



HAL
open science

Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maitres

Robert Neyret

► **To cite this version:**

Robert Neyret. Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maitres. Education. Université Joseph Fourier Grenoble 1, 1995. Français. NNT : . tel-03194180

HAL Id: tel-03194180

<https://hal.science/tel-03194180>

Submitted on 9 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée par

Robert Neyret

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

(spécialité : **Didactique des Mathématiques**)

Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants :

**nombre décimaux, rationnels et réels dans les
Instituts Universitaires de Formation des Maîtres**

Soutenu le 6 juillet 1995

Composition du jury :

Président : **Colette Laborde**, Directeur de recherche CNRS, COAST, Lyon

Rapporteurs : **Yves Chevallard**, Professeur des Universités, I.U.F.M. d'Aix-Marseille
Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Maître de conférence, Université Paris 7

Examineurs : **Annie Bessot**, Maître de conférence, Université J. Fourier, Grenoble 1, directeur de thèse
Guy Brousseau, Professeurs des Universités, I.U.F.M. d'Aquitaine
Aline Robert, Professeur des Universités, I.U.F.M. de Versailles

Thèse préparée au sein du Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactiques - IMAG

THÈSE

présentée par

Robert Neyret

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

(spécialité : **Didactique des Mathématiques**)

Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants :

**nombre décimaux, rationnels et réels dans les
Instituts Universitaires de Formation des Maîtres**

Soutenu le 6 juillet 1995

Composition du jury :

Président : **Colette Laborde**, Directeur de recherche CNRS, COAST, Lyon

Rapporteurs : **Yves Chevallard**, Professeur des Universités, I.U.F.M. d'Aix-Marseille
Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Maître de conférence, Université Paris 7

Examineurs : **Annie Bessot**, Maître de conférence, Université J. Fourier, Grenoble 1, directeur de thèse
Guy Brousseau, Professeurs des Universités, I.U.F.M. d'Aquitaine
Aline Robert, Professeur des Universités, I.U.F.M. de Versailles

(...) si l'humanité a manifesté autant de réticences à accepter que les tâches cérébrales sont des choses calculables, cela tient à notre conception du calcul. Le problème est que nous ramenons tout à ce que nous connaissons, toujours et inévitablement. Même les imaginations les plus vives sont bridées par l'habitude.(...) Ainsi dans notre esprit, affirmer que quelque chose est calculable revient à dire qu'on obtient le résultat en utilisant les types de calculs que nous connaissons: l'addition, la multiplication, la résolution d'équations, le calcul différentiel et intégral, etc...(...) Nous allons voir qu'il est possible de parvenir à la solution de certains problèmes par un mode de calcul, radicalement différent du précédent: le calcul collectif.

Et le calcul biologique, qui repose sur une assemblée de neurones convenablement connectés, est, de toute évidence, un calcul collectif.

GODAUX E., (1990), Cent milliards de neurones, pp. 165-166, Belin.

*à Françoise,
à Christophe, Ivan, Amandine, Stéphane*

REMERCIEMENTS

J'exprime ma reconnaissance tout d'abord à Annie Bessot, directeur de thèse, qui grâce à de nombreux et réguliers échanges, m'a permis de mener à bien ce travail.

Je remercie Colette Laborde, directeur de recherche au CNRS et responsable de la formation doctorale d'avoir bien voulu présider le jury.

Je remercie aussi :

- Yves Chevallard, qui m'a indiqué des directions possibles de travail en début de thèse puis a accepté ensuite d'être rapporteur,*
- Marie-Jeanne Perrin, également rapporteur, qui a été une lectrice très attentive du manuscrit,*
- Guy Brousseau, membre du jury, qui, non seulement, m'a accordé de longs et fructueux entretiens à Bordeaux, mais en plus m'a offert une bonne bouteille de vin que j'ai bu à mi-thèse pour me donner du courage,*
- Aline Robert, d'avoir accepté de faire partie du jury.*

Un grand merci à Philippe Clarou pour avoir mis en œuvre une ingénierie concoctée à l'ombre de la didactique et s'être prêté au jeu de l'observation et de l'analyse des interactions entre étudiants et formateur. A charge de revanche !

Deux grosses bises à Mireille Dupraz, Marie-Thérèse Ducastel, Irène Laborde-Combalot pour avoir relu patiemment des textes plein de fautes en tout genre.

La présence de personnalités plurielles de l'équipe Didatech, au sein du laboratoire LSD2, m'a fourni un environnement stimulant tout au long de ces quelques années d'amusements divers et variés. Longue vie à l'équipe !

Partie A

CHAPITRE A1

LE POINT DE VUE DES ACTEURS SUR LA FORMATION

Nous recensons les besoins exprimés par la société, pour en dégager les éléments dominants, en ce qui concerne la formation des enseignants du premier degré, à travers les textes d'orientation et les dispositifs mis en place. Nous faisons de même en ce qui concerne les besoins exprimés par les formés. Les points de vue exprimés par les formateurs, à partir d'entretiens et de textes sur la formation écrits par ces derniers, nous permettent de voir quelles sont les diverses réponses apportées pour satisfaire les besoins des formés. L'examen des stratégies différentes adoptées par les formateurs, ainsi que les travaux de thèse récents réalisés en Didactique des Mathématiques à propos de la formation des instituteurs, nous amènent alors à préciser le point de vue adopté pour le travail envisagé.

1. INTRODUCTION

Le problème de la formation des enseignants, entre autres celle des enseignants du premier degré, est un problème récurrent. La multiplication des plans de formation depuis une vingtaine d'années, l'existence de cursus de formation parallèles et de lieux de formation institutionnels, ayant une certaine autonomie de définition de leurs propres contenus, sont là pour en témoigner.

En particulier, cette question est revenue sur le devant de la scène avec acuité ces dernières années, avec la création des IUFM et les polémiques que cette création a provoquées. La nécessité de ce type d'institution de formation des maîtres a été même contestée et on a pu voir des programmes d'organisations politiques proposer la disparition des IUFM au profit d'une formation sur le terrain managée par les inspecteurs de l'enseignement public. Cependant la nécessité d'une formation pour les futurs enseignants ne semble remise en cause par personne actuellement.

La formation des instituteurs, devenue depuis peu formation des professeurs d'écoles est largement opaque culturellement depuis plusieurs années, non seulement pour la société, mais aussi pour les acteurs du système d'enseignement que sont les enseignants eux-mêmes. La création des IUFM a cependant contribué à ce que soit posé de nouveau de manière publique le problème de la formation des enseignants.

