HAL open science

Géométrie et Dynamique Lorentziennes Conformes

Charles Frances

▶ **To cite this version:**

Charles Frances. Géométrie et Dynamique Lorentziennes Conformes. Géométrie différentielle [math.DG]. Ecole Normal Supérieure de Lyon, 2002. Français. NNT : . tel-03195071

HAL Id: tel-03195071

https://hal.science/tel-03195071v1

Submitted on 10 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Normale Supérieure de Lyon
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées

N° attribué par la bibliothèque

THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON**

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement

par

Charles Frances

le 18 décembre 2002

Titre :

GÉOMÉTRIE ET DYNAMIQUE LORENTZIENNES CONFORMES

Thèse soutenue au vu des rapports de :

M. Yves Carrière
M. William M. Goldman
M. Shigenori Matsumoto

Jury

M.	Thierry Barbot,	Examinateur
M.	Yves Carrière,	Rapporteur
M.	Paul Gauduchon,	Examinateur
M.	Jacques Lafontaine,	Examinateur
M.	Harold Rosenberg,	Président du Jury
M.	Abdelghani Zeghib,	Directeur

Remerciements

Mes premiers remerciements iront bien sûr à Abdelghani Zeghib, mon directeur. Des tout débuts du DEA jusqu'à la fin de cette thèse, c'est toujours avec beaucoup de gentillesse, de disponibilité et d'enthousiasme qu'il a encadré mon travail. Durant ces années, j'ai pu bénéficier de son intuition et de son sens esthétique en héritant d'un sujet passionnant, qui m'a fait apprendre de très belles mathématiques.

Yves Carrière, William Goldman et Shigenori Matsumoto m'ont fait le grand plaisir de rapporter cette thèse. Ce plaisir est d'autant plus important que je peux dire sans flagornerie que leurs travaux mathématiques resteront pour moi un modèle. Je les remercie tous trois vivement pour l'attention et la bienveillance qu'ils m'ont témoigné, que ce soit "de vive voix" ou par correspondance.
Je voudrais exprimer des remerciements particulièrement chaleureux et amicaux à Thierry Barbot. J'ai pu apprécier au fil des jours ses qualités d'écoute et bénéficier de ses conseils. J'ai beaucoup profité du regain d'intérêt pour la géométrie lorentzienne qu'il a su susciter, au sein de l'UMPA, et même au-delà.
Jacques Lafontaine et Paul Gauduchon ont, par leurs écrits, accompagné mon apprentissage de la géométrie conforme. Je suis très heureux qu'ils aient accepté de prendre part au jury.
C'est également une grande fierté d'avoir dans ce jury un mathématicien de l'envergure d'Harold Rosenberg.

Je ne pense pas qu'il existe une thèse de l'UMPA dans laquelle il n'ait été souligné l'ambiance stimulante et conviviale qui y règne. Je ne dérogerai surtout pas à la règle! Comme beaucoup avant moi, j'ai bénéficié de la disponibilité des membres de ce laboratoire, toujours prêts à répondre aux questions, même si celles-ci nétaient pas forcément palpitantes (merci Bruno, Emmanuel, Étienne, Thierry...).
Je ne voudrais pas oublier Virginia Gallardo-Goncalves, Sabrina Kadri et Jean-Alex Losda, qui ont réglé avec efficacité, et avec le sourire, tous mes problèmes administratifs (autrement dit toutes mes démarches administratives) au cours de ces dernières années.
Probablement consterné à plusieurs reprises par mon rapport aux ordinateurs, Hervé Gilquin ne m'en a rien montré. Je le remercie de sa délicatesse.
Pour les pauses glure-café, Abu et Sorin furent toujours présents. Nicolas préfère le chocolat chaud. Mérite-t-il des remerciements? je crois que oui...
Ils ont traqué sans pitié les vilaines coquilles qui restaient insidieusement glissées dans mon manuscrit : un grand merci à mes relecteurs Charles Boubel, M.C.Abu, Luc Hillairet, il signore Cinghiale, Marc Perret.
Enfin, tous les footballeurs et footballeuses du labo doivent savoir que je garderai un souvenir ému de nos Vendredi midis!
La suite de ces remerciements, ainsi que les pages qui suivent, est dédiée à tous mes amis ainsi qu'à mes proches.

Introduction

Les questions sur le groupe conforme d'une variété pseudo-riemannienne

Une **métrique pseudo-riemannienne** sur une variété M (que l'on suppose C^∞) est la donnée d'un champ lisse de formes quadratiques non dégénérées de signature (p, q) sur M. Étant donnée une telle métrique g, on peut considérer sa *classe conforme*, c'est à dire l'ensemble des métriques pseudo-riemanniennes de la forme $e^\sigma g$ où σ décrit toutes les fonctions C^∞ de M dans $\mathbf{R}$. La donnée d'une classe conforme de métriques définit ce qu'on appelle une **structure conforme pseudo-riemannienne** sur M. Nous allons nous intéresser tout particulièrement au groupe des transformations de M qui préservent une telle structure, que l'on appelle **groupe conforme**. Il est constitué des difféomorphismes ϕ de M tels que pour toute métrique g dans la classe conforme, il existe une fonction σ de classe C^∞ telle que $\phi^\star g = e^\sigma g$.

En dimension supérieure ou égale à 3, les structures conformes pseudo-riemanniennes sont un exemple de **structures géométriques rigides**. Ces divers résultats de rigidité, qui sont bien connus (voir [St], [K], [R], [G]), bien que leurs preuves le soient moins, sont le thème de nos deux premiers chapitres. Nous en proposons une approche élémentaire, et nous donnons en particulier une démonstration du

Théorème 2.1 **(Rigidité des structures conformes.)**
Soit M une variété de dimension $n \geq 3$ munie d'une structure pseudo-riemannienne conforme. Soit $X^1(M)$ le fibré des 1-jets de métriques de la classe conforme.

Alors la structure conforme de M définit naturellement sur $X^1(M)$ une distribution horizontale (de sous-espaces transverses aux fibres) ainsi qu'une métrique pseudo-riemannienne g^1_M.

En particulier, tout difféomorphisme conforme entre deux variétés M et N induit une isométrie de $(X^1(M), g^1_M)$ sur $(X^1(N), g^1_N)$ qui préserve les distributions horizontales.

Dans [D'AG], G.D'Ambra et M.Gromov font remarquer que génériquement, le groupe de symétries d'une structure géométrique rigide $\mathcal{S}$ sur M est trivial. Aussi, le fait, pour une variété M (que l'on suppose compacte), d'admettre une structure $\mathcal{S}$ ayant un "gros" groupe de symétries (par exemple un groupe non compact), semble être un phénomène suffisamment exceptionnel pour que l'on puisse "classifier" à la fois M et $\mathcal{S}$. Ce principe trouve une très belle illustration dans l'étude des structures riemanniennes conformes à travers le

Théorème 0.1 (Ferrand-Obata [Ob] [Fe2] [Fe3]).
Si une variété compacte M de dimension $n \geq 2$ est munie d'une structure conforme riemannienne $\mathcal{S}$ pour laquelle le groupe conforme est non compact, alors M est la sphère $\mathbf{S}^n$ et la structure $\mathcal{S}$ est la structure conforme canonique.

Les démonstrations de J.Ferrand et M.Obata sont tout à fait indépendantes. Alors que le premier auteur utilise des méthode analytiques pour construire des invariants conformes globaux, le second choisit une approche dynamique (voir l'article de J.Lafontaine dans [KP]). Toutefois, la preuve d'Obata présente le défaut de n'établir le théorème que pour la composante neutre du groupe conforme (ce qui élimine a priori le cas d'un groupe conforme discret et essentiel). Au chapitre 3 de cette thèse, nous proposons une preuve nouvelle, entièrement dynamique du théorème de Ferrand-Obata, publiée en collaboration avec C.Tarquini dans [FT]. Cette démonstration inclut une généralisation aux feuilletages transversalement conformes.
Les méthodes développées par J.Ferrand lui ont permis d'étendre le théorème 0.1 au cadre des variétés non compactes, en imposant au groupe conforme une condition d'**essentialité**, définie comme suit:

Définition 0.2 (Structure essentielle).
Une structure conforme pseudo-riemannienne sur une variété M est dite essentielle si le groupe des transformations conformes ne préserve aucune métrique de la classe conforme. On dit aussi dans ce cas que le groupe conforme lui-même est essentiel.

Sur une variété compacte, le groupe conforme est essentiel si et seulement si il n'est pas compact. En effet, le groupe d'isométries d'une métrique riemannienne sur une telle variété est compact par le théorème d'Ascoli. Réciproquement, si le groupe conforme est compact, il suffit de faire la moyenne d'une métrique quelconque de la classe conforme relativement à la mesure de Haar pour obtenir une métrique invariante. L'énoncé complet du théorème de Ferrand-Obata devient alors

Théorème 0.3 (Ferrand [Fe1]).
Soit M une variété de dimension $n \geq 2$ munie d'une structure conforme riemannienne pour laquelle le groupe conforme est essentiel, alors
(i) Si M est compacte, M est la sphère $\mathbf{S}^n$ munie de la structure conforme canonique.

(ii) Si M n'est pas compacte, M est l'espace $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure conforme canonique.

Dans le cadre riemannien, la simple hypothèse d'essentialité du groupe conforme détermine donc entièrement la géométrie globale de la variété. La question de savoir si ce phénomène persiste quand on considère des structures conformes pseudo-riemanniennes en général est à la fois le point de départ et le fil directeur de cette thèse. Notre étude est consacrée au cas de la signature $(1, n-1)$, c'est-à-dire des structures *lorentziennes* conformes, et on se limitera au cas des variétés *compactes*. La motivation de ce choix est double. D'une part, les structures lorentziennes semblent a priori être celles qui se rapprochent le plus du contexte riemannien. D'autre part, leur lien avec la physique leur confère un statut privilégié au sein des structures pseudo-riemanniennes.
Commençons par noter qu'un certain nombre d'analogies existent entre le cas riemannien et lorentzien. Il existe, en géométrie lorentzienne conforme, un espace universel, muni d'une structure conforme canonique, qui joue un rôle similaire à celui de la sphère $\mathbf{S}^n$ en riemannien. Cet espace s'appelle **l'univers d'Einstein** : $\mathbf{Ein}_n$. Il doit son nom à son origine physique puisqu'il fut introduit comme exemple de modèle cosmologique (voir par exemple [HE] ou [Se] à ce sujet). D'un point de vue topologique, il s'agit d'un quotient double du produit $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$. La structure conforme canonique est celle associée à la métrique $-dt^2 + g_{can}$ où dt^2 est la métrique standard sur le cercle $\mathbf{S}^1$ et g_{can} la métrique canonique sur $\mathbf{S}^{n-1}$. L'univers d'Einstein, ou plus exactement son revêtement universel $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$, est l'espace dans lequel se développent toutes les variétés lorentziennes **conformément plates**, c'est-à-dire dont la géométrie est modelée localement sur $\mathbf{Ein}_n$. En particulier, tous les espaces modèles lorentziens à courbure constante, Minkowski, de Sitter et Anti-de Sitter, sont conformément équivalents à des ouverts homogènes de $\mathbf{Ein}_n$. Toutefois, un changement notable par rapport au cas riemannien réside dans le fait que le produit $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$ peut être muni de nombreuses structures conformément plates, non équivalentes à la structure canonique. On peut parler de *l'espace de Teichmüller* de ces structures. Nous en ébauchons l'étude dans le chapitre 7, où nous montrons en particulier:

Théorème 7.1
Pour toute structure lorentzienne conformément plate sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$, l'application développante associée est injective. Autrement dit, toute structure conformément plate sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$ est kleinienne, c'est-à-dire obtenue comme quotient d'un ouvert de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ par un sous-groupe discret de transformations conformes.

Outre la richesse de sa géométrie, l'univers d'Einstein se distingue par son groupe de transformations conformes. Celui-ci, isomorphe à $O(2, n)$, est le plus gros possible pour une structure conforme lorentzienne sur une variété de dimension n. De plus, ce groupe est essentiel, ce qui fait de l'univers d'Einstein un bon candidat pour remplacer $\mathbf{S}^n$ dans l'énoncé d'un éventuel "théorème de Ferrand-Obata lorentzien". Ce résultat, brièvement conjec-

turé dans [D'AG] serait:

Toute variété compacte munie d'une structure conforme lorentzienne essentielle est, à revêtement fini près, conformément équivalente à l'univers d'Einstein muni de sa structure canonique.

Un de nos résultats principaux va être de montrer que cette généralisation du théorème de Ferrand-Obata est fausse : en lorentzien, l'hypothèse d'essentialité du groupe conforme ne prescrit plus la géométrie de la variété, ni même sa topologie. On peut même dire qu'il existe une relative abondance de structures conformes lorentziennes essentielles sur les variétés compactes, comme le montre le

Théorème 0.4.
Pour tout entier $n \geq 3$ et tout entier $g \geq 1$, la variété produit du cercle $\mathbf{S}^1$ par la somme connexe de g copies de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-2}$ peut être munie d'une infinité de structures conformes lorentziennes essentielles non équivalentes. Toutes ces structures sont conformément plates.

Deux structures sont dites non-équivalentes s'il n'existe aucun difféomorphisme conforme entre elles.

Parlons à présent des difficultés qui caractérisent l'étude des structures lorentziennes essentielles.
On peut commencer par souligner que sur les variétés compactes lorentziennes, la notion d'essentialité ne peut plus se formuler simplement en termes de non-compacité du groupe conforme. En effet, certaines variétés compactes admettent des métriques lorentziennes pour lesquelles le groupe d'isométries lui-même est non compact, et de plus coïncide avec le groupe conforme. Ces variétés sont donc inessentielles, bien qu'ayant un groupe conforme non compact.
Rappelons un moyen classique d'en construire. On munit le groupe $PSL_2(\mathbf{R})$ de la métrique lorentzienne bi-invariante obtenue en translatant la forme de Killing. Le groupe d'isométries et le groupe conforme de cette métrique sont égaux au produit $PSL_2(\mathbf{R}) \times PSL_2(\mathbf{R})$, agissant par multiplication à gauche et à droite. On choisit alors un réseau cocompact Γ dans $PSL_2(\mathbf{R})$ et on considère le quotient $PSL_2(\mathbf{R})/\Gamma$. C'est une variété lorentzienne compacte, inessentielle, dont le groupe conforme est non compact puisqu'il contient une copie de $PSL_2(\mathbf{R})$.

Précisons également que les techniques de J.Ferrand utilisées pour prouver le théorème 0.3 ne s'adaptent pas du tout au cadre lorentzien. Ceci motive une approche plus dynamique et moins analytique du problème, dans l'esprit de celle proposée dans [FT], qui utilise de manière cruciale la dynamique des éléments du groupe de Möbius. Cela nous a poussé à étudier la dynamique des transformations conformes de l'univers d'Einstein, et à constater que les motifs rencontrés sont bien plus variés que dans le cas de la sphère. C'est ce qui rend particulièrement délicate l'étude des structures lorentziennes conformément plates. Ces considérations nous ont amené à

étudier les **groupes kleiniens** de $\mathbf{Ein}_n$, c'est-à-dire les sous-groupes discrets de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ agissant proprement discontinûment sur un ouvert non vide Ω inclus dans $\mathbf{Ein}_n$. Un bel exemple de tels groupes est donné par les groupes de Schottky de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$, que nous introduisons et étudions en détails au chapitre 9. On montre en particulier qu'il existe pour ces groupes une bonne notion d'**ensemble limite**, ce qui n'est en général pas le cas pour un groupe kleinien quelconque de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$. Les groupes de Schottky agissent proprement et cocompactement sur le complémentaire de leur ensemble limite, ce qui permet de construire par quotient de vastes classes de variétés compactes munies de structures conformément plates. C'est parmi elles que nous avons obtenu les premiers exemples du théorème 0.4.
L'abondance de ces exemples motive d'ailleurs la

Question 0.5. *Les structures lorentziennes conformes essentielles sur les variétés compactes sont-elles classifiables?*

Avant de répondre à cette question, faisons quelques commentaires sur une nouvelle difficulté, concernant cette fois la notion d'essentialité.
Nous avons défini la classe conforme d'une métrique g de classe C^∞ sur une variété M, comme l'ensemble des métriques de la forme $e^\sigma g$ pour σ dans $C^\infty(M)$. En exigeant que les σ soient seulement de classe C^r ($r \in \mathbb{N}$), ou même L^∞, on peut parler de la classe conforme C^r (resp. L^∞) de g. Le groupe conforme préserve chacune de ces classes ce qui permet de définir différentes notions d'essentialité.
On continuera à dire que le groupe conforme est **essentiel** pour signifier qu'il ne préserve aucune métrique de la classe conforme C^∞.
On dira qu'il est $\mathbf{C^r}$**-essentiel** s'il ne préserve aucune métrique de la classe conforme C^r.
Enfin, on dira qu'il est **fortement essentiel** lorsqu'il ne préserve aucune métrique de la classe conforme L^∞. Cette dernière condition est bien sûr la plus contraignante sur le groupe conforme.
La question 0.5 doit donc être envisagée *a priori* pour chaque notion d'essentialité. Mais ces différentes notions sont-elles distinctes en pratique? Autrement dit, existe-t-il des variétés compactes munies de structures lorentziennes conformes qui soient C^∞-essentielles mais pas C^0-essentielles?
Notons que dans le cas riemannien, la réponse est *non*, et c'est précisément un corollaire du théorème de Ferrand-Obata : si le groupe conforme est essentiel, il s'agit du groupe de Möbius, qui est clairement *fortement essentiel*. La condition la plus faible d'essentialité impliquant la plus forte, toutes sont équivalentes.
Au chapitre 12, nous relions cette dernière question avec un problème algébrique abstrait que nous énonçons tout de suite. Considérons Γ un réseau cocompact de $SL_2(\mathbf{R})$, que l'on voit comme un sous-groupe du groupe $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^2$, agissant affinement sur $\mathbf{R}^2$. On appelle $Z^1(\Gamma, \mathbf{R}^2)$ l'ensemble des cocycles de Γ dans $\mathbf{R}^2$. À chaque u dans $Z^1(\Gamma, \mathbf{R}^2)$, on peut associer une représentation ρ_u de Γ dans $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^2$, donnée simplement par $\gamma \mapsto \gamma + u(\gamma)$. On dit que u est un cobord si le groupe $\rho_u(\Gamma)$ fixe un point de $\mathbf{R}^2$. Soit maintenant la suite exacte:

$$1 \to \mathbf{R} \to SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N \to SL_2(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^2 \to 1$$

où N désigne le groupe de Heisenberg de dimension 3. On note π_a la projection de $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ sur $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^2$. Nous montrerons au chapitre 12 le fait assez surprenant:
S'il existe des u de $Z^1(\Gamma, \mathbf{R}^2)$ qui ne sont pas des cobords, pour lesquels la représentation ρ_u se remonte en une représentation $\tilde{\rho}_u : \Gamma \mapsto SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ (i.e $\pi_a \circ \tilde{\rho}_u = \rho_u$), alors il existe des variétés compactes admettant des structures lorentziennes C^∞-essentielles qui ne sont pas C^0-essentielles.

Revenons maintenant à la question 0.5. Nous montrons au chapitre 10 qu'il existe une vaste gamme de procédés à notre disposition pour construire des structures essentielles (et même fortement essentielles) sur des variétés compactes. Nous décrivons en particulier comment déformer des exemples kleiniens pour obtenir des structures fortement essentielles qui présentent un certain nombre de pathologies : leur application développante (au sens des $(\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n), \mathbf{Ein}_n)$-structures) n'est pas injective et leur groupe d'holonomie est non discret. Ces derniers exemples rendent très improbable une classification globale complète des structures lorentziennes conformes essentielles sur les variétés compactes, même sous l'hypothèse plus restrictive de forte essentialité, et plaident pour une réponse négative à la question 0.5. Cela ne veut pas dire qu'on ne peut jamais rien décrire. À titre d'exemple, le théorème 11.1 permet de comprendre, en dimension 3, toutes les variétés kleiniennes compactes admettant un flot de transformations conformes C^0-essentiel.

Malgré l'abondance évoquée précédemment, nous n'avons pas d'exemples de structures essentielles sur des variétés compactes qui ne soient pas conformément plates (en revanche il existe des exemples non compacts, voir [KR1] et [KR2]) . Ceci laisse conjecturer, comme cela l'a été dans [D'AG], qu'il existe une généralisation locale au théorème 0.1, que l'on peut énoncer sous la forme

Conjecture 0.6 (Conjecture de Lichnerowicz généralisée).
Toute variété compacte munie d'une structure conforme lorentzienne essentielle est conformément plate.

Une première façon d'aborder ce problème consiste à faire des hypothèses algébriques *a priori* sur le groupe conforme, dans l'esprit, par exemple, des travaux de [BN]. Dans des travaux en cours en collaboration avec A.Zeghib, nous obtenons le théorème suivant:

Si un groupe semi-simple agit conformément et essentiellement sur une variété compacte, alors cette variété est conformément plate.

Malgré ces résultats partiels, une preuve complète de la conjecture 0.6, qui devra prendre en compte le cas où le groupe conforme se réduit à un flot, et surtout le cas où il est discret, semble un objectif encore très ardu.

Table des matières

I Généralités sur le groupe conforme d'une variété pseudo-riemannienne **12**

1 Une preuve conceptuelle du théorème de Liouville **13**
1.1 Introduction 13
1.2 Invariance conforme des géodésiques isotropes 14
1.3 Une application: le théorème de Liouville dans le cas analytique 15

2 Les structures pseudo-riemanniennes conformes en tant que structures géométriques rigides à l'ordre 2 **17**
2.1 Introduction 17
2.2 Construction des fibrés X^r 18
2.2.1 Jet d'une application 18
2.2.2 Fibrés des r-jets de métriques 18
2.2.3 Action du groupe conforme sur X^r 19
2.3 Démonstration des théorèmes de rigidité. 19
2.3.1 Quelques propriétés des sections de X^1 19
2.3.2 Sous-espace vertical en un point u de X^1 20
2.3.3 Sous-espace horizontal en un point u de X^1 20
2.3.4 Théorèmes de rigidité 21
2.4 Le théorème de Liouville sur les quadriques standard pseudo-riemanniennes $\mathbf{Q}^{p,n}$ 21
2.4.1 Définition des quadriques $\mathbf{Q}^{p,n}$ 21
2.4.2 Action du groupe $M_p(n)$ sur $X^1(\mathbf{Q}^{p,n})$ 22
2.4.3 Distribution horizontale de $X^1(\mathbf{Q}^{p,n})$ 23
2.4.4 Preuve du théorème de Liouville 23
2.5 Variétés pseudo-riemanniennes conformément plates 24
2.5.1 Platitude conforme et intégrabilité de H 24
2.5.2 Caractérisation tensorielle de la platitude conforme . . 25
2.5.3 Cas de complétude de $X^1(M)$ 26
2.6 Géodésiques Conformes 27

II Le cas riemannien: une preuve dynamique du théorème de Ferrand-Obata **29**

3 Autour du théorème de Ferrand-Obata **30**
3.1 Introduction 30
3.2 Préliminaires 31

3.3 Le point de vue local 32
3.4 Application à la démontration du théorème 3.1 33
3.5 Le passage du local au global : fin de la preuve du théorème 3.1 34
3.6 Application aux feuilletages 37

III Géométrie et dynamique sur l'univers d'Einstein 42

4 Géométrie de l'univers d'Einstein 43
4.1 Rappels sur les espaces lorentziens à courbure constante . . . 44
4.1.1 L'espace de Minkowski 44
4.1.2 L'espace de Sitter 44
4.1.3 L'espace Anti-de Sitter 44
4.2 Le bord conforme de l'espace Anti-de Sitter : l'univers d'Einstein 45
4.2.1 Définition 45
4.2.2 Topologie de $\mathbf{Ein}_n$ 45
4.2.3 Parenthèse historique 46
4.2.4 Le groupe conforme de $\mathbf{Ein}_n$ 47
4.2.5 Géodésiques et cônes de lumière 47
4.3 Le cas particulier de $\mathbf{Ein}_2$ 50
4.4 Composantes de Minkowski 51
4.4.1 Projection stéréographique 51
4.4.2 Diagrammes de Penrose 53
4.4.3 Stabilisateur d'un point dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ 56
4.5 Autres composantes à courbure constante 57
4.5.1 Composantes Anti-de Sitter 57
4.5.2 Composantes de Sitter 58
4.6 Complémentaire d'une géodésique de lumière 58
4.6.1 Groupe conforme 58
4.6.2 Feuilletages canoniques sur Ω_{Δ_0} 60

5 Dynamique des applications conformes de $\mathbf{Ein}_n$ 61
5.1 Décomposition de Cartan du groupe $O(2,n)$ 61
5.2 Suites d'éléments de $O(2,n)$ qui tendent vers l'infini 62
5.3 Propriétés qualitatives des différentes dynamiques 63
5.3.1 Dynamique à distorsions équilibrées 63
5.3.2 Dynamique à distorsion bornée 64
5.3.3 Dynamique mixte 65
5.4 Illustration des dynamiques sur $\mathbf{Ein}_n$ et sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ 67
5.4.1 Dynamique des translations sur $\mathbf{Ein}_n$ et sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ . . 67
5.4.2 Dynamique sur $\mathbf{Ein}_n$ de quelques éléments linéaires . 69
5.4.3 Dynamique des homothéties sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ 70
5.4.4 Exemple de dynamique mixte sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ 72
5.5 Quelques résultats sur la propreté de l'action des suites de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ tendant vers l'infini 73

IV Structures lorentziennes conformément plates **77**

6 Structure géométrique sur une variété **78**
6.1 Généralités sur les (G, X)-structures 78
6.2 Exemples 79
6.3 Application développante et holonomie 80
6.4 Principe de déformation des (G, X)-structures 82

7 Sur l'espace de Teichmüller de l'univers d'Einstein **83**
7.1 Application développante et dynamique de l'holonomie 84
7.2 Cas où l'action de l'holonomie est propre: structures complètes 86
7.3 Cas des structures non complètes 87
7.4 Géométrie des différents cas 90
7.4.1 Cas a) : Λ *est inclus dans un unique cône* C 90
7.4.2 Cas b) : C^+ *et* C^- *se coupent le long d'une géodésique de lumière* Δ 92
7.4.3 Cas c) : C^+ *et* C^- *se coupent selon une famille de sphères riemaniennes de codimension 2* 92
7.5 Suite de la démonstration du théorème 7.1 93
7.5.1 Idée générale de la preuve 93
7.5.2 Partie commune aux trois cas 93
7.5.3 Fin de la démonstration dans le cas a) 96
7.5.4 Fin de la démonstration dans le cas b) 99
7.5.5 Fin de la démonstration dans le cas c) 99
7.6 Illustration 103
7.6.1 Structures complètes 104
7.6.2 Structures de Hopf 104
7.6.3 Autres exemples 104

8 Structures kleiniennes uniformisables **105**
8.1 Structures uniformisables de Sitter 105
8.2 Structures uniformisables plates 105
8.3 Structures uniformisables Anti-de Sitter 106
8.3.1 Ensemble limite d'un groupe de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ agissant proprement sur $\mathbf{AdS}_{n+1}$ 107

9 Exemples de structures kleiniennes non uniformisables **110**
9.1 Dynamique de Schottky 110
9.2 Groupes de Schottky dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ 114
9.3 Topologie des variétés quotients 117
9.4 Chirurgie lorentzienne conforme 119

V Structures conformes essentielles **120**

10 Construction de structures conformes essentielles sur des variétés compactes **121**
10.1 Des conditions suffisantes d'essentialité 121

10.2 Structures essentielles sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$ 123
10.2.1 Structures complètes C^∞-essentielles sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$ . . 123
10.2.2 Structures complètes fortement essentielles sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$ $(n \geq 3)$ 123
10.2.3 Un exemple de structure non complète essentielle sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$ $(n \geq 3)$ 124
10.3 Structures essentielles sur $\mathbf{S}^1 \times (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-2})^{(g-1)\sharp}$ 125
10.3.1 Premiers exemples 125
10.3.2 Interprétation géométrique des exemples précédents en dimension 3 126
10.3.3 Autres exemples 126
10.3.4 Exemples de structures essentielles non kleiniennes . . 127

11 Classification des variétés kleiniennes de dimension 3 admettant un flot conforme C^0- essentiel 130
11.1 Une caractérisation de la forte essentialité 131
11.2 Quelques résultats préliminaires sur les variétés kleiniennes essentielles 133
11.3 Préliminaires sur les flots de $O(2,3)$ 136
11.4 Cas où G est inclus dans un produit $O(1,1) \times O(1,2)$ 137
11.5 Cas où le groupe G est inclus dans un sous-groupe $O(2,2)$ . . 139
11.6 Cas où ϕ^t est un flot unipotent 140

12 Sur les différentes notions d'essentialité: un problème de rigidité 147
12.1 Introduction 147
12.2 Formulation algébrique du problème 147
12.3 Conséquences d'une réponse négative à la question 12.5 149
12.4 Conséquences d'une réponse affirmative à la question 12.5 . . 150

Partie I

Généralités sur le groupe conforme d'une variété pseudo-riemannienne

Chapitre 1

Une preuve conceptuelle du théorème de Liouville

1.1 Introduction

Le théorème de Liouville est un résultat fondamental de géométrie conforme, que l'on peut énoncer comme suit:

Théorème 1.1 (Liouville). *Une application conforme entre ouverts de* $\mathbf{R}^n$ *(*$n \geq 3$*) est obtenue comme restriction d'une composée de similitudes et d'inversions.*

On obtient comme corollaire que tout difféomorphisme conforme entre deux ouverts de la sphère $\mathbf{S}^n$ est la restriction d'un (unique) difféomorphisme conforme *global* de $\mathbf{S}^n$. Ce théorème peut se voir comme une manifestation d'un phénomène général que nous étudierons en détails au chapitre suivant: la rigidité des applications conformes en dimension supérieure ou égale à trois. On dispose de nombreuses démonstrations du théorème de Liouville (voir entre autres [Sp] [J] ou [M]) et, dans la plupart des cas, elles s'articulent en deux parties. On commence par montrer que si un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbf{R}^n$ est conforme, il envoie localement les (n-1)-sphères sur des (n-1)-sphères. Une fois ce fait établi, on conclut de façon classique grâce à un lemme dû à Möbius.

Lemme 1.2 (Möbius). *Si une application* f *entre deux ouverts* U *et* V *de* $\mathbf{R}^n$ *envoie localement les (n-1)-sphères de* U *sur des (n-1)-sphères de* V*, alors* f *est la restriction à* U *d'une composée de similitudes et d'inversions.*

Nous renvoyons à [Sp] (*volume 3, p 310*) pour une preuve de ce lemme. Précisons que le coeur de la démonstration du théorème de Liouville réside vraiment dans la première étape, consistant à prouver qu'un difféomorphisme conforme envoie localement les (n-1) sphères sur des (n-1) sphères. Ce résultat est généralement obtenu par des calculs et il est difficile d'isoler une raison conceptuelle pour laquelle il est vrai. Aussi se propose-t-on de faire le lien entre cette propriété et un résultat profond mais *a priori* sans rapport : l'invariance conforme des géodésiques isotropes en géométrie pseudo-riemannienne ou riemannienne complexe.

1.2 Invariance conforme des géodésiques isotropes

Rappelons qu'une métrique pseudo-riemannienne g sur une variété M est la donnée d'une forme quadratique non dégénérée de signature (p, q) sur chaque espace tangent à M. Nous supposons par la suite que g n'est pas riemannienne, c'est-à-dire que ni p ni q ne sont nuls.
Une géodésique $t \mapsto c(t)$ pour la métrique g est qualifiée d'isotrope si pour tout t où $c(t)$ est défini, on a $g_{c(t)}(c'(t), c'(t)) = 0$. Si l'on se donne une métrique g' dans la classe conforme de g (c'est à dire $g' = e^{\sigma} g$ pour σ une fonction de M dans $\mathbf{R}$ de même régularité que g), les géodésiques de g' et de g n'ont en général aucun rapport. Néanmoins, on peut montrer le:

Théorème 1.3. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne, alors les géodésiques isotropes sont les mêmes, en tant que lieux géométriques, pour toutes les métriques de la classe conforme de g.*

Remarquons que ce théorème ne dit pas que les géodésiques isotropes sont les mêmes en tant que courbes paramétrées.

Preuve : Nous rappelons sommairement comment on peut voir le flot géodésique sur une variété comme un flot hamiltonien (le lecteur souhaitant plus de détails peut se référer à [AM]). Tout d'abord, la donnée d'une métrique pseudo-riemannienne g sur M fournit une identification canonique entre $T^{\star}M$ et TM, de sorte que TM est canoniquement muni d'une forme symplectique ω. À la métrique g, on associe un Hamiltonien H sur TM donné par $H(x, u) = g_x(u, u)$. La forme ω permet de définir un gradient symplectique X qui vérifie $d_{(x,u)}H(\ ) = \omega_{(x,u)}(X,\ )$. Les trajectoires du flot ϕ^t associé à X sont exactement celles du flot géodésique sur TM.

On considère une métrique g' de la classe conforme de g et on note H' l'hamiltonien qui lui est associé. Le lieu où H s'annule est une hypersurface singulière Σ_0 qui coïncide avec le lieu d'annulation de H' puisque g et g' sont dans la même classe conforme. Notons que les points où Σ_0 est régulière sont exactement le complémentaire dans Σ_0 de la section nulle. Notons également que Σ_0 est laissée invariante par l'action des flots ϕ^t et ϕ'^t. Maintenant, on remarque qu'en un point x où Σ_0 est régulière, les vecteurs $X(x)$ et $X'(x)$ sont tous deux orthogonaux, pour la forme ω, à l'espace tangent en x à Σ_0. Comme ω est non dégénérée et que $T_x\Sigma_0$ est de codimension 1 dans T_xM, c'est qu'ils sont colinéaires. On en conclut que X et X' sont toujours colinéaires sur Σ_0 puisqu'ils le sont sur un ouvert dense de Σ_0. Par conséquent, les trajectoires des flots ϕ^t et ϕ'^t sur Σ_0 sont identiques en tant que lieux géométriques, ce qui achève la preuve. □

En fait, on peut étendre ce théorème à d'autres cadres. Considérons par exemple une variété complexe M munie d'une métrique riemannienne holomorphe g (c'est-à-dire d'un champ holomorphe de formes quadratiques complexes non dégénérées sur M). On peut définir la classe conforme de g comme l'ensemble des métriques de la forme λg avec λ une fonction holomorphe de M dans $\mathbf{C}$ qui ne s'annule pas. Il existe de même une notion de

géodésiques pour la métrique g, qui seront des courbes *à paramètre complexe* $z \mapsto c(z)$. On définit les géodésiques isotropes comme précédemment. Avec ces définitions, la démonstration du théorème 1.3 s'adapte au cadre complexe et on peut affirmer que les géodésiques isotropes de toutes les métriques de la classe conforme de g sont identiques, en tant que lieux géométriques.

On peut maintenant énoncer le

Corollaire 1.4. *Une application conforme entre deux variétés pseudo-riemanniennes (resp. entre deux variétés complexes munies d'une structure riemannienne holomorphe) M et N envoie les géodésiques isotropes de M sur les géodésiques isotropes de N.*

1.3 Une application: le théorème de Liouville dans le cas analytique

Nous allons maintenant appliquer la propriété d'invariance conforme des géodésiques isotropes au cadre riemannien. Cela semble un petit peu incongru puisque dans ce cas, bien sûr, il n'y a pas de courbes isotropes. Néanmoins, lorsque la variété considérée est analytique, un bon moyen d'en faire apparaître est de tout complexifier. Aussi commençons-nous par quelques rappels sur la complexification.

Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ un point de $\mathbf{R}^n$ et $B(x, r)$ la boule euclidienne ouverte de centre x et de rayon r. On appelle $\hat{B}(x, r)$ la boule ouverte de $\mathbf{C}^n$ de centre x et de rayon r. Considérons une série

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\alpha_1+...+\alpha_n=i} b_{\alpha_1...\alpha_n}(x_1 - a_1)^{\alpha_1}...(x_n - a_n)^{\alpha_n}$$

qui converge pour tout $(x_1, ..., x_n)$ de $B(a, r)$.
Alors la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\alpha_1+...+\alpha_n=i} b_{\alpha_1...\alpha_n}(z_1 - a_1)^{\alpha_1}...(z_n - a_n)^{\alpha_n}$$

converge pour tout $(z_1, ..., z_n)$ de $\hat{B}(a, r)$.

Maintenant, si f est une application analytique définie sur un ouvert connexe $\hat{U}$ de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, on peut la complexifier sur des boules de rayon assez petit dans U. Cela permet de définir correctement une extension globale $\hat{f}$ de f à un ouvert $\hat{U}$ de $\mathbf{C}^n$ contenant U.

Lorsque f est une application analytique à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie, on peut également la complexifier en appliquant le procédé précédant à chaque fonction coordonnée (l'ouvert $\hat{U}$ n'est *a priori* pas le même pour toutes les fonctions coordonnées mais comme elles sont en nombre fini, on peut en trouver un commun). Ainsi, n'importe quel tenseur (métrique pseudo-riemannienne, structure conforme, structure symplectique) défini sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ peut se complexifier en un tenseur holomorphe sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$. Par analyticité, certaines propriétés se

conservent lors de la complexification. Par exemple toute application conforme analytique f de (U, g) dans (V, g') se complexifie en $\hat{f}$ conforme et holomorphe de $(\hat{U}, \hat{g})$ dans $(\hat{V}, \hat{g'})$.
Nous allons à présent montrer la proposition suivante, qui donne directement le théorème de Liouville grâce au lemme de Möbius.

Proposition 1.5. *Pour $n \geq 3$, une application f conforme et analytique entre deux ouverts U et V de $(\mathbf{R}^n, g_{can})$ (g_{can} désigne ici la métrique euclidienne) envoie localement les (n-1)-sphères de U sur les (n-1)-sphères de V.*

Preuve : L'application f est analytique donc on peut la complexifier en $\hat{f}$ de $\hat{U}$ sur $\hat{V}$. De même, la métrique canonique restreinte à U et à V se complexifie en $\hat{g}_{can}$ sur $\hat{U}$ et $\hat{V}$ (c'est en fait la restriction à ces deux ouverts de la forme quadratique complexe $z_1^2 + ... + z_n^2$). Le corollaire 1.4 permet d'affirmer que $\hat{f}$ envoie les géodésiques isotropes de $(\hat{U}, \hat{g}_{can})$ sur les géodésiques isotropes de $(\hat{V}, \hat{g}_{can})$. Or les géodésiques pour la métrique $\hat{g}_{can}$ sont les droites complexes affines de $\mathbf{C}^n$, c'est-à-dire les courbes $z \mapsto a + bz$ avec a et b dans $\mathbf{C}^n$. Par conséquent, si $a = (a_1, ..., a_n)$ appartient à $\hat{U}$ et $b = (b_1, ..., b_n)$ est l'image de a par $\hat{f}$, alors $\hat{f}$ doit envoyer l'intersection du cône C_a d'équation $\sum_{j=1}^n (z_j - a_j)^2 = 0$ avec $\hat{U}$ sur l'intersection du cône C_b d'équation $\sum_{j=1}^n (z_j - b_j)^2 = 0$ avec $\hat{V}$.
On note, pour tout j, $a_j = a_{1j} + ia_{2j}$ et on prend $x = (x_1, ..., x_n)$ un point de $C_a \cap \mathbf{R}^n$. Ce point doit vérifier $\sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2 = 0$, ce qui se traduit par deux conditions.
La première s'écrit $\sum_{j=1}^n (x_j - a_{1j})^2 = \sum_{j=1}^n a_{2j}^2$ et indique que x appartient à la $(n$-1)-sphère de centre $p_a = (a_{11}, ..., a_{1n})$ et de rayon $(a_{21}^2 + ... + a_{2n}^2)^{\frac{1}{2}}$.
La seconde s'écrit $\sum_{j=1}^n a_{2j}(x_j - a_{1j}) = 0$ et dit que x appartient à l'hyperplan affine passant par p_a et orthogonal à la direction $(a_{21}, ..., a_{2n})$. Ainsi $C_a \cap \mathbf{R}^n$ est une $(n$-2)-sphère centrée en p_a et de rayon $(a_{21}^2 + ... + a_{2n}^2)^{\frac{1}{2}}$. Comme a est dans $\hat{U}$, le point p_a appartient à U. En faisant décrire à $(a_{21}^2 + ... + a_{2n}^2)^{\frac{1}{2}}$ un petit intervalle autour de 0, on obtient toutes les $(n$-2)-sphères centrées en p_a de rayon suffisament petit.
Ceci montre qu'il existe un voisinage de p_a tel que toute $(n$-2)-sphère contenue dans ce voisinage est envoyée par f sur une $(n$-2)-sphère de V. On montre alors aisément que f envoie également les $(n$-1)-sphères suffisamment petites de U sur des $(n$-1)-sphères. □

Remarque 1.6. *Dans le cas $n = 2$ la démonstration est mise en défaut puisque $C_a \bigcap \mathbf{R}^2$ est en général réduit à deux points.*

Chapitre 2

Les structures pseudo-riemanniennes conformes en tant que structures géométriques rigides à l'ordre 2

2.1 Introduction

Comme nous l'avons dit au chapitre précédent, le théorème de Liouville en géométrie riemannienne conforme constitue un premier exemple d'un phénomène général : la rigidité des applications conformes entre variétés pseudo-riemanniennes de dimension supérieure ou égale à 3. Ce phénomène de rigidité est bien connu des géomètres et les résultats énoncés dans ce chapitre ne prétendent à aucune originalité (voir par exemple [K] [G] [R]), si ce n'est peut être dans leur présentation que nous nous sommes efforcés de rendre la plus élémentaire possible. Nous nous proposons donc d'établir les deux théorèmes suivants:

Théorème 2.1 (Rigidité des structures conformes). *Soit M une variété de dimension $n \geq 3$ munie d'une structure pseudo-riemannienne conforme. Soit $X^1(M)$ le fibré des 1-jets de métriques de la classe conforme.*

Alors la structure conforme de M définit naturellement sur $X^1(M)$ une distribution horizontale (de sous-espaces transverses aux fibres) ainsi qu'une métrique pseudo-riemannienne g^1_M.

En particulier, tout difféomorphisme conforme entre deux variétés M et N induit une isométrie de $(X^1(M), g^1_M)$ sur $(X^1(N), g^1_N)$ qui préserve les distributions horizontales.

Théorème 2.2 (Rigidité locale des applications conformes). *Soient M et N deux variétés pseudo-riemanniennes connexes de dimension supérieure ou égale à 3. Soient f et g deux applications conformes de M dans N. Si f et g ont même 2-jet en un point x de M, alors elles coïncident sur M.*

Comme on peut s'y attendre, certaines des propriétés de la structure conforme de M se lisent sur les caractéristiques géométriques du fibré $X^1(M)$. Nous démontrerons par exemple que la platitude conforme d'une variété M est équivalente à l'intégrabilité de la distribution horizontale naturellement associée dans $X^1(M)$.

Enfin, nous prouverons une généralisation du théorème de Liouville sur les quadriques pseudo-riemanniennes standard.

2.2 Construction des fibrés X^r

Dans tout ce qui suit, on désignera par M et N deux variétés connexes, de dimension ≥ 3, munies d'une structure conforme pseudo-riemannienne.
Nous notons $\mathrm{Conf}^{loc}(M)$ le pseudo-groupe des difféomorphismes conformes entre ouverts de M.

2.2.1 Jet d'une application

Soit f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ dans un ouvert V de $\mathbf{R}^p$ et x un point de U. On appelle jet d'ordre r (ou r-jet) de f en x la troncature à l'ordre r de son développement de Taylor en x. Deux applications auront le même jet d'ordre r en x si le développement de Taylor en x de leur différence est nul jusqu'à l'ordre r.

Soit f une application entre deux variétés M et N et x un point de M. La propriété *avoir le même r-jet en x* est une relation d'équivalence préservée par les applications de changement de carte. Il y a donc un sens à parler du r-jet de f en x et on le notera $J^r_x(f)$.

2.2.2 Fibrés des r-jets de métriques

Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension n. La signature de g est $(p, n-p)$. On appelle $X^r(M)$ (simplement noté X^r s'il n'y a pas d'ambiguïté) le fibré des r-jets de métriques de la classe conforme de g. Comme toute métrique de la classe conforme de g est de la forme $e^\sigma g$, si (U, ϕ) est une carte de M, alors la partie de X^r qui se projette sur U s'identifie au fibré des r-jets de fonctions de U dans $\mathbf{R}$. Cette identification n'est pas canonique (elle dépend du choix de g), ce qui fait que les fibres de X^r ont une structure affine et non vectorielle.

Cas $r = 0$

Se donner le 0-jet d'une métrique en x revient à connaître la valeur de $\sigma(x)$. Les fibres de X^0 sont donc difféomorphes à $\mathbf{R}$.

Cas $r = 1$

Les fibres de X^1 sont difféomorphes à $\mathbf{R}^{n+1}$ puisque le 1-jet d'une métrique en x est donné par $\sigma(x)$ et $d_x\sigma$.

Cas $r = 2$

Les fibres de X^2 s'identifient à $\mathbf{R}^{n+1+\frac{n(n+1)}{2}}$ puisque le 2-jet d'une métrique en x est donné par $\sigma(x)$, $d_x\sigma$ et $d_x^2\sigma$.

2.2.3 Action du groupe conforme sur X^r

Si ϕ est un difféomorphisme conforme entre ouverts de M, alors ϕ induit sur X^r un difféomorphisme ϕ_r entre ouverts de X^r donné par $\phi_r(J_x^r(g)) = J_{\phi(x)}^r((\phi^{-1})^\star(g))$. De même, si (M,g) et (N,g') sont deux variétés pseudo-riemanniennes et que ϕ est un difféomorphisme conforme d'un ouvert U de M sur un ouvert V de N, alors ϕ induit un difféomorphisme ϕ_r de $X^r(U)$ sur $X^r(V)$ par la même formule que précédemment.

Remarque 2.3. *Remarquons que l'on a également une action naturelle de* $\mathbf{R}$ *sur chaque fibre de* X^r *donnée par* $\lambda.J_x^r(g) = J_x^r(e^\lambda g)$ *avec* $\lambda \in \mathbf{R}$. *Cette action fait de* X^0 *un* $\mathbf{R}$*-fibré principal au-dessus de* M.

Notation 2.4. *Si* u *est un point de* X^r, *on note* $\pi(u)$ *sa projection sur* M. *D'autre part, on appelle* $u(x)$ *sa projection sur* X^0. *Ceci a un sens puisque pour* $r > k$, X^r *fibre au-dessus de* X^k.

2.3 Démonstration des théorèmes de rigidité.

2.3.1 Quelques propriétés des sections de X^1

Les théorèmes de rigidité que nous démontrons sont des théorèmes locaux. Aussi, lorsque nous parlons de sections de X^1, nous entendons toujours *sections locales.* De même, quand on parlera de g dans la classe conforme, on sous-entendra en général une métrique g définie sur un ouvert U de M, et qui est bien sûr conformément équivalente aux métriques globales de la classe conforme sur cet ouvert. On appelle alors s_g la section de U dans X^1 qui à x associe $J_x^1(g)$. De telles sections sont dites **holonomes**. Les **espaces holonomes** sont définis comme les espaces tangents aux sections holonomes. Le lemme suivant montre, entre autre, que tout espace holonome est canoniquement muni d'une métrique pseudo-riemannienne.

Lemme 2.5. *Soient* x *dans* M, u *dans* X_x^1 *et* w *dans* X_x^2 *au-dessus de* u. *Alors toutes les sections* s_g *de* X^1, *pour* g *ayant* w *comme 2-jet en* x, *ont même espace tangent en* u. *Ce sous-espace de* T_uX^1, *transverse à la fibre* X_x^1, *est noté* H_u. *Il est muni canoniquement d'une métrique pseudo-riemannienne de signature* $(p, n-p)$ *que l'on note* $g_u^{1,H}$.

Preuve : Soit g une métrique dans la classe w. On remarque que d_xs_g ne fait intervenir que le 2-jet de g en x et donc ne dépend pas du choix de g dans w. Par conséquent, le sous-espace de $T_u(X^1)$ défini par $d_xs_g(T_xM)$ ne dépend que de w et on le note H_u. Il est transverse à la fibre X_x^1 puisque s_g est une section et est canoniquement muni d'une métrique $g_u^{1,H}$ donnée par $g_u^{1,H} = (d_xs_g{}^{-1})^\star(u(x))$. $\square$

Remarque 2.6. *On vient en fait de montrer qu'il y avait correspondance biunivoque entre les sous-espace holonomes de dimension n de T_uX^1 et les éléments de X^2_u.*

2.3.2 Sous-espace vertical en un point u de X^1

Soit u dans X^1 et $x = \pi(u)$. On remarque que sur la fibre X^1_x, il existe deux feuilletages transverses. Le premier, de codimension 1, est donné par les fibres de X^1_x au dessus de X^0_x. Le second, de dimension 1, est donné par les orbites de l'action de $\mathbf{R}$ sur X^1_x. L'espace tangent en u à la fibre X^1_x, que l'on appelle **espace vertical** en u et que l'on note V_u, s'identifie donc naturellement à $\mathbf{R} \oplus F_u$ où F_u est la fibre de u au-dessus de $u(x)$. Nous allons voir que la structure conforme de M munit naturellement F_u d'une métrique. Pour cela, choisissons une métrique g_u telle que $J^1_x(g_u) = u$. Alors F_u est l'ensemble des $J^1_x(g)$ où $g = e^\sigma g_u$ avec $\sigma(x) = 0$. Un point de F_u est uniquement déterminé par la donnée de $d_x\sigma$. Insistons sur le fait que ceci ne dépend pas du choix de g_u. En effet, si $J^1_x(g'_u) = u$, alors $g = e^{\sigma'} g'_u$ et on a $d_x\sigma = d_x\sigma'$. Il y a donc identification naturelle de F_u avec $T^\star_x(M)$ qui s'identifie à son tour, via $u(x)$, à $T_x(M)$. On peut donc transporter canoniquement $u(x)$ en une métrique sur F_u. Quant à la composante $\mathbf{R}$ de l'espace vertical, on la munit de la métrique canonique. Le produit des deux métriques précédentes fournit alors une métrique $g^{1,V}_u$ sur $V_u = \mathbf{R} \oplus F_u$. Cette métrique est naturelle, au sens où elle ne dépend *que de la structure conforme de* (M, g).

2.3.3 Sous-espace horizontal en un point u de X^1

Nous allons à présent montrer qu'il existe en chaque u de X^1 un sous-espace de T_uX^1 transverse à V_u, naturellement défini par la structure conforme de M. Par le lemme 2.5, cela revient à construire une section de X^1 dans X^2, naturelle elle aussi. L'existence de cette section nous est assurée par la

Proposition 2.7. *Soit u un point de X^1_x. Il existe, dans la fibre de X^2 au-dessus de u, une unique classe $w(u)$ de métriques telle que si g a pour 2-jet $w(u)$ en x, alors $Ric_x(g) = 0$.*

Preuve : Si g et g' sont deux métriques sur M avec $g' = e^{2\sigma} g$, on a la formule (voir [Be] p59)

$$Ric(g') = Ric(g) - (n-2)(Dd\sigma - d\sigma \circ d\sigma) + (\Delta\sigma - (n-2)\|d\sigma\|^2)g.$$

Dans cette expression $\Delta\sigma$ désigne le Laplacien de σ et $Dd\sigma$ son Hessien relativement à g. On recherche des fonctions σ telles que $\sigma(x) = 0, d_x\sigma = 0$ (c'est la condition pour que g et g' aient même 1-jet en x) et $Ric_x(g') = 0$. Cela s'écrit d'après l'équation précédente:

$Ric_x(g) = (n-2)Dd\sigma_x - \Delta\sigma_x g_x$.

On va lire cette équation dans une carte exponentielle autour de x. Dans

une telle carte, le 1-jet de la métrique en 0 est celui de la métrique canonique et la dérivation covariante en 0 est la dérivation usuelle. Si l'on note r_{ij} les composantes du tenseur de Ricci dans cette carte, on obtient le système:

$r_{ii}(0) = (n-3)\frac{\partial^2\sigma}{\partial {x_i}^2}(0) - \sum_{k\neq i}\frac{\partial^2\sigma}{\partial {x_k}^2}(0) \quad 1 \leq i \leq n.$

$r_{ij}(0) = (n-2)\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_i \partial x_j}(0) \quad i \neq j.$

Lorsque $n \geq 3$, ce système détermine de manière unique les $\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_i \partial x_j}$, c'est-à-dire le 2-jet de σ. □

D'après le lemme 2.5, la section w détermine naturellement en chaque point u de X^1 un sous-espace transverse H_u muni d'une métrique pseudo riemannienne $g_u^{1,H}$. La distribution obtenue sera appelée **distribution horizontale** et nous la noterons H.

2.3.4 Théorèmes de rigidité

En chaque point u de X^1, l'espace tangent se décompose en $V_u \oplus H_u$. La métrique $g^1 = g^{1,V} \oplus g^{1,H}$ est alors une métrique pseudo-riemannienne sur X^1 qui ne dépend que de la structure conforme de départ sur M. Ainsi comme par définition, tout difféomorphisme conforme ϕ préserve la classe conforme, son action ϕ_1 sur X^1 préservera les distributions horizontales et verticales ainsi que la métrique g^1. Ceci démontre le théorème 2.1.

Remarque 2.8. *Si M est munie d'une métrique de signature (p,q), alors la métrique g^1 sera de signature $(2p, 2q+1)$.*

On en déduit le théorème 2.2 en remarquant tout d'abord qu'une application conforme est un difféomorphisme local, ce qui permet de se ramener au cas où f et g sont des difféomorphismes et M un ouvert connexe. Il suffit alors de démontrer qu'un difféomorphisme conforme ϕ d'un ouvert connexe dans un autre ayant le même 2-jet en un point que l'identité est l'identité. Mais si ϕ a le même jet d'ordre 2 que l'identité en un point x de M, alors ϕ_1 a le même jet d'ordre 1 que l'identité en tout point de la fibre X_x^1. On est donc ramenés au résultat classique qui dit qu'une isométrie d'une variété pseudo-riemannienne connexe ayant même jet d'ordre 1 que l'identité en un point est elle même l'identité.

2.4 Le théorème de Liouville sur les quadriques standard pseudo-riemanniennes $\mathbf{Q}^{p,n}$

2.4.1 Définition des quadriques $\mathbf{Q}^{p,n}$

Nous décrivons ici une construction que nous referons en détails au chapitre 4 dans le cas $p = 1$. Notons $\mathbf{R}^{p,n}$ $(0 \leq p \leq n)$ l'espace $\mathbf{R}^n$ muni de la forme quadratique canonique:

$\langle x, y\rangle = -\sum_{i=1}^{p} x_i y_i + \sum_{j=p+1}^{n} x_j y_j \qquad x, y$ dans $\mathbf{R}^n$.

On note $\mathbf{C}^{p+1,n+2}$ le cône isotrope épointé de $\mathbf{R}^{p+1,n+2}$.

Enfin, on appelle $\pi : \mathbf{R}^{p+1,n+2} \longrightarrow \mathbf{RP}^{n+1}$ la projection canonique sur l'espace projectif. Alors $\pi(\mathbf{C}^{p+1,n+2})$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbf{RP}^{n+1}$ que l'on note $\mathbf{Q}^{p,n}$. La métrique canonique de $\mathbf{R}^{p+1,n+2}$ induit une métrique dégénérée sur $\mathbf{C}^{p+1,n+2}$. La classe conforme de cette métrique dégénérée est invariante par homothéties donc passe au quotient. Elle définit alors sur $\mathbf{Q}^{p,n}$ une classe conforme de métriques pseudo-riemanniennes de signature (p,q) que l'on appelle **classe conforme canonique**.

Remarque 2.9. *Dans le cas $p = 0$, $\mathbf{Q}^{0,n}$ est la sphère riemannienne $\mathbf{S}^n$ munie de la structure conforme usuelle.*

Topologiquement, la variété $\mathbf{Q}^{p,n}$ est revêtue, via un revêtement double par $\mathbf{S}^p \times \mathbf{S}^{n-p}$.

On appelle $M_p(n)$ le groupe $PO(p+1, n+1-p)$. Comme la structure conforme de $\mathbf{Q}^{p,n}$ est canoniquement construite à partir de la métrique sur $\mathbf{R}^{p+1,n+2}$, il est clair que $M_p(n)$ agit conformément sur $\mathbf{Q}^{p,n}$.

2.4.2 Action du groupe $M_p(n)$ sur $X^1(\mathbf{Q}^{p,n})$

Nous supposons désormais que l'on s'est fixé p et q et afin de ne pas alourdir les notations, nous notons G à la place de $M_p(n)$. La propriété fondamentale de l'action du groupe G sur le fibré $X^1(\mathbf{Q}^{p,n})$ est donnée par la

Proposition 2.10. *Le groupe G agit transitivement sur $X^1(\mathbf{Q}^{p,n})$ et pour tout u dans $X^1(\mathbf{Q}^{p,n})$, le stabilisateur de u dans G, noté G_u, s'identifie au groupe $O(p, n-p)$ des transformations linéaires de H_u laissant $g_u^{1,H}$ invariante.*

Preuve :

Soit M une variété pseudo-riemannienne et u un point de $X^1(M)$. Nous notons $\mathrm{Conf}_u^{loc}(M)$ le pseudo-groupe des éléments de $\mathrm{Conf}^{loc}(M)$ qui fixent u. Tout élément de $\mathrm{Conf}_u^{loc}(M)$ laisse invariant le sous-espace H_u en préservant la forme quadratique $g_u^{1,H}$ et peut donc se voir comme un élément de $O(p, n-p)$. On montre alors le lemme général suivant:

Lemme 2.11. *Soit (M,g) une variété pseudo-riemannienne de signature $(p, n-p)$ et u un point de $X^1(M)$. Alors le pseudo-groupe $Conf_u^{loc}(M)$ s'injecte dans $O(p, n-p)$.*

Preuve :

Supposons qu'un élément ϕ de $\mathrm{Conf}_u^{loc}(M)$ agisse trivialement sur H_u. On note $x = \pi(u)$ et on choisit g une métrique de la classe conforme avec $Ric_x(g) = 0$. Comme $\phi \in \mathrm{Conf}_u^{loc}(M)$, les métriques g et $(\phi^{-1})^\star g$ ont même $1-$jet en x. Comme elles ont toutes deux leur tenseur de Ricci nul en x, on déduit de la proposition 2.7 qu'elles ont en fait même $2-$jet en x. On en conclut que $d_x s_g = d_x s_{(\phi^{-1})^\star g}$. D'autre part, nous savons que $\phi_1 \circ s_g = s_{(\phi^{-1})^\star g} \circ \phi$. Ceci implique $d_u\phi_1 \circ d_x s_g = d_x s_{(\phi^{-1})^\star g} \circ d_x\phi$. Mais l'action de $d_u\phi_1$ en restriction à H_u est triviale et par conséquent $d_x s_g = d_x s_{\phi^{-1\star} g} \circ d_x\phi$, ce qui entraîne $d_x\phi = id$. On vérifie qu'alors, ϕ_1 agit trivialement sur toute

la fibre contenant u. On conclut que ϕ_1 a même 1-jet en u que l'identité et comme c'est une isométrie pout la métrique g^1, cela signifie que c'est l'identité. $\square$

On choisit u dans $X^1(\mathbf{Q}^{p,n})$ et on considère l'application f qui va de G dans $X^1(\mathbf{Q}^{p,n})$ et qui, à un élément g de G, associe le point $g.u$. La différentielle de f en l'identité a pour noyau l'algèbre de Lie de G_u. Comme d'après le lemme précédent, la dimension de ce noyau est majorée par $\frac{1}{2}n(n-1)$, on obtient que le rang de la différentielle de f est supérieur à n, donc est n. Ceci prouve que l'orbite de u est ouverte. On peut faire ce raisonnement pour tout u dans $X^1(\mathbf{Q}^{p,n})$, et par connexité de $X^1(\mathbf{Q}^{p,n})$, on obtient que l'action de G est transitive. $\square$

2.4.3 Distribution horizontale de $X^1(\mathbf{Q}^{p,n})$

Nous montrons à présent:

Proposition 2.12. *La distribution horizontale sur le fibré $X^1(\mathbf{Q}^{p,n})$ est intégrable.*

Preuve : Considérons l'application suivante:

$\overline{s} : \mathbf{R}^{p,n} \longrightarrow \mathbf{R}^{p+1,n+2}$

$x \longmapsto (1 + \langle x, x\rangle, 2x, 1 - \langle x, x\rangle)$.

