HAL open science

Quelques problèmes de géométrie conforme vus sous l'angle des structures de Cartan

Charles Frances

To cite this version:

Charles Frances. Quelques problèmes de géométrie conforme vus sous l'angle des structures de Cartan. Géométrie différentielle [math.DG]. Université Paris-Sud 11, 2021. tel-03195352

HAL Id: tel-03195352

https://hal.science/tel-03195352

Submitted on 11 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris-Sud 11
Faculté des Sciences d'Orsay

Mémoire présenté pour obtenir

le diplôme d'habilitation à diriger des recherches

de l'Université Paris-Sud 11

Spécialité : Mathématiques

par

Charles FRANCES

Quelques problèmes de géométrie conforme vus sous l'angle des structures de Cartan

Rapporteurs :
François Labourie, Amos Nevo, Jean-Marc Schlenker

Soutenu le 22 novembre 2012 devant le jury composé de :

M.	Olivier Biquard,	Examinateur
M.	Marc Herzlich,	Examinateur
M.	François Labourie,	Rapporteur
M.	Pierre Pansu,	Examinateur
M.	Frédéric Paulin,	Examinateur
M.	Abdelghani Zeghib,	Examinateur

Remerciements

En rédigeant ce mémoire, j'ai réalisé que j'étais arrivé au département de mathématiques d'Orsay depuis huit ans déjà, et le plaisir d'y travailler quotidiennement est toujours intact. C'est donc à tous mes collègues et amis du laboratoire qu'iront mes premiers remerciements. Au sein de l'équipe de Topologie et Dynamique en particulier, j'ai bénéficié d'un environnement scientifique d'exception. François Labourie, Frédéric Paulin et Pierre Pansu, par leurs qualités humaines et leur aura sont pour beaucoup dans cet état de fait. Ils me font aujourd'hui un grand plaisir en acceptant d'être membres du jury. Je remercie tout particulièrement François Labourie d'avoir eu la gentillesse d'être rapporteur de ce mémoire.

L'écriture de ce texte a été aussi l'occasion de mesurer la chance que j'avais eue d'être guidé dans mes premiers pas mathématiques par Abdelghani Zeghib. Son intuition, sa manière d'aborder les problèmes, et bien sûr les thématiques auxquelles il m'a initié m'ont profondément influencé. Je tiens à lui témoigner ici ma grande reconnaissance.

Amos Nevo et Jean-Marc Schlenker m'ont fait l'honneur de bien vouloir être rapporteurs de ce mémoire. Je les en remercie très chaleureusement.

Je remercie également Olivier Biquard et Marc Herzlich pour la bienveillance qu'ils m'ont témoignée depuis que j'ai soutenu ma thèse. Ils me font un grand plaisir en acceptant de faire partie du jury.

Certains des résultats présentés dans les pages qui suivent ont été obtenus en collaboration. Je remercie tout particulièrement Uri Bader et Karin Melnick pour les moments de plaisirs mathématiques et d'amitié qu'ils m'ont fait partager.

Pour leur dévouement, leur disponibilité et leut efficacité, j'adresse également un grand merci à Christine Bailleul, Nelly Bonavent, Valérie Blandin-Lavigne, Nathalie Carrierre, Fabienne Jacquemin, Martine Justin et Marie-Christine Myoupo.

Enfin, merci à ma famille et mes proches pour leur soutien et leur affection indéfectibles.

Table des matières

1 Espaces modèles conformes et géométries de Cartan. 15

1.1 Espaces modèles en géométrie conforme 15

1.1.1 Projections stéréographiques 15

1.1.2 Théorème de Liouville 18

1.2 Géométries de Cartan 19

1.2.1 Version courbe des espaces homogènes 20

1.2.2 Le problème d'équivalence 21

1.2.3 Rigidité 25

1.2.4 Géodésiques généralisées 27

1.3 Utilisation de la connexion de Cartan dans l'étude des automorphismes 29

2 Phénomènes essentiels en géométrie riemannienne conforme. 32

2.1 Introduction 32

2.1.1 Dynamique Nord-Sud 34

2.1.2 Influence de la dynamique sur la géométrie I 34

2.1.3 Dynamique sur les géodésiques conformes 35

2.2 Théorèmes de type Ferrand-Obata-Schoen 37

2.2.1 Conjecture de Lichnerowicz 38

2.2.2 Preuve de la conjecture par les géométries de Cartan . 40

2.2.3 Extension aux géométries paraboliques de rang un . . . 42

2.2.4 Version infinitésimale 43

2.3 Singularités des transformations conformes 47

2.3.1 Lieux singuliers essentiels : quelques exemples 49

2.3.2 Généralisations du théorème de Picard 50

2.3.3 Lieux singuliers essentiels fins et singularités kleiniennes 51

2.3.4 Ébauches de preuves 53

3 Cadre pseudo-riemannien : généralisations et aspects nouveaux. 56
3.1 De nouveaux motifs dynamiques 56
3.2 Conjecture de Lichnerowicz pseudo-riemannienne 59
3.2.1 Groupes de Schottky lorentziens 61
3.2.2 Construction de structures conformes lorentziennes essentielles 63
3.2.3 Contre-exemples au-delà de la signature lorentzienne . 65
3.3 Un résultat général de dégénérescence 66
3.3.1 Parenthèse sur la topologie de $\mathrm{Conf}(M)$ 69
3.3.2 Influence de la dynamique sur la géométrie II 69
3.4 Champs de Killing conformes 71
3.4.1 Théorèmes de formes normales 71
3.4.2 Idées de preuves 73

4 Sur le groupe d'automorphismes d'une géométrie de Cartan 77
4.1 Position du problème 77
4.2 Les travaux de R. Zimmer sur les actions de groupes simples . 79
4.3 Idées de la preuve du théorème de Zimmer 81
4.3.1 Actions algébriques préservant une mesure 82
4.3.2 Applications de Gauss 83
4.3.3 Preuve du théorème pour les actions isométriques . . . 84
4.4 Théorème de plongement pour les géométries de Cartan 85
4.4.1 De nouvelles applications de Gauss 86
4.4.2 Énoncé du théorème de plongement 87
4.4.3 Idées de preuve 88
4.5 Résultats de rigidité et illustration 89
4.5.1 Bornes algébriques sur le groupe des automorphismes . 89
4.5.2 Un résultat de rigidité 90
4.5.3 Illustration 92

5 Problèmes d'existence et d'unicité de plongements géométriques. 94
5.1 Plongements et bords géométriques 94
5.2 Structures géométriquement maximales 97
5.2.1 Structures homogènes conformément maximales 98
5.2.2 Structures kleiniennes maximales 99
5.3 Résultats d'unicité de bords 103
5.4 Bord de Cauchy d'une géométrie de Cartan 105
5.4.1 Idée générale 105
5.4.2 Définition 105

5.4.3 Exemples 106
5.4.4 Application de bord d'un plongement géométrique . . . 108

Liste des travaux.

1. C. Frances, *Removable and essential singular sets for higher dimensional conformal maps.* À paraître dans Commentarii Mathematici Helvetici. (arXiv:1110.0898).

2. C. Frances, *About Geometrically maximal manifolds.* Journal of Topology. **5**, no. 2 (2012), 293–322.

3. C. Frances, K. Melnick, *Formes normales pour les champs conformes pseudo-riemanniens.* À paraître au Bulletin de la SMF. (arXiv:1008.3781v1).

4. C. Frances, *Dégénérescence locale des transformations conformes pseudo-riemanniennes.* À paraître dans Annales de l'Institut Fourier. (arXiv:1008.2436v1).

5. C. Frances, *Local dynamics of conformal vector fields.* Geometriae Dedicata. **158**, no. 1 (2012), 35–59.

6. C. Frances, K. Melnick, *Conformal actions of nilpotent groups on pseudo-Riemannian manifolds.* Duke Math. J. **153** (2010), no. 3, 511–550.

7. E. Bekkara, C. Frances, A. Zeghib, *Actions of semisimple Lie groups preserving a degenerate Riemannian metric.* Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 5, 2415–2434.

8. U. Bader, C. Frances, K. Melnick, *An embedding theorem for automorphism groups of Cartan geometries.* Geom. Funct. Anal. **19** (2009), no. 2, 333–355.

9. C. Frances, *Essential conformal structures in Riemannian and Lorentzian geometry.* Recent developments in pseudo-Riemannian geometry, 231–260, ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc., Zürich, 2008.

10. C. Frances, *Sur le groupe d'automorphismes des géométries paraboliques de rang 1.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **40** (2007), no. 5, 741–764.

11. C. Frances, *Causal conformal vector fields, and singularities of twistor spinors.* Ann. Global Anal. Geom. **32** (2007), no. 3, 277–295.

12. C. Frances, *Lorentzian Kleinian groups.* Comment. Math. Helv. **80** (2005), no. 4, 883–910.

13. C. Frances, *The conformal boundary of anti-de Sitter space-times.* AdS/CFT correspondence: Einstein metrics and their conformal boundaries, 205–216, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 8, Eur. Math. Soc., Zürich, 2005

14. C. Frances, *Sur les variétés lorentziennes dont le groupe conforme est essentiel.* Math. Ann. **332** (2005), no. 1, 103–119.

15. C. Frances, A. Zeghib, *Some remarks on conformal pseudo-Riemannian actions of simple Lie groups.* Math. Res. Lett. **12** (2005), no. 1, 49–56.

16. C. Frances, *Une preuve du théorème de Liouville en géométrie conforme dans le cas analytique.* Enseign. Math. (2) **49** (2003), no. 1-2, 95–100.

17. C. Frances, *The conformal boundary of Margulis space-times.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 336 (2003), no. 9, 751–756.

18. C. Frances, C. Tarquini, *Autour du théorème de Ferrand-Obata.* Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), no. 1, 51–62.

Présentation

Ce mémoire présente nos travaux de recherche, qui s'articulent pour l'essentiel autour des liens qui peuvent relier une structure géométrique et le groupe de ses automorphismes. Plus précisément, la problématique générale est celle d'un groupe de Lie H agissant sur une variété M, en préservant une structure géométrique $\mathcal{S}$. On essaie alors d'expliciter les relations unissant :

a) les propriétés algébriques du groupe H,

b) les propriétés dynamiques de l'action de H sur M,

c) la structure préservée $\mathcal{S}$.

Comme en attestent les textes de survol [Fish11], [DaG90], [Lab98] ou [WMZ88], le sujet se ramifie en de nombreuses branches selon les hypothèses faites sur le groupe H qui agit ($\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, groupe de Lie simple, réseau dans un tel groupe...), les propriétés de l'action (mesure préservée, ergodicité, existence d'une orbite dense etc...), et le choix du type de structure $\mathcal{S}$ considérée (métrique pseudo-riemannienne, connexion affine, structure conforme, projective etc...). Nos contributions portent essentiellement sur une (petite) pièce de ce vaste puzzle : les transformations conformes entre variétés pseudo-riemanniennes (et dans une certaine mesure, une classe plus large de structures que l'on appelle *géométries de Cartan*). On peut les regrouper comme suit :

— Étude des structures lorentziennes conformément plates ([Fr05a], [Fr05c], [Fr03b]).

— Étude des liens entre la dynamique, les propriétés algébriques du groupe conforme, et la géométrie ([Fr05a], [FrZ05], [BFZ10], [Fr07b], [BFM09], [FrM10], [Fr12b]).

— Étude géométrique des champs de Killing conformes au voisinage d'une singularité, et recherche de formes normales ([Fr07a], [Fr12a], [FrM11]).

— Étude des lieux singuliers effaçables et essentiels pour les transformations conformes (riemaniennes) entre variétés de même dimension $n \geq 3$ ([Fr12d]).

— Étude des bords conformes et des structures conformément maximales ([Fr08pre], [Fr12c]).

Nous donnons ci-dessous un petit guide de lecture du mémoire, en essayant de dégager quelques énoncés qui donnent une idée des questions auxquelles nous nous sommes intéressées.

Géométries de Cartan, et dynamique des automorphismes. — Les structures pseudo-riemanniennes conformes sont, en dimension $n \geq 3$, ce que l'on appelle des *structures géométriques rigides*, c'est-à-dire que leurs symétries locales constituent un pseudo-groupe de dimension finie (une transformation conforme est par exemple entièrement déterminée par son jet d'ordre 2 en un point). Dans [Gr86], M. Gromov a introduit une définition très générale de structure rigide, englobant le concept plus ancien de G-structure de type fini. Nous privilégierons ici un point de vue un peu différent, moins général que celui de [Gr86], qui est celui des *géométries de Cartan.* Il a été un outil précieux pour obtenir la quasi-totalité de nos résultats (tous nos travaux depuis [Fr07b] utilisent les géométries de Cartan). Le premier chapitre du mémoire, très introductif, est en partie dévolu à expliquer ce concept.

Une manière simple de parler de géométrie de Cartan, est de dire qu'il s'agit d'une version courbe d'un espace homogène modèle $\mathbf{X} = G/P$, ou encore d'une structure infinitésimalement modelée sur $\mathbf{X}$. Ainsi, les métriques riemanniennes sont des géométries de Cartan modelées sur l'espace euclidien, les connexions affines sont des géométries de Cartan modelées sur l'espace affine, les structures riemanniennes conformes sont des géométries de Cartan modelées sur la sphère conforme standard $\mathbf{S}^n$ (lorsque $n \geq 3$). Pour ce qui est des structures conformes pseudo-riemanniennes de signature arbitraire (p, q) (toujours de dimension $p + q \geq 3$), ce sont des géométries de Cartan modelées sur des espaces homogènes $\mathbf{Ein}^{p,q} = PO(p+1, q+1)/P$ (où P est un certain sous-groupe parabolique) que l'on appelle *univers d'Einstein.* Ces espaces modèles seront des acteurs privilégiés tout au long du texte, et serons présentés au tout début du chapitre 1.

Discutons brièvement l'intérêt de travailler dans le langage des géométries de Cartan pour étudier les problèmes évoqués plus haut. Un point qui nous semble important (par rapport à d'autres notions de structures géométriques comme les G-structures de type fini ou les structures à la Gromov) est la référence explicite à un espace modèle $\mathbf{X} = G/P$, qui s'avère être l'objet le plus symétrique dans la catégorie des structures modelées sur $\mathbf{X}$. Par ailleurs, il existe un tenseur – la courbure de la connexion de Cartan –

dont l'annulation assure que l'on n'est pas seulement infinitésimalement, mais *localement* modelé sur $\mathbf{X}$. Pour les géomètres familiers avec les $(G, \mathbf{X})$-structures, c'est une image assez éclairante : les $(G, \mathbf{X})$-structures, qui sont les structures localement modelées sur $\mathbf{X}$ (au sens où il existe un atlas à valeurs dans $\mathbf{X}$ de sorte que les applications de changements de cartes soient des restrictions d'éléments de G), sont tout simplement les géométries de Cartan plates. Nous verrons sur de nombreux exemples que certains comportements dynamiques du groupe d'automorphismes forcent la courbure à s'annuler, et donc la géométrie à être une $(G, \mathbf{X})$-structure.

Ayant cet espace modèle de référence $\mathbf{X}$, on sera tenté de toujours comparer la situation "courbe" avec le modèle, et c'est la *connexion de Cartan* qui nous en donne les moyens. Pour poursuivre l'analogie avec le cas plat, rappelons qu'un outil fondamental pour étudier une $(G, \mathbf{X})$-structure sur une variété M est l'existence d'une *application développante* $\delta : \tilde{M} \to \mathbf{X}$, et d'un *morphisme d'holonomie* $\rho : \mathrm{Aut}\,(\tilde{M}) \to G$ satisfaisant, pour tout $f \in \mathrm{Aut}\,(\tilde{M})$ la relation d'équivariance :

$$\delta \circ f = \rho(f) \circ \delta. \tag{1}$$

Dans le cas – courbe – d'une géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{X}$, cette image subsiste sous la forme d'une application développante $\mathcal{D}$ allant des *courbes* tracées sur M dans les courbes tracées sur le modèle $\mathbf{X}$, ainsi que pour tout $x \in M$, d'une application d'holonomie $\rho_x : \mathrm{Aut}\,(M) \to P$, qui n'est plus un morphisme de groupes (mais plutôt un *placement* au sens de [Gr86, Section 4]) satisfaisant une relation d'équivariance similaire à (1). Tout ceci sera expliqué en sections 1.2.4 et 1.3.

L'application développante $\mathcal{D}$, l'application d'holonomie ρ, et la relation (1) vont permettre *d'établir un dictionnaire* entre les propriétés dynamiques des automorphismes sur M et celles du groupe G (ou plus exactement P) sur le modèle $\mathbf{X} = G/P$. C'est ce principe général, qu'il est possible d'étudier la dynamique des automorphismes sur une variété quelconque à partir de la dynamique sur l'espace modèle, qui est exposé en section 1.3, et va constituer un fil directeur pour nos travaux. Insistons sur le fait que l'idée de faire appel à la connexion de Cartan, et à l'application développante sur les courbes pour comprendre les symétries d'une géométrie de Cartan n'est pas nouvelle. On la trouve déjà dans les travaux de N. Tanaka [Ta57], puis de T. Nagano et T. Ochiai [NO86] (et peut-être dans des travaux encore antérieurs) pour étudier les transformations projectives. Nous en avons simplement systématisé et raffiné l'usage, notamment dans l'étude des transformations conformes pseudo-riemanniennes.

Phénomènes essentiels en géométrie conforme pseudo-riemannienne. — Les chapitres 2 et 3 du mémoire portent presque exclusivement sur la géométrie pseudo-riemannienne conforme, et mettent particulièrement l'accent sur l'étude des *phénomènes essentiels*, c'est-à-dire les phénomènes de géométrie conforme qui n'arrivent jamais dans le cadre isométrique. Un exemple typique est la non réductibilité du groupe conforme $\mathrm{Conf}(M)$ d'une variété à un groupe d'isométries d'une métrique de la classe conforme. Par exemple, le groupe conforme de la sphère standard $\mathbf{S}^n$, qui est le groupe non compact $PO(1, n+1)$, ne peut préserver aucune métrique dans la classe conforme de $\mathbf{S}^n$, car le groupe d'isométries d'une variété compacte est compact. Un théorème remarquable dû à M. Obata dans le cas compact, et – indépendamment – à J. Ferrand et R. Schoen dans le cas général, classe toutes les structures conformes riemanniennes essentielles.

Théorème 0.1. *[Ob71][Fe96a][Sch95] Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 2$. Si le groupe conforme $Conf(M)$ ne préserve aucune métrique dans la classe conforme $[g]$, alors (M, g) est conformément difféomorphe à la sphère standard $\mathbf{S}^n$ ou à l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$.*

Nous présenterons dans le chapitre 2 une preuve de ce théorème (tirée de [Fr07b]) utilisant la géométrie de Cartan normale associée à une structure conforme riemannienne. La méthode de preuve permet de comprendre d'autres phénomènes essentiels, comme ceux liés à l'existence de singularités non effaçables pour les transformations conformes. Par exemple, on peut citer une version simplifiée du théorème 2.20, prouvé dans [Fr12d] :

Théorème 0.2. *Soient (L, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes de même dimension $n \geq 3$. On suppose que N est compacte. Soit $\Lambda \subset L$ un fermé tel que la mesure de Hausdorff $(n-1)$-dimensionnelle de Λ soit nulle. Soit enfin $f : L \setminus \Lambda \to N$ une immersion conforme qui ne s'étend continûment en aucun point de Λ. Alors :*

1. *Les variétés (L, g) et (N, h) sont conformément plates, et N est kleinienne, i.e conformément difféomorphe à un quotient $\Gamma \backslash \Omega$ où $\Omega \subset \mathbf{S}^n$ est un ouvert de la sphère standard et Γ est un sous-groupe discret infini de $PO(1, n+1)$.*

2. *L'ensemble Λ est localement modelé sur l'ensemble limite $\Lambda(\Gamma)$ du groupe kleinien Γ.*

Là encore, si $f : L \setminus \Lambda \to N$ était une immersion *isométrique* entre $L \setminus \Lambda$ et N (avec N compacte et $\mathcal{H}^{n-1}(\Lambda)$=0), on pourrait étendre f en une immersion

isométrique de L dans N. La situation décrite par le théorème précédent est donc bien essentielle, au sens défini plus haut.

En fait, le point de vue des géométries de Cartan va montrer que les énoncés 0.1 et 0.2, apparemment sans rapport, relèvent des mêmes mécanismes (essentiellement la dynamique "Nord-Sud" sur la sphère standard $\mathbf{S}^n$). Le principe général qui se dégagera du chapitre 2 est qu'en géométrie riemannienne conforme, les phénomènes essentiels ne peuvent arriver que dans des contextes géométriques extrêmement particuliers, généralement sur des variétés conformément plates.

Le but du chapitre 3 est d'illustrer ce principe dans le cadre pseudo-riemannien général. Nous verrons toutefois qu'à partir de la signature lorentzienne, il faut s'attendre à ce que les phénomènes conformes essentiels soient moins exceptionnels que dans le cadre riemannien. On pourra par exemple opposer au théorème 0.1 l'énoncé suivant, prouvé dans [Fr05a].

Théorème 0.3. *Pour tout couple d'entiers (n, g), avec $n \geq 3$ et $g \geq 1$, la variété obtenue en faisant le produit du cercle $\mathbb{S}^1$ par la somme connexe de g copies de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}$ peut être munie d'une infinité de structures conformes lorentziennes non conformément équivalentes, pour lesquelles le groupe conforme ne préserve aucune métrique dans la classe conforme.*

À la lumière de ces données nouvelles, nous tenterons au long du chapitre 3 d'exhiber des situations géométriques où les phénomènes "non-isométriques" sont bien compris. Un bon exemple est celui du comportement des champs de Killing conformes au voisinage d'une singularité. Le fait, pour ces champs, de ne pas être linéarisables est un phénomène qui, s'il est possible, est très rare et parfaitement décrit dans certains cas (rappelons qu'un champ de Killing *isométrique* est toujours linéarisable au voisinage d'une singularité). Ainsi, en signature lorentzienne, et pour des structures analytiques, nous avons prouvé, en collaboration avec K. Melnick (voir [FrM11]) :

Théorème 0.4. *Soit (M, g) une variété lorentzienne analytique de dimension $n \geq 3$. On suppose que X est un champ de Killing conforme sur M, s'annulant en un point x. Alors :*

1. *Ou bien X est analytiquement linéarisable au voisinage de x.*
2. *Ou bien (M, g) est conformément plate.*

Théorème de plongement à la Zimmer. — Le chapitre 4 aborde un type de problème légèrement différent, qui consiste à comprendre quels groupes H peuvent agir sur une variété compacte M, en préservant une structure géométrique $\mathcal{S}$ donnée. Une série de travaux dûs à R. Zimmer ont permis,

il y a une trentaine d'année, des avancées remarquables sur cette question. Par exemple, on peut citer comme cas particulier de [Zim86, Theorem A] :

Théorème 0.5. *[Zim86] Soit H un groupe de Lie simple connexe et non compact, qui agit isométriquement sur une variété pseudo-riemannienne compacte (M, g) de signature (p, q). Alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ se plonge dans $\mathfrak{o}(p, q)$.*

Le théorème de R. Zimmer implique immédiatement que, par exemple, le groupe $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ ne peut pas agir isométriquement pour une métrique lorentzienne sur une variété compacte. En fait, R. Zimmer montre dans [Zim86] que tout groupe de Lie simple non compact qui agit isométriquement sur une variété lorentzienne compacte est localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Les techniques de R. Zimmer, basées sur la théorie ergodique et les actions algébriques seront exposées dans le chapitre 4. Elles sont particulièrement performantes lorsque le groupe qui agit est supposé simple, et qu'il préserve une mesure finie de support total. C'est par exemple le cas dans le théorème 0.5 (rappelons que la donnée d'une métrique pseudo-riemannienne définit naturellement une forme volume sur M). En revanche, la situation où le groupe H n'est pas simple, et surtout ne préserve pas de mesure, était moins bien comprise. C'est typiquement le problème auquel on est confronté quand on considère des actions par transformations conformes. Pour aborder ces questions, le cadre des géométries de Cartan s'est avéré particulièrement adapté. Dans des travaux en collaboration avec U. Bader et K. Melnick, nous avons pu obtenir un théorème "de plongement" analogue à celui que Zimmer a prouvé dans [Zim86] (voir le théorème 4.9, ainsi que [BFM09] et [FrM10]). Ce théorème, un peu technique pour être énoncé dans cette présentation, restreint les groupes de Lie H qui peuvent agir par automorphismes d'une géométrie de Cartan compacte $(M, \mathcal{C})$ modelée sur un espace $\mathbf{X} = G/P$. De plus, le théorème permet d'obtenir des informations parfois très précises sur l'action elle-même. À titre d'exemple dans le cadre conforme, nous montrerons à la fin du chapitre 4 le résultat suivant, tiré de [BFM09] et [FrM10].

Théorème 0.6. *Soit H un groupe de Lie connexe qui agit conformément sur une variété pseudo-riemannienne compacte (M, g) de signature (p, q), où $p + q \geq 3$ est la dimension de M, et $p \leq q$.*

1. *Si H est simple non compact, le rang réel de H est majoré par $p + 1$.*
2. *Si H est nilpotent, alors son degré de nilpotence est majoré par $2p + 1$.*
3. *Si l'égalité a lieu dans l'une des situations précédentes, alors M est conformément difféomorphe à $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{p,q}/\Gamma$, où Γ est un sous-groupe discret de $\tilde{O}(p + 1, q + 1)$.*

Dans le théorème, l'espace $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{p,q}$ est le revêtement universel de l'espace modèle (conformément plat) des structures conformes pseudo-riemanniennes de signature (p,q). Il s'agit de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ muni de la classe conforme de la métrique lorentzienne $-dt^2 \oplus g_{\mathbf{S}^{n-1}}$ lorsque $p = 1$, et de $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ muni de la classe conforme de la métrique $-g_{\mathbf{S}^p} \oplus g_{\mathbf{S}^q}$ lorsque $p \geq 2$. Son groupe de transformations conformes est $\tilde{O}(p+1, q+1)$.

Existence et unicité de bords conformes. — Dans le cinquième et dernier chapitre nous aborderons une thématique différente portant sur l'étude des bords conformes, et la notion de structures conformément maximales. Partant d'une variété (pseudo)-riemannienne non compacte (M, g), on peut essayer de comprendre sa géométrie à l'infini en exhibant un plongement non surjectif $f : (M, g) \to (N, h)$, où (N, h) est une variété pseudo-riemannienne "plus grande", mais de même dimension que M. On souhaite que le plongement ne distorde pas trop la géométrie de (M, g), et à cet égard, demander à ce que f soit conforme est une hypothèse naturelle. Le bord topologique de $f(M)$ dans N, noté $\partial_f M$, s'appelle un *bord conforme* pour (M, g).

Une première question naturelle est celle de l'existence de tels plongements conformes, pour une variété (M, g) donnée. Cela conduit à la notion de variété *conformément maximale*. Il s'agit des (M, g) pour lesquelles tout plongement conforme dans une variété de même dimension est surjectif. La question basique, qui fait l'objet de l'article [Fr12c], est de trouver des critères assurant qu'une variété est conformément maximale. À titre d'exemple, on prouve dans [Fr12c] :

Théorème 0.7. *Les seules variétés riemanniennes homogènes de dimension $n \geq 3$ qui ne sont pas conformément maximales sont, à difféomorphisme conforme près :*

1. *L'espace euclidien $\mathbf{E}^n$.*
2. *L'espace hyperbolique réel $\mathbf{H}^n$.*
3. *Le produit riemannien $\mathbf{H}^k \times \mathbf{S}^{n-k}$, avec $1 \leq k \leq n-1$.*

Les espaces listés dans le théorème 0.7 sont des ouverts homogènes de la sphère standard. Ils héritent ainsi d'un bord conforme, qui est leur bord topologique dans $\mathbf{S}^n$. Par exemple, pour $\mathbf{E}^n$ il s'agit d'un point. Pour $\mathbf{H}^k \times \mathbf{S}^{n-k}$, il s'agit d'une sphère de dimension $k-1$ (en fait, deux points lorsque $k = 1$). Cela conduit à une seconde question naturelle, à laquelle on s'intéressera dans le chapitre 5, et qui est celle de l'indépendance de ce bord vis-à-vis du plongement conforme. Par exemple, voici une question simple et

naïve : *étant donné un plongement conforme non surjectif* $f : \mathbf{E}^n \to (N, h)$*, où* (N, h) *est une variété riemannienne de dimension* n*, le bord topologique de* $f(\mathbf{E}^n)$ *est-il toujours un point?* Nous énoncerons là encore des résultats de [Fr12c], [Fr12d] et [Fr08pre] qui donnent des pistes pour répondre à ce type de problèmes, non seulement en géométrie pseudo-riemannienne conforme, mais aussi dans d'autres contextes (géométrie CR, structures projectives, etc...). Le phénomène intéressant qui ressort de ces résultats est qu'en dimension $n \geq 3$, et dans de nombreux cas, le bord conforme est indépendant du plongement conforme dans une variété (N, h) (disons compacte) qui sert à le définir.

Une nouvelle fois, l'usage des géométries de Cartan va être précieux pour obtenir les théorèmes du chapitre 5. Le point de départ sera une construction initialement due à B. Schmidt dans [S74], qui associe un bord abstrait à toute structure conforme pseudo-riemannienne $(M, [g])$. Ce bord, dit "bord de Cauchy", est également appelé "b-boundary" dans la littérature, et peut en fait être défini pour n'importe quelle géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C})$. Il mesure le degré "d'incomplétude conforme" de la structure. En particulier, les variétés compactes peuvent avoir un bord de Cauchy non trivial! Le bord de Cauchy conforme vient avec une structure d'espace métrique $(\partial_c M, d_M)$, une action isométrique du groupe conforme de M, et une action continue du "groupe structurel" $P \subset O(p+1, q+1)$. Nous expliquerons dans le chapitre 5 comment des considérations assez élémentaires sur la dynamique du groupe P sur $(\partial_c M, d_M)$ peuvent conduire à des résultats de maximalité.

Chapitre 1

Espaces modèles conformes et géométries de Cartan.

1.1 Espaces modèles en géométrie conforme

1.1.1 Projections stéréographiques

L'une des transformations les plus classiques de géométrie élémentaire est la projection stéréographique. Désignons par $\mathbf{S}^n$ la sphère unité dans l'espace euclidien $\mathbf{E}^{n+1}$, et munissons-la de la métrique ronde g_{S^n} induite par la métrique euclidienne. Identifions l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$ avec l'espace tangent au pôle Sud à $\mathbf{S}^n$. Si ν désigne le pôle Nord de $\mathbf{S}^n$, la projection stéréographique $\pi : \mathbf{S}^n \setminus \{\nu\} \to \mathbf{E}^n$ associe à chaque point $x \in \mathbf{S}^n \setminus \{\nu\}$ l'intersection de la droite passant par x et ν avec $\mathbf{E}^n$.

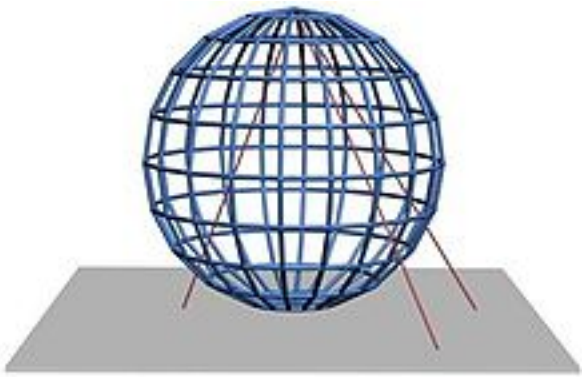

FIGURE 1.1. Projection stéréographique de pôle ν.

La transformation π possède une propriété remarquable : si γ_1 et γ_2 sont deux courbes tracées sur $\mathbf{S}^n \setminus \{\nu\}$, qui s'intersectent en x, l'angle que γ_1 et γ_2 font en x est le même que celui fait par $\pi(\gamma_1)$ et $\pi(\gamma_2)$ en $\pi(x)$. On dit

que π est *une transformation conforme.* Une manière équivalente de formuler les choses est de dire qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbf{S}^n \setminus \{\nu\} \to \mathbb{R}$ telle que $\pi^* g_{eucl} = e^{\varphi} g_{S^n}$: la métrique ronde, après un changement conforme (local) adéquat, devient plate.

Il est remarquable que par ce procédé de compactification, les isométries de l'espace euclidien s'étendent à $\mathbf{S}^n$ et y préservent une nouvelle structure géométrique, à savoir la classe conforme $[g_{S^n}] = \{e^{\varphi} g_{S^n} \mid \varphi \in C^\infty(\mathbf{S}^n, \mathbb{R})\}$. Nous appellerons $\mathbf{S}^n$ munie de cette classe conforme la *sphère standard.*

Univers d'Einstein de signature (p, q). — Quittons à présent le monde riemannien et considérons l'espace de Minkowski $\mathbf{E}^{1,n-1}$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique lorentzienne plate $-(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \ldots + (dx^n)^2$.

Existe-t-il, à l'instar du cadre riemannien, un objet lorentzien compact de dimension n dans lequel l'espace $\mathbf{E}^{1,n-1}$ se plonge conformément?

La réponse est affirmative, et il existe un plongement conforme σ allant de $\mathbf{E}^{1,n-1}$ dans le produit $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$, muni de la classe conforme lorentzienne $[-g_{S^1} \oplus g_{S^{n-1}}]$. Apparaît alors un phénomène intéressant : cette compactification ne se fait plus par l'adjonction d'un seul point, et le bord topologique de l'image $\sigma(\mathbf{E}^{1,n-1})$ est ce que l'on appelle un cône de lumière (nous préciserons cela un peu plus loin).

En fait, le procédé est général, et pour tout $p + q \geq 2$, l'espace de Minkowski de signature (p, q), noté $\mathbf{E}^{p,q}$, se plonge conformément dans le produit $\mathbf{S}^p \times \mathbf{S}^q$ muni de la classe conforme de la métrique produit $[-g_{S^p} \oplus g_{S^q}]$.

Remarque 1.1. *Rappelons, pour le lecteur peu familier avec la géométrie pseudo-riemannienne, qu'une métrique pseudo-riemannienne de signature (p, q) sur une variété M est un champ lisse de formes quadratiques sur les espaces tangents à M, ces formes quadratiques ayant toutes la même signature (p, q). On fera toujours la convention que p désigne le nombre de signes "-" et q le nombre de signes "+", et nous supposerons de plus $p \leq q$ (ce qui est toujours possible quitte à changer la métrique en son opposée) et $p + q \geq 2$. Lorsque $p = 0$, on retrouve la notion classique de métrique riemannienne. Lorsque $p = 1$, la métrique est qualifiée de lorentzienne.*

- *Construction de l'univers d'Einstein $\mathbf{Ein}^{p,q}$.* — Pour mieux comprendre la compactification conforme des espaces de Minkowski, il est plus judicieux d'adopter le modèle projectif suivant. On munit l'espace $\mathbb{R}^{p+q+2}$ de la forme quadratique :

$$Q^{p+1,q+1}(x) = -2x_0 x_{p+q+1} - x_1^2 - \ldots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2,$$

dont on projectivise le cône isotrope épointé $C^{p+1,q+1}$. On obtient alors une quadrique lisse $\Sigma^{p,q} \subset \mathbf{RP}^{p+q+1}$ ainsi qu'une fibration

$$\pi : C^{p+1,q+1} \to \Sigma^{p,q}.$$

On remarque alors que pour toute section $s : \Sigma^{p,q} \to C^{p+1,q+1}$, la métrique $s^*(Q^{p+1,q+1})$ est de signature (p,q) et sa classe conforme est indépendante de la section. La quadrique $\Sigma^{p,q}$ munie de cette structure conforme pseudo-riemannienne s'appelle *l'univers d'Einstein de signature* (p,q), noté $\mathbf{Ein}^{p,q}$.

Lorsque $p = 0$, $\Sigma^{0,q}$ est difféomorphe à une sphère de dimension q, et la structure conforme riemannienne sur $\mathbf{Ein}^{0,q}$ est la structure standard. On notera $\mathbf{S}^q$ à la place de $\mathbf{Ein}^{0,q}$. Lorsque $p \neq 0$, l'espace $\mathbf{Ein}^{p,q}$ est presque conformément difféomorphe au produit $(\mathbf{S}^p \times \mathbf{S}^q, [-g_{S^p} \oplus g_{S^q}])$. C'est en fait ce dernier que l'on a quotienté par le groupe, isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, engendré par le produit des applications antipodales.

- *Formules pour la projection stéréographique.* — Désignons par π la projection de $\mathbb{R}^{p+q+2}$ sur l'espace projectif $\mathbf{RP}^{p+q+1}$. L'application $\sigma : \mathbf{E}^{p,q} \to \mathbf{Ein}^{p,q}$ définie par :

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto \pi(1, z_1, \ldots, z_n, \frac{1}{2}(-z_1^2 - \ldots - z_p^2 + z_{p+1}^2 + \ldots + {z_n}^2)) \quad (1.1)$$

est un plongement conforme de l'espace de Minkowski $\mathbf{E}^{p,q}$ dans l'univers d'Einstein.

Appelons *géodésique de lumière* de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ (ou encore *photon*) la projection sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$ d'un 2-plan de $\mathbb{R}^{p+q+2}$ totalement dégénéré pour la forme $Q^{p+1,q+1}$. Les photons sont topologiquement des cercles dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Si $\nu \in \mathbf{Ein}^{p,q}$ désigne le point $\pi(e_0)$, alors on voit sur l'expression (1.1) que $\sigma(\mathbf{E}^{p,q})$ est dense dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$, et que son complémentaire est exactement la réunion des photons passant par ν. C'est ce qu'on appelle le *cône de lumière issu de* ν, noté $C(\nu)$. Ce cône est lisse lorsqu'on lui enlève le point ν. En voici un dessin dans l'univers d'Einstein lorentzien $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$.

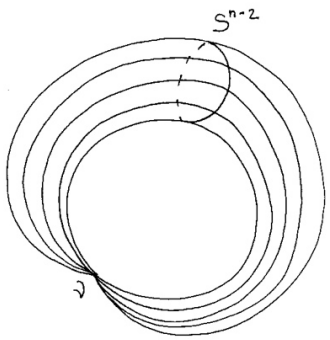

FIGURE 1.2. Cône de lumière issu de ν dans $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$.

1.1.2 Théorème de Liouville

Le modèle projectif décrit ci-dessus nous montre que les univers d'Einstein $\mathbf{Ein}^{p,q}$ sont des objets très symétriques. En effet, si $O(p+1,q+1)$ désigne le groupe des transformations linéaires de $\mathbb{R}^{p+q+2}$ qui préservent la forme quadratique $Q^{p+1,q+1}$, on constate par la définition même de la structure conforme des espaces $\mathbf{Ein}^{p,q}$, que $O(p+1,q+1)$ agit par difféomorphismes conformes sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$, et que cette action est transitive. En fait, pour avoir une action fidèle, on considèrera plutôt le groupe

$$PO(p+1,q+1) = O(p+1,q+1)/\{\pm Id\},$$

le *groupe de Möbius pseudo-riemannien*. Lorsque $p+q \geq 3$, il n'y a pas d'autre transformation conforme, comme le montre le résultat suivant, dû à J. Liouville en signature riemannienne.

Théorème 1.2. *[Liou1850] Soient U et V deux ouverts connexes de $\mathbf{Ein}^{p,q}$, où $p+q \geq 3$. Soit $f : U \to V$ un difféomorphisme conforme lisse. Alors il existe un unique élément g de $PO(p+1,q+1)$, dont la restriction à U coïncide avec f.*

Dans tout le mémoire, nous supposerons les objets considérés (variétés, structures conformes, applications entre ces structures....) de classe C^∞. Les démonstrations classiques du théorème de Liouville, de nature géométrique, requièrent généralement une régularité C^3. Il faut toutefois signaler que dans le cadre riemannien, le théorème reste vrai pour des classes d'applications beaucoup moins régulières (voir par exemple les résultats de [G62], [Re67], et le livre [IK01]).