On entend souvent dire que l'institution de formation permet d'agir sur le système éducatif, et c'est sans doute pour cela qu'elle apparaît comme un enjeu politique d'importance. L'institution de formation est alors imaginée comme un vase clos qui va former l'étudiant selon une logique qui lui est propre. L'étudiant ainsi formé arrive par la suite dans l'institution École et commence à agir sur elle dans le sens du souhait exprimé par les formateurs, eux-mêmes traduisant au mieux les "besoins" exprimés par la société. Mais inversement, combien de fois a-t-on entendu des instituteurs "frais émoulus", au sortir de cette institution particulière qui est celle de formation, avant d'entrer dans leur nouvelle fonction, dire que ce qui leur avait été appris ne servait à rien, les savoirs enseignés étant coupés de la réalité et ne répondant pas aux "besoins" ressentis par les étudiants eux-mêmes.

Les besoins en savoir, qui doivent être satisfaits pour le futur métier de professeur des écoles sont ainsi au centre des préoccupations des acteurs de la formation. C'est donc autour du terme de "besoin" que nous allons dans un premier temps mener notre enquête, "besoin" étant pris dans son acception courante.

Nous le ferons dans trois directions complémentaires : les besoins exprimés par la société, les besoins exprimés par les formés et les réponses fournies par les formateurs.

2. LES BESOINS EXPRIMÉS PAR LA SOCIÉTÉ EN MATIÈRE DE FORMATION INITIALE DES PROFESSEURS D'ÉCOLE

2.1. Les orientations à travers les textes officiels

Nous effectuons un premier balayage à travers les textes officiels parus récemment qui nous permettront d'identifier certains besoins exprimés par la société ainsi que certaines réponses qui sont données à travers les nouveaux dispositifs de formation proposés. Nous nous intéressons dans un premier temps au "rapport Bancel"¹, qui a servi de support à la définition de la nouvelle formation dans les IUFM, et à une note de service² donnant des indications au niveau national sur la formation. Ce dernier texte définit les modalités du concours situé à présent en milieu de formation, ce qui détermine un certain nombre de contraintes pour la première année.

Dans le chapitre I, le rapport Bancel énonce les compétences professionnelles à faire acquérir et les contenus à enseigner qu'il regroupe sous trois rubriques :

1. Rapport Bancel, 1989, *Créer une nouvelle dynamique de la formation des maîtres*, Ministère de l'éducation nationale.

2. Note de service n°92-069 du 27 Janvier 1992 publié au BO n° 5 du 30 Janvier 1992. Il y a eu très peu de textes nationaux concernant la formation, l'argument avancé étant de laisser aux différents IUFM le soin de définir eux-mêmes leurs propres plans de formation.

- des connaissances liées à l'identité des disciplines,
- des connaissances relatives à la gestion des apprentissages,
- des connaissances relatives au système éducatif.

La première rubrique désigne ce que sont les domaines liés à une discipline :

«(...) l'histoire et l'épistémologie de la discipline, les conditions de sa genèse, l'histoire de l'élaboration de ses méthodes, les ruptures épistémologiques qui ont marqué son histoire, ses retombées dans la vie sociale, technologique et industrielle et enfin ses applications.»

A côté de ces aspects historico-épistémologiques, le texte insiste dans la deuxième rubrique sur le fait que :

«cette formation (...) devra être complétée par une connaissance des conditions d'élaboration et de construction du savoir scolaire pour permettre à l'enseignant d'opérer **une confrontation entre le savoir à enseigner aux différents niveaux de la scolarité et le savoir académique**³. Ce travail est indispensable pour préparer le futur maître à enseigner et non plus seulement à connaître sa discipline. Cette formation nécessite une analyse attentive des représentations que les élèves ont des savoirs, une réflexion sur les obstacles de nature épistémologique ou didactique qui peuvent se présenter en cours d'apprentissage (...)»

Les savoirs disciplinaires sont considérés comme non suffisants. Le rapport affirme donc la nécessité d'autres savoirs et les considère comme indispensables pour une formation dans le cadre des disciplines. Si le savoir à enseigner se réfère sans doute aux programmes tels qu'ils sont explicités dans les instructions officielles, nous pouvons remarquer que le rédacteur ne définit pas ce qu'il entend par "savoir académique".

Dans le chapitre II intitulé "Comment articuler connaissances pratiques et connaissances théoriques pour construire des compétences professionnelles", le rapport précise :

«Au cours de sa formation, le futur enseignant doit transformer les connaissances qu'il acquiert en compétences à mettre en œuvre sur le terrain, dans les classes et les établissements scolaires. D'où la nécessité de parvenir à une interaction harmonieuse et continue entre tous les types de formation, pratiques, théoriques, qu'il reçoit. **Ces différents apprentissages devront donc s'effectuer de façon simultanée**⁴. Cette articulation exclut, par conséquent, la possibilité de validations distinctes et effectuées à un an d'intervalle pour la formation pratique et la formation théorique.»

Il est donc envisagé un rapport dialectique entre l'acquisition de différents types de connaissances concernant aussi bien la discipline, la didactique de la discipline ou la mise en pratique sur le terrain. Pour l'auteur du rapport, il s'agit d'une véritable *transformation*

3. C'est nous qui soulignons.

4. C'est nous qui soulignons.

des connaissances à faire acquérir aux futurs enseignants. Rien ne vient préciser cependant comment peut se réaliser cette transformation.

2.2. Parmi les nouveaux dispositifs : un concours en cours de formation

Trois changements importants par rapport à la structure école normale existant antérieurement marquent la mise en place des IUFM: le statut universitaire des IUFM, la rédaction d'un mémoire en deuxième année de formation et la mise en place d'un concours à la fin de la première année de formation .

Le changement de statut ne joue pas un rôle déterminant dans l'immédiat. En effet la transformation des écoles normales en instituts universitaires se traduit par la participation accrue d'enseignants issus de l'université, mais on peut noter d'une part que leur participation n'est pas nouvelle⁵ et d'autre part que l'encadrement de la formation des professeurs d'école va être dans sa quasi-totalité assuré par les anciens professeurs d'école normale.

Le mémoire est une structure de formation tout à fait nouvelle qui soulève un certain nombre d'interrogations. Le mémoire est décrit à l'intérieur d'un texte⁶ consacré au contenu et à la validation de la formation dans les IUFM. Peu d'indications⁷ sont données sur les orientations concernant le mémoire. Ce texte est en attente de directives et de contenus. Nous interprétons cela comme un indice de la difficulté soulevée par la définition d'une formation professionnelle.

5. Elle était même prévue de manière institutionnelle dans la formation en 3 ans (de 1979 à 1986) formation pendant laquelle les élèves-instituteurs devaient préparer un DEUG "instituteur".

