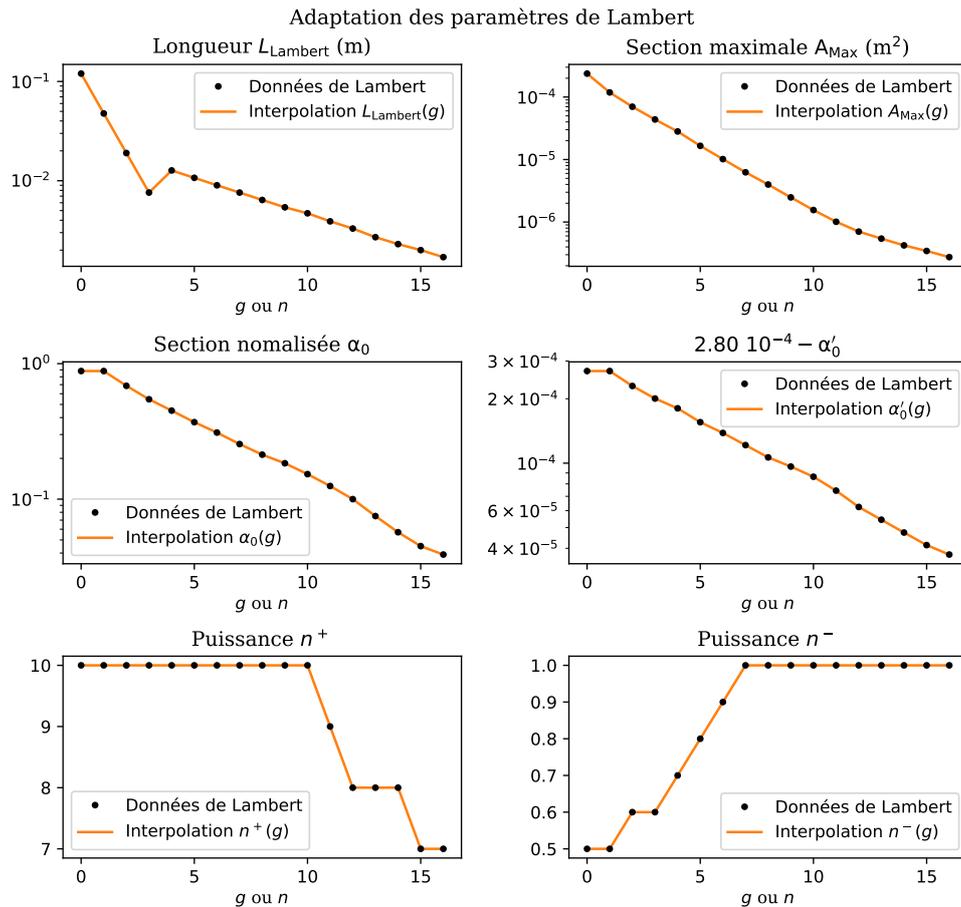


Fig. 4.8: Évolution des paramètres de Lambert le long des générations  $n$  et de leur interpolations selon le coefficient de génération  $g$ . Les comportements de la longueur  $L$ , de la section maximale  $A_{\text{Max}}$ , de la section normalisée à pression transmurale nulle  $\alpha_0$  et de la différence entre 2.80 et  $\alpha'_0$  semblent exponentiels. Ainsi, l'interpolation des paramètres associés est aussi exponentielle. Les puissances  $n^-$  et  $n^+$  ne semblent pas suivre un comportement identifiable. Nous choisissons d'interpoler les paramètres associés de manière linéaire.

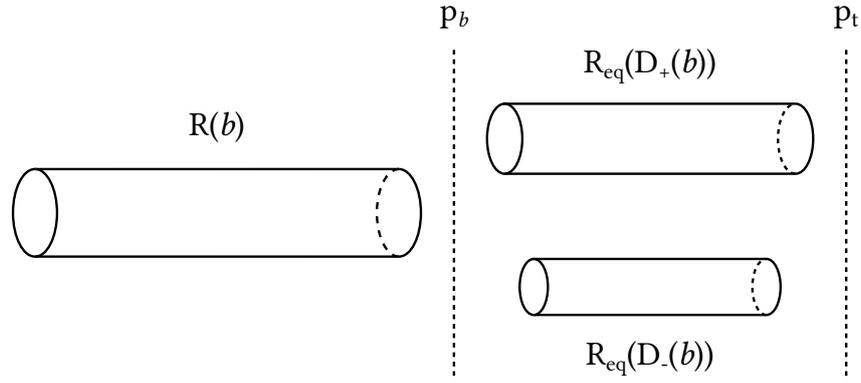


Fig. 4.9: Schéma du sous-arbre partant de la branche  $b$ . Celle-ci, de résistance  $R(b)$  est connectée à deux sous-arbres, chacun partant d'une fille de  $b$ ,  $D_+(b)$  ou  $D_-(b)$ . Ces deux sous-arbres sont résumés à des cylindres de résistances égales à leurs résistances équivalentes  $R_{\text{eq}}(D_+(b))$  et  $R_{\text{eq}}(D_-(b))$ . Les pressions de l'air au fond de la branche  $b$  et au début des branches  $D_+(b)$  et  $D_-(b)$  sont identiques, car la bifurcation n'influence pas l'écoulement. Par hypothèse, la pression au fond des branches terminales  $p_t$  est homogène. Ainsi, la branche  $b$  est branchée en série à l'ensemble des deux sous-arbres partant de  $D_+(b)$  et de  $D_-(b)$ , qui sont parallèles entre eux.

$$R_{\text{eq}\psi} : \begin{cases} \mathcal{P}_\psi \cup \mathcal{A}_\psi \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ b \in \mathcal{P}_\psi \mapsto R(b) + \frac{R_{\text{eq}}(D_+(b)) R_{\text{eq}}(D_-(b))}{R_{\text{eq}}(D_+(b)) + R_{\text{eq}}(D_-(b))} \\ b \in \mathcal{A}_\psi \mapsto R(b) \end{cases} \quad (4.11)$$

#### 4.A.4 Différence de pression $q$ et pression transmurale $P$

Le régime de Poiseuille nous permet de relier la différence de pression  $q_\psi$  entre les extrémités de la branche  $b$ , ou gain de pression, à sa résistance hydrodynamique  $R(b)$  et au débit d'air la traversant  $\Phi(b)$  :

$$q_\psi : \begin{cases} \mathcal{P} \cup \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ b \mapsto R(b) \Phi(b) \end{cases} \quad (4.12)$$