En dimension ≥ 3, le théorème de Liouville assure que non seulement le groupe des difféomorphismes conformes $\mathrm{Conf}\,(\mathbf{Ein}^{p,q})$ est $PO(p+1,q+1)$, donc de dimension finie, mais que même le pseudo-groupe des difféomorphismes conformes locaux (*i.e* définis entre ouverts de $\mathbf{Ein}^{p,q}$) est de dimension finie. Ceci contraste fortement avec la situation en dimension 2. S'il est vrai que le groupe des transformations conformes globales de la sphère standard $\mathbf{S}^2$ est de dimension finie, et coïncide avec $PO(1,3)$, il y a en revanche abondance de transformations conformes locales, qui ne sont pas du tout des restrictions de transformations de Möbius. En fait, toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ dont la dérivée ne s'annule nulle part sur U fournit une transformation conforme locale entre ouverts de $\mathbf{S}^2$. Dans le cas de $\mathbf{Ein}^{1,1}$, même le groupe des transformations conformes globales est de dimension infinie (et par conséquent $PO(2,2) \subsetneq \mathrm{Conf}\,(\mathbf{Ein}^{1,1})$). En effet $\mathbf{Ein}^{1,1}$ est conformément équivalent au tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, muni de la classe conforme $[dxdy]$,

et par conséquent, dès que f_1 et f_2 sont deux difféomorphismes lisses de $\mathbb{S}^1$, $(x, y) \mapsto (f_1(x), f_2(y))$ est un difféomorphisme conforme de $\mathbf{Ein}^{1,1}$.

Premier contact avec la rigidité. — Le théorème de Liouville est une première manifestation, dans le cadre des univers d'Einstein, d'un phénomène général sur lequel nous reviendrons un peu plus loin. Les structures conformes en dimension ≥ 3 sont *rigides*, ce qui signifie informellement qu'il existe peu de transformations conformes, même locales, tandis que les structures conformes de dimension 2 ne le sont pas. Cette abondance de transformations conformes locales fait qu'il n'y a pas d'invariant conforme local en dimension 2. À signature fixée, toutes les structures conformes sont *localement conformément plates*, c'est-à-dire localement conformément difféomorphes à des ouverts de $\mathbf{S}^2$ (signature riemannienne), ou de $\mathbf{Ein}^{1,1}$ (signature lorentzienne). Ceci n'est plus du tout vrai en dimension ≥ 3. Il existe alors un tenseur (tenseur de Weyl, ou tenseur de Cotton en dimension 3) dont l'annulation caractérise le fait d'être localement modelé sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$.

1.2 Géométries de Cartan

Pour bien comprendre les phénomènes de rigidité pour les structures conformes pseudo-riemanniennes de dimension ≥ 3, il convient de les voir comme des cas particuliers d'une classe relativement générale de structures géométriques, que l'on appelle *géométries de Cartan*. Comme ces géométries vont jouer un rôle central par la suite, nous allons prendre un peu de temps pour les présenter. Des références récentes et accessibles sur le sujet sont par exemple [Sh97] ou [CS09].

Considérons le groupe des déplacements euclidiens $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. L'espace homogène $\mathbf{E}^n = (O(n) \ltimes \mathbb{R}^n)/O(n)$ est muni d'une structure géométrique privilégiée relativement à l'action de $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$: il existe une métrique riemannienne sur cet espace (unique à facteur homothétique près) dont le groupe d'isométries est exactement le groupe $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. De même, l'espace homogène $PO(1, n+1)/P$ (où P est le stabilisateur d'une direction isotrope dans $PO(1, n+1)$) est muni d'une structure conforme riemannienne dont le groupe de symétries est exactement $PO(1, n+1)$ (c'est le contenu du théorème de Liouville lorsque $n \geq 3$).

Donnons-nous à présent G un groupe de Lie quelconque, P un sous-groupe fermé de G, et considérons l'espace homogène $\mathbf{X} = G/P$. **Dans tout le texte, nous supposerons les espaces homogènes $\mathbf{X} = G/P$ connexes, et l'action de G sur G/P fidèle**. On se demande, en toute généralité, s'il existe une donnée géométrique sur $\mathbf{X}$ dont G soit *exactement* le groupe

de symétries. La réponse est affirmative, et pour le voir, on va considérer sur G *la forme de Maurer-Cartan*. Il s'agit d'une 1-forme $\omega^G : TG \to \mathfrak{g}$, définie de la manière suivante. Pour tout vecteur X de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, notons $\hat{X}$ le champ de vecteurs invariant à gauche sur G défini par X. On définit ω^G comme l'unique 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$ satisfaisant $\omega^G(\hat{X}) = X$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. On regarde maintenant le groupe de Lie G comme un P-fibré principal sur le quotient $\mathbf{X} = G/P$. La multiplication à gauche par un élément de G est un automorphisme de ce fibré qui, par construction, préserve la forme de Maurer-Cartan. Réciproquement, tout difféomorphisme $f : G \to G$ qui commute avec l'action à droite de P, et vérifie $f^*\omega^G = \omega^G$, coïncide avec l'action à gauche d'un élément de G. La structure géométrique cherchée est donc le fibré principal $\pi_G : G \to \mathbf{X}$, et la forme ω^G sur ce fibré. Nous appellerons dans la suite le triplet $(\mathbf{X}, G, \omega^G)$ la *géométrie de Cartan plate modèle*. On la désignera souvent par $(\mathbf{X}, \mathcal{C}_{\mathbf{X}})$.

1.2.1 Version courbe des espaces homogènes

Une *géométrie de Cartan* $(M, \mathcal{C})$ *modelée sur un espace homogène* $\mathbf{X} = G/P$ est une version "courbe" de la géométrie plate modèle $(\mathbf{X}, \mathcal{C}_{\mathbf{X}})$. Elle va consister en la donnée d'un triplet $(M, \hat{M}, \omega)$, où :

a) L'espace M est une variété de même dimension que $\mathbf{X}$.

b) Le *fibré de Cartan* $\hat{M}$ est un P-fibré principal au-dessus de M.

c) La forme ω est une 1-forme sur $\hat{M}$ à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, que l'on appelle la *connexion de Cartan*.

On requiert de plus que la connexion de Cartan satisfasse un certain nombre de propriétés similaires à la forme de Maurer-Cartan. Elles sont au nombre de trois :

(i) Pour tout $\hat{x} \in \hat{M}$, $\omega_{\hat{x}} : T_{\hat{x}}\hat{M} \to \mathfrak{g}$ est un isomorphisme.

(ii) Pour tout $X \in \mathfrak{p}$, et tout $\hat{x} \in \hat{M}$, $\omega_{\hat{x}}(\frac{d}{dt}_{|t=0}\hat{x}.e^{tX}) = X$.

(iii) Pour tout $p \in P$, $R_p^*\omega = \mathrm{Ad}\, p^{-1}.\omega$ (où R_p désigne l'action à droite par l'élément p sur $\hat{M}$).

La terminologie originale de E. Cartan est celle d'*espace généralisé* (le modèle $(\mathbf{X}, \mathcal{C}_{\mathbf{X}})$ étant qualifié d'*espace holonome*). On peut en trouver une présentation (sans le formalisme des fibrés qui n'est apparu que plus tard) dans [Car52].

Courbure. — La connexion de Maurer-Cartan satisfait une identité différentielle qui n'est pas dans la liste ci-dessus, à savoir

$$d\omega^G + \frac{1}{2}[\omega^G, \omega^G] = 0.$$

Pour une connexion de Cartan ω quelconque sur le fibré $\hat{M}$, la 2-forme $K = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ ne sera généralement pas nulle. Cette 2-forme K s'appelle *la courbure* de la connexion ω. Un point fondamental est que la forme de courbure K s'annule si et seulement si le triplet $(M, \hat{M}, \omega)$ est *localement* isomorphe à $(G, \mathbf{X}, \omega^G)$. Autrement dit, il existe pour chaque point $x \in M$ un voisinage U, ainsi qu'un ouvert V de $\mathbf{X}$ tels que les fibrés $\pi : \pi^{-1}(U) \to U$ et $\pi_G : \pi_G^{-1}(V) \to V$ soient isomorphes, via un isomorphisme φ satisfaisant $\varphi^*\omega^G = \omega$. Cela revient à dire que M est munie d'un atlas (U_i, φ_i), où les cartes $\varphi_i : U_i \to \mathbf{X}$ sont à valeurs dans l'espace $\mathbf{X}$, et les applications de transition $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sont des restrictions d'éléments de G. C'est ce que l'on appelle une $(G, \mathbf{X})$-structure sur M (voir [Th97]).

Pour résumer :

— L'espace homogène modèle $\mathbf{X} = G/P$ est communément appelé une géométrie de Klein.

— Les structures infinitésimalement modelées sur $\mathbf{X}$ sont les géométries de Cartan.

— Les géométries de Cartan plates sont exactement les $(G, \mathbf{X})$-structures, c'est-à-dire les structures localement modelées sur $\mathbf{X}$.

Cette condition tensorielle $K = 0$, qui permet de caractériser le passage de l'infinitésimal au local justifie la terminologie "version courbe de l'espace $\mathbf{X}$" pour les géométries de Cartan modelées sur $\mathbf{X}$.

1.2.2 Le problème d'équivalence

Formulation du problème. — La définition d'une géométrie de Cartan a l'avantage d'être générale et élégante, mais présente aussi un inconvénient majeur : pour définir la structure géométrique sur une variété M, on fait appel à un fibré (abstrait) $\hat{M}$ au-dessus de M, et à une 1-forme ω sur ce fibré. Or on aimerait travailler avec des données géométriques sur la base M, et non pas sur le fibré. Étant donné un espace homogène $\mathbf{X} = G/P$, que l'on se fixe une fois pour toutes, deux problèmes vont donc se poser naturellement.

a) Pour toute variété M, interpréter la donnée d'une géométrie de Cartan $(M, \hat{M}, \omega)$ modelée sur $\mathbf{X}$ en termes de données géométriques $\mathcal{S}$ sur M.

On entend par donnée géométrique ce que les géomètres différentiels aiment généralement manipuler : des tenseurs, des connexions linéaires, des distributions de sous-espaces etc...

b) Étant donné un couple $(M, \mathcal{S})$, avec $\mathcal{S}$ du type ci-dessus, construire un P-fibré principal $\pi : \hat{M} \to M$ "naturel" à partir de $\mathcal{S}$, et une connexion de Cartan $\omega : T\hat{M} \to \mathfrak{g}$, de sorte que la procédure a) appliquée au triplet $(M, \hat{M}, \omega)$ redonne $(M, \mathcal{S})$. On souhaiterait que ω soit également "canonique", c'est-à-dire qu'on sache trouver des conditions sur ω (en général ces conditions porteront sur la courbure) qui la rendent unique. La connexion ω satisfaisant ces conditions est alors qualifiée de *normale*.

Ceci nous conduit à la :

Définition 1.3 (Problème d'équivalence)**.** *Soit $\mathbf{X} = G/P$ un espace homogène. Lorsque les conditions a) et b) ci-dessus sont satisfaites, on dit que le problème d'équivalence est résolu pour les géométries de Cartan modelées sur $\mathbf{X}$.*

Les géométries de Cartan les plus intéressantes seront celles modelées sur des espaces $\mathbf{X}$ pour lesquels on sait résoudre le problème d'équivalence. Voici quelques exemples.

Métriques riemanniennes. — Détaillons les étapes a) et b) dans le cas le plus familier des géométries de Cartan modelées sur l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$, que l'on voit comme espace homogène G/P avec $G = O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ le groupe des déplacements euclidiens, et $P = O(n)$ le sous-groupe des isométries linéaires. Nous écrivons $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{p}$, où $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Lie abélienne isomorphe à $\mathbb{R}^n$, et $\operatorname{Ad} P$-invariante. On fixe $\langle\, , \rangle$ un produit scalaire $\operatorname{Ad} P$-invariant sur $\mathfrak{n}$.

Commençons par considérer l'étape a). Soit $(M, \hat{M}, \omega)$ une géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{E}^n$, $x \in M$, et $\hat{x} \in \hat{M}$ au-dessus de x. Alors, pour tout $u \in T_xM$, il existe un unique $\hat{u} \in T_{\hat{x}}\hat{M}$ tel que $D_{\hat{x}}\pi(\hat{u}) = u$ et $\omega_{\hat{x}}(\hat{u}) \in \mathfrak{n}$. L'application $i_{\hat{x}} : T_xM \to \mathfrak{n}$, qui à $u \in T_xM$ associe $\omega_{\hat{x}}(\hat{u})$ est un isomorphisme, et les propriétés d'équivariance (i), (ii) et (iii) de la connexion de Cartan conduisent à la relation $i_{\hat{x}.p} = \operatorname{Ad}(p^{-1}).i_{\hat{x}}$ pour tout $p \in P$. Alors par $\operatorname{Ad} P$-invariance de $\langle\, , \rangle$, la quantité $g_x(u, v) = \langle i_{\hat{x}}(u), i_{\hat{x}}(v)\rangle$ est indépendante du choix de $\hat{x}$ dans la fibre de x, et l'on vient donc de définir une métrique riemannienne g sur M.

Passons maintenant à l'étape b), et donnons-nous une variété riemannienne (M, g). On va définir $\hat{M}$ comme le fibré des repères orthonormés sur M. Il s'agit bien d'un P-fibré principal. La connexion de Levi-Civita ∇ associée à g peut se voir comme une distribution transverse aux fibres de $\hat{M}$,

donnée par le noyau d'une 1-forme $\mathrm{Ad}\,P$-équivariante $\omega_1 : T\hat{M} \to \mathfrak{p}$. Soit $\mathcal{R}(M)$ le fibré des repères de M. La restriction à $\hat{M}$ de la forme canonique sur $\mathcal{R}(M)$ fournit une 1-forme $\omega_2 : T\hat{M} \to \mathfrak{n}$. En posant $\omega = \omega_1 + \omega_2$, on obtient une connexion de Cartan à valeurs dans $\mathfrak{g}$, qui redonne la métrique g par la procédure a). La forme ω est *sans torsion* (c'est-à-dire que sa courbure, qui en toute généralité devrait être à valeurs dans $\mathfrak{g}$, prend en fait ses valeurs dans $\mathfrak{p}$), et cette condition la rend unique au sein des connexions de Cartan sur $\hat{M}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ qui donnent la métrique g par la procédure a).

Le problème d'équivalence est résolu, et nous dirons pour abréger que les métriques riemanniennes sont des géométries de Cartan modelées sur l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$. De même, les métriques pseudo-riemanniennes de signature (p, q) sont des géométries de Cartan modelées sur l'espace de Minkowski $\mathbf{E}^{p,q}$, vu comme espace homogène $(O(p, q) \ltimes \mathbb{R}^n)/O(p, q)$.

Structures conformes de dimension $n \geq 3$. — Comme c'est l'exemple fondamental pour notre propos, nous formulons la résolution du problème d'équivalence, qui est dû à Cartan dans le cadre riemannien ([Car23]), sous forme de théorème.

Théorème 1.4. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de signature (p, q), avec $p + q \geq 3$. La structure conforme $[g]$ définit canoniquement une géométrie de Cartan $(M, \hat{M}, \omega)$ modelée sur l'univers d'Einstein $\mathbf{Ein}^{p,q} = O(p + 1, q + 1)/P$.*

Ici le groupe P est le stabilisateur d'un point ν dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Par la projection stéréographique σ et le théorème de Liouville, P s'identifie au groupe conforme de l'espace de Minkowski $\mathbf{E}^{p,q}$. Il est donc isomorphe au produit semi-direct $(\mathbb{R}_+^* \times O(p, q)) \ltimes \mathbb{R}^n$, où le facteur $\mathbb{R}_+^*$ correspond aux transformations homothétiques, $O(p, q)$ aux isométries linéaires, et $\mathbb{R}^n$ aux translations. Le fibré $\hat{M}$ est construit comme un sous-fibré de $\mathcal{R}^2(M)$, le fibré des 2-jets de repères au-dessus de M. Dans la suite du texte nous appellerons $(M, \hat{M}, \omega)$ la *géométrie de Cartan normale* associée à la structure conforme $(M, [g])$. Nous renvoyons à [Ko72, Chapitre IV] ou [Sh97, Chapitre 7] pour la construction de $\hat{M}$ et ω. La courbure de la connexion normale de Cartan peut directement s'interpréter comme un tenseur sur la variété M. On obtient le tenseur de Weyl en dimension ≥ 4 et le tenseur de Cotton en dimension 3.

Quelques géométries de Cartan classiques. — Un certain nombre de structures géométriques classiques définissent une unique géométrie de Cartan normale modelée sur un espace homogène adéquat.

a) *Structures affines.* — La donnée d'une connexion affine ∇ sur une variété M définit naturellement une connexion de Cartan modelée sur l'espace

affine $\mathbf{A}^n = (\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n)/\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Ici le fibré $\hat{M}$ est simplement le fibré des repères.

b) *Structures projectives.* — Une structure projective est une classe de connexions affines qui définissent toutes localement les mêmes géodésiques (non paramétrées). Une structure projective détermine une unique géométrie de Cartan normale modelée sur $\mathbf{RP}^n = \mathrm{PGL}(n+1,\mathbb{R})/P$ (P est isomorphe au groupe affine $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$).

c) *Structures CR non dégénérées.* — Informellement, il s'agit de la structure géométrique qui apparaît sur une hypersurface réelle dans une variété complexe (de dimension complexe ≥ 2), et pour laquelle la forme de Levi est non dégénérée. De manière abstraite, une structure CR (pas forcément intégrable) est la donnée d'une variété M de dimension $2n+1$, munie d'une distribution de contact $\mathcal{D}$ de codimension 1, et d'une structure presque complexe J sur cette distribution, de sorte que si θ est une 1-forme dont le noyau définit $\mathcal{D}$, la forme $d\theta(.\,, J.)$ soit hermitienne non dégénérée. On sait depuis [CM74], [Ta76] (voir également [CS00] pour le cas non intégrable), que ces structures définissent une unique géométrie de Cartan normale modelée sur $\mathbf{X} = PU(p+1,q+1)/P$ (où P est le groupe parabolique qui préserve une direction isotrope pour la forme hermitienne de signature $(p+1,q+1)$). Lorsque $p=0$, $\mathbf{X} = PU(1,n+1)/P$ est le bord de l'espace hyperbolique complexe, et on parle de *structure CR strictement pseudoconvexe.*

d) *Géométries paraboliques.* — Pour la plupart des espaces homogènes $\mathbf{X} = G/P$, où G est un groupe de Lie réel simple non compact, et P est un sous-groupe parabolique, le problème d'équivalence est résolu pour les géométries de Cartan modelées sur $\mathbf{X}$ (les structures conformes pseudo-riemanniennes, CR non dégénérées ou projectives sont des exemples de telles géométries). Ceci résulte des travaux fondateurs de N. Tanaka ([Ta79]), et plus récemment [CS00]. En général, la structure géométrique sur la variété M s'exprime à partir d'une filtration du fibré tangent, munie de structures supplémentaires.

Géométries réductives vs géométries paraboliques. — Comme les espaces homogènes qui leur servent de modèles, les géométries de Cartan se classent par familles. On distingue en particulier les géométries réductives, qui sont modelées sur des $\mathbf{X} = G/P$ pour lesquels $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{p}$, où $\mathfrak{n}$ est un supplémentaire $\mathrm{Ad}\,P$-invariant de l'algèbre $\mathfrak{p}$. Par exemple, les géométries riemanniennes, pseudo-riemanniennes, ou affines sont réductives. Pour de

telles géométries, le fibré $\hat{M}$ s'identifie à un sous-fibré du fibré des repères, et la connexion de Cartan définit une connexion affine "classique" ∇ sur M. Dans ce cadre, on ne gagne essentiellement rien à travailler dans le fibré $\hat{M}$.

Il en va tout autrement pour les géométries paraboliques, pour lesquelles $\mathfrak{p}$ n'admet jamais de supplémentaire $\operatorname{Ad} P$-invariant dans $\mathfrak{g}$. Pour de telles géométries, on ne peut pas faire l'économie de travailler avec la connexion de Cartan sur $\hat{M}$.

1.2.3 Rigidité

On pourrait se demander si les structures symplectiques, ou les structures complexes, peuvent s'interpréter en termes de géométries de Cartan. La réponse est négative, l'obstruction étant que ces structures admettent trop de symétries locales. Les géométries de Cartan sont, au contraire, ce que l'on appelle des structures géométriques *rigides*. Dans [Gr86], M. Gromov a dégagé une définition précise pour de telles structures. Sans reproduire la définition un peu technique de [Gr86], et en la remplaçant par une de ses conséquences, nous dirons qu'une structure géométrique sur une variété M est rigide, lorsque pour tout ouvert $U \subset M$, l'algèbre de Lie des champs de Killing sur U est de dimension finie. Un champ de Killing de la structure est une symétrie infinitésimale, autrement dit un champ de vecteurs dont le flot local est un flot d'automorphismes.

Le paradigme d'une structure rigide est la donnée d'un champ de repères global $\mathcal{R}$ (on dit un *parallélisme*) sur une variété M. Toute isométrie lisse d'une telle structure qui fixe un point x doit fixer également point par point toute courbe issue de x dont le vecteur tangent a des coordonnées constantes dans $\mathcal{R}$. De telles courbes remplissant un voisinage de x, nous voyons qu'une telle isométrie est l'identité (l'ensemble de ses points fixes est ouvert et fermé). Ainsi, tout champ de Killing d'un parallélisme qui s'annule en un point doit être nul et sur tout ouvert, l'algèbre de Lie des champs de Killing a une dimension majorée par celle de M. Cet exemple, qui peut sembler artificiel, est au contraire universel. Pour montrer qu'une structure géométrique est rigide, on prouve généralement qu'elle définit canoniquement un parallélisme sur un fibré adéquat au-dessus de la variété.

Définition 1.5. *(Isométries et champs de Killing d'une géométrie de Cartan) Soit $(M, \mathcal{C})$ une géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{X} = G/P$. Soient $\pi : \hat{M} \to M$ le fibré de Cartan et ω la connexion de Cartan sur $\hat{M}$. Une isométrie locale entre deux ouverts U et V de $(M, \mathcal{C})$ est un difféomorphisme lisse $f : U \to V$, qui se remonte en un isomorphisme de fibrés*

$$\hat{f} : \pi^{-1}(U) \to \pi^{-1}(V)$$

satisfaisant $\hat{f}^*\omega = \omega$.

Un champ de Killing X *sur* $U \subset M$ *est un champ de vecteurs sur* U *qui se remonte en un champ* $\hat{X}$ *de* $\pi^{-1}(U)$*, invariant par l'action à droite de* P*, et satisfaisant* $L_{\hat{X}}\omega = 0$.

Sous l'hypothèse (implicite dans ce mémoire) que l'action de G sur $\mathbf{X} = G/P$ est fidèle, une isométrie locale se remonte de manière unique à $\hat{M}$. Lorsque le problème d'équivalence est résolu, et que $(M, \hat{M}, \omega)$ s'interprète comme une structure géométrique $(M, \mathcal{S})$, la définition précédente coïncide avec celle d'isométrie pour la structure $(M, \mathcal{S})$. En effet, le fibré $\hat{M}$ est alors construit canoniquement à partir de $\mathcal{S}$, si bien que tout difféomorphisme préservant $\mathcal{S}$ va induire un isomorphisme $\hat{f}$ du fibré $\hat{M}$, et par unicité de la connexion normale ω, on aura $\hat{f}^*\omega = \omega$. Le *groupe d'automorphismes* de la géométrie, noté $\mathrm{Aut}\,(M)$, est l'ensemble des difféomorphismes lisses $f : M \to M$ qui sont des isométries de $(M, \hat{M}, \omega)$. Si $(X_1, \ldots, X_m)$ est une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors $\mathrm{Aut}\,(M)$ s'identifie au sous-groupe (fermé) des isomorphismes lisses du parallélisme $\mathcal{R} = \omega^{-1}(X_1, \ldots, X_m)$ qui commutent avec l'action de P. Or le groupe des automorphismes d'un parallélisme est un groupe de Lie (voir par exemple [Ko72, Chapitre 1]). On obtient donc :

Théorème 1.6. *Le groupe* $Aut(M)$ *des automorphismes d'une géométrie de Cartan* $(M, \mathcal{C})$ *modelée sur* $\mathbf{X} = G/P$*, est muni d'une structure de groupe de Lie qui en fait un groupe de transformations de* M*. La dimension de* $Aut(M)$ *est majorée par celle de* G.

Les transformations conformes sont définies par leur 2-jet en un point. — Si $(M, [g])$ est une structure conforme pseudo-riemannienne connexe de dimension ≥ 3, et si $f_1 : M \to M$ et $f_2 : M \to M$ sont deux difféomorphismes conformes ayant même jet d'ordre 2 en un point $x \in M$, alors $f_1 = f_2$. En effet, soit $(M, \hat{M}, \omega)$ la géométrie de Cartan normale, modelée sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$, associée à (M, g). Nous avons mentionné que le fibré $\hat{M}$ était un sous-fibré du fibré des 2-jets de repères. Aussi, f_1 et f_2 se remontent en deux difféomorphismes de fibrés $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$. Comme f_1 et f_2 on même 2-jet en x, la transformation $\hat{f}_1^{-1} \circ \hat{f}_2$ fixe point par point la fibre $\pi^{-1}\{x\}$. Cette transformation laissant invariant un parallélisme, elle doit être triviale.

La même propriété est vraie pour les immersions conformes entre variétés de même dimension $n \geq 3$.

Remarque 1.7. *La définition de structure rigide introduite dans [Gr86] est plus générale que celle de géométries de Cartan. Notons toutefois qu'il n'est pas clair qu'une géométrie de Cartan soit toujours, au sens strict, une structure géométrique à la Gromov (le fibré* $\hat{M}$ *ne s'interprète pas a priori*

comme un sous-fibré de r-jets de repères). Retenons simplement que la plupart des structures classiques (structures affines, projectives, structures CR, métriques pseudo-riemanniennes, structures conformes de dimension ≥ 3) relèvent des deux formalismes.

1.2.4 Géodésiques généralisées

L'existence de la connexion de Levi-Civita associée à une métrique riemannienne, ou pseudo-riemannienne, permet de définir une famille de courbes privilégiées dépendant d'un nombre fini de paramètres – les géodésiques de la connexion – ainsi qu'une application exponentielle.

Sur une géométrie de Cartan $(M, \hat{M}, \omega)$ modelée sur $\mathbf{X} = G/P$, on a également une notion d'application exponentielle sur le fibré $\hat{M}$. Pour tout u dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il existe un unique champ de vecteurs U sur $\hat{M}$ satisfaisant $\omega(U) = u$. Lorsque $\hat{x}$ est donné dans $\hat{M}$, le flot $\{\varphi_U^t\}$ est défini jusqu'au temps 1 en $\hat{x}$ dès que u est assez proche de $0_{\mathfrak{g}}$. On pose alors :

$$\exp(\hat{x}, u) := \varphi_U^1(\hat{x}).$$

Pour chaque $\hat{x} \in \hat{M}$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $0_{\mathfrak{g}}$ dans $\mathfrak{g}$ tel que $u \mapsto \exp(\hat{x}, u)$ soit un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur son image dans $\hat{M}$. Si $\pi : \hat{M} \to M$ désigne l'application de fibré, on obtient une famille privilégiée de courbes sur M, à savoir les courbes de la forme $t \mapsto \pi(\exp(\hat{x}, tu))$, pour $u \in \mathfrak{g}$. Il est souvent souhaitable de se limiter à des u appartenant à une partie $\operatorname{Ad} P$-invariante de $\mathfrak{g}$, strictement incluse dans $\mathfrak{g}$.

Ce point de vue véhicule peu d'intuition géométrique, et nous allons lui préférer la notion de *développement de courbes.* Si l'on veut oublier les aspects techniques, on peut résumer les choses en disant qu'une géométrie de Cartan $(M, \hat{M}, \omega)$ modelée sur $\mathbf{X} = G/P$ fournit, pour tout point $x \in M$, une *application développante* qui à chaque courbe issue de x dans M associe une courbe issue du point base ν dans le modèle $\mathbf{X}$ (le point ν correspond à la classe de P dans $\mathbf{X} = G/P$). Aussi, si l'on a sur le modèle une famille $\mathcal{C}$ de courbes privilégiées, on pourra également définir sur la variété M une classe privilégiée de courbes, comme celles se développant sur des courbes de la famille $\mathcal{C}$.

Application développante. — Pour une variété Y et un point $y \in Y$, on notera $C^1([0,1], Y, y)$ l'espace des courbes de classe C^1 tracées sur Y qui valent y en 0. Fixons-nous $x \in M$ et $\hat{x} \in \hat{M}$ dans la fibre de x. Si $\alpha \in C^1([0,1], M, x)$, on peut la remonter en $\hat{\alpha} \in C^1([0,1], \hat{M}, \hat{x})$ (d'une infinité de manières). La courbe $\lambda(t) = \omega(\hat{\alpha}'(t))$ est tracée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Il est possible de l'intégrer dans le groupe de Lie G, au sens où il

existe une unique courbe $\hat{\beta} \in C^1([0,1], G, 1_G)$ satisfaisant $\omega^G(\hat{\beta}'(t)) = \lambda(t)$ pour tout $t \in [0,1]$. En projetant sur $\mathbf{X}$ via $\pi_G : G \to \mathbf{X}$, on obtient une courbe $\beta \in C^1([0,1], \mathbf{X}, \nu)$. Notons que si $\hat{\alpha}$ est remplacée par un autre remonté issu de $\hat{x}$, de la forme $t \mapsto \hat{\alpha}.p(t)$ où $p \in C^1([0,1], P, 1_P)$, alors $\hat{\beta}$ est remplacée par $t \mapsto \hat{\beta}(t).p(t)$, et la courbe β n'est pas modifiée. On a donc défini une application :

$$\mathcal{D}_{\hat{x}} : C^1([0,1], M, x) \to C^1([0,1], \mathbf{X}, \nu),$$

que l'on appellera *application développante sur les courbes.* Cette application dépend du point $\hat{x}$ choisi dans la fibre de x. Par les propriétés d'équivariance de la connexion de Cartan ω, on a $\mathcal{D}_{\hat{x}.p} = p^{-1}.\mathcal{D}_{\hat{x}}$ pour tout $p \in P$.

Quelques exemples. —

Géodésiques affines, projectives. — Soit (M, ∇) une variété munie d'une connexion affine ∇. Nous avons vu qu'il s'agissait d'une géométrie de Cartan modelée sur l'espace affine $\mathbf{A}^n$. Les courbes naturelles sont les courbes sur M qui se développent sur des droites de $\mathbf{A}^n$, paramétrées affinement. On retrouve les $\gamma : I \to M$ satisfaisant $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$. Lorsque l'on se donne une classe projective $\mathcal{P}$ de telles connexions, on obtient une géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{RP}^n$. On définira alors les géodésiques de notre structure comme les courbes se développant sur les droites projectives de $\mathbf{RP}^n$.

Géodésiques conformes. — Sur la sphère standard $\mathbf{S}^n$, on appelle cercle de Möbius l'image d'une géodésique pour la métrique ronde par une transformation de $PO(1, n+1)$. Étant donnée une variété riemannienne (M, g) de dimension $n \geq 3$, on voit sa structure conforme comme une géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{S}^n$. Les géodésiques conformes de (M, g) seront les courbes se développant sur des (morceaux de) cercles de Möbius (image d'un "grand cercle" par une transformation de Möbius). Nous reviendrons plus en détails sur ces courbes et leur utilisation dans le chapitre 2.

Géodésiques des géométries paraboliques. — Pour toutes les géométries paraboliques, on a une bonne notion de géodésiques généralisées. Ces courbes ont été étudiées dans [CSZ04] (voir également [Her12]).

1.3 Utilisation de la connexion de Cartan dans l'étude des automorphismes

Une bonne partie de ce mémoire sera consacrée à étudier la dynamique des groupes de transformations conformes pseudo-riemanniennes. Nous terminons ce chapitre en donnant quelques idées générales, qui montrent comment utiliser la connexion de Cartan pour comprendre l'action des automorphismes d'une structure géométrique. Ces idées seront notamment centrales dans les chapitres 2 et 3.

Étude d'une transformation conforme au voisinage d'un point fixe. — Considérons une variété riemannienne (M, g), et $f : M \to M$ une isométrie qui fixe un point x. Le fait que f envoie géodésiques paramétrées sur géodésiques paramétrées se traduit, pour tout u dans un voisinage de l'origine dans T_xM, par la relation :

$$f(\exp_x(u)) = \exp_x(D_xf(u)) \tag{1.2}$$

L'isométrie f est localement conjuguée autour de x à sa différentielle, et on retrouve le fait qu'une isométrie riemannienne est complètement déterminée par son 1-jet en un point.

Passons à présent au cas d'une transformation conforme f, fixant le point x. On va supposer aussi que la dimension de M est au moins 3. Cette fois-ci, f est déterminée par son jet d'ordre 2 en x. En particulier, la simple connaissance de D_xf ne suffit pas pour recomposer le comportement local de f. De fait, si l'on considère une translation τ de $\mathbf{E}^n$, que l'on voit comme une transformation conforme de $\mathbf{S}^n$ fixant le point à l'infini ν, la différentielle de τ en ν est l'identité, et donc τ n'est pas linéarisable en ν.

Pour avoir une intuition plus géométrique du jet d'ordre 2 de f au point x, on va considérer la géométrie normale de Cartan $(M, \hat{M}, \omega)$, modelée sur $\mathbf{S}^n = PO(1, n+1)/P$, associée à la structure conforme $(M, [g])$. Rappelons que le groupe P est le stabilisateur d'un point $\nu \in \mathbf{S}^n$ et s'identifie à $(\mathbb{R}_+^* \times O(n)) \ltimes \mathbb{R}^n$. On relève f en une transformation $\hat{f} : \hat{M} \to \hat{M}$ qui préserve ω. Notons que l'action de $\hat{f}$ est libre sur le fibré $\hat{M}$, car elle y préserve un parallélisme. Choisissons $\hat{x} \in \hat{M}$ dans la fibre de x. Il existe un unique élément $p \in P$ tel que $\hat{f}(\hat{x}).p^{-1} = \hat{x}$, que l'on va appeler *l'holonomie de f en x*. L'holonomie $p \in (\mathbb{R}_+^* \times O(n)) \ltimes \mathbb{R}^n$ code le 2-jet de f en x (la différentielle D_xf est donnée par la projection de p sur le facteur $\mathbb{R}_+^* \times O(n)$ dans P), mais a un contenu plus directement exploitable : c'est une transformation de Möbius sur $\mathbf{S}^n$ qui fixe le point base ν, et on aurait envie de comprendre le comportement de f au voisinage de x grâce à celui de p au voisinage de ν.

Nous allons le faire grâce à l'application développante

$$\mathcal{D}_{\hat{x}} : C^1([0,1], M, x) \to C^1([0,1], \mathbf{S}^n, \nu)$$

introduite en section 1.2.4. Les propriétés d'équivariance de ω par rapport à l'action de P, et le fait que $\hat{f}^*\omega = \omega$ conduisent facilement à la relation :

$$\mathcal{D}_{\hat{x}}(f^k(\alpha)) = p^k.\mathcal{D}_{\hat{x}}(\alpha), \tag{1.3}$$

pour toute courbe $\alpha \in C^1([0,1], M, x)$ et tout $k \in \mathbb{Z}$. Cette relation est l'analogue de (1.2) dans notre situation. Elle dit que $\mathcal{D}_{\hat{x}}$ conjugue l'action de la suite (f^k) sur les courbes issues de x à celle de (p^k) sur les courbes issues de ν. Il peut être difficile de comprendre l'action de (f^k) sur toutes les courbes issues de ν, mais on peut se restreindre, par exemple, à l'action sur les géodésiques conformes, et spécialiser (1.3) sur cette classe de courbes particulières. On espère ainsi recomposer l'action de f au voisinage de x grâce à celle de son holonomie au voisinage de ν.

Panorama général. — La discussion précédente se généralise immédiatement à toute géométrie de Cartan $(M, \hat{M}, \omega)$ modelée sur un espace $\mathbf{X} = G/P$. Si $f \in \mathrm{Aut}\,(M)$ fixe un point $x \in M$, alors le choix d'un $\hat{x}$ dans la fibre de x va déterminer une transformation d'holonomie $p \in P$. On va avoir une relation identique à (1.3) qui relie le comportement de f autour x à celui de p sur un voisinage de ν. On "ramène" donc l'étude dynamique sur un espace courbe, à l'étude sur le modèle, qui est un travail de nature algébrique (éventuellement fastidieux). On peut par ailleurs étendre la notion d'holonomie à des situations voisines.

— Par exemple à un champ de Killing X sur M ayant une singularité en x, on pourra associer un champ d'holonomie X_h, qui sera un champ de Killing sur le modèle $\mathbf{X}$ avec singularité en ν. Là encore, on pourra établir un dictionnaire entre les propriétés locales de X et X_h. Cette approche sera développée de manière satisfaisante dans le contexte pseudo-riemannien conforme (voir les sections 2.2.4 et 3.4).

— Plus généralement, si l'on choisit une section $s : M \to \hat{M}$ ayant la propriété d'être bornée sur les compacts de M, on va pouvoir définir pour tout $x \in M$ une application d'holonomie $\rho_x : \mathrm{Aut}\,(M) \to P$. Si $f \in \mathrm{Aut}\,(M)$ se remonte en $\hat{f} : \hat{M} \to \hat{M}$, on définit $\rho_x(f)$ comme l'unique élément de P satisfaisant

$$\hat{f}(s(x)).\rho_x(f)^{-1} = s(f(x)).$$

On a toujours la relation d'équivariance

$$\mathcal{D}_{s(x)}(f(\alpha)) = \rho_x(f).\mathcal{D}_{s(f(x))}(\alpha).$$

Si (f_k) est une suite d'automorphismes de M telle que $f_k(x)$ reste dans un compact de M, on pourra lui associer sa *suite d'holonomie* $p_k = \rho_x(f_k)$ et la relation d'équivariance

$$\mathcal{D}_{s(x)}(f_k(\alpha)) = p_k.\mathcal{D}_{s(f_k(x))}(\alpha) \tag{1.4}$$

va permettre d'étudier la dynamique de (f_k) à partir de celle de (p_k). Ce point de vue nous sera précieux en section 2.2.2.

Chapitre 2

Phénomènes essentiels en géométrie riemannienne conforme.

2.1 Introduction

Le passage de la géométrie riemannienne à la géométrie conforme riemannienne s'accompagne d'un certain nombre de phénomènes nouveaux, que nous appellerons *essentiels*, qui ne peuvent se produire dans le cadre métrique, et tracent la démarcation entre les deux mondes, conformes et isométrique. Ce sont ces phénomènes que nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre.

a) Par exemple, pour une structure conforme riemannienne compacte $(M, [g])$, la non compacité du groupe d'automorphismes est un phénomène essentiel. Il intervient pour la sphère standard $\mathbf{S}^n$, dont le groupe conforme est $PO(1, n+1)$. À l'inverse, il ne se produit jamais dans le contexte métrique, puisque le groupe des isométries d'une variété riemannienne compacte est toujours compact (c'est une conséquence du théorème d'Ascoli, et du fait – prouvé dans [MS39] – que la topologie de groupe de Lie sur $\mathrm{Iso}(M, g)$ est la topologie compacte ouverte). Néanmoins, la non compacité du groupe conforme est exceptionnelle comme le montre le résultat suivant, dû indépendamment à J. Ferrand et M. Obata :

   Théorème 2.1. *[Ob71][Fe71] Une variété riemannienne compacte (M, g) de dimension $n \geq 2$, dont le groupe conforme n'est pas compact, est conformément difféomorphe à la sphère standard $\mathbf{S}^n$.*

b) Un autre exemple est celui d'un champ de Killing conforme X sur une variété (M, g), qui admet une singularité en un point $x \in M$, mais qui

n'est pas linéarisable au voisinage de x. Il s'agit d'une situation essentielle car nous avons expliqué en section 1.3 qu'un champ de Killing (isométrique) pour une métrique riemannienne est toujours linéarisable au voisinage d'une singularité.

c) Considérons un dernier exemple. Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes de même dimension $n \geq 3$, où N est compacte, et $f : M \setminus \{o\} \to N$ est une immersion conforme admettant une singularité en o qui n'est pas effaçable (c'est-à-dire que f ne se prolonge pas continûment en o). Clairement, une telle situation n'intervient jamais si f est une immersion isométrique, et on est donc en présence d'un phénomène essentiel.

Nous verrons dans ce chapitre que, comme le suggère le théorème 2.1, toutes les situations évoquées plus haut n'interviennent que rarement, essentiellement dans un contexte conformément plat, et qu'elles relèvent en fait d'un schéma général, où l'on est en présence d'une suite d'immersions conformes $f_k : M \to N$ entre variétés riemanniennes (de même dimension), pour lesquelles coexistent deux tendances "antagonistes" :

- d'une part, un phénomène de compacité au niveau des variétés, c'est-à-dire que soit N est compacte, soit il existe une suite (x_k) de M qui converge dans M, et telle que les images $z_k = f_k(x_k)$ restent dans un compact de N.
- d'autre part une perte de compacité au niveau des 2-jets : la suite des 2-jets $j^2(f, x_k)$ diverge.

