HAL
open science

MODÉLISATION 3D SIMPLIFIÉE POUR L'ÉVALUATION NON DESTRUCTIVE DES MATÉRIAUX COMPOSITES ANISOTROPES

Hocine Menana

To cite this version:

Hocine Menana. MODÉLISATION 3D SIMPLIFIÉE POUR L'ÉVALUATION NON DESTRUCTIVE DES MATÉRIAUX COMPOSITES ANISOTROPES. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Nantes (FR), 2009. Français. NNT : . tel-03214027

HAL Id: tel-03214027

https://hal.science/tel-03214027v1

Submitted on 30 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE

« SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION ET DE MATHEMATIQUES »

Année : 2009

Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes

Spécialité : ELECTRONIQUE ET GENIE ELECTRIQUE

Présentée et soutenue publiquement par

Hocine MENANA

le 10 Novembre 2009

à l'IREENA Saint-Nazaire

TITRE

MODÉLISATION 3D SIMPLIFIÉE POUR L'ÉVALUATION NON DESTRUCTIVE DES MATÉRIAUX COMPOSITES ANISOTROPES

Jury

Président	:	M. RAZEK Adel	Directeur de Recherche CNRS, LGEP/SPEE Labs - Paris
Rapporteurs	:	M. LAMBERT Marc	Chargé de Recherche CNRS, HDR, L2S - DRE - Paris
		M. MARCHAND Claude	Professeur à l'Université de Paris Sud 11
Examinateurs	:	M. BERTHIAU Gérard	Professeur à l'Université de Nantes
		M. FELIACHI Mouloud	Professeur à l'Université de Nantes
		M. SAILLARD Joseph	Professeur à l'Université de Nantes

Directeur de Thèse : Mouloud FELIACHI
Laboratoire : IREENA- 37, Boulevard de l'université, BP 406, 44602 Saint-Nazaire Cedex
Co-encadrant : Gérard BERTHIAU
Laboratoire : IREENA- 37, Boulevard de l'université, BP 406, 44602 Saint-Nazaire Cedex
Composante de rattachement du directeur de thèse : IUT de Saint-Nazaire

N° ED 503-072

A ma famille et tous ceux qui me sont chers

Avant - propos

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont été réalisés au sein de l'Institut de Recherche en Electrotechnique et Electronique de Nantes Atlantique, et financés par une bourse de thèse de Nantes Métropole. Une partie des travaux qui y sont présentés a été en traitée dans le cadre d'un programme de coopération PHC-Tassili et un projet interne SEEDS-CNRS.

En premier lieu, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Mouloud Féliachi, Professeur à l'Université de Nantes, pour m'avoir accueilli au sein de l'IREENA et pour avoir accepté de diriger cette thèse. Je retiens ses conseils avisés, la disponibilité constante dont il a toujours fait preuve, et son soutien dans des moments importants.

Je tiens à remercier Monsieur Adel Razek, Directeur de recherche CNRS au LGEP, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance.

Je tiens également à remercier Monsieur Claude Marchand, Professeur à l'Université de Paris Sud, et Monsieur Marc Lambert, Chargé de recherche au L2S, pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, pour l'intérêt qu'ils y ont porté et pour leurs remarques constructives.

Mes vifs remerciements vont à Monsieur Joseph Saillard, Professeur à l'Université de Nantes, pour avoir accepté de faire partie du jury de ma soutenance, et en tant que directeur de l'IREENA, pour sa bienveillance au bon déroulement des travaux de recherche.

Je remercie Monsieur Gérard Berthiau, Professeur à l'Université de Nantes pour les sympathiques échanges qu'on a eus au cours de ma thèse à l'IREENA. Je remercie également Madame Annick Perronet du Laboratoire GEM pour son aide dans la partie expérimentale.

Je remercie les représentants de Nantes Métropole pour l'octroi de la bourse de thèse.

Je tiens à remercier l'ensemble du personnel administratif et technique, pour les nombreux services rendus, et qui étaient indispensables au bon déroulement de mes travaux de recherche.

Je n'oublierai pas de remercier tous mes collègues de l'IREENA, du CRTT et de l'IUT de Saint Nazaire pour leur attention et leur sympathie.

Mes remerciements vont aux membres de la famille Féliachi de Saint Nazaire, pour leur sympathie et pour les agréables moments que j'ai passés avec eux.

Enfin, ma reconnaissance est inexprimable envers mes parents qui se sont beaucoup sacrifiés pour m'offrir toutes les conditions afin que je puisse devenir ce que je suis.

Table des matières

Introduction générale……..……1

Chapitre 1. Etat de l'art ……..…….…….....4

1.1 Introduction 4

1.2 Les matériaux composites à fibres de carbone (CFRPs) 5

1.2.1 La conductivité électrique des CFRPs 7

1.2.2 Les principaux défauts affectant les CFRPs..... 9

1.3 Le CND par courant de Foucault des CFRPs 9

1.3.1 Le principe du CND-CF..... 9

1.3.2 Les capteurs et les fréquences utilisées 10

1.3.3 Les grandeurs exploitables..... 12

1.3.4 La caractérisation des défauts 12

1.3.5 La caractérisation des propriétés physiques et géométriques..... 13

1.3.6 L'aspect modélisation 14

1.4 Conclusion..... 15

Chapitre 2. Mise en équation …..…….……..……...17

2.1 Introduction 17

2.2 Description du système modélisé 17

2.3 Les équations de Maxwell..... 18

2.4 Expression du tenseur de conductivité pour un stratifié en CFRP 20

2.5 Conclusion..... 22

Chapitre 3. Formulation…….…….…….23

3.1 Introduction 23

3.2 Formulation intégro-différentielle en potentiel vecteur électrique T 24

3.3 Approximations des couches minces..... 29

3.4 Calcul de la variation d'impédance de l'inducteur..... 31

3.4.1 Approche énergétique 31

3.4.2 Approche intégrale..... 32

3.5 Conclusion..... 33

Chapitre 4. Mise en œuvre d'un modèle différences finies – Méthode des Moments **34**

4.1 Introduction 34

4.2 Discrétisations de la source et de la charge en CFRP 35

4.2.1 Approximation des dérivées par un schéma différences finies 37

4.2.2 Le tenseur de résistivité associé à chaque volume élémentaire de la charge en CFRP 37

4.3 Construction des matrices 38

4.4 Les conditions aux limites 42

4.5 Résolution des systèmes matriciels 44

4.6 Exploitation des résultats 45

4.6.1 Calcul du champ magnétique de réaction 45

4.6.2 Calcul de la variation d'impédance de l'inducteur 46

4.7 Conclusion 47

Chapitre 5. Implémentation et validation **48**

5.1 Introduction 48

5.2 Description du code de calcul 49

5.3 Validation 49

5.3.1 Bobine à axe vertical sur une plaque mince anisotrope 50

5.3.2 Bobine à axe parallèle à la surface d'une plaque mince anisotrope 55

5.3.3 Bobine à axe vertical à la surface d'une plaque multicouches en CFRP 60

5.4 Conclusion 63

Chapitre 6. Application à l'évaluation des propriétés physiques des CFRPs **64**

6.1 Introduction 64

6.2 Le système modélisé 65

6.3 Résultats et interprétations 66

6.4 Le problème inverse 69

6.5 Conclusion 70

Chapitre 7. Validation expérimentale **72**

7.1 Introduction 72

7.2 Le dispositif expérimental 73

7.3 Identification des paramètres du modèle inverse 74

7.3.1 Prise en compte du tore dans le calcul de la variation d'impédance..... 74
7.3.2 Résultats de modélisation..... 76
7.4 Résultats de mesures et identification des conductivités longitudinale et transversale..... 78
7.5 Vérification..... 79
7.6 Conclusion..... 81

Conclusion générale et perspectives ……..……....**82**

Annexes

Annexe 1. Calcul analytique de l'impédance d'une bobine sur une plaque anisotrope....…… 85
Annexe 2. Calcul analytique du champ électrique induit par une boucle de courant dans une plaque anisotrope …….……....89
Annexe 3. Calcul des éléments singuliers des intégrales ……...92
Annexe 4. Algorithme du bi-gradient conjugué stabilisé (bi-CGSTAB) ……...….95
Annexe 5. Structures des différentes matrices issues de la discrétisation de la formulation …….97
Annexe 6. Liste de quelques publications liées à cette thèse ……...101

Références bibliographiques ……....**103**

Introduction générale

Ce travail s'inscrit à la fois dans la thématique de recherche de modèles d'interaction du champ électromagnétique avec des milieux complexes, et dans la thématique de recherche de modèles tridimensionnels rapides de calcul du champ électromagnétiques ; une thématique qui demeure d'actualité malgré les énormes progrès réalisés en termes de rapidité et de capacité de stockage des outils de calcul numérique. Il constitue une contribution à la modélisation numérique tridimensionnelle simplifiée de l'interaction d'un champ électromagnétique avec une structure en matériau composite stratifié à fibres de carbone (CFRPs[1]), avec comme principale application l'évaluation non destructive par courants de Foucault (END-CF). En effet, l'état de l'art a révélé un besoin en termes de modélisation, clairement exprimé par les utilisateurs de ce type de structures.

Un matériau composite est par définition toute matière (la matrice) métallique ou organique, comportant un renfort allant de la particule de forme allongée à la fibre continue de taille micrométrique. Les matériaux composites apportent de nombreux avantages, notamment la légèreté et la résistance mécanique. Leur utilisation s'est généralisée à plusieurs secteurs industriels comme l'aérospatial, les transports aériens, routiers, maritimes et ferroviaires, la santé, les sports et loisirs… Ils se présentent sous plusieurs formes. Les CFRPs se présentent sous formes d'assemblages de couches minces (plis) constituées de fibres de carbones unidirectionnelles noyées dans une matrice en polymère.

Les principales difficultés rencontrées dans la modélisation du champ électromagnétique dans les CFRPs sont liées à leurs dimensions multi-échelles, à leurs fortes anisotropies, à l'hétérogénéité de leurs structures, ainsi qu'à des couplages capacitifs complexes aux fréquences élevées. Des phénomènes qui imposent des approches de modélisation tridimensionnelles. D'autre part, les

[1] Acronyme de l'expression « **C**arbon **F**iber **R**einforced **C**omposites »

approches de modélisation numériques classiques, de type éléments finis, demeurent lourdes en 3D, et se heurtent à des difficultés en terme de discrétisation (maillage), lorsque les systèmes modélisés impliquent des dimensions multi-échelles et des mouvements.

Dans un premier temps, et dans les limites fréquentielles où les effets capacitifs peuvent être négligés, nous avons développé un modèle numérique, basé sur une formulation intégro-différentielle en potentiel vecteur électrique, pour le calcul du champ électromagnétique dans les CFRPs. Ce modèle tient compte naturellement de la conservation du courant électrique. Outre cet avantage, le terme « intégrale » permet de limiter le domaine d'étude aux parties actives[2] du système modélisé. Ces dernières sont discrétisées séparément ; les aspects multi-échelles et les mouvements sont donc traités plus facilement. D'autre part, compte tenu des structures en couches minces des CFRPs, et sous certaines conditions, ce modèle se réduit à un cas quasi-bidimensionnel n'impliquant que la composante normale du potentiel vecteur électrique, réduisant ainsi considérablement la taille du système à résoudre et le temps de calcul.

Nous ne modélisons pas les CFRPs à l'échelle des fibres; cela engendrerait des systèmes matriciels de tailles démesurées. La structure hétérogène du matériau est représentée par une structure homogène et anisotrope équivalente. La conductivité électrique de chaque couche est représentée par un tenseur qui s'exprime en fonction des conductivités suivant les axes parallèle et transversal aux fibres, ainsi que de l'angle d'orientation des fibres dans un repère choisi.

Un couplage de la méthode des différences finies et la méthode des moments est proposé pour la discrétisation de la formulation intégro-différentielle. La méthode du bi-Gradient conjugué stabilisé est utilisée pour résoudre le système algébrique issu de cette discrétisation. Pour réduire le nombre d'éléments stockés dans la matrice globale et diminuer ainsi le temps de résolution du système algébrique, nous proposons une méthode de résolution itérative où le terme « intégrale » est transféré au second membre. En guise de validation, les résultats numériques sont comparés à un calcul analytique de l'impédance d'une bobine sur une plaque mince anisotrope.

Dans un second temps, nous avons développé une approche de caractérisation du tenseur de conductivité des CFRPs, en utilisant un capteur à courant de Foucault tournant de forme rectangulaire.

[2] Les parties du système, siège d'un courant électrique source ou induit

Nous avons développé un modèle analytique liant directement les composantes du tenseur de conductivité d'un pli en CFRP aux impédances du capteur rectangulaire tournant, correspondant à ses positions parallèle et transversale aux fibres. Cette approche a été validée expérimentalement.

Ce mémoire se compose de sept chapitres. Le premier chapitre constitue un état de l'art, dans lequel on décrit les travaux réalisés dans le domaine du CND par courants de Foucault des CFRPs, en termes d'évaluation des propriétés physiques et de caractérisation des défauts, même si l'aspect caractérisation de défauts n'est pas traité dans la suite de ce travail. La mise en équation et la formulation du problème électromagnétique sont développées dans le second et le troisième chapitre. Le quatrième et le cinquième chapitre traitent, respectivement, la mise en œuvre, l'implémentation et la validation des algorithmes du modèle de calcul développé. Le sixième chapitre décrit l'approche développée pour caractérisation du tenseur de conductivité des CFRPs. Le septième et dernier chapitre constitue une approche de validation expérimentale. Pour finir, une conclusion générale résume les principaux points abordés, ainsi que les perspectives envisagées pour ce travail.

Chapitre 1

Etat de l'art

1.1 Introduction

Un matériau composite est par définition toute matière (la matrice) métallique ou organique, comportant un renfort allant de la particule de forme allongée à la fibre continue [Berreur-02, Bensaid-06a].

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages, notamment la légèreté et la résistance mécanique. Ils enrichissent les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes. Leur utilisation s'est généralisée à plusieurs secteurs industriels comme l'aérospatial, les transports aériens, routiers, maritimes et ferroviaires, la santé, les sports et loisirs…

Durant leur utilisation, les matériaux composites sont soumis à des contraintes mécaniques, thermiques et à des impactes qui engendrent l'apparition de défauts. D'un autre coté, la structure complexe de ces matériaux augmente la probabilité d'apparition de défauts en fabrication. Il est donc nécessaire de contrôler ces matériaux à leur fabrication et durant leur fonctionnement, en utilisant les méthodes de contrôle non destructif (CND).

Plusieurs techniques de CND s'appliquent aux matériaux composites, comme par exemple les ultrasons [Tittmann-00, Wevers-00], la radiographie [Crane-00b], la thermographie infrarouge [Thomas-00], et des techniques électromagnétiques basées sur la mesure de la résistance électrique [Chung-01, Chu-01, Park-03, Xia-03, Angelidis-05, Gebrial-06] ou de la transmission d'un champ électromagnétique radio fréquence [Lemistre-97].

De récentes expériences ont montré qu'il est possible d'effectuer le CND des matériaux composites conducteurs, et ce à moindre coût, en adaptant des équipements à courants de Foucault conventionnels. La technique des courants de Foucault a été utilisée avec succès pour localiser et caractériser des défauts notamment dans les matériaux composites à fibres de carbone [Lane-91, Gros-95, Gros-98, Mook-01, Savin-00, Grimberg-05]. Outre la caractérisation des défauts, le contrôle par courant de Foucault (CND-CF) a été utilisé pour caractériser les propriétés physiques et géométriques de ce type de matériaux [Mook-01].

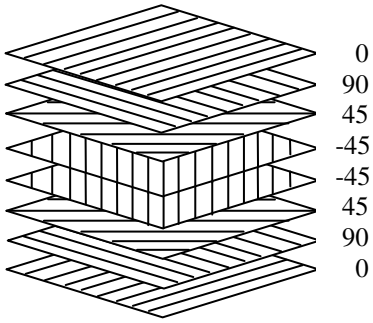
Dans ce chapitre, nous présentons, d'une manière non exhaustive, un état de l'art du CND-CF des matériaux composites polymères à renfort en fibres de carbone. Quelles sont leurs propriétés physiques et géométriques, quels sont les défauts rencontrés dans ces matériaux, quelles sont les possibilités de contrôle par courants de Foucault de ces matériaux, quels sont les types de capteurs utilisés et à quelle fréquence, quelles sont les grandeurs qu'on peut exploiter pour la caractérisation, et finalement, où est ce que l'on est rendu du point de vue de la modélisation, et quelles sont les contraintes rencontrées dans ce domaine. Ce sont là des questions auxquelles nous apportons quelques réponses.

1.2 Les matériaux composites à fibres de carbone (CFRPs)

Plusieurs matériaux sont utilisés comme renforts dans les matériaux composites, comme par exemple la fibre de verre, le bore, la fibre de carbone… En fonction des propriétés recherchées, la structure du renfort peut être aléatoire ou orientée.

Du point de vue de leur architecture, les matériaux composites peuvent être classés en trois types : les monocouches, les stratifiées et les sandwiches [Bensaid-06a]. Le composite monocouche est constitué d'un ou plusieurs plis identiques assemblés avec la même disposition des fibres. Un pli est un semi produit d'épaisseur faible (≈ 0.125 mm), composé de fibres noyées dans une matrice. Selon la structure du renfort on distingue : les plis à structures unidirectionnelles dans lesquels les fibres sont orientées dans une même direction, les plis à structures tissées et les plis mats dans lesquels le renfort est à structure aléatoire [Bensaid-06a]. C'est la structure du renfort qui détermine le degré

d'anisotropie du matériau composite. Le composite stratifié ou multicouches est un ensemble de couches empilées et orientées suivant un ordre de drapage défini. Le drapage est l'orientation des plis par rapport à un référentiel donné, il définit les propriétés physiques globales du matériau composite. La figure 1.1 montre un exemple de drapage ainsi que ses différentes désignations [Gay-97, Bensaid-06a]. Les sandwichs sont des matériaux possédant deux peaux de grande rigidité et de faible épaisseur renfermant un coeur (âme) de forte épaisseur et de faible résistance [Gay-97, Bensaid-06a].



[0/90/45/-45/-45/45/90/0]
ou
[0/90/45/-45$_2$/45/90/0]
ou
[0/90/45/-45]$_2$

Fig. 1.1. Exemple de drapage et ses différentes désignations

Les matériaux composites se présentent donc sous plusieurs aspects, et il est clair que nous ne pouvons pas tenir compte de tous ces aspects. Ainsi, nous limitons notre étude aux structures stratifiées à renfort en fibres de carbone unidirectionnelles noyées dans une matrice en polymère (CFRPs). Ces matériaux sont très utilisés dans le secteur de l'aéronautique. Leur structure est décrite dans la figure 1.2. Ils sont composés de plusieurs plis unidirectionnels d'environ 125µm d'épaisseur, empilées avec différentes orientations de fibres. Chaque pli est constitué de fibres de carbone alignées dans la même direction et noyées dans une matrice en polymère, électriquement non conductrice. Le diamètre des fibres varie de 8 à 15 µm, ainsi une dizaine de fibres sont disposées suivant l'épaisseur d'un pli [Berreur-02, Bensaid-06a].

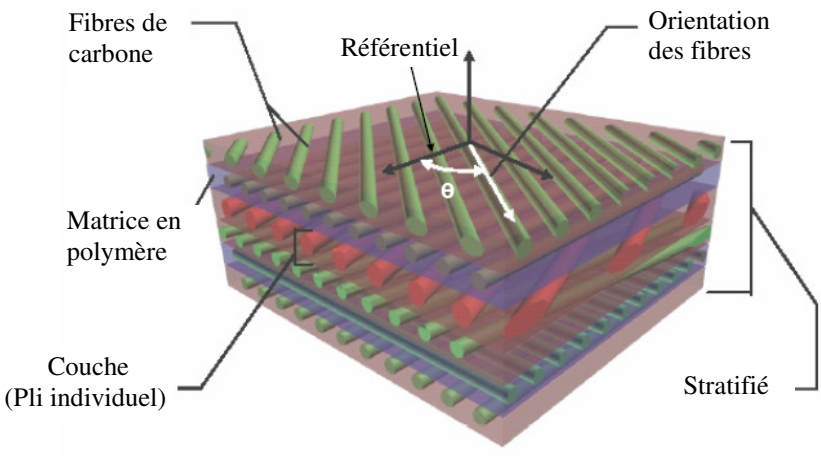


Fig. 1.2. Structure des composites stratifiés à renfort en fibres de carbone

1.2.1 La conductivité électrique des CFRPs

Dans chaque pli, la conductivité électrique dépend de la nature et de la fraction volumique des fibres. Même si, dans un pli, les fibres sont alignées dans la même direction, la conductivité dans la direction transversale n'est pas nulle car qu'il y a des contacts entre les fibres qui ne sont pas parfaitement alignées et ne sont pas parfaitement isolées les unes des autres. La conductivité électrique dans un pli varie entre 5×10^3 et 5×10^4 S / m dans la direction des fibres, et entre 10 et 2×10^2 S / m dans la direction transversale [Pratap-96, Grimberg-05]. Lorsque les plis sont assemblés par l'opération de polymérisation [Berreur-02], des contacts se créent entre les fibres des plis adjacents, donnant lieu à une conductivité suivant l'épaisseur du stratifié. La valeur de cette conductivité est d'environ la moitié de la valeur de la conductivité dans la direction transversale aux fibres dans un pli [Pratap-96].

Connaître la conductivité électrique des CFRPs est d'une importance capitale pour les applications de CND-CF. Les méthodes d'homogénéisation et les mesures en courant continu à l'aide de la méthode des pointes sont souvent utilisées pour déterminer la conductivité des CFRPs.

L'homogénéisation consiste à définir les propriétés globales du matériau à l'échelle macroscopique, grâce aux informations dont on dispose à l'échelle microscopique. Il est donc nécessaire de connaître la structure du matériau et les propriétés physiques de ses constituants [Pike-74, Trichet-00, Bensaid-06a-b].

La mesure de la conductivité par la méthode des pointes consiste à appliquer un courant entre deux points et mesurer la tension en d'autres points du système. En utilisant la loi d'Ohm et la loi de conservation du courant électrique qui sont résolues analytiquement sur une géométrie relativement simple, on obtient une relation qui donne la conductivité en fonction du courant appliqué et la tension mesurée. J B Park et al. [Park-03, Park-07] ont combiné une mesure à six points, développée par R. Bruch et al. [Bruch-92], avec une mesure à quatre points, développée par J.L. González et al. [González-99], pour l'estimation de la résistivité anisotrope d'une plaque mince en CFRP. La mesure à six points a été utilisée pour déterminer la résistivité suivant la longueur et l'épaisseur de la plaque, tandis que la mesure à quatre points a servi pour mesurer la résistivité suivant sa largeur.

D. D. L. Chung et al. ont présenté une méthode pour la mesure de la résistance de contact entre plis [Chung-01]. Cette méthode consiste à mettre en contact, sur une surface de jonction, deux plis découpés en bandes suivant le sens des fibres, puis faire passer un courant continu entre une extrémité d'un pli et une des extrémités de l'autre pli. En mesurant la différence de potentiel entre les deux autres extrémités des deux plis (figure1.3), on déduit la résistance de contact en utilisant la loi d'Ohm. .

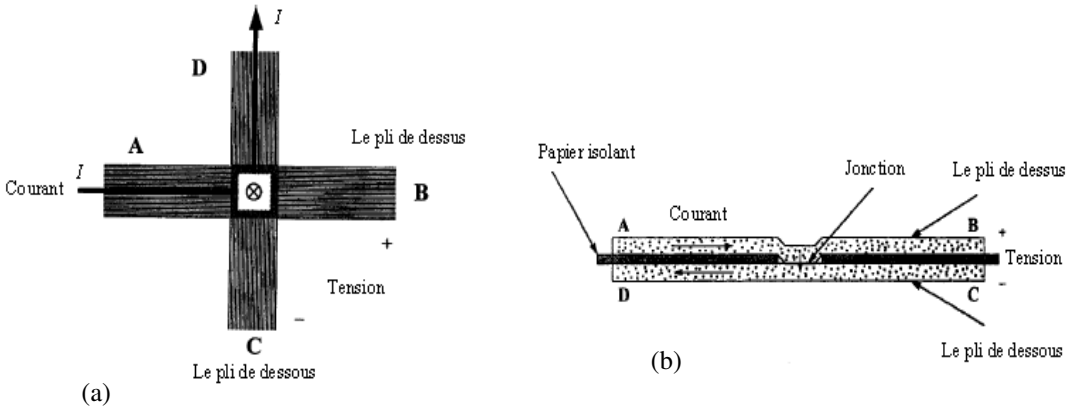


Fig. 1.3. Mesure de la résistance de contact entre deux plis [Chung-01]: (a) Plis croisés, (b) Plis parallèles

Des méthodes sans contact pour la mesure de la conductivité des CFRPs, basées sur le phénomène d'induction électromagnétique, sont présentées par C. Zeller [Zeller-78] et S. Bensaid [Bensaid-06a].

1.2.2 Les principaux défauts affectant les CFRPs

Les principaux défauts et endommagements rencontrés dans les CFRPs sont illustrés par la figure 1.4. On y trouve les fissurations et les ruptures de la matrice, les ruptures de fibres, les décohésions fibre–matrice et les délaminages. Un délaminage est un défaut de cohésion entre deux plis du stratifié [Crane-00a]. Les délaminages abaissent les caractéristiques mécaniques du stratifié et peuvent engendrer la ruine totale de sa structure [Pethrick-00]. Ils résultent d'un très grand nombre de causes; les plus fréquentes sont l'oubli d'un morceau de film protecteur entre deux plis, l'intrusion d'un produit polluant contaminant localement la résine et supprimant ses pouvoirs adhésifs, l'humidité, les effets de bords et les chocs ...

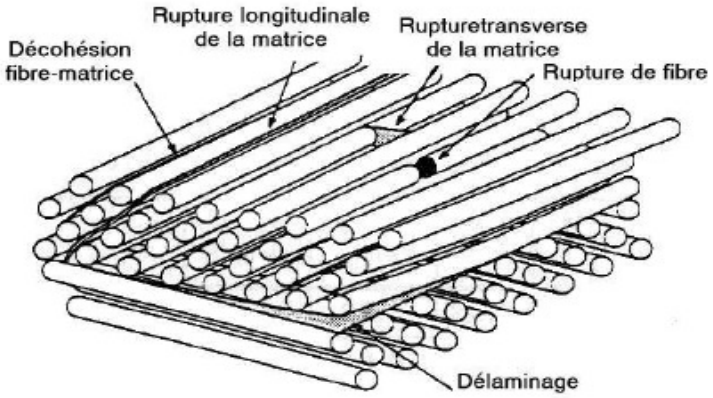


Fig. 1.4. Résumé des différents défauts des matériaux composites

1.3 Le CND par courant de Foucault des CFRPs

1.3.1 Le principe du CND-CF

Le contrôle par courants de Foucault repose sur le phénomène d'induction électromagnétique, dont une particularité essentielle est de pouvoir injecter de l'énergie électromagnétique à l'aide d'un inducteur dans un matériau conducteur (induit), sans qu'il y ait contact entre eux.

Sous l'effet de la variation du champ incident, des courants induits se développent dans l'induit. L'intensité et la répartition de ces courants dépendent des propriétés physiques et géométriques de l'induit, de la géométrie de l'inducteur, de sa disposition par rapport à l'induit, ainsi que de la fréquence du courant d'excitation [NDT-ed].

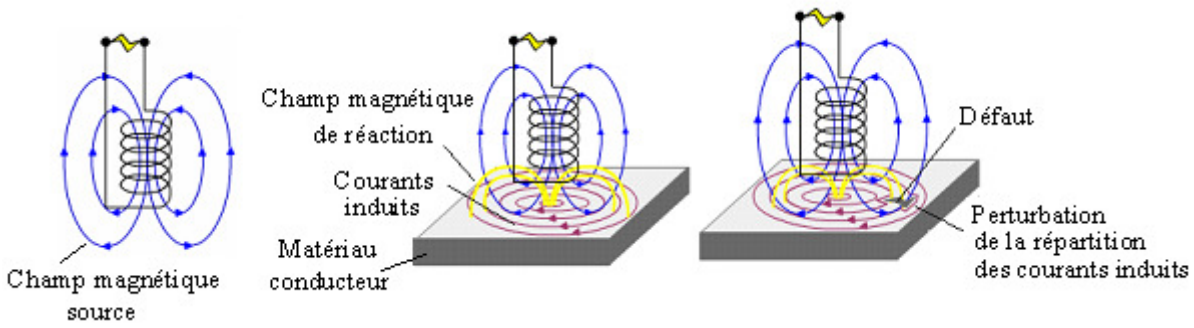


Fig. 1.5. Principe du CND par courants de Foucault [NDT-ed]

L'évaluation de la réaction électromagnétique de l'induit va permettre, par l'intermédiaire de mesures adaptées, d'accéder à des informations concernant ses propriétés physiques (conductivité et perméabilité), ses propriétés géométriques (épaisseur), ou encore la présence d'un défaut qui modifie la répartition des courants induits et de la cartographie du champ électromagnétique.

1.3.2 Les capteurs et les fréquences utilisées

On désigne par capteur, l'élément qui assure les fonctions d'induction et de mesure du champ électromagnétique induit. On distingue deux types de capteurs : les capteurs à double fonction pour lesquels les fonctions d'excitation et de mesure sont assurées par le même élément, et les capteurs à fonctions séparées pour lesquels les fonctions d'excitation et de mesure sont assurées par des éléments distincts [NDT-ed.org]. Dans ces derniers, la grandeur mesurée peut être une tension ou un champ magnétique.

En général, les capteurs CF utilisés sont constitués de simples bobines de géométrie circulaire, avec ou sans noyaux de ferrite. Cependant, selon le type de contrôle à effectuer, la structure des CFRPs peut exiger des configurations particulières de capteurs CF. De plus, la faible conductivité de ces matériaux nécessite l'utilisation de fréquences plus élevées que celles utilisées pour l'inspection des matériaux conventionnels. Elles varient d'une dizaine de kilohertz à une dizaine de mégahertz. Au delà de 10 MHz le rapport signal sur bruit diminue et l'interprétation des résultats de mesure devient difficile [Gros-98].

Dans leurs travaux expérimentaux [Mook-01], G. Mook et al. ont utilisé un capteur tournant, dont la structure est décrite dans la figure 1.6-a, pour la détection des délaminages et l'orientation des

fibres dans les CFRPs. Il s'agit d'un capteur à fonctions séparées dans lequel l'ensemble constitué de la bobine excitatrice (T) et la bobine réceptrice (R) tourne autour d'un axe de révolution. Pour la détection des ruptures de fibres, ces auteurs ont utilisé un simple capteur différentiel dans lequel un noyau en ferrite permet de focaliser le champ magnétique dans le matériau. Les deux capteurs sont conçus pour fonctionner au-delà de 500kHz. De leur côté, A. Savin, R. Grimberg et al. ont utilisé un capteur à bobines orthogonales, décrit par la figure 1.6-b, pour la détection des délaminages et l'orientation des fibres dans les CFRPs [Savin-00, Grimberg-05]. La bobine d'excitation est placée à l'intérieur d'une ferrite pour mieux focaliser le champ magnétique dans le matériau. Ce capteur fonctionne à une fréquence de 6MHz.

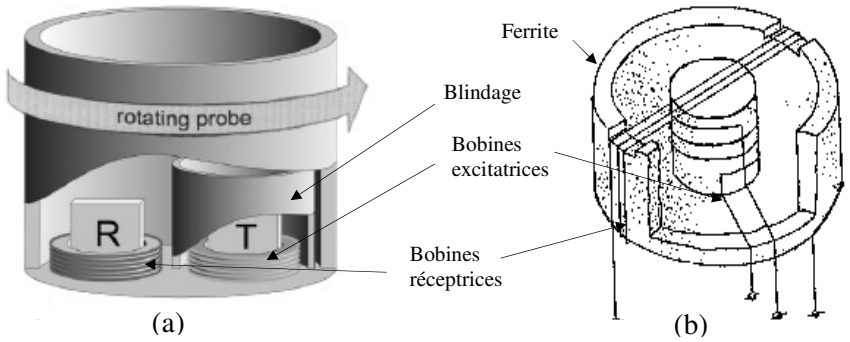


Fig. 1.6. Configurations particulières de capteurs CF pour le contrôle des CFRPs
(a) Capteur tournant [Mook-01], (b) Capteurs à bobines orthogonales [Savin-00, Grimberg-05]

Récemment les magnétomètres supraconducteurs, appelés SQUIDs « Superconductive Quantum Interference Device », ont été utilisés pour le contrôle des CFRPs [Ruosi-02, Carr-03, Graham-04, Bonavolontà-07]. Cette technologie émergente constitue un outil puissant au service du CND par courants de Foucault. En vertu de leur grande sensibilité et leur dynamique élevée, les SQUID sont en mesure de détecter de très faibles perturbations du champ magnétique produites par des anomalies structurelles situées à la surface ou à l'intérieur du matériau testé. Ce type de capteur fonctionne à des fréquences allant de 10Hz à 26kHz [Ruosi-02].

1.3.3 Les grandeurs exploitables

Dans un contrôle mono fréquentiel, selon le type de capteur utilisé, on peut mesurer une tension, un courant ou un champ magnétique [Ruosi-02, Bonavolontà-07].

Lorsqu'on mesure une tension ou un courant, on exploite généralement l'amplitude et la phase du signal mesuré. Cependant, dans ses travaux expérimentaux [Gros-98, Gros-95], X.E. Gros stipule que seule l'amplitude est affectée par la présence d'un défaut dans les CFRPs, tandis que la phase ne change pas de manière significative.

Lorsqu'on mesure un champ magnétique, on s'intéresse aux variations d'amplitude de ses composantes normale et tangentielle à la surface de la pièce testée. Pour éliminer les perturbations statiques dans l'espace, notamment lorsqu'on a à mesurer des champs faibles, il est préférable de mesurer directement son gradient spatial à l'aide d'un gradiomètre magnétique [Carr-03].

