



**HAL**  
open science

# Quelques interactions entre dynamique et analyse sur les variétés non-compactes à courbure négative

Samuel Tapie

► **To cite this version:**

Samuel Tapie. Quelques interactions entre dynamique et analyse sur les variétés non-compactes à courbure négative. Géométrie différentielle [math.DG]. Université de Nantes, 2020. tel-03227946

**HAL Id: tel-03227946**

**<https://hal.science/tel-03227946>**

Submitted on 17 May 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Mémoire présenté à l'Université de Nantes  
en vue d'obtenir  
l'HABILITATION À DIRIGER LES RECHERCHES  
préparé au Laboratoire de Mathématiques Jean Leray  
UMR 6629 CNRS - Université de Nantes*

# Quelques interactions entre dynamique et analyse sur les variétés non-compactes à courbure négative

**Samuel TAPIE**

Habilitation soutenue le **23 octobre 2020**, devant le jury :

<i>Rapporteurs</i>	Richard CANARY	University of Michigan (USA)
	Colin GUILLARMOU	CNRS - Université Paris Saclay
	François LEDRAPPIER	CNRS - Université de Paris
<i>Examineurs</i>	Viviane BALADI	CNRS - Université de Paris
	Werner BALLMANN	Max Planck Institute für Mathematik, Bonn (Allemagne)
	Françoise DAL'BO	Université de Rennes 1
	Gabriel RIVIÈRE	Université de Nantes



# Remerciements

Cette partie est traditionnellement l'espace de liberté que liront la plupart des auditeurs de la soutenance, qui sont parfois éloignés des détails mathématiques du reste du texte. Pour les thèses du Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, cette tradition a été érigée jusqu'au niveau de l'écriture d'un chapitre supplémentaire du mémoire, dont les qualités littéraires sont souvent très riches. Bien que cette habilitation présente des travaux réalisés sur une période nettement plus longue qu'une thèse, je ne me sens pas de taille à rivaliser avec mes jeunes collègues en ce qui concerne cet exercice d'écriture non-mathématique, et je serai donc plus sobre.

Je tiens tout d'abord à remercier ceux qui m'ont fait l'honneur d'évaluer mon travail de ces dix dernières années, Richard Canary, Colin Guillarmou et François Ledrappier qui ont accepté de rapporter sur mon manuscrit (et implicitement sur les résultats qu'il présente), et Viviane Baladi, Werner Ballmann, Françoise Dal'bo et Gabriel Rivière devant qui je présente aujourd'hui mes travaux. Vos travaux, anciens ou récents, ont souvent été une source d'inspiration pour les miens et je suis heureux (et un peu fier et intimidé) aujourd'hui de pouvoir vous exposer quelques uns de mes résultats. Merci également pour votre soutien dans le processus qui a mené jusqu'à cette soutenance malgré les contraintes parfois pénibles, qu'elles soient liées au Covid19 ou simplement à l'administration universitaire.

Les travaux présentés ici sont le fruit d'une année très stimulante au Hausdorff Center de Bonn, puis de dix riches années au Laboratoire de Mathématiques Jean Leray. Le soutien de ces laboratoires et de leurs membres aura été bien sûr essentiel tout au long de cette période. Je parlerai surtout par la suite de mes collègues chercheurs, qui influent directement sur les travaux que je vous présente. Mais je dois beaucoup à tous ceux qui rendent possible au quotidien nos actions de recherche, d'enseignement et de diffusion de la science, notamment les gestionnaires, les bibliothécaires et les informaticiens sans qui notre quotidien d'enseignants-chercheurs seraient bien difficiles. La liste est longue de ceux qui nous soutiennent, tant de ceux qui sont encore à nos côtés que de celles qui sont parties, en retraite ou parce qu'elles n'avaient pas eu la chance d'obtenir un contrat pérenne. Merci à vous toutes et tous.

Ce mémoire traite essentiellement de travaux postérieurs au doctorat que j'avais eu la chance de faire sous la direction de Gérard Besson et Gilles Courtois. Comme lors de ma thèse, ils sont essentiellement consacrés au flot géodésique et au laplacien sur les variétés riemanniennes, sur fond de groupe fondamental et de contrôles de courbure. Les (nombreux) héritiers de Marcel Berger, à qui je dois mon entrée dans les mathématiques modernes, souriront certainement : les questions favorites du vieux maître ont encore de belles années devant elles. Merci à tous ceux qui m'ont plongé dans cet univers.

Loin de certains clichés du mathématicien perdu dans ses pensées solitaires, la plupart d'entre nous vivons notre métier de chercheur de façon très collective. Les collègues rencontrés, leurs questions, leur soutien, les discussions et les collaborations ont été les principaux moteurs de l'ensemble de mon travail. Il ne m'est pas possible de remercier ici tous ceux dont l'influence a été importante, mais je tiens tout de même à en nommer quelques uns.

Ce mémoire n'existerait tout simplement pas sans l'amitié et le soutien permanent, depuis plus de 10 ans, de Barbara Schapira et Gilles Carron.

Barbara m'a accueilli dans le monde universitaire alors que j'y étais un débutant plein d'enthousiasme qui ne savait ni écrire un article de maths ni utiliser correctement le théorème ergodique de Birkhoff. Par son rôle de «grande soeur mathématique», elle a largement contribué aux choix humains et scientifiques qui m'ont rendu heureux depuis mon arrivée à Nantes. Nous avons eu la chance qu'un travail de collaboration assez classique (l'étude de la régularité de l'entropie lors de la variation d'une métrique) débouche sur la découverte d'un concept à l'intérêt majeur (l'entropie à l'infini), qui nous a permis de résoudre différentes questions auxquelles nous avions essayé de réfléchir auparavant. Les problèmes que nous souhaitons résoudre ensemble ne font que s'accumuler depuis. Nos résultats progressent semaines après semaines malgré nos multiples contraintes non-mathématiques, et j'espère que cette collaboration riche tant sur le plan humain que scientifique se poursuivra longtemps.

C'est notamment grâce à Gilles que j'ai eu la chance d'être recruté à Nantes, ce qui m'a permis de développer (entre autres activités scientifiques) les travaux de recherche dont je vous présente aujourd'hui des extraits. La porte de son bureau, toujours ouverte, me permet de profiter presque chaque jour de sa connaissance exceptionnelle de toutes les branches de mathématiques. Combien de fois, notamment dans mes premières années, lui ai-je présenté mes intuitions et les problèmes auxquels j'étais confronté? La réponse était presque invariablement «*As-tu essayé de faire... (\*) ?*». Quelques semaines plus tard, il s'avérait toujours que (\*) était la bonne idée pour débloquer la difficulté. Quand face à un résultat important dont je ne comprenais pas la preuve, j'allais lui présenter mes difficultés, j'apprenais souvent que «*C'est parce que la bonne preuve, c'est... (\*\*)*». Et de fait, (\*\*) était bien plus clair que toutes les références que j'avais pu trouver dans la littérature. Au delà de la profondeur inimaginable

de sa maîtrise des mathématiques, sa disponibilité et sa bonté pour tous ceux qui ont besoin de lui, combinées avec son exigence d'une honnêteté sans faille sur les plans mathématique, professionnel et humain et ses prises de positions fortes sont des exemples riches à suivre. Son soutien pour mes autres activités scientifiques, notamment d'enseignement et de diffusion des mathématiques, a été précieux.

J'ai retrouvé par la suite ce mélange de qualités mathématiques et humaines exceptionnelles chez Sébastien Gouëzel. Collaborer avec eux est une chance incroyable pour progresser en mathématiques, quitte à des plonges techniques parfois vertigineux, et plus généralement pour y apprendre mon métier. J'espère leur ressembler un jour. Merci à vous.

Je dois aussi beaucoup à tous mes autres collaborateurs avec qui j'ai pu découvrir des pans de mathématiques que nous avons parfois fait avancer. Sans tous les lister, je pense en particulier à Pablo Suárez-Serrato avec qui j'ai découvert les joies de faire des mathématiques à plusieurs, ainsi qu'à Marc Peigné et Pierre Vidotto à qui je dois une première expérience d'encadrement doctoral très heureuse. Je pense aussi à tous ceux avec qui j'ai commencé des projets variés, parfois depuis longtemps, dont certains ont des résultats bien avancés, mais dont les travaux progressent plus ou moins lentement au grès de nos contraintes. Anne, Chris, Constantin, Matthieu, Pascal, Peter, Pierre, Vincent... ce mémoire n'est sans doute pas le lieu de les nommer, et ils se reconnaîtront sans difficulté. Je vous dois une large part de mes connaissances mathématiques, et j'espère que nombre des projets que nous avons commencés ensemble pourront être menés à terme, ou au moins jusqu'à des productions diffusables et exploitables par la communauté mathématique.

Entre 2009 et 2019, nous avons été dans la grande période des conférences et rencontres organisées par divers projets collectifs. Le GDR Platon et l'ANR Geode sur le plan de la dynamique géométrique, ainsi que la succession des projets ANR d'analyse géométrique (GeomEinstein, ACG, GTO, CCEM), m'ont fourni des occasions cruciales pour apprendre des mathématiques très variées, discuter activement avec de nombreux collègues et enrichir ma compréhension de la géométrie à l'interface avec la dynamique et l'analyse. Dans ces groupes de recherche, il est encore possible de passer du temps à plusieurs pour comprendre les résultats et techniques importants développés par d'autres, en oubliant (un peu) la pression à écrire nos propres travaux, et en faisant (un peu) abstraction de la surcharge chronique de nos métiers d'enseignants-chercheurs-vulgarisateurs-administrateurs. C'est une chance dont j'ai largement profité, je remercie tous ceux qui se sont chargés et se chargent encore de faire fonctionner ces réseaux, et je me demande avec un peu d'inquiétude ce qu'il en restera dans les années à venir.

La plupart des personnes avec qui je partage mon quotidien de mathématicien savent qu'il n'est pas seulement fait de problèmes de recherches, et que l'enseignement et la diffusion des mathématiques y tiennent une part centrale. L'équilibre entre ces différents pans de notre métier, auxquels s'ajoutent souvent un bon nombre d'heures "d'administration pédagogique et scientifique", est difficile à trouver pour la plupart d'entre nous. Je ne l'ai clairement jamais bien identifié.

J'aurais certainement produit plus d'articles de recherches si je ne m'étais pas autant investi dans des actions qui font découvrir les mathématiques à des publics variés. La réciproque est vraie aussi. Les ateliers interactifs de la Fête de la Science ou les riches collaborations artistes-chercheurs que nous avons développées depuis dix ans, notamment grâce au théâtre Athénor, nous permettent de faire plonger des jeunes (et moins jeunes) dans le monde de la recherche scientifique et artistique avec de très beaux résultats. Ces actions ne font pas partie de ce qui est évalué dans une Habilitation à Diriger les Recherches, mais sont pour moi des composantes essentielles de notre métier de chercheurs rémunérés par l'état. Je remercie tous ceux qui s'investissent, de près ou de loin, dans des initiatives qui permettent de faire comprendre l'intérêt de la science à des personnes moins favorisées que nos familles d'universitaires.

L'équilibre entre nos deux missions principales d'enseignement et de recherche est encore plus délicat. Enseigner à temps plein ne suffirait pas à transmettre correctement les programmes des formations que nous souhaitons pour nos étudiants, surtout avec les contraintes "pédagogiques" (purement administratives) pas toujours pertinentes qui nous sont souvent imposées. Faire de la recherche à temps plein ne suffirait pas non plus à faire avancer de façon satisfaisante l'ensemble des projets évoqués dans ce mémoire. Enseigner et chercher ; transmettre et faire avancer la connaissance : deux métiers passionnants et nécessaires, que nous avons la chance de faire malgré leurs exigences difficilement conciliables. Je suis persuadé, comme beaucoup d'entre nous, que je serais un meilleur enseignant et un meilleur chercheur si nous avions moins que «*192h équivalent TD*» à assurer chaque année. Cette option n'est pour le moment pas à l'ordre du jour et j'essaie de faire de mon mieux, bien que ce soit rarement satisfaisant. Je remercie donc vivement le CNRS qui nous permet régulièrement d'alléger nos services pour un semestre de recherche : la plupart des travaux de ce mémoire ont largement bénéficié de ces "délégations", où ont été obtenues plusieurs des principales avancées.

Il est traditionnel de terminer ces remerciements par ceux qui nous sont le plus cher. Je n'aurais pas fait ce métier (ni a fortiori écrit ce mémoire) sans l'amour et le soutien de Cécile, renouvelés chaque jour. Depuis que nous avons choisi de partager nos vies, nous avons certes chacun écrit une thèse et exercés nos métiers de médecin et d'enseignant-chercheurs, qui nécessitent tous deux un dévouement significatif pas toujours simple à concilier avec une vie de famille. Mais nous avons surtout construit un foyer heureux, riche de nos quatre enfants et de tout l'amour partagé. Ce serait bien peu dire que je la "remercie" : rendre grâce sérieusement pour tout ce que je lui dois ne rentrerait pas dans ces pages, et serait d'ailleurs déplacé. Quant à Raphaëlle, Timothée, Sarah et Clément, on peut certainement défendre l'idée que la vie avec eux a autant inspiré mes travaux de recherche que ce qu'elle a pu les ralentir. Beaucoup d'entre nous savent que la vie familiale et les exigences professionnelles sont souvent difficile à mener de front. Mais la vie qui grandit en chacun de nos enfants et l'amour que nous leur portons sont des mystères bien plus grands que les millions de pages de mathématiques que l'humanité a produit jusqu'ici. Je n'échangerais pas la chance d'être parent contre une bibliothèque de nouveaux théorèmes. En espérant pouvoir rester encore longtemps époux, père et mathématicien...





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>1 Dynamique et entropie en courbure négative</b>	<b>25</b>
1.1 Bord à l'infini et flot géodésique en courbure négative . . . . .	26
1.1.1 Bord visuel et ensemble limite . . . . .	26
1.1.2 Flot géodésique et paramétrisation de Hopf . . . . .	28
1.1.3 Mesures invariantes et courants géodésiques . . . . .	31
1.2 Exposants critiques et théorie de Patterson-Sullivan . . . . .	32
1.2.1 Entropie volumique et croissance orbitale . . . . .	32
1.2.2 Mesures de Patterson-Sullivan . . . . .	33
1.2.3 Mesure de Bowen-Margulis . . . . .	35
1.3 Variations autour de l'entropie d'une mesure invariante . . . . .	36
1.3.1 Entropie de Kolmogorov-Sinai . . . . .	36
1.3.2 Entropie de Katok . . . . .	37
1.3.3 Entropies de Brin-Katok . . . . .	38
1.3.4 Relations entre les entropies mesurées . . . . .	39
1.4 Entropie topologique et principe variationnel . . . . .	39
1.4.1 Entropie topologique . . . . .	39
1.4.2 Entropie et orbites fermées : de Bowen à Gurevic . . . . .	40
1.4.3 Principe variationnel et exposant critique . . . . .	41
1.5 Formalisme thermodynamique : pressions et mesure de Gibbs . . . . .	42
1.5.1 Pression géométrique et mesure de Patterson-Sullivan associée à un potentiel . . . . .	42
1.5.2 Mesures de Gibbs . . . . .	43
1.5.3 Pression variationnelle et principe variationnel . . . . .	44
<b>2 Entropies à l'infini et récurrence du flot géodésique</b>	<b>47</b>
2.1 Entropies et pressions à l'infini . . . . .	47
2.1.1 Groupe fondamental hors d'un compact . . . . .	47
2.1.2 Exposants critiques à l'infini . . . . .	48
2.1.3 Autres notions d'entropies et de pressions à l'infini . . . . .	49
2.1.4 Principe variationnel à l'infini . . . . .	49
2.2 Mesure de Bowen-Margulis et variétés Fortement Positivement Récurrenente . . . . .	52

2.2.1	Finitude de la mesure de Bowen-Margulis . . . . .	52
2.2.2	Trou critique et Récurrence positive forte . . . . .	53
2.3	Quelques exemples . . . . .	54
2.3.1	Variétés avec trou critique . . . . .	54
2.3.2	Potentiels avec trou critique . . . . .	57
2.3.3	Variétés sans trou critique . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Variations de l'entropie par changement de métrique</b>	<b>61</b>
3.1	Différentiabilité de l'entropie topologique . . . . .	62
3.1.1	Stratégie générale de preuve . . . . .	63
3.1.2	Courants géodésiques et changement de métrique . . . . .	64
3.1.3	Trou critique et continuité de la mesure de Bowen-Margulis	68
3.2	Rigidité entropique dans une classe conforme . . . . .	70
3.2.1	Quelques exemples de rigidité entropique . . . . .	70
3.2.2	Flot de Yamabe et rigidité entropique dans une classe conforme . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Bas du spectre et entropie en courbure négative</b>	<b>77</b>
4.1	Le Laplacien en géométrie riemannienne . . . . .	78
4.1.1	Le Laplacien . . . . .	78
4.1.2	Spectre du Laplacien sur une variété complète . . . . .	79
4.1.3	Laplacien et horosphères . . . . .	81
4.2	Bas du spectre et entropie . . . . .	83
4.2.1	Densité de Patterson-Sullivan et minoration de $\lambda_0$ . . . . .	84
4.2.2	Mesure de Bowen-Margulis et majoration de $\lambda_0$ . . . . .	85
4.2.3	Bas du spectre et entropie pour les espaces asymptotique- ment harmoniques . . . . .	90
4.3	Bas du spectre essentiel et entropie à l'infini . . . . .	92
4.3.1	Potentiels nuls à l'infini . . . . .	93
4.3.2	Minoration du bas du spectre essentiel . . . . .	96
4.3.3	Majoration du bas du spectre essentiel . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Fonctions de comptage en courbure négative</b>	<b>105</b>
5.1	Comptage orbital et mesures de Bowen-Margulis . . . . .	106
5.1.1	Comptage orbital et fonctions propres du Laplacien . . . . .	106
5.1.2	Comptage orbital en mesure infinie : transitions de phase pour les groupes de Schottky . . . . .	108
5.2	Comptage des géodésiques fermées . . . . .	111
5.2.1	Comptage non-pondéré des géodésiques fermées . . . . .	111
5.2.2	Comptage pondéré des géodésiques fermées . . . . .	113
<b>6</b>	<b>Revêtements, moyennabilité, bas du spectre et entropie</b>	<b>117</b>
6.1	Moyennabilité : définitions et exemples . . . . .	117
6.1.1	Groupes et actions moyennables . . . . .	117
6.1.2	Graphes et moyennabilités . . . . .	119
6.1.3	Exemples . . . . .	121

6.2	Bas du spectre et revêtements . . . . .	123
6.2.1	Moyennabilité et bas du spectre : un peu d'histoire . . . . .	123
6.2.2	Bas du spectre des revêtements non-moyennable . . . . .	125
6.3	Entropie et revêtements . . . . .	128
6.3.1	Entropie et revêtements, un peu d'histoire . . . . .	129
6.3.2	Entropie et revêtement en présence d'un trou critique . . . . .	130
<b>7</b>	<b>Quelques perspectives</b>	<b>137</b>
	<b>Quelques perspectives</b>	<b>137</b>
7.1	Spectre du Laplacien et dynamique . . . . .	137
7.1.1	Bas du spectre et entropie . . . . .	137
7.1.2	Nombre de valeurs propres isolées pour les surfaces convexe-cocompactes . . . . .	137
7.1.3	Bas du spectre explicite pour certains revêtements non-moyennables . . . . .	138
7.1.4	Interprétation dynamique des autres fonctions propres . . . . .	139
7.2	Propriétés dynamiques fines pour les variétés avec trou critique . . . . .	139
7.3	Mesure de Bowen-Margulis finie sans trou critique . . . . .	142
7.4	Propriétés ergodiques en courbure négative ou nulle . . . . .	143
7.4.1	Revêtements et moyennabilité pour les espaces localement symétriques de rang supérieur . . . . .	143
7.4.2	Variétés de rang 1 et billard de Sinai . . . . .	144
	<b>Bibliography</b>	<b>145</b>



# Travaux de l'auteur

## Travaux présentés dans ce mémoire

Contrairement à l'usage dans d'autres circonstances, cette liste n'est pas présentée par ordre alphabétique de premier auteur, mais par ordre d'écriture des articles.

**Tap11** *A variation formula for the entropy of convex-cocompact manifolds*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 31 (2011), 1849-1864

**SST12** *Conformal entropy rigidity through Yamabe flows*, avec P. Suárez-Serrato, Math. Annalen 353 (2012) 333-357

**RT13** *Exposants critiques et Moyennabilité*, avec T. Roblin, in *Géométrie ergodique* 61-92, Monographies de l'Enseignement Math 43 (2013), <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01729750v1>

**RSST15** *Dynamics and zeta functions on conformally compact manifolds*, avec J. Rowlett et P. Suárez-Serrato, Trans. Amer. Math. Soc. 367 (2015), 2459-2486

**RT15** *Critical exponent and bottom of the spectrum in pinched negative curvature*, avec T. Roblin, Mat. Res. Lett. 22 (2015), 929-944

**ST18** *Regularity of entropy, geodesic currents and entropy at infinity*, avec B. Schapira, à paraître aux Annales Scientifiques de l'E.N.S., <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01708495v1>

**PTV19** *Counting for some convergent groups*, avec M. Peigné et P. Vidotto, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01568931v1>

**CDST18** *Twisted Patterson-Sullivan measures and applications to amenability and coverings*, avec R. Coulon, R. Dougall and B. Schapira, septembre 2018, soumis pour publication, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01881897>

- ST19** *Narrow equidistribution and counting of closed geodesics on non-compact manifolds*, avec B. Schapira, à paraître à *Geometry, Groups and Dynamics*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02192686v1>
- GST20** *Pressure at infinity and strong positive recurrence in negative curvature*, avec S. Gouëzel et B. Schapira, juillet 2020, soumis pour publication, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02901142>
- Tap20a** *Bottom of the spectrum and dynamics in negative curvature, old and new*, en préparation
- SST20** *Yamabe Flow and conformal entropy rigidity on complete manifolds*, avec P. Suárez-Serrato, en préparation
- Tap20b** *Estimates for the bottom of the spectrum on non-amenable coverings*, en préparation

## Travaux non-présentés dans ce mémoire

- Tap09** *Bas du spectre du Laplacien et géométrie des variétés de volume infini*, Thèse de Mathématiques de l'Université Joseph Fourier, 2009, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00423371/fr/>
- Tap10** *Generic metrics, eigenfunctions and riemannian coverings of non compact manifolds*, pré-publication jamais soumise, <https://arxiv.org/abs/1001.2506>
- JRT19** *Discrete geometry and isotropic surfaces*, avec F. Jauberteau et Y. Rolin, Mémoire de la S.M.F n°161 (2019)
- ACT18**  *$A_\infty$  weights and compactness of conformal metrics under  $L^{n/2}$  curvature bounds*, avec C. Aldana et G. Carron, octobre 2018, à paraître à *Analysis & PDE*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01893599v1>
- GT20** *Critical exponents of normal subgroups in higher rank*, avec O. Glorieux, mai 2020, soumis pour publication, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02862820>

# Introduction

Ce mémoire, rédigé entre l'automne et l'hiver 2019 en vue de l'obtention de l'Habilitation à Diriger les Recherches, retrace une grande partie de mes travaux de recherche depuis la fin de ma thèse en 2009. Ils sont consacrés à la l'étude des variétés riemanniennes complètes et non-compactes, à travers les interactions entre quatre grands aspects de la géométrie riemannienne sur une telle variété  $(M, g)$  :

- sa topologie, et notamment l'action du groupe fondamental  $\Gamma = \pi_1(M)$  sur le revêtement universel  $(\widetilde{M}, g)$  ;
- des contrôles de courbure ;
- le comportement du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent  $S^g M$  ;
- le spectre du Laplacien  $\Delta_g$  agissant sur les fonctions sur  $M$ .

Ces interactions seront de plusieurs natures. Il s'agira dans certaines situations d'utiliser une bonne compréhension de la dynamique pour obtenir des propriétés analytiques sur notre variété (notamment des propriétés sur le Laplacien, son spectre et ses états propres). Dans d'autres situations, nous utiliserons des techniques d'analyse géométrique (propriétés spectrales, flots géométriques, représentations dans des espaces de Hilbert...) pour obtenir de nouveaux résultats sur la dynamique.

Ainsi, deux quantités associées à  $(M, g)$  jouent un rôle central dans ce mémoire : l'**exposant critique**  $\delta_\Gamma(g)$  qui mesure la croissance du groupe fondamental :

$$\delta_\Gamma(g) = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log \# \{ \gamma \in \Gamma ; R - 1 \leq d^g(o, \gamma o) \leq R \} \quad (1)$$

et qui pour les variétés à courbure sectionnelle négative est égal à l'**entropie topologique** du flot géodésique, et le **bas du spectre** du Laplacien

$$\lambda_0(M, g) = \inf \left\{ \frac{\int_M \|\nabla f\|^2 dV_g}{\int_M f^2 dV_g} ; f \in C_0^\infty(M, \mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\}. \quad (2)$$



Nous introduirons plusieurs autres notions d'entropies (voir Chapitre 1), toutes reliées entre elles, qui permettront d'obtenir des informations variées sur la dynamique. Nous nous intéresserons aussi à d'autres quantités spectrales, notamment le bas du spectre essentiel.

Dans cette introduction,  $(M, g)$  désignera toujours une variété complète à courbure sectionnelle négative pincée, dont le groupe fondamental est noté  $\Gamma$  agissant par isométries sur le revêtement universel  $(\widetilde{M}, g)$ . Nous notons  $p_\Gamma : \widetilde{M} \rightarrow M = \widetilde{M}/\Gamma$  l'application de revêtement universel.

Ce mémoire est consacré à l'étude de la géométrie des variétés non-compactes. Ainsi, les propriétés des variétés «*qui ne dépendent que de l'infini*» vont jouer un rôle crucial. Nous entendons par là les propriétés qui sont invariantes par des *modifications à support compact* de la variété riemannienne. Pour le spectre du Laplacien, ces propriétés à l'infini sont reflétées dans le *spectre essentiel*, qui est le complémentaire dans le spectre des valeurs propres isolées de multiplicité finie. Pour la dynamique du flot géodésique, c'est l'entropie à l'infini, et plus généralement la *pression à l'infini* en présence d'un potentiel, qui joueront ce rôle.

Nous avons introduit cette notion d'entropie à l'infini avec B. Schapira dans [ST18]. Nous présenterons un peu plus bas les différentes caractérisations de cette quantité que nous avons établies. Ce concept d'entropie à l'infini et les techniques qui y sont associées (notamment les propriétés de la dynamique lorsque l'entropie totale est strictement plus grande que l'entropie à l'infini) ont eu un impact majeur sur l'ensemble de mon travail de recherche. De nombreux problèmes auxquels je m'étais intéressé auparavant (entropie et bas du spectre, différentiabilité de l'entropie, rigidité entropique pour les variétés non-compactes, moyennabilité des revêtements et entropie...) ont pu être résolus de façon souvent optimale grâce à ce nouvel éclairage.

Dans ce mémoire, j'ai donc choisi de présenter l'ensemble de mes travaux (y compris certains plus anciens que [ST18]) après avoir introduit les notions de dynamique à l'infini, en espérant que cela donne un point de vue global plus efficace pour le lecteur. Il est certain que nous sommes loin d'avoir complètement exploité les nouveaux outils que nous avons bâtis autour de cette dynamique à l'infini. Nous présenterons au dernier chapitre plusieurs perspectives prometteuses qui reposent pour la plupart sur ces outils.

## Bas du spectre et entropie, anciens et nouveaux résultats

Nous ne citerons pas dans cette introduction tous les travaux qui ont inspiré ceux décrits dans ce mémoire. Voici le premier résultat célèbre qui relie Laplacien et flot géodésique, pour les variétés localement symétriques à courbure négative. Il a été démontré par Patterson pour les surfaces géométriquement finies ([Pat76]), puis Sullivan pour les variétés hyperboliques réelles ([Sul79, Sul84, Sul87]), et enfin généralisé aux autres variétés localement symétriques par Corlette ([Cor90]).

**Théorème 0.0.1** (Patterson, Sullivan, Corlette, voir Théo. 4.2.9). *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété localement symétrique à courbure sectionnelle strictement négative. Le bas du spectre du Laplacien sur  $(M, g)$  vérifie*

$$\lambda_0(M, g) = \begin{cases} \delta_\Gamma(h - \delta_\Gamma) & \text{si } \delta_\Gamma \geq \frac{h}{2} \\ \frac{h^2}{4} & \text{si } \delta_\Gamma \leq \frac{h}{2} \end{cases},$$

où  $h = h_{vol}(\widetilde{M}, g)$  est l'entropie volumique de  $(\widetilde{M}, g)$ .

Les preuves des premiers articles [Pat76] et [Sul79], qui n'étaient valides que pour des variétés *convexe-cocompactes*, reposaient sur un outil qui sera central dans tout ce mémoire : les densités de Patterson-Sullivan  $\nu^\Gamma = (\nu_x^\Gamma)_{x \in \widetilde{M}}$ , famille de mesures sur le bord à l'infini de  $(\widetilde{M}, g)$  qui encodent la dynamique du groupe  $\Gamma$ . Les preuves de [Sul87] et [Cor90], qui sont valables pour toutes les variétés localement symétriques, reposent sur la *théorie du potentiel* sur les espaces symétriques, notamment sur une connaissance explicite de leur noyau de la chaleur, que l'on ne peut avoir en général.

Nous proposons au Chapitre 4 une nouvelle preuve du Théorème 0.0.1, indépendante des précédentes, qui n'utilise pas la théorie du potentiel mais repose sur la théorie de Patterson-Sullivan. Cette nouvelle preuve a plusieurs avantages.

Tout d'abord, elle montre que le résultat est valable pour toutes les variétés *asymptotiquement harmoniques*, c'est à dire dont la courbure moyenne des horosphères est constante. Toutefois, les seuls exemples connus de variétés asymptotiquement harmoniques  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  qui vérifient  $\delta_\Gamma(g) > \frac{h_{vol}(\widetilde{M}, g)}{2}$  sont localement symétriques. Étant de nature plus géométrique et moins analytique, elle fournit des informations précises sur le lien entre entropie et bas du spectre pour les variétés à courbure négative non-localement symétriques (voir Théorème 4.2.1) en fonction de pincements sur la courbure. Ensuite, elle donne un critère purement dynamique pour le fait que le bas du spectre soit une valeur propre. Enfin, quand le bas du spectre est une valeur propre, elle fournit une expression explicite de la fonction propre associée. Expliquons ces derniers points.

Comme déjà mentionné, lorsque la courbure sectionnelle est négative pincée, l'exposant critique  $\delta_\Gamma(g)$  est égal à l'entropie topologique du flot géodésique, et donc par un résultat célèbre appelé *principe variationnel*, c'est aussi le supremum des entropies (au sens de Kolmogorov-Sinai) des mesures de probabilités invariantes par le flot. Lorsque ce supremum est atteint, il l'est par une unique mesure de probabilité, que nous appellerons la *mesure de Bowen-Margulis* normalisée. Nous dirons que  $(M, g)$  a une *mesure de Bowen-Margulis finie*. En effet, nous verrons au Chapitre 1 qu'une variété à courbure négative a toujours des mesures de Radon invariantes par le flot géodésique dites «*de Bowen-Margulis*», mais qui ne sont pas forcément finies. Lorsqu'elles sont finies, elles sont uniques à normalisation près, et un théorème célèbre d'Otal et Peigné (cf [OP04]) montre que la mesure de probabilité qui maximise l'entropie

pie est toujours de cette forme (quand elle existe). Voici le lien entre mesure de Bowen-Margulis et spectre du Laplacien que nous obtenons.

**Théorème 0.0.2** (cf [RT15] et Théo. 4.2.9). *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété localement symétrique à courbure sectionnelle strictement négative. Soit  $h = h_{\text{vol}}(\widetilde{M}, g)$  l'entropie volumique de  $(\widetilde{M}, g)$ .*

*Le bas du spectre du Laplacien  $\lambda_0(M, g)$  sur  $(M, g)$  est une valeur propre si et seulement si  $\delta_\Gamma > \frac{h}{2}$  et  $(M, g)$  admet une mesure de Bowen-Margulis finie. La fonction propre associée à  $\lambda_0(M, g)$  est alors donnée, à normalisation près, par*

$$\varphi_\Gamma : x \mapsto \|\nu_x^\Gamma\|,$$

où  $\nu^\Gamma = (\nu_x^\Gamma)_{x \in \widetilde{M}}$  est la densité de Patterson-Sullivan associée à  $\Gamma$ , et  $\tilde{x} \in p_\Gamma^{-1}(x)$ .

Le fait que  $x \mapsto \|\nu_x^\Gamma\|$  fournisse la première fonction propre des variétés localement symétriques *convexe-cocompactes* avait été observé par Sullivan ([Sul84], Prop. 4) en courbure constante et Corlette ([Cor90], Theo. 5.5) pour les autres espaces symétriques à courbure négative. Nous avons obtenu le Théorème 0.0.2 avec T. Roblin dans [RT15] dans le cas des variétés hyperboliques réelles. Nous avons besoin à l'époque d'utiliser les résultats de Sullivan pour traiter le cas des variétés de mesure de Bowen-Margulis infinie. Notre preuve est aujourd'hui valide pour tous les espaces localement symétriques à courbure négative et indépendante des travaux de Sullivan et Corlette grâce aux résultats sur le bas du spectre essentiel que nous présentons au prochain paragraphe. Là encore, nous montrons ce résultat pour toutes les variétés asymptotiquement harmoniques, mais sans savoir s'il existe des exemples dont le bas du spectre est une valeur propre et qui ne soient pas localement symétriques.

Le fait d'avoir, ou pas, une mesure de Bowen-Margulis finie est une propriété fondamentale du flot géodésique, dont de nombreux travaux ont montré le rôle crucial (voir en particulier le mémoire de Roblin [Rob03], où cette propriété est exploitée de façon systématique). Cette propriété est automatiquement vérifiée lorsque l'ensemble non-errant du flot est compact, mais ce mémoire est essentiellement consacré aux situations où il est non-compact. Nous allons voir maintenant que nous avons développé avec B. Schapira un outil puissant pour construire de très nombreux exemples ayant une mesure de Bowen-Margulis finie : les variétés *avec trou critique*.

## Entropie à l'infini : définition, caractérisations

Pour tout  $x, y \in \widetilde{M}$ , nous notons  $[xy] \subset \widetilde{M}$  l'unique segment  $g$ -géodésique qui relie  $x$  à  $y$ . Soit  $W \subset \widetilde{M}$  un compact. On pose

$$\Gamma_W = \{\gamma \in \Gamma ; \exists x, y \in K, [x, \gamma y] \cap \Gamma W \subset W \cup \gamma W\}.$$

C'est un sous-ensemble du groupe fondamental  $\Gamma = \pi_1(M)$ , qui encode (avec multiplicité bornée) les arcs géodésiques qui sortent de  $K = p_\Gamma(W) \subset M$  puis

y reviennent, à homotopie fixant  $K$  près. Notons  $\delta_{\Gamma_W}(g)$  l'exposant critique de cet ensemble (défini par l'analogie de (1)). L'**entropie à l'infini** de  $(M, g)$  est définie par

$$\delta_{\Gamma}^{\infty}(g) = \inf \left\{ \delta_{\Gamma_W}(g) ; W \subset \widetilde{M} \text{ compact} \right\}.$$

Lorsque l'ensemble non-errant est compact (on dit que la variété est *convexe-cocompacte*),  $\Gamma_W$  est fini dès lors que  $W$  est assez gros : on a donc  $\delta_{\Gamma}^{\infty}(g) = -\infty$ . Pour les variétés *géométriquement finies*, nous verrons à la Section 2.1.2 qu'il s'agit du plus grand exposant critique pour les sous-groupes paraboliques de  $\Gamma$ . Voici le résultat fondamental que nous avons établis dans [ST18].

**Théorème 0.0.3** (Schapira-T 2017, [ST18]). *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété riemannienne complète à courbure négative pincée, telle que  $\delta_{\Gamma}^{\infty}(g) < \delta_{\Gamma}(g)$ . Alors  $(M, g)$  admet une mesure de Bowen-Margulis finie.*

Nous dirons que  $(M, g)$  présente un **trou critique** lorsque  $\delta_{\Gamma}^{\infty}(g) < \delta_{\Gamma}(g)$ . On dit aussi (pour des raisons dynamiques profondes que nous ne détaillons pas ici) que le flot géodésique est **Fortement Positivement Récurrent** (l'acronyme anglais est SPR). Pour les variétés géométriquement finies, ce résultat avait été montré dans par Dal'bo, Otal et Peigné [DOP00]. Nous avons montré dans [ST18] que la plupart des exemples connus de variétés dont la mesure de Bowen-Margulis est finie ont un trou critique, à l'exception notable de certains *groupes de Schottky* décrits dans [Pei11] que nous présenterons à la Section 5.1.2. Nous avons également produit de nouveaux exemples.

Il est à noter que cette propriété de trou critique avait été introduite auparavant (indépendamment) par Arzhantseva, Cashen et Tao dans [ACT15], et étudiée sous le nom de *statistically convex-cocompact group* dans [Yan17]. Nous ne connaissions pas ces références à l'époque de la publication de [ST18]. Elles ne définissent pas l'entropie à l'infini, dont la première définition est à notre connaissance celle de notre article [ST18] et, simultanément mais indépendamment, celle de Velozo dans [Vel19].

Pour une mesure de probabilité  $m$  sur le fibré unitaire tangent  $S^g M$  invariante par le flot géodésique  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$ , nous notons  $h_{KS}(m)$  son entropie au sens de Kolmogorov-Sinai. Rappelons que l'entropie topologique est le supremum des  $h_{KS}(m)$  pour toutes les mesures de probabilité invariantes. Voici les deux caractérisations que nous avons établies [GST20], qui illustrent l'importance de cette notion pour la théorie ergodique du flot géodésique.

**Théorème 0.0.4** (Gouëzel-Schapira-T. 2019, Theo. 1.2 of [GST20], cf Théo. 2.1.5 below). *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété riemannienne complète à courbure négative pincée. Alors*

$$\delta_{\Gamma}^{\infty}(g) = \inf_{K \subset M} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \{h_{KS}(m) ; m \text{ proba. } g^t\text{-invariante, } m(K) \leq \varepsilon\},$$

où  $K \subset S^g M$  parcourt l'ensemble des compacts de  $S^g M$ .

Par ailleurs, si pour tout  $W \subset S^g M$  compact et tout  $R > 0$ , on note  $\mathcal{P}_W(R)$  l'ensemble des géodésiques périodiques  $p$  de longueur  $\ell^g(p)$  au plus  $R$  qui intersectent  $W$ , nous obtenons la caractérisation suivante de l'entropie à l'infini.

**Théorème 0.0.5** (Gouëzel-Schapira-T. 2019, Theo. 1.2 of [GST20], cf Théo. 2.1.5 below). *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété riemannienne complète à courbure négative pincée. Alors pour tout  $W \subset M$  compact dont l'intérieur intersecte l'ensemble non-errant du flot géodésique, on a*

$$\delta_\Gamma^\infty(g) = \inf_{K \subset M} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{R} \log \# \{p \in \mathcal{P}_W(R), \ell^g(K \cap p) \leq \varepsilon \ell^g(p)\}.$$

Ainsi, l'entropie à l'infini compte les géodésiques fermées qui passent par un compact fixé, mais passe une proportion de temps arbitrairement petite dans tout compact.

Sur une variété non-compacte  $(M, g)$ , le *bas du spectre essentiel* est le supremum du bas du spectre  $\lambda_0^{Dir}(M \setminus K, g)$  du Laplacien  $\Delta_g$  sur  $M \setminus K$  avec condition de Dirichlet au bord, où  $K \subset M$  parcourt tous les compacts de  $M$ . C'est le premier point du spectre du Laplacien sur  $(M, g)$  qui *ne dépend que de l'infini*. À l'aide des techniques développées dans [GST20], nous avons obtenu le théorème suivant, qui montre que pour les variétés localement symétriques, l'entropie à l'infini est relié au bas du spectre essentiel comme l'entropie l'est au bas du spectre.

**Théorème 0.0.6** (T. 2019, cf Théo 4.3.2). *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété localement symétrique à courbure sectionnelle strictement négative. Soit  $\delta_\Gamma^\infty = \delta_\Gamma^\infty(g)$  son entropie à l'infini. Le bas du spectre essentiel du Laplacien sur  $(M, g)$  vérifie*

$$\lambda_0^{ess}(M, g) = \begin{cases} \delta_\Gamma^\infty(h - \delta_\Gamma^\infty) & \text{si } \delta_\Gamma^\infty \geq \frac{h}{2} \\ \frac{h^2}{4} & \text{si } \delta_\Gamma^\infty \leq \frac{h}{2} \end{cases},$$

où  $h = h_{vol}(\widetilde{M}, g)$  est l'entropie volumique de  $(\widetilde{M}, g)$ .

Ce résultat, que nous montrons là encore pour toutes les variétés asymptotiquement harmoniques, a été prouvé pour la première fois dans ce mémoire. De ce fait le Chapitre 4 présente les détails de la preuve que nous ne présentons pas pour les autres résultats. Il sera publié dans [Tap20a]. Le corollaire suivant illustre une fois de plus le lien entre Laplacien et dynamique pour les variétés localement symétriques dont l'exposant critique est assez grand.

**Corollaire 0.0.7.** *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété à courbure sectionnelle strictement négative, où  $(\widetilde{M}, g)$  est un espace symétrique d'entropie volumique  $h$ . Le Laplacien sur  $(M, g)$  présente un trou spectral si et seulement si  $\delta_\Gamma(g) > \frac{h}{2}$  et  $\Gamma$  présente un trou critique, i.e.  $\delta_\Gamma(g) > \delta_\Gamma^\infty(g)$ .*

Notons que ce résultat était bien connu pour les variétés *géométriquement finies* localement symétriques pour lesquelles le bas du spectre essentiel est toujours  $\frac{h^2}{4}$ , cf [Ham04].

Notre preuve du Théorème 0.0.6 donne en fait un contrôle sur le bas du spectre essentiel pour les variétés à courbure variable en fonction de l'entropie à l'infini, voir Théo. 4.3.1. Elle repose de façon clé les résultats de [GST20] qui définissent la *pression à l'infini* et montrent les analogues des Théorèmes 0.0.3 et 0.0.4 en présence d'un potentiel. Nous présenterons la notion de *potentiel* et de *pression* à la fin du Chapitre 1, et la pression à l'infini avec ses propriétés au Chapitre 2.

## Dynamique des variétés avec trou critique

Nous avons défini les notions d'entropie à l'infini et de trou critique dans [ST18] alors que nous recherchions un critère permettant d'assurer la différentiabilité de l'entropie lors d'un changement de métrique sur une variété non-compacte. Il apparaît depuis qu'elles ont de nombreuses autres applications, pour lesquelles l'hypothèse de trou critique est souvent *optimale*.

Voici d'abord le résultat de régularité que nous obtenons, qui généralise les travaux de Katok, Knieper et Weiss [KKW91] et Flaminio [Fla95] dans le cas compact.

**Théorème 0.0.8** ([ST18], cf Théo. 3.1.2). *Soit  $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-1,1)}$  une famille de métriques riemanniennes complètes de classe  $C^2$  à courbure négative pincée sur une variété  $M$ . Supposons que la variation est globalement uniforme en topologie  $C^1$  (cf Définition 3.1.3) et qu'il existe  $a > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in (-1,1)$ , les courbures sectionnelles de  $g_\varepsilon$  vérifient  $K_{g_\varepsilon} \leq -a^2$ . Supposons de plus que  $(M, g_0)$  a un trou critique.*

*Alors pour  $\varepsilon$  proche de 0, la variété  $(M, g_\varepsilon)$  a aussi un trou critique, et l'entropie  $\varepsilon \mapsto h_{top}(g_\varepsilon)$  est  $C^1$ . Sa dérivée est donnée par*

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} h_{top}(g_\varepsilon) = -h_{top}(g_0) \times \int_{S^{g_0}M} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \|v\|^{g_\varepsilon} d\bar{m}_{BM}^{g_0}(v). \quad (3)$$

où  $\bar{m}_{BM}^{g_0}$  est la mesure de Bowen-Margulis normalisée pour le flot  $g_0$ -géodésique sur le fibré  $g_0$ -unitaire tangent  $S^{g_0}M$ .

La preuve de ce théorème a permis d'établir de nombreux liens nouveaux entre la dynamique du flot géodésique sur  $(M, g_1)$  et sur  $(M, g_2)$  dès lors que les métriques sont bi-Lipschitz et à courbure sectionnelle strictement négative. Nous les présenterons au Chapitre 3, ainsi que l'application suivante de cette formule de variation, qui est une adaptation au cas non-compact des résultats de [SST12a].

**Théorème 0.0.9** (Suárez-Serrato-T., 2018, [SST20], cf Théo 3.2.4). *Soit  $(M, g) = (\tilde{M}, g)/\Gamma$  une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle négative pincée ayant un trou critique. Soit  $g_Y = e^f g$  la métrique de Yamabe dans la classe conforme de  $g$ , i.e. telle que sa courbure scalaire vérifie en tout point*

$R_{g_Y} = -1$ . Alors les exposants critiques du groupe fondamental  $\Gamma = \pi_1(M)$  vérifient

$$\sqrt{|R_{max}|}\delta_\Gamma(g_Y) \leq \delta_\Gamma(g) \leq \sqrt{|R_{min}|}\delta_\Gamma(g_Y).$$

De plus, si  $\delta_\Gamma(g) = \sqrt{|R_{min}|}\delta_\Gamma(g_Y)$ , alors  $g = \frac{g_Y}{|R_{min}|}$ . De même, si  $\delta_\Gamma(g) = \sqrt{|R_{max}|}\delta_\Gamma(g_Y)$ , alors  $g = \frac{g_Y}{|R_{max}|}$

Voici enfin un résultat important, pour lequel l'hypothèse de trou critique est encore une fois optimale, qui conclut une longue histoire sur l'étude du lien entre exposants critiques et moyennabilité des revêtements.

**Théorème 0.0.10** (Coulon-Dougall-Schapira-T., [CDST18], cf Théo. 6.3.5). *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété à courbure sectionnelle strictement négative, avec trou critique. Alors pour tout sous-groupe  $\Gamma' < \Gamma$ , normal ou non, on a  $\delta_{\Gamma'}(g) = \delta_\Gamma(g)$  si et seulement si le revêtement  $p = \widetilde{M}/\Gamma' \rightarrow \widetilde{M}/\Gamma$  est moyennable, i.e. si  $\Gamma'$  est co-moyennable dans  $\Gamma$ .*

Nous avons en fait obtenu ce résultat dans le cadre beaucoup plus large d'un groupe  $\Gamma$  agissant proprement discontinûment sans point fixe sur un espace Gromov-hyperbolique. Nous présenterons au Chapitre 6 l'histoire de ce problème ainsi que les techniques de la preuve. Nous présenterons aussi des travaux antérieurs sur cette question où je m'étais intéressé au lien entre bas du spectre du Laplacien et moyennabilité des revêtements.

## Fonctions de comptage en courbure négative

Le Chapitre 5 est dédié à l'étude de deux grands problèmes de *comptage* pour une variété  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  complète non-compactes à courbure négative :

- le *comptage orbital*, c'est à dire pour  $x, y \in \widetilde{M}$ , établir des asymptotiques précises lorsque  $R \rightarrow +\infty$  de la fonction

$$N_\Gamma(x, y, R) = \#\{\gamma \in \Gamma ; d^g(x, \gamma y) \leq R\};$$

- le *comptage d'orbites fermées*, c'est à dire estimer lorsque  $R \rightarrow +\infty$  le cardinal de

$$\mathcal{P}_W(R) = \{p \text{ géodésique fermée ; } \ell^g(p) \leq R, p \cap W \neq \emptyset\},$$

où  $W \subset M$  est compact.

Dans le cas compact ou géométriquement fini, on s'intéresse classiquement au comptage orbital ou au comptage de *toutes* les géodésiques fermées de longueur inférieure à  $R$ . Pour une variété non-compacte, il y a en général un nombre infini de géodésiques fermées de longueurs uniformément bornées, d'où la restriction au comptage des géodésiques intersectant un compact fixé.

Voici deux résultats que nous obtenons, qui étendent des résultats connus pour les variétés géométriquement finies à des variétés non-compactes plus générales. Nous en présenterons d'avantage au Chapitre 5, notamment en mesure infinie ou pour le comptage d'orbites fermées *pondérées par un potentiel*.

**Théorème 0.0.11** (T. 2018 [Tap20a], cf Théo 5.1.2). *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété localement symétrique à courbure strictement négative. Supposons que le bas du spectre du Laplacien  $\lambda_0(M, g)$  sur  $(M, g)$  est associé à une fonction propre  $\varphi_0 \in \mathcal{H}^2(M)$ , normalisée par  $\|\varphi_0\|_{L^2(M, g)} = 1$ . Notons encore  $\varphi_0$  son relevé à  $(\widetilde{M}, g)$ .*

*Alors il existe une constante  $C = C(X, \lambda_0(M, g)) > 0$ , qui dépend de  $X$  et de  $\lambda_0(M, g)$  mais pas de  $\Gamma$ , telle que pour tous  $x, y \in \widetilde{M}$  on ait lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,*

$$N_\Gamma(x, y, R) \sim C\varphi_0(x)\varphi_0(y)e^{\delta_\Gamma(g)R}.$$

Ce résultat avait été obtenu pour les variétés *hyperboliques réelles géométriquement finies* dans un article célèbre de Lax et Phillips [LP82]. Dans cette généralité, il n'a encore jamais été publié. C'est en fait une conséquence directe de la preuve du Théorème 0.0.2 et de résultats de Roblin ([Rob03], Théo. 4.1.1).

**Théorème 0.0.12** (Schapira-T. 2019, [ST18], cf Théo 5.2.3). *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle majorée par  $-a^2 < 0$ . Supposons que  $(M, g)$  est de mesure de Bowen-Margulis finie. Alors pour tout compact  $W \subset S^g M$  dont l'intérieur intersecte l'ensemble non-errant  $\Omega^g$ , on a lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,*

$$\#\mathcal{P}'_W(R) \sim \frac{e^{\delta_\Gamma(g)R}}{\delta_\Gamma(g)R}$$

où  $\mathcal{P}'_W(R)$  désigne l'ensemble des géodésiques fermées primitives de longueur au plus  $R$  qui intersectent  $W$ .

Avant nos travaux, ce résultat n'était connu que pour les variétés *géométriquement finies*, cf [Rob03], Théo. 5.2. La preuve utilise de façon clé les ensembles  $\Gamma_W$  que nous avons introduits plus haut pour définir l'entropie à l'infini. Nous avons également établi l'analogie de cet équivalent pour les géodésiques fermées pondérées, voir Théo. 5.2.6.

## Plan du mémoire

Le Chapitre 1 introduit les notions de géométrie et dynamique en courbure négative que nous réutiliserons tout au long du mémoire : flot géodésique, bord à l'infini, mesures de Patterson-Sullivan, mesures de Gibbs... Une grande partie de ce chapitre est consacrée à introduire différentes notions d'*entropie* (volumique, mesurée, topologique...), qui joueront toutes un rôle dans les résultats que nous présenterons.



Le Chapitre 2 est consacré à l'introduction de nouveaux outils que nous avons définis dans [ST18, CDST18] et [GST20] : l'entropie à l'infini (ou la pression à l'infini, en présence d'un potentiel), leurs caractérisations et divers exemples.

Le Chapitre 3 présente les résultats de [ST18], sur la différentiabilité de l'entropie, et les résultats de [SST12a] et [SST20] qui utilisent la formule de dérivation de l'entropie pour caractériser les extrema de l'entropie dans une classe conforme.

Le Chapitre 4 présente les liens que nous avons établi entre bas du spectre et entropie, puis entre bas du spectre essentiel et entropie. La première partie du chapitre donne une nouvelle preuve des résultats de Patterson, Sullivan et Corlette, tout en précisant les informations que ces résultats fournissaient, puis la deuxième partie du chapitre est consacré au spectre essentiel. Ces résultats sont prouvés pour la première fois dans ce manuscrit (cf [Tap20a]).

Le Chapitre 5 présente nos travaux sur les fonctions de comptage orbital et de comptage des géodésiques fermées, contenus dans [PTV19], [ST18] et [Tap20a].

Le Chapitre 6 présente nos travaux sur la moyennabilité des revêtements et ses liens avec le bas du spectre du Laplacien et l'entropie [RT13], [CDST18], [Tap20b].

Le dernier chapitre présente quelques perspectives dans la suite naturelle des résultats et techniques présentées dans ce mémoire, dont certaines sont en cours d'étude et d'autres des projets à moyen terme.

# Chapitre 1

## Dynamique et entropie en courbure négative

Ce chapitre est consacré à la présentation des notions concernant la dynamique du flot géodésique sur les variétés en courbure négative dont les définitions ne sont pas dues à mes travaux. Le lecteur familier du sujet n’y trouvera rien d’original et peut sans doute sauter ce chapitre : nous avons juste tenu à rassembler ici le matériau nécessaire à la compréhension de la suite.

Nous insisterons surtout sur les notions ergodiques (entropie, pression, mesure d’entropie maximale ou mesure de Gibbs) que nous utiliserons, en les présentant à partir de leurs compréhension via le bord à l’infini du revêtement universel et la théorie de Patterson-Sullivan. C’est en effet ce point de vue que nous utilisons systématiquement dans les travaux décrits dans ce mémoire.

On désigne sous le nom d’**entropies** bien des concepts mathématiques. Nous présentons dans ce chapitre ceux qui seront utilisés dans la plupart des chapitres de ce mémoire. Ils ont plusieurs propriétés en commun : ce sont des nombres réels positifs (ou nuls), il sont reliés à un **taux de croissance exponentielle**, et ils sont (presque) tous associés à un **système dynamique** qui peut être une action de groupe, un difféomorphisme ou un flot. Le lecteur s’inquiétera peut-être de voir dans ce chapitre neufs quantités différentes s’appeler «*entropie de ...*». Les définitions que nous donnons ici sont très classiques pour les flots sur des variétés compactes, pour lesquelles la plupart coïncident. Elles cachent parfois des subtilités moins connues lorsque la dynamique n’a pas lieu sur un ensemble compact. Aucune de ces notions n’est nouvelle, elles sont bien sûr fortement reliées entre elles et nous verrons par la suite que c’est souvent le fait de jongler entre ces entropies qui permet l’obtention de nos résultats.

Dans ce chapitre, comme dans tous le manuscrit, les variétés seront toujours supposées connexes. Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne de dimension  $n \geq 2$ . Nous noterons  $(\tilde{M}, g)$  son revêtement universel et  $\Gamma = \pi_1(M)$  son groupe fondamental agissant proprement discontinument par isométries sur  $(\tilde{M}, g)$ . Nous

noterons  $d^g$  la distance induite par  $g$  sur  $M$  et sur  $\widetilde{M}$  et  $\kappa_g(\mathcal{P})$  la courbure sectionnelle de la métrique  $g$  le long d'un 2-plan  $\mathcal{P}$ . Nous noterons  $p_\Gamma: \widetilde{M} \rightarrow M$  l'application de revêtement universel et  $\pi: TM \rightarrow M$  (resp.  $\pi: T\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ ) le fibré tangent de  $M$  (resp. de  $\widetilde{M}$ ). Nous choisissons  $o \in \widetilde{M}$  une «origine», fixée une fois pour toute.

On dira qu'une variété riemannienne  $(M, g)$  est à **courbure négative pincée** s'il existe  $b > a > 0$  tel que, en tous points, les courbures sectionnelles  $\kappa_g$  vérifient

$$-b^2 \leq \kappa_g \leq -a^2.$$

## 1.1 Bord à l'infini et flot géodésique en courbure négative

Nous supposons le temps de cette section que  $(M, g)$  est à courbure négative pincée. Nous présentons maintenant des outils qui seront omniprésents par la suite : la compactification visuelle du revêtement universel  $\widetilde{M}$ , l'ensemble limite du groupe fondamental, et les liens de ces objets avec le flot géodésiques sur le fibré unitaire tangent  $S^g M$ .