La situation a) décrite par le théorème de Ferrand-Obata consiste à prendre pour (f_k) une suite de difféomorphismes conformes de (M, g) qui tend vers l'infini dans le groupe $\mathrm{Conf}\,(M)$. La suite (x_k) est alors constante égale à un point x.

La situation b) d'un champ de Killing conforme X non linéarisable au voisinage d'une singularité x consiste à prendre la suite (x_k) constante égale à x, et (f_k) égale à (φ_X^k), où $\{\varphi_X^t\}$ est le flot local engendré par X.

Enfin, dans la situation c) d'une singularité essentielle o, c'est la suite (f_k) qui est constante égale à f, (x_k) étant une suite de points de $M \setminus \{o\}$ qui converge vers la singularité o.

Dans tous ces cas, l'usage des géométries de Cartan normales modelées sur $\mathbf{S}^n = PO(1, n+1)/P$ (où $P = (\mathbb{R}_+^* \times O(n)) \ltimes \mathbb{R}^n$), associées aux structures

conformes $(M, [g])$ et $(N, [h])$, permet d'avoir une intuition géométrique de la perte de compacité au niveau des 2-jets. Reprenant les idées exposées en section 1.3, nous coderons la suite $j^2(f, x_k)$ par une suite divergente (p_k) de P, appelée *suite d'holonomie*, de sorte que le comportement local des applications f_k au voisinage de la suite (x_k) va être contrôlé par celui de la suite (p_k) au voisinage de son point fixe $\nu \in \mathbf{S}^n$. La dynamique du groupe de Möbius sur la sphère jouera donc un rôle prépondérant, et unificateur, dans toutes les situations où les 2-jets d'une suite de transformations conformes ne sont pas bornés. C'est cette idée que nous voudrions développer, et qui sera le fil conducteur de tout ce premier chapitre.

2.1.1 Dynamique Nord-Sud

L'action du groupe de Möbius sur la sphère possède la propriété remarquable suivante : toute suite de $PO(1, n+1)$ qui part à l'infini possède, quitte à considérer une suite extraite, un pôle attracteur et un pôle répulseur.

Proposition 2.2 (Dynamique Nord-Sud)**.** *Soit (f_k) une suite de $PO(1, n+1)$ qui tend vers l'infini. Alors quitte à considérer une sous-suite, il existe deux points p^+ et p^- de la sphère tels que :*

a) Pour tout compact K de $\mathbf{S}^n \setminus \{p^-\}$, $\lim_{k\to+\infty} f_k(K) = \{p^+\}$.

b) Pour tout compact K de $\mathbf{S}^n \setminus \{p^+\}$, $\lim_{k\to+\infty} f_k^{-1}(K) = \{p^-\}$.

Remarquons que les pôles p^+ et p^- peuvent être confondus. C'est par exemple le cas lorsque (f_k) est une suite de translations $x \mapsto x + kT$ sur l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$, que l'on voit grâce à la projection stéréographique de pôle ν, comme des transformations conformes de $\mathbf{S}^n$ fixant ν. Pour montrer la proposition 2.2, il suffit de faire une décomposition KAK du groupe $PO(1, n+1)$. À perturbation compacte près, la dynamique d'une suite (f_k) qui tend vers l'infini est celle de la projection (a_k) sur le sous-groupe de Cartan A. Géométriquement, ce sous-groupe est le groupe des homothéties de $\mathbf{E}^n$, que l'on voit comme un groupe de transformations conformes de $\mathbf{S}^n$ fixant deux points. La dynamique de ce sous-groupe est clairement bi-polaire sur la sphère.

2.1.2 Influence de la dynamique sur la géométrie I

La dynamique Nord-Sud sur la sphère $\mathbf{S}^n$ fait apparaître des suites de transformations conformes (f_k), et des ouverts U, tels que la suite d'ouverts $f_k(U)$ s'écrase sur un point. Réciproquement, de tels phénomènes d'écrasement ne

peuvent se produire *que* sur des ouverts dont la géométrie est localement modelée sur $\mathbf{S}^n$. C'est le contenu du lemme suivant.

Lemme 2.3. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 3$, $U \subset M$ un ouvert de M, et $f_k : U \to M$ une suite de plongements conformes de U dans M. S'il existe un point $z \in M$ tel que la suite d'ouverts $f_k(U)$ tend vers z pour la topologie de Hausdorff, alors U est localement conformément plat.*

On montre le lemme en considérant $||W||_g$, la norme relativement à la métrique g du tenseur de Weyl sur (M, g). Si $d\mu(g)$ désigne le volume riemannien défini par g, alors l'intégrale $\int_U ||W||_g^{\frac{n}{2}} d\mu(g)$ n'est pas modifiée lorsque l'on remplace g par une métrique g' dans la classe conforme $[g]$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_U ||W||_g^{\frac{n}{2}} d\mu(g) = \int_{f_k(U)} ||W||_g^{\frac{n}{2}} d\mu(g).$$

Sous les hypothèses du lemme, le terme de droite tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, d'où l'on déduit que l'intégrale de gauche est nulle, et W s'annule sur U. Si la dimension de M est au moins 4, cela assure que U est localement conformément plat. En dimension 3, le tenseur de Weyl et toujours nul, et on adapte la preuve en remplaçant $\|W\|_g^{\frac{n}{2}}$ par une puissance adéquate de la norme du tenseur de Cotton (l'annulation de ce tenseur caractérise la platitude conforme en dimension 3).

Commentaires. — Une première conséquence du lemme 2.3 et de la dynamique Nord-Sud est qu'un sous-groupe H fermé et non compact du groupe de Möbius ne peut préserver qu'une seule structure conforme riemannienne sur la sphère de dimension $n \geq 3$: la structure standard (rappelons que lorsque la dimension est ≥ 3, cette dernière est l'unique structure conformément plate sur la sphère). On obtient ainsi un cas (très) particulier du théorème 2.1. Un autre point important du lemme est que si, par les idées exposées en section 1.3 – et notamment par la relation d'équivariance (1.4) – on arrive à "rapatrier" la dynamique Nord-Sud sur une structure riemannienne conforme, cette dernière sera nécessairement conformément plate (du moins sur certains ouverts).

2.1.3 Dynamique sur les géodésiques conformes

Pour faire fonctionner les idées générales présentées en début de chapitre, il faut comprendre la dynamique du groupe $P = (\mathbb{R}_+^* \times O(n)) \ltimes \mathbb{R}^n$ sur les courbes issues du point base $\nu \in \mathbf{S}^n$. Il est évidemment plus commode de

se restreindre à un espace de dimension finie de courbes. C'est ce que nous faisons ci-dessous.

Géodésiques et cônes conformes. — On va définir, sur la sphère standard $\mathbf{S}^n$, un *segment géodésique conforme* issu de ν comme une demi-droite de l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$, que l'on compactifie par adjonction du point à l'infini ν. C'est une famille de courbes invariante par l'action du groupe P. Plus formellement, désignons par G le groupe de Möbius $PO(1, n+1)$, $\exp_G$ l'application exponentielle de G, $\pi_G : G \to \mathbf{S}^n$ la projection de fibré, où l'on voit $\mathbf{S}^n$ comme l'espace homogène G/P, avec $P = (\mathbb{R}_+^* \times O(n)) \ltimes \mathbb{R}^n$. On décompose l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(1, n+1)$ comme suit :

$$\mathfrak{o}(1, n+1) = \mathfrak{n}^- \oplus \mathbb{R} \oplus \mathfrak{o}(n) \oplus \mathfrak{n}^+,$$

où $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{n}^+$ sont deux sous-algèbres de Lie abéliennes de dimension n, correspondant aux espaces de racines, et $\mathfrak{p} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{o}(n) \oplus \mathfrak{n}^+$. L'application $s : \mathfrak{n}^- \to \mathbf{S}^n$, qui à $u \in \mathfrak{n}^-$ associe $\pi_G(\exp_G(u))$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{n}^-$ sur un voisinage du point ν (en l'occurence $\mathbf{S}^n$ privée d'un point o). Nous allons munir $\mathfrak{n}^-$ d'un produit scalaire euclidien $\mathrm{Ad}\,(O(n))$-invariant, et appeler $S_{\mathfrak{n}^-}$ la sphère unité relativement à ce produit scalaire.

Une *géodésique conforme paramétrée* issue de ν est alors une courbe du type :

$$t \mapsto p.\pi_G(\exp_G(tu)), t \in [0, \lambda],\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ u \in S_{\mathfrak{n}^-},\ p \in P.$$

Nous allons regrouper les géodésiques conformes par paquets, pour former des *cônes conformes*. Si $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de $S_{\mathfrak{n}^-}$, on définit :

$$\mathcal{C}(\mathcal{F}, \lambda) = \{v \in \mathfrak{n}^- \mid v = tw,\ t \in [0, \lambda],\ w \in \mathcal{F}\}.$$

Le *cône conforme* de sommet ν s'appuyant sur $\mathcal{F}$ est par définition :

$$C(\mathcal{F}, \lambda) := \pi_G(\exp_G(\mathcal{C}(\mathcal{F}, \lambda))).$$

Tous ces objets ont également un sens sur une variété riemannienne (M, g) de dimension $n \geq 3$ quelconque. En effet, la structure conforme $[g]$ définit une géométrie de Cartan normale $(M, \hat{M}, \omega)$ modelée sur $\mathbf{S}^n$, et une application développante sur les courbes (voir section 1.2.4). Si $x \in M$, une géodésique conforme issue de x sera une courbe dont le développement est une géodésique conforme issue de ν, et un cône conforme de sommet x sera une réunion de géodésiques conformes, dont les développements constituent un cône conforme sur $\mathbf{S}^n$. On peut donner une définition plus formelle avec l'application exponentielle sur le fibré normal de Cartan $\hat{M}$, que nous avons

définie en section 1.2.4. Si $\hat{x} \in \hat{M}$ est un point dans la fibre de $x \in M$, si $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de la sphère $S_{\mathfrak{n}^-}$, et si $\lambda > 0$ est un réel assez petit, on peut définir le cône conforme $C(\hat{x}, \mathcal{F}, \lambda)$ comme l'ensemble $\pi(\exp(\hat{x}, \mathcal{C}(\mathcal{F}, \lambda)))$, où $\pi : \hat{M} \to M$ est la projection de fibré. Observons que lorsque $\mathcal{F}$ est un ouvert de $S_{\mathfrak{n}^-}$, et $\lambda > 0$ est suffisamment petit, le cône conforme $C(\hat{x}, \mathcal{F}, \lambda)$, auquel on ôte le point x, est un ouvert de M. Si $\mathcal{F} = S_{\mathfrak{n}^-}$, $C(\hat{x}, \mathcal{F}, \lambda)$ est un voisinage de x dans M, et nous parlerons alors de *boule conforme*.

Dynamique sur les cônes. — Sur $\mathbf{S}^n$, la dynamique Nord-Sud se transmet à l'action de P sur les géodésiques conformes issues de ν : si (p_k) est une suite de P qui tend vers l'infini, alors ou bien (p_k) écrase beaucoup de segments géodésiques conformes sur ν, ou bien (p_k) dilate uniformément tout un voisinage de ν.

Lemme 2.4. *[Fr12d, Lemme 3.3] Soit (p_k) une suite de P qui tend vers l'infini. Alors, quitte à remplacer (p_k) par une suite extraite, on est dans l'un des cas suivants.*

a) Il existe $\lambda > 0$, et une boule de rayon non nul $\mathcal{B} \subset S_{\mathfrak{n}^-}$ telle que, lorsque k tend vers $+\infty$:

$$p_k.C(\mathcal{B}, \lambda) \to \nu,$$

pour la topologie de Hausdorff.

b) Il existe $\lambda > 0$, une suite λ_k qui tend vers 0, et un élément $l \in P$ tels que, lorsque k tend vers $+\infty$:

$$p_k.C(S_{\mathfrak{n}^-}, \lambda_k) \to l.C(S_{\mathfrak{n}^-}, \lambda), \text{ et } p_k^{-1}.C(S_{\mathfrak{n}^-}, \lambda) \to \nu.$$

2.2 Théorèmes de type Ferrand-Obata-Schoen

Nous avons employé dans l'introduction de ce chapitre le terme *essentiel* pour désigner tout phénomène de géométrie conforme qui ne peut se produire dans le contexte isométrique. Traditionnellement, l'adjectif essentiel est employé dans une situation plus précise.

Définition 2.5. *Une famille $\mathcal{F}$ de difféomorphismes conformes d'une variété pseudo-riemannienne (M, g) est essentielle lorsqu'elle n'est incluse dans le groupe d'isométries d'aucune métrique de la classe conforme $[g]$. Par extension, on dit qu'une structure conforme $(M, [g])$ est essentielle lorsque son groupe conforme l'est.*

Par exemple, le phénomène de dynamique Nord-Sud montre que $\mathrm{Conf}\,(\mathbf{S}^n)$ ne peut préserver aucune forme volume sur $\mathbf{S}^n$. Comme le groupe d'isométries d'une variété riemannienne préserve toujours une forme volume, on conclut que la sphère standard $\mathbf{S}^n$ est essentielle. Par le même argument, l'existence d'homothéties dans $\mathrm{Conf}\,(\mathbf{E}^n)$ prouve que l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$ est essentiel.

2.2.1 Conjecture de Lichnerowicz

Au milieu des années soixante, A. Lichnerowicz conjectura qu'en toute dimension $n \geq 2$, la sphère standard était la seule structure riemannienne compacte essentielle. Cette question faisait suite à (et suscita) une multitude de travaux accréditant la conjecture, sous des hypothèse généralement assez restrictives : action transitive du groupe conforme, existence d'un flot de gradient conforme, courbure scalaire constante, variétés d'Einstein... (voir par exemple [Na58], [NY59], [Ob62], [Lich64], [Ba66]). Nous recommandons le survol [Fe98], où J. Ferrand présente de manière très claire l'historique de la conjecture, et les idées qu'elle a introduites pour la résoudre.

Une condition nécessaire pour que le groupe $\mathrm{Conf}\,(M)$ soit inessentiel est sa compacité, car comme nous l'avons déjà mentioné, le groupe des isométries d'une variété riemannienne compacte est toujours compact. Réciproquement, si un groupe compact K agit conformément sur une variété riemannienne (M, g), et si $d\mu(k)$ désigne la mesure de Haar sur K, la métrique $g_0 = \int_K k^* g \, d\mu(k)$ appartient à la classe conforme $[g]$ et est K-invariante. Ainsi, une variété riemannienne compacte est essentielle si et seulement si son groupe conforme est non compact. La conjecture de Lichnerowicz pour les variétés compactes est alors complètement résolue par le théorème suivant, déjà énoncé en début de chapitre.

Théorème 2.6. *[Ob71][Fe71] Une variété riemannienne compacte (M, g) de dimension $n \geq 2$, dont le groupe conforme n'est pas compact, est conformément difféomorphe à la sphère standard $\mathbf{S}^n$.*

Remarque 2.7. *En fait, le résultat de [Ob71] n'est pas tout à fait équivalent à la conjecture de Lichnerowicz, puisque M. Obata montre son théorème sous l'hypothèse, plus forte, où la composante neutre de $Conf(M)$ n'est pas compacte.*

Dans la foulée de ces travaux, D. Alekseevskii annonça dans [A72] une preuve complète de la conjecture incluant le cas non compact : *en toute dimension $n \geq 2$, les seules structures riemanniennes essentielles sont la sphère standard et l'espace euclidien.*

Le point de départ de sa preuve était une interprétation de l'essentialité en termes de dynamique sur l'action du groupe conforme : la structure $(M, [g])$

est essentielle si et seulement si l'action de $\mathrm{Conf}(M)$ sur M n'est pas propre (c'est essentiellement une conséquence du théorème de la tranche; voir [A72, Section 1]). Rappelons que l'action d'un groupe topologique G sur une variété M *n'est pas propre* lorsqu'il existe une suite (x_k) de M, qui converge dans M, et une suite (g_k) de G qui quitte tout compact de G, de sorte que la suite $g_k(x_k)$ soit encore convergente dans M. La non propreté de l'action peut être vue comme une forme très affaiblie de récurrence : il existe des suites convergentes qui ne sont pas envoyées à l'infini par des suites divergentes du groupe qui agit. Un groupe compact G agit toujours proprement, et lorsque la variété M est compacte, la propreté de l'action équivaut à la compacité de G. La preuve de [A72] fit longtemps foi, avant qu'une lacune irréparable ne soit relevée au début des années 90. Un point clé de la démonstration utilisait (et prouvait!) l'assertion fausse qu'un flot d'automorphismes d'une G-structure de type fini n'agissant pas proprement doit avoir un point fixe (le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent à une surface hyperbolique compacte préserve une métrique lorentzienne, et fournit clairement un contre-exemple).

Ce n'est finalement que 25 ans après l'article [Fe71], que J. Ferrand put étendre le théorème 2.6 au cadre non compact, une preuve indépendante étant donnée presque simultanément par R. Schoen :

Théorème 2.8. *[Fe96a], [Sch95] Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 2$. Si le groupe des transformations conformes de M n'agit pas proprement sur M, alors M est conformément difféomorphe à la sphère standard $\mathbf{S}^n$ ou à l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$. En particulier, $\mathbf{S}^n$ et $\mathbf{E}^n$ sont les seules structures conformes riemanniennes essentielles de dimension n.*

Différentes stratégies de preuve. — Les techniques utilisées par J. Ferrand pour prouver son théorème sont inspirées de la théorie des applications quasi-conformes. Elles lui permettent de construire des invariants conformes de plusieurs points. Ces invariants sont de nature analytique. Grâce à eux, elle peut reconstituer la dynamique d'une suite de transformations conformes n'agissant pas proprement, et conclure essentiellement par le lemme 2.3. Ces méthodes l'ont d'ailleurs conduite à une généralisation du théorème 2.8 au cadre quasi-conforme (voir [Fe96b, Théorème F]). L'approche développée dans [Sch95] repose, quant à elle, directement sur des techniques d'EDP et d'analyse globale sur les variétés. Dans [Fr07b], nous avons donné une preuve entièrement géométrique du théorème 2.8 (ainsi qu'une généralisation, voir le théorème 2.11 ci-dessous), en utilisant la géométrie de Cartan normale associée à une structure conforme. Ce sont ces idées que nous allons détailler. Nous ferons l'hypothèse $n \geq 3$. Le cas $n = 2$ découle du théorème d'uniformi-

sation pour les surfaces de Riemann, et ne rentre pas dans le cadre de nos méthodes.

2.2.2 Preuve de la conjecture par les géométries de Cartan

On suppose que le groupe conforme de (M, g) n'agit pas proprement, et l'on considère une suite de transformations conformes (f_k) qui quitte tout compact de $\mathrm{Conf}(M)$, pour laquelle il existe une suite convergente $x_k \to x$ telle que $z_k := f_k(x_k)$ converge vers $z \in M$. On note $(M, \hat{M}, \omega)$ la géométrie de Cartan normale modelée sur $\mathbf{S}^n = PO(1, n+1)/P$, associée à la structure conforme $(M, [g])$. On choisit $\hat{x}$ et $\hat{z}$ deux points de $\hat{M}$ dans la fibre de x et z respectivement. Il existe des suites convergentes $(\hat{x}_k)$ et $(\hat{z}_k)$ qui relèvent (x_k) et (z_k), de limites $\hat{x}$ et $\hat{z}$, et telles que $\hat{f}_k(\hat{x}_k).p_k^{-1} = \hat{z}_k$. La suite (p_k) s'appelle *une suite d'holonomie* de (f_k). Comme $\mathrm{Conf}(M)$ agit proprement sur $\hat{M}$, dire que (f_k) quitte tout compact de $\mathrm{Conf}(M)$ équivaut à dire que la suite (p_k) tend vers l'infini dans P. De l'équivariance de la connexion de Cartan ω par l'action à droite de P, et son invariance par $(\hat{f}_k)$, on tire la relation :

$$\mathcal{D}_{\hat{z}_k}(f_k(\alpha)) = p_k.\mathcal{D}_{\hat{x}_k}(\alpha), \tag{2.1}$$

pour toute courbe $\alpha \in C^1([0,1], M, x_k)$. On aimerait, grâce à cette relation, "rapatrier" la dynamique Nord-Sud sur la variété M en utilisant la dynamique sur les géodésiques conformes dans le modèle. Pour cela, on aura besoin de contrôler le comportement d'une suite de géodésiques conformes grâce à celui de leurs développements. On aimerait particulièrement un énoncé du type : *si les développements d'une suite de géodésiques conformes (α_k) convergent vers ν, alors la suite de segments (α_k) converge vers le point x.* Ce résultat est vrai, et découle du lemme suivant :

Lemme 2.9. *[Fr07b, Lemme 7], [Fr12a, Lemme 3.1 et Proposition 3.2] Pour tout ouvert U de M, et tout compact $\hat{K}$ de $\hat{M}$ qui se projette dans U, il existe un voisinage V de ν tel que si $\hat{y} \in \hat{K}$, et si α est un segment géodésique issu de $\pi(\hat{y})$ qui satisfait $\mathcal{D}_{\hat{y}}(\alpha) \subset V$, alors $\alpha \subset U$.*

Considérons maintenant un réel $\lambda > 0$ suffisamment petit pour que les boules conformes $C(\hat{x}_k, S_{\mathfrak{n}^-}, \lambda)$ soient bien définies pour tout $k \in \mathbb{N}$. Quitte à remplacer (x_k) par (z_k) et (f_k) par (f_k^{-1}) (ce qui revient à remplacer (p_k) par (p_k^{-1})), le lemme 2.4 nous dit qu'il existe un ouvert non vide $\mathcal{B} \subset S_{\mathfrak{n}^-}$ tel que $p_k.C(\mathcal{B}, \lambda) \to \nu$. Comme le développement du cône $f_k(C(\hat{x}_k, \mathcal{B}, \lambda))$ par $\mathcal{D}_{\hat{z}_k}$ est précisément $p_k.C(\mathcal{B}, \lambda)$, le lemme 2.9 nous assure que :

$$f_k(C(\hat{x}_k, \mathcal{B}, \lambda)) \to z.$$

Or les cônes $C(\hat{x}_k, \mathcal{B}, \lambda)$ convergent vers le cône d'intérieur non vide $C(\hat{x}, \mathcal{B}, \lambda)$, donc pour k suffisamment grand, ils contiennent un ouvert U commun. On conclut :

$$f_k(U) \to z.$$

Grâce au lemme 2.3, nous aboutissons à la conclusion partielle que M contient un ouvert U conformément plat. Dans [Fr07b], nous expliquons comment raffiner l'étude précédente pour prouver que U est contenu dans un ouvert $\Omega \subset M$, dont le revêtement universel est conformément difféomorphe à l'espace euclidien. Autrement dit, il existe un sous-groupe discret $\Gamma \subset \mathrm{Conf}(\mathbf{E}^n)$ tel que du point de vue conforme, $\Omega = \Gamma \backslash \mathbf{E}^n$. Le théorème de Ferrand et Schoen va alors découler du résultat ci-dessous.

Théorème 2.10. *Soit Γ un groupe discret de transformations conformes de l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$, agissant librement proprement discontinûment sur $\mathbf{E}^n$. On suppose que $n \geq 3$, et que (N, h) est une variété riemannienne de dimension n.*

1. *Si $\Gamma \neq \{id\}$, et si $f : \Gamma \backslash \mathbf{E}^n \to (N, h)$ est un plongement conforme, alors f est surjectif.*

2. *Si $f : \mathbf{E}^n \to (N, h)$ est un plongement conforme qui n'est pas surjectif, alors (N, h) est conformément difféomorphe à la sphère standard $\mathbf{S}^n$, et l'image de f rate exactement un point.*

Le premier point est un résultat de maximalité conforme : certaines structures conformes ne peuvent pas se plonger conformément comme un ouvert strict d'une variété riemannienne. Le second point est un résultat d'unicité de plongement conforme. L'inverse de la projection stéréographique fournit un plongement conforme de l'espace euclidien dans la sphère. Le théorème affirme qu'il n'existe pas d'autre variété riemannienne dans laquelle l'espace euclidien se plonge conformément (et non surjectivement). Cet énoncé est sans doute bien connu des spécialistes des applications quasi-conformes. Il découle du théorème général 5.5, énoncé au chapitre 5. C'est aussi un cas particulier de résultats plus généraux sur les plongements de géométries de Cartan (voir [Fr07b, Théorème 4] et les théorèmes 5.3 et 5.7 du chapitre 5).

Revenons à la preuve du théorème 2.8. Si $\Gamma = \{id\}$, on applique le second point du théorème 2.10, et on conclut directement que M est la sphère standard ou l'espace euclidien. Si $\Gamma \neq \{id\}$, le premier point du théorème assure que M est conformément difféomorphe à $\Gamma \backslash \mathbf{E}^n$. Mais il est assez facile de vérifier qu'alors, le groupe conforme agit proprement.

2.2.3 Extension aux géométries paraboliques de rang un

Dans l'article [Sch95], R. Schoen montre que ses techniques permettent d'obtenir un résultat analogue au théorème 2.8 pour les structures CR strictement pseudoconvexes : *si le groupe des automorphismes d'une structure CR strictement pseudoconvexe sur une variété M de dimension $2n+1$ n'agit pas proprement, c'est que M est CR-difféomorphe à la sphère CR plate, ou au groupe de Heisenberg, muni de sa structure CR plate standard.*

De manière tout à fait parallèle à l'histoire du théorème 2.8, son travail était une extension au cadre non compact de résultats antérieurs, obtenus dans [Web77], [Wo77] (voir également [Ka96] et [Lee96]). Un très bon survol sur ce résultat de R. Schoen est disponible dans [KM09].

L'analogie qui existe entre la géométrie conforme riemannienne en dimension au moins 3, et les structures CR strictement pseudoconvexe a été remarquée depuis longtemps par les géomètres différentiels. Cette parenté apparaît encore plus clairement si l'on adopte le point de vue des géométries de Cartan. En effet, les espaces modèles de la géométrie conforme et de la géométrie CR (strictement pseudoconvexe) se ressemblent, dans la mesure où ce sont les bords de Hadamard des espaces hyperboliques, respectivement réels et complexes. Ces géométries font elles-mêmes partie d'une famille plus large, constituée des *géométries paraboliques de rang un.* Il s'agit des géométries de Cartan modelées sur les bords à l'infini des espaces riemanniens symétriques, de type non compact et de rang un, à savoir les différents espaces hyperboliques $\mathbf{H}^{n+1}_{\mathbb{K}}$, $\mathbb{K}$ pouvant être le corps des réels $\mathbb{R}$, des complexes $\mathbb{C}$, des quaternions $\mathbb{H}$, ou l'algèbre des octonions $\mathbb{O}$. Dans le cas des octonions $\mathbb{O}$, l'entier n est nécessairement 1. Pour toutes ces géométries, le problème d'équivalence est résolu. Les cas $\mathbf{X} = \partial\mathbf{H}^{n+1}_{\mathbb{R}}$ $(n \geq 3)$ et $\mathbf{X} = \partial\mathbf{H}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ $(n \geq 1)$ sont classiques et correspondent respectivement aux structures conformes riemanniennes et aux structures CR strictement pseudoconvexes. Les cas $\mathbf{X} = \partial\mathbf{H}^{n+1}_{\mathbb{H}}$ et $\mathbf{X} = \partial\mathbf{H}^{2}_{\mathbb{O}}$ ont été étudiés par O. Biquard dans [Bi00], et correspondent aux structures de contact quaternioniennes (resp. octonioniennes). Dans le cas quaternionien, la structure consiste en une distribution de contact $\mathcal{D}$ de codimension 3 sur une variété M de dimension $4n+3$. Il existe de plus sur $\mathcal{D}$ trois structures presque complexes J_1, J_2, J_3 satisfaisant les relations de commutation des quaternions, ainsi qu'une métrique hermitienne γ sur $\mathcal{D}$, de sorte que si θ_1, θ_2 et θ_3 sont trois formes de contact satisfaisant $\bigcap_{i=1}^{3} \operatorname{Ker} \theta_i = \mathcal{D}$, $d\theta_i(.\,,\, J_i.) = \gamma$ pour $i = 1, 2, 3$. On a une définition similaire dans le cadre octonionien.

Tous les groupes simples non compacts de rang un ont une dynamique de type Nord-Sud sur le bord de Hadamard de leur espace symétrique. Comme

cette dynamique était l'ingrédient essentiel de la preuve du théorème 2.8, et que le second ingrédient, à savoir le théorème 2.10 est un fait général pour toutes les géométries de Cartan (voir les théorèmes 5.3 et 5.7 du chapitre 5), on obtient un énoncé unifié des théorèmes de Ferrand et Schoen.

Théorème 2.11 ([Fr07b]). *Soit $(M, \hat{M}, \omega)$ une géométrie de Cartan modelée sur le bord $\mathbf{X} = \partial \mathbf{H}^{n+1}_{\mathbb{K}}$ d'un espace hyperbolique de dimension $n+1$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. On suppose que M est connexe et que la connexion ω est régulière. Si $Aut(M, \omega)$ n'agit pas proprement sur M, alors M est isométrique à $\mathbf{X}$ si M est compacte, ou à $\mathbf{X}$ privé d'un point sinon.*

L'hypothèse de régularité porte sur la courbure de la connexion de Cartan ω. Dans le cadre des géométries de Cartan normales associées aux structures conformes riemanniennes, CR strictement pseudoconvexes, de contact quaternioniennes et octonioniennes, elle est automatiquement satisfaite. Enfin, pour faire complètement le lien avec les théorèmes de Ferrand et Schoen, nous rappelons que l'espace euclidien est conformément difféomorphe à la sphère standard privée d'un point, et que la structure CR plate standard sur le groupe de Heisenberg est difféomorphe, via un difféomorphisme CR à la sphère CR plate privée d'un point.

2.2.4 Version infinitésimale

On appelle *champ de Killing conforme* sur une variété pseudo-riemannienne (M, g) un champ de vecteurs X dont le flot local préserve la classe conforme $[g]$. En d'autres termes, les champs de Killing conformes satisfont une équation du type $L_X g = \psi g$, pour une certaine fonction $\psi \in C^\infty(M)$, où L_X désigne la dérivée de Lie. Lorsque la fonction ψ est nulle, on dit que X est un champ de Killing (isométrique) pour g. On va noter $\mathfrak{conf}(M)$ l'algèbre de Lie des champs de Killing sur M. Les champs complets en constituent une sous-algèbre, qui est l'algèbre de Lie du groupe $\mathrm{Conf}\,(M)$.

Essentialité pour les champs de Killing conformes. — Une sous-algèbre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{conf}(M)$ est dite *inessentielle* lorsqu'il existe une métrique dans la classe conforme $[g]$ pour laquelle $\mathfrak{h}$ devient une algèbre de champs de Killing. Comme on travaille avec des champs de vecteurs, on peut également dégager une notion a priori plus faible d'inessentialité : on dit que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{conf}(M)$ est *localement inessentielle* si tout point $x \in M$ admet un voisinage U tel que la restriction $\mathfrak{h}_{|U}$ soit une algèbre de champs de Killing pour une certaine métrique de la classe conforme $[g]_{|U}$. Inversement, $\mathfrak{h}$ est *essentielle au voisinage d'un point* $x \in M$, lorsqu'il n'existe aucun voisinage U de x sur lequel $\mathfrak{h}_{|U}$ est réductible, par un changement conforme de métrique, à

une algèbre de champs de Killing. On aimerait caractériser les points $x \in M$ au voisinage desquels une algèbre $\mathfrak{h}$ de champs de Killing conformes est essentielle.

Par exemple, il est clair que si l'action de $\mathfrak{h}$ est libre en x, c'est-à-dire si aucun champ de $\mathfrak{h}$ ne s'annule en x, alors l'action de $\mathfrak{h}$ est localement inessentielle. La situation opposée, où tous les vecteurs de $\mathfrak{h}$ s'annulent en x, est également bien comprise dans le contexte riemannien grâce au :

Théorème 2.12. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 3$, et x un point de M. Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie de champs de Killing conformes s'annulant tous en x. Alors :*

1. *Ou bien il existe un ouvert U contenant x, et une métrique dans la classe conforme $[g]_{|U}$ pour laquelle $\mathfrak{h}$ est une algèbre de champs de Killing. Dans ce cas, quitte à restreindre U, l'action locale de $\mathfrak{h}$ s'intègre en une action d'un groupe $H \subset Conf(U)$ relativement compact dans $Conf(U)$.*

2. *Si l'on n'est pas dans le cas précédent, autrement dit si $\mathfrak{h}$ est essentielle au voisinage de x, alors il existe un ouvert conformément plat contenant x.*

Énoncé dans cette généralité, ce résultat est prouvé dans [Fr12a, Théorème 7.1]. Dans le cas où $\mathfrak{h}$ est engendrée par un seul champ de Killing X, le théorème peut se déduire assez directement des idées de [A72], rendues rigoureuses dans [Yo76] et [Fe77b] (voir le lemme 2.14 ci-dessous). Avant d'en expliquer la preuve, décrivons-en quelques conséquences.

Formes normales pour les champs de Killing conformes. — Un des intérêts du théorème précédent est qu'il permet d'obtenir une liste exhaustive des formes normales pour un champ de Killing conforme riemannien, au voisinage d'une singularité x.

- Si ce champ est inessentiel au voisinage de x, on considère une métrique g', définie sur un voisinage de x, pour laquelle c'est un champ de Killing. L'application exponentielle de la métrique g' au point x conjugue localement le flot φ_X^t à sa différentielle $D_x\varphi_X^t$. Autrement dit, on a la relation :
$$\varphi_X^t(\exp_x(v)) = \exp_x(D_x\varphi_X^t(v)), \tag{2.2}$$
sur un voisinage de x, et pour un intervalle de temps $]-\epsilon, \epsilon[$. Cette relation nous dit que le champ X est linéarisable au voisinage de x, et comme $D_x\varphi_X^t$ préserve un produit scalaire euclidien, donc est relativement compact, on obtient que X est complet sur un voisinage de x, et conjugué à un champ linéaire $x \mapsto M.x$, avec $M \in \mathfrak{o}(n)$.

- Si le champ est essentiel au voisinage de x, le second point du théorème 2.12 assure que c'est un champ conforme sur un voisinage de ν dans $\mathbf{S}^n$. Par le théorème de Liouville, ce champ est la restriction d'un champ conforme global, qui engendre un groupe à un paramètre non compact $\{p^t\} \subset P$. À conjugaison près, et quitte à multiplier par un flot compact κ^t commutant avec p^t, on est dans l'un des deux cas suivants.

  a) *Flot hyperbolique :* c'est un flot d'homothéties de $\mathbf{E}^n$, $h^t : z \mapsto e^{\lambda t}.z$, vues comme transformations conformes de $\mathbf{S}^n$ par la projection stéréographique. L'allure locale au voisinage d'une singularité est :

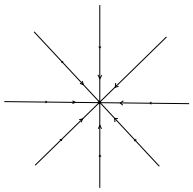

FIGURE 2.1. Dynamique du flot hyperbolique $\{h^t\}_{t\geq 0}$ au voisinage de ν.

  b) *Flot parabolique :* c'est un flot de translations $\tau^t : z \mapsto z + tT$, vues comme transformations conformes de $\mathbf{S}^n$ par la projection stéréographique. L'allure locale au voisinage d'une singularité est :

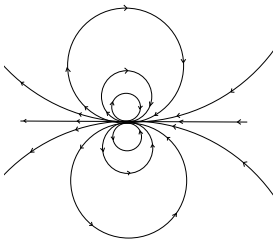

FIGURE 2.2. Dynamique du flot parabolique $\{\tau^t\}_{t\geq 0}$ au voisinage de ν.

Version infinitésimale du théorème de Ferrand-Schoen. — Du théorème 2.12, on déduit relativement facilement le corollaire ci-dessous, qui nous dit que lorsqu'une action locale conforme d'une algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ n'est pas localement inessentielle, alors un ouvert de la variété (M, g) doit être conformément plat.

Corollaire 2.13. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 3$. Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{conf}(M)$ une sous-algèbre de champs de Killing conformes. Alors si $x \in M$ est un point au voisinage duquel $\mathfrak{h}$ est essentielle, il existe un voisinage U de x qui est conformément plat.*

Nous ignorons s'il existe, dans le contexte riemannien, des exemples d'algèbres de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{conf}(M)$ qui sont essentielles, bien que localement inessentielles. C'est en tout cas un phénomène qui est possible en signature lorentzienne, même lorsque M est compacte, dans la mesure où il existe sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ des groupes à un paramètre essentiels de transformations conformes, qui n'ont aucun point fixe.

Idées de preuve, champs d'holonomie. — Lorsqu'un champ de Killing conforme X est inessentiel au voisinage d'une singularité x, on aboutit facilement au cas a) du théorème 2.12 en utilisant la relation (2.2). Dans le cas contraire, l'étape clé consiste à montrer le :

Lemme 2.14. *[A72], [Yo76], [Fe77b] Si le champ de Killing X est essentiel au voisinage de x, il existe un voisinage U de x, et deux ouverts U^+ et U^- contenus dans U, dont la réunion est dense dans U, tels que :*

- *Pour tout $y \in U^+$, $\varphi_X^t.y$ est défini sur $[0, +\infty)$. De plus $\lim_{t\to+\infty} \varphi_X^t.y = x$ uniformément sur les compacts de U^+.*
- *Pour tout $y \in U^-$, $\varphi_X^t.y$ est défini sur $(-\infty, 0]$. De plus $\lim_{t\to-\infty} \varphi_X^t.y = x$ uniformément sur les compacts de U^-.*

Par le lemme 2.3, l'ouvert U donné par le lemme précédent est conformément plat, et on aboutit au cas b) du théorème.

Dans [Yo76], [Fe77b], le lemme 2.14 est obtenu en faisant un développement limité du flot φ_X^t en carte locale. Nous décrivons comment l'obtenir avec les idées introduites en section 1.3. L'intérêt est de dégager une méthode générale pour étudier les champs de Killing de toute géométrie de Cartan, au voisinage d'une singularité. Comme précédemment, $(M, \hat{M}, \omega)$ désigne la géométrie de Cartan normale associé à la structure conforme $(M, [g])$. Choisissons $\hat{x} \in \hat{M}$ dans la fibre au-dessus de x, et remontons X en un champ $\hat{X}$ sur $\hat{M}$ satisfaisant $L_{\hat{X}}\omega = 0$. Au point $\hat{x}$, le champ $\hat{X}$ est tangent à la fibre

de x. Ainsi $\omega_{\hat{x}}(\hat{X}(\hat{x})) \in \mathfrak{p}$ engendre un groupe à un paramètre de P, noté h_X^t. On l'appelle le *flot d'holonomie* de X en x, et ce flot définit un champ de Killing conforme X_h sur $\mathbf{S}^n$, singulier en ν, que l'on appelle *le champ d'holonomie* de X en x. Le champ X_h dépend du choix de $\hat{x}$, mais un choix différent revient à conjuguer X_h dans P.

L'invariance de ω par $\hat{\varphi}_X^t$ et son équivariance par l'action de P conduit à la relation :

$$\mathcal{D}_{\hat{x}}(\varphi_X^t(\alpha)) = h_X^t.\mathcal{D}_{\hat{x}}(\alpha), \tag{2.3}$$

pour toute courbe $\alpha \in C^1([0,1], M, x)$.

On espère recomposer la dynamique de φ_X^t au voisinage de x grâce à celle de h_X^t au voisinage de ν. Plus précisément, la relation (3.6) va nous apporter deux types d'informations :

a) Si pour de "petits" segments géodésiques conforme β issus de ν, $h_X^t.\beta$ reste pour tout $t \geq 0$ dans un petit voisinage de ν, et si α est le segment géodésique conforme issu de x qui se développe sur β, alors le lemme 2.9 assure que $\varphi_X^t.\alpha$ restera dans un petit voisinage de x pour $t \geq 0$. On obtient ainsi pour φ_X^t des orbites "semi-complètes", c'est-à-dire définies sur $[0, +\infty)$ ou $(-\infty, 0]$ (et on peut faire de la dynamique en faisant tendre t vers $\pm\infty$).

b) Si une géodésique conforme α issue de x se développe sur β avec $h_X^t.\beta \to \nu$, le lemme 2.9 impliquera également $\varphi_X^t.\alpha \to x$.