1.3.4 La caractérisation des défauts

Tout défaut modifiant de manière significative la répartition des courants induits dans les CFRPs est susceptible d'être détecté par la méthode des courants de Foucault. Les délaminages sont les défauts les moins évidents à détecter, et les avis sont partagés à ce propos. En effet, dans certains travaux on stipule que les délaminages ne peuvent être détectés par la technique des courants de Foucault, du fait que les courants induits circulent dans des plans parallèles à ces délaminages et ne sont donc pas perturbés [Crane-00a, Pethrick-00]. S.S. Lane et al. [Lane-91] ont conclu que la technique des courants de Foucault ne peut faire qu'une discrimination entre les délaminages avec et sans ruptures de fibres causés par des impacts, en complément au contrôle par ultrasons de ce type de défaut. Cependant, de son coté, X.E. Gros [Gros-98, Gros-95], a pu détecter, expérimentalement, en utilisant un équipement à courants de Foucault standard, des délaminages de 0.01mm sur des pales d'hélicoptères, et des défauts d'impacts entre 0.5 et 0.7 Joules sur des panneaux en CFRPs à cinq plis. Toutefois, il ne précise pas si ces délaminages sont accompagnés de ruptures de fibres ou non. Dans son travail [Mook-01], G. Mook a pu mettre en évidence la possibilité de détection d'un délaminage par la technique des courants de Foucault. Pour cela, il a réalisé deux stratifiés en CFRPs; le premier est conçu de telle manière à éviter les contacts électriques entre les plis, tandis que le second est conçu

de telle manière à établir des contacts électriques entre les plis. En utilisant le capteur à courant de Foucault tournant que nous avons décrit précédemment, il a relevé sur un plan d'impédance des réponses différentes pour les deux stratifiés.

1.3.5 La caractérisation des propriétés physiques et géométriques

Outre la caractérisation des défauts, la technique des courants de Foucault a été appliquée pour déterminer les caractéristiques géométriques des CFRPs, en particulier la détermination de l'orientation des fibres dans les différents plis. G. Mook [Mook-01] a présenté deux méthodes pour déterminer expérimentalement l'orientation des fibres dans une plaque en CFRP. La première méthode consiste à mesurer, à l'aide d'une bobine réceptrice, la cartographie du champ magnétique transmis par une bobine excitatrice à travers la surface de la plaque ; les deux bobines étant disposées d'un coté et de l'autre de la plaque (figure 1.7-a). La figure 1.7-b montre l'effet de l'orientation des fibres sur la distribution de la composante normale du champ magnétique à la surface d'une plaque constituée de plis orientés dans les directions [45/-45/0/90]. La deuxième méthode consiste à utiliser la réponse du capteur tournant décrit dans la section 1.3.2. Ce capteur permet de tracer des diagrammes polaires donnant l'intensité du signal de mesure en fonction de son angle de rotation. Le diagramme de la figure 1.8.a correspond à un stratifié constitué de plis unidirectionnels orientés dans la même direction, tandis que le diagramme de la figure 1.8.b correspond à un stratifié constitué de plis unidirectionnels orientés dans les directions $[90_2/+45_2/0_2/-45_2]$. Les amplitudes des lobes correspondent aux profondeurs des plis.

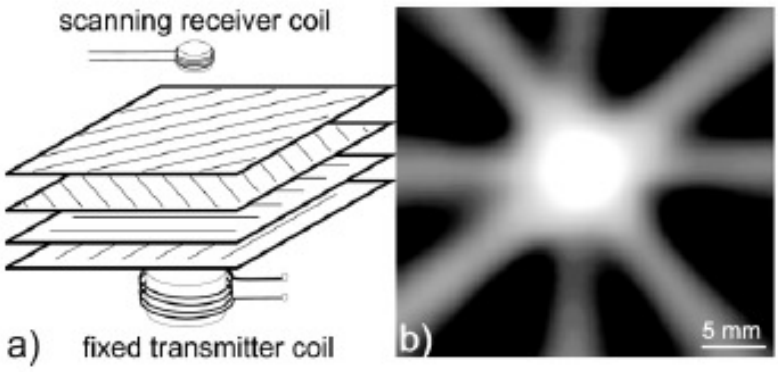


Fig. 1.7. Détermination de l'orientation des fibres par la mesure du champ magnétique [Mook-01]
(a) La démarche expérimentale
(b) La composante normale du champ magnétique

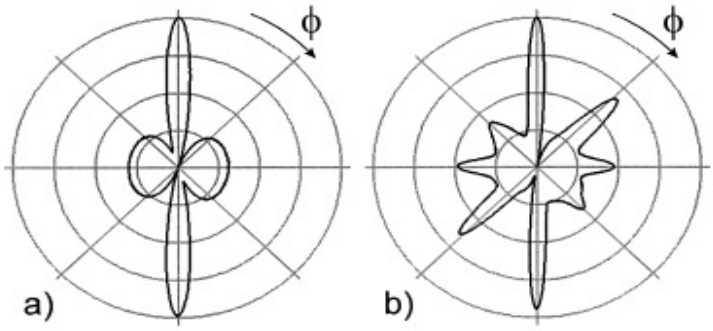


Fig. 1.8. Détermination de l'orientation des fibres en utilisant un capteur CF tournant [Mook-01]
(a) Diagramme polaire obtenu pour un stratifié constitué de plis unidirectionnels orientés dans la même direction
(b) Diagramme polaire obtenu pour un stratifié constitué de huit plis unidirectionnels orientés dans les directions $[90_2/+45_2/\ 0_2/\ -45_2]$

1.3.6 L'aspect modélisation

Des difficultés sont rencontrées dans l'intégration des CFRPs dans un calcul de champ électromagnétique. Ces difficultés sont liées aux facteurs d'échelle, à leur forte anisotropie et à des couplages capacitifs complexes entre fibres et entre plis. Ces phénomènes compliquent non seulement le problème direct, mais aussi l'interprétation et l'inversion des résultats de mesure en vue de la caractérisation.

Le facteur d'échelle intervient à la fois au niveau microscopique et macroscopique. Au niveau microscopique, le diamètre des fibres étant compris entre 5 et 15 µm, une dizaine de milliers de fibres est présente dans une section de 1 mm² [Bensaid-06a-b]. Une phase d'homogénéisation des propriétés physiques est à ce jour inévitable [Trichet-00, Doirat-07]. Après la phase d'homogénéisation, le matériau réel est remplacé par une structure anisotrope mais homogène pour chaque pli. Cela ne permet pas de tenir compte des couplages capacitifs entre fibres, et accentue le phénomène d'effet de peau qui était de moindre importance au départ vu le très faible diamètre des fibres. Au niveau macroscopique, l'épaisseur des plis est très petite devant les dimensions du système modélisé. Cela engendre des difficultés de discrétisation lorsqu'on utilise des méthodes numériques. L'anisotropie provient de l'orientation des fibres. Elle a pour conséquence la nécessité de la prise en compte de la nature tensorielle des propriétés physiques, ce qui engendre un caractère tridimensionnel des phénomènes.

D. Placko et I. Dufour ont utilisé un modèle paramétrique pour remonter aux valeurs du lift off et de la conductivité à partir des résultats de mesure de la réponse d'un capteur à courant de Foucault dans le contrôle des CFRPs [Placko-92, Dufour-93]. Ce modèle est basé sur les équations du transformateur, dans lequel le primaire et le secondaire représentent, respectivement, le capteur et la pièce en CFRP. Cette mesure de la conductivité ne tient pas compte de l'anisotropie; c'est la conductivité équivalente qui est mesurée. Cependant, si le capteur permet d'avoir une grande résolution spatiale, une telle mesure peut être suffisante pour détecter la présence d'un éventuel défaut.

Pour obtenir la distribution des courants induits à la surface d'une plaque en CFRP à partir de la mesure de la composante normale du champ magnétique, G. Mook a présenté une méthode basée sur la formulation des courants sur une grille constituée de boucles élémentaires de forme rectangulaire [Mook-01]. Le courant circulant dans chaque boucle élémentaire est proportionnel à l'induction normale mesurée au centre de cette boucle. Finalement, les composantes de la densité des courants induits sont obtenues par les dérivées spatiales de l'intensité du courant.

Des modèles utilisant les dyades de Green ont été développés pour la modélisation du champ électromagnétique dans les CFRPs [Sabbagh-88, Roberts-88], ainsi que le calcul de la réponse d'un capteur CF [Bowler-89]. Cependant, ces modèles convergent lentement dans le cas des petites épaisseurs, et leurs expressions sont difficiles à développer lorsque le nombre de plis devient important. En outre, ils sont limités aux géométries simples, et la présence de défauts n'est pas prise en compte de manière directe.

1.4 Conclusion

De récents travaux expérimentaux ont pu mettre en évidence le contrôle non destructif par courants de Foucault des CFRPs. Cependant, selon le type de contrôle à effectuer, les structures des CFRPs peuvent exiger des configurations particulières de capteurs CF. De plus, la faible conductivité de ces matériaux nécessite l'utilisation de fréquences plus élevées que celles utilisées pour l'inspection des matériaux conventionnels.

L'état de l'art du CND-CF des CFRPs a révélé un besoin en terme de modélisation. En effet, très peu de travaux de modélisation ont été réalisés, et beaucoup reste à faire dans ce domaine. Les structures multi-échelles, l'hétérogénéité et les fortes anisotropies de ces matériaux, associées à des couplages capacitifs complexes, font de cette modélisation un challenge qu'on a essayé de relever dans ce travail.

Chapitre 2

Mise en équation

2.1 Introduction

Pour décrire le comportement du champ électromagnétique dans le système modélisé constitué d'un inducteur représentant un capteur CF et d'un induit en CFRP, nous démarrons des quatre équations de Maxwell auxquelles nous associons les lois constitutives et les conditions de passage aux frontières. Nous exprimons le tenseur de conductivité d'un stratifié en CFRP en fonction du tenseur de conductivité et de l'orientation des fibres de chaque pli par rapport à un repère choisi.

2.2 Description du système modélisé

Le type de système modélisé est représenté par la figure 2.1. Une structure en matériau composite à fibres de carbone (CFRP) est soumise à l'action d'un champ électromagnétique produit par un inducteur où une densité de courant variable dans le temps « J^s » est imposée.

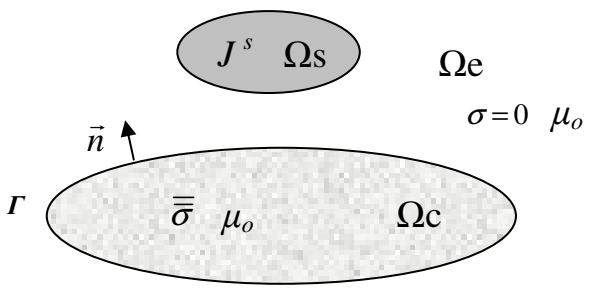


Fig. 2.1. Le type de systèmes modélisés

Les volumes occupés par l'inducteur et la structure en CFRP sont désignés respectivement par Ωs et Ωc. La région Ωc est délimitée par la frontière *Γ*, avec $\vec{n}$ son vecteur normal. La structure en CFRP est caractérisée par une conductivité électrique anisotrope représentée par un tenseur « $\overline{\overline{\sigma}}$ », une perméabilité relative $\mu_r = 1$ et une permittivité relative $\varepsilon_r = 1$. Le milieu extérieur Ωe représente le vide ; il s'étend à l'infini.

L'objectif est d'évaluer les courants induits dans la structure en CFRP ainsi que la variation de l'impédance de l'inducteur pour des applications en CND. Il s'agit de caractériser les propriétés physiques et géométriques de la structure, ainsi que les éventuels défauts qu'elle pourrait contenir.

Nous ne tenons pas compte des effets de peau et de proximité au niveau de l'inducteur ; cela ne constitue pas une priorité pour les applications de CND- CF.

2.3 Les équations de Maxwell

Michel Faraday (1791-1867) est le premier à décrire en 1831 le phénomène d'induction électromagnétique sur une spire conductrice placée à proximité d'une bobine parcourue par un courant variable dans le temps. Léon Foucault (1819-1868) découvrit ensuite les courants induits par un champ électromagnétique dans une masse métallique conductrice ; ces derniers créent à leur tour un champ induit qui s'oppose au champ inducteur selon la loi de Lorenz (1804-1865) énoncée en 1834. En effectuant une synthèse des travaux réalisés dans le XIX° siècle, James Clerk Maxwell (1831-1879) a formulé une description complète des phénomènes électromagnétiques vers 1875 [Wikipédia]. Les équations de Maxwell lient entre eux les champs électrique et magnétique. Ce sont des équations locales qui s'écrivent comme suit

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \text{(Equation de Maxwell- Faraday)} \qquad (2.1\text{-a})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \overline{\overline{\sigma}}\vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad \text{(Equation de Maxwell- Ampère)} \qquad (2.2\text{-a})$$

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho, \qquad \text{(Equation de Maxwell- Gauss)} \qquad (2.3)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0. \qquad \text{(Conservation du flux magnétique)} \qquad (2.4)$$

A ces équations on associe les lois constitutives suivantes

$$\vec{B} = \overline{\overline{\mu}}\vec{H} \ , \tag{2.5}$$

$$\vec{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\vec{E} \ . \tag{2.6}$$

Dans les équations 2.1-a à 2.6 :

$\vec{B}(T)$ est le vecteur d'induction magnétique,

$\overline{\overline{\mu}}(H.m^{-1})$ le tenseur de perméabilité,

$\vec{H}(A.m^{-1})$ le vecteur champ magnétique,

$\overline{\overline{\varepsilon}}(F.m^{-1})$ le tenseur de permittivité,

$\vec{E}(V.m^{-1})$ le vecteur champ électrique,

$\overline{\overline{\sigma}}(S.m^{-1})$ le tenseur de conductivité,

$\vec{D}(C.m^{-2})$ le vecteur d'induction électrique et

$\rho(C.m^{-3})$ représente la densité volumique de charge électrique.

Les composantes tangentielles des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$, de même que les composantes normales des inductions $\vec{B}$ et $\vec{D}$, sont continues sur Γ.

Les équations précédentes décrivent tous les phénomènes électromagnétiques. Cependant, suivant l'application et le dispositif étudié, certains phénomènes peuvent être négligés. En ce qui concerne ce travail, nous considérons les régimes harmoniques ($\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$), et les fréquences utilisées sont telles que les courants de déplacement soient négligeables devant les courants de conduction ($\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$). Les matériaux modélisés sont caractérisés par la perméabilité et la permittivité du vide ($\overline{\overline{\mu}} \rightarrow \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ H.m^{-1}$, $\overline{\overline{\varepsilon}} \rightarrow \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10^{-9}\ F.m^{-1}$), et par une conductivité électrique anisotrope représentée par un tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$. Dans ces conditions, la relation 2.1-a devient

$$\vec{\nabla} \times \tilde{\vec{E}} = -j\omega\mu_0\tilde{\vec{H}} \ , \tag{2.1-b}$$

La densité du courant source est imposée dans Ωs qui constitue son unique support. La relation 2.2-a s'écrit donc

$$\vec{\nabla} \times \tilde{\vec{H}} = \vec{J}^{s} \qquad dans \quad \Omega_S \,, \tag{2.2-b}$$

$$\vec{\nabla} \times \tilde{\vec{H}} = \tilde{\vec{J}} = \overline{\overline{\sigma}}\tilde{\vec{E}} \qquad dans \quad \Omega_C \,. \tag{2.2-c}$$

$$\vec{\nabla} \times \tilde{\vec{H}} = \vec{0} \qquad dans \quad \Omega_e \,. \tag{2.2-d}$$

$\tilde{\vec{J}}$ représente le vecteur densité de courants induits dans Ωc. Il doit satisfaire les conditions suivantes

$$\vec{\nabla}.\tilde{\vec{J}} = 0 \,, \tag{2.7}$$

$$\vec{n}.\tilde{\vec{J}} = 0 / _{\Gamma} \,. \tag{2.8}$$

Le tilde sur les vecteurs signifie qu'ils sont à valeurs complexes. Dans tout ce qui suit, ce dernier sera omis pour alléger les notations.

2.4 Expression du tenseur de conductivité pour un stratifié en CFRP

Modéliser les CFRPs à l'échelle des fibres conduirait à des systèmes algébriques de dimensions démesurées. D'autre part, les fibres sont disposées de manière aléatoire dans le matériau. Une homogénéisation des propriétés physiques est donc indispensable.

Pour chaque pli, dans un référentiel lié aux fibres (*L, T, P*), le tenseur de conductivité homogénéisé s'exprime comme suit

$$\overline{\overline{\sigma}}_{pli} = \begin{bmatrix} \sigma_L & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_T & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_P \end{bmatrix}_{<L,T,P>} . \tag{2.9}$$

Dans 2.9, σ_L et σ_T représentent, respectivement, les conductivités dans les sens parallèle et transversal aux fibres, et σ_P représente la conductivité suivant l'épaisseur du pli.

Dans un référentiel orthonormé (*u, v, w*), choisi de telle manière à garder la composante suivant l'épaisseur invariante, le tenseur de conductivité d'un stratifié en CFRP s'exprime en

fonction des conductivités σ_L et σ_T, ainsi que de l'orientation (θ) des fibres de chaque pli le constituant par rapport à ce référentiel (figure 2.2) [Pratap-96].

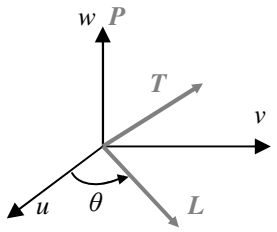


Fig. 2.2. Référentiels fixe et lié aux fibres

Dans le référentiel lié aux fibres de chaque pli (*L, T, P*), la loi d'Ohm s'écrit

$$\vec{J}_{pli} = \overline{\overline{\sigma}}_{pli}\,\vec{E}_{pli}\,. \tag{2.10}$$

Avec $\vec{J}_{pli} = \begin{bmatrix} J_L \\ J_T \\ J_P \end{bmatrix}, \vec{E}_{pli} = \begin{bmatrix} E_L \\ E_T \\ E_P \end{bmatrix}.$

Ramenées dans un référentiel fixe (*u, v, w*) (figure 2.2), ces grandeurs s'écrivent

$$\vec{J}_{pli} = \overline{\overline{R}}\,\vec{J}\,, \tag{2.11}$$

$$\vec{E}_{pli} = \overline{\overline{R}}\,\vec{E}\,, \tag{2.12}$$

avec $\vec{J} = \begin{bmatrix} J_u \\ J_v \\ J_w \end{bmatrix}, \vec{E} = \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \\ E_w \end{bmatrix}.$

$\overline{\overline{R}}$ est la matrice rotation qui garde la composante suivant l'épaisseur (*w*) invariante

$$\overline{\overline{R}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

En remplaçant 2.11 et 2.12 dans 2.10, on obtient

$$\vec{J} = \overline{\overline{R}}^{-1}\overline{\overline{\sigma}}_{pli}\overline{\overline{R}}\,\vec{E}\,. \tag{2.14}$$

On déduit donc

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{R}}^{-1} \overline{\overline{\sigma}}_{pli} \, \overline{\overline{R}} \; . \tag{2.15}$$

En développant la relation 2.15, nous obtenons l'expression du tenseur de conductivité $\overline{\overline{\sigma}}$ du stratifié dans le référentiel (*u, v, w*)

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_L \cos^2(\theta) + \sigma_T \sin^2(\theta) & \dfrac{\sigma_L - \sigma_T}{2} \sin(2\theta) & 0 \\ \dfrac{\sigma_L - \sigma_T}{2} \sin(2\theta) & \sigma_L \sin^2(\theta) + \sigma_T \cos^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ww} \end{pmatrix}_{<u,v,w>} \; . \tag{2.16}$$

On peut noter qu'à cause de la résistance de contact entre les plis adjacents, la conductivité suivant l'épaisseur du stratifié est très inférieure à la conductivité suivant l'épaisseur d'un pli ($\sigma_{ww} << \sigma_P$). Elle est souvent négligée pour simplifier la modélisation électromagnétique de ce type de matériaux [Pratap-96]. En effet vu que les plis sont très minces et que la résistance de contact entre les plis est très grande, on considère que les courants induits ne circulent que dans des plans parallèles aux plis et ne passent pas d'un pli à un autre.

2.5 Conclusion

Après avoir posé le problème électromagnétique et les hypothèses simplificatrices, nous avons exprimé dans un repère fixe le tenseur de conductivité homogénéisé d'un stratifié en CFRP. Ce tenseur s'exprime en fonction des composantes du tenseur de conductivité de chaque pli le constituant, ainsi que de l'angle d'orientation des fibres de chaque pli par rapport au repère fixe choisi.

L'étape suivante du travail consiste à établir une formulation du problème électromagnétique afin d'évaluer les courants induits dans la structure en CFRP, ainsi que la variation de l'impédance de l'inducteur, dans les limites des hypothèses simplificatrices énoncées dans cette partie.

Chapitre 3

Formulation

3.1 Introduction

Les problèmes de calcul des courants induits sont régis par les modèles magnétodynamiques. Ces derniers peuvent être formulés soit en termes de champs, de potentiels, ou en terme de densité de courants [Albanese-88a]. Les formulations peuvent être exprimées en termes d'équations aux dérivées partielles, en terme d'équations intégrales de frontières pour les structures homogènes [Zheng-90, Rucker-90] ou encore en terme d'intégrales de volumes [Albanese-88a, Albanese-88b, Kwon-03].

Les formulations en champs ne permettent pas d'imposer explicitement les lois de conservation du courant électrique ou du flux magnétique. Elles sont donc rarement utilisées pour les problèmes de calcul de courants induits, sauf quand elles sont associées à des méthodes telle que les dyades de Green pour des géométries simples [Roberts-88], les intégrales de frontières [Zheng-90] ou encore les éléments finis d'arrêtes où l'on peut imposer géométriquement les conditions de conservation (divergence nulle) [Albanese-88a]. Ainsi les formulations en potentiels sont les plus utilisées.

On distingue deux principales formulations en potentiels : la formulation en potentiels vecteur magnétique et scalaire électrique $\vec{A}-V$ [Bíró-89], et la formulation en potentiels vecteur électrique et scalaire magnétique $\vec{T}-\varphi$ [Bouillault-90, Bouillault-92]. Comme la formulation en champ électrique, la formulation en potentiels $\vec{A}-V$ tient compte naturellement de la conservation du flux magnétique, mais ne tient pas compte de la conservation du courant électrique. De même la formulation en potentiels $\vec{T}-\varphi$ tient compte naturellement de la conservation du courant électrique mais ne tient pas compte de la conservation du flux magnétique. Cependant, l'introduction des potentiels scalaires nous

permet d'imposer explicitement les conditions de conservations du courant électrique et du flux magnétique. Une formulation en potentiels vecteurs $\vec{A}-\vec{T}$ a été proposée par D. Albertz [Albertz-98]. Elle permet de tenir compte de manière naturelle, à la fois, de la conservation du courant électrique et de la conservation du flux magnétique. Cependant, cette formulation est coûteuse en termes d'espace mémoire et de temps de résolution, car elle aboutit à un système de six équations au lieu de quatre pour les formulations $\vec{A}-V$ et $\vec{T}-\varphi$.

Dans ce travail, en dérivant la densité de courant d'un potentiel vecteur électrique $\vec{T}$ et l'induction magnétique d'un potentiel vecteur magnétique, qui est à son tour exprimé par une équation intégrale en termes de densités de courants, nous obtenons une formulation intégro-différentielle en potentiel vecteur électrique $\vec{T}$. Elle tient compte naturellement des conservations du courant électrique et de la densité du flux magnétique. Outre cet avantage, l'aspect intégral de cette formulation permet de limiter le domaine d'étude aux parties actives du système. Cela permet de réduire le problème multi échelle à la structure en CFRP, et facilite la prise en compte des mouvements. Plus encore, vu la structure en couches minces des CFRPs, et sous certaines conditions, cette formulation peut se réduire à un cas quasi-bidimensionnel n'impliquant que la composante normale du potentiel vecteur électrique, réduisant ainsi considérablement la taille du système à résoudre et le temps de calcul [Schneider-80, Salon-81, Takahashi-88, Tsuboi-91, Tsuboi-93].

Pour finir, deux approches sont proposées pour l'évaluation de la variation d'impédance de l'inducteur : le principe de conservation d'énergie et une approche intégrale.

3.2 Formulation intégro-différentielle en potentiel vecteur électrique T

Les formulations en potentiel vecteur électrique sont basées sur la loi de conservation du courant électrique

$$\vec{\nabla}.\vec{J}=0 \Leftrightarrow \vec{J}=\vec{\nabla}\times\vec{T}\,. \tag{3.1}$$

En remplaçant la relation 3.1 dans l'équation de Maxwell – Faraday, on obtient

$$\vec{\nabla} \times \overline{\overline{\sigma}}^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{T} = -j\omega\vec{B} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \ . \tag{3.2}$$

La composante normale des courants induits doit s'annuler à la frontière Γ délimitant le domaine Ωc occupé par la structure en CFRC (figure 2.1). Le potentiel vecteur électrique $\vec{T}$ doit donc satisfaire la condition aux limites suivante [Bouillault-90]

$$\vec{n} \times \vec{T} = \vec{0} /_{\Gamma} \ . \tag{3.3}$$

Les systèmes modélisés sont linéaires ; cela nous permet de décomposer le champ magnétique en ses composantes source $\vec{H}^s$ et induit $\vec{H}^r$

$$\vec{H} = \vec{H}^s + \vec{H}^r \ . \tag{3.4}$$

Il est commun d'exprimer le champ magnétique induit $\vec{H}^r$ en fonction du potentiel vecteur électrique $\vec{T}$ et d'un potentiel scalaire magnétique φ [Krakowski-89, Bouillault-90, Bouillault-92], tel que

$$\vec{H}^r = \begin{cases} \vec{T} - \vec{\nabla}\varphi & dans\ \Omega c \\ -\vec{\nabla}\varphi & dans\ \Omega e \end{cases} . \tag{3.5}$$

Dans ce cas 3.2 devient

$$\vec{\nabla} \times \overline{\overline{\sigma}}^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{T} + j\omega\mu_0 (\vec{T} - \vec{\nabla}\varphi) = j\omega\mu_0 \vec{H}^s \ . \tag{3.6}$$

Le potentiel scalaire magnétique φ doit vérifier les relations suivantes

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \vec{\nabla}.\vec{T} & dans\ \Omega c, \\ \Delta\varphi = 0 & dans\ \Omega e, \\ \varphi_{\Gamma^-} = \varphi_{\Gamma^+} & sur\ \Gamma. \end{cases} \tag{3.7}$$

Pour limiter le domaine d'étude aux parties actives du système, on exprime le potentiel scalaire magnétique φ par des équations intégrales en termes de densités volumique et surfacique de

charges magnétiques fictives [Krakowski-89, Bouillault-90, Bouillault-92]. D'autre part, à la formulation 3.6, on doit associer une condition de jauge pour assurer l'unicité du potentiel vecteur $\vec{T}$ [Albertz-98], la condition de conservation de la densité de flux magnétique dans la région Ωc et la condition de continuité de la composante normale de l'induction magnétique à travers la frontière Γ ; la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique étant assurée par la condition 3.3, associée à continuité du potentiel scalaire magnétique φ. Cela implique la résolution de plusieurs équations impliquant l'inversion de matrices pleines [Bouillault-90, Bouillault-92], ce qui est très coûteux en termes de temps de calcul.

Il semble plus intéressant de dériver l'induction magnétique $\vec{B}$ d'un potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$, tel que [Bíró-89]

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}\,. \tag{3.8}$$

En introduisant 3.8 dans 3.2, on obtient

$$\vec{\nabla} \times \overline{\overline{\sigma}}^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{T} = -j\omega \vec{\nabla} \times \vec{A}\,. \tag{3.9}$$

Nous exprimons le potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ par une équation intégrale en termes de densités de courants [Kwon-03]. En séparant les termes source et induit du potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$, et en tenant compte de 3.1, on obtient

$$\vec{A}(r) = \vec{A}^s(r) + \vec{A}^r(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega s} \frac{\vec{J}^s(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\Omega s + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega c} \frac{\vec{\nabla} \times \vec{T}(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\Omega c\,. \tag{3.10}$$

Dans la relation 3.10, $|\vec{r} - \vec{r}_s|$ est la distance entre un point source repéré par le vecteur $\vec{r}_s$ appartenant à la région Ωs, et un point repéré par le vecteur $\vec{r}$ où le potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ est calculé. De même, $|\vec{r} - \vec{r}'|$ représente la distance entre un point repéré par le vecteur $\vec{r}'$ appartenant à la région Ωc, et un point repéré par le vecteur $\vec{r}$ où le potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ est calculé. Le signe prime sur l'opérateur nabla ($\vec{\nabla}'$) signifie que le rotationnel est calculée au point $\vec{r}'$.

En calculant le rotationnel du potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ au point $\vec{r}$, on obtient la relation suivante

$$\vec{B}(r) = \vec{B}^{s}(r) + \vec{B}^{r}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega s}\frac{\vec{J}^{s}(r')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d\Omega s + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega c}\frac{\left[\vec{\nabla}\times\vec{T}(r')\right]\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\Omega c\,. \qquad (3.11)$$

Finalement, en introduisant 3.11 dans 3.2, on obtient

$$\vec{\nabla}\times\overline{\overline{\sigma}}^{-1}\vec{\nabla}\times\vec{T}(r) + \frac{j\omega\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega c}\frac{[\vec{\nabla}'\times\vec{T}(r')]\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d\Omega c = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega_S}\frac{\vec{J}^{s}(r_s)\times(\vec{r}-\vec{r}_s)}{|\vec{r}-\vec{r}_s|^3}d\Omega s\,. \qquad (3.12)$$

La formulation 3.12 a l'avantage de tenir compte naturellement des conservations des densités de courant et du flux magnétique. Cependant, le système algébrique engendré par 3.12 serait lourd à résoudre à cause de l'intégrale sur le volume Ωc qui engendre une matrice pleine ou dense si on néglige l'interaction entre les termes éloignés. Pour cela, au lieu de résoudre 3.12 telle qu'elle est formulée, nous proposons la méthode itérative décrite dans la figure 3.1, où l'intégrale sur le volume Ωc est transférée au second membre.

On initialise le vecteur densité de courant induit à zéro, puis on procède à la résolution de l'équation 3.2 dans un processus itératif, en utilisant 3.1 pour le calcul de la densité de courants induits et ensuite 3.11 pour le calcul de l'induction magnétique de réaction à chaque itération ; l'induction magnétique source étant calculée une seule fois à la première itération. L'arrêt du processus itératif est conditionné par un test de convergence qui peut être effectué sur la valeur du potentiel vecteur électrique ou sur la densité de courant induit. Le test de convergence doit être réalisé sur l'ensemble des parties réelle et imaginaire séparément, afin d'éviter que la partie imaginaire ne soit noyée dans l'erreur de calcul. En effet, dans le contrôle par courants de Foucault des matériaux conducteurs non magnétiques, la partie imaginaire de l'impédance ne représente qu'environ 2% de la partie réelle [Zaoui-08].

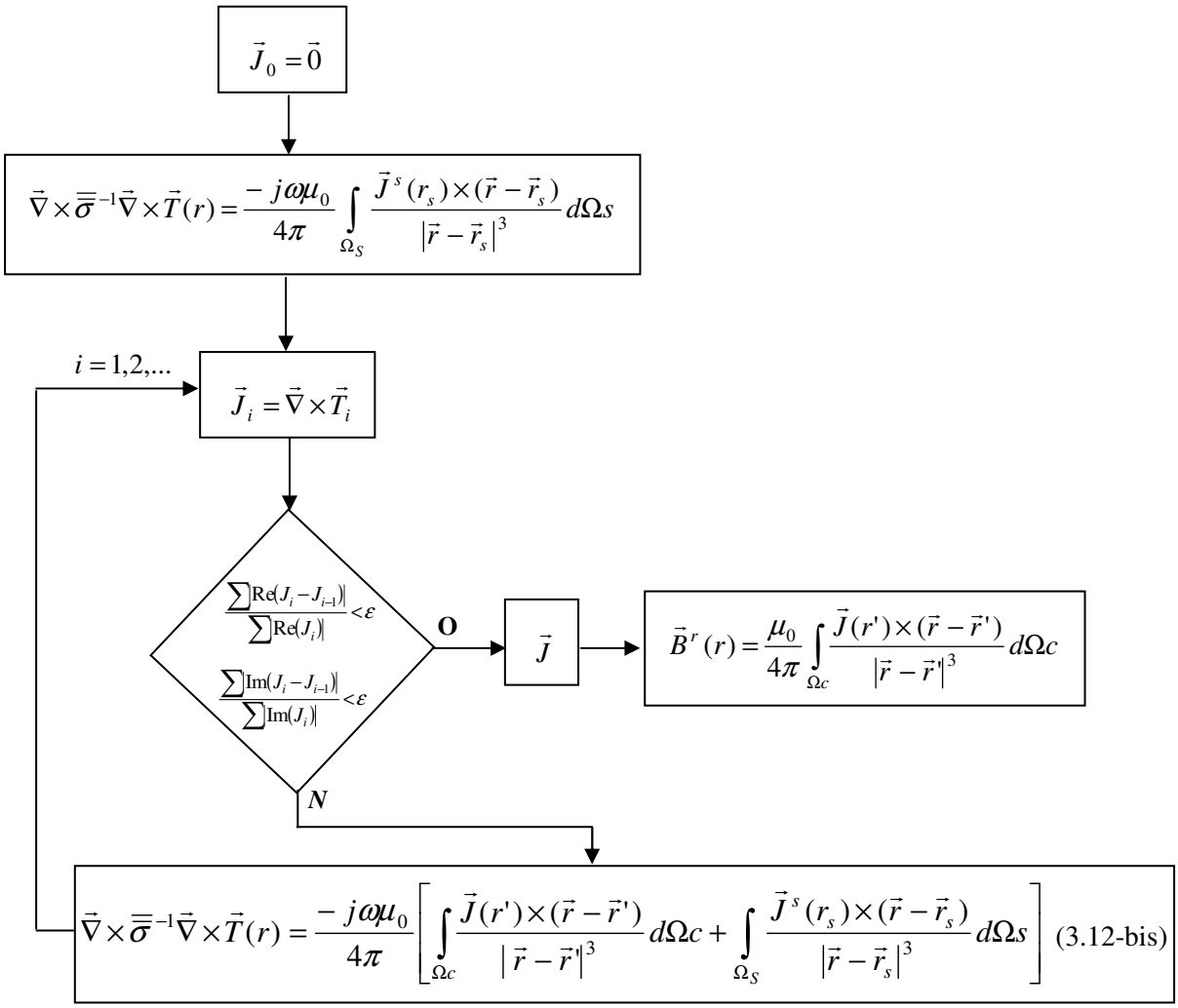


Fig. 3.1. Méthode de résolution itérative

La matrice globale engendrée par la discrétisation de l'équation 3.12-bis (figure 3.1) est creuse car les termes intégraux sont transférés au second membre. La résolution de ce système matriciel est donc plus rapide que celle du système engendré par 3.12. De plus, vu que l'intégrale sur le volume Ωc diminue rapidement en $1/|\vec{r}|^2$, nous pouvons négliger les termes issus des interactions entre les éléments éloignés. Cependant, il reste à vérifier l'unicité du potentiel vecteur électrique $\vec{T}$ et la convergence de 3.12-bis, vu la singularité du terme *rot-rot*.