Nous considérons que la pression transmurale  $P$  affectant la section ouverte  $A$  est la différence de pression entre l'air à l'intérieur de la branche (au milieu de celle-ci) et la pression de l'environnement entourant la branche  $P_{\text{tissus}}$ , homogène par hypothèse. La pression transmurale de la branche  $b$  est ainsi égale à la somme des gains de pression  $q$  de toutes les branches de  $\mathcal{W}_b$  retranchée de la moitié de son gain de pression  $q(b)$  et de la pression l'entourant  $P_{\text{tissus}}$ . Une autre manière de la définir, que l'on utilise dans ce modèle, est de la définir par rapport à la pression transmurale de sa branche mère  $M(b)$  :

$$P_\psi(b) = \sum_{\beta \in \mathcal{W}_b} q(\beta) - \frac{1}{2}q(b) - P_{\text{tissus}} \quad (4.13)$$

$$= \sum_{\beta \in \mathcal{W}_{M(b)}} q(\beta) - \frac{1}{2}q(M(b)) - P_{\text{tissus}} + q(b) - \frac{1}{2}q(b) + \frac{1}{2}q(M(b)) \quad (4.14)$$

$$= P(M(b)) + \frac{q(b) + q(M(b))}{2} \quad (4.15)$$

Finalement, avec la branche d'origine  $b_0$ , nous pouvons donner une définition à  $P_\psi$  :

$$P_\psi : \begin{cases} \mathcal{P} \cup \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ b_0 \mapsto \frac{q(b_0)}{2} - P_{\text{tissus}} \\ b \in \mathcal{P}^* \cup \mathcal{A} \mapsto P(M(b)) + \frac{q(b) + q(M(b))}{2} \end{cases} \quad (4.16)$$

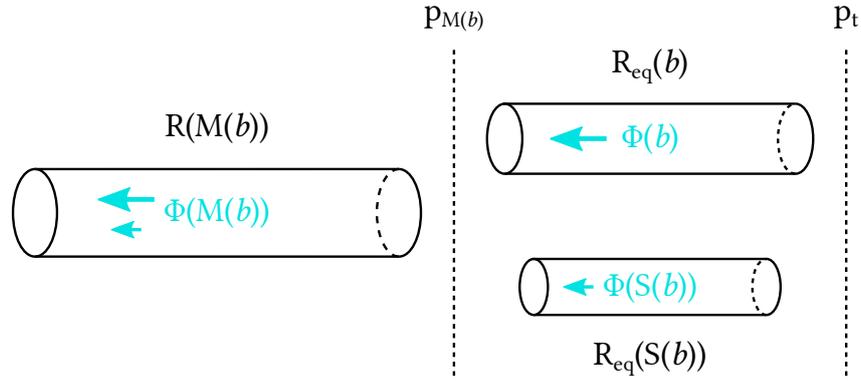


Fig. 4.10: Schéma du sous-arbre partant de la branche  $M(b)$ . Celle-ci est traversée par un débit  $\Phi(M(b)) = \Phi(b) + \Phi(S(b))$ . Le sous-arbre partant de  $b$  de résistance équivalente  $R_{\text{eq}}(b)$  a le même gain de pression  $p_t - p_{M(b)}$  que l'ensemble constitué de lui-même et du sous-arbre partant de la branche sœur  $S(b)$ , de résistances équivalentes  $R_{\text{eq}}(S(b))$ .

#### 4.A.5 Débit $\Phi$ et contrainte de cisaillement $\sigma$

Le débit  $\Phi_0$  dans la branche d'origine  $b_0$ , modélisant la trachée, est donné en paramètre. Pour les autres, l'homogénéité des pressions à chaque bifurcation d'une part et au fond des branches terminales d'autre part et la conservation de la masse permettent de calculer leurs débits  $\Phi$ .

L'homogénéité des pressions implique que le gain de pression du sous-arbre partant de  $b$  est identique à celui de l'ensemble des deux sous-arbres partant de  $b$  et de sa sœur  $S(b)$ , voir figure 4.10. La conservation de la masse implique que la somme des débits  $\Phi$  sortant de  $b$  et de sa sœur  $S(b)$  est égale au débit sortant de leur mère,  $\Phi(M(b)) = \Phi(b) + \Phi(S(b))$ .

$$R_{\text{eq}\psi}(b) \Phi_\psi(b) = \left( R_{\text{eq}\psi}(M(b)) - R_\psi(M(b)) \right) \Phi_\psi(M(b)) \quad (4.17)$$

$$= \frac{R_{\text{eq}\psi}(b) R_{\text{eq}\psi}(S(b))}{R_{\text{eq}\psi}(b) + R_{\text{eq}\psi}(S(b))} \Phi_\psi(M(b)) \quad (4.18)$$

Cela nous amène à la définition du débit dans tout l'arbre :

$$\Phi_\psi : \begin{cases} \mathcal{P}_\psi \cup \mathcal{A}_\psi \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ b_0 \mapsto \Phi_0 \\ b \in \mathcal{P}_\psi^* \cup \mathcal{A}_\psi \mapsto \Phi(M(b)) \frac{R_{\text{eq}}(S(b))}{R_{\text{eq}}(b) + R_{\text{eq}}(S(b))} \end{cases} \quad (4.19)$$

A propos de la contrainte de cisaillement, l'hypothèse de l'écoulement de Poiseuille et celle de la forme cylindrique des branches suffisent pour utiliser l'équation (2.24) démontrée dans le chapitre 2 page 40 :

$$\sigma_\psi : \begin{cases} \mathcal{P}_\psi \cup \mathcal{A}_\psi \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ b \mapsto \frac{q_\psi(b)}{2L_\psi(b)} \sqrt{\frac{A_\psi(b)}{\pi}} \end{cases} \quad (4.20)$$

Nous pouvons aussi l'exprimer en fonction du débit  $\Phi$  et de la section  $A$  en utilisant les équations du gain de pression  $q$  (4.12) et de la résistance  $R$  (4.10) :

$$\sigma_\psi : \begin{cases} \mathcal{P}_\psi \cup \mathcal{A}_\psi \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ b \in \mathcal{P}_\psi \mapsto 4\mu\sqrt{\pi} \frac{\Phi_\psi(b)}{A_\psi(b)^{\frac{3}{2}}} \\ b \in \mathcal{A}_\psi \mapsto 6\mu\sqrt{\pi} \frac{\Phi_\psi(b)}{A_\psi(b)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (4.21)$$

## 4.B Résolution numérique

Au vu de la non-linéarité de certaines équations, de la grande interdépendance entre les variables et du grand nombre de branches composant l'arbre étudié, il est nécessaire d'utiliser les ressources numériques pour trouver les solutions du problème.