L'image de $\mathbf{R}^{p,n}$ par $\overline{s}$ est contenue dans $\mathbf{C}^{p+1,n+2}$ et l'application $\pi \circ \overline{s}$, que l'on note s, réalise un difféomorphisme conforme de $\mathbf{R}^{p,n}$ sur $\mathbf{Q}^{p,n}\backslash P$, où P est l'image par π de l'hyperplan $x_1 + x_{n+2} = 0$.
Lorsque $p = 0$, l'application s est la projection stéréographique de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{S}^n\backslash\{p\}$.
La métrique $\tilde{g}_{can} = (s^{-1})^\star g_{can}$ est plate sur $\mathbf{Q}^{p,n}\backslash P$ et est dans la classe conforme canonique. Ainsi, $s_{\tilde{g}_{can}}(\mathbf{Q}^{p,n}\backslash P)$ est une sous-variété horizontale de $X^1(\mathbf{Q}^{p,n})$ que l'on note F. Maintenant, par transitivité de l'action de G sur $X^1(\mathbf{Q}^{p,n})$, il est clair que chaque point de $X^1(\mathbf{Q}^{p,n})$ sera inclus dans l'image de F par un élément de G. $\square$

2.4.4 Preuve du théorème de Liouville

Nous nous proposons à présent de démontrer le

Théorème 2.13 (Liouville). *Si $n \geq 3$, U et V sont deux ouverts connexes de $\mathbf{Q}^{p,n}$ et f est une application conforme de U dans V de classe C^3, alors f est la restriction à U d'un unique élément $\tilde{f}$ de G.*

Preuve : Comme G agit transitivement sur X^1, il existe un h de G tel que $h \circ f$ fixe un point u de X^1. Comme $G_u = O(p, n-p)$, quitte à composer à nouveau par un élément de G_u on peut supposer que h a le même 1-jet en u que l'identité. Mais alors le théorème de rigidité locale 2.2 nous dit que $(h \circ f)_{|U} = id_{|U}$. D'où $f = (h^{-1})_{|U}$ ce qui démontre le théorème 2.13. $\square$

2.5 Variétés pseudo-riemanniennes conformément plates

Définition 2.14. *Une variété pseudo-riemannienne (M, g) de dimension n et de signature (p, q) est dite conformément plate si pour chaque point x de M, il existe un ouvert U_x contenant x qui soit conformément difféomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^{p,n}$.*

Par exemple, les quadriques $\mathbf{Q}^{p,n}$ sont conformément plates.

Le but de cette section est de relier la platitude conforme de M à des propriétés géométriques de X^1.

2.5.1 Platitude conforme et intégrabilité de H

Nous avons montré précédemment que pour les quadriques pseudo-riemanniennes standard, la distribution H était intégrable. Le théorème suivant nous dit que localement, c'est le seul cas où ce phénomène se produit.

Théorème 2.15. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension $n \geq 3$ et de signature (p, q). Alors (M, g) est conformément plate si et seulement si la distribution H est intégrable.*

Preuve : Supposons que (M, g) soit conformément plate. Soit g_0 une métrique de la classe conforme qui soit plate sur un ouvert U de M. Alors $s_{g_0}(U)$ est une feuille intégrale de H. Comme (M, g) est conformément plate, (X^1, g^1) est localement isométrique à $(X^1(\mathbf{Q}^{p,n}), g^1_{can})$. Or d'après la section précédente, le pseudo-groupe $Conf_{loc}(\mathbf{Q}^{p,n})$, qui n'est autre que $M_p(n)$ d'après le théorème de Liouville, agit transitivement sur $X^1(\mathbf{Q}^{p,n})$. Par conséquent, le pseudo-groupe $Conf_{loc}(M)$ agit lui aussi transitivement sur $X^1(M)$. Ainsi, si par un point de $X^1(M)$, il passe une feuille intégrale, il en passe par tous les points, ce qui montre que H est intégrable.

Réciproquement, supposons que la distribution H soit intégrable. Toute feuille intégrale est transverse aux fibres de X^1 et fournit donc une section $s : U \mapsto X^1(U)$. Les espaces tangents à $s(U)$ sont tous holonomes (les espaces horizontaux sont holonomes par définition). Il n'est pas difficile de vérifier qu'alors, s est elle-même holonome et s'écrit donc s_g pour une métrique g Ricci-plate sur l'ouvert U. On se fixe x_0 dans U et u_0 dans $X^1_{x_0}$. La fibre de X^1 au-dessus de $u_0(x_0)$ est de dimension n et par chacun de ses points, il passe une feuille intégrale. Il existe donc $u_1, ..., u_n$ n jets de cette fibre avec $u_i - u_0$ linéairement indépendants et des métriques $g_i^t = e^{\sigma_i^t} g$ définies sur U pour $t \in [-\epsilon; +\epsilon]$ telles que:

(i) $J^1_{x_0}(g_i^t) = t(u_i - u_0) + u_0$

(ii) $Ric(g_i^t) = 0$ sur U.

L'équation de la proposition 2.7 appliquée à g_i^t et g s'écrit alors:

$$(n-2)(Dd_x\sigma_i^t - d_x\sigma_i^t \circ d_x\sigma_i^t) = ((\Delta\sigma_i^t)_x - (n-2)\|d_x\sigma_i^t\|^2)g_x$$

et ce pour tout x de U.
On remarque que $\sigma_i^0 = 0$ et que par conséquent $d_x\sigma_i^t \circ d_x\sigma_i^t$ tout comme $\|d_x\sigma_i^t\|^2$ ne font intervenir que des termes d'ordre 2 en t. Il vient alors

$$(n-2)Dd_x\frac{\partial}{\partial t}_{(t=0)}(\sigma_i^t) = (\Delta\frac{\partial}{\partial t}_{(t=0)}\sigma_i^t)_x g_x.$$

Posons $X_i(x) = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}(t=0)}\sigma_i^t)_x$.
Quitte à rétrécir U, les champs X_i sont linéairement indépendants sur U. Étant donné que $L_{\nabla f}g = 2Ddf$, on a

$$L_{X_i}g_x = 2Dd_x\frac{\partial}{\partial t}_{(t=0)}\sigma_i^t = \frac{2}{n-2}(\Delta_x\frac{\partial}{\partial t}_{(t=0)}\sigma_i^t)g_x = 2\delta_i g_x$$

où δ_i est une fonction définie sur U.
Les champs X_i sont donc des champs de Killing conformes. D'autre part, sachant que pour tout champ de vecteurs Y sur U on a:
$L_{X_i}g(Y,Y) = 2g(Y, D_Y X_i)$ et on déduit $D_Y X_i = \delta_i Y$.
Cela entraîne d'une part

$$(i) \quad R(Y,Z)X_i = (Y.\delta_i)Z - (Z.\delta_i)Y$$

et d'autre part

$$(ii) \; Ric(g)(Y,Z) = (1-n)Y.\delta_i$$

Mais comme g est Ricci-plate sur U, on voit par (ii) que δ_i est constante sur cet ouvert. On déduit alors de l'égalité (i) que $R(Y,Z)X_i$ est nul pour tout i. Les X_i étant linéairement indépendants, ils génèrent l'espace tangent et donc $R = 0$ sur U. La variété M est alors conformément plate. □

2.5.2 Caractérisation tensorielle de la platitude conforme

Sur une variété pseudo-riemannienne, il existe un tenseur de type $(1,3)$, le tenseur de Weyl, qui s'annule si et seulement si la variété est conformément plate. Nous allons à présent construire naturellement, à partir des distributions horizontales et verticales de $X^1(M)$, une variante de ce tenseur, dont l'annulation caractérise la platitude conforme de M. C'est l'objet de la

Proposition 2.16. *Soit $T_H X^1$ le fibré des vecteurs horizontaux de TX^1 et $T_V X^1$ celui des vecteurs verticaux. Il existe un tenseur antisymétrique $\mathcal{V}$ de $T_H X^1 \times T_H X^1$ à valeurs dans $T_V X^1$ qui soit invariant par l'action de $Conf(M)$ sur X^1. De plus ce tenseur est nul si et seulement si la variété M est conformément plate.*

Preuve : Considérons l'application qui à tout couple de champs horizontaux (X,Y) associe la composante verticale de $[X,Y]$. Si f et g sont deux applications de M dans $\mathbf{R}$, la formule $[fX, gY] = fg[X,Y] + f(X.g)Y - g(Y.f)X$

montre que $V([fX, gY]) = fgV([X, Y])$. L'application considérée définit donc un tenseur antisymétrique de $T_H X^1 \times T_H X^1$ dans $T_V X^1$ que l'on appelle $\mathcal{V}$. Si $\phi \in Conf(M)$, comme ϕ_1 préserve les distributions horizontales et verticales on a $(\phi_1)^\star \mathcal{V} = \mathcal{V}$. D'autre part, il est clair que $\mathcal{V}$ s'annule si et seulement si H est involutive, c'est-à-dire intégrable par le théorème de Frobenius, ce qui équivaut à M conformément plate par la proposition précédente. □

Rappelons que par le lemme 2.11, si u est un point de X^1, le pseudo-groupe $\mathrm{Conf}_u^{loc}(M)$ s'injecte dans $O(p, n-p)$. On a alors la

Proposition 2.17. *Si pour tout u dans X^1, $Conf_u^{loc}(M)$ s'identifie à $O(p, n-p)$, alors M est conformément plate.*

Preuve : Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n champs de vecteurs horizontaux orthonormés définis sur un voisinage de $u \in X^1$. Comme par hypothèse $\mathrm{Conf}_u^{loc}(M)$ s'identifie à $O(p, n-p)$, pour tout entier i dans $\{1...n\}$ il existe $\phi \in \mathrm{Conf}_u^{loc}(M)$ tel que en u on ait $\phi_\star(X_k) = X_k$ pour $k \neq i$ et $\phi_\star(X_i) = -X_i$. Mais alors on a pour tout i dans $\{1...n\}$: $\mathcal{V}_u(X_i, \bullet)\bullet = -\mathcal{V}_u(X_i, \bullet)\bullet$. Le tenseur $\mathcal{V}$ est donc identiquement nul et on conclut par la proposition 2.16. □

Soit x un point de M. Alors les champs de Killing conformes locaux définis au voisinage de x forment une algèbre de Lie que l'on note $\mathcal{X}(x)$. On appelle $dim_x(\mathrm{Conf}^{loc}(M))$ la dimension de cette algèbre (dimension qui peut éventuellement varier avec le choix de x).

Proposition 2.18. *Au voisinage de tout x de M, on a la majoration $dim_x(Conf^{loc}(M)) \leq dim(M_p(n))$. De plus, il y a égalité pour tout x si et seulement si M est conformément plate.*

Preuve : Soit $u \in X^1$ et $x = \pi(u)$. Les champs de vecteurs de $\mathcal{X}(x)$ fournissent des champs de Killing sur X^1 (il suffit de regarder l'action des flots associés sur X^1) définis sur un voisinage de u et qui constituent une algèbre de Lie $\mathcal{X}^1(u)$ de même dimension que $\mathcal{X}(x)$. On considère maintenant l'application linéaire qui va de $\mathcal{X}^1(u)$ dans $T_u X^1$ qui à un champ de vecteur associe sa valeur en u. La dimension du noyau de cette application est $dim\mathrm{Conf}_u^{loc}(M)$. On obtient donc l'égalité $dim(\mathcal{X}^1(u)) = 2n + 1 + dim(\mathrm{Conf}_u^{loc}(M))$, c'est-à-dire $dim_x(\mathrm{Conf}^{loc}(M)) = 2n+1+dim(\mathrm{Conf}_u^{loc}(M))$. Le terme de droite est majoré par la dimension de $M_p(n)$ et on a égalité si et seulement si $dim(\mathrm{Conf}_u^{loc}(M)) = dimO(p, n-p)$. On conclut par la proposition 2.17. □

2.5.3 Cas de complétude de $X^1(M)$

Au vu de ce qui précède, on peut se demander si certaines propriétés conformes de la variété M se lisent sur les propriétés géométriques de la métrique g^1. Par exemple, que signifie la complétude de g^1 pour la variété M? Nous n'avons pas de réponse générale à cette question mais nous pouvons néanmoins prouver la

Proposition 2.19. *Soit (M, g) une variété riemannienne conformément plate. Alors la variété $(X^1(M), g^1)$ est complète si et seulement si M est conformément équivalente à la sphère $\mathbf{S}^n$.*

Preuve : Notons tout d'abord que $(X^1(\mathbf{S}^n), g^1_{can})$ est complète (car homogène). D'autre part, M étant supposée conformément plate, il existe une application développante δ de M dans $\mathbf{S}^n$ qui est un difféomorphisme conforme local. Il induit une isométrie locale δ_1 de $X^1(M)$ sur $X^1(\mathbf{S}^n)$. Or une isométrie locale entre deux variétés riemanniennes complètes est un revêtement. On conclut alors que δ_1 est une isométrie globale, car $X^1(\mathbf{S}^n)$ est simplement connexe, et que finalement M est conformément équivalente à $\mathbf{S}^n$. □

Question 2.20. *On peut se demander si ce résultat reste vrai sans l'hypothèse de platitude conforme sur la variété M.*

2.6 Géodésiques Conformes

Nous allons voir que la rigidité des applications conformes en dimension ≥ 3 se traduit aussi par l'invariance, sous l'action du groupe conforme, d'une famille de courbes dépendant d'un nombre fini de paramètres (voir aussi [S], [Fe4] pour le cas riemannien). Pour définir ces courbes, nous revenons sur la notion de géodésiques définies par rapport à une distribution de sous-espaces.

Soit (N, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension n et H une distribution de sous-espaces de dimension p. On note D la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g.

Proposition 2.21. *Soient x dans N et v dans H_x.*

Soient $X_1....X_n$ n champs de vecteurs orthogonaux définis sur un voisinage U de x et tels qu'en chaque point de U, ces champs engendrent l'espace tangent et les p premiers d'entre eux engendrent l'espace H_x.

Alors le système différentiel suivant admet une unique courbe $\gamma(t)$ solution.

(1) $g_{\gamma(t)}(\gamma', X_i) = 0$ *pour* $n+1 \leq i \leq 2n+1$.
(2) $g_{\gamma(t)}(D_{\gamma'}\gamma', X_i) = 0$ *pour* $1 \leq i \leq n$.
$\gamma(0) = u$
$\gamma'(0) = v$.

Preuve : On se place dans une carte. On note $x_1.....x_n$ des coordonnées locales de N. Les coordonnées des vecteurs X_i sont notées $X_i^1.....X_i^n$. Enfin, on pose $(D^1{}_{X_i}X_j)^H = \sum_{k=1}^n \beta_{ij}^k X_k$.

Le système s'écrit donc:

(1) $x_i{}' = \sum_{j=1}^n \lambda_j X_i^j \quad 1 \leq i \leq n$.
(2) $\lambda_i{}' + \sum_{j,k=1}^n \beta_{jk}^i \lambda_j \lambda_k = 0 \quad 1 \leq i \leq n$.

C'est un système ordinaire d'équations différentielles. Il existe une unique solution si l'on se fixe les conditions initiales $x_1^0....x_n^0$, $\lambda_1^0....\lambda_n^0$. □

Les courbes qui vérifient localement le système précédent sont appelées **géodésiques relativement à la distribution** H.
Lorsque N est le fibré X^1 et H la distribution des espaces horizontaux, les géodésiques relativement à H seront appelées **géodésiques horizontales**.
Les projections sur M de ces courbes paramétrées sont appelées *géodésiques conformes*.
La donnée d'un point u de X^1 et d'un vecteur v de $T_{\pi(u)}M$ détermine une unique géodésique conforme de M. D'autre part, il est clair qu'une application conforme envoie géodésique conforme sur géodésique conforme. On obtient ainsi une famille de courbes à $2n+1$ paramètres (n est la dimension de la variété considérée) invariante par le groupe conforme.

Exemple 2.22. *Dans le cas de la sphère S^n, les courbes obtenues sont les cercles.*

Partie II

Le cas riemannien: une preuve dynamique du théorème de Ferrand-Obata

Chapitre 3

Autour du théorème de Ferrand-Obata

Le texte qui suit est la version intégrale de l'article [FT], écrit en collaboration avec Cédric Tarquini, qui est l'auteur de la version "feuilletée" de ce théorème (voir aussi [T]).

Résumé
Le but de cet article est de donner une nouvelle démonstration du théorème de Ferrand Obata dans le cas d'une variété compacte en utilisant des méthodes dynamiques. Celles-ci nous permettront de généraliser ce théorème aux cas des feuilletages transversalement conformes de codimension supérieure à trois et ayant pour seules fonctions basiques les fonctions constantes.

Abstract
The aim of this article is to give a new dynamical proof of the Ferrand Obata theorem when the manifold is compact. This will give us a generalisation of this theorem to transversally conformal foliations of codimension greater than three and constant basic functions.

3.1 Introduction

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. On sait qu'alors son groupe d'isométries est également compact. Qu'en est-il de son groupe conforme? Le cas de la sphère nous montre que celui-ci peut ne pas être compact. En fait, on montre que lorsque $\mathrm{Conf}(M)$ est compact, il agit comme groupe d'isométries pour une métrique de la classe conforme de g. On dit dans ce cas qu'il est inessentiel. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si le groupe conforme ne peut s'inclure dans le groupe d'isométries d'une métrique de la classe conforme de g, on dit qu'il est essentiel. Notons bien que pour une variété compacte, le groupe conforme est essentiel si et seulement si il est non compact. La question de savoir quelles variétés ont un groupe conforme essentiel, connue sous le nom de "conjecture de Lichnerowicz", a suscité de nombreux travaux aboutissant à des résultats partiels (Obata a

traité le cas de la composante neutre $\mathrm{Conf}_0(M)$ du groupe conforme d'une variété compacte. Voir [KP] p 93–103 pour une démonstration simplifiée de ce cas due à J.Lafontaine). La réponse complète à cette conjecture nous est donnée par le

Théorème 3.1. *([Fe1] [Fe2]) Soit (M, g) une variété de dimension $n \geqslant 2$. Le groupe Conf(M) est essentiel si et seulement si M est conformément équivalente à $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{R}^n$.*

On doit à Jacqueline Ferrand la preuve complète de ce théorème (une preuve avait été proposée auparavant par Alekseevskii mais elle s'est avérée inexacte). Sa démonstration nécessite toutefois la construction d'invariants conformes globaux, même dans le cas compact. Dans cet article, nous nous proposons de redémontrer de manière simple ce théorème dans le cas compact par des méthodes exclusivement dynamiques. Une partie de ces méthodes nous permettra également d'obtenir un analogue du théorème 3.1 pour certains feuilletages sous la forme du

Théorème 3.2. *Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété compacte munie d'un feuilletage transversalement conforme et de codimention supérieure à 3. Si toutes les fonctions basiques de $\mathcal{F}$ sont constantes, alors:*

- *soit $\mathcal{F}$ est riemannien,*
- *soit $\mathcal{F}$ est transversalement Möbius.*

Ce théorème est une première réponse à la question plus générale:

Question : Si un feuilletage transversalement conforme n'est pas riemannien, alors il est transversalement Möbius.

3.2 Préliminaires

Dans cet article toutes les variétés sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes, un difféomorphisme conforme local de (M, g) dans (N, h) est un difféomorphisme f d'un ouvert U de M dans un ouvert V de N vérifiant $f^\star h = e^\sigma g$ où σ est une application définie sur U à valeurs réelles.

Dans la suite nous fixerons une variété riemannienne (M, g) et nous nous intéresserons à l'ensemble des difféomorphismes conformes locaux. Nous le noterons $\mathrm{Conf}(M, g)_{loc}$ ou $\mathrm{Conf}(M)_{loc}$ s'il n'y a pas d'ambigüité sur g.

La classe conforme d'une métrique g est l'ensemble des métriques de la forme $e^\sigma g$ où σ est une fonction de $\mathcal{C}^\infty(M)$, nous la noterons $\mathcal{C}(g)$. Ainsi le groupe des difféomorphismes conformes de (M, g), qui sont les éléments de $\mathrm{Conf}(M, g)_{loc}$ définis sur M tout entier, sont encore les difféomorphismes f qui préservent $\mathcal{C}(g)$ i.e. tels que $f^\star g$ appartient à $\mathcal{C}(g)$.

Définition 3.3. *La variété (M^n, g) est conformément plate si en tout point de M il existe un voisinage ouvert U conformément équivalent à un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ munie de la métrique euclidienne, c'est à dire s'il existe un difféomorphisme conforme de (U, g) sur $(V, eucl)$.*

Exemples

- Toutes les variétés de dimension 2 sont conformément plates.
- Pour $n \geqslant 2$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ et $\mathbb{S}^n$ munies de leur métriques standards sont conformément plates.

Désormais les variétés seront de dimension supérieure à 3, car sous cette condition il existe un tenseur qui mesure la platitude conforme. En dimension supérieure à 4 ce tenseur est appelé le tenseur de Weyl (noté W) , il satisfait aux propriétés suivantes (voir [GHL] section 3 p156–157 ou [KP] p65–75):

1. En dimension 3, W est identiquement nul, la platitude est mesurée par un $(2,1)$ tenseur, le tenseur de Schouten S.
2. En dimension supérieure à 4, tout ouvert sur lequel W s'annule est conformément plat.
3. Le tenseur W est invariant par $\mathrm{Conf}(M)_{loc}$, i.e. si f est un élément de $\mathrm{Conf}(M)_{loc}$ nous avons $f^\star W = W$ là où f est définie.

3.3 Le point de vue local

Définition 3.4. *Nous appellerons métrique singulière sur une variété M une métrique de la forme λg où g est une métrique riemannienne de classe C^∞ sur M et λ une fonction C^∞ de M à valeurs dans $\mathbb{R}_+ = \{x \geq 0\}$. Nous appellerons support de cette métrique l'ouvert sur lequel λ ne s'annule pas.*

Nos démonstrations des théorèmes 3.1 et 3.2 vont s'appuyer toutes deux sur la propriété fondamentale suivante:

Proposition 3.5. *Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension supérieure ou égale à trois qui ne soit pas conformément plate. Alors il existe sur M une métrique riemannienne singulière non triviale (c'est-à-dire de support non vide) préservée par le pseudogroupe $Conf(M)_{loc}$.*

Preuve : On traite d'abord le cas où la dimension est strictement supérieure à 3. Notons W le tenseur de Weyl associé à g. On définit $\|W\|_g(x)$ comme le supremum des valeurs de $\|W_x(u,v)w\|_g$ lorsque u, v, w parcourent la boule unité de l'espace tangent en x. C'est une fonction C^∞ là où elle ne s'annule pas. Si ϕ est un élément de $\mathrm{Conf}(M)_{loc}$ et que $\phi^\star g = e^{2\sigma} g$ alors $\|W\|_g(\phi(x)) = e^{-2\sigma}\|W\|_g(x)$. On en déduit que la métrique singulière $h = \|W\|_g g$ est préservée par $\mathrm{Conf}(M)_{loc}$. Cette métrique n'est pas triviale puisqu'on a supposé M non conformément plate. $\square$

Remarque 3.6. *Dans le cas où la dimension de M est 3, $Conf(M)_{loc}$ préserve la métrique singulière $h = \|S\|_g^{\frac{2}{3}} g$ (où S est le tenseur de Schouten).*

3.4 Application à la démontration du théorème 3.1

Pour commencer, rappelons deux résultats classiques concernant les actions essentielles (voir [Fe1] théorème A2).

Proposition 3.7. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. Alors il y a équivalence entre:*
(i)Conf(M) est essentiel.
(ii)Conf(M) n'est pas compact.

Proposition 3.8. *Soit (M, g) une variété riemannienne. Alors il y a équivalence entre:*
(i) Conf(M) est essentiel.
(ii) Conf(M) n'agit pas proprement sur M.

La proposition 3.5 va nous permettre d'obtenir une version locale du théorème 3.1.

Proposition 3.9. *Si (M, g) est une variété riemannienne compacte non conformément plate, alors le groupe Conf(M) est compact.*

Preuve : La variété M étant par hypothèse non conformément plate, l'ouvert $U(W)$ où le tenseur de Weyl ne s'annule pas est non vide. S'il est égal à M, la métrique h est une vraie métrique riemannienne. Comme le groupe $\mathrm{Conf}(M)$ préserve cette métrique, il est compact.

Sinon, appelons $K(W)$ le compact de M sur lequel le tenseur de Weyl s'annule. On considère les ensembles $K_\epsilon = \{x \in U(W)\ \mathrm{d}_h(x, K(W)) \geqslant \epsilon\}$ où d_h désigne la pseudo-distance définie par h sur M. Ces ensembles $(K_\epsilon, \mathrm{d}_h)$ sont des espaces métriques compacts, d'intérieur non vide pour ϵ assez petit. Le groupe $\mathrm{Conf}(M)$ agit dessus par isométrie. L'ouvert $(\overset{\bullet}{K}_\epsilon, h)$ est muni d'une structure de variété riemannienne. Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{Conf}(M)$, il existe alors une sous-suite $(f_{\varphi(i)})$ convergeant uniformément sur K_ϵ vers une isométrie f_∞ de $(K_\epsilon, \mathrm{d}_\epsilon)$. De plus, f_∞ est un difféomorphisme sur $\overset{\bullet}{K}_\epsilon$ et la convergence est en fait $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overset{\bullet}{K}_\epsilon$. La suite $(f_{\varphi(i)})$ de $\mathrm{Conf}(M)$ converge de façon $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $\overset{\bullet}{K}_\epsilon$ vers un difféomorphisme de $\overset{\bullet}{K}_\epsilon$. On peut alors affirmer que $f_{\varphi(i)}$ converge dans $\mathrm{Conf}(M)$ grâce au lemme standard suivant:

Lemme 3.10. *Soit (M, g) une variété et (f_i) une suite d'éléments de Conf(M). Supposons qu'il existe un ouvert U de M sur lequel la suite (f_i) converge de manière C^∞ vers un difféomorphisme défini sur U, alors la suite (f_i) converge dans Conf(M).*

Preuve : C'est une conséquence de la rigidité à l'ordre 2 des applications conformes en dimension supérieure ou égale à 3. Si les 2-jets d'une suite d'applications conformes convergent, c'est que la suite elle-même converge. □

□

Comme conséquence directe des propositions 3.7 et 3.9, on a le

Corollaire 3.11. *Une variété riemannienne compacte dont le groupe conforme est essentiel est conformément plate.*

Remarque 3.12. *Pour prouver la proposition 3.9, nous avons montré que sur une variété M compacte de dimension supérieure à 3, une suite (f_i) d'applications conformes préservant une métrique singulière agissait proprement. On peut se demander si c'est encore le cas lorsque M n' est pas compacte (notre démonstration du théorème 3.1 serait alors valable dans le cas non compact). Plus généralement, on peut d'ailleurs se poser la*

Question *: Une suite d'applications rigides à l'ordre r qui préservent une métrique singulière sur une variété M agit-elle proprement sur cette variété?*

(Lorsque l'on dit qu'une suite d'applications (f_i) est rigide à l'ordre r, cela signifie que (f_i) agit proprement sur le fibré des r-jets d'applications de M dans M).

3.5 Le passage du local au global : fin de la preuve du théorème 3.1

Cette partie de la preuve est essentiellement basée sur l'utilisation des propriétés dynamiques des suites de $\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^n)$ tendant vers l'infini. Nous résumons les caractéristiques de cette dynamique dans les deux lemmes suivants :

Lemme 3.13. Dynamique "Nord-Sud"
Soit (ϕ_i) une suite de Conf$(\mathbb{S}^n)$ tendant vers l'infini. Il existe alors une sous-suite, renotée (ϕ_i), et deux points a et r (éventuellement confondus) tels que :

- *pour tout point x de $\mathbb{S}^n \setminus \{r\}$ la suite $(\phi_i(x))$ tend vers a et la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{S}^n \setminus \{r\}$.*
- *pour tout point x de $\mathbb{S}^n \setminus \{a\}$ la suite $(\phi_i^{-1}(x))$ tend vers r et la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{S}^n \setminus \{a\}$.*

Les points a et r seront appelés pôles de la suite (ϕ_i).

Lemme 3.14. *Soit (ϕ_i) une suite de Conf$(\mathbb{S}^n)$ de pôles a et r. Pour tout ouvert U contenant a (resp r), quitte à considérer une suite extraite de (ϕ_i), il existe une suite U_i d'ouverts de U tels que $\overline{{\phi_i}^{-1}(U_i)} \subset \phi_{i+1}^{-1}(U_{i+1})$ (resp $\overline{\phi_i(U_i)} \subset \phi_{i+1}(U_{i+1})$) et $\mathbb{S}^n \setminus \{a\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} {\phi_i}^{-1}(U_i)$ (resp $\mathbb{S}^n \setminus \{r\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \phi_i(U_i)$).*

Grâce au corollaire 3.11, nous savons que la variété M est conformément plate. Nous notons δ l'application développante de son revêtement universel $\tilde{M}$ dans $\mathbb{S}^n$. Dans toute la suite, nous utiliserons l'équivalence énoncée dans le théorème 3.8 et prendrons pour hypothèse que $\mathrm{Conf}(M)$ n'agit pas proprement sur M. Nous avons alors la

Proposition 3.15. *Soit (M, g) une variété riemannienne dont le groupe conforme n'agit pas proprement, alors l'application développante δ est injective.*

Preuve : On remarque d'abord que si $\mathrm{Conf}(M)$ n'agit pas proprement sur M, alors $\mathrm{Conf}(\tilde{M})$ n'agit pas proprement sur $\tilde{M}$. Il existe donc une suite (x_i) de $\tilde{M}$ qui converge vers x_∞ dans $\tilde{M}$ et une suite (f_i) d'éléments de $\mathrm{Conf}(\tilde{M})$ tendant vers l'infini tels que $f_i(x_i)$ converge vers y_∞ dans $\tilde{M}$. Par une propriété classique de l'application développante, $\delta \circ f_i = \phi_i \circ \delta$ où ϕ_i est une suite d'éléments de $\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^n)$. Du fait que δ est un difféomorphisme local et grâce au lemme 3.10, on voit que (ϕ_i) tend elle aussi vers l'infini. Quitte à considérer des sous-suites, (ϕ_i) admet une dynamique de pôles a et r. D'autre part $\delta \circ f_i(x_i)$ converge vers $\delta(y_\infty)$. En faisant tendre i vers l'infini, on a d'après le lemme 3.13 que $\delta(x_\infty) = r$ ou bien $\delta(y_\infty) = a$. Quitte à considérer $({f_i}^{-1})$ au lieu de (f_i) et à inverser les rôles de (x_i) et (y_i), nous supposerons désormais $\delta(x_\infty) = r$.

Soient maintenant Ω et Ω' deux ouverts contenant respectivement x_∞ et y_∞ tels que δ soit injective sur Ω et $\overline{\Omega'}$ (on suppose de plus $\delta(\Omega') \neq \mathbb{S}^n$ et Ω' homéomorphe à une boule euclidienne.) D'après le lemme 3.14, il existe une suite U_i d'ouverts de Ω tels que: $\overline{\phi_i(\delta(U_i))} \subsetneq \phi_{i+1}(\delta(U_{i+1}))$. On note $\Omega_i = f_i(U_i)$. Alors $\overline{\delta(\Omega_i)} \subsetneq \delta(\Omega_{i+1})$ et $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \delta(\Omega_i) = \mathbb{S}^n \backslash \{a\}$. Nous énonçons à présent deux lemmes qui vont nous être utiles pour la suite.

Lemme 3.16. *Soit V un ouvert de $\tilde{M}$ (différent de $\tilde{M}$) sur lequel δ est injective et $\delta(V) \subsetneq S^n$. Alors δ envoie la frontière de V dans la frontière de $\delta(V)$.*

Notation 3.17. *Si V est une partie d'un espace topologique X, la frontière de V, c'est-à-dire l'adhérence de V privée de l'intérieur de V, sera notée $Fr(V)$.*

Preuve : Soit (v_n) une suite de V qui tend vers $v \in Fr(V)$. Supposons que $y = \delta(v)$ soit dans $\delta(V)$. On note δ^{-1} l'application de $\delta(V)$ dans V qui inverse δ sur ce domaine. Alors $\delta^{-1}(y) \in V$ et donc $\delta^{-1}(y) \neq v$. D'autre part, $\delta^{-1}(\delta(v_n))$ est une suite de V qui tend vers $\delta^{-1}(y)$ donc pour n assez grand, $\delta^{-1}(\delta(v_n)) \neq v_n$ ce qui contredit l'injectivité de δ sur V. □

Lemme 3.18. *Soient U et V deux ouverts de $\tilde{M}$ sur lesquels δ est injective et tels que $U \cap V \neq \emptyset$ et $\overline{\delta(U)} \subsetneq \delta(V)$. Alors $U \subsetneq V$.*

Preuve : Supposons que $U \not\subset V$. Dans ce cas, il existe x dans $Fr(V) \cap U$. Mais alors d'après le lemme 7.5, $\delta(x)$ appartient à la fois à $Fr(\delta(V))$ et à $\delta(U)$. Or l'intersection de ces ensembles est vide par l'hypothèse $\overline{\delta(U)} \subsetneq \delta(V)$. □

Nous pouvons alors démontrer le résultat suivant:

Lemme 3.19. *Il existe une suite (i_n) telle que $\Omega_{i_n} \cap \Omega_{i_{n+1}} \neq \emptyset$.*

Preuve : Remarquons tout d'abord que puisque $f_i(x_i)$ tend vers y_∞, $\Omega_i \cap \Omega' \neq \emptyset$ pour i suffisamment grand. Deux cas sont alors à envisager:

S'il existe une suite (i_n) pour laquelle $\Omega_{i_n} \subset \Omega'$, alors du fait que δ est un difféomorphisme de Ω' sur son image et grâce à l'inclusion $\overline{\delta(\Omega_{i_n})} \subset \delta(\Omega_{i_{n+1}})$, on conclut que $\Omega_{i_n} \subset \Omega_{i_{n+1}}$ et en particulier $\Omega_{i_n} \cap \Omega_{i_{n+1}} \neq \emptyset$.

Dans le cas contraire, pour i grand, on a $\Omega_i \cap Fr(\Omega') \neq \emptyset$ et nous allons montrer qu'en fait Ω_i contient $Fr(\Omega')$, ce qui impliquera le résultat souhaité.

Par le lemme 7.5, on obtient $\delta(\Omega_i \cap Fr(\Omega')) \subset Fr(\delta(\Omega'))$. Nous allons tout d'abord montrer qu'il y a en fait égalité lorsque i est grand. Soit $y \in Fr(\delta(\Omega_i \cap Fr(\Omega'))$. Alors $y \in Fr(\delta(\Omega'))$ et comme pour i suffisamment grand $Fr(\delta(\Omega')) \subset \delta(\Omega_i)$, on obtient $y \in \delta(\Omega_i)$. Soit $z \in \Omega_i$ tel que $\delta(z) = y$. Si l'on avait $z \in \Omega_i \backslash Fr(\Omega')$, il existerait un ouvert V contenant z et tel que $\delta(V) \cap \delta(\Omega_i \cap Fr(\Omega')) = \emptyset$ ce qui est absurde car $\delta(V)$ est un ouvert contenant y et $y \in Fr(\delta(\Omega_i \cap Fr(\Omega')))$. Par conséquent $z \in \Omega_i \cap Fr(\Omega')$ et donc $y \in \delta(\Omega_i \cap Fr(\Omega'))$. Ceci prouve que $\delta(\Omega_i \cap Fr(\Omega'))$ est fermé dans $Fr(\delta(\Omega'))$. D'autre part, comme δ est injective sur $\overline{\Omega'}$, $Fr(\delta(\Omega')) = \delta(Fr(\Omega'))$ et $\delta(\Omega_i \cap Fr(\Omega'))$ est ouvert dans $Fr(\delta(\Omega'))$. Enfin, $Fr(\delta(\Omega'))$ est connexe car on a pris Ω' difféomorphe à une boule euclidienne. L'égalité recherchée en découle. De l'injectivité de δ sur $\overline{\Omega'}$ et de $\delta(\Omega_i \cap Fr(\Omega')) = \delta(Fr(\Omega'))$, on déduit $\Omega_i \cap Fr(\Omega') = Fr(\Omega')$ ce qui achève la preuve du lemme. $\square$

Le résultat du lemme et l'inclusion $\overline{\delta(\Omega_{i_n})} \subsetneq \delta(\Omega_{i_{n+1}})$ permettent d'appliquer le lemme 3.18 et d'obtenir $\Omega_{i_n} \subsetneq \Omega_{i_{n+1}}$. Posons alors $W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{i_n}$. L'application δ est injective sur W puisqu'elle l'est sur chaque Ω_i et $\delta(W) = \mathbb{S}^n \backslash \{a\}$. Si W est fermé, $W = \tilde{M}$ et la proposition est démontrée. Sinon, par le lemme 7.5, un point de $Fr(W)$ doit avoir pour image a. Comme δ est un difféomorphisme local, cela signifie que $Fr(W)$ est discrète. Mais si $Fr(W)$ contient deux points distincts u et v, on peut trouver deux ouverts U, V de $\tilde{M}$ disjoints et un ouvert Z de $\mathbb{S}^n$ contenant a tels que :

- $U \backslash \{u\} \subset W$ et $V \backslash \{v\} \subset W$.
- δ est un difféomorphisme de U sur Z.
- δ est un difféomorphisme de V sur Z.

Ceci est incompatible avec l'injectivité de δ sur W. On conclut alors que $Fr(W) = \{w\}$; $\tilde{M} = W \cup \{w\}$ et δ est injective sur $\tilde{M}$ puisque $\delta(w) = a$ et $\delta(W) = \mathbb{S}^n \backslash \{a\}$. $\square$

Grâce à la proposition 3.15 il ne nous reste plus qu'à prouver le théorème dans le cas des variétés obtenues comme quotients d'ouverts de $\mathbb{S}^n$. Soit donc U un ouvert de $\mathbb{S}^n$ et Γ un groupe discret de $\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^n)$ agissant proprement discontinuement sans point fixe sur U. Nous notons M la variété U/Γ et π l'application de revêtement de U sur M. Nous concluons grâce à la

Proposition 3.20. *Si Conf(M) n'agit pas proprement sur M, alors M est conformément équivalente à $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{S}^n$. En particulier, si M est compacte, elle est conformément équivalente à $\mathbb{S}^n$.*

Notons $\widetilde{\mathrm{Conf}(U)}$ le normalisateur de Γ dans $\mathrm{Conf}(U)$. Alors $\widetilde{\mathrm{Conf}(U)}$ n'agit pas proprement sur U. Il existe par conséquent une suite (ϕ_i) de $\widetilde{\mathrm{Conf}(U)}$ tendant vers l'infini dont l'un des pôles est dans U. On peut supposer qu'il s'agit de r. Soit Ω un domaine d'injectivité de π autour de r. Le lemme 2 assure alors l'existence d'une suite d'ouverts Ω_i inclus dans Ω tels que $\phi_i(\Omega_i)$ soit croissante et $\mathbb{S}^n\backslash\{a\} \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} {\phi_i}^{-1}(U_i) \subset U$. Mais comme les ϕ_i normalisent Γ, $\pi|_{\phi_i(\Gamma_i)}$ est injective pour tout $i \in \mathbb{N}$. D'où π est injective sur $\mathbb{S}^n\backslash\{a\}$. Ceci implique d'une part que $\Gamma = \{Id\}$, et d'autre part que $U = \mathbb{S}^n$ ou $U = \mathbb{S}^n\backslash\{a\}$, qui est conformément équivalent à $\mathbb{R}^n$.

Remarque 3.21. *Notons que cette partie de la preuve n'utilise pas la compacité de M.*

3.6 Application aux feuilletages

Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée compacte, (U_i) un recouvrement de M par des ouverts feuilletés trivialement, i.e. difféomorphes à $V_i \times T_i$, où V_i est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ (p dimension des feuilles) et T_i un ouvert de $\mathbb{R}^q$ (q la codimension). Nous noterons $f_i : U_i \to \mathbb{R}^q$ les projections, $T = \cup_i T_i$ la transversale et $(\gamma_{i,j})_{i,j}$ le cocycle associé à ce recouvrement ($\forall i, j \quad f_i = \gamma_{i,j} \circ f_j \quad$ sur $\quad U_i \cap U_j$). Le pseudogroupe Γ engendré par les $\gamma_{i,j}$ est le pseudogroupe d'holonomie du feuilletage associé à la transversale T.

Nous dirons que le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement conforme si la transversale T possède une métrique riemannienne g pour laquelle les $\gamma_{i,j}$ sont des difféomorphismes conformes locaux.

Rappelons que les fonctions basiques de $\mathcal{F}$ sont les fonctions constantes le long des feuilles.

Exemples

- Tout feuilletage riemannien est tranversalement conforme.
- En codimension deux, tout feuilletage transversalement holomorphe est transversalement conforme.
- Un feuilletage transversalement Möbius est transversalement conforme. Si la codimension est supérieure à 3, le théorème de Liouville nous dit que ce sont les feuilletages transversalement conformément plats.

Cette partie est dédiée à la démonstration du théorème 3.2 qui rappelons-le est une version transverse à un feuilletage du théorème 3.1. Une motivation de la question posée dans l'introduction est qu'elle admet une réponse positive pour des feuilletages crées par suspension d'un difféomorphisme. Cela découle immédiatement du théorème de Ferrand.

En effet, soient B et F deux variétés (où F est de dimension $q \geqslant 3$). Posons M la variété donnée par la suspension d'une représentation $\varphi : \pi_1(B) \to Diff^\infty(F)$. Alors le feuilletage suspension $\mathcal{F}$, transverse aux fibres de la projection $M \to B$, est transversalement conforme si et seulement si la

variété F possède une métrique g pour laquelle $\varphi(\pi_1(B)) \subset \mathrm{Conf}(F,g)$. En appliquant le théorème 3.1, soit $\mathrm{Conf}(F)$ est essentiel, dans ce cas (F,g) est conformément équivalent à $\mathbb{S}^q$ ou $\mathbb{R}^q$ et le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement Möbius, soit il est un groupe d'isométrie pour une métrique dans $\mathcal{C}(g)$, le feuilletage $\mathcal{F}$ est alors riemannien. □

Proposition 3.22. *Tout feuilletage transversalement conforme non riemannien sur une variété (compacte ou non), donné par une suspension de $\varphi : \pi_1(B) \to Diff^\infty(F)$ (où F est de dimension $q \geqslant 3$) est un feuilletage transversalement Möbius.*

Une dernière remarque avant de commencer la démonstration, l'hypothèse du théorème 3.2 est en particulier vérifiée si le feuilletage admet une feuille dense. Et grâce au corollaire B énoncé par Asuke [As], nous déduisons du théoème 3.2 le corollaire suivant:

Corollaire 3.23. *Un flot transversalement conforme (au sens des feuilletages) sur une variété compacte de dimension supérieure à 4 dont toutes les orbites sont denses est riemannien.*

En effet la codimension est supérieure à 3, le flot est d'après la théorème ci-dessus soit riemannien soit transversalement conformément plat. Et dans la cas où le flot est transversalement conformément plat le corollaire B d'Asuke [As] nous assure qu'il est riemannien. □

Revenons au théorème 3.2, de la proposition fondamentale 3.5 nous déduisons la suivante:

Proposition 3.24. *Soit $(M,\mathcal{F})$ un feuilletage transversalement conforme de codimension supérieure à 3. Alors soit $\mathcal{F}$ est transversalement Möbius, soit il existe un ouvert saturé non vide sur lequel le feuilletage est riemannien.*

Preuve : Par définition le feuilletage possède une transversale T munie d'une métrique g pour laquelle le pseudogroupe d'holonomie Γ est un sous-pseudogroupe de $\mathrm{Conf}(T,g)_{loc}$. Si le feuilletage $\mathcal{F}$ n'est pas transversalement conformément plat, i.e si (T,g) n'est pas conformément plate alors d'après la proposition 3.5, T possède une métrique singulière non triviale préservée par $\mathrm{Conf}(T,g)_{loc}$ et donc par Γ. Appelons-la h. En restriction au support de h, le pseudogroupe Γ est un pseudogroupe d'isométrie. Le feuilletage F est riemannien sur l'ouvert saturé de M qui se projète sur le support de h.

Reste le cas où (T,g) est conformément plate, c'est à dire localement conformément difféomorphe à l'espace euclidien $\mathbb{R}^q$. En vertu du théorème de Liouville et quitte à rétrécir les ouverts $(U_i)_i$, les $\gamma_{i,j}$ sont des restrictions d'applications de Möbius. Le feuilletage est donc transversalement Möbius. Ceci démontre la proposition. □

Pour montrer le théorème 3.2, il suffit de montrer que si le support $U(h)$ de la métrique singulière h est non vide et distinct de T, alors il existe des fonctions basiques non constantes.

Nous supposons donc que l'ouvert $U(h)$ est un sous ensemble propre et non vide de T. La métrique singulière h construite au paragraphe précédent

peut être remontée en une métrique singulière sur M, quasi-fibrée pour $\mathcal{F}$, et qui en restriction à l'espace tangent aux feuilles, est une forme définie positive. Cela est possible grâce à l'invariance de h par le pseudogroupe d'holonomie.

Notons $\bar{h}$ la métrique ainsi construite et $U(\bar{h})$ l'ouvert saturé qui se projette sur $U(h)$. Le fermé K complémentaire de $U(\bar{h})$ est l'ensemble sur lequel $\bar{h}$ est singulière. Nous pouvons construire d: $M \times M \to \mathbb{R}^+$ la métrique singulière induite par $\bar{h}$:

$$\mathrm{d}(x,y) = \inf_{\gamma} l(\gamma) \qquad \text{où} \quad l(\gamma) = \int \sqrt{\bar{h}_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t))}\mathrm{d}t$$

et où l'infimum est pris sur l'ensemble des chemins γ $\mathcal{C}^1$ par morceaux reliant x à y. Posons $\mathrm{d}_K : M \to \mathbb{R}_+$ l'écart d'un point x de M à K : $\mathrm{d}_K(x) = \inf\limits_{\{z\in K\}} \mathrm{d}(x,z)$.

Nous pouvons remarquer que $\mathrm{d}_K(x)$ est nul si et seulement si x est dans K. Le lemme suivant est dû à M. H. Rigal (voir le lemme 1 de [Ri]) :

Lemme 3.25. *Pour tout point x de $U(\bar{h})$ il existe un chemin C^1 $\gamma : [0,1] \to M$ vérifiant : $\gamma(0) = x$, $\gamma|_{[0,1[}$ est contenu dans $U(\bar{h})$ et est une géodésique de longueur $d_K(x)$ perpendiculaire à $\mathcal{F}$ pour $\bar{h}$ qui s'accumule sur K.*

La démonstration de ce lemme peut se faire en construisant le chemin par récurrence.

Preuve : Si x est fixé dans l'ouvert $U(\bar{h})$, pour tout entier $n \geq 1$ il existe un chemin $\gamma_n : [0,1] \to M$ vérifiant:

$$\gamma_n(0) = x, \quad \gamma_n(1) = z_n \in Fr(U(\bar{h})), \quad \gamma_n([0,1[) \subset U(\bar{h}) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}_K(x) \leq l(\gamma_n) \leq \mathrm{d}_K(x) + \frac{1}{n}$$

Notons y_n le milieu de γ_n, ce point satisfait :

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}_K(x) \leq \mathrm{d}(x,y_n) = \mathrm{d}(y_n,z_n) \leq \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}_K(x) + \frac{1}{n}\right)$$

Comme la variété est compacte il existe y point d'accumulation de (y_n) et z de (z_n). Le point y est dans l'ouvert $U(\bar{h})$ car par continuité de d : $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}_K(x)/2$. De même nous avons $\mathrm{d}(y,z) = \mathrm{d}_K(x)/2$ et $\mathrm{d}(x,z) = \mathrm{d}_K(x)$. Le chemin γ sur $[0,1/2]$ est donné par une géodésique reliant x à $y = \gamma(1/2)$. Il faut ensuite recommencer le processus entre y et z pour construire γ sur $[1/2,3/4]$. En appliquant l'inégalité triangulaire nous obtenons : $\mathrm{d}_K(x) = \mathrm{d}(x,z) \leq \mathrm{d}(x,\gamma(3/4)) + \mathrm{d}(\gamma(3/4),z)$ or $\mathrm{d}(\gamma(3/4),z) = \mathrm{d}_K(x)/4$, donc

$$\frac{3}{4}\mathrm{d}_K(x) \leq \mathrm{d}(x,\gamma(\tfrac{3}{4})) \leq \mathrm{d}(x,\gamma(\tfrac{1}{2})) + \mathrm{d}(\gamma(\tfrac{1}{2}),\gamma(\tfrac{3}{4})) = \frac{3}{4}\mathrm{d}_K(x)$$

Le chemin γ réalise la distance minimale entre x et $\gamma(3/4)$, c'est une géodésique donc automatiquement $\mathcal{C}^1$. En poursuivant, nous obtenons une géodésique de $(U(\bar{h}),\bar{h})$ qui admet z comme point adhérent.

Par un argument de Reinhart, comme la métrique singulière $\bar{h}$ est quasi-fibrée, il suffit de montrer que cette géodésique est orthogonale à une feuille en un point pour montrer qu'elle l'est partout. Or une courbe non orthogonale aux feuilles ne pourrait être de longueur minimale. $\square$

Comme d_K est localement constante le long des feuilles de $\mathcal{F}$, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 3.26. *La fonction d_K est basique et non constante.*

Ce qui démontre le théorème et nous permet de compléter la proposition 3.24 par :

Proposition 3.27. *Dans le cas où la codimension est supérieure à 3, soit le feuilletage est transversalement Möbius, soit il existe un ouvert saturé non vide sur lequel le feuilletage est riemannien et dont la distance au bord est invariante par le pseudogroupe d'holonomie.*

Remerciements

Nous tenons à remercier Gaël Meigniez et Abdelghani Zeghib pour le soutien qu'ils ont apporté à ce travail ainsi que l'Université Autonome de Barcelone pour son accueil.

Bibliographie

[A] D.V. ALEKSEEVSKII : *Groups of transformations of riemannian spaces*, Mat. Sbornik **89** (131) 1972 $n^o 2$ et Math. USSR Sbornik **18** (1972) $n^o 2$ 285–301.

[As] T. ASUKE : *On transversaly flat conformal foliations with good measures II*, Hiroshima Math. J. **28** (1998) 523–525.

[Be] A.BESSE : *Einstein Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer Verlag. Berlin 1986.

[Fe1] J. FERRAND : *The action of conformal transformations on a Riemannian manifold*, Math. Ann. **304** (1996), 277–291.

[Fe2] J. FERRAND : *Transformations conformes et quasi conformes des variétés riemanniennes: application à la démonstration d'une conjecture de A. Lichnerowicz*, C.R.Acad.Sci. Paris, Série A, **269** (1969), 583-586.

[GHL] GALLOT HULIN LAFONTAINE : *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1987, 1990.

[KP] S.KULKARNI,U.PINKALL : *Conformal Geometry*, Aspects of Mathematics, Max Planck Institut fur Mathematik. Vieweg (1988). Voir en particulier les sections *Conformal geometry from the riemannian viewpoint* et *The theorem of Lelong-Ferrand and Obata.*

[Ob] M. OBATA : *The conjectures on conformal transformations of riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **6** (1971) 247–258.

[Ri] M. H. RIGAL : *Rigidité des feuilletages transversalement conformément parallélisables*, Tôhoku Math. J. **50** (1998) 407–418.

[Sp] M.SPIVAK : *A comprehensive introduction to differential geometry*, volume **5**, Publish or Perish,Inc.

Charles FRANCES
UMPA, École Normale de Lyon
46 allée d'Italie
69 364 Lyon Cedex 07
Courriel : cfrances@umpa.ens-lyon.fr

Cédric TARQUINI
LMAM
Université de Bretagne-Sud
Campus de Tohannic
BP 573- 56000 Vannes
Courriel : tarquini@univ-ubs.fr

Partie III

Géométrie et dynamique sur l'univers d'Einstein

Chapitre 4

Géométrie de l'univers d'Einstein

Nous construisons dans ce chapitre l'univers d'Einstein qui s'avère être un objet central en géométrie lorentzienne conforme. Il fut introduit à l'origine comme exemple de solution statique de l'équation d'Einstein en relativité générale. Pour nous, il s'agira plutôt d'un analogue conforme lorentzien de la sphère $\mathbf{S}^n$.

Rappelons que dans le cadre de la géométrie riemannienne conforme, la sphère $\mathbf{S}^n$ munie de sa structure conforme canonique apparaît comme le bord conforme de l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^{n+1}$. Toute isométrie de l'espace $\mathbf{H}^{n+1}$ induit sur son bord une application conforme et réciproquement, toute application conforme de $\mathbf{S}^n$ provient d'une isométrie de $\mathbf{H}^{n+1}$.

Un autre fait intéressant est qu'il existe dans la classe conforme de tout hémisphère de $\mathbf{S}^n$ une métrique complète à courbure -1. D'autre part, l'existence de projections stéréographiques montre que le complémentaire d'un point dans $\mathbf{S}^n$ admet dans sa classe conforme une métrique complète à courbure nulle. Enfin, la sphère $\mathbf{S}^n$ elle-même admet dans sa classe conforme une métrique complète à courbure $+1$. Par conséquent, tous les espaces riemanniens modèles à courbure constante apparaîssent conformément comme des ouverts de $\mathbf{S}^n$.

Nous allons voir que la situation lorentzienne est tout à fait similaire à celle décrite ci-dessus. Bien entendu, les espaces impliqués sont différents du cadre riemannien. Aussi, commencerons-nous par quelques brefs rappels sur les espaces Minkowski, de Sitter et Anti-de Sitter qui sont les espaces modèles lorentziens à courbure constante (respectivement $0, 1$ et -1).

L'univers d'Einstein va être introduit comme le bord conforme de l'espace lorentzien standard à courbure -1 : l'espace Anti-de Sitter.

Nous verrons ensuite comment, comme dans le cas riemannien, les trois espaces modèles lorentziens à courbure constante se plongent conformément comme des ouverts homogènes de l'univers d'Einstein.

4.1 Rappels sur les espaces lorentziens à courbure constante

Comme son titre le laisse entendre, cette section n'est constituée que de rappels et le lecteur désireux de plus de détails sur les faits énoncés ci-dessous, et plus généralement sur les espace pseudo-riemanniens à courbure constante, pourra par exemple se référer à [Wo] ou [Sa].

4.1.1 L'espace de Minkowski

C'est certainement le plus familier et le plus simple à comprendre parmi les espaces lorentziens à courbure constante. On le définit comme l'espace $\mathbf{R}^n$ muni de la forme quadratique de signature $(1, n-1)$ $\langle x, x\rangle = 2x_1x_n + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2$ et on le note $\mathbf{R}^{1,n-1}$. La métrique de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ est complète à courbure constante nulle. Les géodésiques de cette métrique sont les droites. Le groupe des isométries est un sous-groupe du groupe affine. Il s'agit du groupe $O(1, n-1) \ltimes \mathbf{R}^n$. Si l'on rajoute à ce groupe les homothéties, on obtient le groupe conforme de l'espace de Minkowski : $(\mathbf{R} \times O(1, n-1)) \ltimes \mathbf{R}^n$.

4.1.2 L'espace de Sitter

Dans l'espace $\mathbf{R}^{1,n}$, on considère la quadrique $\mathbf{S}^{1,n-1}(1)$ donnée par l'équation $\langle x, x\rangle = 1$. La forme quadratique $\langle\ \rangle$ induit sur l'espace $\mathbf{S}^{1,n-1}(1)$ une métrique de signature lorentzienne, complète et à courbure constante égale à $+1$.

Appelons Ω^+ l'ouvert de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ constitué des vecteurs x pour lesquels $\langle x, x\rangle > 0$. La projection π de $\mathbf{R}^{1,n}$ sur $\mathbf{RP}^n$ envoie Ω^+ sur un ouvert $\hat{\Omega}^+$ de $\mathbf{RP}^n$. Il est naturellement muni d'une métrique lorentzienne complète à courbure constante $+1$ pour laquelle π est un revêtement isométrique de $\mathbf{S}^{1,n-1}(1)$ sur $\hat{\Omega}^+$. L'ouvert $\hat{\Omega}^+$ muni de cette métrique s'appelle espace de Sitter de dimension n et on le note $\mathbf{dS}_n$.

Les géodésiques pour la métrique de l'espace $\mathbf{dS}_n$ sont les intersections des droites projectives avec l'ouvert $\hat{\Omega}^+$. Quant au groupe des isométries de $\mathbf{dS}_n$ c'est le groupe $PO(1, n)$. Il agit transitivement, si bien que l'espace $\mathbf{dS}_n$ peut être vu comme l'espace homogène $PO(1, n)/PO(1, n-1)$.

4.1.3 L'espace Anti-de Sitter

On note $\mathbf{R}^{2,n-1}$ l'espace $\mathbf{R}^{n+1}$ muni de la forme quadratique $q^{2,n-1}(x) = -2x_1x_{n+1} + 2x_2x_n + x_3^2 + ... + x_{n-1}^2$ et on appelle $\mathbf{S}^{1,n-1}(-1)$ l'hyperboloïde défini par l'équation $q^{2,n-1}(x) = -1$. La forme $q^{2,n-1}$, en restriction aux espaces tangents à $\mathbf{S}^{1,n-1}(-1)$, est de signature lorentzienne et définit sur $\mathbf{S}^{1,n-1}(-1)$ une métrique complète de signature constante égale à -1. Pour tout x dans $\mathbf{S}^{1,n-1}(-1)$, la restriction de la forme $q^{2,n-1}$ à l'espace tangent en x a une signature lorentzienne. La métrique ainsi définie sur $\mathbf{S}^{1,n-1}(-1)$ a une courbure sectionelle constante égale à -1. L'ouvert Ω^- constitué des vecteurs x de $\mathbf{R}^{2,n-1}$ pour lesquels $q^{2,n-1}(x) < 0$ se projette sur un ouvert $\hat{\Omega}^-$ de $\mathbf{RP}^n$. Il est naturellement muni d'une métrique lorentzienne complète à courbure constante -1 pour laquelle π est un revêtement isométrique

de $\mathbf{S}^{1,n-1}(-1)$ sur $\hat{\Omega}^-$. L'ouvert $\hat{\Omega}^-$ s'appelle **espace Anti-de Sitter** de dimension n et on le note $\mathbf{AdS}_n$.

Les géodésiques de $\mathbf{AdS}_n$ pour cette métrique sont les intersections des droites projectives de $\mathbf{RP}^n$ avec l'ouvert $\hat{\Omega}^-$

Le groupe des isométries de l'espace Anti-de Sitter de dimension n est le groupe $PO(2, n-1)$. Il agit transitivement sur $\mathbf{AdS}_n$ et le stabilisateur d'un point est isomorphe à $PO(1, n-1)$. On peut donc voir $\mathbf{AdS}_n$ comme l'espace homogène $PO(2, n-1)/PO(1, n-1)$.

4.2 Le bord conforme de l'espace Anti-de Sitter : l'univers d'Einstein

4.2.1 Définition

L'espace $\mathbf{AdS}_{n+1}$ étant défini comme un ouvert de $\mathbf{RP}^{n+1}$, il est tentant d'étudier à quoi peut bien ressembler sa frontière.

Pour cela, on considère le cône isotrope de la forme $q^{2,n}$ que l'on note $\mathbf{C}^{2,n}$, et on le projette par π sur $\mathbf{RP}^{n+1}$. On obtient une hypersurface de $\mathbf{RP}^{n+1}$ que l'on appelle **univers d'Einstein** de dimension n et que l'on note $\mathbf{Ein}_n$. Par construction, l'univers d'Einstein $\mathbf{Ein}_n$ est le bord topologique de $\mathbf{AdS}_n$ dans $\mathbf{RP}^{n+1}$. Nous allons voir que la construction de $\mathbf{Ein}_n$ le munit d'une structure conforme naturelle.

Pour tout $x \in \mathbf{C}^{2,n}$, la restriction de $q^{2,n}$ à l'espace tangent en x au cône est une forme quadratique dégénérée $\hat{q}_x^{2,n}$, de signature $(0, -, +...+)$. Le noyau de cette forme quadratique est précisément la droite de $\mathbf{C}^{2,n}$ passant par 0 et par x et il coïncide avec le noyau de l'application $d_x\pi$. Si $\hat{C}_x$ désigne le cône isotrope de $\hat{q}_x^{2,n}$, alors $d_x\pi(\hat{C}_x)$ est un cône sur l'espace tangent à $\mathbf{Ein}_n$ en $\pi(x)$ qui est défini par une forme quadratique lorentzienne. De plus, si x et y sont dans la même fibre de π, on a $d_x\pi(\hat{C}_x) = d_y\pi(\hat{C}_y)$. Ainsi, on vient de définir sur $\mathbf{Ein}_n$ une distribution lisse de cônes tangents lorentziens, ou de manière équivalente, une classe conforme de métriques lorentziennes. On l'appelle **classe conforme canonique de $\mathbf{Ein}_n$**.