Dans son travail [Ren-96], Zhuoxiang Ren a démontré que si le second membre d'une équation *rot-rot* est à divergence nulle, l'utilisation de la méthode des gradients conjugués permet d'assurer la convergence de cette équation. Or c'est le cas pour 3.12-bis, où les termes intégraux au second membre sont à divergence nulle (à condition que $\vec{\nabla}.\vec{J}^s = 0$). Cette méthode est donc utilisée

pour résoudre 3.12-bis. Par analogie à ce qu'à présenté Zhuoxiang Ren, la solution $\vec{T}$ obtenue par 3.12-bis peut ne pas être unique du fait de la singularité de la matrice *rot-rot* ; cependant elle donne une unique solution pour la densité de courants induits $\vec{J}$, et donc une solution unique pour l'induction magnétique $\vec{B}$.

Démonstration [Ren-96]

L'équation 3.12-bis peut s'écrire sous la forme $\overline{\overline{M}}\,\overline{T} = \overline{S}$. A chaque itération de la méthode des gradients conjugués on a $\overline{T}_{k+1} = \overline{T}_k + \alpha_k \overline{p}_k$, où α_k est un coefficient et $\overline{p}_k$ un vecteur qui résulte d'une combinaison linéaire de $\overline{\overline{M}}\overline{T}_i - \overline{S}$ $(i \le k)$. Si $\overline{\overline{D}}$ désigne la matrice divergence, on a $\overline{\overline{D}}\overline{p}_k = 0$ du fait que $\overline{\overline{D}}\,\overline{\overline{M}} = [0]$ et $\overline{\overline{D}}\,\overline{S} = 0$. Il en découle que $\overline{\overline{D}}\,\overline{T}_{k+1} = \overline{\overline{D}}\,\overline{T}_k = \overline{\overline{D}}\,\overline{T}_0 = 0$. A chaque itération, la divergence de $\vec{T}$ est donc définie au sens faible; elle est égale à celle de la solution initiale.

3.3 Approximations des couches minces

En première approximation, nous supposons que les plis dans les structures en CFRPs modélisées sont électriquement isolés les uns des autres et que les courants induits ne circulent pas d'un pli à un autre. D'autre part, étant donné la faible épaisseur des plis (≈0.125mm), si, pour les fréquences utilisées, l'épaisseur d'un pli se trouve très inférieure à l'épaisseur de peau, nous pouvons négliger les variations des grandeurs électromagnétiques suivant cette épaisseur, et considérer que les courants induits ne sont générés que par la composante normale du champ magnétique et circulent dans des plans parallèles aux surfaces des plis (figure 3.2), i.e.,

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} J_{t_1} \\ J_{t_2} \\ 0 \end{bmatrix}_{<t_1,t_2,n>} = \begin{bmatrix} \partial_{t_2} T_n \\ -\partial_{t_1} T_n \\ \partial_{t_1} T_{t_2} - \partial_{t_2} T_{t_1} \end{bmatrix}_{<t_1,t_2,n>} . \tag{3.13}$$

Ces hypothèses impliquent les relations suivantes

$$\left| \begin{array}{l} \partial_n T_{t_1} = 0, \\ \partial_n T_{t_2} = 0, \\ \partial_{t_1} T_{t_2} - \partial_{t_2} T_{t_1} = 0 \end{array} \right. . \tag{3.14}$$

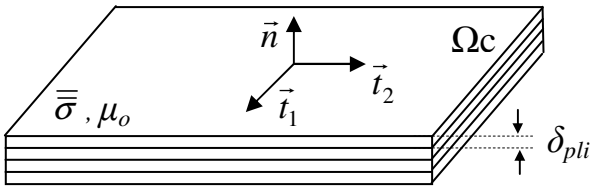


Fig. 3.2. Couches minces empilées en CFRP

Dans ce cas, seule la composante normale du potentiel vecteur électrique est retenue dans la formulation 3.12, et la formulation 3.12 devient

$$\vec{\nabla}\times\bar{\bar{\sigma}}^{-1}\vec{\nabla}\times[T_n(r)\vec{n}(r)]+\frac{j\omega\mu_0}{4\pi}\sum_{Tous\ les\ plis}\delta_{pli}\int_{S_{pli}}\frac{\{(\vec{\nabla}'\times[T_n(r')\vec{n}(r')])\times(\vec{r}-\vec{r}')\}.\vec{n}(r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}ds=$$
$$\frac{-j\omega\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega_S}\frac{[\vec{J}^s(r_s)\times(\vec{r}-\vec{r}_s)].\vec{n}(r)}{|\vec{r}-\vec{r}_s|^3}d\Omega s. \tag{3.15}$$

Dans 3.15, $T_n(r)$ représente la composante normale du potentiel vecteur électrique $\vec{T}$ au point repéré par le vecteur $\vec{r}$ et $\vec{n}(r)$ est la normale à la surface en ce point. S_{pli} et δ_{pli} représentent, respectivement, la surface et l'épaisseur d'un pli.

En coordonnées cartésiennes, la formulation 3.15 se développe comme suit (l'axe *z orienté suivant l'épaisseur*)

$$[\partial_x(\rho_{yx}\partial_y-\rho_{yy}\partial_x)-\partial_y(\rho_{xx}\partial_y-\rho_{xy}\partial_x)]T_z(r)+\frac{j\omega\mu_0}{4\pi}\sum_{Tous\,les\ plis}\delta_{pli}\int_{S_{pli}}\frac{\partial_{y'}T_z(r')(x-x')+\partial_{x'}T_z(r')(y-y')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}ds=$$
$$-\frac{j\omega\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega s}\frac{J_x^s(y-y_s)+J_y^s(x-x_s)}{|\vec{r}-\vec{r}_s|^3}d\Omega s. \tag{3.16}$$

La méthode itérative décrite par la figure 3.1 peut être utilisée pour résoudre 3.16. Les composantes normales du tenseur de conductivité disparaissent de la formulation, car nous avons supposé que les courants induits ne circulent que sur des plans parallèles aux surfaces des plis.

3.4 Calcul de la variation d'impédance de l'inducteur

Pour des applications en CND par courants de Foucault dans le domaine fréquentiel, la caractérisation passe par l'évaluation de la variation de l'impédance du capteur.

La variation de l'impédance de l'inducteur peut être calculée de différentes manières. Cependant, les principes de la conservation d'énergie et de réciprocité sont les plus souvent utilisés pour leur simplicité à mettre en œuvre, sans avoir à modéliser les effets de peau et de proximité au niveau de l'inducteur [Ida-85, Bowler-89, Zaoui-08].

3.4.1 Approche énergétique

L'échange de puissances entre l'inducteur alimenté par un courant de valeur efficace I_s, et la charge en CFRP siège de courants induits, s'exprime comme suit [Ida-85]

$$(\Delta R + j\omega\Delta L)\, I_s^2 = P + j\omega 2W \,. \tag{3.17}$$

P est la puissance active dissipée dans la charge ; elle s'exprime comme suit

$$P = \int_{\Omega c} \vec{J}^{\,*} . \overline{\overline{\rho}}\, \vec{J}\, dv \,. \tag{3.18}$$

Dans un repère cartésien (x, y, z), la relation 3.18 se développe comme suit

$$P = \int_{\Omega c} J_x^*(\rho_{xx} J_x + \rho_{xy} J_y + \rho_{xz} J_z) + J_y^*(\rho_{yx} J_y + \rho_{yy} J_y + \rho_{yz} J_z) + J_z^*(\rho_{zx} J_x + \rho_{zy} J_y + \rho_{zz} J_z)\, dv \,. \tag{3.18-bis}$$

W est l'énergie magnétique; elle s'exprime comme suit

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int_{\Omega c \cup \Omega s \cup \Omega e} \vec{H}^{\,r*} \vec{H}^{\,r}\, dv \,. \tag{3.19}$$

Dans 3.18 et 3.19, $\vec{J}^{\,*}$ et $\vec{H}^{\,r*}$ désignent les conjugués des vecteurs $\vec{J}$ et $\vec{H}^{\,r}$.

En confinant la modélisation du champ électromagnétique aux parties actives du système, seule la puissance active peut être calculée; cette approche ne permet donc d'évaluer que la variation de la partie réelle de l'impédance de l'inducteur.

3.4.2 Approche intégrale

L'inducteur étant alimenté par un courant I_s, la variation de son impédance, due aux courants induits dans la charge en CFRP, peut être évaluée par la formule suivante [Burke-87, Bowler-89]

$$\Delta R + j\omega\Delta L = -\frac{1}{I_s^2}\int_{\Omega s} \vec{E}^i . \vec{J}^s d\Omega s \,. \tag{3.20}$$

Dans 3.20, $\vec{E}^i$ représente le champ électrique au niveau de l'inducteur, produit par les courants induits dans la charge en CFRP, et J^s représente la densité du courant source au niveau de l'inducteur.

En utilisant la formule de Biot et Savart pour évaluer le champ électrique $\vec{E}^i$, on obtient la relation suivante

$$\Delta Z = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi I_s^2}\int_{\Omega s}\int_{\Omega c} \frac{\vec{J}^s(r).\vec{J}(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\Omega c\, d\Omega s \begin{pmatrix} r \in \Omega s \\ r' \in \Omega c \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Dans 3.21, $\|\vec{r}-\vec{r}'\|$ est la distance entre un point repéré par le vecteur $\vec{r}'$ appartenant à la région Ωc, et un point repéré par le vecteur $\vec{r}$ appartenant à la région Ωs.

Vu l'interchangeabilité des intégrales dans 3.19, nous déduisons

$$\Delta Z = -\frac{1}{I_s^2}\int_{\Omega s} \vec{E}^i . \vec{J}^s d\Omega s = -\frac{1}{I_s^2}\int_{\Omega c} \vec{E}^s . \vec{J} d\Omega c \,. \tag{3.22}$$

Dans 3.22, $\vec{E}^s$ représente le champ électrique produit par l'inducteur, calculé au niveau de la charge.

3.5 Conclusion

Il existe plusieurs formulations pour les problèmes de calcul de courants induits, et le choix de la formulation dépend des propriétés physiques et géométriques du système modélisé.

Pour les systèmes modélisés dans ce travail, qui sont caractérisés par une forte anisotropie électrique et des dimensions multi-échelles, nous avons développé une formulation intégro-différentielle en potentiel vecteur électrique. Cette formulation tient compte naturellement des conservations des densités de courant électrique et de flux magnétique, d'une part, et, d'autre part, elle permet de limiter la modélisation aux parties actives du système. Cela permet de pallier les problèmes liés aux dimensions multi-échelles des CFRPs, et facilite la prise en compte des mouvements. D'autre part, dans le cas des couches minces, cette formulation se réduit à un cas quasi-bidimensionnel n'impliquant que la composante normale du potentiel vecteur électrique, ce qui conduit à un gain considérable en termes de temps de calcul et d'espace mémoire de stockage de données.

Finalement, deux approches sont proposées pour l'évaluation de la variation d'impédance de l'inducteur. L'utilisation du principe de conservation de l'énergie est plus économique en termes de calcul ; cependant, en confinant la modélisation aux parties actives, cette approche ne permet d'évaluer que la variation de la partie réelle de l'impédance.

L'étape suivante du travail consiste à discrétiser les équations intégro-différentielles développées dans cette partie, en utilisant une méthode ou un couplage de méthodes de résolution numérique, associés à une stratégie de discrétisation de la structure en CRFP et de l'inducteur.

Chapitre 4

Mise en œuvre d'un modèle Différences Finies – Méthode des Moments

4.1 Introduction

Suivant la complexité de la géométrie du système modélisé, de nombreuses méthodes peuvent être utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles engendrées par la formulation du problème électromagnétique, allant des méthodes simples telle que la méthode des différences finies à des méthodes plus élaborées comme la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis (MEF) est sans doute la méthode numérique la plus utilisée pour résoudre les équations aux dérivées partielles en électrotechnique. Elle a l'avantage de traiter des géométries complexes avec une grande précision de calcul. Elle offre également la possibilité d'intégrer facilement la non linéarité et l'anisotropie des propriétés physiques des matériaux modélisés. Cependant, elle traite mal les régions minces et les mouvements, qui engendrent des systèmes matriciels de rang élevé ou mal conditionnés pour l'un et la nécessité d'un remaillage à chaque déplacement pour l'autre. Ces deux contraintes engendrent des imprécisions et des temps de calcul considérables. Or ces contraintes sont souvent rencontrées dans les systèmes de CND CF, où les capteurs se déplacent à une très faible hauteur (lift off) sur des pièces présentant des géométries très minces telles que les fissures, ou des pièces laminées comme le cas CFRPs.

La méthode des différences finies a moins de succès dans le domaine de l'induction électromagnétique. Comme la méthode des moments, elle est généralement utilisée pour résoudre les

équations de propagation d'ondes électromagnétiques [Hélier-03, Ney-06]. Contrairement à la MEF, elle traite moins facilement les géométries complexes et sa précision dépend directement du pas de discrétisation [Spiteri-02]. Cependant, elle est plus simple à mettre en œuvre et offre une précision raisonnable avec des temps de calcul moins importants que dans le cas de la MEF.

Dans ce travail, la méthode des différences finies est associée à la méthode des moments pour discrétiser les équations intégro-différentielles développées dans le chapitre précédent. Les opérateurs intégraux et différentiels sont développés dans un système de coordonnées cartésiennes.

4.2 Discrétisations de la source et de la charge en CFRP

La source est discrétisée en N_s volumes élémentaires. La densité de courant source est considérée constante par élément. De même, la charge en CFRP, composée de *np* plis, est discrétisée régulièrement en $N_c = M \times N \times L$ volumes élémentaires, respectivement, suivant les axes *x, y* et *z*. La densité des courants induits est considérée constante par élément. Si, pour les fréquences utilisées, l'épaisseur de peau est très grande devant l'épaisseur d'un pli, chaque pli peut être représenté par une seule nappe de volumes élémentaires (i.e., *L=np*) comme le montre la figure 4.1. En effet, la conductivité des CFRP étant de l'ordre de $10^4 S/m$; à une fréquence de $10^6 Hz$ l'épaisseur de peau correspondante est de $5mm$, soit 40 fois l'épaisseur d'un pli.

Par soucis de clarté, certains algorithmes développés dans ce qui suit sont basés sur le raisonnement que chaque pli est représenté suivant l'épaisseur par une seule nappe de volumes élémentaires ; cependant, l'approche reste valable quelque soit le nombre de volumes élémentaires par épaisseur d'un pli.

En pratique, au lieu d'utiliser les indices *i, j, k*, qui indiquent les positions du centre d'un volume élémentaire suivant les axes *x*, *y* et *z* (figure 4.1), nous préférons travailler avec un indice global « *p* » définit comme suit

$$p = i + (j-1)M + (k-1)(MN) \;\; pour \;\; (1 \le i \le M,\, 1 \le j \le N,\, 1 \le k \le np)\,. \qquad (4.1)$$

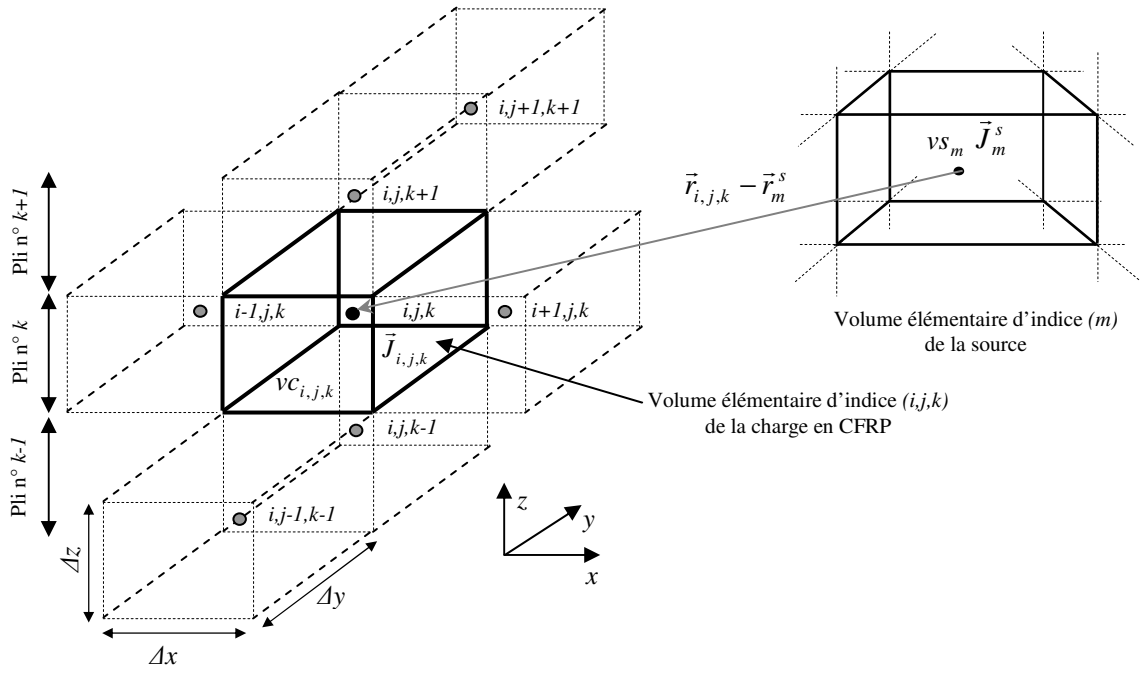


Fig. 4.1. Volumes élémentaires de la source et la charge en CFRP

Pour le maillage de la charge, on n'a besoin de définir que les coordonnées des centres des volumes élémentaires. L'algorithme du maillage est le suivant

$$\textit{Déclaratin des constantes: nombre de plis } (np), \textit{longeur et largeur } (Long,\ L\arg)$$

$$\textit{Définir le nombre d'éléments } (N,\ M,\ np) \textit{ suivant les axes } x, y, z$$

$$\textit{Calcul des pas du maillage}: \Delta x = \frac{Long}{N},\ \Delta y = \frac{L\arg}{N},\ \Delta z = \textit{épaisseur d'un pli}$$

$$vc = \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\textit{Définir un point de référence } P_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$\underline{\textit{Pour}}\ i = 1 \rightarrow N,\ \underline{\textit{Pour}}\ j = 1 \rightarrow M,\ \underline{\textit{Pour}}\ k = 1 \rightarrow np$$

$$p = i + (j-1)M + (k-1)(MN)$$

$$x_p = (i-1)\Delta x + \frac{\Delta x}{2} + x_0,\ y_p = (j-1)\Delta y + \frac{\Delta y}{2} + y_0,\ z_p = (k-1)\Delta z + \frac{\Delta z}{2} + z_0$$

$$\underline{\textit{fin pour}},\ \underline{\textit{fin pour}},\ \underline{\textit{fin pour}}$$

4.2.1 Approximation des dérivées par un schéma différences finies

En chaque nœud représentant le centre d'un volume élémentaire d'indices (*i, j, k*), les dérivées suivant les axes *x, y* et *z* sont approximées par les différences finies centrées suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(.)_{i,j,k}}{\partial x} = [(.)_{i+1,j,k} - (.)_{i-1,j,k}]/(x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) \\ \dfrac{\partial(.)_{i,j,k}}{\partial y} = [(.)_{i,j+1,k} - (.)_{i,j-1,k}]/(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \\ \dfrac{\partial(.)_{i,j,k}}{\partial z} = [(.)_{i,j,k+1} - (.)_{i,j,k-1}]/(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \end{cases} . \tag{4.2}$$

En tenant compte de 4.1, les dérivées 4.2 deviennent

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(.)_{p}}{\partial x} = [(.)_{p+1} - (.)_{p-1}]/(x_{p+1} - x_{p-1}) \\ \dfrac{\partial(.)_{p}}{\partial y} = [(.)_{p+M} - (.)_{p-M}]/(y_{p+M} - y_{p-M}) \\ \dfrac{\partial(.)_{p}}{\partial z} = [(.)_{p+MN} - (.)_{p-MN}]/(z_{p+MN} - z_{p-MN}) \end{cases} . \tag{4.2-bis}$$

4.2.2 Le tenseur de résistivité associé à chaque volume élémentaire de la charge en CFRP

Le tenseur de résistivité $\overline{\overline{\rho}}$ associé à chaque volume élémentaire de la charge en CFRP, repéré par les indices *i*, *j*, *k*, est donné par la relation 4.3, où σ_L^k, σ_T^k et θ_k représentent respectivement les conductivités suivant les sens parallèle et perpendiculaire aux fibres, et l'orientation des fibres du pli n°*k* par rapport au repère choisi.

$$\overline{\overline{\rho}}_{i,j,k} = \begin{pmatrix} \sigma_L^k \cos^2(\theta_k) + \sigma_T^k \sin^2(\theta_k) & \dfrac{\sigma_L^k - \sigma_T^k}{2}\sin(2\theta_k) & 0 \\ \dfrac{\sigma_L^k - \sigma_T^k}{2}\sin(2\theta_k) & \sigma_L^k \sin^2(\theta_k) + \sigma_T^k \cos^2(\theta_k) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{<x,y,z>}^{-1} \tag{4.3}$$

L'algorithme d'affectation du tenseur de résistivité à chaque volume élémentaire est le suivant

Déclaration du nombre de plis (np)

Déclaration du nombre d'éléments suivant les deux axes latéraux (N, M)

Déclaration des conductivités σ_L *et* σ_T *pour chaque pli* $[\sigma_L^1, \sigma_L^2, ..., \sigma_L^{np}]$, $[\sigma_T^1, \sigma_T^2, ..., \sigma_T^{np}]$

Déclaration des orientations des fibres dans chaque pli $[\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{np}]$

<u>*pour*</u> $k = 1 \rightarrow np$

<u>*lire*</u> $\sigma_L^k, \sigma_T^k, \theta_k$

$$\sigma_{xx} = \sigma_L^k \cos^2(\theta_k) + \sigma_T^k \sin^2(\theta_k), \quad \sigma_{xy} = \frac{\sigma_L^k - \sigma_T^k}{2} \sin(2\theta_k), \quad \sigma_{xz} = 0$$

$$\sigma_{yx} = \frac{\sigma_L^k - \sigma_T^k}{2} \sin(2\theta_k), \quad \sigma_{yy} = \sigma_L^k \sin^2(\theta_k) + \sigma_T^k \cos^2(\theta_k), \quad \sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{zx} = 0, \quad \sigma_{zy} = 0, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{ep}$$

$$\delta = \sigma_{xx}(\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{zy}\sigma_{yz}) + \sigma_{xy}(\sigma_{zx}\sigma_{yz} - \sigma_{yx}\sigma_{zz}) + \sigma_{xz}(\sigma_{yx}\sigma_{zy} - \sigma_{zx}\sigma_{yy})$$

<u>*pour*</u> $i = 1 \rightarrow N$, <u>*pour*</u> $j = 1 \rightarrow M$

$p = i + (j-1)M + (k-1)(MN)$

$$\rho_{xx}(p) = (\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{zy}\sigma_{yz})/\delta, \quad \rho_{xy}(p) = (\sigma_{zy}\sigma_{xz} - \sigma_{xy}\sigma_{zz})/\delta, \quad \rho_{xz}(p) = (\sigma_{xy}\sigma_{yz} - \sigma_{yy}\sigma_{xz})/\delta$$

$$\rho_{yx}(p) = (\sigma_{zx}\sigma_{yz} - \sigma_{yx}\sigma_{zz})/\delta, \quad \rho_{yy}(p) = (\sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{zx}\sigma_{xz})/\delta, \quad \rho_{yz}(p) = (\sigma_{yx}\sigma_{xz} - \sigma_{xx}\sigma_{yz})/\delta$$

$$\rho_{zx}(p) = (\sigma_{yx}\sigma_{zy} - \sigma_{zx}\sigma_{yy})/\delta, \quad \rho_{zy}(p) = (\sigma_{zx}\sigma_{xy} - \sigma_{xx}\sigma_{zy})/\delta, \quad \rho_{zz}(p) = (\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yx}\sigma_{xy})/\delta$$

<u>*fin pour*</u>, <u>*fin pour*</u>

<u>*fin pour*</u>, <u>*fin pour*</u>

4.3 Construction des matrices

Les formulations 3.12 s'écrit sous la forme algébrique suivante

$$\left(\overline{\overline{C}}\,\overline{\overline{R}}\,\overline{\overline{C}} + j\omega\mu_0 \overline{\overline{M}}_{cc}\overline{\overline{C}}\right)\overline{T} = -j\omega\mu_0 \overline{\overline{M}}_{sc}\,\overline{J}^s, \tag{4.4}$$

La charge étant discrétisée en $N_c = N \times M \times np$ volumes élémentaires, le vecteur $\overline{T}$ est de dimension $3N_c$; il se développe comme suit

$$\overline{T} = \begin{bmatrix} \{T_x\} \\ \{T_y\} \\ \{T_z\} \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Les sous vecteurs $\{T_l\}_{l=x,y,z}$ sont de dimension N_c. Ils représentent les trois composantes du potentiel vecteur électrique pour tous les volumes élémentaires de la charge.

La matrice $\overline{\overline{C}}$ représente la discrétisation de l'opérateur rotationnel. Elle est de dimension $3N_c \times 3N_c$, et se développe comme suit

$$\overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} [0] & -[\partial_z] & [\partial_y] \\ [\partial_z] & [0] & -[\partial_x] \\ -[\partial_y] & [\partial_x] & [0] \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

Les sous matrices $[\partial_x]$, $[\partial_y]$ et $[\partial_z]$ sont de dimension $N_c \times N_c$. Elles sont construites à partir des dérivées 4.2-bis. L'algorithme de construction des matrices $[\partial_x]$, $[\partial_y]$ et $[\partial_z]$ est le suivant

Déclaration des pas du maillage : $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

Déclaration du nombre d'éléments suivant les trois axes N, M *et* np

$N_c = N \times M \times np$

Déclaration des matrices creuses $[\partial_x], [\partial_y]$ *et* $[\partial_z]$, *de dimensions* $N_c \times N_c$

<u>*pour*</u> $p = 1 \rightarrow N_c$

<u>*Si*</u> $p > 1$, $[\partial_x]_{(p,p-1)} = -1/(2\Delta x)$, <u>*fin Si*</u> ; <u>*Si*</u> $p < NML$, $[\partial_x]_{(p,p+1)} = 1/(2\Delta x)$, <u>*fin Si*</u>

<u>*Si*</u> $p > N$, $[\partial_y]_{(p,p-N)} = -1/(2\Delta y)$, <u>*fin Si*</u> ; <u>*Si*</u> $p < NML - N$, $[\partial_y]_{(p,p+N)} = 1/(2\Delta y)$, <u>*fin Si*</u>

<u>*Si*</u> $p > NM$, $[\partial_z]_{(p,p-NM)} = -1/(2\Delta z)$, <u>*fin Si*</u> ; <u>*Si*</u> $p < NML - NM$, $[\partial_z]_{(p,p+NM)} = 1/(2\Delta z)$, <u>*fin Si*</u>

<u>*fin pour*</u>

La matrice résistivité $\overline{\overline{R}}$ se développe comme suit

$$\overline{\overline{R}} = \begin{bmatrix} [diag_n(\overline{\rho}_{xx})] & [diag_n(\overline{\rho}_{xy})] & [diag_n(\overline{\rho}_{xz})] \\ [diag_n(\overline{\rho}_{yx})] & [diag_n(\overline{\rho}_{yy})] & [diag_n(\overline{\rho}_{yz})] \\ [diag_n(\overline{\rho}_{zx})] & [diag_n(\overline{\rho}_{zy})] & [diag_n(\overline{\rho}_{zz})] \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Les sous matrices $[diag_n(\overline{\rho}_{mn})]_{m=x,y,z;n=x,y,z}$ sont des matrices diagonales de dimension $N_c \times N_c$. Elles contiennent les éléments des vecteurs $\overline{\rho}_{mn}$ qui représentent les composantes *mn* ($m = x, y, z; n = x, y, z$) du tenseur de résistivité pour tous les volumes élémentaires de la charge. L'algorithme de construction de la matrice $\overline{\overline{R}}$ est le suivant

Déclaration de la matrice creuse $\overline{\overline{R}}$, *de dimension* $3N_c \times 3N_c$

<u>*pour*</u> $p = 1 \rightarrow N_c$

$R(p,p) = \rho_{xx}(p),\ R(p, p+N_c) = \rho_{xy}(p),\ R(p, p+2N_c) = \rho_{xz}(p)$

$R(p+N_c, p) = \rho_{yx}(p),\ R(p+N_c, p+N_c) = \rho_{yy}(p),\ R(p+N_c, p+2N_c) = \rho_{yz}(p)$

$R(p+2N_c, p) = \rho_{zx}(p),\ R(p+2N_c, p+N_c) = \rho_{zy}(p),\ R(p+2N_c, p+2N_c) = \rho_{zz}(p)$

<u>*fin pour*</u>

Les matrices $\overline{\overline{M}}_{sc}$ et $\overline{\overline{M}}_{cc}$ sont issues des termes intégraux qui sont discrétisés par la méthode des moments [Le Duc-08].

Le champ magnétique source en un des N_c volumes élémentaires de la charge en CFRP résulte de la somme de la contribution de tous les N_s volumes élémentaires issus de la discrétisation de la source. La matrice $\overline{\overline{M}}_{sc}$ est donc de dimension $3N_c \times 3N_s$, et le vecteur $\overline{J}^s$ est de dimensions $3N_s$. Ces derniers se développent comme suit

$$\overline{J}^s = \begin{bmatrix} \{J_x^s\} \\ \{J_y^s\} \\ \{J_z^s\} \end{bmatrix}, \qquad \overline{\overline{M}}_{sc} = \begin{bmatrix} [0] & [M_{scz}] & -[M_{scy}] \\ -[M_{scz}] & [0] & [M_{scx}] \\ [M_{scy}] & -[M_{scx}] & [0] \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Les vecteurs $\{J_l^s\}_{l=x,y,z}$ sont de dimension N_s, et les matrices $[M_{scl}]_{l=x,y,z}$ sont de dimension $N_c \times N_s$. Les éléments des matrices $[M_{scl}]_{l=x,y,z}$ s'expriment comme suit

$$M_{scl}(i,j) = \frac{vs_j(l_i - l_j)}{4\pi \| \vec{r}_i - \vec{r}_j \|^3} \; (i = 1,2,...,N_c \,;\, j = 1,2,...,N_s)\,(l = x, y, z)\,. \tag{4.9}$$

Dans la relation 4.9, vs_j est le volume élémentaire d'indice *j* de la source, et $\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|$ représente la distance entre le centre de ce volume élémentaire, repéré par le vecteur $\vec{r}_j$, et le centre du volume élémentaire d'indice *i* de la charge en CRFP, repéré par le vecteur $\vec{r}_i$.

La matrice $\overline{\overline{M}}_{cc}$ est de dimension $3N_c \times 3N_c$. Elle traduit les interactions entre tous les volumes élémentaires de la charge. Elle se développe comme suit

$$\overline{\overline{M}}_{cc} = \begin{bmatrix} [0] & [M_{ccz}] & -[M_{ccy}] \\ -[M_{ccz}] & [0] & [M_{ccx}] \\ [M_{ccy}] & -[M_{ccx}] & [0] \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Les sous matrices $[M_{ccl}]_{l=x,y,z}$ sont de dimension $N_c \times N_c$; leurs éléments s'expriment comme suit

$$M_{ccl}(i,j) = \frac{vc_j(l_i - l_j)}{4\pi \| \vec{r}_i - \vec{r}_j \|^3} \; (i = 1,2,...,N_c \,;\, j = 1,2,...,N_c)\,(l = x, y, z)\,. \tag{4.11}$$

Dans la relation 4.11, vc_j est le volume élémentaire d'indice *j* de la charge, et $\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|$ représente la distance entre le centre de ce volume élémentaire, repéré par le vecteur $\vec{r}_j$, et le centre du volume élémentaire d'indice *i* de la charge, repéré par le vecteur $\vec{r}_i$.

Vu que les éléments des matrices $[M_{ccl}]_{l=x,y,z}$ diminuent en $1/r^2$, l'effet des éléments lointains peut être négligé. On définit donc un rayon *d* au-delà duquel on néglige les éléments de ces matrices. Les matrices $[M_{ccl}]_{l=x,y,z}$ présentent une singularité à la source, i.e. lorsque $\vec{r}_i = \vec{r}_j$ ($M_{ccl}(i,i) \to \infty$). Pour évaluer ces termes, nous utilisons la méthode de Gauss (Annexe 3).

L'algorithme de calcul des éléments des matrices $[M_{ccl}]_{l=x,y,z}$ est le suivant

$$
\left|
\begin{array}{l}
\textit{Définir les matrices } [M_{ccx}],\ [M_{ccy}] \textit{ et } [M_{ccz}] \textit{ comme creuses de dimension } N_c \times N_c \\
d \propto \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \\
vc = \Delta x \Delta y \Delta z \\
\underline{\textit{Pour}}\ i = 1 \rightarrow N_c, \\
M_{ccx}(i,i),\ M_{ccy}(i,i),\ M_{ccz}(i,i), \textit{évalués par la méthode de Guauss} \\
\underline{\textit{Pour}}\ j = i+1 \rightarrow N_c \\
r = \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
\underline{\textit{si}}\ r < d\ \ \underline{\textit{alors}} \\
M_{ccx}(i,j) = \dfrac{vc(x_i - x_j)}{4\pi r^3},\ M_{ccy}(i,j) = \dfrac{vc(y_i - y_j)}{4\pi r^3},\ M_{ccz}(i,j) = \dfrac{vc(z_i - z_j)}{4\pi r^3} \\
M_{ccx}(j,i) = -M_{ccx}(i,j),\ M_{ccy}(j,i) = -M_{ccy}(i,j),\ M_{ccz}(j,i) = -M_{ccz}(i,j) \\
\underline{\textit{fin si}} \\
\underline{\textit{fin pour}},\ \underline{\textit{fin pour}}
\end{array}
\right.
$$

Compte tenu des développements précédents, la forme algébrique de la formulation réduite pour les couches minces 3.16 se développe comme suit

$$
\left\{
\begin{array}{l}
[\partial_x]\left([diag_n(\overline{\rho}_{yx})][\partial_y] - [diag_n(\overline{\rho}_{yy})][\partial_x]\right) - [\partial_y]\left([diag_n(\overline{\rho}_{xx})][\partial_y] - [diag_n(\overline{\rho}_{xy})][\partial_x]\right) \\
\\
+\ j\omega\mu_0\left([M_{ccy}][\partial_y] + [M_{ccx}][\partial_x]\right)
\end{array}
\right\}\{T_z\}
$$

$$
= -j\omega\mu_0\left([M_{scy}]\{J_{sx}\} - [M_{scx}]\{J_{sy}\}\right). \tag{4.12}
$$

On passe donc d'un système de dimension $3N_c \times 3N_c$ à un système de dimension $N_c \times N_c$. Cela conduit à des gains considérables en espace mémoire et en temps de calcul.