Sous notre hypothèse que X est localement essentiel au voisinage de x, le flot d'holonomie $\{h_X^t\}$ n'est pas relativement compact dans P. À perturbation compacte, et conjugaison dans P près, nous avons déjà vu que l'on est dans un des deux cas $h_X^t = h^t$ (flot hyperbolique) ou $h_X^t = \tau^t$ (flot parabolique). Il suffit de vérifier que le lemme 2.14 est vrai pour h^t et τ^t, avec les ouverts U^+ et U^- saturés par des segments géodésiques conformes issus de x (on peut s'en convaincre au vu des figures 2.1 et 2.2). On montre alors le lemme 2.14 pour φ_X^t en utilisant (3.6) et les deux remarques a) et b) ci-dessus.

2.3 Singularités des transformations conformes

Nous allons achever ce chapitre en abordant un thème où la dynamique Nord-Sud joue encore un rôle important, bien que relativement caché puisqu'apparemment aucun problème de dynamique n'est en jeu. Il s'agit de l'étude des singularités des transformations conformes. Nous allons mettre l'accent sur les singularités dites "essentielles" (que nous définissons ci-dessous), et notre

motivation viendra d'un résultat classique de théorie des fonctions holomorphes :

Théorème 2.15. *[E. Picard] Soit U un ouvert connexe du plan complexe, o un point de U, et $f : U \setminus \{o\} \to \mathbf{C}$ une application holomorphe. Si o est une singularité essentielle pour f, alors toute valeur de $\mathbf{C}$, sauf éventuellement une, est prise une infinité de fois par la fonction f.*

Il y a plusieurs manières de généraliser la notion de fonctions holomorphes en dimension supérieure. Un premier choix naturel est de considérer des applications holomorphes de plusieurs variables, mais alors, le lemme d'Hartog nous dit qu'il n'y a tout simplement pas de singularités ponctuelles essentielles dès que la dimension complexe est > 1. Une autre généralisation possible est de remplacer *holomorphe* par *conforme* dans l'énoncé. Le cas des transformations conformes $f : U \setminus \{o\} \to \mathbf{E}^n$, avec U un ouvert de $\mathbf{E}^n$, $n \geq 3$, est rendu trivial par le théorème de Liouville. Pour retomber sur une situation intéressante, il faut soit élargir la classe d'applications $f : U \setminus \{o\} \to \mathbf{E}^n$ que l'on considère (le bon cadre est celui des applications dites quasi-régulières, et on a des analogues du théorème de Picard dans ce contexte; voir par exemple [R93, Théorème 1.2 p 81]), soit continuer à considérer des transformations conformes, mais quitter le cadre conformément plat pour s'intéresser à des immersions conformes $f : L \setminus \{o\} \to N$, où (L, g) et (N, h) sont deux variétés riemanniennes arbitraires, de même dimension $n \geq 3$. Il n'y a en fait aucune raison de se limiter à des singularités ponctuelles, et nous considèrerons en toute généralité, des immersions conformes $f : L \setminus \Lambda \to N$, où l'ensemble Λ est un fermé de L, lieu d'indétermination pour l'application f. On appellera une telle donnée $f : L \setminus \Lambda \to N$ une *singularité conforme.*

Par analogie avec la théorie des fonctions holomorphes, on partitionne le (bord du) lieu singulier en trois ensembles disjoints.

Définition 2.16 (Points effaçables, points essentiels, pôles)**.** *Soit $f : L \setminus \Lambda \to N$ comme ci-dessus, et x un point de $\partial\Lambda$.*

- *Le point x est dit effaçable si f s'étend continûment en x. On note Λ_{eff} l'ensemble de ces points.*
- *Le point x est un pôle si pour toute suite (x_k) de $L \setminus \Lambda$ qui tend vers x, $f(x_k)$ quitte tout compact de N. On note Λ_{pole} l'ensemble des pôles.*
- *Si le point x n'est ni effaçable, ni un pôle, on dit que c'est un point singulier essentiel. On note Λ_{ess} l'ensemble des points singuliers essentiels.*

Lorsque la variété but N est compacte, il n'y a pas de pôles. Lorsque l'ensemble Λ_{ess} n'est pas vide, on dit que Λ est *un lieu singulier essentiel.*

En toute généralité, on aimerait comprendre la structure des ensembles Λ_{eff}, Λ_{pole} et Λ_{ess}. Nous allons mettre ici l'accent sur la structure des singularités conformes au voisinage du lieu singulier essentiel Λ_{ess}.

2.3.1 Lieux singuliers essentiels : quelques exemples

À quoi ressemble une singularité essentielle ponctuelle, ou plus généralement un lieu singulier essentiel, pour une transformation conforme entre variétés riemanniennes de dimension plus grande que trois? Nous donnons ci-dessous quelques exemples.

Singularités euclidiennes et singularités de Hopf. — On considère un groupe discret *infini* $\Gamma \subset \mathrm{Conf}(\mathbf{E}^n)$, qui agit librement, proprement discontinûment sur $\mathbf{E}^n$. A priori, le groupe Γ est inclus dans le produit semi-direct $(\mathbb{R}_+^* \times O(n)) \ltimes \mathbb{R}^n$, mais on vérifie facilement que pour que l'action soit libre, il faut que Γ soit un sous-groupe de $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. La variété quotient $N = \Gamma \backslash \mathbf{E}^n$ est alors une variété euclidienne. On identifie $\mathbf{E}^n$ à $\mathbf{S}^n \setminus \{\nu\}$ par la projection stéréographique, et on note $\pi : \mathbf{S}^n \setminus \{\nu\} \to N$ l'application de revêtement. Le point ν est une singularité essentielle pour π. En effet, pour toute suite (γ_k) qui tend vers l'infini dans Γ, et pour tout voisinage U de ν, il découle de la dynamique Nord-Sud que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k(U) = \mathbf{S}^n$, ce qui entraîne $\pi(U \setminus \{\nu\}) = N$, et donc ν n'est ni un pôle, ni une singularité effaçable. On appellera une telle singularité conforme $\pi : \mathbf{S}^n \setminus \{\nu\} \to N$ *singularité euclidienne sur* $\mathbf{S}^n$.

Une autre construction consiste à considérer un sous-groupe discret *infini* Γ dans le groupe conforme de $\mathbf{E}^n \setminus \{0\}$, tel que Γ agisse librement proprement et discontinûment sur $\mathbf{E}^n \setminus \{0\}$. À indice fini près, un tel groupe est engendré par une contraction conforme : $x \mapsto \lambda A.x$, avec $1 > \lambda > 0$ et $A \in O(n)$. La variété N obtenue en quotientant $\mathbf{E}^n \setminus \{0\}$ par Γ est ce que l'on appellera une *variété de Hopf généralisée.* L'application de revêtement $\pi : \mathbf{E}^n \setminus \{0\} \to N$ est une immersion conforme, pour laquelle 0 est une singularité essentielle. Une telle singularité sera qualifiée de *singularité de Hopf.* On peut aussi voir l'application π comme une immersion conforme $\pi : \mathbf{S}^n \setminus \{o; \nu\} \to N$, et on obtient alors deux singularités ponctuelles essentielles sur la sphère.

Singularités kleiniennes. Il est possible de généraliser les exemples précédents pour construire des lieux singuliers essentiels plus compliqués. Soit Γ un sous-groupe discret du groupe de Möbius $PO(1, n+1)$, tel qu'il existe un ouvert non vide $\Omega \subset \mathbf{S}^n$, invariant par Γ, sur lequel l'action de Γ est

libre, propre, et discontinue. Un tel groupe s'appelle *un groupe kleinien*, et la variété conformément plate quotient $N = \Gamma\backslash\Omega$ est une variété kleinienne. Nous supposons une fois de plus Γ *infini*. L'*ensemble limite* du groupe Γ, noté $\Lambda(\Gamma)$, peut se définir comme l'adhérence de la réunion des pôles p^+, p^- associés à la dynamique Nord-Sud de toutes les suites (γ_k) partant à l'infini dans Γ. Il s'agit d'un fermé non vide, Γ-invariant, et la propriété de dynamique Nord-Sud montre que l'action de Γ sur Ω ne peut être propre que si l'ensemble $\Lambda(\Gamma)$ est inclus dans $\Lambda = \mathbf{S}^n \setminus \Omega$.

L'application de revêtement $\pi : \mathbf{S}^n \setminus \Lambda \to N$ est une immersion conforme, pour laquelle Λ est un lieu singulier. L'ensemble effaçable Λ_{eff} est vide, et les points de $\partial\Lambda$ qui sont essentiels sont exactement ceux de $\Lambda(\Gamma)$. Nous appellerons *singularités kleiniennes* les revêtements conformes $\pi : \mathbf{S}^n\backslash\Lambda \to N$ comme ci-dessus.

2.3.2 Généralisations du théorème de Picard

Dans le cadre des immersions *quasi-conformes* entre variétés riemanniennes de dimension $n \geq 3$, V. Zorich a obtenu la généralisation du théorème de Picard suivante.

Théorème 2.17. *[Zo00], [Zo09] Soient (L, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes de même dimension $n \geq 3$. Soit $f : L\setminus\{o\} \to N$ une immersion quasi-conforme. Si la singularité o est essentielle, alors pour tout voisinage U de o dans L, f envoie $U \setminus \{o\}$ surjectivement sur N. De plus la variété N est, à quotient fini près, difféomorphe au produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$ ou $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$.*

Le fait nouveau par rapport à la dimension 2 est que si N est la sphère standard $\mathbf{S}^n$, le point o ne peut pas être une singularité essentielle. Par ailleurs, il n'y a plus de valeur exceptionnelle : tout voisinage de la singularité essentielle est envoyé surjectivement sur la variété but, sur laquelle le théorème fournit des informations topologiques.

Pour des singularités essentielles ponctuelles d'immersions conformes, nous avons renforcé les conclusions du théorème 2.17 comme suit :

Théorème 2.18. *[Fr12d, Corollaire 1.5] Soient (L, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes de même dimension $n \geq 3$. Soit $f : L \setminus \{o\} \to N$ une immersion conforme. Si la singularité o est essentielle, alors :*

1. *La singularité $f : L\setminus\{o\} \to N$ est localement conformément conjuguée au voisinage de o à une singularité euclidienne, ou une singularité de Hopf.*

2. *En particulier (N, h) est conformément difféomorphe à une variété euclidienne ou une variété de Hopf généralisée, et pour tout voisinage U de o dans L, $f(U \setminus \{o\}) = N$.*

Notons que ce résultat n'utilise pas la preuve du théorème de V. Zorich. Les hypothèse sont plus fortes (conforme au lieu de quasi-conforme), mais les conclusions sont également beaucoup plus précises. On comprend non seulement la topologie de la variété but N, mais aussi la géométrie de (N, h), ainsi que la "structure" de la singularité. Remarquons que puisque $f(L\setminus\{o\}) = N$, et que par le point 2), (N, h) est conformément plate, la variété de départ (L, g) est également conformément plate. C'est relativement surprenant, dans la mesure où la première impression est qu'on peut modifier la géométrie de L loin de la singularité. Lorsque L est supposée compacte, on a une version globale du théorème, et on peut montrer en particulier que (L, g) est conformément difféomorphe à la sphère standard ou à l'espace projectif réel (voir [Fr12d, Théorème 7.1]).

2.3.3 Lieux singuliers essentiels fins et singularités kleiniennes

Le théorème 2.18 est lui-même un cas particulier de résultats généraux concernant les singularités conformes $f : L \setminus \Lambda \to N$ pour lesquelles le lieu singulier Λ n'est "pas trop gros". Si les variétés L et N sont de dimension n, on va supposer que $\mathcal{H}^{n-1}(\Lambda) = 0$, où $\mathcal{H}^{n-1}$ désigne la mesure de Hausdorff $(n-1)$-dimensionnelle (nous renvoyons à [Mat95] pour une définition. Le cas où Λ est une sous-variété de codimension au moins 2 est déjà intéressant). Les lieux singuliers Λ satisfaisant $\mathcal{H}^{n-1}(\Lambda) = 0$ seront dits *lieux singuliers fins*. Pour ces derniers, on comprend presque tout : la structure de l'ensemble Λ_{eff} et la géométrie de la singularité lorsque l'ensemble est essentiel, *i.e* $\Lambda_{ess} \neq \emptyset$. Commençons par énoncer un résultat d'extension, qui décrit en particulier la structure de Λ_{eff}.

Théorème 2.19. *Soient (L, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes de dimension $n \geq 3$. Soit $\Lambda \subset L$ un sous-ensemble fermé tel que $\mathcal{H}^{n-1}(\Lambda) = 0$, et $f : L \setminus \Lambda \to N$ une immersion conforme. Alors l'ensemble Λ_{eff} est ouvert dans Λ et l'application f s'étend en une immersion conforme*

$$f' : L \setminus (\Lambda_{pole} \cup \Lambda_{ess}) \to N.$$

Le théorème nous apprend que si f s'étend continûment en un point de Λ, elle s'étend continûment sur un ouvert autour de ce point, et on a en plus un résultat de régularité : l'extension est lisse (et conforme). Insistons sur le fait

que contrairement au cas d'une singularité ponctuelle, ce théorème ne peut pas se ramener à une étude locale, et être déduit de résultats déjà existants sur les applications quasi-conformes dans $\mathbf{E}^n$ (par exemple le théorème principal de [V69]). En effet, si x est un point de Λ_{rem}, et U est un petit voisinage de x dans L, on n'a aucun contrôle sur la taille de $f(U \setminus \Lambda)$ (le point x pourrait par exemple être approché par des points singuliers essentiels), et on ne peut pas se ramener à un problème dans $\mathbf{E}^n$ en travaillant dans des cartes.

On peut maintenant passer à l'étude des lieux singuliers essentiels fins. Par le résultat précédent, on ne perd aucune généralité à supposer qu'il n'y a pas de points effaçables, autrement dit $\Lambda = \Lambda_{pole} \cup \Lambda_{ess}$. On parle dans ce cas *d'ensemble singulier essentiel minimal.* Le théorème suivant nous dit que localement, toutes les singularités conformes pour lesquelles le lieu singulier est fin et essentiel (minimal) sont localement des singularités kleiniennes. En particulier des lieux singuliers essentiels fins ne peuvent apparaître que sur des variétés L conformément plates. De plus, le lieu essentiel est modelé sur l'ensemble limite d'un groupe kleinien.

Théorème 2.20. *[Fr12d, Théorème 1.4] Soient (L, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes de dimension $n \geq 3$. Soit $\Lambda \subset L$ un sous-ensemble fermé non vide tel que $\mathcal{H}^{n-1}(\Lambda) = 0$. Soit $f : L \setminus \Lambda \to N$ une immersion conforme pour laquelle Λ est un lieu singulier essentiel minimal. Alors :*

1. *Il existe un groupe kleinien infini $\Gamma \subset PO(1, n+1)$, un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbf{S}^n$ sur lequel Γ agit librement proprement discontinûment, ainsi qu'un difféomorphisme conforme $\psi : N \to \Gamma\backslash\Omega$.*

2. *Pour chaque $x \in \Lambda$, il existe un ouvert $U \subset L$ contenant x, et un difféomorphisme conforme $\varphi : U \to V$, où V est un ouvert de $\mathbf{S}^n$, qui fait commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} U \setminus \Lambda & \xrightarrow{\varphi} & V \setminus \partial\Omega \\ \downarrow f & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{\psi} & \Gamma\backslash\Omega \end{array}$$

En particulier, $\varphi(U \cap \Lambda) = V \cap \partial\Omega$ et $\varphi(U \cap \Lambda_{ess}) = V \cap \Lambda(\Gamma)$.

Là encore, on peut prouver un énoncé global lorsque la variété L est supposée compacte, et montrer qu'alors L est elle-même kleinienne (voir [Fr12d, Théorème 1.6])

Quelques conséquences. — Soit $f : L \setminus \Lambda \to N$ une immersion conforme, où $\mathcal{H}^{n-1}(\Lambda) = 0$. On peut énoncer quelques conséquences des résultats précédents.

a) *Structure des ensembles Λ_{eff}, Λ_{pole} et Λ_{ess}.* — L'ensemble Λ_{eff} est toujours un ouvert de Λ. L'ensemble Λ_{ess} est toujours fermé. S'il est non vide, il est soit discret, soit parfait. Enfin, lorsque l'ensemble des pôles est non vide, son adhérence dans Λ est la réunion $\Lambda_{pole} \cup \Lambda_{ess}$.

b) *Lieux singuliers discrets.* — Si le lieu singulier Λ est discret, et contient au moins un point singulier essentiel, alors aucun des points de Λ n'est un pôle, et (N, h) est conformément difféomorphe à une variété euclidienne, ou à une variété de Hopf généralisée.

c) *Surjectivité au voisinage des points essentiels.* — Si Λ est essentiel minimal, alors pour tout point $x \in \Lambda_{ess}$, et pour tout ouvert U contenant x, $f(U \setminus \Lambda) = N$.

d) *Pas de points essentiels pour les plongements conformes.* — Enfin, une dernière remarque importante est que les applications $\pi : \Omega \to \Gamma\backslash\Omega$ décrivant localement les singularités essentielles minimales ne sont jamais injectives. On déduit que si l'application f est un plongement, alors Λ ne contient pas de points singuliers essentiels. Par le théorème 2.19, f peut s'étendre en un plongement conforme de $L \setminus \Lambda_{pole}$ dans N. Si N est compacte, il n'y a pas de pôles et f s'étend en un plongement conforme de M dans N. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 5.

2.3.4 Ébauches de preuves

La preuve du théorème 2.20 est assez longue, mais on peut en tracer les grandes lignes, en montrant notamment comment intervient la dynamique Nord-Sud et les méthodes exposées en début de chapitre. Nous gardons les notations, et nous plaçons sous les hypothèses du théorème 2.20. On notera $(L, \hat{L}, \omega^L)$ et $(N, \hat{N}, \omega^N)$ les fibrés et connexions normales de Cartan associées aux structures conformes $(L, [g])$ et $(N, [h])$ respectivement. Si $f : L\backslash\Lambda \to N$ est notre immersion conforme, et si $\hat{\Lambda}$ désigne la préimage de Λ dans $\hat{L}$, alors f se relève en une application de fibrés $\hat{f} : \hat{L} \setminus \hat{\Lambda} \to \hat{N}$, satisfaisant $\hat{f}^*\omega^N = \omega^L$.

Identification des points essentiels et effaçables en termes de suites d'holonomie. — Considérons un point $x \in \Lambda_{ess} \cup \Lambda_{eff}$. Dire que x n'est pas un pôle signifie qu'il existe une suite convergente $x_k \to x$ telle que $z_k := f(x_k)$ converge vers $z \in M$. On peut alors considérer des suites convergentes $(\hat{x}_k)$ et $(\hat{z}_k)$ qui relèvent (x_k) et (z_k), de limites $\hat{x} \in \hat{L}$ et $\hat{z} \in \hat{M}$, et une *suite d'holonomie* (p_k) dans le groupe $P = (\mathbb{R}_+^* \times O(n)) \ltimes \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\hat{f}(\hat{x}_k).p_k^{-1} = \hat{z}_k.$$

- Si la suite (p_k) est bornée dans P, alors on montre que x est effaçable. En fait, dans ce cas, quitte à travailler dans les fibrés $\hat{L}$ et $\hat{N}$, tout se passe comme si f était un plongement isométrique entre variétés riemanniennes. On aboutit alors sans trop de difficulté au théorème d'extension 2.19.

- Si la suite (p_k), n'est pas bornée, quitte à extraire, elle satisfait les conclusion du lemme 2.4. L'hypothèse $\mathcal{H}^{n-1}(\Lambda) = 0$ va être utilisée pour dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe beaucoup de segments géodésiques conformes α issus de x_k et qui ne rencontrent pas le lieu singulier Λ. De manière plus quantitative, et en reprenant les notations de la section 2.1.3, il va exister un G_δ dense $\mathcal{U} \subset S_{\mathfrak{n}^-}$ (indépendant de k) et un $\lambda > 0$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, le cône conforme $C(\hat{x}_k, \mathcal{U}, \lambda)$ est inclus dans $L \setminus \Lambda$. On peut alors écrire pour tout $k \in \mathbb{N}$ la relation :

$$\mathcal{D}_{\hat{z}_k}(f(C(\hat{x}_k, \mathcal{U}, \lambda)) = p_k.C(\mathcal{U}, \lambda). \tag{2.4}$$

  Si l'on est dans le premier cas du lemme 2.4, alors la relation (2.4) couplée au lemme 2.9, permet de montrer qu'il existe un voisinage U de x dans L, et un G_δ dense $U_\delta \subset U \setminus \Lambda$ tel que $f(U_\delta) = \{z\}$. Ceci contredit le fait que f est une immersion.

  C'est donc que l'on est dans le second cas du lemme 2.4. On montre alors qu'il y a un phénomène de dilatation des cônes conformes le long de la suite (x_k). Si $\mathcal{U}$ est comme ci-dessus, il existe une suite de réels (λ_k) qui tend vers 0, et $\lambda > 0$ tels que :

$$f(C(\hat{x}_k, \mathcal{U}, \lambda_k)) \to C(\hat{z}, \mathcal{U}, \lambda) \tag{2.5}$$

  pour la topologie de Hausdorff. Comme $C(\hat{x}_k, \mathcal{U}, \lambda_k))$ converge vers $\{x\}$ et que $C(\hat{z}, \mathcal{U}, \lambda)$ est dense dans un voisinage de z, l'application f ne peut s'étendre continûment en x, et $x \in \Lambda_{ess}$. On a donc montré que x est essentiel si et seulement si la suite d'holonomie (p_k) n'est pas bornée.

L'existence de singularités essentielles implique que (N, h) est conformément plate. — Le phénomène de dilatation des cônes conformes décrit par (2.5) a d'autres conséquences intéressantes. Définissons *l'ensemble d'accumulation de x*, noté $\mathrm{A}(x) \subset N$, comme l'ensemble des valeurs d'adhérences des suites $(f(x_k))$, pour (x_k) décrivant les suites de $L \setminus \Lambda$ qui convergent vers x. La relation (2.5) assure que si $z \in A(x)$, alors $C(\hat{z}, \mathcal{U}, \lambda) \subset A(x)$, et donc $C(\hat{z}, S_{\mathfrak{n}^-}, \lambda) \subset A(x)$ car $A(x)$ est fermé. Mais on

obtient alors immédiatement que $A(x)$ est ouvert et donc $A(x) = N$. Par ailleurs, on peut montrer que le phénomène de dilatation des cônes conformes va impliquer l'annulation du tenseur de Weyl en chaque point de $A(x)$. On obtient ainsi que (N, h) est *conformément plate*.

La variété but N est kleinienne. — La dernière étape importante de la preuve consiste à prouver que N est une variété kleinienne. La variété conformément plate N possède un revêtement d'holonomie $\mathcal{N}$, qui est le plus petit revêtement de N admettant une immersion conforme dans la sphère standard $\mathbf{S}^n$. Montrer que N est kleinienne revient à montrer que $\mathcal{N}$ est conformément difféomorphe à un ouvert de $\mathbf{S}^n$. Pour cela, on commence par remarquer que si U est un petit voisinage d'un point singulier $x \in \Lambda$, alors l'immersion $f : U \backslash \Lambda \to N$ se relève en un *plongement* conforme $f : U \backslash \Lambda \to \mathcal{N}$ (l'injectivité découle du théorème de Liouville). On peut alors coller l'ouvert U à $\mathcal{N}$ via l'application f. Le revêtement $\mathcal{N} \to N$ est galoisien, et il existe un groupe discret Γ agissant conformément sur $\mathcal{N}$ de sorte que $N = \Gamma \backslash \mathcal{N}$. On peut rendre le processus de collage "Γ-équivariant", et construire ainsi une variété riemannienne $\mathcal{N}'$ de même dimension que $\mathcal{N}$, dotée d'une action conforme de Γ, et dans laquelle $\mathcal{N}$ se plonge de manière conforme et Γ-équivariante comme un ouvert. Le point clé consiste alors à montrer que si x était un point singulier essentiel, alors le groupe Γ est nécessairement infini et son action, qui était propre sur $\mathcal{N}$, ne l'est plus sur la variété $\mathcal{N}'$. On peut conclure par le théorème de Ferrand que $\mathcal{N}'$ est conformément difféomorphe à $\mathbf{S}^n$ ou $\mathbf{E}^n$, et $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}'$ est bien un ouvert de la sphère standard.

Chapitre 3

Cadre pseudo-riemannien : généralisations et aspects nouveaux.

3.1 De nouveaux motifs dynamiques

Nous abordons dans ce chapitre l'étude de la dynamique conforme en signature pseudo-riemannienne quelconque. La situation est plus compliquée qu'en signature riemannienne, dans la mesure où même le cadre *isométrique* devient déjà très riche. À titre d'exemple, on peut considérer G un groupe de Lie simple réel non compact, et $\Gamma \subset G$ un réseau cocompact. La forme de Killing de G induit sur le quotient G/Γ une métrique pseudo-riemannienne, invariante par l'action à gauche du groupe G. Par exemple, en considérant l'action à gauche des groupes à un paramètre $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})/\Gamma$, on voit que sur le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique, le flot géodésique et le flot horocyclique préservent une métrique lorentzienne. Ce ne sont pas ces situations isométriques (relativement bien comprises par ailleurs suite aux travaux de [AS97], [Gr86], [Ze96], [Ze99a], [Ze99b], [Zim86]...) qui vont nous intéresser ici, mais au contraire les phénomènes de dynamique conforme qui sont essentiels (au sens du chapitre précédent, c'est-à-dire ceux qui ne peuvent se produire dans le cadre isométrique).

Notre première tâche va être de comprendre la situation sur les espaces conformes modèles, en essayant de décrire le comportement sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$ d'une suite (g_k) de $PO(p+1,q+1)$ qui tend vers l'infini. Dès que $p \geq 1$, on ne va plus avoir de dynamique du type Nord-Sud (cette dynamique est typique du rang un), et le nombre de motifs dynamiques possibles va en fait augmenter avec l'entier p. Nous avons fait une étude détaillée du cadre lorentzien,

c'est-à-dire de l'action de $PO(2,n)$ sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$, dont on peut trouver une description dans [Fr05c, Section 3]. On va se contenter ici de dégager l'image générale suivante, valable en toute signature. Considérons une suite (g_k) qui tend vers l'inifini dans $O(p+1,q+1)$. On peut renormaliser (g_k) en $(\frac{g_k}{|||g_k|||})$ pour obtenir (quitte à extraire) une suite qui converge vers un élément non nul g de End $(\mathbb{R}^{p+q+2})$. Comme (g_k) tend vers l'infini, l'élément g n'est pas inversible. Soit F^+ (resp. F^-) le projectivisé de l'intersection de Im g (resp. Ker g) avec le cône isotrope de $Q^{p+1,q+1}$ (les notations sont celles de la section 1.1.1). Sur l'ouvert $U \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ obtenu en ôtant F^- à $\mathbf{Ein}^{p,q}$, la suite (g_k) converge uniformément sur les compacts vers $\overline{g} : U \to F^+$, l'application continue induite par g sur U. En particulier, la suite (g_k) "écrase" les ouverts relativement compacts de U sur des fermés de F^+ (remarquons que ces fermés sont d'intérieur vide). Les suites divergentes de $PO(p+1,q+1)$ ont donc un comportement très éloigné de celui des isométries pseudo-riemanniennes, et vérifient la forme renforcée d'essentialité suivante :

Définition 3.1 (Essentialité forte)**.** *Une famille de difféomorphismes conformes d'une variété pseudo-riemannienne (M,g) est dite fortement essentielle si elle ne préserve aucune mesure finie de support total sur M.*

Une métrique pseudo-riemannienne définissant naturellement une forme volume, invariante par son groupe d'isométries, il est clair qu'une famille de difféomorphismes conformes qui est fortement essentielle est essentielle au sens de la définition 2.5.

Deux exemples en signature lorentzienne. — Nous donnons ci-dessous deux exemples qui montrent ce que peut être le comportement d'une suite de transformations conformes de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$. Rappelons que l'univers d'Einstein lorentzien est défini comme le projectivisé du cône isotrope d'une forme quadratique de signature $(2,n)$ sur $\mathbb{R}^{n+2}$. Pour simplifier les formules matricielles, nous travaillerons avec la forme :

$$Q^{2,n}(x) = -2x_1x_{n+2} + 2x_2x_{n+1} + x_3^2 + \ldots + x_n^2.$$

Le groupe $O(2,n)$ sera ici le groupe des transformations linéaires de $\mathbb{R}^{n+2}$ qui préservent $Q^{2,n}$.

a) Pour $t \in \mathbb{R}$, nous considérons l'élément de $O(2,n)$ donné par la matrice :

$$\psi^t = \begin{pmatrix} e^t & & \\ & I_n & \\ & & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Nous appelons p^+ et p^- les points de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ obtenus en projectivisant les directions $\mathbb{R}.e_1$ et $\mathbb{R}.e_{n+2}$. L'hyperplan $e_1^\perp$ est dégénéré (l'orthogonal est pris relativement à $Q^{2,n}$). Quand on l'intersecte avec le cône isotrope épointé de $Q^{2,n}$ et que l'on projectivise, l'ensemble de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ que l'on obtient est *le cône de lumière de sommet* p^+, noté $C(p^+)$. Il s'agit de toutes les géodésiques de lumières (on dit aussi *photons*) de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ qui passent par p^+. On note de même $C(p^-)$ le cône de lumière de sommet p^-. La dynamique de $\{\psi^t\}$ est décrite par le lemme suivant :

Lemme 3.2. • *Pour tout compact K inclus dans $\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus C(p^-)$,*

$$\lim_{t\to+\infty} \psi^t(K) = p^+.$$

• *Pour tout compact K inclus dans $\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus C(p^+)$,*

$$\lim_{t\to-\infty} \psi^t(K) = p^-.$$

FIGURE 3.1. *Dynamique de $\{\psi^t\}_{t\geq 0}$ et de $\{\psi^t\}_{t\leq 0}$.*

b) Voici un autre comportement possible. Considérons dans $O(2,n)$ les matrices :

$$\gamma^t = \begin{pmatrix} e^t & & & & \\ & e^{-t} & & & \\ & & I_{n-2} & & \\ & & & e^t & \\ & & & & e^{-t} \end{pmatrix}$$

On appelle Δ^+ et Δ^- les projectivisés des plans totalement isotropes $\mathrm{Vect}(e_1, e_{n+1})$ et $\mathrm{Vect}(e_2, e_{n+2})$. Il s'agit de deux photons disjoints de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ qui constituent des ensemble attracteur et répulseur pour le flot $\{\gamma^t\}$.

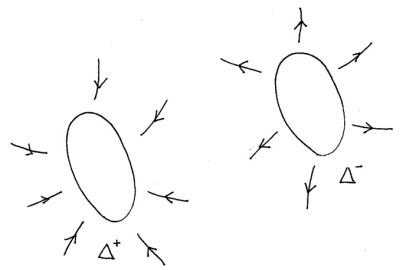

FIGURE 3.2. *Dynamique de* $\{\gamma^t\}_{t\geq 0}$.

Lemme 3.3. *Il existe deux submersions* $\pi_+ : \mathbf{Ein}^{1,n-1}\setminus\Delta^- \to \Delta^+$, *et* $\pi_- : \mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus \Delta^- \to \Delta^-$, *qui valent l'identité sur* Δ^+ *et* Δ^- *respectivement, et telles que :*

- *Pour tout compact* K *inclus dans* $\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus \Delta^-$, $\lim_{t\to+\infty} \gamma^t(K) = \pi^+(K)$.
- *Pour tout compact* K *inclus dans* $\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus \Delta^+$, $\lim_{t\to-\infty} \gamma^t(K) = \pi^-(K)$.

Les fibres de la submersion π^+ (resp. π^-) sont les cônes de lumière issus des points de Δ^- (resp. Δ^+), auxquels on a ôté Δ^- (resp. Δ^+).

3.2 Conjecture de Lichnerowicz pseudo-riemannienne

Le comportement dynamique d'une suite (f_k) de difféomorphismes conformes sur une variété riemannienne compacte (M, g) est parfaitement compris grâce au théorème 2.8 : ou bien la suite (f_k) est relativement compacte dans $\mathrm{Conf}\,(M)$, ou bien (M, g) est conformément difféomorphe à la sphère standard, et quitte à considérer éventuellement une suite extraite, (f_k) obéit à la dynamique Nord-Sud. Il est donc clair qu'un analogue du théorème 2.8, décrivant les structures pseudo-riemanniennes essentielles, constituerait une étape décisive dans la compréhension de la dynamique conforme en toute signature.

Commençons par dire que sans aucune hypothèse de compacité, les structures essentielles pseudo-riemanniennes abondent. Les exemples construits dans [A86] [KR97] laissent penser qu'on ne peut pas espérer raisonnablement une classification. À titre d'exemple, le flot linéaire

$$e^t \begin{pmatrix} e^t & & \\ & I_{n-2} & \\ & & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

laisse invariant une infinité de structures conformes lorentziennes distinctes sur $\mathbb{R}^n$, dont la plupart ne sont même pas conformément plates. Ce flot est clairement essentiel puisque sa différentielle au point fixe 0 n'est pas unimodulaire.

À notre connaissance, on avait à l'inverse très peu d'exemples de structures essentielles *compactes* pseudo-riemanniennes avant l'article [Fr05a]. En toute signature (p, q), l'univers d'Einstein $\mathbf{Ein}^{p,q}$ fournit un exemple. Nous avons en effet expliqué en début de chapitre que les suites divergentes du groupe conforme $PO(p+1, q+1)$ étaient fortement essentielles (voir définition 3.1), et donc essentielles. En signature lorentzienne, $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ n'est pas simplement connexe, et ses revêtements finis fournissent d'autres exemples. Voici un moyen simple d'en construire encore d'autres. Soit λ un réel non nul différent de ± 1. On fait le quotient de $\mathbf{E}^{p,q} \setminus \{0\}$ par le groupe discret engendré par l'homothétie $x \mapsto \lambda x$. On obtient ainsi une variété de Hopf M, difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$, et naturellement munie d'une structure conforme de signature (p, q). L'action linéaire du groupe $O(p, q)$ sur $\mathbf{E}^{p,q}$ passe au quotient en une action conforme sur M, qui s'avère être essentielle pour $p \geq 1$ (constater que le stabilisateur de certains points contient des transformations dont la différentielle n'est pas unimodulaire). Cette liste ne fournit que peu d'exemples de structures compactes essentielles, et toutes sont conformément plates. Cela motive la question suivante, qualifiée de *conjecture de Lichnerowicz pseudo-riemannienne dans [DaG90].*

Question 3.4. *(voir [DaG90, Question 7.6]) Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Si $Conf(M)$ est essentiel, (M, g) est-elle conformément plate?*

En cas de réponse positive, les structures essentielles deviennent des $(PO(p+1, q+1), \mathbf{Ein}^{p,q})$-structures, et on peut espérer faire fonctionner les outils standard d'étude des (G, X)-structures (application développante, morphisme d'holonomie etc...) pour arriver à une classification globale. D'où une version "optimiste" de la question 3.4.

Question 3.5. *En signature (p, q), avec $1 \leq p \leq q$ et $p + q \geq 3$, existe-t-il à difféomorphisme conforme près un nombre fini de structures compactes (M, g) pour lesquelles le groupe conforme est essentiel? Sinon, peut-on quand même classifier toutes ces structures?*

Dans l'article [Fr05a], nous avons abordé la question 3.5 dans le cadre de la signature lorentzienne, c'est-à-dire $p = 1$, et $q \geq 2$. Contrairement à ce que l'on pouvait attendre, nous avons montré qu'il existe beaucoup de variétés lorentziennes compactes essentielles. Plus précisément :

Théorème 3.6. *[Fr05a, Théorème 2] Pour tout couple d'entiers (n, g), avec $n \geq 3$ et $g \geq 1$, la variété obtenue en faisant le produit du cercle $\mathbb{S}^1$ par la somme connexe de g copies de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}$ peut être munie d'une infinité de structures conformes lorentziennes (fortement) essentielles non conformément équivalentes.*

Ce résultat contraste avec le théorème 2.8, puisque la condition d'essentialité ne fixe pas la topologie de la variété, et qu'à topologie fixée, une infinité de structures essentielles non équivalentes coexistent. La preuve du théorème montre même qu'il existe des espaces de modules non discrets de telles structures. Toutefois, toutes les structures essentielles construites pour prouver le théorème 3.6 sont conformément plates, et la question 3.4 reste un problème ouvert en signature lorentzienne.

En revanche, nous avons très récemment montré que la réponse à la question 3.4 était négative en toute signature (p, q) avec $p \geq 2$. C'est l'objet du théorème ci-dessous (non encore publié) :

Théorème 3.7. *Pour tout entier $p \geq 2$, et tout entier $q \geq p$, il existe sur le produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{p+q-1}$ une structure conforme pseudo-riemannienne de signature (p, q), analytique, dont le groupe conforme est (fortement) essentiel.*

Nous allons expliquer les preuves de ces deux théorèmes dans les sections 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3 ci-dessous.

3.2.1 Groupes de Schottky lorentziens

Les structures essentielles du théorème 3.6 vont être obtenues comme des variétés kleiniennes lorentziennes, c'est-à-dire comme des quotients d'un ouvert Ω de l'espace $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ par un groupe discret $\Gamma \subset PO(2, n)$. Contrairement au cadre riemannien, la théorie des groupes kleiniens lorentziens, *i.e* des sous-groupes discrets de $PO(2, n)$ qui agissent proprement discontinûment sur un ouvert non vide de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ est encore peu développée. Dans [Fr05c], nous avons ébauché une étude générale, qui reste à poursuivre. Nous décrivons ici le cas intéressant que constituent les groupes de Schottky.

Pour $\lambda > 0$, considérons comme dans l'exemple *b*) de la section 3.1 l'élément suivant de $PO(2, n)$:

$$\gamma^\lambda = \begin{pmatrix} e^\lambda & & & & \\ & e^{-\lambda} & & & \\ & & I_{n-2} & & \\ & & & e^\lambda & \\ & & & & e^{-\lambda} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

La dynamique des itérés $(\gamma^{k\lambda})_{k\in\mathbb{N}}$ est décrite par le lemme 3.3. Les photons Δ^+ et Δ^- obtenus en projectivisant les plans $\mathrm{Vect}(e_1, e_{n+1})$ et $\mathrm{Vect}(e_2, e_{n+2})$ se comportent comme des photons attracteurs et répulseurs. Le lemme 3.3 montre que le groupe Γ engendré par l'élément γ^λ agit proprement discontinûment sur l'ouvert $\Omega(\Gamma) = \mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus \{\Delta^+ \cup \Delta^-\}$. Le quotient $\Gamma\backslash\Omega(\Gamma)$ est un exemple très élémentaire de variété kleinienne lorentzienne. Nous allons le sophistiquer un peu en augmentant le nombre de générateurs pour Γ.

Pour cela, commençons par observer que si $\lambda > 0$ est choisi suffisamment grand, il existe deux voisinages U^+ et U^- de Δ^+ et Δ^- respectivement, dont les adhérences $\overline{U^+}$ et $\overline{U^-}$ sont disjointes et tels que :

— $\gamma^\lambda(\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus \overline{U^-}) = U^+$.

— $\gamma^{-\lambda}(\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus \overline{U^+}) = U^-$.

Le groupe $PO(2,n)$ agit transitivement sur les couples de photons disjoints de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$. Aussi, si nous nous fixons un entier $g \geq 2$, et une collection Δ_i^+, Δ_i^-, $i \in \{1, \ldots, g\}$, de photons deux à deux disjoints, nous allons pouvoir trouver des voisinages tubulaires $U_i^\pm$ des $\Delta_i^\pm$, d'adhérences mutuellement disjointes, et des éléments $\gamma_i \in PO(2,n)$ (conjugués, dans $PO(2,n)$, à γ^{λ_i} pour des $\lambda_i > 0$ adéquats), satisfaisant les propriétés suivantes :

— $\gamma_i(\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus \overline{U_i^-}) = U_i^+$ pour tout $i \in \{1, \ldots, g\}$.

— $\gamma_i^{-1}(\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus \overline{U_i^+}) = U_i^-$ pour tout $i \in \{1, \ldots, g\}$.

Le groupe $\Gamma = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_g \rangle$ vérifie ce que l'on appelle le "*lemme du ping-pong*". Il s'ensuit que Γ est un groupe libre et discret de $PO(2,n)$, que l'on appellera *groupe de Schottky lorentzien*.

Ensemble limite et topologie du quotient. — Un des désagréments de l'étude des groupes kleiniens lorentziens est qu'il n'existe pas une aussi bonne notion d'ensemble limite que pour les groupes kleiniens classiques de $PO(1,n+1)$ (voir la discussion à ce propos dans [Fr05c]). Ceci est dû au fait que la dynamique de $PO(2,n)$ sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ n'est pas "de convergence". Toutefois, pour les groupes de Schottky, tout se passe presque comme dans le cas classique.