Remarque 4.1. *Cette construction est vraiment l'analogue du modèle projectif de la sphère, qui apparaît comme l'espace des directions isotropes de l'espace de minkowski $\mathbf{R}^{1,n}$.*

4.2.2 Topologie de $\mathbf{Ein}_n$

Pour plus de comodité, nous allons nous placer dans la base $e'_1, ..., e'_{n+2}$ où la forme $q^{2,n}$ s'écrit $q^{2,n}(y) = -y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + ... + y_{n+2}^2$. Nous appelons $\widehat{\mathbf{Ein}}_n$ l'intersection du cône $\mathbf{C}^{2,n}$ et de la sphère Σ définie par $y_1^2 + ... + y_{n+2}^2 = 2$. L'espace $\widehat{\mathbf{Ein}}_n$ est décrit par le système d'équations $y_1^2 + y_2^2 = 1$ et $y_3^2 + ... + y_{n+2}^2 = 1$, donc est topologiquement $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$. En restriction à l'espace $\widehat{\mathbf{Ein}}_n$, la forme $q^{2,n}$ définit une métrique lorentzienne qui est la métrique produit $-dt^2 + g_{can}$ (g_{can} désigne la métrique canonique sur $\mathbf{S}^{n-1}$).

L'espace $\mathbf{Ein}_n$ est obtenu en quotientant $\widehat{\mathbf{Ein}}_n$ par le produit des antipodies de $\mathbf{S}^1$ et de $\mathbf{S}^{n-1}$. C'est donc un fibré en $\mathbf{RP}^{n-1}$ sur $\mathbf{RP}^1$ dont

$\widehat{\mathbf{Ein}}_n$ est un revêtement double.

Aucun des espaces $\mathbf{Ein}_n$ et $\widehat{\mathbf{Ein}}_n$ n'est simplement connexe. Leur revêtement universel $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ est l'espace $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$ muni de la structure conforme associée à la métrique produit $-dt^2 + g_{can}$.

L'espace $\mathbf{Ein}_n$ s'écrit comme le quotient $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n/\langle\zeta\rangle$ où $\langle\zeta\rangle$ est le groupe monogène engendré par l'application $\zeta : (t, x) \mapsto (t + \pi, -x)$ (de même on a $\widehat{\mathbf{Ein}}_n = \widetilde{\mathbf{Ein}}_n/\langle\zeta^2\rangle$).

Remarque 4.2. *(Orientation chronologique)*

Le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$ sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ est partout de type temps. Sur chaque espace tangent de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$, l'ensemble des vecteurs non nuls de type temps ou lumière se divise en deux composantes connexes. La composante contenant $\frac{\partial}{\partial t}$ est dite composante future et l'autre composante passée. Ainsi, il y a un sens à dire qu'un point est dans le futur ou dans le passé d'un autre. On remarque que $\zeta(x)$ est toujours dans le futur de x.

4.2.3 Parenthèse historique

Nous décrivons ici comment l'univers d'Einstein est apparu dans le cadre de la relativité générale comme modèle cosmologique d'espace-temps. Nos sources sont [O'N], [HE], [Wa] et le lecteur intéressé par l'aspect physique de la question trouvera beaucoup de détails dans ces trois ouvrages.

L'équation d'Einstein établit le lien entre la métrique g de l'espace temps et le tenseur impulsion-énergie T associé à la distribution de matière dans l'espace, suivant la formule :

$$Ric(g) - \frac{1}{2}S(g)g = 8\pi T$$

$Ric(g)$ (resp. $S(g)$) désigne la courbure de Ricci (resp. courbure scalaire) de g.

Lorsque le tenseur T est celui d'un fluide parfait, on peut trouver des solutions exactes à cette équation sous la forme d'espaces $]t^-, t^+[\times\mathbf{M}$ avec t^- et t^+ deux réels (on s'autorise $t^- = -\infty$ et $t^+ = +\infty$) et $\mathbf{M} = \mathbf{R}^3$, $\mathbf{H}^3$ ou $\mathbf{S}^3$. Les métriques sur ces variétés sont des produits tordus $-dt^2 + \lambda(t)ds^2$ (ds^2 désigne la métrique à courbure constante sur $\mathbf{M}$). De tels espaces s'appellent espaces de *Robertson-Walker*. Sous des hypothèses physiques raisonnables, ces modèles sont dynamiques et font apparaître des singularités : par exemple, il arrive que t^- soit fini et que la fonction λ tende vers 0 lorsque t tend vers t^-. Paradoxalement, si ce genre de prédiction semblent qualitativement en accord avec les observations, elles n'ont pas satisfait Einstein aux débuts de la théorie. Aussi a-t-il modifié son équation afin d'obtenir des modèles statiques d'univers (toujours dans le cas où le tenseur T est celui d'un fluide parfait). L'équation d'Einstein modifiée s'écrit :

$$Ric(g) - \frac{1}{2}S(g)g + \Lambda g = 8\pi T$$

Le réel Λ s'appelle la *constante cosmologique*. Dans le cas $\Lambda > 0$, il existe des solutions statiques dont notre espace $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ est un exemple. Les physiciens l'appellent **univers statique d'Einstein**.

4.2.4 Le groupe conforme de $\mathbf{Ein}_n$

Nous énonçons dans ce paragraphe les principales propriétés du groupe des applications conformes de $\mathbf{Ein}_n$. En fait, tous les théorèmes cités ont été démontrés dans le chapitre 2 dans un cadre plus général.

La structure conforme sur $\mathbf{Ein}_n$ étant construite naturellement à partir de la métrique $q^{2,n}$, il est clair que toute transformation de $PO(2,n)$ agit conformément sur $\mathbf{Ein}_n$. L'étude générale faite au chapitre 2 montre la réciproque :

Proposition 4.3. *Le groupe conforme de l'univers d'Einstein, noté Conf*$(\mathbf{Ein}_n)$*, coïncide avec* $PO(2,n)$*.*

Rappelons également que l'on a un théorème de Liouville pour l'univers d'Einstein :

Théorème 4.4 (Liouville). *Tout difféomorphisme conforme local de* $\mathbf{Ein}_n$ *est la restriction d'un unique difféomorphisme conforme global de* $\mathbf{Ein}_n$*.*

Enfin, on démontre la

Proposition 4.5. *Tout difféomorphisme Conf*$(\mathbf{Ein}_n)$ *se remonte en un difféomorphisme de Conf*$(\widetilde{\mathbf{Ein}}_n)$*. Réciproquement, tout élément de Conf*$(\widetilde{\mathbf{Ein}}_n)$ *passe au quotient en un élément de Conf*$(\mathbf{Ein}_n)$*.*

Preuve : Le fait qu'un difféomorphisme de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ se remonte en un difféomorphisme de $\mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}}_n)$ est classique : tout difféomorphisme d'une variété se relève à son revêtement universel. Pour montrer qu'un élément de $\mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}}_n)$ passe systématiquement au quotient, on utilise la rigidité locale des applications conformes. Soit $\tilde{\phi}$ un élément de $\mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}}_n)$. On choisit un ouvert $\mathcal{U}$ dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ tel que π soit un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur son image U. On appelle $\mathcal{U}'$ l'image de $\mathcal{U}$ par $\tilde{\phi}$. Il existe un difféomorphisme conforme local $\overline{\phi}$ de U dans U' tel que $\overline{\phi}\circ\pi = \pi\circ\tilde{\phi}$ sur $\mathcal{U}$. Maintenant, par le théorème de Liouville, $\overline{\phi}$ s'étend en un élément ϕ de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$. Les applications $\phi\circ\pi$ et $\pi\circ\tilde{\phi}$ sont conformes, définies sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ et elles coïncident sur l'ouvert $\mathcal{U}$. Par rigidité locale, elles sont égales et cela termine la preuve.

□

4.2.5 Géodésiques et cônes de lumière

On appelle **géodésiques de lumière** de $\mathbf{Ein}_n$ les projetés sur $\mathbf{Ein}_n$ des plans isotropes de $\mathbf{R}^{2,n}$ (i.e. les plans où la forme quadratique $q^{2,n}$ est nulle).

Ces géodésiques de lumière sont donc des cercles. Contrairement aux géodésiques riemanniennes ou lorentziennes, il n'y a pas de paramétrage privilégié pour ces courbes. Remarquons que comme nous l'avons vu au chapitre 2, toute transformation conforme de $\mathbf{Ein}_n$ envoie géodésiques de lumière sur géodésiques de lumière.

Nous profitons de ce paragraphe pour démontrer un petit lemme que nous utiliserons plus ou moins implicitement à de nombreuses reprises par la suite.

Lemme 4.6. *Il n'existe pas dans* $\mathbf{Ein}_n$ *de triangle dont les côtés sont supportés par des géodésiques de lumière non confondues.*

Preuve : Supposons le contraire et appelons p, q et r les sommets d'un tel triangle. Ces points sont les projetés par π de trois vecteurs isotropes u, v et w dans $\mathbf{R}^{2,n}$. De plus ces trois vecteurs doivent être deux à deux orthogonaux. On aurait alors dans $\mathbf{R}^{2,n}$ un sous espace de dimension 3 sur lequel la forme $q^{2,n}$ serait nulle. C'est impossible pour une signature $(2, n)$. □

Remarque 4.7. *Deux géodésiques de lumière de* $\mathbf{Ein}_n$ *sont soit disjointes, soit confondues soit sécantes en un point et un seul.*

Définition 4.8. *Soit p un point de* $\mathbf{Ein}_n$. *On appelle* **cône de lumière de sommet p** *l'ensemble des géodésiques de lumière qui passent par p. On note ce cône $C(p)$.*

Si p est la projection par π d'un vecteur v de $\mathbf{R}^{2,n}$, et que $v^\perp$ désigne l'orthogonal de v pour la métrique $q^{2,n}$, alors $C(p)$ n'est rien d'autre que le projeté par π de l'hyperplan dégénéré $v^\perp$ intersecté avec $\mathbf{C}^{2,n}$. L'hyperplan $v^\perp$ étant de signature $(0, -, +, ..., +)$, il admet une base $v_0 = v, v_1, ..., v_n$ telle que le sous-espace F engendré par $v_1, ..., v_n$ soit de signature lorentzienne. Toute direction isotrope de $v^\perp$ autre que v, consiste en la donnée d'une direction isotrope de F et d'un nombre réel (qui donne la composante du vecteur directeur selon v). L'hypersurface $C(p)\backslash\{p\}$, que l'on appelle $I(p)$, est le cylindre $\mathbf{R}\times\mathbf{S}^{n-2}$ muni de la structure conforme associée à la métrique singulière $0 + g_{can}$. Quant à $C(p)$ proprement dit, c'est une hypersurface de $\mathbf{Ein}_n$ qui est singulière en p.

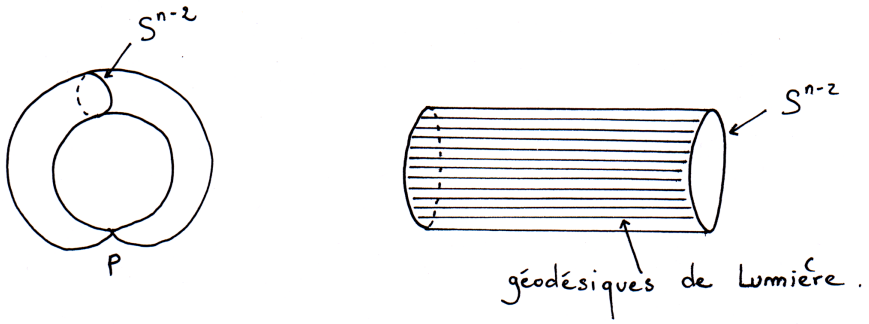

Figure 4.1: un cône de lumière dans $\mathbf{Ein}_n$ (à gauche) et le même cône privé de son sommet (à droite).

Remarque 4.9. *Lorsque $n = 2$, le cône $C(p)$ est simplement la réunion de deux géodésiques de lumière se coupant en p.*

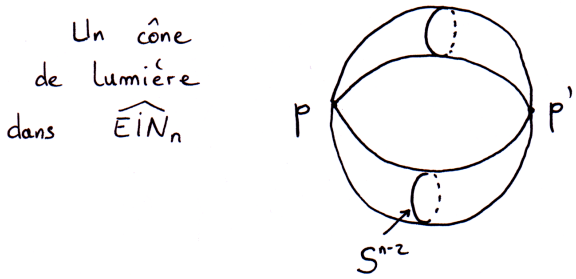

Figure 4.2: Cône de lumière dans $\widehat{\mathbf{Ein}}_n$

En dimension $n \geq 3$, on a un feuilletage naturel de $I(p)$ par des droites de lumière $\mathbf{R} \times \{x\}$ (qui sont des morceaux de géodésiques de lumière dans $\mathbf{Ein}_n$). La géométrie transverse de ce feuilletage est la géométrie conforme standard de la sphère $\mathbf{S}^{n-2}$. On note ce feuilletage $\mathcal{L}_p$.

Remarque 4.10. *Les cônes de lumière dans $\widehat{\mathbf{Ein}}_n$ sont des revêtements doubles de ceux de $\mathbf{Ein}_n$. Ils admettent donc deux sommets.*

Les géodésiques de lumière (resp. les cônes de lumière) de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ sont les relevés des géodésiques de lumière de $\mathbf{Ein}_n$ (resp. des cônes de lumière de $\mathbf{Ein}_n$) . Les géodésiques de lumière sont non compactes et individuellement fixées par le groupe engendré par ζ. Quant aux cônes de lumière, ils sont constitués d'une famille dénombrable de points $i_j = \zeta^j i_0$ (pour un certain point i_0 de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$). La portion de cône entre deux points consécutifs i_j et i_{j+1} est un cylindre $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-2}$ que l'on note I_j. Chaque cylindre I_j admet un feuilletage par droites de lumières, noté $\mathcal{L}_j$, qui est le relevé de $\mathcal{L}_{\pi(p)}$ à I_j. L'espace des feuilles de $\mathcal{L}_i$ est la sphère $\mathbf{S}^{n-2}$ munie de sa structure conforme standard.

Notons que chaque cône de lumière est également individuellement fixé par le groupe engendré par ζ.

Pour mieux comprendre comment s'agencent les géodésiques et les cônes de lumière dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$, on étudie l'exemple suivant :

Dans $\mathbf{R}^{2,n}$, on considère la base $e'_1, ..., e'_{n+2}$ de la section 4.2.2. Posons $e_1 = e'_1 + e'_{n+2}$ et $e_3 = e'_2 + e'_{n+1}$. L'intersection du plan isotrope P engendré par e_1 et e_3 avec la sphère Σ définie par l'équation $y_1^2 + ... + y_{n+2}^2 = 2$ est une géodésique de lumière de $\widehat{\mathbf{Ein}}_n$ que l'on note Δ. Cette intersection peut être paramétrée par $\theta \mapsto sin(\theta)e'_1 + cos(\theta)e'_2 + cos(\theta)e'_{n+1} + sin(\theta)e'_{n+2}$ ($\theta \in [0, 2\pi[$). Lorsque l'on relève ce paramétrage à $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$, on obtient la courbe $t \mapsto (t, c(t))$ où $c(t)$ est un grand cercle de $\mathbf{S}^{n-1}$.

En fait, le groupe de transformations $\tilde{A} : (t, x) \mapsto (t, Ax)$ ($A \in O(n)$) agit transitivement sur les géodésiques de lumière de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ de sorte que toutes ces géodésiques admettent un paramétrage du type $t \mapsto (t, c(t))$ avec $c(t)$ une géodésique de $\mathbf{S}^{n-1}$ pour la métrique g_{can}.

Étudions à présent le cône de lumière de sommet $i_0 = (t_0, x_0)$ dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$.

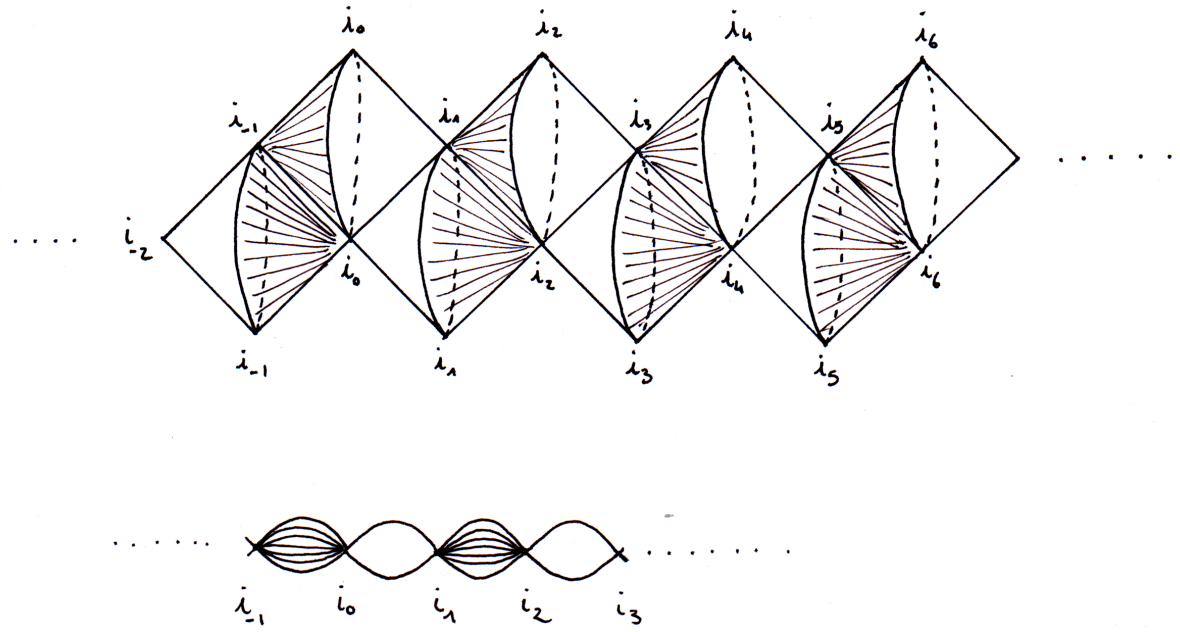

Figure 4.3: Cône de lumière dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$.

Nous venons de voir que les géodésiques de lumière passant par i_0 admettent toutes un paramétrage du type $t \mapsto (t_0 + t, c(t))$ où $c(t)$ décrit l'ensemble des géodésiques de $\mathbf{S}^{n-1}$ telles que $c(0) = x_0$. On peut alors décrire l'intersection du cône C_{i_0} avec les tranches spatiales $t = constante$:

-Pour t de la forme $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, cette intersection est réduite au point $p_k = \zeta^k(p_0)$.

-Pour $t = t_0 + t' + k\pi$ $(t' \in]0, \pi[, k \in \mathbb{Z})$, l'intersection est une sphère riemannienne $\{t\} \times \Sigma_t$ où Σ_t est la sphère centrée en x_0 et de rayon t' dans $\mathbf{S}^{n-1}$.

Commentaires sur la figure 4.3
Les cercles tracés sur la figure sont identifiés à des points, qui sont des points de pincement pour le cône. Les cylindres hachurés (resp. blancs) adjacents sont identifiés.

4.3 Le cas particulier de $\mathbf{Ein}_2$

En dimension 2, l'univers d'Einstein est un tore que l'on appelle **tore d'Einstein**. Un modèle pour cet espace est la projection sur $\mathbf{Ein}_n$ du sous-espace engendré par les vecteurs e_1, e_2, e_{n+1} et e_{n+2} que l'on note $vect(e_1, e_2, e_{n+1}, e_{n+2})$. Comme toute surface possédant une structure conforme lorentzienne, le tore $\mathbf{Ein}_2$ est muni de deux feuilletages transverses de dimension 1, correspondant aux deux directions isotropes de chaque espace tangent. Dans le cas de $\mathbf{Ein}_2$, ces feuilletages sont constitués de géodésiques de lumière. Pour

le voir, appelons Δ_1 (resp. Δ_2) la géodésique de lumière obtenue en projetant $vect(e_1, e_2)$ (resp. $vect(e_1, e_3)$) sur $\mathbf{Ein}_n$. L'ensemble des géodésiques de lumières de $\mathbf{Ein}_2$ qui coupent Δ_1 (resp. Δ_2) en un seul point forme un feuilletage de $\mathbf{Ein}_2$ que l'on appelle $\mathcal{F}_2$ (resp. $\mathcal{F}_1$). Nous voyons que l'espace $\mathbf{Ein}_2$ est conformément équivalent au produit $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ muni de la métrique $dxdy$. Les feuilles de $\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_2$) sont les cercles $\mathbf{S}^1 \times \{y\}$ (resp. $\{x\} \times \mathbf{S}^1$).

La rigidité des transformations conformes est un phénomène particulier à la dimension supérieure ou égale à trois et le groupe conforme de $\mathbf{Ein}_2$ n'est pas de dimension finie : tout difféomorphisme de $\mathbf{Ein}_2$ préservant les feuilletages $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ agit conformément sur $\mathbf{Ein}_2$. En revanche, si l'on voit $\mathbf{Ein}_2$ comme un sous-espace de $\mathbf{Ein}_n$ pour $n > 2$, alors les transformations conformes de $\mathbf{Ein}_n$ qui préservent $\mathbf{Ein}_2$ agissent sur ce dernier par le groupe $O(2,2)$. Nous indiquons maintenant comment voir matriciellement le groupe $SL_2(\mathbf{R}) \times SL_2(\mathbf{R})$ dans $O(2,2)$ (en fait, ces deux groupes coïncident).

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL_2(\mathbf{R})$, on peut voir les éléments du type (A, Id) comme les matrices :

$$\begin{pmatrix} A & \\ & A \end{pmatrix}$$

Les éléments (Id, A) sont quant à eux représentés par :

$$\begin{pmatrix} aId & bId \\ cId & dId \end{pmatrix}$$

L'action de $O(2,2)$ sur $\mathbf{Ein}_2$ s'identifie à l'action produit de $SL_2 \times SL_2$ sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ muni de la structure conforme associée à $dxdy$.

4.4 Composantes de Minkowski

Comme annoncé dans l'introduction, une des propriétés les plus remarquables de l'univers d'Einstein est que les trois espaces Minkowski, de Sitter et Anti-de Sitter y apparaissent naturellement comme des ouverts homogènes. Nous commençons par examiner le cas de l'espace de Minkowski qui se plonge dans $\mathbf{Ein}_n$ par l'équivalent lorentzien de la projection stéréographique.

4.4.1 Projection stéréographique

Dans toute cette section π (resp. $\hat{\pi}$) désigne la projection de $\mathbf{R}^{2,n}$ sur $\mathbf{Ein}_n$ (resp. $\widehat{\mathbf{Ein}}_n$) et ρ (resp. $\hat{\rho}$) la projection de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ sur $\mathbf{Ein}_n$ (resp. sur $\widehat{\mathbf{Ein}}_n$).

Considérons un point p de $\mathbf{Ein}_n$ et son cône de lumière $C(p)$. Nous démontrons le lemme fondamental :

Lemme 4.11. *Le complémentaire de $C(p)$ dans $\mathbf{Ein}_n$ est un ouvert conformément équivalent à l'espace de Minkowski $\mathbf{R}^{1,n-1}$.*

On appelle cet ouvert **composante de Minkowski associée à p** et on le note $M(p)$.

Preuve : Comme l'univers d'Einstein est homogène, il suffit de vérifier le lemme lorsque $p = \pi(e_1)$.

On identifie l'espace de Minkowski $\mathbf{R}^{1,n-1}$ au sous-espace vectoriel engendré par $e_2, ..., e_{n+1}$ et on appelle $\langle x, x\rangle$ la restriction de $q^{2,n}$ à ce sous-espace. Posons :

$\overline{s} : \mathbf{R}^{1,n-1} \longrightarrow \mathbf{C}^{2,n}$

$x \longmapsto \langle x, x\rangle e_1 + 2x + e_{n+2}$

On vérifie que $s = \pi \circ \overline{s}$ est un difféomorphisme conforme sur son image (voir par exemple [CK]). Or les seuls points qui ne sont pas dans l'image de s sont les projetés dans $\mathbf{Ein}_n$ de l'hyperplan d'équation $x_{n+2} = 0$, c'est à dire précisément $C(p)$.

□

L'application $\overline{s}^{-1}$ s'appelle la **projection stéréographique de pôle** p. Elle envoie conformément $M(p)$ sur $\mathbf{R}^{1,n-1}$.

Par extension, on désignera souvent par projection stéréographique tout difféomorphisme conforme d'une composante de Minkowski sur l'espace de Minkowski.

Dans l'espace $\widehat{\mathbf{Ein}}_n$, le remonté du cône $C(p)$ sépare $\widehat{\mathbf{Ein}}_n$ en deux composantes connexes M et M' correspondant aux projections par $\hat{\pi}$ des demi-espaces $x_{n+2} > 0$ et $x_{n+2} < 0$. On a alors deux projections stéréographiques. La première $\hat{s} = \hat{\pi} \circ \overline{s}$ envoie conformément $\mathbf{R}^{1,n-1}$ sur M. La seconde $\hat{s}'$ envoie conformément $\mathbf{R}^{1,n-1}$ sur M'.

Dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$, le remonté de $C(p)$ divise l'espace en une famille dénombrable (M_j) de composantes connexes. On les numérote de telle façon que

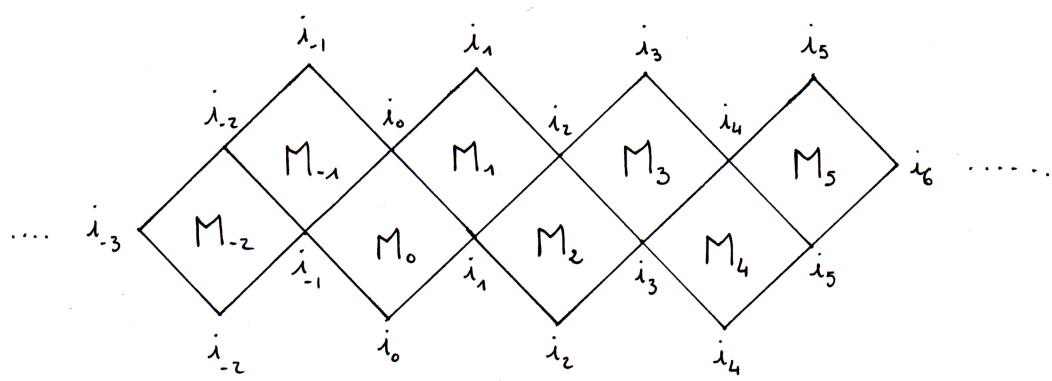

Figure 4.4: Complémentaire d'un cône de lumière dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$. L'intérieur de chaque carré représente une composante de Minkowski.

$M_{j+1} = \zeta(M_j)$. Ainsi, ρ réalise un difféomorphisme de chaque M_j sur $M(p)$. Par conséquent, s se remonte en une famille de difféomorphismes conformes $\tilde{s}_j : \mathbf{R}^{1,n-1} \to M_j$ vérifiant $\rho \circ \tilde{s}_j = s$ et $\zeta \circ \tilde{s}_j = \tilde{s}_{j+1}$.

4.4.2 Diagrammes de Penrose

En envoyant conformément l'espace $\mathbf{R}^{1,n-1}$ sur une composante de Minkowski, la projection stéréographique en donne une compactification conforme. On se propose d'étudier un peu mieux cette compactification dans chacun des espaces $\mathbf{Ein}_n$, $\widehat{\mathbf{Ein}}_n$ et $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$.

1) Compactification dans $\mathbf{Ein}_n$

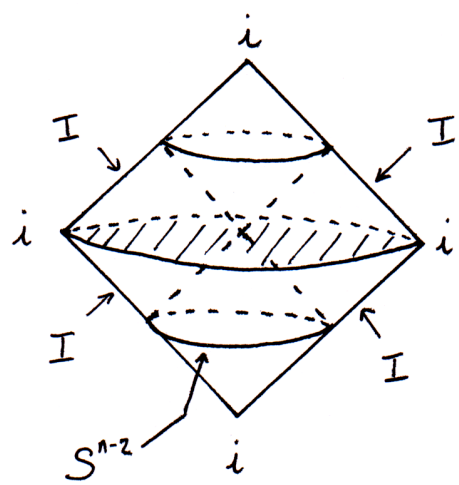

Figure 4.5: Compactification de l'espace de Minkowski dans $\mathbf{Ein}_n$. Le cercle "équatorial" s'identifie au point i. L'infini privé de i est un cylindre I difféomorphe à $\mathbf{R}\times\mathbf{S}^{n-2}$. Le cône de lumière issu de l'origine dans Minkowski coupe l'infini selon une sphère $\mathbf{S}^{n-2}$.

Pour ne pas faire référence à un point particulier p, on notera I à la place de $I(p)$ et i (comme infini) à la place de p.

Lemme 4.12.
(i) Les droites de type temps et espace de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ convergent toutes vers le point i à l'infini.
(ii) A chaque direction isotrope u de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ est associée une et une seule géodésique de lumière Δ_u de I caractérisée par le fait que toute droite D de direction u tend vers un point de Δ_u à l'infini.
(iii) Deux droites isotropes tendent vers un même point à l'infini si et seulement si elles appartiennent à un même hyperplan dégénéré (en particulier ces droites ont même direction).
(iv) Si u est une direction isotrope, tout hyperplan de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ parallèle à $u^\perp$ se compactifie dans $\mathbf{Ein}_n$ en un cône de lumière dont le sommet est sur Δ_u.

Preuve : Les points d'une droite D de direction u dans $\mathbf{R}^{1,n-1}$ s'écrivent $x_t = a + tu$ ($a \in \mathbf{R}^{1,n-1}$, $t \in \mathbf{R}$) et leur image par $\overline{s}$ vaut $\overline{s}(x_t) = t^2\langle u, u\rangle e_1 + 2t(u + \langle a, u\rangle e_1) + 2a + \langle a, a\rangle e_1 + e_{n+2}$.
-si u est de type temps ou espace, alors
$\lim_{t\to\pm\infty}(s(x_t)) = \pi(e_1) = i$, ce qui prouve (i).
-si u est isotrope, alors $\langle u, u\rangle = 0$ et on trouve $\lim_{t\to\pm\infty}(x_t) = \pi(u + \langle a, u\rangle e_1)$.

Le plan P_u engendré par u et e_1 est isotrope et sa projection par π est une géodésique de lumière de $\mathbf{Ein}_n$. Lorsque a décrit $\mathbf{R}^{1,n-1}$, alors $\pi(u + \langle a, u\rangle e_1)$ décrit entièrement une géodésique de lumière Δ_u du cylindre I. D'autre part, $\langle a, u\rangle$ est constant le long des hyperplans dégénérés parallèles à $u^\perp$ donc toutes les droites de direction u qui appartiennent à un même hyperplan dégénéré convergent vers le même point de Δ_u. Enfin, on constate que si u et v sont deux directions isotropes différentes, Δ_u et Δ_v sont deux géodésiques distinctes. Cela prouve (ii) et (iii).
Le (iv) est un corollaire du (iii) : toutes les droites isotropes d'un hyperplan dégénéré convergent vers un même point et donc le compactifié de l'hyperplan est le cône de lumière passant par le dit point. □

2) Compactification dans $\widehat{\mathbf{Ein}}_n$.

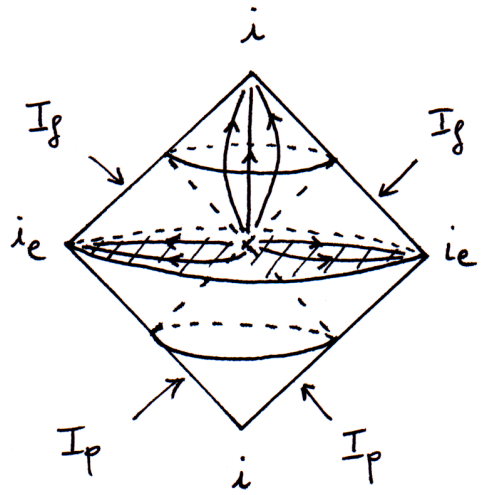

Figure 4.6: Compactification de l'espace de Minkowski dans $\widehat{\mathbf{Ein}}_n$

Dans le modèle précédent, les droites temps et espace ont le même comportement à l'infini et on perd donc beaucoup d'information sur la structure causale de $\mathbf{R}^{1,n-1}$. La situation est un peu meilleure si l'on considère la projection stéréographique $\hat{s}$ dans $\widehat{\mathbf{Ein}}_n$.

En reprenant les notations de la preuve précédentes, on constate que si u est de type temps, $\lim_{t\to\pm\infty} \hat{s}(x_t) = \hat{\pi}(e_1) = i$.

Si u est de type espace, $\lim_{t\to\pm\infty} \hat{s}(x_t) = \hat{\pi}(-e_1)$. On note ce point i_e. Ainsi, les droites de type temps et de type espace ont cette fois des points limites différents i et i_e. On dit que i est l'infini temporel de la composante M et i_e l'infini spatial.

D'autre part, si u est isotrope et orienté vers le futur, alors $\lim_{t\to+\infty} \hat{s}(x_t) = \hat{\pi}(u + \langle a, u\rangle e_1)$ et $\lim_{t\to-\infty} \hat{s}(x_t) = \hat{\pi}(-u - \langle a, u\rangle e_1)$. L'infini I, lorsqu'on lui enlève les points i et i_e, possède deux composantes connexes. La première, notée I_f est l'ensemble des points limites futurs des droites isotropes de $\mathbf{R}^{1,n-1}$. La seconde, notée I_p est l'ensemble des points limites passés de ces droites.

Remarque 4.13. *Les points i et i_e ne sont distingués comme infini espace et infini temporel que si on s'est fixé une projection stéréographique et donc, une composante de Minkowski. Si on change de composante de Minkowski, la nature de i et i_e change. Par exemple si l'on considère $\hat{s}'$ à la place de $\hat{s}$, le point i devient l'infini spatial pour la composante M' et le point i_e l'infini temporel. De même, les rôles de I_f et I_p sont permutés.*

3) Compactification dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$

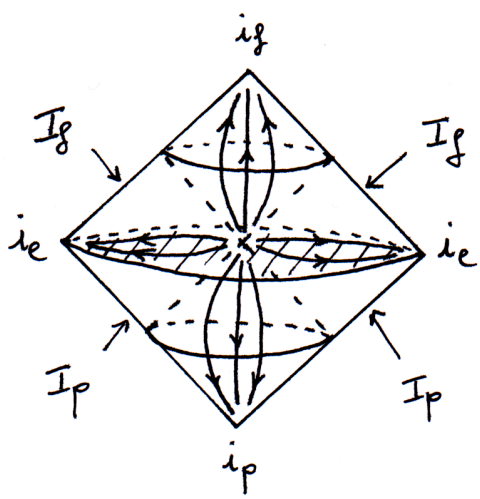

Figure 4.7: Compactification de l'espace de Minkowski dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$

Considérons la projection $\tilde{s}_0 : \mathbf{R}^{1,n-1} \to M_0$. L'application $\hat{\rho}$ réalise un difféomorphisme de M_0 sur M. On a de plus la relation $\hat{\rho} \circ \tilde{s}_0 = \hat{s}_0$. Les

limites à l'infini des images par $\tilde{s}_0$ des droites de type temps dans $\mathbf{R}^{1,n-1}$ se projettent toutes les deux sur i. Comme $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ ne possède aucune courbe de type temps fermée, ces limites sont disjointes et l'une est image de l'autre par ζ^2. Ces deux limites sont donc i_{-1} et i_1. On renote $i_p = i_{-1}$ la limite dans le passé et $i_f = i_1$ la limite dans le futur. Comme M_0 n'a que trois points conjugués dans son adhérence, à savoir i_{-1}, i_0 et i_1, la seule possibilité pour la limite commune à l'infini des images par $\tilde{s}_0$ des droites de type espace est le point i_0 que l'on rebaptise i_e. Enfin, le comportement des droites isotropes reste inchangé par rapport au cas précédent : elles tendent vers un point de $I_f = I_0$ dans le futur et vers un point de $I_p = I_{-1}$ dans le passé.

4.4.3 Stabilisateur d'un point dans Conf($\mathbf{Ein}_n$)

1) Expressions matricielles

Soit p un point de $\mathbf{Ein}_n$ et $M(p)$ la composante de Minkowski associée à p. On se donne une projection stéréographique $s : \mathbf{R}^{1,n-1} \to M(p)$. À toute transformation conforme ϕ de l'espace de Minkowski correspond alors un difféomorphisme conforme de $M(p)$ dans lui-même donné par $s \circ \phi \circ s^{-1}$. Par le théorème de Liouville, on peut étendre de manière unique $s \circ \phi \circ s^{-1}$ en un élément de Conf($\mathbf{Ein}_n$) qui stabilise $M(p)$ donc p. Réciproquement, tout élément ψ de Conf($\mathbf{Ein}_n$) qui stabilise p stabilise $M(p)$ et le difféomorphisme $s^{-1} \circ \psi \circ s$ est dans Conf($\mathbf{R}^{1,n-1}$).

On choisit pour p le point $\pi(e_1)$ et on prend la même projection stéréographique s qu'au paragraphe précédent. On souhaite exprimer les éléments de Conf($\mathbf{R}^{1,n-1}$) comme des matrices de $O(2,n)$ fixant e_1. Un petit calcul conduit aux résultats suivants :

- **Homothéties.**

Une homothétie de rapport λ s'exprime dans $O(2,n)$ par la matrice :

$$h_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & Id_n & \\ & & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

- **Isométries linéaires**

Un élément Θ dans $O(1,n-1)$ s'exprime par

$$M_\Theta = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \Theta & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

- **Translations**

Enfin, à une translation de vecteur $T = (t_1, ..., t_n)$ dans $\mathbf{R}^{1,n-1}$ (identifié à l'espace engendré par e_2,...,e_n) correspond la matrice :

$$R_T = \begin{pmatrix} 1 & \langle T, e_2\rangle & \langle T, e_3\rangle & \dots & \langle T, e_n\rangle & \langle T, T\rangle \\ & 1 & 0 & \dots & 0 & 2t_1 \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & & 1 & 2t_n \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 4.14. *De manière identique, étant donnés un point i_0 de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ et une projection stéréographique $\tilde{s}_0 : \mathbf{R}^{1,n-1} \to M_0$, tout élément de Conf($\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$) fixant i_0 correspond à un élément de Conf($\mathbf{R}^{1,n-1}$) et réciproquement.*

2) Action du groupe Conf($\mathbf{R}^{1,n-1}$) sur le bord à l'infini de $\mathbf{R}^{1,n-1}$
On se fixe un élément ϕ de Conf($\mathbf{R}^{1,n-1}$) que l'on écrit $\lambda A + T$ où λ est un réel, A une matrice de $O(1, n-1)$ et T un élément de $\mathbf{R}^n$.

Dans le modèle $\mathbf{Ein}_n$, le bord à l'infini est constitué d'un point i et d'un cylindre I difféomorphe à $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-2}$. L'élément ϕ fixe i. On s'intéresse à son action sur I, et notamment à celle sur le feuilletage de lumière $\mathcal{L}$. On se place dans le cas précédent $i = \pi(e_1)$. L'espace des feuilles de $\mathcal{L}$ s'identifie aux directions isotropes de l'espace vectoriel engendré par e_2,...,e_{n+1}. D'après les expressions matricielles précédentes, ϕ agit sur cet espace via la matrice A. L'action transverse de ϕ sur $\mathcal{L}$ se fait donc par une transformation conforme de $\mathbf{S}^{n-2}$.

Dans le modèle $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$, le bord conforme de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ est constitué de trois points i_p, i_e et i_f et de deux cylindres I_p et I_f. Une droite espace est toujours envoyée par ϕ sur une droite espace donc ϕ fixe i_e. En revanche, si ϕ renverse l'orientation chronologique de $\mathbf{R}^{1,n-1}$, il permute les points i_p et i_f, ainsi que les cylindres I_p et I_f. À cette permutation près, l'action transverse de ϕ sur les feuilletages $\mathcal{L}_p$ et $\mathcal{L}_f$ est celle de la matrice A agissant conformément sur la sphère $\mathbf{S}^{n-2}$.

4.5 Autres composantes à courbure constante

Après cette longue digression sur les composantes de Minkowski, nous poursuivons notre étude des ouverts de $\mathbf{Ein}_n$ admettant dans leur classe conforme une métrique complète de courbure constante. Il nous reste à examiner le cas des courbures $+1$ et -1.

4.5.1 Composantes Anti-de Sitter

Considérons un sous espace F dans $\mathbf{R}^{2,n}$ qui soit de signature $(2, m)$, avec $m \leq n$. Si on intersecte F avec $\mathbf{C}^{2,n}$, le cône isotrope de la forme $q^{2,n}$, et que l'on projette cette intersection sur $\mathbf{Ein}_n$, on fait en dimension m la construction réalisée au début de ce chapitre pour la dimension n. Le sous-espace obtenu est donc un sous-univers d'Einstein de dimension m.

Soit $\mathbf{Ein}_{n-1}$ un sous-espace de codimension 1 dans $\mathbf{Ein}_n$. Alors l'ouvert $\mathbf{Ein}_n \backslash \mathbf{Ein}_{n-1}$ est connexe et son groupe conforme est isomorphe à $PO(2, n-1)$. L'action de $PO(2, n-1)$ sur $\mathbf{Ein}_n \backslash \mathbf{Ein}_{n-1}$ est transitive et le stabilisateur d'un point est isomorphe à $PO(1, n)$. Ainsi, l'ouvert $\mathbf{Ein}_n \backslash \mathbf{Ein}_{n-1}$ s'identifie conformément à l'espace homogène $PO(2, n-1)/PO(1, n)$. Il existe donc dans la classe conforme canonique de $\mathbf{Ein}_n \backslash \mathbf{Ein}_{n-1}$ une métrique à courbure -1 qui le rend isométrique à l'espace Anti-de Sitter $\mathbf{AdS}_n$.

Tout ouvert de la forme $\mathbf{Ein}_n \backslash \mathbf{Ein}_{n-1}$ est appelé **composante Anti-de Sitter**.

4.5.2 Composantes de Sitter

Considérons un sous espace F dans $\mathbf{R}^{2,n}$ qui soit de signature $(1, m)$, avec $m \leq n$. Si on intersecte F avec $\mathbf{C}^{2,n}$ et que l'on projette cette intersection sur $\mathbf{Ein}_n$, on obtient une sous-variété de $\mathbf{Ein}_n$ difféomorphe à $\mathbf{S}^m$. La structure conforme de $\mathbf{Ein}_n$ induit sur cette sphère la structure conforme riemannienne canonique.

Lorsque $m = n-1$, le complémentaire dans $\mathbf{Ein}_n$ d'une sphère riemannienne $\mathbf{S}^{n-1}$ est un ouvert homogène qui s'identifie conformément à l'espace $PO(1, n)/PO(1, n-1)$. Il existe donc dans la classe conforme canonique de $\mathbf{Ein}_n \backslash \mathbf{S}^{n-1}$ une métrique à courbure 1 qui le rend isométrique à l'espace de Sitter. Un tel ouvert est appelé **composante de Sitter**.

4.6 Complémentaire d'une géodésique de lumière

Soit Δ_0 une géodésique de lumière de $\mathbf{Ein}_n$. Le complémentaire de Δ_0 est un ouvert homogène $\Omega_{\Delta_0} \subset \mathbf{Ein}_n$ difféomorphe au produit $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^{n-1}$. Comme nous rencontrerons souvent ce type d'ouverts par la suite, il peut être utile de donner quelques détails sur sa géométrie.

4.6.1 Groupe conforme

Nous commençons par décrire le groupe conforme de Ω_{Δ_0}, qui n'est autre que le stabilisateur de Δ_0 dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$. On travaille dans la base $(e_1, ..., e_{n+2})$ et on prend pour Δ_0 la projection sur $\mathbf{Ein}_n$ du plan engendré par e_1 et e_2.

Dans $\mathrm{Conf}(\Omega_{\Delta_0})$, on trouve :

- Un facteur $\mathbf{R}^*$ correspondant aux matrices :

$$R_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & & \\ 0 & \lambda & & & \\ & & Id & & \\ & & & \lambda^{-1} & 0 \\ & & & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

- Un facteur $SL_2(\mathbf{R})$ qui correspond aux matrices :

$$R_A = \begin{pmatrix} a & b & & & \\ c & d & & & \\ & & Id & & \\ & & & a & b \\ & & & c & d \end{pmatrix}$$

• Un facteur $O(n-2)$ correspondant aux matrices :

$$R_\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & \Theta & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Enfin, un facteur N isomorphe au groupe de Heisenberg de dimension $2n-3$

$$N(x_1, ..., x_{n-2}, y_1, ..., y_{n-2}, c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & \dots & x_{n-2} & (2c - 2\Sigma y_i x_i) & 2\Sigma x_i^2 \\ 0 & 1 & y_1 & \dots & y_{n-2} & 2\Sigma y_i^2 & 2c \\ & & 1 & & & -2y_1 & 2x_1 \\ & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & -2y_{n-2} & 2x_{n-2} \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lemme 4.15. *Le groupe Conf(Ω_{Δ_0}) est isomorphe au produit semi-direct :*

$$(\mathbf{R}^\star \times SL_2(\mathbf{R}) \times O(n-2)) \ltimes N$$

Explicitons les actions par conjugaison sur N :

• Soit $\lambda \in \mathbf{R}^\star$.
Alors $R_\lambda N(x_1, ..., x_{n-2}, y_1, ..., y_{n-2}, c) R_\lambda^{-1} = N(\lambda x_1, ..., \lambda x_{n-2}, \lambda y_1, ..., \lambda y_{n-2}, \lambda^2 c)$

• Soit $A \in SL_2(\mathbf{R})$.
Alors $R_A N(x_1, ..., x_{n-2}, y_1, ..., y_{n-2}, c) R_A^{-1} = N(x'_1, ..., x'_{n-2}, y'_1, ..., y'_{n-2}, c + q_A(x, y))$ où $(x'_i, y'_i) = A(x_i, y_i)$ pour $1 \leq i \leq N-2$ et q_A est une forme quadratique dont les coefficients s'expriment en fonction de ceux de A.

• Soit $A \in O(n-2)$.
Alors $R_A N(x_1, ..., x_{n-2}, y_1, ..., y_{n-2}, c) R_A^{-1} = N(x'_1, ..., x'_{n-2}, y'_1, ..., y'_{n-2}, c)$ où
$(x'_1, ..., x'_{n-2}) = A(x_1, ..., x_{n-2})$ et $(y'_1, ..., y'_{n-2}) = A(y_1, ..., y_{n-2})$.

4.6.2 Feuilletages canoniques sur Ω_{Δ_0}

Une particularité de l'ouvert Ω_{Δ_0} est qu'il admet deux feuilletages invariants par son groupe conforme.

Le premier, appelé $\mathcal{H}_{\Delta_0}$ est un feuilletage par hypersurfaces dégénérées. Voici comment on l'obtient : pour tout x sur Δ_0, l'intersection du cône $C(x)$ avec Ω_{Δ_0} est $C(x)\backslash\Delta_0$, c'est à dire une hypersurface dégénérée de Ω_{Δ_0} difféomorphe à $\mathbf{R}^{n-1}$. On note cette hypersurface $\mathcal{H}_{\Delta_0}(x)$. Les feuilles de $\mathcal{H}_{\Delta_0}$ sont les $\mathcal{H}_{\Delta_0}(x)$ pour $x \in \Delta_0$. Pour vérifier que l'on a bien défini un feuilletage, il faut s'assurer que si x et y sont deux points distincts de Δ_0, alors $\mathcal{H}_{\Delta_0}(x)$ et $\mathcal{H}_{\Delta_0}(y)$ ne s'intersectent pas. Mais s'il existait z dans $\mathcal{H}_{\Delta_0}(x) \cap \mathcal{H}_{\Delta_0}(y)$, on aurait un triangle xyz dont les côtés seraient des segments de géodésiques de lumière, ce qui contredirait le lemme 4.6.

Lemme 4.16. *Il existe un difféomorphisme entre Ω_{Δ_0} et $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^{n-1}$ qui envoie les feuilles de $\mathcal{H}$ sur les $\{\theta\} \times \mathbf{R}^{n-1}$.*

Preuve : On choisit un point x_0 sur Δ_0 et on note H_0 la feuille de $\mathcal{H}$ issue de x_0. On choisit un difféomorphisme ϕ de $\mathbf{R}^{n-1}$ sur H_0, ainsi qu'un groupe à un paramètre de rotations $A(\theta)$ dans $SL_2(\mathbf{R})$. On considère les $R_{A(\theta)}$ associés dans le stabilisateur de Δ_0. Le difféomorphisme suivant convient.

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^{n-2} & \to & \Omega_{\Delta_0} \\ & (\theta, x) & \mapsto & R_{A(\theta)}(\phi(x)) \end{array}$$

□

Le second feuilletage canonique de Ω_{Δ_0} est un feuilletage de dimension 1 que l'on note $\mathcal{D}$. Ses feuilles sont les géodésiques de lumière sécantes en un point à Δ_0, auxquelles ont a ôté leur intersection avec Δ_0. Là encore, le fait que deux feuilles ne se coupent pas est assuré par le lemme 4.6. Le feuilletage $\mathcal{D}$ apparaît comme un sous-feuilletage de $\mathcal{H}$ dans la mesure où ce feuilletage, en restriction à chaque $\mathcal{H}_{\Delta_0}(x)$ coïncide avec $\mathcal{L}_x$.

Afin de mieux visualiser les feuilletages $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$, peut-être est-il utile de les regarder localement via une projection stéréographique. Choisissons donc un point p_0 dans $\mathbf{Ein}_n$ et considérons une projection stéréographique $s_0 : M(p_0) \to \mathbf{R}^{1,n-1}$. On distingue deux cas :

(i) Cas où $p_0 \in \Delta_0$. Toutes les feuilles de $\mathcal{H}$ sont dans $M(p_0)$ sauf précisément $\mathcal{H}_{p_0}$. Pour la projection s_0, la géodésique Δ_0 est associée à une direction isotrope de vecteur directeur u_0 (voir lemme 4.12). Les images des feuilles de $\mathcal{H}$ par s_0 sont exactement les hyperplans dégénérés parallèles à $u_0^\perp$. L'image est celle d'un feuilletage par plans parallèles.

(ii) Cas où $p_0 \notin \Delta_0$. La géodésique Δ_0 coupe $C(p_0)$ en exactement un point x_0. L'image de $\Delta_0\backslash\{x_0\}$ par s_0 est une droite D_0 de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ de direction u_0 isotrope. L'image par s_0 de la feuille $\mathcal{H}_{p_0}$ est l'hyperplan dégénéré contenant D_0. Quant aux autres feuilles de $\mathcal{H}$, leurs traces sur $M(p_0)$ se projettent via s_0 sur les cônes isotropes de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ dont les sommets sont sur D_0.

Chapitre 5

Dynamique des applications conformes de $\mathbf{Ein}_n$

Un ingrédient important dans la démonstration du théorème de Ferrand-Obata présentée en partie II était le caractère polaire de la dynamique des suites (g_k) d'applications conformes de la sphère qui tendent vers l'infini : il existe deux pôles p^+ et p^- (éventuellement confondus) associés à (g_k) tels que p^+ est attracteur pour (g_k) sur l'ouvert $\mathbf{S}^n \backslash \{p^-\}$ et p^- est attracteur pour (g_k^{-1}) sur $\mathbf{S}^n \backslash \{p^+\}$. Sur l'univers d'Einstein, la situation se complique un peu car les motifs dynamiques possibles pour les suites d'applications de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ qui tendent vers l'infini sont plus variés. C'est d'ailleurs ce qui rend l'étude des variétés lorentziennes conformément plates plus délicate que celle des variétés riemanniennes conformément plates. Ce chapitre va être consacré à la description des dynamiques possibles pour les suites d'aplications de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ qui tendent vers l'infini. En guise d'illustration, nous étudierons également le comportement dynamique sur $\mathbf{Ein}_n$ et $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ de certaines transformations simples de l'espace de Minkowski (étendues à l'univers d'Einstein) telles les translations, les homothéties...

5.1 Décomposition de Cartan du groupe $O(2,n)$

Nous rappelons que $O(2,n)$ désigne le sous-groupe de $GL_{n+2}(\mathbf{R})$ qui préserve la forme quadratique $q^{2,n}(x) = -2x_1x_{n+2} + 2x_2x_{n+1} + x_3^2 + ... + x_n^2$.
On désigne par A^+ le groupe des matrices diagonales de $SO(2,n)$ dont les entrées sont positives.
Il existe alors un sous-groupe compact maximal K tel que $SO(2,n)$ s'écrive sous la forme KA^+K ([B], [IW]). Si l'on choisit un élément g_0 dans $O(2,n)$ qui ne soit pas dans $SO(2,n)$, alors quitte à remplacer K par $K \cup g_0K$, on obtient que $O(2,n)$ s'écrit également sous la forme KA^+K (attention, K est toujours compact mais ce n'est plus un groupe).
Cette décomposition s'appelle **décomposition de Cartan** du groupe $O(2,n)$. Pour tout $g \in O(2,n)$, il existe un unique $a(g) \in A^+$ tel que $g \in Ka(g)K$. L'élément $a(g)$ s'appelle la projection de Cartan de g. Matriciellement, il s'écrit sous la forme :

$$a(g) = \begin{pmatrix} e^{\lambda(g)} & & & & & & \\ & e^{\mu(g)} & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & e^{-\mu(g)} & \\ & & & & & & e^{-\lambda(g)} \end{pmatrix}$$

Les réels $|\lambda(g)|$ et $|\mu(g)|$ s'appellent les distorsions de l'élément g (associées à la décomposition de Cartan considérée).

5.2 Suites d'éléments de $O(2,n)$ qui tendent vers l'infini

Soit (g_k) une suite d'éléments de $O(2,n)$ qui tend vers l'infini. On note $\lambda_k = \lambda(g_k)$, $\mu_k = \mu(g_k)$ et $\delta_k = |\lambda_k| - |\mu_k|$.
On dit que la suite (g_k) **tend simplement vers l'infini** lorsque les suites (λ_k), (μ_k) et (δ_k) admettent toutes trois des limites dans $\overline{\mathbf{R}}$ que l'on note λ_∞, μ_∞ et δ_∞ et que de plus, les facteurs compacts de la décomposition de Cartan de (g_k) admettent tous les deux une limite dans K. On remarque que toute suite qui tend vers l'infini admet une suite extraite tendant simplement vers l'infini.

On peut classer les suites de $O(2,n)$ tendant simplement vers l'infini en trois types dynamiques distincts.

• **Dynamique à distorsion bornée.**
C'est le cas où $|\lambda_\infty|$ et $|\mu_\infty|$ ne sont pas tous deux égaux à $+\infty$.

• **Dynamique à distortions équilibrées.**
C'est le cas où $|\lambda_\infty| = |\mu_\infty| = +\infty$ et δ_∞ est fini.

• **Dynamique mixte.**
C'est le cas où $|\lambda_\infty| = |\mu_\infty| = |\delta_\infty| = +\infty$.

Perturbations compactes
Si (g_k) est une suite de $O(2,n)$ qui tend simplement vers l'infini, on appelle **perturbation compacte** de (g_k) toute suite de la forme $l_k g_k l'_k$ où l_k et l'_k sont deux suites précompactes de $O(2,n)$ qui tendent vers l_∞ et l'_∞ respectivement. Toute perturbation compacte de (g_k) tend encore simplement vers l'infini et son type dynamique est le même que celui de (g_k).

Ensemble dynamiquement associé à un autre
La description dynamique des suites de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ va être facilitée en utilisant la notion d'ensemble dynamiquement associé à un autre.
On considère un groupe G agissant sur une variété X. Soit (g_k) une suite de G qui tend vers l'infini et E un sous-ensemble de $\mathbf{Ein}_n$. On définit **l'ensemble dynamiquement associé** à E pour la suite (g_k) comme l'ensemble

des valeurs d'adhérences des suites $g_k(x_k)$, pour toutes les suites de points (x_k) qui convergent vers un point de E.
On définit de la même façon l'ensemble dynamiquement associé à E *relativement à un sous-ensemble F de X* en imposant que les suites (x_k) soient des suites de points de F (en particulier, cette définition n'a de sens que si E est dans l'adhérence de F).
Si H est un sous-groupe de G, on peut aussi parler d'ensemble dynamiquement associé à E pour H. Il s'agit de la réunion de tous les ensembles dynamiquement associés à E pour toutes les suites (h_k) de H.

5.3 Propriétés qualitatives des différentes dynamiques

Dans tout ce qui suit, si g_k désigne un élément de $O(2,n)$, on note $\overline{g}_k$ la transformation de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ qu'il induit. Ainsi $\pi \circ g_k = \overline{g}_k \circ \pi$. Conformément aux notations du chapitre 4 section 4.6, on désignera par $C(p)$ et $M(p)$ le cône de lumière et la composante de Minkowski associés à un point p.

5.3.1 Dynamique à distorsions équilibrées

Soit (g_k) une suite de $O(2,n)$ à distorsions équilibrées. On peut lui associer deux géodésiques de lumière Δ^+ et Δ^- appelés **cercles attracteurs et répulseurs** de (g_k) ainsi que deux projections $\pi_+ : \mathbf{Ein}_n \backslash \Delta^- \to \Delta^+$ et $\pi_- : \mathbf{Ein}_n \backslash \Delta^+ \to \Delta^-$ tels que :

Propriété 1
L'application π_+ (resp. π_-) est une submersion et ses fibres sont les feuilles de $\mathcal{H}_{\Delta^-}$ (resp.$\mathcal{H}_{\Delta^+}$) (voir le chapitre 4 section 4.6 pour les notations).

Propriété 2
Soit $x_\infty \in \mathbf{Ein}_n \backslash \Delta^-$. Pour toute suite de points (x_k) qui converge vers x_∞, la suite $\overline{g}_k(x_k)$ converge vers $\pi_+(x_\infty)$.

Propriété 3
Soit U un petit voisinage tubulaire (ouvert) de Δ^- et U^c son complémentaire dans $\mathbf{Ein}_n$. Alors $\lim_{k\to\infty} \overline{g}_k(U^c) = \Delta^+$.

Remarque 5.1. *On a les mêmes énoncés pour la suite (g_k^{-1}) en remplaçant tous les $+$ par des $-$.*

Remarque 5.2. *Les cercles attracteurs et répulseurs ne sont pas toujours disjoints : ils peuvent être sécants ou confondus.*

Preuve : Si les propriétés 1, 2 et 3 sont vérifiées pour une suite (g_k), elles le sont pour toute perturbation compacte de cette suite. On démontre donc les propriétés pour une suite (g_k) de A vérifiant de plus $\lambda_k = \mu_k$ tendant

tous les deux vers $+\infty$. Pour tout $x = (x_1, x_2, ..., x_{n+2})$ dans $\mathbf{R}^{2,n}$, on pose $B_\epsilon(x) = [x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon] \times [x_2 - \epsilon, x_2 + \epsilon] \times ... \times [x_{n+2} - \epsilon, x_{n+2} + \epsilon]$. On note Δ^+ la projection sur $\mathbf{Ein}_n$ du plan P^+ engendré par e_1 et e_{n+2} et Δ^- celle du plan P^- engendré par e_2 et e_{n+1}.

Si l'on choisit x tel que $\pi(x) \notin \Delta^-$ alors $lim_{k\to\infty}\overline{g}_k \circ \pi(B_\epsilon(x)) = B_\epsilon^\infty(x) = \pi([x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon] \times [x_2 - \epsilon, x_2 + \epsilon] \times \{0\} \times ..... \times \{0\})$. Ainsi, $B_\epsilon^\infty(x)$ est un petit morceau du cercle Δ^+. En faisant tendre ϵ vers 0, on voit que toute suite $\pi(x_k)$ qui tend vers $\pi(x)$ vérifie $\lim_{k\to\infty} \overline{g}_k \circ \pi(x_k) = \lim_{k\to\infty} \overline{g}_k \circ \pi(x) = \pi(x_1, x_2, 0, ..., 0)$. On appelle $\tilde{\pi}^+$ la projection de $\mathbf{R}^{2,n}$ sur le plan P^+. Elle induit une projection π^+ de $\mathbf{Ein}_n \backslash \Delta^-$ sur Δ^+ dont les fibres sont les projetés sur $\mathbf{Ein}_n$ des fibres de $\tilde{\pi}^+$. Ces dernières sont des hyperplans dégénérés de $\mathbf{R}^{2,n}$, obtenus comme les orthogonaux des vecteurs de P^- pour la forme $q^{2,n}$. Les fibres de π^+ sont donc les cônes de lumière issus des points de Δ^-, autrement dit, ce sont les feuilles du feuilletage $\mathcal{H}_{\Delta^-}$.

Il nous reste à montrer la propriété 3. En recouvrant U^c par un nombre fini de $\pi(B_\epsilon)$, on voit que $\lim_{k\to+\infty} \overline{g}_k(U^c)$ est un morceau de Δ^+. Mais comme U^c rencontre toutes les fibres de π^+, on obtient qu'en fait cette limite est l'intégralité de Δ^+.