### 1.1.1 Bord visuel et ensemble limite

#### Bord visuel

Par le théorème de Cartan-Hadamard,  $(\widetilde{M}, g)$  est homéomorphe à une boule ouverte dont le bord s'identifie au **bord visuel** de  $(\widetilde{M}, g)$ , c'est à dire à l'ensemble des classes d'équivalences de rayons géodésiques dans  $(\widetilde{M}, g)$  où deux rayons sont équivalents s'ils restent à distance bornée. Nous noterons  $\partial^\infty \widetilde{M}$  ce bord visuel. La topologie de la boule induit donc une topologie compacte sur

$$\widetilde{M} \cup \partial^\infty \widetilde{M},$$

appelée **compactification visuelle** de  $(\widetilde{M}, g)$ . Si  $x, y \in \widetilde{M}$ , on notera  $[x, y]_g$ , ou simplement  $[x, y]$ , l'unique segment  $g$ -géodésique entre  $x$  et  $y$ . Si  $\xi \in \partial^\infty \widetilde{M}$ , on notera  $[x, \xi)$  l'unique rayon géodésique issu de  $x$  dont la classe d'équivalence définit  $\xi$ .

Notons que l'action par isométries de  $\Gamma$  sur  $\widetilde{M}$  envoie rayon géodésique sur rayon géodésique, et induit une action par homéomorphismes de  $\Gamma$  sur  $\widetilde{M} \cup \partial^\infty \widetilde{M}$ .

Cette compactification visuelle est plus généralement bien définie pour tout espace géodésique  $(X, d)$  qui est **hyperbolique au sens de Gromov**. On pourra se référer à [BH99, Chap. III.H.] pour une définition de la Gromov-hyperbolicité, aussi appelée  $\delta$ -hyperbolicité, du **bord de Gromov** que nous notons encore  $\partial^\infty X$  et de la topologie de la **compactification de Gromov** qui généralisent la compactification visuelle présentée ci-dessus. Notons que, si  $(X, d)$  est un espace Gromov-hyperbolique, si  $x \in X$  et  $\xi \in \partial^\infty X$ , il peut exister

de nombreux rayons géodésiques  $[x, \xi]$  issus de  $x$  dont la classe d'équivalence définit  $\xi$ .

Soient  $d_1$  et  $d_2$  deux distances sur  $\widetilde{M}$ . On dit qu'elles sont  $(C, E)$ -quasi-isométriques, où  $C \geq 1$  et  $E \geq 0$ , si pour tous  $x, y \in \widetilde{M}$ ,

$$\frac{1}{C}d_1(x, y) - E \leq d_2(x, y) \leq Cd_1(x, y) + E. \quad (1.1)$$

Si  $d_1$  et  $d_2$  sont quasi-isométriques, et si  $(\widetilde{M}, d_1)$  est Gromov-hyperbolique, alors  $(\widetilde{M}, d_2)$  l'est également. De plus les géodésiques de  $(\widetilde{M}, d_1)$  sont des quasi-géodésiques de  $(\widetilde{M}, d_2)$  et les bords visuels de  $(\widetilde{M}, d_1)$  et  $(\widetilde{M}, d_2)$  sont canoniquement homéomorphes (voir de nouveau [BH99, Chap. III.H.] pour une preuve).

Nous dirons que deux métriques riemanniennes  $g_1$  et  $g_2$  sur  $M$  sont **quasi-isométriques** s'il existe  $C > 1$  tel que, en tout point de  $M$ ,

$$\frac{1}{C}g_1 \leq g_2 \leq Cg_1. \quad (1.2)$$

Les distances associées  $d^{g_1}$  et  $d^{g_2}$  sont alors quasi-isométriques au sens précédent. Si  $g_1$  et  $g_2$  sont deux métriques quasi-isométriques sur  $M$  dont les courbures sont majorées par  $-a^2$ , leurs compactifications visuelles sont donc canoniquement homéomorphes.

On peut munir la compactification visuelle  $\widetilde{M} \cup \partial^\infty \widetilde{M}$  d'une distance, dite **distance de Gromov**, qui induit la même topologie que celle de la compactification visuelle. Si  $d_1$  et  $d_2$  sont deux distances sur  $X$ , Gromov-hyperboliques et quasi-isométriques entre elles, les distances de Gromov associées sur  $\partial^\infty \widetilde{M}$  sont *bi-Hölder*. On peut donc parler sans ambiguïté de régularité Hölder pour une fonction  $f : \partial^\infty \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Ensemble limite

Rappelons que  $\Gamma = \pi_1(M)$  agit proprement discontinument par isométrie sur  $(\widetilde{M}, g)$ . On appelle **ensemble limite** de  $\Gamma$  agissant sur  $\widetilde{M}$  l'ensemble

$$\Lambda_\Gamma = \overline{\Gamma o} \setminus \Gamma o \subset \partial^\infty \widetilde{M}.$$

Cet ensemble ne dépend pas du choix de  $o$ . L'ensemble limite ne dépend que de l'action topologique de  $\Gamma$  sur  $\widetilde{M}$  et de la topologie de la compactification visuelle de  $\widetilde{M}$ . Si  $g_1$  et  $g_2$  sont deux métriques quasi-isométriques sur  $M$ , l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma$  est donc indépendant du choix de métrique.

Plus généralement, si  $(X, d)$  est un espace métrique hyperbolique au sens de Gromov et  $\Gamma$  un groupe discret d'isométries, l'ensemble limite est de nouveau défini par  $\Lambda_\Gamma = \overline{\Gamma o} \setminus \Gamma o \subset \partial^\infty \widetilde{M}$ . La topologie de  $\Lambda_\Gamma$  est de nouveau, dans ce cadre, un invariant de quasi-isométrie.

On appelle **ensemble limite radial**  $\Lambda_\Gamma^{rad} \subset \Lambda_\Gamma$  l'ensemble des points  $\xi \in \Lambda_\Gamma$  tels qu'il existe un rayon géodésique  $[o, \xi] \subset \widetilde{M}$  et une suite d'éléments  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dans  $\Gamma$  qui vérifient :

1.  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma_k o = \xi$  ;
2. il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $d^g(\gamma_k o, [o, \xi]) \leq C$ .

Par définition,  $\xi \in \Lambda_\Gamma^{rad}$  si et seulement si pour tout  $x \in \widetilde{M}$ , il existe un compact  $K \subset M$  tel que dans  $(M, g)$ , le rayon géodésique  $p_\Gamma([x, \xi])$  repasse une infinité de fois dans  $K$ , ce qui signifie que l'ensemble

$$\{y \in [x, \xi) ; p_\Gamma(y) \in K\} \quad (1.3)$$

est non-borné dans  $\widetilde{M}$ .

Le point fixe d'une isométrie hyperbolique de  $\Gamma$  est un point radial. Comme ces points sont denses dans l'ensemble limite, l'ensemble limite radial est lui-même dense.

### 1.1.2 Flot géodésique et paramétrisation de Hopf

Nous nous limitons désormais au cas d'une variété riemannienne  $(M, g)$  à courbure majorée par  $-a^2 < 0$ . Nous notons  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  le flot géodésique agissant sur le **fibré unitaire tangent**

$$S^g M := \{v \in TM ; g(v, v) = 1\}.$$

Nous notons également  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  le flot géodésique agissant sur  $S^g \widetilde{M}$ , et nous notons encore  $p_\Gamma : S^g \widetilde{M} \rightarrow S^g \widetilde{M}$  l'application fibrée induite par le revêtement universel  $p_\Gamma : \widetilde{M} \rightarrow M$ .

#### Paramétrisation de Hopf

Pour tout  $v \in S^g \widetilde{M}$ , il existe une unique géodésique

$$\gamma_v = \{\gamma_v(t) = \pi g^t v \ t \in \mathbb{R}\}$$

tangente à  $v$  en  $t = 0$ . Elle possède deux points à l'infini (distincts), que nous noterons

$$v_\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma_v(t) \in \partial^\infty \widetilde{M}.$$

Notons  $\partial^2 \widetilde{M} = (\partial^\infty \widetilde{M} \times \partial^\infty \widetilde{M}) \setminus \text{Diag}$ . Un vecteur  $w \in S^g \widetilde{M}$  est donc uniquement caractérisé par ses deux points à l'infini  $(w_-, w_+) \in \partial^2 \widetilde{M}$  ainsi qu'un paramètre de temps  $t \in \mathbb{R}$ , lié au choix d'une origine sur la géodésique  $(w_-, w_+)$ .

**Lemme 1.1.1.** *Pour tous  $x, y \in \widetilde{M}$  et tout  $\xi \in \partial^\infty M$ , la limite suivante existe :*

$$\beta_\xi(x, y) = \lim_{z \rightarrow \xi} d(x, z) - d(y, z).$$

On appelle la fonction  $\beta_\xi(\cdot, \cdot)$  le **cocycle de Busemann** basé en  $\xi$ .

Ce lemme est une conséquence directe de la borne supérieure sur la courbure. L'application  $(\xi, x, y) \mapsto \beta_\xi(x, y)$  est globalement Hölder continue. Si les courbures sectionnelles de  $(M, g)$  sont bornées entre  $-b^2$  et  $-1$ , alors pour tout  $\xi \in \partial^\infty \widetilde{M}$ , l'application  $\beta_\xi(\cdot, \cdot)$  est de classe  $C^2$  (cf [HIH77]). Notons que pour tout  $\xi \in \partial^\infty \widetilde{M}$  et pour tous  $x, y, z \in \widetilde{M}$  on a la propriété de cocycle

$$\beta_\xi(x, z) + \beta_\xi(z, y) = \beta_\xi(x, y). \quad (1.4)$$

**Définition 1.1.1.** *On appelle paramétrisation de Hopf de  $S^g \widetilde{M}$  l'application*

$$\mathcal{H}^g : \begin{cases} S^g \widetilde{M} & \rightarrow & \partial^2 \widetilde{M} \times \mathbb{R} \\ v & \mapsto & (v_-, v_+, \beta_{v_+}(o, \pi v)) \end{cases} .$$

Notons que le flot géodésique agit par translation dans les coordonnées de Hopf : si  $\mathcal{H}^g(v) = (v_-, v_+, s)$ , il découle de la définition que

$$\mathcal{H}^g(g^t v) = (v_-, v_+, s + t).$$

### Ensemble non-errant

Un vecteur  $v \in S^g M$  est dit **récurrent dans le futur** (resp. **récurrent dans le passé**) s'il existe une suite  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  avec  $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$  (resp.  $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = -\infty$ ) telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g^{t_k} v = g^{t_0} v.$$

Un vecteur  $v \in S^g M$  est dit **non-errant** si pour tout voisinage  $\mathcal{U} \subset S^g M$  de  $v$ , il existe une suite bi-infinie  $(t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  avec  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} t_k = \pm\infty$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a  $g^{t_k} \mathcal{U} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ . On notera  $\Omega^g \subset S^g M$  l'ensemble non-errant du flot géodésique sur  $S^g M$ .

La propriété suivante, cruciale, est due à Eberlein [Ebe72].

**Proposition 1.1.2.** *Si le vecteur  $v \in S^g M$  est récurrent dans le futur (resp. dans le passé) alors tout vecteur  $\tilde{v}$  avec  $p_\Gamma(\tilde{v}) = v$ , on a  $\tilde{v}_+ \in \Lambda_\gamma^{rad}$  (resp.  $\tilde{v}_- \in \Lambda_\Gamma^{rad}$ ).*

*Il est non-errant si et seulement si  $\tilde{v}_- \in \Lambda_\Gamma$  et  $\tilde{v}_+ \in \Lambda_\Gamma$ , i.e.*

$$\Omega^g = p_\Gamma \left( (\mathcal{H}^g)^{-1}(\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma \times \mathbb{R}) \right).$$

Il s'ensuit que si  $v$  est récurrent dans le futur il existe un compact  $K \subset S^g M$  tel que le rayon géodésique  $(\gamma_v(t))_{t \geq 0}$  rencontre  $K$  une infinité de fois au sens défini par (1.3). De plus, l'ensemble non-errant est exactement l'adhérence dans  $S^g M$  de l'ensemble des orbites fermées.

### Horosphères et variétés stables

Lorsque la courbure sectionnelle est majorée par  $-a^2 < 0$ , le flot géodésique est un exemple de **flot uniformément hyperbolique** : pour tout  $v \in S^g M$  et

pour  $t > 0$ , la différentielle  $dg^t(v)$  est exponentiellement contractante dans les *directions stables*, c'est à dire celles qui sur  $\widetilde{M}$  et en paramétrisation de Hopf sont tangentes à  $\partial^\infty \widetilde{M} \times \{v_+\} \times \{0\}$ , et  $dg^{-t}(v)$  est exponentiellement contractante dans les *directions instables*, c'est à dire celles qui sur  $\widetilde{M}$  et en paramétrisation de Hopf sont tangentes à  $\{v_-\} \times \partial^\infty \widetilde{M} \times \{0\}$ . Voici une caractérisation géométrique des variétés stables et instables du flot.

Rappelons que nous notons  $\beta_\xi(\cdot, \cdot)$  les fonctions de Busemann sur  $\widetilde{M}$  basée en  $\xi \in \partial^\infty \widetilde{M}$ .

**Définition 1.1.2.** Soit  $\xi \in \partial^\infty \widetilde{M}$  et  $x \in \widetilde{M}$ . On appelle **horosphère** basée en  $\xi$  et passant par  $x$  la surface de niveau

$$\mathcal{H}_\xi(x) = \{y \in \widetilde{M} ; \beta_\xi(o, x) = \beta_\xi(o, y)\}$$

On appelle **horoboule** centrée en  $\xi$  et bordée par l'horosphère  $\mathcal{H}_\xi(x)$  l'ensemble

$$\mathcal{HB}_\xi(x) = \{y \in \widetilde{M} ; \beta_\xi(o, x) \leq \beta_\xi(o, y)\}.$$

Ces horosphères joueront un rôle prépondérant par la suite, tant du point de vue analytique que dynamique. La caractérisation dynamique suivante des horosphères découle de la paramétrisation de Hopf de  $S^g \widetilde{M}$ .

Étant donné  $v \in S^g M$ , on appelle **variété fortement stable** de  $v$  l'ensemble

$$W^{ss}(v) = \left\{ w \in S^g M ; \lim_{t \rightarrow +\infty} d^g(g^t v, g^t w) = 0 \right\}$$

et **variété fortement instable** de  $v$  l'ensemble

$$W^{uu}(v) = \left\{ w \in S^g M ; \lim_{t \rightarrow -\infty} d^g(g^t v, g^t w) = 0 \right\}.$$

**Proposition 1.1.3.** Soit  $v \in S^g \widetilde{M}$ , soient  $v_-$  et  $v_+$  les points à l'infini de la géodésique qu'il engendre. Alors

$$\pi W^{ss}(v) = \mathcal{H}_{v_+}(\pi v) \quad \text{et} \quad \pi W^{uu}(v) = \mathcal{H}_{v_-}(\pi v).$$

Notons que  $W^{ss}(v)$  est l'ensemble des normales unitaires à  $\mathcal{H}_{v_+}(\pi v)$  qui pointent vers l'intérieur de  $\mathcal{HB}_{v_-}(\pi v)$ , tandis que  $W^{uu}(v)$  est l'ensemble des normales unitaires à  $\mathcal{H}_{v_-}(\pi v)$  qui pointent vers l'extérieur de  $\mathcal{HB}_{v_+}(\pi v)$ .

Une isométrie de  $(\widetilde{M}, g)$  est dite **parabolique** si elle fixe un unique vecteur  $\xi \in \partial^\infty \widetilde{M}$ . Elle fixe alors (globalement) toute horosphère basée en  $\xi$ . Un **groupe** d'isométries de  $(\widetilde{M}, g)$  est dit parabolique si tous ses éléments fixent le même unique point à l'infini.

### Variétés convexes-cocompactes, géométriquement finies

On appelle *coeur convexe* de  $(M, g)$  l'enveloppe convexe de  $\pi\Omega^g$ . Nous le noterons  $\heartsuit(M, g)$ . C'est également l'enveloppe convexe de l'ensemble des géodésiques fermées de  $(M, g)$ .

**Définition 1.1.3.** *On dit que la variété  $(M, g)$  est **convexe-cocompacte** si  $\heartsuit(M, g)$  est compact. On dit qu'elle est **géométriquement finie** si le  $\varepsilon$ -voisinage de  $\heartsuit(M, g)$  est de volume fini.*

On montre que  $(M, g)$  est géométriquement finie si son groupe fondamental  $\Gamma$  contient un nombre fini de classes de conjugaisons de *sous-groupes paraboliques*  $P_1, \dots, P_k$ , tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , chaque  $P_i$  fixe un unique point à l'infini  $\xi_i$  et il existe une horoboule  $H_i$  centrée en  $\xi_i$  telle que  $p_\Gamma(H_i) = H_i/P_i$  et

$$\heartsuit(M, g) \setminus p_\Gamma(H_1 \cup \dots \cup H_k)$$

est compact. Voir [Bow95] pour une preuve. On appelle la région

$$C_i = p_\Gamma(H_i) = H_i/P_i$$

le *cusp* associé au groupe parabolique  $P_i$ .

### 1.1.3 Mesures invariantes et courants géodésiques

L'étude des mesures invariantes par le flot géodésique, couramment appelée la *théorie ergodique* du flot géodésique, occupe une part centrale de ce mémoire. Nous introduisons donc ici les principales propriétés générales de ces mesures.

#### Courants et mesures

Soit  $m$  une mesure borélienne sur  $S^gM$ , localement finie et invariante par le flot géodésique  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$ . Soit  $\tilde{m}$  son relevé à  $S^g\tilde{M}$  : par construction des coordonnées de Hopf, il existe une mesure  $\mu$  sur  $\partial^\infty\tilde{M}$ , localement finie et invariante par l'action diagonale de  $\Gamma$ , telle que

$$\tilde{m} = (\mathcal{H}^g)^*(\mu \times dt), \tag{1.5}$$

où  $dt$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.1.4.** *On appelle **courant géodésique**  $\Gamma$ -invariant une mesure localement finie sur  $\partial^2\tilde{M}$  qui est invariante par l'action de  $\Gamma$ .*

Réciproquement, pour tout courant géodésique  $\mu$ , la formule (1.5) induit une mesure  $\tilde{m}_\mu^g$  sur  $S^g\tilde{M}$  localement finie et invariante par le flot géodésique et l'action de  $\Gamma$  sur  $S^g\tilde{M}$ . Elle se projette donc en une mesure  $m_\mu^g$ , localement finie et invariante par le flot géodésique. Au Chapitre 3, nous étudierons comment la mesure  $m_\mu^g$  varie lorsque la métrique riemannienne  $g$  varie tandis que l'on fixe le courant  $\mu$ .



### Récurrence et ensemble limite

Si  $m$  est une mesure *finie* invariante par le flot géodésique, par le théorème de récurrence de Poincaré,  $m$ -presque tout vecteur est récurrent (voir par exemple [Cou12, Chap. 5]). La Proposition 1.1.2 implique donc la propriété suivante, qui explique l'omniprésence de l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma$  dans l'étude ergodique du flot géodésique.

**Proposition 1.1.4.** *Soit  $m = m_\mu^g$  une mesure finie sur  $S^gM$ , invariante par le flot géodésique, associée au courant géodésique  $\mu$ . Alors pour presque tout  $v \in S^gM$ , on a  $v_\pm \in \Lambda_\Gamma^{rad}$ . En particulier,  $\text{Supp}(\mu) \subset \Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma$ .*

Ce résultat s'étend de la façon suivante aux mesures infinie. Rappelons qu'une mesure  $m$  sur  $S^gM$  (finie ou non), invariante par le flot géodésique, est **ergodique** si et seulement pour tout ensemble mesurable  $I \subset S^gM$  invariant par le flot, on a  $m(I) = 0$  ou  $m(S^gM \setminus I) = 0$ . On a alors le résultat suivant dont la preuve est laissée au lecteur.

**Proposition 1.1.5.** *Soit  $m = m_\mu^g$  une mesure (finie ou non) sur  $S^gM$ , invariante et ergodique par le flot géodésique, associée au courant géodésique  $\mu$ . Alors ou bien  $m$  est la mesure de Lebesgue le long de l'orbite d'un vecteur errant (i.e. dont l'orbite sort de tout compact en temps fini), ou bien  $\text{Supp}(\mu) \subset \Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma$ .*

## 1.2 Exposants critiques et théorie de Patterson-Sullivan

### 1.2.1 Entropie volumique et croissance orbitale

**Définition 1.2.1.** *On appelle entropie volumique de  $(M, g)$  la quantité*

$$h_{vol}(M, g) = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log \text{Vol}(B^g(o, R))}{R},$$

où  $B^g(o, R) \subset \widetilde{M}$  est la boule de centre  $o$  et de rayon  $R$  dans  $(\widetilde{M}, g)$ .

L'entropie volumique ne dépend pas du choix de l'origine  $o$ , ni du groupe fondamental  $\Gamma$  : il s'agit uniquement d'une propriété du revêtement universel  $(\widetilde{M}, g)$ .

**Définition 1.2.2.** *On appelle exposant critique de  $\Gamma$  ou entropie du groupe  $\Gamma$  agissant sur  $(\widetilde{M}, g)$  la quantité*

$$\delta_\Gamma(g) = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log \# \{ \gamma \in \Gamma ; d^g(o, \gamma o) \leq R \}}{R}.$$

De nouveau,  $\delta_\Gamma(g)$  ne dépend pas du choix de l'origine  $o$ . Il découle d'un argument classique de Milnor (cf [Mil68]) que, lorsque la variété  $M$  est *compacte*, on a l'égalité

$$h_{vol}(M, g) = \delta_\Gamma(g).$$

Ce mémoire est essentiellement consacré aux variétés non compactes, pour lesquelles cette égalité n'est généralement plus vraie. Notons qu'il existe des variétés à courbure négative pincée, non-compactes mais de *volume fini*, dont l'entropie volumique et l'exposant critique non sont pas égaux. Voir [DPPS09] pour la construction de tels exemples.

Nous considérerons donc par la suite l'entropie volumique  $h_{vol}(M, g)$  comme une propriété du revêtement universel  $(\widetilde{M}, g)$ , décorrélée de l'exposant critique.

### 1.2.2 Mesures de Patterson-Sullivan

On appelle *série de Poincaré* de  $\Gamma$  agissant sur  $(M, g)$  le nombre défini, pour tout  $x \in \widetilde{M}$  et tout  $s > 0$  par

$$P_\Gamma(x, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd^g(x, \gamma o)} \in (0, +\infty]. \quad (1.6)$$

Par l'inégalité triangulaire, on a la dichotomie

$$\begin{aligned} P_\Gamma(x, s) &< +\infty & \text{si } s > \delta_\Gamma(g) \\ P_\Gamma(x, s) &= +\infty & \text{si } s < \delta_\Gamma(g). \end{aligned}$$

La valeur des séries de Poincaré pour  $s = \delta_\Gamma(g)$  dépend fortement de  $(M, g)$ , et nous verrons qu'elle a de fortes implications sur la dynamique du flot géodésique. La métrique riemannienne étant fixée, on note pour la suite de cette section  $\delta_\Gamma = \delta_\Gamma(g)$  et  $d = d^g$ .

**Définition 1.2.3.** *Le groupe  $\Gamma$  est dit **divergent** si  $P_\Gamma(o, \delta_\Gamma) = +\infty$ . Il est dit **convergent** sinon.*

Que le groupe soit divergent ou non, il est montré dans [Pat76] qu'il existe une fonction croissante  $\theta : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  qui possède les propriétés suivantes :

1. pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $t_\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $u > 0$ , on a

$$\theta(t_\varepsilon + u) \leq e^{\varepsilon u} \theta(t_\varepsilon);$$

2. pour tout  $x \in \widetilde{M}$ , la série

$$\widetilde{P}_\Gamma(x, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \theta(d(o, \gamma o)) e^{-sd(x, \gamma o)}$$

converge si et seulement si  $s > \delta_\Gamma$ .

Pour tout  $s > \delta_\Gamma$  et tout  $x \in \widetilde{M}$ , on pose

$$\nu_{x,s} = \frac{1}{\widetilde{P}_\Gamma(o, s)} \sum_{\gamma \in \Gamma} \theta(d(o, \gamma o)) e^{-sd(x, \gamma o)} \mathbb{D}_{\gamma o},$$

où  $\mathbb{D}_y$  désigne la masse de Dirac en  $y$ . Soit  $s > \delta_\Gamma$  et  $x \in \widetilde{M}$  fixés. La mesure  $\nu_{x,s}$  est supportée par l'orbite  $\Gamma o$ , et de masse finie : par l'inégalité triangulaire, elle vérifie

$$e^{-sd(o,x)} \leq \|\nu_{x,s}\| \leq e^{sd(o,x)}.$$

De plus, par construction, pour tout  $y \in \widetilde{M}$  et tout  $\xi \in \Gamma o$ , on a

$$\frac{d\nu_{x,s}}{d\nu_{y,s}}(\xi) = e^{-s(d(x,\xi)-d(y,\xi))}. \quad (1.7)$$

Enfin, pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , on a

$$\nu_{\gamma x,s} = \gamma_* \nu_{x,s}. \quad (1.8)$$

Comme  $\widetilde{M} \cup \partial^\infty \widetilde{M}$  est compact, il découle du théorème de Tychonov qu'il existe une suite  $(s_k)_{k \geq 0}$  de réels strictement supérieurs à  $\delta_\Gamma(g)$ , qui converge vers  $\delta_\Gamma(g)$ , tels que la suite de probabilités  $(\nu_{o,s_k})_{k \geq 0}$  converge vers une mesure de probabilité  $\nu_o^\Gamma$ , supportée par  $\overline{\Gamma o}$ . Comme la série  $\widetilde{P}_\Gamma(o, \delta_\Gamma(g))$  diverge, la mesure  $\nu_o^\Gamma$  est supportée par  $\Lambda_\Gamma$ . De plus, d'après (1.7), pour tout  $x \in \widetilde{M}$  la suite de mesures  $(\nu_{x,s_k})_{k \geq 0}$  converge vers une mesure finie  $\nu_x^\Gamma$ , également supportée par  $\Lambda_\Gamma$ , et on a pour tout  $y \in \widetilde{M}$  et tout  $\xi \in \Lambda_\Gamma$ ,

$$\frac{d\nu_x^\Gamma}{d\nu_y^\Gamma}(\xi) = e^{-\delta_\Gamma(g)\beta_\xi(x,y)}, \quad (1.9)$$

où  $\beta_\xi(x,y)$  est la **fonction de Busemann** sur  $(\widetilde{M}, g)$  basée en  $\xi$  introduite au Paragraphe 1.1.2. Enfin, par passage à la limite dans l'équation (1.8), on a pour tout  $x \in \widetilde{M}$  et tout  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$\nu_{\gamma x}^\Gamma = \gamma_* \nu_x^\Gamma. \quad (1.10)$$

**Définition 1.2.4.** On appelle toute famille de mesure  $(\nu_x^\Gamma)_{x \in \widetilde{M}}$  qui vérifie les propriétés (1.9) et (1.10) une **mesure de Patterson-Sullivan** pour le groupe  $\Gamma$ .

La littérature utilise aussi la terminologie **densité conforme** de dimension  $\delta_\Gamma$  et  $\Gamma$ -invariante sur  $\Lambda_\Gamma$ . Elles ont été initialement construites par Patterson dans [Pat76] pour les surfaces hyperboliques et Sullivan [Sul79] pour toutes les variétés de courbure constante  $-1$ , et sont depuis un outil central de la géométrie à courbure négative. Nous verrons par la suite différentes variantes de cette construction.

Notons qu'a priori, la famille de mesures  $(\nu_x)_{x \in \widetilde{M}}$  construite ci-dessus n'est pas unique et dépend fortement du choix de la suite  $(s_k)_{k \geq 0}$  choisie pour extraire une limite aux  $(\nu_{x,s})_{x \in \widetilde{M}}$  lorsque  $s \rightarrow \delta_\Gamma$ .

### 1.2.3 Mesure de Bowen-Margulis

Soit  $\nu^\Gamma = (\nu_x^\Gamma)_{x \in \widetilde{M}}$  une densité de Patterson-Sullivan obtenue par la construction ci-dessus. Il découle de (1.9) et (1.10) que la formule

$$d\mu^\Gamma(\xi, \eta) = d\nu_{\pi_v}^\Gamma(\xi) d\nu_{\pi_v}^\Gamma(\eta) = e^{-\delta_\Gamma(\beta_\xi(\pi v, o) + \beta_\eta(\pi v, o))} d\nu_o^\Gamma(\xi) d\nu_o^\Gamma(\eta)$$

définit un courant géodésique sur  $\partial^2 \widetilde{M}$ , et induit donc une mesure  $\widetilde{m}_{BM} = \widetilde{m}_{\mu^\Gamma}^g$ , invariante par le flot géodésique et par  $\Gamma$ , telle que dans les coordonnées de Hopf,

$$d\widetilde{m}_{BM}(v) = e^{-\delta_\Gamma(\beta_{v_-}(\pi v, o) + \beta_{v_+}(\pi v, o))} d\nu_o^\Gamma(v_-) d\nu_o^\Gamma(v_+) dt.$$

**Définition 1.2.5.** *On appelle mesure de Bowen-Margulis pour le flot géodésique sur  $S^g M$  toute mesure  $m_{BM} = m_{\mu^\Gamma}^g$  induite par la construction précédente.*

Cette mesure n'est en général pas unique dès lors qu'il existe plusieurs densités de Patterson-Sullivan. La dichotomie suivante est fondamentale.

**Théorème 1.2.1** (Dichotomie de Hopf-Tsuji-Sullivan). *Soit  $\nu^\Gamma = (\nu_x^\Gamma)_{x \in \widetilde{M}}$  une densité de Patterson-Sullivan et  $m_{BS}$  la mesure de Bowen-Margulis sur  $S^g M$  associée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $P_\Gamma(o, \delta_\Gamma) = +\infty$  (i.e.  $\Gamma$  est divergent) ;
2.  $\nu_o^\Gamma(\Lambda_\Gamma^{rad}) = 1$  ;
3.  $(\partial^2 \widetilde{M}, \Gamma, \nu_o^\Gamma \times \nu_o^\Gamma)$  est complètement conservatif et ergodique ;
4.  $(S^g M, (g^t)_{t \in \mathbb{R}}, m_{BM})$  est complètement conservatif et ergodique.

De plus, les conditions suivantes sont également équivalentes :

1.  $P_\Gamma(o, \delta_\Gamma) = +\infty$  (i.e.  $\Gamma$  est convergent) ;
2.  $\nu_o^\Gamma(\Lambda_\Gamma^{rad}) = 0$  ;
3.  $(\partial^2 \widetilde{M}, \Gamma, \nu_o^\Gamma \times \nu_o^\Gamma)$  est complètement dissipatif et non ergodique ;
4.  $(S^g M, (g^t)_{t \in \mathbb{R}}, m_{BM})$  est complètement dissipatif et non ergodique.

Rappelons que pour si  $\Gamma$  est un groupe infini agissant sur  $X$  par homéomorphisme et  $m$  est une mesure invariante sous l'action du groupe  $\Gamma$ , on dit que  $(X, \Gamma, m)$  est **ergodique** si tout ensemble  $I \subset X$  qui est  $\Gamma$ -invariant vérifie  $m(I) = 0$  ou  $m(X \setminus I) = 0$ . Le système est dit **complètement conservatif** si pour tout  $A \subset X$  avec  $m(A) > 0$  et pour  $m$ -presque tout  $v \in X$ , l'ensemble des  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma v \in A$  est d'adhérence non-compacte.

On trouvera par exemple une preuve du théorème de Hopf-Tsuji-Sullivan, ainsi que la définition de **complètement dissipatif** dont nous n'aurons pas besoin, au Chapitre 1 de [Rob03]. On y trouvera également la preuve du corollaire suivant qui découle des arguments présentés au Paragraphe 1.1.3 ci-dessus.

**Corollaire 1.2.2.** *Si  $\Gamma$  est convergent, toutes ses mesures de Patterson-Sullivan sont associées à des mesures de Bowen-Margulis infinies.*

*Si  $\Gamma$  est divergent, il possède une unique densité de Patterson-Sullivan, et donc une unique mesure de Bowen-Margulis (finie ou non), qui est ergodique.*

Nous verrons dans les chapitres suivants que la finitude de la (ou les) mesure(s) de Bowen-Margulis joue un rôle crucial dans les propriétés dynamiques du flot géodésique.

### 1.3 Variations autour de l'entropie d'une mesure invariante

Soit  $m$  une mesure localement finie sur  $S^gM$ , invariante par le flot géodésique  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$ . Nous présentons maintenant différentes notions d'entropies pour le système dynamique mesuré  $(g^t, m)$ . Il s'agit en fait de notions ergodiques associées à n'importe quel flot  $(\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}}$  muni d'une mesure invariante  $m$ , voire bien souvent à n'importe quel système dynamique mesuré à temps discret ou continu, inversible ou non. Nous ne chercherons pas à aborder cette généralité ici puisqu'elle ne sera pas nécessaire à la suite de la lecture de ce manuscrit.

L'entropie de Kolmogorov-Sinai est historiquement la notion centrale d'entropie d'une mesure. Nous verrons dans les chapitres suivants de ce mémoire que dans notre contexte géométrique, les entropies de Katok et de Brin-Katok sont bien plus aisées à manipuler. Nous verrons au Théorème 1.3.2 que toutes ces entropies coïncident lorsque  $m$  est ergodique.

#### 1.3.1 Entropie de Kolmogorov-Sinai

On suppose dans toute cette section que  $m$  est une *probabilité*. Soit  $\mathcal{P} = (P_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  une partition finie de  $S^gM$  dont tous les éléments sont  $m$ -mesurables. On appelle *entropie de la partition  $\mathcal{P}$*  par rapport à la mesure  $m$  la quantité

$$H(m, \mathcal{P}) = - \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ m(P_\alpha) > 0}} m(P_\alpha) \log m(P_\alpha).$$

Si  $\mathcal{P} = \{P_\alpha ; \alpha \in \mathcal{A}\}$  et  $\mathcal{Q} = \{Q_\beta ; \beta \in \mathcal{B}\}$  sont deux partitions finies  $m$ -mesurables, on note

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{P_\alpha \cap Q_\beta ; \alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}\}.$$

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on pose

$$g^{-N}(\mathcal{P}) = \{g^{-N}(P_\alpha) ; \alpha \in \mathcal{A}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_N^g = \mathcal{P} \vee g^{-1}(\mathcal{P}) \vee \dots \vee g^{-N}(\mathcal{P}).$$

**Proposition 1.3.1.** *Soit  $\mathcal{P}$  une partition mesurable. La limite*

$$h(g^t, m, \mathcal{P}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{H(m, \mathcal{P}_N^g)}{n}$$

existe, et est appelée **entropie de  $(g^t, m)$  par rapport à la partition  $\mathcal{P}$** .

Voir par exemple [HK95, Chap. 4.3] pour une preuve.

**Définition 1.3.1.** *L'entropie de Kolmogorov-Sinai du flot géodésique  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  par rapport à la mesure invariante  $m$  est*

$$h_{KS}(g^t, m) = \sup \{h(m, \mathcal{P}) ; \mathcal{P} \text{ partition mesurable de } S^g M \text{ t.q. } h(m, \mathcal{P}) < +\infty\}.$$

Il existe en général des partitions  $\mathcal{P}$  telles que  $h_{KS}(g^t, m) = h(g^t, m, \mathcal{P})$ , voir de nouveau [HK95, Chap. 4.3].

### 1.3.2 Entropie de Katok

On munit (dans cette section comme dans tout le mémoire) le fibré unitaire tangent de la distance que l'on notera encore  $d^g$  définie pour tous  $v, w \in S^g M$  par

$$d^g(v, w) = \sup_{t \in [-1, 0]} d^g(\pi g^t v, \pi g^t w).$$

Cette distance est bi-Lipschitz à la distance riemannienne associée à la métrique de Sasaki sur  $S^g M$ , voir par exemple [PPS15, Chap. 2] pour plus de détails.

Pour tout  $T > 0$ , on note  $d_T^g$  (ou simplement  $d_T$ ) la **distance de Bowen** définie pour tous  $v, w \in S^g M$  par

$$d_T^g(v, w) = \sup_{t \in [-1, T]} d^g(\pi g^t v, \pi g^t w). \quad (1.11)$$

Pour tout  $v \in S^g M$ , pour tous  $\varepsilon, T > 0$ , on note

$$B^g(v, \varepsilon, T) = \{w \in S^g M ; \forall t \in [-1, T], d^g(\pi g^t v, \pi g^t w) \leq \varepsilon\}$$

la boule de centre  $v$  et de rayon  $\varepsilon$  pour la distance  $d_T^g$ .

Soit  $m$  une mesure sur  $S^g M$ , localement finie et invariante par le flot géodésique.

**Définition 1.3.2.** *Soient  $\delta, \varepsilon, T > 0$ . Un ensemble  $\mathcal{V} \subset S^g M$  est  $(m, \delta, \varepsilon, T)$ -générateur si et seulement si*

$$m \left( \bigcup_{v \in \mathcal{V}} B^g(v, \varepsilon, T) \right) \geq \delta.$$

On note

$$\mathcal{S}(m, \delta, \varepsilon, T) = \inf \{\#\mathcal{V} ; \mathcal{V} \subset S^g M \text{ est } (m, \delta, \varepsilon, T)\text{-générateur}\}$$

le cardinal minimal d'un ensemble  $(m, \delta, \varepsilon, T)$ -générateur.

**Définition 1.3.3.** *L'entropie de Katok du flot géodésique par rapport à la mesure invariante  $m$  est*

$$h_{Katok}(g^t, m) = \inf_{\delta > 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \mathcal{S}(m, \delta, \varepsilon, T).$$

On peut montrer que la quantité  $\limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \mathcal{S}(m, \delta, \varepsilon, T)$  ne dépend pas de  $\varepsilon$  dès qu'il est assez petit. Lorsque l'ensemble non-errant  $\Omega^g$  est compact, il découle de [Kat80] qu'elle ne dépend pas non-plus de  $\delta \in ]0, \|m\|]$ .

### 1.3.3 Entropies de Brin-Katok

Soit  $m$  une mesure sur  $S^g M$ , localement finie et invariante par le flot géodésique. Si  $X$  est un espace topologique, nous notons  $K \Subset X$  tout compact de  $X$ .

**Définition 1.3.4.** *L'entropie de Brin-Katok du flot géodésique par rapport à la mesure  $m$  est*

$$h_{BK}(g^t, m) = \sup_{K \Subset S^g M} \sup_{v \in K} \operatorname{ess\,lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow +\infty, g^T v \in K} -\frac{1}{T} \log m(B^g(v, \varepsilon, T)),$$

où  $B^g(v, \varepsilon, T)$  est la boule de Bowen définie au paragraphe précédent.

Dans le cas où  $M$  est *compacte* (ou plus généralement lorsque l'ensemble non-errant  $\Omega^g$  est compact), cette définition se simplifie en celle donnée par Brin et Katok dans [BK83] :

$$h_{BK}(g^t, m) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow +\infty} -\frac{1}{T} \log m(B^g(v, \varepsilon, T))$$

Nous utiliserons dans la pratique la variante suivante de l'entropie de Brin-Katok. Pour tout  $v \in S^g M$ , considérons  $\tilde{v} \in \widetilde{S^g M}$  t.q.  $p_\Gamma(\tilde{v}) = v$ . Pour tous  $\varepsilon, T > 0$ , on appelle *petite boule dynamique* de taille  $(\varepsilon, T)$  l'ensemble

$$B^\Gamma(v, \varepsilon, T) = p_\Gamma(B^g(\tilde{v}, \varepsilon, T)).$$

On vérifie aisément que  $B^\Gamma(v, \varepsilon, T)$  ne dépend pas du choix de  $\tilde{v}$  et est contenu dans la boule de Bowen  $B^g(v, \varepsilon, T)$ . Si  $\varepsilon$  est inférieur au rayon d'injectivité de  $(M, g)$ , ces deux boules coïncident. Ce rayon d'injectivité est strictement positif lorsque  $(M, g)$  est convexe-cocompact, mais peut généralement s'annuler, par exemple en présence de cusps.

**Définition 1.3.5.** *L'entropie locale de Brin-Katok du flot géodésique par rapport à la mesure  $m$  est*

$$h_{BK}^\Gamma(g^t, m) = \sup_{K \Subset S^g M} \sup_{v \in K} \operatorname{ess\,lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow +\infty, g^T v \in K} -\frac{1}{T} \log m(B^\Gamma(v, \varepsilon, T)).$$

Dès lors que  $(M, g)$  est convexe-cocompact, l'entropie de Brin-Katok et sa variante locale coïncident.

### 1.3.4 Relations entre les entropies mesurées

Notons que si l'entropie de Kolmogorov-Sinai n'est définie que pour une *mesure de probabilité*, les entropies de Katok et de Brin-Katok sont invariantes par normalisation :  $h_{Katok}(g^t, \lambda m) = h_{Katok}(g^t, m)$  pour tout  $\lambda > 0$ , et il en va de même pour l'entropie de Brin-Katok.

Pour des mesures finies ergodiques, le théorème suivant montre que ces entropies coïncident.

**Théorème 1.3.2** (Katok, Brin-Katok, Riquelme). *Supposons que les courbures sectionnelles de  $(M, g)$  sont négatives pincées : il existe  $b > 1$  tel qu'en tout point,  $-b^2 \leq \kappa_g \leq -1$ . Soit  $m$  une mesure finie sur  $S^g M$ , invariante et ergodique par le flot géodésique. Alors*

$$h_{KS} \left( g^t, \frac{m}{\|m\|} \right) = h_{Katok}(g^t, m) = h_{BK}(g^t, m) = h_{BK}^\Gamma(g^t, m).$$

Lorsque l'ensemble non-errant  $\Omega^g$  est compact, la première égalité est due à Katok dans [Kat80] et les deux suivantes à Brin et Katok dans [BK83].

Dans le cas général, cela a été démontré par Riquelme dans [Riq20]. De premières inégalités avaient été obtenues dans [Riq16] et [Riq18]. Notons que l'hypothèse de courbure bornée assure que le flot géodésique en temps 1 est uniformément Lipschitzien et que le diamètre des boules dynamique ne peut décroître plus qu'exponentiellement vite, ce qui est nécessaire pour la preuve de Riquelme.

## 1.4 Entropie topologique et principe variationnel

### 1.4.1 Entropie topologique

Si  $d$  est une distance sur  $S^g M$  (pas forcément la distance  $d^g$  décrites plus haut), on définit pour tout  $T > 0$  la **distance de Bowen** associée à  $d$  par, pour tous  $v, w \in S^g M$ ,

$$d_T(v, w) = \sup_{t \in [-1, T]} d(g^t v, g^t w).$$

*Remarque 1.4.1.* Dans la plupart des références, la distance est définie par

$$d_T(v, w) = \sup_{t \in [0, T]} d(g^t v, g^t w).$$

Ce changement d'origine des temps n'a le plus souvent aucun impact, et s'avère pratique pour certaines preuves.

Pour tout  $v \in S^g M$ , pour tous  $\varepsilon, T > 0$ , on note

$$B^d(v, \varepsilon, T) = \{w \in S^g M ; \forall t \in [-1, T], d(g^t v, g^t w) \leq \varepsilon\}$$

la boule de centre  $v$  et de rayon  $\varepsilon$  pour la distance  $d_T$ .



**Définition 1.4.1.** Soient  $\varepsilon, T > 0$ , soit  $K \subset S^g M$  un compact. Un ensemble  $\mathcal{V} \subset S^g M$  est  $(d, K, \varepsilon, T)$ -**générateur** si et seulement si

$$K \subset \bigcup_{v \in \mathcal{V}} B^g(v, \varepsilon, T).$$

On note

$$\mathcal{S}(d, K, \varepsilon, T) = \inf \{ \#\mathcal{V} ; \mathcal{V} \subset S^g M \text{ est } (m, \delta, \varepsilon, T) \text{-générateur} \}$$

le cardinal minimal d'un ensemble  $(d, K, \varepsilon, T)$ -générateur.

**Définition 1.4.2.** L'entropie topologique du flot géodésique  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  par rapport à la distance  $d$  est

$$h_{top}(g^t, d) = \sup_{K \in \Omega^g} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \mathcal{S}(d, K, \varepsilon, T).$$

L'entropie topologique du flot géodésique  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  est

$$h_{top}(g^t) = \inf \{ h_{top}(g^t, d) ; d \text{ distance sur } S^g M \}.$$

On montre immédiatement que si  $d_1$  et  $d_2$  sont deux distances bi-Lipschitz sur  $S^g M$ , alors  $h_{top}(g^t, d_1) = h_{top}(g^t, d_2)$ . Ce qui implique que lorsque l'ensemble non-errant  $\Omega^g$  est compact,  $h_{top}(g^t) = h_{top}(g^t, d)$  pour toute distance sur  $S^g M$ . Lorsque  $(M, g)$  est géométriquement finie, la distance riemannienne  $d^g$  présentée plus haut vérifie  $h_{top}(g^t) = h_{top}(g^t, d^g)$ , voir [OP04]. Ce n'est pas le cas en général dès que  $\Omega^g$  est non-compact, voir par exemple l'article original [Bow73].

## 1.4.2 Entropie et orbites fermées : de Bowen à Gurevic

Les travaux fondateurs de Bowen ont montré que pour un système dynamique uniformément hyperbolique (comme l'est le flot géodésique) sur un ensemble compact, l'entropie topologique est également le taux de croissance exponentiel du nombre d'orbites fermées. Sur une variété non-compacte, le nombre d'orbites fermées de longueur inférieure à  $T$  peut être infini. Nous introduisons donc la définition suivante, due à Gurevic dans le cas de la dynamique symbolique [Gur69].

Pour toute courbe fermée  $\alpha : [a, b] \rightarrow S^g M$  ou  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, nous notons  $\ell^g(\alpha)$  sa longueur induite par la métrique riemannienne  $g$ .

**Proposition 1.4.1.** Soit  $K \subset S^g M$  un compact dont l'intérieur intersecte au moins une géodésique fermée. L'entropie de Gurevic du flot géodésique est la quantité

$$h_{Gur}(g^t) = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \# \{ p \text{ géodésique fermée} ; \ell^g(p) \leq T, p \cap K \neq \emptyset \}.$$

Elle ne dépend pas du choix de  $K$ .

Voir [PPS15, Chap. 9] pour une preuve.

### 1.4.3 Principe variationnel et exposant critique

Le théorème central qui relie les différentes notions d'entropies présentées dans ce chapitre est le suivant.

**Théorème 1.4.2** (Principe variationnel, Bowen, Handel-Kitchens, Otal-Peigné). *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète, dont la courbure sectionnelle est négative pincée : il existe  $b > a > 0$  tel que, en tout point,  $-b^2 \leq \kappa_g \leq -a^2$ . Supposons de plus que les dérivées de la courbure sont uniformément bornées. On a alors les égalités suivantes.*

1.  $h_{top}(g^t) = \sup\{h_{KS}(g^t, m) ; m \text{ mesure de probabilité } g^t\text{-invariante}\} ;$
2.  $h_{top}(g^t) = \delta_\Gamma(g).$
3.  $h_{Gur}(g^t) = \delta_\Gamma(g).$

L'égalité (1) entre entropie topologique et supremum des entropies mesurées est due dans le cas compact à Bowen [Bow73] et dans le cas non-compact à Handel et Kitchens [HK95]. L'égalité (2) est due à Manning [Man79] dans le cas compact, et à Otal et Peigné [OP04] en général. L'égalité (3), quoique non citée explicitement, découle en fait de la preuve du Théorème 1 de [OP04]. On en trouvera une démonstration plus détaillée dans le cas d'un potentiel pouvant être non-nul (cf Paragraphe 1.5.3 ci-dessous) dans [PPS15, Chap. 9].

Existe-t-il une mesure invariante par le flot géodésique dont l'entropie de Kolmogorov-Sinai est maximale, c'est à dire égale à l'entropie du flot géodésique? Les travaux fondateurs de Bowen sur les flots uniformément hyperboliques ([Bow72b]) montrent que, lorsque la variété (ou l'ensemble non-errant  $\Omega^g$ ) est compacte, il existe bien une unique mesure de probabilité invariante qui maximise l'entropie. Dans le cas non-compact qui nous intéresse, la réponse est donnée par le résultat suivant, dû lui aussi à Otal et Peigné dans [OP04].

**Théorème 1.4.3** (Otal-Peigné). *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète, donc la courbure sectionnelle est négative pincée et dont les dérivées de la courbure sont uniformément bornées. Soit  $m_{BM}$  une mesure de Bowen-Margulis obtenue par la construction décrite au Paragraphe 1.2.3.*

1. *Si la masse de  $m_{BM}$  est finie, alors la mesure  $\bar{m}_{BM} = \frac{m_{BM}}{\|m_{BM}\|}$  est l'unique mesure qui maximise l'entropie de Kolmogorov-Sinai. Nous dirons dans ce cas que  $(M, g)$  est de **mesure de Bowen-Margulis finie**.*
2. *Si la masse de  $m_{BM}$  est infinie, alors il n'existe pas de mesure finie qui maximise l'entropie de Kolmogorov-Sinai. Nous dirons dans ce cas que  $(M, g)$  est de **mesure de Bowen-Margulis infinie**.*

## 1.5 Formalisme thermodynamique : pressions et mesure de Gibbs

Les différentes notions d'entropies qui ont été présentées ci-dessus sont en fait des cas particuliers de **pressions** associée au potentiel  $F \equiv 0$ . Nous présentons brièvement dans cette section comment ces notions se généralisent pour des potentiels non-nuls, car nous en aurons besoin par la suite notamment aux Chapitres 3 et 4. Nous supposons dans cette section que les courbures sectionnelles de  $(M, g)$  sont majorées par  $-a^2 < 0$ .

### 1.5.1 Pression géométrique et mesure de Patterson-Sullivan associée à un potentiel

Nous dirons qu'une fonction  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  est **Hölder** (par rapport à la distance  $d^g$ ) s'il existe  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $C > 0$  tel que pour tous  $v, w \in S^g M$  avec  $d^g(v, w) \leq 1$ , on ait

$$|F(v) - F(w)| \leq C d^g(v, w)^\alpha.$$

Nous appellerons **potentiel** toute application Hölder  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$ . On notera comme usuellement  $F^- = \max\{0, -F\}$ . Rappelons que nous notons  $\Gamma = \pi_1(M)$  le groupe fondamental agissant par isométries sur  $(\widetilde{M}, g)$ .

Si  $x, y \in \widetilde{M}$ , nous notons  $v_{xy}$  le vecteur tangent en  $x$  à la géodésique qui relie  $x$  à  $y$ , nous notons  $[x, y]$  le segment géodésique de  $x$  à  $y$ , et pour toute fonction continue  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$ , nous posons

$$\int_x^y F = \int_0^{d^g(x, y)} F(g^t v_{xy}) dt.$$

**Définition 1.5.1.** Soit  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel. On appelle **exposant critique de  $(\Gamma, F)$** , ou **pression géométrique de  $F$** , la quantité

$$\delta_\Gamma(F, g) = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log \sum_{\gamma \in \Gamma ; R \leq d^g(o, \gamma o) \leq R+1} e^{\int_o^{\gamma o} F}.$$

On a toujours  $\delta_\Gamma(F, g) \in ]-\infty, +\infty]$ , voir par exemple [PPS15, Chap. 4]. Si  $F$  est majorée par  $C \in \mathbb{R}$ , alors cette pression est finie, majorée par  $\delta_\Gamma(g) + C$  où  $\delta_\Gamma(g)$  est l'exposant critique introduit précédemment.

Nous notons encore  $F = F \circ p_\Gamma$  le relevé de  $F$  à  $S^g \widetilde{M}$ . On appelle **cocycle de Gibbs** associé au potentiel  $F$  la fonction

$$C^F : \begin{cases} \partial^\infty \widetilde{M} \times \widetilde{M} \times \widetilde{M} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\xi, x, y) & \mapsto & C_\xi^F(x, y) = \lim_{z \rightarrow \xi} \int_y^z F - \int_x^z F. \end{cases}$$

La limite  $\lim_{z \rightarrow \xi} \int_y^z F - \int_x^z F$  existe du fait de la courbure majorée par  $-a^2$  et de la régularité Hölder de  $F$ .

**Théorème 1.5.1.** *Si  $\delta_\Gamma(F, g) < +\infty$ , alors il existe une famille de mesures  $(\nu_x^F)_{x \in \widetilde{M}}$  qui vérifie les propriétés suivantes :*

1.  $\nu_o^F$  est une mesure borélienne de probabilité sur  $\Lambda_\Gamma$  ;
2. si  $x, y \in \widetilde{M}$ , les mesures  $\nu_x^F$  et  $\nu_y^F$  sont absolument continue l'une par rapport à l'autre et on a

$$\frac{d\nu_x^F}{d\nu_y^F}(\xi) = e^{-C_\xi^{F-\delta_\Gamma(F,g)}(x,y)};$$

3. pour tout  $x \in \widetilde{M}$  et tout  $\gamma \in \Gamma$ , on a  $\nu_{\gamma x}^F = \gamma_* \nu_x^F$ .

On appelle cette famille la **densité de Patterson-Sullivan** associée à  $(\Gamma, F)$ .

Ce théorème se démontre par les mêmes arguments que ceux de la Section 1.2.2 ci-dessus, voir [PPS15, Prop. 3.9].

## 1.5.2 Mesures de Gibbs

Pour tout  $v \in S^g M$ , et  $r, T, T' > 0$  on note

$$B^g(v, r, T', T) = \{w \in S^g M ; \forall t \in [-T', T], d^g(g^t v, g^t w) \leq r\}.$$

**Définition 1.5.2.** *Soit  $F$  un potentiel et  $m$  une mesure borélienne localement finie sur  $S^g M$ , et  $\delta \in \mathbb{R}$ . On dit que  $m$  a la **propriété de Gibbs** par rapport à  $F$  avec pression  $\delta$  si pour tout  $r > 0$  et tout  $K \Subset S^g M$  compact, il existe  $C_{K,r} > 0$  tel que pour  $m$ -presque tout  $v \in K$  et pour tous  $T, T' > 0$ , on ait*

$$\frac{1}{C_{K,r}} e^{\int_{-T'}^T (F(g^t v) - \delta) dt} \leq m(B^g(v, r, T', T)) \leq C_{K,r} e^{\int_{-T'}^T (F(g^t v) - \delta) dt}.$$

On vérifie immédiatement que si  $m$  a la propriété de Gibbs par rapport à  $F$ , alors la pression  $\delta$  est unique.

Soit  $\nu^F = (\nu_x^F)_{x \in \widetilde{M}}$  la densité de Patterson-Sullivan associée à  $F$ . On vérifie immédiatement, de même que pour la densité de Patterson-Sullivan classique, que la formule

$$d\mu(\xi, \eta) = e^{C_\xi^{F-\delta_\Gamma(F,g)}(o,z) + C_\eta^{F-\delta_\Gamma(F,g)}(o,z)} d\nu_o^F(\xi) d\nu_o^F(\eta),$$

où  $z$  est n'importe quel point sur la géodésique  $(\xi, \eta)$  définit un courant géodésique  $\mu$  sur  $\partial^2 \widetilde{M}$ , qui est  $\Gamma$ -invariant. Nous notons  $\widetilde{m}_F^g$  la mesure sur  $S^g \widetilde{M}$  qui s'écrit en coordonnées de Hopf

$$d\widetilde{m}_F^g(v) = e^{C_{v_-}^{F-\delta_\Gamma(F,g)}(o,\pi v) + C_{v_+}^{F-\delta_\Gamma(F,g)}(o,\pi v)} d\nu_o^F(v_-) d\nu_o^F(v_+) dt, \quad (1.12)$$

qui est invariante par le flot géodésique et par l'action de  $\Gamma$ .

**Proposition 1.5.2.** *La mesure  $m_F^g$  sur  $S^gM$ , invariante par le flot géodésique, induite par la projection de  $\widetilde{m}_F^g$ , vérifie la propriété de Gibbs pour  $F$ , avec pression  $\delta = \delta_\Gamma(F, g)$ . On l'appelle une **mesure de Gibbs associée au potentiel  $F$** .*

Voir [PPS15, p. 59] pour une preuve.