Ainsi, nous avons séparé notre modèle en deux applications,  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$ , et reformulé notre modèle tel que sa solution soit le point fixe de  $\mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_1$ . Nous avons développé un algorithme itératif similaire à la méthode du point fixe afin de converger vers la solution. Le principe de l'algorithme est d'utiliser une variable supplémentaire,  $\vec{\chi}$ , et de l'ajuster pas à pas afin de trouver une approximation de la solution. Cette variable est l'ensemble des ratios de répartition du débit de chaque grande fille  $\chi$ . Ce ratio indique la proportion de débit de la branche  $\Phi(b)$  passant dans sa grande fille  $\Phi(D_+(b))$ . De facto, il nous informe aussi de la proportion de débit qui passe dans sa petite fille  $1 - \chi(b)$  :

$$\chi : \mathcal{P}_\psi \rightarrow [0; 1] \quad (4.22)$$

$$\Phi_{\psi, \chi} : \begin{cases} \mathcal{P}_\psi \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ b_0 \mapsto \Phi_0 \\ b \in \mathcal{P}_\psi^+ \cup \mathcal{A}_\psi^+ \mapsto \Phi_{\psi, \chi}(M(b)) \chi(M(b)) \\ b \in \mathcal{P}_\psi^- \cup \mathcal{A}_\psi^- \mapsto \Phi_{\psi, \chi}(M(b)) (1 - \chi(M(b))) \end{cases} \quad (4.23)$$

A chaque itération, à partir d'un ensemble de ratio de débits  $\vec{\chi}$ , l'algorithme utilise les deux applications,  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$ , pour calculer un autre ensemble de ratios de débits  $\vec{\chi}'$  qui servira à mettre à jour  $\vec{\chi}$ .

$$\vec{\chi} = \{ \chi(b) | b \in \mathcal{P}_\psi \} \quad (4.24)$$

$$\vec{\chi}'(\vec{\chi}) = \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_1(\vec{\chi}) \quad (4.25)$$

La première application  $\mathbf{A}_1$  prend en paramètre les facteurs  $g_+$ ,  $g_-$ , le débit à la trachée  $\Phi_0$  et l'ensemble des ratios  $\vec{\chi}$ . Il calcule les débits  $\Phi_{\psi, \chi}$  de chaque branche de  $\mathcal{P} \cup \mathcal{A}$ . À ce stade, le sous-modèle est similaire au modèle du chapitre 2, voir diagramme 4.11. L'application  $\mathbf{A}_1$  utilise l'algorithme développé en chapitre 2 pour calculer la section  $A$ , la résistance  $R$ , le gain de pression  $q$  et la pression transmurale  $P$  de chaque branche  $b$  en partant de la branche d'origine  $b_0$ . Cette procédure ignore l'homogénéité de la pression au fond des branches terminales.

La seconde application  $\mathbf{A}_2$  utilise les résistances  $R_{\psi, \vec{\chi}}$  données par  $\mathbf{A}_1$ , calcule les résistances équivalentes  $R_{\text{eq}\psi, \vec{\chi}}$  et les ratios de débits  $\chi'_{\psi, \vec{\chi}}$  qui assureraient une pression homogène au fond des branches terminales avec ces résistances  $R_{\psi, \vec{\chi}}$  grâce à l'équation (4.19).

$$\chi'_{\psi, \vec{\chi}} : \begin{cases} \mathcal{P} \rightarrow [0; 1] \\ b \mapsto \frac{R_{\text{eq}\psi, \chi}(D_-(b))}{R_{\text{eq}\psi, \chi}(D_+(b)) + R_{\text{eq}\psi, \chi}(D_-(b))} \end{cases} \quad (4.26)$$

L'ensemble des ratios  $\vec{\chi}'_{\psi}$  est défini à partir de  $\chi'$  de manière analogue à  $\vec{\chi}_{\psi}$ .

$$\vec{\chi}'_{\psi}(\vec{\chi}) = \{ \chi'_{\psi, \vec{\chi}}(b) | b \in \mathcal{P}_\psi \} \quad (4.27)$$

L'algorithme s'arrête lorsque les pressions terminales  $p_t$  sont suffisamment proches de leur moyenne. Une fois les solutions de la section  $A$  et du gain de pression  $q$  approchées, les contraintes de cisaillement à la paroi  $\sigma$  sont calculées.

### 4.B.1 Mise à jour de $\vec{\chi}$

Du fait de la complexité du système d'équation, les méthodes impliquant le gradient nécessitent une estimation numérique de celui-ci. Le grand nombre de branches dans  $\mathcal{P}$  rend cette estimation très coûteuse numériquement. Nous utilisons alors une méthode proche de celle du point fixe.

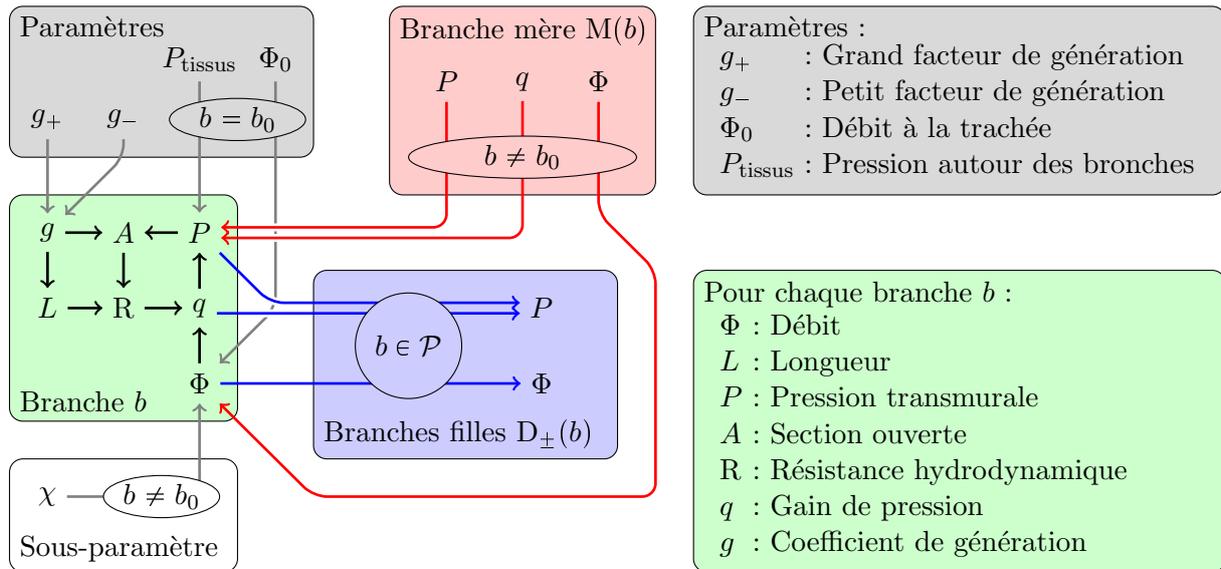


Fig. 4.11: Diagramme des influences et dépendance des variables de l'application  $\mathbf{A}_1$  associés à la branche  $b$  et définitions des paramètres et des variables. Les variables sont catégorisées : dans le rectangle gris sont rassemblés les paramètres du modèle ; dans le rectangle blanc est placée la variable de l'algorithme  $\chi$  est un paramètre supplémentaire pour  $\mathbf{A}_1$  ; dans le rectangle vert, les variables associées à la branche concernée  $b$  ; dans le rectangle rouge, les variables associées à la mère de la branche concernée  $M(b)$  ; et dans le rectangle blanc, les variables associées aux filles de la branche concernée  $D_{\pm}(b)$ . Pour les branches mère et filles, seules les variables influençant directement, ou étant directement influencées par les variables de la branche  $b$  sont affichées. Les flèches montrent quelles variables influencent quelles autres. Par exemple :  $A \rightarrow B$ ,  $A$  influence  $B$  ou  $B$  dépend de  $A$ . Les flèches noires montrent les dépendances entre variables associées à  $b$ , les flèches grises montrent les dépendances aux paramètres, les flèches rouges montrent les dépendances aux variables non associées à  $b$ , les flèches bleues montrent l'influence des variables associées à  $b$  sur celles non associées à  $b$ . Les ellipses indiquent les conditions de l'influence, par exemple : le paramètre  $\Phi$  influence  $\Phi(b)$  seulement si  $b = b_0$ .