□

5.3.2 Dynamique à distorsion bornée

Soit (g_k) une suite de $O(2, n)$ de distorsion bornée. On peut lui associer deux points p^+ et p^- de $\mathbf{Ein}_n$ appelés **pôles attracteurs et répulseurs** de (g_k), ainsi qu'un difféomorphisme $\hat{g}_\infty$ allant de l'espace des géodésiques de lumière de $C^- = C(p^-)$ dans l'espace des géodésiques de lumière de $C^+ = C(p^+)$, qui respecte de plus la structure conforme (riemannienne) de ces deux espaces, et tels que l'on a les propriétés suivantes :

Propriété 1

• Pour tout compact K inclus dans $\mathbf{Ein}_n \backslash C^-$, on a :
$\lim_{k\to+\infty} \overline{g}_k(K) = p^+$.

• Pour tout compact K contenant p^- dans son intérieur :
$\lim_{k\to+\infty} \overline{g}_k(K) = \mathbf{Ein}_n$.

Propriété 2

Soit Δ une géodésique de lumière de C^- et x un point de cette géodésique qui ne soit pas p^-. L'ensemble dynamiquement associé au point x est la géodésique $\hat{g}_\infty(\Delta)$.

Les cônes C^+ et C^- sont dits **cônes attracteurs et répulseurs** de la suite (g_k).

Remarque 5.3. *On a les mêmes énoncés pour la suite (g_k^{-1}) en remplaçant tous les + par des −.*

Preuve : On démontre les propriétés pour les suites (g_k) de A. On suppose que λ_k tend vers $+\infty$ et on reprend les notations précédentes.

La propriété 1 se démontre comme dans le cas d'une dynamique mixte et nous passons directement à la preuve de la propriété 2.

Si $\pi(x) \in C^-$, on a $lim_{k\to\infty}\overline{g}_k \circ \pi(B_\epsilon(x)) = B_\epsilon^\infty(x) = \pi([-\infty,+\infty] \times [e^{\mu_\infty}(x_2-\epsilon), e^{\mu_\infty}(x_2+\epsilon)] \times [x_3+\epsilon, x_3-\epsilon] \times ..... \times [x_n-\epsilon, x_n+\epsilon] \times [e^{-\mu_\infty}(x_{n+1}-\epsilon), e^{-\mu_\infty}(x_{n+1}+\epsilon)] \times \{0\})$.

Les géodésiques de lumière de C^+ et C^- sont paramétrées par une sphère $\mathbf{S}^{n-2}$ correspondant aux directions isotropes du sous-espace engendré par $e_2, ..., e_{n+1}$. L'application $\hat{g}_\infty$ va être l'élément de $O(1, n-1)$ donné par la matrice :

$$\hat{g}_\infty = \begin{pmatrix} e^{\mu_\infty} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & e^{-\mu_\infty} \end{pmatrix}$$

On voit ainsi que $\hat{g}_\infty$ respecte la structure conforme de $\mathbf{S}^{n-2}$. Par le calcul ci-dessus, si $\pi(x_k)$ est une suite de points qui tend vers $\pi(x)$, alors les valeurs d'adhérences de la suite $\overline{g}_k(\pi(x_k))$ sont dans tous les $B_\epsilon^\infty(x)$ pour ϵ suffisamment petit. Or l'intersection de tous les $B_\epsilon^\infty(x)$ est $\pi([-\infty,+\infty] \times \{e^{\mu_\infty}x_2\} \times \{x_3\} \times ..... \times \{x_n\} \times \{e^{-\mu_\infty}x_{n+1}\} \times \{0\})$, c'est-à-dire la géodésique de lumière image par $\hat{g}$ de la géodésique de lumière passant par p^- et $\pi(x)$. Réciproquement, chaque point $\pi(y)$ de cette géodésique est adhérent à $\overline{g}_k \circ \pi(B_\epsilon(x))$, donc on peut trouver une suite x_k^ϵ de $B_\epsilon(x)$ vérifiant $lim_{k\to\infty}\overline{g}_k \circ \pi(x_k^\epsilon) = \pi(y)$. Si maintenant ϵ_k est une suite qui tend vers 0, alors $lim_{k\to\infty}\overline{g}_k \circ \pi(x_{n_k}^{\epsilon_k}) = \pi(y)$ pour une certaine suite d'entiers n_k et $\pi(x_{n_k}^{\epsilon_k})$ tend vers $\pi(x)$. Cela montre la propriété 2. □

5.3.3 Dynamique mixte

Soit (g_k) une suite de $O(2,n)$ de dynamique mixte. Il existe alors deux points p^+ et p^- appelés **pôles attracteurs et répulseurs** de la suite, ainsi que deux cercles Δ^+ et Δ^- (dits **cercles attracteurs et répulseurs**) tels que l'on ait les relations d'inclusion $p^+ \in \Delta^+ \subset C^+ = C(p^+)$ et $p^- \in \Delta^- \subset C^- = C(p^-)$ ainsi que les propriétés suivantes :

Propriété 1

• Pour tout compact K inclus dans $\mathbf{Ein}_n \backslash C^-$ on a :
$\lim_{k\to\infty} \overline{g}_k(K) = p^+$.

• Pour tout compact K contenant p^- dans son intérieur on a :
$\lim_{k\to\infty} \overline{g}_k(K) = \mathbf{Ein}_n$.

Propriété 2

Soit x_∞ un point de $C(p^-)$ n'appartenant pas à Δ^-. L'ensemble dynamiquement associé à x est la géodésique Δ^+.

Propriété 3

Soit x_∞ un point de Δ^- différent de p^-. L'ensemble dynamiquement associé au point x est le cône attracteur $C(p^+)$.

propriété 4

Soit U un petit voisinage tubulaire (ouvert) de Δ^- et U^c son complémentaire dans $\mathbf{Ein}_n$. Alors $\lim_{k\to\infty} \overline{g}_k(U^c) = \Delta^+$.

Les cônes C^+ et C^- sont dits **cônes attracteurs et répulseurs** de la suite (g_k).

Remarque 5.4. *On a les mêmes énoncés pour la suite (g_k^{-1}) en remplaçant tous les + par des −.*

Remarque 5.5. *Les pôles attracteurs et répulseurs peuvent être confondus.*

De même, les cercles attracteurs et répulseurs ne sont pas toujours disjoints. Ils peuvent être sécants ou confondus.

Preuve : Là encore, on ne démontre les propriétés que pour les suites (g_k) de A et on suppose que λ_k et μ_k convergent tous deux vers $+\infty$. On note $p^+ = \pi(e_1)$, $p^- = \pi(e_{n+2})$, $C^+ = \pi((e_1)^\perp)$, $C^- = \pi((e_{n+2})^\perp)$.

Tout d'abord, si $x_1 \neq 0$, on a clairement $lim_{k\to\infty}\overline{g}_k \circ \pi(B_\epsilon) = p^+$, ce qui montre la propriété 1.

Si $\pi(x)$ appartient à C^- sans appartenir à Δ^-, cela signifie que $x_1 = 0$ mais que $x_2 \neq 0$. On obtient dans ce cas $lim_{k\to\infty}\overline{g}_k \circ \pi(B_\epsilon(x)) = B_\epsilon^\infty(x) = \pi([-\infty,+\infty]\times[x_2-\epsilon, x_2+\epsilon]\times\{0\}\times.....\times\{0\}) = \Delta^+$. Par conséquent, si $\pi(x_k)$ est une suite de points qui tend vers $\pi(x)$, alors les valeurs d'adhérences de la suite $\overline{g}_k(\pi(x_k))$ sont dans tous les $B_\epsilon^\infty(x)$ pour ϵ suffisamment petit. Or l'intersection de tous les $B_\epsilon^\infty(x)$ est $\pi([-\infty,+\infty]\times\{x_2\}\times\{0\}\times.....\times\{0\})$, c'est-à-dire la géodésique de lumière Δ^+. Réciproquement, chaque point $\pi(y)$ de cette géodésique est adhérent à $\overline{g}_k \circ \pi(B_\epsilon(x))$, donc on peut trouver une suite x_k^ϵ de $B_\epsilon(x)$ vérifiant $lim_{k\to\infty}\overline{g}_k \circ \pi(x_k^\epsilon) = \pi(y)$. Si maintenant ϵ_k est une suite qui tend vers 0, alors on peut trouver une suite d'entiers n_k pour laquelle $lim_{k\to\infty}\overline{g}_k \circ \pi(x_{n_k}^{\epsilon_k}) = \pi(y)$. On a alors $\pi(x_{n_k}^{\epsilon_k})$ tend vers $\pi(x)$, et cela montre la propriété 2.

Si $\pi(x)$ appartient à Δ^-, alors seuls x_{n+1} et x_{n+2} sont non nuls et comme $\pi(x) \neq p^+$, on a $x_{n+1} \neq 0$. Ainsi, $lim_{k\to\infty}\overline{g}_k \circ \pi(B_\epsilon(x)) = B_\epsilon^\infty(x) = \pi([-\infty,+\infty]\times[-\infty,+\infty]\times.....\times[-\infty,+\infty]\times[x_{n+1}-\epsilon, x_{n+1}+\epsilon]\times\{0\}) = C^+$. La propriété 3 en découle, par une preuve similaire à celle ci-dessus.

Il nous reste à montrer la propriété 4. Pour cela, on remarque que U^c rencontre forcément C^-. On fait alors un recouvrement fini de U^c par des $\pi(B_\epsilon(x_1))$, ..., $\pi(B_\epsilon(x_s))$ et on peut supposer que x_1 est sur C^-. Alors $\lim_{k\to+\infty} g_k(U^c)$ contient C^+. Comme U^c ne contient pas de points de C^- dans son adhérence, on aussi que $\lim_{k\to+\infty} g_k(U^c)$ est contenu dans C^+, ce qui achève la preuve.

□

5.4 Illustration des dynamiques sur $\mathbf{Ein}_n$ et sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$

On voit l'espace de Minkowski comme un ouvert de $\mathbf{Ein}_n$, via la projection stéréographique s. Toute application conforme de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ peut alors être vue comme une application de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ fixant le cône à l'infini de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ que l'on note C. Le sommet de C est noté i. De même, toute application conforme de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ peut être vue comme un élément de $\mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}}_n)$ fixant un cône de lumière $\tilde{C}$ et une famille de composantes de Minkowski M_j associées à ce cône. On adopte l'indexage habituel des sommets du cône $\tilde{C}$. Ainsi, i_{j-1} désigne l'infini passé de la composante M_j, i_j son infini espace et i_{j+1} son infini futur. Nous allons déterminer le type dynamique de quelques éléments de $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1})$.

5.4.1 Dynamique des translations sur $\mathbf{Ein}_n$ et sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$

1) Translations de type temps

a) Dynamique sur $\mathbf{Ein}_n$

Lemme 5.6. *Une translation τ de type temps a une dynamique à distorsion bornée. Ses pôles attracteurs et répulseurs sont égaux et coïncident avec le sommet du cône à l'infini de l'espace de Minkowski.*

Preuve : Comme les droites de type temps de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ convergent toutes vers i, on obtient que pour tout $x \in \mathbf{R}^{1,n-1}$, on a $\lim_{k\to\pm\infty} \tau^k(x) = i$.
Cela nous dit en particulier que la dynamique de τ ne peut être à distorsion équilibrée. De plus, ses pôles attracteurs et répulseurs sont égaux à i.
On montre de même que τ ne peut être à dynamique mixte. Si c'était le cas, il existerait un cercle attracteur Δ^+. On considère alors un plan lorentzien P dans $\mathbf{R}^{1,n-1}$ contenant la direction τ. Ce plan possède deux directions isotropes u et v auxquelles correspondent deux cercles Δ_u et Δ_v de C (voir chapitre 4 lemme 4.12). Quitte à changer P, on peut supposer que Δ_u et Δ_v sont différents de Δ^+ et Δ^-. On choisit alors une droite D de P de direction u. On peut trouver une suite (x_k) allant à l'infini sur cette droite de sorte qu'il existe une suite m_k d'entiers tels que $\tau^{m_k}(x_k)$ soit une suite de points allant à l'infini le long d'une droite D' de direction v. La suite (x_k) converge vers un certain point x_∞ de Δ_u différent de i. On devrait alors avoir que $\tau^{m_k}(x_k)$ tend vers un point de Δ^+. Mais comme $\tau^{m_k}(x_k)$ est une suite de D' allant à l'infini, elle tend vers un point de Δ_v différent de i. On aboutit donc à une contradiction.
Par conséquent, τ à une dynamique à distorsion bornée.

□

Remarque 5.7. *Une droite isotrope de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ et sa translatée par τ n'étant jamais dans un même plan dégénéré, on constate que τ n'a pas d'autre point fixe que i.*

b) Dynamique sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$

La dynamique de τ sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ se déduit aisément de ce qui précède.
-les points fixes de τ sont exactement les points i_j.
-pour tout x dans M_j, la suite $\tau^k(x)$ converge vers i_{j+1} lorsque k tend vers $+\infty$ et vers i_{j-1} lorsque k tend vers $-\infty$.
-Soit Δ une géodésique de lumière de C. On note Δ_{j-1} l'intersection de Δ avec le cylindre I_{j-1} et Δ_j l'intersection de Δ avec I_j. Pour tout point x de Δ_{j-1}, l'ensemble dynamiquement associé à x relativement à M_j pour la suite $(\tau^k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ est $\overline{\Delta}_j$.

On a un énoncé similaire pour la suite $(\tau^k)_{k\in\mathbb{Z}^-}$ en inversant I_{j-1} et I_j et Δ_{j-1} et Δ_j.

2) Translations de type espace

a) Dynamique sur $\mathbf{Ein}_n$

Lemme 5.8. *Une translation τ de type espace a une dynamique à distorsion bornée. Ses pôles attracteurs et répulseurs sont égaux et coïncident avec le sommet du cône à l'infini de l'espace de Minkowski.*

Preuve : La démonstration se fait comme précédemment. On suppose que la dynamique est mixte de cercles attracteurs et répulseurs Δ^+ et Δ^-. Il suffit alors de considérer un plan lorentzien P contenant le vecteur τ tels que les cercles Δ_u et Δ_v de C associés aux deux directions isotropes u et v de P soient différents de Δ^+ et D^-. □

Remarque 5.9. *Rappelons que les géodésiques de lumières de C s'identifient à une sphère S^{n-2}. Les points fixes de τ forment une union de géodésiques de lumières de C qui s'identifie à une sphère S^{n-3} (dans l'espace des géodésiques de lumière)*

b) Dynamique sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$.

- les points fixes de τ forment une réunion de géodésiques de lumières de $\tilde{C}$, paramétrées par une sphère $\mathbf{S}^{n-3}$.
- pour tout x dans M_j, la suite $\tau^k(x)$ converge vers i_j lorsque k tend vers $\pm\infty$.
- soit x_∞ un point de I_{j-1}. Soit Δ une géodésique de lumière de C. On note Δ_{j-1} (resp. Δ_j) l'intersection de Δ avec I_{j-1} (resp. I_j). Pour tout point x de Δ_{j-1}, l'ensemble dynamiquement associé à x pour la suite $(\tau^k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ et relativement à M_j est $\overline{\Delta}_{j-1}$.

On a un énoncé similaire pour la suite $(\tau^k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ en remplaçant I_{j-1} par I_j et Δ_{j-1} par Δ_j.

3) Translations de type lumière

a) Dynamique sur $\mathbf{Ein}_n$

Lemme 5.10. *Une translation τ de type lumière a une dynamique à distorsions équilibrées. Ses cercles attracteurs et répulseurs coïncident et sont égaux au cercle des points fixes de τ.*

Preuve : On appelle Δ_τ le cercle à l'infini associé à la direction isotrope τ. Toutes les droites de direction τ coupent C en un point de Δ_τ. Comme ces droites sont individuellement préservées par la translation, Δ_τ est un cercle de points fixes pour τ. D'autre part, la translation τ préserve un feuilletage $\mathcal{H}$ de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ en hyperplans dégénérés (orthogonaux à τ). Dans l'étude géométrique de l'espace de Minkowski, nous avons vu (chapitre 4 lemme 4.12) que toutes les droites de lumière appartenant à une même feuille tendent vers un même point à l'infini qui se situe sur Δ_τ. Ainsi, si x et y sont sur une même feuille de $\mathcal{H}$, les suites $\tau^k(x)$, $\tau^{-k}(x)$, $\tau^k(y)$ et $\tau^{-k}(y)$ tendent vers un même point.
En revanche, si x et y n'appartiennent pas à la même feuille, alors $\tau^k(x)$ et $\tau^k(y)$ tendent vers deux points distincts de Δ_τ.
On reconnaît une dynamique à distorsions équilibrées avec $\Delta^+ = \Delta^- = \Delta_\tau$
$\square$

b) Dynamique sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$
-la translation τ admet une géodésique de lumière Δ de points fixes.
-pour tout point x de Δ, on appelle $\mathcal{H}_x$ la portion du cône de lumière issu de x comprise entre x et $\zeta(x)$, privée des éléments de Δ. Alors pour tout y dans $\mathcal{H}_x$, la limite de $\tau^k(y)$ lorsque k tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est $\zeta(x)$ (resp. x).

5.4.2 Dynamique sur $\mathbf{Ein}_n$ de quelques éléments linéaires

Soit L une application linéaire de $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1})$. On écrit $L = \lambda A$ avec λ dans $\mathbf{R}^\star$ et A dans $O(1, n-1)$. On a déjà vu dans le chapitre 4 que la projection s identifiait L à la matrice de $O(2, n)$ suivante :

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & A & \\ & & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

On discute dans un premier temps les types dynamiques des suites de $\langle L \rangle$, le sous-groupe de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ engendré par L.

1) Cas où $|\lambda| \neq 1$

En faisant une décomposition de Cartan dans $O(1, n-1)$, on obtient facilement :

a) Cas A elliptique.
Toutes les suites (L^{n_k}) qui tendent simplement vers l'infini ont une dynamique à distorsion bornée, avec deux pôles attracteurs et répulseurs distincts correspondant à l'origine et au point à l'infini i.

b) Cas A parabolique.
La suite (L^k) tend simplement vers l'infini et sa dynamique est mixte. Les deux pôles attracteurs et répulseurs correspondent comme précédemment à l'origine et au point à l'infini. Les cercles attracteurs et répulseurs sont sécants en un point.

c) Cas A loxodromique.
La matrice de $O(2,n)$ est diagonalisable dans ce cas. Il faut distinguer deux sous-cas, suivant que A admet une valeur propre de module $|\lambda|$ ou non.
i) Si A admet une valeur propre de module $|\lambda|$, la suite (L^k) tend simplement vers l'infini et sa dynamique est à distorsions équilibrées, avec deux cercles attracteurs et répulseurs disjoints.
ii) Dans l'autre cas, (L^k) tend simplement vers l'infini, avec une dynamique mixte. Les deux cercles attracteurs et répulseurs sont disjoints.

2) Cas où $|\lambda| = 1$

1) Cas A elliptique.
Dans ce cas, aucune sous-suite (L^{n_k}) ne tend vers l'infini.

2) Cas A parabolique.
La suite (L^k) tend simplement vers l'infini avec une dynamique à distorsion bornée. Les pôles attracteurs et répulseurs sont confondus.

3) Cas A loxodromique.
La suite (L^k) tend simplement vers l'infini et sa dynamique est à distorsion bornée avec deux pôles attracteurs et répulseurs disjoints

On donne à présent quelques exemples de dynamiques sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$.

5.4.3 Dynamique des homothéties sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$

L'élément L fixe deux familles de points disjoints (i_j^+) et (i_j^-) qui sont les sommets de deux cônes C^+ et C^-. Les composantes connexes du complémentaire de C^- forment une famille de composantes de Minkowski M_j^-. Le cône C^+ divise chaque M_j^- en trois composantes connexes P_j, F_j et E_j disposées comme l'indique la figure 5.1.

Chaque composante P_j et F_j est difféomorphe à $\mathbf{R}^n$ (il s'agit en fait de l'intérieur du demi-cône supérieur issu de l'origine dans l'espace de Minkowski. En revanche, les composantes E_j ne sont pas simplement connexes. Elles sont conformément équivalentes à l'ensemble des vecteurs de type espace dans Minkowski. Ainsi, chaque E_j est difféomorphe à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^{n-1}$.

Chaque composante P_j, F_j et E_j est individuellement préservée par L. Ainsi, pour comprendre la dynamique de L sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$, il suffit de la comprendre sur chaque morceau $\overline{P}_j$, $\overline{F}_j$ et $\overline{E}_j$.

1) Dynamique sur les composantes $\overline{F}_j$ et $\overline{P}_j$

La frontière des composantes F_j et P_j est composée de deux demi-cônes collés le long d'une sphère. Plus précisément, la frontière de P_j s'écrit comme la réunion $\{i_{j-1}^-\} \cup \check{I}_{P_j}^- \cup S_{P_j} \cup \check{I}_{P_j}^+ \cup \{i_j^+\}$. Les cylindres $\check{I}_{P_j}^-$ et $\check{I}_{P_j}^+$ sont respectivement dans I_{j-1}^- et I_j^+ (voir figure 5.2). On les appelle **demi-cylindres**. La sphère S_{P_j} est une composante connexe de $C^+ \cap C^-$.

On appelle $T_{P_j}^-$ la réunion de $\check{I}_{P_j}^-$ et de S_{P_j} et $T_{P_j}^+$ la réunion de $\check{I}_{P_j}^+$ et de

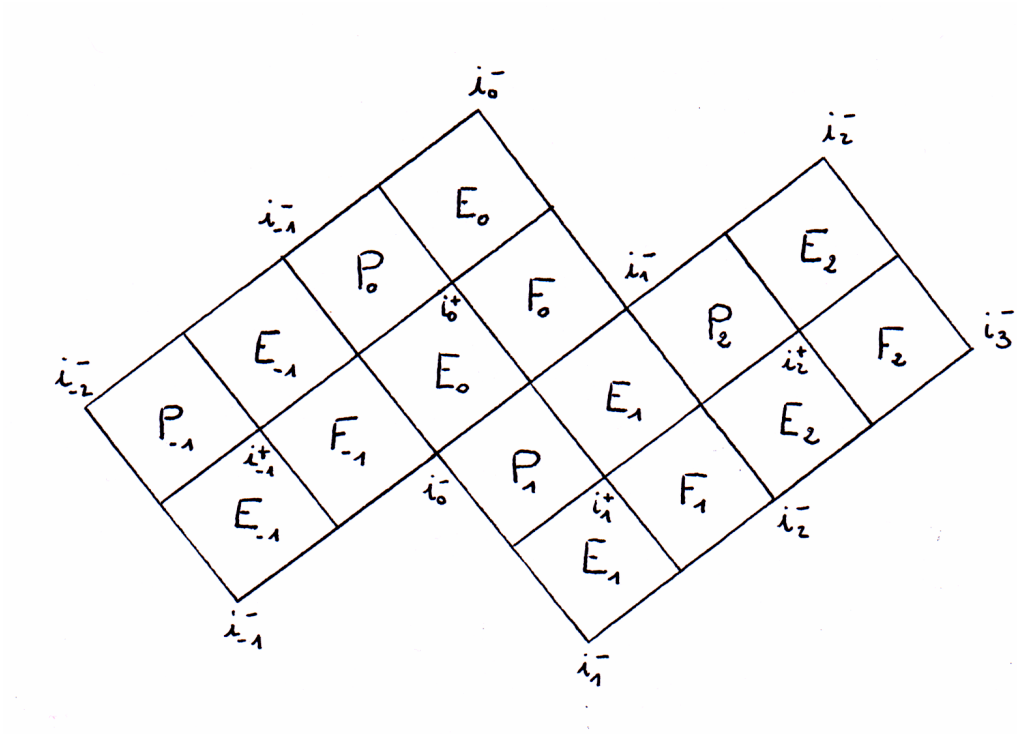

Figure 5.1:

S_{P_j}.

De même, on va écrire la frontière de F_j comme la réunion $\{i_j^+\} \cup \check{I}_{F_j}^+ \cup S_{F_j} \cup \check{I}_{F_j}^- \cup \{i_{j+1}^-\}$. Les cylindres $\check{I}_{F_j}^+$ et $\check{I}_{F_j}^-$ sont respectivement dans I_j^+ et I_{j+1}^-. La sphère S_{F_j} est une composante connexe de $C^+ \cap C^-$. On définit de manière similaire $T_{F_j}^-$ comme la réunion de S_{F_j} et $\check{I}_{F_j}^-$, et $T_{F_j}^+$ comme la réunion de S_{F_j} et $\check{I}_{F_j}^+$.
Remarquons que $I_j^\pm = T_{P_{j+1}}^\pm \cup T_{F_j}^\pm$

On peut maintenant décrire la dynamique de L sur $\overline{P}_j$.
(i) Les points fixes de L sur $\overline{P}_j$ sont les points i_j^+, i_j^- ainsi que les points de S_{P_j}.
(ii) Pour tout point x de P_j la limite de $L^k(x)$ lorsque k tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est i_j^+ (resp. i_{j-1}^-).
(iii) Si x est un point de $T_{P_j}^-$, l'ensemble dynamiquement associé à x pour la suite $(L^k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ relativement à $\overline{P}_j$ est un segment de géodésique lumière de $\overline{T}_{P_j}^+$ (c'est-à-dire l'intersection d'une géodésique de lumière de C^+ avec $\overline{T}_{P_j}^+$). De même, l'ensemble dynamiquement associé à tout point de $T_{P_j}^+$, pour la suite $(L^k)_{k\in\mathbb{Z}^-}$ et relativement à $\overline{P}_j$, est un segment de géodésique de lumière de $\overline{T}_{P_j}^-$.

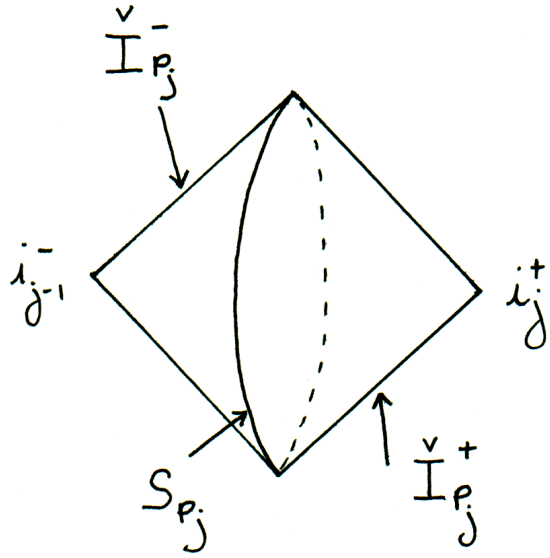

Figure 5.2:

On a un énoncé similaire concernant la dynamique sur $\overline{F}_j$ en remplaçant P_j par F_j et i^-_{j-1} par i^-_{j+1} dans la description précédente.

2) Dynamique sur les composantes $\overline{E}_j$

Avec les notations précédentes, on voit sur les figures 5.1 et 5.2 que la frontière de E_j est la réunion $\{i^+_j\} \cup \{i^-_j\} \cup T^+_{P_j} \cup T^+_{F_j} \cup T^-_{F_{j-1}} \cup T^-_{P_{j+1}}$.
(i) Les points fixes de L sur $\overline{E}_j$ sont les i^+_j, i^-_j, ainsi que les points de $S_{P_j} \cup S_{F_j}$.
(ii) Pour tout x dans E_j la limite de $L^k(x)$ lorsque k tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est i^+_j (resp. i^-_j).
(iii) Pour tout point x de $T^-_{P_{j+1}}$ (resp. $T^-_{F_{j-1}}$), l'ensemble dynamiquement associé à x, pour la suite $(L^k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ relativement à $\overline{E}_j$, est un segment géodésique de lumière de $T^+_{F_j}$ (resp. $T^+_{P_j}$). Réciproquement pour tout x de $T^+_{P_j}$ (resp. $T^+_{F_j}$) l'ensemble dynamiquement associé à x pour la suite $(L^k)_{k\in\mathbb{Z}^-}$ relativement à $\overline{E}_j$ est un segment de géodésique de lumière de $\overline{T}^-_{F_{j-1}}$ (resp. de $\overline{T}^-_{P_{j+1}}$).

5.4.4 Exemple de dynamique mixte sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$

On choisit un élément $L = \lambda A$ où A est un élément loxodromique de $O(1, n-1)$ n'admettant pas λ pour valeur propre. On peut supposer sans perte de généralité que les modules des valeurs propres de L sont tous plus petits que 1 et de plus, on demande que L préserve l'orientation chronologique de $\mathbf{R}^{1,n-1}$. On garde les mêmes notations que pour l'exemple précédent. L'élément L préserve encore les composantes P_j, E_j et F_j, ainsi que deux

géodésiques de lumière Δ^+ et Δ^- qui sont sur C^+ et C^- respectivement et correspondent aux remontés des cercles attracteurs et répulseurs.

1) Dynamique sur les composantes $\overline{F}_j$ et $\overline{P}_j$

(i) Les points fixes de L sur $\overline{P}_j$ sont les points i_j^+, i_j^- ainsi que les deux points fixes de A sur la sphère S_{P_j}.

(ii) Pour tout point x de P_j la limite de $L^k(x)$ lorsque k tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est i_j^+ (resp. i_{j-1}^-).

(iii) Si x est un point de $T_{P_j}^-$ qui n'est pas sur Δ^-, l'ensemble dynamiquement associé à x pour la suite $(L^k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ relativement à $\overline{P}_j$ est le segment de géodésique de lumière obtenu comme intersection de Δ^+ et $\overline{T}_{P_j}^+$. De même, l'ensemble dynamiquement associé à tout point de $T_{P_j}^+$ qui n'est pas sur Δ^+, pour la suite $(L^k)_{k\in\mathbb{Z}^-}$ et relativement à $\overline{P}_j$, est le segment obtenu comme intersection de Δ^- et $\overline{T}_{P_j}^-$.

(iv) Si x est un point de $T_{P_j}^-$ qui est sur Δ^-, l'ensemble dynamiquement associé à x pour la suite $(L^k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ relativement à $\overline{P}_j$ est $\overline{T}_{P_j}^+$. De même, l'ensemble dynamiquement associé à tout point de $T_{P_j}^+$ qui est sur Δ^+, pour la suite $(L^k)_{k\in\mathbb{Z}^-}$ et relativement à $\overline{P}_j$, est $\overline{T}_{P_j}^-$.

2) Dynamique sur les composantes $\overline{E}_j$

(i) Les points fixes de L sur $\overline{E}_j$ sont i_j^+, i_j^-, ainsi que les points fixes de A sur les sphères S_{P_j} et S_{F_j}.

(ii) Pour tout x dans E_j la limite de $L^k(x)$ lorsque k tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est i_j^+ (resp. i_j^-).

(iii) Pour tout point x de $T_{P_{j+1}}^-$ (resp. $T_{F_{j-1}}^-$) qui n'est pas sur Δ^-, l'ensemble dynamiquement associé à x, pour la suite $(L^k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ et relativement à $\overline{E}_j$, $T_{F_j}^+$ (resp. $T_{P_j}^+$). Réciproquement, pour tout x de $T_{P_j}^+$ (resp. $T_{F_j}^+$) qui n'est pas sur Δ^+, l'ensemble dynamiquement associé à x pour la suite $(L^k)_{k\in\mathbb{Z}^-}$ relativement à $\overline{E}_j$ est $\overline{T}_{F_{j-1}}^-$ (resp. de $\overline{T}_{P_{j+1}}^-$).

5.5 Quelques résultats sur la propreté de l'action des suites de Conf($\mathbf{Ein}_n$) tendant vers l'infini

Étant donnée une suite (g_k) d'applications conformes sur la sphère $\mathbf{S}^n$, il est très facile de comprendre le lieu des points où l'action de (g_k) est propre (voir définition ci-dessous) : ce lieu est le complémentaire dans $\mathbf{S}^n$ des pôles attracteurs et répulseurs de la suite. De même, pour un sous groupe Γ d'applications conformes de $\mathbf{S}^n$, on a une notion d'ensemble limite Λ_Γ et le complémentaire de Λ_Γ dans $\mathbf{S}^n$ est le plus grand ouvert où l'action de Γ est propre.

Cette situation ne perdure pas dans le cas des sous-groupes de Conf($\mathbf{Ein}_n$). Sauf pour certaines classes de sous-groupes particuliers (voir chapitre 8 section 8.3.1), il n'existe pas une bonne notion d'ensemble limite et en général, il existera beaucoup d'ouverts maximaux de $\mathbf{Ein}_n$ sur lesquels un sous-groupe

$\Gamma \subset \mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ agit proprement. Notre but dans cette section est de comprendre un peu mieux les parties de $\mathbf{Ein}_n$ où une suite (resp. un sous-groupe) de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ agit proprement.

Rappelons pour commencer la définition d'une *action propre*.

Définition 5.11. *Soit G un groupe topologique agissant sur un espace topologique X. On dit que l'action de G est propre si pour tout compact K de X, le sous-ensemble G_K de G, constitué des $g \in G$ pour lesquels $g(K) \cap K \neq \emptyset$, est compact dans G.*

On suppose désormais que G est un groupe non compact et on s'intéresse aux suites de G qui tendent vers l'infini, c'est-à-dire qui sortent de tout compact de G à partir d'un certain rang. On dit qu'une suite (g_k) d'éléments de G qui tend vers l'infini agit proprement sur X si pour tout compact K de X, on a $g(K) \cap K = \emptyset$ sauf pour un nombre fini d'indices k. Comme on va toujours travailler sur des espaces X dont la topologie est métrisable, on adoptera plutôt la définition alternative suivante :

Définition 5.12. *(alternative) On dit qu'une suite (g_k) d'éléments de G qui tend vers l'infini agit proprement sur X si pour toute suite (x_k) de X qui converge vers un point x_∞, la suite $g_k(x_k)$ sort de tout compact de X.*

En utilisant cette définition alternative et la définition d'ensemble dynamiquement associé, on obtient facilement le

Lemme 5.13. *Soit E un sous-ensemble de $\mathbf{Ein}_n$. Une suite (g_k) de Conf($\mathbf{Ein}_n$) agit proprement sur E si et seulement si pour tout x dans E, l'ensemble dynamiquement associé à x pour la suite (g_k) et relativement à E se situe hors de E.*

Ce lemme va nous permettre de montrer la

Proposition 5.14.
1) Une suite $(g_k) \subset$ Conf($\mathbf{Ein}_n$) de dynamique mixte (avec pôles attracteurs et répulseurs p^+ et p^- et cercles attracteurs et répulseurs Δ^+ et Δ^-) et sa suite inverse (g_k^{-1}) agissent proprement sur un ouvert Ω de $\mathbf{Ein}_n$ si et seulement si l'on est dans un des cas suivants :
(i) $C^- \cup \{p^+\}$ est dans le complémentaire de Ω.
(ii) $C^+ \cup \{p^-\}$ est dans le complémentaire de Ω.
(iii) $\Delta^+ \cup \Delta^-$ est dans le complémentaire de Ω.
2) Si une suite $(g_k) \subset$ Conf($\mathbf{Ein}_n$) à distorsions équilibrées (avec cercles attracteurs et répulseurs Δ^+ et Δ^-) agit proprement sur un ouvert Ω de $\mathbf{Ein}_n$, alors pour tout x dans $\Delta^+ \cap \Omega$, $\pi_+^{-1}(x)$ est dans le complémentaire de Ω. D'autre part (g_k) ainsi que (g_k^{-1}) agissent toujours proprement sur le complémentaire de $\Delta^+ \cup \Delta^-$.
3) Si $(g_k) \subset$ Conf($\mathbf{Ein}_n$) est à distorsion bornée et agit proprement sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{Ein}_n$, alors le complémentaire de Ω dans $\mathbf{Ein}_n$ contient une infinité de cercles lumières de C^+ ou C^-.

Preuve : On commence par le cas 1). La première remarque est que comme l'ensemble dynamiquement associé à p^- (resp. p^+) pour la suite (g_k) (resp. (g_k^{-1})) est $\mathbf{Ein}_n$ entier, on a toujours que p^+ et p^- sont hors de Ω. Si on n'est pas dans le cas (iii), c'est que par exemple Δ^- rencontre Ω en un point x. Par le lemme 5.13, l'ensemble dynamiquement associé à x pour (g_k), en l'occurence C^+, est dans le complémentaire de Ω. On est donc dans le cas (ii). Si c'est Δ^+ qui rencontre Ω, on est dans le cas (i).
La preuve du 2) est une simple traduction du lemme 5.13.
Pour montrer le 3), on commence par écarter le cas où C^+ et C^- sont tous deux dans le complémentaire de Ω, auquel cas il n'y a rien à montrer. Sinon, C^- rencontre Ω en un point x. Il existe un petit ouvert U précompact contenant x et dont l'adhérence $\overline{U}$ est contenue dans Ω. On appelle $\hat{U}$ l'ouvert de $\mathbf{S}^{n-2}$ correspondant aux géodésiques de lumières de C^- qui rencontrent U. Alors l'ensemble dynamiquement associé à $\overline{U}$ est constitué des géodésiques de lumière de C^+ qui correspondent au sous-ensemble $g_\infty(\overline{\hat{U}})$. Ce sous-ensemble est d'intérieur vide et on voit ainsi que l'ensemble dynamiquement associé à $\overline{U}$, qui par le lemme 5.13 doit être dans le complémentaire de Ω, contient une infinité de géodésiques de lumière de C^+. La démonstration est identique si c'est C^+ qui rencontre Ω.

□

Une conséquence immédiate de cette proposition est le

Corollaire 5.15. *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{Ein}_n$ sur lequel un sous-groupe Γ, d'adhérence non compacte dans Conf($\mathbf{Ein}_n$), agit proprement. Alors le complémentaire de Ω dans $\mathbf{Ein}_n$ contient au moins une géodésique de lumière.*

Notons que le fait d'être à distorsion bornée s'interprète en termes d'action propre sur l'espace Anti-de Sitter. On a en effet :

Lemme 5.16. *Une suite (g_k) de $O(2,n)$ est à distorsion bornée si et seulement si elle n'agit pas proprement sur $\mathbf{AdS}_{n+1}$.*

Preuve : On considère $\mathbf{R}^{2,n+1}$ muni de la forme quadratique $q^{2,n+1}$ et la base orthonormée $e_1, ..., e_{n+3}$ habituelle. Le sous-groupe de $O(2,n+1)$ qui laisse stable le sous-espace engendré par les $n+2$ premiers vecteurs de base s'identifie à $O(2,n)$, ce qui permet de définir un plongement j de $O(2,n)$ dans $O(2,n+1)$. Sur $\mathbf{Ein}_{n+1}$, $j(O(2,n))$ laisse stable un univers d'Einstein de codimension 1 que l'on note $\mathbf{Ein}_n$. le complémentaire de $\mathbf{Ein}_n$ dans $\mathbf{Ein}_{n+1}$ est conformément équivalent à $\mathbf{AdS}_{n+1}$
Si la suite (g_k) est à distorsions bornées, alors $j(g_k)$ est également à distorsions bornées en tant que suite de $O(2,n+1)$. On appelle C^+ et C^- les cônes attracteurs et répulseurs de $j(g_k)$ dans $\mathbf{Ein}_{n+1}$. Dans l'espace des géodésiques de lumière de C^-, celles qui rencontrent $\mathbf{AdS}_{n+1}$ forment un ouvert dense. Ainsi, l'ensemble dynamiquement associé à $C^- \cap \mathbf{AdS}_{n+1}$ est C^+ tout entier. Il existe donc des points de $C^+ \cap \mathbf{AdS}_{n+1}$ dynamiquement associés à des points de $C^- \cap \mathbf{AdS}_{n+1}$. L'action sur $\mathbf{AdS}_{n+1}$ n'est donc pas propre.
Réciproquement, si (g_k) a une dynamique mixte ou à distorsions équilibrées,

alors il en va de même pour $j(g_k)$. Les cercles attracteurs et répulseurs de $j(g_k)$ sont dans $\mathbf{Ein}_n$, c'est à dire hors de $\mathbf{AdS}_{n+1}$. On applique alors le 1) et le 2) de la proposition 5.14 pour s'assurer que dans ce cas, l'action de $j(g_k)$ sur $\mathbf{AdS}_{n+1}$ est propre.

$\square$

Partie IV

Structures lorentziennes conformément plates

Chapitre 6

Structure géométrique sur une variété

6.1 Généralités sur les (G, X)-structures

Le contenu de ce chapitre est largement inspiré de [Go1] et [Th].

Dans l'esprit de Felix Klein, on a coutume de définir un modèle géométrique comme la donnée d'un couple (G, X) où X est une variété connexe simplement connexe et G un groupe de Lie agissant transitivement sur X. On demande de plus que l'action de G sur X soit *fortement effective*. Cela signifie que deux éléments de G dont l'action coïncide sur un ouvert de X sont en fait égaux.

Ayant introduit cette notion de *géométrie modèle*, il est naturel de s'intéresser aux variétés dont la géométrie locale est modelée sur celle d'un couple (G, X) comme ci-dessus. On peut formaliser ceci via la

Définition 6.1. *(G, X)-structure*

Une (G, X)-structure sur une variété M est la donnée:

(i) d'un recouvrement ouvert de M par des U_α.

(ii) d'une famille d'applications $\phi_\alpha : U_\alpha \to X$ qui sont des difféomorphismes sur leur image et telles que les applications de recollement $g_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ soient des restrictions d'éléments de G.

Etant donnée une géométrie modèle (G, X), le procédé le plus naturel pour obtenir des variétés munies de (G, X)-structures est de considérer des quotients X/Γ où Γ est un sous-groupe discret de G agissant proprement et librement sur X. De telles structures sont dites **complètes**.

Un autre procédé de construction consiste à trouver un ouvert Ω de X sur lequel un sous-groupe discret Γ de G agit proprement et librement. La variété Ω/Γ hérite alors d'une (G, X)-structure que l'on qualifie de **kleinienne**.

6.2 Exemples

Un grand nombre de structures géométriques familières relève du contexte des (G, X)-structures.

• Structures riemanniennes à courbure constante

Par un résultat classique, toute variété riemannienne à courbure constante est localement isométrique à $\mathbf{S}^n$, $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{H}^n$ (munis de leur métrique standard).

Ainsi, les variétés riemanniennes à courbure constante sont des $(O(n+1), \mathbf{S}^n)$-structures, des $(Is(\mathbf{R}^n), \mathbf{R}^n)$-structures ou des $(O(1,n), \mathbf{H}^n)$-structures selon que la courbure de la variété considérée est +1, 0 ou -1.

• Structures riemanniennes localement homogènes

Les variétés à courbure constante sont un cas particulier d'une classe plus vaste de structures géométriques: les structures riemanniennes localement homogènes.

Une variété riemannienne (X, g_X) est dite homogène lorsque l'action de son groupe d'isométries est transitive. Ainsi, toute variété homogène est de la forme G/H, avec G un groupe de Lie et H un sous-groupe compact de G.

Se donner une $(G, G/H)$-structure sur une variété M revient à se donner une métrique riemannienne sur M, localement isométrique à g_X.

Pour de tels exemples, les variétés compactes sont automatiquement complètes. On a en effet le

Théorème 6.2. *Soit (G, X) une géométrie modèle. On suppose que le stabilisateur d'un point sous l'action de G est compact. Alors toute variété compacte admettant une (G, X)-structure est complète.*

Remarque 6.3. *Dans les cas précédents, la complétude au sens des (G, X)-structures coïncide avec la complétude géodésique pour la métrique localement homogène considérée.*

• Structures riemanniennes conformément plates

Comme nous l'avons déjà vu, une structure riemannienne conformément plate sur une variété M consiste en la donnée d'une classe conforme de métriques riemanniennes qui soient toutes localement conformément équivalentes à la métrique plate sur $\mathbf{R}^n$.

En dimension $n \geq 3$, ceci revient en fait à se donner une $(O(1, n+1), \mathbf{S}^n)$-structure sur M.

Comme $\mathbf{S}^n$ est compacte, les structures conformément plates complètes sont rares: elles ne peuvent intervenir que sur des quotients de $\mathbf{S}^n$ par des sous-groupes finis de $O(1, n+1)$.

On sait construire de vastes classes de structures conformes plates sur des variétés compactes. Les plus célèbres sont les structures kleiniennes, obtenues comme quotient d'un ouvert $\Omega \subset \mathbf{S}^n$ par un sous-groupe discret Γ de $O(1, n+1)$ agissant proprement sur Ω.

• **Structures lorentziennes à courbure constante**

De manière analogue au cas riemannien, toute variété lorentzienne à courbure constante est localement isométrique à l'un des trois espaces $\mathbf{dS}^n$, $\mathbf{R}^{1,n-1}$ ou $\widetilde{\mathbf{AdS}_n}$. En d'autres termes, la donnée d'une métrique lorentzienne à courbure constante consiste en la donnée d'une $(O(1,n+1),\mathbf{dS}^n)$-structure, d'une $(Is(\mathbf{R}^{1,n-1}),\mathbf{R}^{1,n-1})$-structure ou d'une $(O(2,n-1),\widetilde{\mathbf{AdS}_n})$-structure, suivant que la courbure est $+1$, 0 ou -1.

Pour les variétés à courbure constante, la notion de complétude au sens des (G,X)-structures et de complétude au sens des géodésiques sont équivalentes. Toutefois, le fait qu'une variété lorentzienne compacte à courbure constante soit complète n'est pas du tout évident (c'est d'ailleurs faux en courbure variable). Ce résultat fut démontré en courbure nulle par Carrière, en courbure positive par Morill, et généralisé au cas de la courbure quelconque par Klingler, pour donner le

Théorème 6.4 (Complétude de Carrière-Klingler [Ca] [Kl]). *Une variété lorentzienne compacte à courbure constante est complète.*

Nous reviendrons plus en détail sur les structures à courbure constante dans le chapitre 8.

• **Structures lorentziennes conformément plates**

Ce sont les structures que nous allons étudier le plus en détail. Elles consistent en la donnée d'une classe conforme de métriques lorentziennes sur une variété M, toutes localement conformément équivalentes à la métrique plate de l'espace de Minkowski.

Du fait de l'existence d'une projection stéréographique de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$, une structure conformément plate sur M correspond à la donnée d'une $(\mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}}_n),\widetilde{\mathbf{Ein}}_n)$-structure.

A notre connaissance, les structures lorentziennes conformément plates ont été peu étudiées jusqu'à présent. Nous essaierons dans les chapitres suivants d'en donner quelques exemples.

6.3 Application développante et holonomie

Graphe d'une (G,X)-structure

La donnée d'une (G,X)-structure sur M fournit une famille de cocycles $g_{\alpha\beta}\in G$ correspondant aux applications de transition $\phi_\beta\circ\phi_\alpha^{-1}$.

Ces cocycles permettent de définir un fibré E au-dessus de M obtenu en recollant les ouverts $E_\alpha = U_\alpha\times X$ par les applications $\psi_{\alpha\beta}: E_\beta\cap E_\alpha\to E_\beta\cap E_\alpha$ définies par $\psi_{\alpha\beta}(u,x)=(u,g_{\alpha\beta}x)$. Le fibré E s'appelle **le graphe de la (G,X)-structure**.

Un tel fibré pour lequel les applications $g_{\alpha\beta}$ ne dépendent pas du point $u\in U_\alpha\cap U_\beta$ s'appelle un fibré plat, de fibre X et de groupe structurel G (ou plus succintement (G,X)-fibré plat). Nous en rappelons ci-dessous les propriétés essentielles.

Tout fibré plat est naturellement muni d'un feuilletage horizontal transverse aux fibres que l'on note $\mathcal{H}$. En effet, chaque E_α est feuilleté par les $U_\alpha \times \{x\}$ et les applications de recollement $\psi_{\alpha\beta}$ envoient feuilles sur feuilles. Choisissons un point m_0 de M et un point e_0 dans la fibre E_0 au dessus de M. Ce choix donne une identification de la fibre E_0 avec X et permet de définir un morphisme $\rho : \pi_1(M) \to G$, appelé **morphisme d'holonomie**, que l'on définit comme suit.

Pour tout lacet $\sigma : [0,1] \to M$ basé en m_0, et tout x dans la fibre E_0, il existe un unique remonté $\tilde{\sigma}_x : [0,1] \to E$ qui vérifie $\tilde{\sigma}_x(0) = x$ et qui soit contenu dans une feuille de $\mathcal{H}$. En identifiant E_0 avec X, on peut définir une application g_σ de X dans X donnée par $g_\sigma(x) = \tilde{\sigma}_x(1)$. Comme le feuilletage $\mathcal{H}$ admet transversalement une $(G,X)-$structure, g_σ s'avère être un élément de G qui, de plus, ne dépend que de la classe d'homotopie de σ. On pose alors $\rho([\sigma]) = g_\sigma$.

En fait, le morphisme d'holonomie détermine entièrement un fibré plat. Pour s'en convaincre, on considère $\tilde{M}$, le revêtement universel de M, comme l'ensemble des classes d'homotopie de chemins issus de m_0 et on définit:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} \times X & \to & E \\ ([\sigma], x) & \mapsto & \tilde{\sigma}_x(1) \end{array}$$

où $\tilde{\sigma}_x$ est l'unique relevé horizontal du chemin σ qui vaille x en 0 (on identifie toujours X à E_0).

On remarque que si $\gamma \in \Gamma = \pi_1(M)$ et $[\sigma'] = \gamma.[\sigma]$, alors $\tilde{\sigma}'_{\rho(\gamma).x}(1) = \tilde{\sigma}_x(1)$.

Ainsi, E est obtenu par quotient du fibré trivial $\tilde{M} \times X$ pour l'action diagonale de Γ donnée par $\gamma.(\tilde{m}, x) = (\gamma.\tilde{m}, \rho(\gamma).x)$. On note $E = \tilde{M} \times X/\Gamma_\rho$.

Couples développants

Lorsqu'un fibré plat $E \to M$ est le graphe d'une $(G,X)-$structure sur M, il hérite d'une section globale $f : M \to E$ transverse aux feuilles de $\mathcal{H}$. Cette section est obtenue par recollement des sections locales $f_\alpha : U_\alpha \to E_\alpha$ données par $f_\alpha(u) = (u, \phi_\alpha(u))$. Par ce qui précède, la section $f : M \to E$ se remonte en une section $\tilde{f} : \tilde{M} \to \tilde{M} \times X$, équivariante pour l'action de Γ_ρ. Mais une telle section est donnée par le graphe d'une application $\delta : \tilde{M} \to X$ qui vérifie $\delta \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \delta$. Le fait que f soit transverse à la distribution horizontale assure que δ est un difféomorphisme local.

Définition 6.5. *On dit que δ est l'application développante de la (G,X)-structure et que ρ est son morphisme d'holonomie.*

Remarque 6.6. *La construction que l'on vient de faire n'est pas tout à fait canonique. Elle dépend en effet du choix d'un point e_0 dans E_0. Si l'on remplace e_0 par un autre point $g.e_0$, alors le morphisme d'holonomie devient $\rho' = g\rho g^{-1}$ et l'application développante $\delta' = g.\delta$*

Définition 6.7. *Un couple (δ, ρ) où δ est un difféomorphisme local de $\tilde{M}$ dans X et ρ un élément de $Hom(\pi_1(M), G)$ vérifiant , pour tout $\gamma \in \pi_1(M)$, la relation d'équivariance $\delta \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \delta$, s'appelle couple développant.*

Nous venons de voir que tout (G, X)-fibré plat au-dessus de M muni d'une section transverse au feuilletage horizontal définissait un couple développant (ou plus exactement une G-orbite de tels couples).

Réciproquement, la donnée d'un couple développant (δ, ρ) permet de construire un (G, X)-fibré plat au-dessus de M muni d'une section transverse au feuilletage horizontal. Le fibré est simplement le quotient $E_\rho = \tilde{M} \times X/\Gamma_\rho$. Le graphe de δ fournit une section $\tilde{f} : \tilde{M} \to X$ transverse au feuilletage horizontal. Comme $\tilde{f}$ est équivariante pour l'action de Γ_ρ, elle passe au quotient en une section $f : M \to E_\rho$, elle aussi transverse au feuilletage horizontal.

D'autre part, le couple (δ, ρ) permet de rapatrier la (G, X)-structure triviale de X en une (G, X)-structure sur M dont le graphe est précisément E_ρ.

Il y a donc équivalence entre:

• La donnée d'une (G, X)-structure sur M.

• La donnée d'un (G, X)-fibré plat au dessus de M, muni d'une section transverse aux fibres.

• La donnée d'un couple développant (δ, ρ) sur M.

6.4 Principe de déformation des (G, X)-structures

Etant donné un morphisme $\rho \in Hom(\pi_1(M), G)$, on peut se demander si ρ est le morphisme d'holonomie d'une (G, X)-structure sur la variété M. Lorsque M est compacte, le théorème suivant apporte une réponse partielle:

Théorème 6.8 (Principe de déformation). *Soit M une variété compacte munie d'une (G, X)-structure de morphisme d'holonomie ρ_0. Il existe alors un voisinage $\mathcal{U}$ de ρ_0 dans $Hom(\pi_1(M), G)$ tel que tout ρ de $\mathcal{U}$ est réalisé comme l'holonomie d'une (G, X)-structure sur M.*

Preuve : On considère le graphe E_{ρ_0} de la (G, X)-structure de départ et l'on appelle f_0 la section transverse au feuilletage horizontal. Rappelons que E_{ρ_0} est obtenu comme le quotient $\tilde{M} \times X/\Gamma_{\rho_0}$. Lorsque $\rho \in Hom(\pi_1(M), G)$ est suffisamment proche de ρ_0, alors les fibrés E_{ρ_0} et $E_\rho = \tilde{M} \times X/\Gamma_\rho$ sont difféomorphes. On peut les voir comme un seul et même fibré E muni de deux feuilletages $\mathcal{H}_{\rho_0}$ et $\mathcal{H}_\rho$. Lorsque ρ est très proche de ρ_0, les feuilles de $\mathcal{H}_\rho$ sont C^∞ proches de celles de $\mathcal{H}_{\rho_0}$, de sorte que si $f_0 : M \to E$ est transverse à $\mathcal{H}_{\rho_0}$, elle est également transverse à $\mathcal{H}_\rho$. Par conséquent, pour ρ proche de ρ_0, E_ρ est muni d'une section transverse au feuilletage horizontal. C'est donc le graphe d'une (G, X)-structure sur M admettant ρ pour holonomie.

□

Chapitre 7

Sur l'espace de Teichmüller de l'univers d'Einstein

Ce chapitre va être consacré à l'étude des structures conformément plates sur l'univers d'Einstein. Il peut paraître un peu incongru de parler de différentes structures sur un espace sensé être universel. C'est en tout cas un phénomène nouveau par rapport au contexte riemannien puisque dans ce cas, il existe une unique structure conformément plate sur $\mathbf{S}^n$. En fait, l'existence d'un tel "espace de Teichmüller" est tout simplement due au fait que $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$ n'est pas simplement connexe.
La majeure partie de notre travail va consister à prouver le:

Théorème 7.1. *Étant donnée une structure lorentzienne conformément plate sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$, alors l'application développante associée à cette structure est injective. En d'autres termes, toute structure conformément plate sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$ est kleinienne.*

Cet objectif peut sembler quelque peu modeste, mais l'étude des structures lorentziennes conformément plates s'avère souvent délicate. L'exemple des modèles de trous-noirs BTZ en gravité 2+1, est une bonne illustration de ces difficultés. Ces espaces sont obtenus comme quotients d'ouverts Ω de $\widetilde{\mathbf{AdS}}_3$ (donc de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_3$) par des sous groupes d'isométries qui sont monogènes. Les nombreuses publications autour de ce thème (voir [BTZ1] [BTZ2]) témoignent que même dans ce cas a priori élémentaire, la géométrie de l'ouvert Ω, ainsi que celle du quotient sont difficiles à comprendre.
Le théorème 7.1 nous garantissant que toute structure conformément plate sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$ s'obtient comme quotient d'un ouvert Ω de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ par un groupe monogène $\Gamma \subset \mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}}_n)$, la compréhension complète de ces structures revient à décrire tous les Ω et les Γ possibles. Nous ne mènerons pas cette tâche à son terme mais nous donnons en fin de chapitre une large liste d'exemples (que nous pensons d'ailleurs être exhaustive).

Notations Dans tout ce qui suit, M va désigner le produit $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$ muni d'une structure lorentzienne conformément plate. On appelle $\tilde{M}$ le revêtement universel de M et $\delta : \tilde{M} \to \widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ l'application développante associée à la structure conformément plate considérée. L'ouvert image $\delta(\tilde{M})$ est noté

Ω. Le groupe fondamental de M est un groupe monogène $\Gamma = \langle\gamma\rangle$. On désigne par K un compact qui soit domaine fondamental pour l'action de Γ sur $\tilde{M}$. Le groupe d'holonomie H est lui aussi monogène. Il est engendré par un élément h de $\mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}}_n)$ vérifiant $\delta \circ \gamma = h \circ \delta$.
Nous désignerons par π la projection de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ sur $\mathbf{Ein}_n$ et par $\overline{h}$ (resp. $\overline{H}$) la projection de h (resp. H) sur $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$.

Remarque 7.2. *L'application développante d'une (G, X)-structure sur une variété M étant la même pour tous les revêtements finis de M, nous nous autoriserons tout au long de la preuve à remplacer H par un sous-groupe d'indice fini.*

7.1 Application développante et dynamique de l'holonomie

La preuve du théorème 7.1 va s'appuyer en grande partie sur l'étude du lieu où l'action de l'holonomie n'est pas équicontinue. Ces points sont particulièrement importants pour comprendre l'application développante d'une (G, X)-structure sur une variété compacte. Comme nous allons le voir, ils permettent de localiser la frontière de l'ouvert Ω. D'autre part, on comprend grâce à eux les parties de $\tilde{M}$ où l'application δ réalise un revêtement sur son image. Dans le cas d'une holonomie monogène, ce lieu de non-équicontinuité sera suffisamment simple pour nous permettre de conclure. Nous commençons donc par établir des résultats généraux, dont certains sont tirés de [M], qui n'utilisent en rien la spécificité de la géométrie de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$.

Définition 7.3 (équicontinuité). *Soit H un groupe de difféomorphismes d'une variété X. On dit que l'action de H est équicontinue en un point $x \in X$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées:*
(i) à chaque fois qu'une suite (h_i) de H est telle que $(h_i(x))$ possède une limite y_∞ dans X, alors $h_i(x_i)$ tend vers y_∞ pour toute suite (x_i) convergeant vers x.
(ii) à chaque fois qu'une suite (h_i) de H est telle que $(h_i(x))$ tend vers l'infini, alors $h_i(x_i)$ tend vers l'infini pour toute suite (x_i) convergeant vers x.
Bien sûr, la condition (ii) n'intervient que si X est non compacte.

Définition 7.4 (Action cocompacte). *Soit H un groupe de difféomorphismes d'une variété X. On dit que l'action de H est cocompacte s'il existe un compact $K \subset X$ de sorte que $\bigcup_{h \in H} h(K) = X$.*

Lemme 7.5. *Soit H un groupe d'homéomorphismes d'un espace compact X. On suppose que H laisse stable un ouvert strict U de X sur lequel il agit cocompactement. Alors l'action de H n'est équicontinue en aucun point de la frontière ∂U.*

Preuve :

On choisit un point x_∞ dans ∂U et une suite (x_i) de points de U qui tend vers x_∞. Par cocompacité de l'action de H, on peut trouver une suite h_i d'éléments de H pour laquelle $h_i(x_i)$ reste dans un compact K de U. Mais d'un autre côté, par compacité de X donc de ∂U, et quitte à considérer une suite extraite, $h_i(x_\infty)$ converge vers z_∞ dans ∂U. Ainsi, comme $z_\infty \notin K$, l'action n'est pas équicontinue en x_∞. □

Définition 7.6. *Soit δ un difféomorphisme local d'une variété X dans une variété Y. On dit qu'un point y de Y est recouvert régulièrement par δ s'il existe un voisinage U de y qui soit précompact dans Y et tel que toutes les composantes connexes de $\delta^{-1}(U)$ soient précompactes dans X.*

Rappelons le

Lemme 7.7. *Si δ est un difféomorphisme local d'une variété X dans une variété Y et que tous les points de $\delta(X)$ sont recouverts régulièrement par δ, alors δ est un revêtement de X sur son image.*

On peut à présent démontrer le

Lemme 7.8. *Soit U un ouvert de $\delta(\tilde{M})$ en chaque point duquel H agisse équicontinûment. On désigne par $\mathcal{U}$ une composante connexe de $\delta^{-1}(U)$. Alors δ réalise un revêtement de $\mathcal{U}$ sur $\delta(\mathcal{U})$.*

Preuve :

On désigne par $\delta_{\mathcal{U}}$ la restriction de δ à $\mathcal{U}$. On va montrer que tout point y de $\delta(\mathcal{U})$ est recouvert régulièrement par $\delta_{\mathcal{U}}$.