4.4 Les conditions aux limites

Avant de procéder à la résolution des systèmes matriciels 4.4 et 4.12, il est nécessaire d'imposer la condition aux limites 3.3.

Le système 4.4 est de la forme

$$\overline{\overline{A}}\,\overline{T} = \overline{S}\,. \qquad \text{(4.4-bis)}$$

La matrice $\overline{\overline{A}}$ est de dimensions $3N_c \times 3N_c$, et les vecteurs $\overline{T}$ et $\overline{S}$ sont de dimensions $3N_c$. Le vecteur $\overline{T}$ contient les trois composantes du potentiel vecteur électrique (T_x, T_y et T_z) pour chaque volume élémentaire de la charge, et le vecteur $\overline{S}$ représente le second membre.

La condition aux limites 3.3 sur les frontières Γ_x, Γ_y et Γ_z, qui sont respectivement parallèles aux axes *x*, *y* et *z*, est imposée explicitement comme suit

$$sur\ \Gamma_x \left|\begin{array}{l}
\underline{pour}\ \ i=1\,\&\,N,\ \underline{pour}\ \ j=1\rightarrow M,\ \underline{pour}\ \ k=1\rightarrow np \\
p=i+(j\text{-}1)N+(k\text{-}1)(NM) \\
A(p+N_c,1\rightarrow 3N_c)=0,\quad A(1\rightarrow 3N_c,p+N_c)=0,\quad A(p+N_c,p+N_c)=1 \\
A(p+2N_c,1\rightarrow 3N_c)=0,\ A(1\rightarrow 3N_c,p+2N_c)=0,\ A(p+2N_c,p+2N_c)=1 \\
S(p+N_c)=0,\ S(p+2N_c)=0 \\
\underline{fin\ pour}\ ,\ \underline{fin\ pour},\ \underline{fin\ pour}
\end{array}\right.$$

$$sur\ \Gamma_y \left|\begin{array}{l}
\underline{pour}\ \ i=1\rightarrow N,\ \underline{pour}\ \ j=1\,\&\,M,\ \underline{pour}\ \ k=1\rightarrow np \\
p=i+(j\text{-}1)N+(k\text{-}1)(NM) \\
A(p,1\rightarrow 3N_c)=0,\quad A(1\rightarrow 3N_c,p)=0,\quad A(p,p)=1 \\
A(p+2N_c,1\rightarrow 3N_c)=0,\ A(1\rightarrow 3N_c,p+2N_c)=0,\ A(p+2N_c,p+2N_c)=1 \\
S(p)=0,\ S(p+2N_c)=0 \\
\underline{fin\ pour}\ ,\ \underline{fin\ pour},\ \underline{fin\ pour}
\end{array}\right.$$

$$sur\ \Gamma_z \left|\begin{array}{l}
\underline{pour}\ \ i=1\rightarrow N,\ \underline{pour}\ \ j=1\rightarrow M,\ \underline{pour}\ \ k=1\,\&\,np \\
p=i+(j\text{-}1)N+(k\text{-}1)(NM) \\
A(p,1\rightarrow 3N_c)=0,\quad A(1\rightarrow 3N_c,p)=0,\quad A(p,p)=1 \\
A(p+N_c,1\rightarrow 3N_c)=0,\ A(1\rightarrow 3N_c,p+N_c)=0,\ A(p+N_c,p+N_c)=1 \\
S(p)=0,\ S(p+N_c)=0 \\
\underline{fin\ pour}\ ,\ \underline{fin\ pour},\ \underline{fin\ pour}
\end{array}\right.$$

Le système 4.12 n'implique que la composante normale du potentiel vecteur électrique. Il est de la forme

$$\overline{\overline{A}}_{xy}\,\overline{T}_z = \overline{S}_z\,. \qquad \text{(4.12-bis)}$$

La matrice $\overline{\overline{A}}_{xy}$ est de dimension $N_c \times N_c$, et les vecteurs $\overline{T}_z$ et $\overline{S}_z$ sont de dimensions N_c. La condition aux limites 3.3 est imposée sur les frontières Γ_x et Γ_y comme suit

$$sur\ \Gamma_x \quad \left|\begin{array}{l} \underline{pour}\ \ i=1\,\&\,N,\ \underline{pour}\ \ j=1\rightarrow M,\ \underline{pour}\ \ k=1\rightarrow np \\ p=i+(j\text{-}1)N+(k\text{-}1)(NM) \\ A_{xy}(p,1\rightarrow N_c)=0,\quad A_{xy}(1\rightarrow N_c,p)=0,\quad A_{xy}(p,p)=1, \\ S_z(p)=0 \\ \underline{fin\ pour}\,,\ \underline{fin\ pour},\ \underline{fin\ pour} \end{array}\right.$$

$$sur\ \Gamma_y \quad \left|\begin{array}{l} \underline{pour}\ \ i=1\rightarrow N,\ \underline{pour}\ \ j=1\,\&\,M,\ \underline{pour}\ \ k=1\rightarrow np \\ p=i+(j\text{-}1)N+(k\text{-}1)(NM) \\ A_{xy}(p,1\rightarrow N_c)=0,\quad A_{xy}(1\rightarrow N_c,p)=0,\quad A_{xy}(p,p)=1, \\ S_z(p)=0 \\ \underline{fin\ pour}\,,\ \underline{fin\ pour},\ \underline{fin\ pour} \end{array}\right.$$

4.5 Résolution des systèmes matriciels

Nous avons justifié l'utilisation de la méthode du gradient conjugué pour résoudre les systèmes algébriques issus des discrétisations des formulations (voir section 3.2). Cependant, les systèmes 4.4 et 4.16 ne sont pas symétriques. Pour résoudre ces systèmes, nous utilisons la méthode itérative du bi-gradient conjugué stabilisé (Bi-CGStab). En effet, la méthode du bi-gradient conjugué constitue une généralisation de la méthode du gradient conjugué pour les matrices non symétriques [Driessen-91, Salonen-96, V.D. Vorst-96].

Pour résoudre le système 4.4, nous procédons par une solution itérative décrite par l'algorithme suivant

$$
\left|
\begin{array}{l}
\textit{Définir un nombre maximal d'itérations } (\max_it) \\
\textit{Définir la tolérence } (\varepsilon) \\
\textit{Initialiser } \bar{J}_0 = 0 \\
\underline{\textit{pour}} \;\; i = 1 \rightarrow \max_it \\
\bar{T}_i = BIGSTAB\left(\left[\overline{\overline{C}}\;\overline{\overline{R}}\;\overline{\overline{C}}\right], \left\{-j\omega\mu_0 \overline{\overline{M}}_{sc}\,\bar{J}^s - j\omega\mu_0 \overline{\overline{M}}_{cc}\,\bar{J}_{i-1}\right\}\right) \\
\bar{J}_i = \overline{\overline{C}}\,\bar{T}_i \\
\underline{\textit{si}} \;\; \dfrac{|\mathrm{Re}(J_i - J_{i-1})|}{|\mathrm{Re}(J_i)|} \le \varepsilon \;\; \underline{\textit{et}} \;\; \dfrac{|\mathrm{Im}(J_i - J_{i-1})|}{|\mathrm{Im}(J_i)|} \le \varepsilon \;\; \underline{\textit{alors}} \;\; \textit{sortir} \;\; \underline{\textit{fin si}} \\
\underline{\textit{fin pour}}
\end{array}
\right.
$$

La même procédure est utilisée pour résoudre le système 4.16.

4.6 Exploitation des résultats

La résolution des systèmes matriciels 4.5 et 4.16 conduit à la détermination des trois composantes du potentiel vecteur électrique ainsi que des trois composantes de la densité de courants induits au centre de chaque volume élémentaire de la charge. Ces données sont exploitées pour le calcul du champ magnétique de réaction et la variation d'impédance de l'inducteur.

4.6.1 Calcul du champ magnétique de réaction

Une fois que les trois composantes de la densité des courants induits sont déterminées dans chaque volume élémentaire, le champ magnétique de réaction est calculé comme suit

$$
\bar{H}^r = \begin{bmatrix} \bar{H}_x^r \\ \bar{H}_y^r \\ \bar{H}_z^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [M_{ccz}] & -[M_{ccy}] \\ -[M_{ccz}] & [0] & [M_{ccx}] \\ [M_{ccy}] & -[M_{ccx}] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{J}_x \\ \bar{J}_y \\ \bar{J}_z \end{bmatrix}. \qquad (4.13)
$$

Les vecteurs $\bar{H}_x^r$, $\bar{H}_y^r$ et $\bar{H}_z^r$ représentent les trois composantes du champ magnétique de réaction pour tous les volumes élémentaires de la charge.

4.6.2 Calcul de la variation d'impédance de l'inducteur

Une fois que les trois composantes de la densité de courants induits et du champ magnétique de réaction sont calculées, on peut procéder au calcul de la variation d'impédance de l'inducteur.

L'intégrale 3.21 est discrétisée comme suit

$$\Delta Z = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi I_s^2} \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_s} \frac{vc_i vs_j}{\left\| \vec{r}_i - \vec{r}_j \right\|} \vec{J}_i . \vec{J}_j^{\,s} . \tag{4.14}$$

L'équation 4.14 peut s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$\overline{J}^T \overline{\overline{M}}\, \overline{J}^s . \tag{4.15}$$

La matrice $\overline{\overline{M}}$ se développe comme suit

$$\overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{M}}_{cs} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\overline{M}}_{cs} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\overline{M}}_{cs} \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

La matrice $\overline{\overline{M}}_{sc}$ est de dimension $N_c \times N_s$. Ses éléments sont calculés comme suit

$$M_{cs}(i,j) = \frac{j\omega\omega_0}{4\pi I_s^2} \frac{vc_i vs_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|} \; (i = 1, 2, ..., N_c \; , \; j = 1, 2, ..., N_s) \; . \tag{4.17}$$

Le module $\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|$ désigne la distance entre le volume élémentaire d'indice *i* de la charge et le volume élémentaire d'indice *j* appartenant à la source.

L'intégrale 3.18-bis est discrétisée comme suit

$$P = \sum_{i=1}^{Nc} vc_i \left[J_x^{i*} (\rho_{xx}^i J_x^i + \rho_{xy}^i J_y^i + \rho_{xz}^i J_z^i) + J_y^{i*} (\rho_{yx}^i J_x^i + \rho_{yy}^i J_y^i + \rho_{yz}^i J_z^i) + J_z^{i*} (\rho_{zx}^i J_x^i + \rho_{zy}^i J_y^i + \rho_{zz}^i J_z^i) \right] \tag{4.18}$$

Le signe étoile (*) dans 4.18, désigne «le complexe conjugué ».

4.7 Conclusion

Nous avons proposé un couplage de la méthode des différences finies avec la méthode des moments pour discrétiser les formulations intégro-différentielles développées dans le chapitre précédent. Les termes différentiels sont discrétisés par un schéma différences finies centrées, et les termes intégraux sont discrétisés par la méthode des moments.

La méthode du bi-gradient conjugué stabilisé est proposée pour la résolution des systèmes matriciels non symétriques engendrés par ce couplage. Pour réduire le nombre d'éléments stockés dans les matrices globales et réduire les temps de calcul, nous avons proposé une méthode de résolution itérative où les termes intégraux sont transférés au second membre.

Nous avons développé les algorithmes nécessaires pour l'implémentation d'un code de calcul. Certains algorithmes sont basés sur le raisonnement que chaque pli de la charge en CFRP est représenté par une seule nappe de volumes élémentaires ; cependant, mis à part l'affectation des propriétés physiques, ces algorithmes demeurent valables quelque soit le nombre de volumes élémentaires suivant l'épaisseur d'un pli.

La prochaine étape de ce travail consiste à implémenter un code de calcul à base de ces algorithmes, et vérifier les limites de validité des hypothèses du modèle simplifié pour les couches minces.

Chapitre 5

Implémentation et validation

5.1 Introduction

Nous avons implémenté les algorithmes développés dans le chapitre précédent dans un code de calcul sur Matlab. Cette partie du travail consiste à valider ces algorithmes, en comparant, dans des exemples de calcul, les résultats numériques à ceux obtenus par des calculs analytiques. Pour ce faire, nous disposons de deux modèles analytiques exprimant les variations d'impédances d'une bobines à axe parallèle et d'une bobines à axe perpendiculaire à la surface d'une plaque présentant une anisotropie uniaxiale de la conductivité électrique [Burke-90] (Annexe 1), et un troisième modèle exprimant le champ électrique induit par une boucle de courant dans une telle plaque [Roberts-88] (Annexe 2). La nécessité d'une validation concerne particulièrement le modèle réduit pour les couches minces. Il s'agit notamment de déterminer les limites de validité de ce modèle vis-à-vis de la configuration de l'inducteur qui détermine la répartition du champ source, et vis-à-vis de la fréquence et de l'épaisseur de la charge.

Nous commençons par une brève description du code de calcul développé, puis nous entamons la compagne de validation. Nous terminons par un exemple d'une bobine sur une plaque multicouche en CFRP. Par la même occasion, nous comparons les temps de calcul et les espaces mémoires requis pour les différentes formulations.

Vu qu'il n'existe pas de problème test pour le CND par courants de Foucault des CFRPs, les dimensions des systèmes considérés sont arbitraires, néanmoins réalistes. Les valeurs des épaisseurs et des conductivités des plaques considérées correspondent aux valeurs standards dans les CFRPs.

5.2 Description du code de calcul

Le code de calcul est composé de sept parties principales :

- La déclaration des données,
- les maillages de la source et de la charge en CFRP,
- la construction des matrices,
- le calcul du champ source,
- la résolution du système matriciel,
- l'exploitation des résultats,
- la visualisation des résultats.

Pour une utilisation optimale de l'espace mémoire, les éléments nuls ne sont pas stockés. Toutes les matrices sont déclarées comme creuses « *sparse* ».

La méthode itérative du bi-gradient conjugué stabilisé existe sur Matlab sous la commande «*BICGSTAB*». Nous l'avons directement exploité pour la résolution des systèmes matriciels. De même, nous avons exploité les commandes «*plot* » pour la visualisation des courbes et « *quiver3*» pour la visualisation de la répartition des vecteurs dans l'espace 3D.

5.3 Validation

Nous comparons les résultats numériques obtenus par le modèle réduit à ceux obtenus par des calculs analytiques, pour un système composé d'une bobine sur une plaque mince à anisotropie uniaxiale. Nous effectuons une comparaison en termes de variation de l'impédance de la bobine en fonctions du lift off (distance entre la bobine et la plaque), de la fréquence et de l'épaisseur de la plaque. Deux cas sont considérés : le cas où l'axe de la bobine est perpendiculaire à la surface de la plaque (*bobine à axe vertical*) et le cas où l'axe de la bobine est parallèle à la surface de la plaque (*bobine à axe parallèle*). Ces deux situations sont souvent rencontrées en CND par courants de Foucault.

5.3.1 Bobine à axe vertical sur une plaque mince anisotrope

Le système modélisé est décrit dans les figures 5.1. Une bobine de rayons interne r_i et externe r_e, d'épaisseur h est située à une distance (lift off) l d'une plaque anisotrope, de surface $Dx \times Dy$ et d'épaisseur e. La bobine est alimentée par un courant alternatif sinusoïdal, d'intensité I_s et de fréquence f. Les valeurs numériques des paramètres du système modélisé sont fournies dans le tableau 5.1. Le tenseur de conductivité de la plaque s'exprime comme suit

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}_{<x,y,z>} . \tag{5.1}$$

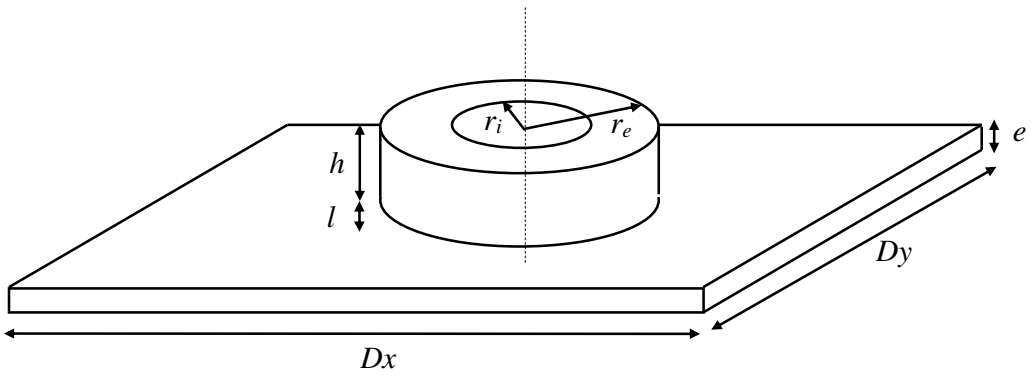


Fig. 5.1. Bobine à axe vertical au dessus d'une plaque conductrice anisotrope

Tableau 5.1- Les valeurs numériques des dimensions de la bobine et de la plaque

Paramètre	Valeur numérique
Plaque	
Conductivités (σ_x, σ)	(10^4, 10^2)S/m
Epaisseur (e)	Variable
Côtés (Dx, Dy)	(200, 100) mm
Bobine	B1
Nombre de spires	500
Rayon intérieur (r_i)	5mm
Rayon extérieur (r_e)	10mm
Epaisseur (h)	1mm

Le calcul analytique de la variation de l'impédance de la bobine est présenté dans l'annexe A1. Les intégrales A.1.2, A.1.3 et A.1.4 sont évaluées numériquement en utilisant la méthode de Simpson, dont les commandes sous Matlab sont «*quad, quadv* ».

La bobine et la plaque sont respectivement discrétisée en 5000 et 1500 volumes élémentaires. La figure 5.2 représente les maillages et de la plaque et de la bobine, et la figure 5.3 représente un zoom sur le maillage de la bobine et la répartition de la densité du courant source.

Nous avons négligé les termes des matrices intégrales qui sont de valeurs inférieures à un centième de la valeur correspondant à l'interaction entre deux éléments adjacents. En effet, au-delà, nous avons remarqué que la solution ne varie pas de manière significative. Les structures de la matrice globale avec et sans termes intégraux, notées respectivement [M] et [M'], sont décrites dans la figure 5.4. Le temps de résolution du système matriciel avec les termes intégraux est de 11 minutes, alors qu'il n'est que de 14 secondes en utilisant l'approche itérative proposée, où les termes intégraux sont transférés au second membre. Dans ce cas, le temps total d'exécution du programme est de 1 minute et 40 secondes.

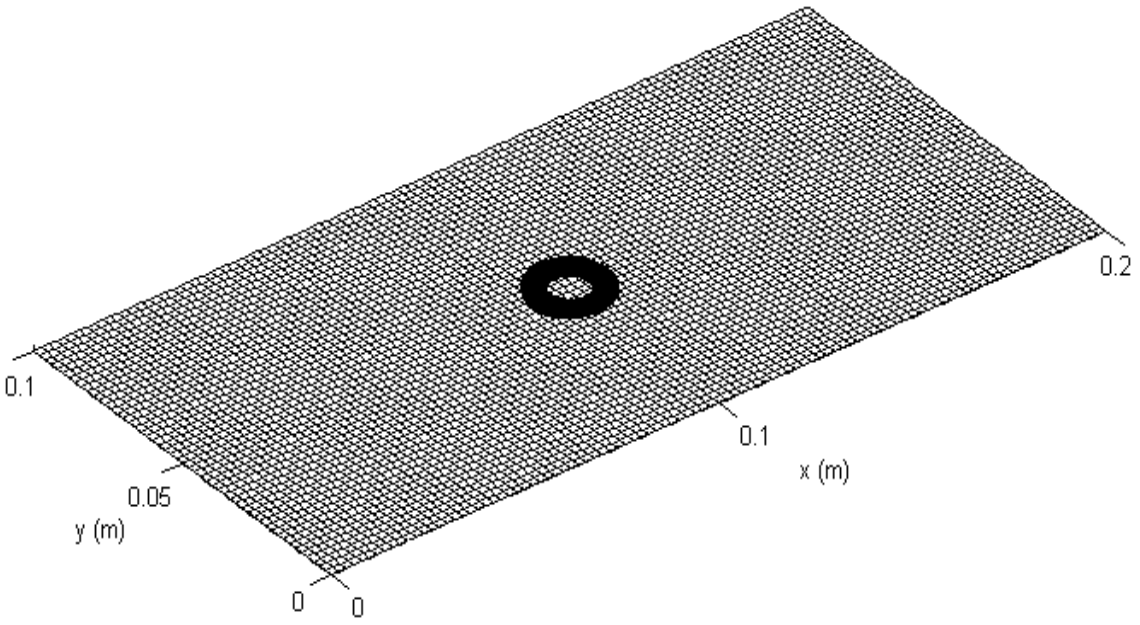


Fig. 5.2. Maillages de la bobine et de la plaque

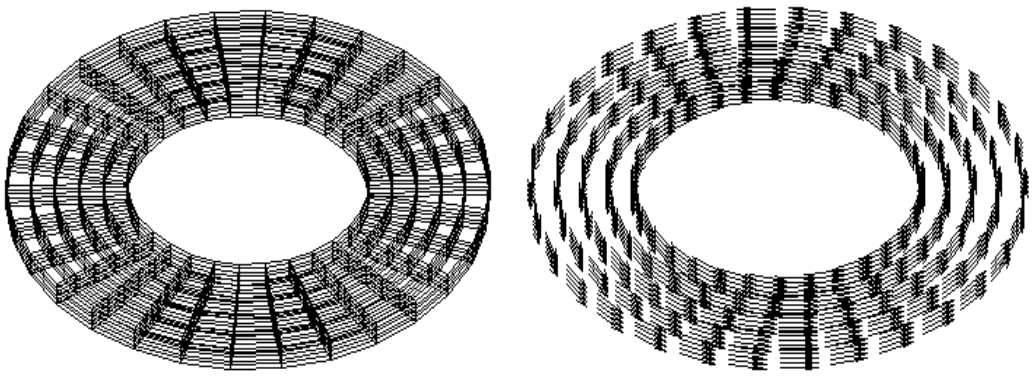


Fig. 5.3. Zoom sur le maillage de la bobine et la répartition de la densité de courant source

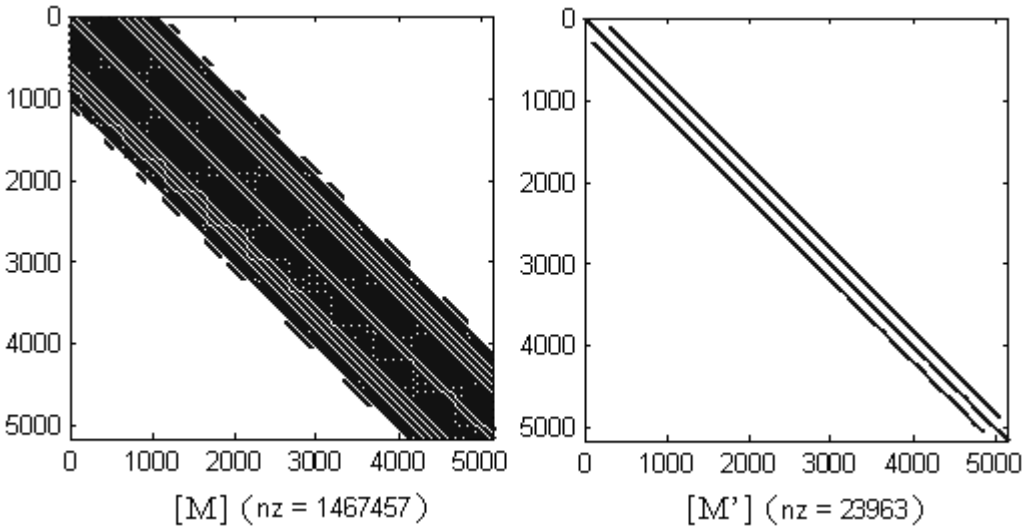


Fig. 5.4. Les structures de la matrice globale avec et sans termes intégraux

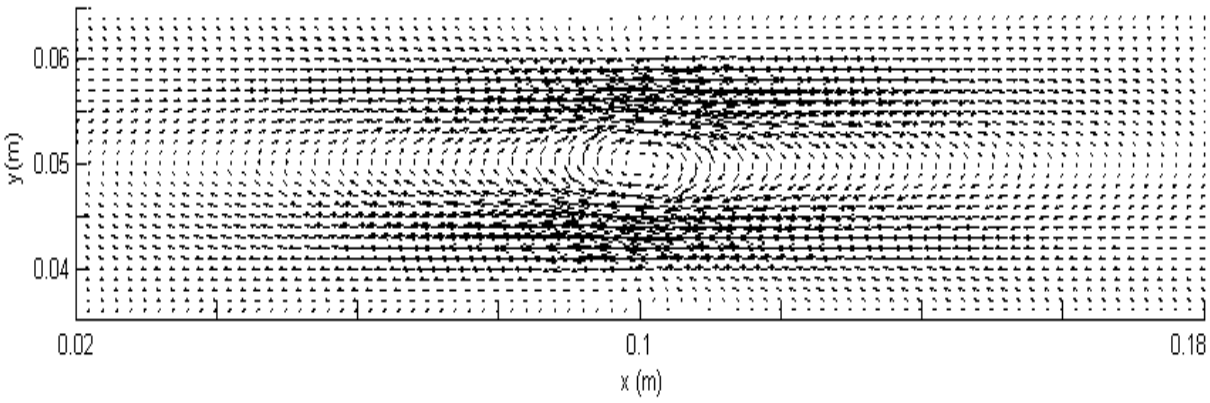


Fig. 5.5. Zoom sur la répartition de la densité des courants induits dans la plaque

La figure 5.5 représente un zoom sur la répartition de la densité des courants induits dans la plaque. On remarque bien l'effet de l'anisotropie ; la densité des courants induits est essentiellement

dirigée suivant la direction de forte conductivité. Les courants induits circulent sur une faible section avec une forte densité dans le sens de la forte conductivité, et sur une section plus large avec une plus faible densité dans le sens de la faible conductivité.

La figure 5.6 représente la comparaison des résultats numériques aux résultats analytiques des variations des parties réelle et imaginaire de l'impédance de la bobine en fonction du lift-off, pour une fréquence de 1MHz. L'épaisseur et le tenseur de conductivité de la plaque correspondent aux valeurs standards pour un pli de CFRP. Il y a une concordance des résultats numériques et analytiques de la partie réelle pour une faible valeur du lift-off ($\leq$0.01mm) ; cependant un écart apparaît avec l'augmentation du lift-off. Cet écart devient constant au-delà d'une certaine valeur du lift-off. En plus des erreurs de discrétisation et d'intégrations numériques des équations des modèles numérique et analytique, cet écart est dû au fait de négliger, dans la formulation T_z, la partie des courants induits par les variations, suivant l'épaisseur, des composantes tangentielles du champ magnétique dans la plaque. Aux faibles valeurs du lift-off, la composante normale du champ magnétique source dans la plaque est prépondérante ; le modèle numérique réduit est dans ce cas plus précis. Les composantes tangentielles du champ magnétique source dans la plaque augmentent avec l'augmentation du lift-off, et varient de manière constante suivant l'épaisseur de la plaque au-delà d'une certaine valeur du lift off, ce qui engendre un écart constant entre les résultats numériques et analytiques. La partie imaginaire de l'impédance ne représente qu'environ 2% de la partie réelle. Les impacts des erreurs numériques sur cette partie de l'impédance sont alors plus importants comme le montre la figure 5.6.

La figure 5.7 représente les comparaisons des résultats numériques aux résultats analytiques des variations des parties réelle et imaginaire de l'impédance de la bobine en fonction de la fréquence, pour un lift-off de 0.01mm, et pour les mêmes valeurs de l'épaisseur et du tenseur de conductivité de la plaque. Les parties réelles affichent une bonne concordance sur tout l'intervalle de fréquences, alors qu'un écart apparaît entre les parties imaginaires à des fréquences élevées. Cet écart est probablement dû aux erreurs introduites par la discrétisation de la partie intégrale de la formulation. En effet, la partie intégrale représente le terme inductif du modèle, et sa la valeur augmente linéairement avec la fréquence. A des valeurs de fréquences élevées, ce terme devient prépondérant, et les erreurs qu'il introduit dans le modèle deviennent plus importantes.

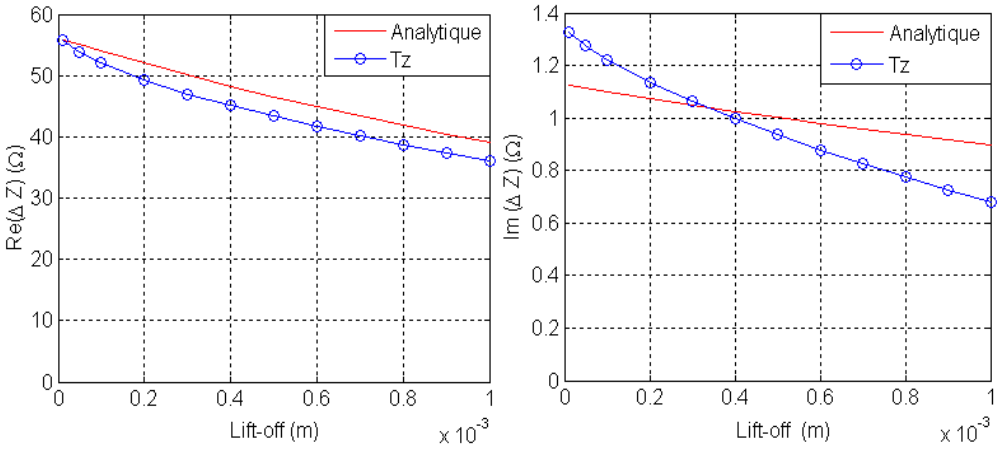


Fig. 5.6. Variations des parties réelle et imaginaire de l'impédance en fonction du lift-off (f=1MHz, épaisseur =0.125mm)

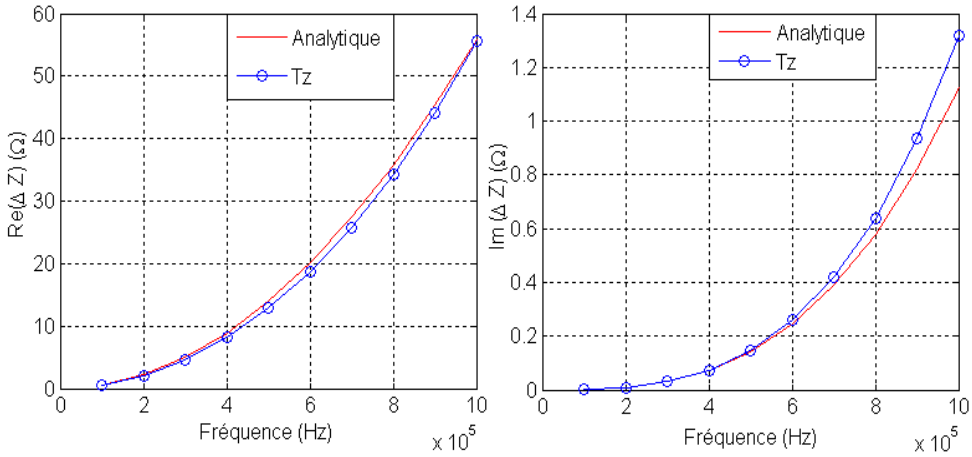


Fig. 5.7. Variations des parties réelle et imaginaire de l'impédance en fonction de la fréquence (épaisseur =0.125mm, lift-off= 0.01mm)

La figure 5.8 représente les comparaisons des résultats numériques aux résultats analytiques des variations des parties réelle et imaginaire de l'impédance de la bobine en fonction de l'épaisseur de la plaque, pour une fréquence de 1MHz, et un lift-off de 0.01mm. Les parties réelles montrent une bonne concordance pour les faibles valeurs de l'épaisseur de la plaque; l'augmentation de l'épaisseur engendre une variation plus importante des composantes tangentielles du champ magnétique source suivant cette épaisseur, et donc un écart plus important. Les parties imaginaires, quant à elles, montrent un écart relatif plus important, résultant des erreurs d'approximations combinées avec les erreurs de discrétisation. Les erreurs liées à l'approximation des couches minces apparaissent dans la nature linéaire des résultats numériques, alors que les résultats analytiques, supposés exactes, ont un aspect non linéaire.

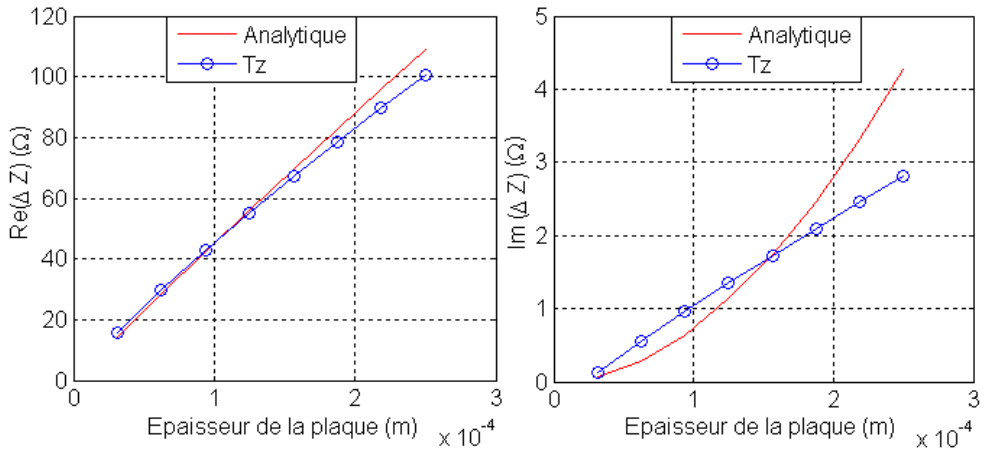


Fig. 5.8. Variations des parties réelle et imaginaire de l'impédance en fonction de l'épaisseur de la plaque (f=1MHz, lift-off= 0.01mm)

L'épaisseur de peau correspondant à la conductivité maximale (i.e. 10^4 S/m) est 20 fois supérieure à la valeur maximale de l'épaisseur de la plaque considérée dans cet exemple. La variation du champ magnétique suivant l'épaisseur de la plaque n'est donc pas engendrée par l'effet de peau, mais par la configuration de l'inducteur. La notion d'effet de peau, qui est liée à une onde plane, ne suffit donc pas comme condition d'approximation des couches minces.