6. Contenu et validation des formations organisées par les instituts universitaires de formation des maîtres, Circulaire du 2 Juillet 1991, BO n° 27 du 11 Juillet 1991. Ce texte précise les modalités de définition des contenus d'enseignements, les principes généraux de la formation, l'architecture globale de la formation, la formation des enseignants du premier degré, la formation des enseignants du second degré et enfin les objectifs et les modalités de la validation de la formation. C'est à l'intérieur de ce dernier point qu'est abordé le mémoire comme étant l'une des trois modalités d'évaluation, les deux autres ayant pour support le stage en responsabilité et les modules d'enseignement.

7. La partie consacrée au mémoire lui-même est formée de quelques lignes dont nous extrayons celles qui nous paraissent significatives:

«Il s'appuie sur l'analyse des pratiques professionnelles, rencontrées en particulier lors du stage en responsabilité, et doit permettre de vérifier les capacités du professeur stagiaire à

- identifier un problème ou une question concernant ces pratiques,

- analyser ce problème et proposer des pistes de réflexion ou d'action se référant aux travaux existants dans ce domaine.

Il ne doit pas constituer une simple narration d'un travail personnel sans analyse et réflexion critique, ni être une réflexion théorique extérieure à l'expérience du professeur stagiaire.(...)

La soutenance individuelle du mémoire doit permettre de vérifier l'implication du stagiaire dans ce travail et de mesurer ses capacités d'argumentation.»

Enfin le dispositif du concours soulève le rapport entre les connaissances disciplinaires et d'autres types de connaissances. En particulier la nature de l'épreuve de mathématiques est pour nous révélatrice d'une interrogation sur les contenus disciplinaires.

2.2.1. Le concours comme variable de commande dans le système éducatif

Un débat entre les membres de la commission réunie autour du recteur Bancel et dont on peut trouver la trace dans son rapport, a porté sur l'alternative suivante : un recrutement des futurs professeurs d'école immédiatement après la licence ou un recrutement après une première année de formation professionnelle. Les arguments avancés pour la défense de la première proposition étaient une garantie de cohérence et de continuité de la formation professionnelle, ainsi que de meilleures conditions psychologiques de travail pour les étudiants libérés de la contrainte du concours. Par contre, les éléments négatifs avancés portaient sur le fait que :

«le recrutement ne pourrait se faire que sur des critères académiques. Il s'agirait d'une reconduction des défauts de la situation actuelle, défauts maintes fois dénoncés».

La seconde proposition qui a la préférence du rapporteur et qui sera retenue par le ministère,

«permet d'envisager un concours de recrutement comportant des critères d'appréciation des compétences professionnelles que le candidat aurait à acquérir (...)Les épreuves portant sur des connaissances scientifiques devront être complétées par des épreuves permettant d'apprécier différents types de connaissances du système éducatif.»

Outre des considérations sur l'intérêt d'avoir un concours pour recruter directement, via la liste complémentaire, un certain nombre d'enseignants qui seraient mis directement sur le terrain, ce choix :

«pourrait, à moyen terme être à l'origine d'une évolution progressive des formations universitaires de premier cycle et de licence, en les plaçant devant la nécessité de mieux prendre en compte les besoins du métier d'enseignant.»

Le concours est donc considéré comme un levier pour faire intervenir dans la formation professionnelle des compétences didactiques et professionnelles qu'il reste à définir.

2.2.2. La nature du concours, révélateur d'une interrogation sur les contenus disciplinaires

Les instructions relatives à la mise en place du concours, reviennent de fait à ne pas envisager de curriculum national explicite pour la formation des futurs professeurs des écoles :

«les épreuves du concours ont pour objectif d'apprécier l'aptitude des candidats à mobiliser et à **exploiter les connaissances nécessaires à l'enseignement à l'école primaire sans exiger d'eux une connaissance approfondie de tel ou tel sujet précis dans la discipline considérée**⁸. C'est pourquoi le choix a été fait de ne pas arrêter de liste nominative de sujets pour les épreuves disciplinaires de ces concours.»

Notons que, nulle part, on ne trouve de précision sur les connaissances nécessaires pour enseigner dans le primaire : celles-ci sont laissées à l'appréciation des formateurs dans le cadre des différents IUFM où ils exercent.

Bien que le rapport Bancel parle de rapport dialectique entre divers types de connaissances, la nature même de l'épreuve du concours séparé en deux parties, l'une appelée partie mathématique et l'autre partie appelée professionnelle souligne la difficulté à trouver une articulation entre ces types de connaissances qui apparaissent de nature distincte. En effet la note relative évoquée plus haut⁹, bien qu'indiquant que le deuxième volet doit "être mis en relation avec le premier chaque fois que c'est possible", signale que

«le candidat doit faire la preuve qu'au-delà de la maîtrise des connaissances et compétences nécessaires pour enseigner à des élèves d'école primaire dans la discipline considérée (...), il a réfléchi aux problèmes spécifiques que pose aux enfants l'apprentissage de notions et d'éléments de méthodes propres à cette discipline (...).»

Il est à noter d'ailleurs qu'il est à présent question de définir un programme de contenus mathématiques en vue du concours, c'est du moins un souhait de la DGES¹⁰.

Cette difficulté n'est pas nouvelle comme on peut le voir dans l'analyse des plans de formation rédigés depuis la création institutionnelle des écoles normales, analyse qui figure dans l'annexe A1a. En effet nous pouvons constater que la place des contenus disciplinaires a fortement varié. Fortement hégémoniques dans les plans de formation de

8. C'est nous qui soulignons.

9. Note de service du 30 Janvier 1992 déjà citée.

10. Direction Générale de l'Enseignement Supérieur: une demande de propositions de programmes mathématiques a été formulée auprès de la COPIRELEM (commission Permanente des IREM sur l'Enseignement (et la formation à l'enseignement) fin 1993. Celle-ci a rédigé en mars 1994 une proposition de texte, définissant les principes et contenus de la formation initiale en mathématiques des futurs professeurs d'école.

1877 et 1923, absents dans la formation de 1945, les contenus devinrent très ambitieux dans les plans de 1969¹¹, 1979 et 1986, pour ne plus être spécifiés nationalement, comme nous venons de le rappeler, pour les concours à partir de 1992. Par contre, l'aspect professionnel de la formation était nettement souligné dans la formation de 1905, puis dans la formation de 1945 et s'est affirmé aussi progressivement dans les plans suivants.

L'examen des plans de formation antérieurs et des textes officiels officiels actuels nous montre la difficulté persistante et récurrente pour définir une formation professionnelle, pour préciser notamment ce que représente la formation disciplinaire des futurs professeurs d'école.