Si ce n'est pas le cas, il existe une suite de boules $B_k = B(y, r_k)$ (pour une métrique riemanienne quelconque de $\delta(\mathcal{U})$) avec $\overline{B}_k \subset \delta(\mathcal{U})$ et r_k tendant vers 0, telles que ${\delta_{\mathcal{U}}}^{-1}(B_k)$ possède une composante $\mathcal{B}_k$ non précompacte dans $\mathcal{U}$. Notons qu'alors, $\mathcal{B}_k$ n'est pas non plus précompacte dans $\tilde{M}$. En effet, cela impliquerait qu'il existe une suite de points de $\mathcal{B}_k$ qui converge vers un point b_∞ de $\partial\mathcal{U}$. Mais alors l'image $\delta(b_\infty)$ devrait appartenir à la fois à $\delta(\overline{\mathcal{B}}_k) \subset \overline{B}_k$ et à $\partial(\delta(\mathcal{U}))$ ce qui n'est pas compatible avec le fait que $\overline{B}_k \subset \delta(\mathcal{U})$.

On choisit maintenant pour chaque k un x_k dans $\mathcal{B}_k$ de sorte que la suite (x_k) tende vers l'infini dans $\tilde{M}$. On remarque que $\delta(x_k)$ tend vers y. Par compacité de M, il existe une suite γ_k dans Γ telle que $\gamma_k(x_k)$ tend vers un point x_∞ dans $\tilde{M}$. On note $z = \delta(x_\infty)$. On se donne un voisinage $\mathcal{V}$ de x_∞ qui soit précompact dans $\tilde{M}$ et tel que δ soit un difféomorphisme de $\mathcal{V}$ sur son image que l'on note V.

On utilise à présent l'équicontinuité. Comme $\delta(\gamma_k(x_k)) = h_k(\delta(x_k))$ tend vers z, et que $\delta(x_k)$ tend vers y, il vient que $h_k(y)$ tend aussi vers z. Toujours grâce à l'équicontinuité, cela garantit que pour k suffisamment grand $\overline{h_k(B_k)} \subset V$. Maintenant, la composante de $\delta^{-1}(h_k(B_k)$ contenant $\gamma_k(x_k)$ est incluse dans $\mathcal{V}$ donc est précompacte. Mais cette composante n'est autre que $\gamma_k(\mathcal{B}_k)$. On conclut que $\gamma_k(\mathcal{B}_k)$ est précompact dans $\tilde{M}$ alors que $\mathcal{B}_k$ ne l'est pas: une contradiction.

□

On en déduit aisément le

Corollaire 7.9. *Tout point de Ω où l'action de H est équicontinue est recouvert régulièrement par δ.*

Enfin, on conclut par le résultat suivant qui nous sera bien utile:

Lemme 7.10. *Étant donnée une (G, X)-structure sur une variété compacte M, supposons que le groupe d'holonomie H centralise un flot ϕ^t sur X. Alors il existe un flot complet $\tilde{\phi}^t$ sur $\tilde{M}$ vérifiant $\delta \circ \tilde{\phi}^t = \phi^t \circ \delta$. En particulier l'image de $\tilde{M}$ par δ est laissée stable par ϕ^t.*

Preuve :

On appelle Z le champ de vecteurs associé au flot ϕ^t. Ce champ est laissé invariant par le groupe d'holonomie. Comme l'application développante est un difféomorphisme local, on peut grâce à elle rapatrier le champ Z en un champ Y sur $\tilde{M}$. L'invariance de Z par H implique l'invariance de Y par le groupe fondamental de M. Ainsi, le flot engendré par Y, noté $\tilde{\phi}^t$ passe au quotient en un flot sur M, donc est complet. La relation d'équivariance $\delta \circ \tilde{\phi}^t = \phi^t \circ \delta$ provient du fait que la différentielle de δ envoie Y sur Z.

□

7.2 Cas où l'action de l'holonomie est propre: structures complètes

Nous commençons par montrer que lorsque l'action de l'holonomie est propre, alors la structure sur M est *complète*, comme le montre la

Proposition 7.11. *Si le groupe H agit proprement sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$, alors la variété M est, à revêtement fini près, le quotient $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n/H$.*

Preuve :

On profite de cette preuve pour démontrer le lemme suivant qui nous sera à nouveau utile par la suite.

Lemme 7.12. *Supposons qu'un groupe H agisse par homéomorphismes sur un espace topologique séparé X et que cette action soit propre. Alors H n'agit cocompactement sur aucun sous-espace strict $X' \subset X$ qui soit dense dans X.*

Preuve : Comme l'action de H sur X est propre, on peut considérer l'espace quotient de X par H que l'on note $\hat{X}$. C'est un espace topologique séparé. De même, l'espace quotient de X' par H est un espace séparé et compact $\hat{X}'$. De plus, on doit avoir que $\hat{X}'$ est dense dans $\hat{X}$ et par conséquent $\hat{X}' = \hat{X}$. Ceci contredit le fait que X' est un sous-espace strict de X. □

L'action de H est propre et cocompacte sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ Donc elle est également propre et cocompacte sur $\overline{\Omega}$. Mais d'après le lemme, elle ne peut être cocompacte sur Ω que si $\Omega = \overline{\Omega}$, c'est-à-dire $\Omega = \widetilde{\mathbf{Ein}}_n$. On appelle N la variété quotient $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n/H$. L'application développante induit un difféomorphisme local $\overline{\delta}$ de M sur N. Or un difféomorphisme local entre variétés compactes est un revêtement fini. On en déduit que δ est lui-même un revêtement et comme $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ est simplement connexe, δ est un difféomorphisme de $\tilde{M}$ sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$, ce qui achève la preuve. □

La structure standard sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ n'est pas la seule structure complète. Nous en donnerons beaucoup d'autres exemples en fin de chapitre (Exemple 1).

7.3 Cas des structures non complètes

Nous supposons désormais que l'action de H sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ n'est pas propre, ou de manière équivalente que la structure que nous considérons n'est pas complète.

On commence par remarquer que le lieu des points où H agit équicontinûment se déduit facilement de celui où $\overline{H}$ agit équicontinûment. En effet, on montre facilement le:

Lemme 7.13. *Si $\overline{h}$ agit équicontinûment en un point x de $\mathbf{Ein}_n$, alors h agit équicontinûment en tout point $\tilde{x}$ tel que $\pi(\tilde{x}) = x$.*

Proposition 7.14. *Si le groupe H n'est pas l'holonomie d'une structure complète, alors H fixe un cône de lumière dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$.*

Preuve : Notons pour commencer que le groupe $\overline{H}$ (projeté de H sur $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$) n'est pas précompact dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$. En effet, si c'était le cas, il agirait équicontinûment sur $\mathbf{Ein}_n$, et H ferait de même sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ par le lemme 7.13. L'application développante serait alors un difféomorphisme sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ et on serait en présence d'une structure standard.
Il existe donc dans $\overline{H}$ une suite $(\overline{h}^{n_k})$ qui tend simplement vers l'infini. Les éléments dynamiques de cette suite sont alors fixés par $\overline{h}$.
Si $\overline{h}$ admet un point fixe dans $\mathbf{Ein}_n$, il n'y a rien à démontrer.
Si $\overline{h}$ n'admet pas de point fixe, la suite $(\overline{h}^{n_k})$ est nécessairement à distorsions équilibrées. Dans ce cas $\overline{h}$ fixe deux géodésiques de lumières $\overline{\Delta}^+$ et $\overline{\Delta}^-$. L'élément h fixe Δ^+ et Δ^-, les remontées dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ de $\overline{\Delta}^+$ et $\overline{\Delta}^-$. Son action sur ces deux géodésiques se fait par un élément de $\widetilde{PSL_2(\mathbf{R})}$ et sans point fixe, c'est-à-dire par translation. Mais dans ce cas, le groupe H agit proprement sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ et on a affaire à une structure complète. $\square$

Les sommets du cône fixé par H constituent une famille de points (i_j) et quitte à considérer un sous-groupe d'indice fini de H, on peut supposer que h fixe individuellement les (i_j).
On se fixe une fois pour toutes une projection stéréographique s par rapport à la famille (i_j), ce qui permet de voir h comme un élément du groupe conforme de l'espace de Minkowski. On l'écrit $h = \lambda L_h + T$ où $L_h \in O(1, n-1)$ et $T \in \mathbf{R}^n$. Soit $\overline{C}$ la projection sur $\mathbf{Ein}_n$ du cône fixé par H. Il existe une projection stéréographique $\overline{s}$ qui identifie le complémentaire de $\overline{C}$ avec $\mathbf{R}^{1,n-1}$ et qui vérifie $\overline{s} \circ \pi = s$ (ainsi $\overline{C}$ apparaît comme le "cône à l'infini" de l'espace de Minkowski). On appelle i le sommet du cône $\overline{C}$. L'élément $\overline{h}$ lu par la projection $\overline{s}$ s'écrit également $\lambda L_h + T$. Réciproquement, tout élément de $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1})$ se voit comme un élément de $\mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}}_n)$ grâce à s et comme un élément de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ grâce à $\overline{s}$.
Quitte à considérer un sous-groupe d'indice 2 de H, on supposera que $\lambda > 0$

et que H préserve l'orientation chronologique de $\mathbf{R}^{1,n-1}$, c'est à dire que L_h n'intervertit pas les composantes futures et passées du cône de lumière issu de l'origine.

Nous allons à présent nous intéresser au lieu des points où l'action de H est équicontinue. La clef de la démonstration du théorème 7.1 va être la proposition suivante, qui assure que le lieu des points où H n'agit pas équicontinûment est relativement restreint, et qui de plus prouve que H centralise soit un flot de translations, soit un flot d'homothéties. En utilisant le lemme 7.10 et la dynamique de ces flots (qui a été étudiée au chapitre 5), on aura un contrôle sur l'ouvert Ω.

Proposition 7.15. *Soit Λ le lieu des points où l'action de H n'est pas équicontinue. Alors on est dans l'un des trois cas suivants:*
a) $\Lambda \subset C$ où C est un cône de lumière de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$.
Le groupe H laisse le cône C invariant. De plus, il centralise un flot τ^t de Conf($\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$) qui agit par translations de type temps ou lumière sur chaque composante de Minkowski constituant le complémentaire de C dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$.
b) $\Lambda \subset C^+ \cup C^-$ avec C^+ et C^- deux cônes de lumière dont l'intersection est une géodésique de lumière.
Le groupe H laisse les cônes C^+ et C^- invariants. De plus, il centralise un flot τ^t de Conf($\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$) qui agit par translations de type temps ou lumière sur chaque composante de Minkowski constituant le complémentaire de C^+ dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$.
c) $\Lambda \subset C^+ \cup C^-$ avec C^+ et C^- deux cônes de lumière dont l'intersection est une famille dénombrable de sphères riemanniennes de codimension 2.
Le groupe H laisse les cônes C^+ et C^- invariants. De plus, il centralise un flot τ^t de Conf($\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$) qui agit par homothéties sur chaque composante de Minkowski constituant le complémentaire de C^+ dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$.

Preuve : Par les projections stéréographiques s et $\overline{s}$, h et $\overline{h}$ s'identifient à $\lambda L_h + T$. On peut supposer que $0 < \lambda \leq 1$.
On fait une étude cas par cas.

1) *Cas où $\lambda \neq 1$*

i) *Cas où L_h est elliptique*
Quitte à conjuguer h par un élément de Conf($\mathbf{R}^{1,n-1}$), on peut supposer que h est linéaire, c'est-à-dire $T = 0$. Le groupe H centralise donc un flot d'homothéties. La suite $(\overline{h}^k)$ tend simplement vers l'infini et admet une dynamique à distorsion bornée (voir le paragraphe 5.4.2). On appelle $\overline{C}^+$ et $\overline{C}^-$ les cônes attracteurs et répulseurs (qui sont en fait le cône issu de l'origine et le cône à l'infini de $\mathbf{R}^{1,n-1}$). Le groupe H fixe les remontés C^+ et C^- de $\overline{C}^+$ et $\overline{C}^-$ et par le lemme 7.13, il agit équicontinûment sur leur complémentaire. On est donc dans le cas c).

ii) *Cas où L_h est parabolique*

Là encore, quitte à conjuguer h par un élément de $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1})$, on peut le supposer linéaire. Le groupe H centralise donc un flot d'homothéties. D'autre part, la suite $(\overline{h}^k)$ tend simplement vers l'infini et admet une dynamique mixte. Là encore, les cônes attracteurs et répulseurs $\overline{C}^+$ et $\overline{C}^-$ sont le cône issu de l'origine et le cône à l'infini de $\mathbf{R}^{1,n-1}$. Les remontés C^+ et C^- de ces deux cônes sont fixés par H et l'action de H est équicontinue sur leur complémentaire. On est donc dans le cas c).

iii) *Cas où L_h est loxodromique*
Deux sous-cas sont à envisager. On commence par celui où L_h n'admet aucune valeur propre de module λ. Dans ces conditions, $\overline{h}$ est conjugué dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ à un élément linéaire, donc centralise un flot d'homothéties. D'autre part, la suite $(\overline{h}^k)$ tend simplement vers l'infini et admet une dynamique mixte. Les pôles attracteurs et répulseurs $\overline{p}^+$ et $\overline{p}^-$ ne sont pas sur une même géodésique de lumière, donc les cônes $\overline{C}^+$ et $\overline{C}^-$ s'intersectent selon une sphère riemannienne de codimension 2. Ainsi, le groupe H préserve les remontés C^+ et C^- de ces cônes et agit équicontinûment sur leur complémentaire. On est dans le cas c).
Si maintenant L_h admet une valeur propre de module λ, alors L_h fixe un vecteur isotrope u. En particulier, H centralise un flot de translations de type lumière. Si le facteur translation T a une composante nulle selon u, alors $\overline{h}$ est conjugué dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1})$ à λL_h, et admet une géodésique de points fixes sur $\overline{C}$. On conclut alors grâce au lemme suivant

Lemme 7.16. *Si H n'est pas l'holonomie d'une structure complète, alors $\overline{h}$ ne peut pas avoir une géodésique de lumière constituée de points fixes.*

Preuve : On suppose que $\overline{h}$ possède une géodésique de lumière $\overline{\Delta}$ constituée de points fixes. On note Δ le relevé de $\overline{\Delta}$ à $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$. L'action de h sur Δ se fait soit par translation, soit par l'identité. Dans le premier cas, H agit proprement sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ ce qui est exclu par les hypothèses.
Dans le second cas, comme l'action de H doit être cocompacte sur $\Delta \cap \Omega$, on observe que Ω ne rencontre pas Δ. Or on sait depuis la section 4.6 que le complémentaire de Δ dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ est difféomorphe au produit $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$. Mais H agissant par l'identité sur le facteur $\mathbf{R}$, il ne peut agir cocompactement sur aucun ouvert de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$. $\square$

Enfin si T a une composante non nulle selon u, un petit calcul montre que $(\overline{h}^k)$ tend simplement vers l'infini, avec une dynamique mixte de pôles p_∞ et q_∞ disjoints mais situés sur une même géodésique de lumière (en fait p_∞ est le point i, sommet du cône $\overline{C}$). On est alors dans le cas b) de la proposition.

2) *Cas où $\lambda = 1$*

i) *Cas où L_h est loxodromique*
Vu comme élément de $O(2,n)$, $\overline{h}$ possède deux valeurs propres μ et μ^{-1} différentes de 1 en module (ce sont celles de L_h) dont les vecteurs propres

associés sont non orthogonaux. Les autres valeurs propres sont de module 1. En d'autres termes, il existe une autre projection stéréographique $\overline{s}'$ dans laquelle $\overline{h}$ s'écrit $\mu A + T$ avec A parabolique ou elliptique dans $O(1,n)$. On est ramené aux cas 1)i) ou 1)ii).

ii) *Cas où L_h est parabolique*
Comme L_h fixe un vecteur de type lumière, on peut affirmer que H centralise un flot τ^t de translations de type lumière. D'autre part, si $\overline{h}$ admet un point fixe sur $\mathbf{R}^{1,n-1}$, alors il admet une géodésique lumière de points fixes et on peut conclure par le lemme 7.16.
De même, si $\overline{h}$ admet un point fixe q_∞ sur le cône $\overline{C}$ qui ne soit pas le point i, alors il agit sur la géodésique de lumière reliant i et q_∞ comme un élément unipotent de $PSL_2(\mathbf{R})$ et en fixant deux points. On en déduit qu'il agit par l'identité et on obtient une absurdité grâce au lemme 7.16.
Enfin, si $\overline{h}$ fixe une droite de type lumière de $\mathbf{R}^{1,n-1}$, il va fixer le point d'intersection q_∞ de cette droite avec le cône à l'infini et on est dans le cas précédent. La conclusion de tout ceci est que $\overline{h}$ admet i pour seul point fixe. D'autre part, il fixe une unique géodésique de lumière située sur le cône à l'infini. Par conséquent tous les éléments dynamiques des suites de $\overline{H}$ (qui doivent être fixés par $\overline{h}$) sont inclus dans le cône à l'infini. Si C désigne le relevé de ce cône à $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$, l'action de H est équicontinue en dehors de C. On est donc dans le cas a).

iii) *Cas où L_h est elliptique*
Tout élément elliptique de $O(1,n-1)$ fixe un vecteur de type temps (ceci est la traduction algébrique du fait qu'un groupe compact d'isométries de l'espace hyperbolique fixe un point). Ainsi dans ce cas, le groupe $\overline{H}$ centralise un flot τ^t constitué de translations de type temps. Les éléments dynamiques d'une suite $(\overline{h}^{n_k})$ qui tend simplement vers l'infini doivent donc être fixés par τ^t.

Or une translation de type temps admet un unique cône de lumière invariant, qui est le cône à l'infini, et toutes les géodésiques de lumière invariantes par τ^t sont sur ce cône. Par conséquent tous les éléments dynamiques des suites de $\overline{H}$ sont inclus dans le cône à l'infini. On conclut comme dans le cas précédent qu'en dehors d'un cône C, l'action de H est équicontinue. On est donc dans le cas a). □

7.4 Géométrie des différents cas

7.4.1 Cas a) : Λ *est inclus dans un unique cône C*

Le complémentaire du cône C est une réunion dénombrable de composantes de Minkowski M_j que le groupe H laisse stables individuellement (voir figure 7.1).

Précisons la frontière commune entre deux composantes M_j et M_k.
-Si $j = k-1$ (resp. $j = k+1$), cette frontière est la réunion des points i_j, i_k et du cylindre I_j (resp. I_k).

-Si $j = k-2$ (resp. $j = k+2$), alors cette frontière est réduite au point i_{j+1} (resp. i_{j-1}).
En dehors de ces deux cas, $\overline{M}_j$ et $\overline{M}_k$ sont disjoints.

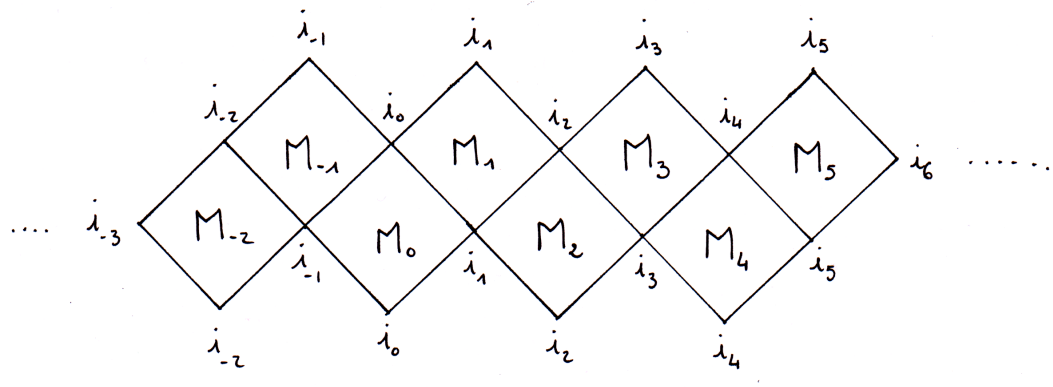

Figure 7.1: le cas a)

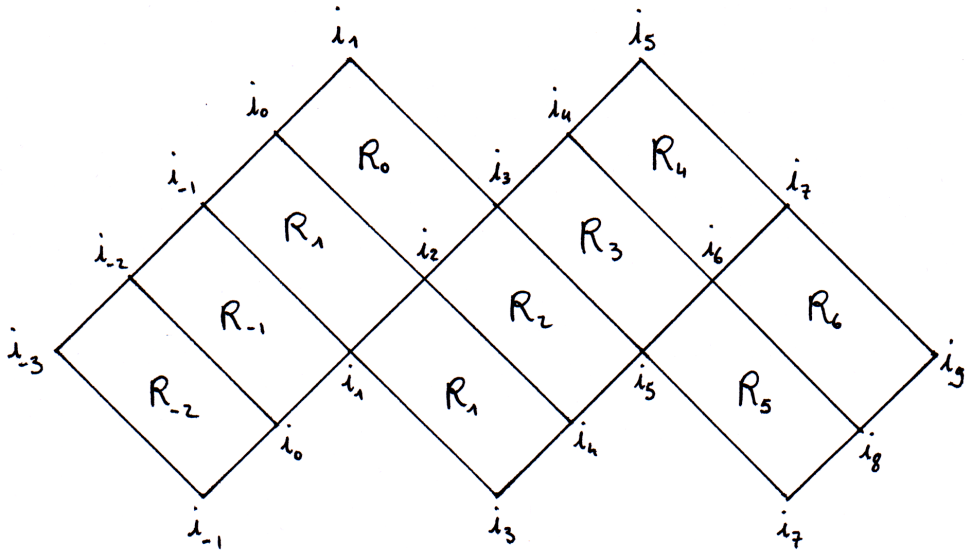

Figure 7.2: le cas b)

7.4.2 Cas b) : *C^+ et C^- se coupent le long d'une géodésique de lumière Δ*

On commence par classer les i_j^+ et i_j^- par ordre chronologique pour obtenir une nouvelle suite de points i_j fixés par H. Le complémentaire des cônes C^+ et C^- dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ est une réunion de composantes connexes qui sont toutes difféomorphes à $\mathbf{R}^n$. On appelle ces composantes R_j et on les numérote comme sur la figure 7.2.

La frontière de chaque composante R_j est la réunion des points i_{j-1}, i_j, i_{j+1} et i_{j+2} et des cylindres I_{j-1} I_j et I_{j+1}. Plus précisément:

- si $j = k - 1$, la frontière commune entre R_j et R_k est la réunion des points i_j, i_{j+2} et du cylindre I_j.

- si $j = k - 2$, la frontière commune entre R_j et R_k est la réunion des points i_{j+1}, i_{j+2} et du segment de géodésique de lumière joignant i_{j+1} et i_{j+2} que l'on note S_{j+1} (on parle du segment ouvert).

-si $j = k - 3$, la frontière commune entre R_j et R_k est réduite au point i_{j+2}.

7.4.3 Cas c) : *C^+ et C^- se coupent selon une famille de sphères riemaniennes de codimension 2*

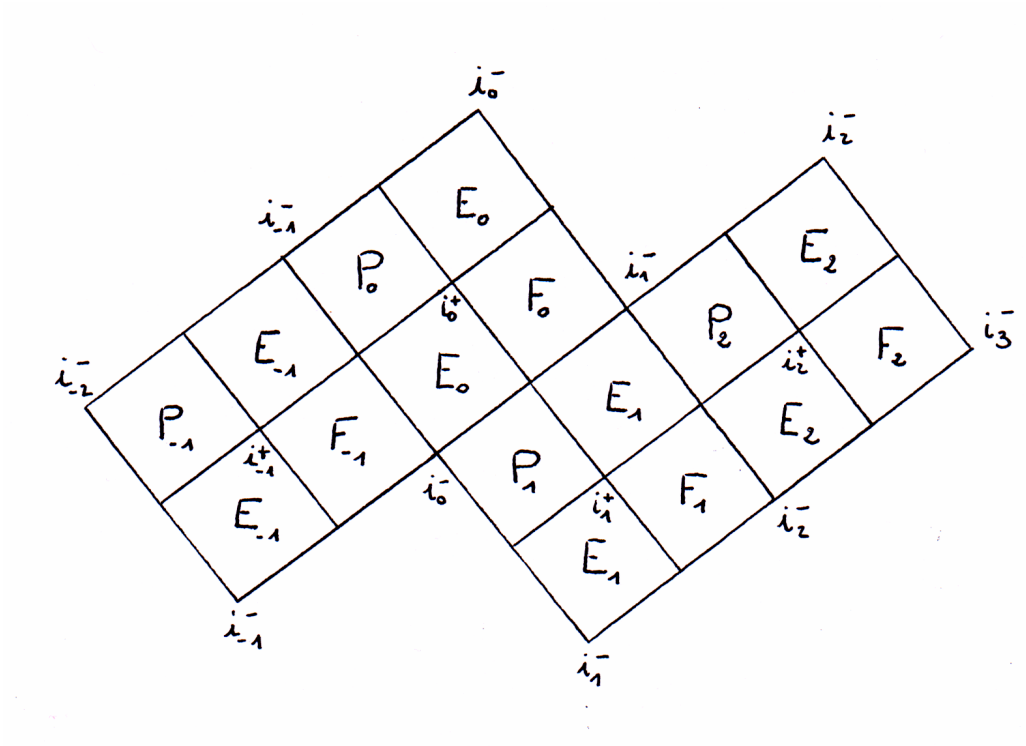

Figure 7.3: le cas c)

Les composantes connexes du complémentaire de C^+ et C^- se divisent

en trois familles P_j,F_j et E_j disposées comme l'indique la figure 7.3.
Chaque composante P_j et F_j est difféomorphe à $\mathbf{R}^n$ (il s'agit en fait de l'intérieur du demi-cône supérieur dans l'espace de Minkowski). En revanche, les composantes E_j ne sont pas simplement connexes. Elles sont conformément équivalentes à l'ensemble des vecteurs de type espace dans Minkowski. Ainsi, chaque E_j est difféomorphe à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^{n-1}$.

7.5 Suite de la démonstration du théorème 7.1

7.5.1 Idée générale de la preuve

La première partie de la preuve consiste à essayer de dégager les propriétés communes aux différents cas. On a à chaque fois une famille dénombrable de composantes X_j laissées invariantes par l'holonomie. Le but est de démontrer dans chaque cas que l'application développante δ est un difféomorphisme de chaque composante connexe de $\delta^{-1}(X_j)$ sur X_j. C'est relativement aisé dans les cas a) et b) car les X_j sont simplement connexes et on peut appliquer les résultats de la section 7.1. C'est plus délicat pour le cas c) où certaines composantes X_j ne sont pas simplement connexes.
Ensuite, on prouve l'injectivité de δ sur les composantes connexes des images réciproques de C (resp. C^+ et C^-). Dans chaque cas, l'outil fondamental est l'existence des flots τ^t (de translations ou d'homothéties selon les cas) qui centralisent H. Le lemme 7.10 et le fait qu'on comprenne bien l'action de τ^t sur les cônes C^+ et C^- permet de conclure. La fin de la démonstration consiste dans chaque cas à "recoller" ces résultats partiels d'injectivité en une propriété d'injectivité globale.

7.5.2 Partie commune aux trois cas

Soit X_j une famille d'ouverts connexes précompacts de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ stables par H. On suppose que ces ouverts X_j vérifient l'hypothèse suivante:

(H_1) *Tout point de* $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ *possède des voisinages connexes arbitrairement petits qui ne rencontrent qu'un nombre fini de* X_j *et intersectent chacun d'entre eux selon un connexe.*

Cette hypothèse est en particulier vérifiée par toutes les composantes M_j,R_j, P_j,F_j et E_j ci-dessus. On montre alors:

Lemme 7.17. *L'ouvert* Ω *ne rencontre qu'un nombre fini de* X_j.

Preuve : Comme h laisse stables tous les X_j et que $\bigcup_{h\in H} h(\delta(K)) = \Omega$, le compact $\delta(K)$ doit rencontrer tous les $\overline{X}_j$ dont l'intersection avec Ω est non vide. Or, par l'hypothèse (H_1), un compact de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ ne peut rencontrer qu'un nombre fini de $\overline{X}_j$.

□

On note $J = \{j_0, ..., j_s\}$ l'ensemble des entiers j pour lesquels X_j rencontre Ω.

Définition 7.18 (Composante au-dessus d'une autre). *Pour tout $j \in J$, on appelle composante au-dessus de X_j toute composante connexe de $\delta^{-1}(X_j)$ dans $\tilde{M}$. Deux composantes sont dites de la même famille si elles sont dans l'image réciproque d'un même X_j.*

La notation $\mathcal{X}_j$ désignera toujours implicitement une composante au-dessus de X_j.

On aura également besoin un peu plus tard de la

Définition 7.19 (Espaces adjacents, composantes de transition). *On dit que deux ouverts U et V d'un espace topologique sont adjacents si leurs frontières ont au moins un point commun.*

On appelle composante de transition entre deux ouverts adjacents toute composante connexe de la frontière commune à ces deux ouverts.

Le lemme suivant va être fondamental pour la suite:

Lemme 7.20. *Tout point de $\tilde{M}$ possède un voisinage qui ne rencontre que des composantes de familles différentes. De plus, ces composantes sont en nombre fini.*

Preuve : Soit x un point de $\tilde{M}$ et y son image par δ. Alors pour tout ouvert connexe U suffisamment petit contenant y, il existe un ouvert $\mathcal{U}$ contenant x tel que l'application δ réalise un difféomrphisme de $\mathcal{U}$ sur U (en particulier $\mathcal{U}$ est connexe). Par la propriété (H_1), l'ouvert U peut être choisi de telle sorte qu'il s'écrive $U = U_1 \cup U_2 \cup ... U_r \cup \Sigma$ où les U_i sont des ouverts connexes de certaines composantes X_{j_i} toutes disjointes et Σ est contenu dans le complémentaire de l'union des X_j. Ainsi, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup ... \mathcal{U}_r \cup \tilde{\Sigma}$. Les ouverts $\mathcal{U}_1$,..., $\mathcal{U}_r$ sont connexes. Ils appartiennent à des composantes $\mathcal{X}_1$,..., $\mathcal{X}_r$ qui sont toutes de familles distinctes. □

Lemme 7.21. *Si $\mathcal{X}_j$ est une composante connexe précompacte de $\delta^{-1}(X_j)$, alors $\delta(\overline{\mathcal{X}_j}) = \overline{X_j}$.*

Preuve : On voit facilement que $\delta(\mathcal{X}_j)$ est ouvert et fermé dans X_j donc $\delta(\mathcal{X}_j) = X_j$. Soit maintenant y_∞ un point de ∂X_j et (y_n) une suite de X_j qui converge vers y_∞. On prend une suite (x_n) de $\mathcal{X}_j$ telle que $\delta(x_n) = y_n$ et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (x_n) converge vers x_∞ dans $\overline{\mathcal{X}_j}$. Ainsi $y_\infty = \delta(x_\infty)$. □

Lemme 7.22. *Pour tout $j \in J$, les composantes connexes non précompactes de $\delta^{-1}(X_j)$ sont en nombre fini.*

Preuve : On se fixe un $j \in J$ et l'on note $(\mathcal{X}_j^k)$, $k \in \mathbb{N}$, les composantes connexes de X_j. Par le lemme 7.20, tout point de K possède un voisinage qui ne rencontre qu'au plus un $(\mathcal{X}_j^k)$ et K est réunion finie de tels voisinages. Par conséquent, K ne rencontre qu'un nombre fini de $(\mathcal{X}_j^k)$ et en particulier un nombre fini de non précompactes. On peut supposer qu'il s'agit de $\mathcal{X}_j^0, ..., \mathcal{X}_j^{r_j}$.
Considérons une suite (x_n) de points de $\mathcal{X}_j^0$ qui tend vers l'infini. Il existe

alors une suite d'entiers (k_n) telle que $\gamma^{k_n}(x_n) \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $\gamma^{k_{n_1}}(x_{n_1})$ et $\gamma^{k_{n_1}}(x_{n_1})$ sont dans la même composante connexe (non précompacte) pour deux entiers distincts k_{n_1} et k_{n_2}. On en déduit que $\gamma^{k_{n_1}-k_{n_2}}(\mathcal{X}_j^0) = \mathcal{X}_j^0$. On vient donc de montrer que $\mathcal{X}_j^0$ était laissée stable par un sous-groupe d'indice fini de Γ. Ainsi, l'orbite $\Gamma.\mathcal{X}_j^0$ consiste en un nombre fini de composantes et par un raisonnement analogue, toutes les orbites $\Gamma.\mathcal{X}_j^k$ pour $k \in \{0, ..., r_j\}$ sont finies. D'autre part, K étant un domaine fondamental pour l'action de Γ, il est facile de voir que toute composante connexe non précompacte de $\delta^{-1}(X_j)$ appartient à l'une des orbites précédentes et donc, il y a un nombre fini de telles composantes. □

Corollaire 7.23. *Si $\mathcal{X}_j$ est une composante non précompacte au-dessus de X_j, alors l'action de H est cocompacte sur $\delta(\overline{\mathcal{X}}_j)$.*

Preuve : Par ce qui précède, il existe un sous-groupe d'indice fini de Γ qui laisse $\mathcal{X}_j$ invariante. Ainsi Γ agit cocompactement sur $\overline{\mathcal{X}}_j$ et donc H fait de même sur $\delta(\overline{\mathcal{X}}_j)$.

□

Lemme 7.24. *Si l'application δ est injective en restriction à $\mathcal{X}_j$, elle l'est aussi sur $\overline{\mathcal{X}}_j$.*

Preuve : Supposons que ce ne soit pas le cas et choisissons x_1 et x_2 disjoints dans $\overline{\mathcal{X}}_j$ tels que $\delta(x_1) = \delta(x_2) = y$. Comme δ est une injection sur $\mathcal{X}_j$, on a nécessairement que x_1 et x_2 se trouvent dans $\partial\mathcal{X}_j$. On choisit $\mathcal{U}_1$ (resp. $\mathcal{U}_2$) un petit ouvert contenant x_1 (resp. x_2) de sorte que δ réalise un difféomorphisme de $\mathcal{U}_1$ (resp. $\mathcal{U}_2$) sur son image. D'après le lemme 7.20, on peut également faire l'hypothèse que $\mathcal{U}_1$ (resp. $\mathcal{U}_2$) ne rencontre pas deux composantes de la même famille. Alors $\delta(U_1 \cap \mathcal{X}_j) = \delta(U_1) \cap X_j$ et $\delta(U_2 \cap \mathcal{X}_j) = \delta(U_2) \cap X_j$. Comme d'autre part, $\delta(U_1) \cap \delta(U_2) \cap X_j \neq \emptyset$, on obtient que $\delta(U_1 \cap \mathcal{X}_j) \cap \delta(U_2 \cap \mathcal{X}_j) \neq \emptyset$ ce qui contredit l'injectivité de δ sur $\mathcal{X}_j$. □

On suppose à présent que la famille des composantes X_j vérifie, en plus de l'hypothèse (H_1), l'hypothèse supplémentaire:

(H_2) *L'action de H est équicontinue sur chaque X_j.*

On peut alors montrer le

Lemme 7.25. *Soit $\mathcal{X}_j$ une composante connexe de $\delta^{-1}(X_j)$, alors δ réalise un revêtement de $\mathcal{X}_j$ sur X_j.*

Preuve : D'après le lemme 7.8, l'application δ réalise un revêtement de $\mathcal{X}_j$ sur son image. Il nous suffit donc de montrer que $\delta(\mathcal{X}_j) = X_j$. Pour cela, on va montrer que la frontière de $\delta(\mathcal{X}_j)$ dans Ω ne rencontre pas X_j.
On considère un point y_∞ dans la frontière de $\delta(\mathcal{X}_j)$ et une suite (y_n) de points de $\delta(\mathcal{X}_j)$ qui converge vers y_∞. Il existe une suite (x_n) de $\mathcal{X}_j$ telle que

$\delta(x_n) = y_n$. Si y_∞ appartient à X_j alors l'action de H est équicontinue en y_∞. Mais alors, d'après le corollaire 7.9, la suite (x_n) est contenue dans un compact de $\tilde{M}$. Elle admet donc une valeur d'adhérence x_∞ dans $\partial\mathcal{X}_j$. On choisit alors un petit ouvert connexe U contenant y_∞ et contenu dans X_j et un petit ouvert connexe $\mathcal{U}$ contenant x_∞ tel que $\delta(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. On obtient $\delta(\mathcal{X}_j \cup \mathcal{U}) \subset X_j$ ce qui contredit la maximalité de $\mathcal{X}_j$.

□

7.5.3 Fin de la démonstration dans le cas a)

Comme les composantes M_j vérifient les hypothèse (H_1) et (H_2), on peut leur appliquer tous les résultats du paragraphe précédent. Ainsi, les composantes M_j rencontrant l'ouvert Ω forment une famille finie indexée par $J = \{i_0, ..., i_s\}$. Comme Ω est connexe, les entiers constituant l'ensemble J sont consécutifs. Afin de simplifier les notations nous supposons que $J = \{0, ..., s\}$.

De plus toutes les composantes M_j sont simplement connexes. En appliquant les lemmes 7.25 et 7.24, on obtient que pour toute composante $\mathcal{M}_j$ au-dessus de M_j, l'application δ réalise un difféomorphisme de $\mathcal{M}_j$ sur M_j et un homéomorphisme de $\overline{\mathcal{M}}_j$ sur son image.

Proposition 7.26. *Pour tout $j \in J$, aucune composante au-dessus de M_j n'est précompacte. De plus, aucun point i_j $(j \in \mathbb{Z})$ n'est dans l'ouvert Ω.*

Preuve : Une conséquence immédiate du corollaire 11.6 est qu'il n'y a pas de composante précompacte au-dessus de M_0. En effet $\overline{M_0} \not\subset \Omega$.
Mais du coup, aucune composante au-dessus de M_1 n'est précompacte. Supposons en effet qu'il en existe une que l'on note $\mathcal{M}_1$. Alors, comme $\delta(\overline{\mathcal{M}}_1) = \overline{M}_1$, on pourrait trouver un point p_1 dans $\overline{\mathcal{M}}_1$ tel que $\delta(p_1) = i_1$. Remarquons que ce p_1 appartient à $\overline{\mathcal{M}}_0$ pour une certaine composante $\mathcal{M}_0$ de $\delta^{-1}(M_0)$. Mais alors, tous les points de l'orbite de p_1 sous l'action de Γ sont dans $\overline{\mathcal{M}}_0$ et ont même image i_1 par δ. Cela contredit l'injectivité de δ sur $\overline{\mathcal{M}}_0$.
La conclusion du lemme s'obtient par induction puisqu'on montre successivement le résultat pour les composantes de $\delta^{-1}(M_2), ..., \delta^{-1}(M_s)$. □

On s'intéresse maintenant aux composante de transition entre $\mathcal{M}_j$ et $\mathcal{M}_{j+1}$. Leurs images par δ sont contenues dans la frontière commune à M_j et M_{j+1}. Comme on vient de voir que les points i_j ne sont pas dans Ω, ces images se situent en fait dans le cylindre I_j. Plus précisément, les composantes de transition entre $\mathcal{M}_j$ et $\mathcal{M}_{j+1}$ sont des composantes connexes dans l' image réciproque $\delta^{-1}(I_j)$.

Définition 7.27 (Composantes de la même famille). *On dit que deux composantes de transition sont de la même famille si leurs images par δ sont dans le même cylindre I_j.*

Lemme 7.28. *Pour tout $j \in \{0, ..., s-1\}$, aucune composante connexe de $\delta^{-1}(I_j)$ n'est précompacte.*

Preuve : Rappelons que par la proposition 7.15, le groupe H centralise un flot τ^t de translations de type temps ou lumière. Supposons qu'une telle composante $\mathcal{I}_j$ soit précompacte. L'image de $\mathcal{I}_j$ est d'intérieur non vide dans I_j. Or l'étude dynamique des translations faite au paragraphe 5.4 montre que sauf sur un ensemble de mesure nulle dans I_j, les orbites des points de I_j sous l'action de τ^t s'accumulent sur i_j. On peut trouver y dans $\delta(\mathcal{I}_j)$ dont l'orbite sous l'action de τ^t, s'accumule sur i_j. Mais alors, si $x \in \mathcal{I}_j$ est un antécédent de y, tout point d'accumulation de l'orbite de x sous l'action de $\tilde{\tau}^t$ (le remonté du flot τ^t dans $\mathrm{Conf}(\tilde{M})$ s'envoie sur i_j. On obtiendrait ainsi $i_j \in \Omega$.

□

Par une preuve totalement similaire au cheminement des lemmes 7.20 et 7.22, on montre que ces composantes de transition sont en nombre fini et donc , quitte à considérer un revêtement fini de M, on supposera dorénavant que Γ les fixe toutes.

Proposition 7.29. *Soit $\mathcal{I}_j$ une composante de transition au-dessus de I_j. Alors l'image de $\mathcal{I}_j$ par δ est dense dans I_j.*

Preuve : L'image $\delta(\mathcal{I}_j)$ est un ouvert de I_j stable par H et τ^t que l'on appelle U_j. L'action de H est cocompacte sur U_j.

Lemme 7.30. *Soit X un espace topologique tel qu'il existe une projection continue et ouverte $p : X \to \mathbf{S}^k$ dont toutes les fibres sont non compactes. On suppose qu'un homéomorphisme h de X vérifie $p \circ h = \phi_h \circ p$ pour une certaine transformation de Möbius ϕ_h sur $\mathbf{S}^k$. Si l'action de H est cocompacte sur un ouvert U de X et que la frontière de U contient une fibre, alors cette fibre est unique, l'élément ϕ_h est nécessairement hyperbolique et la fibre se situe au dessus d'un des deux points fixes de ϕ_h.*

Preuve : On suppose que la frontière de U contient au moins une fibre et on appelle $\hat{U}$ la projection de U sur $\mathbf{S}^k$. L'action de ϕ_h sur $\hat{U}$ doit être cocompacte. Ainsi, par le lemme 7.5 la frontière de $\hat{U}$ dans $\mathbf{S}^k$ est contenue dans l'ensemble limite Λ_h. D'autre part, si K est un compact fondamental pour l'action de H sur X, les itérés de K sous l'action de H doivent intersecter une infinité de fois chaque fibre rencontrant U (car aucune fibre n'est compacte). Par conséquent, l'action de ϕ_h sur $\hat{U}$ n'est pas propre. Ainsi, l'ensemble Λ_h doit rencontrer $\hat{U}$. C'est donc que Λ_h est constitué de deux éléments, l'un dans $\hat{U}$, l'autre dans la frontière de $\hat{U}$, ce qui achève la preuve. □

Rappelons que chaque I_j admet un feuilletage $\mathcal{D}_j$ par droites de lumière et que l'espace des droites de $\mathcal{D}_j$ est la sphère $\mathbf{S}^{n-2}$ munie de sa structure conforme canonique. On peut donc définir une projection ouverte $p : I_j \to \mathbf{S}^{n-2}$ dont les fibres sont les droites de $\mathcal{D}_j$. L'application h agit sur I_j en vérifiant $p \circ h = L_h \circ p$

D'autre part l'ensemble des points fixes de τ^t sur I_j est soit vide lorsque τ^t est de type temps, soit constitué d'une géodésique de lumière de I_j lorsque τ^t est de type lumière (voir le chapitre 5 pour les détails). On note cette

géodésique Δ_j. Les orbites de τ_t non contenues dans Δ_j sont des droites de $\mathcal{D}_j$, donc hors de son intersection avec Δ_j, U_j est une réunion de droites de $\mathcal{D}_j$.

Par stabilité de U_j sous l'action de τ^t, si la frontière de U_j ne contient aucune droite de $\mathcal{D}_j$, alors elle est contenue dans Δ_j. Ainsi U_j est connexe et dense dans I_j.

Si la frontière de U_j contient une droite de $\mathcal{D}_j$, on applique le lemme 7.30 : cette droite est unique et se situe au dessus de l'ensemble Λ_h. Ou bien cette droite est Δ_j et on conclut comme ci-dessus. Ou bien cette droite n'est pas Δ_j et dans ce cas Δ_j rencontre Ω. La frontière de U_j n'est pas séparante dans I_j et elle est d'intérieur vide: U_j est donc connexe et dense dans I_j. □

Lemme 7.31. *Soit $\mathcal{M}_j$ une composante de $\delta^{-1}(M_j)$. Il n'existe pas deux composantes adjacentes à $\mathcal{M}_j$ qui appartiennent à une même famille.*

Preuve : Supposons qu'il existe $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ deux composantes distinctes de même famille qui soient adjacentes à $\mathcal{M}_j$. On peut alors trouver une composante de transition $\mathcal{J}$ entre $\mathcal{M}_j$ et $\mathcal{M}$ ainsi qu'une composante de transition $\mathcal{J}'$ entre $\mathcal{M}_j$ et $\mathcal{M}'$. Ces composantes sont distinctes et envoyées par δ sur deux ouverts U et U' d'un même cylindre dans lequel ils sont tous les deux denses, par la proposition 7.29. Ainsi $\delta(\mathcal{J})$ et $\delta(\mathcal{J}')$ ont une intersection non vide, ce qui contredit l'injectivité de δ sur $\overline{\mathcal{M}}_j$. □

On peut à présent terminer la preuve du théorème 7.1.
Supposons que deux points distincts de $\tilde{M}$, x_j et x'_j, aient même image par l'application développante. Il existe deux composantes de même famille $\mathcal{M}_j$ et $\mathcal{M}'_j$ telles que x_j appartienne à l'adhérence de $\mathcal{M}_j$ et x'_j appartienne à l'adhérence de $\mathcal{M}'_j$. On considère un chemin $\alpha : [0,1] \to \tilde{M}$ qui relie x_j et x'_j. On peut supposer qu'une fois que α est sorti de l'adhérence d'une composante $\overline{\mathcal{M}}_j$, il n'y rentre plus jamais (sinon on coupe le morceau superflu). On introduit l'application $n_\alpha : [0,1] \to J$ qui à un temps t associe le plus petit j pour lequel il existe une composante $\mathcal{M}_j$ au-dessus de M_j avec $\alpha(t) \in \overline{\mathcal{M}}_j$. Par injectivité de δ sur les $\overline{\mathcal{M}}_j$, l'application n_α n'est pas constante. On va montrer qu'elle est monotone, ce qui donnera une contradiction. Si elle n'est pas monotone, il va exister trois réels $t_1 < t_2 < t_3$ dans $[0,1]$ et un entier k pour lesquels on a

-$n_\alpha(t) = k$ pour $t \in]t_2 - \epsilon, t_2]$.

-$n_\alpha(t) = k'$ pour $t \in]t_2, t_3]$.

-$n_\alpha(t) = k$ pour $t \in]t_3, t_3 + \epsilon]$.

avec $k' = k+1$ ou $k' = k-1$. Par exemple $k' = k+1$. Ainsi $\alpha(t)$ est dans $\overline{\mathcal{M}}_k$ pour $t \in]t_2 - \epsilon, t_2]$ avec $\mathcal{M}_k$ une composante au-dessus de M_k. Ensuite, il existe une composante $\mathcal{M}_{k+1}$ adjacente à $\mathcal{M}_k$ telle que $\alpha(t)$ se trouve dans $\overline{\mathcal{M}}_{k+1}$ pour $t \in]t_2, t_3]$. Enfin, pour $t \in]t_3, t_3 + \epsilon]$, $\alpha(t)$ se situe dans $\overline{\mathcal{M}}'_k$ pour une certaine composante $\mathcal{M}'_k$ au-dessus de X_k. Mais alors, $\mathcal{M}_k$ et $\mathcal{M}'_k$ sont toutes deux de la même famille et adjacentes à $\mathcal{M}_{k+1}$. Elles sont donc égales par le lemme 7.31. Mais cela contredit le fait que α, après être sorti de l'adhérence d'une composante ne puisse jamais y retourner.

7.5.4 Fin de la démonstration dans le cas b)

On appelle M_j la composante de Minkowski qui contient R_{2j} et R_{2j+1}. On ne peut malheureusement plus montrer directement que δ est une injection sur les $\mathcal{M}_j$. Néanmoins, le début de la démonstration du cas a) s'adapte sans problème aux composantes R_j. Ainsi, de la démonstration de la proposition 7.26, on tire:

Proposition 7.32. *Pour tout $j \in J$, aucune des composantes au-dessus de R_j n'est précompacte. De plus, aucun point i_j n'est contenu dans Ω.*

Si $\mathcal{J}$ est une composante de transition entre $\mathcal{R}_{j-1}$ et $\mathcal{R}_j$, alors son image par δ est contenue dans le cylindre I_j.
Les démonstrations du lemme 7.28, de la proposition 7.29 et du lemme 7.31 sont les mêmes si l'on remplace M_j par R_j. On obtient alors de façon similaire:

Lemme 7.33. *Soit $\mathcal{R}_j$ une composante au-dessus de R_j. Il n'existe pas deux composantes distinctes adjacentes à $\mathcal{R}_j$ qui soient de la même famille.*

De ce qui précède on va pouvoir déduire le

Corollaire 7.34. *L'application développante est injective en restriction à toute les adhérences $\overline{\mathcal{M}}_j$.*

Preuve : Il suffit de montrer que δ est injective sur chaque $\mathcal{M}_j$. Comme les M_j vérifient l'hypothèse (H_1), on pourra reprendre la démonstration du corollaire 11.6 pour obtenir la conclusion souhaitée.

Si $\delta(\mathcal{M}_j) \subset R_{2j}$ (resp. $\delta(\mathcal{M}_j) \subset R_{2j+1}$), alors $\mathcal{M}_j = \mathcal{R}_{2j}$ (resp. $\mathcal{M}_j = \mathcal{R}_{2j+1}$) est l'assertion a déjà été démontrée.
Sinon, $\mathcal{M}_j$ contient deux composantes adjacentes $\mathcal{R}_{2j}$ et $\mathcal{R}_{2j+1}$. Le point important est que comme, d'après le lemme 7.33, $\mathcal{R}_{2j}$ est la seule composante adjacente à $\mathcal{R}_{2j+1}$ au-dessus de R_{2j} et $\mathcal{R}_{2j+1}$ est la composante adjacente à $\mathcal{R}_{2j}$ au dessus de $2j+1$, il n'y a pas d'autres composantes au-dessus de R_{2j} ou R_{2j+1} dans $\mathcal{M}_j$. Un couple de points de $\mathcal{M}_j$ (susceptibles d'avoir la même image par δ!) est donc soit dans $\overline{\mathcal{R}}_{2j}$, soit dans $\overline{\mathcal{R}}_{2j+1}$ et nous avons vu que δ est injective en restriction à ces deux sous-ensembles. $\square$

Il ne reste plus qu'à reprendre la démonstration faite en a) à partir de la fin du lemme 7.31 pour conclure.

7.5.5 Fin de la démonstration dans le cas c)

Dans ce cas, il ressort de la preuve de la proposition 7.15 que l'on peut supposer h linéaire de la forme λL_h avec $0 < \lambda < 1$ et L_h dans $O(2,n)$. Ainsi, la suite $(\overline{h}^k)$ tend simplement vers l'infini. Elle est à distorsion bornée si L_h est elliptique. Dans le cas où L_h est parabolique, la dynamique est de type mixte avec $\overline{C}^+$ et $\overline{C}^-$ pour cônes attracteurs et répulseurs. Les cercles attracteurs et répulseurs se coupent en un point.
Enfin si L_h est loxodromique, la dynamique est également de type mixte

avec $\overline{C}^+$ et $\overline{C}^-$ pour cônes attracteurs et répulseurs. Cette fois-ci, les cercles attracteurs et répulseurs $\overline{\Delta}^+$ et $\overline{\Delta}^-$ sont disjoints. Rappelons d'autre part que H centralise un flot d'homothéties que l'on note encore τ^t.
De l'étude générale, on obtient immédiatement que Ω ne rencontre qu'un nombre fini de composantes M_j^-. On suppose que $J = \{0, ..., s\}$ et on classe les composantes P_j, E_j et F_j par ordre chronologique: P_0, E_0, F_0, P_1, E_1 etc....
Toujours grâce à l'étude générale, on peut affirmer que si $\mathcal{P}_j$ (resp. $\mathcal{F}_j$) est une composante au-dessus de P_j (resp. F_j), alors δ réalise un difféomorphisme de $\mathcal{P}_j$ (resp. $\mathcal{F}_j$) sur P_j (resp. sur F_j) et un homéomorphisme de $\overline{\mathcal{P}}_j$ (resp. $\overline{\mathcal{F}}_j$) sur son image.
Enfin, si $\mathcal{E}_j$ est une composante au-dessus de E_j, alors δ réalise un revêtement de $\mathcal{E}_j$ sur E_j.
Tout au long de la preuve, nous réutilisons des notations du type $\check{I}^+_{P_j}$ ou $T^-_{F_j}$. Nous invitons le lecteur à consulter la section 5.4.2 dans laquelle ces notations ont été introduites.

On commence par montrer

Proposition 7.35. *Aucun des points i_j^+ (resp. i_j^-), $j \in \mathbb{Z}$, n'appartient à Ω. En particulier, pour tout $j \in J$, aucune des composantes $\mathcal{P}_j$ (resp. $\mathcal{E}_j$, resp. $\mathcal{F}_j$) n'est précompacte.*

Preuve : Supposons qu'un point $i_{j_0}^+$ appartienne à Ω. On choisit un de ses antécédents par δ que l'on appelle $\tilde{\imath}_{j_0}^+$. Ce point est un zéro isolé du champ de vecteur associé au flot $\tilde{\tau}^t$, le remonté de τ^t dans $\mathrm{Conf}(\tilde{M})$. On choisit un petit ouvert contenant $\tilde{\imath}_{j_0}^+$ sur lequel δ est injective. On choisit une sphère Σ incluse dans $\delta(U)$ et centrée en $i_{j_0}^+$. Enfin, on note $\tilde{\Sigma}$ l'image réciproque de Σ dans U. On considère l'ouvert V constitué de la réunion des $\tilde{\tau}^t(\tilde{\Sigma})$ lorsque t décrit $\mathbf{R}$, à laquelle on ajoute $\tilde{\imath}_{j_0}^+$. Cet ouvert V s'envoie injectivement sur $M_{j_0}^-$, et il s'agit en fait d'une composante $\mathcal{M}_{j_0}^-$. Si cette composante n'est pas précompacte, elle est fixée par Γ (quitte à prendre un sous-groupe d'indice fini) et on aboutit à une contradiction car $\tilde{i}_{j_0}^+$ serait également fixé par Γ. Si maintenant V est précompact, c'est que $\overline{M}_{j_0}^-$ est inclus dans Ω, et en particulier $i_{j_0-1}^-$. On refait alors le même raisonnement avec $i_{j_0-1}^-$ à la place de $i_{j_0}^+$: ou bien on aboutit à une contradiction, ou bien $i_{j_0-1}^+$ appartient à Ω et on refait à nouveau le même raisonnement...On est alors sûr d'arriver tôt ou tard à une contradiction car le nombre de i_j^+ et i_j- rencontrant Ω est fini. $\square$

Corollaire 7.36. *Pour tout $j \in J$, l'action de H est cocompacte sur $\delta(\overline{\mathcal{E}}_j)$. Cette action est propre et cocompacte sur $\delta(\overline{\mathcal{P}}_j)$ et $\delta(\overline{\mathcal{F}}_j)$.*

Proposition 7.37. *Si $\mathcal{E}_j$ est une composante au-dessus de E_j, alors l'application développante est une injection en restriction à $\mathcal{E}_j$.*

Preuve :

Lemme 7.38. *Lorsque L_h est parabolique ou elliptique, les seuls ouverts U_j de $\overline{P}_j\backslash\{i_j^+ \cup i_j^-\}$ stables par le flot τ^t où l'action de H est propre et cocompacte sont $P_j \cup \check{I}_{P_j}^+$ et $P_j \cup \check{I}_{P_j}^-$. Lorsque L_h est hyperbolique, il faut ajouter aux deux précédents l'espace $\overline{P}_j\backslash\{\Delta^+ \cup \Delta^-\}$.*

Preuve :
-Cas où L_h est elliptique ou parabolique
On commence par remarquer que l'action de H est propre cocompacte sur $M_j^-\backslash\{p_j^+\}$ et $M_j^+\backslash\{p_j^-\}$. Elle reste propre et cocompacte sur l'intersection de ces ouverts avec $\overline{P}_j$, c'est-à-dire sur $P_j \cup \check{I}_{P_j}^+$ et $P_j \cup \check{I}_{P_j}^-$.
On montre alors que U_j rencontre forcément $T_{P_j}^+$ ou $T_{P_j}^-$. En effet, si ce n'était pas le cas, l'ouvert U_j serait inclus *strictement* dans $P_j \cup \check{I}_{P_j}^+$ ou $P_j \cup \check{I}_{P_j}^-$ qui sont, comme nous venons de le voir, deux espaces où l'action de H est propre et on aurait une contradiction avec le lemme 7.12. On suppose par exemple que U_j rencontre $T_{P_j}^+$ et on appelle $\check{U}_j$ son intersection avec $T_{P_j}^+$. C'est un ouvert de $T_{P_j}^+$ qui est invariant par le flot τ^t. D'autre part, il existe une projection continue et ouverte $p : T_{P_j}^+ \to \mathbf{S}^{n-2}$ dont les fibres sont exactement la trace sur $T_{P_j}^+$ du feuilletage $\mathcal{D}_j$. En particulier toutes les fibres sont non compactes et de plus on a la relation $p \circ h = L_h \circ p$. On applique alors le lemme 7.30 et on obtient que la frontière de $\check{U}_j$ dans $T_{P_j}^+$ ne contient aucune fibre de p. Mais comme cette frontière est invariante par τ^t et que l'adhérence de toute orbite de τ^t qui n'est pas incluse dans S_{P_j} coïncide avec une fibre de p, on conclut que cette frontière est incluse dans S_{P_j}. Ainsi on a l'inclusion $\check{I}_{P_j}^+ \subset \check{U}_j$. Si U_j ne rencontre pas $T_{P_j}^-$, alors c'est que $U_j = P_j \cup \check{I}_{P_j}^+$. Si U_j rencontre $T_{P_j}^+$, alors par un raisonnement analogue $\check{I}_{P_j}^- \subset \check{U}_j$ mais alors l'action de H ne peut être propre sur U_j (car U_j contient des points dynamiquement associés dans ce cas).

-Cas où L_h est loxodromique
Comme la dynamique est de type mixte, si U_j rencontre Δ^+, alors U_j ne peut rencontrer $T_{P_j}^-$, sans cela l'action de H ne serait pas propre. Mais alors, U_j est un sous-espace de $P_j \cup \check{I}_{P_j}^+$ et par le lemme 7.12 et le fait que l'action est propre sur $P_j \cup \check{I}_{P_j}^+$, on obtient que c'est exactement $P_j \cup \check{I}_{P_j}^+$. De même, on montre que si U_j rencontre Δ^-, alors U_j est exactement $P_j \cup \check{I}_{P_j}^-$.
Si maintenant U_j ne rencontre ni Δ^+ ni Δ^-, alors il est contenu dans $\overline{P}_j\backslash\{\Delta^+\cup\Delta^-\}$. L'action de H étant propre cocompacte sur $\overline{P}_j\backslash\{\Delta^+\cup\Delta^-\}$, on conclut que U_j est exactement $\overline{P}_j\backslash\{\Delta^+ \cup \Delta^-\}$. □

Ce lemme reste valable avec la même preuve si l'on remplace P_j par F_j.