Nous considérons que, à chaque itération  $k$ , à partir d'un point de départ  $\vec{\chi}_{\psi,k}$ , la direction vers la solution est proche de celle vers  $\vec{\chi}'_{\psi}(\vec{\chi}_{\psi,k})$ . Nous appelons cette direction  $\vec{\Delta}_{\psi}(\vec{\chi}_{\psi,k}) = \vec{\chi}'_{\psi}(\vec{\chi}_{\psi,k}) - \vec{\chi}_{\psi,k}$ . Pour soulager l'écriture, nous utiliserons quelques substitutions.

$$\begin{aligned}\vec{\chi}_k &= \vec{\chi}_{\psi,k} \\ \vec{\chi}'_k &= \vec{\chi}'_{\psi}(\vec{\chi}_k) \\ \vec{\Delta}_k &= \vec{\Delta}_{\psi}(\vec{\chi}_k) = \vec{\chi}'_k - \vec{\chi}_k \\ \vec{\Delta}'_k &= \vec{\Delta}_{\psi}(\vec{\chi}'_k)\end{aligned}$$

Ainsi, à chaque itération  $k$ , nous choisissons la nouvelle valeur  $\vec{\chi}_{k+1} = \vec{\chi}_k + x_k \vec{\Delta}_k$  tel que  $\|\vec{\Delta}_{k+1}\| = \|\vec{\Delta}(\vec{\chi}_k + x_k \vec{\Delta}_k)\|$  est le minimum de  $\|\vec{\Delta}(\vec{\chi}_k + x \vec{\Delta}_k)\|$  selon de  $x$ .

En tenant compte du caractère multidimensionnel de  $\vec{\chi}$  et en considérant  $\vec{\Delta}$  comme suffisamment linéaire autour de  $\vec{\chi}$  et de  $\vec{\chi}'$ , nous pouvons en déduire une valeur approchée  $x_k$ .

$$\begin{aligned}\|\vec{\Delta}(\vec{\chi}_k + x \vec{\Delta}_k)\|^2 &= \|\vec{\Delta}_k + x \vec{\Delta}(\vec{\chi}'_k - \vec{\chi}_k)\|^2 \\ &= \|\vec{\Delta}_k + x(\vec{\Delta}'_k - \vec{\Delta}_k)\|^2 \\ &= \|\vec{\Delta}_k\|^2 + 2x(\vec{\Delta}_k \cdot \vec{\Delta}'_k - \|\vec{\Delta}_k\|^2) + x^2 \|\vec{\Delta}'_k - \vec{\Delta}_k\|^2 \\ 0 &= \frac{d}{dx} \|\vec{\Delta}(\vec{\chi}_k + x \vec{\Delta}_k)\|^2(x_k) \tag{4.28}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 2\vec{\Delta}_k \cdot \vec{\Delta}'_k - 2\|\vec{\Delta}_k\|^2 + 2x_k \|\vec{\Delta}'_k - \vec{\Delta}_k\|^2 \\ \Leftrightarrow x_k &= \frac{\|\vec{\Delta}_k\|^2 - \vec{\Delta}_k \cdot \vec{\Delta}'_k}{\|\vec{\Delta}'_k - \vec{\Delta}_k\|^2} \tag{4.29}\end{aligned}$$

Cependant, l'approximation linéaire de  $\vec{\Delta}$  n'est pas suffisante pour garantir un  $\vec{\Delta}_{k+1}$  satisfaisant, voire une convergence vers la solution. Alors, un algorithme itératif recherche à chaque étape  $k$  un  $x_k$  acceptable. A chaque itération  $i$ , il fait une nouvelle estimation  $x_{k,i+1}$  de  $x_k$  approchant  $\vec{\Delta}(\vec{\chi}_k + x \vec{\Delta}_k)$  par la droite passant par le dernier point calculé  $\vec{\Delta}_{k,i}$  et  $\vec{\Delta}_{k,i^* < i}$ , le point le proche de  $\vec{0}$  parmi les antécédents  $\{\vec{\Delta}_{k,i'} \mid i' < i\}$ .

$$x_{k,i+1} = x_{k,i} + (x_{k,i} - x_{k,i^* < i}) \frac{\vec{\Delta}_{k,i} \cdot \vec{\Delta}_{k,i^* < i} - \|\vec{\Delta}_{k,i}\|^2}{\|\vec{\Delta}_{k,i^* < i} - \vec{\Delta}_{k,i}\|^2} \tag{4.30}$$

#### 4.C Modèle simplifié

Au vu des résultats présentés pages 84 à 86, nous pouvons séparer l'arbre en deux régions : une région proximale, où la répartition du débit est faiblement étalés ; et une région distale, où l'étalement de la répartition du débit croît grandement. La répartition du débit à chaque bifurcation dépend des résistances équivalentes  $R_{eq}$  des branches filles. Ainsi, nous pensons que lorsque la résistance d'une branche  $R(b)$  est très faible devant la résistance équivalente de son sous-arbre  $R_{eq}(b)$ , le débit  $\Phi(b)$  est réparti avec un faible étalement autour de  $2^{-g(b)}\Phi_0$ . Nous voulons faire un modèle simplifié à partir de cette hypothèse afin de la tester.