Ainsi nous pouvons noter par exemple l'opposition entre la recommandation du rapport Bancel demandant une gestion simultanée des différents apprentissages et la séparation manifeste au niveau du concours de la partie concernant les enseignements disciplinaires et de celle relative à la gestion des apprentissages.

3. LES BESOINS EXPRIMÉS PAR LES FORMÉS

Nous avons effectué, avec des étudiants entrant en formation, un pré-entretien dont l'ambition était de cerner quelles étaient leurs attentes et leurs besoins. Des réponses très vagues - du type : "on a besoin que l'on nous apprenne le métier auquel nous nous destinons" - nous ont rapidement convaincus que nous n'obtiendrions que peu d'informations en les questionnant à ce moment-là de la formation. C'est pourquoi il nous a semblé par la suite qu'il était plus intéressant de les interroger en cours, voire en fin de formation. Nous avons ainsi profité de la présence d'étudiants inscrits à l'atelier mémoire¹² organisé à l'IUFM de Grenoble pour leur poser quelques questions, notamment les suivantes :

- 1 - Quelles sont les études que vous avez suivies avant l'entrée à l'IUFM ?
- 2 - Vous avez suivi un cours l'année dernière : quels sont les éléments que vous avez appris que vous ne saviez pas déjà :
 - au niveau des contenus disciplinaires ?
 - au niveau des contenus didactiques ?
- 3 - Pour vous que représente l'activité mémoire ?

11. Le programme de 1969 comportait en autres deux paragraphes intitulés algèbre et algèbre linéaire, où l'on trouvait par exemple les notions suivantes: "Groupe opérant sur un ensemble; groupes ordonnés; groupes cycliques; générateurs d'un groupe" ou encore "Espace vectoriel de dimension finie. Base. Sous-espace. Application linéaire, matrices, exemples de calcul sur les $n \times p$ matrices notamment pour $n \leq 3$ et $p \leq 3$."

12. Il s'agit de quatre étudiants pendant l'année 1992-93 et de quatre étudiants pendant l'année 1993-94. Chaque fois, il s'agissait d'étudiants qui avaient pris comme sujet de mémoire, un sujet ayant trait aux décimaux ou aux fractions. Il en résulte que la question 2 porte sur les contenus relatifs à ces notions.

Nous avons profité aussi de nos visites pendant le stage en responsabilité de stagiaires¹³ qui n'avaient pas suivi la formation en IUFM la première année, ayant été reçus comme candidats extérieurs au concours. Nous leur demandions quels besoins ils ressentaient pour pouvoir enseigner les notions souhaitées.

Nous donnons les principales conclusions que nous avons tirées de ces divers entretiens.

3.1. Une expression peu délimitée et peu stable des besoins en mathématiques

Un des éléments qui joue un rôle important pour l'étudiant en formation, c'est qu'il a déjà suivi, comme tout citoyen, les enseignements de l'école et du collège. Il a donc déjà rencontré les savoirs qu'il va devoir enseigner, puisqu'en général il est encore jeune étudiant.

Nous distinguons ainsi deux cas de figures :

* Soit il n'a pas eu de problèmes avec ces savoirs et il lui semble a priori qu'il ne lui est pas nécessaire d'étudier à nouveau des contenus relatifs à ces savoirs. Ainsi deux étudiantes représentatives de cette catégorie, ayant obtenu une licence de physique après avoir fait Terminale C et un DEUG A, nous déclaraient, après la première année de formation :

« nous n'avons pas ressenti le besoin de contenus disciplinaires nouveaux. Nous aurions souhaité qu'on nous parle plus de la pédagogie, de la didactique, parce que c'est un domaine que l'on ne connaît pas, où nous avons des **manques, donc des besoins.** »

Nous voyons à travers cette déclaration que la notion de besoin est liée à la perception d'un manque, d'une ignorance. Il est clair que, lorsque les étudiants arrivent dans un centre de formation, c'est le futur métier qui est l'inconnu et c'est sur ces aspects là que l'expression de leurs besoins va être centrée.

Nous retrouvons ce point de vue chez des étudiants déclarant ne pas avoir eu de problèmes avec les mathématiques dans le second degré et ayant suivi par la suite des études à caractère plutôt littéraire : une opinion ainsi largement répandue est que les enseignements suivis au collège, voire au lycée en mathématiques sont suffisants pour pouvoir enseigner au niveau primaire et qu'en définitive, il ne s'agit que d'une affaire de mise en forme, d'apprêt didactique.

* Soit le formé a eu des problèmes au cours de sa scolarité. Ses derniers "mauvais" souvenirs portent sur les mathématiques rencontrés au collège et peut-être au lycée. Il pense être "nul" dans cette discipline et incapable d'apprendre des contenus de ce type.

13. Il s'agit ici de deux stagiaires qui devaient enseigner au CM1 ou au CM2, la partie du programme portant sur les décimaux et les fractions.

Aussi ses besoins exprimés vont consister en une demande de savoir-faire pour enseigner telle ou telle notion mathématique afin, dit-il, de ne pas faire "d'erreur d'enseignement", de "ne pas dire de bêtises".

Ainsi, dans un cas comme dans l'autre, il n'y a pas d'emblée une expression affirmée de la part des étudiants d'une acquisition de contenus précis dans cette discipline.

En général, c'est le travail sur les "erreurs" des élèves qui les a le plus intéressés, notamment le fait que les erreurs puissent persister longtemps :

« nous, au niveau du module des décimaux, on avait essentiellement vu les différents types d'erreurs que faisaient les enfants et on s'était donc aperçu que lorsqu'on faisait les sondages en CM, sixième, quatrième et jusqu'en seconde, il y avait des erreurs. C'est pour ça qu'on s'est intéressé un peu à ce sujet parce que, quand on pense qu'on commence à enseigner les décimaux en CM et qu'on voit qu'en seconde il y a encore des erreurs, c'est qu'il y a un vrai problème. »

Leur demande va porter principalement, comme en début de formation sur la façon d'introduire une notion :

« moi, ce que j'aurais aimé voir, c'est comment approcher les décimaux, la première approche. On avait vu qu'il y avait plusieurs entrées. Comment gérer tout ça? Pareil, comment aborder les rationnels? Ça, on n'a pas du tout vu. Nous et la majorité du groupe, c'est ce que l'on demande : comment entrer dans une nouvelle notion, par quels moyens ? »

L'expression des besoins des formés n'est pas une donnée stable. Ainsi, si nous examinons un questionnaire donné en première année après un test initial¹⁴, qui mettait en évidence un certain nombre de difficultés sur des notions numériques que les étudiants auront à enseigner, nous avons pu noter :

- une forte demande de "réactualisation" des connaissances, de "révision" des définitions, autrement dit un souhait de travailler sur des contenus mathématiques,
- une faible demande sur la façon dont ces notions sont abordées à l'école élémentaire,
- un certain nombre de non-réponses, traduisant la plupart du temps le fait que les étudiants n'arrivent pas à définir clairement leurs besoins.