Les mesures de Bowen-Margulis décrites au Paragraphe 1.2.3 ci-dessus sont donc des mesures de Gibbs associées au potentiel nul. Nous allons voir que le fait qu'une mesure de Gibbs associée à un potentiel soit finie est, de nouveau, une propriété cruciale de la dynamique du flot géodésique.

Pour tout  $x \in \widetilde{M}$  et tout  $s \in \mathbb{R}$ , on pose

$$P_{\Gamma, F}(x, s) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{\int_o^{\gamma o} (F - \delta_\Gamma(F, g))} \in (0, +\infty].$$

La dichotomie suivante est l'analogue du Théorème de Hopf-Tsuji-Sullivan (Théo 1.2.1 ci-dessus) en présence d'un potentiel, et est démontrée dans le Théorème 5.3 de [PPS15].

**Théorème 1.5.3** (Paulin-Pollicott-Schapira). *Soit  $F : S^gM \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel d'exposant critique  $\delta_\Gamma = \delta_\Gamma(F, g) < +\infty$ ,  $\nu^F = (\nu_x^F)_{x \in \widetilde{M}}$  une densité de Patterson-Sullivan et  $m_F$  la mesure de Gibbs sur  $S^gM$  associées. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $P_{\Gamma, F}(o, \delta_\Gamma) = +\infty$  (i.e.  $(\Gamma, F)$  est divergent) ;
2.  $\nu_o^F(\Lambda_\Gamma^{rad}) = 1$  ;
3.  $(\partial^2 \widetilde{M}, \Gamma, \nu_o^F \times \nu_o^F)$  est complètement conservatif et ergodique ;
4.  $(S^gM, (g^t)_{t \in \mathbb{R}}, m_F)$  est complètement conservatif et ergodique.

De plus, les conditions suivantes sont également équivalentes :

1.  $P_{\Gamma, F}(o, \delta_\Gamma) = +\infty$  (i.e.  $(\Gamma, F)$  est convergent) ;
2.  $\nu_o^F(\Lambda_\Gamma^{rad}) = 0$  ;
3.  $(\partial^2 \widetilde{M}, \Gamma, \nu_o^F \times \nu_o^F)$  est complètement dissipatif et non ergodique ;
4.  $(S^gM, (g^t)_{t \in \mathbb{R}}, m_F)$  est complètement dissipatif et non ergodique.

### 1.5.3 Pression variationnelle et principe variationnel

**Définition 1.5.3.** *Soit  $F : S^gM \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel et  $m$  une mesure de probabilité sur  $S^gM$  invariante par le flot géodésique telle que  $\int F^- dm < \infty$ . On appelle **pression mesurée**, ou **pression de Kolmogorov-Sinai**, de  $F$  par rapport à  $(g^t, m)$  la quantité*

$$P(F, g^t, m) = h_{KS}(m) + \int_{S^gM} F dm.$$

On appelle **pression variationnelle** (ou simplement **pression**) de  $F$  par rapport au flot géodésique la quantité

$$P(F, g) = \sup\{P(F, g^t, m) ; m \text{ mesure de probabilité sur } S^g M, \text{ invariante par } g^t, \int F^- dm < \infty\}.$$

Le théorème suivant est l'analogie avec potentiel du principe variationnel présenté au Paragraphe 1.4.3.

**Théorème 1.5.4** (Paulin-Pollicott-Schapira, 2016). *Supposons que  $(M, g)$  est à courbure négative pincée et que les dérivées de la courbure sont bornées. Avec les notations précédentes, on a l'égalité*

$$\delta_\Gamma(F, g) = P(F, g).$$

De plus, on a la dichotomie suivante.

1. Ou bien  $F$  possède une mesure de Gibbs finie  $m_F$ , auquel cas  $\bar{m}_F = \frac{m_F}{\|m_F\|}$  est l'unique mesure vérifiant

$$P(F, g^t, \bar{m}_F) = P(F, g);$$

2. ou bien toutes les mesures de Gibbs associées à  $F$  sont de masse infinie, et il n'existe pas de mesure de probabilité  $m$  qui maximise la pression mesurée.

On trouvera une preuve de ce résultat au Chapitre 4 de [PPS15]. Notons que nous n'avons pas parlé de **pression topologique** pour le potentiel  $F$ . Une telle notion existe, et dans le cas d'une variété compacte, elle est bien égale au maximum des pressions mesurées. Mais cette pression topologique dépend d'un choix de distance, qui n'a a priori rien à voir avec la régularité du potentiel. Elle est donc difficile à manipuler sur une variété non-compacte, et comme par exemple dans [PPS15], nous avons choisi de ne pas l'utiliser.

Pour tout  $K \Subset S^g M$  et pour tout  $T > 0$ , on note

$$\mathcal{P}_K(T) = \{p \text{ géodésique fermée ; } T - 1 \leq \ell^g(p) \leq T, p \cap K \neq \emptyset\}$$

l'ensemble des géodésiques fermées de longueur au plus  $T$  qui intersectent  $K$ .

**Proposition 1.5.5.** *Soit  $K \Subset S^g M$  un compact dont l'intérieur rencontre une géodésique fermée. Soit  $F$  un potentiel. La **pression de Gurevic** de  $F$  (par rapport au flot géodésique) est la quantité*

$$P_{Gur}(g^t, F) = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \sum_{p \in \mathcal{P}_K(T)} e^{\int_p F}.$$

Elle ne dépend pas du choix de  $K$ .

Le résultat suivant est prouvé dans [PPS15, Chap. 9].

**Théorème 1.5.6.** *Dès que les courbures sectionnelles de  $(M, g)$  sont majorées par  $-a^2$ , on a*

$$P_{Gur}(g^t, F) = \delta_\Gamma(F, g).$$



## Chapitre 2

# Entropies à l'infini et récurrence du flot géodésique

### 2.1 Entropies et pressions à l'infini

Le contenu de cette section est issu des concepts développés dans [PS18], [ST18], [CDST18] et [GST20]. Notons que la notion de trou critique (pour le potentiel nul) avait été définie indépendamment dans [ACT15], et que certaines des notions d'entropie à l'infini que nous présentons ont été étudiées, de façon indépendante, dans [Vel19].

#### 2.1.1 Groupe fondamental hors d'un compact

**Définition 2.1.1.** Soit  $W \subset S^g \widetilde{M}$  un compact. On note

$$\Gamma_W = \{\gamma \in \Gamma ; \exists x, y \in W, [x, \gamma y] \cap \Gamma W \subset W \cup \gamma W, [x, \gamma y] \cap (M \setminus \Gamma W) \neq \emptyset\},$$

que l'on appellera **groupe fondamental hors de  $W$** .

Si on note  $W = p_\Gamma(\widetilde{W})$ , l'ensemble  $\Gamma_{\widetilde{W}}$  peut être interprété de la façon suivante : il s'agit (à un nombre fini d'éléments près) de la liste des arcs  $g$ -géodésiques qui quittent  $W$  puis y reviennent, à homotopie préservant  $W$  près. Il dépend de la métrique  $g$ . Ce n'est en général pas un groupe, comme l'illustre la proposition suivante.

**Proposition 2.1.1.** Si  $(M, g)$  est convexe-cocompact, et si  $W \subset S^g \widetilde{M}$  vérifie  $\Omega^g \subset p_\Gamma(\widetilde{W})$ , alors  $\Gamma_W$  est fini. Il est vide dès que  $W$  est assez gros.

Plus généralement, si  $(M, g)$  est géométriquement finie avec  $k$  cusps associées aux groupes paraboliques  $P_1, \dots, P_k$ , alors dès que  $W \subset S^g \widetilde{M}$  est assez gros, il existe un ensemble fini  $\Gamma_W^0$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \Gamma$  tel que

$$\Gamma_W \subset \cup \cup_{i,j=1}^N \alpha_i (P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k) \alpha_j^{-1}.$$



La preuve de cette proposition se trouve dans [ST18, Section 7.3]<sup>1</sup>.

Voici une propriété cruciale (et intuitive) des  $\Gamma_W$  que nous utiliserons fréquemment par la suite.

**Lemme 2.1.2.** *Soient  $W_1 \subset W_2 \subset S^g \widetilde{M}$  des compacts. Il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \subset \Gamma$  tels que*

$$\Gamma_{W_2} \subset \cup_{i,j=1}^N \alpha_i \Gamma_{W_1} \alpha_j.$$

Il s'agit de [ST18, Prop. 7.9]. On trouvera dans la Section 7.1 de [ST18] d'autres propriétés élémentaires de ces  $\Gamma_W$ . A noter que les définitions des  $\Gamma_W$  données dans [PS18], [ST18] et [CDST18] diffèrent légèrement. Nous avons gardé la définition de [CDST18], qui est la plus simple. On peut toutefois vérifier que pour un  $W$  donné, le  $\Gamma_W$  défini dans [PS18] (resp. dans [ST18]) coïncide avec la réunion d'un nombre fini d'éléments de  $\Gamma$  et un nombre fini de copies de  $\Gamma_W$  comme défini ci-dessus. Toutes les preuves de [PS18] et [ST18] s'appliquent donc encore à notre définition.

## 2.1.2 Exposants critiques à l'infini

Pour tout compact  $W \Subset S^g \widetilde{M}$ , on pose

$$\delta_{\Gamma_W}(g) = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log \# \{ \gamma \in \Gamma_W ; R \leq d^g(o, \gamma o) \leq R+1 \}.$$

Plus généralement, si  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  est un potentiel, on pose

$$\delta_{\Gamma_W}(F, g) = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log \sum_{\gamma \in \Gamma_W ; R \leq d^g(o, \gamma o) \leq R+1} e^{\int_o^{\gamma o} F}.$$

Il découle du Lemme 2.1.2 que  $\delta_{\Gamma_W}(F, g)$  est décroissant en  $W$ .

**Définition 2.1.2.** *On appelle exposant critique à l'infini ou pression géométrique à l'infini de  $(\Gamma, F)$  la quantité*

$$\delta_{\Gamma}^{\infty}(F, g) = \inf_{W \Subset S^g \widetilde{M}} \delta_{\Gamma_W}(F, g).$$

Dans le cas où  $(M, g)$  est géométriquement finie et le potentiel nul, la Proposition 2.1.1 implique la caractérisation suivante de l'exposant critique à l'infini.

**Proposition 2.1.3.** *Si  $(M, g)$  est convexe-cocompact, alors  $\delta_{\Gamma}^{\infty}(F, g) = -\infty$  pour tout potentiel  $F : S^g M$ .*

*Plus généralement, si  $(M, g)$  est géométriquement finie avec  $k$  cusps associées aux groupes paraboliques  $P_1, \dots, P_k$ , alors pour tout potentiel  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$ , on a*

$$\delta_{\Gamma}^{\infty}(F, g) = \sup \{ \delta_{P_i}(F, g) ; i = 1, \dots, k \}.$$

<sup>1</sup>Notons que dans [ST18] ou [CDST18], nous n'imposons pas la contrainte  $[x, \gamma y] \cap (M \setminus \Gamma W) \neq \emptyset$ , ce qui modifie les  $\Gamma_W$  par un ensemble fini. Nous avons introduit cette subtilité pour traiter de façon cohérente le cas convexe-cocompact en présence d'un potentiel

Le théorème suivant montre que la pression à l'infini est bien une notion... à l'infini.

**Théorème 2.1.4.** *Soit  $F, F' : TM \rightarrow \mathbb{R}$  deux potentiels sur une variété à courbure majorée par  $-a^2 < 0$ , et  $g'$  une autre métrique sur  $M$  dont la courbure est également majorée par  $-a^2$ . On suppose qu'il existe un compact  $K \subset TM$  tel que sur  $TM \setminus K$ , on a  $g = g'$  et  $F = F'$ .*

*Alors  $\delta_{\Gamma}^{\infty}(F, g) = \delta_{\Gamma}^{\infty}(F', g')$ .*

*Démonstration.* Il s'agit de la Proposition 4.9 de [GST20], déjà publiée dans la Proposition 7.13 de [ST18] lorsque le potentiel est nul.  $\square$

### 2.1.3 Autres notions d'entropies et de pressions à l'infini

Une autre notion d'entropie (ou pression) à l'infini est obtenue en considérant les mesures de probabilité invariantes par le flot géodésique dont le support se concentre hors de tout compact. Nous donnons directement la définition pour un potentiel général, sachant qu'ici comme auparavant on appelle «entropie» la pression du potentiel 0.

**Définition 2.1.3.** *Soit  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel. On appelle **pression variationnelle à l'infini** de  $F$  (par rapport au flot géodésique) la quantité*

$$\begin{aligned} P_{var}^{\infty}(F, g^t) &= \inf_{W \in S^g M} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ h_{KS}(m) + \int_{S^g M} F dm ; m \text{ proba. } g^t\text{-invariante, } m(W) \leq \varepsilon \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{W \in S^g M} \sup \left\{ h_{KS}(m) + \int_{S^g M} F dm ; m \text{ probabilité } g^t\text{-invariante, } m(W) \leq \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Enfin, on a l'analogie à l'infini de l'entropie (ou la pression) de Gurevic.

**Définition 2.1.4.** *Soit  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel. On appelle **pression de Gurevic à l'infini** de  $F$  par rapport au flot géodésique*

$$\begin{aligned} P_{Gur}^{\infty}(F, g^t) &= \inf_{W \subset T^1 M} \lim_{compact} \limsup_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{T} \log \sum_{p \in \mathcal{P}_W(T) ; \ell(p \cap W) < \alpha \ell(p)} e^{\int_p F} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \inf_{W \subset T^1 M} \limsup_{compact} \frac{1}{T} \log \sum_{p \in \mathcal{P}_W(T) ; \ell(p \cap W) < \alpha \ell(p)} e^{\int_p F}, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{P}_W(T)$  désigne l'ensemble des orbites fermées de longueur dans  $[T - 1, T]$  qui intersectent  $W$ .

### 2.1.4 Principe variationnel à l'infini

Le théorème suivant, qui montre dans les cas qui nous intéresseront l'égalité entre les différentes notions de pression à l'infini, est l'un des principaux résultats de [GST20].

**Théorème 2.1.5** (Principe variationnel à l'infini, Gouëzel-Schapira-T., Theo. 1.2 [GST20]). *Supposons que la courbure de  $(M, g)$  est négative pincée et que les dérivées de la courbure sont uniformément bornées. On a alors pour tout potentiel  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$\delta_\Gamma^\infty(F, g) = P_{var}^\infty(F, g^t) = P_{gur}^\infty(F, g^t).$$

La fin de ce paragraphe donne les principaux éléments de la preuve de ce théorème.

Pour tout compact  $K \subset S^g M$ , nous notons  $K_R$  son  $R$ -voisinage. Nous dirons qu'une application  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  est Hölder à pour **constantes de Hölder**  $(\beta, C_F)$  si pour tous  $v, w \in S^g M$  avec  $d(v, w) \leq 1$ , on a

$$|F(v) - F(w)| \leq C_F d(v, w)^\beta.$$

Le théorème suivant est le point clé de la preuve du Théorème 2.1.5. Il permet également la construction d'exemples importants, comme par exemples ceux fournis par le Théorème 2.3.10 ci-dessous, qui seront cruciaux pour notre étude du bas du spectre essentiel du Laplacien.

**Théorème 2.1.6** ([GST20], Theo. 6.10). *Soit  $K \subset M$  un compact dont l'intérieur intersecte une géodésique fermée, et  $\tilde{K} \subset \tilde{M}$  un compact tel que  $p_\Gamma(\tilde{K}) = K$ . Soit  $F : T^1 M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel Hölder avec  $\delta_{\Gamma_{\tilde{K}}}(F) > -\infty$ . Soit  $\eta > 0$ . Pour tout  $0 < \alpha \leq 1$  et  $R \geq 4$ , il existe  $\psi = \psi(\tilde{K}, F, \eta, \alpha/R) > 0$  qui vérifie la propriété suivante.*

*Pour toute mesure de probabilité  $\mu$  sur  $S^g M$ , invariante et ergodique par  $(g^t)$ , telle que  $\int F^- d\mu < \infty$  et  $\mu(S^g K_R) \leq \alpha$ , on a*

$$h_{KS}(\mu) + \int_{T^1 M} F d\mu \leq (1 - \alpha)\delta_{\Gamma_{\tilde{K}}}(F) + \alpha\delta_\Gamma(F) + \eta + \psi.$$

*De plus, lorsque  $\tilde{K}, F$  et  $\eta$  sont fixés,  $\psi(\tilde{K}, F, \eta, \alpha/R)$  converge en décroissant vers 0 lorsque  $\alpha/R$  converge vers 0.*

Ce résultat est montré en majorant la **pression de Katok**  $P_{Kat}(F, g, \mu)$ , qui est l'analogie en présence d'un potentiel de l'entropie de Katok que nous avons introduite à la Section 1.3.2, et qui vérifie lorsque  $\mu$  est ergodique avec  $\int F^- d\mu < \infty$  l'égalité

$$h_{KS}(\mu) + \int_{T^1 M} F = P_{Kat}(F, \mu).$$

Nous ne prouverons pas le Théorème 2.1.6, dont la preuve assez technique s'étale sur les Sections 5 et 6.

Ce théorème implique immédiatement le corollaire suivant, qui fournit la première inégalité du Théorème 2.1.5.

**Corollaire 2.1.7.** *Si  $F$  est un potentiel Hölder, et si  $(\mu_n)_{n \geq 0}$  est une suite de probabilité invariantes ergodiques par le flot géodésique qui converge pour la topologie vague vers la mesure  $\mu$ , alors*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} h_{KS}(\mu_n) + \int F d\mu_n \leq (1 - \|\mu\|) \delta_\Gamma^\infty(F) + \|\mu\| \delta_\Gamma(F).$$

*En particulier, si  $\mu_n \rightarrow 0$ , alors  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} h_{KS}(\mu_n) + \int F d\mu_n \leq \delta_\Gamma^\infty(F)$ , soit précisément*

$$P_{var}^\infty(F) \leq \delta_\Gamma^\infty(F).$$

L'autre inégalité va découler du lemme suivant et du principe variationnel standard. Soit  $v_0 \in S^g M$  une origine arbitraire. Pour tout  $R > 0$ , nous notons  $B_R \subset S^g M$  la boule de centre  $v_0$  et de rayon  $R$ , et  $\psi_R : S^g M \rightarrow [0, 1]$  une fonction lisse à support compact, à valeurs dans  $[0, 1]$  et qui vaut 1 sur  $B_R$ .

**Proposition 2.1.8.** *Soit  $F : S^g M$  un potentiel Hölder de pression finie. Pour tout  $R > 0$  et tout  $\varepsilon > 0$ , soit  $m_{\varepsilon, R}$  une probabilité sur  $S^g M$  invariante par le flot géodésique telle que*

$$h_{KS}(m_{\varepsilon, R}) + \int_{S^g M} (F - R\psi_R) dm_{\varepsilon, R} \geq \delta_\Gamma(F - R\psi_R) - \varepsilon,$$

*Alors*

$$m_{\varepsilon, R}(B_R) \leq \frac{\delta_\Gamma(F) - \delta_\Gamma^\infty(F) + \varepsilon}{R}$$

*et*

$$h_{KS}(m_{\varepsilon, R}) + \int_{S^g M} F dm_{\varepsilon, R} \geq \delta_\Gamma^\infty(F) - \varepsilon.$$

*En particulier, la suite de probabilités  $(m_{\frac{1}{n}, n})_{n \geq 0}$  converge faiblement vers 0 et vérifie*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} h_{KS}(m_{\frac{1}{n}, n}) + \int_{S^g M} F dm_{\frac{1}{n}, n} \geq \delta_\Gamma^\infty(F) :$$

*on a  $P_{var}^\infty(F) \geq \delta_\Gamma^\infty(F, g)$ .*

*Démonstration.* Comme  $\psi_R$  est à support compact, on a pour tout  $R > 0$ ,

$$\delta_\Gamma^\infty(F - R\psi_R, g) = \delta_\Gamma^\infty(F)$$

donc

$$\delta_\Gamma(F - R\psi_R, g) \geq \delta_\Gamma^\infty(F).$$

Par le Principe Variationnel (cf Théorème 1.5.4), pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $m_{\varepsilon, R}$  une probabilité sur  $S^g M$  invariante par le flot géodésique telle que

$$h_{KS}(m_{\varepsilon, R}) + \int_{S^g M} (F - R\psi_R) dm_{\varepsilon, R} \geq \delta_\Gamma(F - R\psi_R) - \varepsilon \geq \delta_\Gamma^\infty(F, g) - \varepsilon.$$

Puisque  $\psi_R \geq 1$  sur  $B_R$ , on a donc (de nouveau par le principe variationnel)

$$\delta_\Gamma^\infty(F, g) - \varepsilon \leq h_{KS}(m_{\varepsilon, R}) + \int_{S^g M} (F) dm_{\varepsilon, R} - R m_{\varepsilon, R}(B_R) \leq \delta_\Gamma(F, g) - R m_{\varepsilon, R}(B_R).$$

La mesure  $m_{\varepsilon, R}$  vérifie donc bien les propriétés annoncées.  $\square$

## 2.2 Mesure de Bowen-Margulis et variétés Fortement Positivement Récurrenente

### 2.2.1 Finitude de la mesure de Bowen-Margulis

Nous avons construit aux Paragraphes 1.2.3 et 1.5.2 la mesure de Bowen-Margulis et plus généralement la mesure de Gibbs associée à la densité de Patterson-Sullivan  $(\nu_x^F)_{x \in \widetilde{M}}$ . C'est une mesure localement finie et supportée sur l'ensemble non-errant  $\Omega^g$ , qui vérifie la propriété de Gibbs pour  $F$ .

Nous présentons dans ce paragraphe les propriétés permettant d'assurer la finitude de cette mesure. Dès que l'ensemble non-errant  $\Omega^g$  est compact cette mesure est automatiquement finie : les énoncés qui suivent n'ont donc d'intérêt que pour des variétés dont l'ensemble non-errant n'est pas compact.

**Définition 2.2.1.** *Soit  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel. On dit que  $(\Gamma, F)$  est **divergent** ou **récurent** si*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{\int_o^{\gamma o} (F - \delta_\Gamma(F, g))} = +\infty.$$

Rappelons que d'après le Théorème 1.5.3,  $(\Gamma, F)$  est récurrent si et seulement si la mesure de Gibbs de  $F$  est unique, complètement conservative et ergodique. C'est en particulier le cas dès lors qu'elle est finie.

**Théorème 2.2.1** (Pit-Schapira 2016). *Soit  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel. Supposons que  $(\Gamma, F)$  est récurrent. On a la dichotomie suivante.*

1. Ou bien pour tout compact  $W \subset S^g M$  dont l'intérieur intersecte  $\Omega^g$ ,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_W} d(o, \gamma o) e^{\int_o^{\gamma o} (F - \delta_\Gamma(F, g))} < +\infty;$$

2. ou bien pour tout compact  $W \subset S^g M$  dont l'intérieur intersecte  $\Omega^g$ ,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_W} d(o, \gamma o) e^{\int_o^{\gamma o} (F - \delta_\Gamma(F, g))} = +\infty.$$

Dans le cas (1), on dit que  $(\Gamma, F)$  est **positivement récurrent**.

Il s'agit du Théorème 1.4 de [PS18].

**Théorème 2.2.2** (Dal'bo-Otal-Peigné 2000, Pit-Schapira 2016). *Il existe une mesure de Gibbs  $m_F$  finie associée au potentiel  $F$  si et seulement si  $(\Gamma, F)$  est positivement récurrent.*

Ce théorème est dû à Dal'bo, Otal et Peigné [DOP00] dans le cas où  $(M, g)$  est géométriquement finie et où le potentiel est nul, et à Pit et Schapira [PS18] dans le cas général.

## 2.2.2 Trou critique et Récurrence positive forte

Nous retrouverons par la suite de façon fréquente la condition de *trou critique* pour le flot géodésique : lorsque l'entropie (ou la pression) totale est strictement plus grande que l'entropie (ou la pression) à l'infini.

**Définition 2.2.2.** *Soit  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel. On dit que  $(\Gamma, F)$  a un trou critique si  $\delta_\Gamma(F, g) > \delta_\Gamma^\infty(F, g)$ . On dit également que  $F$  est **Fortement Positivement Récurrent** (on utilisera par la suite l'acronyme anglais **SPR**, pour **Strongly Positively Recurrent**).*

Cette notion avait été introduite auparavant (et indépendamment), et étudiée du point de vue de la théorie géométrique des groupes dans [ACT15] puis [Yan17]. Le théorème suivant donne une première illustration de la pertinence de ce critère très simple.

**Théorème 2.2.3** ([ST18], Theo. 1.7; [GST20], Theo 7.3). *Soit  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel. Supposons qu'il a un trou critique. Alors il est positivement récurrent. En particulier, il admet une unique mesure de Gibbs finie.*

La preuve repose sur le Théorème 2.2.2. Il est clair que la condition de trou critique implique que, pour un compact  $W \Subset S^g \widetilde{M}$  assez gros,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_W} d(o, \gamma o) e^{\int_o^{\gamma o} (F - \delta_\Gamma(F, g))} < +\infty.$$

Il suffit donc de montrer que  $(\Gamma, F)$  est récurrent. Par la dichotomie de Hopf-Tsuji-Sullivan (voir Théorème 1.5.3 ci-dessus), il faut et il suffit de montrer que l'ensemble limite radial est de mesure pleine pour les mesures de Patterson-Sullivan. Nous allons montrer qu'un potentiel SPR vérifie une condition plus forte : il est *exponentiellement récurrent*. Introduisons pour cela quelques notations.

Soit  $W \Subset S^g \widetilde{M}$  un compact. On note pour tout  $T > 0$ ,

$$U_T(W) = U_T^g(W) = \{\xi \in \Lambda_\Gamma ; \exists v \in W, \xi = v_+, [v, g^T v] \cap \Gamma W \subset W\}.$$

Notons que pour  $T > \text{diam}(W)$ , le segment d'orbite  $[v, g^T v] = \{g^t v, t \in [0, T]\}$  sort nécessairement de  $W$ . L'ensemble  $U_T(W)$  désigne donc les points à l'infini des vecteurs qui sortent de  $W$  et n'y reviennent pas avant le temps  $T$ .

**Lemme 2.2.4.** *Avec les notations précédentes, si  $W$  est d'intérieur non-vide,*

$$\Lambda_\Gamma \setminus \Gamma \left( \bigcup_{T>0} U_T(W) \right) \subset \Lambda_\Gamma^{\text{rad}}$$

*Démonstration.* L'ensemble  $\Gamma \left( \bigcup_{T>0} U_T(W) \right)$  est précisément les points à l'infini de relevés de géodésiques dans  $S^g M$  qui sortent du compact  $p_\Gamma(W)$  et qui n'y reviennent jamais. Son complémentaire est donc l'ensemble des points à l'infini de géodésiques qui repassent une infinité de fois dans l'orbite  $\Gamma W$ , donc de points qui sont tous radiaux.  $\square$

Cela implique immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire 2.2.5.** *Soit  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel, et  $\nu_o^{\Gamma, F}$  une mesure de Patterson-Sullivan associée. Si  $\nu_o^{\Gamma, F}(\bigcup_{T>0} U_T(W)) = 0$ , alors  $(\Gamma, F)$  est récurrent.*

**Définition 2.2.3.** *On dit que le potentiel  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  est **exponentiellement récurrent** si et seulement si il existe  $W \Subset S^g M$  compact et  $C, \alpha > 0$  tel que pour tout  $T > 0$ ,*

$$\nu_o^{\Gamma, F}(U_T(W)) \leq C e^{-\alpha T}.$$

Le Théorème 2.2.3 découle du Corollaire 2.2.5 et du théorème suivant.

**Théorème 2.2.6.** *Un potentiel  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  est exponentiellement récurrent si et seulement si il est fortement positivement récurrent.*

La preuve de ce théorème se trouve dans [GST20, Section 7.4]. Pour le potentiel nul, lorsque la variété est géométriquement finie, ce résultat peut se déduire directement de la preuve du Théorème A de [DOP00], combinée avec la Proposition 2.1.3 ci-dessus. Pour une variété générale, toujours pour le potentiel nul, cela découle de la preuve de la Proposition 7.31 de [ST18].

Dès que la variété n'est pas géométriquement finie, le Théorème 2.2.3 est un outil très général qui permet de construire de nombreux exemples de flots géodésiques ayant une mesure d'entropie maximale finie. A notre connaissance, tous les exemples de variétés à courbure négative dont le flot géodésique a une mesure de Bowen-Margulis finie connus à ce jour sont SPR, à l'exception notable des exemples (géométriquement finis) construits dans [Pei11]. L'étude dynamique des variétés à courbure négative ayant une mesure de Bowen-Margulis finie mais pas de trou critique reste largement à faire.

## 2.3 Quelques exemples

### 2.3.1 Variétés avec trou critique

Présentons d'abord quelques exemples de variétés pour lesquels le flot géodésique est fortement positivement récurrent pour le potentiel nul. On suppose toujours dans cette section que  $(M, g)$  est à courbure majorée par  $-a^2$ .

#### Variétés géométriquement finies

**Proposition 2.3.1.** *Si  $(M, g)$  est une variété géométriquement finie, elle est SPR si et seulement si elle a un **trou parabolique**, c'est à dire si*

$$\delta_\Gamma(g) > \max\{\delta_{P_1}(g), \dots, \delta_{P_k}(g)\},$$

où  $P_1, \dots, P_k$  sont des groupes paraboliques associés à chacun des cusps de  $(M, g)$ . Lorsque la variété est localement symétrique, cette condition est vérifiée dès lors que  $\Gamma$  n'est pas un groupe parabolique.

Le premier point est une conséquence immédiate de la Proposition 2.1.1. Le second point découle du fait qu'un groupe parabolique d'un espace localement symétrique est toujours divergent (voir [DOP00, Section 3] pour le cas hyperbolique réel) et du théorème suivant, voir [DOP00, Proposition 2].

**Théorème 2.3.2** (Dal'bo-Otal-Peigné 2000). *Soit  $G < \Gamma$  un sous-groupe divergent de  $\Gamma$ , et tel que  $\Lambda_G \subsetneq \Lambda_\Gamma$ . Alors  $\delta_G(g) < \delta_\Gamma(g)$ .*

Le fait que les groupes paraboliques des espaces localement symétriques sont tous divergents semble connu des experts et peut se démontrer à partir d'arguments présentés dans [CI99]. Nous n'avons pas localisé de preuve publiée.

Cette condition de trou parabolique, dont l'importance a été initialement soulignée par Dal'bo, Otal et Peigné dans [DOP00], est à l'origine de la définition du trou critique. Voici maintenant des exemples qui ne sont pas forcément géométriquement finis.

### Produits Schottky

Soient  $G$  et  $H$  deux groupes discrets d'isométrie de la variété simplement connexe  $(\widetilde{M}, g)$  à courbure majorée par  $-a^2$ . On dit que  $G$  et  $H$  sont en **position Schottky** s'il existe des compacts disjoints  $U_G, U_H \subset \widetilde{M} \cup \partial^\infty \widetilde{M}$  tels que pour tout  $\gamma \in G \setminus \{\text{id}\}$ , pour tout  $h \in H \setminus \{\text{id}\}$ , on ait

$$\gamma \left( (\widetilde{M} \cup \partial^\infty \widetilde{M}) \setminus U_G \right) \subset U_G \quad \text{and} \quad h \left( (\widetilde{M} \cup \partial^\infty \widetilde{M}) \setminus U_H \right) \subset U_H.$$

Un argument célèbre dû à Klein souvent appelé *lemme du ping-pong* montre que si  $G$  et  $H$  sont en position Schottky, alors dans le groupe des isométries de  $(\widetilde{M}, g)$ , le groupe  $\Gamma = \langle G, H \rangle = G * H$  est discret et est le produit libre de  $G$  et  $H$ .

**Théorème 2.3.3.** *Soient  $G$  et  $H$  deux groupes discrets d'isométrie de la variété simplement connexe  $(\widetilde{M}, g)$ , en position Schottky. Soit  $\Gamma = \langle G, H \rangle = G * H$ . On a*

$$\delta_\Gamma^\infty(g) = \max\{\delta_G^\infty(g), \delta_H^\infty(g)\}.$$

*Démonstration.* Il s'agit du Théorème 7.18 de [ST18]. □

Notons le corollaire suivant, qui permet très facilement de construire des exemples de variétés SPR non-géométriquement finis.

**Corollaire 2.3.4.** *Soient  $G$  et  $H$  deux groupes discrets d'isométrie de la variété simplement connexe  $(\widetilde{M}, g)$ , en position Schottky. Soit  $\Gamma = \langle G, H \rangle = G * H$ .*

1. *Si  $G$  et  $H$  ont un trou critique, alors  $\Gamma$  aussi.*
2. *Si  $\delta_\Gamma(g) > \max\{\delta_G(g), \delta_H(g)\}$ , alors  $\Gamma$  a un trou critique.*
3. *Si  $G$  et  $H$  sont divergents (i.e. leurs séries de Poincaré divergent en leurs exposants critiques respectifs  $\delta_G(g)$  et  $\delta_H(g)$ ), alors  $\Gamma$  a un trou critique.*



*Démonstration.* Les deux premiers items sont immédiats. Pour le troisième, notons que si  $G$  et  $H$  sont en position Schottky, on a  $\Lambda_\Gamma \neq \Lambda_G \cup \Lambda_H$ . Si  $G$  et  $H$  sont divergents, on a donc d'après le Théorème 2.3.2 ci-dessus

$$\delta_\Gamma(g) > \max\{\delta_G(g), \delta_H(g)\}.$$

Le point (3) découle donc du point (2).  $\square$

Voici un exemple géométriquement infini, initialement proposé dans [Pei03].

Soit  $G_0 < \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  le groupe fondamental d'une surface hyperbolique compacte  $S_0$ , et  $G \triangleleft G_0$  le groupe fondamental d'un  $\mathbb{Z}$ -revêtement de  $S_0$ . On peut montrer que  $G_0$  est divergent (la preuve découle des arguments de [Gui84], Théorème 3). Le groupe  $G_0$  agit discrètement par isométrie sur  $\mathbb{H}^3$ , en préservant un plan totalement géodésique  $\mathcal{P}$ . Il est en position Schottky avec tout groupe cyclique hyperbolique  $H = \langle h \rangle$  dont l'axe intersecte  $\mathcal{P}$  transversalement. De plus,  $H$  est aussi divergent. Donc par le théorème précédent,  $\Gamma = G * H$  est SPR, et de type infini (donc géométriquement infini).

Il est à noter que dans l'article [Pei03], la propriété de trou critique pour  $\Gamma$  n'avait pas été identifiée, bien qu'elle soit implicitement utilisée dans la preuve.

### Surfaces à la Ancona

Les exemples suivants sont initialement dûs à Ancona [Anc], qui avait remarqué (sans la notion de trou critique) qu'il s'agit d'une façon de produire des surfaces hyperboliques de type infini dont la mesure de Bowen-Margulis est finie.

**Théorème 2.3.5.** *Soit  $(M, g) = \mathbb{H}^2/\Gamma$  une surface hyperbolique telle que  $0 < \delta_\Gamma(g) < 1$ . Alors il existe une perturbation compacte  $g_\varepsilon$  de  $g$  sur  $M$  telle que  $(M, g_\varepsilon) = \mathbb{H}^2/\Gamma_\varepsilon$  et  $(M, g_\varepsilon)$  a un trou critique.*

*Démonstration.* Si  $\Gamma$  est de type fini, alors  $(M, g)$  est géométriquement finie et à courbure constante : elle est donc SPR d'après la Proposition 2.3.1.

Si  $\Gamma$  n'est pas de type fini, soit  $K \subset M$  un compact convexe, délimité par des géodésiques fermées  $p_1, \dots, p_k$  de longueurs  $l_1, \dots, l_k$ . Un tel compact (formé d'une réunion finie de pantalons) existe toujours. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , notons  $g_\varepsilon$  la métrique hyperbolique sur  $M$  obtenue en donnant aux géodésiques  $p_1, \dots, p_k$  les longueurs  $\varepsilon l_1, \dots, \varepsilon l_k$ . Voir par exemple [BP92], Chap. B pour la construction de cette métrique. On a donc  $(M, g_\varepsilon)$  est donc isométrique à  $\mathbb{H}^2/\Gamma_\varepsilon$ .

**Lemme 2.3.6.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a*

$$\delta_{\Gamma_\varepsilon}^\infty(\mathbb{H}^2) = \delta_{\Gamma_\varepsilon}^\infty(\mathbb{H}^2) < 1.$$

*De plus,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{\Gamma_\varepsilon}(\mathbb{H}^2) = 1.$$

*En particulier, pour tout  $\varepsilon$  assez petit,  $(M, g_\varepsilon)$  a un trou critique.*

Le premier point découle de ce que  $g_\varepsilon$  est une perturbation compacte de  $g$ , et du Théorème 2.1.4 ci-dessus. Le second point découle facilement du lien entre entropie et bas du spectre (Théorème 4.2.9).  $\square$

Notons qu'on ne sait pas si cette construction permet de construire, pour un  $\varepsilon$  bien choisi, une surface  $(M, g_\varepsilon)$  dont la mesure de Bowen-Margulis serait finie mais qui n'ait pas de trou critique.

### 2.3.2 Potentiels avec trou critique

Dans le cas où l'on s'autorise un potentiel non-nul, il est très facile de produire des exemples dont on contrôle la pression. En particulier, nous pouvons facilement construire des potentiels SPR (donc de mesure de Gibbs finie) sur toute variété à courbure négative.

Pour tout  $K \subset S^g M$  compact, on note  $\Psi_K : S^g M \rightarrow [0, 1]$  une fonction lisse qui vaut 1 sur  $K$  et qui s'annule en dehors du 1-voisinage de  $K$ .

**Théorème 2.3.7.** *Soit  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel de pression  $\delta_\Gamma(F, g)$  finie.*

1. *Pour tout compact  $K$  dont l'intérieur rencontre l'ensemble non-errant  $\Omega^g$ , il existe  $c_K > 0$  tel que pour tout  $c \geq c_K$ , le potentiel  $F + c\psi_K$  a un trou critique.*
2. *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K_\varepsilon \subset S^g M$  tel que pour tout compact  $K$  qui contient  $K_\varepsilon$ , le potentiel  $F + \varepsilon\psi_K$  a un trou critique.*

*Démonstration.* Rappelons que la pression à l'infini est invariante par perturbation compacte, voir Théorème 2.1.4. On a donc pour tout  $K \Subset S^g M$  et pour tout  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$\delta_\Gamma^\infty(F + cK) = \delta_\Gamma^\infty(F).$$

Montrons (1). Comme l'intérieur de  $K$  rencontre l'ensemble non-errant, il intersecte aussi deux géodésiques fermées  $c_1$  et  $c_2$ , correspondant à des éléments  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$  tels que  $\langle \gamma_1 \rangle$  et  $\langle \gamma_2 \rangle$  sont en position Schottky. En particulier,  $G : \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$  a un exposant critique  $\delta_G(g) > 0$ . Le point (1) est une conséquence du lemme suivant, dont la preuve (élémentaire à partir de la définition de l'exposant critique) est laissée au lecteur.

**Lemme 2.3.8.** *Avec les notations précédentes, on a*

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \delta_G(F + c\psi_K, g) = +\infty.$$

Montrons (2). Si  $F$  a déjà un trou critique, alors pour tout compact  $K \subset S^g M$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\delta_\Gamma(F + \varepsilon\psi_K, g) \geq \delta_\Gamma(F, g) > \delta_\Gamma^\infty(F, g) = \delta_\Gamma^\infty(F + \varepsilon K, g).$$

Donc  $F + \varepsilon\psi_K$  est SPR. Supposons maintenant que  $\delta_\Gamma(F, g) = \delta_\Gamma^\infty(F, g)$ . Nous avons vu (Théorème 1.4.2) que

$$\delta_\Gamma(F, g) = \sup\{h_{KS}(m) + \int_{S^g M} F dm ; m \text{ probabilité } g^t\text{-invariante}\}.$$

Soit  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$  et soit  $m_\varepsilon$  une mesure de probabilité telle que

$$h_{KS}(m) + \int_{S^g M} F dm_\varepsilon \geq \delta_\Gamma(F, g) - \varepsilon.$$

Soit  $K_\varepsilon \subset S^g M$  un compact tel que  $m_\varepsilon(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ . On a alors

$$h_{KS}(m) + \int_{S^g M} (F + 2\varepsilon\psi_{K_\varepsilon}) \geq \delta_\Gamma(F, g) - \varepsilon + 2\varepsilon m(K_\varepsilon) \geq \delta_\Gamma(F, g) + \varepsilon(1 - 2\varepsilon).$$

Donc

$$\delta_\Gamma(F + 2\varepsilon\psi_{K_\varepsilon}, g) \geq \delta_\Gamma(F, g) + \varepsilon(1 - 2\varepsilon) > \delta_\Gamma^\infty(F, g),$$

ce qui montre (2) lorsque  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ . Cela implique le même résultat pour tout  $\varepsilon > 0$  par croissance de  $F \mapsto \delta_\Gamma(F, g)$ .  $\square$

Voici un corollaire immédiat (en partant par exemple du potentiel nul), qui à ma connaissance n'était pas connu jusque là.

**Corollaire 2.3.9.** *Toute variété complète à courbure négative admet un potentiel de mesure de Gibbs finie.*

Nous utiliserons aussi par la suite le résultat suivant, qui montre qu'une perturbation compacte permet de rendre la pression arbitrairement proche de la pression à l'infini.

**Théorème 2.3.10.** *Soit  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K_\varepsilon$  et une constante  $c_\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $c \geq c_\varepsilon$  et pour tout  $\psi : S^g M \rightarrow [0, +\infty[$  est une fonction lisse à support compact telle que  $\psi \geq 1$  sur  $K_\varepsilon$ , on a*

$$\delta_\Gamma^\infty(F, g) \leq \delta_\Gamma(F - c\psi, g) \leq \delta_\Gamma^\infty(F, g) + \varepsilon.$$

*Démonstration.* Il s'agit d'une conséquence directe du Théorème 2.1.5 que nous ne détaillons pas ici, cf Proposition 7.10 de [GST20].  $\square$

### 2.3.3 Variétés sans trou critique

Voici brièvement quelques exemples de variétés à courbure négative dont l'entropie totale est égale à l'entropie à l'infini.

**Proposition 2.3.11.** *Soit  $(M, g)$  une variété à courbure négative majorée par  $-a^2$  dont les mesures de Bowen-Margulis sont infinies. Alors elle n'a pas de trou critique :  $\delta_\Gamma(g) = \delta_\Gamma^\infty(g)$ .*

*Démonstration.* Il s'agit de la contraposée du Théorème 2.2.3.  $\square$

La conséquence suivante est immédiate.

**Corollaire 2.3.12.** *Si  $(M, g)$  est un revêtement galoisien infini d'une variété à courbure négative, alors elle n'a pas de trou critique.*

*Démonstration.* Soit  $p : (M, g) \rightarrow (N, g)$  un revêtement galoisien, de groupe d'automorphisme  $G$ . Notons que  $G$  agit sur  $(M, g)$  discrètement et par isométries. Si  $(M, g)$  avait une mesure de Bowen-Margulis  $m_{BM}$  finie, elle est alors unique, donc invariante par l'action de  $G$ . Donc comme  $G$  est infini, la masse de  $m_{BM}$  est infinie : une contradiction.  $\square$

Notons que l'hypothèse d'un revêtement *galoisien* est nécessaire, puisqu'une surface hyperbolique compacte admet des revêtements (de fibre infinie mais non-galoisien) qui sont convexe-cocompacts, donc de mesure de Bowen-Margulis finie.

**Théorème 2.3.13** (Peigné [Pei11]). *Il existe des variétés géométriquement finies, sans trou critique, dont la mesure de Bowen-Margulis est finie.*

*Démonstration.* La construction de ces exemples est détaillée dans [Pei11]. La difficulté principale est de construire des groupes géométriquement finis *divergents* sans trou critique. La construction produit facilement des exemples de mesure de Bowen-Margulis (unique, ergodique) finie ou infinie.  $\square$



## Chapitre 3

# Variations de l'entropie par changement de métrique

Dans ce chapitre, nous décrivons nos travaux sur le comportement de l'entropie topologique du flot géodésique sur une variété non-compacte à courbure négative pincée, lorsque l'on modifie la métrique riemannienne sous-jacente.

Nous avons obtenus de premiers résultats sur l'étude de la régularité de l'entropie lors d'une perturbation  $\mathcal{C}^k$  de la métrique pour les variétés convexes cocompactes ([Tap10], [RSST15]). Ces articles reposaient sur des outils bien connus pour les flots Axiome A.

Nous avons étendu cette question à toutes les variétés complètes non compactes dans l'article [ST18]. Comme nous allons le voir, les nouveaux outils que nous y avons développés pour ce problème se sont avérés au moins aussi intéressants que le résultat. Il s'agit d'une part d'une nouvelle formule de "changement de variable" pour les mesures associées à un courant géodésique, d'autre part des conséquences de la propriété de trou critique (variétés SPR) présentée au Chapitre 2.

On montrait dans [Tap10], en généralisant un argument de [KKW91], que lors d'une variation  $\mathcal{C}^2$  de la métrique sur une variété convexe-cocompacte, l'entropie varie de façon  $\mathcal{C}^1$  et une formule pour la dérivée de l'entropie est donnée. La preuve est contenue dans celle de [ST18] que nous présentons ci-dessous.

Il est montré dans [RSST15] que lors d'une variation analytique de la métrique sur une variété convexe-cocompacte, l'entropie varie de façon analytique. L'argument est différent, et repose sur l'existence d'extensions analytiques, uniformes en  $g$ , pour la fonction Zeta de Selberg

$$Z^g(z) = \exp \left( \sum_{\gamma \in \mathcal{L}_p(g)} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{-sk\ell_g(\gamma)}}{k} \right). \quad (3.1)$$

sur une variété convexe-cocompacte  $(M, g)$ , où  $\mathcal{L}_p(g)$  désigne l'ensemble des géodésiques fermées primitives sur  $(M, g)$ . La fonction Zeta et son extension varient analytiquement lors d'une perturbation analytique de la métrique. L'entropie topologique  $h_{top}(M, g)$  étant un zéro isolé de  $Z^g$ , elle varie donc analytiquement avec  $g$ . Cette preuve est identique à celle présentée dans [KKPW89] pour les variétés compactes. Nous ne présenterons pas ici l'article [RSST15].

La première section de ce chapitre est dédiée à la présentation des résultats de [ST18] sur la différentiabilité de l'entropie sur les variétés non compactes (initiés dans [Tap10]), et des outils développés pour cette étude.

Nous présentons dans une seconde section une application de notre formule de variation de l'entropie : les résultats obtenus dans [SST12a, SST20] sur les extrema de l'entropie dans une classe conforme.

### 3.1 Différentiabilité de l'entropie topologique

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète à courbure négative, et  $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-1, 1)}$  une variation de métriques de classe  $\mathcal{C}^k$ , toutes à courbures uniformément négative. Quelle est la régularité de l'application  $\varepsilon \mapsto h_{top}(M, g_\varepsilon)$  ?

Pour les variétés *compactes*, une première réponse avait été apportée simultanément dans [KKPW89] et [Fla95] : si la famille de métrique est  $\mathcal{C}^k$ , alors l'entropie varie de façon  $\mathcal{C}^{k-1}$ . La preuve de [KKPW89] s'appuie de façon cruciale sur le théorème de stabilité structurelle des flots d'Anosov, dont la preuve est spécifique au cas compact. De plus, les informations qu'elle apporte sur les dérivées de l'entropie font intervenir l'application de conjugaison fournie par le théorème de stabilité structurelle, qui n'est en général pas explicite.

L'article [KKW91] présente une preuve alternative «à la main» du fait que lors d'une variation  $\mathcal{C}^2$  de la métrique, l'entropie est  $\mathcal{C}^1$ , qui fournit une formule pour la dérivée de l'entropie. C'est cette preuve que nous adaptons dans le cas des variétés non-compactes générales. Le chemin vers cette preuve fournit de nombreuses informations nouvelles, qui reposent sur deux observations cruciales.

La première est que lorsque l'on change la métrique, tout en restant bi-Lipschitz à la métrique de départ et à courbure sectionnelle négative, il existe une *conjugaison de Morse* entre les flots géodésique, c'est à dire un homéomorphisme global qui conjugue les flots à reparamétrisation du temps près. Cette conjugaison est explicite, globalement Hölder et  $\mathcal{C}^1$  le long des géodésiques. Nous verrons que cela implique immédiatement l'inégalité qui est la première étape cruciale dans la preuve de la différentiabilité de l'entropie. Cette conjugaison de Morse explicite a de nombreuses autres applications, par exemple la généralisation au cas non-compact d'un théorème de rigidité du spectre des longueurs de Knieper (voir Théorème 3.1.8 ci-dessous).

L'autre observation fondamentale est que, lorsque la métrique  $g_0$  a un *trou critique* (voir Définition 2.2.2), les *mesures de Bowen-Margulis normalisées* varient continûment : il s'agit du Théorème 3.1.11 ci-dessous. Dans le cas compact, cette continuité est une conséquence du théorème de stabilité structurelle et des

travaux de Bowen et Ruelle (voir par exemple [BR75]). Aucun résultat n'était disponible sur cette question dans le cas où l'ensemble non-errant n'est pas compact. Nous avons défini avec B. Schapira l'entropie à l'infini et la propriété de *trou critique* précisément dans le but d'y répondre. Nous avons constaté plus tard que d'autres travaux récents avaient donné la même définition du trou critique pour l'étude d'autres problèmes ([ACT15], [Yan17]).

### 3.1.1 Stratégie générale de preuve

L'idée générale commune aux preuves de [KKW91], [Tap10] et [ST18] est simple. Elle repose sur l'inégalité suivante, due à Katok ([Kat82]) pour les surfaces compactes et montrée dans [KKW91] pour les variétés compactes de toute dimension, que nous avons établie en général dans [ST18].

**Théorème 3.1.1** (Katok 1982 ; Katok-Knieper-Weiss 1991 ; Schapira-T. 2017). *Soient  $g_1, g_2$  des métriques riemanniennes complètes, à courbure sectionnelle négative pincée, sur la même variété  $M$ . Supposons de plus qu'il existe  $C > 0$  telle que, en tout point de  $M$ , on ait  $\frac{1}{C}g_1 \leq g_2 \leq Cg_1$ , et que  $(M, g_1)$  admette une mesure de Bowen-Margulis finie (cf Section 1.2.3). Alors l'entropie topologique de leurs flots géodésiques satisfait*

$$h_{top}(g_1) \leq h_{top}(g_2) \times \int_{S^{g_1}M} \|v\|^{g_2} d\bar{m}_{BM}^{g_1}(v), \quad (3.2)$$

où  $\|v\|^{g_2} = \sqrt{g_2(v, v)}$  et  $\bar{m}_{BM}^{g_1}$  est la mesure de Bowen-Margulis normalisée pour le flot  $g_1$ -géodésique sur le fibré  $g_1$ -unitaire tangent  $S^{g_1}M$ .

En inversant le rôle de  $g_1$  et  $g_2$ , on obtient immédiatement une borne inférieure pour  $h_{top}(g_1)$ . Les développements de Taylor à l'ordre 1 des deux termes de l'inégalité coïncide, à condition que tous les termes (notamment les mesures de Bowen-Margulis normalisées) varient continûment. Nous verrons qu'il suffit pour cela que la courbure soit uniformément majorée, que la variation soit  $C^1$ -uniforme (voir Définition 3.1.3 ci-dessous) et que la métrique  $g_0$  ait un trou critique. Notons que lorsque  $M$  est compacte, ces hypothèses sont vérifiées pour toute variation  $C^2$  au voisinage d'une métrique à courbure sectionnelle négative.

Nous obtenons alors le résultat de régularité suivant.

**Théorème 3.1.2** (Katok-Knieper-Weiss 1991, [Tap10], [ST18]). *Soit  $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-1, 1)}$  une famille de métriques riemanniennes complètes de classe  $C^2$  à courbure négative pincée sur une variété  $M$ . Supposons que la variation est  $C^1$ -uniforme et qu'il existe  $a > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in (-1, 1)$ , les courbures sectionnelles de  $g_\varepsilon$  vérifient  $K_{g_\varepsilon} \leq -a^2$ . Supposons de plus que  $(M, g_0)$  a un trou critique. Alors l'entropie  $\varepsilon \mapsto h_{top}(g_\varepsilon)$  est  $C^1$ , et sa dérivée est donnée par*

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} h_{top}(g_\varepsilon) = -h_{top}(g_0) \times \int_{S^{g_0}M} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \|v\|^{g_\varepsilon} d\bar{m}_{BM}^{g_0}(v). \quad (3.3)$$

où  $\bar{m}_{BM}^{g_0}$  est la mesure de Bowen-Margulis normalisée pour le flot  $g_0$ -géodésique sur le fibré  $g_0$ -unitaire tangent  $S^{g_0}M$ .



Cela vaut sans doute la peine de souligner qu'avant les travaux présentés dans [ST18], même la régularité de l'entropie lors d'une perturbation compacte lisse sur une variété hyperbolique de volume finie n'était pas connu. Le théorème précédent s'applique à une famille beaucoup plus générale de variations de la métrique.

Il est plausible que l'hypothèse d'un trou critique pour  $g_0$  soit également nécessaire pour montrer (en général) cette continuité des mesures de Bowen-Margulis normalisée : nous soupçonnons que dès lors que la variété  $(M, g_0)$  n'a pas de trou critique, des phénomènes de *transition de phase* pour l'entropie puissent apparaître, analogues à ceux obtenus dans [Sar01] et dans [RV19] dans d'autres contextes de dynamique hyperbolique non-compacte.

Les paragraphes suivants présentent les outils nécessaires à la preuve des deux théorèmes ci-dessus.

### 3.1.2 Courants géodésiques et changement de métrique

Commençons par décrire des résultats généraux sur les propriétés ergodiques du flot géodésique sur une variété non-compacte, lorsque l'on change la métrique riemannienne sous-jacente.

Soit  $(M, g_1)$  une variété riemannienne complète, et  $g_2$  une autre métrique riemannienne sur  $M$  telle qu'il existe  $C > 1$  avec en tout point  $\frac{1}{C}g_1 \leq g_2 \leq Cg_1$ . Nous dirons dans ce cas, de façon abusive que  $g_1$  et  $g_2$  sont bi-Lipschitz, puisque les distances associées  $d^{g_1}$  et  $d^{g_2}$  le sont. Supposons de plus que  $g_1$  et  $g_2$  ont des courbures sectionnelles majorées par  $-a^2 < 0$ . Par un célèbre argument dû à Morse, cela implique que les  $g_1$ -géodésiques sont des  $g_2$ -quasi-géodésiques (cf par exemple [BH99] p401 pour une preuve). Le bord visuel du revêtement universel  $(\widetilde{M}, g_1)$  est donc canoniquement identifié au bord visuel de  $(\widetilde{M}, g_2)$  : nous les noterons  $\partial\widetilde{M}$ . Notre mise en relation des flots géodésiques sur  $S^{g_1}M$  et sur  $S^{g_2}M$  repose crucialement sur cette identification. Nous fixons pour la suite de cette section deux métriques  $g_1$  et  $g_2$  sur  $M$  qui vérifient les hypothèses précédentes.

Soit  $\Gamma = \pi_1(M)$  agissant proprement discontinûment sur  $\widetilde{M}$ , et soit  $m$  une mesure localement finie sur  $S^{g_1}M$ , invariante par le flot géodésique  $(g_1^t)_{t \in \mathbb{R}}$ . Notons  $\widetilde{m}$  son relevé à  $S^{g_1}\widetilde{M}$ .

En coordonnées de Hopf pour la métrique  $g_1$ , on a vu à la Section 1.1.3 que  $S^{g_1}\widetilde{M} \simeq \partial^2\widetilde{M} \times \mathbb{R}$ , et  $\widetilde{m}$  a une structure de produit local  $d\widetilde{m} = d\mu \times dt$ , où  $\mu$  est un *courant géodésique*  $\Gamma$ -invariant sur  $\partial^2\widetilde{M}$ . Nous notons donc  $m = m_\mu^{g_1}$ .