Tout d'abord, nous déterminons sous quel critère la résistance de la branche  $b$  est minoritaire dans le calcul de la résistance équivalente  $R_{eq}(b)$  de son sous-arbre. En simplifiant le sous-arbre

partant de  $b$  au seul ensemble d'elle-même et ses filles, nous pouvons calculer une borne inférieure de la résistance équivalente  $R_{\text{eq}}(b)$ .

$$R_{\text{eq}}(b) = R(b) + \frac{R_{\text{eq}}(D_+(b)) R_{\text{eq}}(D_-(b))}{R_{\text{eq}}(D_+(b)) + R_{\text{eq}}(D_-(b))} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} R_{\text{eq}}(b) &> R(b) + \frac{R(D_+(b)) R(D_-(b))}{R(D_+(b)) + R(D_-(b))} \\ &> R(b) \left( 1 + \frac{k_+(b)k_-(b)}{k_+(b) + k_-(b)} \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Ici,  $k_{\pm}(b)$  est le ratio  $\frac{R(D_{\pm}(b))}{R(b)}$  entre les résistances des branches filles et celle de  $b$ .

$$k_{\pm}(b) = \frac{R(D_{\pm}(b))}{R(b)} = \frac{L(D_{\pm}(b)) A(D_{\pm}(b))^{-2}}{L(b) A(b)^{-2}} \quad (4.32)$$

Ainsi, si  $\frac{k_+k_-}{k_++k_-}$  est inférieur à 1, la résistance de  $b$  est dominante devant les termes de  $R_{\text{eq}}(b)$  issus de ses filles. Si ce raisonnement peut être prolongé sur l'ensemble du sous-arbre de  $b$ ,  $R(b)$  est le terme dominant de  $R_{\text{eq}}(b)$ . Au contraire, lorsque  $\frac{k_+k_-}{k_++k_-}$  est supérieur à 1, ce sont les termes issus de ses filles qui dominent  $R_{\text{eq}}(b)$ . Ce raisonnement peut être appliqué de filles en filles tant que la condition est vérifiée. Ainsi, les termes dominants de  $R_{\text{eq}}(b)$  sont ceux issus des résistances  $R(b')$  des branches  $b'$  du sous-arbre partant de  $b$  qui ne vérifient plus cette condition :

$$\begin{aligned} 1 &> \frac{k_+k_-}{k_++k_-} \\ k_++k_- &> k_+k_- \\ \frac{k_+}{k_+-1} &> k_- \\ (1 - k_+^{-1})^{-1} &> k_- \end{aligned} \quad (4.33)$$

Pour étudier les différents comportements du cisaillement, nous proposons un modèle simplifié séparé en une région proximale et une région distale. Dans la région proximale,  $(1 - k_+^{-1})^{-1} < k_-$ , le débit est réparti par la loi  $\Phi(b) = 2^{-g(b)}\Phi_0$  car la résistance des branches est négligeable dans leurs résistances équivalentes  $R_{\text{eq}}(b) \gg R(b)$ . Dans la région distale,  $(1 - k_+^{-1})^{-1} \geq k_-$ , la résistance des branches est dominante dans leurs résistances équivalentes  $R_{\text{eq}}(b) \approx R(b)$ .

#### 4.C.1 Région proximale $(1 - k_+^{-1})^{-1} < k_-$

En tenant compte des hypothèses sur l'écoulement de la région proximale,  $\Phi(b) = 2^{-g(b)}\Phi_0$  car la résistance des branches est négligeable dans leurs résistances équivalentes  $R_{\text{eq}}(b) \gg R(b)$ , nous pouvons estimer le ratio entre les cisaillements  $\sigma$  des branches mère et filles.

$$\frac{\sigma(D_{\pm}(b))}{\sigma(b)} = \frac{\Phi(D_{\pm}(b))}{\Phi(b)} \frac{A(b)^{\frac{3}{2}}}{A(D_{\pm}(b))^{\frac{3}{2}}} \quad (4.34)$$

$$= 2^{g(b)-g(D_{\pm}(b))} \frac{A(b)^{\frac{3}{2}}}{A(D_{\pm}(b))^{\frac{3}{2}}} \quad (4.35)$$

D'après l'équation sur  $g$  (4.2) et le ratio entre les diamètres des branches mère et filles  $h_{\pm}$ , nous pouvons réécrire la dernière équation :

$$\frac{\sigma(D_{\pm}(b))}{\sigma(b)} = 2^{\frac{16}{g_{\pm}}} h_{\pm}(b)^{-3} \quad (4.36)$$

D'après cette équation, nous pouvons prédire si le cisaillement augmente ou diminue à chaque bifurcation :

$$h_+(b) < 2^{-\frac{16}{3g_+}} \Leftrightarrow \sigma(D_+(b)) > \sigma(b) \quad (4.37)$$

$$h_-(b) < 2^{-\frac{16}{3g_-}} \Leftrightarrow \sigma(D_-(b)) > \sigma(b) \quad (4.38)$$

En sachant que la répartition du cisaillement est croissante au début de l'arbre et a tendance à être concave, les premiers ratios  $h_{\pm}$  devraient satisfaire ces deux conditions. Or, compte tenu que  $\frac{16}{g_+} < \frac{16}{g_-}$ , nous pouvons déjà déterminer une région avec un étalement du cisaillement. Dans le cas où (4.37) est faux et (4.38) est vrai, nous avons forcément un étalement de la répartition du cisaillement.

#### 4.C.2 Région distale $(1 - k_+^{-1})^{-1} \geq k_-$

Dans la région distale nous considérons que  $R_{\text{eq}}(b) \approx R(b)$ . Ainsi la répartition du débit est simplifiée :

$$\frac{\Phi(D_{\pm}(b))}{\Phi(b)} = \frac{R_{\text{eq}}(D_{\mp}(b))}{R_{\text{eq}}(D_+(b)) + R_{\text{eq}}(D_-(b))} \quad (4.39)$$

$$\approx \frac{R(D_{\mp}(b))}{R(D_+(b)) + R(D_-(b))} \quad (4.40)$$

$$\approx \frac{k_{\mp}(b)}{k_+(b) + k_-(b)} \quad (4.41)$$

En intégrant ce rapport dans le ratio du cisaillement (4.34) et en utilisant les ratios de diamètre  $h_{\pm}$ , nous en obtenons une estimation :

$$\frac{\sigma(D_{\pm}(b))}{\sigma(b)} \approx \frac{k_{\mp}(b)}{k_+(b) + k_-(b)} h_{\pm}(b)^{-3} \quad (4.42)$$

En utilisant l'expression de  $k_{\pm}$  et en supposant que le ratio entre longueurs est proche de celui entre diamètre,  $\frac{L(D_{\pm}(b))}{L(b)} \approx h_{\pm}(b)$ , nous déterminons que le cisaillement est identique entre branches filles :

$$\frac{\sigma(D_{\pm}(b))}{\sigma(b)} \approx \frac{h_+(b)^{-3} h_-(b)^{-3}}{h_+(b) + h_-(b)} \quad (4.43)$$

Dans ce cas, il y a forcément étalement de la répartition du cisaillement car les deux branches filles n'ont pas le même coefficient de génération  $g$ .

De plus, nous pouvons reconnaître la condition d'appartenance à la région distale. Ainsi, le cisaillement ne peut que diminuer à chaque bifurcation.

$$\frac{\sigma(D_{\pm}(b))}{\sigma(b)} \approx \frac{h_+(b)^{-3} h_-(b)^{-3}}{h_+(b) + h_-(b)} \approx \frac{k_+ k_-}{k_+ + k_-} \leq 1 \quad (4.44)$$

## 5. CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Ces recherches nous ont permis d'améliorer notre compréhension de la situation physique et physiologique de l'arbre bronchique lors de l'expiration. Le cisaillement, moteur du déplacement du mucus pendant des manipulations kinésithérapiques, adopte une répartition en forme de "cloche" exponentielle le long de l'arbre, avec un maximum situé dans les générations intermédiaires. Ce comportement est dû à l'évolution particulière du ratio de diamètre dans l'arbre avec un faible *ratio proximal* et un fort *ratio distal*. Le débit à la trachée et la pression dans les tissus entourant les branches ont chacun une influence particulière sur l'évolution du ratio et donc sur la répartition du cisaillement. La pression dans les tissus entourant les branches influence surtout la valeur du maximum de cisaillement, tandis que le débit à la trachée influence la valeur du maximum du cisaillement et sa position dans l'arbre.