5.3.2 Bobine à axe parallèle à la surface d'une plaque mince anisotrope

L'objectif dans cet exemple est de voir les limites des hypothèses du modèle réduit, en termes d'épaisseur de la plaque et de lift-off, quand le système modélisé implique des sources à champ magnétique tangentiel prépondérant. Le système modélisé est décrit dans la figure 5.9. L'axe de la bobine fait un angle φ avec l'axe d'anisotropie suivant lequel la conductivité est maximale.

Dans cette configuration, les dimensions de la bobine considérée dans l'exemple précédent ne permettent pas d'avoir un bon couplage électromagnétique avec la plaque. Nous avons modifié les dimensions de la bobine, de telle manière à ce qu'elle présente une façade de surface plus importante à la plaque. Les valeurs numériques des paramètres du système modélisé sont fournies dans le tableau 5.2.

La bobine et la plaque sont respectivement discrétisées en 2500 et 1500 volumes élémentaires. La figure 5.10 représente les maillages de la plaque et de la bobine, et la figure 5.11 représente un zoom sur le maillage de la bobine et la répartition de la densité du courant source.

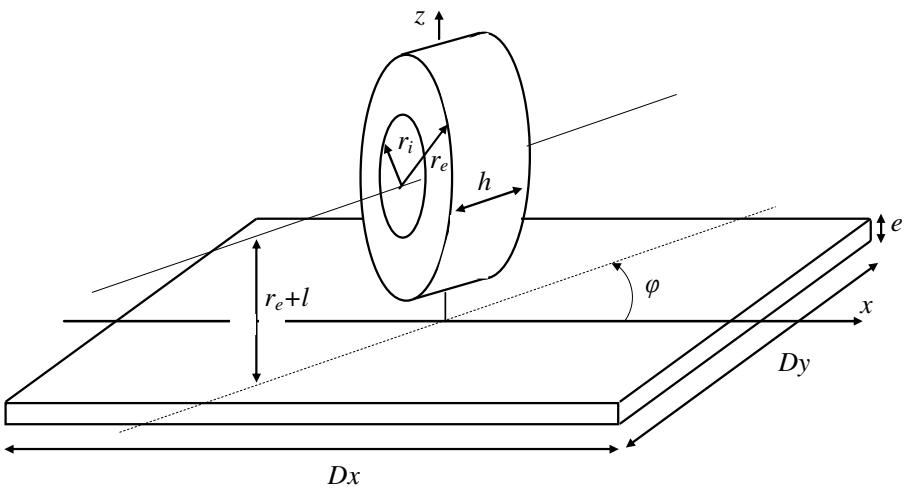


Fig. 5.9. Bobine à axe parallèle à la surface d'une plaque conductrice anisotrope

Tableau 5.2- Les valeurs numériques des dimensions de la bobine et de la plaque

Paramètre	Valeur numérique
Plaque	
Conductivités (σ_x, σ)	(10^4, 10^2) S/m
Epaisseur (e)	Variable
Côtés (Dx, Dy)	(100, 100) mm
Bobine	B2
Nombre de spires	500
Rayon intérieur (r_i)	4mm
Rayon extérieur (r_e)	5mm
Epaisseur (h)	10mm

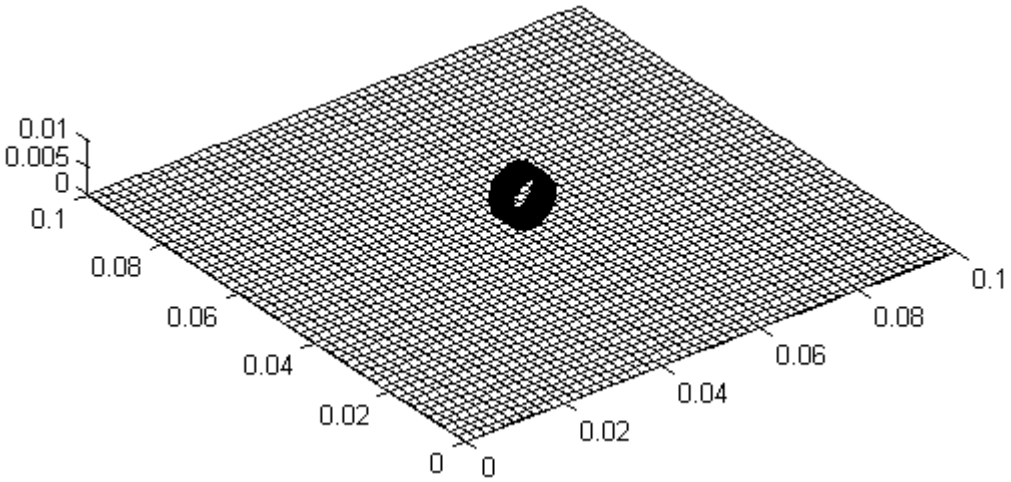


Fig. 5.10. Maillages de la bobine et de la plaque

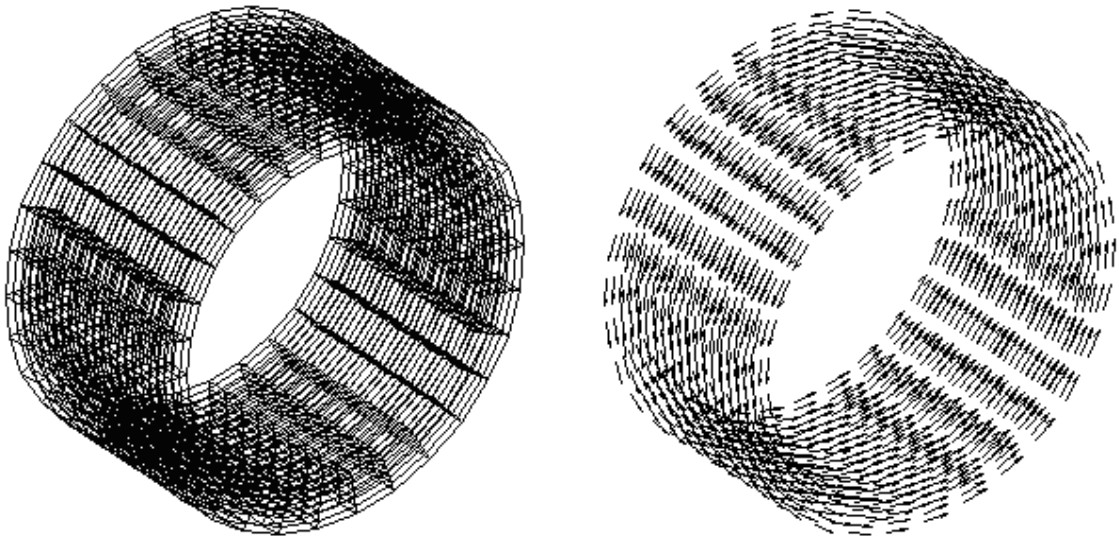


Fig. 5.11. Zoom sur le maillage de la bobine et la répartition de la densité de courant source

La figure 5.12 représente un zoom sur la répartition de la densité des courants induits dans la plaque pour trois positions de la bobine. Les courants induits se développent autour de la composante normale du champ magnétique source, et sont canalisés dans le sens de la forte conductivité. L'intensité de ces courants dépend de l'angle « φ » que fait l'axe de la bobine avec l'axe d'anisotropie. Elle est maximale lorsque l'axe de la bobine est perpendiculaire à l'axe d'anisotropie, c'est-à-dire, lorsque la direction du courant source est parallèle à cet axe ($\varphi=\pi/2$), et elle est minimale lorsque l'axe de la bobine est parallèle à l'axe d'anisotropie ($\varphi=0$). Cela est clairement montré dans la figure 5.13 qui décrit l'allure de l'impédance de la bobine en fonction de son angle de rotation. Les parties réelle et imaginaire se présentent sous forme de lobes orientés dans la direction perpendiculaire à l'axe d'anisotropie. Lorsque l'axe de la bobine est parallèle à l'axe d'anisotropie, la partie réelle est minimale et la partie imaginaire s'annule. A cette position, le flux du champ magnétique de réaction de la plaque qui traverse la bobine est très faible ; ceci est dû à la faible intensité des courants induits.

On remarque que le rapport entre les valeurs maximale et minimale de la partie réelle de l'impédance est égal à la racine carrée du facteur d'anisotropie, i.e. $\sqrt{\sigma_{xx}/\sigma}$. Cependant, à ce stade, il ne faut pas tirer des conclusions trop hâtives. Une compagne d'investigation de ce phénomène sera menée par la suite, dans le but d'une exploitation pour la caractérisation de la plaque.

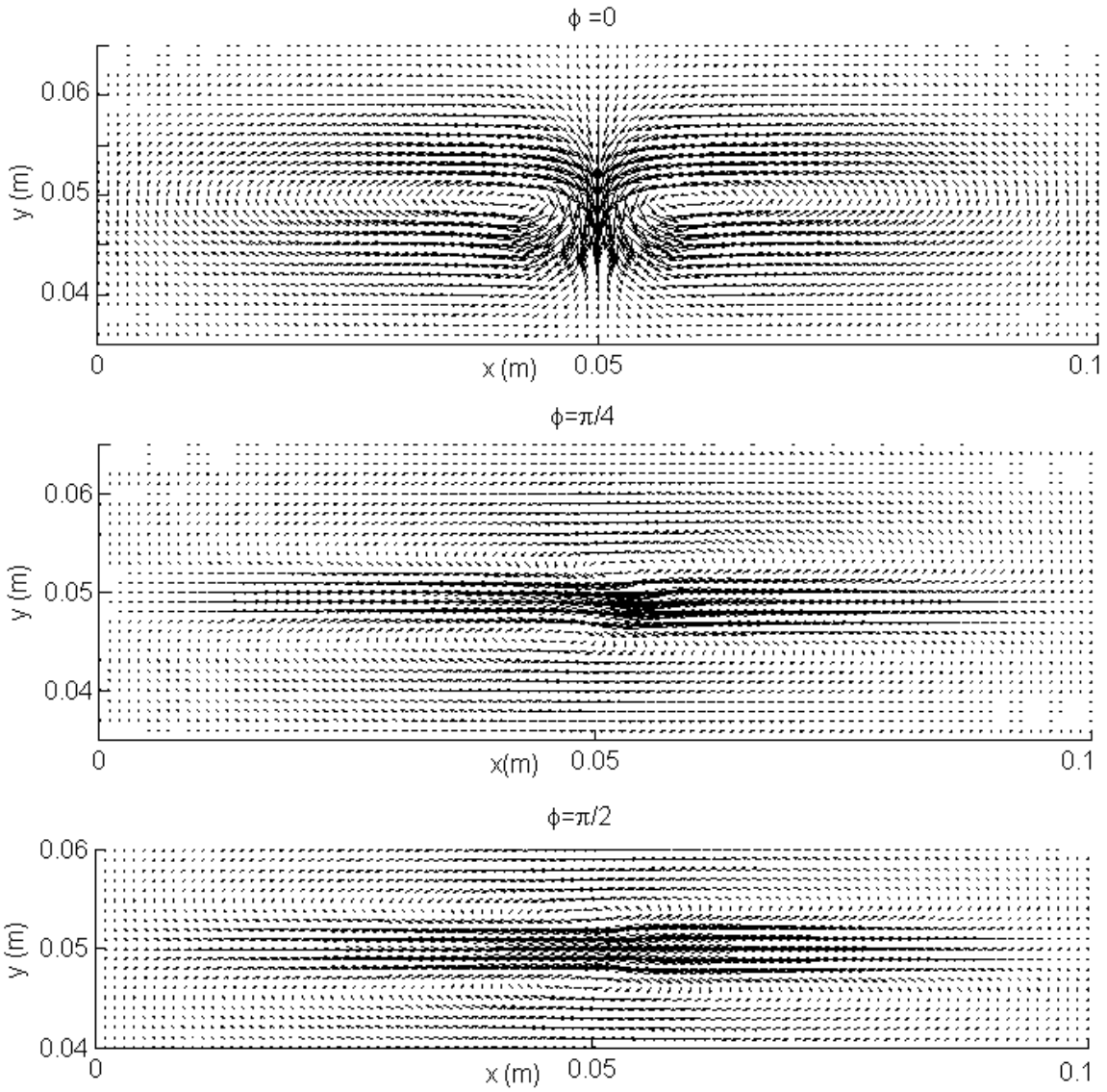


Fig. 5.12. Zoom sur la répartition de la densité des courants induits dans la plaque pour trois positions de la bobine (φ=0, φ=π/4, φ= π/2)

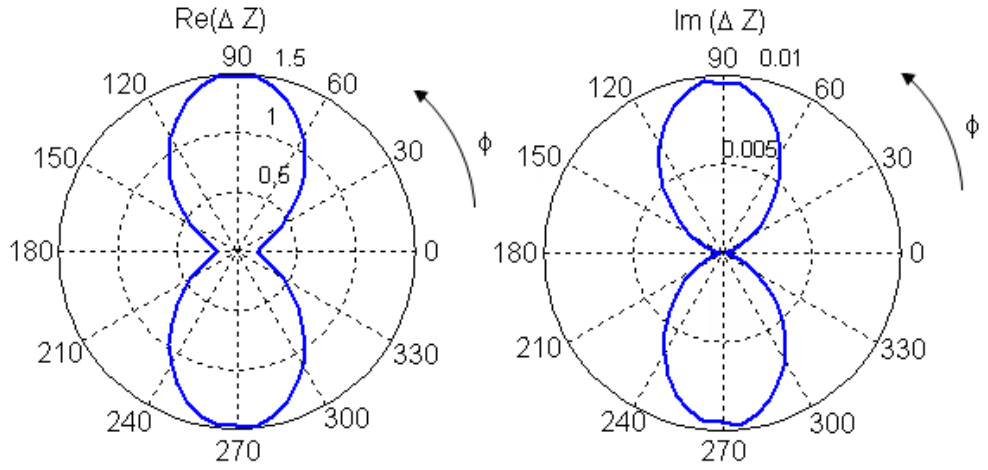


Fig. 5.13. Variations des parties réelle et imaginaire de l'impédance, en fonction de l'angle de rotation de la bobine (f=1MHz, lift-off= 0.01mm)

Les figures 5.14 et 5.15 représentent les comparaisons des résultats numériques aux résultats analytiques des variations des parties réelles et imaginaires (figure 5.15) de l'impédance de la bobine à $\varphi=0$ et à $\varphi=\pi/2$, en fonction de l'épaisseur de la plaque, pour une fréquence de 1MHz, et un lift-off de 0.01mm. La concordance des résultats est moins bonne que dans le cas de la bobine à axe vertical. En effet, pour l'épaisseur d'un pli (0.125mm) on a un écart d'environ 13% alors qu'il est presque nul dans le cas de la bobine à axe vertical. C'est un résultat prévisible, vu que dans ce cas, les composantes tangentielles du champ magnétique dans la plaque sont plus importantes. Les parties imaginaires, quant à elles, affichent une assez bonne concordance pour les faibles épaisseurs de la plaque, cependant un écart important apparaît rapidement avec l'augmentation de cette épaisseur. Cet écart représente la partie de l'énergie magnétique emmagasinée dans la plaque, due aux composantes tangentielles du champ magnétique, négligées dans le modèle réduit.

La figure 5.16 représente les comparaisons des résultats numériques aux résultats analytiques de la variation de la partie réelle de l'impédance de la bobine en fonction du lift-off, pour deux valeurs de l'épaisseur de la plaque, à la fréquence de 1MHz. En comparant ces résultats à ceux représentés dans la figure 5.15, nous remarquons que dans ce cas, le lift-off n'introduit pas d'erreur significative. En effet, l'écart entre les résultats numériques et analytiques reste pratiquement constant en fonction du lift-off.

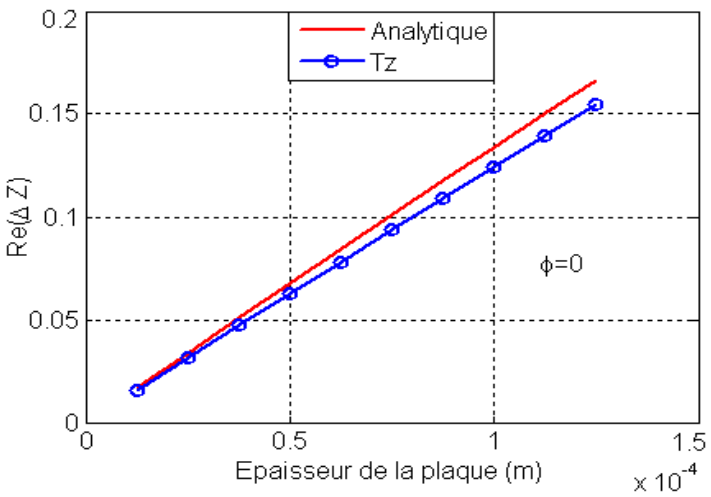


Fig. 5.14. Variation de la partie réelle de l'impédance à $\varphi=0$, en fonction de l'épaisseur de la plaque (f=1MHz, lift-off= 0.01mm)

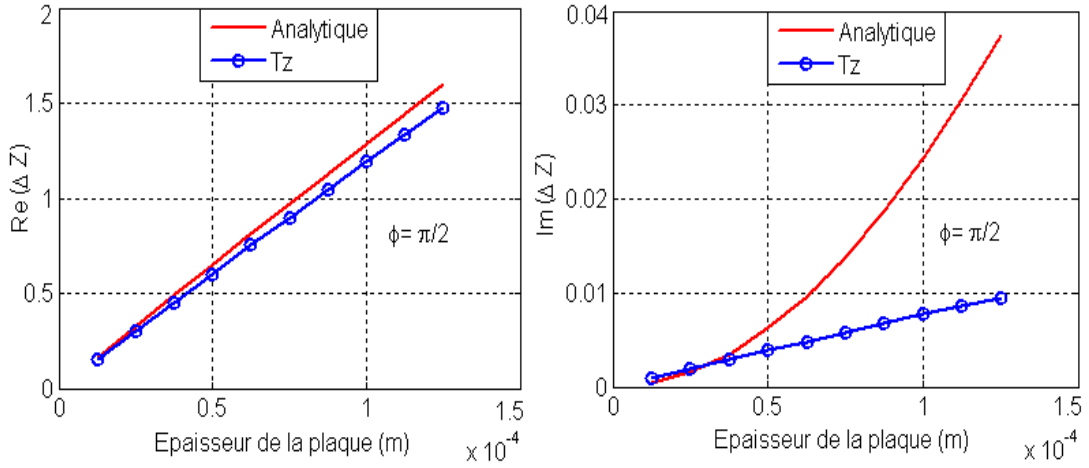


Fig. 5.15. Variations des parties réelle et imaginaire de l'impédance à φ=90, en fonction de l'épaisseur de la plaque (f=1MHz, lift-off= 0.01mm)

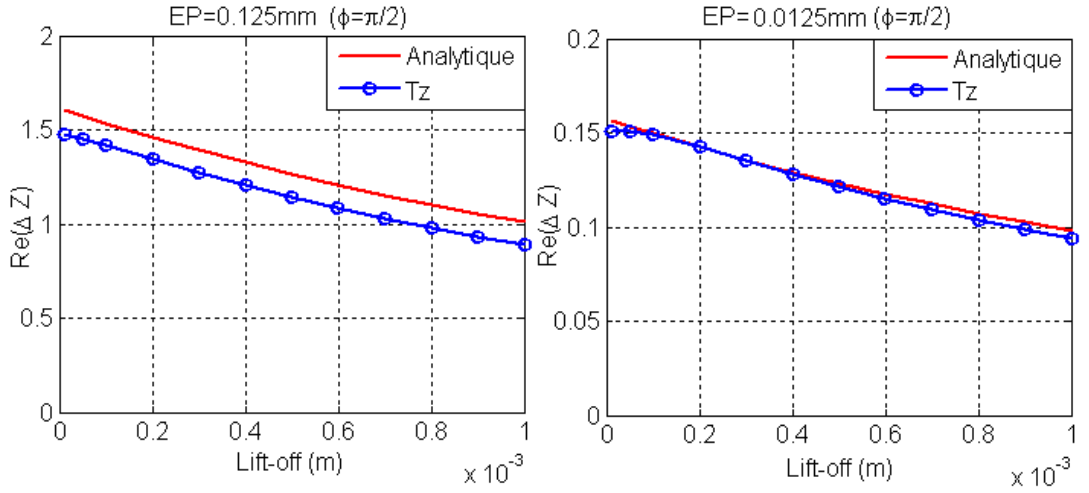


Fig. 5.16. Variation de la partie réelle l'impédance à φ=90, en fonction du lift off pour deux valeurs de l'épaisseur de la plaque (f=1MHz)

5.3.3 Bobine à axe vertical à la surface d'une plaque multicouches en CFRP

L'objectif de cet exemple est de tester le modèle réduit dans le cas d' une plaque multicouche en CFRP. Les résultats du modèle réduit (T_z) sont comparés aux résultats du modèle global (T) impliquant les trois composantes du potentiel vecteur électrique.

Le système modélisé est décrit dans la figure 5.1. La plaque est constituée de quatre plis de 0.125mm d'épaisseur, orientés dans les directions [0/45°/90°/-45°], dans l'ordre du plus proche au plus éloigné de la bobine. Les caractéristiques de la bobine sont les mêmes que celle utilisée dans la section 5.3.1, et celles de la plaque sont fournies dans le tableau 5.3.

Tableau 5.3- Les valeurs numériques des caractéristiques de la plaque

Paramètre	Valeur numérique
Conductivités longitudinale et transversale (σ_L, σ_T) pour un pli	(10^4, 10^2) S/m
Nombre de plis	4
Orientations des fibres dans chaque pli	[0/45°/90°/-45°]
Epaisseur de la plaque (*e*)	0.5mm
Côtés (*Dx, Dy*)	(60, 60) mm

La figure 5.17 représente la répartition de la densité des courants induits dans les quatre plis. On remarque bien l'effet de l'orientation des fibres (anisotropie) sur la répartition des courants induits dans chaque pli.

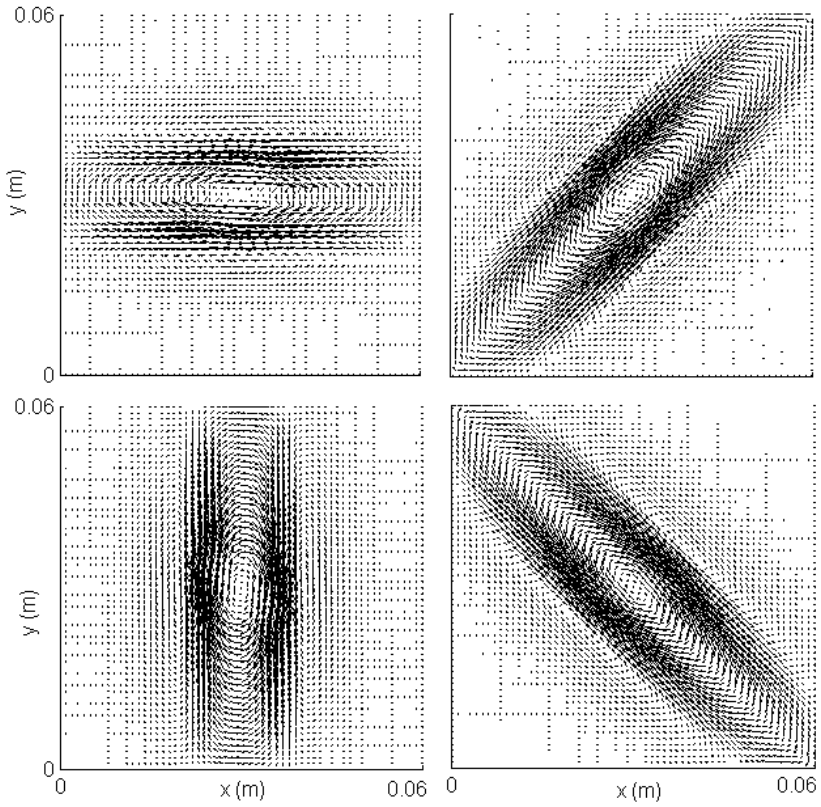


Fig. 5.17. Répartitions de la densité des courants induits dans les quatre plis

La figure 5.18 montre une comparaison entre les résultats des variations des parties réelles de l'impédance en fonction de la fréquence, obtenus par les modèles globale (*T*) et réduit (T_z). Ces

résultats montrent une bonne concordance pour les faibles valeurs de la fréquence, et tendent à s'écarter avec l'augmentation de cette dernière. Nous remarquons aussi que les résultats obtenus par le modèle global présentent une petite fluctuation avec l'augmentation de la fréquence. Cette fluctuation est probablement due aux erreurs numériques introduites par les termes intégraux dont l'influence augmente avec la fréquence.

Les couches sont supposées être isolées les unes des autres. La notion d'épaisseur de peau est donc relative à l'épaisseur d'un pli, et non pas l'épaisseur des quatre plis. Nous avons vu, dans la section 5.3.1 que pour un faible lift-off, le modèle réduit donne de bons résultats à 1MHz pour l'épaisseur d'un pli. Cependant, ces résultats se dégradent avec l'augmentation du lift-off. L'écart enregistré pour la plaque multicouche est donc probablement dû aux couches inférieures qui sont éloignées de la bobine.

Pour la même discrétisation de la plaque en 8100 volumes élémentaires répartis uniformément sur les quatre plis, le temps de calcul pour cet exemple est de 20 minutes pour le modèle réduit et de 72 minutes pour le modèle global. Dans les deux cas, l'approche de résolution itérative a été appliquée, sans quoi la matrice engendrée par le modèle global serait trop volumineuse et n'aurait pas pu être stockée en mémoire du matériel utilisé.

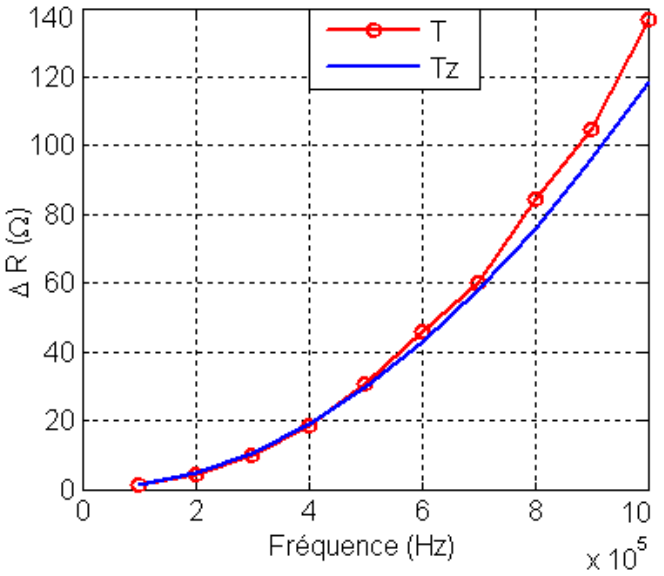


Fig. 5.18. Variation de la partie réelle de l'impédance en fonction de la fréquence (lift-off= 0.01mm)

5.4 Conclusion

La notion d'effet de peau à elle seule ne permet pas de définir les conditions d'approximation des couches minces ; ces conditions dépendent aussi de la configuration de l'inducteur.

Lorsqu' il s'agit de modéliser des couches minces en présence de sources à champ magnétique normal prépondérant, et lorsque la partie active de l'énergie électromagnétique suffit pour décrire les phénomènes mis en jeu, le modèle réduit peut se substituer au modèle global; ce qui résulterait d'un gain de temps considérable, avec des erreurs relativement acceptables.

Nous avons vu que la variation de l'impédance d'une bobine à axe parallèle à la surface d'une plaque anisotrope, en fonction de son angle de rotation, permet de distinguer les axes de forte et faible conductivité de la plaque. Cette constatation nous a conduits à proposer une approche de caractérisation d'une plaque multicouche en CFRP en utilisant un capteur à courants de Foucault tournant. Cette approche de caractérisation fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 6

Application à l'évaluation des propriétés physiques des CFRPs

6.1 Introduction

Contrairement aux matériaux conventionnels, les propriétés physiques des matériaux composites ne sont réellement connues qu'après leur fabrication, à travers des mesures adéquates.

Dans cette partie du travail, nous proposons une méthode sans contact pour déterminer le tenseur de conductivité d'une plaque en CFRP. Pour cela, nous introduisons une structure de capteur à courants de Foucault tournant de forme rectangulaire. L'orientation des fibres dans chaque pli constituant la plaque en CFRP est déterminée directement à partir de l'analyse de la variation de l'impédance du capteur en fonction de son angle de rotation. Nous utilisons les parties réelles des variations d'impédance du capteur correspondant à ses orientations suivant les directions parallèle et transversale aux fibres, qu'on désigne respectivement par ΔR_0 et ΔR_{90}, pour remonter aux conductivités longitudinale σ_L et transversale σ_T dans un pli.

Dans un exemple de calcul, nous avons construit des courbes représentant les variations de $|\Delta R_0|$ et $|\Delta R_{90}|$ en fonction des conductivités σ_L et σ_T d'un pli. Nous avons interpolé ces courbes par des fonctions analytiques que nous avons ensuite inversées pour obtenir une expression analytique des conductivités σ_L et σ_T en fonction de $|\Delta R_0|$ et $|\Delta R_{90}|$.

Nous décrivons le système modélisé dans le prochain paragraphe. Les résultats du problème direct et la procédure d'inversion sont respectivement développés dans les paragraphes 3 et 4.

6.2 Le système modélisé

Le système modélisé est décrit dans la figure 6.1. Il s'agit d'une bobine rectangulaire située à une distance *l* d'une plaque en CFRP d'épaisseur τ. La bobine tourne autour d'un axe perpendiculaire à la surface de la plaque. Elle est alimentée par un courant *Is* dont la densité est considérée homogène. Les valeurs numériques des dimensions de la bobine et de la plaque sont données dans le tableau 6.1.

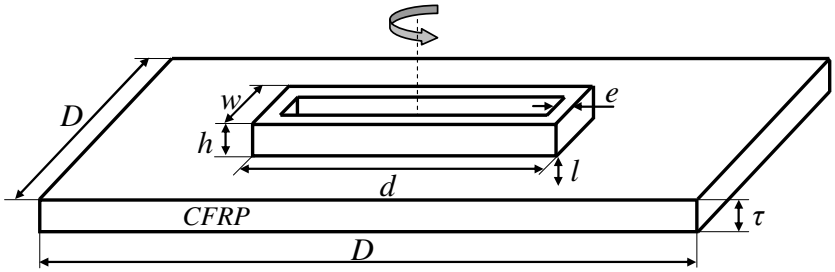


Fig. 6.1. Une bobine rectangulaire tournante au dessus d'une plaque en CFRP

Tableau 6.1- Les valeurs numériques des dimensions de la bobine et de la plaque en CFRP

Paramètre	Valeur numérique
Plaque en CFRP	
Nombre de plis	*1 / 4*
Orientation des fibres (θ)	*0° / 0°, 45°, 90°,-45°*
Conductivités (σ_L, σ_T, σ_{cp})	*(variable, variable, 0)S/m*
Epaisseur (τ)	*0.125mm / 0.5mm*
Côté (*D*)	*30mm*
Bobine rectangulaire	
Nombre de spires	*100*
Longueur (d)	*10mm*
Largeur (*w*)	*3mm / 1mm*
Epaisseur(*e*)	*1mm / 0.1mm*
Hauteur (*h*)	*1mm*
Lift off (*l*)	*0.1mm*
Source	
Intensité (*Is*), Fréquence (*f*)	*0.1A, 1MHz*

6.3 Résultats et interprétations

Les maillages de la bobine et de la plaque sont décrits dans la figure 6.2. La bobine et la plaque sont respectivement discrétisées en 112 et 14400 volumes élémentaires. La bobine effectue une rotation spatiale avec un pas angulaire de 3°. Seules les coordonnées des nœuds du maillage de la bobine sont modifiées par cette rotation.

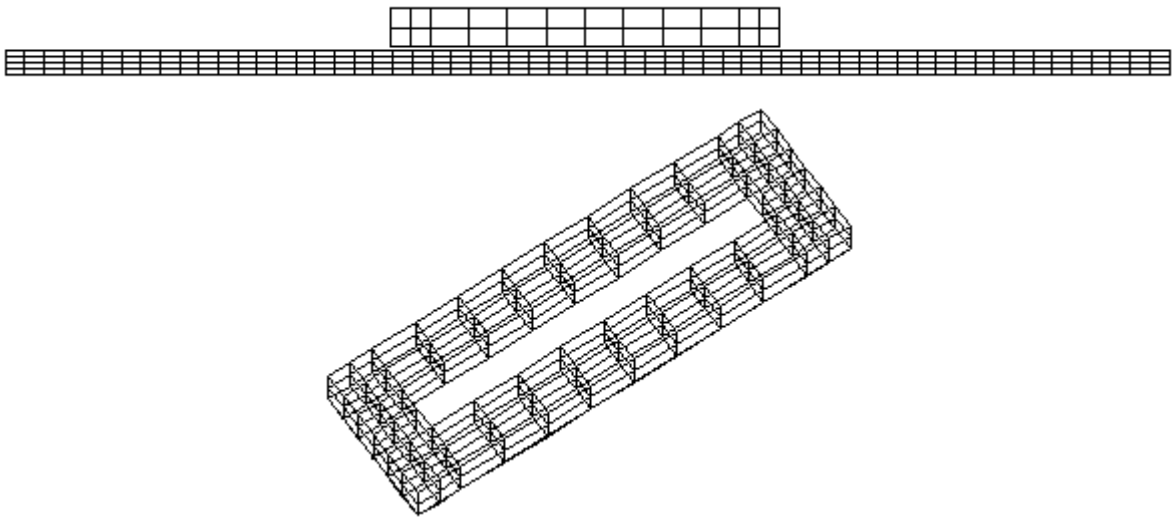


Fig. 6.2. Les maillages de la bobine et plaque en CFRP composée de quatre plis

La figure 6.3 représente les répartitions spatiales de la densité de courants induits dans les quatre plis, lorsque la bibine est orientée suivant les fibres du premier pli ($\theta=0$). Les figures 6.4-(a) et (b) représentent les variations de la partie réelle de l'impédance normalisée en fonction de l'angle de rotation de la bobine au dessus d'une plaque en CFRP constituée de quatre plis orientés dans les directions [0°/45°/90°/-45°], pour deux valeurs de largeur de la bobine. Nous obtenons quatre lobes orientés dans les directions des fibres dans les quatre plis. L'amplitude de chaque lobe donne la position (profondeur) du pli qui lui correspond. Les résultats montrent que la largeur de la bobine doit satisfaire à un compromis entre la sensibilité et la distinguabilité. En effet, lorsque la largeur de la bobine est trop grande, l'influence de l'orientation des fibres dans les plis inférieurs sur la variation

d'impédance est masquée par l'influence de l'orientation des fibres des plis supérieurs (fig.6.4-a). D'autre part, une petite largeur conduit à une faible interaction entre la bobine et les plis inférieurs (fig.6.4-b). Pour 60 positions de la bobine, le temps de calcul est d'environ 30 min sur un processeur de 3.4GHz et 2Go de Ram.