Nous pouvons maintenant définir une mesure  $\widetilde{m}_\mu^{g_2}$  sur  $S^{g_2}\widetilde{M}$ , dont l'expression en coordonnée de Hopf pour la métrique  $g_2$  est la même formule de produit local  $\widetilde{m}_\mu^{g_2} = d\mu \times dt$  : par  $\Gamma$ -invariance, elle induit une mesure localement finie  $m_\mu^{g_2}$  sur  $S^{g_2}M$ , invariante par le flot géodésique  $(g_2^t)_{t \in \mathbb{R}}$ . Les propriétés ergodiques de  $(S^{g_1}M, g_1^t, m_\mu^{g_1})$  et de  $(S^{g_2}M, g_2^t, m_\mu^{g_2})$  sont fortement reliés.

Une conséquence de la preuve du Théorème de Hopf-Tsuji-Sullivan que nous avons présenté au Chapitre 1 (Théorème 1.2.1) est que  $m_\mu^{g_1}$  est ergodique si et seulement si elle est conservative, et si et seulement si  $m_\mu^{g_2}$  est ergodique et

conservative. Nous allons voir que  $m_\mu^{g_1}$  est finie si et seulement si  $m_\mu^{g_2}$  l'est, et que leur masse et leur entropie sont explicitement reliées.

Pour relier les flots géodésiques sur  $S^{g_1}\widetilde{M}$  et sur  $S^{g_2}\widetilde{M}$ , il est naturel d'introduire l'application

$$\widetilde{\Phi}^{g_1 \rightarrow g_2} = (\mathcal{H}^{g_2})^{-1} \circ \mathcal{H}^{g_1} : S^{g_1}\widetilde{M} \rightarrow S^{g_2}\widetilde{M}$$

où  $\mathcal{H}^{g_i}$  est la paramétrisation de Hopf de  $S^{g_i}\widetilde{M}$  définie à la Section 1.1.2. Il s'agit d'une **correspondance de Morse** entre les flots  $(S^{g_1}\widetilde{M}, g_1^t)$  et  $(S^{g_2}\widetilde{M}, g_2^t)$ , c'est à dire d'un homéomorphisme de  $S^{g_1}\widetilde{M}$  sur  $S^{g_2}\widetilde{M}$  qui envoie orbite sur orbite. Cette application n'est malheureusement pas équivariante par l'action de  $\Gamma$ , elle n'induit donc pas de correspondance de Morse entre  $(S^{g_1}M, g_1^t)$  et  $(S^{g_2}M, g_2^t)$ .

Nous introduisons donc une autre correspondance de Morse comme suit. Pour tout vecteur  $v \in S^{g_1}\widetilde{M}$ , notons  $w = \widetilde{\Psi}^{g_1 \rightarrow g_2}(v)$  l'unique vecteur de  $S^{g_2}\widetilde{M}$  tel que  $v_-^{g_1} = w_-^{g_2}$ ,  $v_+^{g_1} = w_+^{g_2}$  et  $\beta_{v_+^{g_1}}^{g_2}(\pi v, \pi w) = 0$ , où  $v_+^{g_1}$  est l'extrémité de la  $g_1$ -géodésique engendrée par  $v$  et  $\beta_\xi^{g_2}(x, y)$  est la fonction de Busemann pour la métrique  $g_2$  définie à la Section 1.1.2.

**Proposition 3.1.3** (cf [ST18], Section 2.4). *L'application  $\widetilde{\Psi}^{g_1 \rightarrow g_2}$  est une correspondance de Morse entre les flots  $(S^{g_1}\widetilde{M}, g_1^t)$  et  $(S^{g_2}\widetilde{M}, g_2^t)$ , globalement Hölder et de classe  $C^1$  le long de chaque orbite.*

*Elle est  $\Gamma$ -invariante, et induit donc une correspondance de Morse  $\Psi^{g_1 \rightarrow g_2}$  entre les flots  $(S^{g_1}M, g_1^t)$  et  $(S^{g_2}M, g_2^t)$ .*

**Définition 3.1.1.** *L'étirement géodésique instantané de  $g_2$  par rapport à  $g_1$  est défini, pour tout  $v \in S^{g_1}M$ , par*

$$\mathcal{E}^{g_1 \rightarrow g_2}(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0^+} \mathcal{B}_{v_+^{g_1}}^{g_2}(\pi v, \pi g_1^t v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0^+} \mathcal{B}_{o_+^{g_1}}^{g_2}(o, \pi g_1^t v),$$

Les définitions de la correspondance  $\Psi^{g_1 \rightarrow g_2}$  et de l'étirement géodésique sont librement inspirées de [Led94]. Notons le lemme suivant, conséquence élémentaire de l'inégalité triangulaire.

**Lemme 3.1.4** (cf [ST18], Lemme 2.5). *Pour tout  $v \in S^{g_1}M$ , on a*

$$\mathcal{E}^{g_1 \rightarrow g_2}(v) \leq \|v\|^{g_2}.$$

Puisque  $g_2 \leq Cg_1$ , l'application  $\mathcal{E}^{g_1 \rightarrow g_2}(v)$  est donc uniformément majorée. On montre de même qu'elle est uniformément minorée par  $\frac{1}{C}$ .

L'étirement géodésique instantané est invariant sous l'action de  $\Gamma$ . Il est donc bien défini sur  $S^{g_1}M$ . Nous le noterons encore  $\mathcal{E}^{g_1 \rightarrow g_2}$ . On vérifie immédiatement que cet étirement géodésique est la dérivée de la correspondance de Morse  $\Psi^{g_1 \rightarrow g_2}$  le long des orbites du flot  $(g_1^t)_{t \in \mathbb{R}}$ .

**Théorème 3.1.5** (cf [ST18], Prop. 1.3). *Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux métriques riemanniennes complètes sur  $M$ , bi-Lipschitz et à courbure sectionnelle négative pincée, majorée par  $-a^2 < 0$ . Soit  $m = m_\mu^{g_1}$  une mesure localement finie sur  $S^{g_1}M$ , invariante par le flot géodésique  $(g_1^t)$ , associée au courant géodésique  $\mu$ .*

*Pour toute application  $G : S^{g_2}M \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $m_\mu^{g_2}$ -mesurable, l'application  $G \circ \Psi^{g_1 \rightarrow g_2}$  est  $m_\mu^{g_1}$ -mesurable et on a*

$$\int_{S^{g_2}M} G dm_\mu^{g_2} = \int_{S^{g_1}M} G \circ \Psi^{g_1 \rightarrow g_2} \times \mathcal{E}^{g_1 \rightarrow g_2} dm_\mu^{g_1}.$$

En particulier, la masse de  $m_\mu^{g_2}$  vérifie

$$\|m_\mu^{g_2}\| = \int_{S^{g_1}M} \mathcal{E}^{g_1 \rightarrow g_2} dm_\mu^{g_1}.$$

Nous introduisons donc naturellement la quantité suivante.

**Définition 3.1.2.** *Soit  $\mu$  un courant géodésique  $\Gamma$ -invariant sur  $\partial^2 \widetilde{M}$ . On appelle **étirement géodésique moyen** de  $g_2$  par rapport à  $g_1$ , mesuré selon  $\mu$ , la quantité*

$$I_\mu(g_1, g_2) = \frac{1}{\|m_\mu^{g_1}\|} \int_{S^{g_1}M} \mathcal{E}^{g_1 \rightarrow g_2}(v) dm_\mu^{g_1}(v).$$

Notons que si  $m = m_\mu^{g_1}$  est une mesure de probabilité sur  $S^{g_1}M$ , invariante et ergodique par le flot géodésique, alors pour  $m$ -presque tout  $v \in S^{g_1}M$  on a

$$I_\mu(g_1, g_2) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{d^{g_2}(\pi v, \pi g_1^T v)}{T} = \inf_{t \geq 0} \frac{d^{g_2}(\pi v, \pi g_1^t v)}{t}.$$

La quantité  $I_\mu(g_1, g_2)$  coïncide donc dans ce cas avec l'étirement géodésique considéré par exemple dans [FF93], [Kni95] ou [Glo18].

Notons également que si  $M$  est compacte, on montre (voir [ST18, Sec. 2.3]) que

$$\sup_\mu (I_\mu(g_1, g_2), I_\mu(g_2, g_1)) = d_{Th}(g_1, g_2),$$

où le sup est pris sur les courants géodésiques associés à une mesure finie, et  $d_{Th}$  est la **distance de Thurston** définie par

$$d_{Th}(g_1, g_2) = \sup_\gamma \left( \frac{\ell^{g_1}(\gamma)}{\ell^{g_2}(\gamma)}, \frac{\ell^{g_2}(\gamma)}{\ell^{g_1}(\gamma)} \right).$$

L'étirement géodésique moyen permet de relier les entropies mesurées de  $m_\mu^{g_1}$  et  $m_\mu^{g_2}$  comme suit.

**Théorème 3.1.6** ([ST18], Theo 3.11). *Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux métriques riemanniennes complètes sur  $M$ , bi-Lipschitz et à courbure sectionnelle négative pincée, majorée par  $-a^2 < 0$ . Soit  $\mu$  un courant géodésique  $\Gamma$ -invariant tel que les mesures  $m_\mu^{g_i}$  associées sur  $S^{g_i}M$ ,  $i = 1, 2$  sont finies et ergodiques par le flot  $g_i^t$ . Alors les entropies de Kolmogorov-Sinai vérifient :*

$$h_{KS} \left( g_1^t, \frac{m_\mu^{g_1}}{\|m_\mu^{g_1}\|} \right) = I_\mu(g_2, g_1) \cdot h_{KS} \left( g_2^t, \frac{m_\mu^{g_2}}{\|m_\mu^{g_2}\|} \right).$$

Cette formule de changement d'entropie lors d'un changement de métrique riemannienne a un analogue bien connu : la **formule d'Abramov**, pour le changement d'entropie lorsque le flot est la suspension d'un difféomorphisme d'une variété compacte et que la «fonction plafond» varie (cf [Abr59]).

Nous n'avions démontré, dans [ST18], que le fait que les entropies locales de Brin-Katok (cf Section 1.3.3 de  $(g_1^t, m_\mu^{g_1})$  et de  $(g_2^t, m_\mu^{g_2})$ ) vérifient :

$$h_{BK}^\Gamma(m_\mu^{g_2}, g_2) = I_\mu(g_2, g_1) \cdot h_{BK}^\Gamma(m_\mu^{g_1}, g_1).$$

Par le Théorème 1.3.2, démontré récemment par Riquelme, c'est équivalent à l'énoncé précédent. Pour une mesure de Gibbs (cf Section 1.5.2), on montre facilement que l'entropie locale de Brin-Katok coïncide avec l'entropie de Kolmogorov-Sinai. De plus, nous montrons le résultat suivant.

**Théorème 3.1.7** (Schapira-T., [ST18], Theo. 4.2). *Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux métriques riemanniennes complètes sur  $M$ , bi-Lipschitz et à courbure sectionnelle négative pincée, majorée par  $-a^2 < 0$ . Soit  $\mu$  un courant géodésique  $\Gamma$ -invariant. Si  $m_\mu^{g_1}$  est une mesure de Gibbs sur  $S^{g_1}M$  pour le potentiel  $F$ , alors  $m_\mu^{g_2}$  est également une mesure de Gibbs sur  $S^{g_2}M$  pour le potentiel*

$$G = (F - \delta_\Gamma(F, g_1)) \circ \Psi^{g_2 \rightarrow g_1} \times \mathcal{E}^{g_2 \circ g_1}.$$

Combinée avec le Principe Variationnel (cf Théorème 1.4.2), nous avons obtenu alors dans [ST18] le théorème suivant, qui est une amélioration optimale du Théorème 3.1.1.

**Théorème 3.1.8** ([ST18], Theo. 1.5). *Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux métriques riemanniennes complètes sur  $M$ , bi-Lipschitz et à courbure sectionnelle négative pincée, majorée par  $-a^2 < 0$ . Supposons que le flot géodésique sur  $S^{g_2}M$  admet une mesure de Bowen-Margulis  $m_{BM}^{g_2}$  de masse finie, i.e. une mesure finie d'entropie maximale. Alors*

$$h_{top}(g_2) \leq I_{m_{BM}^{g_2}}(g_2, g_1) \cdot h_{top}(g_1).$$

*De plus, l'égalité a lieu dans l'inégalité précédente si et seulement si  $S^{g_1}M$  a aussi une mesure de Bowen-Margulis finie et il existe une correspondance de Morse  $F^{g_1 \rightarrow g_2} : S^{g_1}M \rightarrow S^{g_2}M$  qui conjugue les flots géodésiques sur leurs ensembles non-errants dans  $S^{g_1}M$ ,  $S^{g_2}M$  à renormalisation du temps près par une homéothétie uniforme de facteur  $\frac{h_{top}(g_1)}{h_{top}(g_2)}$  : pour tout  $v \in \Omega^{g_1}$  tout  $t \in \mathbb{R}$ ,*

$$g_2^{h_{top}(g_2)t} \circ F^{g_1 \rightarrow g_2}(v) = F^{g_1 \rightarrow g_2} \circ g_1^{h_{top}(g_1)t}(v).$$

Ce résultat avait été montré par Knieper dans [Kni95] pour les variétés compactes. Les correspondances de Morse  $F^{g_1 \rightarrow g_2}$  and  $\Psi^{g_1 \rightarrow g_2}$  ne coïncident généralement pas ; leurs relations sont précisées dans [ST18].

Notons qu'il existe de nombreux exemples où  $(M, g_1)$  a une mesure de Bowen-Margulis finie,  $g_2$  est bi-Lipschitz à  $g_1$ , mais a une mesure de Bowen-Margulis

infinie. Prenons par exemple une surface géométriquement finies  $(M, g)$  de mesure de Bowen-Margulis infinie, comme construite dans [DOP00]. Supposons que  $-b^2 \leq \kappa_g \leq -1$  pour un  $b > 1$ . Nous verrons à la Section 3.2.2 qu'il existe une unique métrique  $g_H = e^f g$ , conformément équivalente à  $g$ , dont la courbure sectionnelle vaut  $-1$  partout et telle que les métriques sont bi-Lipschitz. Cependant, par construction la mesure de Bowen-Margulis sur  $g$  est infinie, tandis que la mesure de Bowen-Margulis est finie (comme pour toute variété hyperbolique géométriquement finie, cf 2.2.1).

Le théorème précédent a la conséquence immédiate suivante.

**Corollaire 3.1.9.** *Let  $(M, g_i)$ ,  $i = 1, 2$  deux métriques riemanniennes complètes à courbure négative pincée, bi-Lipschitz entre elle. Si  $S^{g_2}M$  a une mesure de Bowen-Margulis  $m_{BM}^{g_2}$  finie associée au courant  $\mu_{BM}^{g_2}$  et si*

$$h_{top}(g_2) = I_{\mu_{BM}^{g_2}}(g_2, g_1) \cdot h_{top}(g_1),$$

alors le spectre marqué des longueurs de  $g_1$  et  $g_2$  coïncident à une multiplication globale par  $\frac{h_{top}(g_1)}{h_{top}(g_2)}$  près.

### 3.1.3 Trou critique et continuité de la mesure de Bowen-Margulis

Comme nous l'avons déjà mentionné, pour passer de l'inégalité fournie par le Théorème 3.1.1 à la dérivabilité de l'entropie, il suffit de montrer que l'entropie et la mesure de Bowen-Margulis normalisée varient continûment, et de montrer que la fonction  $\varepsilon \mapsto \|v\|^{g_\varepsilon}$  est reste intégrable sur  $S^{g_0}M$  au cours de la variation. Cela nécessite des propriétés de régularité sur la métrique.

**Définition 3.1.3.** *Nous dirons qu'une famille de métriques  $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-1,1)}$  varie globalement uniformément en topologie  $\mathcal{C}^0$  au voisinage de 0 si elle est (uniformément) continue sur tout compact  $K \subset M$  et s'il existe  $\kappa > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in (-1, 1)$ , on ait en tout point de  $M$ ,*

$$\frac{1}{\kappa} \varepsilon g_0 \leq g_\varepsilon \leq \kappa \varepsilon g_0.$$

*Nous dirons que cette famille varie globalement uniformément en topologie  $\mathcal{C}^1$  si sur tout compact elle varie (uniformément) continûment en topologie  $\mathcal{C}^1$  et s'il existe  $\kappa > 0$  tel que, pour tout  $v \in TM$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on ait*

$$\left| \frac{d}{ds} \Big|_{s=\varepsilon} g_s(v, v) \right| \leq \kappa g_0(v, v).$$

Une variation globalement uniforme en topologie  $\mathcal{C}^1$  est bien sûr globalement uniforme en topologie  $\mathcal{C}^0$ .

Les résultats de régularité suivants sont montrés dans la Section 5 de [ST18]. Certains sont élémentaires, d'autres nécessitent plus de travail. Les hypothèses sont en général optimales.

**Théorème 3.1.10** (cf [ST18], Section 5). *Soit  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  une variété lisse et  $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-1,1)}$  une famille de métriques riemanniennes complètes sur  $M$  dont les courbures sectionnelles sont toutes majorées par  $-a^2 < 0$ .*

1. *Si  $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-1,1)}$  varie globalement uniformément en topologie  $\mathcal{C}^0$ , alors*

$$\varepsilon \mapsto h_{\text{top}}(M, g_\varepsilon) = \delta_\Gamma(g_\varepsilon)$$

*est continue en  $\varepsilon = 0$ .*

2. *Si de plus pour tout  $\varepsilon$  proche de 0, le groupe  $\Gamma$  est divergent par rapport à la métrique  $g_\varepsilon$ , alors l'application*

$$\varepsilon \mapsto \mu_{BM}^{g_\varepsilon}$$

*est continue en  $\varepsilon = 0$  pour la topologie faible sur  $\partial^2 \widetilde{M}$ , i.e. dans le dual des fonctions continues à support compact sur  $\partial^2 \widetilde{M}$ . On a noté ici  $\mu_{BM}^{g_\varepsilon}$  le courant de Bowen-Margulis associé à l'unique densité de Patterson-Sullivan  $\nu^{\Gamma, g_\varepsilon} = (\nu_x^{\Gamma, g_\varepsilon})_{x \in \widetilde{M}}$  pour  $(\Gamma, g_\varepsilon)$  normalisée par  $\|\nu_o^{\Gamma, g_\varepsilon}\| = 1$ , comme défini à la Section 1.2.2.*

3. *Si de plus la famille  $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-1,1)}$  est  $\mathcal{C}^1$ , alors*

$$\varepsilon \mapsto m_{BM}^{g_\varepsilon}$$

*est continue en  $\varepsilon = 0$  pour la topologie faible sur  $TM$ . On a noté ici  $m_{BM}^{g_\varepsilon}$  la mesure de Bowen-Margulis associée à l'unique densité de Patterson-Sullivan  $\nu^{\Gamma, g_\varepsilon} = (\nu_x^{\text{Gamma}, g_\varepsilon})_{x \in \widetilde{M}}$  pour  $(\Gamma, g_\varepsilon)$  normalisée par  $\|\nu_o^{\Gamma, g_\varepsilon}\| = 1$ , comme défini à la Section 1.2.3.*

Dans la preuve de la différentiabilité de l'entropie, si nous supposons que la dérivée de la métrique est uniformément bornée (i.e. une variation globalement uniforme en topologie  $\mathcal{C}^1$  au sens de la Définition 3.1.3), nous avons besoin de la continuité des mesures de Bowen-Margulis *normalisées*  $\varepsilon \mapsto \frac{m_{BM}^{g_\varepsilon}}{\|m_{BM}^{g_\varepsilon}\|}$  pour la topologie de la *convergence étroite*, c'est à dire dans le dual des fonctions continues bornées. Par un résultat standard de théorie des probabilités combinée au théorème précédent, si l'on suppose que la variation de métrique est  $\mathcal{C}^1$  et globalement uniforme en topologie  $\mathcal{C}^0$ , puisque  $\varepsilon \mapsto m_{BM}^{g_\varepsilon}$  est continue en topologie faible, il suffit de montrer que la masse  $\varepsilon \mapsto \|m_{BM}^{g_\varepsilon}\|$  varie continûment. C'est l'objet du théorème suivant.

**Théorème 3.1.11** (cf [ST18], Theo. 7.1). *Soit  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  une variété lisse et  $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-1,1)}$  une famille de métriques riemanniennes complètes sur  $M$  dont les courbures sectionnelles sont toutes majorées par  $-a^2 < 0$ . Supposons que  $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-1,1)}$  est  $\mathcal{C}^1$  et varie globalement uniformément en topologie  $\mathcal{C}^0$ . Supposons de plus que  $(\Gamma, g_0)$  a un trou critique (Définition 2.2.2).*

*Alors pour  $\varepsilon$  proche de 0, le groupe  $(\Gamma, g_\varepsilon)$  a également un trou critique. Il est en particulier divergent, et la mesure de Bowen-Margulis  $m_{BM}^{g_\varepsilon}$  est finie. De plus l'application  $\varepsilon \mapsto \|m_{BM}^{g_\varepsilon}\|$  est continue en  $\varepsilon = 0$ .*

Comme indiqué précédemment, le Théorème 3.1.2 de différentiabilité de l'entropie découle du Théorème 3.1.1, lui-même conséquence du Théorème 3.1.8, et d'un développement de Taylor à l'ordre 1, qui converge au premier ordre grâce aux Théorèmes 3.1.10 et 3.1.11 de régularité ci-dessus.

## 3.2 Rigidité entropique dans une classe conforme

La recherche d'extrema pour l'entropie topologique (dans une classe de métriques donnée) est un problème qui a été largement étudié, avec des applications importantes. L'utilisation de la dérivée est une idée naturelle dans une recherche d'extrema. Avec P. Suárez-Serrato, nous avons obtenu à l'aide de la formule de variation de l'entropie présentée dans la section précédente des résultats sur les extrema de l'entropie dans une classe conforme que nous présentons maintenant.

Ces résultats ont été présentés sur les variétés compactes dans [SST12a] : ils étaient déjà nouveaux dans ce cadre, mais n'utilisaient que la formule de variation de l'entropie établie dans [KKW91]. Nous les avons généralisé aux variétés convexes-cocompactes dans un preprint soumis en 2013.

Dans ce travail l'hypothèse de convexe-cocompacité n'était utilisée que pour avoir une formule de dérivation de l'entropie, en l'occurrence, celle de [Tap10]. Un retour de referee avait pointé des erreurs dans la construction du Flot de Yamabe, que nous avons corrigées. Entre temps, nous avons commencé avec B. Schapira à obtenir des résultats sur la différentiabilité de l'entropie pour une variété non-compacte générale, qui ont abouti à l'article [ST18] que nous venons de présenter. Les résultats que nous présentons ci-dessous sont donc récents, et seront publiés dans [SST20].

### 3.2.1 Quelques exemples de rigidité entropique

Ce paragraphe est un rappel historique de quelques résultats importants sur les extrema de l'entropie. Notons que l'entropie topologique (du flot géodésique sur une variété  $(M, g)$  compacte ou non) vérifie, pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$h_{top}(M, \lambda g) = \frac{h_{top}(M, g)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Il est donc nécessaire, pour étudier des «extrema» de l'entropie, d'imposer une normalisation de la métrique. Cette normalisation peut s'obtenir naturellement par une borne sur le volume (pour les variétés de volume fini) ou par une borne sur la courbure. Voici quelques résultats célèbres.

Lorsque la courbure est majorée, le résultat suivant a été obtenu par Katok dans [Kat82] pour les surfaces, et par Hamenstädt dans [Ham90] en toute dimension.

**Théorème 3.2.1** (Katok, Hamenstädt). *Soit  $(M, g)$  une variété compacte, dont la courbure sectionnelle est majorée par  $-1$ . Supposons que  $M$  admet*

une métrique localement symétrique  $g_S$ , dont la courbure sectionnelle vérifie  $\sup K_{g_S} = -1$ . Alors  $h_{top}(M, g) \geq h_{top}(M, g_S)$ , avec égalité si et seulement si  $(M, g)$  est globalement isométrique à  $(M, g_S)$ .

Il s'agit du premier résultat suggérant qu'un *minimum sur l'entropie* correspond, lorsque la *courbure est majorée*, à un maximum de symétries. Notons que dans ce théorème, les variétés étant toutes compactes à courbure négative, on a  $h_{top}(M, g) = h_{vol}(\widetilde{M}, g)$ . Notons que dans cet énoncé, l'inégalité large  $h_{top}(M, g) \geq h_{top}(M, g_S)$  était déjà connue, la nouveauté (hautement non-triviale) étant la *rigidité*, c'est à dire le cas d'égalité.

Un résultat analogue a été obtenu pour des métriques à courbure *minorée* par Ledrappier et Wang dans [LW10].

**Théorème 3.2.2** (Ledrappier-Wang, [LW10]). *Soit  $(M, g)$  une variété compacte de dimension  $n$ , dont la courbure de Ricci vérifie*

$$Ric_g \geq -(n-1)g.$$

*Alors  $h_{top}(M, g) \leq n-1$ , avec égalité si et seulement si  $(M, g)$  est hyperbolique, i.e. elle est isométrique à un quotient compact de  $\mathbb{H}^n$ .*

Parmi des variétés dont la *courbure est minorée*, un *maximum de l'entropie* correspond donc (dans cet énoncé) à un maximum de symétries. L'article [LW10] présente d'autres résultats du même esprit que nous ne présentons pas ici.

Le Théorème 3.2.4 ci-dessous est en un sens une généralisation de ces deux théorèmes. Il donne un résultat nettement plus faible, puisque nous verront qu'il n'est valable que pour les déformations conformes. En revanche, il s'applique à une classe de variétés beaucoup plus large, variétés compactes ou non, admettant ou pas une métrique localement symétrique, pour lesquels les théorèmes de Katok, Hamenstädt et Ledrappier-Wang ne donnent pas d'information.

Rappelons qu'un autre résultat célèbre de rigidité entropique a été montré par Besson, Courtois et Gallot peu après celui d'Hamenstädt.

**Théorème 3.2.3** (Besson-Courtois-Gallot [BCG95]). *Soit  $(M, g)$  une variété compacte. Supposons que  $M$  admet une métrique localement symétrique  $g_S$  à courbure strictement négative, et que  $\text{Vol}(M, g) = \text{Vol}(M, g_S)$ . Alors  $h_{top}(M, g) \geq h_{top}(M, g_S)$ , avec égalité si et seulement si  $(M, g)$  est globalement isométrique à  $(M, g_S)$ .*

Ce théorème et les techniques de sa preuve ont de nombreuses applications, que nous ne mentionnerons pas ici. Dans la présentation de nos résultats sur les extrema de l'entropie dans une classe conforme sur les variétés non-compactes, il est moins pertinent que les résultats de Katok, Hamenstädt et Ledrappier-Wang puisque la normalisation de la métrique par le volume n'a pas de sens en volume infini.



### 3.2.2 Flot de Yamabe et rigidité entropique dans une classe conforme

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle bornée (de signe pouvant être variable) et à courbure scalaire négative bornée

$$R_g \in [R_{min}, R_{max}] \subset ]-\infty, 0[.$$

Une variété complète à courbure sectionnelle négative pincée est un exemple d'une telle variété. Aviles et Mc Owen ont montré dans [AM88] qu'il existe une unique métrique  $g_Y = e^f g$ , conformément équivalente à  $g$ , où  $f$  est uniformément bornée et dont la courbure scalaire vérifie  $R_{g_Y} = -1$ . Nous appellerons  $g_Y$  la *métrique de Yamabe* dans la classe conforme de  $g$ . Notre résultat principal est le suivant.

**Théorème 3.2.4.** *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle négative pincée ayant un trou critique. Soit  $g_Y = e^f g$  la métrique de Yamabe dans la classe conforme de  $g$ . Alors les exposants critiques du groupe fondamental  $\Gamma = \pi_1(M)$  vérifient*

$$\sqrt{|R_{max}|} \delta_\Gamma(g_Y) \leq \delta_\Gamma(g) \leq \sqrt{|R_{min}|} \delta_\Gamma(g_Y).$$

De plus, si  $\delta_\Gamma(g) = \sqrt{|R_{min}|} \delta_\Gamma(g_Y)$ , alors  $g = \frac{g_Y}{|R_{min}|}$ . De même, si  $\delta_\Gamma(g) = \sqrt{|R_{max}|} \delta_\Gamma(g_Y)$ , alors  $g = \frac{g_Y}{|R_{max}|}$

Notons que  $\delta_\Gamma(g) = h_{top}(M, g)$ , mais a priori  $\delta_\Gamma(g_Y)$  pourrait ne pas être l'entropie topologique  $h_{top}(M, g_Y)$  : on ne sait pas en général si la métrique  $g_Y$  est à courbure sectionnelle négative (sauf bien sûr en dimension 2). Comme pour les résultats de Katok, Hamenstädt et Ledrappier-Wang cités plus haut, l'inégalité

$$\sqrt{|R_{max}|} \delta_\Gamma(g_Y) \leq \delta_\Gamma(g) \leq \sqrt{|R_{min}|} \delta_\Gamma(g_Y).$$

découle de travaux antérieurs. Il s'agit ici d'une application immédiate du Lemme de Schwarz Conforme démontré par Yau dans [Yau73], dont nous allons reparler. En revanche, le cas d'égalité est non-trivial, et découle des résultats ci-dessous.

L'ingrédient essentiel de ce travail est l'utilisation d'une variante du **Flot de Yamabe**, qui est une déformation de la métrique riemannienne au sein de sa classe conforme selon une EDP établie à l'aide de sa courbure. Il s'agit d'un exemple de flot géométrique, analogue au flot de Ricci (avec lequel il coïncide en dimension 2) dont les applications ont été nombreuses et célèbres ces dernières années. Nous renvoyons par exemple au livre d'introduction [CLN06] pour des éléments de base sur les flots géométriques.

**Définition 3.2.1.** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète dont la courbure scalaire  $R_g$  vérifie*

$$R_{min} \leq R_g \leq R_{max} < 0$$

pour des constantes  $R_{min} \leq R_{max} < 0$ . On appelle **Flot de Yamabe croissant normalisé par la courbure**, noté en bref  $CYF^+$ , issu de  $g$  une famille lisse  $(g_t)_{t \geq 0}$  de métriques riemanniennes complètes sur  $M$  telles que

$$\begin{cases} g_0 &= g \\ \frac{\partial g_t}{\partial t} &= (R_{max} - R_{g_t})g_t. \end{cases}$$

On appelle **Flot de Yamabe décroissant normalisé par la courbure**, noté en bref  $CYF^-$ , issu de  $g$  une famille lisse  $(g_t)_{t \geq 0}$  de métriques riemanniennes complètes sur  $M$  telles que

$$\begin{cases} g_0 &= g \\ \frac{\partial g_t}{\partial t} &= (R_{min} - R_{g_t})g_t. \end{cases}$$

Le théorème essentiel sur ce flot est le suivant.

**Théorème 3.2.5** (cf [SST12b], [SST20]). *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète dont la courbure sectionnelle est bornée (positive ou négative) et telle que sa courbure scalaire vérifie  $R_{min} \leq R_g \leq R_{max} < 0$ .*

1. *Le flot de Yamabe croissant normalisé par la courbure  $CYF^+$  issu de  $g$  a une solution définie pour tout  $t \geq 0$ , que nous notons  $(g_t^+)_{t \geq 0}$ . De même, le  $CYF^-$  issu de  $g$  a une solution définie pour tout  $t \geq 0$ , que nous notons  $(g_t^-)_{t \geq 0}$ .*

2. *Pour tout  $t \geq 0$ , les bornes de courbure scalaire sont préservés le long de ces flots :*

$$R_{min} \leq R_{g_t^+} \leq R_{max},$$

$$R_{min} \leq R_{g_t^-} \leq R_{max}.$$

*De plus, si la courbure scalaire de  $g$  n'est pas constante, ces bornes sont strictes pour tout  $t > 0$ .*

3. *Supposons que la courbure scalaire de  $g$  n'est pas constante. Alors pour tout  $x \in M$ , l'application  $t \mapsto g_t^+(x)$  est strictement croissante, et l'application  $t \mapsto g_t^-(x)$  est strictement décroissante.*

4. *Les solutions du flot  $g_t^+$  sont  $g_t^-$  uniformément bornées :*

$$g_0 \leq g_t^+ \leq \left| \frac{R_{min}}{R_{max}} \right| g_0 \quad \text{and} \quad g_0 \geq g_t^- \geq \left| \frac{R_{max}}{R_{min}} \right| g_0.$$

5. *Soit  $g_Y$  l'unique métrique de Yamabe dans la classe conforme de  $g$ , i.e.  $g_Y = e^{f_Y} g$  avec  $R_{g_Y} \equiv -1$ . Alors sur tout compact et pour tout  $k \geq 0$ , le flot croissant  $CYF^+$  converge exponentiellement vite en topologie  $C^k$  vers*

$$g_{max} = \frac{g_Y}{|R_{max}|}.$$

De même pour tout  $k \geq 0$  le flot décroissant  $CYF^-$  converge exponentiellement vite en topologie  $C^k$  sur tout compact vers

$$g_{min} = \frac{g_Y}{|R_{min}|}.$$

*Démonstration.* Voici l'idée de la preuve pour le flot de Yamabe croissant  $CYF^+$ , qui repose sur des outils de géométrie conforme bien connus. Supposons que la dimension de  $M$  est  $n \geq 3$  (l'argument est similaire en dimension 2, mais utilise des formules analytiques différentes). Yamabe a montré dans [Yam60] que si  $g_t^+ = u_t^{\frac{4}{n-2}} g_0$ , alors on a

$$R_{g_t^+} = u_t^{-\frac{n+2}{n-2}} \left( \frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g u_t + R_{g_0} u_t \right). \quad (3.4)$$

Le flot de Yamabe  $CYF^+$  devient alors une *équation parabolique semi-linéaire* sur le facteur conforme  $u_t$ , dont on montre avec des outils standards qu'elle admet des solutions tant que le facteur conforme reste borné. Par ailleurs un calcul direct montre que tant que la solution du flot  $(g_t^+)_{t \geq 0}$  existe, la courbure scalaire  $R_{g_t^+}$  vérifie l'équation

$$\frac{\partial R_{g_t^+}}{\partial t} = -(n-1) \Delta_{g_t^+} R_{g_t^+} + R_{g_t^+} (R_{g_t^+} - R_{max}).$$

Le principe du Maximum permet alors de montrer que les bornes de courbure scalaire  $R_{g_t^+} \in [R_{min}, R_{max}]$  sont préservées, puis que le facteur conforme reste uniformément borné, donc la solution existe pour tout  $t \geq 0$ , que la courbure scalaire converge vers  $R_{max}$  uniformément sur  $M$ , et enfin que la métrique converge en topologie  $C^\infty$ .

La preuve pour le flot de Yamabe décroissant  $CYF^-$  est similaire.  $\square$

Cela fournit immédiatement le corollaire suivant, dont la première partie est le Lemme de Schwarz Conforme de Yau (cf [Yau73]).

**Corollaire 3.2.6** (Lemme de Schwarz Conforme Fort, cf [Yau73, SST12b, SST20]). *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète dont la courbure sectionnelle est bornée (positive ou négative) et telle que sa courbure scalaire vérifie  $R_{min} \leq R_g \leq R_{max} < 0$ . Soit  $g_Y$  l'unique métrique de Yamabe dans la classe conforme de  $g$ , i.e.  $g_Y = e^{f_Y} g$  avec  $R_{g_Y} \equiv -1$ . Alors en tout point de  $M$ , on a,*

$$\frac{g_Y}{|R_{max}|} \leq g \leq \frac{g_Y}{|R_{min}|}.$$

*De plus, s'il existe  $x \in M$  tel que  $g(x) = \frac{g_Y}{|R_{max}|}(x)$ , alors en tout point  $g \equiv \frac{g_Y}{|R_{max}|}$ . De même s'il existe  $x \in M$  tel que  $g(x) = \frac{g_Y}{|R_{min}|}(x)$ , alors en tout point  $g \equiv \frac{g_Y}{|R_{min}|}$ .*

L'inégalité large  $\frac{g_Y}{|R_{max}|} \leq g \leq \frac{g_Y}{|R_{min}|}$  avait été obtenue par Yau grâce à l'utilisation d'un principe du maximum pour l'équation *elliptique* de Yamabe, associée au changement conforme de métrique  $g_Y = e^f g$ . Nous obtenons le cas de rigidité dès que l'égalité est atteinte en un point grâce au fait que, le long du CYF<sup>+</sup> (ou du CYF<sup>-</sup>), le facteur conforme suit une équation *parabolique*, ce qui nous permet d'utiliser un principe du maximum fort.

Notons que lorsque  $(M, g)$  et  $(M, g_Y)$  sont toutes les deux à courbure sectionnelle majorée par  $-a^2 < 0$  et *convexe-cocompactes*, le corollaire 3.2.6 implique directement le théorème de rigidité entropique 3.2.4. Rappelons d'abord qu'une application immédiate de la définition montre que si en tout point,  $g_1 \leq g_2$ , alors  $\delta_\Gamma(g_1) \geq \delta_\Gamma(g_2)$  (ce indépendamment des propriétés de courbure de  $g_1$  et  $g_2$ ).

De plus, lorsque  $(M, g)$  et  $(M, g_Y)$  sont convexes-cocompactes à courbure sectionnelle majorée par  $-a^2$ , il existe un compact  $K \subset M$  qui contient toutes les géodésiques fermées de  $(M, g)$  et de  $(M, g_Y)$ . Si la courbure scalaire n'est pas partout  $R_{max}$ , par le théorème précédent il existe  $\lambda_K > 1$  tel que en tout point de ce compact  $K$ , on ait

$$g \geq \lambda_K \frac{g_Y}{|R_{max}|},$$

ce qui implique immédiatement

$$\delta_\Gamma(g) \leq \frac{\sqrt{|R_{max}|}}{\lambda_K} \delta_\Gamma(g_Y) > \sqrt{|R_{max}|} \delta_\Gamma(g_Y).$$

De même, on a dans ce cas immédiatement  $\delta_\Gamma(g) < \sqrt{|R_{min}|} \delta_\Gamma(g_Y)$ .

En revanche, dès lors que  $(M, g)$  n'est plus convexe-cocompacte, un autre argument est nécessaire. Considérons d'abord l'évolution de l'entropie le long du flot croissant CYF<sup>+</sup>. Supposons que  $-b^2 \leq \kappa_g \leq -a^2 < 0$ , que  $\Gamma = \pi_1(M)$  n'est pas élémentaire (donc son exposant critique pour toute métrique à courbure sectionnelle négative est strictement positif), et que la courbure scalaire de  $g$  n'est pas constante. Par le Théorème 3.1.2, tant que la courbure sectionnelle de  $(M, g_t)$  est négative pincée, la fonction  $t \mapsto h_{top}(g_t^+) = \delta_\Gamma(g_t)$  est  $\mathcal{C}^1$ , et sa dérivée le long du CYF<sup>+</sup> est donnée par l'expression

$$\frac{dh_{top}(g_t^+)}{dt} = -h_{top}(g_t^+) \times \int_{S^{g_t^+} M} \frac{d(\|v\|^{g_t^+})}{dt} d\bar{m}_{BM}^{g_t^+}(v) \quad (3.5)$$

$$= -h_{top}(g_t^+) \times \int_{S^{g_t^+} M} (R_{max} - R_{g_t^+}) d\bar{m}_{BM}^{g_t^+}(v) < 0. \quad (3.6)$$

De même, le long du CYF<sup>-</sup>, l'entropie topologique est  $\mathcal{C}^1$  tant que la cour-

bure sectionnelle est négative pincée et on a

$$\frac{dh_{top}(g_t^-)}{dt} = -h_{top}(g_t^-) \times \int_{S^{g_t^-} M} \frac{d(\|v\|^{g_t^-})}{dt} d\bar{m}_{BM}^{g_t^-}(v) \quad (3.7)$$

$$= -h_{top}(g_t^-) \times \int_{S^{g_t^-} M} (R_{min} - R_{g_t^-}) d\bar{m}_{BM}^{g_t^-}(v) > 0. \quad (3.8)$$

Pour que ces équations soient valides, il nous faut donc montrer que les flots  $CYF^+$  et  $CYF^-$  préservent la condition de courbure sectionnelle négative sur un intervalle d'intérieur non vide.

**Théorème 3.2.7.** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle négative pincée  $-b^2 \leq \kappa_g \leq -a^2 < 0$ . Soient  $(g_t^+)_{t \geq 0}$  et  $(g_t^-)_{t \geq 0}$  des solutions du  $CYF^+$  et du  $CYF^-$  issues de  $g$ . Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $t \in [0, \varepsilon]$ , on a*

$$-2b^2 \leq K_{g_t} \leq -\frac{a^2}{4}.$$

La preuve de ce théorème est une application des estimées de Schauder à l'équation parabolique (semi-linéaire) vérifiée par le facteur conforme le long du  $CYF^+$  et du  $CYF^-$ . Nous renvoyons à [SST12b] et [SST20] pour une preuve détaillée.

Supposons que la courbure scalaire de  $g$  vérifie  $R_g \in [R_{min}, R_{max}]$  et n'est pas la constante  $R_{max}$  ou  $R_{min}$ . Par les Théorèmes 3.2.5, 3.2.7 et les équations (3.5) et (3.7), on obtient donc

$$\sqrt{|R_{max}|} \delta_\Gamma(g_Y) \leq \delta_\Gamma(g_\varepsilon^+) < \delta_\Gamma(g) < \delta_\Gamma(g_\varepsilon^-) \leq \sqrt{|R_{min}|} \delta_\Gamma(g_Y),$$

ce qui conclut la preuve du Théorème 3.2.4.

## Chapitre 4

# Bas du spectre du Laplacien et entropie en courbure négative

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète de dimension  $n$ . Dans ce chapitre, nous étudions le Laplacien (ou opérateur de Laplace-Beltrami) sur  $(M, g)$ , et montrons comment lorsque la courbure est négative pincée, le bas de son spectre est déterminé par les propriétés du flot géodésique. Nous présentons ainsi une nouvelle preuve d'un résultat très célèbre dû à Patterson ([Pat76]), Sullivan ([Sul79, Sul84, Sul87]) et Corlette ([Cor90]) qui relie entropie et bas du spectre pour les variétés localement symétriques à courbure négative. La preuve montre que ce résultat est valable plus généralement pour les variétés localement harmoniques, et fournit des inégalités entre entropie et bas du spectre en courbure négative pincée, que les travaux de Patterson, Sullivan et Corlette ne permettaient pas d'obtenir. Nous montrons ensuite un lien exactement analogue entre bas du spectre essentiel et entropie à l'infini. Nous établissons au passage des conditions sur la dynamique du flot géodésique, nécessaires et suffisantes lorsque la variété est localement symétrique, pour que le bas du spectre soit une valeur propre, et que cette valeur propre soit isolée ou non. La preuve fournit des constructions dynamiques de la première fonction propre et des suites de Weyl approchant le bas du spectre essentiel, dès que l'exposant critique est assez grand.

Lorsque la courbure est constante et la mesure de Bowen-Margulis est finie, une partie des résultats présentés dans ce chapitre est contenue dans [RT15]. Les autres résultats sont nouveaux, et seront publiés dans [Tap20a].

## 4.1 Le Laplacien en géométrie riemannienne

### 4.1.1 Le Laplacien

Notons  $dV_g$  la mesure de volume riemannien associée à  $g$ . On appelle **Laplacien**, ou *opérateur de Laplace-Beltrami*, l'opérateur différentiel  $\Delta_g$  défini pour toute fonction  $f \in C^2(M, \mathbb{R})$  par

$$\Delta_g f = -\operatorname{div}(\nabla^g f),$$

avec la convention de signe sur l'opérateur  $\operatorname{div}$  telle que pour tous  $\varphi, \psi \in C_0^\infty(M)$ , on ait

$$\int_M \varphi \Delta_g \psi dV_g = \int_M g(\nabla^g \varphi, \nabla^g \psi) dV_g. \quad (4.1)$$

Le Laplacien s'étend (de façon unique lorsque la courbure est négative) en un opérateur autoadjooint non-compact sur  $L^2(M, g)$ , associé à la forme quadratique

$$f \mapsto \|\nabla^g f\|_{L^2(M, g)}^2,$$

dont le domaine est l'espace de Sobolev  $\mathcal{H}^2(M, g)$  des fonctions de  $L^2(M, g)$  dont le gradient et le Laplacien (au sens des distributions) sont dans  $L^2(M, g)$ . Nous renvoyons à [Cha84] pour plus de détails analytiques sur le Laplacien.

On peut montrer que dans une carte locale où  $g_x = (g_{ik}(x))_{i,j=1}^n$  on a pour toute fonction  $f \in C^2(M, \mathbb{R})$ ,

$$\Delta_g f = -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_{i,j=1}^n \partial_i \left( g^{ij} \sqrt{\det(g)} \partial_j f \right),$$

ou on note  $(g^{ij})_{i,j}$  l'inverse de la matrice  $(g_{ij})_{i,j}$ . Voir [Cha84, p.5] pour une preuve.

Nous utiliserons peu cette expression. Notons tout de même que sur  $\mathbb{R}^n$  muni de sa métrique euclidienne  $g_{eucl}$ , on a

$$\Delta_{g_{eucl}} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

et sur l'espace hyperbolique dans le modèle du demi-espace de Poincaré

$$\mathbb{H}^{k+1} = \left\{ (x_0, \dots, x_k) ; x_0 > 0, g_{\mathbb{H}} = \frac{dx_0^2 + \dots + dx_k^2}{x_0^2} \right\}$$

on a

$$\Delta_g = -x_0^2 \sum_{i=0}^k \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + (k-1)x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}.$$

Nous utiliserons en revanche, de façon répétée, la formule d'intégration par partie suivante due à Barta [Bar37].

**Proposition 4.1.1.** *Soient  $u, \varphi \in C^2(M, \mathbb{R})$  deux fonctions, le support de  $u$  étant compact. Alors*

$$\int_M \|\nabla^g(u\varphi)\|^2 dV_g = \int_M \varphi^2 \|\nabla^g u\|^2 dV_g + \int_M u^2 \varphi \Delta_g \varphi dV_g.$$

Voir par exemple [RT15, p. 933] pour une preuve. Notons que le résultat reste valide lorsque  $\varphi$  n'est supposée que localement dans  $\mathcal{H}^2(M, g)$ .

#### 4.1.2 Spectre du Laplacien sur une variété complète

Le **spectre du Laplacien**, que nous notons  $\text{Spec}(M, g)$ , est l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que  $\Delta_g - \lambda : \mathcal{H}^2(M, g) \rightarrow L^2(M, g)$  n'est pas inversible. Nous appelons

$$\lambda_0(M, g) = \inf \text{Spec}(M, g)$$

le **bas du spectre** du Laplacien sur  $(M, g)$ . Notons qu'il découle de la formule (4.1) que

$$\lambda_0(M, g) = \inf \left\{ \frac{\int_M \|\nabla^g f\|^2 dV_g}{\int_M f^2 dV_g} ; f \in C_0^\infty(M, \mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\}. \quad (4.2)$$

La formule d'intégration par partie donnée par la Proposition 4.1.1 implique immédiatement le lemme suivant.

**Lemme 4.1.2.** *Soit  $\lambda \geq 0$ . Supposons qu'il existe une fonction strictement positive  $f : M \rightarrow (0, +\infty)$ , de classe  $C^2$ , pas forcément dans  $L^2(M, g)$ , telle que en tout point de  $M$ , on ait  $\Delta_g f \geq \lambda f$ . Alors  $\lambda_0(M, g) \geq \lambda$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in C_0^\infty(M, \mathbb{R})$ . Comme  $f > 0$ , en appliquant la Proposition 4.1.1 à  $u = \varphi/f$ , on obtient

$$\int_M \|\nabla \varphi\|^2 dV_g \geq \int_M \frac{\varphi^2}{f} \Delta_g f dV_g \geq \lambda \int_M \varphi^2 dV_g.$$

□

Le spectre est constitué du **spectre discret**  $\text{Spec}^d(M, g)$ , qui est l'ensemble des valeurs propres (associées à des fonctions propres dans  $\mathcal{H}^2$ ) isolées et de multiplicité finie, et du **spectre essentiel**  $\text{Spec}^{ess}(M, g)$  qui est constitué des valeurs propres de multiplicités infinie et des points d'accumulation du spectre.

Lorsque  $M$  est compacte,  $\lambda_0(M, g) = 0$  et le spectre est purement discret. Le spectre essentiel est invariant par perturbation compacte de la métrique  $g$ , et son infimum (le **bas du spectre essentiel**) vérifie

$$\lambda_0^{ess}(M, g) := \inf \text{Spec}^{ess}(M, g) = \sup_{K \subset M} \inf \left\{ \frac{\int_M \|\nabla^g f\|^2 dV_g}{\int_M f^2 dV_g} ; f \in C_0^\infty(M \setminus K, \mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\}. \quad (4.3)$$

Cette propriété découle de la Proposition 2.1 de [DL79]. Combiné avec la Proposition 4.1.1, cela implique le lemme suivant, dont la preuve est identique à celle du lemme 4.1.2.



**Lemme 4.1.3.** *Soit  $\lambda \geq 0$ . Supposons qu'il existe une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^2$ , pas forcément dans  $L^2(M, g)$ , et un compact  $K \subset M$  tels que pour tout  $x \in M \setminus K$  on ait  $f(x) > 0$  et  $\Delta_g f(x) \geq \lambda f(x)$ . Alors  $\lambda_0^{ess}(M, g) \geq \lambda$ .*

Par la suite, nous supposons toujours dans ce chapitre que  $(M, g)$  est non-compacte, complète, à courbure sectionnelle négative pincée.

**Théorème 4.1.4** (Brooks 1981[Bro81b]). *Soit  $(M, g)$  une variété complète, de volume infini, à courbure sectionnelle minorée. Le spectre essentiel est alors non-vide, et son infimum (le **bas du spectre essentiel**) vérifie*

$$\lambda_0^{ess}(M, g) \leq \frac{h_{vol}(\widetilde{M}, g)^2}{4},$$

En particulier, si les courbures sectionnelles vérifient  $-b^2 \leq \kappa_g$ , on a

$$\lambda_0^{ess}(M, g) \leq \frac{(n-1)^2 b^2}{4},$$

Le premier point est une conséquence immédiate du théorème principal de [Bro81b]. Le second en découle par le théorème de comparaison de Rauch, voir par exemple [Kli95], Section 2.7.

Nous utiliserons plusieurs fois le résultat suivant, qui nous a été enseigné par G. Carron. Faute de localiser une preuve dans la littérature, nous la reproduisons. Une variante de cet argument prouve le Corollaire 3.7 de [RT15].

**Proposition 4.1.5.** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète et  $\lambda_0 = \lambda_0(M, g)$  le bas du spectre du laplacien sur  $(M, g)$ . Supposons qu'il existe une fonction  $\varphi > 0$ , de classe  $C^2$ , strictement positive, telle que  $\Delta_g \varphi \geq \lambda_0 \varphi$ .*

*Supposons de plus que  $\int_M \varphi^2 dV_g = +\infty$ , alors  $\lambda_0$  n'est pas une valeur propre. En particulier,  $\lambda_0(M, g) = \lambda_0^{ess}(M, g)$ .*

*Démonstration.* Avec les notations précédentes, soit  $\psi \in \mathcal{H}^2(M, g)$  une fonction telle que  $\Delta_g \psi = \lambda_0 \psi$ . Puisque  $\varphi > 0$ , il existe  $u \in \mathcal{H}^2(M, g)$  tel que  $\psi = u\varphi$ . Fixons  $x_0 \in M$ . Pour tout  $R > 0$ , notons  $\rho_R : M \rightarrow [0, 1]$  une fonction lisse telle que  $\rho_R(x) = 1$  si  $x \in B(x_0, R)$ ,  $\rho_R(x) = 0$  si  $x \notin B(x_0, R+1)$  et  $\|\nabla \rho_R\| \leq 2$  en tout point.

Soit  $R > 0$ , comme  $\rho_R u \varphi = \rho_R \psi$  est à support compact, l'astuce de Barta (Proposition 4.1.1) implique

$$\int_M \|\nabla(\rho_R u \varphi)\|^2 \geq \int_M \varphi^2 \|\nabla(\rho_R u)\|^2 + \lambda_0 \int_M \rho_R^2 u^2 \varphi^2$$

et

$$\int_M \|\nabla(\rho_R \psi)\|^2 = \int_M \psi^2 \|\nabla \rho_R\|^2 + \lambda_0 \int_M \rho_R^2 \psi^2.$$

Cela implique immédiatement

$$\int_M \varphi^2 \|\nabla(\rho_R u)\|^2 \leq \int_M \psi^2 \|\nabla \rho_R\|^2,$$

donc

$$\int_{B(x_0, R)} \varphi^2 \|\nabla u\|^2 \leq 2 \int_{B(x_0, R+1) \setminus B(x_0, R)} \psi^2.$$

Comme  $\psi \in L^2(M, g)$ , le membre de droite tend vers 0 lorsque  $R \rightarrow +\infty$ . Donc  $u$  est constant, et comme  $\psi = u\varphi$  et  $\varphi \notin L^2(M, g)$ ,  $u \equiv 0$ . Donc  $\psi \equiv 0$  et  $\lambda_0$  n'est pas une valeur propre.  $\square$

### 4.1.3 Laplacien et horosphères

Nous supposons pour la suite de cette section que la métrique  $g$  est à courbure sectionnelle négative pincée :  $-b^2 \leq \kappa_g \leq -a^2 < 0$ . Commençons par une propriété qui donne une interprétation plus géométrique du Laplacien.

**Proposition 4.1.6.** *Soit  $f \in C^2(M, \mathbb{R})$  une fonction, et  $x \in M$  un point tel que sur un voisinage  $U \subset M$  de  $x$ , on ait  $\|\nabla^g f\| = 1$ . Notons*

$$H_f(x) = \{y \in M ; f(x) = f(y)\}$$

la surface de niveau de  $f$  passant par  $x$ . Alors  $\Delta_g f(x)$  est la courbure moyenne de  $H_f(x)$  en  $x$  dans la direction de  $-\nabla^g f$ .

*Démonstration.* Puisque  $f$  est  $C^2$  de gradient non-nul, la surface de niveau est au voisinage de  $x$  une hypersurface  $C^2$ . La fin de la proposition est une conséquence immédiate de la définition de l'opérateur div et de la courbure moyenne, voir par exemple [GHL04, Chap. 5].  $\square$

Nous appliquerons cette proposition à des hypersurfaces particulières : les horosphères, que nous avons définies à la Section 1.1.2. Le rôle analytique des horosphères est fortement lié à la proposition suivante. Soit  $x \in \widetilde{M}$  et  $\xi \in \partial^\infty \widetilde{M}$ . Rappelons que nous notons  $\mathcal{H}_\xi(x)$  l'horosphère basée en  $\xi$  qui passe par  $x$ . Tout au long de ce chapitre, nous appellerons **courbure moyenne de l'horosphère**  $\mathcal{H}_\xi(x)$  au point  $x$  la courbure moyenne dans la direction du vecteur  $v_{x\xi}$ , qui est la tangente unitaire en  $x$  au rayon  $[x\xi]$ .

**Proposition 4.1.7** (Heintze-Im Hoff [HIH77]). *Supposons que  $\dim(M) = n$  et que les courbures sectionnelles de  $g$  vérifient  $-b^2 \leq \kappa_g \leq -a^2$ . Supposons que la courbure moyenne de toutes les horosphères de  $\widetilde{M}$  est dans  $[h_{min}, h_{max}] \subset (0, +\infty)$ .*

*Alors pour tous  $\xi \in \partial^\infty \widetilde{M}$  et pour tous  $x, y \in \widetilde{M}$ , on a*

$$na \leq h_{min} \leq \Delta_g(\beta_\xi(\cdot, y))(x) \leq h_{max} \leq nb.$$

*Si de plus  $(M, g)$  est localement symétrique, alors pour tout  $\xi \in \partial^\infty \widetilde{M}$  et pour tous  $x, y \in \widetilde{M}$ , on a*

$$\Delta_g(\beta_\xi(\cdot, y))(x) = h,$$

*où  $h = h_{vol}(\widetilde{M}, g)$  est l'entropie volumique de  $(\widetilde{M}, g)$  définie au Chapitre 1.*

*Démonstration.* Notons que pour tout  $\xi \in \partial^\infty \widetilde{M}$  et tous  $x, y \in \widetilde{M}$ , on a

$$\|\nabla^g(\beta_\xi)(\cdot, y)(x)\| = 1.$$

D'après la Proposition 4.1.6,  $\Delta_g f(x)$  est donc la courbure moyenne de l'horosphère  $\mathcal{H}_\xi(x)$  en  $x$ . Cela implique le premier point par le Théorème de comparaison de Rauch (cf par exemple [Kli95], Section 2.7).