Les situations des cas symétrique et asymétrique sont comparables si on indexe les branches en fonction du coefficient de génération et non en fonction de la génération. Le coefficient de génération représente la génération apparente de la branche, deux branches de même coefficient ont des propriétés identiques (longueur, compliance etc...). Dans l'arbre symétrique, le coefficient de génération est identique à la génération. Toutefois, dans le cas asymétrique, les répartitions de cisaillement et de débit subissent un étalement, surtout dans la région distale, lorsque le cisaillement commence à décroître. Cet étalement semble avoir un lien avec le poids des résistances des branches dans la résistance équivalente de leurs sous-arbres. Toutefois la nature de ce lien reste encore à découvrir.

Lorsque les effets d'inertie sont présents, ils altèrent le comportement du cisaillement de la région proximale et, s'ils sont suffisamment importants, rapprochent le maximum de cisaillement vers premières générations. notre étude a montré que, dans ce cas, le cisaillement est composé du cisaillement visqueux, lié à la viscosité du fluide, et du cisaillement inertiel, lié à sa densité dû aux effets d'inertie. Le comportement du cisaillement inertiel est similaire à celui du cisaillement visqueux, en forme de "cloche", mais avec un maximum plus proximal que celui du cisaillement visqueux. Dans le cas asymétrique, nous pensons que ce phénomène rapprochera aussi le début de l'étalement des répartitions. Ce phénomène fera l'objet d'une future étude.

Les résultats du cas symétrique sont suffisamment détaillés pour nous permettre de développer des modèles idéalisés de techniques de kinésithérapie respiratoire. Ces modèles ont été le moteur de grandes discussions avec des kinésithérapeutes. Ces discussions ont pointé d'autres questionnements qui pourront être étudiés ultérieurement : quels sont les effets des obstructions partielles dans les arbres asymétriques ? De l'inhomogénéité des pressions dans les tissus ? Et de celle des pressions au fond des acini ? Quelle est la sensibilité à la variation de topologie d'arbre ? Quelle est la répartition du cisaillement lors de l'inspiration ? Ces questions seront à développer lors d'études ultérieures. Certaines de ces questions nécessitent de développer d'autres modèles plus complexes qui augmentent les coûts numériques à leur étude. Le possible avantage de l'usage de ressources GPU par rapport au ressources CPU a déjà été étudié dans le cas symétrique.

L'étude du modèle de l'arbre taillé nous a guidés sur l'utilisation du coefficient de génération. De plus, nous avons pu mieux comprendre l'influence de la topologie d'arbre sur les propriétés globales de l'arbre, que ce soit géométriques ou dynamiques, et de leurs discontinuités dues aux changements de topologies d'arbre. Pour une asymétrie de branchement identique, différentes topologies d'arbre induisent des résistances équivalentes et des volumes différents.

De plus, entre deux topologies d'arbre voisines, la différence de résistance peut être plus ou moins importante. Ainsi, lorsque les performances respiratoires sont importantes pour la survie de l'espèce, certaines topologie d'arbre pourraient être moins sélectionnées par l'évolution, car moins robustes face aux variations de topologie d'arbre induites par le développement du poumon lors

de embryogenèse. Selon la taille caractéristique de l'espèce et des propriétés des acini, certaines valeurs du ratio d'asymétrie moyen ont plus de risque de générer ce type de topologie d'arbre. Ainsi du point de vue évolutif, certaines valeurs du ratio d'asymétrie apportent une meilleure robustesse des performances ventilatoires.

Les moyennes des ratios de diamètre que nous avons utilisées pour notre modèle sont trop élevées, en conséquence les arbres taillés par notre modèle sont trop grands. Il serait intéressant de faire une étude comparative entre l'arbre taillé et les arbres bronchiques mesurés, autant pour la topologie des arbres que pour les propriétés géométriques des branches. Cela permettrait d'estimer les paramètres qui définissent l'arbre taillé représentant le mieux l'arbre bronchique et l'étendu de leurs variations.

Enfin, nous pouvons envisager de travailler en 3D dans des géométries reconstruites par CT-scan et de calculer la distribution de la pression entourant les branches de l'arbre qui doivent alors être localisées dans l'espace. La distribution de la pression entourant les branches de l'arbre a déjà été étudiée en 1D par Brunengo et al.<sup>(6)</sup>.

## Bibliographie

- [1] P. Agostini and N. Knowles. Autogenic drainage : the technique, physiological basis and evidence. *Physiotherapy*, 93(2) :157–163, June 2007. ISSN 0031-9406. doi : 10.1016/j.physio.2006.07.005. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031940606001234>.
- [2] E. Agostoni and R. E. Hyatt. Static Behavior of the Respiratory System. In *Comprehensive Physiology*, pages 113–130. American Cancer Society, 2011. ISBN 978-0-470-65071-4. doi : 10.1002/cphy.cp030309. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cphy.cp030309>.
- [3] M. K. Baby, P. K. Muthu, P. Johnson, and S. Kannan. Effect of cigarette smoking on nasal mucociliary clearance : A comparative analysis using saccharin test. *Lung India : Official Organ of Indian Chest Society*, 31(1) :39–42, 2014. ISSN 0970-2113. doi : 10.4103/0970-2113.125894. URL <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3960807/>.
- [4] S. F. Barré, D. Haberthür, T. P. Cremona, M. Stampanoni, and J. C. Schittny. The total number of acini remains constant throughout postnatal rat lung development. *American Journal of Physiology-Lung Cellular and Molecular Physiology*, 311(6) :L1082–L1089, Oct. 2016. ISSN 1040-0605. doi : 10.1152/ajplung.00325.2016. URL <https://journals.physiology.org/doi/full/10.1152/ajplung.00325.2016>. Publisher : American Physiological Society.
- [5] N. Berend, A. C. Rynell, and H. E. Ward. Structure of a human pulmonary acinus. *Thorax*, 46(2) :117–121, Feb. 1991. ISSN 0040-6376. doi : 10.1136/thx.46.2.117. URL <http://thorax.bmj.com/cgi/doi/10.1136/thx.46.2.117>.
- [6] M. Brunengo, B. R. Mitchell, B. Rousselet, and B. Mauroy. Optimization of the efficiency of the High Frequency Chest Wall Oscillation technique in a mathematical model of the lung. *preprint*, page 30, 2021.
- [7] A. Buess, B. Sobac, B. Mauroy, and B. haut. Energy dissipation in an asymmetric tracheo-bronchial tree : a CFD analysis. In *27th Canadian Congress of Applied Mechanics*, Sherbrooke, Canada, May 2019. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02389779>.
- [8] X. M. Bustamante-Marin and L. E. Ostrowski. Cilia and Mucociliary Clearance. *Cold Spring Harbor Perspectives in Biology*, 9(4), Apr. 2017. ISSN 1943-0264. doi : 10.1101/cshperspect.a028241. URL <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5378048/>.
- [9] R. Clément and B. Mauroy. An archetypal mechanism for branching organogenesis. *Phys. Biol.*, 11(1) :016003, Jan. 2014. ISSN 1478-3967, 1478-3975. doi : 10.1088/1478-3975/11/1/016003. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1478-3975/11/1/016003>.
- [10] R. Clément, P. Blanc, B. Mauroy, V. Sapin, and S. Douady. Shape Self-Regulation in Early Lung Morphogenesis. *PLOS ONE*, 7(5) :e36925, May 2012. ISSN 1932-6203. doi : 10.1371/journal.pone.0036925. URL <https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0036925>. Publisher : Public Library of Science.