Les figures 6.5 (a) et (b) représentent les variations de la partie réelle de l'impédance normalisée en fonction de la rotation de la bobine au-dessus d'un pli pour différentes valeurs des conductivités longitudinale (σ_L) et transversale (σ_T). Les variations d'impédance obtenues se présentent sous forme de lobes orientés dans le sens des fibres ($\theta=0°$). Comme le montrent les figures 6.6-(a) et (b), l'augmentation de σ_T conduit à une augmentation significative de $|\Delta R_0|$ (bobine orientée dans le sens des fibres), et une modeste augmentation de $|\Delta R_{90}|$(bobine orientée dans le sens transversal aux fibres). Augmenter σ_L conduit à une augmentation significative de $|\Delta R_0|$, et une augmentation négligeable de $|\Delta R_{90}|$.

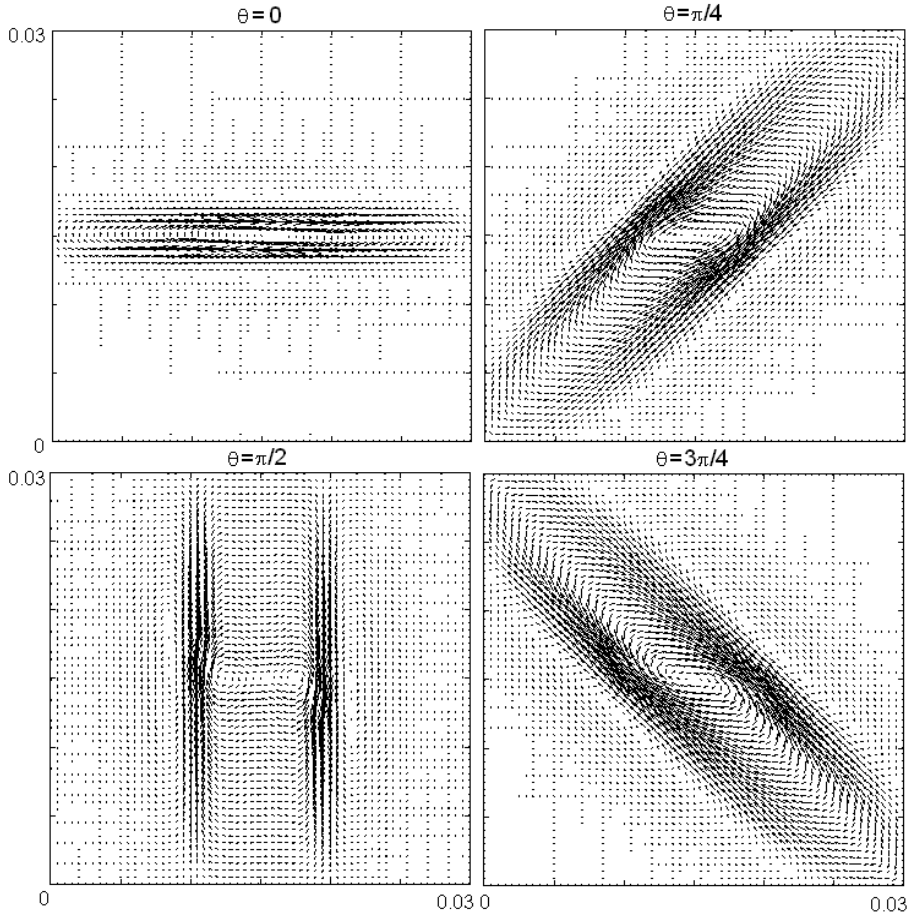


Fig. 6.3. Répartition spatiale de la partie imaginaire de la densité de courants induits dans les quatre plis

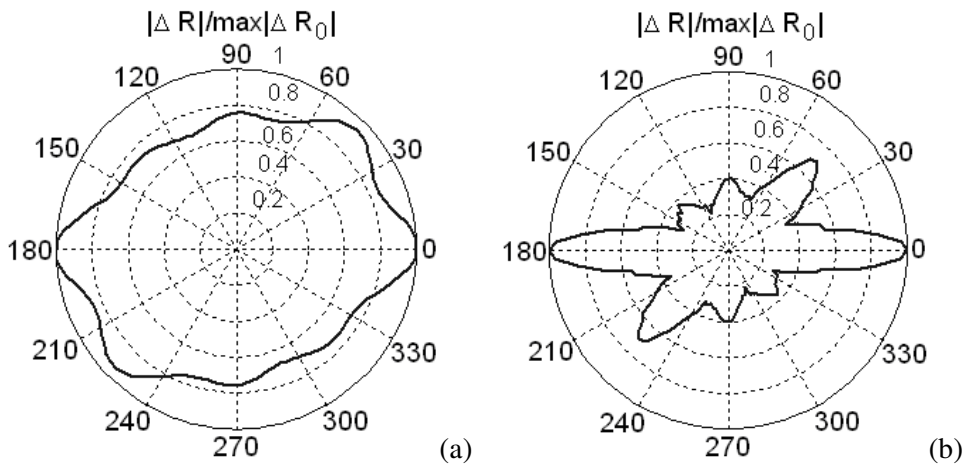


Fig. 6.4. Variation de |ΔR| en fonction de l'angle de rotation de la bobine au dessus d'une plaque comportant quatre plis orientés dans les directions [0°/45°/ 90°/-45°] - (a) *w*=3mm, (b) *w*=1mm.

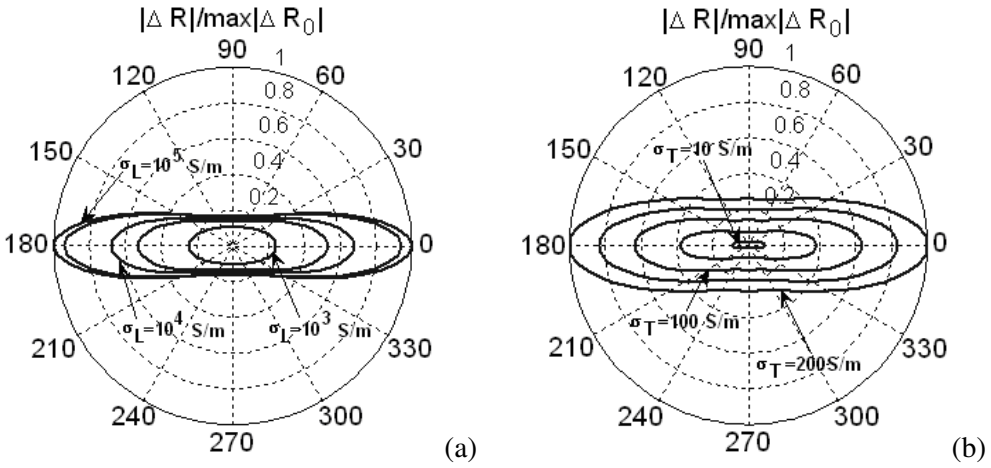


Fig. 6.5. Variation de |ΔR| en fonction de l'angle de rotation de la bobine au dessus d'un pli pour différentes valeurs des conductivités (a) longitudinale ($\sigma_T = 10^2$S/m), et (b) transversale ($\sigma_L = 10^4$S/m).

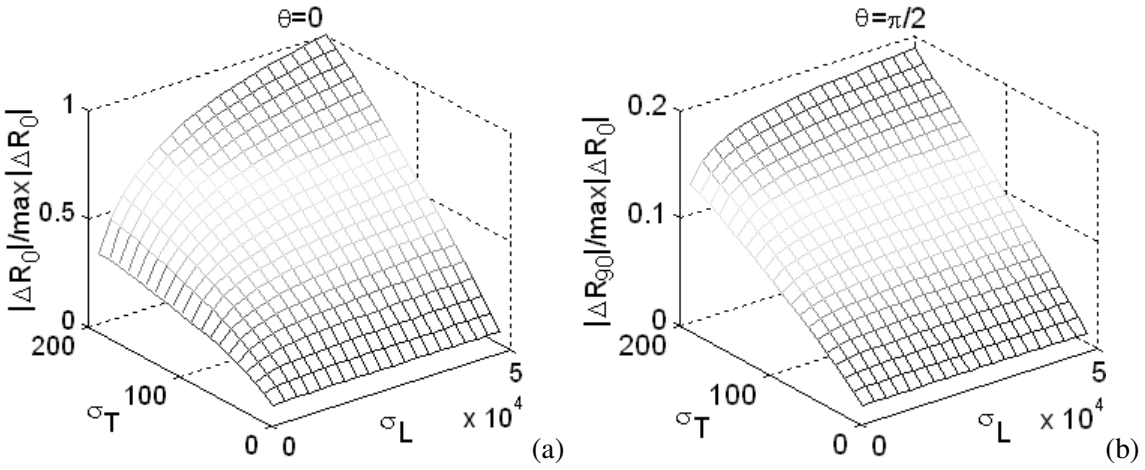


Fig. 6.6. Variations de (a) $|\Delta R_0|$ et (b) $|\Delta R_{90}|$ en fonction de σ_L et σ_T.

6.4 Le problème inverse

L'orientation des fibres dans chaque pli et les positions des plis dans la plaque sont directement fournies par la variation de l'impédance de la bobine (fig.6.4). Il reste à quantifier les conductivités longitudinale et transversale dans un pli, en supposant que les plis sont identiques en termes du type et de la fraction volumique des fibres de carbone.

Nous avons développé des relations analytiques simples qui interpolent les courbes 6.6 (a) et (b) avec une certaine précision. Selon la physique des courants induits, la conductivité longitudinale ou transversale ne peut agir seule sur la variation d'impédance de la bobine, car l'annulation de l'une d'elles implique l'annulation des courants induits dans la plaque. Nous cherchons donc des relations du type

$$|\Delta R| = \sum_i a_i \sigma_L^{\alpha i} \sigma_T^{\beta i} \ . \tag{6.1}$$

En limitant la relation 6.1 à son premier terme, on a

$$|\Delta R_0| \approx a_0 \, \sigma_L{}^{\alpha_0} \sigma_T{}^{\beta_0} \ , \tag{6.2}$$

$$|\Delta R_{90}| \approx a_{90} \, \sigma_L{}^{\alpha_{90}} \sigma_T{}^{\beta_{90}} \ . \tag{6.3}$$

Les relations (6.2) et (6.3) sont inversées pour exprimer σ_L et σ_T en fonction de $|\Delta R_0|$ et $|\Delta R_{90}|$. Après quelques arrangements, nous obtenons

$$\sigma_L = \left[\left(\frac{|\Delta R_0|}{a_0} \right) \left(\frac{|\Delta R_{90}|}{a_{90}} \right)^{-1} \right]^{\frac{\beta_{90}}{(\alpha_0 \beta_{90} - \alpha_{90} \beta_0)}} \ , \tag{6.4}$$

$$\sigma_T = \left(\frac{|\Delta R_{90}|}{a_{90}} \right)^{\frac{1}{\beta_{90}}} \left[\left(\frac{|\Delta R_0|}{a_0} \right)^{-\alpha_{90}} \left(\frac{|\Delta R_{90}|}{a_{90}} \right)^{\frac{\alpha_{90} \beta_0}{\beta_{90}}} \right]^{\frac{1}{(\alpha_0 \beta_{90} - \alpha_{90} \beta_0)}} \ . \tag{6.5}$$

La linéarisation de 6.2 et 6.3 donne

$$\ln(|\Delta R_\theta|) \approx b_\theta + \alpha_\theta \ln(\sigma_L) + \beta_\theta \ln(\sigma_T), \tag{6.6}$$

$$a_\theta = e^{b_\theta}. \tag{6.7}$$

En utilisant 6.6 et 6.7, les paramètres a_θ, α_θ et β_θ sont obtenus par simple identification sur trois points à partir des courbes de la figure 6.6. Pour l'exemple considéré, dans les intervalles (5×10^3S/m<σ_L<5×10^4S/m) et (10S/m<σ_T<2×10^2S/m), nous avons déterminé les paramètres indiqués dans le tableau 6.2. Avec ces paramètres, σ_L et σ_T sont calculées en utilisant (6.4) et (6.5) avec des erreurs inférieure à 1% pour σ_T et d'environ 17% pour σ_L.

Ces résultats sont un peu prévisibles. En effet, l'équation 6.3 permet de calculer avec une assez bonne précision $|\Delta R_{90}|$ qui varie de manière quasi-linéaire en fonction de σ_L et σ_T, comme le montre la figure 6.6 (b). Ce la n'est hélas pas le cas pour $|\Delta R_0|$ qui varie de manière non linéaire en fonction de σ_L, pour les valeurs élevées de σ_T. L'équation 6.2 ne permet donc pas de calculer $|\Delta R_0|$ avec précision. Pour avoir une plus grande précision, il faudrait prendre plus d'un terme dans l'équation 6.2, mais cela compliquerait l'inversion analytique. Il est préférable d'évaluer σ_T au moyen de (6.5), et ensuite σ_L en résolvant itérativement le problème direct jusqu'à ce que la précision souhaitée soit atteinte.

Tableau 6. 2- Les valeurs numériques des paramètres identifiés

$\theta°$	a_θ	α_θ	β_θ
0°	$5.4632\times10^{-4}\|\Delta R_0\|_{max}$	0.2633	0.8934
90°	$4.6531\times10^{-4}\|\Delta R_0\|_{max}$	0.0848	0.9635

6.5 Conclusion

Nous avons développé une méthode sans contact simple et rapide pour la détermination du tenseur de conductivité d'une plaque en CFRP, en utilisant un capteur à courant de Foucault tournant de forme rectangulaire. Cette méthode est basée sur la physique des phénomènes d'induction

électromagnétique ; elle reste donc valable quelque soit la forme du capteur utilisé, du moment qu'il réalise une distinction entre les positions parallèle et transversale aux fibres. L'utilisation d'une bobine de forme rectangulaire avec un noyau en ferrite permettrait d'améliorer sensiblement l'efficacité de cette méthode.

Nous n'avons pas tenu compte des effets capacitifs ; une validation expérimentale est donc nécessaire pour déterminer la limite fréquentielle de validité de cette approche de caractérisation.

Chapitre 7

Validation expérimentale

7.1 Introduction

Nous disposons d'un pli en CFRP de conductivités longitudinale et transversale inconnues. L'idée est de déterminer ses conductivités en utilisant la méthode décrite dans le chapitre précédent, et ensuite, en guise de vérification, comparer les résultats de mesures et de calcul de l'impédance d'une bobine cylindrique sur ce pli, ce qui permet de valider expérimentalement à la fois l'approche de caractérisation du tenseur de conductivité et le modèle de calcul.

Dans cette approche, la bobine rectangulaire est remplacée par un tore en ferrite de section rectangulaire sur lequel est enroulé un bobinage relié à un analyseur d'impédance. Le tore comporte un entrefer très mince dans lequel on insère le pli. L'utilisation du tore permet de s'affranchir des variations du lift off, et d'imposer une induction normale à la surface de la plaque. Il permet aussi d'éliminer les couplages capacitifs entre la source et la plaque.

On mesure les variations de la partie réelle de l'impédance du bobinage du tore correspondant aux positions où les fibres du pli en CFRP sont disposées parallèlement et perpendiculairement à la largeur du tore, notées respectivement $|\Delta R_0|$ et $|\Delta R_{90}|$. Pour déterminer les conductivités longitudinale et transversale du pli (σ_L et σ_T), on utilise le modèle inverse développé précédemment, pour lequel on identifie les paramètres (a_0, α_0, β_0, a_{90}, α_{90}, β_{90}) par un calcul numérique des variations de $|\Delta R_0|$ et $|\Delta R_{90}|$ en fonctions de σ_L et σ_T. Ces dernières varient dans les limites des valeurs standards pour les CFRPs, i.e. (5×10^3S/m$<\sigma_L<5\times10^4$S/m) et (10S/m$<\sigma_T<2\times10^2$S/m). L'introduction du tore en ferrite impose des contraintes supplémentaires en termes de modélisation. Une approche de modélisation simplifiée est proposée afin d'éviter d'intégrer le tore dans le calcul numérique.

7.2 Le dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est décrit dans les figures 7.1 et 7.2. Un pli en CFRP d'épaisseur (δp) est placé dans l'entrefer (e) d'un tore en ferrite de section rectangulaire, de rayons interne R_i et externe R_e et de largeur τ>(R_e - R_i). Le tore comporte un bobinage de N_{st} spires, relié à un analyseur d'impédance à haute précision « AGILENT 4294 A ». Les valeurs numériques des différents paramètres du dispositif sont fournies dans le tableau 7.1.

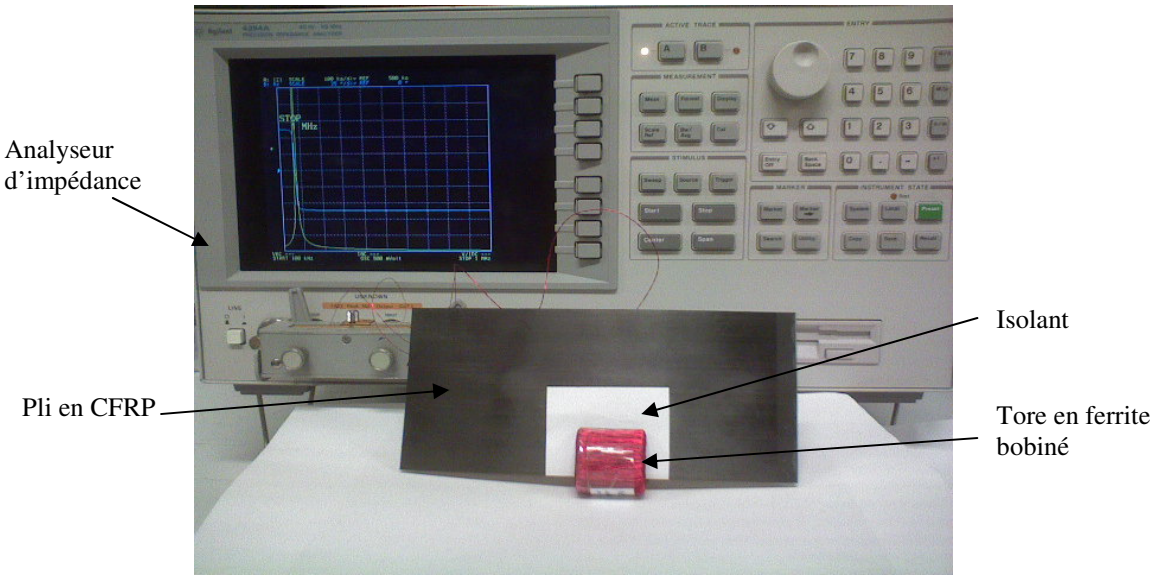


Fig. 7.1. Photographie du dispositif expérimental

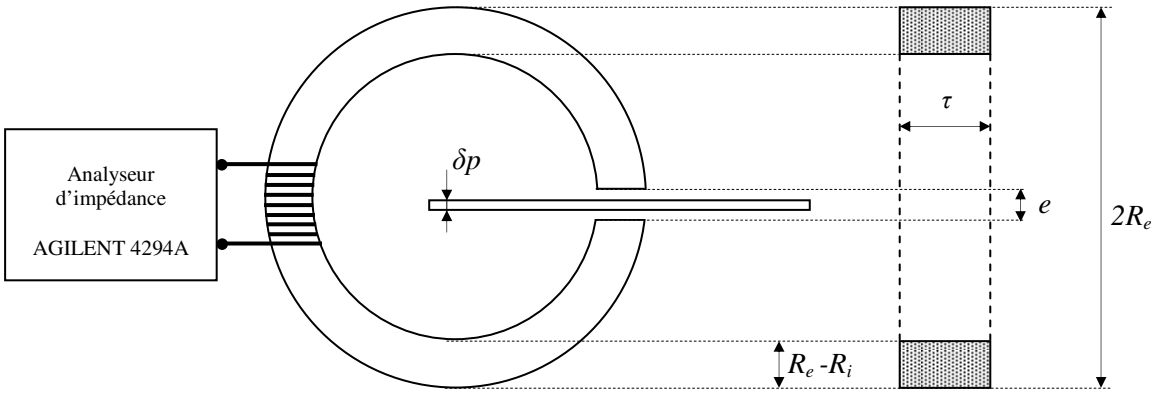


Fig. 7.2. Le schéma du dispositif expérimental

Nous avons mesuré la perméabilité relative du tore en ferrite avant de réaliser un entrefer de 0.59mm à l'aide d'une meule. Durant le découpage, le tore a été refroidi à l'eau pour ne pas altérer ses caractéristiques magnétiques. Après le découpage, l'entrefer a été mesuré à l'aide d'un microscope optique.

Tableau 7.1- Les valeurs numériques des paramètres du dispositif expérimental

Paramètre	Valeur numérique
Pli en CFRP	
Epaisseur (δp)	0.125mm
Surface (S_p)	17 ×7,5 cm^2
Tore	
Ferrite	4W1500
Rayon interne (R_i)	9mm
Rayon externe (R_e)	14mm
Largeur (τ)	28.5mm
Perméabilité relative (μ_r)	252 (à f=100 kHz)
Nombre de spires du bobinage (N_{st})	250
Entrefer (e)	0.59mm

7.3 Identification des paramètres du modèle inverse

7.3.1 Prise en compte du tore dans le calcul de la variation d'impédance

Vu qu'on s'intéresse aux variations de l'impédance avec et sans la charge en CFRP, il n'est pas nécessaire de discrétiser le tore ni même son bobinage. Le champ magnétique source dans la plaque en CFRP est calculé en utilisant les équations des circuits magnétiques.

Le schéma électrique équivalent de l'ensemble représenté dans la figure 7.2 est décrit par la figure 7.3. Le pli en CFRP est représenté par une spire en court-circuit dans laquelle circule un courant I qui produirait le même champ magnétique de réaction qui s'oppose au flux créé par l'inducteur dans le tore, en vertu de la loi de Lenz.

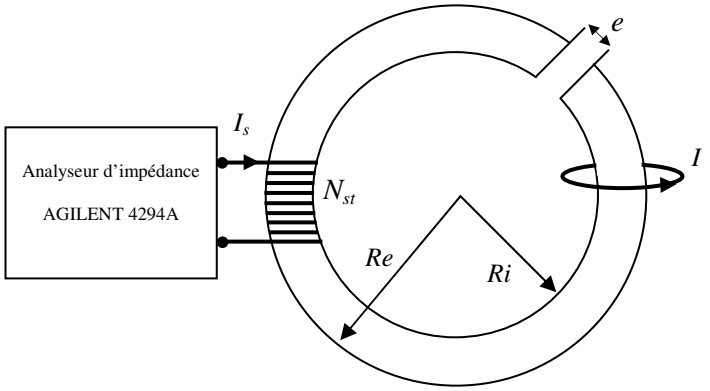


Fig. 7.3. Le schéma électrique équivalent

Nous définissons une induction moyenne dans la section du tore (S_T), comme suit

$$B_m = \frac{1}{S_T} \int_{S_T} B\, ds \,. \tag{7.1}$$

Le flux qui circule dans la section du tore est donc

$$\varphi = B_m S_T \,. \tag{7.2}$$

En tenant compte de l'entrefer (e), la réluctance moyenne du circuit du tore s'exprime comme suit

$$\Re_m = \frac{1}{S_T}\left[\frac{\pi(R_e + R_i) + (\mu_r - 1)e}{\mu_0 \mu_r}\right]. \tag{7.3}$$

Des équations des circuits magnétiques, nous avons

$$N_{st} I_s - I \approx \Re_m \varphi \,. \tag{7.4}$$

En remplaçant 7.3 dans 7.4, et en tenant compte de 7.2, nous obtenons la relation suivante

$$B_m = \frac{\mu_0 \mu_r}{\pi(R_e + R_i) + (\mu_r - 1)e}\{NsI_s - I(B_m)\} \,. \tag{7.5}$$

En extrayant de l'induction le terme source, la relation 7.5 devient

$$B_m = B_{ms} - \frac{\mu_0 \mu_r}{\pi(R_e + R_i) + (\mu_r - 1)e} I(B_m)\,. \qquad (7.5\text{-bis})$$

Le courant I est la somme des contributions des courants induits dans le pli. Dans un repère cartésien où l'induction magnétique B_m est orientée suivant l'axe z, les courants induits dans le pli circulent dans le plans (x,y). En supposant que courants induits ne varient pas suivant la faible épaisseur du pli, le courant I s'exprime comme suit

$$I = \delta_p \int_0^{\frac{y_{\max}}{2}} J_x\, dy \;\; (\grave{a}\;\; x = \frac{x_{\max}}{2}) = \delta \int_0^{\frac{x_{\max}}{2}} J_y\, dx \;\; (\grave{a}\;\; y = \frac{y_{\max}}{2})\,. \qquad (7.6)$$

Les couples (x_{min}, x_{max}) et (y_{min}, y_{max}) définissent les limites de la surface (S_p) du pli en CFRP, et δ_p représente son épaisseur.

La densité des courants induits J qui est à son tour une fonction de B_m est calculée numériquement, en résolvant les équations 3.1 et 3.16, avec $(-j\omega B_m)$ comme terme source.

L'équation 7.5 est résolue de manière itérative. On commence par calculer l'induction source B_{ms}, puis la densité des courants induits J. On recalcule ensuite B_m à l'aide de 7.5-bis ; on l'introduit dans l'équation 3.16 puis on calcule à nouveau la densité de courants induits qui à son tour modifie B_m. Ce processus est répété jusqu'à convergence. Le test de convergence est réalisé sut la valeur de l'induction B_m.

A la fin de ce processus itératif, on extrait les composantes $\{J_x$ et $J_y\}$ de la densité de courants induits, qu'on utilise ensuite pour le calcul de la variation de l'impédance à l'aide de 3.17 et 3.18.

7.3.2 Résultats de modélisation

La figure 7.4 représente un zoom sur la répartition de la densité des courants induits dans le pli pour les positions où la largeur du tore est suivant la direction des fibres ($\theta=0$) et la direction transversale ($\theta=\pi/2$). La figure 7.5 représente les variations des parties réelles de l'impédance, $|\Delta R_0|$ et $|\Delta R_{90}|$, en fonction des conductivités σ_L et σ_T.

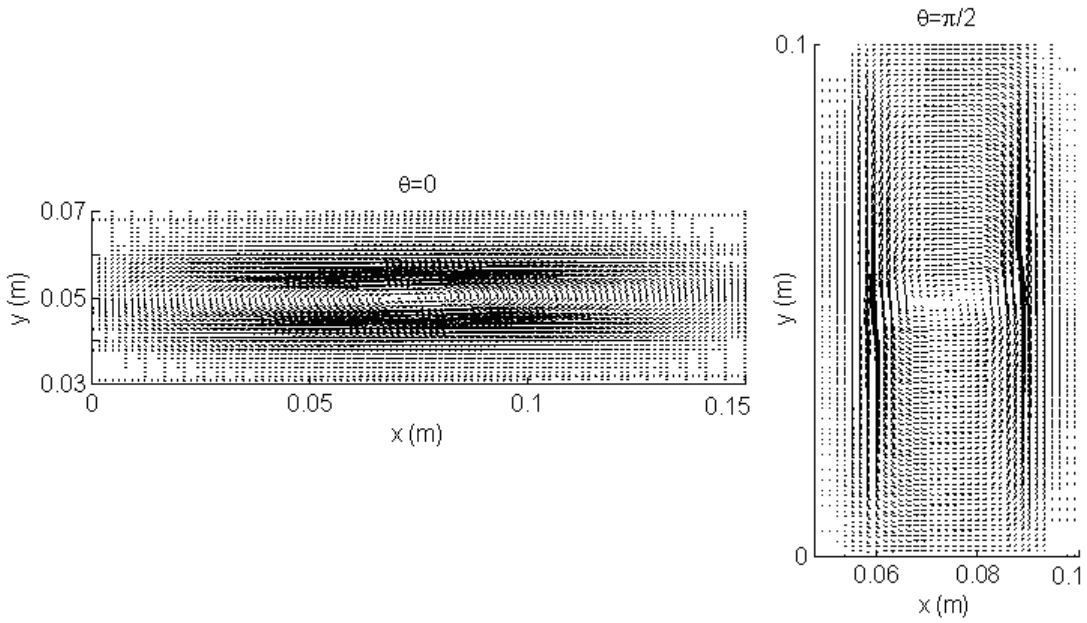


Fig. 7.4. Zoom sur les répartitions spatiales de la densité de courants induits dans la plaque pour les positions où la largeur du tore est suivant la direction des fibres ($\theta=0$) et la direction transversale ($\theta=\pi/2$)

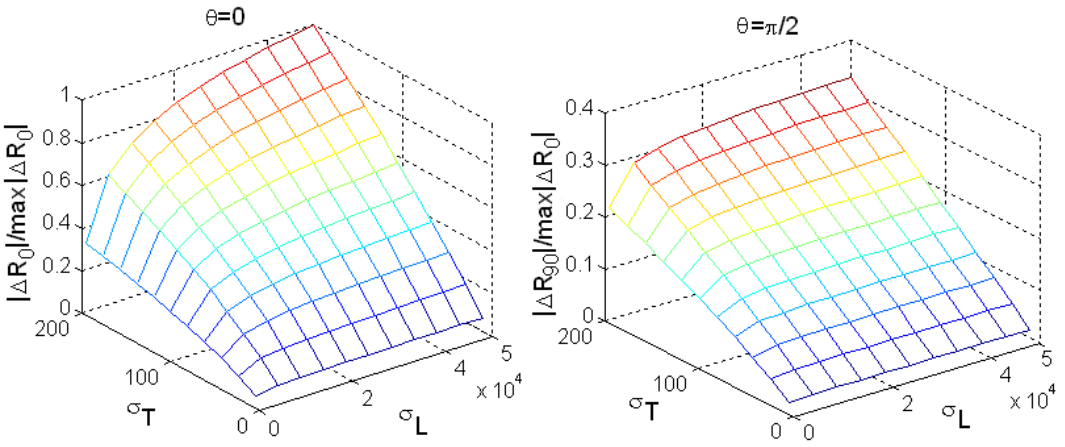


Fig. 7.5. Variations de $|\Delta R_0|$ et $|\Delta R_{90}|$ en fonction de σ_L et σ_T.

Les paramètres identifiés pour le modèle inverse, à la fréquence $f=100KHz$, sont indiqués dans le tableau 7.2.

Tableau 7. 2**-** Les valeurs numériques des paramètres identifiés

$\theta°$	a_θ	α_θ	β_θ
0°	0.3978	0.2328	0.7860
90°	0.3535	0.0642	0.9422

7.4 Résultats de mesures et identification des conductivités longitudinale et transversale

Nous avons effectué des mesures sur une plage de fréquences variant entre 100KHz et 1MHz. La figure 7.6 décrit les variations de la résistance et de la réactance du bobinage du tore en fonction de la fréquence, à vide et en charge pour les positions où les fibres du pli sont parallèles et transversales à la largeur du tore.

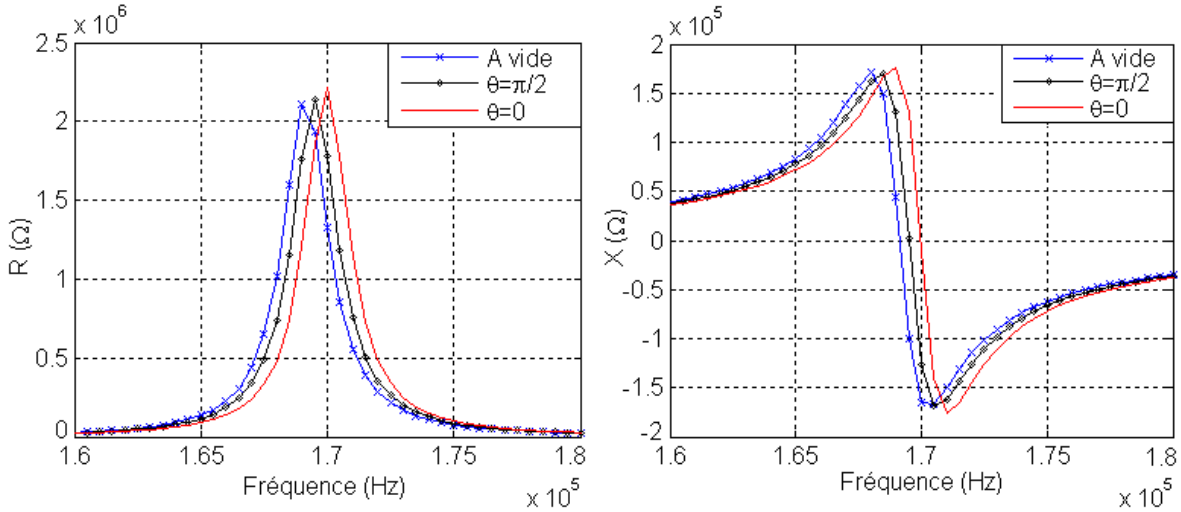


Fig. 7.6. Variations de la résistance et de l'inductance du bobinage du tore en fonction de la fréquence pour différentes configurations de la charge

Comme le montre la figure 7.6, le circuit électrique défini par l'ensemble du tore bobiné et du pli en CFRP possède une fréquence d'antirésonance qui varie de manière significative en fonction de la conductivité de la charge. C'est un phénomène qui constitue une alternative très intéressante pour la caractérisation des CFRPs.

A la fréquence 100KHz, pour laquelle les paramètres du modèle inverse sont identifiés, les valeurs mesurées des variations de la résistance du bobinage du tore ($|\Delta R_0|$, $|\Delta R_{90}|$), ainsi que les valeurs identifiées des conductivités longitudinale et transversale aux fibres du pli (σ_L , σ_T), sont représentées dans le tableau 7.3. Ces valeurs sont arrondies à leurs limites inférieures.

Tableau 7. 3- Les valeurs mesurées de l'impédance et les valeurs identifiées des conductivités

$\lvert\Delta R_0\rvert$ (Ω)	$\lvert\Delta R_{90}\rvert$ (Ω)	σ_L (S/m)	σ_T (S/m)
135	60	5.64×10^3	129.2

La valeur de σ_L identifiée à l'aide de la formule 6.4 est de 47.4 S/m, ce qui est évidemment très loin de la réalité. La valeur mentionnée dans le tableau 7.3 est obtenue en résolvant de manière itérative les équations 6.2 et 6.3, en utilisant la méthode de dichotomie avec la valeur 129.2 S/m pour σ_T et la valeur 5×10^4 S/m comme point de départ pour σ_L.