Soit $\mathcal{I}$ une composante de transition entre $\mathcal{E}_j$ et $\mathcal{P}_j$. Du lemme précédent, on tire le

Corollaire 7.39. *Ou bien l'image de $\overline{\mathcal{I}}$ par l'application δ contient $\check{I}_{P_j}^+$, ou bien elle contient $T_{P_j}^+\backslash\Delta^+$.*

Preuve : C'est une simple conséquence du fait que H agit proprement cocompactement sur $\delta(\overline{\mathcal{P}}_j)$ et de la description faite au lemme 7.38. $\square$

On démontre de même que pour une composante de transition $\mathcal{I}$ entre $\mathcal{E}_j$ et $\mathcal{F}_j$ (resp. $\mathcal{F}_{j-1}$, resp. $\mathcal{P}_{j+1}$), ou bien $\delta(\overline{\mathcal{I}})$ contient $\check{I}^+_{F_j}$ (resp. $\check{I}^-_{F_{j-1}}$, resp. $\check{I}^-_{P_{j+1}}$), ou bien il contient $T^+_{F_j}\backslash\Delta^+$ (resp. $T^-_{F_{j-1}}\backslash\Delta^-$, resp. $T^-_{P_{j+1}}\backslash\Delta^-$).
On commence par montrer la proposition 7.37 en faisant l'hypothèse que $\delta(\overline{\mathcal{E}}_j)$ contient l'un des quatre demi-cylindres $\check{I}^+_{P_j}$, $\check{I}^+_{F_j}$, $\check{I}^-_{F_{j-1}}$ ou $\check{I}^-_{P_{j+1}}$. Dans ce cas, il existe par exemple une composante de transition $\mathcal{I}$ entre P_j et E_j dont l'image par δ contient le demi-cylindre $\check{I}^+_{P_j}$. Dans M^-_j, on considère la sphère euclidienne de rayon 1 que l'on note Σ et on appelle Σ_{E_j} l'intersection de Σ avec E_j. Quant à l'intersection de Σ avec $\check{I}^+_{P_j}$, c'est une sphère de dimension $n-2$ que l'on note S. Comme δ est injective en restriction à $\mathcal{I}$, il existe un remonté $\tilde{S}$ à S dans $\mathcal{I}$. De plus, par compacité de $\tilde{S}$, on peut trouver un petit voisinage tubulaire $\mathcal{V}$ de $\tilde{S}$ tel que δ réalise un difféomophisme de $\mathcal{V}$ sur son image. On choisit à présent deux points antipodaux sur Σ, l'un dans F_j, l'autre dans P_j, et on considère $\mathcal{D}$, le feuilletage par méridiens passant par ces deux points, en restriction à Σ_{E_j} . Par tout point y de S passe une unique courbe de $\mathcal{D}$ que l'on appelle D_y. Pour chaque D_y, il est possible de relever l'intersection de D_y avec $\delta(\mathcal{V})$ en un bout de courbe de $\mathcal{V}$. Puis on utilise le fait que δ est un revêtement de $\mathcal{E}_j$ sur E_j pour remonter D_y en une courbe $\tilde{D}_y$ sur laquelle δ est injective (aucune D_y n'est fermée). En faisant varier y dans S, on obtient un relevé $\tilde{\Sigma}_{E_j}$ de Σ_{E_j} dans $\mathcal{E}_j$ sur lequel δ est injective. Soit $\mathcal{U}$ l'ouvert constitué de la réunion des $\tilde{\tau}^t(\Sigma)$ pour $t \in \mathbf{R}$. De la relation $\delta \circ \tilde{\tau}^t = \tau^t \circ \delta$, on déduit que $\delta(\mathcal{U}) = E_j$ et que δ est une injection en restriction à $\mathcal{U}$. Il reste à vérifier qu'en fait $\mathcal{U} = \mathcal{E}_j$. Comme l'inclusion $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}_j$ est évidente, il faut juste s'assurer que la frontière de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{E}_j$ est vide. Supposons qu'il y ait un point x dans cette frontière. Alors, on peut trouver $y \in \mathcal{U}$ tel que $\delta(x) = \delta(y)$. Ainsi, si l'on considère un voisinage $\mathcal{V}$ autour de x, on peut trouver un voisinage $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ autour de y, tel que $\delta(\mathcal{V}) = \delta(\mathcal{W})$. Comme l'intersection de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$ est non vide, ceci contredit l'injectivité de δ sur $\mathcal{U}$.
Remarquons que dans ce qui précède, on a supposé qu'il existait une composante de transition $\mathcal{I}$ entre $\overline{\mathcal{P}}_j$ et $\overline{\mathcal{E}}_j$ dont l'image par δ contient le demi-cylindre $\check{I}^+_{P_j}$. Si cette composante $\mathcal{I}$ est en fait entre $\overline{\mathcal{F}}_j$ et $\overline{\mathcal{E}}_j$ et que son image par δ contient $\check{I}^+_{F_j}$, la démonstration reste inchangée. En revanche, si on est dans le cas d'une composante de transition $\mathcal{I}$ entre $\overline{\mathcal{F}}_{j-1}$ (resp. $\overline{\mathcal{P}}_{j+1}$) et $\overline{\mathcal{E}}_j$ dont l'image par δ contient le demi-cylindre $\check{I}^-_{F_{j-1}}$ (resp. $\check{I}^-_{P_{j+1}}$), il faut légèrement modifier la preuve. Il suffit de remplacer Σ par l'hyperboloïde de E_j donné par $\langle x, x\rangle = 1$. Cet hyperboloïde coupe $\check{I}^-_{F_{j-1}}$ selon une sphère de dimension $n-2$ et il possède un feuilletage simple par droites transverses à cette sphère. La démonstration précédente s'adapte alors sans problème.

Il reste à traiter le cas où $\delta(\overline{\mathcal{E}}_j)$ ne contient pas l'un des quatre demi-cylindres $\check{I}^+_{P_j}$, $\check{I}^+_{F_j}$, $\check{I}^-_{F_{j-1}}$ ou $\check{I}^-_{P_{j+1}}$. Remarquons que d'après le lemme 7.38, cette situation ne peut arriver que pour L_h loxodromique. Le corollaire 7.39 implique alors que $\delta(\overline{\mathcal{E}}_j) = \overline{E}_j\backslash\{\Delta^+ \cup \Delta^-\}$ et par conséquent, le groupe H agit proprement cocompactement sur $\delta(\overline{\mathcal{E}}_j)$. On appelle K_j (resp. K'_j

) l'espace compact obtenu en quotientant $\overline{\mathcal{E}}_j$ (resp. $\delta(\overline{\mathcal{E}}_j)$) par le groupe Γ (resp. H). L'application δ induit un homéomorphisme local $\overline{\delta}$ entre K_j et K'_j. Or un homéomorphisme local entre deux espaces compacts est un revêtement. Maintenant, par injectivité de l'application développante sur $\partial\mathcal{E}_j$, les projetés sur K'_j des éléments de $\partial\delta(\overline{\mathcal{E}}_j))$ ont un unique antécédent dans K_j. Le revêtement $\overline{\delta}$ est donc une injection. Cela implique que si deux points x_1 et x_2 de $\mathcal{E}_j$ ont même image par δ, ils sont image l'un de l'autre par un élément de Γ. En particulier, $\delta(x_1)$ devrait être point fixe d'un élément de H. Mais H n'admet aucun point fixe sur $\delta(\mathcal{E}_j)$ et par conséquent, δ est également une injection en restriction à $\mathcal{E}_j$.

□

Par une démonstration analogue à celle du corollaire 7.34, on obtient:

Corollaire 7.40. *L'application développante est une injection en restriction aux $\overline{\mathcal{M}}_j$.*

Lemme 7.41. *Soit $\mathcal{M}_j$ une composante au-dessus de M_j, alors il n'existe pas deux composantes $\mathcal{M}_{j+1}$ et $\mathcal{M}'_{j+1}$ (resp. $\mathcal{M}_{j-1}$ et $\mathcal{M}'_{j-1}$) qui soient de la même famille et adjacentes à $\mathcal{M}_j$.*

Preuve : On appelle $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{I}'$) une composante de transition entre $\mathcal{M}_j$ et $\mathcal{M}_{j+1}$ (resp. $\mathcal{M}'_{j+1}$). Si l'image de $\mathcal{I}$ par δ n'est pas incluse dans $\check{I}^-_{F_j}$ (ou dans $\check{I}^-_{P_{j+1}}$), alors par le lemme 7.39 on obtient qu'elle est dense dans I^-_j. On peut alors conclure puisque $\delta(\mathcal{I})$ et $\delta(\mathcal{I}')$ ont forcément un point commun et par injectivité de δ sur $\overline{\mathcal{M}}_j$, on a $\mathcal{I} = \mathcal{I}'$.
Maintenant, si $\delta(\mathcal{I})$ est incluse dans $\check{I}^-_{F_j}$, on applique le corollaire 7.39 et on obtient $\delta(\mathcal{I}) = \check{I}^-_{F_j}$ ou $\delta(\mathcal{I}) = \check{I}^-_{F_j}\backslash\Delta^-$. Cette dernière possibilité est exclue car $\check{I}^-_{F_j}\backslash\Delta^-$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^{n-1}$ et pour des raisons cohomologiques, un groupe monogène ne peut agir proprement cocompactement sur $\mathbf{R}^k$ avec $k \geq 2$. On remarque aussi qu'on ne peut avoir $\delta(\mathcal{I}) = \check{I}^-_{F_j}$. L'action de H devant être propre sur $\delta(\overline{\mathcal{M}}_j)$, cela entrainerait que le demi-cylindre $\check{I}^+_{F_j}$ ne rencontre pas $\delta(\overline{\mathcal{M}}_j)$ et cela contredirait la connexité de $\overline{\mathcal{M}}_j$. La seule situation possible restante est $\delta(\mathcal{I}) = \delta(\mathcal{I}') = \check{I}^-_{P_{j+1}}$ et on utilise une fois de plus l'injectivité de δ sur $\overline{\mathcal{M}}_j$ pour obtenir $\mathcal{I} = \mathcal{I}'$. □

Il ne reste plus qu'à reprendre la démonstration faite en a) à partir de la fin du lemme 7.31 pour conclure.

7.6 Illustration

Voici à présent quelques exemples d'ouverts Ω pouvant intervenir dans le théorème 7.1. On se fixe une fois pour toutes un cône de lumière C dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$. Son complémentaire est une famille de composantes Minkowski M_j et on se donne une projection stéréographique $s_0 : \mathbf{R}^{1,n-1} \to M_0$.

7.6.1 Structures complètes

Les premiers exemples viennent des structures complètes, obtenues en quotientant $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ par un groupe qui agit proprement cocompactement. Voici un moyen pour construire de telles structures.
On prend dans $\mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}}_n)$ un flot $\tilde{\phi}^t$. Si ce flot est précompact, alors pour tout réel t_0, le groupe engendré par $\zeta\tilde{\phi}^{t_0}$ (voir section 4.2.2 pour la définition de ζ) agit proprement cocompactement sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$. Si ce flot n'est pas précompact mais agit proprement sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$, alors le groupe engendré par $\tilde{\phi}^{t_0}$ pour n'importe quel t_0 agit proprement et cocompactement sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$. Enfin, si $\tilde{\phi}^t$ n'agit pas proprement, il préserve un cône de lumière de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$, ainsi que toutes les composantes de Minkowski qui constituent le complémentaire de ce cône. Comme ces composantes sont précompactes dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$, il n'est pas difficile de voir que pour tout réel t_0, le groupe engendré par $\zeta\tilde{\phi}^{t_0}$ agit proprement cocompactement sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$.
On voit ainsi apparaître une classe de structures complètes paramétrées par l'algèbre de Lie de $O(2,n)$.

7.6.2 Structures de Hopf

On se donne un élément $h = \lambda A$ dans le groupe $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1})$ et on suppose que λ est plus petit (en valeur absolue) que le module de la plus petite valeur propre de A. Alors le groupe $H = \langle h \rangle$ agit proprement cocompactement sur $\mathbf{R}^{1,n-1}\backslash\{0\}$. Le quotient obtenu est difféomorphe à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$. On appelle ce type de structures *structures de Hopf* sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$ (ellent rentrent dans le cadre du cas c) de la preuve).

7.6.3 Autres exemples

Exemple 1 Prenons pour h une translation de type temps. Alors l'action de h est propre cocompacte sur tous les ouverts du type $M_j \cup I_j \cup M_{j+1}$. On obtient au quotient une structure kleinienne sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$(cet exemple illustre le cas a) de la preuve).

Exemple 2 Soit h un élément de $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1})$ de la forme λA, où A est une matrice hyperbolique de $O(1,n-1)$ dont toutes les valeurs propres différentes de 1 sont plus petites que λ (en valeur absolue). L'élément h vu dans $\mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}}_n)$ possède une dynamique de type mixte. Le cône C est le cône répulseur C^- de la dynamique. On se donne un entier k et on regarde l'ouvert $U_k = M_0 \cup I_0 \cup M_1 \cup I_1 \cup ... \cup I_{k-1} \cup M_k$. On appelle Δ_k^+ (resp. Δ_k^-) la portion de Δ^+ (resp. Δ^-) comprise entre i_0^+ et i_k^+ (resp. i_0^- et i_k^-). Alors h agit proprement cocompactement sur l'ouvert Ω_k obtenu en ôtant à U_k la réunion de Δ_k^+ et Δ_k^-. En faisant varier k, on obtient une famille infinie de structures conformément plates sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$ qui ne sont pas quotients ou revêtements finis les unes des autres (ces structures illustrent le cas c) de la preuve).

Chapitre 8

Structures kleiniennes uniformisables

On dit qu'une structure conformément plate sur une variété M est uniformisable s'il existe dans la classe conforme une métrique lorentzienne complète à courbure constante. Si la variété M est compacte, l'hypothèse de complétude est superflue par les résultats de Carrière et Klingler. En d'autres termes, les structures uniformisables sur les variétés compactes sont obtenues par quotient de composantes de Minkowski, Anti-de Sitter ou de Sitter dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$. Ce sont donc des exemples de structures kleiniennes. Le but de ce chapitre est d'énoncer les principaux résultats connus concernant ce type de structures.

8.1 Structures uniformisables de Sitter

L'étude des structures de Sitter sur les variétés compactes est rendue extrêmement simple par la proposition suivante, qui est un cas particulier du phénomène de Calabi-Markus:

Proposition 8.1. *Il n'existe pas de* $(O(1, n+1), \mathbf{dS}_n)$*-structure sur une variété compacte (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de variété lorentzienne compacte à courbure +1).*

Preuve : Comme nous venons de le signaler, une telle structure devrait être obtenue en quotientant une composante de Sitter Ω de $\mathbf{Ein}_n$ par un sous-groupe Γ agissant proprement cocompactement sur Ω (en particulier, Γ devrait être infini). Mais alors, par le lemme 5.15, la frontière de Ω devrait contenir une géodésique de lumière. Or la frontière d'une composante de Sitter est une sphère riemanienne, d'où la contradiction. $\square$

8.2 Structures uniformisables plates

Suites aux travaux de Fried, Goldman et Kamishima (voir [FG], [GK]), Carrière et Dal'bo ont démontré un analogue lorentzien du théorème de Bieberbach classique sur les variétés plates riemaniennes.

Théorème 8.2 (Carrière, Dal'bo [CaD]). *Soit M une variété lorentzienne compacte plate, alors il existe un groupe résoluble $G \subset Is(\mathbf{R}^{1,n-1})$ qui agit simplement transitivement sur $\mathbf{R}^{1,n-1}$ et un réseau Γ de G tels que, à indice fini près, on ait $M = G/\Gamma = \mathbf{R}^{1,n-1}/\Gamma$. En particulier, M est une solvariété.*

En revanche, on n'a pas de généralisation du théorème de Bieberbach pour les variétés plates complètes non compactes. En effet, Margulis fut le premier à exhiber des groupes libres de $Is(\mathbf{R}^{1,2})$ qui agissent proprement discontinûment sur $\mathbf{R}^{1,2}$. Les quotients obtenus s'appellent *espaces-temps de Margulis.* Ces espaces ont été étudiés très en détail dans [DGo]. Le théorème suivant, dû à T.A.Drumm, montre qu'il existe une relative abondance de groupes $\Gamma \subset Is(\mathbf{R}^{1,2})$ conduisant à des espaces-temps de Margulis.

Théorème 8.3 (Drumm [D]). *Tout sous-groupe libre discret de type fini de $SO(1,2)$ admet une déformation dans $Is(\mathbf{R}^{1,2})$ qui agit proprement sur $\mathbf{R}^{1,2}$.*

8.3 Structures uniformisables Anti-de Sitter

Commençons tout d'abord par préciser que les variétés compactes admettant une métrique lorentzienne à courbure -1 sont toutes de dimension impaire (voir par exemple [Ku1]). D'autre part, ces variétés qui sont théoriquement quotients de $\widetilde{\mathbf{AdS}}_n$ par un sous-groupe discret d'isométries, s'avèrent être en fait, à revêtement fini près, des quotients de $\mathbf{AdS}_n$ (voir [KR],[Sa],[Ze1]). Ainsi, toute structure Anti-de Sitter est en fait une structure kleinienne de $\mathbf{Ein}_n$.

Kulkarni fut le premier à donner un procédé général de construction de variétés Anti-de Sitter. Il observa en effet que le groupe $U(1,d)$ se plonge dans $SO(2,2d)$ et agit ainsi par isométries sur l'espace $\mathbf{AdS}_{2d+1}$. Le stabilisateur d'un point est $U(d)$, donc est compact ce qui entraîne que l'action de $U(1,d)$ est en fait propre. Tout réseau cocompact Γ de $U(1,d)$ sans torsion agit donc proprement discontinûment cocompactement sur $\mathbf{AdS}_{2d+1}$, donnant ainsi une structure Anti-de Sitter au quotient. De telles structures sont qualifiées de *standard.* il existe une dichotomie importante entre les structures de dimension 3 et les autres.

En dimension supérieure à 3, Zeghib a montré dans [Ze1] que si une structure $M = \mathbf{AdS}_n/\Gamma$ n'était pas standard, alors le groupe Γ était Zariski-dense dans $SO(2,n)$. Or aucun exemple de quotient compact de $\mathbf{AdS}_n$ par un sous-groupe Zariski-dense n'est connu, ce qui suggère que toutes les structures sont standard.

En revanche, la situation est plus complexe en dimension 3. Kulkarni et Raymond ont montré dans [KR] que les sous-groupes de $PSL_2(\mathbf{R}) \times PSL_2(\mathbf{R})$ qui agissent librement proprement discontinûment sur $\mathbf{ADS}_3$ sont obtenus comme groupes graphes de groupes fondamentaux de surfaces. Cela signifie qu'ils sont de la forme $Graph(\Gamma,\rho) = \{(\gamma,\rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma\}$ avec Γ isomorphe à $\pi_1(S)$ pour une surface S fermée orientée de genre $g > 1$. L'application ρ est une représentation de Γ dans $PSL_2(\mathbf{R})$. Les représenta-

tions ρ qui conduisent à des actions propres cocompactes sont dites **admissibles**. De petites déformations de structures standard, consistant à choisir ρ très proche de la représentation identité conduisent à des exemples non standard (les premiers de ces exemples furent trouvés indépendemment par Ghys et Goldman dans [Gh] et [Go2]). Une étude approfondie des représentations ρ admissibles a été effectuée dans [Sa]. D'un point de vue topologique, il est prouvé dans [KR] que toute variété Anti-de Sitter compacte de dimension 3 est un fibré de Seifert sur une surface hyperbolique. Réciproquement, un tel fibré de caractéristique d'Euler non nulle admet une structure Anti-de Sitter.

8.3.1 Ensemble limite d'un groupe de Conf($\mathbf{Ein}_n$) agissant proprement sur $\mathbf{AdS}_{n+1}$

On se donne un groupe Γ de Conf($\mathbf{Ein}_n$) et on suppose que l'action de Γ sur $\mathbf{AdS}_{n+1}$ est propre. Par le lemme 5.16, toute suite (γ_k) de Γ qui tend simplement vers l'infini admet soit une dynamique mixte, soit une dynamique à distorsions équilibrées. On note $\Delta^+(\gamma_k)$ et $\Delta^-(\gamma_k)$ les cercles attracteurs et répulseurs de (γ_k). On peut alors introduire la

Définition 8.4. *On définit* **l'ensemble limite du groupe** Γ *comme l'adhérence dans* $\mathbf{Ein}_n$ *de la réunion sur toutes les suites* (γ_k) *de* Γ *tendant simplement vers l'infini, des cercles* $\Delta^-(\gamma_k)$ *et* $\Delta^+(\gamma_k)$. *On appelle cet ensemble* Λ_Γ. *Son complémentaire est noté* Ω_Γ.

Une propriété fondamentale de l'ensemble limite est donnée par la :

Proposition 8.5. *L'action de* Γ *sur* Ω_Γ *est propre.*

Preuve : C'est une simple conséquence des assertions 1) et 2) de la proposition 5.14. □

Nous rappelons à présent un résultat classique dans le cas riemannien: tout groupe discret de $O(1, n+1)$ qui agit cocompactement sur l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^{n+1}$ a pour ensemble limite $\mathbf{S}^n$. De plus l'action sur $\mathbf{S}^n$ est minimale. On peut se demander dans quelle mesure ce résultat reste vrai dans le contexte lorentzien.

Lemme 8.6. *Si* Γ *est un sous-groupe de Conf*($\mathbf{Ein}_n$) *qui agit proprement discontinûment cocompactement sur* $\mathbf{AdS}_{n+1}$, *alors* $\Lambda_\Gamma = \mathbf{Ein}_n$.

Preuve : Remarquons pour commencer que l'on a l'inclusion $\Lambda_\Gamma \subset \mathbf{Ein}_n$. Si ce n'était pas le cas, il existerait une suite (γ_k) tendant simplement vers l'infini, pour laquelle l'un des deux cercles $\Delta^+(\gamma_k)$ et $\Delta^-(\gamma_k)$ rencontre $\mathbf{AdS}_{n+1}$. On suppose par exemple que c'est $\Delta^-(\gamma_k)$. Si (γ_k) est à distorsions équilibrées, on a tout de suite une contradiction avec le fait que (γ_k) agit proprement sur $\mathbf{AdS}_{n+1}$. Ainsi, la dynamique de (γ_k) est nécessairement mixte. Mais pour que l'action de (γ_k) soit propre sur $\mathbf{AdS}_{n+1}$, il

faudrait que le cône attracteur $C^+(\gamma_k)$ ne rencontre pas $\mathbf{AdS}_{n+1}$. Comme tout cône de lumière de $\mathbf{Ein}_{n+!}$ rencontre $\mathbf{AdS}_{n+1}$, on a une nouvelle absurdité.
Maintenant, l'action de Γ étant propre sur Ω_Γ, elle ne peut être cocompacte sur aucun ouvert strict de Ω_Γ. On a donc $\Omega_\Gamma = \mathbf{AdS}_{n+1}$, soit $\Lambda_\Gamma = \mathbf{Ein}_n$.
□

On se demande à présent si l'action de Γ sur Λ_Γ est minimale. L'exemple de la dimension 3 va nous montrer que ce n'est pas toujours le cas. Rappelons que par hypothèse, Γ agit proprement cocompactement sur $\mathbf{AdS}_3$ et que par conséquent, c'est un groupe graphe dans $PSL_2(\mathbf{R}) \times PSL_2(\mathbf{R})$. On appelle ρ la représentation définissant ce groupe graphe.

Proposition 8.7. *Soit $\Gamma = Graph(\Gamma_1, \rho)$ un groupe discret de $Is(\mathbf{AdS}_3)$ dont l'action est propre, discontinue et cocompacte. Si la représentation ρ est fidèle, alors Γ agit minimalement sur le tore $\mathbf{Ein}_2$.*

Preuve : Le groupe Γ_1 est un groupe fondamental de surface compacte de genre supérieur à 1 donc non résoluble. Comme ρ est fidèle, il en va de même pour $\rho(\Gamma_1)$. On utilise alors le

Lemme 8.8. *Un sous-groupe non résoluble de $PSL_2(\mathbf{R})$ est soit dense soit discret.*

Or un résultat de Goldman, redémontré par Salein stipule que les représentations ρ Fuchsiennes ne donnent pas lieu à des quotients compacts.
On en déduit que $\rho(\Gamma_1)$ est dense. Il contient donc une rotation $\rho(\gamma_1)$ d'angle irrationnel (car il n'y a pas de torsion). On en déduit que le groupe Γ contient un élément du type $(\gamma_1, \rho(\gamma_1))$ où γ_1 est un élément hyperbolique. Ainsi, $(\gamma_1, \rho(\gamma_1))$ fixe deux cercles $C_1 = \{p_1\} \times S^1$ et $C_2 = \{p_2\} \times S^1$ de $\mathbf{Ein}_2$. Par minimalité de l'action de Γ_1 sur le cercle, tout fermé F invariant par Γ va rencontrer tous les cercles du type $\{p\} \times S^1$. En particulier, il va contenir un point de C_1. Puis, en faisant agir $(\gamma_1, \rho(\gamma_1))$ sur C_1 on voit que F contient C_1 et, à nouveau par minimalité de l'action de γ_1, F contient tous les cercles $\{p\} \times S^1$, c'est-à-dire $F = \mathbf{Ein}_2$.

□

Proposition 8.9. *Il existe des représentations admissibles pour lesquelles $Graph(\Gamma_1, \rho)$ n'agit pas minimalement sur $\mathbf{Ein}_2$.*

Preuve : Un premier moyen de construire des actions non minimales est de choisir pour ρ une représentation abélienne car alors, Γ va fixer des cercles lumières de $\mathbf{Ein}_2$ (de plus, les représentations abéliennes sont admissibles).
Nous nous proposons de construire un exemple de représentation admissible ρ tel que $\rho(\Gamma)$ n'est pas résoluble et n'agit pas minimalement sur le cercle. On en déduira qu'alors le groupe $Graph(\Gamma, \rho)$ n'agit pas minimalement sur $\mathbf{Ein}_2$.
Soit Γ le groupe fondamental d'une surface de genre g. Le groupe Γ est engendré par $2g$ générateurs $a_1, ..., a_g, b_1, ..., b_g$. Le groupe $\Gamma_a = \langle a_1, ..., a_g \rangle$ est un groupe de Schottky. Un domaine fondamental D_a de son action sur $\mathbf{H}^2$

est donné par le complémentaire de $2g$ demi-disques ouverts $U_1, ..., U_{2g}$. On appelle λ_i et λ_i^{-1} les deux valeurs propres de a_i. On appelle a_i' l'élément hyperbolique ayant mêmes pôles que a_i avec pour valeurs propres $2\lambda_i$ et $\frac{1}{2}\lambda_i^{-1}$. Le groupe $\Gamma_a' = \langle a_1', ..., a_2' \rangle$ est encore un groupe de Schottky dont un domaine fondamental D_a' est le complémentaire de $2g$ demi-disques $U_1', ..., U_{2g}'$ avec $\overline{U_i'} \subset U_i$.
On appelle ρ_1 la représentation de Γ_a dans Γ_a' qui à a_i associe a_i'. On appelle ρ_2 la représentation de Γ dans Γ_a qui à a_i associe lui-même et à b_j associe l'identité. On considère alors la représentation $\rho = \rho_1 \circ \rho_2$.
L'inclusion j de D_a dans D_a' s'étend en une application $\overline{j}$ (Γ_a, Γ_a')-équivariante du disque de Poincaré dans un de ses ouverts stricts. Le lemme de Schwarz assure que $\overline{j}$ est contractante pour la métrique de Poincaré. La représentation ρ vérifie la condition de contraction, énoncée par Salein dans [Sa]. Salein a de plus montré que les représentations vérifiant cette condition étaient admissibles. D'autre part, $\rho(\Gamma)$ est un groupe de Schottky qui n'agit pas minimalement sur le cercle. $\square$

On peut tout de même obtenir un résultat de minimalité si l'on considère l'action de Γ non pas sur Λ_Γ mais sur les géodésiques de lumière de Λ_Γ. On obtient alors:

Proposition 8.10. *Tout groupe discret non résoluble de Conf*$(\mathbf{Ein}_2)$ *agissant proprement cocompactement sur* $\mathbf{AdS}_3$ *agit minimalement sur les géodésiques de lumière de* Λ_Γ.

Chapitre 9

Exemples de structures kleiniennes non uniformisables

Nous allons à présent donner d'autres exemples de construction de structures kleiniennes, qui ne rentrent pas dans le cadre des structures uniformisables. Ces exemples vont généraliser au cadre lorentzien une famille bien connue de groupes kleiniens conformes sur la sphère $\mathbf{S}^n$: les groupes de Schottky.

9.1 Dynamique de Schottky

Définition 9.1. *Soit G un groupe agissant par difféomorphismes sur une variété X et $\Gamma = \langle s_1, ..., s_g \rangle$ un sous-groupe de type fini de G. On dit que Γ est* **un groupe de Schottky** *s'il existe $2g$ ouverts $U_1^+, U_1^-, ..., U_g^+, U_g^-$ d'adhérences disjointes vérifiant:*
$s_i(X \backslash \overline{U_i^-}) = U_i^+$ *pour tout* $i \in \{1, ..., g\}$.

Le complémentaire de la réunion des $U_i^\pm$ est un fermé que l'on note D. On dit que D est **un domaine fondamental** du groupe Γ (pour des raisons qui vont apparaître bientôt). Bien entendu, un choix différent des $U_i^\pm$ conduit à un domaine fondamental différent. Les frontières des ouverts $U_i^\pm$ sont notées $\Sigma_i^\pm$. Leur réunion Σ coïncide avec la frontière de D.

L'exemple le plus célèbre est celui des groupes de Schottky d'applications conformes de la sphère $\mathbf{S}^n$. Leur existence est fortement liée à la dynamique sur $\mathbf{S}^n$ des éléments hyperboliques de $\mathrm{Conf}(\mathbf{S}^n)$. Ceci motive la définition suivante:

Définition 9.2. *Soient K^+ et K^- deux compacts disjoints de X. On dit qu'un élément g de G a* **une dynamique polarisée** *relativement à K^+ et K^- lorsque:*
(i) pour tout compact K dans $X \backslash K^-$, la limite de Hausdorff de la suite $g^i(K)$ lorsque i tend vers $+\infty$ est incluse dans K^+.
(ii) pour tout compact K dans $X \backslash K^+$, la limite de Hausdorff de la suite $g^i(K)$ lorsque i tend vers $-\infty$ est incluse dans K^-.

(iii) le couple (K^-, K^+) est minimal (relativement à l'inclusion) pour les propriétés (i) et (ii).

Exemples

-L'exemple typique de transformation à dynamique polarisée est celui des éléments hyperboliques du groupe conforme de la sphère. Les compacts K^+ et K^- consistent alors en deux points p^+ et p^-.

-Tout élément de Conf($\mathbf{Ein}_n$) dont la dynamique est mixte ou à distorsions équilibrées admet une dynamique polarisée relativement à ses cercles attracteurs et répulseurs Δ^+ et Δ^-, lorsque ceux-ci sont disjoints (voir la description dynamique faite au chapitre 5).

-Tout élément de Conf($\mathbf{Ein}_n$) dont la dynamique est mixte ou à distorsion bornée admet une dynamique polarisée par rapport aux compacts p^+ et C^- (resp. p^- et C^+). Là encore, on ne s'intéresse qu'aux cas où p^+ et C^- sont disjoints.

-Tout élément de $GL_n(K)$, $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, admettant r valeurs propres de module strictement plus grand que 1 et $n-r$ valeurs propres de module strictement inférieur à 1 est polarisé relativement à deux sous-espaces KP^r et KP^{n-r} dans KP^n.

Lemme 9.3. *Supposons qu'il existe dans X une famille de couples de compacts tous disjoints deux à deux $\{(K_1^-, K_1^+), (K_2^-, K_2^+), ..., (K_g^-, K_g^+)\}$ et une famille s_1,..., s_g d'éléments de G tels que s_i soit polarisé par rapport à K_i^- et K_i^+. Alors il existe des entiers $k_1, ..., k_g$ tels que le groupe engendré par $s_1^{k_1}$,..., $s_g^{k_g}$ soit un groupe de Schottky.*

Preuve : On choisit pour chaque i de $\{1, ..., g\}$ un voisinage précompact ouvert U_i^+ de K_i^+ et un voisinage précompact ouvert V_i^- de K_i^-. On demande de plus que tous ces voisinages soient d'adhérences disjointes. Par la propriété (ii), il existe une famille d'entiers k_1,..., k_g tels que $s_i^{k_i}(X \backslash U_i^+)$ soit inclus strictement dans V_i^-. On pose $U_i^- = s_i^{k_i}(X \backslash \overline{U_i^+})$. Alors pour tout i de $\{1, ..., g\}$, $s_i^{k_i}(X \backslash \overline{U_i^+}) = U_i^-$ et $s_i^{-k_i}(X \backslash \overline{U_i^-}) = U_i^+$. Le groupe engendré par les $s_i^{k_i}$ est donc un groupe de Schottky. □

Nous établissons maintenant quelques résultats généraux sur les groupes de Schottky. Le premier d'entre eux est le *"Lemme du Ping-Pong"*, que l'on attribue à Klein (voir [dlH] [Ma]).

Lemme 9.4 (dit du ping-pong).
Soit $\Gamma = \langle s_1, ..., s_g \rangle$ un groupe de Schottky agissant sur une variété X, alors Γ est un groupe libre.

Preuve : La démonstration va découler du lemme suivant :

Lemme 9.5. *Pour tout mot réduit $\gamma = s_{i_1}^{\varepsilon_1} ... s_{i_n}^{\varepsilon_n}$ dans Γ et tout x dans $\overset{\circ}{D}$, $\gamma(x)$ appartient à $U_{i_1}^{\varepsilon_1}$.*

Preuve : Nous reprenons les notations de l'énoncé. Comme x n'est pas dans $U_{i_n}^{-\epsilon_n}$, on a $s_{i_n}^{\epsilon_n}(x) \in U_{i_n}^{\epsilon_n}$. D'autre part, le mot γ est réduit donc $U_{i_{n-1}}^{-\epsilon_{n-1}} \neq U_{i_n}^{\epsilon_n}$. Par conséquent $s_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}} s_{i_n}^{\epsilon_n}(x) \in U_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}}$. En poursuivant ce raisonnement g fois, on montre que $\gamma(x) \in U_{i_1}^{\epsilon_1}$. □

De ce lemme, on conclut que si γ est un mot réduit non trivial de Γ, et si x est dans $\overset{\circ}{D}$, alors $\gamma(x) \neq x$ et donc $\gamma \neq id$. Ainsi, le groupe Γ est libre. □

Remarque 9.6. *On peut adopter une définition purement ensembliste des groupes de Schottky en prenant pour X un ensemble quelconque et pour $U_1^+, U_1^-, ..., U_g^+, U_g^-$ des sous-ensembles de X. Le lemme du ping-pong est encore valable dans ce contexte.*

Proposition 9.7. *Soit $\Gamma = \langle s_1, ..., s_g \rangle$ un groupe de Schottky agissant sur une variété X.*

i) L'ensemble $\Omega = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(D)$ est un ouvert de X sur lequel l'action de Γ est propre. Si de plus X est compact, alors l'action de Γ est propre cocompacte.

ii) Si $g \geq 2$ et les U_i^+ et U_i^- sont connexes, alors le complémentaire Λ de l'ouvert Ω possède une infinité non dénombrable de composantes connexes en bijection avec le bord $\partial\Gamma$ du groupe Γ.

Preuve : Dans un groupe libre de type fini, chaque élément γ s'écrit de manière unique sous forme d'un mot réduit. On note $|\gamma|$ la longueur de ce mot.
Pour tout entier k, on pose $D_k = \bigcup_{|\gamma| \leq k} \gamma(D)$ avec la convention $D_0 = D$. On appelle Ω_1 l'intérieur de D_1 et on définit $\Omega_k = \bigcup_{|\gamma| \leq k-1} \gamma(\Omega_1)$.
Commençons par montrer l'inclusion $D \subset \Omega_1$. Il suffit pour cela de prouver que $\Sigma \subset \Omega_1$. Si ce n'est pas le cas, on peut trouver une suite de points x_i qui n'appartiennent pas à Ω_1 et qui convergent vers un point x de Σ. On suppose par exemple que x appartient à Σ_1^+. Dans ce cas, les points x_i sont dans U_1^+. La suite $s_1^{-1}(x_i)$ converge vers le point $s_1^{-1}(x)$ qui appartient à Σ_1^-. La suite $s_1^{-1}(x_i)$ doit être dans le complémentaire de $\overline{U_1^-}$ et converge vers un point de Σ_1^-. Elle est donc dans $\overset{\circ}{D}$ pour i suffisamment grand. Mais alors x_i appartient à $s_1(\overset{\circ}{D})$ qui est inclus dans Ω_1, d'où la contradiction. On procède de même si x appartient aux autres composantes de Σ.
L'inclusion $D \subset \Omega_1 \subset D_1$ entraîne $D_{k-1} \subset \Omega_k \subset D_k$ pour tout entier k. On obtient alors que $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(D) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$. La dernière réunion est clairement ouverte. Il nous reste à montrer que Γ agit proprement sur Ω. Pour cela, on démontre le

Lemme 9.8. *Si $|\gamma| \geq 2$, alors $\gamma(D) \bigcap D = \emptyset$.*

Preuve : Choisissons un mot réduit $\gamma = s_{i_1}^{\epsilon_1} ... s_{i_n}^{\epsilon_n}$ avec $n \geq 2$. On peut appliquer le lemme 9.5 au mot $s_{i_2}^{\epsilon_2} ... s_{i_n}^{\epsilon_n}$, ce qui nous donne $s_{i_2}^{\epsilon_2} ... s_{i_n}^{\epsilon_n}(\overset{\circ}{D}) \subset U_{i_2}^{\epsilon_2}$. Mais ceci entraîne $\gamma(D) \subset s_{i_1}^{\epsilon_1}(\overline{U}_{i_2}^{\epsilon_2}) \subset U_{i_1}^{\epsilon_1}$. □

Supposons maintenant qu'il existe une suite (x_i) de Ω qui tend vers un point $x_\infty \in \Omega$ et telle qu'il existe une suite (γ_i) d'éléments de Γ pour laquelle $\gamma_i(x_i)$ converge vers un point y_∞ de Ω. Le point y_∞ appartient à un certain Ω_{k_0} et il en va de même pour tous les y_i lorsque i est assez grand. Ainsi, quitte à composer à droite et à gauche par deux éléments de Γ, on peut supposer que x_i et $\gamma_i(x_i)$ appartiennent à D pour les i grands. Cela implique, toujours pour i assez grand, que $\gamma_i(D) \bigcap D \neq \emptyset$. D'après le lemme, on conclut que γ_i est de longueur au plus 1, donc ne prend qu'un nombre fini de valeurs, ce qui achève la preuve du (i).

Nous reprenons les notations de la proposition 9.7. On a $\Lambda = X \backslash \Omega = \bigcap_{k\in\mathbb{N}}(X\backslash D_k)$. On pose $\Lambda_k = X\backslash D_k$. Les ensembles $\overline{\Lambda}_k$ sont réunion disjointe d'exactement $2g.(2g-1)^k$ composantes connexes compactes, en bijection naturelle avec les mots de longueur $k+1$ dans Γ. Par exemple, au mot $s_{i_1}^{\epsilon_1}...s_{i_n}^{\epsilon_n}$ correspond la composante $s_{i_1}^{\epsilon_1}...s_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}}(\overline{U_{i_n}}^{\epsilon_n})$ de $\overline{\Lambda_{k-1}}$. Du fait que les $U_i^{\pm}$ sont d'adhérences disjointes, on a $\overline{\Lambda}_{k+1} \subset \Lambda_k \subset \overline{\Lambda}_k$. On en déduit $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{\Lambda}_{k+1} \subset \Lambda \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{\Lambda}_k$, ce qui donne: $\Lambda = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{\Lambda}_k$.

Le lemme suivant nous dit qu'en fait, Λ est la limite de Hausdorff de la suite de compacts $\overline{\Lambda}_k$.

Lemme 9.9. *Soit (X,d) un espace métrique compact et K_n une suite décroissante de compacts de X. Alors la suite K_n tend vers le compact $K_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ pour la topologie de Hausdorff.*

Preuve : On note δ la distance de Hausdorff sur les compacts de X. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K_n$ pour lequel $\delta(K_n, K_\infty) = d(x_n, K_\infty)$. Nous allons montrer que $\delta(K_n, K_\infty)$ tend vers 0. Supposons qu'au contraire, il existe $\epsilon > 0$ et une suite extraite $x_{\phi(n)}$ vérifiant $d(x_{\phi(n)}, K_\infty) \geq \epsilon$. Quitte à considérer une nouvelle suite extraite, on peut supposer que $x_{\phi(n)}$ converge vers un point x_∞, avec de plus ϕ croissante. On a donc $d(x_\infty, K_\infty) \geq \epsilon$. D'autre part $d(x_\infty, K_{\phi(n)})$ est une suite croissante, car $K_{\phi(n)}$ décroît pour l'inclusion. De plus $d(x_\infty, K_{\phi(n)})$ est majorée par $d(x_\infty, x_{\phi(n)})$ qui tend vers 0. Ceci entraîne que $d(x_\infty, K_{\phi(n)})$ est nulle pour tout n et que x_∞ appartient à K_∞, ce qui contredit $d(x_\infty, K_\infty) \geq \epsilon$. $\square$

Rappelons que l'on peut définir **le bord du groupe** Γ, noté $\partial\Gamma$, comme l'ensemble des mots totalement réduits de longueur infinie. Autrement dit, les éléments du bord s'écrivent $s_{i_1}^{\epsilon_1}....s_{i_n}^{\epsilon_n}...$ avec $i_j\epsilon_j \neq -i_{j+1}\epsilon_{j+1}$ pour tout $j \geq 1$. Comme le groupe Γ est libre et que l'on a supposé $g \geq 2$, le bord $\partial\Gamma$ est un compact métrisable homéomorphe à un ensemble de Cantor.
A chaque élément γ_∞ de $\partial\Gamma$ correspond une suite $s_{i_1}^{\epsilon_1}...s_{i_n}^{\epsilon_n}$ de mots de longueur n et une suite décroissante de compacts $s_{i_1}^{\epsilon_1}...s_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}}(\overline{U_{i_n}}^{\epsilon_n})$. On note $K(\gamma_\infty)$ la limite de Hausdorff de cette suite de compacts. C'est un compact connexe (comme limite décroissante de compacts connexes) contenu dans Λ. Remarquons que si γ'_∞ et γ_∞ sont différents, alors $K(\gamma'_\infty)$ et $K(\gamma_\infty)$ sont disjoints. En fait, les compacts $K(\gamma_\infty)$ forment une partition de Λ. En effet, si l'on se donne un x_∞ dans Λ, alors pour tout entier k, x_∞ appartient à exactement une composante connexe C_k de $\overline{\Lambda_k}$ et on a de plus $C_{k+1} \subset C_k$. La suite C_k est une suite décroissante de compacts du

type $s_{i_1}^{\epsilon_1}...s_{i_{k-1}}^{\epsilon_{k-1}}(\overline{U_{i_k}}^{\epsilon_k})$. Elle converge vers un compact limite $K(\gamma_\infty)$ où γ_∞ est le mot infini $s_{i_1}^{\epsilon_1}...s_{i_k}^{\epsilon_k}...$. Par conséquent, tout élément de Λ appartient à une composante du type $K(\gamma_\infty)$. Les composantes connexes de Λ sont exactement les $K(\gamma_\infty)$ pour γ_∞ décrivant $\partial\Gamma$, ce qui achève de démontrer le point (ii) de la proposition.

□

Remarquons que l'ouvert Ω dépend du choix d'un domaine fondamental D et que pour un autre choix D', l'ouvert $\Omega' = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma(D')$ est *a priori* différent de Ω. Néanmoins, on peut prouver le

Lemme 9.10. *Soit $\Gamma = \langle s_1, ..., s_g\rangle$ un groupe de Schottky sur une variété compacte X. On suppose que D est un domaine fondamental de Γ. Si D' est un domaine fondamental suffisamment proche de D, alors l'ouvert $\Omega' = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma(D')$ coïncide avec Ω.*

Preuve : Si le compact D' est suffisamment proche de D, il est inclus dans Ω. Ainsi, on obtient $\Omega' \subset \Omega$. Mais si un groupe agit proprement cocompactement sur un ouvert, il ne peut agir proprement cocompactement sur aucun ouvert strict de cet ouvert. On en déduit $\Omega' = \Omega$.

□

9.2 Groupes de Schottky dans Conf($\mathbf{Ein}_n$)

Il est maintenant temps de montrer qu'il existe des groupes de Schottky dans Conf($\mathbf{Ein}_n$). Pour cela, on commence par remarquer que les éléments de $O(2,n)$ du type

$$\begin{pmatrix} e^\lambda & & & & & & \\ & e^\mu & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & e^{-\mu} & \\ & & & & & & e^{-\lambda} \end{pmatrix}$$

avec λ et μ non nuls, ont une dynamique mixte (si $\lambda \neq \mu$) ou à distorsions équilibrées (si $\lambda = \mu$) avec des cercles attracteurs et répulseurs disjoints. Or le groupe Conf($\mathbf{Ein}_n$) agit transitivement sur les couples de géodésiques de lumière disjointes. Par conséquent, pour tout couple (Δ^-, Δ^+) de telles géodésiques, il existe au moins un élément γ dans Conf($\mathbf{Ein}_n$) de dynamique mixte (resp. à distorsions équilibrées) admettant Δ^- pour cercle répulseur et Δ^+ pour cercle attracteur. On se donne à présent une famille de couples de géodésiques de lumière $\{(\Delta_1^-, \Delta_1^+), ..., (\Delta_g^-, \Delta_g^+)\}$, toutes disjointes entre elles. Par la remarque précédente, il existe une famille s_1,..., s_g d'éléments de Conf($\mathbf{Ein}_n$) de dynamique mixte (resp. à distorsions équilibrées) tels que les cercles attracteurs et répulseurs de s_i soient exactement Δ_i^+ et Δ_i^-. Le lemme 9.3 assure alors que pour certains entiers k_1,..., k_g, le groupe Γ engendré par les $s_i^{k_i}$ est un groupe de Schottky.

Désormais, l'appellation **groupe de Schottky de Conf($\mathbf{Ein}_n$)** sera réservée uniquement aux groupes construits comme précédemment.

Dans le cadre riemannien conforme, tout groupe de Schottky sur $\mathbf{S}^n$ (et de manière générale tout groupe d'applications conformes de $\mathbf{S}^n$) agit par isométries sur l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^{n+1}$ et cette action est automatiquement propre. En général, un groupe d'applications conformes de $\mathbf{Ein}_n$ n'a aucune raison d'agir proprement sur $\mathbf{AdS}_{n+1}$, aussi est-il assez remarquable que les groupes de Schottky lorentziens jouissent d'une propriété analogue. C'est ce que nous montrons dans le

Théorème 9.11. *Un groupe de Schottky de Conf($\mathbf{Ein}_n$) ne possède aucune suite dont la dynamique soit à distorsion bornée. Ainsi, un tel groupe agit proprement sur $\mathbf{AdS}_{n+1}$, l'espace Anti-de Sitter de dimension $n+1$.*

Preuve : L'assertion est triviale si le groupe est monogène donc on suppose désormais que $g \geq 2$.

On considère un domaine fondamental D associé à Γ et l'ouvert $\Omega = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(D)$. On commence par montrer :

Lemme 9.12. *Les composantes connexes de $\Lambda = X\backslash\Omega$ sont des géodésiques de lumière.*

Preuve : Soit $\gamma_\infty = s_{i_1}^{\epsilon_1}...s_{i_k}^{\epsilon_k}...$ dans le bord de Γ, alors $K(\gamma_\infty)$ est limite décroissante de compacts $s_{i_1}^{\epsilon_1}...s_{i_{k-1}}^{\epsilon_{k-1}}(\overline{U_{i_k}^{\epsilon_k}})$. La limite étant décroissante, elle n'est pas modifiée en considérant une suite extraite et on peut donc supposer que $K(\gamma_\infty)$ est limite d'une suite $\gamma_k(\overline{U_{j_0}^{\epsilon_{j_0}}})$ de sorte que la première et la dernière lettre de γ_k soient toujours les mêmes, à savoir $s_{i_1}^{\epsilon_1}$ et $s_{i_0}^{\epsilon_0}$. Remarquons que $i_0\epsilon_0 \neq -i_{j_0}\epsilon_{j_0}$. Quitte à extraire encore, on suppose aussi que (γ_k) tend simplement vers l'infini.

Pour commencer, on fait l'hypothèse que la dynamique de (γ_k) est mixte ou à distorsions équilibrées. Si x est un point de $\overset{\circ}{D}$, alors $\gamma_k(x)$ appartient à $U_{i_1}^{\epsilon_1}$ et ${\gamma_k}^{-1}(x)$ appartient à $U_{i_0}^{-\epsilon_0}$. Par conséquent, le cercle attracteur Δ^+ est inclus dans $U_{i_1}^{\epsilon_1}$ et le cercle répulseur Δ^- est inclus dans $U_{i_0}^{-\epsilon_0}$. En particulier $\overline{U_{j_0}^{\epsilon_{j_0}}}$ ne rencontre pas Δ^-. Par la propriété 3 des suites à distorsions équilibrées et la propriété 4 des suites de dynamique mixte, on déduit que $K(y_\infty)$ est le cercle Δ^+.

On conclut la preuve du lemme en montrant que (γ_k) ne peut pas être à distorsion bornée. Supposons qu'elle le soit. Elle possède alors un pôle attracteur p^+ et un répulseur p^- ainsi qu'un cône attracteur C^+ et un répulseur C^-. Si x est un point de $\overset{\circ}{D}$, alors $\gamma_k(x)$ appartient à $U_{i_1}^{\epsilon_1}$ et ${\gamma_k}^{-1}(x)$ appartient à $U_{i_0}^{-\epsilon_0}$. Par conséquent, le pôle p^+ est dans $U_{i_1}^{\epsilon_1}$ et le pôle p^- est dans $U_{i_0}^{-\epsilon_0}$. En particulier, p^- n'appartient pas à $U_{j_0}^{\epsilon_{j_0}}$. Le cône C^- coupe $\Delta_{j_0}^{\epsilon_{j_0}}$ donc $U_{j_0}^{\epsilon_{j_0}}$. On baptise l'intersection $V_{j_0}^{\epsilon_{j_0}}$. Comme $U_{j_0}^{\epsilon_{j_0}}$ ne contient pas p^-, le compact $K(\gamma_\infty)$ est l'ensemble des points dynamiquement associés à $\overline{V_{j_0}^{\epsilon_{j_0}}}$. Plus précisément, si $\hat{V}_{j_0}^{\epsilon_{j_0}}$ désigne l'ensemble des géodésiques de lumières de C^- qui coupent $V_{j_0}^{\epsilon_{j_0}}$, alors $K(\gamma_\infty)$ est l'adhérence de l'union des

géodésiques de $\hat{\gamma}_\infty(\hat{V}_{j_0}^{\epsilon_{j_0}})$, et en particulier, $K(\gamma_\infty)$ contient une géodésique de lumière. Maintenant, il existe forcément des géodésiques de lumières de C^- qui ne rencontrent pas $V_{j_0}^{\epsilon_{j_0}}$. Dans le cas contraire, par la propriété 2 de la dynamique à distorsions bornées, on devrait avoir $K(\gamma_\infty) = C^-$. Mais cela est impossible car si l'on choisit γ'_∞ différent de γ_∞, on doit avoir $K(\gamma_\infty)$ et $K(\gamma'_\infty)$ disjoints. Or par la discussion précédente, $K(\gamma'_\infty)$ contient une géodésique de lumière et vu que toute géodésique de lumière coupe C^-, on aboutit à une absurdité. Maintenant, on perturbe un petit peu les ouverts $U_{j_0}^{\epsilon_{j_0}}$ et $U_{j_0}^{-\epsilon_{j_0}}$ de manière à obtenir un nouveau domaine fondamental D' très proche de D. Par le lemme 9.10, l'ouvert Ω reste inchangé. Ainsi, comme la limite des compacts $\gamma_k(U'_{j_0}{}^{\epsilon_{j_0}})$ est une composante connexe de Λ', c'est aussi une composante connexe de Λ que l'on note $K'(\gamma_\infty)$. Nous venons de voir que toutes les géodésiques de lumière de C^- ne coupent pas $\overline{V_{j_0}^{\epsilon_{j_0}}}$, donc on peut choisir $U'_{j_0}{}^{\epsilon_{j_0}}$ très proche de $U_{j_0}^{\epsilon_{j_0}}$ tel que $\hat{V}_{j_0}^{\epsilon_{j_0}}$ et $\hat{V}'_{j_0}{}^{\epsilon_{j_0}}$ soient différents. Autrement dit $K'(\gamma_\infty)$ et $K(\gamma_\infty)$ sont différents donc disjoints. Mais comme l'intersection de $U_{j_0}^{\epsilon_{j_0}}$ et $U'_{j_0}{}^{\epsilon_{j_0}}$ est non vide (ils contiennent tous deux $\Delta_{j_0}^{\epsilon_{j_0}}$), $K(y_\infty)$ et $K'(y_\infty)$ ont des points communs. On aboutit à la contradiction souhaitée.

□

On finit aisément la preuve du théorème. Supposons qu'il existe une suite (γ_k) à distorsion bornée dans Γ. Alors $\overset{\circ}{D}$ rencontre le cône répulseur C^-. Dans le cas contraire, il serait inclus dans l'un des $U_i^\pm$, par exemple U_1^+. Mais alors, comme Δ_1^- coupe C^-, l'intersection de Δ_1^- et U_1^+ serait non vide ce qui est contraire aux hypothèses. Ainsi, la limite lorsque k tend vers l'infini de $\gamma_k(D)$ est un compact connexe qui contient une infinité de géodésiques de lumière, ce qui contredit le lemme précédent. □

D'après la section 8.3.1, une conséquence de la proposition précédente est que tout groupe de Schottky Γ admet un ensemble limite Λ_Γ. Le complémentaire de Λ_Γ est noté Ω_Γ. L'ensemble limite d'un groupe de Schottky de Conf($\mathbf{Ein}_n$) a des propriétés vraiment remarquables, comme le montre le

Théorème 9.13. *Soit Γ un groupe de Schottky de Conf($\mathbf{Ein}_n$).*

(i) Pour tout domaine fondamental D, l'ouvert $\Omega = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma(D)$ coïncide avec l'ouvert Ω_Γ. En particulier, l'action de Γ sur Ω_Γ est propre et cocompacte.

(ii) L'ensemble limite Λ_Γ est une lamination par géodésiques de lumière, transversalement modelée sur un ensemble de Cantor.

(iii) L'action de Γ est minimale sur l'espace des géodésiques de lumière de Λ_Γ.

Preuve : On se donne D un domaine fondamental de Γ et Ω l'ouvert associé. Pour toute suite (γ_k) de Γ tendant simplement vers l'infini, la propriété 3 des suites à distorsions équilibrées et la propriété 4 des suites à dynamique mixte entraînent que la limite de $\gamma_k(D)$ est incluse dans le cercle $\Delta^+(\gamma_k)$. De plus comme $\overset{\circ}{D}$ est non vide, cette limite n'est pas réduite à un point. Ainsi, tout le cercle $\Delta^+(\gamma_k)$ est dans Λ. On obtient que Λ_Γ est inclus dans Λ et par

conséquent $\Omega \subset \Omega_\Gamma$. Maintenant, comme l'action de Γ est cocompacte sur Λ, elle n'est propre sur aucun ouvert contenant strictement Λ d'où légalité $\Omega = \Omega_\Gamma$ et finalement $\Lambda = \Lambda_\Gamma$. Ceci démontre l'assertion (i) du théorème.

On désigne par $\hat{\Lambda}_\Gamma$ l'espace des géodésiques de lumière de Λ_Γ et on munit cet espace de la distance de Hausdorff (induite par une distance arbitrairement fixée sur $\mathbf{Ein}_n$). On montre le (ii) grâce au

Lemme 9.14. *L'application K qui à γ_∞ dans $\partial\Gamma$ associe la composante $K(\gamma_\infty)$ de $\hat{\Lambda}_\Gamma$ est un homéomorphisme.*

Preuve : On sait déja que K est une bijection, par la proposition 9.7. Comme $\partial\Gamma$ et $\hat{\Lambda}_\Gamma$ sont compacts, il suffit de vérifier que K est continue. Pour cela choisissons une suite $\gamma_\infty^{(n)}$ de $\partial\Gamma$ qui converge vers γ_∞. Cela signifie qu'il existe une suite d'entiers (r_n) qui tend vers $+\infty$ telle que $\gamma_\infty^{(n)}$ et γ_∞ aient les mêmes r_n premières lettres. Pour tout n, $K(\gamma_\infty^{(n)})$ est la limite décroissante d'une suite de compacts $C_k^{(n)}$, où chaque $C_k^{(n)}$ est une composante connexe de $\overline{\Lambda_k}$. De même $K(\gamma_\infty)$ est la limite d'une suite décroissante de C_k avec C_k composante connexe de $\overline{\Lambda_k}$. On a de plus $C_{r_n-1}^{(n)} = C_{r_n-1}$ pour tout n. Ainsi, la limite de $C_{r_n-1}^{(n)}$ lorsque n tend vers l'infini est $K(\gamma_\infty)$ et donc toute suite de géodésiques de lumière incluse dans $C_{r_n-1}^{(n)}$ tend vers $K(\gamma_\infty)$. C'est en particulier le cas pour $K(\gamma_\infty^{(n)})$. □

Enfin, le (iii) est un simple corollaire de ce lemme puisque Γ agit minimalement sur son bord.

□

9.3 Topologie des variétés quotients

Nous nous limiterons à l'étude des groupes de Schottky contenus dans la composante de l'identité de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$. En nous inspirant de l'étude des groupes de Schottky complexes faite par Seade et Verjovsky dans [SV], nous allons prouver le

Théorème 9.15. *Soit Γ un groupe de Schottky de $Conf_0(\mathbf{Ein}_n)$ à g générateurs. On note M la variété compacte Ω_Γ/Γ. Alors M est difféomorphe au produit $\mathbf{S}^1 \times (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-2})^{(g-1)\sharp}$ où $(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-2})^{(g-1)\sharp}$ désigne la somme connexe de $g-1$ copies de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-2}$.*

Preuve : On note s_1,..., s_g les générateurs du groupe Γ. On désigne par Δ_i^+ et Δ_i^- les cercles attracteurs et répulseurs de s_i.

Nous allons tout d'abord montrer

Lemme 9.16. *Toute géodésique de lumière admet une base de voisinages tubulaires dont la frontière est une hypersurface lisse de $\mathbf{Ein}_n$ de signature lorentzienne.*

Preuve : Dans le modèle $\widehat{\mathbf{Ein}}_n$, il est clair que toute courbe de type $\theta \mapsto (\theta, x)$ admet une base de voisinages dont les frontières sont des hypersurfaces de

signature lorentzienne. Il s'agit des voisinages $U_\epsilon = \bigcup_{\theta\in\mathbf{S}^1}(\theta, D_\epsilon)$ avec D_ϵ la boule de centre x et de rayon ϵ dans $\mathbf{S}^{n-1}$. Bien sûr, les projections de ces courbes sur $\mathbf{Ein}_n$, ainsi que leurs images par une transformation conforme ont la même propriété. On vient donc de montrer que les courbes, obtenues comme projection sur $\mathbf{Ein}_n$ des sous-espaces de $\mathbf{R}^{2,n}$ de dimension 3 et de signature $(--+)$, possèdent une base de voisinages avec la propriété requise. Le lemme découle maintenant du fait que toute géodésique de lumière peut être approximée par une telle courbe. $\square$

On peut donc supposer par la suite que les $\Sigma_i^\pm$ sont des hypersurfaces lisses de $\mathbf{Ein}_n$ dont la signature est lorentzienne.

On considère maintenant l'ouvert $\Omega_{\Delta_1^-} = X\backslash\Delta_1^-$. Rappelons que le feuilletage $\mathcal{H}_{\Delta_1^-}$ (voir chapitre 4 section 4.6) est un feuilletage produit et que toute géodésique de lumière qui ne coupe pas Δ_1^- est une transversale totale pour $\mathcal{H}_{\Delta_1^-}$. La projection le long des feuilles définit une submersion $\pi_{\Delta_1^-}$ de $\Omega_{\Delta_1^-}$ sur Δ_1^-.

D'après le chapitre 4 section 4.6, il existe un difféomorphisme qui envoie l'ouvert $\Omega_{\Delta_1^-} = X\backslash\Delta_1^-$ sur le produit $\mathbf{S}^1\times\mathbf{R}^{n-1}$. De plus, ce difféomorphisme identifie Δ_1^+ à $\mathbf{S}^1\times\{0\}$ et les feuilles de $\mathcal{H}_{\Delta_1^-}$ aux $\{\theta\}\times\mathbf{R}^{n-1}$. On s'intéresse à présent au domaine fondamental D. Chaque surface $\Sigma_i^\pm$ est transverse à toutes les feuilles de $\mathcal{H}_{\Delta_1^-}$. En effet ces dernières sont de type lumière et ne peuvent pas avoir de points de tangeance avec une hypersurface de signature lorentzienne. Ainsi, il existe un difféomorphisme qui envoie D sur le produit $\mathbf{S}^1\times X_g$ où X_g désigne la sphère $\mathbf{S}^{n-1}$ à laquelle on a ôté $2g$ disques ouverts disjoints $D_1^\pm$,..., $D_g^\pm$. On appelle $S_1^\pm$,...,$S_g^\pm$ les frontières de ces disques. Les hypersurfaces Σ_i^+ (resp. Σ_i^-) sont identifiées par ce difféomorphisme aux $S^1\times S_i^+$ (resp. $S^1\times S_i^-$). La variété M est obtenue en recollant les $S^1\times S_i^-$ avec les $S^1\times S_i^+$ via les applications $s_i : (\theta, x)\mapsto(t_i(\theta,x), r_i(\theta,x))$. Comme les s_i sont supposées être dans la composante neutre de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$, les applications $t_i(\theta,x)$ sont homotopes à la projection sur S^1. Ainsi, les s_i sont homotopes aux applications de recollement $(\theta,x)\mapsto(\theta, r_i(\theta,x))$ (où les $r_i(\theta,x)$ dépendent différentiablement de θ). Ainsi, M a toujours une structure produit de S^1 par la variété obtenue à partir de M_g en recollant deux à deux les S_i^+ et S_i^-. On reconnaît là la somme connexe de $g-1$ copies de $\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^{n-2}$. $\square$

On remarque que la topologie de la variété $M = \Omega_\Gamma/\Gamma$ dépend uniquement du nombre de générateurs et pas de la configuration des $\Delta_i^\pm$. En revanche, lorsque le nombre de générateurs est fixé, les classes d'équivalences de structures conformes sur M sont en correspondance avec les classes de conjugaisons des groupes Γ et par conséquent des configurations non conjuguées conduisent à des structures conformes non équivalentes. En particulier, il y a une infinité de structures conformément plates non équivalentes sur M.