Si  $(M, g)$  est localement symétrique, le revêtement universel  $(\widetilde{M}, g)$  est un espace symétrique à courbure négative pincée. Il est donc isométrique à un espace hyperbolique réel, complexe, quaternionnien ou sur les Octaves de Cayleigh, dont les courbures sectionnelles vérifient  $-4a^2 \leq \kappa_g \leq -a^2 < 0$ ; voir par exemple [Cor90]. En particulier, son groupe d'isométrie agit transitivement sur  $S^g \widetilde{M}$ , les horosphères sont donc toutes isométriques et leur courbure moyenne est une constante  $h \geq na > 0$ . De plus, de nouveau par transitivité du groupe d'isométrie de  $(\widetilde{M}, g)$ , la courbure moyenne des sphères  $\mathbb{S}^g(o, R)$  converge uniformément vers  $h$  lorsque  $R \rightarrow +\infty$ . Par un calcul élémentaire, cela implique que  $h_{vol}(\widetilde{M}, g) = h$ .  $\square$

Voici une classe de variétés un peu plus large que les variétés localement symétriques, pour lesquelles nous étendrons les résultats de Patterson, Sullivan et Corlette.

**Définition 4.1.1.** *On dit que  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  est asymptotiquement harmonique s'il existe  $h > 0$  telle que pour tous  $(x, \xi) \in \widetilde{M} \times \partial \widetilde{M}$ , la courbure moyenne  $\mathcal{H}_\xi(x)$  en  $x$  vaut  $h$ .*

On montre sans difficulté que, pour toute variété asymptotiquement harmonique à courbure sectionnelle négative, la courbure moyenne des horosphères est encore égale à l'entropie volumique. Les variétés asymptotiquement harmoniques ont été introduites par Ledrappier dans [Led90], notamment pour relier l'entropie volumique à l'entropie du flot géodésique dans le cas compact. Les variétés localement symétriques à courbure sectionnelle négative sont asymptotiquement harmoniques. Les variétés homogènes construites par Damek et Ricci dans [DR92] le sont également, mais quand elles ne sont pas localement symétriques, leurs groupes d'isométries sont élémentaires.

On sait qu'une variété asymptotiquement harmonique à courbure sectionnelle strictement négative qui admet un quotient *compact* est nécessairement localement symétrique (voir par exemple l'introduction de [CS14] pour un bref historique à ce sujet). Il semble en revanche qu'on ne sache pas s'il existe des variétés asymptotiquement harmoniques, non localement symétriques, qui admettent des groupes discrets d'isométries non élémentaires.

Terminons ce paragraphe par un résultat, spécifique aux variétés de volume fini, qui vient compléter le Théorème 4.1.4 pour les variétés de volume fini à courbure sectionnelle négative.

**Théorème 4.1.8.** *Soit  $(M, g)$  une variété complète non-compacte de volume fini, à courbure sectionnelle majorée par  $-a^2 < 0$ , dont la courbure moyenne*

des horosphères est majorée partout par  $h_{max}$ . Son spectre essentiel est alors non-vide, et son infimum vérifie  $\lambda_0^{ess}(M, g) \leq \frac{h_{max}^2}{4}$ .

*Démonstration.* Une variété de volume fini  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  dont la courbure sectionnelle est majorée par  $-a^2 < 0$  a un nombre fini de bouts  $B_1, \dots, B_k$ . Chaque bout  $B_i$  est le quotient d'une horoboule  $\mathcal{HB}_i$  centrée en  $\xi_i \in \partial\widetilde{M}$  par un sous-groupe parabolique  $P_i$  qui agit de façon cocompacte sur les horosphères centrées en  $\xi_i$ . On pourra par exemple se référer à [Bow95] pour une preuve.

Pour tout  $R > 0$  et tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , notons

$$\mathcal{HB}_{\xi_i}(R) = \{x \in \widetilde{M}; \beta_{\xi_i}(o, x) \geq R\}.$$

Il existe  $R_0 > 0$  tel que pour tout  $R \geq R_0$  et tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , on ait

$$\mathcal{HB}_{\xi_i}(R) \subset \mathcal{HB}_i.$$

En particulier, pour tout  $R \geq R_0$ , l'ensemble

$$M_R = M \setminus p_\Gamma \left( \bigcup_{i=1}^k \mathcal{HB}_{\xi_i}(R) \right) = M \setminus \bigcup_{i=1}^k \mathcal{HB}_{\xi_i}(R)/P_i$$

est compact, bordé par une union de compacts formés d'horosphères quotientées par les groupes paraboliques  $P_i$ . La dérivée du volume de  $M_R$  par rapport à  $R$  est donnée par l'intégrale de la courbure moyenne de son bord. Puisque cette courbure moyenne est (en valeur absolue) en tout point majorée par  $h_{max}$ , il existe donc  $C > 0$  tel que pour tout  $R \geq R_0$ , on ait

$$\text{Vol}^g(M_R) \geq C e^{-h_{max}R}.$$

Le Théorème 4.1.8 découle alors du Théorème 2 de [Bro81b], qui contrôle le bas du spectre essentiel en fonction du taux de (dé)croissance exponentiel du volume.  $\square$

## 4.2 Bas du spectre et entropie

Nous présentons dans cette section les liens entre le bas du spectre et l'entropie. Pour les variétés localement symétriques à courbure négative (voir Théorème 4.2.9 ci-dessous) le lien entre entropie et  $\lambda_0$  est initialement dû aux travaux de Patterson ([Pat76]), Sullivan ([Sul79, Sul87]) et Corlette ([Cor90]), voir le Théorème 0.0.1. Nous en présentons une preuve alternative, qui donne des informations inconnues jusque là sur le lien entre entropie et bas du spectre en courbure négative variable. Nous obtenons le théorème suivant.

**Théorème 4.2.1.** *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété non-compacte à courbure négative pincée, dont les dérivées de la courbure sont uniformément bornées et telle que toutes les courbures moyennes des horosphères de  $(\widetilde{M}, g)$  sont dans  $[h_{min}, h_{max}] \subset ]0, +\infty[$ . Soit  $\delta_\Gamma = \delta_\Gamma(g)$  l'exposant critique de  $(M, g)$ . On a alors :*

1. Dans tous les cas,

$$\delta_\Gamma(h_{min} - \delta_\Gamma) \leq \lambda_0(M, g) \leq \frac{h_{max}^2}{4}.$$

2. Si  $\delta_\Gamma \leq \frac{h_{min}}{2}$ , alors  $\frac{h_{min}^2}{4} \leq \lambda_0(M, g) \leq \frac{h_{max}^2}{4}$ .

3. Si  $\delta_\Gamma \geq \frac{h_{max}}{2}$ , alors

$$\delta_\Gamma(h_{min} - \delta_\Gamma) \leq \lambda_0(M, g) \leq \delta_\Gamma(h_{max} - \delta_\Gamma).$$

Cela fournit en particulier une nouvelle preuve du Théorème de Patterson, Sullivan et Corlette (Théorème 0.0.1), et l'étend à toutes les variétés asymptotiquement harmoniques. Nous verrons au Paragraphe 4.2.3 que pour les variétés asymptotiquement harmoniques, notre méthode permet de décider si le bas du spectre est, ou non, une valeur propre et, le cas échéant, d'identifier la fonction propre associée.

Cette section est une généralisation des résultats et techniques développés dans [RT15] pour les variétés hyperboliques réelles.

#### 4.2.1 Densité de Patterson-Sullivan et minoration de $\lambda_0$

La métrique  $g$  étant fixée, nous notons dans ce paragraphe  $\delta_\Gamma = \delta_\Gamma(g)$  l'exposant critique de  $\Gamma = \pi_1(M)$  agissant par isométries sur le revêtement universel  $(\widetilde{M}, g)$ . Nous allons démontrer le théorème suivant.

**Théorème 4.2.2.** *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété à courbure sectionnelle négative, et soit  $h_{min} > 0$  tel que toutes les horosphères sur  $(\widetilde{M}, g)$  ont des courbures moyennes supérieures à  $h_{min}$ . Alors*

$$\lambda_0(M, g) \geq \delta_\Gamma(h_{min} - \delta_\Gamma).$$

De plus, si  $\delta_\Gamma \leq \frac{h_{min}}{2}$ , alors

$$\lambda_0(M, g) \geq \frac{h_{min}^2}{4}.$$

*Démonstration.* Montrons d'abord le premier point. Le lemme suivant, que nous réutiliserons à plusieurs reprises, découle d'un calcul élémentaire.

**Lemme 4.2.3.** *Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . Alors pour tout  $x \in M$ ,*

$$\Delta_g(e^f)(x) = \left( \Delta_g f(x) - \|\nabla^g f(x)\|_g^2 \right) e^{f(x)}.$$

Combiné avec la Proposition 4.1.7, cela montre que si la courbure moyenne des horosphères est dans  $[h_{min}, h_{max}]$  pour tout  $\xi \in \partial^\infty M$ , on a alors

$$\delta_\Gamma(h_{min} - \delta_\Gamma)e^{-\delta_\Gamma\beta_\xi(o, \cdot)} \leq \Delta_g(e^{-\delta_\Gamma\beta_\xi(o, \cdot)}) \leq \delta_\Gamma(h_{max} - \delta_\Gamma)e^{-\delta_\Gamma\beta_\xi(o, \cdot)}. \quad (4.4)$$

Notons toutefois que la fonction  $x \mapsto e^{-\delta_\Gamma \beta_\xi(o, \cdot)}$  n'est pas  $\Gamma$ -invariante, et ne donne donc pas d'information sur le spectre de  $(M, g) = (\widetilde{M}/\Gamma, g)$ .

Pour tout  $x \in \widetilde{M}$ , on pose  $\varphi_\Gamma(x) = \|\nu_x^\Gamma\|$ , où  $\nu^\Gamma = (\nu_x^\Gamma)_{x \in \widetilde{M}}$  est la densité de Patterson-Sullivan définie au Paragraphe 1.2.2. On a donc, d'après (1.9),

$$\varphi_\Gamma(x) = \int_{\Lambda_\Gamma} e^{-\delta_\Gamma \beta_\xi(o, x)} d\nu_o^\Gamma(\xi). \quad (4.5)$$

En particulier, d'après (4.4), on a pour tout  $x \in \widetilde{M}$ ,

$$\Delta_g \varphi_\Gamma(x) \geq \delta_\Gamma (h_{min} - \delta_\Gamma) \varphi_\Gamma. \quad (4.6)$$

Notons que  $\varphi_\Gamma$  est une combinaison convexe de fonctions  $\mathcal{C}^2$  vérifiant toutes l'inégalité  $\Delta_g \varphi \geq \lambda \varphi$ , ce qui justifie (dans l'espace  $\mathcal{H}^2$ ) l'interversion précédente entre Laplacien et intégrale.

De plus, d'après (1.10), la fonction  $\varphi_\Gamma$  est  $\Gamma$ -invariante. Elle induit donc une fonction que nous notons toujours  $\varphi_\Gamma : M \rightarrow \mathbb{R}$ , strictement positive par construction (comme masse d'une mesure de Patterson-Sullivan), qui vérifie encore (4.6).

Le Lemme 4.1.2 implique donc  $\lambda_0(M, g) \geq \delta_\Gamma (h_{min} - \delta_\Gamma)$ .

Supposons maintenant que  $\delta_\Gamma \leq \frac{h_{min}}{2}$ . Pour tout  $\delta > \delta_\Gamma$  et tout  $x \in \widetilde{M}$ , on pose

$$\varphi_\delta(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-\delta d(x, \gamma o)}.$$

La fonction  $\varphi_\delta$  est continue sur  $\widetilde{M}$ , de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\widetilde{M} \setminus \Gamma o$  et comme la courbure moyenne des sphères géodésique est aussi toujours supérieure à  $h_{min}$ , elle vérifie pour tout  $x \in \widetilde{M}$ ,

$$\Delta_g \varphi_\delta(x) \geq \delta (h_{min} - \delta) \varphi_\delta(x).$$

Comme  $\varphi_\delta$  est  $\Gamma$  invariante, elle induit sur  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  une fonction que nous notons encore  $\varphi_\delta$  ayant les mêmes propriétés. Par le Lemme 4.1.2 (dont la preuve s'adapte immédiatement à ce cas car les points sont de capacité nulle), on a  $\lambda_0(M, g) \geq \delta (h_{min} - \delta)$ , ce pour tout  $\delta > \delta_\Gamma$ . Donc en particulier, pour  $\delta = \frac{h_{min}}{2}$ , nous obtenons bien

$$\lambda_0(M, g) \geq \frac{h_{min}^2}{4}.$$

□

## 4.2.2 Mesure de Bowen-Margulis et majoration de $\lambda_0$

Nous allons montrer le théorème suivant. Nous renvoyons à la Section 1.2.3 pour la construction de la Mesure de Bowen-Margulis, et au Chapitre 2 (Section 2.2.1 et suivante) pour des critères assurant la finitude de cette mesure ainsi que des exemples.

**Théorème 4.2.4.** *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété à courbure sectionnelle négative, et soit  $h_{max} > 0$  tel que toutes les horosphères sur  $(\widetilde{M}, g)$  ont des courbures moyennes inférieures à  $h_{max}$ . Supposons de plus que la mesure de Bowen-Margulis sur  $T^1M$  est finie et que  $\delta_\Gamma > \frac{h_{max}}{2}$ . Alors*

$$\lambda_0(M, g) \leq \delta_\Gamma(h_{max} - \delta_\Gamma).$$

Considérons de nouveau la fonction qui, à tout  $x \in M$ , associe

$$\varphi_\Gamma(x) = \|\nu_x^\Gamma\|,$$

où  $\tilde{x} \in p_\Gamma^{-1}(x)$  et  $\nu_x^\Gamma$  est la mesure de Patterson-Sullivan vue de  $\tilde{x}$ . Par  $\Gamma$ -invariance de la densité de Patterson-Sullivan, cette quantité ne dépend pas du choix de  $\tilde{x}$ . D'après (4.4), elle vérifie de plus en tout  $x \in M$ ,

$$\Delta_g \varphi_\Gamma(x) \leq \delta_\Gamma(h_{max} - \delta_\Gamma) \varphi_\Gamma(x).$$

Le Théorème 4.2.4 découle donc immédiatement du théorème suivant.

**Théorème 4.2.5.** *Il existe une constante  $C = C(a, b) \geq 1$  ne dépendant que des bornes de courbure sur  $(M, g)$  telle qu'on a dans  $[0, \infty]$  l'encadrement suivant :*

$$\frac{\|m_{BM}\|}{C} \int_1^\infty r^{h_{min} - 2\delta - 1} dr \leq \|\varphi_\Gamma\|_{L^2(M, g)}^2 \leq C \|m_{BM}\| \int_1^\infty r^{h_{max} - 2\delta - 1} dr.$$

*En particulier, si la mesure de Bowen-Margulis sur  $S^g M$  est finie et si  $\delta_\Gamma > \frac{h_{max}}{2}$ , alors  $\varphi_\Gamma \in L^2(M, g)$ .*

Le reste de ce paragraphe est dévolue à la preuve de ce théorème. Pour l'établir, nous allons nous appuyer sur le résultat général suivant qui nous sera utile par la suite pour contrôler le bas du spectre essentiel. Nous renvoyons à la Section 1.5.2 pour la construction de la Mesure de Gibbs associée à  $F$ , ainsi que pour la définition du cocycle de Gibbs  $C^{F - \delta_\Gamma(F, g)}$  associé.

**Proposition 4.2.6.** *Soit  $F : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel Hölder, de pression  $\delta = \delta_\Gamma(F, g)$ . Soient  $\nu^F = (\nu_x^F)_{x \in \widetilde{M}}$  une densité de Patterson-Sullivan associée à  $F$  et  $m_F$  la mesure de Gibbs correspondante. Soit  $D \subset \widetilde{M}$  un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$ , mesurable. Alors*

$$\int_D \|\nu_x^F\|^2 dV_g(x) = \int_{S^g D} dm^F(v) \int_{W^{uu}(v)} e^{C_{v^+}^{F - \delta}(\pi v, \pi w)} dV_{W^{uu}(v)}(w),$$

où  $dV_{W^{uu}(v)} = \pi^*(dV_{\mathcal{H}_{v^-}(\pi v)})$  est la mesure induite sur l'horosphère instable par la métrique riemannienne  $g$ .

Dans le cas où  $F = 0$ , il s'agit de la Proposition 3.5 de [RT15]. Nous donnons ici la preuve dans le cas général.

*Démonstration.* On note tout au long de cette preuve  $C = C^{F-\delta}$  le cocycle de Gibbs associé à  $F - \delta$ . Par les propriétés de  $\nu^F$  données au Théorème 1.5.1, on a

$$\int_D \|\nu_x^F\|^2 dV_g(x) = \int_{\partial^\infty \widetilde{M} \times \partial^\infty \widetilde{M}} d\nu_o^F(\xi) d\nu_o^F(\eta) \int_{\widetilde{M}} e^{\delta(C_\xi(o,x) + C_\eta(o,x))} \mathbf{1}_D(x) dV_g(x). \quad (4.7)$$

Pour tout  $\xi, \eta \in \partial^\infty \widetilde{M}$ , notons  $v^{\xi\eta} \in S^g \widetilde{M}$  l'unique vecteur tel que  $v_-^{\xi\eta} = \xi$ ,  $v_+^{\xi\eta} = \eta$  et  $\beta_\eta(o, \pi v^{\xi\eta}) = 0$ .

Pour tout  $v \in S^g \widetilde{M}$ , nous notons

$$W^u(v) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} g^t W^{uu}(v)$$

la variété faiblement instable de  $v$ . L'application

$$\begin{cases} W^u(v) & \rightarrow \widetilde{M} \\ w & \mapsto \pi w \end{cases}$$

est une bijection de classe  $\mathcal{C}^2$ . En décomposant la forme volume sur  $(s\widetilde{M}, g)$  selon les horosphères instables et la direction du flot, l'équation (4.7) devient

$$\int_D \|\nu_x^F\|^2 dV_g(x) = \int_{(\partial^\infty \widetilde{M})^2} d\nu_o(\xi) d\nu_o(\eta) \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathcal{H}_\xi(\pi g^t v^{\xi\eta})} e^{\delta(C_\xi(o,y) + C_\eta(o,y))} \mathbf{1}_D(y) dV_{\mathcal{H}_\xi(g^t v^{\xi\eta})}(y).$$

De plus, pour tout  $y \in \mathcal{H}_\xi(\pi g^t v^{\xi\eta})$ , on a  $C_\xi(o, y) = C_\xi(o, \pi g^t v^{\xi\eta})$ . Rappelons également que  $C_\eta(o, \pi v) + C_\eta(\pi v, y) = C_\eta(o, y)$ . En utilisant la définition de  $m_F$  (voir Section 1.5.2), l'égalité précédente devient alors

$$\int_D \|\nu_x^F\|^2 dV_g(x) = \int_{S^g \widetilde{M}} d\widetilde{m}_F(v) \int_{\mathcal{H}_{v_-}(\pi v)} e^{C_{v_+}(\pi v, \pi w)} \mathbf{1}_{\mathbf{SD}}(w) dV_{W^{uu}(v)}(w).$$

Finalement, l'égalité  $1 = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{1}_{\mathbf{SD}}(\gamma v)$  et l'invariance de  $\widetilde{m}_F$  par  $\Gamma$  terminent la preuve de la proposition.  $\square$

Terminons la preuve de notre théorème.

*Démonstration du Théorème 4.2.5.* Dans le cas où  $F = 0$ , la proposition précédente devient

$$\int_M \|\nu_x^\Gamma\|^2 dV_g(x) = \int_{SD} dm_{BM}(v) \int_{W^{uu}(v)} e^{\delta_\Gamma \beta_{v_+}(\pi v, \pi w)} dV_{W^{uu}(v)}(w), \quad (4.8)$$

où  $m_{BM}$  est la mesure de Bowen-Margulis associée à la densité de Patterson-Sullivan  $\nu^\Gamma$ . Il nous reste donc à démontrer la propriété suivante, dont la preuve est inspirée de celle de [RT15, Prop. 4.3].



**Proposition 4.2.7.** *Supposons que les courbures sectionnelles de  $(M, g)$  vérifient  $-b^2 \leq \kappa_g \leq -a^2 < 0$  et que la courbure moyenne de toutes les horosphères est contenue dans  $[h_{\min}, h_{\max}]$ . Alors il existe une constante  $C = C(a, b) \geq 1$  telle que, pour tout  $\delta > 0$  et pour tout  $v \in S^g \widetilde{M}$ , on a dans  $]0, +\infty[$  l'encadrement :*

$$\frac{1}{C} \int_1^\infty r^{h_{\min} - 2\delta - 1} dr \leq \int_{W^{uu}(v)} e^{\delta\beta_{v_+}(\pi v, \pi w)} dV_{W^{uu}(v)}(w) \leq C \int_1^\infty r^{h_{\max} - 2\delta - 1} dr.$$

*En particulier, si  $\delta > \frac{h_{\max}}{2}$ , la fonction  $v \mapsto \int_{W^{uu}(v)} e^{\delta\beta_{v_+}(\pi v, \pi w)} dV_{W^{uu}(v)}(w)$  est uniformément bornée par une constante ne dépendant que des bornes de courbure  $a, b, h_{\max}$ , et de  $\delta$ .*

*Démonstration.* Soit  $v \in S^g \widetilde{M}$ . Pour tout  $w \in W^{uu}(v)$ , nous notons  $d^{uu}(v, w)$  la **distance d'Hamenstädt** définie par

$$d^{uu}(v, w) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2}d(\pi g^t v, \pi g^t w) - t}.$$

Les principales propriétés de cette distance sont présentés par exemple dans [PPS15, Sec. 2.4]. Commençons par présenter le lien entre cette distance et la quantité  $\beta_{v_+}(\pi v, \pi w)$  apparaissant dans notre proposition.

Par l'inégalité triangulaire, on a pour tout  $w \in W^{uu}(v)$ ,

$$d(\pi g^t v, \pi w) - t = d(\pi v, \pi g^{-t} w) - t \geq d(\pi v, \pi g^{-t} v) - t \geq 0.$$

donc (en prenant la limite lorsque  $t \rightarrow +\infty$ ) on a  $\beta_{v_+}(\pi w, \pi v) \geq 0$  pour tout  $w \in W^{uu}(v)$ . De plus, pour tout  $w \in W^{uu}(v)$  on a toujours par l'inégalité triangulaire, on a

$$d(\pi g^t v, \pi w) - t \geq d(\pi g^t v, \pi g^t w) - 2t.$$

On a donc

$$e^{\beta_{v_+}(\pi v, \pi w)} \leq \min \left( 1, \frac{1}{d^{uu}(v, w)^2} \right). \quad (4.9)$$

Enfin, pour tout  $w \in W^{uu}(v)$  tel que  $d^g(\pi u, \pi v) \geq 1$  et tout  $t > 0$ , le triangle  $(\pi w, \pi g^t v, \pi g^t w)$  présente un angle en  $\pi w$  uniformément minoré. Par l'inégalité triangulaire inverse (cf par exemple le Lemme 2.7 de [PPS15]), il existe donc  $C > 0$  tel que pour tout  $t > 0$ ,

$$d(\pi g^t v, \pi w) - t \leq d(\pi g^t v, \pi g^t w) - 2t + C.$$

On a donc, pour tout  $w \in W^{uu}(v)$  tel que  $d^g(\pi u, \pi v) \geq 1$ ,

$$e^{\beta_{v_+}(\pi v, \pi w)} \geq \frac{1}{e^C d^{uu}(v, w)^2}. \quad (4.10)$$

Pour terminer la preuve de la Proposition 4.2.7, il nous reste à relier la mesure de volume  $dV_{W^{uu}(v)}$  à la distance d'Hamenstädt.

Pour tout  $r > 0$ , nous notons  $B^{uu}(v, r) \subset W^{uu}(v)$  la boule centrée en  $v$  de rayon  $r$  pour la distance de Hamenstädt. Il découle de [PPS15, (8)] que le flot géodésique préserve les  $d^{uu}$ -boules, et que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$B^{uu}(v, r) = g^{\log r} B^{uu}(g^{-\log r} v, 1).$$

De plus, les horosphères étant de classe  $\mathcal{C}^2$ , et le flot géodésique sur  $W^{uu}$  étant engendré par un champ de vecteur normal unitaire, on a

$$\left. \frac{d}{dt} V_{W^{uu}(g^t v)}(g^t B^{uu}(v, r)) \right|_{t=0} = \int_{\pi B^{uu}(v, r)} h^{uu}(w) dV_{W^{uu}(v)}(w), \quad (4.11)$$

où  $h^{uu}(w)$  est la courbure moyenne de l'horosphère instable  $\mathcal{H}_{v-}(\pi v)$  au point  $\pi w$ . Ce calcul découle par exemple de [GHL04, Theo. 5.20].

En supposant que toutes les courbures moyennes des horosphères sont dans  $[h_{min}, h_{max}]$ , on a donc pour tout  $r > 0$ ,

$$r^{h_{min}} V_{W^{uu}(g^{-\log r} v)}(B^{uu}(g^{-\log r} v, 1)) \leq V_{W^{uu}(v)}(B^{uu}(v, r)) \quad (4.12)$$

et

$$V_{W^{uu}(v)}(B^{uu}(v, r)) \leq r^{h_{max}} V_{W^{uu}(g^{-\log r} v)}(B^{uu}(g^{-\log r} v, 1)). \quad (4.13)$$

**Lemme 4.2.8.** *Il existe une constante  $C = C(a, b) \geq 1$ , ne dépendant que des bornes de courbure sur  $(M, g)$ , telle que pour tout  $w \in S^g \widetilde{M}$ , on a*

$$\frac{1}{C} \leq V_{W^{uu}(w)}(B^{uu}(w, 1)) \leq C.$$

*Démonstration.* Soit  $w \in S^g \widetilde{M}$ . Nous supposons que  $\dim(M) = n$  et que les courbures sectionnelles de  $(M, g)$  vérifient  $-b^2 \leq \kappa_g \leq -a^2$ . Rappelons que cela implique que nous pouvons supposer que l'ensemble  $[h_{min}, h_{max}]$  des valeurs des courbures moyennes des horosphères est contenu dans  $[na, nb]$ . Il découle d'une comparaison avec les plans hyperboliques de courbure constante  $-a^2$  et  $-b^2$  que pour tout  $w' \in W^{uu}(w)$ , on a

$$\frac{2}{a} \sinh\left(\frac{a}{2} d^g(\pi w, \pi w')\right) \leq d^{uu}(w, w') \leq \frac{2}{b} \sinh\left(\frac{b}{2} d^g(\pi w, \pi w')\right), \quad (4.14)$$

voir par exemple [HIH77, Theo 4.6] pour une preuve où  $d^{uu}$  est remplacée par la distance induite sur l'horosphère. L'argument s'adapte immédiatement.

L'ensemble  $\mathcal{B}(w) = \bigcup_{t \in [-1/2, 1/2]} g^t B^{uu}(w, 1)$  contient donc une boule de rayon

$R_- = R_-(a, b) > 0$  et est contenu dans une boule de rayon  $R_+ = R_+(a, b) > 0$ . D'après les théorèmes de comparaison de Bishop-Gunther (voir [GHL04, Theo 3.101]), il existe donc  $C_1 = C_1(a, b) \geq 1$  telle que

$$\frac{1}{C_1} \leq V_g(\mathcal{B}(w)) \leq C_1. \quad (4.15)$$

On a de plus

$$V_g(\mathcal{B}(w)) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} V_{W^{uu}(g^t w)}(g^t B^{uu}(w, 1)) dt.$$

D'après (4.12) et (4.13), il existe donc  $C_2 = C_2(a, b) > 0$  tel que

$$\frac{1}{C_2} V_g(\mathcal{B}(w)) \leq V_{W^{uu}(w)}(B^{uu}(w, 1)) \leq C_2 V_g(\mathcal{B}(w)) \quad (4.16)$$

La combinaison de (4.15) et (4.16) conclut la preuve du lemme.  $\square$

Les bornes (4.12) et (4.13) deviennent donc, pour tout  $r > 0$ ,

$$\frac{1}{C} r^{h_{min}} \leq V_{W^{uu}(v)}(B^{uu}(v, r)) \leq C r^{h_{max}}. \quad (4.17)$$

La Proposition 4.2.7 découle immédiatement de (4.9), (4.10) et (4.17). Cela conclut également la preuve du Théorème 4.2.5.  $\square$

$\square$

$\square$

### 4.2.3 Bas du spectre et entropie pour les espaces asymptotiquement harmoniques

Nous démontrons dans ce paragraphe le théorème suivant pour les espaces asymptotiquement harmoniques à courbure négative. Pour les espaces localement symétriques, le lien entre entropie et bas du spectre était déjà connu de par les travaux de Patterson [Pat76], Sullivan [Sul79, Sul87] et Corlette [Cor90], ainsi que la caractérisation de la première fonction propre dans le cas *convexe-cocompact*. La preuve que nous proposons est indépendante des travaux précédents, mais proche de l'esprit de certaines preuves de [Sul79] et [Cor90]. La caractérisation du fait que le bas du spectre soit une valeur propre était montrée dans [RT15] pour les variétés hyperboliques réelles en utilisant les résultats de [Sul87]. Elle est nouvelle dans cette généralité.

**Théorème 4.2.9.** *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété asymptotiquement harmonique à courbure sectionnelle strictement négative. Soit  $\delta_\Gamma = \delta_\Gamma(g)$  l'exposant critique de  $\Gamma$  et  $h = h_{vol}(\widetilde{M}, g)$  l'entropie volumique de  $(\widetilde{M}, g)$ . Le bas du spectre du Laplacien sur  $(M, g)$  vérifie*

$$\lambda_0(M, g) = \begin{cases} \delta_\Gamma(h - \delta_\Gamma) & \text{si } \delta_\Gamma \geq \frac{h}{2} \\ \frac{h^2}{4} & \text{si } \delta_\Gamma \leq \frac{h}{2} \end{cases}$$

De plus,  $\lambda_0(M, g)$  est une valeur propre si et seulement si  $\delta_\Gamma > \frac{h}{2}$  et la mesure de Bowen-Margulis sur  $S^g M$  est finie. La fonction propre associée est alors donnée, à normalisation près, par

$$\varphi_\Gamma : x \mapsto \|\nu_x^\Gamma\|,$$

où  $\nu^\Gamma = (\nu_x^\Gamma)_{x \in \widetilde{M}}$  est la densité de Patterson-Sullivan associée à  $\Gamma$ , et  $\tilde{x} \in p_\Gamma^{-1}(x)$ .

*Démonstration.* Rappelons que lorsque  $(\widetilde{M}, g)$  est un espace asymptotiquement harmonique à courbure sectionnelle strictement négative (par exemple un espace symétrique), les courbures moyennes de toutes les horosphères sont égales, en tout point, à  $h = h_{vol}(\widetilde{M}, g)$ . Listons les conséquences que nous tirons de ce fait. Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$ , et notons  $\delta_\Gamma = \delta_\Gamma(g)$ .

1. Si  $M$  est compacte, on a évidemment  $\lambda_0(M, g) = 0$ , valeur propre associée aux fonctions constantes. Nous avons de plus vu au premier chapitre que dans ce cas,  $\delta_\Gamma(g) = h_{vol}(\widetilde{M}, g)$ , ce qui assure le lien voulu entre entropie et bas du spectre. De plus, la mesure de Bowen-Margulis sur une variété compacte est finie, et par transitivité du groupe d'isométrie de  $(\widetilde{M}, g)$  et unicité de la densité de Patterson-Sullivan, la fonction  $x \mapsto \|\nu_x^\Gamma\|$  est constante. Le théorème est donc vérifié pour toute variété compacte. Nous supposons par la suite que  $M$  est non-compacte.
2. D'après les Théorèmes 4.1.4 et 4.1.8, cela implique que  $\lambda_0(M, g) \leq \lambda_0^{ess}(M, g) \leq \frac{h^2}{4}$ .
3. D'après le Théorème 4.2.2, on a toujours  $\lambda_0(M, g) \geq \delta_\Gamma(h - \delta_\Gamma)$ .
4. D'après le Théorème 4.2.5, si la mesure de Bowen-Margulis est finie et  $\delta_\Gamma > \frac{h}{2}$ , alors la fonction  $\varphi_\Gamma : x \mapsto \|\nu_x^\Gamma\|$  (où  $\tilde{x}$  est n'importe quelle préimage de  $x$  par  $p_\Gamma$ ) est de classe  $\mathcal{C}^2$ , vérifie  $\Delta_g \varphi_\Gamma = \delta_\Gamma(h - \delta_\Gamma)\varphi_\Gamma$ , et est dans  $L^2(M, g)$ . C'est donc une fonction propre. Comme elle est positive, c'est nécessairement l'unique fonction propre associée au bas du spectre, ce qui implique que  $\lambda_0(M, g) = \delta_\Gamma(h - \delta_\Gamma)$  et est une valeur propre.
5. Si la mesure de Bowen-Margulis est infinie alors par le Théorème 2.2.3, on a  $\delta_\Gamma(g) = \delta_\Gamma^\infty(g)$ . Si de plus  $\delta_\Gamma > \frac{h}{2}$ , par le Théorème 4.3.2 ci-dessous et le point (3), on a

$$\lambda_0(M, g) = \lambda_0^{ess}(M, g) = \delta_\Gamma(h - \delta_\Gamma).$$

De plus, la fonction  $\varphi_\Gamma$  est positive,  $\mathcal{C}^2$ , vérifie  $\Delta_g \varphi_\Gamma = \lambda_0 \varphi_\Gamma$ , et n'est pas dans  $L^2(M, g)$ . Cela implique d'après la Proposition 4.1.5 que  $\lambda_0(M, g)$  ne peut pas être une valeur propre.

6. Si  $\delta_\Gamma = \frac{h}{2}$ , alors par les points 2. et 3. ci-dessus, on a  $\lambda_0(M, g) = \frac{h^2}{4}$ . De plus, la fonction  $\varphi_\Gamma$  est positive,  $\mathcal{C}^2$ , vérifie  $\Delta_g \varphi_\Gamma = \lambda_0 \varphi_\Gamma$ , et n'est pas dans  $L^2(M, g)$ . Cela implique de nouveau d'après la Proposition 4.1.5 ci-dessous que  $\lambda_0(M, g)$  ne peut pas être une valeur propre.
7. Il ne nous reste qu'à traiter les cas où  $M$  est non-compacte et  $\delta_\Gamma < \frac{h}{2}$ , que la mesure de Bowen-Margulis sur  $S^g M$  soit finie ou infinie. D'après le Théorème 4.2.2 et le point 2. ci-dessus,  $\lambda_0(M, g) = \frac{h^2}{4}$ .

Si  $(M, g)$  est convexe-cocompacte, il existe  $C > 0$  telle que  $V_g(B(o, R)) \geq Ce^{hR}$ . Notons, comme dans la preuve du Théorème 4.2.2, pour tout  $\delta > \delta_\Gamma$

et tout  $x \in \widetilde{M}$ ,

$$\varphi_\delta(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-\delta d(x, \gamma o)}.$$

Comme la courbure moyenne des sphères géodésiques est au moins  $h$ , elle vérifie en tout point

$$\Delta_g \varphi_\delta \geq \delta(h - \delta)\varphi_\delta.$$

Comme  $\varphi_{h/2}(x) \geq e^{-\frac{h}{2}d(o, x)}$ , la fonction  $\varphi_{h/2}$  n'est pas dans  $L^2(M, g)$ . Donc de nouveau par la Proposition 4.1.5,  $\lambda_0(M, g)$  n'est pas une valeur propre.

Si  $(M, g)$  n'est pas convexe-cocompacte, d'après [Rob11, Prop. 1] il existe une densité conforme  $\nu^{h/2} = (\nu_x^{h/2})_{x \in \widetilde{M}}$ , invariante par  $\Gamma$ , de dimension  $\frac{h}{2}$ . On vérifie immédiatement par une répétition de la preuve du Théorème 4.2.4 que la fonction  $\psi_{h/2} : x \mapsto \left\| \nu_x^{h/2} \right\|$ , où  $\tilde{x} \in \widetilde{M}$  est n'importe quelle préimage de  $x$  par  $p_\Gamma$ , est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $M$ , vérifie  $\Delta_g \psi_{h/2} = \frac{h^2}{4} \psi_{h/2}$ , et n'est pas dans  $L^2(M, g)$ . Donc de nouveau par la Proposition 4.1.5,  $\lambda_0(M, g)$  n'est pas une valeur propre.

Ceci conclut la preuve du Théorème 4.2.9. □

### 4.3 Bas du spectre essentiel et entropie à l'infini

L'objectif de cette section est de prouver les théorèmes suivants, qui relie le bas du spectre essentiel à l'entropie à l'infini de façon analogue aux liens décrits entre le bas du spectre et l'entropie dans la section précédente. Ces résultats sont nouveaux et seront publiés dans [Tap20a].

**Théorème 4.3.1.** *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété non-compacte à courbure négative pincée, dont les dérivées de la courbure sont uniformément bornées et telle que toutes les courbures moyennes des horosphères de  $(\widetilde{M}, g)$  sont dans  $[h_{min}, h_{max}] \subset ]0, +\infty[$ . Soit  $\delta_\Gamma^\infty = \delta_\Gamma^\infty(g)$  l'entropie à l'infini de  $(M, g)$ . On a alors :*

1. Dans tous les cas,

$$\delta_\Gamma^\infty(h_{min} - \delta_\Gamma^\infty) \leq \lambda_0^{ess}(M, g) \leq \frac{h_{max}^2}{4}.$$

2. Si  $\delta_\Gamma^\infty \leq \frac{h_{min}}{2}$ , alors  $\frac{h_{min}^2}{4} \leq \lambda_0^{ess}(M, g) \leq \frac{h_{max}^2}{4}$ .

3. Si  $\delta_\Gamma^\infty \geq \frac{h_{max}}{2}$ , alors

$$\delta_\Gamma^\infty(h_{min} - \delta_\Gamma^\infty) \leq \lambda_0^{ess}(M, g) \leq \delta_\Gamma^\infty(h_{max} - \delta_\Gamma^\infty).$$

Puisque sur un espace asymptotiquement harmonique  $(\widetilde{M}, g)$ , la courbure moyenne de toutes les horosphères est constante, égale à  $h = h_{vol}(\widetilde{M}, g)$ , le théorème précédent implique immédiatement le suivant.

**Théorème 4.3.2.** *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété non-compacte asymptotiquement harmonique à courbure strictement négative. Soit  $h = h_{vol}(M, g)$  et soit  $\delta_\Gamma^\infty = \delta_\Gamma^\infty(g)$  l'entropie à l'infini de  $(M, g)$ . On a alors :*

$$\lambda_0^{ess}(M, g) = \begin{cases} \delta_\Gamma^\infty(h - \delta_\Gamma^\infty) & \text{si } \delta_\Gamma^\infty \geq \frac{h}{2} \\ \frac{h^2}{4} & \text{si } \delta_\Gamma^\infty \leq \frac{h}{2} \end{cases}$$

Notons que les Théorèmes 4.2.9 et 4.3.2 impliquent immédiatement le corollaire suivant, qui illustre la proximité entre trou critique et trou spectral pour le Laplacien en courbure négative.

**Corollaire 4.3.3.** *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété non-compacte asymptotiquement harmonique à courbure négative pincée. Soit  $h = h_{vol}(M, g)$  l'entropie volumique. Alors le laplacien sur  $(M, g)$  a un trou spectral si et seulement si  $\delta_\Gamma > \frac{h}{2}$  et  $\Gamma$  a un trou critique, i.e.  $\delta_\Gamma(g) > \delta_\Gamma^\infty(g)$ .*

Supposons qu'en tout point, la courbure moyenne des horosphères est majorée par  $h_{max}$ . Alors l'entropie volumique de  $(M, g)$  vérifie  $h_{vol}(\widetilde{M}, g) \leq h_{max}$ . Par les Théorèmes 4.1.4 et 4.1.8, on a alors  $\lambda_0^{ess}(M, g) \leq \frac{h_{max}^2}{4}$ . Le reste de cette section est donc dévolu à la preuve des autres inégalités du Théorème 4.3.1.

### 4.3.1 Potentiels nuls à l'infini

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète non-compacte à courbure négative pincée. Notre étude du bas du spectre essentiel s'appuie sur la proposition suivante, conséquence des résultats présentés au Chapitre 2.

**Proposition 4.3.4.** *Il existe une constante  $A = A(M, g) > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout compact  $K \subset M$ , il existe un potentiel lisse  $F = F_{\varepsilon, K} : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :*

1.  $F$  ne dépend que de la base : pour tout  $x \in M$  et tous  $v, w \in S_x^g M$ , on a  $F(v) = F(w) = F(x)$  ;
2.  $F$  est partout majoré par  $\varepsilon$  et nul hors d'un compact ;
3. en tout point,  $\|\nabla F\| \leq \varepsilon$  et  $\|\nabla \nabla F\| \leq \varepsilon$  ;
4.  $\delta_\Gamma(F, g) \in \left[ \delta_\Gamma^\infty(g) + \frac{\varepsilon}{4}, \delta_\Gamma^\infty(g) + \varepsilon \right]$  (en particulier,  $F$  est SPR),
5. la mesure de Gibbs normalisée  $\overline{m}_F$  associée à  $F$  vérifie

$$\overline{m}_F(K) \leq \varepsilon.$$

*Démonstration.* Par le Théorème 2.3.10, pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $K \subset M$  compact, il existe un compact  $K_1 \subset M$  et  $C_1 > 0$  tels que si  $\psi_1$  est une fonction lisse positive à support compact qui vaut 1 sur  $K_1$ , en posant  $F_1 = -C_1\psi_{K_1}$ , on a

$$\delta_\Gamma^\infty(g) \leq \delta_\Gamma(F_1) \leq \delta_\Gamma^\infty(g) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Notons que si  $\delta_\Gamma(g) = \delta_\Gamma^\infty(g)$ , on peut prendre  $C_1 = 0$  et  $K_1$  arbitraire. Nous supposons par la suite que  $\|\nabla F_1\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$  et  $\|\nabla\nabla F_1\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ , ce qui est toujours possible puisque  $M$  est non-compacte.

Notons que

$$\frac{\delta_\Gamma(F_1, g) - \delta_\Gamma^\infty(g) + \varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \quad (4.18)$$

Soit  $\psi_K$  une fonction lisse positive à support compact qui vaut 1 sur  $K$ , telle que  $\|\nabla(2\psi_K)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$  et  $\|\nabla\nabla 2\psi_K\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . En posant  $F_2 = F_1 - 2\psi_K$ , on a de nouveau (puisque  $F_2 \leq F_1$  est à support compact)

$$\delta_\Gamma^\infty(g) \leq \delta_\Gamma(F_2, g) \leq \delta_\Gamma^\infty(g) + \varepsilon.$$

Enfin, par le Théorème 2.3.7, il existe un compact  $K_3 \subset M$  tel que si  $\psi_{K_3}$  est une fonction positive lisse à support compact qui vaut 1 sur  $K_3$ , alors le potentiel

$$F_3 = F_2 + \frac{2\varepsilon}{3}\psi_{K_3} = -C_1\psi_{K_1} - 2\psi_K + \frac{\varepsilon}{2}\psi_{K_3}$$

vérifie

$$\delta_\Gamma^\infty(g) = \delta_\Gamma^\infty(F_3, g) < \delta_\Gamma^\infty(g) + \frac{\varepsilon}{4} \leq \delta_\Gamma(F_3, g) \leq \delta_\Gamma^\infty(F, g) + \varepsilon.$$

En particulier  $F_3$  est SPR, associé à une unique mesure de Gibbs normalisée  $\bar{m}_{F_3}$ . Nous supposons que  $\|\nabla(\psi_{K_3})\| \leq \frac{2}{3}$  et  $\|\nabla\nabla\psi_{K_3}\| \leq \frac{2}{3}$ .

D'après le principe variationnel (cf Théorème 1.4.2), elle vérifie

$$\delta_\Gamma^\infty < h_{KS}(\bar{m}_{F_3}) + \int_{S^g M} F_3 d\bar{m}_{F_3} \leq h_{KS}(m_{F_3}) + \int F_1 d\bar{m}_{F_3} + \varepsilon - 2\bar{m}_{F_3}(K).$$

On a donc, de nouveau par le principe variationnel,

$$\bar{m}_{F_3}(K) \leq \frac{\delta_\Gamma(F_1, g) - \delta_\Gamma^\infty(g) + \varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Il découle des inégalités précédentes que  $F_3$  vérifie les conclusions de la Proposition 4.3.4.  $\square$

Rappelons que pour un potentiel Hölder  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$ , le cocycle de Gibbs associé à  $F$  est défini pour tout  $\xi \in \partial\tilde{M}$  et tout  $x, y \in \tilde{M}$  par

$$C_\xi^F(x, o) = \lim_{z \rightarrow \xi} \left( \int_x^z F - \int_o^z F \right)$$

Soit  $\xi \in \partial^\infty \widetilde{M}$ . Pour tout  $x \in \widetilde{X}$ , on note encore  $v_{x\xi} \in S^g \widetilde{M}$  le vecteur unitaire tangent en  $x$  au rayon géodésique  $[x, \xi]$ . Rappelons que d'après la Proposition 4.1.7, en tout  $x \in \widetilde{M}$  la quantité  $\text{div}(y \mapsto v_{y\xi}(x))$  est la courbure moyenne de l'horosphère  $\mathcal{H}_\xi(x)$  au point  $x$ . Le théorème suivant est un des points cruciaux de notre approche.

**Théorème 4.3.5.** *Supposons que la courbure sectionnelle de  $(M, g)$  est négative pincée  $-b^2 \leq \kappa_g \leq -a^2 < 0$ , que les dérivées de la courbure sectionnelle sont uniformément bornées et que la courbure moyenne des horosphères est dans  $[h_{\min}, h_{\max}] \subset [na, nb]$ .*

*Alors il existe  $C > 0$  ne dépendant que de  $(M, g)$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout compact  $K \subset M$ , si  $F = F_{\varepsilon, K}$  est le potentiel donné par la Proposition 4.3.4, on a pour tout  $\xi \in \partial \widetilde{M}$ ,*

$$\nabla C_\xi^F(\cdot, o)(x) = F(x)v_{x\xi} + \vec{\eta}(x),$$

*où  $x \mapsto \vec{\eta}(x)$  est un champ de vecteur  $\mathcal{C}^1$ , tel que en tout point  $\|\vec{\eta}\| \leq C\varepsilon$  et  $|\text{div}(\vec{\eta})| \leq C\varepsilon$ . En particulier, pour tout  $x \in \widetilde{M}$ , on a*

$$|F(x)| - C\varepsilon \leq \|\nabla C_\xi^F(\cdot, o)(x)\| \leq |F(x)| + C\varepsilon \quad (4.19)$$

et

$$F(x)h_{\min} - C\varepsilon \leq \Delta_g(C_\xi^F(\cdot, o)) \leq F(x)h_{\max} + C\varepsilon. \quad (4.20)$$

*Démonstration.* Soit  $\xi \in \partial \widetilde{M}$ , soit  $x \in \widetilde{M}$  et  $h \in T_x \widetilde{M}$ . Posons

$$h_\xi = g(h, v_{x\xi}) \quad \text{et} \quad h_\perp = h - h_\xi v_{x\xi}.$$

Pour tout  $t \geq 0$ , on note  $x_t$  le point à distance  $t$  de  $x$  sur le rayon  $[x, \xi]$ . Pour tout  $w \in T_x \widetilde{M}$ , on note  $(Y_w^\xi(t))_{t \geq 0}$  le **champ de Jacobi stable** le long de la géodésique  $[x, \xi]$  tel que  $Y_w^\xi(0) = w$ , c'est à dire l'unique champ de Jacobi le long de  $[x, \xi]$  uniformément borné. Nous renvoyons à la Section 2 de [HIH77] pour sa construction.

**Lemme 4.3.6.** *On a*

$$d(C_\xi^F(\cdot, o))(x)(h) = h_\xi F(x)v_{x\xi} + \int_0^{+\infty} dF(x_t) \left( Y_{h_\perp}^\xi(t) \right) dt$$

*Démonstration.* Il s'agit d'un calcul direct, dont la validité est justifiée par le fait que, d'après le Théorème 2.4 de [HIH77], on a pour tout  $t \geq 0$  et tout  $w \in T_x \widetilde{M}$ ,

$$\|Y_w^\xi(t)\| \leq \|w\| e^{-at}.$$

□

On a donc

$$\nabla(C_\xi^F(\cdot, o)) = F(x)v_{x\xi} + \vec{\eta}(x),$$



où  $\vec{\eta}(x)$  est défini par les égalités  $g(\vec{\eta}(x), v_{x\xi}) = 0$  et pour tout  $h \in T_x \widetilde{M}$

$$g(\vec{\eta}(x), h) = \int_0^{+\infty} dF(x_t) \left( Y_{h_\perp}^\xi(t) \right) dt. \quad (4.21)$$

Par la Proposition 4.3.4, on a en tout point  $\|\nabla F\| \leq \varepsilon$ . Le Théorème 2.4 de [HH77] implique donc que

$$\|\vec{\eta}(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{a}.$$

Cela implique immédiatement (4.19).

Par l'équation des champs de Jacobi, puisque les dérivées de la courbure sont uniformément bornées et  $\|\nabla \nabla F\| \leq \varepsilon$ , le champ de vecteur  $\vec{\eta}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et sa divergence est dans  $[-C\varepsilon, C\varepsilon]$  où  $C$  ne dépend que des bornes de courbures et des bornes sur leurs dérivées. Nous omettons le détail de ce dernier point pour ne pas surcharger ce manuscrit.

De plus, par les propriétés standard de l'opérateur de divergence (cf par exemple [GHL04], Chap ; 4), on a

$$\operatorname{div}(Fv_\xi)(x) = F(x)\operatorname{div}(v_\xi) + g(\nabla F(x), v_{x\xi}).$$

Comme  $\|\nabla F\| \leq \varepsilon$ , cela implique le point (4.20).  $\square$

### 4.3.2 Minoration du bas du spectre essentiel

Le Théorème 4.3.5 combiné au Lemme de Barta 4.1.3 implique le corollaire suivant, qui fournit le point 1. du Théorème 4.3.1.

**Corollaire 4.3.7.** *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété à courbure négative pincée, dont les dérivées de la courbure sont bornées, telle que la courbure moyenne des horosphères est au moins  $h_{\min} > 0$  et  $\delta_\Gamma^\infty(g) > \frac{h_{\min}}{2}$ . Alors*

$$\lambda_0^{ess}(M, g) \geq \delta_\Gamma^\infty(g)(h_{\min} - \delta_\Gamma^\infty(g)).$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\delta_\Gamma^{ess}(g) - \varepsilon > \frac{h_{\min}}{2}$ , soit  $K \subset M$  un compact (quelconque) et soit  $F = F_{\varepsilon, K} : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  le potentiel fourni par la Proposition 4.3.4. Nous notons encore  $F = F \circ p_\Gamma$  son relevé à  $S^g \widetilde{M}$ . Soit  $K' \subset S^g \widetilde{M}$  un compact tel que pour tout  $v \notin K'$ , on ait  $F(v) = 0$ .

Considérons la fonction  $\varphi^F : \widetilde{M} \rightarrow (0, +\infty)$  définie pour tout  $x \in \widetilde{M}$  par  $\varphi^F(x) = \|\nu_x^F\|$ , où  $\nu^F = (\nu_x^F)_{x \in \widetilde{M}}$  est la densité de Patterson-Sullivan associée à  $F$ . Notons pour plus de lisibilité  $\delta_F = \delta_\Gamma(F, g)$ . D'après la Section 1.5.1, on a pour tout  $x \in \widetilde{M}$  et tout  $\xi \in \partial \widetilde{M}$ ,

$$\frac{d\nu_x^F}{d\nu_o^F}(\xi) = e^{-C_\xi^{F-\delta_F}(x,o)},$$

où  $C_\xi^{F-\delta_F}(\cdot, \cdot)$  est le cocycle de Gibbs associé à  $F - \delta_F$ .

Pour tout  $\xi \in \widetilde{M}$ , posons  $\varphi_\xi^F$  la fonction  $x \mapsto e^{-C_\xi^{F-\delta_F}(x,o)}$ . On a donc pour tout  $x \in \widetilde{M}$ ,

$$\varphi^F(x) = \int_{\partial^\infty \widetilde{X}} \varphi_\xi^F(x) d\nu_o^F(\xi).$$

**Lemme 4.3.8.** *Pour tout  $x \in \widetilde{M}$  et tout  $\xi \in \partial^\infty \widetilde{M}$ , on a*

$$(\delta_F - F(x) - \varepsilon)(h_{min} - (\delta_F - F(x) + \varepsilon) - \varepsilon) \varphi^F \xi(x) \leq \Delta_g \varphi_\xi^F$$

et

$$\Delta_g \varphi_\xi^F \leq (\delta_F - F(x) + \varepsilon)(h_{max} - (\delta_F - F(x) - \varepsilon) + \varepsilon) \varphi^F \xi(x).$$

*Démonstration.* Soit  $\xi \in \partial^\infty \widetilde{M}$ . Par le Lemme 4.2.3, pour tout  $x \in \widetilde{M}$ , on a

$$\Delta_g \varphi_\xi^F(x) = \left( \Delta_g \left( -C_\xi^{F-\delta_F}(x, o) \right) - \left\| \nabla C_\xi^{F-\delta_F} \right\|^2 \right) \varphi_\xi^F(x).$$

Le Lemme 4.3.8 découle donc directement du Théorème 4.3.5.  $\square$

Terminons la preuve du Corollaire 4.3.7. La fonction  $\varphi_F$  est  $\Gamma$ -invariante, et induit donc une fonction strictement positive sur  $M$ . De plus, pour tout  $x \in M \setminus K'$ , comme  $F(x) = 0$ , on a par le Lemme 4.3.8 et une inversion Laplacien-intégrale (valide dans  $\mathcal{H}^2$  comme expliqué à la Section 4.2.1),

$$\Delta_g \varphi^F(x) \geq (\delta_F(h_{min} - \delta_F) + \varepsilon) \varphi^F(x). \quad (4.22)$$

Comme  $\frac{h_{min}}{2} < \delta_F \leq \delta_\Gamma^\infty + \varepsilon$ , le Lemme de Barta 4.1.3 et la minoration (4.22) impliquent le Corollaire 4.3.7.  $\square$

Le point 2. du Théorème 4.3.1 est donné par la proposition suivante.

**Proposition 4.3.9.** *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété non-compacte à courbure négative pincée, et telle que toutes les courbures moyennes des horosphères de  $(\widetilde{M}, g)$  sont minorées par  $h_{min}$ . Supposons que  $\delta_\Gamma^\infty = \delta_\Gamma^\infty(g)$  l'entropie à l'infini de  $(M, g)$  vérifie  $\delta_\Gamma^\infty \leq \frac{h_{min}}{2}$ . Alors*

$$\frac{h_{min}^2}{4} \leq \lambda_0^{ess}(M, g).$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$  et  $K \subset M$  un compact quelconque, et soit  $F = F_{\varepsilon, K} : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  le potentiel fourni par la Proposition 4.3.4. Soit  $K' \subset M$  le compact tel que pour tout  $x \in M \setminus K'$ , on a  $F(x) = 0$ . On a en particulier  $\delta_F \leq \delta_\Gamma^\infty + \varepsilon \leq \frac{h_{min}}{2} + \varepsilon$ . Posons  $\delta = \frac{h_{min}}{2} + 2\varepsilon$ . La fonction

$$\varphi^\varepsilon : x \mapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{\delta \int_x^{\gamma o} F}$$

est positive,  $\Gamma$ -invariante et induit donc sur  $M$  une fonction que nous notons encore  $\varphi^\varepsilon$ , qui est continue, uniformément Lipschitz et  $\mathcal{C}^2$  sauf en  $\Gamma o$ . Par une répétition des arguments de la preuve précédente, puisque la courbure moyenne des sphères géodésiques est toujours au moins  $h_{min}$ , la fonction  $\varphi^\varepsilon$  vérifie pour tout  $x \in M \setminus (K' \cup \Gamma o)$ ,

$$\Delta_g \varphi^\varepsilon \geq \left( \frac{h_{min}}{2} + \varepsilon \right) \left( h_{min} - \frac{h_{min}}{2} - \varepsilon \right) \varphi^\varepsilon.$$

On a donc par le Lemme 4.1.3,

$$\lambda_0^{ess}(M, g) \geq \left( \frac{h_{min}}{2} + \varepsilon \right) \left( h_{min} - \frac{h_{min}}{2} - \varepsilon \right),$$

ce pour tout  $\varepsilon > 0$ . □

### 4.3.3 Majoration du bas du spectre essentiel

Nous montrons dans ce paragraphe le Théorème suivant, qui est l'autre point crucial du Théorème 4.3.1.