7.5 Vérification

Pour vérifier la validité des valeurs de conductivités identifiées, nous comparons les résultats de mesures aux résultats de calcul de la variation de l'impédance d'une bobine de forme cylindrique sur le pli pour lequel on a identifié ces conductivités. Le système constitué de l'ensemble bobine - pli est décrit dans la figure 7.7. La bobine est reliée à l'analyseur d'impédance AGILENT 4294 A. Les valeurs numériques des paramètres de la bobine sont fournies dans le tableau 7.4.

Les résultats de comparaison sont représentés dans la figure 7.8. Les résultats de mesures et de calcul s'accordent globalement. Les écarts sont dus aux erreurs commises sur les valeurs des conductivités identifiées, associées aux erreurs de calcul et de mesures. Ces dernières peuvent être très importantes car les conductivités du pli varient fortement en fonction des déformations qu'il subit, notamment la conductivité transversale aux fibres. S'agissant d'une couche très mince, le pli en CFRP doit être manipulé avec le plus grand soin. Dans les basses fréquences (f<7 10^5Hz), la valeur de l'impédance calculée est supérieure à celle mesurée. La situation s'inverse pour les hautes fréquences où les effets capacitifs influent de manière non négligeable sur la variation de l'impédance du capteur.

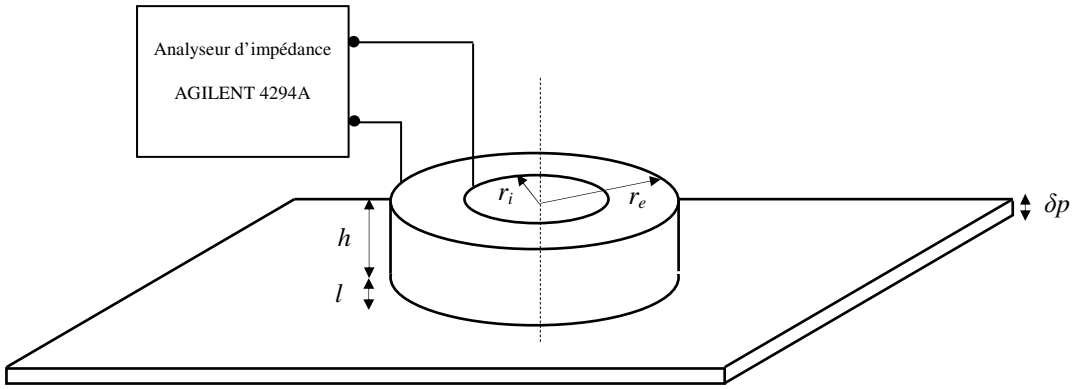


Fig. 7.7. Système bobine – pli en CFRP

Tableau 7.4- Les valeurs numériques des paramètres de la bobine

Paramètre	Valeur numérique
Nombre de spires (N_s)	120
Rayon interne (r_i)	2mm
Rayon externe (r_e)	4mm
Hauteur (h)	1.5mm
Lift-off (l)	0.1mm

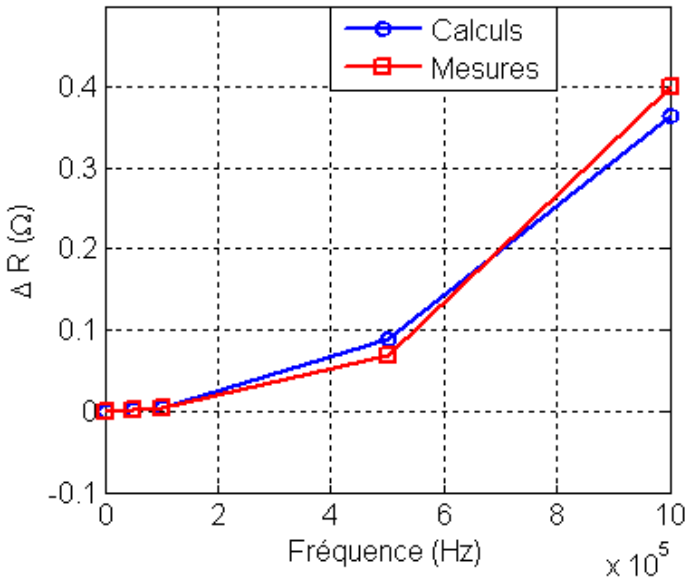


Fig. 7.8. Comparaison entre les résultats de calcul et de mesures de la variation de la résistance de la bobine en fonction de la fréquence

7.6 Conclusion

Nous avons pu déterminer les conductivités longitudinale et transversale d'un pli en CFRP, en utilisant l'approche de caractérisation développée dans le chapitre précédent, et dont les paramètres sont identifiés pour un tore de section rectangulaire. L'utilisation du tore permet de s'affranchir des variations du lift-off et d'éliminer les couplages capacitifs entre la source et la plaque.

L'utilisation du tore permet également d'imposer une induction normale à la surface de la plaque ; cela nous a permis d'utiliser le modèle réduit pour la modélisation des courants induits dans le pli en CFRP. Pour ne pas avoir à intégrer le tore et son bobinage dans le calcul numérique, nous avons couplé le calcul numérique des courants induits dans la plaque en CFRP au calcul analytique de l'induction magnétique dans la section du tore, en utilisant équations des circuits magnétiques. Cela a permis de simplifier la modélisation de manière considérable.

Nous avons remarqué que le circuit électrique défini par l'ensemble du tore bobiné et du pli en CFRP possède une fréquence d'antirésonance qui varie de manière significative en fonction des conductivités longitudinale et transversale du pli. Ce phénomène mérite une étude approfondie, car il constitue une alternative intéressante pour la caractérisation des CFRPs.

L'opération de mesure sur les CFRPs doit être pratiquée avec le plus grand soin, sans quoi les résultats obtenus seraient très éloignés de la réalité. Les valeurs des conductivités seraient fortement affectées par la moindre déformation que l'échantillon pourrait subir. D'un autre côté ce phénomène pourrait être exploité pour l'évaluation des contraintes appliquées sur ces matériaux.

Conclusion générale et perspectives

Ce travail constitue une contribution à la modélisation numérique tridimensionnelle simplifiée de l'interaction d'un champ électromagnétique avec une structure en matériau composite stratifié à fibres de carbone (CFRPs), avec comme principale application l'évaluation non destructive par courants de Foucault. En effet, l'état de l'art a révélé un besoin en termes de modélisation, clairement exprimé par les utilisateurs de ce type de structures. Les principales difficultés rencontrées dans une telle modélisation sont liées aux dimensions multi-échelles, à la forte anisotropie, à l'hétérogénéité de ces matériaux et à des couplages capacitifs complexes ; des phénomènes qui imposent des approches de modélisation tridimensionnelles. D'autre part, les approches de modélisation numériques classiques, de type éléments finis, demeurent lourdes en 3D, et se heurtent à des difficultés en terme de discrétisation (maillage), lorsque les systèmes modélisés impliquent des dimensions multi-échelles et des mouvements.

Dans un premier temps, et dans les limites où les effets capacitifs peuvent être négligés, nous avons développé un modèle basé sur une formulation intégro-différentielle en potentiel vecteur électrique, pour un calcul rapide de la réponse d'un capteur à courants de Foucault et des courants induits dans les CFRPs. Ce modèle tient compte naturellement des conservations du courant électrique et du flux magnétique, et permet de limiter le domaine d'étude aux parties actives du système modélisé. Ces dernières sont discrétisées séparément ; les aspects multi-échelles et les mouvements sont donc traités plus facilement. D'autre part, compte tenu des structures en couches minces des CFRPs, et sous certaines conditions, ce modèle se réduit à un cas quasi-bidimensionnel n'impliquant que la composante normale du potentiel vecteur électrique, réduisant ainsi considérablement la taille du système à résoudre et le temps de calcul. La discrétisation de la formulation intégro-différentielle est réalisée à partir d'un couplage de la méthode des différences finies à la méthode des moments.

C'est une méthode rapide et simple à mettre en œuvre mais qui engendre un système matriciel non symétrique. La méthode du bi-Gradient conjugué stabilisé est donc utilisée pour la résolution de ce système. Nous avons proposé une méthode de résolution itérative, dans laquelle le terme « intégrale » est transféré au second membre. Cela a permis de réduire le nombre d'éléments stockés dans la matrice globale et de diminuer le temps de résolution. En guise de validation, les résultats numériques sont comparés à un calcul analytique de l'impédance d'une bobine sur une plaque mince anisotrope. Les temps de calculs sont faibles pour des précisions acceptables.

Dans un second temps, nous avons proposé une approche de caractérisation du tenseur de conductivité des CFRPs, en introduisant une structure de capteur à courant de Foucault tournant de forme rectangulaire. Nous avons développé un modèle analytique liant directement les composantes du tenseur de conductivité d'un pli en CFRP aux impédances du capteur rectangulaire tournant, correspondant à ses positions parallèle et transversale aux fibres. Cette approche a été validée expérimentalement.

Ce travail offre deux types de perspectives. D'une part, sur le plan recherche, nous envisageons : d'améliorer le modèle de calcul en appliquant des méthodes de discrétisations plus élaborées, d'étudier la possibilité de réaliser des hybridations de méthodes numériques-analytiques, d'intégrer les matériaux magnétiques dans le calcul numérique et d'étendre les applications aux caractérisations des défauts dans les CFRPs. A plus long terme, la prise en compte des couplages capacitifs, accompagnée d'une compagne de mesures. La compagne de validation nous a permis d'observer des phénomènes qui pourraient constituer des alternatives intéressantes pour la caractérisation des CFRPs ; ils méritent donc une étude plus approfondie. Il serait aussi approprié de réfléchir à de nouvelles structures de capteurs à courant de Foucault, en particulier à une structure de capteur à champ tournant. En effet, l'angle électrique du champ tournant serait plus facile à commander que l'angle mécanique du capteur tournant équivalent, et cela permettrait de s'affranchir des imprécisions de mesures qui pourraient être engendrées par d'éventuelles variations du lift off suite au mouvement du capteur tournant. Une telle étude pourrait ainsi se baser sur les outils numériques développés dans ce travail, associés aux outils de calcul disponibles dans les domaines de l'électronique de puissance, de la commande des machines électriques, et de l'instrumentation.

D'autre part, certains résultats obtenus dans ce travail pourraient être applicables sur le plan industriel. En particulier l'approche développée pour la caractérisation du tenseur de conductivité d'une plaque en CFRP en utilisant un capteur rectangulaire tournant. Il serait intéressant de réaliser un prototype d'essai, ce qui permettrait de définir des protocoles d'expérimentation.

Annexe 1

Calcul analytique de l'impédance d'une bobine sur une plaque anisotrope

Nous présentons dans cette annexe l'essentiel des équations développées par S.K. Burke [Burke-90] pour le calcul de la variation de l'impédance d'une bobine en présence d'une plaque amagnétique ($\mu = \mu_0$) caractérisée par une conductivité électrique anisotrope. Deux situations sont considérées : le cas où l'axe de la bobine est perpendiculaire à la surface de la plaque « bobine à axe vertical », et le cas où l'axe de la bobine est parallèle à la surface de la plaque « bobine à axe horizontal ».

La plaque présente une anisotropie uniaxiale de la conductivité électrique. Dans les deux cas, l'anisotropie est prise suivant l'axe « x ». Le tenseur de conductivité de la plaque s'exprime comme suit

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}_{<x,y,z>} . \qquad \text{(A.1.1)}$$

A.1.1 Bobine à axe vertical

La figure A.1.1 représente une bobine à axe perpendiculaire à la surface d'une plaque anisotrope d'épaisseur « e » et de surface infinie. La bobine, de rayons externe « r_e » et interne « r_i », de hauteur « h », est située à une distance « l » de la surface de la plaque. La bobine de nombre de spires « N » est alimentée par un courant alternatif sinusoïdal d'intensité « I ».

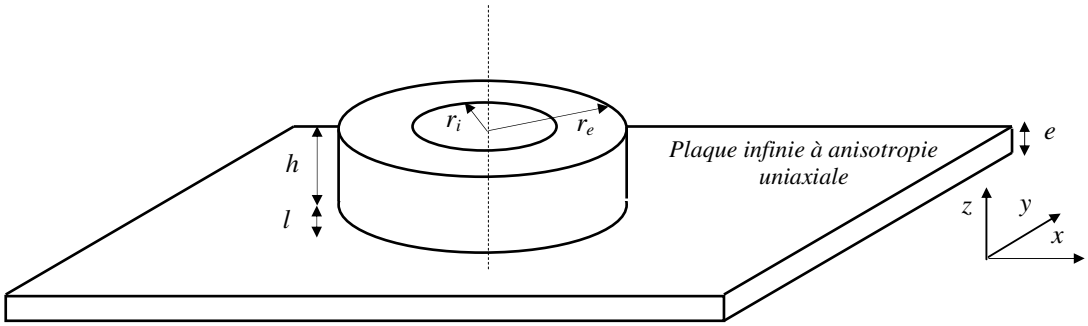


Fig. A.1.1. Bobine à axe perpendiculaire à la surface d'une plaque anisotrope

La variation de l'impédance de la bobine, due aux courants induits dans la plaque, est donnée par la formule suivante

$$\Delta Z = 2i\omega\mu_0 n^2 \int_0^\infty \sinh^2\left(\alpha\frac{h}{2}\right) J^2(\alpha r_i, \alpha r_e) P(\alpha)\, \frac{e^{-2\alpha(l+\frac{h}{2})}}{\alpha^6}\, d\alpha\,, \qquad \text{(A.1.2)}$$

avec :

$$J(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} x J_1(x)\, dx\,. \qquad \text{(A.1.3)}$$

$n = \dfrac{N}{h(r_e - r_i)}$ est la densité du bobinage de la bobine, et J_1 représente la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1.

$$P(\alpha) = \int_0^{2\pi} R(u = \alpha\cos\lambda, v = \alpha\sin\lambda)\, d\lambda\,, \qquad \text{(A.1.4)}$$

$$R(u,v) = \left[\left(q_+^2 - p^2\right)\{[\cosh(\beta+\gamma)e] - 1\} + \left(p^2 - q_-^2\right)\{[\cosh(\beta-\gamma)e] - 1\}\right] / \Delta\,, \qquad \text{(A.1.5)}$$

$p = \alpha\gamma\left(k_y^2 + u^2\right),\ \ q_\pm = k_y^2 v^2 \pm \beta\gamma u^2\,,$

$\Delta = \left(q_+^2 + p^2\right)\{[\cosh(\beta+\gamma)e] - 1\} - \left(p^2 + q_-^2\right)\{[\cosh(\beta-\gamma)e] - 1\} + 2pq_-[\sinh(\beta-\gamma)e] + 2pq_+[\sinh(\beta+\gamma)e]$

$\alpha^2 = u^2 + v^2\ ,\ \beta^2 = \alpha^2 + k_y^2,\ \ \gamma^2 = u^2(\sigma_x/\sigma) + v^2 + k_x^2\,,$

$k_x^2 = i\omega\mu_0\sigma_x = 2i/\delta_x^2\,,\quad k^2 = i\omega\mu_0\sigma = 2i/\delta^2\,.$

$\delta_x = \sqrt{2/\omega\mu_0\sigma_x}$ et $\delta = \sqrt{2/\omega\mu_0\sigma}$ sont les épaisseurs de peau correspondantes aux conductivités σ_x et σ.

Si l'épaisseur de la plaque est très inférieure à ces épaisseurs de peau, i.e., $e << \min[\delta_x, \delta]$, les équations A.1.4 et A.1.5 se simplifient comme suit

$$R(u,v) = \frac{-i\eta_x \eta \alpha\, e^{-\alpha e}}{\eta_x u^2 + \eta v^2 + i\alpha\eta_x\eta}, \qquad \text{(A.1.5-bis)}$$

$$P(\alpha) = -2\pi i \left(\frac{\eta_x e^{-\alpha e}}{\alpha + i\eta_x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\eta\, e^{-\alpha e}}{\alpha + i\eta}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad \text{(A.1.4-bis)}$$

avec : $\eta_x = \dfrac{e}{\delta_x^2}$ et $\eta = \dfrac{e}{\delta^2}$.

A.1.2 Bobine à axe horizontal

La figure A.1.1 représente une bobine de rayons externe « r_e » et interne « r_i », et de largeur « h », dont l'axe est parallèle à la surface d'une plaque anisotrope d'épaisseur « e » et de surface infinie. L'axe de la bobine fait un angle φ avec l'axe x. Il est situé à une distance « $d \geq r_e$ » de la surface de la plaque.

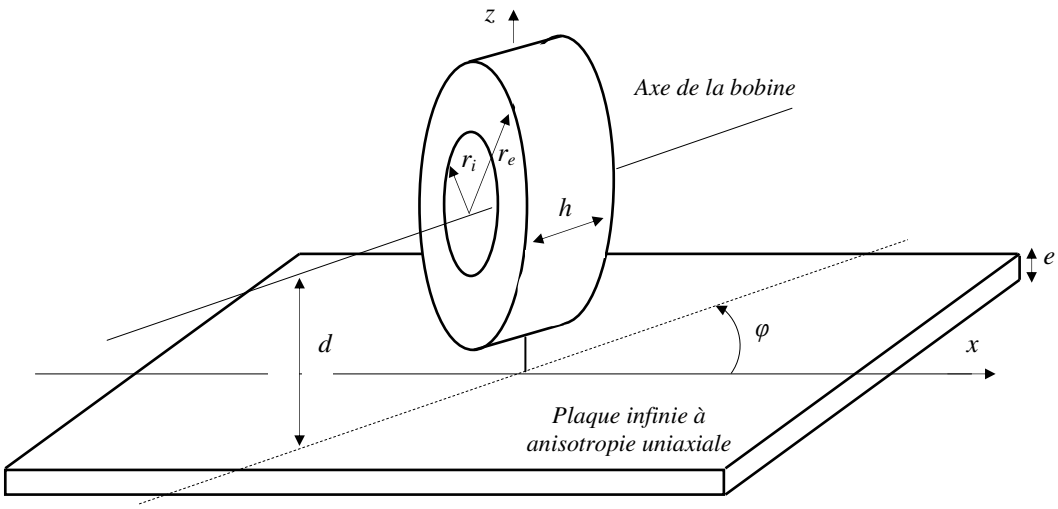


Fig. A.1.2. Bobine à axe parallèle à la surface d'une plaque anisotrope

Dans ce cas, la variation d'impédance de la bobine est une fonction de l'angle φ que fait son axe avec l'axe *x*. Elle s'exprime comme suit

$$\Delta Z(\varphi) = 8 i \omega \mu_0 n^2 \int_0^\infty \sin^2\left(u \frac{h}{2}\right) M^2(u\, r_i, u\, r_e) P_\varphi(u) \frac{du}{u^6}, \qquad \text{(A.1.5)}$$

avec

$$M(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} x I_1(x)\, dx. \qquad \text{(A.1.6)}$$

I_1 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce, d'ordre 1.

$$P_\varphi(u) = \int_0^\infty \{R[\chi(u,v), \zeta(u,v)] + R[\chi(-u,v), \zeta(-u,v)]\} \frac{e^{-2\alpha d}}{2\alpha} dv, \qquad \text{(A.1.7)}$$

avec

$\chi(u,v) = u\cos(\varphi) - v\sin(\varphi)$, $\zeta(u,v) = u\cos(\varphi) + v\sin(\varphi)$.

Les fonctions R et α sont définies dans la section précédente.

ΔZ est une fonction paire de φ. Elle est périodique, avec une période de π. Son module $|\Delta Z|$ atteint son maximum lorsque l'axe de la bobine est parallèle à l'axe de faible conductivité, et son minimum quand l'axe de la bobine est parallèle à l'axe de la conductivité la plus élevée.

Annexe 2

Calcul analytique du champ électrique induit par une boucle de courant dans une plaque anisotrope

Nous présentons dans cette annexe les principales formules rencontrées dans les références [Roberts-88] et [Sabbagh-88], décrivant le champ électrique induit par une boucle de courant dans une plaque anisotrope.

Le système modélisé est décrit dans la figure A.2.1. Une boucle de rayon r_0, alimentée par un courant I_0 à variation sinusoïdale dans le temps, est située à une hauteur z'' au dessus d'une plaque infinie d'épaisseur z_0, caractérisée par une anisotropie uniaxiale de la conductivité électrique. La surface supérieure de la plaque est prise comme référence ($z=0$).

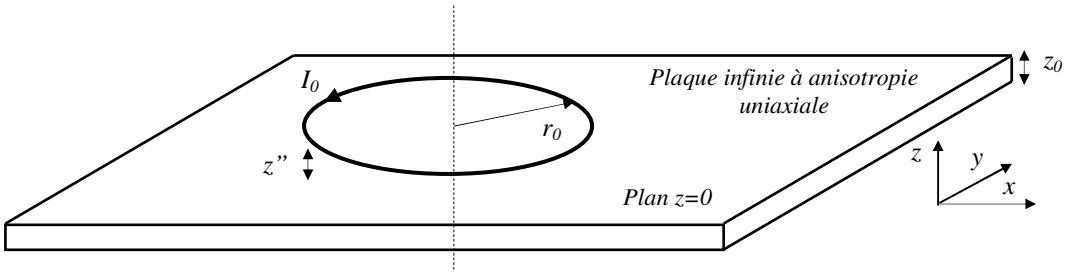


Fig. A.2.1. Boucle de courant au dessus d'une plaque anisotrope

Le tenseur de conductivité de la plaque s'exprime comme suit

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}_{<x,y,z>} . \qquad \text{(A.2.1)}$$

La composante normale du champ électrique est supposée nulle. Les composantes tangentielles, au point (x, y, z), sont données par la formule suivante

$$\vec{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{jI_0 r_0}{2\pi k} J_1(kr_0)[k_x \vec{\gamma}_y(z, z'=z'') - k_y \vec{\gamma}_x(z, z'=z'')] e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y , \qquad \text{(A.2.2)}$$

où :

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \quad k = \left(k_x^2 + k_y^2\right)^{1/2},$$

$$\vec{\gamma}_l(z, z') = a_l \vec{v}_1 e^{\lambda_1 z'} + b_l \vec{v}_2 e^{-\lambda_1 z} + c_l \vec{v}_3 e^{\lambda_3 z'} + d_l \vec{v}_4 e^{-\lambda_3 z} \quad (l = x, y),$$

$$\lambda_1 = \left((\varepsilon_x/\varepsilon) k_x^2 + k_y^2 - \mu_0 \omega^2 \varepsilon_x\right)^{1/2}, \ \lambda_3 = \left(k_x^2 + k_y^2 - \mu_0 \omega^2 \varepsilon_x\right)^{1/2},$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 - j\sigma_x/\omega, \ \varepsilon = \varepsilon_0 - j\sigma/\omega ,$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha/\lambda_1 \\ \beta/\lambda_1 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_3/\delta \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = -\vec{v}_1, \ \vec{v}_4 = -\vec{v}_3,$$

$$\alpha = j\left(\frac{k_x^2}{\omega\varepsilon} - \mu_0\omega\right), \beta = j\frac{k_x k_y}{\omega\varepsilon}, \ \delta = j\left(\varepsilon\omega - \frac{k_x^2}{\omega\mu_0}\right), \ \xi = j\frac{k_x k_y}{\omega\mu_0},$$

$$\begin{bmatrix} a_l \\ b_l \\ c_l \\ d_l \end{bmatrix} = \overline{\overline{N}}\,\overline{\overline{M}}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_0 e^{-\lambda_1 z'} e_l \\ \lambda_0 e^{-\lambda_3 z'} f_l \end{bmatrix}, \ e_l = \begin{cases} 1/2 \\ \dfrac{-\xi}{2\delta_0} \end{cases}, \ f_l = \begin{cases} 0 & (l = x) \\ -1/2 & (l = y) \end{cases},$$

$$\overline{\overline{N}} = 2\lambda_1 \alpha_0 \delta \times diag\left[e^{\lambda_1 z'}, e^{-\lambda_1 z'}, e^{\lambda_3 z'}, e^{-\lambda_3 z'}\right],$$

$$\overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} S_2 e^{-\lambda_1 z_0} & S_1 e^{\lambda_1 z_0} & S_4 e^{-\lambda_3 z_0} & S_4 e^{\lambda_3 z_0} \\ -S_3 e^{-\lambda_1 z_0} & S_3 e^{\lambda_1 z_0} & S_6 e^{-\lambda_3 z_0} & S_5 e^{\lambda_3 z_0} \\ S_1 & S_2 & S_4 & S_4 \\ S_3 & -S_3 & S_5 & S_6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \delta_0 \delta (\lambda_1 \alpha_0 + \lambda_0 \alpha) & S_2 &= \delta_0 \delta (\lambda_1 \alpha_0 - \lambda_0 \alpha) \\ S_3 &= \delta_0 \delta (\beta \alpha_0 - \beta_0 \alpha) & S_4 &= \lambda_1 \alpha_0 (\xi_0 \delta - \xi \delta_0) \\ S_5 &= \lambda_1 \alpha_0 (\lambda_0 \delta + \lambda_3 \delta_0) & S_6 &= \lambda_1 \alpha_0 (\lambda_0 \delta - \lambda_3 \delta_0) \end{aligned} .$$

L'indice « 0 » désigne le vide.

Une fois le champ électrique déterminé, les densités de courants induits peuvent être calculées comme suit

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}. \qquad \text{(A.2.3)}$$

Remarque

Vu que le plan supérieur de la plaque est pris comme référence (z=0), l'épaisseur de la plaque, ainsi que la profondeur z, sont des valeurs négatives ($z_0 < z < 0$).

Annexe 3

Calcul des éléments singuliers des intégrales

Les termes singuliers des intégrales impliquées dans les formulations sont évalués par la méthode de Gauss – Legendre [Noble-00].

L'intégration numérique d'une fonction *f(t)* sur un intervalle [*a,b*], en utilisant la méthode de Gauss – Legendre, est réalisée comme suit [Wikipédia]

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} \omega_i \; f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right). \qquad \text{A.3.1}$$

Dans A.3.1, n est le nombre de points d'intégration, x_i est le point d'intégration d'indice i et ω_i le poids qui lui est associé.

Dans notre cas, nous avons à évaluer les trois intégrales suivantes (figure A.3.1)

$$I_x = \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz\,, \qquad \text{A.3.2}$$

$$I_y = \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz\,, \qquad \text{A.3.3}$$

$$I_z = \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz\,. \qquad \text{A.3.4}$$

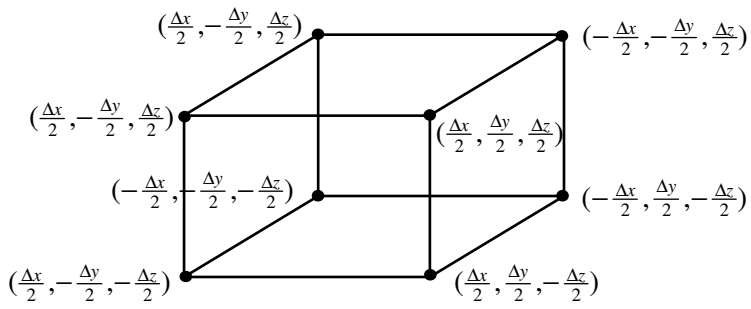


Fig. A.3.1. Domaine d'intégration des termes singuliers

En appliquant La méthode de Gauss – Legendre à chaque borne d'intégration, on obtient

$$I_x \approx \frac{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}{8}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\omega_i\omega_j\omega_k\,\frac{\frac{\Delta x}{2}x_i}{\left[\left(\frac{\Delta x}{2}x_i\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{2}y_j\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{2}z_k\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,, \qquad \text{A.3.5}$$

$$I_y \approx \frac{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}{8}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\omega_i\omega_j\omega_k\,\frac{\frac{\Delta y}{2}y_j}{\left[\left(\frac{\Delta x}{2}x_i\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{2}y_j\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{2}z_k\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,, \qquad \text{A.3.6}$$

$$I_z \approx \frac{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}{8}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\omega_i\omega_j\omega_k\,\frac{\frac{\Delta z}{2}z_k}{\left[\left(\frac{\Delta x}{2}x_i\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{2}y_j\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{2}z_k\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,. \qquad \text{A.3.7}$$

Nous n'avons pas pu obtenir des résultats corrects en utilisant les formules A.3.5, A.3.6 et A.3.7. De bien meilleurs résultats sont obtenus en utilisant les formules ci-dessous, où l'intégrale correspondant à chaque composante est évaluée au centre des axes correspondants autres composantes (i.e. I_x est évaluée à *y=0* et *z=0*, I_y est évaluée à *x=0* et *z=0,* et I_z est évaluée à *x=0* et *y=0*).

$$I_x \approx 2\frac{\Delta y\,\Delta z}{\Delta x}\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i}{x_i^2}\,, \qquad \text{A.3.8}$$

$$I_y \approx 2\frac{\Delta x\,\Delta z}{\Delta y}\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i}{y_i^2}=\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 I_x\,, \qquad \text{A.3.9}$$

$$I_z \approx 2\frac{\Delta x\,\Delta y}{\Delta z}\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i}{z_i^2}=\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 I_x\,. \qquad \text{A.3.10}$$

Si $\Delta x=\Delta y=\Delta z$, alors les trois intégrales sont égales. Dans ce cas, il suffit d'évaluer une seule intégrale. Le tableau A.3.1 donne les points et les poids pour des intégrations de Gauss - Legendre de

un à huit points. Nous remarquons que les nombres impairs de points d'intégration impliquent le point « 0 ». Dans notre cas ils sont à éviter, car ils engendrent une singularité.

Tableau .A.3.1- Quelques points et poids pour l'intégration numérique par la méthode de Gauss - Legendre

Nombre de points d'intégration (n)	Points d'intégration, (x_i, y_i, z_i)	Poids d'intégration (w_i)
1	0	2.00000000
2	±0.57735027	1.00000000
3	0	0.88888889
	±0.77459667	0.55555555
4	±0.3399814	0.65214515
	±0.86113631	0.34785485
5	0	0.56888889
	±0.53846931	0.47862867
	±0.90617985	0.23692689
6	±0.23861918	0.46791393
	±0.66120939	0.36076157
	±0.93246951	0.17132449
7	0	0.41795918
	±0.40584515	0.38183005
	±0.74153119	0.27970539
	±0.94910791	0.12948497
8	±0.18343464	0.36268378
	±0.52553241	0.31370665
	±0.7966648	0.22238103
	±0.96028986	0.10122854

Annexe 4

Algorithme du bi-gradient conjugué stabilisé (bi-CGSTAB)

La méthode du gradient conjugué ne s'applique qu'à des matrices symétriques [Driessen-91, V.D. Vorst-96]. Dans le cas où la matrice $\overline{\overline{A}}$ dans le système $\overline{\overline{A}}\,\overline{X} = \overline{b}$ n'est pas symétrique, il est possible de dériver de ce système un système symétrique équivalent défini comme suit [Lévy-07]

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{I}} & \overline{\overline{A}} \\ \overline{\overline{A}}^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad \text{A.4.1}$$

Il est alors possible d'appliquer la méthode du gradient conjugué à ce système, ce qui définit la méthode du bi-gradient conjugué bi-CG, dont une variante est le bi-gradient conjugué stabilisé bi-CGSTAB qui permet d'améliorer la vitesse de convergence en stabilisant les calculs [Lévy-07].

La méthode du bi-gradient conjugué stabilisé bi-CGSTAB préconditionné par la matrice M est décrite par l'algorithme qui suit [Barret-94]. Le péconditionneur de Jacobi définit M comme la matrice composée des éléments diagonaux de A [Lévy-07].

Calculer $r^0 = b - Ax^0$ *pour une solution initiale* x^0

Choisir un vecteur $\tilde{r}$

<u>*Pour*</u> $i = 1, 2, \ldots$ <u>*faire*</u>

$\rho_{i-1} = \tilde{r}^T r^{i-1}$

<u>*si*</u> $\rho_{i-1} = 0$ <u>*échec de la méthode*</u>

<u>*si*</u> $i = 1$

$p^i = r^{i-1}$

<u>sin *on*</u>

$\beta_i = (\rho_{i-1}/\rho_{i-2})(\alpha_{i-1}/\omega_{i-1})$,

$p^i = r^{i-1} + \beta_{i-1}\left(p^{i-1} - \omega_{i-1} v^{i-1}\right)$

<u>*fin si*</u>

<u>*résoudre*</u> $M\,\hat{p} = p^i$

$v^i = A\,\hat{p}$

$\alpha_i = \rho_{i-1} / \tilde{r}^T v^i$

$s = r^{i-1} - \alpha_i v^i$

test d'arrêt: si s *est suffisament petit:* $x^i = x^{i-1} + \alpha_i \hat{p}$ *et arrêt*

<u>*résoudre*</u> $M\,\hat{s} = s$

$t = A\,\hat{s}$

$\omega_i = t^T s / t^T t$,

$x^i = x^{i-1} + \alpha_i \hat{p} + \omega_i \hat{s}$

$r^i = s - \omega_i t$

test d'arrêt: si r^i *est suffisament petit: arrêt,*

sin *on continuation à moins que* $\omega_i = 0$

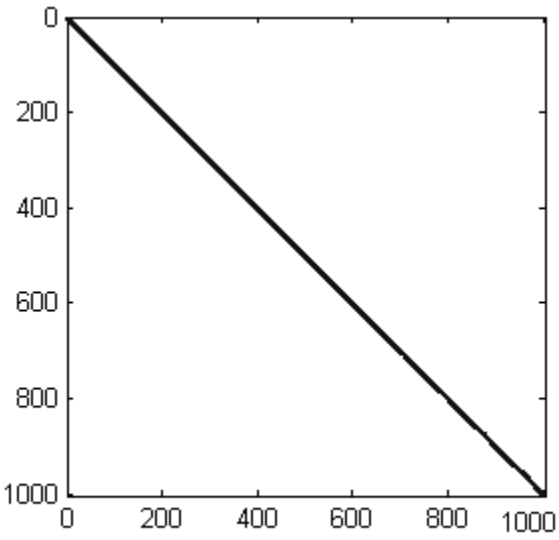
<u>*fin*</u>

Annexe 5

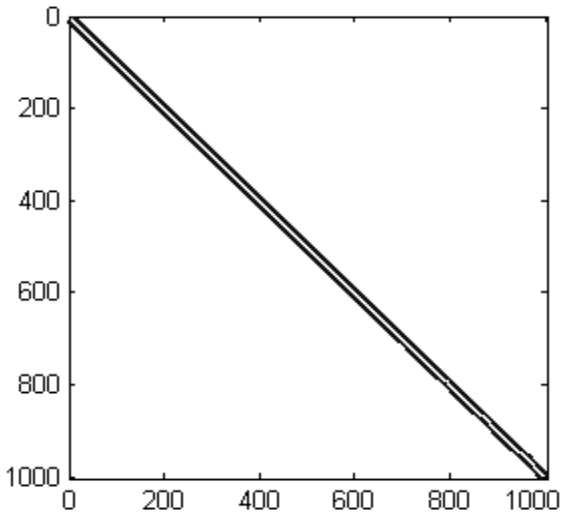
Structures des différentes matrices issues de la discrétisation de la formulation

Nous décrivons dans cette annexe les structures des différentes matrices, en considérant un maillage en (n=N×M×L=10×10×10) éléments de volume de la charge.