Face à une ignorance dont ils ne mesuraient pas l'ampleur, leurs besoins déclarés se sont déplacés vers des objets de savoir mathématique, principalement à travers la demande d'un cours comportant des définitions, des propriétés bien spécifiées, etc...

14. Nous reviendrons plus longuement sur l'analyse de ce test dans le chapitre B4. Le texte du questionnaire figure en annexe B4b.

3.2. Le recours aux "livres" comme réponse aux besoins professionnels

Mais au fait, de quoi a besoin l'enseignant qui débute lorsqu'il doit enseigner un contenu qu'il connaît mal ?

Ce sont vers les livres de classe (manuels de l'élève et livres du maître) qu'il va se tourner comme en témoigne cette étudiante, qui, recrutée sur concours directement en deuxième année de formation, estimait avoir reçu peu de formation dans le domaine mathématique qu'elle devait aborder avec ses élèves au moment de son stage en responsabilité :

«moi, sans les livres, je ne peux pas me débrouiller. Dans toutes les démarches que j'ai prises, j'ai suivi scrupuleusement aussi bien les consignes que ce que l'on disait dans le livre du maître, parce que j'ai tellement peur de dire une bêtise, de les induire dans un raisonnement faux et qu'ils se fassent de mauvaises représentations. Je reste vraiment collée au livre, je n'ai pas de marge de manœuvre en mathématiques, mais aussi bien pour les fractions que pour un exercice de logique ou que pour autre chose.»

En résumé, les attentes professionnelles des formés en mathématiques sont des attentes diffuses concernant des objets de savoir servant à enseigner. Leurs besoins sont peu délimités et vont varier en fonction des activités qui leur sont proposées dans le cadre de la formation. Ils demandent principalement qu'on leur enseigne comment on doit enseigner telle ou telle notion mathématique.

Un questionnement extérieur n'apporte que peu de renseignements pour saisir leurs besoins professionnels en mathématiques.

Face à ces besoins très généraux concernant la prise en main directe de la classe que les enseignants débutants satisfont en allant chercher des solutions dans les livres de classe, quelles sont les réponses apportées par des formateurs?

4. LA FORMATION EN MATHÉMATIQUES : UNE SPÉCIFICATION DIFFICILE

Pour recueillir des informations relatives aux points de vue exprimés par les formateurs, nous nous sommes entretenus avec dix d'entre eux¹⁵ comme représentants des différentes

15. Quatre universitaires: l'un nouvel enseignant en formation des professeurs d'école (PE), une enseignante en formation des professeurs des lycées et collèges (PLC), mais étant intervenue dans les formations en école normale comme universitaire, une enseignante ayant son service à la fois auprès des PLC et des PE, un universitaire n'intervenant pas directement dans un IUFM, mais ayant participé aux différents jurys de recrutement des PE.

Quatre anciens professeurs d'école normale (PEN), formateurs à plein temps auprès des PE, dont l'un a participé aux discussions ayant conduit au "rapport Bancel" et un autre impliqué dans des recherches en didactique des mathématiques.

"catégories" intervenant à un titre ou à un autre dans la formation (anciens professeurs d'école normale, universitaires, instituteur maître-formateur).

Nous leur posons en début d'entretien les questions suivantes :

- 1- La création des IUFM entraîne-t-elle, à votre avis, des modifications dans la formation des PE ?
- 2 - Quel rôle joue le concours situé au milieu de la formation ?
- 3 - A votre avis, quel intérêt présente le mémoire pour les futurs PE ?
- 4 - Avez-vous un avis sur la façon dont on peut répondre aux besoins des futurs enseignants ?

Suivant les formateurs, nous leur demandions de préciser quel rôle spécifique pouvait jouer la "catégorie" à laquelle ils appartiennent .

Les trois premières questions portant sur les changements intervenus dans la formation des instituteurs suscitèrent beaucoup de réactions, puisque c'était un sujet d'actualité au moment où nous avons fait les entretiens. La dernière, très "ouverte", sollicitait le point de vue des formateurs sur la question des besoins. Nous complétons l'analyse de ces interviews par l'examen de quelques textes, écrits récemment à propos de la formation par des formateurs, pour en tirer quelques lignes de force sur le point de vue des formateurs.

4.1. La difficulté de répondre aux besoins des formés

A la quatrième question de l'interview, voici les propos tenus par une universitaire qui a été formatrice dans des écoles normales il y a déjà quelques années, propos qui reflètent l'opinion dominante chez les formateurs que nous avons rencontrés :

«au départ, ils [les formés] vont te donner leurs besoins, **mais ce n'est pas sur ces besoins là que tu vas fonder ta formation**¹⁶. Par exemple, ils vont te dire : "Ah, j'ai besoin de savoir comment on enseigne les décimaux en CM1 ou en CM2, par quoi je dois commencer ?" c'est-à-dire des questions très liées à leur pratique professionnelle quotidienne et c'est bien évident que le formateur ne va pas apporter directement des éléments de formation là-dessus.»

Les formateurs sont conscients de cette demande que nous avons signalée dans le paragraphe précédent, demande peu délimitée à laquelle ils pensent ne pas pouvoir répondre directement.

Cette formatrice ajoutait que le premier besoin qu'elle ressentait, c'était de changer la relation aux mathématiques de la plupart des étudiants :

Deux instituteurs maître-formateurs (IMF): l'IMF reçoit les étudiants au cours de stages et est amené à intervenir de manière ponctuelle au cours de la formation donnée dans les IUFM.

16. C'est nous qui soulignons.

«notre problème, c'était que ces élèves de l'école normale étaient issus plutôt de sections littéraires. Ils avaient un certain rapport aux mathématiques, même de type affectif, qui était assez négatif. Le premier besoin, c'était de supprimer un petit peu ce blocage qu'ils pouvaient avoir par rapport aux mathématiques : soit un refus d'en faire, soit une anxiété, soit l'idée qu'on ne pouvait pas avoir accès aux maths parce que c'était trop dur.»

Autrement dit, nous avons ici l'explicitation d'un besoin qui n'est pas mis directement en rapport avec un besoin professionnel. On note d'ailleurs, dans plusieurs IUFM, des modules intitulés "réconciliation" dont l'objectif est de modifier l'image des mathématiques que peuvent avoir les étudiants.

4.2. Des points de vue divergents sur les contenus disciplinaires

Mais justement quels vont être les éléments de formation proposés par les formateurs ?