Grâce aux travaux de Kulkarni et Raymond dans [KR], on sait que tout fibré en cercles de classe d'Euler non nulle sur une surface de genre ≥ 2

peut être muni d'une structure Anti-de Sitter, donc conformément plate. Le théorème 9.15 affirme qu'il existe également une structure conformément plate sur tout produit $\mathbf{S}^1 \times \Sigma$ avec Σ une surface de genre ≥ 2. Ces deux résultats réunis permettent de conclure que tout fibré en cercles sur une surface de genre ≥ 2 admet une structure lorentzienne conformément plate. En fait on peut montrer qu'à part les fibrés non triviaux sur $\mathbf{S}^2$, tout fibré en cercles sur une surface admet une structure lorentzienne conformément plate.

9.4 Chirurgie lorentzienne conforme

Soient M et N deux variétés possédant une structure lorentzienne conformément plate. Nous allons décrire un procédé qui permet, sous certaines hypothèses, de construire à partir de M et N une troisième variété $M\sharp N$ elle aussi munie d'une structure conformément plate. De manière plus précise on a l'énoncé :

Théorème 9.17. *Soient M et N deux variétés lorentziennes conformément plates. On suppose qu'il existe dans M une géodésique de lumière fermée Δ_1 et un voisinage V_1 de cette géodésique qui se plonge conformément dans l'espace $\mathbf{Ein}_n$. On suppose que N vérifie la même propriété pour une géodésique fermée Δ_2 et un voisinage V_2. Il existe un moyen de recoller M et N le long de deux voisinages tubulaires de Δ_1 et Δ_2 pour obtenir une variété $M\sharp N$ lorentzienne et conformément plate.*

Preuve : On note ϕ_1 le plongement de V_1 dans $\mathbf{Ein}_n$ et ϕ_2 le plongement de V_2 dans $\mathbf{Ein}_n$. On appelle Ω_1 (resp.Ω_2) l'ouvert $\phi_1(V_1)$ (resp. $\phi_2(V_2)$. On peut supposer sans perdre de généralité que $\phi_1(\Delta_1)$ et $\phi_2(\Delta_2)$ sont disjoints. Soit f une application de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ ayant une dynamique mixte ou à distorsions équilibrées avec pour cercles attracteurs et répulseurs Δ_1 et Δ_2. On peut choisir f de manière à ce qu'il existe deux voisinages tubulaires Ω_1 et Ω_2 de Δ_1 et Δ_2 respectivement ($\Omega_1 \subset V_1$ et $\Omega_2 \subset V_2$), pour lesquels $f(\Omega_1) = \mathbf{Ein}_n \backslash \overline{f(\Omega_2)}$. Il existe un difféomorphisme h de $\partial\Omega_1$ dans $\partial\Omega_2$ vérifiant $\phi_2 \circ h = f \circ \phi_1$.
On définit la variété $M\sharp N$ comme $(M\backslash\Omega_1) \bigcup (N\backslash\Omega_2)/h$.
Il nous reste à vérifier que $M\sharp N$ admet une structure conformément plate. On a un plongement de $(V_1\backslash\Omega_1) \bigcup (V_2\backslash\Omega_2)/h$ qui est donné par l'application $(f \circ \phi_1) \bigcup \phi_2$. Cette carte associée à celles définissant les structures conformément plates de $M\backslash\Omega_1$ et $N\backslash\Omega_2$ définit un atlas de $M\sharp N$ pour lequel les applications de changement de cartes sont dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$. □

Remarque 9.18. *Le procédé du théorème 9.17 n'est pas canonique. Dans la preuve du théorème, des choix différents de l'application f ne changent pas la topologie de $M\sharp N$ mais conduisent à des structures conformément plates différentes.*

Partie V

Structures conformes essentielles

Chapitre 10

Construction de structures conformes essentielles sur des variétés compactes

Nous nous proposons de construire dans ce chapitre des exemples de structures conformes lorentziennes sur des variétés compactes pour lesquelles le groupe conforme est essentiel.

10.1 Des conditions suffisantes d'essentialité

Nous allons nous attarder pour commencer sur la dynamique de certains flots de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ qui vont être pour nous le prototype des flots conformes essentiels. On se place dans la base $e_1, ..., e_{n+2}$ où la forme quadratique $q^{2,n}$ est donnée par $q^{2,n}(x) = -2x_1x_{n+2} + 2x_2x_{n+1} + x_3^2 + ... + x_n^2$. On considère les deux flots suivants, exprimés matriciellement dans $e_1, ..., e_{n+2}$ par:

$$\Phi^t = \begin{pmatrix} 1 & t & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & t \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Psi^t = \begin{pmatrix} e^t & & & & & & \\ & e^{-t} & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & e^t & \\ & & & & & & e^{-t} \end{pmatrix}$$

1) Étude du flot Φ^t.

De l'expression matricielle du flot Φ^t, on déduit qu'il est à distorsions équilibrées avec Δ_0, le projeté sur $\mathbf{Ein}_n$ du plan $vect(e_1, e_{n+1})$, pour cercle attracteur et répulseur. Au vu des expressions matricielles données au chapitre 4 section 4.4.3, il n'est pas difficile de voir que le flot Φ^t est en fait une extension à $\mathbf{Ein}_n$ d'une translation isotrope de l'espace de Minkowski. Nous avons déjà vu au chapitre 5 rubrique 5.4.1 que les points fixes de Φ^t sont exactement les points de Δ_0 et les orbites de Φ^t non réduites à un point sont les droites de $\mathcal{D}_{\Delta_0}$ (voir chapitre 4 section 4.6 pour les notations). Plus exactement, si Δ est une géodésique de lumière qui coupe Δ_0 en un unique point p,

alors Φ^t préserve Δ et agit dessus comme une transformation parabolique de pôle p. On constate également que Φ^t préserve le tore d'Einstein $\mathbf{T}_0$ obtenu par projection sur $\mathbf{Ein}_n$ du sous-espace
$vect(e_1, e_2, e_{n+1}, e_{n+2})$. En dimension 3, le complémentaire de $\mathbf{T}_0$ dans $\mathbf{Ein}_3$ est une composante Anti-de-Sitter $\mathbf{AdS}_3$ sur laquelle Φ^t agit par le flot $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \{Id\} \subset SL_2(\mathbf{R}) \times SL_2(\mathbf{R})$. On reconnaît là le flot horocyclique sur le fibré unitaire tangent à $\mathbf{H}^2$. Aussi appellerons-nous par la suite **flot de type horocyclique** tout flot conjugué à Φ^t dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$.

Soit M une variété compacte munie d'une structure lorentzienne conformément plate. On appelle δ l'application développante de $\tilde{M}$ dans $\mathbf{Ein}_n$ et $H \subset \mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ le groupe d'holonomie associés à cette structure (théoriquement, l'application développante est à valeur dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$ mais il suffit de la projeter sur $\mathbf{Ein}_n$ pour obtenir δ). On note Ω l'image de $\tilde{M}$ par l'application δ. La proposition suivante va être un outil précieux pour montrer qu'une structure conformément plate est fortement essentielle.

Proposition 10.1. *Si le groupe H contient un flot ϕ^t de type horocyclique dans son centralisateur et que Ω contient des points fixes de ϕ^t, alors il existe sur M un flot conforme $\overline{\phi}^t$ fortement essentiel, qui s'envoie sur ϕ^t par le morphisme d'holonomie.*

Preuve : Du lemme 7.10, on obtient que ϕ^t induit sur M un flot conforme $\overline{\phi}^t$. On appelle Δ_0 le cercle attracteur et répulseur de ϕ^t et on choisit un petit ouvert U de $\tilde{M}$ tel que les applications δ et π (π désigne l'application de revêtement de $\tilde{M}$ sur M) soient toutes deux des difféomorphismes de U sur leurs images respectives. On demande de plus à ce que $\delta(U)$ contienne des points de Δ_0. Il existe alors un difféomorphisme conforme $\overline{\delta}$ de $\pi(U)$ dans $\delta(U)$ tel que $\overline{\delta} \circ \overline{\phi}^t = \phi^t \circ \overline{\delta}$ partout où cette expression a un sens. Rappelons que la dynamique de ϕ^t est à distorsions équilibrées et d'après la section 5.3.1 du chapitre 5, il existe une submersion π_+ de $\mathbf{Ein}_n \backslash \Delta_0$ sur Δ_0 telle que pour tout $x \in \mathbf{Ein}_n \backslash \Delta_0$, on ait $\lim_{t \to +\infty} \phi^t(x) = \pi_+(x)$. On considère alors un petit intervalle I de Δ_0 contenu dans $\delta(U)$. On choisit V un ouvert précompact inclus dans $U \cap \pi_+^{-1}(I)$. On doit alors avoir $\lim_{t \to +\infty} \phi^t(V) \subset I$. Si $\overline{I}$ et $\overline{W}$ désignent les images de I et W par $\overline{\delta}^{-1}$, on obtient également que $\lim_{t \to +\infty} \overline{\phi}^t(\overline{V}) \subset \overline{I}$. On conclut que $\overline{\phi}^t$ ne peut préserver une mesure μ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur M. Si c'était le cas, on devrait avoir $\mu(\overline{\phi}^t(\overline{V})) = \mu(\overline{V})$ pour tout t, mais comme $\mu(\overline{I}) = 0$ et $\mu(\overline{V}) \neq 0$, on aboutirait à une absurdité. $\square$

2) Étude du flot Ψ^t

De la forme matricielle de Ψ^t, on déduit aisément que celui-ci est à distorsions équilibrées. Cette fois-ci, les cercles attracteurs et répulseurs sont disjoints. Plus précisément, Δ^+ (resp. Δ^-) est le projeté sur $\mathbf{Ein}_n$ du plan $vect(e_1, e_{n+1})$ (resp. $vect(e_2, e_{n+2})$).
Le flot Ψ^t préserve le tore $\mathbf{T}_0$, projeté sur $\mathbf{Ein}_n$ du sous-espace $vect(e_1, e_2, e_{n+1}, e_{n+2})$. En dimension 3, le complémentaire de $\mathbf{T}_0$ dans $\mathbf{Ein}_3$ est une composante

$\mathbf{AdS}_3$ sur laquelle Ψ^t agit via le flot $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \times \{Id\} \subset SL_2(\mathbf{R}) \times SL_2(\mathbf{R})$. On reconnaît l'action du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent à $\mathbf{H}^2$. Aussi appellerons-nous **flot de type géodésique** tout flot conjugué au flot Ψ^t dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$. Par une démonstration en tout point similaire à celle de la proposition 10.1, on obtient:

Proposition 10.2. *Si H contient dans son centralisateur un flot Ψ^t de type géodésique et que Ω contient des points fixes de Ψ^t, alors il existe sur M un flot conforme $\overline{\Psi}^t$ fortement essentiel, qui s'envoie sur Ψ^t par le morphisme d'holonomie.*

10.2 Structures essentielles sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$

10.2.1 Structures complètes C^∞-essentielles sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$

Prenons un flot ψ^t non précompact de $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,2})$. Par une projection stéréographique, on peut associer à ψ^t un flot $\tilde{\psi}^t$ de $\mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}}_3)$. Ce flot $\tilde{\psi}^t$ fixe un cône de lumière de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_3$ ainsi que les composantes de Minkowski $(\mathbf{M}_j)$ qui forment le complémentaire de ce cône. Comme l'élément ζ de $\mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}}_3)$ (voir chapitre 4 section 4.2.2) envoie $\mathbf{M}_j$ sur $\mathbf{M}_{j+1}$, le groupe Γ_ψ engendré par $\zeta\tilde{\psi}^1$ agit proprement discontinûment cocompactement sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_3$. On montre alors:

Proposition 10.3. *Si le centralisateur de $\tilde{\psi}^t$ dans $Conf(\widetilde{\mathbf{Ein}}_3)$ contient un flot $\tilde{\phi}^t$ non précompact et différent de $\tilde{\psi}^t$, alors le flot $\tilde{\phi}^t$ passe au quotient sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_3/\Gamma_\psi$ en un flot C^∞-essentiel.*

Preuve : Les flots d'isométries lorentziennes sur les variétés compactes de dimension 3 sont complètement compris grâce aux travaux de A.Zeghib dans [Ze2] et notamment, on dispose de la liste exhaustive des flots d'isométries lorentziennes qui ne sont pas précompacts. Aucun flot sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$ ne figurant dans cette liste, on en déduit que si le flot induit par $\tilde{\psi}^t$ était un flot d'isométries pour une certaine métrique de la classe conforme (des métriques C^∞) de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_3/\Gamma_\psi$, il devrait être précompact. Comme ce n'est pas le cas, c'est que ce flot est C^∞-essentiel. □

Ne disposant pas d'une classification des flots d'isométries lorentziennes en dimension supérieure, nous ne pouvons pas généraliser l'argument précédent au-delà de la dimension 3. Mais cela n'est pas un problème pour construire des structures essentielles (et même fortement essentielles) en dimension quelconque.

10.2.2 Structures complètes fortement essentielles sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$ $(n \geq 3)$

Nous partons comme précédemment d'un flot ψ^t non précompact de $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1})$, que nous voyons comme un flot $\tilde{\psi}^t$ de $\mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}}_n)$. Le groupe Γ_ψ défini comme dans la rubrique précédente agit toujours proprement discontinûment cocompactement sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$. Nous montrons alors:

Proposition 10.4. *Si ψ^t est centralisé par un flot de translations isotropes dans Conf$(\mathbf{R}^{1,n-1})$, alors la structure conforme sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n/\Gamma_\psi$ est fortement essentielle.*

Preuve :

Nous appelons τ^t le flot de translations isotropes qui centralise ψ^t. D'après la première section de ce chapitre, ce flot est de type horocyclique. D'autre part, l'application développante associée à la structure conformément plate de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n/\Gamma_\psi$ est surjective et τ^t centralise le groupe d'holonomie qui n'est autre que le groupe engendré par ψ^1. Il ne reste plus qu'à appliquer la proposition 10.1 pour conclure. □

Remarque 10.5. *Remarquons que les structures construites ci-dessus peuvent avoir de gros groupes conformes si l'on choisit ψ^t judicieusement. Par exemple, sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$, certaines structures ont dans leur groupe conforme des copies de $O(2,k)$ $(k \leq n-2)$ ou $O(1,k)$ $(k \leq n-2)$.*

10.2.3 Un exemple de structure non complète essentielle sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$ $(n \geq 3)$

Nous reprenons l'exemple du chapitre 7 section 7.6.3. Cet exemple consiste à faire agir une translation τ de type temps de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$. Rappelons que l'action préserve individuellement une famille de composantes de Minkowski $(\mathbf{M}_j)$ et que, par exemple, elle est propre cocompacte sur $\Omega = \mathbf{M}_0 \cup I_0 \cup \mathbf{M}_1$. Nous considérons la structure quotient Ω/τ. C'est une structure conformément plate sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$. L'application développante (à image dans $\mathbf{Ein}_n$) est une surjection sur $\mathbf{Ein}_n$ et le groupe d'holonomie, qui n'est autre que le groupe engendré par τ, contient un flot de translations isotropes dans son centralisateur. D'après la proposition 10.1, la structure obtenue est fortement essentielle. Notons que cet exemple met en évidence une nouvelle différence entre les propriétés des flots conformes en géométrie riemannienne et lorentzienne. En effet, dans le cadre riemannien, tout flot conforme essentiel sur une variété compacte admet au moins un point fixe. Ceci n'est plus vrai dans le cadre lorentzien comme le montre la

Proposition 10.6. *Sur la variété compacte Ω/τ, il existe des flots conformes fortement essentiels qui n'ont pas de point fixe.*

Preuve : Il existe dans le centralisateur de τ un flot ϕ^t constitué de translations de type temps de direction τ' différente de τ. Le flot ϕ^t n'admet aucun point fixe sur l'ouvert Ω (voir au chapitre 5 section 5.4.1 les points fixes des translations de type temps). Ainsi, $\overline{\phi}^t$ n'admet pas non plus de point fixe sur M. De plus, le flot $\overline{\phi}^t$ est fortement essentiel. En effet, si ce n'était pas le cas, le groupe engendré par τ et ϕ^t devrait préserver une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur Ω. Mais dans le groupe engendré par les directions τ et τ', il y a toujours une direction u isotrope. Par la proposition 10.1, le flot engendré par la translation de direction u (qui est de type horocyclique) possède des points fixes dans Ω et donc ne peut préserver sur cet ouvert aucune mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. □

10.3 Structures essentielles sur $\mathbf{S}^1 \times (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-2})^{(g-1)\sharp}$

Nous nous sommes jusqu'ici limités à considérer des structures conformes essentielles sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$. Nous voudrions montrer dans cette section que beaucoup d'autres types topologiques de variétés compactes sont compatibles avec des structures conformes essentielles. L'idée est d'utiliser des groupes de Schottky pour cette construction. Néanmoins, pour un groupe de Schottky Γ quelconque (c'est-à-dire pour lequel les cercles attracteurs et répulseurs des générateurs sont disposés n'importe comment), le groupe conforme de la variété Ω_Γ/Γ est trivial. Il va donc falloir se limiter à des groupes de Schottky judicieusement choisis.

10.3.1 Premiers exemples

On travaille encore dans la base $(e_1, ..., e_{n+2})$ du début du chapitre et on appelle $\mathbf{T}_0$ le tore d'Einstein obtenu comme projection sur $\mathbf{Ein}_n$ du sous-espace $vect(e_1, e_2, e_{n+1}, e_{n+2})$. Le stabilisateur de $\mathbf{T}_0$ dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ est le groupe $SL_2(\mathbf{R}) \times SL_2(\mathbf{R}) \times O(n-2)$. Nous renvoyons au chapitre 4 section 4.3 pour voir comment on identifie $SL_2(\mathbf{R}) \times SL_2(\mathbf{R})$ et $O(2,2)$.
Soit $\hat{\gamma}$ un élément hyperbolique de $SL_2(\mathbf{R})$. Alors l'élément $\gamma = (\hat{\gamma}, Id, Id) \in SL_2(\mathbf{R}) \times SL_2(\mathbf{R}) \times O(n-2)$ s'écrit dans une certaine base sous la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ & \lambda^{-1} & & & \\ & & Id & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

et par conséquent γ est à distorsions équilibrées. Ses cercles attracteurs et répulseurs sont disjoints et appartiennent au feuilletage $\mathcal{F}_2$ de $\mathbf{T}_0$ (voir le chapitre 4 section 4.3 pour les notations). Ils correspondent aux points fixes de $\hat{\gamma}$ sur $\mathbf{S}^1$.
Considérons à présent un groupe de Schottky $\hat{\Gamma}$ dans $SL_2(\mathbf{R})$ engendré par g générateurs $\hat{\gamma}_1, ..., \hat{\gamma}_g$. On appelle Γ le groupe de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ engendré par les $\gamma_i = (\hat{\gamma}_i, Id, Id)$. Par ce qui précède, chaque γ_i est à distorsions équilibrées, de cercles attracteurs et répulseurs Δ_i^+ et Δ_i^- dans $\mathcal{F}_2$, tous disjoints deux à deux puisque les pôles des $\hat{\gamma}_i$ sont eux-même disjoints deux à deux. Ainsi, quitte à remplacer γ_i par une certaine puissance $\gamma_i^{m_i}$, le groupe Γ est un groupe de Schottky de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$. On appelle M la variété compacte Ω_Γ/Γ (voir chapitre 9 pour les notations).

Nous allons maintenant montrer que la structure conforme quotient sur M est *fortement essentielle*. Tout d'abord, on remarque que le normalisateur de Γ dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ est, à indice fini près, $\{Id\} \times SL_2(\mathbf{R}) \times O(2-n)$. Cela suffit déjà pour voir que M est C^∞-essentielle. En effet, grâce aux travaux de [Ze2], on connaît les variétés compactes sur lesquelles le groupe $SL_2(\mathbf{R})$ agit par isométries lorentziennes (pour une métrique C^∞), et M n'en fait pas partie. Ainsi, $\mathrm{Conf}(M)$ est C^∞-essentiel.
Il existe un autre moyen de voir que M est non seulement C^∞ mais aussi

fortement essentielle. Pour cela, on considère les flots $\phi_1^t = \{Id\} \times \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \{Id\}$ et $\phi_2^t = \{Id\} \times \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \times \{Id\}$, qui passent au quotient sur M en deux flots $\overline{\phi}_1^t$ et $\overline{\phi}_2^t$. Le flot ϕ_1^t est de type horocyclique et ses points fixes forment une géodésique de lumière Δ_0 dans le feuilletage $\mathcal{F}_1$ de $\mathbf{T}_0$. Quant au flot ϕ_2^t, il est de type géodésiques et ses points fixes constituent deux géodésiques de lumière Δ_0^+ et Δ_0^- distinctes du feuilletage $\mathcal{F}_1$.
Attardons-nous à présent sur l'ensemble limite Λ_Γ. Il est dans le cas présent très facile à décrire. Si $\mathbf{T}_0$ est identifié à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ muni de la métrique $dxdy$ et que $\Lambda_{\hat{\Gamma}}$ désigne l'ensemble limite de $\hat{\Gamma}$ sur le cercle $\mathbf{S}^1$, alors Λ_Γ n'est autre que le produit $\Lambda_{\hat{\Gamma}} \times \mathbf{S}^1$. Comme les cercles Δ_0, Δ_0^+ et Δ_0^- sont des géodésiques du feuilletage $\mathcal{F}_1$, à savoir des cercles du type $\mathbf{S}^1 \times \{y\}$, ils rencontrent tous les trois l'ouvert Ω_Γ. On peut alors appliquer la proposition 10.1 à ϕ_1^t et le lemme 10.2 à ϕ_2^t pour obtenir que $\overline{\phi}_1^t$ et $\overline{\phi}_2^t$ sont deux flots fortement essentiels sur M.

Remarque 10.7. *Lorsque l'on fixe le nombre g de générateurs, on fixe aussi la topologie de M (à savoir $\mathbf{S}^1 \times (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-2})^{(g-1)\sharp}$), mais le choix de groupes $\hat{\Gamma}$ non conjugués entre eux conduit à une infinité de structures conformes essentielles non équivalentes.*

10.3.2 Interprétation géométrique des exemples précédents en dimension 3

En dimension 3, l'ouvert $\mathbf{Ein}_3 \backslash \mathbf{T}_0$ est une composante Anti-de-Sitter que l'on note abusivement $\mathbf{AdS}_3$. Le groupe Γ agit proprement (mais pas cocompactement) sur $\mathbf{AdS}_3$ et le quotient U (qui est un ouvert de $M = \Omega_\Gamma/\Gamma$) s'identifie au fibré unitaire tangent à la surface hyperbolique ouverte $\Sigma = \mathbf{H}^2/\hat{\Gamma}$. En restriction à U, les flots $\overline{\phi}_1^t$ et $\overline{\phi}_2^t$ sont respectivement le flot horocyclique et le flot géodésique sur $T^1\Sigma$. D'autre part, l'action de Γ sur $\mathbf{T}_0 \cap \Omega_\Gamma$ est propre et cocompacte. Le quotient consiste en un nombre fini de tores $T_1, ..., T_s$ et on a $U = M \backslash T_1 \cup ... \cup T_s$.

Conclusion:
On peut voir M comme la compactification conforme du fibré unitaire tangent à la surface Σ. Les flots horocycliques et géodésiques, qui préservent une métrique lorentzienne sur $T^1\Sigma$, s'étendent en deux flots conformes sur M qui sont fortement essentiels.

10.3.3 Autres exemples

L'idée pour construire d'autres exemples est de déformer les structures obtenues précédemment. La topologie de la variété M demeurera inchangée mais les structures conformes obtenues seront différentes.

On part donc d'un groupe de Schottky $\Gamma = \langle \gamma_1, ..., \gamma_g \rangle$ comme précédemment. Un premier procédé consiste à considérer une représentation ρ de $\hat{\Gamma}$ à valeurs dans un des groupes à un paramètre ϕ_1^t ou ϕ_2^t. On appelle

$\Gamma_\rho = Graph(\hat{\Gamma}, \rho)$ le sous-groupe de $SL_2(\mathbf{R}) \times SL_2(\mathbf{R}) \times O(n-2)$ constitué des éléments de la forme $(\hat{\gamma}, \rho(\hat{\gamma}), Id)$ pour $\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma}$. On montre alors:

Proposition 10.8. *Pour ρ suffisamment proche de la représentation triviale, Γ_ρ est encore un groupe de Schottky. De plus $\Omega_{\Gamma_\rho} = \Omega_\Gamma$ et la structure conforme sur $\Omega_{\Gamma_\rho}/\Gamma_\rho$ est fortement essentielle.*

Preuve : Pour ρ très proche de la représentation triviale, les générateurs $\gamma_1', ..., \gamma_g'$ sont très proches de $\gamma_1, ..., \gamma_g$ et par conséquent, Γ_ρ est encore un groupe de Schottky. De plus, pour ρ très proche de la représentation triviale et pour $\hat{\gamma}$ hyperbolique dans $SL_2(\mathbf{R})$, les cercles attracteurs et répulseurs de $(\hat{\gamma}, Id, Id)$ et de $(\hat{\gamma}, \rho(\hat{\gamma}), Id)$ sont identiques (ils correspondent aux points fixes de $\hat{\gamma}$ sur $\mathbf{S}^1$). Cela prouve que $\Lambda_{\Gamma_\rho} = \Lambda_\Gamma$. Maintenant, si ρ est à image dans le groupe à un paramètre ϕ_1^t (resp. ϕ_2^t), le flot ϕ_1^t (resp.ϕ_2^t) passe au quotient en un flot $\overline{\phi}_1^t$ (resp. $\overline{\phi}_2^t$) et comme Δ_0 (resp. $\Delta_0^+ \cup \Delta_0^-$) rencontre l'ouvert Ω_{Γ_ρ}, la proposition 10.1 (resp. 10.2) permet d'affirmer que le flot $\overline{\phi}_1^t$ (resp. $\overline{\phi}_2^t$) est fortement essentiel sur $\Omega_{\Gamma_\rho}/\Gamma_\rho$. □

Un second procédé part de la remarque que le centralisateur de ϕ_1^t dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ est inclus dans le stabilisateur de Δ_0. Celui-ci est isomorphe à $(\mathbf{R} \times SL_2(\mathbf{R})) \ltimes N$ où N est le groupe de Heisenberg de dimension $2n-3$ (voir section 4.6). En comparant les expressions matricielles obtenues à la section 4.3 pour les éléments de $SL_2(\mathbf{R}) \times SL_2(\mathbf{R}) \times \{Id\}$ et à la section 4.6 du même chapitre pour les éléments de $(\mathbf{R} \times SL_2(\mathbf{R})) \ltimes N$, on voit que le flot ϕ_1^t est exactement le centre de $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$. D'autre part, si l'on note les éléments de $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ sous la forme (A, n) ($A \in SL_2(\mathbf{R})$, $n \in N$), alors tous les éléments de Γ s'écrivent $(\hat{\gamma}, Id)$ ($\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma}$).
On perturbe chaque générateur $(\hat{\gamma}_i, Id)$ de Γ en lui ajoutant une petite composante $n_i \in N$ et on considère le groupe Γ' engendré par les $(\hat{\gamma}_i, n_i)$. On montre alors:

Proposition 10.9. *Si les n_i sont suffisamment proches de l'identité, alors le groupe Γ' est encore un groupe de Schottky et la structure conforme sur $\Omega_{\Gamma'}/\Gamma'$ est fortement essentielle.*

Preuve : En perturbant très légèrement les générateurs d'un groupe de Schottky, on obtient toujours un groupe de Schottky, donc Γ' est un groupe de Schottky dès que les n_i sont suffisamment proches de Id. D'autre part, si D est un domaine fondamental pour l'action de Γ, l'intérieur de D rencontre Δ_0. Maintant, pour des n_i très proches de Id, il existe un domaine fondamental D' pour l'action de Γ' qui est très proche de D et qui rencontre donc Δ_0. On en conclut que $\Omega_{\Gamma'}$ rencontre Δ_0 et on peut appliquer la proposition 10.1 pour affirmer que ϕ_1^t induit un flot fortement essentiel sur $\Omega_{\Gamma'}/\Gamma'$.

□

10.3.4 Exemples de structures essentielles non kleiniennes

Précisons tout de suite que par structure non-kleinienne, on entend ici une structure qui ne s'obtient pas comme quotient d'un ouvert de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_n$.

Pour construire de telles structures, il suffit de trouver des structures conformément plates dont le groupe d'holonomie (vu comme sous-groupe de $\mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}_n})$) n'est pas discret. Tous les exemples que nous allons donner sont en dimension 3.
Soit $\Gamma = \langle \gamma_1, ..., \gamma_g \rangle$ un groupe de Schottky à g générateurs agissant sur $\mathbf{Ein}_3$. Nous avons vu au chapitre 9 que le quotient $M = \Omega_\Gamma / \Gamma$ était difféomorphe au produit $\mathbf{S}^1 \times \Sigma_g$ où Σ_g désigne le tore à g trous. La structure conformément plate obtenue sur $\mathbf{S}^1 \times \Sigma_g$ possède une application développante δ à valeur dans $\mathbf{Ein}_n$ (qui n'est autre que l'application de revêtement de $\tilde{M} = \tilde{\Omega}_\Gamma$ sur Ω_Γ), et un morphisme d'holonomie ρ (à valeurs dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$), allant de $\pi_1(M)$ dans Γ. Comme la structure sur M est kleinienne, le morphisme ρ est facile à décrire. Les groupes fondamentaux $\pi_1(M)$ et $\pi_1(\Omega_\Gamma)$ agissent sur $\tilde{M}$ comme deux groupes $\tilde{\Gamma}$ et Γ' de sorte que $M = \tilde{M}/\tilde{\Gamma}$ et $\Omega_\Gamma = \tilde{M}/\Gamma'$. On a alors la suite exacte:

$$1 \to \Gamma' \to \tilde{\Gamma} \to \Gamma \mapsto 1$$

Le morphisme d'holonomie ρ n'est autre que la projection de $\tilde{\Gamma}$ sur Γ. On se fixe une fois pour toutes un point base x_0 de M et q_0 un point de Ω_Γ dans la fibre de x_0. Les éléments de $\pi_1(M)$ qui sont dans le noyau du morphisme d'holonomie sont exactement ceux qui se remontent dans Ω_Γ en des lacets basés en p_0. On peut alors montrer:

Lemme 10.10. *Il existe des générateurs $z, a_1, b_1, ..., a_g, b_g$ de $\pi_1(M)$ (z est un élément central et $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1$) tels que:*
$\rho(z) = id$
$\rho(a_i) = id$ $(i \in \{1, ..., g\})$
$\rho(b_i) = \gamma_i$ $(i \in \{1, ..., g\})$

Preuve :

On appelle D un domaine fondamental du groupe Γ, et on peut supposer que p_0 appartient à D. Comme nous l'avons vu lors de la proposition 9.15, D est homéomorphe au produit $\mathbf{S}^1 \times X_g$ où X_g désigne la sphère $\mathbf{S}^2$ privée de $2g$ disques ouverts $D_i^\pm$. Le groupe fondamental $\pi_1(D)$ est donc isomorphe au produit de $\mathbf{Z}$ par un groupe libre à $2g$ générateurs. On choisit $s, t_1, ..., t_g, t_{g+1}, ..., t_{2g}$ le système de générateurs suivant:
- s est central. C'est un lacet qui part de p_0 et fait une fois le tour du facteur $\mathbf{S}^1$ dans le sens positif.
- pour $i \in \{1, ..., g\}$, t_i est le lacet qui part de p_0 et fait une fois le tour de D_i^- dans le sens positif.
- pour $i \in \{g+1, ..., 2g\}$, t_i est le lacet qui part de p_0 et fait une fois le tour de D_i^+ dans le sens positif.
On projette les lacets $s, t_1, ..., t_g$ sur M et on appelle leurs images $z, a_1, ..., a_g$. D'autre part, on considère g lacets b_i ($i \in \{1, ..., g\}$) basés en x_0 dont les remontés $\tilde{b}_i$ dans Ω_Γ à partir de p_0 vérifient $\tilde{b}_i(1) = \gamma_i.p_0$. Alors $z, a_1, ..., a_g, b_1, ..$ $.., b_g$ est un système de générateurs pour $\pi_1(M)$. De plus, comme $z, a_1, ..., a_g$ se relèvent dans Ω_Γ en des lacets basés en p_0, ils sont tous dans le noyau de ρ. D'autre part, $\rho(b_i) = \gamma_i$ pour tout i dans $\{1, ..., g\}$. $\square$

Il est maintenant possible de perturber la représentation ρ pour que son image ne soit pas discrète. En effet, on peut choisir le groupe Γ de sorte que chaque générateur γ_i soit le temps 1 d'un groupe à un paramètre γ_i^t. On considère la représentation ρ_t de $\pi_1(M)$ dans Γ donnée par:
$\rho_t(z) = id$
$\rho_t(a_i) = \gamma_i^t$
$\rho_t(b_i) = \gamma_i$
Pour t suffisamment petit, le théorème 6.8 assure que ρ_t est le morphisme d'holonomie d'une structure conformément plate sur $\mathbf{S}^1 \times \Sigma_g$. Pour t_0 petit et irrationnel, le groupe d'holonomie $\rho_{t_0}(\pi_1(M)) = \Gamma_{t_0}$ de notre structure n'est pas discret. Bien sûr, il se pourrait que ce phénomène soit simplement dû au fait que l'on a considéré l'holonomie de notre structure dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ et non pas dans $\mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}}_n)$. Il n'en est rien. Appelons $\tilde{\rho}_{t_0}$ l'holonomie dans $\mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}}_n)$ de notre structure déformée. On a alors:
-$\tilde{\rho}_{t_0}(z) = \zeta^k$ pour un certain entier k (voir chapitre 4 section 4.2.2 pour la définition de ζ).
-$\tilde{\rho}_{t_0}(a_i) = \zeta^{m_i}\tilde{\gamma}_i^{t_0}$ ($\tilde{\gamma}_i^t$ est le remonté dans $\mathrm{Conf}(\widetilde{\mathbf{Ein}}_n)$ du flot γ_i^t et les m_i sont des entiers).
-$\tilde{\rho}_{t_0}(b_i) = \zeta^{n_i}\tilde{\gamma}_i^1$ (avec n_i entiers).
Toujours pour t_0 (petit et) irrationnel, on constate que, par exemple, le groupe engendré par $\tilde{\rho}_{t_0}(z), \tilde{\rho}_{t_0}(a_1)$ et $\tilde{\rho}_{t_0}(b_1)$ contient dans son adhérence le multiple du flot $\tilde{\gamma}_1^t$ par un certain élément ζ^m. Ceci prouve que l'image de $\tilde{\rho}_{t_0}$ n'est pas discrète.

Il faut maintenant vérifier que l'on peut faire la construction précédente en garantissant que la structure obtenue est essentielle. On choisit pour cela Γ un groupe de Schottky comme dans la proposition 10.9. Dans ce cas, Γ centralise un flot ϕ_1^t de type horocyclique et le domaine fondamental D du groupe Γ contient des points fixes de ϕ^t dans son intérieur. Comme nous l'avons déjà vu, cela entraîne que le flot induit $\overline{\phi}^t$ est fortement essentiel sur Ω_Γ/Γ. Lorsque t_0 est très petit, le domaine fondamental de l'action de Γ_{t_0} (Γ_{t_0} n'est plus un groupe de Schottky mais il y a un sens à parler de son domaine fondamental) est très proche de D et va encore contenir des points fixes de ϕ^t dans son intérieur. On peut alors appliquer la proposition 10.1 pour s'assurer que le flot $\overline{\phi}^t$ induit par ϕ^t est encore fortement essentiel pour la structure déformée.

Chapitre 11

Classification des variétés kleiniennes de dimension 3 admettant un flot conforme C^0- essentiel

Le chapitre précédent a été consacré à la construction de nombreux exemples de variétés compactes essentielles. Une fois ces exemples obtenus, il est naturel de se demander s'il est possible de les classifier d'une manière ou d'une autre. Nous avons vu que l'hypothèse d'essentialité pour une structure conformément plate ne permettait pas d'éliminer certains comportements pathologiques (application développante non injective, groupe d'holonomie non discret...). Cela laisse deviner qu'une classification géométrique exhaustive des structures essentielles est hors de portée. Il semble donc raisonnable de limiter notre étude à certaines classes particulières de telles structures. Nous nous proposons dans ce chapitre de nous intéresser aux variétés kleiniennes de $\mathbf{Ein}_n$, c'est-à-dire les variétés obtenues comme quotient Ω/Γ avec Ω un ouvert de $\mathbf{Ein}_n$ et Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ agissant proprement discontinûment sur Ω. On se pose alors la question suivante: *étant donnée une variété kleinienne compacte $M = \Omega/\Gamma$ et $\overline{\phi}^t$ un flot essentiel sur M, que peut-on dire sur Γ et sur $\overline{\phi}^t$?* Nous nous limiterons au cas de la dimension 3, en faisant l'hypothèse que le flot $\overline{\phi}^t$ est C^0-essentiel (nous renvoyons à l'introduction pour les différentes notions d'essentialité). Le chapitre va être consacré à la preuve du

Théorème 11.1. *Soit M une variété kleinienne compacte admettant un flot $\overline{\phi}^t$ qui soit C^0-essentiel, alors on est dans l'un des trois cas suivants:*
(i) Le groupe Γ est virtuellement monogène.
(ii) Le groupe Γ est contenu dans une copie de $SL_2(\mathbf{R}) \times SL_2(\mathbf{R})$. Le flot ϕ^t, remonté de $\overline{\phi}^t$ dans Ω, est un flot facteur $\{Id\} \times \phi_2^t$ où ϕ_2^t est un flot parabolique ou hyperbolique de $SL_2(\mathbf{R})$.
Le groupe Γ est un groupe graphe $\Gamma = Graph(\hat{\Gamma}, \rho)$ où $\hat{\Gamma}$ est un sous-groupe discret libre de $SL_2(\mathbf{R})$ et ρ une représentation de $\hat{\Gamma}$ dans le groupe à un paramètre engendré par ϕ_2^t.

(iii) Le groupe Γ est contenu dans une copie de $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$. Le flot ϕ^t, remonté de $\overline{\phi}^t$ dans Ω est le flot central de $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$.
La projection π_S sur le facteur $SL_2(\mathbf{R})$ est injective en restriction à Γ. De plus, le groupe $\pi_S(\Gamma)$ est libre et discret dans $SL_2(\mathbf{R})$.

Remarque 11.2. *Dans le cas monogène, il est possible de classifier les quotients, au moins d'un point de vue topologique (même si c'est fastidieux). On obtient des structures sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$ (structures de Hopf) ou sur le tore $\mathbf{T}^3$.*

Concernant les parties (ii) et (iii) du théorème, on renvoie aux sections 4.3 et 4.6 pour des précisions algébriques sur les copies de $SL_2(\mathbf{R}) \times SL_2(\mathbf{R})$ et $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$.

11.1 Une caractérisation de la forte essentialité

Dans le cadre lorentzien il est difficile de trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur un flot conforme pour qu'il soit essentiel, quelle que soit la notion d'essentialité que l'on considère. Toutefois, un certain nombre de conditions nécessaires existent, et on se propose d'en donner une dans le cadre des flots fortement essentiels. On suppose toujours que M est une variété kleinienne admettant un flot conforme $\overline{\phi}^t$ qui soit fortement essentiel. Le flot $\overline{\phi}^t$ se remonte en un flot ϕ^t sur Ω et on note G le groupe engendré par le groupe Γ et ϕ^1. On montre alors le

Théorème 11.3. *Si M n'est pas l'univers d'Einstein, le groupe G possède au moins une suite de dynamique mixte ou a distorsions équilibrées qui n'agit pas proprement sur Ω.*

On choisit une métrique de référence $\overline{g}_0$ dans la classe conforme de M et on note $(\overline{\phi}^t)^\star g_0 = e^{\overline{\sigma}_t}\overline{g}_0$. Cette métrique se remonte en une métrique g_0 de Ω et on a $(\phi^t)^\star g_0 = e^{\sigma_t} g_0$, les fonctions σ_t vérifiant de plus $\overline{\sigma}_t(\pi(x)) = \sigma_t(x)$ pour tout x de $\tilde{M}$ (on appelle π l'application de revêtement de Ω sur M). Commençons par prouver le

Lemme 11.4. *Si les distorsions conformes $\overline{\sigma}_t$ sont uniformément bornées par rapport à t, alors le flot $\overline{\phi}^t$ préserve une métrique L^∞ dans la classe conforme.*

Preuve : On remarque tout d'abord que l'existence d'une métrique invariante pour $\overline{\phi}^t$ est équivalente à l'existence d'une métrique invariante pour $\overline{\phi} = \overline{\phi}^1$.

L'existence d'une métrique invariante par $\overline{\phi}$ est elle-même équivalente à l'existence d'une fonction f dans $C^0(M)$ vérifiant $(\overline{\phi})^\star(e^f\overline{g}_0) = e^f\overline{g}_0$. Ceci revient à résoudre l'équation

(E) : $\quad f \circ \overline{\phi} + \overline{\sigma}_1 = f$

Posons $\overline{\sigma}_\infty = Sup_{k\in\mathbb{Z}}\{\overline{\sigma}_k\}$. Comme les $|\overline{\sigma}_k|$ sont bornés indépendemment de k, la fonction $\overline{\sigma}_\infty$ appartient à $L^\infty(M)$. D'autre part, de la relation $\overline{\sigma}_{k+1} = \overline{\sigma}_k \circ \overline{\sigma}_1$, on déduit que $\overline{\sigma}_\infty$ vérifie l'équation (E).

□

Une conséquence de ce lemme est qu'il existe une suite de points $\overline{x}_k$ dans M et une suite de temps entiers t_k tels que la suite $|\overline{\sigma}_{t_k}(\overline{x}_k)|$ tende vers $+\infty$. On peut de plus supposer, quitte à considérer des suites extraites que $\overline{x}_k$ et $\overline{y}_k = \overline{\phi}^{t_k}(\overline{x}_k)$ convergent tous deux vers $\overline{x}_\infty$ et $\overline{y}_\infty$ respectivement. On choisit une suite (x_k) de points de Ω tels que $\pi(x_k) = \overline{x}_k$ et une suite $h_k = \gamma_k \phi^{t_k}$ de G ((γ_k) est une suite de Γ) telles que x_k et $y_k = \gamma_k \phi^{t_k}(x_k)$ convergent vers deux points x_∞ et y_∞ avec $\pi(x_\infty) = \overline{x}_\infty$ et $\pi(y_\infty) = \overline{y}_\infty$ (π désigne l'application de revêtement de Ω sur M). On a de plus $(h_k)^\star g_0 = e^{\sigma_{t_k}} g_0$ et $|\sigma_{t_k}(x_k)|$ tend vers l'infini. La suite (h_k) n'agit pas proprement sur Ω et on va montrer que sa dynamique est mixte ou à distorsions équilibrées, ce qui achèvera la preuve du théorème. On raisonne par l'absurde et on suppose que la suite (h_k) est à distorsion bornée, de pôles (resp. de cônes) attracteurs et répulseurs p^+ et p^- (resp. C^+ et C^-). On commence par montrer la

Proposition 11.5. *Si les pôles p^+ et p^- ne sont pas tous les deux distincts de x_∞ et y_∞, alors M est l'univers d'Einstein.*

Preuve : Supposons par exemple que l'on a $x_\infty = p^-$. On se donne un petit ouvert U contenant x_∞ sur lequel l'application π est injective. Par les propriétés dynamiques des suites à distorsion bornée, il existe une suite extraite (g_{m_k}) telle que les $U_k = g_{m_k}(U)$ constituent une famille strictement croissante d'ouverts de Ω. L'application π est injective en restriction a chaque U_k, donc elle est injective sur U_∞, la réunion de tous les U_k. Maintenant, U_∞ n'est autre que $\mathbf{Ein}_n \backslash C(p^+)$. On obtient que π est injective sur un ouvert dense de Ω, et donc que $\Omega = M = \mathbf{Ein}_n$. $\square$

On suppose donc désormais que p^+ et p^- sont tous les deux distincts de x_∞ et y_∞. Alors on a nécessairement $x_\infty \in C^-$ et $y_\infty \in C^+$. On choisit p_∞ dans C^- qui ne soit pas sur la même géodésique de lumière que x_∞. Les ensembles dynamiquement associés aux points x_∞ et p_∞ pour la suite (h_k) sont deux géodésique de lumière différentes dans C^+. Ainsi, on peut trouver une suite de points (p_k) dans $\mathbf{Ein}_n$ telle que $h_k(p_k)$ converge vers un point q_∞ de C^+ différent de p^+ qui ne soit pas sur la même géodésique de lumière que y_∞. Par conséquent, la suite de composantes de Minkowski pointées $(M(p_k), x_k)$ converge vers la composante de Minkowski $(M(p_\infty), x_\infty)$, au sens ou l'on peut choisir une suite de projections stéréographiques s_k allant de $(M(p_k), x_k)$ dans $(\mathbf{R}^{1,n-1}, 0)$, qui converge (pour la topologie C^∞ sur les compacts de $(M(p_\infty), x_\infty)$) vers une projection stéréographique s_∞ de $(M(p_\infty), x_\infty)$ dans $(\mathbf{R}^{1,n-1}, 0)$ (cela à un sens puisque tout compact de $(M(p_\infty), x_\infty)$ est contenu dans $(M(p_k), x_k)$ pour k assez grand).

De même, la suite de composantes de Minkowski pointées $h_k((M(p_k), x_k)) = (M(q_k), y_k)$ converge vers $(M(q_\infty), y_\infty)$ et l'on peut choisir une suite s'_k de projections stéréographiques de $(M(q_k), y_k)$ dans $(\mathbf{R}^{1,n-1}, 0)$ qui converge vers une projection stéréographique s'_∞ de $(M(q_\infty), y_\infty)$ dans $(\mathbf{R}^{1,n-1}, 0)$. Les applications ${s'_k}^{-1} \circ s'_\infty$ et $s_\infty^{-1} \circ s_k$ sont deux difféomorphismes conformes locaux de $\mathbf{Ein}_n$ que l'on peut étendre en difféomorphismes globaux, par le théorème de Liouville. Les suites ${s'_k}^{-1} \circ s'_\infty$ et $s_\infty^{-1} \circ s_k$ tendent alors vers l'identité dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$.

D'autre part, il existe une suite d'applications $(\overline{h}_k)$ dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1})$ telle que pour tout k, on a $\overline{h}_k \circ s_k = s'_k \circ h_k$. Les $\overline{h}_k$ fixent l'origine dans $\mathbf{R}^{1,n-1}$ et s'écrivent donc sous la forme $\lambda_k A_k$ avec λ_k dans $\mathbf{R}^\star$ et A_k dans $O(1, n-1)$. La suite (s_k) étant bornée, les comportements, lorsque k tend vers l'infini, de $|\sigma_{t_k}(x_k)|$ et de $|\lambda_k|$ sont identiques. On en conclut que $|\lambda_k|$ tend vers 0 ou $+\infty$.
Il existe également une suite (h_k^∞) dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$ vérifiant pour tout k $\overline{h}_k \circ s_\infty = s'_\infty \circ h_k^\infty$.
De la relation $h_k^\infty = {s'_\infty}^{-1} s'_k h_k s_k^{-1} s_\infty$, on tire que (h_k) est une perturbation compacte de (h_k^∞) et donc possède le même type dynamique.
On aboutit alors à la contradiction souhaitée. En effet, on a étudié dans le chapitre 5 la dynamique des éléments linéaires de $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1})$ et on vérifie que si (A_k) n'est pas bornée, la dynamique de h_k^∞ n'est jamais à distorsion bornée. Maintenant, si (A_k) est bornée, la suite h_k^∞ est bien à distorsion bornée, mais on a alors $p^+ = y_\infty$ (cas où $|\sigma_k|$ tend vers 0) ou $p^- = x_\infty$ (cas où $|\sigma_k|$ tend vers $+\infty$), deux cas que nous avons exclus.

11.2 Quelques résultats préliminaires sur les variétés kleiniennes essentielles

Les assertions que nous prouvons dans ce paragraphe concernent les variétés essentielles, et elles sont bien sûr *a fortiori* valables pour les variétés C^0-essentielles.

Lemme 11.6. *Soit M une variété compacte munie d'une structure lorentzienne conforme. Alors tout sous-groupe compact de Conf(M) est inessentiel.*

Preuve : Soit H un sous groupe compact de $\mathrm{Conf}(M)$. Il suffit de choisir une métrique g_0 quelconque dans la classe conforme de M et de considérer $\int_H h^\star g_0 d\mu$, avec $d\mu$ la mesure de Haar sur H pour obtenir une métrique invariante par H.

□

Corollaire 11.7. *Si ϕ^t induit un flot essentiel $\overline{\phi}^t$ sur la variété $M = \Omega/\Gamma$, alors le groupe G, engendré par Γ et ϕ^1, est discret.*

Preuve : La preuve de ce corollaire est une reprise du corollaire 3.3 de [Ze2]. On considère l'adhérence du flot $\overline{\phi}^t$ dans le groupe $\mathrm{Conf}(M)$. Il s'agit d'un groupe de Lie abélien, donc d'un cylindre $\mathcal{C}= \mathbf{R}^k \times \mathbf{T}$ avec $\mathbf{T}$ un tore. Par définition, ce cylindre possède un sous-groupe à un paramètre dense. Les seules possibilités sont donc $\mathcal{C} = \mathbf{R}$ ou $\mathcal{C} = \mathbf{T}$. Supposons à présent que G ne soit pas discret. Il existe alors une suite d'entiers (t_k) avec $\lim_{k\to+\infty} |t_k| = +\infty$ et une suite (γ_k) d'éléments de Γ telles que $\gamma_k \phi^{t_k}$ soit bornée dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_n)$. On en déduit que $\overline{\phi}^{t_k}$ est bornée dans $\mathrm{Conf}(M)$. Cela signifie que l'on est dans le cas où $\mathcal{C} = \mathbf{T}$. Le flot $\overline{\phi}^t$ est précompact, donc inessentiel par le lemme précédent.

□

On considère l'espace de Minkowski $\mathbf{R}^{1,2}$ plongé dans $\mathbf{Ein}_3$ via une projection stéréographique et on appelle C_∞ son cône à l'infini. Les groupes $Is(\mathbf{R}^{1,2})$ et $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,2})$ sont vus comme deux sous-groupes de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_3)$. Par la suite on désignera par L la projection de $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,2})$ sur le groupe $\mathbf{R} \times O(1,2)$ et l la projection de $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,2})$ sur $O(1,2)$.

Proposition 11.8. *Si un flot ϕ^t de Conf$(\mathbf{R}^{1,2})$ induit un flot essentiel sur $M = \Omega/\Gamma$ avec $\Gamma \subset Is(\mathbf{R}^{1,2})$, alors Γ est abélien.*

Preuve :
1) *L'ouvert Ω rencontre nécessairement le cône à l'infini C_∞.*
Dans le cas contraire, $\Omega \subset \mathbf{R}^{1,2}$. Comme Γ est un sous-groupe de $Is(\mathbf{R}^{1,2})$, les ouverts d'injectivité pour la projection π de Ω sur Ω/Γ ont un volume lorentzien borné (par volume lorentzien, on entend le volume induit par la métrique lorentzienne canonique de $\mathbf{R}^{1,2}$). Comme ϕ^t induit un flot essentiel au quotient, ϕ^t n'est pas inclus dans $Is(\mathbf{R}^{1,2})$. Prenons un petit ouvert U qui soit un domaine d'injectivité pour π. Alors les ouverts $\phi^t(U)$ sont toujours des domaines d'injectivité pour π et pourtant leur volume lorentzien n'est pas majoré. On aboutit à une contradiction.
On appelle Ω_∞ l'ouvert $\Omega \cap C_\infty$.
2) *Si l n'est pas injective, alors Γ est abélien.*
Comme l n'est pas injective, Γ contient des translations pures. Mais la dynamique des translations de type temps ou espace est telle que ces translations ne peuvent agir proprement sur un ouvert Ω qui rencontre C_∞. Par conséquent, le noyau de l ne contient que des translations de type lumière. Comme dans le sous-espace engendré par deux vecteurs isotropes se trouve toujours un vecteur de type espace, on en déduit que toutes les translations du noyau de l sont colinéaires, et que finalement ce noyau est monogène, engendré par une translation τ de type lumière. Le vecteur τ est fixé par $l(\Gamma)$ et de plus l'ouvert Ω est stable par le flot de translations τ^t (tel que $\tau^1 = \tau$). Le flot τ^t possède une géodésique Δ_0 de points fixes sur C_∞ et toutes ses autres orbites sont des géodésiques de lumière de C_∞. Comme l'action de τ est propre sur Ω_∞, Δ_0 n'est pas dans Ω_∞ et on en déduit que la frontière de Ω_∞ est constituée de géodésiques de lumière. On applique alors le lemme suivant:

Lemme 11.9. *Si un groupe discret Γ de Conf$(\mathbf{R}^{1,2})$ agit cocompactement sur un ouvert U de $C_\infty \backslash \{p_\infty\}$, alors le nombre de géodésiques de lumière dans la frontière de U est majoré par le cardinal de Λ, l'ensemble limite de $l(\Gamma)$ sur S^1.*

Preuve : rappelons que l'on a une projection p continue ouverte de $C_\infty \backslash \{p_\infty\}$ sur S^1 dont les fibres sont les géodésiques de lumière de C_∞ auxquelles on a enlevé p_∞. On note $\hat{U}$ l'ouvert de S^1 projeté de U par p. Le groupe $l(\Gamma)$ agit cocompactement sur $\hat{U}$ et par conséquent, par le lemme 7.5, la frontière de $\hat{U}$ est incluse dans Λ. Or la frontière de $\hat{U}$ correspond aux géodésiques de lumière qui se trouvent dans la frontière de U. $\square$

Le groupe $l(\Gamma)$ fixe τ donc est unipotent et son ensemble limite sur le cercle S^1 est réduit à un point. Ainsi, l'ouvert Ω_∞ n'est autre $C_\infty \backslash \Delta_0$ et est

donc topologiquement $\mathbf{R}^2$. D'autre part, la surface Ω_∞/Γ est un tore. En effet, elle est munie d'un feuilletage non singulier de dimension 1 puisque le feuilletage de Ω_∞ par géodésiques de lumière passe au quotient. Comme l'action de $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,2})$ sur C_∞ est fidèle, on en déduit que Γ est le groupe $\mathbb{Z}^2$.

3) *Si l est injective mais que le groupe $l(\Gamma)$ n'est pas discret, alors Γ est abélien*

Commençons par une définition.

Définition 11.10. *Soit A un sous-groupe d'un groupe de Lie B. On appelle la partie non discrète de A que l'on note A_{nd} l'intersection de A avec $\overline{A}^o$, la composante neutre de l'adhérence de A.*

Le lemme général suivant se trouve dans [Ze1] (voir aussi [CaD]):

Lemme 11.11. *Supposons qu'un groupe de Lie connexe B s'écrive comme produit semi-direct $A \ltimes N$ avec N un sous-groupe normal nilpotent. Supposons aussi que l'action adjointe de A sur N commute avec une homothétie non triviale de N. Alors si Γ est un sous-groupe discret de B, la projection $\pi(\Gamma)$ sur le facteur A a une partie non discrète $\pi(\Gamma)_{nd}$ nilpotente. De plus, le groupe $\Gamma_{nd} = \Gamma \cap \pi^{-1}(\pi(\Gamma)_{nd})$ est lui aussi nilpotent.*

On applique ce lemme en prenant pour B le groupe $Aff(\mathbf{R}^3) = GL_3(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^3$. On obtient que $l(\Gamma)_{nd}$ est un groupe nilpotent de $O(1,2)$. Or les groupes nilpotents de $O(1,2)$ sont virtuellement abéliens. Comme l est injective, Γ_{nd} est lui aussi virtuellement abélien. Maintenant, quitte à considérer un sous-groupe d'indice fini de Γ, on peut supposer que $\overline{L(\Gamma)}^0 = \overline{L(\Gamma)}$ et ainsi $\Gamma_{nd} = \Gamma$.

4) *Si l est injective à image discrète, Γ est monogène*

Lemme 11.12. *Supposons qu'un groupe Γ de $Conf(\mathbf{R}^{1,2}) = (\mathbf{R} \times O(1,2)) \ltimes \mathbf{R}^3$ agisse proprement cocompactement sur un ouvert U non vide de C_∞. On suppose que la projection l de Γ sur le facteur $O(1,2)$ est injective à image discrète. On suppose enfin que la frontière de U contient une géodésique de lumière de C_∞.*

Alors Γ est virtuellement monogène, et $l(\Gamma)$ est engendré par un élément hyperbolique de $O(1,2)$.

Preuve : Nous reprenons les notations du lemme 11.9. Nous avons déjà vu dans ce lemme que la frontière de $\hat{U}$ est incluse dans Λ. D'un autre côté, étant donnée une géodésique de lumière Δ correspondant à un point de $\hat{U}$ et une suite (x_k) de points de Δ qui tend vers un point de ∂U, il existe une suite (γ_k) d'éléments de Γ telle que $\gamma_k(x_k)$ reste dans un compact de U. Ainsi, $l(\gamma_k) \circ p(\Delta)$ reste dans un compact de $\hat{U}$. Comme l est supposée injective à image discrète, la suite $l(\gamma_k)$ tend vers l'infini, ce qui prouve que l'action de $l(\Gamma)$ sur $\hat{U}$ n'est pas propre. Ainsi, on doit avoir $\hat{U} \cap \Lambda \neq \emptyset$. Du coup, $\hat{U}$ est S^1 ou S^1 privé d'un point. L'hypothèse qu'une géodésique de lumière de C_∞ se trouve dans la frontière de U assure que l'on est dans le second cas. Ainsi, $l(\Gamma)$ fixe le point de Λ qui constitue la frontière de $\hat{U}$, ce qui permet de le voir comme un sous-groupe de $Aff(\mathbf{R})$. Les sous-groupes discrets de

$Aff(\mathbf{R})$ sont monogènes. L'ensemble limite de $l(\Gamma)$ contient au moins deux éléments (un dans la frontière de $\hat{U}$ et un dans $\hat{U}$). Par conséquent, $l(\Gamma)$ est engendré par une homothétie de $Aff(\mathbf{R})$, ce qui achève la preuve. $\square$

$\square$

Lemme 11.13. *Si Ω/Γ est une variété kleinienne admettant un flot $\overline{\phi}^t$ fortement essentiel et que Γ est abélien, alors Γ est virtuellement monogène.*

Preuve : Par le théorème 11.3, le groupe G contient une suite (h_k) à dynamique mixte où à distorsions équilibrées qui n'agit pas proprement sur Ω. On appelle Δ^+ et Δ^- les cercles attracteurs et répulseurs de cette suite. Comme l'action n'est pas propre, l'un au moins de ces cercles doit rencontrer Ω. On supposera par la suite que c'est Δ^+. D'autre part, le groupe Γ étant abélien, on a $\gamma h_k \gamma^{-1} = h_k$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et par conséquent, Δ^+ et Δ^- sont fixés par Γ. Le groupe Γ est donc inclus dans le stabilisateur de la géodésique Δ^+, à savoir un sous-groupe du type $(\mathbf{R} \times SL_2(\mathbf{R})) \ltimes N$. On appelle π_S la projection sur le facteur $SL_2(\mathbf{R})$. L'action de Γ sur Δ^+ se fait par $\pi_S(\Gamma)$. Comme l'action de Γ sur $\Delta^+ \cap \Omega$ est propre, l'application π_S est propre en restriction à Γ, ou de manière équivalente, elle est injective à image discrète. Le groupe $\pi_S(\Gamma)$ est abélien et agit proprement cocompactement sur un ouvert non vide du cercle. Il est donc virtuellement monogène et il en va de même pour Γ. $\square$

Comme conséquence immédiate des deux résultats précédents, on obtient le

Corollaire 11.14. *Si un flot ϕ^t de $Conf(\mathbf{Ein}_3)$ induit un flot fortement essentiel sur la variété Ω/Γ et que $\Gamma \subset Is(\mathbf{R}^{1,2})$, alors le groupe Γ est monogène.*

11.3 Préliminaires sur les flots de $O(2,3)$

Soit ϕ^t un flot de $O(2,3)$. On effectue une décomposition de Jordan du flot ϕ^t. Il s'écrit alors comme produit commutatif d'un flot semi-simple ϕ_s^t et d'un d'un flot unipotent ϕ_u^t. On suppose que le flot ϕ_s^t est non trivial. Dans ce cas, le centralisateur de ϕ^t centralise également ϕ_s^t. On vérifie que si un élément de $O(2,3)$ admet une valeur propre λ, alors il admet aussi pour valeur propre λ^{-1}, $\overline{\lambda}$, $\overline{\lambda}^{-1}$. Le flot ϕ_s^t rentre alors dans une des catégories suivantes.

a) pour tout t, ϕ_s^t possède 4 valeurs propres distinctes différentes de 1.
Dans ce cas, la dernière valeur propre est 1 et le vecteur propre associé est de type espace. Ainsi ϕ_s^t fixe un sous-espace de signature $(--++)$ et le centralisateur de ϕ^t fait de même. Le centralisateur de ϕ_s^t est donc inclus dans un plongement de $O(2,2)$ dans $O(2,3)$.

b) pour tout t, ϕ_s^t possède exactement deux valeurs propres différentes de 1.
(i) ou bien ces deux valeurs propres sont conjuguées et de module 1, et dans

ce cas, le flot ϕ_s^t fixe un plan de type espace sur lequel il agit par un flot de rotations. Ce plan est également fixé par le centralisateur de ϕ^t qui du coup est inclus dans un produit $O(2) \times O(1,2)$.
(ii) ou bien ces deux valeurs propres sont réelles et inverses l'une de l'autre. Dans ce cas, les vecteurs propres associés sont isotropes et non orthogonaux. Le flot ϕ_s^t fixe un plan P de signature lorentzienne. Le centralisateur de ϕ^t fixe également P et par conséquent, il est inclus dans un produit $O(1,1) \times O(1,2)$.