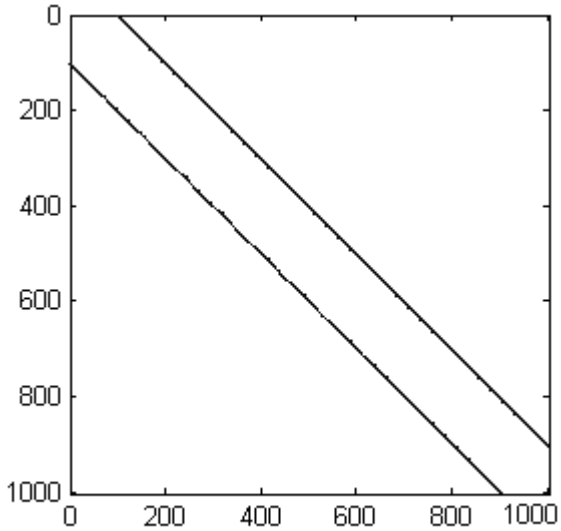
Les structures des matrices dérivées $[\partial_x]$, $[\partial_y]$ et $[\partial_z]$ et résistivités $[\rho_{uv}]_{(u=x,y,z,\ v=x,y,z)}$ sont représentées dans les figures qui suivent. Elles ont des structures en bandes, et contiennent, respectivement, 2n-2, 2n-2N-1 et 2n-2N×M-1 éléments non nuls.



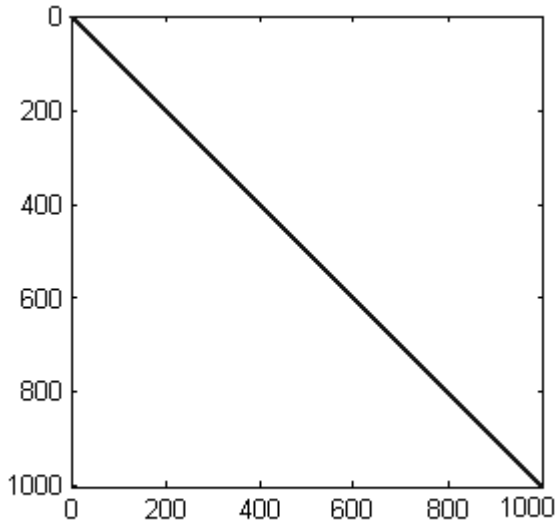
$[\partial_x]$ (nz = 1998)



$[\partial_y]$ (nz = 1979)

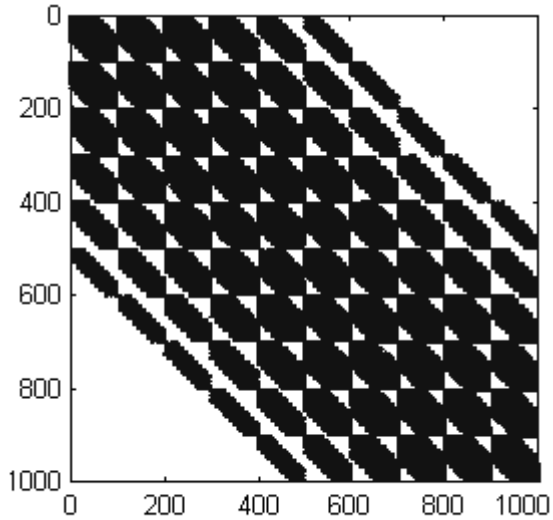


$[\partial_z]$ (nz = 1799)

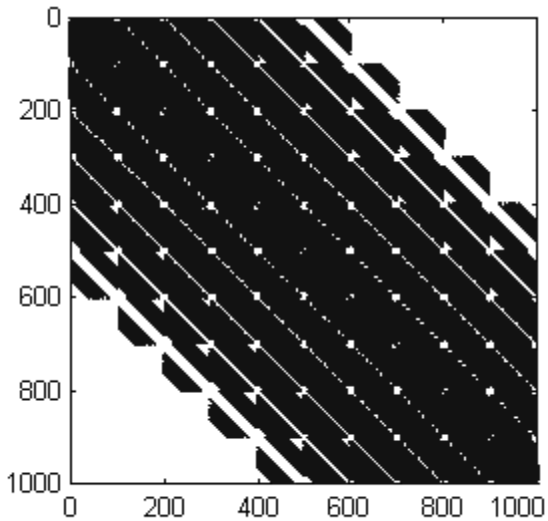


$[\rho_{uv}]_{(u=x,y,z;\,v=x,y,z)}$ (nz = 1000)

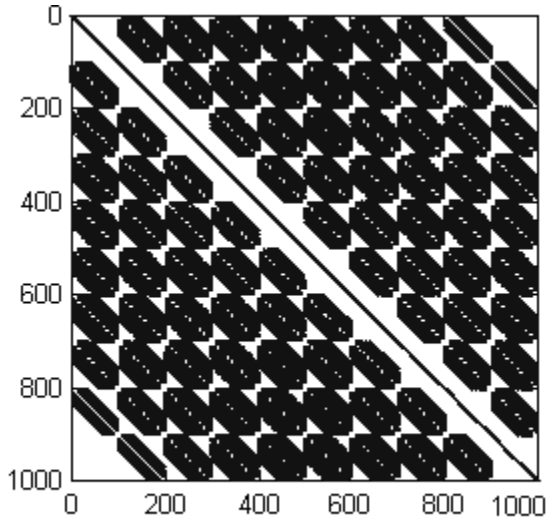
En négligeant les interactions entre les termes lointains, les matrices intégrales $[M_{ccx}]$, $[M_{ccy}]$ et $[M_{ccz}]$, requièrent des structures en bandes. Elles contiennent 2n× (le nombre d'éléments contenus dans une zone sphérique de rayon donné). En considérant des pas de discrétisation identiques suivant les trois directions (x, y, z), les structures des matrices intégrales représentées dans les figures qui suivent, sont obtenues en négligeant pour chaque élément les interactions avec les autres éléments qui sont 100 fois inférieures à l'interaction avec l'élément le plus proche.



$[M_{ccx}]$ (nz = 504168)

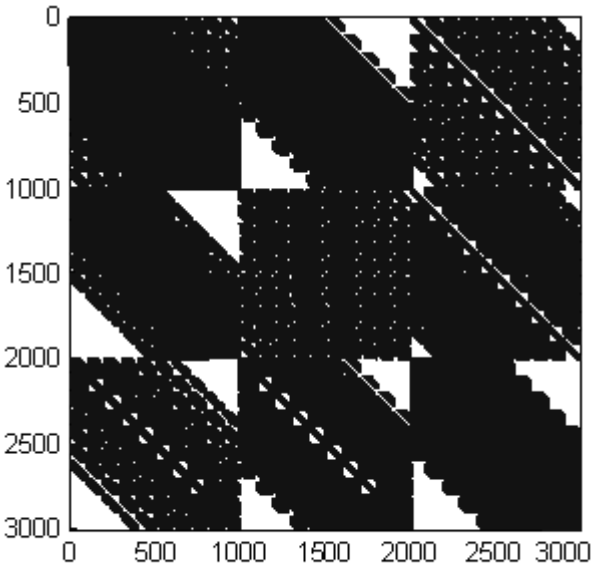


$[M_{ccy}]$ (nz = 504168)

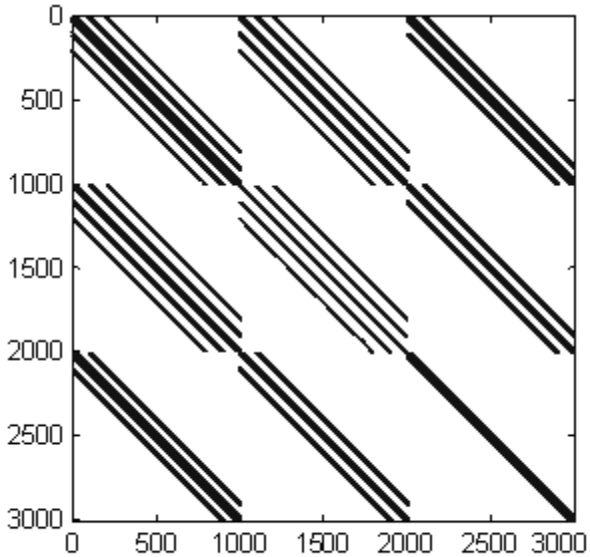


$[M_{ccz}]$ (nz = 433048)

La matrice globale [M] issue de la discrétisation de la formulation en $\vec{T}$ comprend 550614 éléments non nuls. En transposant les termes intégraux au second membre, la matrice globale résultante [M'] ne comprend plus que 109150 éléments non nuls. Cela réduit le nombre d'éléments non nuls d'environ 50 fois. Il faut noter que la taille de [M'] est fixe, et que la taille de [M] dépend du critère de sélection des interactions entre éléments dans les termes intégraux.

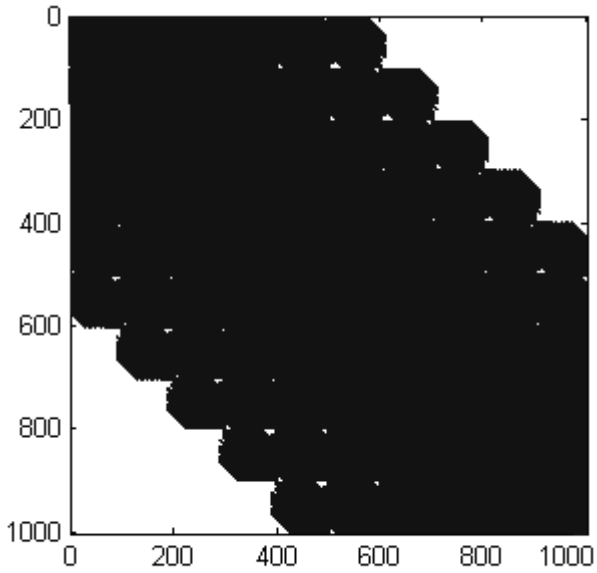


[M] (nz = 5540614)

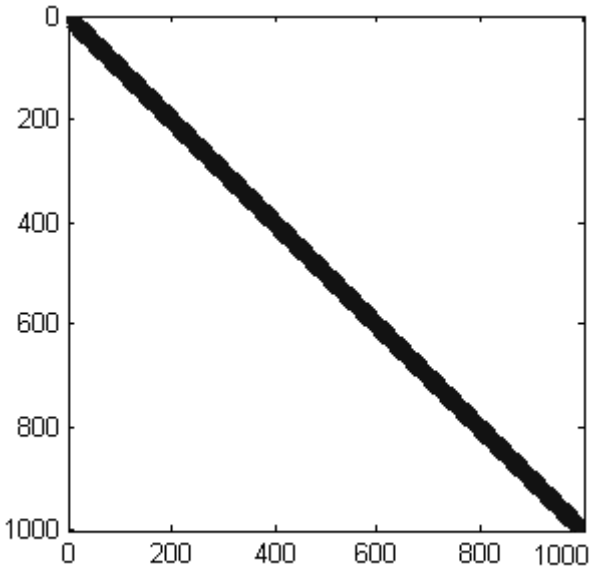


[M'] (nz = 109150)

Pour la formulation en T_z, avec le même nombre de volumes élémentaires, les structures de la matrice globale avec et sans les termes intégraux, notées respectivement $[M_z]$ et $[M'_z]$, sont décrites dans les figures ci-dessous. Elles sont, respectivement, constituées des éléments du neuvième quadrant des matrices [M] et [M']. Le fait de transposer les termes intégraux au second membre permet de réduire le nombre d'éléments non nul de 85.6532 fois. On imagine aisément le gain de temps qui en résulterait.



$[M_z]$ (nz = 763513)



$[M'_z]$ (nz = 8914)

Annexe 6

Liste de quelques publications liées à cette thèse

Publications de revues internationales avec comités de lecture

Hocine Menana, Mouloud Féliachi, "Modeling the response of a rotating eddy current sensor for the characterization of carbon fiber reinforced composites," Eur. Phys. J. Appl. Phys. 52, 23304 (2010).

Abdelhalim Zaoui, Hocine Menana, Mouloud Feliachi and Gérard Berthiau, "Inverse Problem in Nondestructive Testing Using Arrayed Eddy Current Sensors," *Sensors* 2010, *10*, 8696-8704; doi:10.3390/s100908696.

Menana H., Féliachi M., "3-D Eddy Current Computation in Carbon-Fiber Reinforced Composites," *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 45, Issue 3, March 2009, Pages: 1008 - 1011

Zaoui, A., Menana, H., Feliachi, M., Abdellah, M., "Generalization of the Ideal Crack Model for an Arrayed Eddy Current Sensor," *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 44, Issue 6, June 2008, Pages: 1638 - 1641

Hocine Menana, Mouloud Féliachi, "Electromagnetic Characterization of the CFRPs Anisotropic Conductivity: Modeling and Measurements," Accepté à paraître au journal EPJ-AP, EDP Sciences.

Hocine Menana, Mouloud Féliachi, "Non destructive evaluation of the conductivity tensor of a CFRP plate using a rotating eddy current sensor", Accepté pour paraitre dans le livre « Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering», édité par IOS Press.

Hocine Menana, Mouloud Féliachi, "An Integro-Differential Model for 3D Eddy Current Computation in CFRPs," Soumis à *IEEE Magnetics* (2010)

Articles de conférences internationales avec comités de lecture

Hocine MENANA and Mouloud FELIACHI, « Non destructive evaluation of the conductivity tensor of a CFRP plate using a rotating eddy current sensor »; Dans le proceeding d'ISEF 2009, 10-12 septembre 2009, Arras – France; ISBN: 978-2-84832-115-8.

Hocine MENANA, Mouloud FELIACHI, and Gérard BERTHIAU, « Contribution to the eddy current nondestructive evaluation of the CFRPs properties », ENDE 2009, 12-13, Juillet 2009 Dayton OH- USA.

H. Menana, M. Féliachi et G. Berthiau, « Modélisation des courants de Foucault dans un matériau composite en vue de la caractérisation de défauts», Journées COFREND à Toulouse du 20 au 23 mai 2008.

H. Menana, M. Féliachi ; « Modélisation de la réponse d'un capteur à courants de Foucault tournant pour la caractérisation des matériaux composites à fibres de carbone »; Dans le proceeding de la 6ème Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme (NUMELEC2008), Liège, 8-10 décembre 2008, pages 46-47.

Hocine MENANA and Mouloud FELIACHI, "A simplified T-φ formulation for eddy current computation in thin CFRP plates", COMPUMAG 2009; 22-26 Novembre, Florianopolis, Brazil.

H. Menana, M. Féliachi, « A fast 3D eddy current computation in carbon fiber reinforced composites» ; Dans le proceeding de CEFC 2008, à Athènes du 11 au 15 mai 2008.

Références bibliographiques

[Albanese-88a] R. Albanese, G. Rubinacci, "integral formulation for 3D eddy-current computation using edge elements", IEE Proceedings, vol. 135, Pt. A, No. 7, pp. 457-462, September 1988.

[Albertz-98] D. Albertz and G. Henneberger, "Calculation of 3D eddy current fields using both electric and magnetic vector potential in conducting regions", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 34, no. 5, pp- 2644-2647, September 1998

[Angelidis-05] Angelidis, N. Khemiri and P E Irving, "Experimental and finite element study of the electrical potential technique for damage detection in CFRP laminates", Smart Mater. Struct. 14 (2005) 147-154

[Barret-94] R. Barret and all. "Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods", SIAM publications (1994)

[Bensaid-06a] S. Bensaid, "Contribution à la caractérisation et la modélisation électromagnétique des matériaux composites anisotropes ", Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes, 2006

[Bensaid-06b] Samir Bensaid, Didier Trichet, and Javad Fouladgar, "Electromagnetic and Thermal Behaviors of Multilayer Anisotropic Composite Materials", IEEE Trans. Magn., Vol. 42, n° 4, pp. 995-998, April 2006

[Berreur-02] L. Berreur, B. De Maillard, S. Nösperger, "L'industrie française des matériaux composites", Etude stratégique (Rapport de synthèse) réalisée par Nodal consultants pour le compte de la Digitip / SIM, 13 Mai 2002

[Bíró-89] Oskár Bíró and Kurt Preis, "On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 25, no. 4, pp. 3145-3159, July 1989

[Bonavolontà-07] C. Bonavolontà, M. Valentino, G. Peluso, and A. Barone, "Non Destructive Evaluation of Advanced Composite Materials for Aerospace Application Using HTS SQUIDs", IEEE Transactions on applied superconductivity, vol. 17, no. 2, pp. 772-775, June 2007

[Bouillault-90] F. Bouillault, Z. Ren and A. Razek, "Calculation of 3D eddy current problems by an hybrid T-Ω method", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 26, no. 2, pp. 478-481, March 1990

[Bouillault-92] F. Bouillault, "T-Ω Formlation by hybrid F.E.M.-B.I.M. and its gauges for 3D electromagnetic calculations", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 28, no. 2, pp. 1208-1211, March 1992

[Bowler-89] John R. Bowler, L. David Sabbagh, Harold A. Sabbagh, "A theoretical and computational model of eddy-current probes incorporating volume integral and conjugate gradient methods", IEEE Trans. on Magnetics, vol. 25, no 3, pp. 2650-2664, May 1989

[Bruch-92] R. Bruch, G. Ries, H. Werther, G. Kreiselmeyer, and Saemann-Ischenco, "New aspects of the mixed state from six-terminal measurements on $Bi_2Sr_2CaCu_2O_x$ single crystals", Physical Review Letters, volume 69, no 3, pp. 522-525, July 1992

[Burke-87] S K Burke and L R F Rose, "Eddy-current NDI of cracks in thin plates" J. Phys. D: Appl. Phys. 20 (1987) , pp. 797-800

[Burke-90] S.K. Burke, "Eddy-current induction in a uniaxially anisotropic plate", J. Appl. Phys. 68(7), pp.3080-3090, October 1990

[Carr-03] C. Carr, D. Graham, J. C. Macfarlane, and G. B. Donaldson, " SQUID-Based Nondestructive Evaluation of Carbon Fiber Reinforced Polymer", IEEE Transactions on applied superconductivity, vol. 13, no. 2, pp. 196-199, June 2003

[Chung-01] D. D. L. Chung, "Structural health monitoring by electrical resistance measurement", Smart Mater. Struct. 10 (2001), pp.624-636

[Chu-01] Young-Woo Chu and Young-Jin Yum, "Detection of delamination in graphite/epoxy composite by electric potential method", In the proceedings of the 5th Korean-Russian International Symposium on Science and Technology, KORUS 2001, pp. 15 -17

[Crane-00a] R. L. Crane, "Nondestructive Inspection of Composites", Comprehensive Composite Materials ISBN (set): 0-08 0429939, vol. 5; (ISBN: 0-080437230), pp. 227-233, Elsevier 2000

[Crane-00b] Robert Crane, Donald Hagemaier and Robert Fassbender, "Radiographic Inspection of Composites", Comprehensive Composite Materials ISBN (set): 0-08 0429939, vol. 5, (ISBN: 0-080437230), pp. 321-344, Elsevier 2000

[Doirat-07] V. Doirat, S. Bensaid, J. Fouladgar, G. Berthiau, and A. Lefevre, " Magnetic Response of Anisotropic Metal Fiber Material Using Homogeneous Technique in ECNDT", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 43, no. 4, pp. 1777-1780, April 2007

[Driessen-91] Marjan Driessen, Henk A. Van der Vorst, "BI-CGSTAB in semiconductor modelling", Simulation of Semiconductor Devises and Processes, vol. 4, pp. 45-54, Zurich (Switzerland) September 12-14,1991

[Dufour-93] Isabelle Dufour and Dominique Placko "Separation of conductivity and distance measurements for eddy current nondestructive inspection of graphite composite materials", J. Phys. III France 3 (1993), pp. 1065-1074

[Gay-97] D. Gay, "Matériaux composites", Hermes, Paris, 1997

[Gebrial-06] W. Gebrial, R. J. Prance, C. J. Harland, P. B. Stiffell, H. Prance and T. D. Clark, "Non-contact imaging of carbon composite structures using electric potential (displacement current) sensors", Meas. Sci. Technol. 17 (2006), pp. 1470-1476

[González-99] J.L. González, J.S. Espinoza Ortiz, E. Baggio-Saitovitch, " Influence of the anisotropy in the c axis resistivity measurements of high-T superconductors", Physica C 315_1999, pp. 271-277

[Graham-04] D. Graham, P. Maas, G.B. Donaldson, C. Carr, "Impact damage detection in carbon fibre composites using HTS SQUIDs and neural networks", NDT&E International 37 (2004) , pp. 565-570

[Grimberg-05] R. Grimberg, A. Savin, R. Steigmann, A. Bruma, "Eddy current examination of carbon fibres in carbon-epoxy composites and kevlar", The 8th International Conference of the Slovenian Society for Non-Destructive Testing, September 1-3, 2005, Portorož, Slovenia, pp. 223-228

[Gros-95] Xavier E. Gros, "An eddy current approach to the detection of damage caused by low-energy impacts on carbon fibre reinforced materials", Materials & Design, vol. 16, no. 3, 1995, pp. 167-173

[Gros-98] X.E. Gros, "Contrôle non destructif des matériaux composites par la technique des courants de Foucault : une nouvelle approche", Ann. Chim. Sci. Mat, 1998, 23, pp. 981-990

[Hélier-03] Marc Hélier, Michel Ney, Christian Pichot, "Structures de guidage HF - Modélisation et calculs", Techniques de l'Ingénieur, E1171, Mai 2003

[Ida-85] N. IDA and W. LORD, "A Finite Element Model for Three-Dimensional Eddy Current NDT Phenomena," IEEE Trans. on Magnetics, MAG-21(6), pp. 2635-2643, 1985

[Krakowski-89] M.R. Krakowski, "On certain properties of the electric vector potential in eddy-current problems. Part 2", IEE Proceedings, vol. 136, Pt. A, no. 5, pp. 255-257, September 1989

[Kwon-03] O-Mun Kwon, M. V. K. Chari, Sheppard J. Salon, and Kiruba Sivasubramaniam, "Development of integral equation solution for 3-D eddy current distribution in a conducting body" IEEE Transactions on Magnetics, vol. 39, no. 5, pp. 2612-2614, September 2003

[Lane-91] S.S. Lane, R.H. Moore, H.P. Groger, G.V. Gandhe and O.H. Griffin, "Eddy Current Inspection of Graphite/Epoxy Laminates", Journal of Reinforced Plastics and composites, vol. 10, March 1991, pp. 158-166

[Le Duc-08] T.Le Duc, O. Chadebec, J-M.Guichon, G.Meunier, "Couplage de la méthode moment magnétique avec la méthode PEEC pour la résolution des problèmes magnétodynamique", publié dans la 6ème Conférence Européenne sur les méthodes numériques en Electromagnétisme (NUMELEC2008), pp. 26-27, Liège- Belgique du 8 au 10 Décembre 2008

[Lemistre-97] M. Lemistre, C. Gallaud, R. Gouyon et D. Balageas, "Une méthode magnétique radiofréquence de localisation des défauts dans les structures en composite carbone", Journées COFREND sur les essais non destructifs, Nantes -France, 22-26 septembre 1997

[Lévy-07] Bruno Lévy "Géométrie Numérique ", Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, décembre 2007

[Mook-01] Gerhard Mook, Rolf Lange, Ole Koeser, "Non-destructive characterisation of carbon-fibre-reinforced plastics by means of eddy-currents", Composites Science and Technology 61 (2001) 865-873

[ndt-ed] http://www.ndt-ed.org/EducationResources/CommunityCollege/communitycollege.htm

[Ney-06] Michel Ney, "Simulation électromagnétique - Outils de conception", Techniques de l'Ingénieur, E1031, Novembre 2006

[Noble-00] Noble, J.V. "Gauss-Legendre principal value integration**",** Computing in Science & Engineering, Vol. 2, n° 1, pp. 92 – 95, Jan.-Feb. 2000

[Park-07] J. B. Park, T. K. Hwang, H. G. Kim and Y. D. Doh, "Experimental and numerical study of the electrical anisotropy in unidirectional carbon-fiber-reinforced polymer composites", Smart Mater. Struct. 16 (2007), pp. 57-66

[Park-03] Jae Beom Park, Tomonaga Okabe, and Nobuo Takeda1, "New concept for modeling the electromechanical behavior of unidirectional carbon-fiber-reinforced plastic under tensile loading", Smart Mater. Struct. 12 (2003), pp. 105-114

[Pethrick-00] R. A. Pethrick, "Bond Inspection in Composite Structures", Comprehensive Composite Materials ISBN (set): 0-08 0429939 Volume 5; (ISBN: 0-080437230); pp. 359-392, Elsevier 2000

[Pike-74] G.E. Pike and C. H. Seager, "Percolation and conductivity: A computer study. I*", Physical Review B, volume 10, number 4, 15 August 1974, pp. 1421-1434

[Placko-92] Placko Dominique, Dufour Isabelle, "Eddy Current Sensors for Nondestructive Inspection of Graphite Composite Materials", In the IEEE Industry Applications Society Annual Meeting, Texas, USA, 4-9 Oct. 1992, pp.1676 – 1682

[Pratap-96] S. B. Pratap, and W. F. Weldon, "Eddy current in anisotropic composites applied to pulsed machinery", IEEE Trans. Magn., vol. 32, no. 2, pp. 437-444, March 1996

[Ren-96] Zhuoxiang Ren, "Influence of the R.H.S. on the Convergence Behaviour of the Curl-Curl Equation", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 32, no. 3, pp. 665-658, May 1996

[Roberts-88] Thomas M. Roberts, Harold A. Sabagh, L. David Sabagh, "Electromagnetic interactions with an anisotropic slab", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 24, no. 6, pp. 3193-3200 , November 1988

[Rucker-90] W. M. Rucker and K. R. Richter, "A BEM code for 3-D eddy current calculations", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 26, no. 2, pp. 462-465, March 1990

[Ruosi-02] A. Ruosi, M. Valentino, V. Lopresto, G. Caprino, "Magnetic response of damaged carbon fibre reinforced plastics measured by a HTS-SQUID magnetometer", Composite Structures 56 (2002), pp. 141-149

[Sabbagh-88] Harold A. Sabbagh, L. David Sabbagh, and Thomas M. Roberts, "An Eddy-Current Model and Algorithm for Three-Dimensional Nondestructive Evaluation of Advanced Composites", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 24, no. 6, pp. 3201-3212, November 1988

[Savin-00] Adriana Savin, R. Grimberg, S. Chifan, D. Premel, Y. Le Bihan, "Evaluation of delamination in Carbon Fibre Composites Using the Eddy Current Method", 15th WCNDT, Roma 2000

[Salon-81] S. J. Salon, J. M. Schneider, "A comparison of boundary integral and finite element formulations of the eddy current problem", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-100, no. 4, pp- 1473-1479, April 1981

[Salonen-96] Jukka Salonen, Aapo Koski, Frank Cameron, Kimmo Forsman arid Lauri Kettunen, "Solving Dense Nonsymmetric Linear Systems Arising from Integral Formulations" IEEE Transactions on Magnetics, vol. 32, no. 3, pp. 1377- 1380 , May 1996

[Schneider-80] J. M. Schneider and S. J. Salon, "A boundary integral formulation of the eddy current problem" IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG-16, no. 5, pp. 1086-1088, March 1980

[Spiteri-02] Pière Spiteri, "Méthode des differences finies pour les EDP d'évolution", Techniques de l'Ingénieur, AF501, Octobre 2002

[Takahashi-88] Takao Takahashi, Kentaro Kurita, "Computation of eddy currents induced in a conducting sheet under moving magnets", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 24, no. 1, pp- 197-200, January 1988

[Thomas-00] R. L. Thomas, L. D. Favro, X. Han, and Z. Ouyang, «Thermal Methods Used in Composite Inspection», Comprehensive Composite Materials ISBN (set): 0-08 0429939 Volume 5; (ISBN: 0-080437230); pp. 427-446, Elsevier 2000

[Tittmann-00] Bernard R. Tittmann and Robert L. Crane, «Ultrasonic Inspection of Composites», Comprehensive Composite Materials ISBN (set): 0-08 0429939 Volume 5; (ISBN: 0-80437230); pp. 259-320, Elsevier 2000

[Trichet-00] D. Trichet, E. Chauveau, and J. Fouladgar "Asymptotic Calculation of Equivalent Electromagnetic and Thermal Properties for Composite Materials", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 36, no. 4, pp. 1193-1196, July 2000

[Tsuboi-93] H. Tsuboi, M. Tanaka, E Kobayashi and T. Misaki, "Three-dimensional Eddy Current Analysis of Induction Melting in Cold Crucibles", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 29, no. 2, pp. 1574-1577, March 1993

[Tsuboi-91] H. Tsuboi, K. Kunisue, "Eddy current analysis of thin plates taking account of the source current distributions and its experimental validation", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 27, no. 5, pp- 4020-4023, September 1991

[V.D. Vorst-96] Henk A. Van der Vorst, "Iterative methods for unsymmetric linear systems", In the Proceedings of the 23rd Seminar on Current Trends in Theory and Practice of Informatics: Theory and Practice of Informatics, pp. 217 - 234 , ISBN:3-540-61994-1, Edition Springer-Verlag - London , UK, 1996

[Wevers-00] M. Wevers and M. Surgeon, "Acoustic Emission and Composites", Comprehensive Composite Materials ISBN (set): 0-08 0429939 Volume 5; (ISBN: 0-080437230); pp. 345-357, Elsevier 2000

[wikipedia] http://fr.wikipedia.org

[Xia-03] Z. Xia, T. Okabe, J.B. Park, W.A Curtin, N. Takeda, "Quantitative damage detection in CFRP composites: coupled mechanical and electrical models", Composites Science and Technology 63 (2003), pp. 1411-1422

[Zaoui-08] Zaoui, A.; Menana, H.; Feliachi, M.; Abdellah, M., "Generalization of the Ideal Crack Model for an Arrayed Eddy Current Sensor" IEEE Transactions On Magnetics, Vol.44, n° 6, pp. 1638-1641, June 2008

[Zheng-90] Dalian Zheng, “Three-dimensional eddy current analysis by the boundary element method”, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 33, no. 2, pp.1354-1357, March 1997

[Zeller-78] C. Zeller, A. Denenstein, and G. M. T. Foley, “Contactless technique for the measurement of electrical resistivity in anisotropic materials”, Rev. Sci. Instrum. 50 (5), pp 602-607, May 1978

Résumé de la thèse

Le travail présenté dans cette thèse constitue une contribution à la modélisation numérique tridimensionnelle simplifiée, de l'interaction d'un champ électromagnétique avec une structure en matériau composite stratifié à fibres de carbone (CFRPs), avec comme principale application l'évaluation non destructive par courants de Foucault.

Dans un premier temps, et dans les limites où les effets capacitifs peuvent être négligés, nous avons développé un modèle basé sur une formulation intégro-différentielle, en potentiel vecteur électrique, pour des calculs rapides de la réponse d'un capteur à courants de Foucault et des courants induits dans les CFRPs. Ce modèle tient compte naturellement des conservations du courant électrique et du flux magnétique, et permet de limiter le domaine d'étude aux parties actives du système modélisé. Ces dernières sont discrétisées séparément ; les aspects multi-échelles et les mouvements sont donc traités plus facilement. D'autre part, compte tenu des structures en couches minces des CFRPs, et sous certaines conditions, ce modèle se réduit à un cas quasi-bidimensionnel n'impliquant que la composante normale du potentiel vecteur électrique, réduisant ainsi considérablement la taille du système à résoudre et le temps de calcul.

Dans un second temps, nous avons proposé une approche de caractérisation du tenseur de conductivité des CFRPs, en introduisant une structure de capteur à courant de Foucault tournant de forme rectangulaire. Nous avons développé un modèle analytique liant directement les composantes du tenseur de conductivité d'un pli en CFRP aux impédances du capteur rectangulaire tournant, correspondant à ses positions parallèle et transversale aux fibres. Cette approche a été validée expérimentalement.

Mots-clés : Modélisation numérique 3D simplifiée, matériaux composites à fibres de carbone, courants de Foucault, formulation intégro-différentielle, potentiel vecteur électrique, différences finies, méthode des moments, END, caractérisation d'une conductivité électrique anisotrope.

Simplified 3D modelling for eddy current non destructive evaluation of anisotropic composite materials

The work presented in this thesis constitutes a contribution to a simplified three-dimensional numerical modeling of the interaction of an electromagnetic field with laminated carbon fiber reinforced polymer (CFRP) structures, for eddy current nondestructive testing applications.

In the limits where the capacitive effects can be neglected, we have developed a model based on an integro-differential formulation, in terms of the electric vector potential, for rapid calculations of the sensors responses in eddy current testing of laminated CFRPs. This model accounts naturally for the electric current and magnetic flux conservations, and allows confining the modelling to the active parts of the modelled system. These are discretized separately; the multiscale aspects and movements are thus easily treated. On the other hand, given the thin layered structures of the CFRPs, and under certain conditions, this model can be reduced to a quasi-two-dimensional one, involving only the normal component of the electric vector potential, thus reducing considerably the size of the resulting algebraic system and the computing time.

In a second step, we proposed an approach for the characterization of the conductivity tensor of a CFRP plate, by using a rotating eddy current sensor of a rectangular shape. We have developed analytical relations directly linking the components of the conductivity tensor of the CFRP plate, to the impedance variations of the sensor corresponding to its positions parallel and transverse to fibers. The proposed approach has been validated experimentally.

Keywords : Simplified 3D numerical modeling, laminated carbon fiber reinforced polymers (CFRPs), eddy current, integro-differential formulation, electric vector potential, finite difference method, moment method, NDE, characterization of anisotropic electrical conductivity.

Discipline : Sciences de l'Ingénieur

N° ED 503-072