Nous pouvons remarquer que les points de vue exprimés sur les besoins sont nettement différents. Donnons tout d'abord, pour illustrer ce contraste, et à titre d'exemple, les réponses à la question de notre interview portant sur les besoins des formés, de deux formateurs¹⁷ appartenant à des catégories différentes: leurs deux points de vue peuvent être considérés comme extrêmes sur la nécessité de travailler sur des contenus disciplinaires dans le cadre officiel de la formation.

4.2.1. Le point de vue d'un instituteur maître-formateur

On note une position très affirmée (voir annexe A1b) : les besoins des futurs professeurs d'école ne portent pas sur des contenus disciplinaires :

«ils n'ont pas tellement besoin d'un apport disciplinaire, ils ont beaucoup plus besoin d'un apport sur le plan de la formation professionnelle. Maintenant l'apport disciplinaire, c'est vrai que souvent, ils sont spécialisés dans un domaine et c'est vrai qu'ils ont besoin de se remettre à niveau.»

Le terme de mise à niveau revient plusieurs fois dans le discours, car les étudiants doivent avoir un niveau nettement supérieur à celui qui est enseigné à l'école primaire. L'acquisition de contenus qui leur manqueraient éventuellement doit se faire par auto-formation, compte tenu de leur niveau de recrutement.

«La remise à niveau pourrait presque se faire toute seule. Il suffirait qu'il y ait un moment où il y ait une évaluation et qu'ils prennent conscience de leurs manques. On leur fournirait une certaine bibliographie et ils travailleraient tout seuls pour se former dans les disciplines.»

17. Il s'agit d'un instituteur maître-formateur (IMF) et d'un membre de l'enseignement supérieur récemment nommé dans un IUFM.

Cette idée de formation par les livres qui seraient fournis aux étudiants, est suffisamment forte pour que ce formateur revienne plusieurs fois sur la question, en précisant que dans le cas où les étudiants sont "débrouillés" mais ont des problèmes au niveau des contenus, il leur fournit par exemple ERMEL¹⁸. Cependant, pour les étudiants qui ont vraiment des problèmes de contenu, il les invite à faire les activités que lui-même propose à ses propres élèves. Il pense qu'avec ces étudiants, il ne faut pas faire de formalisations excessives, mais s'intéresser aux procédures qu'ils mettent en œuvre pour résoudre un problème, procédures proches de celles des enfants. Ce n'est qu'à la fin de la formation qu'il y aurait des interventions de type universitaire pour «formaliser les choses», les «intégrer dans un ensemble de savoirs plus vastes».

En contrepoint de l'affirmation du fait que les futurs professeurs n'ont pas besoin d'apports disciplinaires directs, on trouve l'affirmation que les besoins sont :

«des besoins de relation, de communication, de savoir-faire et d'expérience.»

L'opposition entre la démarche du formateur IMF, qui part de la pratique pour aller vers la théorie, et celle des autres formateurs qui partent de la théorie pour aller vers la pratique est soulignée avec force :

«oui, mais d'abord, qu'ils [les étudiants] se cassent la figure, qu'ils voient les enfants se casser la figure, qu'ils se posent la question : pourquoi ça ne marche pas avec les enfants.»

D'où la proposition de faire faire un stage assez long en début de formation, pour que :

«les étudiants pointent, avec l'aide des IMF, leurs savoirs, leurs manques, etc... et que cela soit pris en compte, que cela soit regroupé par les profs à l'IUFM.»

4.2.2. Le point de vue d'un membre de l'enseignement supérieur

Nommé récemment dans un IUFM, ce formateur été amené à réaliser un enseignement en direction des étudiants de première année (voir annexe A1c) :

L'accent est mis sur la nécessité de disposer de contenus mathématiques de niveau élevé : c'est le terme de global qui revient souvent :

«oui, je pense déjà qu'un professeur d'école, il ne peut pas se contenter de connaître à ras le niveau du primaire. Il doit avoir une vue plus élevée qui lui permette d'avoir un point de vue **global** sur le genre de problèmes qu'il est en train de faire développer à ses élèves.(...) S'il n'a pas une vision plus **globale** de la situation, il peut ne pas savoir que ça amène au même résultat. C'est extrêmement important. D'autre part, un professeur d'école, s'il a un niveau un

18. Collection de livres réalisée par une équipe de recherche de l'INRP, collection issue de recherches menées par cet organisme.

peu plus élevé, cela lui permettra de préparer un peu mieux ses cours, d'avoir une vue extrêmement rapide sur le contenu de ses cours et de ne pas se pencher sur tous les exercices qu'il faut avoir fait.»

Le formateur va préciser le niveau de référence pour les contenus mathématiques, qui d'après lui sont définis par rapport au collège :

«X (il s'agit du directeur de l'IUFM, lui-même membre de l'enseignement supérieur) a déjà voulu réformer un petit peu depuis plusieurs années la formation, redéfinir la formation. Il veut orienter **sur des contenus mathématiques plus forts**¹⁹. Il pense que le niveau mathématique doit être plus fort. On parle toujours de l'équivalent de la formation secondaire, donc on dit niveau troisième, niveau cinquième, niveau sixième ou niveau seconde. La référence, c'est plutôt le collège. Alors X préférerait que la référence soit plutôt la seconde.»

Il porte un regard critique sur les anciens professeurs d'école normale, dont les exigences du point de vue mathématique ne sont pas assez fortes, comme le soulignait d'ailleurs le directeur de l'IUFM et il précise :

«pour les formateurs c'est toujours le collège, mais pas la troisième, c'est plutôt la quatrième ou la cinquième. Parfois, ils voudraient se limiter aux mots, au pied de la lettre, du programme de l'école primaire, rien que cela peut-être avec des développements un petit peu plus grands, par exemple en se limitant aux nombres naturels, en étudiant un peu les décimaux.»

Les positions sont donc divergentes. Le formateur dont la position institutionnelle est principalement d'être enseignant de l'école élémentaire estime que l'institution ne doit pas prendre en charge directement la formation à des contenus disciplinaires. L'enseignant du supérieur est partisan de contenus mathématiques plus "forts", reprochant aux autres formateurs leur manque d'exigence en la matière.

4.3. Le concours, un révélateur des problèmes rencontrés

4.3.1. La désignation des contenus

La position par rapport au concours est un bon révélateur de ces différents points de vue. L'IMF, dont nous avons développé le point de vue précédemment, a une position tout à fait tranchée :

«ils préparent un concours, ce n'est pas de la formation professionnelle. (...) ils laissent de côté tout ce qui est formation pratique. Il [le concours] joue le rôle inverse de celui qu'il devrait jouer.»