**Théorème 4.3.10.** *Supposons qu'en tout point, la courbure moyenne des horosphères est majorée par  $h_{max}$ . Alors si  $\delta_\Gamma^\infty(g) > \frac{h_{max}}{2}$ , on a*

$$\lambda_0^{ess}(M, g) \leq \delta_\Gamma^\infty(g)(h_{max}\delta_\Gamma^\infty(g)).$$

Nous supposons donc que  $\delta_\Gamma^\infty(g) > \frac{h_{max}}{2}$ . Pour majorer le bas du spectre essentiel, nous utiliserons la caractérisation suivante.

**Proposition 4.3.11** (Donnelly, [Don81], Prop. 2.1). *Pour tout  $\lambda > 0$ , on a  $\lambda_0^{ess}(M, g) \leq \lambda$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'espace vectoriel*

$$\left\{ \varphi \in \mathcal{H}^2(M, g) ; \int_M (\Delta_g \varphi - \lambda \varphi - \varepsilon \varphi) \varphi dV_g < 0 \right\}$$

*est de dimension infinie.*

Pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout compact  $K \subset M$ , notons de nouveau  $F_{\varepsilon, K} : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  le potentiel fourni par la Proposition 4.3.4, et  $\varphi^{F_{\varepsilon, K}} : M \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par, pour tout  $x \in \widetilde{M}$ ,

$$\varphi^{F_{\varepsilon, K}}(x) = \|\nu_x^{F_{\varepsilon, K}}\|.$$

Le Théorème 4.3.10 découle des propositions suivantes combinées à la Proposition 4.3.11.

**Proposition 4.3.12.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$  tel que  $\delta_\Gamma^\infty - 2\varepsilon > \frac{h_{max}}{2}$ , et pour tout compact  $K \subset M$ , on a  $\varphi^{F_{\varepsilon, K}} \in \mathcal{H}^2(M, g)$ .*

**Proposition 4.3.13.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$  tel que  $\delta_\Gamma^\infty - 2\varepsilon > \frac{h_{max}}{2}$ , et pour tout compact  $K \subset M$ , en posant  $\varphi = \varphi^{F_{\varepsilon, K}}$  et  $\lambda = (\delta_\Gamma^\infty - \varepsilon)(h_{max} - \delta_\Gamma^\infty - \varepsilon)$ , on a*

$$\int_M (\Delta_g \varphi - \lambda \varphi - \varepsilon \varphi) \varphi dV_g < 0.$$

**Proposition 4.3.14.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$  tel que  $\delta_\Gamma^\infty - \varepsilon > \frac{h_{max}}{2}$ , l'ensemble*

$$\{\varphi^{F_{\varepsilon, K}} ; K \Subset M\}$$

*est de dimension infinie.*

Le reste de cette section est dévolu aux preuves de ces trois propositions.

*Démonstration de la Proposition 4.3.12.* Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\delta_{\Gamma}^{\infty} - \varepsilon > \frac{h_{max}}{2}$ , et  $K \subset M$  un compact. Notons que  $F = F_{\varepsilon, K}$  est lisse à support compact donc bornée. Il découle donc de la preuve du Lemme 4.3.8 qu'il existe  $C > 0$  tel que, en tout  $x \in M$ , on ait

$$\|\nabla \varphi^F\| \leq C\varphi^F \quad \text{et} \quad |\Delta_g \varphi^F| \leq C\varphi^F.$$

Il suffit donc de montrer que  $\varphi^F \in L^2(M, g)$ . Par la Proposition 4.2.6, on a

$$\int_M (\varphi^F)^2 dV_g = \int_{S^g D} dm_F(v) \int_{W^{uu}(v)} e^{C_{v^+}^{F-\delta_F}(\pi v, \pi w)} dV_{W^{uu}(v)}(w)$$

La Proposition 4.3.4 nous précise que

$$\delta_{\Gamma}^{\infty}(g) \leq \delta_F \leq \delta_{\Gamma}^{\infty}(g) + \varepsilon,$$

La proposition suivante est également une conséquence des propriétés de  $F$  données par la Proposition 4.3.4 et des bornes de courbure négatives uniformes.

**Proposition 4.3.15.** *Il existe  $C > 0$  ne dépendant que des bornes de courbure sur  $(M, g)$  telle que pour tout  $v \in S^g \widetilde{M}$  et tout  $w \in W^{uu}(v)$ , on a*

$$C_{v^+}^F(\pi v, \pi w) \leq -\varepsilon \beta_{v^+}(\pi v, \pi w) + C\varepsilon.$$

*Démonstration.* Soit  $v \in S^g \widetilde{M}$ . Rappelons (cf 1.1.3) que pour tout  $w \in W^{uu}(v)$ , on a  $\beta_{v^+}(\pi v, \pi w) \leq 0$ . De plus, par définition, on a pour tout  $x, y \in \widetilde{M}$ ,

$$C_{v^+}^{F-\delta_F}(x, y) = \lim_{z \rightarrow v^+} \left( \int_y^z F - \int_x^z F \right).$$

Rappelons que pour tout  $x \in \widetilde{M}$  et tout  $\xi \in \partial \widetilde{M}$ , nous notons  $calH_{\xi}(x)$  l'horosphère basée en  $\xi$  et passant par  $x$ . On a vu à la Proposition 1.1.3 que, pour tout  $v \in S^g \widetilde{M}$ ,

$$\mathcal{H}_{v^-}(\pi v) = \pi(W^{uu}(v)).$$

Le lemme suivant, conséquence immédiate des Théorèmes 4.6 et 4.9 de [HIH77], est crucial dans notre argument.

**Lemme 4.3.16** (Heintze-Im Hof, [HIH77]). *Il existe  $D_{max} = D_{max}(a, b) > 0$  ne dépendant que des bornes de courbure qui vérifie la propriété suivante. Soit  $v \in S^g \widetilde{M}$ . Pour tout  $y \in \mathcal{H}_{v^-}(\pi v)$ , notons  $y_{v^+} = [y, v^+) \cap \mathcal{H}_{v^+}(\pi v)$ . Alors  $d(\pi v, y_{v^+}) \leq D_{max}$ .*

Soit  $T_{max} > 0$  tel que  $e^{-aT_{max}} D_{max} \leq 1$ . Il ne dépend que des bornes de courbure. Fixons  $w \in W^{uu}(v)$ , et notons  $x = \pi v$ ,  $y = \pi w$ .

Soit  $T \geq T_{max}$  tel que, en posant  $z = \pi g^T v$ , on ait

$$C_{\xi}^F(x, y) \leq \int_y^z F - \int_x^z F + \varepsilon \quad \text{et} \quad |\beta_{v^+}(y, x) - (d(y, z) - d(x, z))| \leq \varepsilon.$$

Soit  $T' > 0$  tel que  $T + T' = d(y, z)$  : on a alors

$$0 \leq \beta_{v_+}(y, x) \leq T' \leq \beta_{v_+}(y, x) + \varepsilon.$$

Notons  $w' \in S_y^g \widetilde{M}$  le vecteur unitaire tangent en  $y$  à la géodésique  $[y, z]$ . On a alors

$$\begin{aligned} C_\xi^F(x, y) &\leq \int_0^{T-T_{max}} \left( F(g^{T'-t}w') - F(g^{T-t}v) \right) dt \\ &+ \int_{T-T_{max}-T}^T \left( F(g^{T'-t}w') - F(g^{T-t}v) \right) dt + \int_T^{T+T'} F(g^{T'-t}w') dt. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Remarquons d'abord que puisque  $F \geq \varepsilon$  en tout point, on a

$$\int_T^{T+T'} F(g^{T'-t}w') dt \leq \varepsilon(\beta_{v_+}(y, x) + \varepsilon) = -\varepsilon\beta_{v_+}(x, y) + \varepsilon^2. \quad (4.24)$$

De plus, par définition de  $T_{max}$ , on a

$$d(\pi g^{T'-T+T_{max}}w', \pi g^{T_{max}}v) \leq 1.$$

Puisque la courbure sectionnelle est majorée par  $-a^2$ , une comparaison avec le plan hyperbolique implique donc que pour tout  $t \in [0, T - T_{max}]$ ,

$$d(\pi g^{T'-t}w', \pi g^{T-t}v) \leq e^{-aT_{max}} e^{-at}$$

Comme par la Proposition 4.3.4, la fonction  $F$  est  $\varepsilon$ -Lipschitz, on a donc dès que  $T > T_{max}$  est assez grand,

$$\left| \int_0^{T-T_{max}} \left( F(g^{T'-t}w') - F(g^{T-t}v) \right) dt \right| \leq \varepsilon e^{-aT_{max}} \int_0^{T-T_{max}} e^{-at} dt \leq C\varepsilon, \quad (4.25)$$

où  $C$  ne dépend que de  $(M, g)$ .

Enfin, pour tout  $t \in [T - T_{max}, T]$ , on a par convexité de la distance

$$d(\pi g^{T'-t}w', \pi g^{T-t}v) \leq D_{max}.$$

De nouveau, comme la fonction  $F$  est  $\varepsilon$ -Lipschitz, on a

$$\left| \int_{T-T_{max}}^T \left( F(g^{T'-t}w') - F(g^{T-t}v) \right) dt \right| \leq \varepsilon T_{max} D_{max} \leq C\varepsilon, \quad (4.26)$$

où  $C$  ne dépend que de  $(M, g)$ .

La combinaison de (4.23), (4.23), (4.23) et (4.23) conclut la preuve de la Proposition 4.3.15.  $\square$

Enfin, par la Proposition 4.2.7, il existe une constante  $C \geq 1$  ne dépendant que des bornes de courbures telle que, pour tout  $\delta > 0$  et pour tout  $v \in s^g \widehat{M}$ , on a dans  $]0, +\infty]$  l'encadrement :

$$\int_{W^{uu}(v)} e^{\delta\beta_v + (\pi w, \pi v)} dV_{W^{uu}(v)}(w) \leq C \int_1^\infty r^{h_{max} - 2\delta - 1} dr.$$

On a donc

$$\int_M (\varphi^F)^2 dV_g \leq C \|m_F\| \int_1^\infty r^{h_{max} - 2(\delta_\Gamma^\infty - 2\varepsilon) - 1} dr,$$

ce qui conclut la preuve de la Proposition 4.3.12.  $\square$

*Démonstration de la Proposition 4.3.13.* Notons  $\varphi = \varphi^{F_\varepsilon, \kappa}$ . On a vu au Lemme 4.3.8 que en tout point  $x \in M$ , on a

$$\Delta_g \varphi \leq (\delta_F - F)(h_{max} - (\delta_F - F) + \varepsilon)\varphi + \varepsilon\varphi.$$

De plus, comme  $\delta_F \geq \delta_\Gamma^\infty$  et comme en tout point, on a  $F \leq \varepsilon$ , et comme la fonction  $\delta \mapsto \delta(h_{max} - \delta)$  est décroissante sur  $\left[\frac{h_{max}}{2}, +\infty\right)$ , on a en tout point

$$\Delta_g \varphi \leq (\delta_\Gamma^\infty - \varepsilon)(h_{max} - (\delta_\Gamma^\infty - \varepsilon))\varphi + \varepsilon\varphi,$$

ce qui combiné à la Proposition 4.3.12 conclut la preuve de la Proposition 4.3.13.  $\square$

*Démonstration de la Proposition 4.3.14.* Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, il suffit de montrer le lemme suivant.

**Lemme 4.3.17.** *Pour tout compact  $K \subset M$  et tout  $\varepsilon > 0$  tel que  $\delta_\Gamma^\infty - \varepsilon > \frac{h_{max}}{2}$ , il existe un compact  $K' \subset M$  tel que si  $\varphi = \varphi^{F_\varepsilon, \kappa'}$ , alors*

$$\int_K \varphi^2 dV_g \leq 2\varepsilon \int_M \varphi^2 dV_g.$$

*Démonstration.* Rappelons que nous supposons que la courbure sectionnelle de  $(M, g)$  vérifie en tout point  $-b^2 \leq \kappa_g \leq -a^2$ , et que si  $n$  est la dimension de  $M$ , les courbures moyennes des horosphères sont toutes comprises dans  $[h_{min}, h_{max}] \subset [na, nb]$ . On notera dans cette preuve  $h = h_{max}$ .

Soit  $K \subset M$  un compact et  $\varepsilon > 0$  tel que  $\delta = \delta_\Gamma^\infty - \varepsilon > \frac{h}{2}$ . Soit  $R > 0$  tel que

$$\frac{R^{h-2\delta}}{2\delta - h} \leq \frac{\varepsilon}{C},$$

où  $C = C(a, b)$  est la constante fournie par la Proposition 4.2.7, et  $D > 0$  tel que

$$\frac{2}{a} \sinh\left(\frac{a}{2}D\right) = R.$$

Posons  $K' \subset M$  le  $D$ -voisinage de  $K$ , et  $F = F_{\varepsilon, K'}$  le potentiel fourni par la Proposition 4.3.4. Notons de nouveau  $\varphi = \varphi^F$  la fonction définie sur  $\widetilde{M}$  par  $\varphi(x) = \|\nu_x^F\|$ .

Soit  $m_F$  la mesure de Gibbs (non-normalisée) associée à la densité de Patterson-Sullivan  $\nu^F$ . Soit  $D \subset M$  un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$  et  $\widetilde{K} = p_\Gamma^{-1}(K) \cap D$  la préimage de  $K$  dans  $D$ . Nous notons de même  $\widetilde{K}' = p_\Gamma^{-1}(K') \cap D$ .

En répétant la preuve de la Proposition 4.2.6, on obtient

$$\int_K \varphi^2 dV_g = \int_{SD} dm_F(v) \int_{W^{uu}(v)} e^{C_{v_+}^F(\pi w, \pi v)} \mathbf{1}_{\Gamma S \widetilde{K}}(w) dV_{W^{uu}(v)}(w). \quad (4.27)$$

Rappelons que par la Proposition 4.3.4, on a

$$m_F(K') \leq \varepsilon \|m_F\|.$$

De plus, par la Proposition 4.3.15 combinée avec la Proposition 4.2.7, il existe  $C = C(a, b, \delta) > 0$  telle que pour tout  $v \in S^g \widetilde{M}$ , on a

$$\int_{W^{uu}(v)} e^{C_{v_+}^F(\pi w, \pi v)} \mathbf{1}_{\Gamma S \widetilde{K}}(w) dV_{W^{uu}(v)}(w) \leq C.$$

On a donc

$$\int_{S \widetilde{K}'} dm_F(v) \int_{W^{uu}(v)} e^{C_{v_+}^F(\pi w, \pi v)} \mathbf{1}_{\Gamma S \widetilde{K}}(w) dV_{W^{uu}(v)}(w) \leq C m_F(K') \leq C \varepsilon \|m_F\| \quad (4.28)$$

De plus, par construction de  $K'$  et l'inégalité (4.14), on a pour tout  $v \in SD \setminus S \widetilde{K}'$  et tout  $w \in \Gamma S \widetilde{K}$ ,

$$d^{uu}(\pi v, \pi w) \geq R.$$

On a donc d'après la Proposition 4.3.15 combinée à la Proposition 4.2.7, pour tout  $v \in SD \setminus S \widetilde{K}'$ ,

$$\int_{W^{uu}(v)} e^{C_{v_+}^F(\pi w, \pi v)} \mathbf{1}_{\Gamma S \widetilde{K}}(w) dV_{W^{uu}(v)}(w) \leq C \int_R^\infty r^{h-2\delta-1} dr \leq \varepsilon.$$

On a donc

$$\int_{SD \setminus S \widetilde{K}'} dm_F(v) \int_{W^{uu}(v)} e^{C_{v_+}^F(\pi w, \pi v)} \mathbf{1}_{\Gamma S \widetilde{K}}(w) dV_{W^{uu}(v)}(w) \leq C \varepsilon \|m_F\|. \quad (4.29)$$

La combinaison de (4.27), (4.28) et (4.29) montre donc que

$$\int_K \varphi^2 dV_g \leq C \varepsilon \|m_F\|.$$

Le lemme suivant, intéressant en lui-même, conclut donc la preuve du Lemme 4.3.17.

**Lemme 4.3.18.** *Il existe  $C = C(M, g) > 0$ , indépendante de  $\varepsilon$  et  $K$ , telle que*

$$\int_M \varphi^2 dV_g \geq C \|m_F\|.$$

*Démonstration.* Notre preuve se base sur l'observation élémentaire suivante.

**Lemme 4.3.19.** *Soit  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel à support compact, majoré par  $\varepsilon > 0$ , tel que  $\delta_\Gamma(F, g) > \delta_\Gamma^\infty(g)$ . Soit  $\bar{m}_F$  la mesure de Gibbs normalisée associée à  $F$ . Alors pour tout  $c > 0$ ,*

$$\bar{m}_F(\{v \in S^g M ; F(v) \leq -c\}) \leq \frac{\delta_\Gamma(g) - \delta_\Gamma^\infty(g) + \varepsilon}{c}.$$

*Démonstration.* Notons  $K_c = \{v \in S^g M ; F(v) \leq -c\}$ . Par le principe variationnel, on a

$$\delta_\Gamma^\infty(g) \leq h_{KS}(\bar{m}_F) + \int F d\bar{m}_F \leq h_{KS}(\bar{m}_F) - c\bar{m}_F(K_c) + \varepsilon \leq \delta_\Gamma(g) - c\bar{m}_F(K_c) + \varepsilon.$$

□

Fixons donc  $c > 0$  tel que

$$\frac{\delta_\Gamma(g) - \delta_\Gamma^\infty(g) + \varepsilon}{c} \leq \frac{1}{2}. \quad (4.30)$$

On suppose  $c > \varepsilon$ . Ce  $c$  ne dépend que de  $(M, g)$  (en particulier ni de  $\varepsilon \leq 1$ , ni de  $K$ ). Notons de nouveau  $K_c = \{v \in S^g M ; F(v) \leq -c\}$ . Soit  $D \subset \widetilde{M}$  un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$  sur  $\widetilde{M}$  et  $\widetilde{K}_c = p_\Gamma^{-1}(K_c) \cap D$ . Notons que pour tout  $v \in \widetilde{M} \setminus \Gamma\widetilde{K}_c$ , on a  $|F(v)| \leq c$ . Comme de plus,

$$\left\| \nabla \left( y \mapsto C_\xi^{F-\delta}(\pi v, y) \right) \right\| = |F - \delta|$$

la fonction  $F$  est  $\varepsilon$ -Lipschitz et  $C_\xi^{F-\delta}(\pi v, \pi v) = 0$ , il existe donc  $C' > 0$ , qui ne dépend que de  $(M, g)$  telle que pour tout  $v \in S^g \widetilde{M} \setminus \Gamma\widetilde{K}_c$  et tout  $y \in \widetilde{M}$  avec  $d(\pi v, y) \leq 1$ , on a

$$e^{C_{v_+}^{F-\delta}(\pi v, y)} \geq C'.$$

Combiné avec la (preuve de la) Proposition 4.2.7, on a donc pour tout  $v \in S^g \widetilde{M} \setminus \Gamma\widetilde{K}_c$ ,

$$\int_{W^{uu(v)}} e^{C_{v_+}^{F-\delta}(\pi v, \pi w)} dV_{W^{uu(v)}}(w) \geq C'',$$

où  $C'' > 0$  ne dépend que de  $(M, g)$ . Donc finalement, par la Proposition 4.2.6, on a

$$\int_M \varphi^2 dV_g \geq C \int_{SD \setminus S\widetilde{K}_c} dm_F(v) \int_{W^{uu(v)}} e^{C_{v_+}^{F-\delta}(\pi v, \pi w)} dV_{W^{uu(v)}}(w) \geq C'' m_F(M \setminus K_c) \geq \frac{C''}{2} \|m_F\|$$

d'après (4.30) et le Lemme 4.3.19. Cela conclut donc la preuve du Lemme 4.3.18, qui implique le Lemme 4.3.17 et donc la Proposition 4.3.14. □





## Chapitre 5

# Fonctions de comptage en courbure négative

Dans l'étude des systèmes dynamiques, la compréhension des orbites fermées (i.e. périodiques) est une composante cruciale. Pour les flots géodésique sur une variété riemannienne  $(M, g)$  compacte à courbure sectionnelle négative, de nombreux résultats se sont donc intéressés au cardinal de l'ensemble

$$\mathcal{P}(R) := \{p \text{ géodésique fermée, } \ell_g(p) \leq R\}.$$

Lorsque  $(M, g)$  est non-compacte, même à courbure sectionnelle négative, l'ensemble  $\mathcal{P}(R)$  n'a pas de raison d'être fini, nous verrons comment traiter ce problème.

On l'a vu aux chapitres précédents, la compréhension du flot géodésique sur la variété  $(M, g) = (\tilde{M}, g)/\Gamma$  à courbure négative passe par l'étude de l'orbite  $\Gamma x$  par l'action de  $\Gamma = \pi_1(M)$  des points  $x \in \tilde{M}$ . Nous présenterons donc également dans ce chapitre les résultats que nous avons obtenus sur les fonctions de comptage définies pour tout  $x, y \in \tilde{M}$  par

$$N_\Gamma(x, y, R) = \#\{\gamma \in \Gamma \mid d^g(x, \gamma y) \leq R\}.$$

La preuve de énoncés que nous présentons dans ce chapitre utilise de façon cruciale le fait que le flot géodésique est *mélangeant* pour toute mesure de Gibbs (en particulier pour la mesure de Bowen-Margulis). Cette hypothèse est satisfaite dès lors que le *spectre des longueurs sur  $(M, g)$  est non-arithmétique*, i.e. lorsque l'ensemble des longueurs des géodésiques fermées sur  $(M, g)$  engendre un sous-groupe dense dans  $\mathbb{R}$ . Ce dernier point est satisfait dans de nombreux cas, notamment pour les variétés localement symétriques  $(M, g) = \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n/\Gamma$  lorsque  $\Gamma$  n'est pas élémentaire, pour toutes les surfaces non-élémentaires, et en général dès lors que  $(M, g) = (\tilde{M}, g)/\Gamma$  où  $\Gamma$  est non-élémentaire et contient au moins un élément parabolique. Il est conjecturé que *toute variété non-élémentaire* à courbure sectionnelle majorée par  $-a^2 < 0$  possède un spectre des longueurs non-arithmétique. Nous renvoyons à [Dal00] pour une présentation de cette question.

Dans ce chapitre, nous supposons toujours sans le rappeler que  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  a un spectre des longueurs non-arithmétique. En particulier le groupe  $\Gamma$  n'est pas élémentaire.

## 5.1 Comptage orbital et mesures de Bowen-Margulis

Cette section est due à l'étude des fonctions de comptage orbital  $N_\Gamma(x, y, R)$ , et plus précisément à l'obtention d'équivalents lorsque  $R \rightarrow +\infty$  de ces fonctions. Nous verrons que les résultats dépendent de façon cruciale de la finitude de la mesure de Bowen-Margulis, et lorsqu'elle est infinie de son ergodicité ou non.

Le théorème suivant, qui fonde notre étude, est dû à Margulis [Mar69] pour les variétés compactes, et à Roblin [Rob03] en toute généralité.

**Théorème 5.1.1** (Margulis, Roblin). *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété riemannienne complète avec  $K_g \leq -a^2 < 0$  et  $\Gamma = \pi_1(M)$ . Soit  $\nu^\Gamma = (\nu_x^\Gamma)_{x \in \widetilde{M}}$  une densité de Patterson-Sullivan sur  $\partial\widetilde{M}$  pour  $\Gamma$ , et  $m_{BM}$  la mesure de Bowen-Margulis sur  $S^gM$  associée à  $\nu^\Gamma$  (cf Section 1.2.3).*

1. Si  $\|m_{BM}\| < +\infty$ , alors pour tous  $x, y \in \widetilde{M}$ , on a lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,

$$N_\Gamma(x, y, R) \sim \frac{\|\nu_x^\Gamma\| \|\nu_y^\Gamma\|}{\|m_{BM}\|} e^{\delta_\Gamma(R)}.$$

2. Si  $\|m_{BM}\| = +\infty$ , alors pour tous  $x, y \in \widetilde{M}$ , on a lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,

$$N_\Gamma(x, y, R) = o\left(e^{\delta_\Gamma(R)}\right).$$

Notons qu'une densité de Patterson-Sullivan  $\nu^\Gamma$  et sa mesure de Bowen-Margulis associée sont normalisées par le choix d'une origine  $o \in \widetilde{M}$ . En revanche, la quantité  $\frac{\|\nu_x^\Gamma\| \|\nu_y^\Gamma\|}{\|m_{BM}\|}$  ne dépend pas du choix de  $o$ .

### 5.1.1 Comptage orbital et fonctions propres du Laplacien

La combinaison du Théorème 5.1.1 et des résultats présentés au Chapitre 3 fournit le résultat suivant, qui (à ma connaissance) est resté inaperçu jusqu'ici. Il généralise à tous les espaces symétriques et de façon optimale un résultat célèbre obtenu par Lax et Phillips ([LP82]) pour les variétés *hyperboliques réelles géométriquement finies*. Il sera publié dans [Tap20a].

**Théorème 5.1.2** (Lax-Phillips, T. [Tap20a]). *Soit  $X = \mathbb{H}_\mathbb{K}^2$  un espace symétrique à courbure sectionnelle strictement négative, et  $(M, g) = X/\Gamma$  une variété localement symétrique de revêtement universel  $X$ . Supposons que le bas du spectre du Laplacien  $\lambda_0(M, g)$  sur  $(M, g)$  est associé à une fonction propre  $\varphi_0 \in \mathcal{H}^2(M)$ , normalisée par  $\|\varphi_0\|_{L^2(M, g)} = 1$ . Notons encore  $\varphi_0$  son relevé à  $X$ .*

Alors il existe une constante  $C = C(X, \lambda_0(M, g)) \geq 0$ , qui dépend de  $X$  et de  $\lambda_0(M, g)$  mais pas de  $\Gamma$ , telle que pour tous  $x, y \in \widetilde{M}$  on ait lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,

$$N_\Gamma(x, y, R) \sim C \varphi_0(x) \varphi_0(y) e^{\delta_\Gamma(g)R}.$$

*Démonstration.* Il découle du Théorème 4.2.9 que si le bas du spectre du Laplacien  $\lambda_0(M, g)$  sur  $(M, g) = X/\Gamma$  est associé à une fonction propre  $\varphi_0 \in \mathcal{H}^2(M)$ , alors en notant  $h = h_{vol}(X)$  et  $\delta_\Gamma = \delta_\Gamma(g)$ , on a :

- $\delta_\Gamma > \frac{h}{2}$  ;
- $\lambda_0(M, g) = \delta_\Gamma(h - \delta_\Gamma)$  ;
- la mesure de Bowen-Margulis est finie, en particulier la densité de Patterson-Sullivan  $\nu_\Gamma$  est unique à normalisation près ;
- en notant  $\widetilde{D} \subset \widetilde{M}$  un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$ , on a pour tout  $x \in \widetilde{M}$ ,

$$\varphi_0(x) = \frac{\|\nu_x^\Gamma\|}{\sqrt{\int_D \|\nu_x^\Gamma\|^2 dV_g(x)}}. \quad (5.1)$$

De plus, on a vu à la Proposition 4.2.6 que

$$\int_D \|\mu_x\|^2 dV_g(x) = \int_{S^g D} \left( \int_{W^{uu}(v)} e^{\delta_\Gamma \beta_v + (\pi w, \pi v)} dV_{W^{uu}(v)}(w) \right) dm_{BM}(v).$$

Par transitivité de l'action du groupe des isométries de  $X$  sur  $S^g X$ , la quantité

$$C_{X, \delta_\Gamma} = \int_{W^{uu}(v)} e^{\delta_\Gamma \beta_v + (\pi w, \pi v)} dV_{W^{uu}(v)}(w)$$

ne dépend pas du vecteur  $v$ . On a donc

$$\int_D \|\nu_x^\Gamma\|^2 dV_g(x) = C_{X, \delta_\Gamma} \|m_{BM}\|,$$

donc l'équation (5.1) devient

$$\varphi_0(x) = \frac{\|\nu_x^\Gamma\|}{\sqrt{C_{X, \delta_\Gamma} \|m_{BM}\|}},$$

donc combinée avec le point (1) du Théorème 5.1.1, on a pour tous  $x, y \in \widetilde{M}$  et lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,

$$N_\Gamma(x, y, R) \sim (C_{X, \delta_\Gamma})^{-1} \varphi_0(x) \varphi_0(y) e^{\delta_\Gamma R},$$

ce qui conclut la preuve du Théorème 5.1.2 puisque  $\lambda_0(M, g) = \delta_\Gamma(h - \delta_\Gamma)$ .  $\square$

*Remarque 5.1.1.* Contrairement aux résultats du Chapitre 4, il n'est pas clair que le théorème précédent s'étende aux variétés asymptotiquement harmoniques. En effet, l'action de leur groupe d'isométrie sur le fibré unitaire tangent n'est en général pas transitive, donc la quantité  $C_{X, \delta_\Gamma}$  définie ci-dessus dépend a priori du vecteur  $v$ .

### 5.1.2 Comptage orbital en mesure infinie : transitions de phase pour les groupes de Schottky

Lorsque les mesures de Bowen-Margulis sont infinies, pour remplacer le point (2) du Théorème 5.1.1 par un équivalent exact, il est nécessaire d'avoir des informations assez précises sur le comportement à l'infini de la variété. A notre connaissance, il n'existe que deux familles d'exemples où de tels équivalents ont été obtenus, que nous présentons dans cette section.

Voici un théorème dû à Pollicott et Sharp [PS94] pour les revêtements abéliens de variétés convexes-compactes. Notons que par le Corollaire 2.3.12, ces revêtements ont forcément une mesure de Bowen-Margulis infinie.

**Théorème 5.1.3** (Pollicott-Sharp [PS94]). *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété riemannienne complète à courbure négative pincée convexe-cocompacte. Soit  $\Gamma' < \Gamma$  un sous-groupe normal tel que  $\Gamma/\Gamma' \simeq \mathbb{Z}^k$ . Alors pour tous  $x, y \in \widetilde{M}$ , il existe une constante  $C_{x,y} > 0$  telle que lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,*

$$N_{\Gamma}(x, y, R) \sim C_{x,y} \frac{e^{\delta_{\Gamma'} R}}{R^{k/2}}.$$

Notons que par un théorème de Guivarc'h ([Gui84]), un groupe  $\Gamma'$  vérifiant les hypothèses ci-dessus est divergent lorsque  $k \geq 3$  et convergent pour  $k \in \{1, 2\}$ . Le théorème de Pollicott et Sharp ne montre aucune différence liée à la divergence ou non du groupe. Nous allons maintenant voir une autre construction, issue de nos travaux avec M. Peigné et P. Vidotto (dont la thèse a été co-encadré par M. Peigné et moi de 2013 à 2016). Cette divergence va jouer un rôle crucial, parfois appelé *transition de phase*. La présentation que nous faisons maintenant est proche de l'article de survol [Pei19].

Soit  $(\widetilde{M}, g)$  une variété simplement connexe à courbure négative pincée. Nous avons vu au Paragraphe 2.3.1 la définition de groupes  $G, H < \text{Isom}(X)$  en position Schottky.

**Définition 5.1.1.** *Un groupe de Schottky est un groupe  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  engendré par des groupes élémentaires  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$  qui sont en position Schottky (voir Section 2.3.1 pour une définition). On a donc*

$$\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2 * \dots * \Gamma_k.$$

Le plan  $\mathbb{R}^2 = \{(\theta, t) \in \mathbb{R}^2\}$  muni de la métrique riemannienne  $g_H = e^{-2t}d\theta^2 + dt^2$  est un modèle du plan hyperbolique réel  $\mathbb{H}^2$ . Voici un modèle de perturbation de cette métrique, à courbure négative pincée, qui nous permettra d'obtenir des exemples explicites de surfaces dont la mesure de Bowen-Margulis est infinie, pour lesquelles nous saurons expliciter les fonctions de comptage. Cet exemple a été étudié pour la première fois dans la thèse de P. Vidotto.

**Proposition 5.1.4** (cf [Vid19], Section 2.2.3). *Soit  $\alpha \in ]1, 2]$ . Il existe une fonction  $T_{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $A > 0$ , telle que :*

- pour  $t \leq 0$ , on a  $T_\alpha(t) = e^{-2t}$  ;
- pour  $t \geq A$ , on a  $T_\alpha(t) = e^{-2t}t^{2\alpha}$  ;
- il existe  $b > a > 0$  tel que la courbure de la métrique  $g_\alpha = T(t)d\theta^2 + dt^2$  vérifie en tout point  $-b^2 \leq K_{g_T} \leq -a^2$ .

Soit maintenant  $p \geq 1$ ,  $q \geq 1$  tels que  $p + q \geq 3$  et

$$\Gamma = H_1 * \dots * H_p * P_1 * \dots * P_q$$

un groupe de Schottky, où pour  $i \in \{1, \dots, p\}$  le groupe  $H_i = \langle h_i \rangle$  est élémentaire hyperbolique et pour  $i \in \{1, \dots, q\}$  le groupe  $P_i = \langle p_i \rangle$  est élémentaire parabolique.

La surface  $M_\Gamma = \mathbb{H}^2/\Gamma$  a un nombre fini de cusps  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_q$  chacun associé à l'un des groupes paraboliques  $P_i$ . De plus, il existe une constante  $\kappa > 0$  telle que chacun de ces cusps est isométrique à  $(\mathbb{R} \times [\kappa, +\infty[)/\mathbb{Z}$ ,  $g = e^{-2t}d\theta^2 + dt^2$  où  $\mathbb{Z}$  agit sur  $\mathbb{R} \times [\kappa, +\infty[$  par  $n.(\theta, t) = (\theta + n, t)$ .

Choisissons  $B > \kappa$ , et sur chaque cusp  $\mathcal{C}_i$ , remplaçons sur  $(\mathbb{R} \times [B, +\infty[)/\mathbb{Z} \subset \mathcal{C}_i$  la métrique  $g_H$  par  $e^{-2B}T_\alpha(t-B)d\theta^2 + dt^2$ . Nous obtenons donc, sur  $M_\Gamma$ , une métrique que nous noterons  $g_{\alpha,B}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  dont les courbures sectionnelles sont encore négatives pincées, constamment  $-1$  en dehors des cusps. Elle se relève en une métrique, que nous notons toujours  $g_{\alpha,B}$  sur  $\tilde{M}$ . La première observation est la suivante.

**Lemme 5.1.5** (cf [Vid19], Section 2.2.3). *Pour tout  $i \in \{1, \dots, q\}$ , pour tout  $\alpha \in ]1, 2]$  et pour tout  $B > 0$ , le groupe parabolique  $P_i$  est convergent pour la métrique  $g_{\alpha,B}$ .*

Ce lemme permet de démontrer le théorème suivant, en combinant une construction de Dal'bo, Otal et Peigné ([DOP00], Théorème C) et l'étude de Peigné présentée dans [Pei11] (Main Theorem).

**Théorème 5.1.6** (cf [Vid19], Section 2.2.4 et 2.2.5). *Soit  $\alpha \in ]1, 2]$  et  $\Gamma$ ,  $\kappa > 0$  vérifiant les hypothèses précédentes. Quitte à remplacer  $\Gamma$  par un sous-groupe d'indice fini, il existe  $B^* > \kappa$  tel que le groupe  $\Gamma$  vérifie les propriétés suivantes.*

1. Pour  $B > B^*$ , on a  $\delta_\Gamma(g_{\alpha,B}) > \frac{1}{2}$ , le groupe  $\Gamma$  est divergent et sa mesure de Bowen-Margulis est de masse finie.
2. Pour  $B = B^*$ , on a  $\delta_\Gamma(g_{\alpha,B}) = \frac{1}{2}$ , le groupe  $\Gamma$  est divergent et sa mesure de Bowen-Margulis est de masse infinie.
3. Pour tout  $B \in ]\kappa, B^*[$ , on a  $\delta_\Gamma(g_{\alpha,B}) = \frac{1}{2}$ , et le groupe  $\Gamma$  est convergent. En particulier ses mesures de Bowen-Margulis sont toutes de masse infinie.

La thèse de P. Vidotto dont les résultats sont publiés dans [Vid19] était centrée sur l'étude du cas (2), où le groupe  $\Gamma$  est divergent, donc la mesure de Bowen-Margulis unique et ergodique, mais de masse infinie. Une famille d'exemples analogues a été étudiée dans [DPPS17].

Nous avons généralisé ensuite cette étude dans [PTV19] aux cas où  $\Gamma$  est convergent. En ce qui concerne les fonctions orbitales, nous synthétisons les résultats dans le théorème suivant.

**Théorème 5.1.7** (cf [Vid19], Theo. C, [PTV19], Theo. 1.2, [Pei19], Theo. 1.1). *Soit  $M = (\widetilde{M}, g_{\alpha,B})/\Gamma$  une surface à courbure négative pincée, où  $\Gamma$  est un groupe de Schottky vérifiant les hypothèses précédentes, et  $g_{\alpha,B}$  est la métrique riemannienne dont la courbure vaut  $-1$  hors des cusps et construite comme ci-dessus.*

**Rob03** *Si  $(\Gamma, g)$  est de mesure de Bowen-Margulis finie, alors pour tout  $x, y \in \widetilde{M}$ , il existe  $C_{xy} > 0$  telle que lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,*

$$N_{\Gamma}(x, y, R) \sim C_{xy} e^{\delta_{\Gamma} R}.$$

**Vid19** *Si  $(\Gamma, g)$  est divergent et de mesure de Bowen-Margulis infinie, alors pour tout  $x, y \in \widetilde{M}$ , il existe  $C_{xy} > 0$  telle que lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,*

$$N_{\Gamma}(x, y, R) \sim C_{xy} \frac{e^{\delta_{\Gamma} R}}{R^{2-\alpha}}.$$

**PTV19** *Si  $(\Gamma, g)$  est convergent (donc de mesure de Bowen-Margulis infinie), alors pour tout  $x, y \in \widetilde{M}$ , il existe  $C_{xy} > 0$  telle que lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,*

$$N_{\Gamma}(x, y, R) \sim C_{xy} \frac{e^{\delta_{\Gamma} R}}{R^{\alpha}}.$$

La preuve repose sur un codage symbolique de la dynamique (par un décalage de Markov sur un alphabet dénombrable), rendu possible ici grâce à la structure de produit Schottky du groupe, et une étude fine de l'opérateur de transfert associé. Cette étude repose sur la combinaison des arguments développés par Gouëzel dans [Gou11] pour les propriétés de renouvellement de certaines suites d'opérateurs en présence d'une mesure invariante ergodique infinie, et sur les propriétés de l'opérateur de transfert associé au flot géodésique lorsque  $\Gamma$  est un groupe de Schottky qui ont été étudiées dans de nombreux travaux de Peigné et ses collaborateurs, voir [Pei11], [DPPS09] et les références qui y sont présentées.

Les constantes  $C_{xy}$  qui apparaissent dans le Théorème 5.1.7, souvent appelées «constantes de Margulis» en mesure finie, peuvent être "explicitées" : en mesure finie, nous avons vu qu'elles s'expriment à partir des mesures de Patterson-Sullivan, tandis qu'en mesure infinie il ressort de [Vid19] et [PTV19] qu'elles peuvent être exprimées à partir d'itérés de l'opérateur de transfert associé au groupe de Schottky. Les constantes de Margulis en mesure infinie n'ont, à notre connaissance, pas encore été étudiées.

## 5.2 Comptage des géodésiques fermées

Nous nous tournons maintenant vers l'étude du nombre de géodésiques fermées de longueur au plus  $R$ , pondérées ou non par un potentiel. Nous présentons dans ce chapitre les résultats connus sur ce sujet par les travaux de Roblin [Rob03], Chap. 5 et de Paulin, Pollicott et Schapira [PPS15], Chap. 9, puis deux nouveaux résultats, l'un obtenu par P. Vidotto dans sa thèse ([Vid19], Théo. C) dans le cas où la mesure de Bowen-Margulis est infinie et ergodique, et l'autre obtenu avec B. Schapira dans [ST19] lorsque la mesure de Bowen-Margulis est finie.

Pour plus de lisibilité, nous avons séparé les énoncés dans cette section selon que l'on considère des orbites pondérées ou non. Les techniques de preuve sont similaires dans les deux cas, avec les complications que l'on peut attendre lorsque l'on introduit une pondération.

### 5.2.1 Comptage non-pondéré des géodésiques fermées

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle majorée par  $-a^2 < 0$ . Pour tout  $R > 0$ , nous notons

$$\mathcal{P}'(R) = \{p \text{ géodésique fermée primitive ; } \ell^g(p) \leq R\} \subset S^g M.$$

Lorsque  $(M, g)$  est compacte, convexe-cocompacte ou géométriquement finie, l'ensemble  $\mathcal{P}'(R)$  est fini pour tout  $R > 0$ . Ce n'est pas le cas en général : si un revêtement galoisien de groupe de revêtement infini au dessus d'une variété à courbure négative contient encore au moins une géodésique de longueur  $R$ , il en contient automatiquement une infinité. Les surfaces hyperboliques réalisées en recollant une infinité de pantalons dont les longueurs des bords sont bornées fournissent aussi des exemples de topologie très variée où  $\mathcal{P}'(R)$  est infini dès que  $R$  est assez grand.

Pour pallier à ce problème, pour tout  $W \subset S^g M$  compact, nous posons pour tout  $R > 0$ ,

$$\mathcal{P}'_W(R) = \{p \text{ géodésique fermée primitive ; } p \cap W \neq \emptyset, \ell^g(p) \leq R\} \subset S^g M.$$

En courbure sectionnelle négative majorée, cet ensemble  $\mathcal{P}'_W(R)$  est fini, non vide si et seulement si l'intérieur de  $W$  intersecte l'ensemble non-errant et  $R$  est assez grand.

Les théorèmes suivants ont été obtenus par Roblin au Chapitre 5 de [Rob03]. Ils étaient déjà connus, lorsque  $(M, g)$  est convexe-cocompacte (donc de mesure de Bowen-Margulis finie) par les travaux de Bowen [Bow72a] et Margulis [Mar69].

**Théorème 5.2.1** (Bowen, Margulis, Roblin). *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle majorée par  $-a^2 < 0$ . Soit  $\delta_\Gamma = \delta_\Gamma(g)$ .*



Si la mesure de Bowen-Margulis sur  $S^g M$  est de masse finie, alors on a la convergence faible (i.e. dans le dual des fonctions continues à support compact sur  $S^g M$ ) suivante :

$$\delta_\Gamma R e^{-\delta_\Gamma R} \sum_{p \in \mathcal{P}'(R)} \frac{d\ell^g(p)}{\ell^g(p)} \rightharpoonup \frac{m_{BM}}{\|m_{BM}\|}$$

Si la mesure de Bowen-Margulis sur  $S^g M$  est de masse infinie, alors on a la convergence faible suivante :

$$\delta_\Gamma R e^{-\delta_\Gamma R} \sum_{p \in \mathcal{P}'(R)} \frac{d\ell^g(p)}{\ell^g(p)} \rightharpoonup 0.$$

Lorsque l'ensemble non-errant est compact, la convergence faible est équivalente à la convergence étroite, et fournit automatiquement le théorème ci-dessus. Dès lors que l'ensemble non-errant n'est pas compact, cela demande plus de travail. Lorsque la variété est géométriquement finie, les  $\mathcal{P}'(R)$  sont tous fini. Le résultat suivant a été obtenu par Bowen [Bow72a] et Margulis [Mar69] et par Roblin pour les variétés géométriquement finies.

**Théorème 5.2.2** (Bowen [Bow72a], Margulis [Mar69], Roblin [Rob03], Chap. 5). *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle majorée par  $-a^2 < 0$ . Soit  $\delta_\Gamma = \delta_\Gamma(g)$ . Supposons que  $(M, g)$  est géométriquement finie et de mesure de Bowen-Margulis finie. Alors on a la convergence étroite (i.e. dans le dual des fonctions continues bornées sur  $S^g M$ ) suivante :*

$$\delta_\Gamma R e^{-\delta_\Gamma R} \sum_{p \in \mathcal{P}'(R)} \frac{d\ell^g(p)}{\ell^g(p)} \rightharpoonup \frac{m_{BM}}{\|m_{BM}\|},$$

où  $\frac{d\ell^g(p)}{\ell^g(p)}$  est la mesure de Lebesgue normalisée le long de l'orbite  $p$ . En particulier, on a lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,

$$\#\mathcal{P}'(R) \sim \frac{e^{\delta_\Gamma R}}{\delta_\Gamma R}$$

L'estimée de comptage des géodésiques fermées avait également été obtenu par Parry et Pollicott [PP90] par une méthode différente. Le théorème précédent est trivialement faux dès qu'un des ensemble  $\mathcal{P}'(R)$  est infini (donc tous pour  $R$  assez grand). Avec B. Schapira, nous avons étudié cette équidistribution en mesure finie, pour les ensemble  $\mathcal{P}'_W(R)$  qui eux sont tous finis, et obtenu le résultat suivant.

**Théorème 5.2.3** (Schapira-T. 2019, [ST19]). *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle majorée par  $-a^2 < 0$ . Soit  $\delta_\Gamma = \delta_\Gamma(g)$ . Supposons que  $(M, g)$  est de mesure de Bowen-Margulis finie. Alors*

pour tout compact  $W \subset S^g M$  dont l'intérieur intersecte l'ensemble non-errant  $\Omega^g$ , on a la convergence étroite suivante :

$$\delta_\Gamma R e^{-\delta_\Gamma R} \sum_{p \in \mathcal{P}'_W(R)} \frac{d\ell^g(p)}{\ell^g(p)} \rightarrow \frac{m_{BM}}{\|m_{BM}\|}.$$

En particulier, on a lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,

$$\#\mathcal{P}'_W(R) \sim \frac{e^{\delta_\Gamma R}}{\delta_\Gamma R}$$

Notons que ce théorème implique le précédent : sur une variété géométriquement finie, il existe un compact qui rencontre toutes les géodésiques fermées. La preuve de ce théorème repose de façon cruciale sur l'utilisation des  $\Gamma_W$  introduits précédemment au Chapitre 2. Nous renvoyons à [ST19] pour une preuve détaillée. Notons que les Théorèmes 5.2.2 et 5.2.3 sont en fait valables lorsque  $M = (X, d)/\Gamma$ , où  $(X, d)$  est un espace métrique CAT(-1) et  $\Gamma$  agit proprement discontinûment par isométrie sur  $X$ . Pour présenter ces énoncés, il nous faudrait détailler ce qu'est le fibré unitaire tangent d'un espace CAT(-1) et son flot géodésique : nous ne le ferons pas dans ce mémoire.

On peut se poser la question de si, en mesure infinie, on peut obtenir une convergence étroite à la place de la convergence faible dans l'énoncé (2) du Théorème 5.2.1. Cela impliquerait que, en mesure infinie, on ait l'estimée de comptage (lorsque ces ensembles sont finis, quitte à prendre l'estimée analogue pour un  $\mathcal{P}'_W(R)$  s'ils sont infinis)

$$\#\mathcal{P}'(R) = o\left(\frac{e^{\delta_\Gamma R}}{\delta_\Gamma R}\right).$$

Le théorème suivant, montré dans la thèse de P. Vidotto ([Vid19], Theo. B), montre de façon inattendue que ce n'est pas le cas.

**Théorème 5.2.4** (Vidotto). *Soit  $\alpha \in ]1, 2[$  et  $M = (\widetilde{M}, g_{\alpha, B})/\Gamma$  une surface à courbure négative pincée construite comme décrit au Paragraphe 5.1.2 ci-dessus, telle que  $(\Gamma, g_{\alpha, B})$  est divergent et  $(M, g)$  de mesure de Bowen-Margulis infinie. Alors*

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \#\mathcal{P}'(R) \times \left(\frac{e^{\delta_\Gamma R}}{\delta_\Gamma R}\right)^{-1} \geq \alpha - 1 > 0.$$

Les méthodes développées dans [Vid19] ne permettent pour le moment pas de dire si la minoration présentée dans ce théorème est, ou non, une égalité.

## 5.2.2 Comptage pondéré des géodésiques fermées

Soit  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel Hölder, comme introduit à la 1.5.2. Dans de nombreux problèmes, il est intéressant de compter les géodésiques fermées, pondérées par la moyenne du potentiel le long de la géodésique. Les résultats obtenus sont analogues à ceux présentés ci-dessus.

**Théorème 5.2.5** (Paulin-Pollicott-Schapira [PPS15], Theo. 9.11). *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle majorée par  $-a^2 < 0$  et  $F : S^M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel hôlder. Soit  $\delta_\Gamma(F, g)$  sa pression, que nous supposons (quitte à ajouter une constante à  $F$ ) strictement positive.*

*Si la mesure de Gibbs sur  $S^g M$  associée à  $F$  est de masse finie, alors on a la convergence faible suivante :*

$$\delta_\Gamma(F, g) R e^{-\delta_\Gamma(F, g)R} \sum_{p \in \mathcal{P}'(R)} e^{\int_p F} \frac{d\ell^g(p)}{\ell^g(p)} \rightharpoonup \frac{m_F}{\|m_F\|}$$

où  $\frac{d\ell^g(p)}{\ell^g(p)}$  est la mesure de Lebesgue normalisée le long de l'orbite  $p$  et  $m_F$  la mesure de Gibbs associée à  $F$ .

*Si la mesure de Gibbs sur  $S^g M$  associée à  $F$  est de masse infinie, alors on a la convergence faible suivante :*

$$\delta_\Gamma R e^{-\delta_\Gamma R} \sum_{p \in \mathcal{P}'(R)} e^{\int_p F} \frac{d\ell^g(p)}{\ell^g(p)} \rightarrow 0.$$

Seul le cas où la mesure de Gibbs est finie est étudié dans [PPS15, Theo. 9.11], mais la même preuve fournit le résultat que nous citons en mesure infinie.

Là encore, la convergence faible est insuffisante pour obtenir un estimée de comptage, mais lorsque  $(M, g)$  est géométriquement finie elle peut être améliorée en une convergence étroite.

**Théorème 5.2.6** (Paulin-Pollicott-Schapira [PPS15] Theo. 9.14). *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle majorée par  $-a^2 < 0$ . Soit  $F : S^M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel hôlder et  $\delta_\Gamma(F, g)$  sa pression, que nous supposons (quitte à ajouter une constante à  $F$ ) strictement positive. Supposons que  $(M, g)$  a une mesure de Gibbs finie associée à  $F$ . Supposons que  $(M, g)$  est géométriquement finie. Alors on a la convergence étroite (i.e. dans le dual des fonctions continues bornées sur  $S^g M$ ) suivante :*

$$\delta_\Gamma(F, g) R e^{-\delta_\Gamma(F, g)R} \sum_{p \in \mathcal{P}'(R)} e^{\int_p F} \frac{d\ell^g(p)}{\ell^g(p)} \rightharpoonup \frac{m_{BM}}{\|m_{BM}\|},$$

où  $\frac{d\ell^g(p)}{\ell^g(p)}$  est la mesure de Lebesgue normalisée le long de l'orbite  $p$ . En particulier, on a lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,

$$\sum_{p \in \mathcal{P}'(R)} e^{\int_p F} \sim \frac{e^{\delta_\Gamma(F, g)R}}{\delta_\Gamma(F, g)R}$$

Le théorème précédent est de nouveau faux dès qu'un des ensemble  $\mathcal{P}'(R)$  est infini. Avec B. Schapira, nous avons donc également établi le résultat suivant.

**Théorème 5.2.7** (Schapira-T. 2019, [ST19]). *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle majorée par  $-a^2 < 0$ . Soit  $F : S^M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel hôlder et  $\delta_\Gamma(F, g)$  sa pression, que nous supposons (quitte à ajouter une constante à  $F$ ) strictement positive. Supposons que  $(M, g)$  a une mesure de Gibbs finie associée à  $F$ . Alors pour tout compact  $W \subset S^g M$  dont l'intérieur intersecte l'ensemble non-errant  $\Omega^g$ , on a la convergence étroite suivante :*

$$\delta_\Gamma(F, g) R e^{-\delta_\Gamma(F, g) R} \sum_{p \in \mathcal{P}'_W(R)} e^{\int_p F} \frac{d\ell^g(p)}{\ell^g(p)} \rightarrow \frac{m_{BM}}{\|m_{BM}\|},$$

En particulier, on a lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,

$$\sum_{p \in \mathcal{P}'_W(R)} e^{\int_p F} \sim \frac{e^{\delta_\Gamma(F, g) R}}{\delta_\Gamma(F, g) R}$$



## Chapitre 6

# Revêtements, moyennabilité, entropie et bas du spectre

Ce chapitre est consacré à l'étude des revêtements riemanniens, galoisiens ou non, au travers des deux quantités que nous avons étudiées dans les chapitres précédents : le bas du spectre du Laplacien et l'entropie topologique du flot géodésique. L'idée principale des résultats que nous montrons est la suivante : si  $(M, g)$  est «assez gentille» et a un *trou spectral*  $\lambda_0(M, g) < \lambda_0^{ess}(M, g)$ , alors pour tout revêtement riemannien  $p : (M', g) \rightarrow (M, g)$ , on a  $\lambda_0(M', g) = \lambda_0(M, g)$  si et seulement si le revêtement est moyennable. De même, si  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  est «assez gentille» et a un *trou critique*  $\delta_\Gamma(g) > \delta_\Gamma^\infty(g)$ , alors pour tout sous-groupe  $\Gamma' < \Gamma$ , on a  $\delta_{\Gamma'}(g) = \delta_\Gamma(g)$  si et seulement si le revêtement est moyennable.

Comme nous le verrons à l'aide d'exemples très simples, les hypothèses de trou spectral ou de trou critique sont nécessaires pour obtenir de tels résultats.

La première section de ce chapitre est consacrée aux définitions et à la présentation des résultats antérieurs (ou concomitants) à nos travaux. La seconde section est consacrée à l'étude du bas du spectre lors de revêtements pour des variétés riemanniennes quelconques, pas forcément à courbure négative. Cette étude s'appuie sur les articles [RT13] et [Tap20b] (non-publié à ce jour). La dernière section est consacrée à l'étude de l'entropie topologique lors de revêtements pour des variétés à courbure négative que nous avons effectuée dans [CDST18].

### 6.1 Moyennabilité : définitions et exemples

#### 6.1.1 Groupes et actions moyennables

La définition la plus célèbre de moyennabilité est la suivante, dont nous n'aurons besoin que pour les groupes discrets. Soit  $G$  un ensemble dénombrable. Pour tout

$p \in [1, +\infty[$ , nous notons  $\ell^p(G)$  l'ensemble des fonctions  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\sum_{g \in G} u(g)^p < +\infty.$$

Nous désignons par  $\ell^\infty(G)$  l'ensemble des fonctions réelles bornées sur  $G$ .

**Définition 6.1.1.** *Un groupe discret  $G$  est dit **moyennable** s'il existe une **moyenne** sur  $G$ , c'est à dire une forme linéaire  $M : \ell^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $m(1) = 1$ .*

Si  $A$  et  $B$  sont deux parties d'un même ensemble  $C$ , nous notons  $A \Delta B$  la **différence symétrique**

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Si  $G$  est un groupe,  $A \subset G$  et  $S \subset G$ , nous notons  $SA = \{sa ; s \in S, a \in A\}$ .

Le théorème suivant est dû à Følner.