Théorème 3.8. *[Fr05c, Théorème 3] Soit $\Gamma = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_g \rangle$ un groupe de Schottky lorentzien à $g \geq 1$ générateurs.*

1. *Il existe un unique ouvert non vide $\Omega(\Gamma)$ de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ sur lequel l'action de Γ est libre, propre et discontinue, et qui soit maximal pour cette propriété.*

2. *Le fermé $\Lambda(\Gamma) = \mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus \Omega(\Gamma)$, appelé ensemble limite de Γ, est une lamination par photons de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$, transversalement modelée sur un ensemble de Cantor.*

3. *L'action du groupe* Γ *sur les photons de* $\Lambda(\Gamma)$ *est minimale.*

4. *La variété quotient* $M = \Gamma\backslash\Omega(\Gamma)$ *est compacte, difféomorphe au produit du cercle* $\mathbb{S}^1$ *par la somme connexe de* g *copies de* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}$.

3.2.2 Construction de structures conformes lorentziennes essentielles

Généralement, un groupe de Schottky lorentzien Γ est son propre normalisateur dans $PO(2,n)$, et le groupe conforme de la variété kleinienne $\Gamma\backslash\Omega(\Gamma)$ est trivial. Si l'on veut espérer construire des structures essentielles grâce à des groupes de Schottky, il faut trouver des configurations spéciales pour les photons $\Delta_i^{\pm}$ donnant lieu à des groupes conformes plus riches pour le quotient $\Gamma\backslash\Omega(\Gamma)$.

On considère la représentations $\rho : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to PO(2,n)$ définie, pour tout $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, par :

$$\rho(A) = \begin{pmatrix} A & & \\ & I_{n-2} & \\ & & A \end{pmatrix}.$$

Le groupe $G = \rho(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))$ préserve un tore lorentzien $\mathbf{T} \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$, conformément équivalent à un sous-univers d'Einstein $\mathbf{Ein}^{1,1}$ obtenu en projectivisant le cône isotrope du sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_{n+1}, e_{n+2})$. L'ensemble des photons de $\mathbf{T}$ est la réunion de deux composantes connexes, chacune difféomorphe à $\mathbf{RP}^1$ (c'est une assertion sur les plans totalement isotropes de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_{n+1}, e_{n+2})$). Ceci permet de paramétrer $\mathbf{T}$ comme un produit $\mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1$, le point (u,v) correspondant à l'intersection des photons u et v. Chaque ensemble de la forme $\{u\} \times \mathbf{RP}^1$ ou $\mathbf{RP}^1 \times \{v\}$ est alors un photon de $\mathbf{T}$. On vérifie que l'action de $\rho(A)$ sur $\mathbf{T}$ se fait uniquement sur le premier facteur :

$$\rho(A).(u,v) = (A.u, v).$$

Soient maintenant $\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_g$ des éléments hyperboliques de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, dont les points fixes $u_i^{\pm}$ sur $\mathbf{RP}^1$ sont deux à deux distincts. Pour $i = 1, \ldots, g$, on appelle γ_i l'élément $\rho(\hat{\gamma}_i)$. Chaque γ_i est conjugué dans $PO(2,n)$ à un élément γ^{λ_i} (donné par l'expression (3.1)), et les photons attracteurs et répulseurs de γ_i sont inclus dans $\mathbf{T}$, et correspondent à $\{u_i^+\} \times \mathbf{RP}^1$ et $\{u_i^-\} \times \mathbf{RP}^1$. Si les valeurs propres des éléments $\hat{\gamma}_i$ sont assez éloignées de ± 1, le groupe $\Gamma = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_g \rangle$ est un groupe de Schottky lorentzien, et nous notons $M = \Gamma\backslash\Omega(\Gamma)$ la variété kleinienne associée. Par le théorème 3.8, M est compacte, difféomorphe au produit de $\mathbb{S}^1$ par la somme connexe de g copies de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}$.

Pour voir que la structure conformément plate que M hérite de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ est essentielle, nous considérons le groupe à un paramètre :

$$\varphi^t = \begin{pmatrix} e^t & & & & \\ & e^t & & & \\ & & I_{n-2} & & \\ & & & e^{-t} & \\ & & & & e^{-t} \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ce groupe centralise Γ, et induit donc un flot conforme $\{\overline{\varphi}^t\}$ sur la variété kleinienne $M = \Gamma\backslash\Omega(\Gamma)$. On vérifie que $\{\varphi^t\}$ est conjugué à $\{\gamma^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ dans $PO(2,n)$. Ses photons attracteurs et répulseurs Δ^+ et Δ^- sont inclus dans $\mathbf{T}$, et de la forme $\mathbf{RP}^1 \times \{v^+\}$ et $\mathbf{RP}^1 \times \{v^-\}$. Le point clé est que l'ensemble limite $\Lambda(\Gamma)$ donné par le théorème 3.8 est également inclus dans le tore $\mathbf{T}$, et de la forme $C \times \mathbf{RP}^1$ où C est un ensemble de Cantor de $\mathbf{RP}^1$. En particulier, les photons Δ^+ et Δ^- rencontrent l'ouvert $\Omega(\Gamma)$, si bien que $\overline{\varphi}^t$ possède des points fixes sur M. Si x est un tel point fixe, et si $B \subset M$ est un petit ouvert autour de x, alors en appliquant le lemme 3.3 à $\{\varphi^t\}$, on montre que $\overline{\varphi}^t(B)$ converge, soit lorsque $t \to +\infty$, soit lorsque $t \to -\infty$, vers un segment géodésique de lumière de M contenant x. En particulier, le flot $\{\overline{\varphi}^t\}$ ne peut préserver aucune forme volume, et la structure conforme $M = \Gamma\backslash\Omega(\Gamma)$ est fortement essentielle.

Interprétation géométrique en dimension 3. — Le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est muni d'une métrique lorentzienne bi-invariante g_0, obtenue en poussant par translations à gauche la forme de Killing sur $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. On vérifie que l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbf{Ein}^{1,2}$ est simple et transitive sur $\mathbf{Ein}^{1,2}\setminus\mathbf{T}$, et que la classe conforme $[g_0]$ coïncide avec la structure conforme plate sur $\mathbf{Ein}^{1,2}\setminus\mathbf{T}$. Si $\hat{\Gamma}$ désigne le groupe engendré par les éléments hyperboliques $\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_g$, $\Sigma = \mathbf{H}^2/\hat{\Gamma}$ est une surface hyperbolique (non compacte), et $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\hat{\Gamma}$ est un revêtement double du fibré unitaire tangent $T^1\Sigma$. La variété $M = \Gamma\backslash\Omega(\Gamma)$ est alors une *compactification conforme* de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\hat{\Gamma}$. L'action à gauche de $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\hat{\Gamma}$ est le remonté du flot géodésique agissant sur $T^1\Sigma$. Il s'agit d'un flot *isométrique* sur $SL(2,\mathbb{R})/\hat{\Gamma}$ qui s'étend à M en un flot conforme $\{\overline{\varphi}^t\}$, et devient essentiel sur le compactifié.

Espaces de modules de structures essentielles. — La topologie de la variété $M = \Gamma\backslash\Omega(\Gamma)$ est fixée par le nombre de générateurs de notre groupe de Schottky. En jouant sur les positions relatives des photons $\Delta_i^\pm$, on peut construire une infinité de groupes, qui ne sont pas conjugués deux à deux dans $PO(2,n)$, et on obtient de cette manière une infinité de structures

(fortement) essentielles, à topologie fixée. On hérite ainsi de tout un espace de modules (non discret) de structures conformes lorentziennes essentielles sur le produit de $\mathbb{S}^1$ par la somme connexe de g copies de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}$.

Dans le cas de la dimension 3, les structures kleiniennes essentielles construites ci-dessus vivent sur $\mathbb{S}^1 \times \Sigma_g$, où Σ_g est une surface compacte de genre g. En utilisant le principe de déformation de Ehresman-Thurston nous avons montré dans [Fr05a, Section 4.7] qu'il était possible de déformer ces structures en d'autres structurers essentielles (et conformément plates) sur $\mathbb{S}^1 \times \Sigma_g$, mais qui ne sont plus kleiniennes. Aussi, même si l'on répond positivement à la question 3.4, en montrant que toutes les structures essentielles lorentziennes compactes sont conformément plates, leur classification complète semble difficilement envisageable.

3.2.3 Contre-exemples au-delà de la signature lorentzienne

Nous en venons à présent au théorème 3.7, et à la construction de variétés pseudo-riemanniennes compactes, essentielles et non conformément plates. Pour simplifier, nous donnons juste un exemple de structure conforme essentielle de signature $(2,2)$, non conformément plate, sur le produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ (l'exemple se généralise directement pour obtenir le théorème 3.7). On munit l'espace $\mathbb{R}^4$ de la métrique

$$g = 2dx^1dx^2 + x_3^2(dx^1)^2 + 2dx^3dx^4.$$

Cette métrique est Ricci plate, mais pas plate. En particulier, elle n'est pas conformément plate. En fait, si W désigne le tenseur de Weyl, on calcule que $W(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_3}) = 1$ sur $\mathbb{R}^4$.

Pour $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, considérons la transformation linéaire diagonale de $\mathbb{R}^4$ suivante :

$$h_\lambda = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, e^{\lambda_3}, e^{\lambda_4}).$$

C'est une transformation conforme pour la métrique g si et seulement si $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4 = 2\lambda_1 + 2\lambda_3$. Autrement dit :

$$\lambda_1 = \frac{-\lambda_3}{2} + \frac{\lambda_4}{2} \tag{3.2}$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_3 + \frac{\lambda_4}{2} \tag{3.3}$$

Nous voyons donc que g admet un groupe abélien de dimension 2 de transformations conformes.

Appelons $h = \mathrm{diag}(e^{-1}, e^{-5}, e^{-2}, e^{-4})$, et $\varphi^t = \mathrm{diag}(e^{-t}, e^{-t}, 1, e^{-2t})$. Par (3.2) et (3.3), ce sont des transformations conformes de g, qui satisfont $h^*g = e^{-6}g$ et $(\varphi^t)^*g = e^{-2t}g$. On note Γ le groupe engendré par h. Comme h est une contraction linéaire, Γ agit librement, proprement et discontinûment sur $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. La métrique g induit une structure conforme analytique $[\overline{g}]$, non conformément plate, sur la variété quotient $M = \Gamma\backslash(\mathbb{R}^4\backslash\{0\})$. Cette dernière est difféomorphe au produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$.

Le flot $\{\varphi^t\}$ centralise Γ, donc passe au quotient en un flot conforme $\{\overline{\varphi}^t\}$ sur $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, [\overline{g}])$. Ce flot fixe point par point le cercle Δ obtenu en projetant $\mathbb{R}.e^3 \setminus \{0\}$ sur M. On vérifie que pour $t \neq 0$, la différentielle de $\overline{\varphi}^t$ en chaque point de Δ n'est pas unimodulaire : le flot $\{\overline{\varphi}^t\}$ est donc essentiel. En fait, si $x \in \Delta$, et si $B \subset M$ est un petit ouvert contenant x, $\overline{\varphi}^t(B)$ converge lorsque $t \to +\infty$ vers un segment de Δ. Le flot $\{\overline{\varphi}^t\}$ est par conséquent fortement essentiel.

3.3 Un résultat général de dégénérescence

Les résultats de la section précédente rendent une classification des structures pseudo-riemanniennes compactes essentielles assez hypothétique, si ce n'est impossible en signatures autres que riemannienne et lorentzienne. C'est pourquoi, il nous semble d'avantage réaliste d'essayer d'obtenir des énoncés plus qualitatifs sur la dynamique du groupe conforme d'une structure essentielle. En particulier, on aimerait "lire" sur la dynamique d'une suite (f_k) de transformations conformes d'une variété pseudo-riemannienne compacte (M, g) s'il s'agit d'une suite d'isométries pour une métrique de la classe conforme $[g]$, ou s'il s'agit d'une suite de transformations essentielles. Les propriétés d'équicontinuité de la famille (f_k) semblent jouer un rôle important à cet égard.

a) Rappelons que si (M, g) est une variété pseudo-riemannienne compacte, et si (f_k) est une suite de $\mathrm{Iso}(M, g)$ qui tend vers l'infini, alors (f_k) n'est équicontinue en *aucun* point de M. Cela découle essentiellement de la relation $f_k \circ \exp_x = \exp_{f_k(x)} \circ D_x f_k$, et du fait qu'une suite de $O(p, q)$ qui tend vers l'infini n'est jamais équicontinue en 0.

b) À l'inverse, nous avons observé qu'une suite divergente (g_k) de $PO(p+1, q+1)$ avait une dynamique complètement différente sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$: la suite est équicontinue sur un ouvert (dense), et il existe des ouverts de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ qui sont "écrasés" sous l'action de (g_k) sur des sous-variétés.

Il s'avère qu'il n'y a pas de situation intermédiaire entre les comportements $a)$ et $b)$, au sens où des phénomènes d'écrasement vont survenir dès

qu'une suite (f_k) de difféomorphismes conformes d'une variété pseudo-riemannienne compacte tend vers l'infini dans $\mathrm{Conf}(M)$, et est équicontinue en (au moins) un point de M. C'est ce que dit, entre autres, le théorème suivant qui est un panachage des théorèmes 1.1 et 1.2 de l'article [Fr12b].

Théorème 3.9. *[Fr12b, Théorèmes 1.1 et 1.2] Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne compacte de signature (p, q) , $p + q \geq 3$. Soit (f_k) une suite de difféomorphismes conformes de M. On suppose que (f_k) est équicontinue en un point x de M. Alors, quitte à remplacer (f_k) par une suite extraite, on est dans exactement un des trois cas suivants :*

1. *La suite (f_k) converge vers un élément $f \in Conf(M)$, la convergence étant C^∞.*

2. *Il existe un voisinage ouvert U de x, et un point $z \in M$, tels que $f_k(U)$ tend vers z (la convergence de f_k vers la fonction constante égale à z étant C^∞ sur les compacts de U).*

3. (a) *Il existe un voisinage ouvert U de x, une sous-variété totalement isotrope $\Delta \subset M$ de dimension ≥ 1, et une submersion lisse $f : U \to \Delta$, tels qu'en restriction à U, (f_k) tend vers f pour la convergence C^∞ sur les compacts de U.*

   (b) *Les fibres de f sont des sous-variétés totalement géodésiques conformes, qui sont dégénérées (pour la classe conforme induite par g). Le radical isotrope de ces fibres a pour dimension le rang de f.*

La notion de sous-variété totalement géodésique conforme (telle qu'introduite dans [Fr12b]) correspond à l'intégrabilité de certaines distributions dans le fibré normal de Cartan $\hat{M}$. Précisons que génériquement, une structure conforme n'admet aucune sous-variété totalement géodésique conforme de dimension > 1. Les phénomènes de dégénérescence décrits par le théorème ne peuvent donc avoir lieu que sur des variétés spéciales (voir également la section 3.3.2).

Idées de preuve du théorème 3.9. — Désignons par $(M, \hat{M}, \omega)$ la géométrie de Cartan normale modelée sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$, associée à la structure conforme $(M, [g])$. Rappelons que $\hat{M}$ est un P-fibré principal, où le groupe $P = (\mathbb{R}_+^* \times O(p, q)) \ltimes \mathbb{R}^n$ est le stabilisateur d'un point base ν sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Par compacité de M, et quitte à remplacer (f_k) par une suite extraite, on peut supposer que $f_k(x)$ converge vers un point z. On va maintenant choisir $\hat{x} \in \hat{M}$ dans la fibre de x, et considérer une suite d'holonomie de (f_k) en x. Il s'agit d'une suite (p_k) de P telle que la suite $\hat{z}_k = f_k(\hat{x}).p_k^{-1}$ converge vers

$\hat{z} \in \hat{M}$ dans la fibre de z. Le point clé de la preuve est que l'équicontinuité au point x se lit sur la suite d'holonomie :

Lemme 3.10. *[Fr12b, Lemme 4.3] Soit $f_k : (M, g) \to (M, g)$ une suite de difféomorphismes conformes, $x \in M$ tel que $f_k(x)$ converge dans M, et (p_k) une suite d'holonomie de (f_k) en x. Alors (f_k) est équicontinue en x si et seulement si (p_k) est équicontinue en $\nu \in \mathbf{Ein}^{p,q}$.*

Il nous reste à comprendre quelles sont les suites de P qui sont équicontinues au point ν. Il s'agit exactement des suites qui s'écrivent $p_k = m_1(k) l_k m_2(k)$ où $(m_1(k))$ et $(m_2(k))$ sont deux suites relativement compactes de P, et l_k est une suite du facteur $\mathbb{R}_+^* \times O(p,q) \subset (\mathbb{R}_+^* \times O(p,q)) \ltimes \mathbb{R}^n$ qui, de plus, est relativement compacte dans End $(\mathbb{R}^n)$. Pour limiter les détails techniques, nous ignorerons les suites $(m_1(k))$ et $(m_2(k))$, et supposerons directement que notre suite d'holonomie (p_k) est dans le facteur $\mathbb{R}_+^* \times O(p,q) \subset P$. En particulier, si l'on décompose l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$ comme une somme $\mathfrak{n}^- \oplus \mathbb{R} \oplus \mathfrak{o}(p,q) \oplus \mathfrak{n}^+$, où $\mathfrak{p} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{o}(p,q) \oplus \mathfrak{n}^+$, alors Ad (p_k) laisse le sous-espace $\mathfrak{n}^-$ invariant et, quitte à passer à une suite extraite, sa restriction L_k à $\mathfrak{n}^-$ converge vers un endomorphisme $L_\infty \in$ End $(\mathfrak{n}^-)$. Si $L_\infty \in \mathrm{GL}(\mathfrak{n}^-)$, la suite (p_k) est convergente. Comme l'action de Conf (M) est propre sur $\hat{M}$, on obtient que (f_k) converge vers $f \in$ Conf (M). On est alors dans le cas 1) du théorème.

Désignons par exp l'application exponentielle sur $\hat{M}$ définie par la connexion normale de Cartan (voir section 1.2.4). Comme le sous-espace $\mathfrak{n}^-$ est transverse à $\mathfrak{p}$, les applications :

$$\varphi : u \mapsto \pi(\exp(\hat{x}, u)),$$

$$\varphi_k : u \mapsto \pi(\exp(\hat{z}_k, u)),\ k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

définissent des cartes allant de voisinages de l'origine $0_{\mathfrak{n}^-}$ dans $\mathfrak{n}^-$, sur des voisinages de x (resp. z_k) dans M. Sur des voisinages assez petits autour de x, on a convergence C^∞ de φ_k vers φ_∞, et de plus :

$$f_k = \varphi_k \circ L_k \circ \varphi^{-1} \tag{3.4}$$

Cela montre la convergence C^∞ de la suite (f_k) vers l'application lisse $\varphi_\infty \circ L_\infty \circ \varphi^{-1}$ au voisinage de x. Lorsque L_∞ est nulle, cette application est constante égale à z, et on est dans le cas 2) du théorème. Lorsque L_∞ est non nulle (mais non inversible), $\varphi_\infty \circ L_\infty \circ \varphi^{-1}$ est une fibration, pour laquelle on comprend l'image et la géométrie des fibres via une analyse un peu plus soignée. C'est le cas 3) du théorème.

3.3.1 Parenthèse sur la topologie de Conf(M)

Le théorème 3.9 a des conséquences intéressantes sur la topologie de groupe de Lie de Conf(M). Rappelons que comme Conf(M) préserve un parallélisme sur le fibré normal de Cartan $\hat{M}$, son action sur $\hat{M}$ est libre, et ses orbites sont des sous-variétés fermées. La topologie de groupe de Lie est alors définie en identifiant Conf(M) à l'une de ses orbites sur $\hat{M}$. Or le fibré $\hat{M}$ est un sous-fibré du fibré des 2-jets de repères, donc la convergence dans Conf(M) est définie par la convergence des 2-jets. En particulier, il n'y a pas de raison évidente pour que le groupe Conf(M) soit fermé dans le groupe des homéomorphismes. C'est pourtant bien ce qu'affirme le premier point du théorème 3.9. Nous ne connaissons pas de preuve antérieure de ce résultat en signature quelconque. Il semble que pour les structures riemanniennes, la première démonstration ait été donnée par J. Ferrand dans [Fe76] (voir également [Fe77a]). Le point clé est un résultat de régularité obtenu par l'analyse : les homéomorphismes 1-quasiconformes entre variétés riemanniennes sont en fait lisses. Une preuve alternative du fait qu'une limite C^0 de difféomorphismes conformes est encore un difféomorphisme conforme a été donnée par R. Schoen dans [Sch95], là encore par des techniques d'analyse.

En toute généralité, on peut poser la question suivante :

Question 3.11. *Le groupe des automorphismes d'une géométrie de Cartan est-il toujours fermé dans le groupe des homéomorphismes de M ?*

Il n'est pas très difficile de vérifier que la réponse est positive pour les géométries réductives. Elle l'est également pour les géométries paraboliques de rang un (voir [Fr07b, Théorème 3]).

3.3.2 Influence de la dynamique sur la géométrie II

Nous discutons à présent les conséquences que les comportement dynamiques décrits par le théorème 3.9 peuvent induire sur la géométrie. Par exemple, le point 2) du théorème assure l'existence d'ouverts U pour lesquels la suite $f_k(U)$ converge vers un point. En signature riemannienne, le lemme 2.3 montrait que dans ces conditions, l'ouvert U est automatiquement conformément plat. Cette propriété n'est plus valable en signature arbitraire. En effet nous avons vu en section 3.2.3 que sur $\mathbb{R}^4$, la contraction linéaire $h = \mathrm{diag}(e^{-1}, e^{-5}, e^{-2}, e^{-4})$ (qui satisfait $h^k(U) \to 0$ pour tout ouvert U relativement compact de $\mathbb{R}^4$) agissait conformément pour la métrique $2dx^1dx^2 + x_3^2(dx^1)^2 + 2dx^3dx^4$, bien que cette métrique ne soit pas conformément plate. Nous pouvons malgré tout montrer :

Proposition 3.12. *[Fr07a, Proposition 4] et [Fr12b, Théorème 1.2] Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension $n \geq 3$. On suppose qu'il existe un ouvert $U \subset M$, un point $z \in M$ et une suite de plongements conformes $f_k : U \to M$ tels que $f_k(U)$ tend vers le point z pour la topologie de Hausdorff. Alors :*

1. *Si g est de signature riemannienne ou lorentzienne, l'ouvert U est localement conformément plat.*

2. *En signature arbitraire, l'ouvert U est localement conformément Ricci-plat.*

Pour montrer la proposition, on utilise l'invariance conforme du tenseur de Weyl (de type $(3, 1)$), qui conduit, pour tout $y \in U$, à la relation :

$$D_y f_k(W_y(u, v, w)) = W_{f_k(y)}(D_y f_k(u), D_y f_k(v), D_y f_k(w)). \tag{3.5}$$

Le point clé de la preuve consiste à montrer que dans des champs de repères adéquats aux voisinages de y et z, les matrices $D_y f_k$ sont diagonales, et que les suites $(\lambda_i(k))_{k\in\mathbb{N}}$ de leurs valeurs propres tendent vers 0. Si par exemple, les matrices $D_y f_k$ sont des homothéties de rapport λ_k, avec $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = 0$ (c'est essentiellement ce qui se produit en signature riemannienne), alors, relativement à n'importe quelle métrique riemannienne auxiliaire, le terme de gauche dans l'équation (3.5) a une norme de l'ordre de $\lambda_k.||W_y(u, v, w)||$, tandis que la norme du terme de droite est de l'ordre de $\lambda_k^3.||W_{f_k(y)}(u, v, w)||$. Ceci n'est possible pour $k >> 1$ que si $W_y = 0$. En signature quelconque, il peut y avoir des phénomènes de résonnances entre les suites de valeurs propres $(\lambda_i(k))_{k\in\mathbb{N}}$, qui font que la relation (3.5) reste compatible avec $W_y \neq 0$. Toutefois, de telles résonnances n'apparaissent pas en signature lorentzienne.

La seconde assertion du théorème se montre en interprétant l'intégrabilité de certaines distributions sur le fibré $\hat{M}$ par l'existence de métriques Ricci-plates dans la classe conforme (voir [Fr12b]).

Les conséquences géométriques du cas 3) dans le théorème 3.9 ne sont pas claires en signature arbitraire. On comprend toutefois assez bien la situation pour les variétés lorentziennes.

Proposition 3.13. *[Fr07a, Proposition 4] Soit (M, g) une variété lorentzienne de dimension $n \geq 3$. On suppose qu'il existe un ouvert $U \subset M$, et une suite de plongements conformes $f_k : U \to M$ tels que f_k converge uniformément sur les compacts de U vers une submersion lisse $f : U \to \Delta$, où Δ est un segment géodésique de lumière. Alors :*

1. *Le tenseur de Weyl W prend ses valeurs dans le fibré tangent aux fibres de f.*

2. *Si $x \in U$, et si le tenseur de Weyl est nul en $w = f(x)$, alors le tenseur de Weyl est nul sur la fibre $f^{-1}\{w\}$.*

3. *Si $\dim M = 3$, alors U est conformément plat.*

Le théorème 3.9, combiné aux deux propositions ci-dessus permet d'avancer un peu dans la compréhension des phénomènes dynamiques essentiels. Par exemple, comme corollaire de ces résultats, on peut donner l'énoncé suivant :

Si (M, g) est une variété lorentzienne analytique de dimension 3, et s'il existe dans $Conf(M)$ une suite (f_k) qui tend vers l'infini, et qui est équicontinue en un point de M, alors (M, g) est conformément plate.

3.4 Champs de Killing conformes

Pour conclure ce chapitre sur la dynamique pseudo-riemannienne conforme, nous revenons sur l'étude locale des champs de Killing conformes, et montrons comment les résultats exposés en section 3.3 peuvent être exploités pour obtenir des théorèmes de formes normales pour ces champs.

3.4.1 Théorèmes de formes normales

Vers un dictionnaire champs conformes/ champs de Möbius. — Nous appellerons *champs de Möbius* les champs de vecteurs conformes sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$, l'univers d'Einstein de signature (p, q). Il s'agit des champs de vecteurs sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$ engendrés par les groupes à un paramètre de $PO(p+1, q+1)$. Pour toute variété pseudo-riemannienne (M, g) de signature (p, q), avec $p + q \geq 3$, nous noterons $(M, \hat{M}, \omega)$ la géométrie de Cartan normale modelée sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$, associée à la structure conforme $(M, [g])$.

Soit X un champ de Killing conforme sur (M, g), admettant une singularité en $x \in M$. En section 2.2.4 (à laquelle nous renvoyons pour les notations), nous avons expliqué comment associer au champ X (et à un point $\hat{x} \in \hat{M}$ dans la fibre de x) un champ de Möbius X_h, appelé *champ d'holonomie*. Le champ X_h est singulier au point base $\nu \in \mathbf{Ein}^{p,q}$, et il engendre un *flot d'holonomie* $\{h_X^t\} \subset P$, où P est le stabilisateur de ν dans $PO(p + 1, q + 1)$. Si $\{\varphi_X^t\}$ désigne le flot local de X au voisinage de x, alors on a la relation d'équivariance fondamentale :

$$\mathcal{D}_{\hat{x}}(\varphi_X^t(\alpha)) = h_X^t.\mathcal{D}_{\hat{x}}(\alpha), \tag{3.6}$$

pour toute courbe $\alpha \in C^1([0,1], M, x)$. Cette relation fait le lien entre la dynamique de φ_X^t au voisinage de x et celle de h_X^t au voisinage de ν. Dans les articles [FrM10], [Fr12a], [FrM11], nous nous sommes appuyés sur la relation (3.6) pour commencer à écrire quelques pages d'un dictionnaire entre les champs de Killing conformes et leurs champs d'holonomie. Ce dictionnaire est dans certains cas suffisamment fidèle pour permettre de répondre à la question générale suivante.

Question 3.14 (Formes normales)**.** *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de signature (p, q), avec $p + q \geq 3$. Soit X un champ de Killing conforme sur (M, g), admettant une singularité en x. Peut-on donner une liste satisfaisante de formes normales possibles pour X? Plus précisément, existe-t-il une conjugaison entre le champ X au voisinage de x et son champ d'holonomie X_h au voisinage de ν?*

Rappelons qu'en signature riemannienne, la réponse à la question 3.14 est affirmative (voir la rubrique *Formes normales* en section 2.2.4). Au voisinage d'une singularité, un champ de Killing conforme riemannien est toujours conjugué de manière lisse à son champ d'holonomie (donc à un champ de Möbius). L'étape essentielle de la preuve était de prouver que si le champ X n'est pas linéarisable (donc est essentiel) au voisinage de la singularité x, alors un voisinage de x est conformément plat.

En collaboration avec K. Melnick, nous avons obtenu un résultat analogue pour la signature lorentzienne, sous l'hypothèse où la structure conforme considérée est analytique.

Théorème 3.15. *[FrM11, Théorème 1.2] Soit (M, g) une variété lorentzienne analytique de dimension $n \geq 3$. On suppose que X est un champ de Killing conforme sur M, s'annulant en un point x. Alors :*

1. *Ou bien X est analytiquement linéarisable au voisinage de x.*
2. *Ou bien (M, g) est conformément plate.*

Dans les deux cas, il existe une conjugaison analytique entre le champ X au voisinage de x et son champ d'holonomie au voisinage de $\nu \in \mathbf{Ein}^{1,n-1}$.

Le théorème 3.15 conclut définitivement, dans le cadre lorentzien analytique, l'étude locale des champs conformes au voisinage d'une singularité. Des résultats partiels sur ces formes normales avaient été obtenus préalablement dans (entre autres) [A86], [Ha04], ou encore [St06]. Dans le cadre des champs conformes *de gradient* sur les variétés pseudo-riemanniennes, les articles [KR95] et [KR97] aboutissent à des résultats assez complets.

L'hypothèse d'analyticité n'est pas seulement technique, dans la mesure où le théorème 3.15 est mis en défaut dans le cadre C^∞. En effet, il existe des variétés lorentziennes lisses admettant des champs conformes non nuls satisfaisant $X(x) = 0$, $\nabla X(x) = 0$, et telles que la structure n'est conformément plate sur aucun voisinage de x (voir [Fr07a, Section 6], [Leit07, Section 2], [Lam12, Section 8]). Un tel champ X n'est bien entendu pas linéarisable.

Toutefois, on peut montrer en toute signature (et la remarque précédente montre que c'est un énoncé optimal) que si un champ de Killing conforme satisfait $X(x) = 0$ et $\nabla X(x) = 0$, alors il existe un ouvert U de (M, g) qui est conformément plat et qui contient x dans son adhérence (voir [FrM11, Théorème 1.4]). En particulier, sur des structures pseudo-riemanniennes analytiques, ces champs sont toujours conjugués à des champs de Möbius, dont on comprend bien la dynamique (voir les exemples des figures 3.3, 3.4 et 3.5 ci-dessous en signature lorentzienne). Plus généralement, toujours avec une hypothèse d'analyticité, on a le résultat suivant valable en toute signature.

Théorème 3.16. *[FrM11, Théorème 1.3] Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne analytique de signature (p, q), $p + q \geq 3$. On suppose que X est un champ de Killing conforme sur M admettant une singularité x, et tel que l'endomorphisme $\nabla X(x)$ (ou de manière équivalente le flot $\{D_x\varphi_X^t\}$) soit semi-simple sur $\mathbb{C}$. Alors :*

1. *Ou bien X est analytiquement linéarisable au voisinage de x.*
2. *Ou bien (M, g) est conformément plate.*

Dans les deux cas, il existe une conjugaison analytique entre le champ X au voisinage de x et son champ d'holonomie au voisinage de $\nu \in \mathbf{Ein}^{1,n-1}$.

3.4.2 Idées de preuves

La preuve du théorème 3.15 (et celle de 3.16) s'articule en quatre étapes.

a) La première étape consiste à caractériser le fait que X est linéarisable en x par son holonomie. La réponse est très naturelle : *en toute signature (p, q), le champ X est linéarisable en x si et seulement si son champ d'holonomie X_h l'est en ν, autrement dit $\{h_X^t\} \subset P = (\mathbb{R}_+^* \times O(p, q)) \ltimes \mathbb{R}^n$ est conjugué dans P à un flot linéaire, i.e inclus dans le facteur $\mathbb{R}_+^* \times O(p, q)$.* Ce résultat, même s'il n'est pas formulé en ces termes, est initialement dû à M.S Capocci dans [Ca99].

b) Il existe un certain nombre de flots $\{h_X^t\}$ dans le groupe P, dont la dynamique locale autour du point fixe ν oblige *toute* structure conforme lorentzienne définie sur un voisinage de ν et invariante par $\{h_X^t\}$ à être conformément plate sur un ouvert. C'est par exemple le cas lorsque $\{h_X^t\}$ est un flot de translations dans $P = (\mathbb{R}_+^* \times O(p,q)) \ltimes \mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire un flot $x \mapsto x + tT$ de $\mathbf{E}^{p,q}$ vu, via la projection stéréographique $\sigma : \mathbf{E}^{p,q} \to \mathbf{Ein}^{p,q}$ et le théorème de Liouville, comme un flot de $PO(p+1, q+1)$ fixant le point ν). La dynamique locale autour de ν varie avec le type causal du vecteur T : temps ($Q^{p,q}(T) < 0$), espace ($Q^{p,q}(T) > 0$), lumière ($Q^{p,q}(T) = 0$). Nous la détaillons en signature lorentzienne ($p = 1$).

Flot de translation temps sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$. —

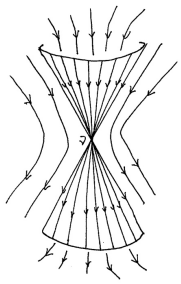

FIGURE 3.3. *Flot de translation temps.*

Le point ν est un point fixe isolé pour le flot $\{h_X^t\}$. Le futur $I^+(\nu)$ (resp. le passé $I^-(\nu)$) de ν est attiré par ν lorsque $t \to +\infty$ (resp. $t \to -\infty$). Par la proposition 3.12, *toute* structure conforme lorentzienne définie sur un voisinage de ν et invariante par $\{h_X^t\}$ sera conformément plate sur $I^+(\nu)$ et $I^-(\nu)$. En particulier, si cette structure est analytique, elle est conformément plate.

Flot de translation espace sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$. —

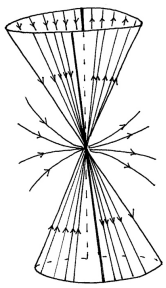

FIGURE 3.4. *Flot de translation espace.*

La dynamique ressemble un peu à la précédente. Néanmoins, l'ensemble des points fixes de $\{h_X^t\}$ n'est plus réduit à ν. Il est constitué d'un cône de lumière de codimension 2 de sommet ν (sur la figure 3.4 tracée en dimension 3, les points fixes constituent la réunion des deux géodésiques de lumière tracées en gras, passant par ν). Il existe dans l'ailleurs du point ν un ouvert U tel que $\lim_{t\to+\infty} h_X^t(U) = \nu$. La proposition 3.12 assure que toute structure lorentzienne définie sur un voisinage de ν et $\{h_X^t\}$-invariante est conformément plate sur un ouvert.

Flot de translation lumière sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$. —

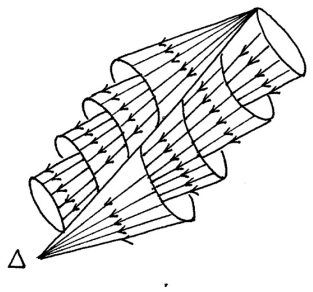

FIGURE 3.5. *Flot de translation lumière.*

C'est le cas le plus intéressant. Ici, le lieu des points fixes de $\{h_X^t\}$ est constitué d'une géodésique de lumière Δ passant par ν. Pour tout $y \in \Delta$, chaque segment géodésique de lumière passant par y est préservé par $\{h_X^t\}$, et l'action de h_X^t sur un tel segment se fait par une homograpie parabolique fixant y. On constate cette fois-ci qu'il existe un ouvert U tel que $\lim_{t\to+\infty} h_X^t(U)$ est un segment de Δ. On est dans le champ d'application de la propositon 3.13. Si la dimension est 3, on conclut directement par le point 3) de la proposition que U est conformément plat. En dimension $n \geq 4$, le premier point de la proposition 3.13 assure que si $y \in \Delta$, et si $z \in U$, $z \neq y$, appartient au cône de lumière $C(y)$ issu de y (autrement dit z est sur un segment géodésique de lumière issu de y), alors le tenseur de Weyl en z prend ses valeurs dans $T_zC(y)$. Par continuité de $z \mapsto W_z$, on conclut qu'en y, W_y doit prendre ses valeurs dans l'orthogonal $u^\perp$ à *toutes* les directions lumières $u \in T_y\mathbf{Ein}^{1,n-1}$. Comme l'intersection de tous ces orthogonaux est réduite à $\{0\}$, on conclut $W_y = 0$. Mais alors le point 2) de la proposition 3.13 implique $W_z = 0$. Finalement, le tenseur de Weyl s'annule sur U.

En élaborant ce type d'arguments, on peut en fait prouver que pour tout flot unipotent $\{h_X^t\}$ de $P = (\mathbb{R}_+^* \times O(1, n-1)) \ltimes \mathbb{R}^n$ qui n'est

pas linéarisable en ν, toute structure conforme lorentzienne définie sur un voisinage de ν et invariante par $\{h_X^t\}$ doit être conformément plate sur un ouvert.

c) Voici l'étape où l'hypothèse d'analyticité est utilisée de manière non triviale. Appelons $\mathfrak{conf}_x(M)$ l'algèbre de Lie des champs de Killing conformes sur M qui s'annulent en x. Si l'on se donne $\hat{x} \in \hat{M}$ dans la fibre de x, alors on hérite d'un morphisme injectif d'algèbres de Lie $\rho : \mathfrak{conf}_x(M) \to \mathfrak{p}$, dit *morphisme d'holonomie*. À tout $Y \in \mathfrak{conf}_x(M)$, le morphisme ρ associe le champ d'holonomie de Y en x (défini relativement au point $\hat{x}$, voir section 2.2.4). On doit à M. Gromov le résultat suivant :

Théorème 3.17. *[Gr86] Si (M, g) est une variété pseudo-riemanienne analytique de dimension ≥ 3, le morphisme d'holonomie envoie l'algèbre $\mathfrak{conf}_x(M)$ sur une sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathfrak{p}$.*

Par sous-algèbre algébrique, on entend l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique. Ce résultat a aussi été démontré dans le contexte général des géométries de Cartan par K. Melnick (voir [Mel11]).

Une sous-algèbre algébrique est stable par la décomposition de Jordan. Aussi, si le flot d'holonomie $\{h_X^t\}$ s'écrit comme le produit commutatif d'un flot $\{s_X^t\}$ semi-simple sur $\mathbb{C}$, et d'un flot unipotent $\{u_X^t\}$, alors il va exister deux champs de Killing conformes X_s et X_u sur un voisinage de x dans (M, g), singuliers en x, et dont les flots d'holonomie respectifs en x sont $\{s_X^t\}$ et $\{u_X^t\}$.

d) Plaçons-nous en signature lorentzienne. Si notre champ de Killing conforme X n'est pas linéarisable en x, et que l'on fait une hypothèse d'analyticité sur la structure, l'étape précédente dit qu'il existe un champ conforme X_u singulier en x, dont le flot d'holonomie est un flot unipotent $\{u_X^t\} \subset P$ qui n'est pas linéarisable en ν. On utilise les géodésiques conformes (qui peuvent être définies en toute signature) et la relation d'équivariance

$$\mathcal{D}_{\hat{x}}(\varphi_{X_u}^t(\alpha)) = u_X^t.\mathcal{D}_{\hat{x}}(\alpha)$$

pour montrer que qualitativement, la dynamique de $\{\varphi_{X_u}^t\}$ au voisinage de x est la même que celle de $\{u_X^t\}$ au voisinage de ν. En particulier, on arrive à montrer par des arguments similaires à ceux de l'étape b) que la structure est conformément plate sur un ouvert U. On conclut alors par analyticité que (M, g) est conformément plate.