- [11] R. Clément, S. Douady, and B. Mauroy. Branching geometry induced by lung self-regulated growth. *Phys. Biol.*, 9(6) :066006, Dec. 2012. ISSN 1478-3967, 1478-3975. doi : 10.1088/1478-3975/9/6/066006. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1478-3975/9/6/066006>.
- [12] E. J. Crampin, M. Halstead, P. Hunter, P. Nielsen, D. Noble, N. Smith, and M. Tawhai. Computational physiology and the physiome project. *Experimental Physiology*, 89(1) :1–26, 2004. ISSN 1469-445X. doi : <https://doi.org/10.1113/expphysiol.2003.026740>. URL <https://physoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1113/expphysiol.2003.026740>.
- [13] A. Farnoud, H. Tofighian, I. Baumann, G. J. M. Garcia, O. Schmid, E. Gutheil, and M. M. Rashidi. Large eddy simulations of airflow and particle deposition in pulsating bi-directional nasal drug delivery. *Physics of Fluids*, page 16, 2020.
- [14] M. Filoche and M. Florens. The stationary flow in a heterogeneous compliant vessel network. *J. Phys. : Conf. Ser.*, 319 :012008, Sept. 2011. ISSN 1742-6596. doi : 10.1088/1742-6596/319/1/012008. URL <http://stacks.iop.org/1742-6596/319/i=1/a=012008?key=crossref.3c11f8d896e3850b9a7ae9e0c386d33b>.
- [15] M. Florens, B. Sapoval, and M. Filoche. An anatomical and functional model of the human tracheobronchial tree. *Journal of Applied Physiology*, 110(3) :756–763, Mar. 2011. ISSN 8750-7587, 1522-1601. doi : 10.1152/jappphysiol.00984.2010. URL <https://www.physiology.org/doi/10.1152/jappphysiol.00984.2010>.
- [16] M. Florens, B. Sapoval, and M. Filoche. The optimal branching asymmetry of a bidirectional distribution tree. *Computer Physics Communications*, 182(9) :1932–1936, Sept. 2011. ISSN 0010-4655. doi : 10.1016/j.cpc.2010.11.008. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465510004546>.
- [17] W. M. Foster, E. Langenback, and E. H. Bergofsky. Measurement of tracheal and bronchial mucus velocities in man : relation to lung clearance. *Journal of Applied Physiology*, 48(6) :965–971, June 1980. ISSN 8750-7587. doi : 10.1152/jappl.1980.48.6.965. URL <https://journals.physiology.org/doi/abs/10.1152/jappl.1980.48.6.965>. Publisher : American Physiological Society.
- [18] B. Haefeli-Bleuer and E. R. Weibel. Morphometry of the human pulmonary acinus. *The Anatomical Record*, 220(4) :401–414, 1988. ISSN 1097-0185. doi : <https://doi.org/10.1002/ar.1092200410>. URL <https://anatomypubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/ar.1092200410>. eprint : <https://anatomypubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/ar.1092200410>.
- [19] J. C. Ho, K. N. Chan, W. H. Hu, W. K. Lam, L. Zheng, G. L. Tipoe, J. Sun, R. Leung, and K. W. Tsang. The effect of aging on nasal mucociliary clearance, beat frequency, and ultrastructure of respiratory cilia. *American Journal of Respiratory and Critical Care Medicine*, 163(4) :983–988, Mar. 2001. ISSN 1073-449X. doi : 10.1164/ajrccm.163.4.9909121.
- [20] S. Kabilan, C.-L. Lin, and E. A. Hoffman. Characteristics of airflow in a CT-based ovine lung : a numerical study. *Journal of Applied Physiology*, 102(4) :1469–1482, Apr. 2007. ISSN 8750-7587. doi : 10.1152/jappphysiol.01219.2005. URL <https://journals.physiology.org/doi/full/10.1152/jappphysiol.01219.2005>.
- [21] C. Karamaoun, B. Sobac, B. Mauroy, A. V. Muylem, and B. Haut. New insights into the mechanisms controlling the bronchial mucus balance. *PLOS ONE*, 13(6) :e0199319, June 2018. ISSN 1932-6203. doi : 10.1371/journal.pone.0199319. URL <https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0199319>. Publisher : Public Library of Science.