**Théorème 6.1.1** (Følner, [F55]). *Soit  $G$  un groupe discret. Les affirmations suivantes sont équivalentes.*

1.  $G$  est moyennable.
2. Pour tout  $S_0 \subset G$  fini et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un ensemble fini  $A = A_{S_0, \varepsilon} \subset G$  tel que

$$\#(A \Delta S_0 A) \leq \varepsilon \#A.$$

3. Pour tout  $S_0 \subset G$  fini et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $u = u_{S_0, \varepsilon} \in \ell^2(G)$  telle que

$$\sup_{s \in S_0} \|u - u \circ s\|_{\ell^2(G)} \leq \varepsilon \|u\|_{\ell^2(G)}.$$

Une preuve de l'équivalence entre (1) et (2) est rappelée dans [Bro81a]. La preuve de l'équivalence entre (2) et (3) est laissée au lecteur. On en déduit immédiatement que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , le groupe abélien  $\mathbb{Z}^n$  est moyennable tandis que le groupe libre  $\mathbb{F}_n$  ne l'est pas.

Nous utiliserons la définition plus générale suivante.

**Définition 6.1.2.** *Soit  $G$  un groupe agissant sur un ensemble discret  $Y$ . On dit que l'action de  $G$  est **moyennable** si l'une des propriétés (équivalentes) suivante est vérifiée :*

1. Il existe une moyenne  $G$ -invariante sur  $Y$ , i.e. une forme linéaire  $m : \ell^\infty(Y) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $u \in \ell^\infty(Y)$  et pour tout  $g \in G$ ,

$$m(u) = m(x \mapsto u(gx)).$$

2. Pour tout  $S_0 \subset G$  fini et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un ensemble fini  $A = A_{S_0, \varepsilon} \subset Y$  tel que

$$\#(A \Delta S_0 A) \leq \varepsilon \#A.$$

3. Pour tout  $S_0 \subset G$  fini et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $u = u_{S_0, \varepsilon} \in \ell^2(Y)$  telle que

$$\sup_{s \in S_0} \|u - u \circ s\|_{\ell^2(Y)} \leq \varepsilon \|u\|_{\ell^2(Y)}.$$

La preuve de l'équivalence de ces définitions est une adaptation immédiate de celle du théorème de Følner. Nous utiliserons essentiellement les deux cas particuliers suivants.

**Définition 6.1.3.** Si  $\Gamma$  est un groupe et  $\Gamma' < \Gamma$  un sous-groupe, on dit que  $\Gamma'$  est **co-moyennable** dans  $\Gamma$  si et seulement si l'action canonique de  $\Gamma$  sur  $\Gamma/\Gamma'$  (par multiplication à gauche) est moyennable.

Soit  $\widetilde{M}$  une variété simplement connexe. Soit  $\Gamma$  un groupe discret agissant proprement discontinûment sans point fixe sur  $\widetilde{M}$  et  $\Gamma' < \Gamma$  un sous-groupe. On dira que le revêtement  $p : \widetilde{M}/\Gamma' \rightarrow \widetilde{M}/\Gamma$  est **moyennable** si et seulement si  $\Gamma'$  est co-moyennable dans  $\Gamma$ .

On vérifie sans problème que lorsque  $\Gamma' \triangleleft \Gamma$  est un sous-groupe normal, alors  $\Gamma'$  est co-moyennable dans  $\Gamma$  si et seulement si le groupe  $G = \Gamma/\Gamma'$  est moyennable. Rappelons que si  $\widetilde{M}$  une variété simplement connexe,  $\Gamma$  est un groupe discret agissant proprement discontinûment sans point fixe sur  $\widetilde{M}$  et  $\Gamma' < \Gamma$  un sous-groupe, on dit que le revêtement est **galoisien** si  $\Gamma' \triangleleft \Gamma$  est un sous-groupe normal. On appelle alors **groupe de revêtement** le groupe  $G = \Gamma/\Gamma'$ .

## 6.1.2 Graphes et moyennabilités

Nous chercherons à quantifier la non-moyennabilité d'un groupe (ou d'une action). Les quantités que nous utiliserons s'énoncent dans le cadre plus général d'un graphe de valence bornée.

Nous appellerons **graphe**  $\mathcal{G} = (V, E)$  (non-orienté) la donnée d'un ensemble (discret)  $V$  et d'une fonction  $E : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$  appelée **fonction d'arête** symétrique, i.e. telle que pour tout  $x, y \in V$  on a  $E(x, y) = E(y, x)$  et  $E(x, x) \in 2\mathbb{Z}$ . Les éléments de  $V$  sont appelés les **sommets**. On dira qu'une **arête** relie deux sommets  $x, y \in V$  si  $E(x, y) > 0$ ; on notera dans ce cas  $x \sim y$ . Si  $x \in V$ , on appelle **valence** de  $\mathcal{G}$  au sommet  $x$  la quantité

$$\text{Val}(x) = \sum_{y \in V} E(x, y).$$

Notre définition de graphe, plus lourde que celle habituellement considérée, nous permet de considérer des graphes où deux sommets  $x, y \in V$  peuvent être reliés par plusieurs arêtes (dès que  $E(x, y) > 1$ ).

Pour tout  $A \subset V$ , on note  $\partial A = \{y \in V \setminus A ; \exists x \in A, x \sim y\}$ .



**Définition 6.1.4.** Soit  $\mathcal{G} = (V, E)$  un graphe infini (i.e.  $\#V = +\infty$ ). On appelle **constante de Cheeger de  $\mathcal{G}$**  la quantité

$$\mathfrak{h}(\mathcal{G}) = \inf_{A \subset V \text{ fini}} \frac{\sum_{x \in A, y \in \partial A} E(x, y)}{\#A}.$$

On appelle **bas du spectre combinatoire de  $\mathcal{G}$**  la quantité

$$\mu_0(\mathcal{G}) = \inf_{u \in \ell^2(V)} \frac{\sum_{(x, y) \in v^2} E(x, y)(u(y) - u(x))^2}{\sum_{x \in V} u(x)^2}$$

Ces deux quantités sont reliées par la proposition suivante.

**Proposition 6.1.2** (Colin de Verdière [CdV98], cf [RT13] Prop. 4.6). Soit  $\mathcal{G}$  un graphe dont la valence est uniformément bornée par  $v \geq 1$ . Alors

$$\frac{1}{2v} \mathfrak{h}(\mathcal{G})^2 \leq \mu_0(\mathcal{G}) \leq \mathfrak{h}(\mathcal{G})$$

Nous en tirons la définition suivante.

**Définition 6.1.5.** Soit  $\mathcal{G} = (V, E)$  un graphe à valence bornée. On dit que  $\mathcal{G}$  est **moyennable** si  $\mathfrak{h}(\mathcal{G}) = \mu_0(\mathcal{G}) = 0$ .

Les constantes  $\mathfrak{h}(\mathcal{G})$  et  $\mu_0(\mathcal{G})$ , lorsqu'elles sont non-nulles permettent donc de quantifier la non-moyennabilité d'un graphe  $\mathcal{G}$ . Tout graphe à *croissance polynomiale*, i.e. dont le cardinal des boules, pour une distance combinatoire sur  $V$  adaptée à la structure de graphe, grandit polynomialement, est donc moyennable. Nous verrons dans les exemples ci-après que la réciproque est fautive.

Si  $G$  est un groupe discret engendré par un ensemble *symétrique fini*  $S$ , rappelons qu'on appelle **graphe de Cayley** de  $(G, S)$  le graphe dont les sommets sont les éléments de  $G$  et dont la fonction d'arête est définie par

$$E(g_1, g_2) = \#\{s \in S ; sg_1 = g_2\}.$$

C'est un graphe sans auto-arête (pour tout  $g \in G$ , on a  $E(g, g) = 0$ ), dont la valence est constante égale au cardinal de  $S$ , et qui n'a pas d'arêtes multiples : pour tout  $g_1, g_2 \in G$ , on a  $E(g_1, g_2) \in \{0, 1\}$ . On vérifie sans difficulté qu'un groupe de type fini  $G$  est moyennable si et seulement si pour tout ensemble symétrique fini  $S$  générateur, le graphe de Cayley de  $(G, S)$  est moyennable. Lorsque  $\Gamma' < \Gamma$  est un sous-groupe pas forcément normal, il est nécessaire de remplacer la notion de graphe de Cayley par celle de graphe de Schreier, un peu moins connue.

**Définition 6.1.6.** Si  $\Gamma$  est un groupe engendré par l'ensemble symétrique fini  $S$ , et si  $\Gamma' \subset \Gamma$  est un sous-groupe, on appelle **graphe de Schreier** de  $(\Gamma, \Gamma', S)$  le graphe dont les sommets sont les classes de  $\Gamma/\Gamma'$  et dont la fonction d'arête est définie, pour tout  $\alpha\Gamma', \beta\Gamma' \in \Gamma/\Gamma'$  par

$$E(g_1, g_2) = \#\{s \in S ; s\alpha\Gamma' = \beta\Gamma'\}.$$

C'est de nouveau un graphe dont la valence est constante égale au cardinal de  $S$ , mais qui possède en général des auto-arêtes et des arêtes multiples. On vérifie sans difficulté que  $\Gamma'$  est co-moyennable dans  $\Gamma$  si et seulement si le graphe de Schreier de  $(\Gamma, \Gamma', S)$  est moyennable pour tout ensemble générateur  $S \subset \Gamma$  symétrique fini. Le théorème ci-dessous montre qu'il y a de très nombreux graphes de Schreier, qui peuvent être très différents des graphes de Cayley de groupes. Il était possiblement connu depuis longtemps des experts mais la seule preuve publiée que nous avons localisée est le Théorème 4.4 de [Can14].

**Théorème 6.1.3** (Cannizzo). *Soit  $\mathcal{G}$  un graphe à valence constante paire  $2n \in 2\mathbb{N}^*$ . Alors il existe un sous-groupe  $\Gamma'$  du groupe libre  $\mathbb{F}_n$  tel que  $\mathcal{G}$  soit le graphe de Schreier de  $(\mathbb{F}_n, \Gamma', S)$  où  $S = \{a_1, a_1^{-1}, \dots, a_n, a_n^{-1}\}$  est le système générateur standard de  $\mathbb{F}_n$ .*

Nous ne chercherons pas ici à définir de notion de moyennabilité pour un graphe à valence infinie, ni à quantifier la non-moyennabilité d'une action d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $Y$  lorsque  $G$  n'est pas de type fini. Une telle quantification est possible, notamment à l'aide de la Propriété (T) de Kazhdan ou de la Propriété (FM) de Glasner et Monod. Nous ne présenterons pas ces notions dans ce mémoire, et renvoyons au Paragraphe 6.2 de notre article [CDST18] et aux références qui y sont listées pour une brève introduction et les résultats que nous obtenons à ce sujet.

### 6.1.3 Exemples

Considérons  $B$  le bouquet de deux cercles, dont le groupe fondamental est  $\Gamma = \mathbb{F}_2$ . Il n'est pas moyennable.

Voici deux exemples de revêtements galoisiens, l'un moyennable, l'autre non, décrits par la Figure 6.1. Considérons l'ensemble  $B'$  formé de la réunion dans  $\mathbb{R}^2$  de l'axe des abscisses et d'un cercle, de rayon  $\frac{1}{3}$ , tangent à cette droite en chacun de ses points entiers. C'est un revêtement galoisien de  $B$ , de groupe de revêtement  $\mathbb{Z}$ . Il est donc moyennable. Si l'on considère un «arbre» dans  $\mathbb{R}^2$  de valence constante 4, on obtient un revêtement  $B''$  de  $B$  qui est galoisien de groupe de revêtement  $\mathbb{F}_2$ , donc non-moyennable.

Considérons maintenant l'ensemble  $B'''$  donné par la Figure 6.2 ci-dessous. C'est un revêtement non-galoisien de  $B$ , dont la croissance est exponentielle puisqu'il contient un arbre. Cependant, on vérifie sans problème qu'il est moyennable.

Voici maintenant comment réaliser très simplement des exemples analogues de revêtements riemanniens  $p : (M', g) \rightarrow (M, g)$  où  $g$  est une métrique riemannienne à courbure négative. Partons d'une surface  $(M, g)$  compacte et de genre 2. Son revêtement universel est non-moyennable. En revanche, un revêtement galoisien  $p_1 : (M_1, g) \rightarrow (M, g)$  de groupe de revêtement  $\mathbb{Z}$  est moyennable. Considérons maintenant le revêtement  $p_2 : (M_2, g) \rightarrow (M, g)$  décrit dans la Figure 6.3 ci-dessous, obtenu en «dépliant la moitié» de  $M_1$ .

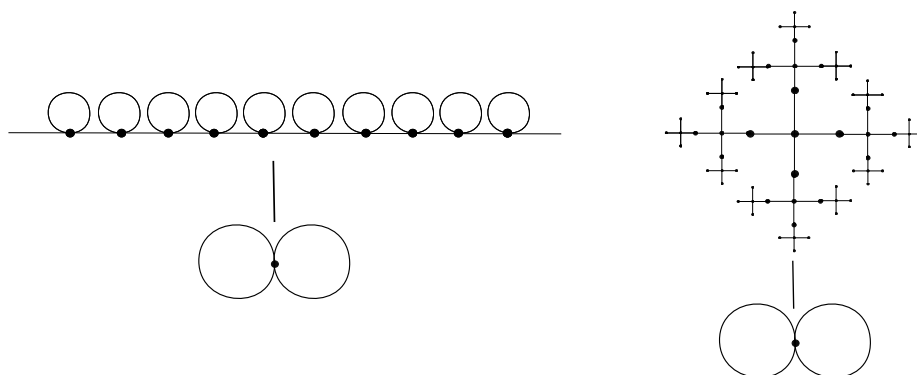


FIGURE 6.1 : Revêtements galoisiens moyennable et non-moyennable

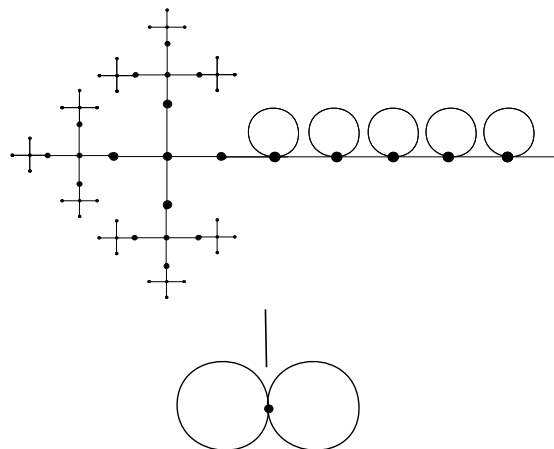


FIGURE 6.2 : Revêtement non-galoisien moyennable

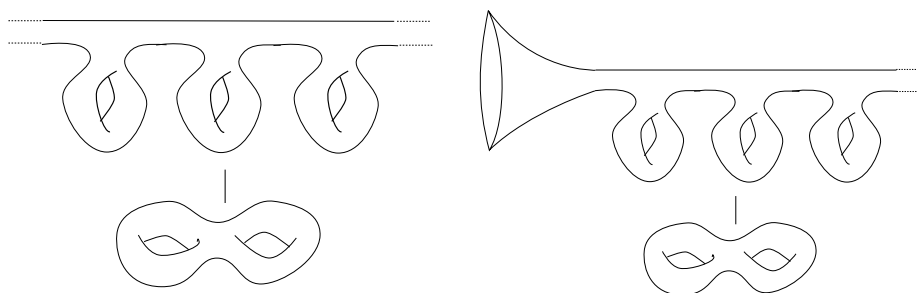


FIGURE 6.3 : Revêtements moyennables galoisien et non-galoisien

Il s'agit bien d'un revêtement non-galoisien mais moyennable de  $(M, g)$ . En notant  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  et  $M_2 = \widetilde{M}/\Gamma_2$ , on vérifie sans difficulté que les ensembles limites de  $\Gamma$  et  $\Gamma_2$  *ne coincident pas* :  $\Lambda_{\Gamma_2} \subsetneq \Lambda_{\Gamma}$ .

Ceci ne peut arriver dans le cas des revêtements non-galoisiens, puisque l'on vérifie sans difficulté que dès que  $\Gamma' \triangleleft \Gamma$  est un sous-groupe normal, alors  $\Lambda_{\Gamma'} = \Lambda_{\Gamma}$ . Nous reparlerons de l'importance de ce phénomène au Paragraphe 6.3.2 ci-dessous.

Le résultat suivant montre que l'on peut tout de même produire des exemples de revêtements non-galoisien non-moyennables.

**Proposition 6.1.4.** *Soit  $p : (\widetilde{M}, g)/\Gamma' \rightarrow (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  un revêtement entre variétés riemanniennes à courbure sectionnelle strictement négative. Supposons que  $\Lambda_{\Gamma'} \subsetneq \Lambda_{\Gamma}$ , que  $\Gamma'$  est divergent et que  $\Gamma$  a un trou critique. Alors  $p$  n'est pas moyennable.*

*Démonstration.* Comme  $\Gamma'$  est divergent, d'après la Proposition 1 de [DOP00], on a  $\delta_{\Gamma} > \delta_{\Gamma'}$ . Donc par le Théorème 6.3.5 ci-dessous, le revêtement n'est pas moyennable.  $\square$

Notons que par une variante de la construction décrite à la Figure 6.3 ci-dessus, toute surface hyperbolique compacte admet un revêtement (non-galoisien, infini) qui est convexe-cocompact non-élémentaire, et donc satisfait cette dernière proposition.

## 6.2 Bas du spectre et revêtements

### 6.2.1 Moyennabilité et bas du spectre : un peu d'histoire

Soit  $p : (M', g) \rightarrow (M, g)$  un revêtement riemannien. Le Lemme de Barta (Lemme 4.1.2 de notre Chapitre 3) implique immédiatement que  $\lambda_0(M', g) \geq \lambda_0(M, g)$ . Quand a-t-on égalité? L'étude de ce problème lorsque le revêtement est galoisien commence avec les travaux de Brooks [Bro81a] lorsque  $M$  est compacte, généralisés dans [Bro85] pour les variétés non-compactes. Leurs résultats s'énoncent comme suit.

**Théorème 6.2.1** (Brooks). *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète et  $p : (M', g) \rightarrow (M, g)$  un revêtement galoisien riemannien. Supposons que :*

1. *le bas du spectre  $\lambda_0(M, g)$  est une valeur propre isolée, i.e.  $\lambda_0(M, g) < \lambda_0^{ess}(M, g)$  ;*
2. *il existe un domaine fondamental  $D \subset M'$  pour l'action du groupe de revêtement  $G = \pi_1(M)/\pi_1(M')$  tel que, avec les conditions de Neumann sur  $\partial D$ , on ait  $\lambda_0^{ess}(D, g) > \lambda_0(M, g)$ .*

*Alors  $\lambda_0(M, g) \geq \lambda_0(M', g)$  avec égalité si et seulement si  $G$  est moyennable.*

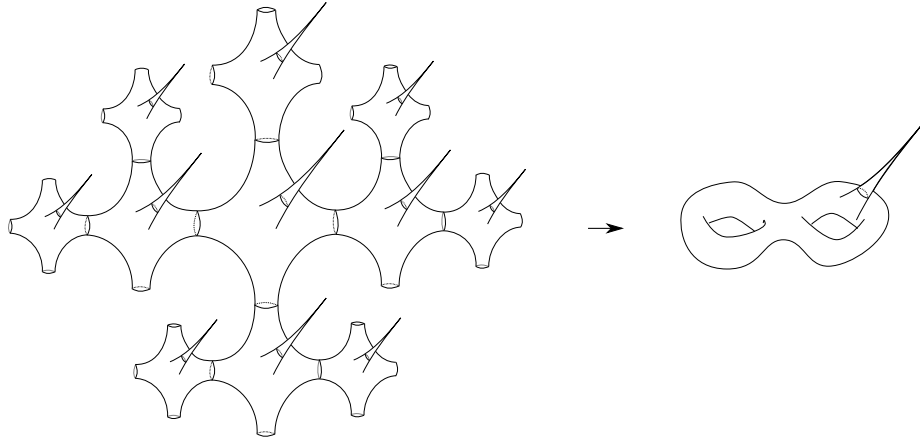


FIGURE 6.4 : Revêtement galoisien non-moyennable

Nous avons artificiellement séparé les hypothèses (1) et (2). Voici un exemple qui montre que l'hypothèse (1) est nécessaire pour obtenir un tel résultat. Il est similaire à l'exemple décrit à la Section 1 de [Bro85]. Considérons une surface  $(M, g)$  de genre 2 avec un cusp, de volume fini et telle que  $\lambda_0(M, g) = \lambda_0^{ess}(M, g)$ . Considérons le revêtement galoisien de groupe de revêtement  $\mathbb{F}_2$  obtenu de la façon suivante : on découpe chacun des «trous» de  $M$  le long de géodésiques fermées, ce qui fournit un domaine  $D$  à 4 composantes de bord et un cusp, puis on recolle une infinité de copies de  $D$  en suivant le plan donné par un arbre de valence 4 (cf Figure 6.4). On note  $(M', g)$  la surface ainsi obtenue : il existe par construction un revêtement  $p : (M', g) \rightarrow (M, g)$  galoisien de groupe de revêtement  $\mathbb{F}_2$ , donc non-moyennable.

Cependant, comme chaque copie de  $D$  contient une copie de l'unique bout de  $M$ , on montre immédiatement que le bas du spectre essentiel de  $(M', g)$  vérifie  $\lambda_0^{ess}(M', g) \leq \lambda_0^{ess}(M, g) = \lambda_0(M, g)$ . On a donc finalement  $\lambda_0(M', g) = \lambda_0(M, g)$  bien que le revêtement soit non-moyennable.

On montre sans difficulté que l'hypothèse (2) du Théorème 6.2.1 implique l'hypothèse (1). L'implication réciproque est moins claire. Ces deux hypothèses sont évidemment vérifiées dès que  $M$  est compacte (sans bord). Nous verrons que pour les variétés hyperboliques (réelles) convexes-cocompactes, ou plus généralement pour les variétés conformément compactes, l'hypothèse (1) implique la (2).

De nombreux travaux ont étudié cette question par la suite, dans l'objectif de supprimer l'hypothèse (2) ci-dessus et en l'étendant au cas des opérateurs de Schrödinger  $S = \Delta_g + V$  que nous ne présentons pas ici. On peut citer en particulier [BC13], [RT13], et les travaux de Ballmann, Matthiesen et Polmerakis [BMP18], [Pol18]. On trouvera un résumé de cette histoire dans le survol [BMP19]. Elle aboutit au théorème suivant, qui établit de façon optimale le lien

entre moyennabilité et bas du spectre.

**Théorème 6.2.2** (Ploymerakis [Pol18]). *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète et  $p : (M', g) \rightarrow (M, g)$  un revêtement riemannien (galoisien ou non). Supposons que le bas du spectre  $\lambda_0(M, g)$  est une valeur propre isolée, i.e.  $\lambda_0(M, g) < \lambda_0^{ess}(M, g)$ . Alors  $\lambda_0(M, g) \geq \lambda_0(M', g)$  avec égalité si et seulement si  $G$  est moyennable.*

### 6.2.2 Bas du spectre des revêtements non-moyennable

La suite de cette section est dédiée à la présentation des résultats obtenus dans [RT13] et dans [Tap20b]. A l'époque où j'y travaillais activement (2007-2014), ils présentaient l'intérêt de fournir une preuve alternative à celle de Brooks [Bro85], en évitant en particulier un argument délicat de théorie géométrique de la mesure. Une des motivations était, à terme, de supprimer l'hypothèse (2) de 6.2.1. Aujourd'hui, après la preuve beaucoup plus générale du Théorème 6.2.2, la principale plus-value de notre méthode par rapport aux travaux cités précédemment est qu'elle fournit des bornes quantitatives explicites sur l'écart  $\lambda_0(M', g) - \lambda_0(M, g)$  lorsque le revêtement est non-moyennable. Ces bornes sont a priori inaccessibles par les méthodes de Brooks [Bro85] qui utilise des arguments non-explicites délicats de théorie géométrique de la mesure, ou par celles de Ballmann-Matthiesen-Polymerakis qui utilisent un argument par contradiction. Elles nécessitent (à ce stade) des hypothèses topologiques assez fortes sur la variété  $(M, g)$ , typiquement vérifiées par une variété compacte (quelconque) ou une variété hyperbolique convexe-cocompacte.

Pour tout  $n \geq 1$ , nous notons

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \geq 0\}.$$

Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n$ . Nous appellerons **domaine lisse à bord  $\mathcal{C}^1$  par morceaux** un ensemble fermé  $D \subset M$  dont l'intérieur est non vide et qui possède un recouvrement  $D \subset \cup_{i \in I} U_i$ , où les  $U_i$  sont des ouverts de  $M$  et pour tout  $i \in I$ , il existe  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme sur son image tel que

$$\varphi_i(U_i \cap D) = \varphi_i(U_i) \cap \mathbb{R}_+^n.$$

On appellera alors *point régulier* de  $\partial D$  un point situé dans l'intérieur d'une sous-variété de dimension  $n - 1$  de  $\partial D$ .

Par exemple si  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  est une variété riemannienne à courbure négative, où  $\Gamma = \pi_1(M)$  est de type fini, alors pour (presque) toute origine  $o \in \widetilde{M}$ , l'ensemble

$$D_o^g = \left\{ x \in \widetilde{M} ; \forall \gamma \in \Gamma, d^g(x, o) \leq d^g(x, \gamma o) \right\}$$

est un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$  sur  $\widetilde{M}$ , lisse à bord  $\mathcal{C}^1$ , appelé **domaine de Dirichlet** centré en  $o$ .

Rappelons que si  $(M, g)$  est une variété riemannienne complète et  $D \subset M$  est un domaine lisse à bord  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, le Laplacien  $\Delta_g$  induit un opérateur elliptique sur  $D$  dont le domaine est la fermeture dans  $\mathcal{H}^2(M, g)$  des fonctions lisses à support compact dans  $D$  (pas forcément nulles sur  $\partial D$ ), et dont toute fonction propre  $\varphi$  vérifie les *conditions de Neumann* sur  $\partial D$ , c'est à dire que  $\nabla^g \varphi$  est tangente à  $\partial D$  aux points réguliers de  $\partial D$ . On a en particulier

$$\lambda_0(D, g) = \inf \left\{ \frac{\int_D \|\nabla^g f\|_g^2 dV_g}{\int_D \|f\|_g^2 dV_g} ; f \in \mathcal{C}_0^\infty(D) \right\}. \quad (6.1)$$

Si le bas du spectre  $\lambda_0(D, g)$  est associé à une fonction propre  $\varphi_0$ , on notera

$$\lambda_1(D, g) = \inf \left\{ \frac{\int_D \|\nabla^g f\|_g^2 dV_g}{\int_D \|f\|_g^2 dV_g} ; f \in \mathcal{C}_0^\infty(D), \int_D \varphi_0 f dV_g = 0 \right\}.$$

**Définition 6.2.1.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète, dont le bas du spectre est une valeur propre associée à la fonction propre  $\varphi_0$ . Soit  $p : (M', g) \rightarrow (M, g)$  un revêtement riemannien. Soit  $D \subset M'$  un domaine lisse à bord  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. On dira que  $D$  est **spectralement optimal** si  $\nabla(\varphi_0 \circ p)$  est tangent à  $\partial D$  en tout point régulier de  $\partial D$ .

La proposition ci-dessous est une conséquence immédiate de l'équation (6.1).

**Proposition 6.2.3.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète, dont le bas du spectre est une valeur propre associée à la fonction propre  $\varphi_0$ . Soit  $p : (M', g) \rightarrow (M, g)$  un revêtement riemannien galoisien de groupe d'automorphisme  $G$ . Soit  $D \subset M'$  un domaine fondamental pour l'action de  $G$ , lisse à bord  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Alors

$$\lambda_0(D, g) \leq \lambda_0(M, g)$$

avec égalité si  $D$  est spectralement optimal.

Soit  $p : (M', g) \rightarrow (M, g)$  un revêtement riemannien galoisien de groupe d'automorphisme  $G$ . Soit  $D \subset M'$  un domaine fondamental pour l'action de  $G$ , lisse à bord  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. On dira qu'un système de générateur  $S \subset G$  est *adapté à  $D$*  si pour tout  $s \in S$ , l'ensemble  $D \cap sD$  est de co-dimension 1 et d'intérieur non-vide.

Le théorème suivant a été démontré dans ma thèse, et publié pour la première fois dans [RT13].

**Théorème 6.2.4** (T. 2009, [RT13]). Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète, dont le bas du spectre est une valeur propre associée à la fonction propre  $\varphi_0$ . Soit  $p : (M', g) \rightarrow (M, g)$  un revêtement riemannien galoisien de groupe d'automorphisme  $G$ . Supposons qu'il existe  $D \subset M'$  un domaine fondamental pour l'action de  $G$ , lisse à bord  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, spectralement optimal et tel que  $\lambda_1(D, g) > \lambda_0(D, g)$ . Soit  $S$  un système de générateurs de  $G$  adapté à  $D$  et  $\mathcal{G}_{G, S}$  le graphe de Cayley de  $(G, S)$ . Alors il existe une constante  $A = A(D, \varphi_0) > 0$  telle que

$$\lambda_0(M', g) \geq \lambda_0(M, g) + A\mu_0(\mathcal{G}).$$

L'hypothèse d'existence d'un domaine fondamental  $D \subset M$  pour l'action de  $G$ , lisse à bord  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, spectralement optimal et tel que  $\lambda_1(D, g) > \lambda_0(D, g)$ , est a priori plus forte que l'hypothèse (2) du Théorème 6.2.1 ci-dessus. Le lecteur montrera sans difficulté que  $\lambda_0^{ess}(M, g) \geq \lambda_1(D, g)$ , ce qui montre que cette hypothèse implique un trou spectral pour  $(M, g)$ . Cela dit, l'article [Bro85] ne montre la validité de l'hypothèse (2) du Théorème 6.2.1 que lorsque  $M$  est compacte (où elle est évidente) ou bien hyperbolique convexe-cocompacte. Nous verrons au Théorème 6.2.6 que dans ce cas, il existe bien un domaine fondamental permettant l'application du Théorème 6.2.4. Nous obtenons donc (sous notre hypothèse d'existence d'un domaine fondamental adapté) une nouvelle preuve du résultat de Brooks.

Dans l'énoncé précédent, la quantité  $A\mu_0(\mathcal{G})$  n'est a priori que peu exploitable, puisqu'elle dépend du domaine considéré autant que du groupe  $\mathcal{G}$ . Néanmoins, la preuve fournit une expression explicite de cette constante, et nous verrons au prochain paragraphe qu'elle donne dans certains cas des applications intéressantes.

Du point de vue de la quantification de la non-moyennabilité du revêtement, l'énoncé ci-dessous est certainement plus intéressant. Il est nouveau et sera publié dans [Tap20b].

**Théorème 6.2.5** (T., 2017). *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété riemannienne complète, avec  $\Gamma = \pi_1(M)$  de type fini, dont le bas du spectre est une valeur propre associée à la fonction propre  $\varphi_0$ . Supposons qu'il existe  $D \subset \widetilde{M}$  un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$ , lisse à bord  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, spectralement optimal et tel que  $\lambda_1(D, g) > \lambda_0(D, g)$ . Soit  $S$  un système de générateurs de  $\Gamma$  adapté à  $D$ , que nous supposons fini.*

*Alors il existe  $A = A(D, g) > 0$  tel que pour tout sous-groupe  $\Gamma' < \Gamma$ , on ait*

$$\lambda_0(\widetilde{M}/\Gamma', g) \geq \lambda_0(\widetilde{M}/\Gamma, g) + A\mu_0(\mathcal{G}_{\Gamma, \Gamma', S}),$$

où  $\mathcal{G}_{\Gamma, \Gamma', S}$  est le graphe de Schreier de  $(\Gamma, \Gamma', S)$ .

La preuve de ce résultat est une généralisation de la preuve du Théorème 4.3 de [RT13] que nous ne présentons pas ici. Elle s'applique aux cas où  $(M, g)$  est une variété hyperbolique de volume fini ou convexe-cocompacte grâce résultat suivant

**Théorème 6.2.6** (T., [RT13] Théo 5.1). *Si  $(M, g) = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma$  est une variété hyperbolique de volume fini ou convexe-cocompacte avec trou spectral (i.e.  $\delta_\Gamma > \frac{n}{2}$ ), alors il existe  $D \subset \mathbb{H}^{n+1}$  un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$ , lisse à bord  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, spectralement optimal et tel que  $\lambda_1(D, g) > \lambda_0(D, g)$ .*

Si la variété est de volume fini, son bas du spectre est nul, associé aux fonctions constantes, et on vérifie sans problème que n'importe quel domaine de Dirichlet (qui est un polyèdre idéal à bords géodésiques, dont le bas du spectre essentiel est  $\frac{n^2}{4}$ ) satisfait la conclusion du théorème. Le cas convexe-cocompact



est montré dans le Théorème 5.1 de [RT13]. La preuve devrait s'étendre sans difficulté particulière au cas géométriquement fini, à l'aide d'une analyse de Fourier de la première fonction propre dans les cusps.

Comme indiqué précédemment, on peut dans *estimer explicitement* la constante  $A$  donnée dans le Théorème 6.2.5, à partir de la géométrie de  $D$  et du comportement de  $\varphi_0$  au voisinage de  $\partial D$ . Elle n'est pas optimale en général : appliqué au revêtement universel  $p : \mathbb{H}^2 \rightarrow (M, g)$ , où  $(M, g)$  est un tore à un cusp, une application numérique naïve (que nous ne détaillons pas ici) fournit  $\lambda_0(\mathbb{H}^2) \geq 0,0025$ , ce qui est loin de la valeur connue  $\lambda_0(\mathbb{H}^2) = \frac{1}{4}$ .

Considérons maintenant un revêtement galoisien  $p : (M', g_1) \rightarrow (M, g_1)$  de groupe d'automorphisme  $G$ , en supposant que  $M$  est compacte et qu'il existe un domaine fondamental  $D \subset M'$  pour l'action de  $G$  dont les bords sont des géodésiques fermées de longueur 1. On note  $\mathcal{G}$  le graphe de Cayley de  $G$  pour le système de générateur associé à  $D$ . On considère  $g_\varepsilon$  la métrique hyperbolique sur  $M$  et  $M'$  obtenue en donnant longueur  $\varepsilon$  à tous les bords de  $D$ . On peut alors obtenir, en explicitant au maximum les constantes qui apparaissent dans le Théorème 6.2.5, une borne inférieure et une borne supérieure à  $\lambda_0(M', g_\varepsilon)$  qui fournissent l'équivalent suivant :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \lambda_0(M', g_\varepsilon) = \frac{\mu_0(\mathcal{G})}{\pi \text{Vol}(M)}. \quad (6.2)$$

Ceci généralise au cas infini périodique les résultats de [Col85] et [CCdV88], et montre que dans cette situation l'estimée fournie par le Théorème 6.2.5 est asymptotiquement optimale lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Là encore, nous ne détaillons pas la preuve de (6.2) qui sera publiée dans [Tap20b].

### 6.3 Entropie et revêtements

Nous présentons maintenant les résultats que nous avons obtenus dans [CDST18] sur le comportement de l'exposant critique lors d'un revêtement. Rappelons que si  $(X, d)$  est un espace métrique propre, et si  $\Gamma$  est un groupe discret agissant proprement continûment par isométries sur  $(X, d)$ , alors on appelle **exposant critique** de  $\Gamma$  (agissant sur  $(X, d)$ ) la quantité

$$\delta_\Gamma(d) = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log \{ \gamma \in \Gamma ; d(o, \gamma o) \leq R \}$$

où  $o \in X$  est une origine arbitrairement fixée. Lorsque  $(X, d)$  est une variété riemannienne complète simplement connexe dont la courbure sectionnelle est négative pincée, et  $\Gamma$  agit sans point fixe, nous avons vu au Chapitre 1 que  $\delta_\Gamma(d)$  est l'entropie topologique du flot géodésique sur la variété riemannienne  $X/\Gamma$ .

Soit  $\Gamma' < \Gamma$  un sous-groupe : on a trivialement  $\delta_{\Gamma'}(d) \leq \delta_\Gamma(d)$ . Il s'agit donc de comprendre le lien entre égalité dans cette inégalité, et moyennabilité de  $\Gamma/\Gamma'$ .

Après un peu d'histoire, nous présentons nos résultats ainsi qu'une idée des preuves et des techniques nouvelles qu'elles apportent. L'énoncé complet de nos résultats mentionnera les espaces métriques  $CAT(-1)$  ou Gromov-hyperboliques. Nous ne les définirons pas ici, on pourra se référer par exemple à [Rob03, Chap. 1] pour les espaces  $CAT(-1)$  et à [CDST18, Sec. 2.1] pour les espaces Gromov-hyperboliques.

Pour faire le lien avec le reste de ce mémoire, le lecteur doit simplement savoir qu'une variété riemannienne complète simplement connexe dont la courbure sectionnelle est majorée par  $-1$  est un exemple d'espace  $CAT(-1)$ , et que tous les espaces  $CAT(-1)$  sont Gromov-hyperboliques. Par ailleurs, la définition d'exposant critique à l'infini  $\delta_\Gamma^\infty(d)$  présentée à la Section 2.1.2 s'étend verbatim aux espaces  $CAT(-1)$  et Gromov-hyperboliques. Cette notion sera cruciale dans les résultats qui suivent.

### 6.3.1 Entropie et revêtements, un peu d'histoire

Le théorème de Brooks que nous avons cité ci-dessus (Théo. 6.2.1) combiné au lien entre bas du spectre et entropie pour les variétés hyperboliques (Théo. 4.2.9) présenté au Chapitre 4 implique le résultat suivant.

**Théorème 6.3.1** (Brooks). *Soit  $(M, g) = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma$  une variété hyperbolique convexe-cocompacte de dimension  $n + 1$ , telle que  $\delta_\Gamma > \frac{n}{2}$ . Pour tout sous-groupe normal  $\Gamma' \triangleleft \Gamma$ , on a l'égalité  $\delta_\Gamma(g) = \delta_{\Gamma'}(g)$  si et seulement si le groupe  $\Gamma/\Gamma'$  est moyennable.*

Sur le plan combinatoire, le groupe non-moyennable le plus simple est le groupe libre  $\mathbb{F}_n$ , agissant sur son graphe de Cayley  $\mathcal{G}$  par rapport à sa base standard, que l'on munit de la métrique des mots associée  $d_{\mathcal{G}}$ . On montre sans difficulté que son exposant critique est  $2n - 1$ . De façons indépendantes, Grigorchuk et Cohen ont obtenu le résultat suivant, qui repose sur des estimations combinatoires.

**Théorème 6.3.2** (Grigorchuk [Gri80], Cohen [Coh82]). *Soit  $\Gamma = \mathbb{F}_n$  le groupe libre à  $n$  générateur, agissant sur son graphe de Cayley  $\mathcal{G}$  muni de la métrique des mots  $d_{\mathcal{G}}$ . Pour tout sous-groupe normal  $\Gamma' \triangleleft \Gamma$ , on a  $\delta_{\Gamma'}(d_{\mathcal{G}}) = 2n - 1$  si et seulement si  $\Gamma/\Gamma'$  est moyennable.*

Une généralisation majeure du «sens facile», c'est à dire l'implication «moyennabilité de  $\Gamma/\Gamma'$  implique  $\delta_\Gamma = \delta_{\Gamma'}$ », a ensuite été obtenue par Roblin dans [Rob05].

**Théorème 6.3.3** (Roblin, [Rob05]). *Soit  $\Gamma$  un groupe discret agissant sur un espace métrique  $(X, d)$   $CAT(-1)$  de façon non-élémentaire. Pour tout sous-groupe normal  $\Gamma' \triangleleft \Gamma$ , si  $\Gamma/\Gamma'$  est moyennable alors on a  $\delta_{\Gamma'}(d) = \delta_\Gamma(d)$ .*

Dans la preuve de ce résultat, le fait que le groupe  $\Gamma' \triangleleft \Gamma$  soit normal est crucial. La preuve s'effondre dès lors que l'ensemble limite de  $\Gamma'$  ne coïncide pas avec celui de  $\Gamma$ . Nous avons vu au Paragraphe 6.1.3 qu'il existe des groupes

$\Gamma' < \Gamma$ , où  $\Gamma$  est le groupe fondamental d'une surface hyperbolique compacte, tels que  $\Gamma'$  est co-moyennable dans  $\Gamma$  mais les ensembles limites  $\Lambda_{\Gamma'}$  et  $\Lambda_{\Gamma}$  ne coïncident pas.

En ce qui concerne l'autre direction, les premières généralisations sont dues à Stadlbauer. Il montre dans [Sta13] que si  $\Gamma = \Gamma_1 * \dots * \Gamma_k$  est le produit Schottky de groupes élémentaires agissants sur l'espace hyperbolique réel  $\mathbb{H}^{n+1}$  muni de sa distance hyperbolique  $d_H$  (voir Section 2.3.1), alors pour tout sous-groupe normal  $\Gamma' \triangleleft \Gamma$ , on a  $\delta_{\Gamma'}(d_H) = \delta_{\Gamma}(d_H)$  si et seulement si  $\Gamma/\Gamma'$  est moyennable. La preuve repose sur une extension par l'action du groupe de revêtement  $\Gamma/\Gamma'$  du codage fini donné par la structure de produit Schottky du groupe.

Cette idée est reprise par Dougall et Sharp dans [DS16], qui montrent le même énoncé dès que  $\Gamma$  est le groupe fondamental d'une variété riemannienne complète à courbure négative pincée convexe-cocompacte, en utilisant une extension par l'action du groupe de revêtement  $\Gamma/\Gamma'$  du codage fini donné par Bowen ([Bow72b]) dans le cas convexe-cocompact. L'argument est généralisé grâce au codage de Gromov pour un groupe hyperbolique par Coulon, Dal'bo et Sambusetti qui obtiennent le résultat suivant.

**Théorème 6.3.4** (Coulon-Dal'bo-Sambusetti, [CDS18]). *Soit  $\Gamma$  un groupe Gromov-hyperbolique agissant proprement discontinuement sur  $(X, d)$ . Supposons que  $(X, d)$  est le graphe de Cayley de  $\Gamma$  muni de sa métrique des mots, ou est un espace  $CAT(-1)$  tel que  $X/\Gamma$  est compact.*

*Alors pour tout sous-groupe  $\Gamma' < \Gamma$  (normal ou non), on a  $\delta_{\Gamma'}(d) = \delta_{\Gamma}(d)$  si et seulement si  $\Gamma'$  est co-moyennable dans  $\Gamma$ .*

### 6.3.2 Entropie et revêtement en présence d'un trou critique

Notons qu'en dehors des groupes de Schottky de Stadlbauer (qui peuvent contenir des éléments paraboliques), dans tous les travaux cités au paragraphe précédent l'exposant critique à l'infini du groupe considéré est toujours  $-\infty$  : la dynamique non-errante dans  $(X, d)/\Gamma$  est contenue dans un compact. Les travaux que nous présentons maintenant fournissent un énoncé général lorsque  $(X, d)/\Gamma$  n'est plus compact, dont nous verrons qu'il est optimal en courbure négative.

#### Énoncé et analyse des hypothèses

**Théorème 6.3.5** (Coulon-Dougall-Schapira-T., [CDST18]). *Soit  $(X, d)$  un espace Gromov-hyperbolique et  $\Gamma$  un groupe agissant proprement discontinuement sur  $(X, d)$ . Supposons que  $\Gamma$  a un trou critique, i.e.  $\delta_{\Gamma}^{\infty}(d) < \delta_{\Gamma}(d)$ . Alors pour tout sous-groupe  $\Gamma' < \Gamma$ , normal ou non, on a  $\delta_{\Gamma'}(d) = \delta_{\Gamma}(d)$  si et seulement si  $\Gamma'$  est co-moyennable dans  $\Gamma$ .*

L'hypothèse de trou critique, qui est l'analogue naturel pour ce problème à l'hypothèse de trou spectral dans le cas de l'étude du bas du spectre, n'avait

pas été identifiée dans les études précédentes. Rappelons qu'elle est automatique lorsque  $\Gamma$  est le groupe fondamental d'une variété convexe-cocompacte à courbure négative pincée, ou lorsque  $\Gamma$  est un groupe d'isométries de  $\mathbb{H}^{n+1}$  géométriquement fini, ce qui est le cas d'un groupe de Schottky.

Voici quelques exemples qui montrent que l'hypothèse de trou critique sur  $\Gamma$  est nécessaire pour obtenir un tel résultat.

Tout d'abord, rappelons qu'un groupe élémentaire parabolique  $P$  de rang  $k$  agissant sur l'espace hyperbolique réel  $(\mathbb{H}^n, g_H)$  (avec  $n \geq k+1$ ) est moyennable (car abélien), et que son exposant critique est toujours  $\frac{k}{2}$ . Donc le revêtement  $p : \mathbb{H}^n/\{e\} \rightarrow \mathbb{H}^n/P$  est moyennable, mais  $\delta_P(g_H) > \delta_{\{e\}}(g_H)$ , ce qui contredit l'implication «facile» du Théorème 6.3.5. Notons qu'un groupe élémentaire parabolique n'a jamais de trou critique.

Voici un exemple qui montre que cette hypothèse est également nécessaire pour l'autre implication. Il est volontairement similaire à l'exemple décrit à la Section 6.2.1 ci-dessus. Considérons une surface  $(M, g) = (\bar{M}, g)/\Gamma$  de genre 2 avec un cusp correspondant au sous-groupe parabolique  $P \subset \Gamma$ . Supposons que  $\delta_P(g) = \delta_\Gamma(g)$  : de telles surfaces existent, comme construits dans [DPPS09] sous le nom de *groupes kleinien exotiques*. Considérons le revêtement galoisien  $p : (M', g) \rightarrow (M, g)$  de groupe de revêtement  $\mathbb{F}_2$  obtenu comme à la Figure 6.4 ci-dessus. Comme  $(M', g)$  contient une infinité de cusps isométriques à celui de  $(M, g)$ , on a  $\delta_{\Gamma'}(g) \geq \delta_P(g) = \delta_\Gamma(g)$ . On a donc finalement  $\delta_{\Gamma'}(g) = \delta_\Gamma(g)$  bien que le revêtement soit non-moyennable.

On peut également se demander à quel point l'hypothèse de «courbure négative» (en un sens plus ou moins fort) sur  $(X, d)$  est nécessaire pour espérer obtenir un résultat comme le Théorème [CDST18]. Notre preuve utilise très fortement la structure d'espace Gromov-hyperbolique, puisqu'elle repose sur la théorie de Patterson-Sullivan que nous avons présentée au Chapitre 1, qui s'étend assez bien au cadre Gromov-hyperbolique, au prix de difficultés supplémentaires que nous ne présentons pas dans ce mémoire (cf notamment les Sections 2 à 4 de [CDST18]). Il semble plausible d'étendre ce résultat aux groupes agissant, par exemple, proprement sur un espace CAT(0) (pas forcément Gromov-hyperbolique) avec un trou critique. Mais notre preuve repose fortement sur des propriétés d'ergodicité du flot géodésique (par exemple la Dichotomie de Hopf-Tsuji-Sullivan, cf Théorème 1.2.1 du Chapitre 1), que nous avons dû étendre au cas Gromov-hyperbolique et qui sont largement ouverts en général.

### L'implication «facile»

La première implication de l'équivalence donnée par le Théorème 6.3.5 consiste à montrer, en supposant que  $\Gamma'$  est co-moyennable dans  $\Gamma$ , que  $\delta_{\Gamma'}(d) = \delta_\Gamma(d)$ . Lorsque  $\Gamma'$  est normal dans  $\Gamma$ , la preuve présentée par Roblin [Rob05] dans le cas où  $(X, d)$  est CAT(-1) s'adapte sans problème au cas où  $(X, d)$  est Gromov-hyperbolique. En revanche, cette preuve s'effondre dès que le sous-groupe n'est plus normal.

Nous arrivons toutefois à obtenir cette implication en utilisant un critère de moyennabilité de Kesten que nous présentons maintenant. Soit  $p$  une probabilité sur  $\Gamma$ . Soit  $\Gamma' < \Gamma$  un sous-groupe. Nous notons  $M_p : \ell^2(\Gamma/\Gamma') \rightarrow \ell^2(\Gamma/\Gamma')$  l'opérateur défini par, pour tout  $\varphi \in \ell^2(\Gamma/\Gamma')$ , et pour tout  $\alpha \in \Gamma/\Gamma'$ ,

$$M_p\varphi(\alpha) = \sum_{\gamma \in \Gamma} p(\gamma)\varphi(\gamma\alpha).$$

C'est un *opérateur de Markov*, associé à la *marche aléatoire* sur  $\Gamma/\Gamma'$  dont les probabilités de transition sont données par  $p$ . Le critère de moyennabilité suivant est dû à Kesten [Kes59], dont la preuve est étendue dans [CDS18] au cas où le sous-groupe n'est pas normal.

**Théorème 6.3.6** (Kesten, [Kes59], cf [CDS18]). *Avec les notations précédentes, le sous-groupe  $\Gamma' < \Gamma$  est co-moyennable dans  $\Gamma$  si et seulement si pour toute probabilité  $p$  sur  $\Gamma$  dont le support engendre  $\Gamma$ , le rayon spectral de  $M_p$  sur  $\ell^2(\Gamma/\Gamma')$  est 1.*

Supposons que  $\Gamma$  agit proprement sur un espace Gromov-hyperbolique  $(X, d)$ , et soit  $o \in X$  fixé. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , considérons l'ensemble

$$\Gamma_n = \{\gamma \in \Gamma ; d(o, \gamma o) \in [n, n + 1]\}.$$

Pour  $n$  assez grand, l'ensemble  $\Gamma_n$  engendre  $\Gamma$ . Soit  $p_n$  la probabilité uniforme sur  $\Gamma_n$ . Notons  $\tau(M_{p_n})$  le rayon spectral de l'opérateur  $M_{p_n}$ . Nous montrons le résultat suivant, par une estimation explicite reposant sur l'analogie du Lemme de Barta (cf Lemme 4.1.2) pour les opérateurs de Markov  $M_{p_n}$ .

**Théorème 6.3.7** ([CDST18], Coro. 6.9). *Le rayon spectral de  $M_{p_n}$  vérifie*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \tau(M_{p_n}) \leq \min\{-\delta_{\Gamma'}(d), \delta_{\mathbb{F}}^\infty(d) - \delta_\Gamma(d), \delta_{\Gamma'}(d) - \delta_\Gamma(d)\}.$$

*En particulier, si  $\Gamma'$  est co-moyennable dans  $\Gamma$  et si  $\Gamma$  a un trou critique, alors  $\delta_{\Gamma'} = \delta_\Gamma(d)$ .*

Nous renvoyons à la Section 6.1 de [CDST18] pour une preuve. Notons que notre résultat couvre tous les sous-groupes  $\Gamma' < \Gamma$  (normaux ou pas) dès lors que  $\Gamma$  a un trou critique, mais pas les sous-groupes normaux  $\Gamma' \triangleleft \Gamma$  lorsque  $\Gamma$  est non-élémentaire sans trou critique, qui eux sont couverts par le Théorème de Roblin (Théo. 6.3.3 ci-dessus). Nous ne savons pas s'il existe des exemples de  $\Gamma$  agissant sur un espace Gromov-hyperbolique  $(X, d)$ , non-élémentaire et sans trou critique, qui possède un sous-groupe non-normal  $\Gamma' < \Gamma$  co-moyennable dans  $\Gamma$ , tel que  $\delta_{\Gamma'}(d) < \delta_\Gamma(d)$ .

### L'implication «difficile»

La principale originalité de l'article [CDST18], outre l'identification de l'hypothèse clé de trou critique, est sans doute la technique de preuve que nous

utilisons pour montrer que si  $\delta_{\Gamma'}(d) = \delta_{\Gamma}(d)$ , alors  $\Gamma/\Gamma'$  est moyennable. Elle repose sur une construction de la mesure de Patterson-Sullivan *tordue par une représentation*, qui donnera des informations adaptées à notre problème. Nous la présentons maintenant, en supposant pour simplifier que  $(X, d)$  est un espace  $\text{CAT}(-1)$ . Le lecteur peut se limiter sans perte de généralité au cas où  $(X, d)$  est une variété riemannienne simplement connexe à courbure négative pincée, comme dans le reste du manuscrit. Nous fixons une origine  $o \in X$  une fois pour toutes.

Soit  $\mathcal{H}$  un *treillis*<sup>1</sup> de Hilbert, c'est à dire un espace de Hilbert muni d'un ordre partiel qui est compatible avec la structure de Hilbert au sens rappelé dans l'Appendice B de [CDST18], et tel que toute partie  $A \subset \mathcal{H}$  majorée possède une borne supérieure. Pour notre application au problème de la moyennabilité, nous utiliserons essentiellement  $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma/\Gamma')$ , muni de sa structure d'espace de Hilbert standard et de son ordre partiel usuel dont on vérifie sans difficulté qu'ils définissent un treillis de Hilbert.

Notons  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  les opérateurs *bornés* sur  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  les opérateurs unitaires.

**Définition 6.3.1.** Soit  $\rho : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  une *représentation unitaire*. On dit que est positive si pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et pour tout  $u \in \mathcal{H}$  avec  $u \geq 0$ , on a  $\rho(\gamma)u \geq 0$ .

On dit que  $\rho$  admet presque des vecteurs invariants, si pour tout  $S_0 \subset S$  fini et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $u = u_{S_0, \varepsilon} \in \ell^2(G)$  telle que

$$\sup_{s \in S_0} \|u - u \circ s\|_{\ell^2(G)} \leq \varepsilon \|u\|_{\ell^2(G)}.$$

Lorsque  $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma/\Gamma')$ , nous notons  $\rho_K : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  la *représentation de Koopman*, définie pour tout  $u \in \mathcal{H}$  et tout  $\alpha, \gamma \in \Gamma$  par

$$\rho_K(\gamma)u(\alpha\Gamma') = u(\gamma\alpha\Gamma').$$

C'est une représentation unitaire positive de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{H}$ . Rappelons que par la Définition 6.1.2, le sous-groupe  $\Gamma'$  est co-moyennable dans  $\Gamma$  si et seulement si la représentation  $\rho_K$  admet presque des vecteurs invariants.

Soit  $\rho : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  une représentation unitaire positive dans le treillis de Hilbert  $\mathcal{H}$  (quelconque). Pour tout ensemble fini  $S \subset \Gamma$  et pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , on a

$$\sum_{\gamma \in S} e^{-sd(o, \gamma o)} \rho(\gamma) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

**Définition 6.3.2.** On appelle *exposant critique de  $\rho$*  la quantité

$$\delta_\rho = \sup \left\{ s > 0 ; \exists M > 0 ; \forall S \subset \Gamma \text{ fini, } \left\| \sum_{\gamma \in S} e^{-sd(o, \gamma o)} \rho(\gamma) \right\| \leq M \right\}.$$

<sup>1</sup>Notons pour le lecteur francophone que le mot anglais «*lattice*» signifie, selon les contextes, un *réseau* ou un *treillis*. Nous nous trouvons malheureusement dans la situation où les deux significations co-existent !

Le lemme suivant découle d'un calcul élémentaire (cf Lemm. 6.1 de [CDST18]).

**Lemme 6.3.8.** *Avec les notations précédentes, on a  $\delta_\rho \leq \delta_\Gamma(d)$ . De plus, pour tout  $s > \delta_\rho$ ,*

$$A(s) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(o, \gamma o)} \rho(\gamma) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \quad (6.3)$$

Enfin, si  $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma/\Gamma')$  et  $\rho = \rho_K$ , alors  $\delta_{\Gamma'}(d) \leq \delta_\rho$ .

Le résultat crucial de notre travail [CDST18] est le résultat suivant.

**Théorème 6.3.9** (Coulon-Dougall-Schapira-T. 2018, [CDST18], Theo. 5.2). *Soit  $\Gamma$  un groupe discret agissant par isométrie sur un espace Gromov-hyperbolique  $(X, d)$  avec trou critique, i.e.  $\delta_\Gamma^\infty(d) < \delta_\Gamma(d)$ . Alors toute représentation unitaire positive  $\rho : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  de  $\Gamma$  dans un treillis de Hilbert telle que  $\delta_\rho = \delta_\Gamma$  admet presque des vecteurs invariants.*

Combiné avec le Lemme 6.3.8, cela implique immédiatement le corollaire suivant, qui fournit l'implication «difficile» du Théorème 6.3.5.