On appelle G le groupe engendré par ϕ^1 et Γ. La discussion précédente peut se résumer dans la

Proposition 11.15. *On est dans l'une des situations suivantes*
(i) le groupe G est inclus dans un produit $O(2) \times O(1,2)$.
(ii) le groupe G est inclus dans un produit $O(1,1) \times O(1,2)$.
(iii) le groupe G est inclus dans un groupe $O(2,2)$.
(iv) le flot ϕ^t est unipotent.

On remarque tout de suite que le cas (i) ne se produit jamais pour des flots essentiels. En effet, G étant discret, sa projection sur $O(1,2)$ est injective à image discrète. Cette projection est contenue dans le centralisateur d'un flot non trivial de $O(1,2)$, donc elle est contenue dans un groupe isomorphe à $\mathbf{R}$. Le groupe G est virtuellement monogène et donc le flot $\overline{\phi}^t$ est cyclique.
On va consacrer un paragraphe à chacun des autres cas.

11.4 Cas où G est inclus dans un produit $O(1,1) \times O(1,2)$

Nous allons montrer que dans ce cas, *le groupe Γ est monogène.*

On note $\phi^t = (\phi_1^t, \phi_2^t)$ avec ϕ_1^t et ϕ_2^t deux flots de $O(1,1)$ et $O(1,2)$ respectivement. Les applications π_1 et π_2 désignent les projections sur les facteurs $O(1,1)$ et $O(1,2)$.

1) Cas où le flot ϕ_2^t est non trivial.
Le centralisateur de ϕ^t est, à indice fini près, un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{R}^2$. Ainsi, G s'identifie à un sous-groupe discret de $\mathbf{R}^2$, et est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^2$. Nous excluons le premier cas puisqu'alors, $G = \Gamma$ et donc $\overline{\phi}^t$ est précompact. Dans le second cas, comme on doit avoir que Γ est inclus strictement dans G, on obtient que Γ est monogène.

2) Cas où ϕ_2^t est trivial.
Dans ce cas, Γ est inclus dans le produit $\mathbf{R} \times O(1,2)$. On commence par remarquer que π_2 est nécessairement injective à image discrète. Dans le cas contraire, il existe γ_k une suite de Γ telle que $\pi_2(\gamma_k)$ est bornée. On peut alors trouver des entiers n_k pour lesquels $\phi^{n_k}\gamma_k$ est bornée. Comme le groupe G est discret, on trouve que cette suite prend plusieurs fois la même valeur, ce qui conduit à $\overline{\phi}^{m_k} = Id$ pour un certain entier m_k et donc $\overline{\phi}^t$ est cyclique, hypothèse que nous avons exclue.

Ainsi, le groupe Γ est le graphe d'un sous groupe discret $\hat{\Gamma}$ de $O(1,2)$ par une représentation $\rho : \hat{\Gamma} \to \mathbf{R}$. Matriciellement, il existe une base e_1,...,e_5 de $\mathbf{R}^{2,3}$ dans la quelle on a:

$$\phi^t = \begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\mu t} \end{pmatrix}$$

et

$$\gamma = \begin{pmatrix} e^{\rho(\gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & l(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\rho(\gamma)} \end{pmatrix}$$

avec $l(\gamma)$ une matrice de $O(1,2)$. On lit ces éléments par une projection stéréographique de pôle $p_\infty = \pi(e_1)$ qui envoie $q_\infty = \pi(e_5)$ sur l'origine et on obtient que ϕ^t est un flot d'homothéties et Γ un groupe linéaire de $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,2})$. On appelle C_∞ le cône de lumière issu de p_∞ et on notera abusivement $\mathbf{R}^{1,2}$ le complémentaire de ce cône dans $\mathbf{Ein}_3$. On commence par montrer:

Lemme 11.16. *Le cône C_∞ contient une géodésique de lumière située dans la frontière de Ω.*

Preuve : Par le lemme 5.15, la frontière de l'ouvert Ω contient une géodésique de lumière Δ. Si elle est dans C_∞, on conclut. Sinon, on utilise le fait que p_∞ est pôle attracteur pour le flot ϕ^t. Quitte à considérer une sous-suite, $\phi^k(\Delta)$ tend (lorsque k tend vers $+\infty$) vers une géodésique de lumière Δ_∞ qui passe par p_∞. Ainsi $\Delta_\infty \subset C_\infty$ et de plus Δ_∞ appartient à la frontière de Ω.

□

Si Ω rencontre C_∞, on applique le lemme 11.12 et on obtient que Γ est monogène.
Si Ω ne rencontre pas C_∞, il ne rencontre pas non plus le cône C'_∞ issu de q_∞. En effet, on fait exactement le même raisonnement en considérant une projection stéréographique de pôle q_∞ qui envoie p_∞ sur l'origine. Mais du coup, on s'aperçoît que le champ de vecteurs X associé au flot ϕ^t n'est isotrope ou nul en aucun point de Ω. Il en va donc de même pour le champ de vecteurs $\overline{X}$ associé à $\overline{\phi}^t$. On aboutit à une contradiction grâce au

Lemme 11.17. *Soit ϕ^t un flot conforme sur une variété lorentzienne M et X le champ de vecteurs associé. Si X n'est nulle part isotrope ou nul, alors ϕ^t est inessentiel.*

Preuve : On désigne par g une métrique quelconque de la classe conforme. Alors la métrique $\frac{1}{g(X,X)}g$ est une métrique ϕ^t-invariante. □

11.5 Cas où le groupe G est inclus dans un sous-groupe $O(2,2)$

Nous allons voir que ce cas correspond au (ii) du théorème 11.1. On sait que le groupe $O(2,2)$ est isomorphe au produit $SL_2(\mathbf{R}) \times SL_2(\mathbf{R})$ et on reprend les notations du chapitre 4. Tout élément g de G sera noté (g_1, g_2) avec g_1 et g_2 dans $SL_2(\mathbf{R})$ et on écrit $\phi^t = (\phi_1^t, \phi_2^t)$. Le groupe G préserve un tore d'Einstein que l'on note $\mathbf{T}_0$ et la composante Anti-de-Sitter $\mathbf{Ein}_n \backslash \mathbf{T}_0$ sera notée abusivement $\mathbf{AdS}_3$.
Si les flots ϕ_1^t et ϕ_2^t sont non triviaux, alors G est contenu dans un groupe isomorphe à $\mathbf{R}^2$ et Γ est un groupe discret de $\mathbf{R}^2$. On est alors dans le cas où Γ est monogène. En effet, le cas où Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ est exclu car il entraîne que $\overline{\phi}^t$ est précompact.

Il nous reste donc à étudier le cas où l'un des deux flots ϕ_1^t et ϕ_2^t (par exemple ϕ_1^t) est trivial. Le flot ϕ_2^t est alors parabolique ou hyperbolique (le cas elliptique conduit à $\overline{\phi}^t$ compact et est donc exclu). La projection π_1 sur le premier facteur $SL_2(\mathbf{R})$ est injective en restriction à Γ (sinon le flot $\overline{\phi}^t$ est précompact). Par conséquent, le groupe Γ s'écrit comme un groupe graphe $Graph(\hat{\Gamma}, \rho)$ (c'est-à-dire que ses éléments sont de la forme $(\hat{\gamma}, \rho(\hat{\gamma}))$, $\hat{\gamma} \in \Gamma$) avec $\hat{G}$ un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbf{R})$ et ρ une représentation de $\hat{\Gamma}$ dans le groupe à un paramètre engendré par ϕ_2^t. Si $\hat{G}$ est résoluble, il est virtuellement monogène et on est dans le cas (i) du théorème 11.1. Sinon, nous allons montrer que le groupe $\hat{G}$ est libre. Il suffit pour cela de prouver la

Proposition 11.18. *Le groupe $\hat{G}$ ne peut pas être le groupe fondamental d'une surface hyperbolique compacte.*

Preuve : On raisonne par l'absurde en supposant que $\hat{\Gamma}$ est isomorphe au groupe fondamental d'une surface hyperbolique compacte, et on divise la preuve en deux parties, suivant la nature du flot ϕ_2^t.

1) Cas où le flot ϕ_2^t est parabolique.
Nous avons vu au chapitre précédent que dans ce cas, le flot ϕ^t admet une dynamique à distorsions équilibrées pour laquelle les cercles attracteurs et répulseurs sont égaux à une même géodésique de lumière Δ_0. La géodésique appartient au feuilletage $\mathcal{F}_1$ sur le tore $\mathbf{T}_0$. Quant aux éléments de Γ, ils sont tous de la forme $(\hat{\gamma}, \rho(\hat{\gamma}))$ où $\hat{\gamma}$ est un élément hyperbolique de $SL_2(\mathbf{R})$ (tous les éléments d'un groupe de surface sont hyperboliques) et bien sûr, $\rho(\hat{\gamma})$ est un élément parabolique. La dynamique d'un tel élément est mixte si $\rho(\hat{\gamma}) \neq 0$ et à distorsions équilibrées si $\rho(\hat{\gamma}) = 0$. Les cercles attracteurs et répulseurs Δ^+ et Δ^- appartiennent au feuilletage $\mathcal{F}_2$ et sont disjoints (ils correspondent aux deux points fixes de $\hat{\gamma}$ sur le cercle).
i) Si Δ^+ et Δ^- sont dans $\mathbf{Ein}_n \backslash \Omega$, alors par minimalité de l'action de Γ sur $\mathcal{F}_2$, on obtient que $\mathbf{T}_0 \subset \mathbf{Ein}_n \backslash \Omega$, c'est-à-dire $\Omega \subset \mathbf{Ein}_n \backslash \mathbf{T}_0$. On a alors une contradiction car $SL_2(\mathbf{R}) \times SL_2(\mathbf{R})$ préserve une métrique Anti-de-Sitter sur $\mathbf{Ein}_n \backslash \mathbf{T}_0$ et par conséquent, G préserve la restriction de cette métrique

à Ω. On obtient que $\overline{\phi}^t$ est C^∞-inessentiel (et en particulier C^0-inessentiel) sur M, ce qui est une contradiction.
ii) Si maintenant Δ^+ rencontre Ω, alors on est dans le cas où γ est de dynamique mixte (sinon l'action ne serait pas propre sur $\Omega \cap \Delta^+$). Par propreté de l'action sur Ω on a alors nécessairement que $C(p^-)$ est inclus dans $\mathbf{Ein}_n \backslash \Omega$ (on désigne par p^- le pôle répulseur de la suite (γ^k)). Le point p^- est un point fixe de ϕ^t et à ce titre, il appartient au cercle Δ_0. Comme Γ agit minimalement sur Δ_0, on doit avoir $C(p) \subset \mathbf{Ein}_n \backslash \Omega$ pour tout $p \in \Delta_0$. Or nous avons vu au chapitre 4 section 4.6 que $\bigcup_{p \in \Delta_0} C(p) = \mathbf{Ein}_n$ et on arrive à la conclusion absurde $\Omega = \emptyset$.

2) Cas où ϕ_2^t est hyperbolique
Le flot ϕ_2^t est à distorsions équilibrées. Ses cercles attracteurs et répulseurs Δ_0^+ et Δ_0^- sont deux géodésiques distinctes du feuilletage $\mathcal{F}_1$, et ils constituent l'ensemble des points de fixes de ϕ_2^t. Dans [Sa], F.Salein a étudié les représentations ρ des groupes de surfaces de $SL_2(\mathbf{R})$ dans les groupes abéliens hyperboliques de $SL_2(\mathbf{R})$. En particulier, le théorème 4.1.1.1 de [Sa] se traduit dans notre langage par l'alternative suivante:
(i) Ou bien la représentation ρ est admissible, c'est-à-dire que Γ agit proprement sur l'espace $\mathbf{AdS}_3$, et dans ce cas tous les éléments de Γ ont une dynamique mixte ou à distorsions équilibrées avec cercles attracteurs et répulseurs dans le feuilletage $\mathcal{F}_1$.
(ii) Ou bien il existe dans Γ une suite dont la dynamique est à distorsion bornée (autrement dit Γ n'agit pas proprement sur $\mathbf{AdS}_3$).
Dans le cas (i), on peut reprendre la même preuve que pour le 1) et montrer que $\Omega \subset \mathbf{AdS}_3$, ce qui prouve que $\overline{\phi}^t$ est C^∞ (donc C^0)-inessentiel.
Dans le cas (ii), on choisit (γ_k) une suite à distorsion bornée de Γ. Ses pôles p^+ et p^- sont fixés par le flot ϕ^t. Ils se situent donc sur $\Delta_0^+ \cup \Delta_0^-$. Pour que l'action de (γ_k) soit propre sur Ω, il faut qu'une infinité de géodésiques de lumière de $C(p^+)$ appartiennent à $\mathbf{Ein}_n \backslash \Omega$. Le flot ϕ^t préserve le cône $C(p^+)$ et en particulier, il agit sur les géodésiques de lumière de $C(p^+)$. Ces dernières constituent un cercle sur lequel ϕ^t agit par un flot hyperbolique. Par conséquent, certaines géodésiques de $C(p^+)$ incluses dans $\mathbf{Ein}_n \backslash \Omega$ ne sont pas fixées par ϕ^t. Il en découle que $C(p^+) \subset \mathbf{Ein}_n \backslash \Omega$. On aboutit alors comme dans le cas 1) à l'absurdité $\Omega = \emptyset$. $\square$

11.6 Cas où ϕ^t est un flot unipotent

On commence par prouver:

Proposition 11.19. *Si G ne fixe pas de géodésique de lumière, alors Γ est monogène.*

Preuve : Le flot ϕ^t n'est pas précompact donc il existe une suite (ϕ^{t_k}) qui tend simplement vers l'infini. Si sa dynamique est mixte ou à distorsions équilibrées, le groupe G va fixer les cercles attracteurs et répulseurs et par conséquent (ϕ^{t_k}) est à distorsion bornée. Dans ce cas G fixe le pôle attracteur que l'on appelle p_∞. On se fixe une projection stéréographique de

pôle p_∞. Cette projection identifie G à un sous-groupe de $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,2})$ et ϕ^t à un flot unipotent de $Is(\mathbf{R}^{1,2})$. Le flot $L(\phi^t)$ est unipotent dans $O(1,2)$ (on désigne à nouveau par L et l les projections de $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,2})$ sur $\mathbf{R}\times O(1,2)$ et $O(1,2)$ respectivement).
S'il n'est pas trivial, il fixe une direction isotrope unique, qui sera automatiquement fixée par $L(G)$ tout entier. Ceci signifie que G fixe une géodésique de lumière de $C_\infty = C(p_\infty)$, ce qui est exclu par hypothèse.
Si $L(\phi^t)$ est trivial, ϕ^t est un flot de translations de direction u, le vecteur u étant de plus fixé par $L(G)$. Le vecteur u n'est pas isotrope puisque sinon, G fixe une géodésique de lumière de C_∞. On constate qu'un élément de $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,2})$ qui n'est pas dans $Is(\mathbf{R}^{1,2})$ ne peut commuter qu'avec des translations isotropes. ainsi, on obtient que $G\subset Is(\mathbf{R}^{1,2})$ et on conclut grâce au corollaire 11.14 que Γ est monogène. $\square$

Nous supposerons dorénavant que G fixe une géodésique de lumière Δ_0. Nous avons vu au chapitre 4 section 4.6 que le stabilisateur de Δ_0 était isomorphe au groupe $(\mathbf{R}\times SL_2(\mathbf{R}))\ltimes N$. Appelons π_D la projection sur le facteur $\mathbf{R}$, π_S la projection sur le facteur $SL_2(\mathbf{R})$ et π_A la projection sur le groupe affine $(\mathbf{R}\times SL_2(\mathbf{R}))\ltimes\mathbf{R}^2$. Le noyau de π_A coïncide avec le centre Z de $SL_2(\mathbf{R})\ltimes N$. Une première étape dans la démonstration du théorème 11.1 va être de prouver la

Proposition 11.20. *Si Γ n'est pas monogène, alors π_S est injective à image discrète.*

Preuve : Commençons par remarquer que si Δ_0 rencontre Ω, la démonstration est presque évidente. L'action de Γ sur Δ_0 se fait par le groupe $\pi_S(\Gamma)$ donc cette action ne peut être propre sur un ouvert de Δ_0 que si l'application π_s est propre en restriction à Γ. La propreté de cette application est équivalente au fait que π_S soit injective et à image discrète. On supposera donc désormais que $\Delta_0\cap\Omega=\emptyset$.

Lemme 11.21. *Le groupe $\pi_S(G)$ ne fixe aucun vecteur de $\mathbf{R}^2$.*

Preuve : On va raisonner par l'absurde et supposer que $\pi_S(G)$ fixe un vecteur de $\mathbf{R}^2$, ce qui implique que le groupe G fixe une direction isotrope de $\mathbf{R}^{2,3}$. On peut supposer sans perte de généralité que cette direction est celle de e_1. Lu par une projection stéréographique de pôle $p_\infty=\pi(e_1)$, le groupe G apparaît alors comme un sous-groupe de $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^{1,2})$ (on note une fois de plus abusivement $\mathbf{R}^{1,2}$ pour le complémentaire dans $\mathbf{Ein}_3$ du cône C_∞) et le flot ϕ^t comme un flot unipotent de $Is(\mathbf{R}^{1,2})$. Comme G fixe Δ_0, qui est une géodésique de lumière du cône à l'infini de $\mathbf{R}^{1,2}$, $L(G)$ fixe une direction isotrope de $\mathbf{R}^{1,2}$. Si le groupe Γ est inclus dans $Is(\mathbf{R}^{1,2})$, le corollaire 11.14 permet d'aboutir à une contradiction puisqu'on fait l'hypothèse que Γ n'est pas monogène. On supposera donc par la suite qu'il existe au moins un élément de Γ qui n'est pas dans $Is(\mathbf{R}^{1,2})$.

1) Cas où $l(\phi_t)$ est un flot unipotent non trivial de $O(1,2)$.
Dans ce cas $L(G)$ est inclus dans un groupe isomorphe à $\mathbf{R}^2$. Comme Γ n'est

pas inclus dans $Is(\mathbf{R}^{1,2})$, il existe des contractions dans $L(\Gamma)$ et comme Γ doit être discret, Γ ne contient pas de translation pure. Par conséquent, l'application L est injective et Γ est abélien. On conclut par le lemme 11.13.

2) Cas où ϕ^t est un flot de translations de vecteur directeur u.
Le groupe $L(\Gamma)$ fixe le vecteur u, ce qui oblige u à être isotrope: en effet, si $\gamma \notin Is(\mathbf{R}^{1,2})$, $L(\gamma)$ ne peut fixer de vecteur de type temps ou espace. Comme $L(\Gamma)$ fixe u, pour tout élément de Γ, la projection sur le facteur $\mathbf{R}$ est complètement déterminée par la projection sur le facteur $O(1,2)$. Ainsi, l est une injection de $L(\Gamma)$ sur $l(\Gamma)$. D'autre part, $l(\Gamma)$ est inclus dans le stabilisateur (dans $SL_2(\mathbf{R})$) d'un vecteur de $\mathbf{R}^2$, c'est à dire le groupe affine $Aff(\mathbf{R})$. On va montrer maintenant que *l'application L est injective.*

On suppose le contraire, ce qui implique que Γ contient une translation pure τ_v de vecteur v. Pour tout élément γ de Γ qui n'est pas dans $Is(\mathbf{R}^{1,2})$, il existe une base de $\mathbf{R}^{1,2}$ dans laquelle $L(\gamma)$ s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$ avec $|\lambda| \neq 1$. Le vecteur propre associé à 1 est u. Si le vecteur v n'est pas colinéaire à u, en conjuguant τ_v par des puissances de γ, on montre que Γ n'est pas discret. Mais d'un autre côté, si u et v sont colinéaires, ϕ^t induit un flot précompact sur M, ce qui est contraire à nos hypothèses.

Notons que si $L(\Gamma)$ est à image discrète, on aboutit à une contradiction car les sous groupes discrets de $Aff(\mathbf{R})$ sont virtuellement monogènes. Il nous reste donc à examiner le cas où l'image de Γ par L n'est pas discrète. On peut appliquer une nouvelle fois le lemme 11.11 à notre groupe Γ en prenant pour B le groupe $Aff(\mathbf{R}^3) = GL_3(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^3$. On obtient que $l(\Gamma)_{nd}$ est un groupe nilpotent du groupe $Aff(\mathbf{R})$, donc un groupe abélien. Quitte à prendre un sous-groupe d'indice fini dans Γ, on peut supposer que $\overline{L(\Gamma)}^o = \overline{L(G)}$ et donc $\Gamma_{nd} = \Gamma$. On aboutit encore à une contradiction par le lemme 11.13.

□

Corollaire 11.22. *Le flot ϕ^t est (à reparamétrage près) le flot central Z^t et en fait $G \subset SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$.*

Preuve : Comme le flot ϕ^t est unipotent, la projection $\pi_D(\phi^t)$ est triviale. D'autre part, $\pi_S(\phi^t)$ est également trivial car sinon, $\pi_S(\Gamma)$ fixerait une direction de $\mathbf{R}^2$, ce qui est exclu par le lemme précédent. On considère à présent $\pi_A(\phi^t)$. Par ce qui précède, c'est un flot de translations de $\mathbf{R}^2$, centralisé par $\pi_A(G)$. Par conséquent, $\pi_S(G)$ va fixer la direction de ce flot de translations et on est à nouveau en contradiction avec le lemme précédent.
On conclut que $\pi_A(\phi^t)$ est également trivial ce qui revient à dire que $\phi^t = Z^t$, à reparamétrage près.

On remarque que les éléments de $(\mathbf{R} \times SL_2(\mathbf{R})) \ltimes N$ qui ont une projection selon $\mathbf{R}$ non triviale ne commutent pas avec Z^t. On conclut donc que $G \subset SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$. □

On poursuit la démonstration de la proposition en commençant par prouver:

1) π_S est injective.
Si elle ne l'est pas, on note Γ_N son noyau, et on considère la restriction de π_A à Γ_N. Cette restriction est nécessairement injective car sinon, Γ contiendrait des éléments du centre Z et le flot $\overline{\phi}^t$ serait précompact. On en déduit que Γ_N est abélien. Maintenant, la condition pour que deux éléments $\gamma = (x, y, z)$ et $\gamma' = (x', y', z')$ commutent dans le groupe de Heisenberg s'écrit $y'x - xy' = 0$, ce qui se traduit aussi par le fait que $\pi_A(\gamma)$ et $\pi_A(\gamma')$ sont deux vecteurs colinéaires de $\mathbf{R}^2$. Ainsi, si Γ_N est abélien, alors $\pi_A(\Gamma_N)$ est contenu dans une droite de $\mathbf{R}^2$ et $\pi_S(G)$ fixe cette droite puisque G normalise Γ_N. Mieux, $\pi_S(G)$ fixe le vecteur directeur de cette droite car dans le cas contraire, il existerait une suite (γ_k) d'éléments de Γ_N vérifiant que $\pi_A(\gamma_k)$ tend vers l'identité. Ainsi, on pourrait trouver une suite t_k telle que $\gamma_k \phi^{t_k}$ converge dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}_3)$, et le flot $\overline{\phi}^t$ serait précompact. On est une nouvelle fois en contradiction avec le lemme précédent.

2) π_S est à image discrète.
On va pour cela appliquer le lemme 11.11 au groupe Γ en prenant pour B le produit semi-direct $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ (les homothéties de N sont données par les éléments du facteur $\mathbf{R}$ dans $(\mathbf{R} \times SL_2(\mathbf{R})) \ltimes N$). Si on suppose que π_S n'est pas à image discrète, alors $\pi_S(\Gamma)_{nd}$ est un sous-groupe nilpotent non trivial de $PSL_2(\mathbf{R})$ et par conséquent il est abélien. Mais on doit aussi avoir $\overline{\pi_S(\Gamma)}^0 = \overline{\pi_S(\Gamma)}$ et par conséquent $\pi_S(\Gamma)_{nd} = \pi_S(\Gamma)$. Ainsi, Γ lui-même est abélien et on obtient une contradiction par le lemme 11.13.

□

Pour terminer la démonstration du point (iii) du théorème 11.1, il reste à montrer que $\pi_S(\Gamma)$ est un groupe libre. Comme on écarte d'office le cas où Γ est virtuellement monogène (sinon on est dans le cas (i) du théorème), il suffit de montrer la

Proposition 11.23. *Le groupe $\pi_S(\Gamma)$ ne peut pas être le groupe fondamental d'une surface hyperbolique compacte.*

Nous allons plus exactement supposer que $\pi_S(\Gamma)$ est le groupe fondamental d'une surface hyperbolique compacte et montrer qu'alors le flot $\overline{\phi}^t$ ne peut pas être C^0-essentiel.

1) Retour sur la géométrie de l'ouvert Ω_{Δ_0}.
La première remarque à faire est que le groupe $\pi_S(\Gamma)$ n'agit nulle part proprement sur Δ_0. Ainsi $\Omega \subset \Omega_{\Delta_0}$ (rappelons la notation $\Omega_{\Delta_0} = \mathbf{Ein}_n \backslash \Delta_0$). Les orbites de ϕ^t sur Δ_0 forment un feuilletage non singulier de dimension 1 que l'on note $\mathcal{D}$ (voir chapitre 4 section 4.6 pour plus de détails sur ce feuilletage). On appelle $\mathbb{F}$ l'espace des feuilles de $\mathcal{D}$. Comme nous allons le voir tout de suite, l'espace $\mathbb{F}$ admet une interprétation géométrique très agréable.
Pour être cohérents avec les notations du chapitre 4, nous travaillons dans une base $(e_1, ..., e_5)$ de $\mathbf{R}^{2,3}$ où la forme quadratique $q^{2,3}$ s'exprime par $-2x_1x_5 + 2x_2x_4 + x_3^2$. On peut supposer sans perte de généralité que la géodésique Δ_0 est la projection sur $\mathbf{Ein}_n$ du plan engendré par les vecteurs

e_1 et e_2. On appelle E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2 et e_3, et P_0 le plan affine de E défini par l'équation $x_3 = 1$. On montre alors

Lemme 11.24. *L'espace $\mathbb{F}$ s'identifie à l'espace des droites affines de P_0, c'est-à-dire l'espace projectif $\mathbf{RP}^2$ auquel on a enlevé un point p_0.*

Preuve : Les droites affines de P_0 sont les traces sur P_0 des plans vectoriels de E différents de $vect(e_1, e_2)$ et donc par dualité, cet espace est l'espace des droites de E, à savoir $\mathbf{RP}^2$, privé d'un point p_0. Ce point correspond à $vect(e_1, e_2)$. Maintenant tout plan vectoriel P de E (différent de $vect(e_1, e_2)$) est un plan dégénéré qui admet une base orthonormée (u, v) avec $u \in vect(e_1, e_2)$ et $q^{2,3}(v) = 1$. L'orthogonal de P est l'intersection de l'orthogonal de u et l'orthogonal de v. Projeté dans $\mathbf{Ein}_n$ l'orthogonal de P est donc l'intersection d'un cône de lumière issu d'un point de Δ_0 et d'un tore d'Einstein. Cette intersection est constituée de deux géodésiques de lumière sécantes en un point, l'une de ces géodésiques étant Δ_0. Réciproquement, toute géodésique de lumière qui coupe Δ_0 en un point (autrement dit toute feuille de $\mathcal{D}$) appartient au projeté de l'orthogonal d'un unique plan vectoriel $P \subset E$. On a donc bien identification entre $\mathbb{F}$ et l'espace des droites affines de P_0. $\square$

Remarque 11.25. *On vérifie que l'on a également les correspondances suivantes:*
- *Toute géodésique de $\mathbf{RP}^2$ passant par p_0 paramètre les géodésiques de lumière d'un cône de lumière issu d'un point de Δ_0.*
- *Toute géodésique de $\mathbf{RP}^2$ ne passant pas par p_0 paramètre les géodésiques de lumières d'un tore d'Einstein contenant Δ_0 (il s'agit plus exactement des géodésiques situées dans le même feuilletage canonique que Δ_0).*

On note les éléments de $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ par (A, n) où A est une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $SL_2(\mathbf{R})$ et $n = n(x, y, z)$ un élément du groupe de Heisenberg. Rappelons comment on peut les voir matriciellement dans notre base $(e_1, ..., e_5)$.
Un élément $(A, 0)$ s'exprime par la matrice

$$R_A = \begin{pmatrix} a & b & & & \\ c & d & & & \\ & & 1 & & \\ & & & a & b \\ & & & c & d \end{pmatrix}$$

et un élément (Id, n) s'écrit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 2z - 2xy & 2x^2 \\ 0 & 1 & y & 2y^2 & 2z \\ & & 1 & -2y & 2x \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En particulier, l'action sur E de tout élément (a, n) se fait via la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'action sur E préserve P_0 où elle induit une action affine qui est exactement celle de $\pi_a((A, n))$. On conclut donc que l'action de tout élément γ de $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ sur $\mathbb{F}$ est exactement celle de $\pi_a(\gamma)$ sur $\mathbf{RP}^2 \backslash \{p_0\}$.

2) *Conclusion*

On dit qu'un sous-groupe de $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ est *un groupe facteur* si, quitte à le conjuguer, tous ses éléments s'écrivent sous la forme $(A, 0)$. On remarque que si Γ est un groupe facteur alors $\pi_a(\Gamma)$ agit linéairement sur P_0. Quitte à conjuguer Γ par des éléments du type

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & & & \\ 0 & \lambda & & & \\ & & Id & & \\ & & & \lambda^{-1} & 0 \\ & & & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

on peut supposer que Γ est une petite déformation (dans $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$) d'un groupe facteur $\hat{\Gamma}$ (avec $\pi_S(\Gamma) = \pi_S(\hat{\Gamma})$). Ainsi, $\pi_a(\Gamma)$ est une petite déformation affine du groupe linéaire $\pi_a(\hat{\Gamma})$, où $\pi_a(\hat{\Gamma})$ est un groupe de surface dans $SL_2(\mathbf{R})$. Ce type de déformations, et notamment leur action sur $\mathbf{RP}^2 \backslash \{p_0\}$ a été étudié par T.Barbot dans [Ba]. Il y démontre le

Théorème 11.26 (Barbot [Ba]). *L'action sur $\mathbf{RP}^2 \backslash \{p_0\}$ d'une petite déformation affine $\overline{\Gamma}$ de $\pi_a(\hat{\Gamma})$ est topologiquement conjuguée à l'action de $\pi_a(\hat{\Gamma})$. En particulier, le groupe $\overline{\Gamma}$ préserve une courbe de Jordan $J_{\overline{\Gamma}}$ de $\mathbf{RP}^2 \backslash \{p_0\}$. L'action de $\overline{\Gamma}$ est minimale sur $J_{\overline{\Gamma}}$ ainsi que sur $\mathbf{RP}^2 \backslash \{p_0 \cup J_{\overline{\Gamma}}\}$.*

Nous appelons Λ_Γ l'ensemble des géodésiques de lumières de $\mathcal{D}$ correspondant aux points de la courbe $J_{\overline{\Gamma}}$. L'ensemble Λ_Γ est un "tore fractal" correspondant à une petite déformation d'un tore d'Einstein dans $\mathbf{Ein}_n$. Le théorème précédent va nous permettre de comprendre l'ouvert Ω:

Lemme 11.27. *L'ouvert Ω est le complémentaire de Λ_Γ dans $\mathbf{Ein}_n$.*

Preuve : L'ouvert Ω, comme son complémentaire, sont stables par le flot ϕ^t et sont donc des réunions de feuilles de $\mathcal{D}$. L'ouvert Ω fibre donc sur un ouvert $\overline{\Omega}$ de $\mathbf{RP}^2 \backslash \{p_0\}$ stable par l'action de $\pi_a(\Gamma)$. Les seules possibilités sont $\overline{\Omega} = \mathbf{RP}^2 \backslash \{p_0\}$ ou $\overline{\Omega} = \mathbf{RP}^2 \backslash \{p_0 \cup J_{\overline{\Gamma}}\}$. Pour montrer le lemme, il nous suffit d'exclure le premier cas. A cette fin, on remarque pour tout γ de Γ, $\pi_S(\gamma)$ est un élément hyperbolique de $SL_2(\mathbf{R})$ et il n'est pas difficile de vérifier que dans une certaine base, γ s'exprime par une matrice du type

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & & & \\ 0 & \lambda^{-1} & & & \\ & & Id & & \\ & & & \lambda & 0 \\ & & & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, les éléments de Γ ont tous une dynamique à distorsions équilibrées pour laquelle les cercles attracteurs et répulseurs sont sécants à Δ_0. Ces cercles attracteurs et répulseurs ne rencontrent pas Ω puisque l'action y est propre. $\square$

On peut à présent conclure en montrant:

Proposition 11.28. *Le flot $\overline{\phi}^t$ n'est pas C^0-essentiel sur M. En particulier, il n'est pas fortement essentiel.*

Preuve : Je tiens à remercier T.Barbot pour m'avoir communiqué la preuve de cette proposition.
On garde les notations précédentes, c'est à dire que $\overline{\Gamma}$ désigne le groupe $\pi_a(\Gamma)$ et $\overline{\Omega} = \mathbf{RP}^2 \backslash \{p_0 \cup J_{\overline{\Gamma}}\}$. On désigne par $\overline{\pi}$ la projection de Ω sur $\overline{\Omega}$. Toute géodésique c de $\mathbf{RP}^2$ passant par p_0 coupe $J_{\overline{\Gamma}}$ en deux points p_1 et p_2. Il existe une unique homographie h qui identifie c à $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ en envoyant p_0 sur ∞, p_1 sur $\{1\}$ et p_2 sur $\{0\}$. Le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x}$ de $\mathbf{R}$ se rapatrie via h en un champ de vecteurs sur $c \backslash \{p_0\}$, et lorsque c décrit toutes les géodésiques passant par p_0, on obtient un champ de vecteurs $\overline{X}$ sur $\overline{\Omega}$. Le fait que $J_{\overline{\Gamma}}$ soit topologiquement conjugué à un cercle assure que $\overline{X}$ est C^0 (et C^∞ le long de chaque géodésique passant par p_o). D'autre part, comme $J_{\overline{\Gamma}}$ est $\overline{\Gamma}$-invariant, le champ $\overline{X}$ est lui-aussi $\overline{\Gamma}$ invariant. On remarque maintenat que si x est un point de Ω et que u est un vecteur de type espace de $T_x\Omega$ tangent à $\mathcal{H}_{\Delta_0}(x)$, alors u se projette via $d\overline{\pi}$ sur un vecteur non nul tangent à une géodésique passant par p_0. Il suffit maintenant de remarquer qu'il existe une unique métrique g de la classe conforme de Ω qui vaille 1 sur les vecteurs de type espace tangents à $\mathcal{H}_{\Delta_0}$ et se projetant sur $\overline{X}$. Une telle métrique g est C^∞ le long des feuilles de $\mathcal{H}_{\Delta_0}$ mais seulement C^0 sur Ω. Elle est invariante par le groupe engendré par ϕ^t et Γ. Ainsi $\overline{\phi}^t$ est C^0-inessentiel sur M.

$\square$

Chapitre 12

Sur les différentes notions d'essentialité: un problème de rigidité

12.1 Introduction

Tout au long de cette thèse, nous avons souvent distingué différentes notions d'essentialité. Certaines assertions ont été démontrées pour des structures conformes fortement essentielles alors que d'autres concernaient des structures C^∞-essentielles. Pourtant, nous n'avons exhibé aucun exemple de structure conforme qui soit par exemple C^∞-essentielle sans être C^0-essentielle. Précisons tout de suite que ce chapitre n'apportera aucun exemple de ce type. Il établit toutefois un lien entre l'existence de tels exemples et un problème algébrique lié aux représentations dans $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ du groupe fondamental d'une surface compacte de genre supérieur ou égal à 2.

12.2 Formulation algébrique du problème

Dans le chapitre précédent, nous avons vu le groupe $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ comme un sous-groupe de matrices de $O(2,n)$. Nous adopterons ici un point de vue plus intrinsèque. Tout élément de $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ sera noté (a,n) avec a un élément de $SL_2(\mathbf{R})$ et n un élément du groupe de Heisenberg. Les éléments de N sont eux-mêmes notés $n=(u,t)$ où $u=(x,y)$ est un élément de $\mathbf{R}^2$ (appelé **composante selon $\mathbf{R}^2$**) et t un réel (appelé **composante centrale**).
La loi de groupe sur N est donnée par $(u,t)(u',t') = (u+u', t+t'+b(u,u'))$ avec b une forme bilinéaire. Si $u=(x,y)$ et $u'=(x',y')$, on a $b(u,u')=yx'$.

Le groupe $SL_2(\mathbf{R})$ agit sur N de la manière suivante: pour un élément $m=(u,t)$ du groupe de Heisenberg et pour $a \in SL_2(\mathbf{R})$, on a $a.m = (a(u), t+q_a(u))$ avec $q_a(u) = \frac{1}{2}(b(a(u),a(u)) - b(u,u))$.
La loi de groupe sur $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ est alors donnée par: $(a,n)(b,m) = (ab, n(a.m))$.
Rappelons qu'il existe aussi une action de $\mathbf{R}$ sur $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ donnée par $\lambda.(a,n) = (a, n_\lambda)$ avec, si $n=(u,t)$, $n_\lambda = (\lambda u, \lambda^2 t)$.

Considérons à présent un groupe $\hat{\Gamma}$ isomorphe au groupe fondamental d'une surface de genre $g \geq 2$. Le groupe $\hat{\Gamma}$ est engendré par $2g$ générateurs $a_1, ..., a_g, b_1, ..., b_g$ liés par la relation $\prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = Id$. On considère également une représentation $\hat{\rho}$ de $\hat{\Gamma}$ dans $SL_2(\mathbf{R})$. On remarque tout de suite que $\hat{\rho}$ peut également être vue comme une représentation de $\hat{\Gamma}$ dans $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ définie sur les générateurs par $a_i \mapsto (\hat{\rho}(a_i), id)$ et $b_i \mapsto (\hat{\rho}(b_i), id)$. Une telle représentation sera dite **représentation facteur** de $\hat{\Gamma}$ dans $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$. On appelle **déformation de $\hat{\rho}$ dans** $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ toute représentation ρ de $\hat{\Gamma}$ dans $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ qui vérifie $\pi_S \circ \rho = \hat{\rho}$ (c'est-à-dire que dans un certain sens, on regarde les déformations à "partie linéaire" fixée).
Remarquons pour commencer qu'il existe deux moyens simples de déformer une représentation $\hat{\rho} : \hat{\Gamma} \mapsto SL_2(\mathbf{R})$ dans $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$.
(i) Le premier consiste à conjuguer $\hat{\rho}$ par un élément de N.
(ii) Le second consiste à multiplier $\hat{\rho}$ par une représentation ν de $\hat{\Gamma}$ dans le centre Z de $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ (rappelons que Z est isomorphe à $\mathbf{R}$). On appelle ce procédé **multiplication par une représentation centrale**.
Toute déformation de $\hat{\rho}$ obtenues par combinaison des procédés (i) et (ii) sera qualifiée de **standard**.

Nous nous proposons à présent d'étudier plus précisément les déformations dans $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ d'une représentation $\hat{\rho}$ de $\hat{\Gamma}$ dans $SL_2(\mathbf{R})$. Pour cela considérons $2g$ vecteurs de $\mathbf{R}^2$ $u_1, ..., u_g, v_1, ..., v_g$. On leur associe $2g$ éléments de N en posant $n_i = (u_i, 0)$ et $m_i = (v_i, 0)$ pour $i \in \{1, ..., g\}$. Puis on pose $a'_i = (\hat{\rho}(a_i), n_i)$ et $b'_i = (\hat{\rho}(b_i), m_i)$ et on considère le produit $\prod_{i=1}^{g}[a'_i, b'_i]$. Ce produit appartient au groupe N puisque $\hat{\rho}$ est une représentation et que par conséquent $\prod_{i=1}^{g}[\hat{\rho}(a_i), \hat{\rho}(b_i)] = Id$. Il possède donc une composante selon $\mathbf{R}^2$ et une composante centrale. En observant la loi de groupe sur $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$, on voit que la composante selon $\mathbf{R}^2$ dépend linéairement des u_i et v_i. On l'appelle $L_{\hat{\rho}}(u_i, v_i)$. Quant à la composante centrale, elle dépend polynomialement des composantes des u_i et des v_i et on la note $Q_{\hat{\rho}}(u_i, v_i)$. Comme me l'a fait remarquer E.Ghys, $Q_{\hat{\rho}}$ est en fait une forme quadratique sur $(\mathbf{R}^2)^g \times (\mathbf{R}^2)^g$. En effet, si λ est un réel, la composante centrale de $\lambda.\prod_{i=1}^{g}[a'_i, b'_i]$ vaut λ^2 fois la composante centrale de $\prod_{i=1}^{g}[\lambda.a'_i, \lambda.b'_i]$. Ainsi $Q_{\hat{\rho}}(\lambda u_i, \lambda v_i) = \lambda^2 Q_{\hat{\rho}}(u_i, v_i)$.

On peut à présent montrer :

Lemme 12.1. *Soit $\hat{\rho}$ une représentation de $\hat{\Gamma}$ dans $SL_2(\mathbf{R})$. À multiplication par une représentation centrale près, les déformations de $\hat{\rho}$ dans $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ sont paramétrées par l'intersection du noyau de $L_{\hat{\rho}}$ et du cône isotrope de $Q_{\hat{\rho}}$.*

Preuve : Soit ρ une déformation de $\hat{\rho}$ dans $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$. Il existe alors $2g$ vecteurs de $\mathbf{R}^2$ $u_1, ..., u_g, v_1, ..., v_g$ ainsi que $2g$ réels $s_1, ..., s_g, t_1, ..., t_g$ pour lesquels $\rho(a_i) = (\hat{\rho}(a_i), n_i)$ $(n_i = (u_i, s_i))$ et $\rho(b_i) = (\hat{\rho}(b_i), m_i)$ $(m_i = (v_i, t_i))$. Quitte à multiplier par une représentation centrale, on peut supposer les s_i et les t_i nuls. La représentation ρ est alors paramétrée par la donnée des u_i et des v_i, qui sont eux-mêmes liés par la relation algébrique

$\prod_{i=1}^{g}[\rho(a_i), \rho(b_i)] = Id$. D'après la définition des $L_{\hat{\rho}}$ et des $Q_{\hat{\rho}}$, cette relation se traduit exactement par $\{L_{\hat{\rho}} = 0\}$ et $\{Q_{\hat{\rho}} = 0\}$. □

Remarque 12.2. *La condition $L_{\hat{\rho}}(u_i, v_i) = 0$ traduit simplement le fait que $\pi_A \circ \rho$ est une déformation affine dans $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^2$, à partie linéaire fixe, de la représentation linéaire $\hat{\rho} : \hat{\Gamma} \mapsto SL_2(\mathbf{R})$.*

Remarque 12.3. *L'ensemble $\{L_{\hat{\rho}} = 0\} \cap \{Q_{\hat{\rho}} = 0\}$ contient toujours un sous-espace vectoriel de dimension 2, provenant des déformations obtenues en conjugant $\hat{\rho}$ par des éléments de N.*

Si l'ensemble $\{L_{\hat{\rho}} = 0\} \cap \{Q_{\hat{\rho}} = 0\}$ se limite au sous-espace de dimension 2 de la remarque ci-dessus, alors toutes les déformations de $\hat{\rho}$ dans $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ sont standards. on voit donc que l'existence de déformations non standards est liée à la signature de la forme quadratique $Q_{\hat{\rho}}$. On montre:

Lemme 12.4. *Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de la représentation triviale dans $Hom(\hat{\Gamma}, SL_2(\mathbf{R}))$ tel que si $\hat{\rho} \in \mathcal{V}$, alors $\hat{\rho}$ admet des déformations non standards dans $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$.*

Preuve : On appelle $\hat{\rho}_0$ la représentation triviale de $\hat{\Gamma}$ dans $SL_2(\mathbf{R})$. On vérifie que $L_{\hat{\rho}_0}$ est identiquement nulle. Quant à $Q_{\hat{\rho}_0}$, elle est aisément identifiable dans ce cas. En effet, si $n_i = (u_i, 0)$ et $m_i = (v_i, 0)$, l'élément $[n_i, m_i]$ appartient au centre de N et vaut $(0, det(u_i, v_i))$. On en déduit que $Q_{\hat{\rho}_0}(u_i, v_i) = \Sigma_{i=1}^{g} det(u_i, v_i)$ et donc $Q_{\hat{\rho}_0}$ est de signature $(2g, 2g)$. Par continuité, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\hat{\rho}_0$ dans $\mathrm{Hom}(\hat{\Gamma}, SL_2(\mathbf{R}))$ tel que pour tout $\hat{\rho}$ dans $\mathcal{V}$, $Q_{\hat{\rho}}$ a pour signature $(2g, 2g)$. Dans ce cas, $\{L_{\hat{\rho}} = 0\} \cap \{Q_{\hat{\rho}} = 0\}$ n'est jamais réduit à un sous-espace vectoriel de dimension 2 (on a supposé $g \geq 2$) et donc on est sûr qu'il existe des déformations non standards.
□

Rappelons que l'on appelle **représentation fuchsienne** toute représentation de $\hat{\Gamma}$ dans $SL_2(\mathbf{R})$ injective à image discrète. Nous pouvons maintenant formuler la question centrale de ce chapitre:

Question 12.5. *Une représentation fuchsienne admet-elle des déformations non standards dans $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$?*

Nous n'avons malheureusement pas de réponse à cette question mais il est néanmoins intéressant de discuter les implications d'une réponse éventuelle.

12.3 Conséquences d'une réponse négative à la question 12.5

Dans ce cas, on obtient un résultat de rigidité, intéressant en soi, pour les déformations dans $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ des représentations fuchsiennes de $\hat{\Gamma}$. On s'aperçoît de plus que pour de telles représentations, la signature de $Q_{\hat{\rho}}$ ne peut pas être $(2g, 2g)$, ce qui signifie que la signature de $Q_{\hat{\rho}}$ n'est pas constante sur $\mathrm{Hom}(\hat{\Gamma}, SL_2(\mathbf{R}))$ (elle valait justement $(2g, 2g)$ pour la représentation triviale). Il pourrait être en revanche intéressant de montrer que cette signature est constante sur les composantes connexes de $\mathrm{Hom}(\hat{\Gamma}, SL_2(\mathbf{R}))$.

12.4 Conséquences d'une réponse affirmative à la question 12.5

Ce cas serait à vrai dire le plus surprenant. En effet, soit $\hat{\rho}$ une représentation fuchsienne de $\hat{\Gamma}$ dans $SL_2(\mathbf{R})$. On considère la représentation facteur de $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ associée que l'on note ρ_0. Le groupe $\rho_0(\hat{\Gamma}) = \Gamma_0$ fixe un tore d'Einstein $\mathbf{T}_0$ de $\mathbf{Ein}_3$ et l'action de Γ_0 sur le complémentaire de $\mathbf{T}_0$ dans $\mathbf{Ein}_3$ (que l'on note $\mathbf{AdS}_3$) est propre cocompacte. La variété quotient $\mathbf{AdS}_3/\Gamma_0$ est facilement identifiable: il s'agit du fibré unitaire tangent à la surface compacte $\Sigma = \mathbf{H}^2/\hat{\rho}(\hat{\Gamma})$. L'application développante δ_0 pour cette structure est simplement l'application de revêtement de $\widetilde{\mathbf{AdS}_3}$ sur $\mathbf{AdS}_3$ et le groupe d'holonomie est Γ_0. S'il existe des déformations non standards de ρ_0 dans $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$, on en choisit une très proche de ρ_0, que l'on note ρ. Par le théorème 6.8, $\rho(\hat{\Gamma})$ est encore le groupe d'holonomie d'une structure conformément plate sur M, le fibré unitaire tangent à Σ. On note δ l'application développante associée à cette nouvelle structure. Remarquons que le flot central de $SL_2(\mathbf{R}) \ltimes N$ que l'on note ϕ^t centralise $\rho(\hat{\Gamma})$ et induit donc un flot $\overline{\phi}^t$ de transformations conformes sur M. Nous nous proposons de montrer:

Proposition 12.6. *Le flot $\overline{\phi}^t$ est C^0-inessentiel.*

Preuve : Si l'on revient à l'étude faite lors de la preuve de la proposition 11.23 et au théorème 11.26, on obtient que le groupe $\rho(\hat{\Gamma})$ préserve un tore fractal $\mathbf{T}$ qui est une petite déformation de $\mathbf{T}_0$. Comme l'image d'un domaine fondamental de $\tilde{M}$ par δ_0 évite le tore $\mathbf{T}_0$, on obtient que si ρ est suffisamment proche de ρ_0, l'image du même domaine fondamental par δ va éviter le tore fractal $\mathbf{T}$. On voit ainsi que $\Omega = \delta(\tilde{M})$ ne rencontre pas $\mathbf{T}$. La démonstration du lemme 11.27 assure alors que $\Omega = \mathbf{Ein}_3 \backslash \mathbf{T}$. On reprend la démonstration de la proposition 11.28 et on obtient que le groupe G engendré par $\rho(\hat{\Gamma})$ et ϕ^1 préserve une métrique g qui est C^0 sur Ω. On peut rapatrier cette métrique sur M et on obtient l'assertion souhaitée. $\square$

Or d'un autre côté, on peut également montrer:

Proposition 12.7. *Le flot $\overline{\phi}^t$ est C^∞-essentiel.*

Preuve : Raisonnons par l'absurde et supposons que le flot $\overline{\phi}^t$ préserve une métrique C^∞ dans la classe conforme de M. Le flot $\overline{\phi}^t$ est alors un flot d'isométries lorentziennes, non précompact et partout de type lumière. Les flots d'isométries lorentziennes non précompacts sur les variétés compactes de dimension 3 sont parfaitement connus grâce aux travaux de A.Zeghib dans [Ze2]. Il ressort de sa classification qu'à reparamétrage près, $\overline{\phi}^t$ est le flot horocyclique d'une structure Anti-de-Sitter sur M. On devrait ainsi obtenir que Ω est le complémentaire dans $\mathbf{Ein}_3$ d'un tore d'Einstein et que $\mathbf{T}$ n'est pas un tore fractal mais un tore d'Einstein. Ceci contredit le fait que ρ n'est pas une déformation standard de ρ_0. $\square$

Conclusion

Une réponse négative à la question 12.5 entraînerait qu'il existe des flots conformes sur des variétés compactes qui préservent des métriques C^0 de la classe conforme sans préserver de métrique C^∞. Ceci montrerait que dans le cadre lorentzien, l'essentialité C^0 et l'essentialité C^∞ sont des notions distinctes.

Bibliographie

[A] D.V. Alekseevskii - *Groups of transformations of riemannian spaces*, Mat. Sbornik 89 (131) 1972 $n^o 2$ et Math. USSR Sbornik 18 (1972) $n^o 2$ 285–301.

[AM] R.Abraham, J.E.Marsden -*Foundations of mechanics*. Second edition. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978

[D'AG] G.D'Ambra; M.Gromov *Lectures on transformation groups: geometry and dynamics*. Surveys in differential geometry (Cambridge, MA, 1990), 19–111, Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1991.

[As] T. Asuke - *On transversaly flat conformal foliations with good measures II*, Hiroshima Math. J. 28 (1998) 523–525.

[BN] U.Bader, A.Nevo- *Conformal actions of simple Lie groups on pseudo-Riemannian manifolds*. J. Diff. Geom. à paraître.

[Ba] T.Barbot - *Flag structures on Seifert manifolds*. Geom. Topol. 5 (2001), 227–266

[B] Y.Benoist - *Propriétés asymptotiques des groupes linéaires*. Geom. Funct. Anal. 7 (1997), no. 1, 1–47.

[Be] A.Besse - *Einstein Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer Verlag. Berlin 1986

[BTZ1] M.Bañados; C.Teitelboim; J.Zanelli - *Black hole in three-dimensional spacetime*. Phys. Rev. Lett. 69 (1992), no. 13, 1849–1851

[BTZ2] M.Bañados; M.Henneaux; C.Teitelboim; J.Zanelli - *Geometry of the* $2+1$ *black hole*. Phys. Rev. D (3) 48 (1993), no. 4, 1506–1525.

[CK] M.Cahen; Y.Kerbrat - *Domaines symétriques des quadriques projectives*. J. Math. Pures Appl. (9) 62 (1983), no. 3, 327–348.

[Ca] Y.Carrière - *Autour de la conjecture de Markus sur les variétés affines*. Invent. Math., vol 95, $n^o 3$, (1989), pp. 615-628.

[CaD] Y.Carrière; F.Dal'Bo - *Généralisations du premier théorème de Bieberbach sur les groupes cristallographiques.* Enseign. Math. (2) 35 (1989), no. 3-4, 245–262.

[dlH] P.de la Harpe - *Free groups in linear groups.* Enseign. Math. (2) 29 (1983), no. 1-2, 129–144.

[D] T.A.Drumm. - *Linear holonomy of Margulis space-times.* J. Differential Geom. 38 (1993), no. 3, 679–690.

[DGo] T.A.Drumm; W.M.Goldman - *The geometry of crooked planes.* Topology 38 (1999), no. 2, 323–351

[Fe1] J.Ferrand - *The action of conformal transformations on a Riemannian manifold.* Math. Ann. 304 (1996), no. 2, 277–291.

[Fe2] J.Ferrand - *Transformations conformes et quasiconformes des variétés riemanniennes; application à la démonstration d'une conjecture de A. Lichnerowicz.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 269 (1969)

[Fe3] J.Ferrand - *Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes (démonstration de la conjecture de A. Lichnerowicz).* Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Coll. 39, no. 5, 44 pp. (1971).

[Fe4] J.Ferrand - *Les géodésiques des structures conformes.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 294 (1982), no. 18, 629–632.

[FT] C.Frances; C.Tarquini - *Autour du théorème de Ferrand-Obata.* Ann. Global Anal. Geom. 21 (2002), no. 1, 51–62

[FG] D.Fried; W.M.Goldman - *Three-dimensional affine crystallographic groups.* Adv. in Math. 47 (1983), no. 1, 1–49.

[G] P.Gauduchon - *Connexion canonique et structure de Weyl en géométrie conforme.* Preprint.

[GHL] Gallot, Hulin, Lafontaine - *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1987, 1990.

[Gh] E.Ghys - *Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 20 (1987), no. 2, 251–270.

[Go1] W.M.Goldman - *Geometric structures on manifolds and varieties of representations.* Geometry of group representations , 169–198, Contemp. Math., 74, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1988).

[Go2] W.M.Goldman - *Nonstandard Lorentz space forms.* J. Differential Geom. 21 (1985), no. 2, 301–308.

[Go3] W.M.Goldman - *Projective structures with Fuchsian holonomy.* J. Differential Geom. 25 (1987), no. 3, 297–326.

[GK] W.M.Goldman; Y.Kamishima - *The fundamental group of a compact flat Lorentz space form is virtually polycyclic.* J. Differential Geom. 19 (1984), no. 1, 233–240.

[HE] S.Hawking; G.Ellis - *The large scale structure of universe-* Cambridge University Press, 1973.

[IW] A.Iozzi; D.Witte - *Cartan-decomposition subgroups of* $\mathrm{SU}(2,n)$. J. Lie Theory 11 (2001), no. 2, 505–543.

[J] H.Jacobowitz - *Two notes on conformal geometry.* Hokkaido Math. J. 20 (1991), no. 2, 313–329.

[Ka] Y.Kamishima - Conformally flat manifolds whose development maps are not surjective. I. Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986), no. 2, 607–623.

[Kl] B.Klingler - *Complétude des variétés lorentziennes à courbure constante.-* Math. Ann., vol 306, $n^o 2$, (1996), pp.353-370.

[K] S.Kobayashi - *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer Verlag 1972.

[KR1] W.Kühnel; H.B.Rademacher - *Essential conformal fields in pseudo-Riemannian geometry.* J. Math. Pures Appl. (9) 74 (1995), no. 5, 453–481.

[KR2] W.Kühnel; H.B.Rademacher - *Essential conformal fields in pseudo-Riemannian geometry.* II. J. Math. Sci. Univ. Tokyo 4 (1997), no. 3, 649–662.

[Ku1] R.S.Kulkarni - *Proper actions and pseudo-riemannian space forms-* Adv.Math. 40, 10-51 (1981)

[Ku2] R.S.Kulkarni - *On the principle of uniformization.* J. Differential Geom. 13 (1978), no. 1, 109–138.

[KP] R.S.Kulkarni,U.Pinkall - *Conformal Geometry*, Aspects of Mathematics, Max Planck Institut fur Mathematik. Vieweg 1988.

[KR] Kulkarni (R.) Raymond (F.) - *Three-dimensional Lorentz space forms ans Seifert fiber spaces-* J.Diff.Geom 21, 231-268 (1985)

[Ma] B.Maskit - *Kleinian groups.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften , 287. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[M] S.Matsumoto - *Foundations of flat conformal structure.* Aspects of low-dimensional manifolds, 167–261, Adv. Stud. Pure Math., 20, Kinokuniya, Tokyo, (1992).

[Mo] M.Morrill - *Nonexistence of compact de Sitter manifolds.* PhD, University of California Los Angeles, 1996.

[Ob] M.Obata - *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds.* J. Differential Geometry 6 (1971/72), 247–258.

[O'N] O'Neill (B.) - *Semi-riemannian geometry with applications to relativity*- New York, Academic Press Inc, 1983.

[Ri] M.H.Rigal - *Rigidité des feuilletages transversalement conformément parallélisables*, Tôhoku Math. J. 50 (1998) 407–418.

[R] E.A.Ruh - *On the automorphism group of a G-structure.* Comment. Math. Helv. 39 (1964) 189–204.

[Sa] F.Salein - *Variétés anti- de Sitter de dimension 3*- Thèse de Doctorat de l'école normale sup. de Lyon, 1999.

[S] B.G.Schmidt - *Conformal geodesics. Conformal groups and related symmetries* physical results and mathematical background (Clausthal-Zellerfeld, 1985), 135–137, Lecture Notes in Phys., 261, Springer, Berlin, 1986.

[SV] J.Seade; A.Verjovsky - *Higher dimensional complex Kleinian groups.* Math. Ann. 322 (2002), no. 2, 279–300.

[Se] I.Segal - *Mathematical cosmology and extragalactic astronomy.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 68. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1976.

[Sp] M.Spivak - *A comprehensive introduction to differential geometry.* Second edition. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979.

[St] Sternberg (S.) - *Lectures on differential geometry.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1964

[ST] D.Sullivan, Dennis; W.Thurston, William - *Manifolds with canonical coordinate charts: some examples.* Enseign. Math. (2) 29 (1983), no. 1-2, 15–25.

[T] C.Tarquini - *Feuilletages conformes et feuilletages équicontinus* Thèse de Doctorat université bretagne Sud, 2001.

[Th] W.Thurston - *Three dimensional geometry and topology. Vol 1.*- Princeton University Press, 1997. Edited by Silvio Levy

[Wa] R.M.Wald - *General relativity.* University of Chicago Press, Chicago, IL, 1984.

[Wo] J.Wolf - *Spaces of constant curvature* - Houston, Tex., Publish or Perish Inc., 1984, fifth edition.

[Ze1] A. Zeghib - *On closed anti de Sitter spacetimes*- Math.Ann. 310 695-716 (1998)

[Ze2] A. Zeghib - *Killing fields in compact Lorentz 3-manifolds*- J. Differential Geom. 43 (1996), no. 4, 859–894.