Chapitre 4

Sur le groupe d'automorphismes d'une géométrie de Cartan

4.1 Position du problème

Considérons une structure géométrique rigide $\mathcal{S}$ sur une variété M. Par structure rigide, on entendra ici une structure qui relève d'une des trois catégories suivantes : structure rigide au sens de Gromov, G-structure de type fini, ou géométrie de Cartan. La structure considérée, de même que la variété seront supposées lisses. Comme nous l'avons déjà mentionné en section 4.5.2, le groupe $\mathrm{Aut}\,(M, \mathcal{S})$ des automorphismes de $(M, \mathcal{S})$ est un groupe de Lie, la topologie de groupe de Lie rendant l'action de $\mathrm{Aut}\,(M, \mathcal{S})$ sur M lisse. La rigidité se traduit par le fait qu'il existe un fibré au-dessus de la variété M sur lequel le groupe $\mathrm{Aut}\,(M, \mathcal{S})$ préserve un parallélisme, ce qui fait que la dimension de $\mathrm{Aut}\,(M, \mathcal{S})$ est majorée par la dimension de ce fibré. Dans le cas d'une géométrie de Cartan $(M, \hat{M}, \omega)$ modelée sur un espace $\mathbf{X} = G/P$, le groupe d'automorphismes préserve un parallélisme sur $\hat{M}$ et on a automatiquement la majoration $\dim \mathrm{Aut}\,(M) \leq \dim G$: le modèle $\mathbf{X}$ est l'espace possédant le plus de symétries.

Fixons-nous à présent un type donné de structure géométrique; par exemple, on étudie les métriques riemanniennes, ou lorentziennes, ou les classes conformes de telles métriques, ou les connexions affines etc... On se pose le problème général :

Question 4.1. *Quels sont les groupes de Lie H pour lesquels il existe une variété compacte M, et une structure $\mathcal{S}$ sur M du type que nous nous sommes fixé, de sorte que $H = Aut\,(M, \mathcal{S})$?*

L'étude de la question 4.1 se scinde naturellement en deux sous-questions :

Question 4.2. *Déterminer les possibilités pour la composante neutre* $Aut^o(M, \mathcal{S})$*, ou plus simplement les algèbres de Lie possibles pour* $\mathfrak{aut}(M, \mathcal{S})$.

Question 4.3. *Comprendre la "partie discrète"* $Aut(M, \mathcal{S})/Aut^o(M, \mathcal{S})$.

Ce chapitre sera consacré pour l'essentiel à l'étude de la question 4.2. Nous ne dirons que quelques mots de la question 4.3, qui semble beaucoup plus difficile.

Un exemple : le groupe des isométries d'une variété riemannienne. — On peut déjà, pour fixer les idées, aborder les question 4.2 et 4.3 dans le cas simple des métriques riemanniennes. Le groupe d'automorphismes est alors constitué des isométries de (M, g), c'est-à-dire des difféomorphismes lisses $\varphi : M \to M$ satisfaisant $\varphi^* g = g$. Le groupe des isométries agit sur le fibré des repères orthonormés de M, et y préserve un parallélisme. Il s'ensuit que la dimension de $\mathrm{Iso}(M, g)$ est majorée par $\frac{n(n+1)}{2}$, où n est la dimension de M.

Que peut-on dire de plus sur la structure du groupe de Lie $\mathrm{Iso}(M, g)$? Tout d'abord, remarquons que sans hypothèse de compacité sur la variété M, on ne peut espérer dire grand chose. En effet, étant donné un groupe de Lie connexe H arbitraire, il est toujours possible de fixer un produit scalaire euclidien sur l'espace tangent en l'élément neutre $T_e H$, puis de pousser ce produit scalaire par translations à gauche, et obtenir ainsi une métrique riemannienne sur H, pour laquelle toutes les translations à gauche sont des isométries. Sans hypothèse de compacité sur la variété que l'on considère, toutes les algèbres de Lie peuvent apparaître comme sous-algèbres de l'algèbre de Lie du groupe d'isométries, rendant toute classification impossible.

Maintenant, si l'on suppose la variété riemannienne (M, g) compacte, cela impose de fortes restrictions sur le groupe $\mathrm{Iso}(M, g)$. Dans [MS39], Myers et Steenrod ont montré que la topologie de groupe de Lie sur $\mathrm{Iso}(M, g)$ coïncidait avec la topologie compacte-ouverte. Le théorème d'Ascoli assure alors que $\mathrm{Iso}(M, g)$ doit être un groupe de Lie compact. L'algèbre de Lie $\mathfrak{Isom}(M, g)$ est donc une somme $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a}$ où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe semi-simple compact, et $\mathfrak{a}$ est une algèbre abélienne. Réciproquement, il n'est pas très difficile, étant donnée une telle algèbre $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a}$, de construire une variété riemannienne compacte (M, g) telle que l'algèbre de Lie $\mathfrak{Isom}(M, g)$ soit isomorphe à $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a}$. On dispose donc d'une réponse complète à la question 4.2 pour les métriques riemanniennes. Concernant la partie discrète de $\mathrm{Iso}(M, g)$, "tout peut arriver", dans la mesure où pour tout groupe fini H, il existe une variété riemannienne (M, g) compacte pour laquelle $\mathrm{Iso}(M, g) = H$; voir [As76].

Notons que le théorème 2.8 permet également de comprendre l'algèbre de Lie du groupe conforme. Si (M, g) est une variété riemannienne compacte, alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{conf}(M)$ est ou bien une somme $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a}$ comme ci-dessus, ou bien l'algèbre $\mathfrak{o}(1, n+1)$.

4.2 Les travaux de R. Zimmer sur les actions de groupes simples

Le cadre riemannien décrit précédemment a longtemps été le seul pour lequel on disposait de résultats généraux sur la structure de l'algèbre de Lie des automorphismes. On doit à R. Zimmer, dans une série d'articles [Zim84b], [Zim86], [Zim87b] (voir également [Zim87a] pour un survol), l'introduction d'un certain nombre d'idées nouvelles qui ont permis des avancées spectulaires sur cette question. Ces travaux culminent avec la preuve du *théorème de plongement de Zimmer*. Avant d'en donner un énoncé, rappelons qu'une G-structure sur une variété M est la donnée d'une réduction du fibré des repères de M à un G-fibré principal. Par exemple, les métriques pseudo-riemanniennes de signature (p, q) sont des $O(p, q)$-structures, la $O(p, q)$-réduction du fibré des repères étant donnée par le fibré des repères orthonormés.

Théorème 4.4 ([Zim86], Theorem A)**.** *Soit H un groupe de Lie simple, connexe, non compact, agissant sur une variété compacte M de dimension n. On suppose que l'action de H sur M préserve une G-structure $\hat{M} \to M$, où G est un sous-groupe algébrique du groupe $SL'(n, \mathbb{R})$ des transformations linéaires de déterminant ± 1. Alors :*

1. *Il existe un plongement d'algèbres de Lie $\sigma : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$.*
2. *Plus précisément, il existe un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$, une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}_V \subset \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ isomorphe à $\mathfrak{h}$, et laissant V invariant, de sorte que l'action de $\mathfrak{h}_V$ sur V soit conjuguée à l'action linéaire de l'algèbre $ad\,\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{h}$.*

Comme par simplicité du groupe H, l'application $\mathrm{ad} : \mathfrak{h} \to \mathrm{End}\,(\mathfrak{h})$ est injective, on voit que le second point du théorème est un raffinement du premier.

Remarquons que la G-structure considérée dans l'énoncé du théorème n'est pas supposée de type fini. Le théorème de Zimmer peut donc s'appliquer, par exemple, aux structures symplectiques, qui ne sont pas rigides au sens classique du terme. C'est en fait l'hypothèse de simplicité sur le groupe H qui ici, "rigidifie" la situation. Lorsque la G-structure est de type fini, alors

le groupe d'automorphismes est un groupe de Lie. Par la décomposition de Levi, son algèbre de Lie $\mathfrak{aut}(M)$ est un produit semi-direct $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$, où $\mathfrak{r}$ est le radical résoluble et $\mathfrak{s}$ est une algèbre de Lie semi-simple. Le théorème de Zimmer apporte des restrictions sur le facteur semi-simple $\mathfrak{s}$: les facteurs non compacts de $\mathfrak{s}$ ne peuvent pas être trop gros, puisqu'ils se plongent dans l'algèbre $\mathfrak{g}$. Notons que dans le contexte rigide (par exemple lorsque la G-structure est de type fini) M. Gromov a amélioré le théorème 4.4 en prouvant que pour presque tout point x de M, l'algèbre de Lie des champs de Killing de la structure qui s'annulent en x contenait une copie de $\mathfrak{h}$ (voir [Gr86, Section 5.2]).

Illustration dans le cadre des actions isométriques lorentziennes. — Pour mieux comprendre l'intérêt du théorème de Zimmer, il est instructif de l'appliquer dans l'étude des actions de groupes préservant une métrique lorentzienne. Contrairement à la situation riemannienne, le groupe des isométries d'une variété lorentzienne compacte (M, g) n'est pas toujours compact. Nous avons en effet déjà mentionné au chapitre précédent que pour tout réseau cocompact $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, le quotient $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$ était muni d'une métrique lorentzienne qui rendait l'action à gauche de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ isométrique. Il existe donc des groupes de Lie simples non compacts (en l'occurence $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$) qui agissent isométriquement sur des variétés lorentziennes compactes.

Considérons à présent une variété compacte M, munie d'une métrique lorentzienne g, et supposons qu'un groupe de Lie simple, connexe, et non compact agisse sur M en préservant la métrique g. Une métrique lorentzienne équivaut à la donnée d'une G-structure sur M, où $G = O(1, n-1)$ est le sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$ préservant la forme quadratique $-x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$. Comme $O(1, n-1)$ est un sous-groupe algébrique de $SL'(n, \mathbb{R})$, le théorème de plongement de Zimmer s'applique : il existe un plongement d'algèbres de Lie $\sigma : \mathfrak{h} \to \mathfrak{o}(1, n-1)$. Cela réduit fortement les possibilités pour le groupe H. Par exemple, on constate immédiatement que le groupe $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ ne peut pas agir isométriquement sur une variété lorentzienne compacte. En effet, le rang réel de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ est 2, tandis que celui de $\mathfrak{o}(1, n-1)$ est 1, et le rang ne peut pas décroître par un morphisme injectif d'algèbres de Lie. En fait, en regardant la liste des algèbres de Lie simples réelles, on s'aperçoit que le groupe H doit être localement isomorphe à $O(1, k)$, avec $2 \leq k \leq n-1$. Le second point du théorème 4.4 va permettre de dire encore mieux. En effet, il affirme que les transformations de $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$ sont antisymétriques pour une forme bilinéaire B sur $\mathfrak{h}$, dont les espaces totalement isotropes maximaux sont de dimension au plus 1. Cette forme est obtenue en identifiant $\mathfrak{h}$ au sous-espace V (donné par l'énoncé du théorème 4.4), et en restreignant à V un produit

scalaire lorentzien invariant par le groupe $O(1, n-1)$. Or sur une algèbre de Lie simple réelle $\mathfrak{h}$ de type non compact, on vérifie aisément que toute forme bilinéaire B pour laquelle $\operatorname{ad}\mathfrak{h}$ agit par transformations antisymétriques, est isotrope sur les espaces de racines $\mathfrak{h}_\alpha$. Par ailleurs, pour deux racines α et β distinctes satisfaisant $\alpha \neq -\beta$, les sous-espaces $\mathfrak{h}_\alpha$ et $\mathfrak{h}_\beta$ sont orthogonaux relativement à B. On conclut donc que $\mathfrak{h}$ ne possède que deux racines α et $-\alpha$, et que les espaces de racine associés $\mathfrak{h}_\alpha$ et $\mathfrak{h}_{-\alpha}$ sont de dimension 1. Au sein des algèbres de Lie simples réelles de type non compact, l'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ est la seule à avoir cette propriété. On aboutit donc au :

Corollaire 4.5. *Soit (M, g) une variété lorentzienne compacte, et H un groupe de Lie simple, connexe, non compact agissant isométriquement sur (M, g), alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.*

Des travaux postérieurs dûs à S. Adams, G. Stuck et – indépendamment– A. Zeghib ont amélioré ce résultat et abouti à une classification complète des algèbres de Lie possibles pour la composante neutre du groupe des isométries d'une variété lorentzienne compacte.

Théorème 4.6. *[AS97], [Ze98a], [Ze98b]*
Soit (M, g) une variété lorentzienne compacte. Alors l'algèbre $\mathfrak{Isom}(M, g)$ est isomorphe à une somme $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$, où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe semi-simple compact, $\mathfrak{a}$ est abélienne, et $\mathfrak{s}$ est ou bien triviale, ou bien de l'un des types suivants :

a) L'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

b) Une algèbre de Heisenberg $\mathfrak{Heis}(2k+1)$, pour un certain entier k.

c) Une algèbre de Heisenberg tordue $\mathbb{R} \ltimes \mathfrak{Heis}(2k+1)$.

Le théorème est optimal dans la mesure où toutes ces algèbres sont effectivement réalisées comme $\mathfrak{Isom}(M, g)$, pour une variété lorentzienne compacte (M, g) adéquate.

4.3 Idées de la preuve du théorème de Zimmer

Les idées clés dans la preuve du théorème de Zimmer mélangent la théorie ergodique et les propriétés des actions algébriques. Ces idées seront également centrales dans les travaux présentés en section 4.4. Aussi, nous allons essayer de les exposer succintement.

4.3.1 Actions algébriques préservant une mesure

La preuve de Zimmer va s'appuyer sur des résultats qui remontent à A. Borel et H. Fürstenberg concernant les mesures boréliennes finies sur l'espace projectif $\mathbf{RP}^m$, invariantes sous l'action d'un groupe algébrique $H \subset \mathrm{GL}(m+1, \mathbb{R})$. Pour de telles actions, deux phénomènes "antagonistes" vont coexister. D'une part, une dynamique assez simple : les orbites d'un groupe algébrique sur $\mathbf{RP}^m$ sont des sous-variétés (pas forcément fermées). D'autre part, des phénomènes de récurrence venant du fait qu'une mesure finie est préservée.

Prenons l'exemple d'un groupe à un paramètre $\{\varphi^t\} \subset \mathrm{GL}(m+1, \mathbb{R})$, diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Les orbites de $\{\varphi^t\}$ sur $\mathbf{RP}^m$ sont de deux natures : des points fixes, ou des sous-variétés difféomorphes à $\mathbb{R}$. On voit en particulier que les seuls points récurrents sont les points fixes de $\{\varphi^t\}$. Si maintenant $\{\varphi^t\}$ préserve une mesure borélienne finie sur $\mathbf{RP}^m$, le théorème de récurrence de Poincaré affirme que ν-presque tout point est récurrent. On conclut que le support de la mesure ν doit être inclus dans les points fixes de $\{\varphi^t\}$. On obtient une conclusion similaire si $\{\varphi^t\}$ est un groupe à un paramètre de transformations unipotentes de $\mathrm{GL}(m+1, \mathbb{R})$.

Soit maintenant H un sous-groupe algébrique de $GL(m+1, \mathbb{R})$. On suppose que H préserve une mesure borélienne finie ν sur $\mathbf{RP}^m$. Appellons H' le sous-groupe de H engendré par les groupes à un paramètres diagonalisables sur $\mathbb{R}$ et unipotents de H (si H est compact, H' se réduit à l'identité). Clairement, H' est un sous-groupe normal de H, et ce qui précède montre que le support de ν est inclus dans les points fixes de H'. La même conclusion est vraie pour le sous-groupe $\overline{H}'$, adhérence pour la topologie forte de H' dans H. En fait le groupe de Lie quotient $H/\overline{H}'$ est compact. En effet, ce groupe a un nombre fini de composantes connexes, puisque par algébricité, c'est le cas de H. Il suffit donc de s'assurer que la composante neutre de $H/\overline{H}'$ est compacte. Si $\pi : H \to H/\overline{H}'$ désigne le morphisme de projection, tout groupe à un paramètre de $H/\overline{H}'$ va sécrire $\pi(h^t)$, où h^t est un groupe à un paramètre de H. La décomposition de Jordan assure que $h^t = h^t_s.h^t_u.h^t_e$ où h^t_s, h^t_u et h^t_e sont des sous-groupes à un paramètre de H qui sont respectivement hyperbolique, unipotent et elliptique, c'est-à-dire que $\{h^t_e\}$ est relativement compact dans H. Ainsi $\{\pi(h^t)\} = \{\pi(h^t_e)\}$ est relativement compact dans $H/\overline{H}'$. On peut alors conclure, car un groupe de Lie connexe dont tous les sous-groupes à un paramètre sont relativement compacts est compact (voir une jolie preuve de ce fait dans [Da88]).

L'ensemble $\mathrm{Fix}(H') = \mathrm{Fix}(\overline{H}')$ est une réunion finie F de sous-espaces projectifs de $\mathbf{RP}^m$, et cette réunion est invariante sous l'action de H. On conclut que le sous-groupe H_0 de H qui agit trivialement sur F est normal dans H, algébrique, et cocompact puisqu'il contient $\overline{H}'$. On retrouve un

énoncé classique :

Théorème 4.7 (Théorème de densité de Borel)**.** *Si un groupe algébrique $H \subset GL(m+1, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbf{RP}^m$ en préservant une mesure borélienne finie ν, alors il existe un sous-groupe algébrique normal et cocompact $H_0 \subset H$ qui agit trivialement sur le support de ν.*

Autrement dit, du point de vue de la mesure, les actions algébriques se factorisent par des actions de groupes compacts.

Remarque 4.8. *Le théorème 4.7 reste valable avec la même preuve si au lieu d'être supposé algébrique, le groupe H est presque-algébrique, c'est-à-dire d'indice fini dans sa clôture de Zariski. Le groupe H_0 du théorème est alors presque-algébrique dans H.*

4.3.2 Applications de Gauss

La seconde idée importante dans les travaux de R. Zimmer est de remarquer que l'action d'un groupe de Lie H sur une variété M définit naturellement des applications H-équivariantes de M dans des variétés algébriques (ou des espaces qui sont "presque" des variétés algébriques). Lorsque H préserve une mesure finie μ sur M, ces applications vont pousser notre système dynamique mesuré initial, qui consiste en l'action de H sur (M, μ), sur un nouveau système dynamique mesuré "algébrique", qui aura des points fixes par le théorème 4.7. Souvent, l'existence de ces points fixes s'interprétera en termes géométriques sur l'action de H.

L'exemple le plus simple est donné par *l'application de Gauss* de l'action de H (cette terminologie est due à [DaG90]). Cette application $\sigma : M \to \mathrm{Gr}(\mathfrak{h})$ va de M dans la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{h}$; elle associe à chaque point x de M l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_x$ du stabilisateur de x dans H. Notons que $\mathrm{Gr}(\mathfrak{h})$ est une réunion disjointe de variétés projectives, via le plongement de Plücker. Le groupe $\mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ agit naturellement par transformations projectives de $\mathrm{Gr}(\mathfrak{h})$, et σ est H-équivariante, l'action de H sur $\mathrm{Gr}(\mathfrak{h})$ se faisant via la représentation adjointe $\mathrm{Ad} : H \to \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$.

Dans les cas où le groupe H préserve une structure géométrique sur M, d'autres applications de Gauss peuvent apparaître. Par exemple, supposons que H agisse par isométries d'une variété pseudo-riemannienne (M, g). Chaque élément $X \in \mathfrak{h}$ définit un champ de vecteurs X^* sur M par la relation $X^*(x) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(e^{tX}.x)$. Appelons $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$ l'espace des formes bilinéaires symétriques sur $\mathfrak{h}$. On peut définir une application $\beta : M \to \mathcal{S}(\mathfrak{h})$ par :

$$\beta_x(X, Y) = g_x(X^*(x), Y^*(x)).$$

Le groupe $\mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ agit sur $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$ de manière naturelle comme suit. Pour tout $h \in \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$:

$$h.\beta(X,Y) = \beta(h^{-1}X, h^{-1}.Y).$$

L'application β est également H-équivariante, où l'action de H sur $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$ se fait via la représentation $\mathrm{Ad} : H \to \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$.

4.3.3 Preuve du théorème pour les actions isométriques

Expliquons maintenant comment on peut tirer parti des applications de Gauss pour démontrer le théorème 4.4. Nous faisons la preuve dans le cas où H est un groupe simple non compact qui agit isométriquement sur une variété pseudo-riemannienne (M, g), avec M compacte et g de de signature (p, q), $1 \leq p \leq q$. Autrement dit, l'action de H préserve une $O(p, q)$-structure. Dans ce cas, il existe une mesure finie non nulle μ, de support total, naturellement définie par la métrique g, et invariante par l'action de H. On considère maintenant l'ouvert H-invariant Ω où les orbites de H sont de dimension maximale n_0, et l'application $\sigma \times \beta : \Omega \to \mathrm{Gr}_{n_0}(\mathfrak{h}) \times \mathcal{S}(\mathfrak{h})$. Comme la mesure μ charge l'ouvert Ω, on la pousse en avant par $\sigma \times \beta$ pour obtenir une mesure finie non nulle ν, H-invariante sur $\mathrm{Gr}_{n_0}(\mathfrak{h}) \times \mathcal{S}(\mathfrak{h})$. L'espace $\mathrm{Gr}_{n_0}(\mathfrak{h}) \times \mathcal{S}(\mathfrak{h})$ est un ouvert d'une sous-variété projective de $\mathbf{RP}^m$, pour un certain entier m, et l'action de H transite par un sous-groupe de Lie simple – donc presque algébrique – de $\mathrm{GL}(m+1, \mathbb{R})$. Le théorème de densité de Borel 4.7 s'applique : pour μ-presque tout point x de Ω, le couple (σ_x, β_x) est $\mathrm{Ad}\, H$-invariant. Dire que σ_x est $\mathrm{Ad}\, H$-invariant signifie que l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_x$ du stabilisateur de x est un idéal de $\mathfrak{h}$. Par simplicité de $\mathfrak{h}$, on a $\mathfrak{h}_x = \{0\}$ ou $\mathfrak{h}_x = \mathfrak{h}$. Comme on a supposé l'action de H non triviale, les orbites de H dans Ω sont de dimension au moins 1, donc $\mathfrak{h}_x = \mathfrak{h}$ est exclu et l'action en x est localement libre, c'est-à-dire que la dimension de l'orbite $H.x$ est la dimension de H. On exploite maintenant le fait que β_x est $\mathrm{Ad}\, H$-invariante. Le radical de la forme β_x doit alors être un idéal de $\mathfrak{h}$. On conclut que β_x est ou bien nulle, ou bien non dégénérée, de signature (p', q').

a) Si β_x est nulle, alors l'orbite $H.x$ est totalement isotrope pour la métrique g. Comme l'action de H est localement libre en x, on conclut en particulier que $\dim H \leq p$ (et par conséquent $p \geq 3$). Le point 2 du théorème 4.4 s'ensuit puisque via la représentation $\mathrm{ad} : \mathfrak{h} \to \mathrm{End}\,(\mathfrak{h})$, l'algèbre $\mathfrak{h}$ s'injecte dans $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$, où $d = \dim H$, et $\mathfrak{o}(p, q)$ contient une sous-algèbre conjuguée dans $\mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{R})$ à :

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0_{p+q-2d} & 0 \\ 0 & 0 & -{}^tA \end{pmatrix},\ A \in \mathfrak{sl}(d, \mathbb{R}) \right\}.$$

b) Si β_x n'est pas nulle, alors la restriction de g à l'orbite $H.x$ est non dégénérée, de signature (p', q'). Ainsi $p' \leq p$ et $q' \leq q$. Le groupe $\mathrm{Ad}\,(H)$ se voit comme un sous-groupe de $O(p', q')$, et le théorème 4.4 en découle.

Dans le cas général, R. Zimmer prouve le théorème 4.4 en utilisant l'application de Gauss σ, ainsi que la notion *d'enveloppe algébrique* que nous n'évoquerons pas ici. Le lecteur trouvera une présentation claire et concise de la preuve dans [WMZ88].

4.4 Théorème de plongement pour les géométries de Cartan

Il y a deux hypothèses contraignantes dans l'énoncé du théorème 4.4, qu'il est naturel de vouloir assouplir. La première est l'hypothèse de simplicité sur le groupe H. La seconde porte sur la G-structure considérée. En effet, le groupe G est supposé être inclus dans $\mathrm{SL}'(n, \mathbb{R})$, ce qui revient essentiellement à l'existence d'une mesure lisse invariante sous l'action de H. Or il existe des structures géométriques intéressantes pour lesquelles cette hypothèse n'est pas satisfaite. C'est le cas par exemple des structures conformes pseudo-riemanniennes, pour lesquelles le groupe G est $\mathbb{R}_+^* \times O(p, q)$, où le facteur $\mathbb{R}_+^*$ correspond aux homothéties. Le théorème 4.4 ne fournit donc aucune information pour de telles structures, et d'ailleurs son énoncé est mis en défaut : le groupe de Möbius $O(1, n+1)$ agit conformément – *i.e* en préservant une $\mathbb{R}_+^* \times O(n)$-structure – sur la sphère standard $\mathbf{S}^n$, et pourtant il n'existe aucun plongement d'algèbres de Lie de $\mathfrak{o}(1, n+1)$ dans $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{o}(n)$.

Nous allons présenter un théorème de plongement dans le même esprit que celui de Zimmer, qui apporte des informations substantielles sur le groupe d'automorphismes de structures géométriques qui ne définissent pas nécessairement une mesure lisse sur la variété M. Dans le cas des métriques lorentziennes ou pseudo-riemanniennes, le théorème permet de retrouver le résultat de Zimmer, et d'obtenir aussi des renseignements lorsque le groupe qui agit n'est pas simple. Par ailleurs, ce théorème de plongement va également fournir des informations géométriques sur l'action, qui permettent d'aboutir à des résultats de rigidité que nous présenterons section 4.5.2 (voir le théorème 4.11).

Le point de vue adopté va être légèrement différent de celui de Zimmer, puisqu'au lieu de considérer des G-structures, nous allons nous placer dans le cadre des géométries de Cartan.

4.4.1 De nouvelles applications de Gauss

Considérons donc un groupe de Lie H, agissant par automorphismes d'une géométrie de Cartan $(M, \hat{M}, \omega)$ modelée sur un espace homogène $\mathbf{X} = G/P$. Il y a une restriction technique dans les énoncés que nous allons donner, qui est que *le groupe $Ad\,P$ est supposé presque algébrique dans $GL(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire qu'il est d'indice fini dans sa clôture de Zariski.* Dans toutes les géométries "classiques", cette hypothèse est satisfaite.

L'intérêt de travailler avec des géométries de Cartan vient du fait que de nouvelles applications de Gauss vont apparaître. Pour définir ces applications, il faut considérer l'action du groupe sur le fibré $\hat{M}$ plutôt que sur M elle-même. Soit X un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, et $\{\varphi_X^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ le groupe à un paramètre de difféomorphismes qu'il induit sur $\hat{M}$. En posant en chaque point $\hat{x}$ de $\hat{M}$

$$\hat{X}(\hat{x}) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \varphi_X^t.\hat{x},$$

on définit un champ de vecteurs sur $\hat{M}$. On hérite alors d'une application linéaire $\hat{\alpha}_{\hat{x}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ définie par

$$\hat{\alpha}_{\hat{x}}(X) = \omega_{\hat{x}}(\hat{X}(\hat{x})).$$

Comme nous l'avons déjà souligné, l'action de H sur $\hat{M}$ préserve un parallélisme, et par conséquent cette action est libre. L'application $\hat{\alpha}_{\hat{x}}$ est donc *injective*, et $\hat{\alpha}_{\hat{x}}$ identifie en chaque point $\hat{x}$ de $\hat{M}$ l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ à un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}_{\hat{x}} = \hat{\alpha}_{\hat{x}}(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{g}$. Notons bien que cette identification est linéaire, mais n'est pas un morphisme d'algèbres de Lie (sauf aux points où la courbure de la connexion de Cartan s'annule, voir [BFM09, Lemme 2.1]). Finalement, nous obtenons une nouvelle application de Gauss :

$$\begin{array}{rccc} \hat{\alpha} : & \hat{M} & \to & \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) \\ & \hat{x} & \mapsto & \hat{\alpha}_{\hat{x}} \end{array}$$

Le groupe $\mathrm{GL}(\mathfrak{h}) \times \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ agit sur $\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ de la manière suivante :

$$(l_1, l_2).\alpha(u) = l_2^{-1}(\alpha(l_1^{-1}(u))).$$

On vérifie que α est $H \times P$ équivariante, l'action de $H \times P$ sur $\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ transitant par le morphisme $\rho : H \times P \to \mathrm{GL}(\mathfrak{h}) \times \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, qui à (h, p) associe $(\mathrm{Ad}\,h, \mathrm{Ad}\,p)$.

Remarquons que $\omega_{\hat{x}}^{-1}(\mathfrak{h}_{\hat{x}} \cap \mathfrak{p})$ est l'algèbre de Lie du stabilisateur de x dans H (les points où $\mathfrak{h}_{\hat{x}}$ est transverse à l'algèbre $\mathfrak{p}$ se projettent donc sur les points $x \in M$ où l'action est localement libre). Remarquons également que l'application $\hat{M} \to \mathrm{Gr}(\mathfrak{h})$, qui à $\hat{x} \in \hat{M}$ associe $(\hat{\alpha}_{\hat{x}})^{-1}(\mathfrak{h}_{\hat{x}} \cap \mathfrak{p})$ est invariante

sous l'action de P, et induit sur M l'application de Gauss $\sigma : M \to \mathrm{Gr}(\mathfrak{h})$ utilisée par R. Zimmer. Mais comme nous allons le voir, $\hat{\alpha}$ véhicule beaucoup plus d'information que σ.

4.4.2 Énoncé du théorème de plongement

Avant d'énoncer notre théorème de plongement, nous introduisons les notations suivantes. Si S est un sous-groupe du groupe H, alors on désigne par S^* l'adhérence de Zariski, dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{h})$, du groupe $\mathrm{Ad}\, S$. Ce groupe algébrique S^* a pour algèbre de Lie $\mathfrak{s}^*$, que l'on voit comme une sous-algèbre de $\mathrm{End}\ (\mathfrak{h})$. Rappelons que nous avons fait l'hypothèse que $\mathrm{Ad}\, P$ était presque algébrique.

Théorème 4.9. *[BFM09, Théorème 4.1] Soit $(M, \mathcal{C})$ une géométrie de Cartan modelée sur un espace $\mathbf{X} = G/P$. Soit H un groupe de Lie agissant par automorphismes de $(M, \mathcal{C})$, et S un sous-groupe de H préservant une mesure borélienne finie μ sur M. Si S^* ne comporte aucun sous-groupe algébrique normal et cocompact, alors il existe un ensemble $\Lambda \subset M$ de mesure pleine relativement à μ, tel que pour tout $\hat{x} \in \hat{M}$ au-dessus de x, il existe une sous-algèbre $\mathfrak{s}^*_{\hat{x}} \subset \mathrm{ad}\, \mathfrak{p}$ isomorphe à $\mathfrak{s}^*$, laissant $\mathfrak{h}_{\hat{x}}$ invariant, et telle que $\hat{\alpha}_{\hat{x}}$ conjugue l'action de $\mathfrak{s}^*_{\hat{x}}$ sur $\mathfrak{h}_{\hat{x}}$ à celle de $\mathfrak{s}^*$ sur $\mathfrak{h}$.*

L'énoncé un peu technique du théorème mérite quelques commentaires.

a) Le théorème 4.9 comporte encore une hypothèse sur l'existence d'une mesure invariante, mais il faut noter que celle-ci porte sur le sous-groupe S, et non sur le groupe H en entier. Aussi, lorsque M est une variété compacte, le théorème va s'appliquer à tout sous-groupe $S \subset H$ qui est moyennable (par exemple résoluble). En effet, de tels groupes préservent automatiquement une mesure finie sur M.

b) Aucune hypothèse algébrique n'est faite sur le groupe H. De plus, ce groupe peut ne pas être connexe, mais le théorème n'apporte (hélas) aucune information pour des actions de groupes discrets. La seule hypothèse de nature algébrique porte sur S^*, et elle sera satisfaite en pratique pour de nombreux sous-groupes S. Il est important de noter que la conclusion du théorème porte sur l'algèbre $\mathfrak{s}^*$, qui peut être beaucoup plus grosse que $\mathrm{ad}\, \mathfrak{s}$. Par exemple, un groupe discret S peut donner lieu à une algèbre $\mathfrak{s}^*$ non triviale.

c) Concernant les restrictions algébriques que le théorème 4.9 peut apporter sur le groupe H, on trouve un énoncé de portée comparable (mais peut-être moins maniable) dans [Gr86, Section 5.2.A]. L'intérêt du théorème 4.9

réside plus dans les informations géométriques qu'il apporte sur l'action de H. En effet pour certains groupes S, les conclusions du théorème vont impliquer que sur l'ensemble Λ, le sous-espace $\mathfrak{h}_{\hat{x}}$ ne peut pas être transverse à $\mathfrak{p}$. On aura donc des groupes à un paramètre de H qui stabilisent les points de Λ, et l'étude dynamique au voisinage de ces points fixes peut apporter beaucoup de renseignements : c'est l'idée qui conduit au théorème de rigidité 4.11 que nous verrons un peu plus loin.

4.4.3 Idées de preuve

Au vu des outils introduits dans la section 4.3, la preuve va découler de la remarque suivante : les conclusions du théorème sont satisfaites en tout point $\hat{x}$ de $\hat{M}$ où la S^*-orbite de $\hat{\alpha}_{\hat{x}}$ est incluse dans la P^*-orbite de $\hat{\alpha}_{\hat{x}}$. En effet, si $\hat{x}$ est un tel point, alors pour tout $s^* \in S^*$, il existe $p^* \in P^*$, laissant $\mathfrak{h}_{\hat{x}}$ invariant, et tel que la restriction de p^* à $\mathfrak{h}_{\hat{x}}$ soit exactement $\hat{\alpha}_{\hat{x}} s^* \hat{\alpha}_{\hat{x}}^{-1}$. Ainsi, l'algèbre $\hat{\alpha}_{\hat{x}}.\mathfrak{s}^*.\hat{\alpha}_{\hat{x}}^{-1}$ est la restriction à $\mathfrak{h}_{\hat{x}}$ d'une sous-algèbre de $\operatorname{ad}\mathfrak{p}$ (rappelons que $\operatorname{ad}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^*$ car $\operatorname{Ad} P$ est supposé presque algébrique). Il suffit alors de poser $\mathfrak{s}^*_{\hat{x}} = \hat{\alpha}_{\hat{x}}.\mathfrak{s}^*.\hat{\alpha}_{\hat{x}}^{-1}$ pour obtenir le théorème 4.9.

L'application $\hat{\alpha} : \hat{M} \to \operatorname{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{p})$ descend en une application S-équivariante $\alpha : M \to W$, où $W = \operatorname{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})/P^*$. Tout revient donc à montrer l'existence d'un ensemble Λ de μ-mesure pleine pour lequel α_x est un point fixe de l'action de S^* sur W. On va se ramener au théorème 4.7 en remarquant que même si W n'est pas à proprement parler une variété algébrique, l'action de S^* sur W possède les caractéristiques d'une action algébrique. Par exemple, les orbites de S^* sur W sont localement fermées. Si l'on suppose la mesure μ ergodique, ce que nous faisons dans un premier temps, alors la mesure image $\nu = \alpha_*(\mu)$, qui est S-invariante, va être portée par une seule S^*-orbite (ceci découle de [Zim84a, Proposition 2.1.12]). Cette orbite est un espace homogène S^*/S^*_w, et l'on vérifie que le stabilisateur S^*_w est un sous-groupe presque algébrique de S^*. Maintenant, sur l'espace homogène S^*/S^*_w, le sous-groupe de S^* qui laisse la mesure ν invariante est lui-même algébrique. Cest un fait remarquable observé par S.G Dani dans [D82, Corollaire 2.6]. La mesure ν sur S^*/S^*_w est donc invariante par S^*, car S est supposé Zariski dense dans S^*. Enfin, on peut conclure par un théorème de Chevalley, qui nous assure qu'il va exister un morphisme algébrique injectif $\rho : S^* \to \mathrm{GL}(m+1, \mathbb{R})$, pour un certain $m \in \mathbb{N}$, de sorte que $\rho(S^*_w)$ soit exactement le stabilisateur, dans $\rho(S^*)$, d'une direction $\mathbb{R}.v \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Ainsi, on peut pousser la mesure ν en une mesure ν' sur l'espace projectif $\mathbf{RP}^m$, invariante par le groupe $\rho(S^*)$. Le théorème 4.7 va assurer l'existence de $S^*_0 \subset S^*$, normal, cocompact et algébrique, de sorte que l'action de S^*_0 sur l'orbite S^*/S^*_w soit triviale. Par hypothèse, $S^*_0 = S^*$ et le support de ν est

bien contenu dans les points fixes de S^*.

Lorsque μ n'est pas ergodique, une décomposition de μ en composantes ergodiques permet de conclure.

4.5 Résultats de rigidité et illustration

L'énoncé du théorème 4.9 étant peu maniable au premier abord, nous allons énumérer un certain nombre de corollaires algébriques, qui donnent des obstructions pour qu'un groupe de Lie H puisse agir par automorphismes d'une géométrie de Cartan modelée sur un certain espace $\mathbf{X} = G/P$.

4.5.1 Bornes algébriques sur le groupe des automorphismes

Si $L \subset \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ est un groupe linéaire, on définit le *rang réel de* L comme la plus grande dimension d'un sous-groupe de L constitué de transformations simultanément diagonalisables sur $\mathbb{R}$. On note ce rang $\mathrm{rg}(L)$. On peut aussi introduire le *rang algébrique* de L, noté $\mathrm{rg}^{\mathrm{alg}}(L)$ comme la plus grande dimension de la clôture de Zariski d'un sous-groupe de L constitué de transformations simultanément diagonalisables sur $\mathbb{R}$. L'inégalité $\mathrm{rg}(L) \leq \mathrm{rg}^{\mathrm{alg}}(L)$ est toujours vraie, et elle peut être stricte : il découle par exemple du résultat principal de [PR72], que si Γ est un réseau d'un groupe simple non compact L de rang réel $r > 0$, alors $\mathrm{rg}(\Gamma) = 0$ tandis que $\mathrm{rg}^{\mathrm{alg}}(\Gamma) = r$.

Si L est un groupe de Lie connexe, et si $\mathfrak{l}$ désigne son algèbre de Lie, on note $\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{l}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathfrak{l}_k = [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}_{k-1}]$. Le groupe est dit nilpotent si $\mathfrak{l}_k = \{0\}$ pour un certain entier k, et le plus petit entier k pour lequel $\mathfrak{l}_k$ est trivial s'appelle le *degré de nilpotence* de L, noté $n(L)$. Si L est un groupe de Lie quelconque (pas nécessairement nilpotent, ni connexe), on note $n(L)$ le degré de nilpotence maximal d'un sous-groupe de Lie connexe nilpotent de L.

Du théorème 4.9, on tire le corollaire suivant.

Corollaire 4.10. *[BFM09, Théorème 1.3] Soit $(M, \mathcal{C})$ une géométrie de Cartan modelée sur l'espace $\mathbf{X} = G/P$. Soit H un sous-groupe de Lie de $\mathrm{Aut}\, M$, tel que le noyau du morhisme $Ad : H \to GL(\mathfrak{h})$ soit moyennable. On suppose la variété M compacte. Alors :*

1. $rg^{alg}(Ad\, H) \leq rg(Ad\, P)$.
2. $n(Ad\, H) \leq n(Ad\, P)$.

Rappelons que $\mathrm{Ad}\, P$ désigne l'image de P par la représentation adjointe de G, $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. C'est donc un sous groupe de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ (et pas de $\mathrm{GL}(\mathfrak{p})$).

L'énoncé du corollaire ne fait plus du tout référence à une mesure finie invariante. En revanche, il ne s'applique qu'aux variétés compactes. Pour des actions d'un groupe de Lie H simple, connexe, préservant une G-structure sur une variété compacte M, R. Zimmer a obtenu dans [Zim87b] la majoration $\mathrm{rg}(H) \leq \mathrm{rg}(G)$. L'intérêt du corollaire 4.10 est qu'il s'applique aussi à des actions de groupes qui ne sont pas simples. Par exemple, nous listons en section 4.5.3 quelques applications du corollaire pour des actions de groupes dont la composante neutre est soit abélienne, soit nilpotente.

4.5.2 Un résultat de rigidité

Dans [Da88], G. D'Ambra et M. Gromov énoncent un principe général, selon lequel les structures géométriques rigides admettant un gros groupe d'automorphismes doivent être suffisamment rares et spéciales pour être classifiées. Les théorèmes 2.8, ou 2.11 en sont des illustrations. Il existe de nombreuses autres situations pour lesquelles ce principe est vérifié. Par exemple, si pour l'action d'un groupe H sur une géométrie de Cartan compacte $(M, \mathcal{C})$, les bornes données par le corollaire 4.10 sont atteintes, que peut-on dire de la géométrie $(M, \mathcal{C})$? Pour le cas des structures conformes pseudo-riemanniennes, nous pouvons résumer la situation dans l'énoncé suivant, obtenu à partir des travaux [BFM09] et [FrM10].