Par contre la position du membre de l'enseignement supérieur est tout à fait différente :

19. C'est nous qui soulignons.

«c'est bien que le concours soit placé là, ça permet de faire une formation, peut-être d'améliorer le niveau mathématique. Le fait d'avoir un concours, cela les pousse à travailler, c'est un garde-fou aussi bien pour les étudiants que pour les formateurs parce que les formateurs ont tendance à rester dans leurs "savates", dans leurs trucs traditionnels.»

L'existence d'un volet noté 12 points²⁰, "permettant de juger des compétences du candidat dans la discipline", va entraîner la nécessité de définir des éléments susceptibles d'être posés à l'épreuve. Comme le précise une formatrice, ex PEN²¹ :

«donc maintenant, à cause du concours, il faut avoir des vrais problèmes mathématiques à faire, parce que la construction des nombres, ça ne permet pas de faire grand-chose. Donc là, ça fait glisser toute la partie savoirs mathématiques indépendamment de l'école primaire sur fonctions numériques et proportionnalité et puis des savoirs aussi de type géométrique - qu'on mette ou non de la pédagogie - ça les fait glisser en première année pour avoir suffisamment de matériaux pour avoir des énoncés de concours.»

L'interrogation principale est de ne pas codifier complètement ces contenus dès la première année :

«on était déjà dans une dynamique de "regonfler" un peu la première année du point de vue des maths. La difficulté, c'est de savoir jusqu'où va le consensus parce qu'il ne faut pas que ce soit un carcan, il faut conserver une dynamique, une possibilité de ne pas figer le concours sur le BEPC. Il ne faut pas que ce soit toujours les mêmes exercices qui ressortent.»

Pour les formateurs intervenant "directement" dans la formation, le concours entraîne l'obligation de spécifier les contenus, spécification qui n'est pas simple à réaliser comme il a été souligné.

4.3.2. La réponse à la demande institutionnelle d'une épreuve professionnelle au concours

Il est intéressant de voir quelles sont les réponses à la demande institutionnelle (qui est d'ailleurs controversée comme nous l'avons rappelé) d'une épreuve professionnelle pour le concours de recrutement des professeurs d'école. En effet ce sont les formateurs qui, à l'heure actuelle, font des propositions de sujet pour ce genre d'épreuve. Notons tout

20. Une note de service du 16/11/94 a modifié les épreuves du concours. Le premier volet noté sur 12 points est maintenant constitué de deux parties: une première partie notée sur 8 points «permettant d'apprécier l'aptitude du candidat à maîtriser et à exploiter des connaissances concernant une ou plusieurs notions relevant de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire», un deuxième partie notée sur 4 points qui consiste à «repérer les erreurs et les qualités d'une production d'élève(...)». Le deuxième volet toujours noté sur 8 points a pour objet l'analyse «des approches pédagogiques et des démarches correspondantes»(...). (Voir annexe A1d)

21. Professeur d'École Normale.

d'abord que les termes mêmes utilisés pour désigner des deux volets varient selon les académies. Le premier est appelé "partie à caractère disciplinaire", "partie théorique", "partie scientifique", "partie mathématique" ou encore tout simplement "premier volet". Le second qui nous intéresse ici est, lui, appelé "partie pédagogique", "partie didactique", ou "deuxième volet". Cela nous montre que l'articulation entre ces deux parties n'est pas complètement claire.

26 sujets²² sur 28 portent sur des activités de niveau cycle 3. Parmi ceux-ci 4 font référence aussi à un cycle autre que le cycle 3. C'est-à-dire que le choix même du niveau des activités indique que les contenus mathématiques sont considérés comme importants (il s'agit le plus souvent de contenus portant sur les multiples, la division, la divisibilité, la proportionnalité, les décimaux), contenus qui, en général, posent problème aux futurs candidats à ce concours. Nombre de sujets demandent une analyse ou une résolution du problème proposé²³. La très grande majorité des sujets comprend principalement des questions sur les procédures possibles des élèves pour résoudre le problème, ce qui revient à faire analyser par les candidats les connaissances mises en jeu du côté de l'élève. Il est, d'autre part, tout à fait remarquable que, pour 14 sujets (sur 28), le support documentaire utilisé est un extrait de manuel de l'école élémentaire, pour 3 autres sujets il s'agit de la revue Grand N²⁴ et pour un autre d'un livre de la collection ERMEL. Cela met en lumière que les manuels sont considérés comme importants en formation des maîtres.

Dans le même temps où le choix des sujets pour la deuxième partie fait référence aux mathématiques et où on demande aux candidats de résoudre le problème proposé aux élèves, il y a souvent un refus de poser des questions qui soient apparemment d'ordre mathématique.

On peut citer à ce propos les remous créés par le sujet de Versailles 1992, où l'une des deux parties de nature pédagogique²⁵ comportait une question perçue comme étant de nature mathématique.

Il s'agissait d'un jeu proposé à l'école maternelle, où les enfants sont amenés à gagner des cartes sur lesquelles figurent des demoiselles d'honneur et des garçons d'honneur afin de former le plus de couples possibles. Le nombre maximum de cartes que pouvait

22. Annales 93. Concours externe de recrutement des professeurs des écoles, COPIRELEM, LADIST et IREM de Bordeaux.

23. Ainsi par exemple le sujet de Nantes propose comme première question de résoudre le problème donné dans une page d'un manuel de l'école élémentaire : il est question de déterminer dans un certain contexte (appelé les malheurs d'Alfred) un nombre connaissant les restes de la division de ce nombre par 5, 3, 2 et aussi (de manière plus ambiguë) par 4. .

24. Revue destinée aux maîtres de l'école élémentaire, éditée par l'IREM de Grenoble.

25. Les candidats avaient le choix entre l'un ou l'autre des sujets concernant la partie pédagogique.

gagner un enfant était de 17. Les questions posées (au demeurant élémentaires) étaient les suivantes :

«Quel est le nombre maximum de demoiselles d'honneur qu'un enfant peut gagner ?
Quel est le nombre maximum de couples qu'un enfant peut former à la fin du jeu?
Y a-t-il un risque qu'un enfant commence par rendre une carte ?»

Un formateur ayant proposé le sujet nous a déclaré à propos des réactions de la plupart des autres formateurs :

«je crois que le sujet les a horrifiés. Un phénomène de rejet : "c'est scandaleux" (...).Alors en fait, il y a des gens qui ont contesté en disant "est-ce qu'on a le droit de poser une question mathématique dans une partie pédagogique" (...) Par ailleurs cette question d'ordre mathématique était une question pour vérifier qu'ils avaient bien lu la règle du jeu.»

Comme ce formateur le précise, la réponse à cette question correspondait à un besoin mathématique permettant de comprendre plus aisément le problème.