**Corollaire 6.3.10.** *Soit  $\Gamma$  un groupe discret agissant par isométrie sur un espace Gromov-hyperbolique  $(X, d)$  avec trou critique. Soit  $\Gamma' < \Gamma$  un sous-groupe tel que  $\delta_{\Gamma'}(d) = \delta_\Gamma(d)$ . Alors  $\Gamma'$  est co-moyennable dans  $\Gamma$ .*

La fin de ce paragraphe est consacrée à une esquisse de la preuve du Théorème 6.3.9. Nous fixons donc  $\rho : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  une représentation unitaire positive dans le treillis de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Par une adaptation immédiate du Lemme de Patterson présenté au Paragraphe 1.2.2, il existe une fonction croissante  $\theta : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  qui possède les propriétés suivantes :

1. pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $t_\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $u > 0$ , on a

$$\theta(t_\varepsilon + u) \leq e^{\varepsilon u} \theta(t_\varepsilon);$$

2. pour tout  $x \in \widetilde{M}$  on a  $\lim_{s \rightarrow \delta_\rho} \|\widetilde{A}(s)\| = +\infty$ , où pour tout  $s > \delta_\rho$  on a noté

$$\widetilde{A}(s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \theta(d(o, \gamma o)) e^{-sd(o, \gamma o)} \rho(\gamma).$$

Pour tout  $x \in X$  et tout  $s > \delta_\rho$ , on pose

$$a_{x,s}^\rho = \frac{1}{\|\widetilde{A}(s)\|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \theta(d(o, \gamma o)) e^{-sd(x, \gamma o)} \mathbb{D}_{\gamma o} \rho(\gamma),$$

où comme au Paragraphe 1.2.2 nous notons  $\mathbb{D}_y$  la mesure de Dirac au point  $y \in X$ . On vérifie sans difficulté que  $a_{x,s}^\rho$  est une mesure sur  $X$  à valeurs dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , au sens de l'intégrale de Bochner (cf [CDST18], Appendix A). Nous identifions

une telle mesure à l'application linéaire  $a_{x,s}^\rho : \mathcal{C}(\overline{X}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  qu'elle représente, où  $\mathcal{C}(\overline{X})$  est l'ensemble des applications continues de  $\overline{X} = X \cup \partial^\infty X$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $x, y \in X$ , les mesures  $a_{x,s}^\rho$  et  $a_{y,s}^\rho$  sont absolument continues l'une par rapport à l'autre, avec comme pour les densité de Patterson-Sullivan standard, pour tout  $\xi \in X$ ,

$$\frac{da_{x,s}^\rho}{da_{y,s}^\rho}(\xi) = e^{-s(d(x,\xi) - d(y,\xi))}. \quad (6.4)$$

Enfin, un calcul direct montre que pour tout  $\gamma \in \Gamma$  and all  $f \in \mathcal{C}(X, \mathcal{H})$ , on a

$$a_{\gamma x,s}^\rho(f) = \rho(\gamma) a_{x,s}^\rho(f \circ \gamma). \quad (6.5)$$

Comme pour la théorie de Patterson-Sullivan classique, nous souhaiterions extraire une valeur d'adhérence de  $(a_{o,s}^\rho)_{s > \delta_\rho}$  lorsque  $s \rightarrow \delta_\rho$ . Ce n'est en général pas possible, car l'espace  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  n'est pas localement compact. Nous contournons ce problème en nous fixant un **ultra-filtre non-principal**  $\omega : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \{0, 1\}$ , voir la Section 5.2 de [CDST18] pour quelques rappels sur cette notion. Toute suite  $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$  bornée «converge» ( $\omega$ -converge, pour être précis) alors vers une *ultra-limite*  $u_\omega$ , élément d'un treillis de Hilbert (plus gros, non-séparable) que nous notons  $\mathcal{H}_\omega$ . De même, toute suite d'opérateurs  $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  uniformément bornés  $\omega$ -converge vers un opérateur  $a_\omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ , et la représentation  $\rho$  induit une représentation  $\rho_\omega : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\omega)$ , qui est encore unitaire et positive. On montre sans difficulté que  $\delta_{\rho_\omega} = \delta_\rho$ .

Une application directe des définitions montre que  $\rho$  admet presque des vecteurs invariants si et seulement si  $\rho_\omega$  admet un vecteur invariant non-nul. En particulier, si  $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma/\Gamma')$  et  $\rho = \rho_K$ , alors  $\Gamma'$  est co-moyennable dans  $\Gamma$  si et seulement si  $\rho_\omega$  admet un vecteur invariant non-nul. Nous allons déterminer ce vecteur invariant grâce aux propriétés ergodiques du flot géodésique.

Fixons une suite  $(s_n \in ]\delta_\rho, +\infty[)_{n \geq 0}$  qui converge vers  $\delta_\rho$ . Pour tout  $x \in X$ , et tout borélien  $A \subset \overline{X} = X \cup \partial^\infty X$ , nous notons  $a_x^\rho(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$  l' $\omega$ -limite des  $a_{x,s_n}^\rho(A)$ . Cela définit une application linéaire  $a_x^\rho : \mathcal{C}(\overline{X}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ , que nous appellerons une *mesure* sur  $\overline{X}$  à valeur dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ ,

**Théorème 6.3.11** ([CDST18], Theo. 5.10). *La famille  $(a_x^\rho)_{x \in X}$  est une densité  $\delta_\rho$ -conforme et  $\rho_\omega$ -équivariante, i.e. une famille de mesures sur  $\Lambda_\Gamma \subset \partial X$  à valeurs dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$  telle que :*

1. *pour tous  $x, y \in X$ , les mesures  $a_x^\rho$  et  $a_y^\rho$  sont absolument continues l'une par rapport à l'autre (au sens de Bochner) et on a pour tout  $\xi \in \partial X$ ,*

$$\frac{da_x^\rho}{da_y^\rho}(\xi) = e^{-\delta_\rho \beta_\xi(x,y)}.$$

2. *pour tout  $x \in X$ , tout  $\gamma \in \Gamma$  et tout  $f \in \mathcal{C}(\overline{X})$ ,*

$$a_{\gamma x}^\rho(f) = \rho_\omega(\gamma) a_x^\rho(f \circ \gamma).$$



Nous l'appelons la densité de Patterson-Sullivan de  $\Gamma$  agissant sur  $(X, d)$  tordue par  $\rho$ .

La propriété suivante se prouve exactement de même que le Théorème 2.2.3 pour les mesures de Patterson-Sullivan classiques.

**Proposition 6.3.12** ([CDST18], Prop. 5.17). *Si  $\delta_\Gamma^\infty(d) < \delta_\rho$ , alors*

$$a_\rho^\rho(\Lambda_\Gamma \setminus \Lambda_\Gamma^{\text{rad}}) = 0.$$

Tout ensemble contenu dans l'ensemble limite radial est recouvert par des ombres de boules de même rayon, situées arbitrairement loin de l'origine, qui forment un recouvrement de multiplicité finie. Combiné aux propriétés ergodiques de l'actions de  $\Gamma$  sur  $\partial^2 X$  (cf Théorème 1.2.1), on en déduit alors le résultat suivant, qui conclut la preuve du Théorème 6.3.9 lorsque  $(X, d)$  est  $\text{CAT}(-1)$ .

**Théorème 6.3.13** ([CDST18], Section 5.6). *Avec les notations précédentes, si  $\delta_\rho = \delta_\Gamma(d) > \delta_\Gamma^\infty(d)$ , la mesure tordue  $a_\rho^\rho$  est proportionnelle à la mesure de Patterson-Sullivan classique  $\nu_\rho^\Gamma$  : il existe une application linéaire  $D : \mathcal{H}_\omega \rightarrow L^\infty((\partial X, \nu_\rho^\Gamma), \mathcal{H}_\omega)$  telle que pour tout  $f \in C(\bar{X})$  et pour tout  $\varphi \in \mathcal{H}_\omega$ , on a*

$$a_\rho^\rho(f)\varphi = \int_{\partial^\infty X} D(\varphi) f d\nu_\rho^\Gamma.$$

*De plus, si  $(X, d)$  est  $\text{CAT}(-1)$ , alors pour tout  $\varphi \in \mathcal{H}_\omega$ , l'application  $D(\varphi)$  est  $\nu_\rho^\Gamma$ -p.s. constante, et le vecteur  $D(\varphi)$  est  $\rho_\omega$ -invariant. En particulier, comme  $\|a_\rho^\rho(\mathbf{1})\| = 1$ , la représentation  $\rho_\omega$  admet des vecteurs invariants non-nuls.*

Lorsque  $(X, d)$  n'est que Gromov-hyperbolique, la construction précédente fournit une densité (à valeurs dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ ) qui est  $\delta_\rho$ -conforme et  $\rho_\omega$ -invariante sur le bord de Busemann  $\partial^h X$ , bord qui est plus gros que le bord visuel  $\partial^\infty X$ . Elle induit une densité sur le bord visuel qui est  $\rho_\omega$ -équivariante mais n'est que *quasi-conforme*. Il reste alors encore un peu de travail pour déduire de la construction précédente l'existence d'un vecteur invariant pour  $\rho_\omega$ , que nous ne présentons pas ici. Nous renvoyons à [CDST18] pour les définitions du bord de Busemann et les subtilités nécessaires à l'extension de la preuve que nous avons présentée au cas où  $(X, d)$  est un espace Gromov-hyperbolique.

# Chapitre 7

## Quelques perspectives

De nombreuses perspectives surgissent naturellement des techniques et résultats présentés dans ce mémoire. Je n'en présente ici que quelques unes :

- celles sur lesquelles j'ai déjà eu l'occasion de réfléchir ;
- certaines sur lesquelles je n'ai pas encore sérieusement réfléchi mais qui me semblent des pistes particulièrement intéressantes.

### 7.1 Spectre du Laplacien et dynamique

#### 7.1.1 Bas du spectre et entropie

Les liens entre bas du spectre et entropie, puis entre bas du spectre essentiel et entropie à l'infini, présentés au Chapitre 3 ont été prouvés pour la première fois dans ce manuscrit. Il est donc prioritaire de terminer la rédaction de l'article [Tap20a].

Par ailleurs, nous avons vu que nos résultats qui relient le bas du spectre à l'entropie sont essentiellement basés sur des contrôles de la courbure moyenne des horosphères. On dit qu'une variété à courbure négative ou nulle simplement connexe est *asymptotiquement harmonique* si la courbure moyenne de toutes ses horosphères est constante (voir par exemple [KP16]). Il est donc plausible que nous puissions étendre les Théorèmes 4.2.9 et 4.3.2 à *tous les quotients de variétés asymptotiquement harmoniques de courbure négative ou nulle*. Cette question est la prochaine étape de mon étude reliant entropie et bas du spectre.

Voici trois autres directions motivantes, deux déjà avancées, la troisième au stade de réflexion préliminaire.

#### 7.1.2 Nombre de valeurs propres isolées pour les surfaces convexe-cocompactes

Avec P. Jammes, nous espérons montrer que si pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ , il existe  $C = C(p, q)$  tel que si  $(\Sigma, g) = \mathbb{H}^2/\Gamma$  est une surface hyperbolique convexe

co-compacte de genre  $p$  avec  $q$ -trompettes, alors

$$\delta_\Gamma \leq \frac{C(p, q)}{\text{sys}(\Sigma, g)} \quad (7.1)$$

où  $\text{sys}(\Sigma, g)$  est la longueur de la plus petite géodésique fermée sur  $(\Sigma, g)$ . Il existe des surfaces hyperboliques convexe-cocompacte de genre  $(p, q)$  fixé (avec  $q \geq 1$ ) telles que  $\text{sys}(\Sigma, g)$  soit arbitrairement grande. Par le Théorème 4.2.9 cela impliquerait que, le genre de la surface étant fixé, dès que la systole est assez grande la surface  $(\Sigma, g)$  n'a pas de spectre discret. En adaptant un résultat célèbre d'Otal (cf [Ota98]), cela permettrait de borner en fonction du genre et de la systole le nombre de valeurs propres sur  $(\Sigma, g)$  inférieures à  $\frac{1}{4}$ .

### 7.1.3 Bas du spectre explicite pour certains revêtements non-moyennables

Avec V. Delecroix, P. Hubert et M. Möller, nous avons étudié une classe particulière de revêtements non-moyennables obtenus par exemple de la façon suivante. Soit  $\Sigma_1$  une surface de genre  $g$ ,  $x \in \Sigma_1$  un point quelconque et  $\Sigma_2 = \Sigma_1 \setminus \{x\}$ . Posons  $\Gamma_1 = \pi_1(\Sigma_1)$ ,  $\Gamma_2 = \pi_2(\Sigma_2)$ . On note  $\varphi : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1$  le morphisme induit par l'injection  $\Sigma_2 \hookrightarrow \Sigma_1$  et  $N = \ker(\varphi) \triangleleft \Gamma_2$ .

Munissons  $\Sigma_2$  d'une métrique hyperbolique  $g_H$  : on a  $(\Sigma_2, g_H) = \mathbb{H}^2/\Gamma_2$  pour une action par isométries discrète et sans point fixe de  $\Gamma_2$ . Le revêtement  $p : \mathbb{H}^2/N \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma_2$  est galoisien non-moyennable, et son groupe de revêtement est  $\Gamma_1$ .

**Question 1.** *A-t-on  $\lambda_0(\mathbb{H}^2/N) = \frac{\chi(\Sigma_1)}{4\chi(\Sigma_2)}$ , où  $\chi(\Sigma_i)$  est la caractéristique d'Euler de  $\Sigma_i$  ?*

Une réponse positive fournirait les premiers exemples de surfaces non-compactes dont on sait explicitement calculer le bas du spectre. En utilisant les propriétés d'équidistribution du flot horocyclique, nous avons montré en 2014 que

$$\lambda_0(\mathbb{H}^2/N) \leq \frac{\chi(\Sigma_1)}{\chi(\Sigma_2)4}. \quad (7.2)$$

Ce projet a été laissé de côté à l'époque, faute d'idée pertinente pour attaquer l'autre inégalité.

Les outils introduits depuis pour comprendre la dynamique non-compacte et décrits dans ce mémoire, notamment l'entropie à l'infini et son lien avec le bas du spectre essentiel, suggèrent de nouvelles pistes d'attaques. En effet, puisque  $p$  est un revêtement galoisien infini et par la majoration (7.2), on a d'après les résultats du Chapitre 2 et du Chapitre 4,

$$\delta_N = \delta_N^\infty > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_0(\mathbb{H}^2/N) = \lambda_0^{ess}(\mathbb{H}^2/N) = \delta_N(1 - \delta_N).$$

Ce projet attend devrait donc être ré-ouvert dès que le temps le permettra.

### 7.1.4 Interprétation dynamique des autres fonctions propres

Voici maintenant une question intrigante. Supposons que  $(M, g) = \mathbb{H}^2/\Gamma$  est une surface hyperbolique dont le Laplacien admet au moins deux valeurs propres isolées

$$0 \leq \lambda_0(M, g) < \lambda_1(M, g) < \lambda_0^{ess}(M, g). \quad (7.3)$$

Supposons pour simplifier que  $\lambda_1(M, g)$  est une valeur propre simple, associée à la «seconde» fonction propre  $\varphi_1$ . Nous avons vu au Chapitre 3 que l'inégalité (7.3) implique que  $\delta_\Gamma > \frac{1}{2}$ , et que la fonction propre  $\varphi_0$  associée à  $\lambda_0(M, g)$  a une interprétation purement dynamique, donnée par le Théorème 4.2.9. Il a été montré par Helgason dans [Hel81] que toute fonction  $\varphi$  sur  $\mathbb{H}^2$  vérifiant  $\Delta\varphi = \lambda\varphi$  pour un  $\lambda > 0$  s'écrit

$$\varphi(x) = \int_{\partial\mathbb{H}^{n+1}} e^{\delta\beta_\xi(o,x)} d\nu^\varphi(\xi),$$

où  $\delta \in \mathbb{C}$  vérifie  $\lambda = \delta(1 - \delta)$  et  $\nu^\varphi$  est une *distribution à valeurs complexes* sur  $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{S}^1$ . Lorsque  $\varphi$  est bornée, Otal a montré dans [Ota98] que cette distribution est la dérivée d'une fonction Hölder. Nous avons vu que si  $\varphi = \varphi_0$ , alors  $\nu^\varphi = \nu_\Gamma$  est la masse de la mesure de Patterson-Sullivan pour  $\Gamma$  vue de  $o$ .

**Question 2.** *Peut-on trouver une construction dynamique de  $\nu^{\varphi_1}$ , dans l'esprit de la construction de Patterson-Sullivan, lorsque  $\varphi_1$  est la seconde fonction propre sur  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  ?*

Il y a fort à penser que si une telle construction est possible, elle soit fortement reliée aux *modes propres* associés aux résonances de l'opérateur de Ruelle associé au flot géodésique sur  $S\mathbb{H}^2/\Gamma$  (voir par exemple la Section 2.3 de [Gou16] pour une définition), dont nous reparlons dans la section suivante.

## 7.2 Propriétés dynamiques fines pour les variétés avec trou critique

Nous avons vu sur différents sujets que si  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  est une variété complète à courbure négative ayant un trou critique (SPR), alors beaucoup de propriétés ergodiques du flot géodésique se comportent comme dans le cas des variétés compactes :

- la mesure d'entropie maximale est finie ;
- pour toute petite perturbation de la métrique, le flot géodésique possède encore une mesure d'entropie maximale finie ;
- lorsque la variété est localement symétrique et son exposant critique assez gros pour influencer le bas du spectre du Laplacien, alors le Laplacien présente un trou spectral ;

- dans une classe conforme, les extrema de l'entropie sont les métriques à courbure constante;
- équivalence entre moyennabilité des revêtements et égalité des exposants critiques.

Voici deux questions qui semblent prometteuses.

**Question 3.** Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété complète à courbure négative pincée, et  $F : S^g M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel Hölder avec un trou critique :  $\delta_\Gamma(F, g) > \delta_\Gamma^{ess}(F, g)$ . Supposons que le flot géodésique est topologiquement mélangeant sur son ensemble non-errant. Est-il exponentiellement mélangeant par rapport à la mesure de Gibbs associée à  $F$  ?

Rappelons que l'on dit que le flot géodésique ( $g^t$ ) est **mélangeant** par rapport à la mesure de probabilité invariante  $m$  si, pour tout  $u, v \in L^2(S^g M, m)$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{S^g M} u \cdot v \circ g^t dm = \int_{S^g M} u dm \cdot \int_{S^g M} v dm,$$

et **exponentiellement mélangeant** s'il existe  $C, \alpha > 0$  tel que pour toutes fonctions  $u, v \in L^2(S^g M, m)$  assez régulières (en un sens à préciser), on a pour tout  $t > 0$ ,

$$\left| \int_{S^g M} u \cdot v \circ g^t dm - \int_{S^g M} u dm \cdot \int_{S^g M} v dm \right| \leq C e^{-\alpha t}.$$

Nous avons vu au Chapitre 5 que le flot géodésique est topologiquement mélangeant si et seulement s'il est mélangeant pour toute mesure de Gibbs. Il est conjecturé que pour toute variété non-élémentaire à courbure négative, le flot géodésique est topologiquement mélangeant. On pourra par exemple se référer à [Dal00] pour une liste des situations où le mélange topologique est connu. Il est à noter que la question est ouverte pour même pour les variétés convexes-cocompactes à courbure négative pincée.

Sur les surfaces compactes à courbure négative, une réponse positive à la Question 3 a été donnée par les travaux fondateurs de Dolgopyat [Dol98]. Pour une variété compacte de dimension plus grande, dont la courbure est négative est  $\frac{1}{4}$  pincée, Dolgopyat montrait le même résultat pour la mesure de Liouville qui est une mesure de Gibbs très particulière. Pour cette même mesure de Liouville, l'hypothèse de pincement de courbure a été supprimée par les travaux de Liverani [Liv04], en utilisant le fait que la mesure de Liouville est la mesure de volume associée à la structure de contact invariante par le flot géodésique. Pour une mesure de Gibbs générale, la question est ouverte dans de nombreuses situations même pour les variétés compactes. Lorsque le potentiel est nul (la mesure est alors la mesure de Bowen-Margulis), le mélange exponentiel a été montré par Giulietti, Liverani et Pollicott dans [GLP13].

Ces questions font l'objet de nombreuses recherches actuelles, et reposent sur l'étude de l'**opérateur de Ruelle**  $f \mapsto f \circ g^t$  agissant sur des espaces

fonctionnels adaptés, typiquement des espaces de distributions sur  $S^gM$  qui sont des espaces de Banach *anisotropes* : leur norme quantifie des propriétés de régularité différentes dans les directions stables et instables. Nous renvoyons par exemple à [GL06] ou [BT07] pour la construction de tels espaces.

Avec B. Schapira et S. Gouëzel, nous avons commencé récemment à étudier ces questions dans le cas du flot géodésique muni de la mesure de Gibbs associée à un potentiel avec trou critique. Nous proposons une construction d'espaces anisotropes inspirée de [GL06] et adaptés à la propriété de trou critique, qui permettent d'étendre la résolvante de l'opérateur de Ruelle à une bande  $\{\Re(z) > c\}$ , où  $c < \delta_\Gamma(F, g)$ . Pour en déduire le mélange exponentiel, il faudra ensuite adapter les méthodes à la Dolgopyat-Liverani, qui montrent l'absence de résonances dans une telle bande, à notre situation. Alors que S. Gouëzel est spécialiste de ces questions, B. Schapira et moi commençons à peine à nous approprier les techniques de preuves qui sont assez lourdes.

Rappelons que le *logarithme intégral* est défini, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\operatorname{li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt.$$

Un calcul classique montre que  $\operatorname{li}(x) \sim \frac{x}{\ln x}$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ . Rappelons que pour tout compact  $W \subset S^gM$ , on note  $\mathcal{P}_W(R)$  l'ensemble des géodésiques fermées sur  $(M, g)$  de longueur au plus  $R$  et qui intersectent  $W$ . Comme expliqué par exemple dans [GLP13] dans le cas des variétés compactes, l'étude des propriétés analytiques fines de l'opérateur de Ruelle est susceptible de permettre de répondre à la question suivante, qui est une amélioration majeure du Théorème 5.2.3.

**Question 4.** *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété à courbure négative pincée avec trou critique dont le flot est topologiquement mélangeant. Existe-t-il  $c \in ]0, \delta_\Gamma(g)[$  tel que pour tout  $W \subset S^gM$  compact dont l'intérieur intersecte l'ensemble non-errant, on a lorsque  $R \rightarrow +\infty$ ,*

$$\#\mathcal{P}_W(R) = \operatorname{li}\left(e^{\delta_\Gamma(g)R}\right) + \mathcal{O}\left(e^{cR}\right)?$$

Une réponse positive lorsque  $(M, g)$  est *compacte* a été montrée dans [Dol98] pour les surfaces, puis dans [Sto13] lorsque la courbure est  $\frac{1}{4}$  pincée, et enfin dans [GLP13] lorsque la courbure est  $\frac{1}{9}$  pincée. Lorsque  $(M, g) = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma$  est *hyperbolique réelle convexe-cocompacte* avec  $\delta_\Gamma > \frac{n}{2}$ , une réponse positive a été apportée dans [GN06] par des méthodes complètement différentes, reposant sur une analyse fine de l'opérateur des ondes dont le lien avec le flot géodésique est spécifique aux variétés hyperboliques réelles.

Nous espérons que les techniques décrites dans ce mémoire combinées aux méthodes développées ces dernières années par Baladi, Dolgopyat, Faure, Gouëzel, Liverani, Tsuji et bien d'autres permettront d'attaquer le cas plus général des variétés à courbure variable et trou critique.

On cherchera bien sûr également à répondre à l'analogie de la Question 4 pour les géodésiques pondérées, qui fournirait un reste exponentiellement petit dans l'estimée donnée par le Théorème 5.2.7.

### 7.3 Mesure de Bowen-Margulis finie sans trou critique

Il existe des variétés complètes à courbure négative pincée, ayant une mesure de Bowen-Margulis finie mais pas de trou critique. À ma connaissance, les seuls exemples explicites sont les groupes de Schottky avec cusps dont la métrique est convenablement choisie, d'abord décrits par Peigné dans [Pei11], et décrits à la Section 5.1.2 de ce manuscrit. Par ailleurs, les travaux de Sarig sur l'étude des chaînes de Markov à alphabet dénombrable (voir par exemple [Sar99], [Sar01], [Sar02]...) suggèrent que les dynamiques de mesure finie sans trou critique sont d'une certaine façon *à la limite* des comportements en mesure infinie, et sont susceptibles de fournir de nombreux exemples de comportements intéressants et qui ne peuvent arriver pour des dynamiques compactes. Une direction prometteuse est donc d'explorer plus systématiquement ce monde des variétés à courbure négative, de mesure de Bowen-Margulis finie et sans trou critique, en commençant par construire des exemples.

Voici quelques questions naturelles qui semblent prometteuses.

**Question 5.** *Existe-t-il des surfaces hyperboliques dont la mesure de Bowen-Margulis est finie mais sans trou critique ? Plus généralement, en dimension supérieure, existe-t-il des variétés localement symétriques dont la mesure de Bowen-Margulis est finie mais sans trou critique ?*

Il découle des résultats présentés au Chapitre 2 que de telles surfaces hyperboliques sont nécessairement de genre infini. De bons candidats seraient les surfaces «à la Ancona» décrites à la Section 2.3.1, en espérant montrer que sous de bonnes conditions, leur Laplacien possède une première fonction propre mais pas de trou spectral, ce qui par le Chapitre 3 impliquerait le résultat.

**Question 6.** *Soit  $(M, g)$  une variété complète à courbure négative, dont la mesure de Bowen-Margulis est finie mais sans trou critique. Existe-t-il toujours une perturbation de la métrique  $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-1, 1)}$  de la métrique, continue en topologie  $C^1$ -uniforme (au sens de la Définition 3.1.3), telle que pour tout  $\varepsilon \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ , les mesures de Bowen-Margulis sur  $(M, g_\varepsilon)$  sont de masse infinie ?*

Ce phénomène d'un basculement instantané d'une mesure finie vers une mesure infinie est en général appelé *transition de phase*, et a été montré par Sarig dans [Sar01] pour les décalages de Markov sur un alphabet dénombrable. A défaut de répondre complètement à cette question, voici une étape intermédiaire intéressante.

**Question 7.** *Soit  $(M, g)$  une variété complète à courbure négative, dont la mesure de Bowen-Margulis est finie mais sans trou critique. Existe-t-il toujours*

une perturbation  $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-1,1)}$  de la métrique, continue en topologie  $C^1$ -uniforme (ou  $C^k$ ), telle que les mesures de Bowen-Margulis  $m_{BM}^{g_\varepsilon}$  sur les  $(M, g_\varepsilon)$  sont ergodiques (donc uniques) mais telle que leur masse  $\varepsilon \mapsto \|m_{BM}^{g_\varepsilon}\|$  ne varie pas continûment ?

Des phénomènes de *perte de masse à l'infini* pourraient entraîner une réponse positive à cette question. De tels phénomènes ont été observés lorsque l'on fait *varier le potentiel* (et non la métrique sous-jacente) dans [Sar01] pour les décalages de Markov sur des alphabets dénombrables, et dans [RV19] pour des variétés géométriquement finies. Il serait intéressant d'étudier une adaptation de ces méthodes à une variation de la métrique, le potentiel restant fixé à 0. Notons que cela fournirait des exemples de familles de métriques  $C^k$  pour lesquelles l'entropie topologique varierait continûment mais pas différentiablement.

Enfin, en lien avec les questions de vitesses de mélange évoquées à la section précédente, la question suivante semble tout à fait prometteuse.

**Question 8.** *Existe-t-il une variétés  $(M, g)$  complète à courbure négative, dont la mesure de Bowen-Margulis est finie mais sans trou critique, dont le flot géodésique est sous-exponentiellement mélangeant, i.e. il existe une fonction  $F : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  qui converge sous-exponentiellement vers 0 telle que pour tout*

$$\left| \int_{S^g M} u \cdot v \circ g^t dm - \int_{S^g M} u dm \cdot \int_{S^g M} v dm \right| \geq F(t)?$$

Pour les décalages de Markov sur un alphabet dénombrables, de tels exemples ont été construits par Sarig dans [Sar02]. La construction d'analogues géométriques (par exemple des groupes de Schottky) aux exemples de Sarig semble abordable.

## 7.4 Propriétés ergodiques en courbure négative ou nulle

L'ensemble de ce mémoire concerne la dynamique sur les variétés non-compactes en courbure uniformément négative. Un domaine de recherche proche très actif est l'étude des flots *non-uniformément hyperboliques* sur les variétés compactes, comme peuvent l'être les flots géodésiques sur les variétés à courbure négative ou nulle. La littérature est abondante sur ce sujet, les arguments souvent délicats, et je ne commence qu'à peine à m'y intéresser sérieusement.

### 7.4.1 Revêtements et moyennabilité pour les espaces localement symétriques de rang supérieur

Certains résultats montrés dans ce mémoire semblent pouvoir s'adapter directement en courbure négative ou nulle, au moins sous certaines hypothèses. Avec



quelques collègues, nous avons commencé notamment à travailler sur l'extension aux variétés localement symétriques du Théorème 6.3.5 reliant la moyennabilité des revêtements aux exposants critiques dans deux directions.

**Question 9.** *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété localement symétrique à courbure négative ou nulle, et  $\Gamma' \triangleleft \Gamma$  un sous-groupe normal tel que  $\Gamma/\Gamma'$  est moyennable. A-t-on  $\delta_{\Gamma'}(g) = \delta_{\Gamma}(g)$  ?*

**Après la rédaction de ce mémoire, nous avons répondu à cette question (de façon plus complète que ce qui est évoqué ici) avec Olivier Glorieux dans [GT20]. Nous ne présenterons pas les résultats de cet article ici.**

La notion d'exposant critique à l'infini et de trou critique est indépendante d'une borne supérieure sur la courbure. La question suivante est donc naturelle.

**Question 10.** *Soit  $(M, g) = (\widetilde{M}, g)/\Gamma$  une variété localement symétrique à courbure négative ou nulle, où  $\Gamma$  a un trou critique. Soit  $\Gamma' < \Gamma$  un sous-groupe. A-t-on  $\delta_{\Gamma'}(g) = \delta_{\Gamma}(g)$  si et seulement si  $\Gamma'$  est co-moyennable dans  $\Gamma$  ?*

Les groupes discrets agissant sur des espaces localement symétriques de rang supérieur avec trou critique semblent des généralisations très prometteuses des *représentation Anosov* de groupes de surfaces dont l'étude récente a été très fructueuse (cf [Lab08], [GW12], [GGKW17],...) L'étude de leurs propriétés dynamiques est complètement ouverte; nous avons commencé à y réfléchir avec R. Coulon, L. Marquis et B. Schapira.

## 7.4.2 Variétés de rang 1 et billard de Sinai

De nombreux indices suggèrent que la dynamique des flots *uniformément hyperboliques sur une variété non-compacte* et celle des flots *non-uniformément hyperboliques sur un ensemble compact* ont de fortes similarités.

Parmi ces flots non-uniformément hyperboliques, notons deux exemples géométriques où nous souhaiterions étendre les méthodes que nous avons présentées dans ce mémoire :

- le flot de billard sur un billard de Sinai à horizon fini;
- le flot géodésique sur les variétés à courbure négative ou nulle de rang 1.

L'étude des mesures d'entropie maximale ou plus généralement de Gibbs pour ces flots est une question qui a connu un fort développement récent. Notons en particuliers l'article [Kni98] sur l'unicité de la mesure d'entropie maximale pour le flot géodésique en rang 1, l'article [BD19] sur l'existence de la mesure d'entropie maximale pour certains billards de Sinai, ou les travaux récents de Burns, Climenhaga, Fisher et Thomson pour le flot géodésique en rang 1 (cf [BCFT18] et les références qui y sont donnés).

Il semble plausible de remplacer dans ces contexte notre notion d'exposant critique à l'infini par un *exposant critique au voisinage du lieu singulier*. De

---

même pour la pression, en présence d'un potentiel non-nul. En espérant naturellement montrer que cela redonnerait, pour les variétés de rang 1, l'entropie topologique du flot géodésique restreint au lieu singulier. Et en espérant que la propriété de trou-critique permette d'établir l'existence dans ces situations de mesure d'entropie maximale, de mesure de Gibbs...

Ces pistes semblent très prometteuses, et si elles fonctionnent peuvent fournir à elles seules un programme de recherche pour plusieurs années. Je n'ai pour le moment pas encore eu le temps d'y réfléchir sérieusement.



# Bibliographie

- [Abr59] L. M. Abramov, *On the entropy of a flow*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **128** (1959), 873–875.
- [ACT15] Goulnara Arzhantseva, Christopher H Cashen, and Jing Tao, *Growth tight actions*, Pacific Journal of Mathematics **278** (2015), no. 1, 1–49.
- [AM88] Patricio Aviles and Robert C. McOwen, *Conformal deformation to constant negative scalar curvature on noncompact Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **27** (1988), no. 2, 225–239. MR 925121
- [Anc] Alano Ancona, *Exemples de surfaces hyperboliques de type divergent, de mesure de sullivan associées finies mais non géométriquement finies*, unpublished.
- [Bar37] Joseph Barta, *Sur la vibration fondamentale d'une membrane*, C.R. Hebdo. Ac. Sci. Paris **204** (1937), 472–473.
- [BC13] Pierre Bérard and Philippe Castillon, *Spectral positivity and Riemannian coverings*, Bull. Lond. Math. Soc. **45** (2013), no. 5, 1041–1048. MR 3104995
- [BCFT18] Keith Burns, Vaughn Climenhaga, Todd Fisher, and Dan Thompson, *Unique equilibrium states for geodesic flows in nonpositive curvature*, Geom. Funct. Anal. **28** (2018), no. 5, 1209–1259. MR 3856792
- [BCG95] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot, *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), no. 5, 731–799. MR 1354289
- [BD19] Viviane Baladi and Mark Demers, *On the measure of maximal entropy for finite horizon sinai billiard maps*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) (2019).
- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

- [BK83] M. Brin and A. Katok, *On local entropy*, Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981), Lecture Notes in Math., vol. 1007, Springer, Berlin, 1983, pp. 30–38.
- [BMP18] Werner Ballmann, Henrik Matthiesen, and Panagiotis Polymerakis, *On the bottom of spectra under coverings*, Math. Z. **288** (2018), no. 3-4, 1029–1036. MR 3778988
- [BMP19] ———, *Bottom of spectra and coverings*, arXiv :1911.04371 (2019).
- [Bow72a] Rufus Bowen, *The equidistribution of closed geodesics*, Amer. J. Math. **94** (1972), 413–423. MR 315742
- [Bow72b] ———, *Periodic orbits for hyperbolic flows*, American J. Math **94** (1972), 1–30.
- [Bow73] ———, *Topological entropy for noncompact sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **184** (1973), 125–136.
- [Bow95] B. H. Bowditch, *Geometrical finiteness with variable negative curvature*, Duke Math. J. **77** (1995), no. 1, 229–274. MR 1317633
- [BP92] Riccardo Benedetti and Carlo Petronio, *Lectures on hyperbolic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1992. MR 1219310
- [BR75] Rufus Bowen and David Ruelle, *The ergodic theory of Axiom A flows*, Invent. Math. **29** (1975), no. 3, 181–202. MR 0380889
- [Bro81a] Robert Brooks, *The fundamental group and the spectrum of the Laplacian*, Comment. Math. Helv. **56** (1981), no. 4, 581–598. MR 656213
- [Bro81b] ———, *A relation between growth and the spectrum of the Laplacian*, Math. Z. **178** (1981), no. 4, 501–508. MR 638814
- [Bro85] ———, *The bottom of the spectrum of a Riemannian covering*, J. Reine Angew. Math. **357** (1985), 101–114.
- [BT07] Viviane Baladi and Masato Tsujii, *Anisotropic Hölder and Sobolev spaces for hyperbolic diffeomorphisms*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **57** (2007), no. 1, 127–154. MR 2313087
- [Can14] Jan Cannizzo, *On invariant Schreier structures*, Enseign. Math. **60** (2014), no. 3-4, 397–415. MR 3342650
- [CCdV88] B. Colbois and Y. Colin de Verdière, *Sur la multiplicité de la première valeur propre d’une surface de Riemann à courbure constante*, Comment. Math. Helv. **63** (1988), no. 2, 194–208.
- [CDS18] Rémi Coulon, Françoise Dal’Bo, and Andrea Sambusetti, *Growth gap in hyperbolic groups and amenability*, Geom. Funct. Anal. **28** (2018), no. 5, 1260–1320. MR 3856793

- [CDST18] Rémi Coulon, Rhiannon Dougall, Barbara Schapira, and Samuel Tapie, *Twisted patterson-sullivan measures and applications to amenability and coverings*, preprint HAL (2018).
- [CdV98] Yves Colin de Verdière, *Spectres de graphes*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 4, Société Mathématique de France, Paris, 1998. MR 1652692
- [Cha84] I. Chavel, *Eigenvalues in riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, vol. 115, Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984, Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk.
- [CI99] Kevin Corlette and Alessandra Iozzi, *Limit sets of discrete groups of isometries of exotic hyperbolic spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), no. 4, 1507–1530. MR 1458321
- [CLN06] Bennett Chow, Peng Lu, and Lei Ni, *Hamilton's Ricci flow*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 77, American Mathematical Society, Providence, RI; Science Press Beijing, New York, 2006. MR 2274812
- [Coh82] Joel M. Cohen, *Cogrowth and amenability of discrete groups*, J. Funct. Anal. **48** (1982), no. 3, 301–309. MR 678175
- [Col85] Bruno Colbois, *Petites valeurs propres du laplacien sur une surface de Riemann compacte et graphes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **301** (1985), no. 20, 927–930. MR 829064
- [Cor90] Kevin Corlette, *Hausdorff dimensions of limit sets. I*, Invent. Math. **102** (1990), no. 3, 521–541. MR 1074486
- [Cou12] Yves Coudène, *Théorie ergodique et systèmes dynamiques*, Savoirs Actuels (Les Ulis). [Current Scholarship (Les Ulis)], EDP Sciences, Les Ulis; CNRS Éditions, Paris, 2012. MR 3184308
- [CS14] Philippe Castillon and Andrea Sambusetti, *On asymptotically harmonic manifolds of negative curvature*, Math. Z. **277** (2014), no. 3–4, 1049–1072. MR 3229980
- [Dal00] Françoise Dal'bo, *Topologie du feuilletage fortement stable*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **50** (2000), no. 3, 981–993. MR 1779902
- [DL79] Harold Donnelly and Peter Li, *Pure point spectrum and negative curvature for noncompact manifolds*, Duke Math. J. **46** (1979), no. 3, 497–503. MR 544241
- [Dol98] Dmitry Dolgopyat, *On decay of correlations in Anosov flows*, Ann. of Math. (2) **147** (1998), no. 2, 357–390. MR 1626749

- [Don81] Harold Donnelly, *On the essential spectrum of a complete Riemannian manifold*, *Topology* **20** (1981), no. 1, 1–14. MR 592568
- [DOP00] Françoise Dal’Bo, Jean-Pierre Otal, and Marc Peigné, *Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis*, *Israel Journal of Mathematics* **118** (2000), no. 1, 109–124.
- [DPPS09] Françoise Dal’Bo, Marc Peigné, Jean-Claude Picaud, and Andrea Sambusetti, *On the growth of nonuniform lattices in pinched negatively curved manifolds*, *J. Reine Angew. Math.* **627** (2009), 31–52. MR 2494912
- [DPPS17] Françoise Dal’bo, Marc Peigné, Jean-Claude Picaud, and Andrea Sambusetti, *Convergence and counting in infinite measure*, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **67** (2017), no. 2, 483–520. MR 3669504
- [DR92] Ewa Damek and Fulvio Ricci, *A class of nonsymmetric harmonic Riemannian spaces*, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **27** (1992), no. 1, 139–142. MR 1142682
- [DS16] Rhiannon Dougall and Richard Sharp, *Amenability, critical exponents of subgroups and growth of closed geodesics*, *Math. Ann.* **365** (2016), no. 3-4, 1359–1377. MR 3521093
- [Ebe72] Patrick Eberlein, *Geodesic flows on negatively curved manifolds. I*, *Ann. of Math. (2)* **95** (1972), 492–510.
- [F55] Erling Følner, *On groups with full Banach mean value*, *Math. Scand.* **3** (1955), 243–254. MR 79220
- [FF93] A. Fathi and L. Flaminio, *Infinitesimal conjugacies and Weil-Petersson metric*, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **43** (1993), no. 1, 279–299. MR 1209705
- [Fla95] Livio Flaminio, *Local entropy rigidity for hyperbolic manifolds*, *Comm. Anal. Geom.* **3** (1995), no. 3-4, 555–596.
- [GGKW17] François Guéritaud, Olivier Guichard, Fanny Kassel, and Anna Wienhard, *Anosov representations and proper actions*, *Geom. Topol.* **21** (2017), no. 1, 485–584. MR 3608719
- [GHL04] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine, *Riemannian geometry*, third ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. MR 2088027
- [GL06] Sébastien Gouëzel and Carlangelo Liverani, *Banach spaces adapted to Anosov systems*, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **26** (2006), no. 1, 189–217. MR 2201945
- [Glo18] Olivier Glorieux, *Entropy of embedded surfaces in quasi-Fuchsian manifolds*, *Pacific J. Math.* **294** (2018), no. 2, 375–400. MR 3770118

- [GLP13] P. Giulietti, C. Liverani, and M. Pollicott, *Anosov flows and dynamical zeta functions*, Ann. of Math. (2) **178** (2013), no. 2, 687–773. MR 3071508
- [GN06] Colin Guillarmou and Frédéric Naud, *Wave 0-trace and length spectrum on convex co-compact hyperbolic manifolds*, Comm. Anal. Geom. **14** (2006), no. 5, 945–967. MR 2287151
- [Gou11] Sébastien Gouëzel, *Correlation asymptotics from large deviations in dynamical systems with infinite measure*, Colloq. Math. **125** (2011), no. 2, 193–212. MR 2871313
- [Gou16] ———, *Spectre du flot géodésique en courbure négative [d’après F. Faure et M. Tsujii]*, Astérisque (2016), no. 380, Séminaire Bourbaki. Vol. 2014/2015, Exp. No. 1098, 325–353. MR 3522178
- [Gri80] R. I. Grigorchuk, *Symmetrical random walks on discrete groups*, Multicomponent random systems, Adv. Probab. Related Topics, vol. 6, Dekker, New York, 1980, pp. 285–325. MR 599539
- [GST20] Sébastien Gouëzel, Barbara Schapira, and Samuel Tapie, *Pressure at infinity and strong positive recurrence in negative curvature*, preprint (2020).
- [GT20] Olivier Glorieux and Samuel Tapie, *Critical exponents for normal subgroups in higher rank*, preprint (2020).
- [Gui84] Yves Guivarc’h, *Application d’un théorème limite local à la transience et à la récurrence de marches de Markov*, Théorie du potentiel (Orsay, 1983), Lecture Notes in Math., vol. 1096, Springer, Berlin, 1984, pp. 301–332. MR 890364
- [Gur69] B. M. Gurevič, *Topological entropy of a countable Markov chain*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **187** (1969), 715–718. MR 0263162
- [GW12] Olivier Guichard and Anna Wienhard, *Anosov representations : domains of discontinuity and applications*, Invent. Math. **190** (2012), no. 2, 357–438. MR 2981818
- [Ham90] Ursula Hamenstädt, *Entropy-rigidity of locally symmetric spaces of negative curvature*, Ann. of Math. (2) **131** (1990), no. 1, 35–51. MR 1038357
- [Ham04] ———, *Small eigenvalues of geometrically finite manifolds*, J. Geom. Anal. **14** (2004), no. 2, 281–290. MR 2051688
- [Hel81] Sigurdur Helgason, *Topics in harmonic analysis on homogeneous spaces*, Progress in Mathematics, vol. 13, Birkhäuser, Boston, Mass., 1981. MR 632696



- [HH77] Ernst Heintze and Hans-Christoph Im Hof, *Geometry of horospheres*, J. Differential Geom. **12** (1977), no. 4, 481–491 (1978). MR 512919
- [HK95] Michael Handel and Bruce Kitchens, *Metrics and entropy for non-compact spaces*, Israel J. Math. **91** (1995), no. 1-3, 253–271, With an appendix by Daniel J. Rudolph. MR 1348316
- [Kat80] Anatole Katok, *Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1980), no. 51, 137–173.
- [Kat82] A. Katok, *Entropy and closed geodesics*, Ergodic Theory Dynam. Systems **2** (1982), no. 3-4, 339–365 (1983).
- [Kes59] Harry Kesten, *Symmetric random walks on groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **92** (1959), 336–354. MR 109367
- [KKPW89] A. Katok, G. Knieper, M. Pollicott, and H. Weiss, *Differentiability and analyticity of topological entropy for Anosov and geodesic flows*, Invent. Math. **98** (1989), no. 3, 581–597. MR 1022308
- [KKW91] Anatole Katok, Gerhard Knieper, and Howard Weiss, *Formulas for the derivative and critical points of topological entropy for Anosov and geodesic flows*, Comm. Math. Phys. **138** (1991), no. 1, 19–31.
- [Kli95] Wilhelm P. A. Klingenberg, *Riemannian geometry*, second ed., De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 1, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995. MR 1330918
- [Kni95] Gerhard Knieper, *Volume growth, entropy and the geodesic stretch*, Math. Res. Lett. **2** (1995), no. 1, 39–58.
- [Kni98] ———, *The uniqueness of the measure of maximal entropy for geodesic flows on rank 1 manifolds*, Ann. of Math. (2) **148** (1998), no. 1, 291–314. MR 1652924
- [KP16] Gerhard Knieper and Norbert Peyerimhoff, *Harmonic functions on rank one asymptotically harmonic manifolds*, J. Geom. Anal. **26** (2016), no. 2, 750–781. MR 3472815
- [Lab08] François Labourie, *Cross ratios, Anosov representations and the energy functional on Teichmüller space*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **41** (2008), no. 3, 437–469. MR 2482204
- [Led90] F. Ledrappier, *Harmonic measures and Bowen-Margulis measures*, Israel J. Math. **71** (1990), no. 3, 275–287. MR 1088820
- [Led94] François Ledrappier, *Harmonic 1-forms on the stable foliation*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **25** (1994), no. 2, 121–138.

- [Liv04] Carlangelo Liverani, *On contact Anosov flows*, Ann. of Math. (2) **159** (2004), no. 3, 1275–1312. MR 2113022
- [LP82] Peter D. Lax and Ralph S. Phillips, *The asymptotic distribution of lattice points in Euclidean and non-Euclidean spaces*, J. Functional Analysis **46** (1982), no. 3, 280–350. MR 661875
- [LW10] François Ledrappier and Xiaodong Wang, *An integral formula for the volume entropy with applications to rigidity*, J. Differential Geom. **85** (2010), no. 3, 461–477. MR 2739810
- [Man79] Anthony Manning, *Topological entropy for geodesic flows*, Ann. of Math. (2) (1979), no. 110 (3), 567–573.
- [Mar69] G. A. Margulis, *Certain applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature*, Funkcional. Anal. i Priložen. **3** (1969), no. 4, 89–90. MR 0257933
- [Mil68] J. Milnor, *A note on curvature and fundamental group*, J. Differential Geometry **2** (1968), 1–7. MR 232311
- [OP04] Jean-Pierre Otal and Marc Peigné, *Principe variationnel et groupes kleinien*, Duke Math. J. **125** (2004), no. 1, 15–44. MR 2097356
- [Ota98] Jean-Pierre Otal, *Sur les fonctions propres du laplacien du disque hyperbolique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **327** (1998), no. 2, 161–166. MR 1645108
- [Pat76] S. J. Patterson, *The limit set of a Fuchsian group*, Acta Math. **136** (1976), no. 3-4, 241–273. MR 0450547 (56 #8841)
- [Pei03] Marc Peigné, *On the Patterson-Sullivan measure of some discrete group of isometries*, Israel J. Math. **133** (2003), 77–88.
- [Pei11] ———, *On some exotic Schottky groups*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **31** (2011), no. 2, 559–579.
- [Pei19] ———, *Transition de phase de fonctions orbitales pour des groupes de schottky en courbure négative*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **28** (2019), no. 3, 491–521.
- [Pol18] Panagiotis Polymerakis, *Coverings preserving the bottom of the spectrum*, preprint (2018).
- [PP90] William Parry and Mark Pollicott, *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque (1990), no. 187-188, 268. MR 1085356
- [PPS15] Frédéric Paulin, Mark Pollicott, and Barbara Schapira, *Equilibrium states in negative curvature*, Astérisque (2015), no. 373, viii+281.

- [PS94] Mark Pollicott and Richard Sharp, *Orbit counting for some discrete groups acting on simply connected manifolds with negative curvature*, *Invent. Math.* **117** (1994), no. 2, 275–302. MR 1273266
- [PS18] Vincent Pit and Barbara Schapira, *Finiteness of Gibbs measures on noncompact manifolds with pinched negative curvature*, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **68** (2018), no. 2, 457–510. MR 3803108
- [PTV19] Marc Peigné, Samuel Tapie, and Pierre Vidotto, *Counting for some convergent groups*, *Ann. de l’Inst. Fourier* **to appear** (2019).
- [Riq16] Felipe Riquelme, *Autour de l’entropie des difféomorphismes de variétés non compactes*, PhD thesis, Université Rennes 1 (2016), <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01386691> (2016).
- [Riq18] ———, *Ruelle’s inequality in negative curvature*, *Discrete and Continuous Dynamical systems*, <https://arxiv.org/abs/1601.02843> (2018), no. 6, 2809–2825.
- [Riq20] ———, *Entropies for geodesic flows*, appendix to *Pressure at infinity and strong positive recurrence in negative curvature* by S. Gouëzel, B. Schapira ; S. Tapie (2020).
- [Rob03] Thomas Roblin, *Ergodicité et équidistribution en courbure négative*, *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* (2003), no. 95, vi+96.
- [Rob05] ———, *Un théorème de Fatou pour les densités conformes avec applications aux revêtements galoisiens en courbure négative*, *Israel J. Math.* **147** (2005), 333–357. MR 2166367
- [Rob11] ———, *Comportement harmonique des densités conformes et frontière de Martin*, *Bull. Soc. Math. France* **139** (2011), no. 1, 97–128. MR 2815030
- [RSST15] Julie Rowlett, Pablo Suárez-Serrato, and Samuel Tapie, *Dynamics and zeta functions on conformally compact manifolds*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **367** (2015), no. 4, 2459–2486. MR 3301870
- [RT13] Thomas Roblin and Samuel Tapie, *Exposants critiques et moyennabilité*, *Géométrie ergodique*, *Monogr. Enseign. Math.*, vol. 43, *Enseignement Math.*, Geneva, 2013, pp. 61–92. MR 3220551
- [RT15] ———, *Critical exponent and bottom of the spectrum in pinched negative curvature*, *Math. Res. Lett.* **22** (2015), no. 3, 929–944. MR 3350111
- [RV19] Felipe Riquelme and Anibal Velozo, *Escape of mass and entropy for geodesic flows*, *Ergodic Theory Dynamical Systems* **39** (2019), no. 2, 446–473.

- [Sar99] Omri M. Sarig, *Thermodynamic formalism for countable Markov shifts*, Ergodic Theory Dynam. Systems **19** (1999), no. 6, 1565–1593. MR 1738951 (2000m :37009)
- [Sar01] Omri Sarig, *Phase transitions for countable Markov shifts*, Comm. Math. Phys. **217** (2001), no. 3, 555–577. MR 1822107
- [Sar02] ———, *Subexponential decay of correlations*, Invent. Math. **150** (2002), no. 3, 629–653. MR 1946554
- [SST12a] Pablo Suárez-Serrato and Samuel Tapie, *Conformal entropy rigidity through Yamabe flows*, Math. Ann. **353** (2012), no. 2, 333–357. MR 2915539
- [SST12b] ———, *Conformal entropy rigidity through Yamabe flows*, Math. Ann. **353** (2012), no. 2, 333–357. MR 2915539
- [SST20] Pablo Suárez-Serrato and Samuel Tapie, *Yamabe flow and conformal entropy rigidity on complete manifolds*, in preparation (2020).
- [ST18] Barbara Schapira and Samuel Tapie, *Regularity of entropy, geodesic currents and entropy at infinity*, Ann. Sci. E.N.S. **to appear** (2018).
- [ST19] ———, *Narrow equidistribution and counting of closed geodesics on noncompact manifolds*, Geom. Groups Dyn. **to appear** (2019).
- [Sta13] Manuel Stadlbauer, *An extension of Kesten’s criterion for amenability to topological Markov chains*, Adv. Math. **235** (2013), 450–468. MR 3010065
- [Sto13] Luchezar Stoyanov, *Pinching conditions, linearization and regularity of axiom A flows*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **33** (2013), no. 2, 391–412. MR 2975118
- [Sul79] Dennis Sullivan, *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1979), no. 50, 171–202. MR 556586
- [Sul84] ———, *Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite kleinian groups*, Acta Math. **153** (1984), no. 3-4, 259–277.
- [Sul87] ———, *Related aspects of positivity in Riemannian geometry*, J. Differential Geom. **25** (1987), no. 3, 327–351.
- [Tap10] Samuel Tapie, *Generic metrics, eigenfunctions and riemannian coverings of non compact manifolds*, arxiv :1001.2506 (2010).
- [Tap20a] ———, *Bottom of the spectrum and dynamics in negative curvature, old and new*, in preparation (2020).

- 
- [Tap20b] ———, *Estimates for the bottom of the spectrum on non-amenable coverings*, in preparation (2020).
- [Vel19] Aniball Velozo, *Thermodynamic formalism and the entropy at infinity of the geodesic flow*, preprint (2019).
- [Vid19] Pierre Vidotto, *Ergodic properties of some negatively curved manifolds with infinite measure*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) (2019), no. 160, vi+132, [Publication year previously given as 2018]. MR 3939852
- [Yam60] Hidehiko Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J. **12** (1960), 21–37. MR 125546
- [Yan17] Wenyuan Yang, *Statistically convex-cocompact actions of groups with contracting elements*, arxiv :1612.03648 (2017).
- [Yau73] S. T. Yau, *Remarks on conformal transformations*, J. Differential Geometry **8** (1973), 369–381. MR 339007

# Quelques interactions entre dynamique et analyse sur les variétés non-compactes à courbure négative

Mémoire écrit en vue de l'obtention de l'Habilitation à Diriger les Recherches

---

**Résumé** Dans ce mémoire, nous décrivons les interactions entre dynamique et analyse sur les variétés riemanniennes non-compactes à courbure négative que nous avons obtenues entre 2009 et 2019. Deux quantités célèbres jouent un rôle central dans ce mémoire : l'*entropie topologique* du flot géodésique et le *bas du spectre* du Laplacien. Nous introduisons aussi une quantité définie plus récemment, l'*entropie à l'infini* du flot géodésique. Nous décrivons plusieurs de ses applications : dérivabilité de l'entropie topologique par changement de métrique, rigidité de l'entropie dans une classe conforme, lien entre entropie à l'infini et bas du spectre essentiel du Laplacien, lien entre entropie et moyennabilité des revêtements... Nous terminons ce mémoire par des résultats de comptage pour l'action du groupe fondamental et pour les géodésiques fermées, ainsi que finalement par la présentation de quelques perspectives.

---

**Summary** In this memoir, we describe the interactions between dynamics and analysis on non-compact negatively curved Riemannian manifolds, which we have obtained between 2009 and 2019. Two famous quantities have a crucial role in this memoir : the *topological entropy* of the geodesic flow and the *bottom of the spectrum* of the Laplacian. We also introduce a more recently defined quantity : the *entropy at infinity* of the geodesic flow. We describe several of its applications : differentiability of the topological entropy under a variation of the Riemannian metric, entropy rigidity in a conformal class, relations between entropy at infinity and bottom of the spectrum of the Laplacian, relations between entropy and amenability of coverings... We end this memoir by counting results for the action of the fundamental group and for closed geodesics, and eventually by some perspectives.