Théorème 4.11. *[BFM09, Théorème 1.5], [FrM10, Théorèmes 1.1 et 1.2] Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de signature (p, q), avec $p+q \geq 3$ et $p \leq q$. On suppose qu'un groupe de Lie connexe H agit sur M par transformations conformes. On a les majorations suivantes sur le rang et l'indice de nilpotence de H :*

- *$rg(Ad\, H) \leq p + 1$.*
- *$n(H) \leq 2p + 1$.*

Si l'une de ces bornes est atteinte, alors la variété M est conformément équivalente à un quotient $\Gamma \backslash \widetilde{\mathbf{Ein}}^{p,q}$, pour un certain groupe discret

$$\Gamma \subset \tilde{O}(p + 1, q + 1).$$

La borne sur le rang découle directement du corollaire 4.10 puisque les structures pseudo-riemanniennes conformes de signature (p, q) sont des géométries de Cartan modelées sur $\mathbf{Ein}^{p,q} = PO(p + 1, q + 1)/P$. Ici le rang de

$\operatorname{Ad} P$ est celui de $PO(p+1, q+1)$, à savoir $p+1$. En revanche la borne sur le degré de nilpotence améliore celle prédite par le corollaire 4.10, qui était $n(H) \leq 2p+2$.

Lorsque la signature est riemannienne, le résultat découle trivialement du théorème 2.8. Si H est un groupe *simple* de rang $p+1$ agissant sur une variété de signature (p, q), le théorème est couvert par l'article [BN02] complété par [FrZ05]. En fait, le théorème 1.5 de [BFM09] démontre un résultat de rigidité plus général, valable pour toutes les géométries paraboliques (dont les structures conformes font partie). Par ailleurs, dans le cas d'une action *isométrique* d'un groupe H sur une variété pseudo-riemannienne compacte de signature (p, q), le corollaire 4.10 fournit les majorations $\operatorname{rg}(\operatorname{Ad} H) \leq p$ et $n(H) \leq 2p$. Ainsi, les bornes du théorème 4.11 ne sont jamais atteintes pour une action isométrique, et le théorème fournit un exemple supplémentaire où l'existence d'un phénomène conforme essentiel contraint beaucoup la géométrie.

Idée de preuve. — La preuve s'effectue en deux étapes. La première consiste à combiner les hypothèses algébriques sur le groupe H, et le théorème 4.9 pour obtenir des informations géométriques sur l'action de H. Reprenons les notations du théorème 4.9, ainsi que celles de sa preuve. L'idée est que si H possède des sous-groupes moyennables S suffisamment gros par rapport au groupe $G = PO(p+1, q+1)$, alors pour tout x dans l'ensemble Λ, l'espace $\mathfrak{h}_{\hat{x}}$ ne pourra pas être transverse à $\mathfrak{p}$, et l'action va admettre des stabilisateurs de points non triviaux, dont la dynamique locale pourra être exploitée pour annuler la courbure conforme.

Nous présentons brièvement les arguments lorsque le groupe H satisfait l'hypothèse $\operatorname{rg}(\operatorname{Ad} H) = p+1$. Cette hypothèse implique l'existence d'un groupe abélien connexe $A_H \subset H$ tel que $\operatorname{Ad} A_H \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et de dimension $p+1$. Si l'on applique le théorème 4.9 pour $S = A_H$, on hérite d'un point $x \in M$, d'une algèbre de Lie $\mathfrak{s}^*_{\hat{x}} \subset \operatorname{ad} \mathfrak{p}$ qui laisse invariante $\mathfrak{h}_{\hat{x}}$ et contient une sous-algèbre abélienne, diagonalisable sur $\mathbb{R}$, de dimension $p+1$. Comme le rang de $PO(p+1, q+1)$ est $p+1$, $\mathfrak{s}^*_{\hat{x}}$ contient $\operatorname{ad} \mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$ contenue dans $\mathfrak{p}$. En particulier, comme $\operatorname{Ad} A_H$ agit trivialement sur $\mathfrak{a}_H$, $\operatorname{ad} \mathfrak{a}$ agit trivialement sur $\alpha_{\hat{x}}(\mathfrak{a}_H)$. Or le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$ est une sous-algèbre $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$, où $\mathfrak{m}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe compact. Nous obtenons donc $\alpha_{\hat{x}}(\mathfrak{a}_H) \subset \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$, ce qui a la conséquence géométrique suivante : il existe un élément $h \in H$ qui fixe le point x, et dont l'action sur un voisinage U de x est conjuguée de manière lisse à celle d'une contraction linéaire $x \mapsto \lambda.A$, avec $0 < \lambda < 1$ et $A \in O(n)$. Pour tout $y \in U$, le tenseur de Weyl satisfait

la relation d'équivariance

$$D_y h^k(W_y(u,v,w)) = W_{h^k(y)}(D_y h^k(u), D_y h^k(v), D_y h^k(w)).$$

Ceci conduit, par le même argument que celui exposé en section 3.3.2, à $W = 0$ sur U. L'analyse étant valable sur tout fermé invariant par H, on obtient que l'ensemble des points où la courbure conforme s'annule est non vide, fermé et ouvert dans M. La variété (M, g) est donc conformément plate, et M est une $(PO(p+1, q+1), \mathbf{Ein}^{p,q})$-structure. On utilise alors les outils standard pour l'étude des $(G, \mathbf{X})$-structures (application développante, morphisme d'holonomie) pour conclure que notre $(PO(p+1, q+1), \mathbf{Ein}^{p,q})$-structure est complète.

4.5.3 Illustration

Nous illustrons le corollaire 4.10 et le théorème 4.11 sur quelques exemples explicites.

- Pour $n \geq 2$, soit $\Gamma_n = \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n$ le sous-groupe du groupe des transformations affines $GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$. Le rang réel de $\mathrm{Ad}\,\Gamma_n$ est nul, mais son rang algébrique vaut $n-1$.

- Pour $n \geq 2$, on introduit $R_n = L_n \ltimes \mathbb{R}^n$ le sous-groupe du groupe des transformations affines de $\mathbb{R}^n$, où

$$L_n = \left\{ \begin{pmatrix} e^{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{t_n} \end{pmatrix},\ (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

  Le groupe R_n est un produit semi-direct $\mathbb{R}^n \ltimes \mathbb{R}^n$. Le rang réel de $\mathrm{Ad}\,(R_n)$ et son rang algébrique valent n.

- Pour tout $n \geq 2$, le groupe U_n des matrices triangulaires supérieures de taille n, avec 1 sur la diagonale, est nilpotent de degré de nilpotence égal à $n-1$, et $n(\mathrm{Ad}\,(U_n)) = n-2$.

a) Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne compacte de signature (p, q), où $1 \leq p \leq q$. L'espace modèle des structures pseudo-riemanniennes de signature (p, q), est $\mathbf{X} = G/P$ où $G = O(p, q) \ltimes \mathbb{R}^{p+q}$ et P est le sous-groupe linéaire $O(p, q)$. Le rang réel de $\mathrm{Ad}\,P \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est p, et son degré de nilpotence est $2p-1$.

   On sait par le théorème de Zimmer 4.4 que $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$ ne peut pas agir isométriquement sur M si $m \geq p+2$. Le corollaire 4.10 implique immédiatement, que la même conclusion est vraie pour le groupe Γ_m. De

même, il n'y a pas d'action isométrique de R_m sur (M, g) dès que $m \geq p+1$ et il en va de même pour U_m si $m \geq 2p+2$.

b) Si $p+q \geq 3$, la classe conforme de (M, g) comme au a) définit une unique géométrie normale de Cartan modelée sur l'espace $\mathbf{X} = G/P$ avec $G = O(p+1, q+1)$ et P le stabilisateur, dans $O(p+1, q+1)$, d'une direction isotrope. Le rang réel de $\operatorname{Ad} P$ est $p+1$, et son indice de nilpotence est $2p+1$. Il ne peut donc y avoir d'action conforme de Γ_m sur (M, g) dès que $m \geq p+3$. La même conclusion est vraie pour R_m lorsque $m \geq p+2$. Par ailleurs, d'après le théorème 4.11, toute action conforme de R_{p+1} ne peut se faire que sur un quotient $\Gamma \backslash \widetilde{\mathbf{Ein}}^{p,q}$. De même, si $m \geq 2p+3$, U_m ne peut agir conformément sur (M, g), et une action de U_{2p+2} ne peut se faire que sur une variété de la forme $\Gamma \backslash \widetilde{\mathbf{Ein}}^{p,q}$.

c) On considère maintenant une variété compacte M, de dimension $n \geq 2$, munie d'une connexion linéaire ∇. Cette connexion définit une unique géométrie de Cartan modelée sur l'espace affine $\mathbf{X} = G/P$, où $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ et $P = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Le rang réel de $\operatorname{Ad} P$ est n, et $n(\operatorname{Ad} P) = n-1$. On conclut que si $m \geq n+2$, ni Γ_m, ni U_m ne peuvent agir sur M en préservant ∇ (remarquons que l'on ne fait pas l'hypothèse que Γ_m ou U_m préservent une mesure finie sur M). La même conclusion est valable pour R_m si $m \geq n+1$.

Chapitre 5

Problèmes d'existence et d'unicité de plongements géométriques.

Dans ce dernier chapitre, nous présentons des résultats que nous avons obtenus concernant d'une part, l'unicité de bords conformes pour certaines variétés pseudo-riemanniennes, et d'autre part la maximalité conforme de certains espaces. Ces résultats sont essentiellement tirés des articles [Fr12c] et [Fr12d]. Les sections 5.1, 5.2 et 5.3 sont descriptives. L'accent sera mis sur des exemples concrets illustrant nos théorèmes. La dernière section 5.4 introduit la notion de bord de Cauchy d'une géométrie de Cartan, et exlique comment elle peut être utilisée dans la preuve des résultats présentés.

5.1 Plongements et bords géométriques

Soit $\mathbf{X} = G/P$ un espace homogène. On considère deux géométries de Cartan $(M, \mathcal{C})$ et $(N, \mathcal{C}')$ modelées sur l'espace $\mathbf{X}$ (notons qu'en particulier, M et N ont même dimension), de fibrés et connexions de Cartan $(\hat{M}, \omega^M)$ et $(\hat{N}, \omega^N)$ respectivement. Un *plongement géométrique* $f : (M, \mathcal{C}) \to (N, \mathcal{C}')$ est une application lisse injective qui se remonte en un plongement P-équivariant $\hat{f} : \hat{M} \to \hat{N}$ satisfaisant de plus $\hat{f}^*\omega^N = \omega^M$. Lorsque N est compacte, on dit que $(N, \mathcal{C}')$ est *une compactification géométrique* de $(M, \mathcal{C})$.

Par exemple, l'unicité de la géométrie normale de Cartan associée à une structure conforme fait que tout plongement conforme $f : (M, g) \to (N, h)$ entre deux variétés pseudo-riemannienne de dimension ≥ 3 est un plongement géométrique si l'on considère les deux géométries normales de Cartan associées à $(M, [g])$ et $(N, [h])$.

Si $f : (M, \mathcal{C}) \to (N, \mathcal{C}')$ est un plongement géométrique *strict* (c'est-à-dire non surjectif), alors on appellera le bord topologique $\partial(f(M))$ de $f(M)$ dans N un *bord géométrique de* M. Observons qu'avec cette définition, un bord géométrique n'est pas forcément une sous-variété, et peut être au contraire un ensemble extrêmement irrégulier.

Quelques exemples de plongements et de bords géométriques.

a) *Compactification conforme des espaces modèles pseudo-riemanniens à courbure constante.* — L'espace euclidien $\mathbf{E}^n$ et l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^n$ se plongent tous les deux dans la sphère standard $\mathbf{S}^n$. Les images de ces plongements sont respectivement la sphère privée d'un point, et un hémisphère. Ces plongements attribuent donc respectivement un point, et une sphère $\mathbf{S}^{n-1}$ pour bords conformes à $\mathbf{E}^n$ et $\mathbf{H}^n$. C'est une propriété générale qu'en toute signature (p, q), les espaces modèles à courbure constante se plongent conformément dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Nous donnons quelques détails ci-dessous.

- *Espaces de Minkowski* $\mathbf{E}^{p,q}$. Nous avons vu en section 1.1.1 qu'il existait un plongement conforme $\sigma : \mathbf{E}^{p,q} \to \mathbf{Ein}^{p,q}$ (projection stéréographique). L'univers d'Einstein $\mathbf{Ein}^{p,q}$ est donc une compactification conforme de l'espace de Minkowski $\mathbf{E}^{p,q}$. La projection stéréographique σ fournit un bord conforme à l'espace $\mathbf{E}^{p,q}$, qui comme nous l'avons déjà mentioné consiste en un point si $p = 0$, et un cône de lumière de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ lorsque $p \geq 1$ (en particulier ce bord n'est pas lisse pour $p \geq 1$).
- *Espaces de Sitter* $\mathbf{dS}^{p,q}$. On les définit pour $p \geq 1$. Il s'agit de la nappe
$$\Sigma_{+1} = \{x \in \mathbb{R}^{p+q+1} \mid Q^{p+1,q}(x) = +1\},$$
où l'on définit la forme quadratique $Q^{p,q}$ par la formule
$$Q^{p,q}(x) = -x_1^2 - \ldots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2.$$
Quand on munit Σ_{+1} du champ de formes quadratiques induit par $Q^{p+1,q}$, on obtient une variété pseudo-riemannienne simplement connexe de signature (p, q), géodésiquement complète, et à courbure sectionnelle constante égale à $+1$. On l'appelle espace de Sitter de signature (p, q), noté $\mathbf{dS}^{p,q}$.
On désigne par π la projection de $\mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\}$ sur l'espace projectif $\mathbf{RP}^{n+1}$, et on voit l'univers d'Einstein $\mathbf{Ein}^{p,q}$ comme le projectivisé du cône de lumière de la forme $Q^{p+1,q+1}$ (voir section 1.1.1).

Alors l'application $f : \mathbf{dS}^{p,q} \to \mathbf{Ein}^{p,q}$ définie par $(x_1, \ldots, x_{p+q+1}) \mapsto \pi((1, x_1, \ldots, x_{p+q+1}))$ définit un plongement conforme de $\mathbf{dS}^{p,q}$ dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$. L'image de ce plongement est dense, et sa frontière est un sous-univers d'Einstein de signature $(p-1, q)$ (obtenu comme la projection sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$ du cône de lumière d'un hyperplan de signature $(p, q+1)$ dans $(\mathbb{R}^{n+2}, Q^{p+1,q+1})$). Ainsi $\mathbf{Ein}^{p-1,q}$ est un bord conforme de $\mathbf{dS}^{p,q}$.

- *Espaces anti-de Sitter* $\mathbf{AdS}^{p,q}$. — Ici, $p \geq 0$, et on considère la nappe
$$\Sigma_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^{p+q+1} \mid Q^{p,q+1}(x) = -1\}.$$
Lorsque l'on induit sur Σ_{-1} la forme quadratique $Q^{p,q+1}$, on obtient une variété pseudo-riemannienne de signature (p, q), géodésiquement complète, et à courbure sectionnelle constante égale à -1. On l'appelle espace anti-de Sitter, noté $\mathbf{AdS}^{p,q}$. Pour $p = 0$, Σ_{-1} a deux composantes connexes. On n'en considère qu'une et $\mathbf{AdS}^{0,n}$ est l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^n$. Lorsque $p = 1$, $\mathbf{AdS}^{1,n-1}$ n'est pas simplement connexe.

  L'application $f : \mathbf{AdS}^{p,q} \to \mathbf{Ein}^{p,q}$ définie par $(x_1, \ldots, x_{p+q+1}) \mapsto \pi((x_1, \ldots, x_{p+q+1}, 1))$ est un plongement conforme de $\mathbf{AdS}^{p,q}$ sur un ouvert dense de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ obtenu en ôtant à $\mathbf{Ein}^{p,q}$ un sous-univers d'Einstein de signature $(p, q-1)$ (obtenu comme le projectivisé du cône de lumière d'un hyperplan de signature $(p+1, q)$ dans $(\mathbb{R}^{n+2}, Q^{p+1,q+1})$). L'espace $\mathbf{Ein}^{p,q-1}$ est donc un bord conforme de $\mathbf{AdS}^{p,q}$.

b) *Compactification projective des espaces modèles à courbure constante.* — Notons $\mathbf{S}^n_{proj}$ la sphère projective plate de dimension n, c'est-à-dire l'espace des demi-droites de $\mathbb{R}^{n+1}$. Chaque espace $\mathbf{E}^{p,q}$, $\mathbf{dS}^{p,q}$, $\mathbf{AdS}^{p,q}$ est muni d'une métrique pseudo-riemannienne à courbure constante. On va oublier la métrique et ne retenir que la connexion de Levi-Civita. Les structures sont géodésiquement complètes donc maximales au sein des structures affines. En revanche, elles ne sont pas projectivement maximales car chaque espace $\mathbf{E}^{p,q}$, $\mathbf{dS}^{p,q}$ et $\mathbf{AdS}^{p,q}$ se plonge projectivement comme un ouvert de $\mathbf{S}^{p+q}_{proj}$.

C'est évident pour $\mathbf{E}^{p,q}$, qui est projectivement la sphère $\mathbf{S}^{p+q}_{proj}$ privée d'une sous-sphère $\mathbf{S}^{p+q-1}_{proj}$ de codimension 1.

Pour les espaces $\mathbf{dS}^{p,q}$ et $\mathbf{AdS}^{p,q}$, on constate que chaque demi-droite de $\mathbb{R}^{p+q+1}$ coupe les nappes Σ_{+1} et Σ_{-1} en exactement un point. Cela fournit des plongements de $\mathbf{dS}^{p,q}$ et $\mathbf{AdS}^{p,q}$ dans $\mathbf{S}^{p+q}_{proj}$ et ces plongements

sont projectifs car les géodésiques de $\mathbf{dS}^{p,q}$ (resp. $\mathbf{AdS}^{p,q}$) sont obenues en intersectant les plans de $\mathbb{R}^{p+q+1}$ avec la nappe Σ_{+1} (resp. Σ_{-1}). On obtient ainsi des bords projectifs pour $\mathbf{dS}^{p,q}$ et $\mathbf{AdS}^{p,q}$, difféomorphes respectivement à $\mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{S}^q$ et $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^{q-1}$ (avec la convention que $\mathbb{S}^0$ est un point). Notons que les actions de $O(p, q+1)$ et $O(p+1, q)$ s'étendent à ces bords (sans toutefois y préserver de structure projective. La terminologie "bord projectif" est donc ici un peu trompeuse).

c) *Quelques bords en géométrie CR.* — On appelle sphère CR standard, notée $\mathbf{S}^{2n+1}_{CR}$ l'espace homogène $PU(1, n+1)/P$ (avec P le stabilisateur d'une direction isotrope pour la forme hermitienne de signature $(1, n+1)$). Cette sphère est munie d'une unique structure CR strictement pseudoconvexe invariante par $PU(1, n+1)$, et c'est l'espace modèle (au sens des géométries de Cartan) pour les structures CR strictement pseudoconvexes.

- On a un analogue, en géométrie CR, du plongement conforme

$$\sigma : \mathbf{E}^n \to \mathbf{S}^n.$$

  Le groupe de Heisenberg $Heis(2n+1)$, muni de sa structure CR-plate standard, se plonge dans $\mathbf{S}^{2n+1}_{CR}$, l'image du plongement étant $\mathbf{S}^{2n+1}_{CR}$ privée d'un point ν (voir [Go99]). Ce plongement attribue au groupe de Heisenberg un bord CR, qui est réduit à un point.

- Le fibré unitaire tangent d'une variété riemannienne est naturellement muni d'une structure CR. Dans le cas du fibré unitaire tangent à l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^{n+1}$ ($n \geq 1$), cette structure est CR-plate. Nous l'appellerons structure CR standard sur $T^1\mathbf{H}^{n+1}$. Le fibré $T^1\mathbf{H}^{n+1}$ s'identifie en fait à une orbite ouverte Ω du groupe $PO(1, n+1) \subset PU(1, n+1)$ sur la sphère $\mathbf{S}^{2n+1}_{CR}$ (voir par exemple [BS76, Proposition 6.1]). Le bord de l'ouvert Ω est une sphère $\mathbf{S}^n$, ce qui fournit un bord CR pour la structure standard sur $T^1\mathbf{H}^{n+1}$ (cela ne signifie pas que le bord lui-même est muni d'une structure CR).

5.2 Structures géométriquement maximales

La notion de plongement géométrique munit naturellement l'ensemble des géométries de Cartan modelées sur un espace homogène $\mathbf{X}$ d'une relation d'ordre partielle : on note $(M, \mathcal{C}) \preceq (N, \mathcal{C}')$ s'il existe un plongement géométrique de $(M, \mathcal{C})$ dans $(N, \mathcal{C}')$. Nous voudrions comprendre les éléments maxi-

maux pour cette relation d'ordre, c'est-à-dire les géométries modelées sur $\mathbf{X}$ qui satisfont la définition suivante.

Définition 5.1. *(Structures géométriques maximales) Une géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C})$ modelée sur un espace homogène $\mathbf{X}$ est géométriquement maximale lorsque tout plongement géométrique de $(M, \mathcal{C})$ dans une autre géométrie de Cartan $(N, \mathcal{C}')$ modelée sur $\mathbf{X}$ est surjectif.*

En général, trouver des conditions assurant qu'une structure géométrique donnée est maximale n'est pas une tâche aisée. Pour les structures pseudo-riemanniennes, la complétude géodésique est une condition suffisante (mais pas nécessaire, car on peut exhiber des structures pseudo-riemanniennes incomplètes qui sont tout de même géométriquement maximales au sein des variétés pseudo-riemaniennes). En effet, si (M, g) est géodésiquement complète, et que $f : (M, g) \to (N, h)$ est un plongement isométrique strict (avec $\dim M = \dim N$), on va pouvoir trouver des segments géodésiques $\beta : [0, 1] \to N$ tels que $\beta([0, 1[) \subset f(M)$, et $\beta(1)$ appartient au bord topologique de $f(M)$ dans N. Alors $[0, 1[$ est un intervalle de définition maximal pour le segment géodésique $\alpha = f^{-1}(\beta)$, contredisant la complétude de (M, g). Avec la même preuve, on voit que les variétés munies d'une connexion affine qui sont géodésiquement complètes sont géométriquement maximales au sein des structures affines.

À notre connaissance, les problèmes de maximalité géométrique ont été jusqu'ici relativement peu abordés, sauf dans le cadre de la géométrie lorentzienne, où il faut mentionner les travaux autour de *la conjecture de censure cosmique forte*. Nous renvoyons par exemple à [Ring08] pour une formulation précise de la conjecture. Disons simplement ici qu'elle s'interprète comme une propriété de maximalité, au sein de toutes les variétés lorentziennes, pour une classe générique d'espace-temps solutions de l'équation d'Einstein.

5.2.1 Structures homogènes conformément maximales

Une variété pseudo-riemannienne sera dite *conformément maximale* lorsque tout plongement conforme dans une variété de même dimension est surjectif. Contrairement au cadre isométrique, la complétude géodésique n'implique plus la maximalité conforme, puisque nous avons vu qu'il existe des plongements conformes non surjectifs de l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$, ou de l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^n$, dans la sphère standard $\mathbf{S}^n$. À vrai dire, il ne nous semble pas clair d'exhiber une seule variété (pseudo)-riemannienne non compacte qui soit conformément maximale, d'où l'intérêt de trouver de larges classes d'exemples. Un premier résultat dans ce sens est le théorème ci-dessous, qui dit qu'en dimension $n \geq 3$, toute structure riemannienne homogène

est conformément maximale, à l'exception des contre-exemples évidents, à savoir les ouverts de la sphère $\mathbf{S}^n$ homogènes sous l'action d'un groupe $H \subset PO(1, n+1)$.

Théorème 5.2. *[Fr12c, Théorème 1.1] Les seules variétés riemanniennes homogènes de dimension $n \geq 3$ qui ne sont pas conformément maximales sont, à difféomorphisme conforme près :*

1. *L'espace euclidien $\mathbf{E}^n$.*
2. *L'espace hyperbolique réel $\mathbf{H}^n$.*
3. *Le produit riemannien $\mathbf{H}^k \times \mathbf{S}^{n-k}$, avec $1 \leq k \leq n-1$.*

Précisons que dans le théorème, on fait la convention que $\mathbf{H}^1$ est l'espace euclidien de dimension 1, et $\mathbf{S}^1$ est muni de la métrique riemannienne $d\theta^2$ de longueur totale 2π. C'est un détail qui a son importance, et qui montre que le fait d'être conformément maximal ou pas peut être une propriété assez subtile, puisque le théorème dit en particulier que si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et si $\mathbf{S}^1_\lambda$ désigne le cercle muni de la métrique $\lambda d\theta^2$, alors le produit riemannien $\mathbf{H}^{n-1} \times \mathbf{S}^1_\lambda$ est toujours conformément maximal.... sauf pour $\lambda = 1$.

En guise d'illustration, tout espace symétrique riemannien de type non compact, à l'exception de l'espace hyperbolique réel, est conformément maximal. Il n'est donc pas possible de plonger conformément l'espace hyperbolique complexe comme un ouvert d'une variété riemannienne. De même, si G est un groupe de Lie qui n'agit pas simplement transitivement sur l'un des espaces intervenant dans le théorème 5.2, alors pour toute métrique g invariante à gauche sur le groupe G, la variété (G, g) est conformément maximale. Ce sera par exemple le cas pour tout groupe de Lie simple non compact G. Notons que cette propriété n'est vraie qu'en géométrie riemannienne. Le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, muni de la métrique de Killing, est une variété lorentzienne qui admet des plongement conformes non surjectifs dans l'univers d'Einstein lorentzien $\mathbf{Ein}^{1,2}$.

5.2.2 Structures kleiniennes maximales

On aimerait maintenant obtenir des critères de maximalité pour des structures conformes pas nécessairement riemanniennes, ainsi que pour d'autres géométries de Cartan. Cela va être l'objet du théorème 5.3 ci-dessous.

Structures kleiniennes. — Soit $\mathbf{X} = G/P$ un espace homogène. La géométrie de Cartan plate modèle $(\mathbf{X}, \mathcal{C}_\mathbf{X})$ est le triplet $(\mathbf{X}, G, \omega^G)$ où G est vu comme un P fibré principal via la projection $\pi_G : G \to \mathbf{X}$, et ω^G est

la forme de Maurer-Cartan sur G. Tout ouvert $\Omega \subset \mathbf{X}$ est naturellement muni d'une géométrie de Cartan $\mathcal{C}_\Omega$ induite par $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}$. Le fibré de Cartan $\hat{\Omega}$ est l'image réciproque de Ω par π_G, et la connexion de Cartan ω^Ω est la restriction de ω^G à $\hat{\Omega}$.

Soit Γ un sous-groupe discret de G qui agit librement proprement discontinûment sur Ω. La variété quotient $M = \Gamma\backslash\Omega$ s'appelle une *variété kleinienne*. Elle est munie d'une géométrie de Cartan plate naturelle $(M, \mathcal{C}_M)$, modelée sur $\mathbf{X}$. Le fibré $\hat{M}$ est le quotient $\Gamma\backslash\hat{\Omega}$ et la connexion de Cartan ω^M est la 1-forme induite par ω^Ω sur $\hat{M}$ (rappelons que ω^G est invariante par l'action à gauche de Γ, et qu'il en va donc de même pour ω^Ω). Nous pouvons à présent énoncer un critère de maximalité pour les structures kleiniennes.

Théorème 5.3. *[Fr12c, Théorème 1.4] Soit $\mathbf{X} = G/P$ un espace homogène de dimension n. Soit $\Omega \subsetneq \mathbf{X}$ un ouvert. On suppose que Ω satisfait l'une des deux conditions ci-dessous :*

a) $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) = 0$.

b) L'adhérence $\overline{\Omega}$ est une sous-variété à bord de $\mathbf{X}$, dont la frontière est localement lipschitzienne.

Soit $M = \Gamma\backslash\Omega$ une variété kleinienne. Si l'action de Γ n'est libre et propre sur aucun ouvert de $\overline{\Omega}$ (l'adhérence de Ω dans $\mathbf{X}$) contenant Ω strictement, alors $(M, \mathcal{C}_M)$ est maximale au sein de toutes les géométries de Cartan modelées sur $\mathbf{X}$.

Insistons bien sur le fait que même si la géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C}_M)$ est plate, on obtient un résultat de maximalité au sein de *toutes* les géométries de Cartan modelées sur $\mathbf{X}$, et pas seulement les géométries plates.

Remarque 5.4. *Le théorème est également valable pour $\Omega = \mathbf{X}$, au sens où tout quotient $M = \Gamma\backslash\mathbf{X}$, muni de sa géométrie de Cartan plate naturelle $\mathcal{C}_M$ est géométriquement maximal.*

Illustration du théorème — Le théorème 5.3 peut s'appliquer dans un nombre assez varié de situations géométriques, dont nous listons quelques exemples.

a) *Variétés euclidiennes.* — Toute variété riemannienne plate complète de dimension $n \geq 3$, hormis $\mathbf{E}^n$, est conformément maximale. En effet, une telle variété est un quotient $\Gamma\backslash\mathbf{E}^n$, et $\mathbf{E}^n$ s'identifie conformément à l'ouvert $\Omega = \mathbf{S}^n \setminus \{\nu\}$. Clairement, si Γ n'est pas trivial, l'action de Γ sur $\mathbf{S}^n$ n'est pas libre, et $\mathbf{S}^n$ est le seul ouvert de $\overline{\Omega} = \mathbf{S}^n$ contenant strictement Ω. On retrouve l'assertion 1) du théorème 2.10. Notons que ce résultat peut également s'obtenir à partir du théorème plus général suivant.

Théorème 5.5. *[Zo00, Section 5] Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes de même dimension $n \geq 3$. On suppose que (M, g) est conformément parabolique, et que N est simplement connexe. Alors toute immersion quasi-conforme $f : M \to N$ est un plongement, et la dimension de Hausdorff de $N \setminus f(M)$ est nulle.*

Une variété riemannienne est conformément parabolique lorsqu'elle possède une métrique complète de volume fini dans sa classe conforme. Par exemple, $\mathbf{E}^n$ est conformément parabolique. Lorsque $f : \Gamma\backslash\mathbf{E}^n \to (N, h)$ est un plongement conforme, on peut le remonter en une immersion conforme $\tilde{f} : \mathbf{E}^n \to (\tilde{N}, \tilde{g})$, et on déduit du théorème de Zorich que $\tilde{f}(\mathbf{E}^n)$ est dense dans $\tilde{N}$, donc $(\tilde{N}, \tilde{g})$ est conformément plate. Il est alors assez facile, en utilisant des arguments standard sur les $(G, \mathbf{X})$-structures de voir que si $\Gamma \neq \{id\}$, f doit être surjective.

Il n'y a pas d'analogue de cette propriété en signature lorentzienne. Il existe des variétés lorentziennes plates complètes, appelées *espaces-temps de Margulis*, qui admettent des plongements conformes non surjectifs (voir [Fr03b]). En revanche, nous pensons – sans en avoir de preuve – qu'hormis l'espace de Minkowski, les variétés lorentziennes plates complètes (non compactes) n'admettent jamais de compactification conforme.

b) *Variétés hyperboliques.* — Soit $M = \Gamma\backslash\mathbf{H}^n$ une variété hyperbolique complète de dimension $n \geq 3$. Notons $\Lambda(\Gamma)$ l'ensemble limite du groupe Γ. Alors si $\Lambda(\Gamma) = \partial\mathbf{H}^n = \mathbf{S}^{n-1}$, la variété M est conformément maximale. Par exemple, les variétés hyperboliques complètes de volume fini sont conformément maximales (en dimension ≥ 3). Là encore, c'est une simple conséquence du théorème 5.3 : l'espace $\mathbf{H}^n$ est conformément équivalent à l'hémisphère supérieur $\Omega \subset \mathbf{S}^n$. L'hypothèse sur l'ensemble limite dit que $\Lambda(\Gamma) = \partial\Omega$, et on sait que le groupe Γ agit minimalement sur son ensemble limite. Ainsi, l'action de Γ ne peut être propre sur aucun ouvert de $\overline{\Omega}$ rencontrant $\partial\Omega$.

c) *Exemples de variétés lorentziennes conformément maximales.* — Le groupe d'isométries de l'espace anti-de Sitter $\mathbf{AdS}^{1,2n}$ est le groupe $O(2, 2n)$. Ce groupe contient un sous-groupe isomorphe à $U(1, n)$ qui agit proprement et transitivement sur $\mathbf{AdS}^{1,2n}$. Si Γ est un réseau de $U(1, n)$, alors on peut considérer la variété anti-de Sitter complète $M = \Gamma\backslash\mathbf{AdS}^{1,2n}$. Cette structure est conformément maximale. En effet, nous avons vu dans l'exemple *a*) de la section 5.1 que $\mathbf{AdS}^{1,2n}$ se plonge conformément comme un ouvert Ω du modèle $\mathbf{Ein}^{1,2n}$ (en fait Ω n'est pas un ouvert à bord de $\mathbf{Ein}^{1,2n}$, et il faut passer à un revêtement double de $\mathbf{Ein}^{1,2n}$ pour pouvoir appliquer le théorème 5.3). La frontière de Ω est une copie de

$\mathbf{Ein}^{1,2n-1}$ dans $\mathbf{Ein}^{1,2n}$, et on peut montrer que l'action de Γ sur $\partial\Omega$ n'est propre sur aucun ouvert (voir [Fr05c, Section 5.2]).

d) *Point de vue projectif.* — Dans les exemples *a*), *b*) et *c*) ci-dessus, on peut oublier la structure riemannienne (resp. lorentzienne) sur M pour ne retenir que la structure affine (*i.e* la donnée de la connexion de Levi-Civita). Dans chaque exemple, cette structure affine est complète donc affinement maximale. Nous allons expliquer pourquoi elle est aussi projectivement maximale.

L'espace euclidien $\mathbf{E}^n$ se plonge projectivement comme un ouvert $\Omega \subset \mathbf{S}^n_{proj}$, la frontière $\partial\Omega$ étant une sous-sphère $\mathbf{S}^{n-1}_{proj}$. Si Γ est un groupe discret de $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$, l'action de Γ sur $\partial\Omega$ se factorise par la projection de Γ sur $O(n)$. Aussi, dès que Γ est infini, l'action de Γ n'est propre sur aucun ouvert de $\partial\Omega$. Le théorème 5.3 affirme donc que toute variété euclidienne complète est projectivement maximale.

De même l'espace hyperbolique réel $\mathbf{H}^n$ se plonge projectivement comme un ouvert $\Omega \subset \mathbf{S}^n_{proj}$. Le bord $\partial\Omega$ est une sphère lisse $\mathbb{S}^{n-1}$ (mais ce n'est pas une sous-sphère projective). Le point important est que les actions de $PO(1, n+1)$ sur $\partial\Omega$ et $\mathbf{S}^{n-1}$ sont topologiquement conjuguées. Aussi, si $\Lambda(\Gamma) = \mathbf{S}^{n-1}$, on obtient que la variété hyperbolique $\Gamma\backslash\mathbf{H}^n$ est projectivement maximale.

En utilisant le plongement projectif de $\mathbf{AdS}^{1,2n}$ dans $\mathbf{S}^{2n+1}_{proj}$ vu dans l'exemple *b*) de la section 5.1 , et en appliquant le même argument que pour les variétés hyperboliques, on montre que les variétés anti-de Sitter $\Gamma\backslash\mathbf{AdS}^{1,2n}$ du *c*) sont projectivement maximales.

e) *Exemples en géométrie CR.* — Comme cela a été discuté dans l'exemple *c*) de la section 5.1, le groupe de Heisenberg $Heis(2n+1)$ est muni d'une structure CR-plate, qui le rend CR-difféomorphe à la sphère $\mathbf{S}^{2n+1}_{CR}$ privée d'un point ν. Le même argument que pour les variétés euclidiennes donne que si Γ est un sous-groupe discret non trivial de $Heis(2n+1)$, alors $\Gamma\backslash Heis(2n+1)$ est CR-maximal.

D'autre part, le fibré unitaire tangent de l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^{n+1}$ ($n \geq 1$), muni de sa structure CR-plate, s'identifie à un ouvert $\Omega \subset \mathbf{S}^{2n+1}_{CR}$ obtenu en ôtant une sphère de dimension n à $\mathbf{S}^{2n+1}_{CR}$ (voir exemple *c*) de la section 5.1). On a donc $\mathcal{H}^{2n+1}(\partial\Omega) = 0$. Par ailleurs les actions de $PO(1, n+1)$ sur $\partial\Omega$ et sur la sphère standard $\mathbf{S}^n$ sont topologiquement conjuguées. Ainsi, si $\Gamma \subset PO(1, n+1)$ satisfait $\Lambda(\Gamma) = \mathbf{S}^n$, l'action de Γ sur $\partial\Omega$ est minimale. On tire du théorème 5.3 que dans ce cas, la structure CR-plate standard sur le fibré unitaire tangent à la variété hyperbolique $\Gamma\backslash\mathbf{H}^{n+1}$ est CR-maximale.

5.3 Résultats d'unicité de bords

Lorsqu'une géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C})$ modelée sur $\mathbf{X} = G/P$ n'est pas géométriquement maximale, il existe un plongement géométrique strict

$$f : (M, \mathcal{C}) \to (N, \mathcal{C}'),$$

qui fournit un bord géométrique $\partial(f(M))$. Nous avons vu des exemples de tels bords en *a*), *b*), *c*) de la section 5.1. Ces bords sont construits de manière extrinsèque, par l'intermédiaire d'un plongement géométrique, mais nous voudrions savoir dans quelle mesure ils comportent des informations intrinsèques, indépendantes du plongement. On se pose donc des questions naïves du type : *est-ce que le bord topologique de tout plongement conforme non surjectif $f : \mathbf{E}^n \to (N, h)$ dans une variété riemannienne (N, h) de dimension $n \geq 3$ est un point?*

Un résultat pour les structures riemanniennes conformes. — Une variété riemannienne qui n'est pas conformément maximale peut directement se voir, du point de vue conforme, comme un ouvert strict d'une variété riemannienne. Le problème d'unicité du bord conforme est donc intimement lié à la question suivante. *Si (L, g) et (N, h) sont deux variétés riemanniennes de même dimension, si $\Lambda \subset L$ est un fermé, et si $f : L \setminus \Lambda \to (N, h)$ est un plongement conforme, alors f peut-il s'étendre à $\partial\Lambda$?* Nous avons déjà abordé cette question dans la section 2.3 (et nous reprenons ci-dessous la terminologie et les notations de cette section) pour des immersions conformes, mais nous faisons ici l'hypothèse supplémentaire que f est injective. Si nous supposons de plus que $\mathcal{H}^{n-1}(\Lambda) = 0$, les théorèmes 2.19 et 2.20 s'appliquent. Or nous voyons que les immersions conformes intervenant dans les conclusions du théorème 2.20 ne sont jamais injectives. Par conséquent si l'application f est un plongement, alors Λ ne contient pas de points singuliers essentiels. Par le théorème 2.19, f peut s'étendre en un plongement conforme de $L \setminus \Lambda_{pole}$ dans N. On obtient alors le théorème suivant.

Théorème 5.6. *[Fr12d, Théorème 1.2] Soient (L, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes connexes de dimension $n \geq 3$. Soit $\Lambda \subset L$ un sous-ensemble fermé satisfaisant $\mathcal{H}^{n-1}(\Lambda) = 0$, et $f : L \setminus \Lambda \to N$ un plongement conforme. Alors f s'étend en un plongement conforme $f' : L \setminus \Lambda_{pole} \to N$.*

1. *Lorsque L est compacte, alors $f' : L \setminus \Lambda_{pole} \to N$ est un difféomorphisme conforme.*

2. *Lorsque L et N sont compactes, alors Λ_{pole} est vide, et (L, g) est conformément difféomorphe à (N, h).*

Observons que ce théorème permet de répondre affirmativement à la question naïve que nous nous étions posé. Si $f : \mathbf{E}^n \to (N, h)$ est un plongement conforme strict, où $\dim N = n$, alors la frontière de $f(\mathbf{E}^n)$ est un point, et (N, h) est conformément difféomorphe à la sphère standard.