- [22] M. King. Physiology of mucus clearance. *Paediatric Respiratory Reviews*, 7 :S212–S214, Jan. 2006. ISSN 15260542. doi : 10.1016/j.prrv.2006.04.199. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1526054206002442>.
- [23] S. K. Lai, Y.-Y. Wang, D. Wirtz, and J. Hanes. Micro- and macrorheology of mucus. *Advanced Drug Delivery Reviews*, 61(2) :86–100, Feb. 2009. ISSN 0169-409X. doi : 10.1016/j.addr.2008.09.012. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169409X08002603>.
- [24] R. K. Lambert, T. A. Wilson, R. E. Hyatt, and J. R. Rodarte. A computational model for expiratory flow. *J Appl Physiol Respir Environ Exerc Physiol*, 52(1) :44–56, Jan. 1982. ISSN 0161-7567. doi : 10.1152/jappl.1982.52.1.44.
- [25] D. Leary, T. Winkler, A. Braune, and G. N. Maksym. Effects of airway tree asymmetry on the emergence and spatial persistence of ventilation defects. *Journal of Applied Physiology*, 117(4) :353–362, Aug. 2014. ISSN 8750-7587, 1522-1601. doi : 10.1152/jappphysiol.00881.2013. URL <http://jap.physiology.org/content/117/4/353>.
- [26] P. W. Longest, K. Bass, R. Dutta, V. Rani, M. L. Thomas, A. El-Achwah, and M. Hindle. Use of computational fluid dynamics deposition modeling in respiratory drug delivery. *Expert opinion on drug delivery*, 16(1) :7–26, Jan. 2019. ISSN 1742-5247. doi : 10.1080/17425247.2019.1551875. URL <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC6529297/>.
- [27] B. Mauroy. *Viscosity : an architect for the respiratory system ?* Habilitation à diriger des recherches, Université de Nice-Sophia Antipolis, Dec. 2014. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01139846>.
- [28] B. Mauroy, M. Filoche, E. R. Weibel, and B. Sapoval. An optimal bronchial tree may be dangerous. *Nature*, 427(6975) :633–636, Feb. 2004. ISSN 0028-0836, 1476-4687. doi : 10.1038/nature02287. URL <http://www.nature.com/articles/nature02287>.
- [29] B. Mauroy, C. Fausser, D. Pelca, J. Merckx, and P. Flaud. Toward the modeling of mucus draining from the human lung : role of the geometry of the airway tree. *Physical Biology*, 8(5) :056006, Oct. 2011. ISSN 1478-3975. doi : 10.1088/1478-3975/8/5/056006. URL <http://stacks.iop.org/1478-3975/8/i=5/a=056006?key=crossref.4a7ba4c6a63fa409af6c6b3114263ff2>.
- [30] B. Mauroy, P. Flaud, D. Pelca, C. Fausser, J. Merckx, and B. R. Mitchell. Toward the modeling of mucus draining from human lung : role of airways deformation on air-mucus interaction. *Frontiers in Physiology*, 6, Aug. 2015. ISSN 1664-042X. doi : 10.3389/fphys.2015.00214. URL <http://journal.frontiersin.org/Article/10.3389/fphys.2015.00214/abstract>.
- [31] S. Miller, D. O. Hall, C. B. Clayton, and R. Nelson. Chest physiotherapy in cystic fibrosis : a comparative study of autogenic drainage and the active cycle of breathing techniques with postural drainage. *Thorax*, 50(2) :165–169, Feb. 1995. ISSN 0040-6376, 1468-3296. doi : 10.1136/thx.50.2.165. URL <https://thorax.bmj.com/content/50/2/165>. Publisher : BMJ Publishing Group Ltd Section : Research Article.
- [32] H. Moghadas, O. Abouali, A. Faramarzi, and G. Ahmadi. Numerical investigation of septal deviation effect on deposition of nano/microparticles in human nasal passage. *Respiratory Physiology & Neurobiology*, 177(1) :9–18, June 2011. ISSN 15699048. doi : 10.1016/j.resp.2011.02.011. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1569904811000619>.
- [33] F. Noël. *Influence of the ventilation on the transport properties in the healthy and inflamed lung*. PhD Thesis, Université Côte d’Azur, Nice, France, 2021.

- [34] F. Noël and B. Mauroy. Interplay Between Optimal Ventilation and Gas Transport in a Model of the Human Lung. *Frontiers in Physiology*, 10, 2019. ISSN 1664-042X. doi : 10.3389/fphys.2019.00488. URL <https://doi.org/10.3389/fphys.2019.00488>.
- [35] F. Noël, C. Karamaoun, J. A. Dempsey, and B. Mauroy. The origin of the allometric scaling of lung's ventilation in mammals. *arXiv :2005.12362 [q-bio]*, in revision in PCI MCB, Aug. 2020. URL <http://arxiv.org/abs/2005.12362>.
- [36] T. J. Pedley, R. C. Schroter, and M. F. Sudlow. The prediction of pressure drop and variation of resistance within the human bronchial airways. *Respiration Physiology*, 9(3) : 387–405, June 1970. ISSN 0034-5687. doi : 10.1016/0034-5687(70)90094-0. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0034568770900940>.
- [37] C. G. Phillips and S. R. Kaye. Diameter-based analysis of the branching geometry of four mammalian bronchial trees. *Respiration Physiology*, 102(2) :303–316, Dec. 1995. ISSN 0034-5687. doi : 10.1016/0034-5687(95)00056-9. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0034568795000569>.
- [38] J. Pryor. Physiotherapy for airway clearance in adults. *European Respiratory Journal*, 14 (6) :1418–1424, Dec. 1999. ISSN 00000000, 09031936. doi : 10.1183/09031936.99.14614189. URL <http://erj.ersjournals.com/content/14/6/1418>.
- [39] O. Raabe, H. Yeh, G. Schum, and R. Phalen. Tracheobronchial Geometry : Human, Dog, Rat, Hamster, Mar. 1976. URL <http://mae.engr.ucdavis.edu/wexler/lungs/LF53-Raabe/>.
- [40] R. Ramchandani, J. H. T. Bates, X. Shen, B. Suki, and R. S. Tepper. Airway branching morphology of mature and immature rabbit lungs. *Journal of Applied Physiology*, 90(4) : 1584–1592, Apr. 2001. ISSN 8750-7587, 1522-1601. doi : 10.1152/jappl.2001.90.4.1584. URL <https://www.physiology.org/doi/10.1152/jappl.2001.90.4.1584>.
- [41] M. H. Schöni. Autogenic drainage : a modern approach to physiotherapy in cystic fibrosis. *J R Soc Med*, 82(Suppl 16) :32–37, 1989. ISSN 0141-0768. URL <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1291917/>.
- [42] J. P. Schreider and O. G. Raabe. Structure of the human respiratory acinus. *American Journal of Anatomy*, 162(3) :221–232, 1981. ISSN 1553-0795. doi : <https://doi.org/10.1002/aja.1001620304>. URL <https://anatomypubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/aja.1001620304>. eprint : <https://anatomypubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/aja.1001620304>.
- [43] M. H. Tawhai and P. J. Hunter. Modeling Water Vapor and Heat Transfer in the Normal and the Intubated Airways. *Annals of Biomedical Engineering*, 32(4) :609–622, Apr. 2004. ISSN 1573-9686. doi : 10.1023/B:ABME.0000019180.03565.7e. URL <https://doi.org/10.1023/B:ABME.0000019180.03565.7e>.
- [44] M. H. Tawhai, P. Hunter, J. Tschirren, J. Reinhardt, G. McLennan, and E. A. Hoffman. CT-based geometry analysis and finite element models of the human and ovine bronchial tree. *Journal of Applied Physiology*, 97(6) :2310–2321, Dec. 2004. ISSN 8750-7587. doi : 10.1152/japplphysiol.00520.2004. URL <https://www.physiology.org/doi/full/10.1152/japplphysiol.00520.2004>.
- [45] E. R. Weibel. *The Pathway for Oxygen : Structure and Function in the Mammalian Respiratory System*. Harvard University Press, 1984. ISBN 978-0-674-65791-5. Google-Books-ID : OiDKzm9zmqz8C.
- [46] J. B. West. *Respiratory Physiology : The Essentials*. Lippincott Williams and Wilkins, Philadelphia, 9th revised edition edition, Aug. 2011. ISBN 978-1-60913-640-6.