En fait, lorsque L est compacte, le théorème 5.6 classifie tous les plongements conformes possibles de $L \setminus \Lambda$ dans une variété de même dimension, et montre qu'ils sont donnés par les inclusions $L \setminus \Lambda \subset L \setminus \Lambda'$, où Λ' est un fermé de L contenu dans Λ. Par ailleurs, on a dans ce cas un résultat d'unicité concernant la compactification conforme. Si (L, g) est une variété riemannienne compacte (de dimension $n \geq 3$), et si $\Lambda \subset L$ est un fermé statisfaisant $\mathcal{H}^{n-1}(\Lambda) = 0$, alors L est bien sûr une compactification conforme de $L \setminus \Lambda$. Le théorème assure que toute autre compactification conforme de $L \setminus \Lambda$ est conformément difféomorphe à (L, g).

Unicité des bords de structures kleiniennes. — Nous allons maintenant présenter un résultat de même nature que le théorème 5.6, valable pour certaines classes de géométries de Cartan kleiniennes. Il peut s'appliquer à des exemples intéressants de structures conformes pseudo-riemanniennes (de signature arbitraire), de structures CR, projectives etc...Nous renvoyons à la section 5.2 pour la définition de la géométrie de Cartan plate naturelle sur une structure kleinienne.

Théorème 5.7. *[Fr08pre, Théorème 1.8] Soit $\mathbf{X} = G/P$ un espace homogène, et $\Omega \subsetneq \mathbf{X}$ un ouvert tel que $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) = 0$. Soit $M = \Gamma\backslash\Omega$ une variété kleinienne, et $(M, \mathcal{C}_M)$ sa géométrie de Cartan plate naturelle. Soit $(N, \mathcal{C}')$ une géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{X}$ et $f : (M, \mathcal{C}_M) \to (N, \mathcal{C}')$ un plongement géométrique. Alors il existe un ouvert $\Omega' \subset \mathbf{X}$ qui contient Ω, sur lequel Γ agit proprement discontinûment, définissant une variété kleinienne $M' = \Gamma\backslash\Omega'$, de sorte que f s'étende en un isomorphisme de géométries de Cartan $f' : (M', \mathcal{C}_{M'}) \to (N, \mathcal{C}')$.*

Partant d'une variété kleinienne $M = \Gamma\backslash\Omega$, avec $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) = 0$, le théorème classifie *tous* les plongements géométriques $f : (M, \mathcal{C}_M) \to (N, \mathcal{C}')$, avec $(N, \mathcal{C}')$ une géométrie de Cartan modelée sur $\mathbf{X}$. Les géométries de Cartan but $(N, \mathcal{C}')$ sont nécessairement kleiniennes de la forme $\Gamma\backslash\Omega'$, où Ω' contient Ω (notons que Γ est le même groupe pour M et M'). En particulier, s'il n'existe aucun ouvert $\Omega' \subset \mathbf{X}$ qui contient Ω strictement et sur lequel Γ agit librement proprement discontinûment, on retrouve (voir le théorème 5.3) que $(M, \mathcal{C}_M)$ est géométriquement maximale.

On peut donner l'illustration suivante pour le théorème 5.7.

Corollaire 5.8. *Pour $n \geq 4$, et $3 \leq k \leq n-1$, considérons la variété lorentzienne $\mathbf{AdS}^k \times \mathbf{S}^{n-k}$. S'il existe un plongement conforme $f : \mathbf{AdS}^k \times$*

$\mathbf{S}^{n-k} \to (N,h)$, *où* (N,h) *est une variété lorentzienne compacte de dimension* n, *alors* (N,h) *est conformément équivalente à l'univers d'Einstein lorentzien* $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$.

La preuve du corollaire consiste à constater que l'espace $\mathbf{AdS}^k \times \mathbf{S}^{n-k}$ est conformément équivalent à un ouvert $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$, obtenu en ôtant à $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ une copie de $\mathbf{Ein}^{1,n-3}$. La frontière $\partial\Omega$ est de codimension 2 et l'affirmation découle du théorème 5.7.

5.4 Bord de Cauchy d'une géométrie de Cartan

5.4.1 Idée générale

Voici l'idée générale qui conduit aux résultats de maximalité et d'unicité de bords que nous avons présentés dans les sections précédentes. Le point de départ est la construction d'un complété de Cauchy, pour toute géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C})$ modelée sur $\mathbf{X} = G/P$ (cette construction est due initialement à B. Schmidt, voir [S74]). Il s'agit de compléter une classe naturelle de métriques riemanniennes sur le fibré de Cartan $\hat{M}$, pour obtenir un espace métrique $\hat{M}_c$ muni d'une action du groupe structurel P. Nous noterons $\partial_c\hat{M}$ le bord $\hat{M}_c \setminus \hat{M}$. Ce bord est défini intrinsèquement par la géométrie, et lorsque $f : (M, \mathcal{C}) \to (N, \mathcal{C}')$ est un plongement géométrique, qui se remonte en $\hat{f} : \hat{M} \to \hat{N}$ entre les fibrés de Cartan, on va hériter d'une application de bord $\partial\hat{f} : \partial_c\hat{M} \to \hat{N}_c$, qui sera P-équivariante. Lorsque le plongement géométrique f n'est pas surjectif, on va montrer qu'un ouvert non vide de $\partial_c\hat{M}$ s'envoie de manière P-équivariante dans $\hat{N}$. Or l'action de P sur $\hat{N}$ est libre est propre. Si on exhibe des géométries de Cartan $(M, \mathcal{C})$ pour lesquelles l'action de P sur $\partial_c\hat{M}$ présente un certain nombre de pathologies, par exemple l'action de P n'est libre nulle part, ou l'action de P n'est propre sur aucun ouvert, alors on aboutit à une contradiction, et notre structure $(M, \mathcal{C})$ est maximale. C'est ce genre d'idées assez simples que nous allons expliquer un peu plus en détails.

5.4.2 Définition

On considère un espace modèle $\mathbf{X} = G/P$, et une géométrie de Cartan $(M, \hat{M}, \omega^M)$ modelée sur $\mathbf{X}$. Pour simplifier l'exposition, on supposera que $\hat{M}$ est connexe, mais la construction fonctionne en toute généralité. Fixons-nous une base $(X_1, ..., X_m)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Ce choix définit un champ

de repères $\mathcal{R}$ sur le fibré $\hat{M}$ comme suit :

$$\mathcal{R}_{\hat{x}} = ((\omega^M_{\hat{x}})^{-1}(X_1), ..., (\omega^M_{\hat{x}})^{-1}(X_m)), \quad \hat{x} \in \hat{M}.$$

Il existe une unique métrique riemannienne ρ^M sur $\hat{M}$ rendant les repères $\mathcal{R}_{\hat{x}}$ orthonormés. On note d_M la distance que la métrique riemannienne ρ^M induit sur $\hat{M}$: si $\hat{x}$ et $\hat{y}$ sont deux points de $\hat{M}$, alors $d_M(\hat{x}, \hat{y})$ est l'infimum des longeurs (relativement à ρ^M) des courbes C^1 par morceaux reliant $\hat{x}$ et $\hat{y}$. On appelle alors $(\hat{M}_c, \overline{d}_M)$ le *complété de Cauchy* de l'espace métrique $(\hat{M}, d_M)$, et on note $\partial_c \hat{M} = \hat{M}_c \setminus \hat{M}$ le *bord de Cauchy*.

Si nous faisons un autre choix de base $(X'_1, \ldots, X'_m)$, on obtient une métrique d'_M qui est bi-Lipschitz équivalente à d_M. Ainsi, l'espace métrique $(\hat{M}_c, \overline{d}_M)$ est, à équivalence bi-Lipschitz près, une donnée intrinsèque de la géométrie de Cartan considérée.

Si p est un élément du groupe P, et si $R_p : \hat{M} \to \hat{M}$ désigne la multiplication à droite par p, la matrice Jacobienne de R_p, exprimée dans le champ de repères $\mathcal{R}$, correspond à la matrice de l'application linéaire $\operatorname{Ad} p^{-1}$ dans la base $(X_1, ..., X_m)$. Ainsi, les applications R_p sont toutes Lipschitz pour la distance d_M, si bien qu'elles s'étendent au complété $\hat{M}_c$. On hérite donc d'une action de P par transformations Lipschitz sur l'espace métrique $(\hat{M}_c, \overline{d}_M)$.

L'espace $\partial_c \hat{M}$ est plutôt un bord pour $\hat{M}$, et non pour M. Aussi aura-t-on aussi envie de définir $M_c = \hat{M}_c/P$ et $\partial_c M = \partial_c \hat{M}/P$, respectivement les complétés et les bords de Cauchy de M. Toutefois, l'action de P, qui est libre et propre sur $\hat{M}$ peut devenir extrêmement pathologique sur $\partial_c \hat{M}$, et travailler avec l'espace quotient $\partial_c M$ n'offre qu'un intérêt limité. Il est généralement préférable de considérer directement l'espace métrique $\partial_c \hat{M}$, et d'y étudier la dynamique du groupe P.

5.4.3 Exemples

Bord de Cauchy du modèle et de ses ouverts. Dans le cas du modèle $\mathbf{X} = G/P$, la géométrie $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}$ est le triplet $(\mathbf{X}, G, \omega^G)$, où ω^G désigne la forme de Maurer-Cartan sur G. Comme cette forme est invariante à gauche, la métrique riemannienne ρ^G qui rend orthonormé le parallélisme $\mathcal{R}$ est invariante à gauche, donc géodésiquement complète. La distance d_G qu'elle induit sur G est elle-aussi complète. On trouve que *le bord de Cauchy du modèle est vide.*

Soit maintenant $\Omega \subset \mathbf{X}$ un ouvert du modèle. La géométrie de Cartan plate naturelle induite par celle de $\mathbf{X}$ sur Ω est le triplet $(\Omega, \hat{\Omega}, \omega^\Omega)$, où $\hat{\Omega} \subset G$ est

la préimage de Ω par la projection $\pi_G : G \to \mathbf{X}$, et ω^Ω est la restriction de ω^G à l'ouvert $\hat{\Omega}$. La variété riemannienne $(\hat{\Omega}, \omega^\Omega)$ est un ouvert de la variété riemannienne complète (G, ρ^G). Pour comprendre le bord de Cauchy $\partial_c\hat{\Omega}$, on est amené à se poser la question : *soit U un ouvert d'une variété riemannienne complète L, quel est le lien entre le bord de Cauchy pour la métrique riemannienne induite sur U, et le bord topologique de U ?*

Ce lien n'est pas toujours clair lorsque la frontière de l'ouvert considéré est très compliquée. Cela conduit à la définition *ad hoc* suivante :

Définition 5.9 (Ouvert normal)**.** *Un ouvert U d'une variété L de dimension ℓ est dit normal s'il satisfait l'une des conditions ci-dessous.*

a) $\mathcal{H}^{\ell-1}(\partial U) = 0$.

b) $\overline{U}$ *est une sous-variété à bord de L, et ∂U est une hypersurface localement Lipschitz.*

Soit U un ouvert normal d'une variété riemannienne (L, g), et soit U_c le complété de Cauchy de U pour la métrique induite par g sur U. Alors la frontière topologique ∂U se plonge dans $\partial_c U$. Si (L, g) est complète, $\partial U = \partial U_c$. Ceci montre que si $\Omega \subset \mathbf{X}$ est un ouvert normal, alors $\partial_c\hat{\Omega}$ est homéomorphe à $\partial\hat{\Omega}$.

Bord de Cauchy des variétés kleiniennes. — Si maintenant $\Omega \subset \mathbf{X}$ est un ouvert normal, et si $\Gamma \subset G$ est un groupe discret qui agit librement proprement discontinûment sur Ω, nous avons vu que la variété kleinienne $M = \Gamma\backslash\Omega$ était naturellement munie d'une géométrie de Cartan plate $\mathcal{C}_M$ modelée sur $\mathbf{X}$. Le fibré $\hat{M}$ est simplement le quotient $\Gamma\backslash\hat{\Omega}$, et ω^M est la forme induite par ω^Ω par passage au quotient. Comme $(\hat{M}, \rho^M)$ est un ouvert de la variété riemannienne complète obtenue en quotientant (G, ρ^G) par l'action à gauche de Γ, la discussion précédente conduit au :

Lemme 5.10. *Soit $\Omega \subset \mathbf{X}$ un ouvert normal. Soit $M = \Gamma\backslash\Omega$ une variété kleinienne, que l'on munit de sa structure naturelle $\mathcal{C}_M$. Alors le bord de Cauchy $\partial_c\hat{M}$ est homéomorphe au quotient $\Gamma\backslash\partial\hat{\Omega}$. L'action de P sur $\partial_c\hat{M}$ est l'action à droite de P sur $\Gamma\backslash\partial\hat{\Omega}$.*

Deux exemples. — Commençons par voir ce que nous dit le lemme 5.10 sur le bord de Cauchy (conforme) de l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$, $n \geq 3$. Du point de vue conforme, $\mathbf{E}^n$ est la sphère standard $\mathbf{S}^n$ privée d'un point ν. Comme $\mathbf{S}^n = PO(1, n+1)/P$ est l'espace modèle des structures conformes riemanniennes, on obtient que le bord de Cauchy de $\hat{\mathbf{E}}^n$ s'identifie au groupe P (la préimage de $\{\nu\}$ par la projection $\pi_G : PO(1, n+1) \to \mathbf{S}^n$). Le bord

$\partial_c \mathbf{E}^n$ est donc un point. Si $M = \Gamma\backslash\mathbf{E}^n$ est une variété euclidienne, alors $\partial_c \hat{M} = \Gamma\backslash P$, et on constate que dès que $\Gamma \neq \{id\}$, l'action de P sur $\partial_c \hat{M}$ n'est pas libre.

Considérons à présent l'espace hyperbolique réel $\mathbf{H}^n$. Là encore, cet espace est un ouvert Ω du modèle $\mathbf{S}^n$, et le bord $\partial_c \hat{\mathbf{H}}^n = \partial\hat{\Omega}$ est un P-fibré principal sur $\mathbf{S}^{n-1}$. Si $M = \Gamma\backslash\mathbf{H}^n$ est une variété hyperbolique complète, alors le lemme 5.10 donne que $\partial_c \hat{M} = \Gamma\backslash\partial\hat{\Omega}$. Si de plus $\Lambda(\Gamma) = \mathbf{S}^{n-1}$ (par exemple si M est de volume fini), alors Γ va agir minimalement sur $\partial\Omega$. Comme $\partial\Omega = \partial\hat{\Omega}/P$, il est facile de vérifier que P va alors agir minimalement (à droite) sur $\Gamma\backslash\partial\hat{\Omega}$. Nous avons donc un exemple où l'action de P sur le bord de Cauchy $\partial_c \hat{M}$ n'est propre sur aucun ouvert.

5.4.4 Application de bord d'un plongement géométrique

Soient $(M, \mathcal{C}) = (M, \hat{M}, \omega^M)$ et $(N, \mathcal{C}') = (N, \hat{N}, \omega^N)$ deux géométries de Cartan modelées sur l'espace $\mathbf{X}$. On suppose qu'il existe un plongement géométrique $f : (M, \mathcal{C}) \to (N, \mathcal{C}')$. On le remonte en un plongement de fibrés $\hat{f} : \hat{M} \to \hat{N}$ satisfaisant $\hat{f}^*\omega^N = \omega^M$. Cette application

$$\hat{f} : (\hat{M}, d_M) \to (\hat{N}, d_N)$$

est 1-lipschitzienne, donc va s'étendre en une application 1-lipschitzienne, renotée $\hat{f}$, entre les complétés de Cauchy $(\hat{M}_c, \overline{d}_M)$ et $(\hat{N}_c, \overline{d}_N)$. La restriction de $\hat{f}$ à $\partial_c \hat{M}$ donne une application de bord 1-lipschitzienne

$$\partial\hat{f} : \partial_c \hat{M} \to \hat{N}_c.$$

On va être plus particulièrement intéressé par le sous-ensemble de $\partial_c \hat{M}$ (potentiellement vide) qui est envoyé sur $\hat{N} \subset \hat{N}_c$ par $\partial\hat{f}$.

Définition 5.11 (Ensemble régulier du bord)**.** *L'ensemble régulier du bord $\partial_c \hat{M}$ est défini comme l'image réciproque de $\hat{N}$ par l'application de bord $\partial\hat{f}$. On le note $\hat{\Lambda}_c$. Cet ensemble est P-invariant et l'on note $\Lambda_c = \hat{\Lambda}_c/P$.*

L'ensemble régulier possède un certain nombre de propriétés agréables que nous résumons dans la proposition suivante :

Proposition 5.12. *[Fr12c, Proposition 4.4] Soient $(M, \mathcal{C})$ et $(N, \mathcal{C}')$ deux géométries de Cartan modelées sur l'espace $\mathbf{X}$. Soit $f : (M, \mathcal{C}) \to (N, \mathcal{C}')$ un plongement géométrique. On suppose que f n'est pas surjectif. Alors :*

a) L'ensemble régulier $\hat{\Lambda}_c$ est un ouvert non vide, sur lequel l'action de P est libre et propre. En particulier l'espace $\Lambda_c \cup M \subset M_c$ est séparé.

b) Les applications $\hat{f}$ et $\partial\hat{f}$ induisent des applications continues $f : \Lambda_c \cup M \to N$ et $\partial f : \Lambda_c \to \partial(f(M))$, où $\partial(f(M))$ désigne la frontière de $f(M)$ dans N.

c) L'image $\partial f(\Lambda_c)$ contient tous les points accessibles de $\partial(f(M))$. En particulier $\partial f(\Lambda_c)$ est dense dans $\partial(f(M))$.

Rappelons que si U est un ouvert d'une variété M, et si ∂U désigne la frontière de cet ouvert, on dit que $x \in \partial U$ *est un point accessible* lorsqu'il existe un chemin C^1 par morceaux $\alpha : [0,1] \to M$ tel que $\alpha([0,1[) \subset U$, et $\alpha(1) = x$.

Quelques conséquences. —

a) Le point 1) de la proposition affirme que si une géométrie de Cartan $(M, \mathcal{C})$ n'est pas géométriquement maximale, alors il doit exister un ouvert non vide du bord de Cauchy $\partial_c\hat{M}$ sur lequel l'action de P est libre et propre. Nous avons vu à la fin de la section 5.4.3 que si $M = \Gamma\backslash\mathbf{E}^n$ était une variété euclidienne, avec $\Gamma \neq \{id\}$, alors $\partial_c\hat{M} = \Gamma\backslash P$, et en particulier l'action de P sur $\partial_c\hat{M}$ n'est libre en aucun point. On conclut qu'une telle variété est conformément maximale (dès que $n \geq 3$). De même, si $M = \Gamma\backslash\mathbf{H}^n$ est une variété hyperbolique de volume fini, alors nous avons vu que l'action de P sur $\partial_c\hat{M}$ était minimale. Elle ne peut donc être propre sur aucun ouvert de $\partial_c\hat{M}$, et la proposition 5.12 entraîne que ces variétés sont conformément maximales. En fait, le lemme 5.10 et la proposition 5.12 conduisent directement au théorème 5.3.

b) Le point 3) de la proposition 5.12 nous apprend que pour un plongement géométrique $f : (M, \mathcal{C}) \to (N, \mathcal{C}')$, une partie dense du bord géométrique "extrinsèque" $\partial(f(M))$ est l'image par ∂f d'une partie d'un bord intrinsèque $\partial_c M$. C'est pourquoi, on peut s'attendre à ce que les bords géométriques d'une géométrie donnée dépendent finalement assez peu du plongement qui sert à les définir.

Pour illustrer ce principe, considérons un cas très simple, qui est celui de l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$. Nous allons montrer le point 2) du théorème 2.10, à savoir :
Si (N, h) est une variété riemannienne de dimension $n \geq 3$, et si $f : \mathbf{E}^n \to (N, h)$ est un plongement conforme non surjectif, alors la frontière $\partial(f(\mathbf{E}^n))$ est réduite à un point et (N, h) est conformément difféomorphe à la sphère standard.

Nous avons déterminé le bord de Cauchy (conforme) $\partial_c\mathbf{E}^n$ en section 5.4.3. Ce bord est réduit à un point ν. Si $f : \mathbf{E}^n \to (N, h)$ est un plongement

conforme strict, alors l'ensemble régulier Λ_c est un ouvert non vide de ce point par la proposition 5.12. On obtient $\Lambda_c = \{\nu\}$, et f induit

$$\partial f : \{\nu\} \to (N, h)$$

avec la propriété que $\partial f(\nu)$ est dense dans $\partial(f(\mathbf{E}^n))$ (troisième point de la proposition 5.12). On conclut que la frontière $\partial(f(\mathbf{E}^n))$ est réduite à un point, et (N, h) doit être conformément équivalente à la sphère standard $\mathbf{S}^n$. Ce résultat n'est pas nouveau, et peut par exemple se déduire directement du théorème 5.5. Mais la preuve ci-dessus est particulièrement élémentaire, et surtout, elle donne immédiatement des énoncés analogues pour des plongements CR du groupe de Heisenberg (ou de ses analogues quaternioniens). Le théorème plus général 5.7 s'obtient à partir des mêmes idées.

Bibliographie

[AS97] S. Adams, G. Stuck, *The isometry group of a compact Lorentz manifold I,II.* Inventiones Mathematicae **129** (1997), 239–261et 263–287.

[AS00] S. Adams, G. Stuck, *Conformal actions of $SL_n(\mathbb{R})$ and $SL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ on lorentz manifolds.* Trans. Amer. Math. Soc. **352**, no. 9 (2000), 3913–3936.

[A72] D.V Alekseevskii, *Groups of conformal transformations of Riemannian spaces.* Math. USSR, Sb. **18** (1972), 285–301.

[A86] D. Alekseevski, *Self-similar Lorentzian manifolds.* Ann. Global Anal. Geom. **3** (1985), no. 1, 59–84.

[Alt11] J. Alt, *Essential Parabolic Structures And Their Infinitesimal Automorphisms.* Sigma **7** (2011).

[As76] D. Asimov, *Finite groups as isometry groups.* Trans. Amer. Math. Soc. **216** (1976), 388–390.

[Ba66] B. Ba, *Structures presque complexes, structures conformes et dérivations*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, CNRS. Paris **8** (1966).

[BCH97] R. Beig, M.S Capocci, G. S. Hall, *Zeros of conformal vector fields.* Classical Quantum Gravity **14**, no. 3 (1997), 49–52.

[BFM09] U. Bader, C. Frances, K. Melnick, *An embedding theorem for automorphism groups of Cartan geometries.* Geom. Funct. Anal. **19**, no. 2 (2009), 333–355.

[BFZ10] E. Bekkara, C. Frances, A. Zeghib, *Actions of semisimple Lie groups preserving a degenerate Riemannian metric.* Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 5, 2415–2434.

[BN02] U. Bader, A. Nevo, *Conformal actions of simple Lie groups on compact pseudo-Riemannian manifolds.* J. Differential Geom. **60** (2002), 355–387.

[Bi00] O. Biquard, *Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques.* Astérisque No. **265** (2000).

[BiM06] O. Biquard, R. Mazzeo, *Parabolic geometries as conformal infinities of Einstein metrics.* Arch. Math. (Brno) **42** (2006), suppl., 85–104.

[BH01] M. Bonk, J. Heinonen, *Quasiregular mappings and cohomology.* Acta Math. **186**, no 2 (2001), 219–238.

[BMO] F. Belgun, A. Moroianu, L. Ornea, *Essential points of conformal vector fields.* J. Geom. Phys. **61** (2011), 589–593.

[B87] A. Besse, *Einstein manifolds.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. **(3)**, 10. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[BS76] D. Burns, S. Shnider, Spherical hypersurfaces in complex manifolds. Invent. Math. **33** (1976), no. 3, 223–246.

[CS00] A. Čap, H. Schichl, *Parabolic geometries and canonical Cartan connections.* Hokkaido Math. J. **29** (2000), no. 3, 453–505.

[CSZ04] A. Čap, J. Slovák, V. Žádník, *On distinguished curves in parabolic geometries.* Transform. Groups. **9**, no. 2 (2004), 143–166.

[CS09] A. Čap, J. Slovák, *Parabolic geometries. I. Background and general theory.* Mathematical Surveys and Monographs, **154**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[Ca99] M. S. Capocci, *Essential conformal vector fields.* Classical Quantum Gravity **16**, no. 3 (1999), 927–935.

[Car23] E. Cartan, *Les espaces à connexion conforme.* Ann. Soc. pol. math., **2** (1923), 171–221.

[Car24] E. Cartan, *Sur les variétés à connection projective.* Bull. Soc. Math. France **52** (1924), 205–241.

[Car52] E. Cartan, *Les espaces géneralisés.* Notice sur les traveaux scientifique. Oeuvres Complètes, Partie I, Vol. I (1952), 72–85.

[CM74] S.S. Chern, J.K Moser, *Real hypersurfaces in complex manifolds.* Acta Math. **133** (1974), 219–271.

[D80] S.G. Dani, *A simple proof of Borel's density theorem.* Math. Z. **174**, no. 1 (1980), 81–94.

[D82] S.G. Dani, *On ergodic quasi-invariant measures of group automorphism.* Israel J. Math. **43**, no. 1 (1982), 62–74.

[Da88] G. D'Ambra, *Isometry groups of Lorentz manifolds.* Invent. Math. **92**, no. 3 (1988), 555–565.

[DaG90] G. D'Ambra, M. Gromov, *Lectures on transformation groups: geometry and dynamics.* Surveys in differential geometry (Cambridge, MA, 1990), Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1991, 19–111.

[De011] A. Derdzinski, *Zeros of conformal vector fields in any metric signature.* Classical and Quantum Gravity. **28**, , no. 7 (2011).

[Du07] S. Dumitrescu, *Homogénéité locale pour les métriques riemanniennes holomorphes en dimension 3.* Ann. Instit. Fourier. **57** (3), (2007), 739–773.

[Fer98] R. Feres, *Dynamical systems and semisimple groups: an introduction*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 126, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[Fe71] J. Ferrand, *Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes.* Mém. Acad. Royale Belgique **39** (1971), 1–44.

[Fe76] J. Ferrand, *Geometrical interpretations of scalar curvature and regularity of conformal homeomorphisms.* Differential geometry and relativity, pp. 91–105. Mathematical Phys. and Appl. Math., Vol. 3, Reidel, Dordrecht, 1976.

[Fe77a] J. Ferrand, *Sur la régularité des applications conformes.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **284**, no. 1 (1977), 77–79.

[Fe77b] J. Ferrand, *Sur un lemme d'Alekseevskii relatif aux transformations conformes.* C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A **284** (1977), 121-123.

[Fe82] J. Ferrand, *Les géodésiques des structures conformes.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **294**, no. 18 (1982), 629–632.

[Fe96a] J. Ferrand, *The action of conformal transformations on a Riemannian manifold.* Math. Ann. **304**, no. 2 (1996), 277–291.

[Fe96b] J. Ferrand, *Convergence and degeneracy of quasiconformal maps of Riemannian manifolds.* J. Anal. Math. **69** (1996), 1–24.

[Fe98] J. Ferrand, *Histoire de la réductibilité du groupe conforme des variétés riemanniennes (1964–1994).* Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Vol. **17**, Année 1998–1999, 9–25.

[Fish11] D. Fisher, *Groups acting on manifolds: around the Zimmer program.* Geometry, Rigidity and Groups Actions, Chicago Lectures in Mathematics, 2011.

[Fiz02] D. Fisher, R.J. Zimmer, *Geometric lattice actions, entropy and fundamental groups.* Comment. Math. Helv. **77**, no. 2 (2002), 326–338.

[FrT02] C. Frances, C. Tarquini, *Autour du théorème de Ferrand-Obata.* Ann. Global Anal. Geom. **21**, no. 1 (2002), 51–62.

[Fr03a] C. Frances, *Une preuve du théorème de Liouville en géométrie conforme dans le cas analytique.* Enseign. Math. (2) **49** , no. 1-2 (2003), 95–100.

[Fr03b] C. Frances, *The conformal boundary of Margulis space-times.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris **336**, no. 9 (2003), 751–756.

[FrZ05] C. Frances, A. Zeghib, *Some remarks on conformal pseudo-Riemannian actions of simple Lie groups.* Math. Res. Lett. **12**, no. 1 (2005), 49–56.

[Fr05a] C. Frances, *Sur les variétés lorentziennes dont le groupe conforme est essentiel.* Math. Ann. **332**, no. 1 (2005), 103–119.

[Fr05b] C. Frances, *The conformal boundary of anti-de Sitter space-times.* AdS/CFT correspondence: Einstein metrics and their conformal boundaries, 205–216, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 8, Eur. Math. Soc., Zürich, 2005

[Fr05c] C. Frances, *Lorentzian Kleinian groups.* Comment. Math. Helv. **80**, no. 4 (2005), 883–910.

[Fr07a] C. Frances, *Causal conformal vector fields, and singularities of twistor spinors.* Ann. Global Anal. Geom. **32**, no. 3 (2007), 277–295.

[Fr07b] C. Frances, *Sur le groupe d'automorphismes des géométries paraboliques de rang 1.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **40**, no. 5 (2007), 741–764.

[Fr08] C. Frances, *Essential conformal structures in Riemannian and Lorentzian geometry.* Recent developments in pseudo-Riemannian geometry, 231–260, ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc., Zürich, 2008.

[Fr08pre] C. Frances, *Rigidity at the boundary for conformal structures and other Cartan geometries.* arXiv:0806.1008v1.

[FrM10] C. Frances, K. Melnick, *Conformal actions of nilpotent groups on pseudo-Riemannian manifolds.* Duke Math. J. **153**, no. 3 (2010), 511–550.

[FrM11] C. Frances, K. Melnick, *Formes normales pour les champs conformes pseudo-riemanniens.* À paraître au Bulletin de la SMF (arXiv:1008.3781v1).

[Fr12a] C. Frances, *Local dynamics of conformal vector fields.* Geometriae Dedicata. **158**, no. 1 (2012), 35–59.

[Fr12b] C. Frances, *Dégénérescence locale des transformations conformes pseudo-riemanniennes.* À paraître dans Annales de l'Institut Fourier. (arXiv:1008.2436v1).

[Fr12c] C. Frances, *About geometrically maximal manifolds.* Journal of Toplogy. **5**, no. 2 (2012), 293–322.

[Fr12d] C. Frances, *Removable and essential singular sets for higher dimensional conformal maps.* À paraître dans Commentarii Math. Helvetici (arXiv:1110.0898).

[G62] F.W Gehring, *Rings and quasiconformal mappings in space.* Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 353–393.

[Go99] W.M. Goldman, *Complex hyperbolic geometry.* Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999.

[Gr86] M. Gromov. *Rigid transformations groups.* Géométrie différentielle (Paris, 1986). Travaux en Cours, **33** (1988), Hermann, Paris, 65–139.

[Ha04] G.S Hall, *Symmetries and curvature structure in General Relativity.* World Scientific. 2004.

[Her12] M. Herzlich, *Parabolic geodesics as parallel curves in parabolic geometries.* arXiv:1207.4005v1.

[IK01] T. Iwaniec, G. Martin, *Geometric function theory and nonlinear analysis.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2001.

[Ka96] Y. Kamishima, *Geometric flows on compact manifolds and global rigidity.* Topology. **35**, no. 2 (1996), 439–450.

[KM09] B. Kloeckner, V. Minerbe, *Rigidity in CR geometry: the Schoen-Webster theorem.* Differential Geom. Appl. **27**, no. 3 (2009), 399–411.

[Ko72] S. Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry.* Reprint of the 1972 edition. *Classics in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Kow96] N. Kowalsky, *Noncompact simple automorphism groups of Lorentz manifolds and other geometric manifolds*, Ann. of Math. (2) **144**, no. 3 (1996), 611–640.

[KR95] W. Kühnel, H. B. Rademacher, *Essential conformal fields in pseudo-Riemannian geometry.* J. Math. Pures Appl. (9) **74**, no. 5 (1995), 453–481.

[KR97] W. Kühnel, H. B. Rademacher, *Essential conformal fields in pseudo-Riemannian geometry. II.* J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **4**, no. 3 (1997), 649–662.

[KR97b] W. Kühnel, H.B. Rademacher, *Conformal vector fields on pseudo-Riemannian spaces.* Differential Geom. Appl. **7**, no. 3 (1997), 237–250.

[Ku49] N. H. Kuiper, *On conformally-flat spaces in the large.* Ann. of Math. (2) **50**, (1949). 916–924.

[Lab98] F. Labourie, *Large groups actions on manifolds.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), 371–380.

[Lam12] M. Lampe, *On the isotropy subalgebras of Lie algebras of conformal vector fields.* J. Geom. Phys. **62**, no. 3 (2012), 646–656.

[Lee96] J. M. Lee, *CR manifolds with noncompact connected automorphism groups.* J. Geom. Anal., **6** no. 1 (1996), 79–90.

[Leit07] F. Leitner, *Twistor spinors with zero on Lorentzian 5-space.* Comm. Math. Phys. **275**, no. 3 (2007), 587–605.

[Lich64] A. Lichnerowicz, *Sur les transformations conformes d'une variété riemannienne compacte.* C. R. Acad. Sci. Paris **259** (1964), 697–700.

[Liou1850] J. Liouville, *Théorème sur l'équation* $dx^2+dy^2+dz^2 = \lambda(d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2)$. J. Math. Pures Appl. **15** série 1 (1850), p. 103.

[Ma92] S. Matsumoto, *Foundations of flat conformal structure.* Aspects of low-dimensional manifolds. Adv. Stud. Pure Math. **20**, Kinokuniya, Tokyo, 1992, 167–261.

[Mat95] P. Mattila, Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **44**. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Mel11] K. Melnick, *A Frobenius theorem for Cartan geometries, with applications.* Enseign. Math. (2), **57** (2011), no. 1-2, 57–89.

[MS39] S. B Myers, N. E Steenrod, *The group of isometries of a Riemannian manifold.* Ann. of Math. **40** no. 2 (1939), 400–416.

[Na58] T. Nagano, *On conformal transformations of Riemannian spaces*, J. Math. Soc. Japan, **10** (1958), 79–93.

[NO86] T. Nagano, T. Ochiai, *On compact Riemannian manifolds admitting essential projective transformations.* J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A **33** (1986), 233–246.

[NY59] T. Nagano, K. Yano, *Einstein spaces admitting a one-parameter group of conformal transformations.* Ann. of Math. **69** (1959), 451–461.

[NZ09] A. Nevo, R.J. Zimmer, *Invariant rigid geometric structures and smooth projective factors.* Geom. Funct. Anal. **19**, no. 2 (2009), 520–535.

[Ob62] M. Obata, *Conformal transformations of compact Riemannian manifolds.* Illinois J. Math. **6** (1962), 292–295.

[Ob71] M. Obata, *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds.* J. Differential Geometry. **6** (1971/72), 247–258.

[P06] P. Pankka, *Quasiregular mappings from a punctured ball into compact manifolds.* Conform. Geom. Dyn. **10** (2006), 41–62.

[Pa97] P. Pansu, *Difféomorphismes de p-dilatation bornée.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **22**, no. 2 (1997), 475–506.

[PR72] G. Prasad, M. S. Raghunathan, *Cartan subgroups and lattices in semi-simple groups.* Ann. of Math. **96**, no. 2 (1972), 296–317.

[Re67] Y. Reshetnyak, *Liouville's theorem on conformal mappings for minimal regularity assumptions.* Siberian Mathematical Journal **8**, no 4 (1967), 631–634.

[QB06] R. Quiroga-Barranco, *Isometric actions of simple Lie groups on pseudo-Riemannian manifolds.* Ann. of Math. (2) **164**, no. 3 (2006), 941–969.

[R80] S. Rickman, *On the number of omitted values of entire quasiregular mappings.* J. Analyse Math. **37** (1980), 100–117.

[R92] S. Rickman, *Quasiconformal space mappings.* Lecture Notes in Mathematics, **1508**. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[R93] S. Rickman, *Quasiregular mappings.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), **26**. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[Ring08] H. Ringström, *Strong cosmic censorship in the case of $\mathbb{T}^3$-Gowdy vacuum spacetimes.* Class. Quant. Grav. **25**, 114010 (2008).

[S76] B. G. Schmidt, *Conformal bundle boundaries. Asymptotic structure of space-time* (Proc. Sympos., Univ. Cincinnati, Cincinnati, Ohio, 1976), pp. 429–440.

[S74] B. G. Schmidt, *A new definition of conformal and projective infinity of space-times.* Comm. Math. Phys. **36** (1974), 73–90.

[Sch95] R. Schoen, *On the conformal and CR automorphism groups.* Geom. Funct. Anal. **5**, no. 2 (1995), 464–481.

[Sh97] R.W. Sharpe, *Differential Geometry: Cartan's generalization of Klein's Erlangen Program.* New York, Springer, 1997.

[St06] M. Steller, *Conformal vector fields on spacetimes.* Ann. Global Anal. Geom. **29**, no. 4 (2006), 293–317.

[Ta57] N. Tanaka, *Projective connections and projective transformations.* Nagoya Math. J. **12** (1957), 1–24.

[Ta76] N. Tanaka, *On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections.* Japan. J. Math. **2** (1976), no. 1, 131–190.

[Ta79] N. Tanaka, *On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras.* Hokkaido Math. J. **8** (1979), no. 1, 23–84.

[Tar04] C. Tarquini, *Feuilletages conformes.* Ann. Inst. Fourier **54**, no. 2 (2004), p. 453–480.

[Th97] W. P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology.* Vol. 1. Edited by Silvio Levy. Princeton Mathematical Series, **35**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. 311 pp.

[V71] J. Vässälä, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings.* Lecture Notes in Mathematics, **229**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[V69] J. Väisälä, *Removable sets for quasiconformal mappings.* J. Math. Mech. **19** 1969/1970 49–51.

[Web77] S. M. Webster *On the transformation group of a real hypersurface.* Trans. Amer. Math. Soc. **231**, no. 1 (1977), 179–190.

[WMZ88] D. Witte Morris, R.J. Zimmer *Ergodic theory, groups, and geometry.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **109**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[Wo77] B. Wong, *Characterization of the unit ball in $\mathbf{C}^n$ by its automorphism group.* Invent. Math. **41**, no. 3 (1977), 253–257.

[Yo76] Y. Yoshimatsu, *On a theorem of Alekseevskii concerning conformal transformations.* J. Math. Soc. Japan **28**, no. 2 (1976), 278–289.

[Ze96] A. Zeghib, *Killing fields in compact Lorentz 3-manifolds.* J. Diff. Geom., **43** (1996) 859–894.

[Ze97] A.Zeghib, *Sur les actions affines des groupes discrets.* Ann. Inst. Fourier. **47** (1997), 641–685.

[Ze98a] A. Zeghib, *Sur les espaces-temps homogènes.* The Epstein Birthday Schrift, Geom. Topol. Monogr., vol. 1. Coventry, 1998, 551–576.

[Ze98b] A. Zeghib, *The identity component of the isometry group of a compact Lorentz manifold.* Duke Math. J. **92**, no. 2 (1998), 321–333.

[Ze99a] A. Zeghib, *Isometry groups and geodesic foliations of Lorentz manifolds. I. Foundations of Lorentz dynamics.* Geom. Funct. Anal. **9**, no. 4 (1999), 775–822.

[Ze99b] A. Zeghib, *Isometry groups and geodesic foliations of Lorentz manifolds. II. Geometry of analytic Lorentz manifolds with large isometry groups.* Geom. Funct. Anal. **9**, no. 4 (1999), 823–854.

[Zim84a] R.J. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups.* Monographs in Mathematics, **81**. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

[Zim84b] R.J. Zimmer, *Semisimple automorphism groups of G-structures.* J. Differential Geom. **19**, no. 1 (1984), 117–123.

[Zim86] R.J. Zimmer, *On the automorphism group of a compact Lorentz manifold and other geometric manifolds.* Invent. Math. **83** , no. 3 (1986), 411–424.

[Zim87a] R.J. Zimmer, *Ergodic theory and the automorphism group of a G-structure.* Group representations, ergodic theory, operator algebras, and mathematical physics (Berkeley, Calif., 1984), Math. Sci. Res. Inst. Publ., **6**, (1987), Springer, New York, 247–278.

[Zim87b] R.J. Zimmer, *Split rank and semisimple automorphism groups of G-structures.* J. Differential Geom. **26**, no. 1 (1987), 169–173.

[Zo00] V. A. Zorich, *Quasiconformal Immersions of Riemannian manifolds and a Picard type theorem.* Functional Analysis and its Applications. **34**, no 3 (2000), 188–196.

[Zo09] V. A. Zorich, *A non-removable singularity of a quasi-conformal immersion.* Russ. Math. Surv. **64** (2009), 173–174.