Ce deuxième volet apparaît en fait comme faussement séparé du premier : il consiste en partie à faire aussi des mathématiques, mais sans le dire explicitement, en vue de leur enseignement à l'école élémentaire. Le rédacteur du nouveau texte ne s'y trompe pas quand il affirme que le second volet «sera mis en relation avec le premier, chaque fois que c'est possible».

4.4. Les stratégies de formation en mathématiques

Nous allons confronter les opinions de formateurs et de didacticiens à propos des stratégies utilisées dans la formation des maîtres en mathématiques.

4.4.1. Une diversité de stratégies

D. Butlen, ancien professeur d'école normale, dans un document au titre significatif, "Quelle didactique en formation des maîtres"²⁶ retrace dans un premier temps l'évolution de l'enseignement qui, d'après lui, a eu lieu dans les écoles normales. Nous relevons quelques extraits significatifs :

«il y a un peu plus d'une vingtaine d'années, disons trente ans, les professeurs d'école normale considéraient que leur rôle était essentiellement de faire faire des mathématiques à des personnes qui allaient les enseigner, et de faire le maximum pour élever leur niveau.»

26. Butlen D., 1993, Quelle didactique des mathématiques en formation des maîtres, p.183 in *COPIRELEM, Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, tome 2, IREM de Bordeaux.

Il signale un partage des tâches en quelque sorte entre le formateur d'école normale chargés des contenus mathématiques et le maître d'application chargé des applications pratiques et de la formation professionnelle proprement dite :

«malgré de nombreuses tentatives pour mieux adapter le niveau et le type de mathématiques enseignées, il a fallu modifier cette conception :
- d'une part les "normaliens" avaient tendance à se désintéresser d'une formation qui leur paraissait trop coupée des aspects professionnels du métier,
- d'autre part, il n'apparaissait pas de corrélations évidentes entre les connaissances mathématiques acquises et la capacité d'organiser efficacement un enseignement dans les classes.»

Ainsi, D. Butlen dégage une conception qu'il appelle "pédagogue" : à côté du souci d'élever le niveau mathématique des étudiants, le formateur va s'efforcer de présenter des réalisations d'activités faites en classe, de les comparer et en même temps de présenter des activités qui soient relativement proches de celles qui pourraient être faites avec des élèves de l'enseignement élémentaire :

«il y a quelques années s'est fait jour une nouvelle évolution. Des PEN s'aperçoivent qu'ils obtiennent des résultats satisfaisants concernant un relatif changement des conceptions sur les mathématiques, mais que cela ne se traduit pas dans les pratiques. Ils prennent conscience en même temps du développement des recherches en didactique.»

Il signale que certains d'entre eux - il fait partie de ceux-ci - vont par la suite essayer d'intégrer dans leur enseignement les résultats de certains travaux en didactique des mathématiques²⁷ et en particulier les notions développées par ceux-ci :

«cette évolution est loin d'être achevée mais elle est indéniable et symptomatique **des besoins ressentis par les formateurs**. (...) Nous faisons l'hypothèse qu'il [un enseignement de la didactique] répond, de manière relativement efficace, à **des besoins ressentis par les formés**²⁸.»

Il signale que cette évolution n'est pas le lot de tous les ex-PEN, «certains restant au stade précédent, d'autres s'appuyant sur l'axe de la communication».

A. Kuzniak (1994) met, lui aussi, en évidence la diversité des stratégies. Il recherche les priorités apparentes dans certains choix de formation en essayant de les caractériser.

Il met en opposition des stratégies qu'il appelle «culturelles» et des «stratégies intégrées dans une perspective professionnelle» dans lesquelles interviennent d'autres savoirs que les savoirs mathématiques.

Parmi ces dernières, il distingue trois grandes catégories de stratégies :

27. Nous noterons en général par le signe DDM, la didactique des mathématiques.

28. C'est nous qui soulignons.

1) Les stratégies basées sur la monstration.

Ces stratégies se proposent de former l'étudiant grâce à un lien étroit avec son futur milieu d'exercice. Les savoirs pédagogiques et la manière d'enseigner sont considérés comme "monstrables". Le formateur s'appuie sur des observations du formé, soit directement dans la classe à l'aide d'un enseignant du terrain, soit en utilisant des moyens technologiques telles que les séances magnétoscopées. D'après l'auteur, le formateur est marginalisé et les savoirs qui permettent la prise en main de la gestion de la classe sont privilégiés.

2) Les stratégies basées sur l'homologie.

Ces stratégies imbriquent deux niveaux de formation : celui des étudiants et celui des élèves de l'école élémentaire. Le formateur propose des situations pouvant être adaptées par les formés dans une classe sous la forme qu'il souhaite voir mise en œuvre par ces derniers. A. Kuzniak s'efforce de montrer que ces stratégies fonctionnent «plutôt comme une conception à minima des savoirs possédés par les acteurs du système», qu'elles «ne supposent pas un savoir mathématique important et ne se réfèrent pas à un savoir sur l'acte d'enseigner très développé» (p 260). Cela l'amène à les qualifier d'«arte povera».

3) Les stratégies de transposition.

S'intéressant particulièrement à ce type de stratégie, il note que celles-ci "se fondent sur un savoir théorique qui organise la pratique pédagogique". La difficulté repérée est de définir ce savoir savant de référence qui est caractérisé par l'auteur soit par un "savoir pédagogique", soit un "savoir didactique" pour lesquels il précise (p. 265) :

* pour ce qui concerne le savoir pédagogique :

«ce savoir porte sur l'existence de séances de classe (d'ingénieries) relatives à des contenus précis. Les canevas de ces séances sont généralement disponibles dans un ouvrage comme ERMEL dont nous avons montré la valeur de référence pour le savoir pédagogique de type mathématique.

Le savoir pédagogique a intégré plus récemment les études portant sur les erreurs des élèves. (...)»

(Notons que ce savoir n'est évoqué qu'à travers des produits (ingénieries et études) et sa spécification est loin d'être claire. On voit d'autre part la difficulté à le légitimer par un savoir extérieur, la référence à ERMEL, ouvrage lui-même réalisé par les formateurs d'école normale, ne pouvant pas manifestement assurer cette garantie).

* pour ce qui concerne le savoir didactique :

«curieusement ce savoir qui a priori nous semblait aller de soi par référence au corpus de la didactique des mathématiques, s'avère au bout de notre étude le plus flou et sans doute celui dont la mise en œuvre en formation est la moins évidente.»

C'est sur les stratégies de formation intégrant des savoirs en didactique des mathématiques que portent actuellement des travaux et des débats parmi les formateurs et certains didacticiens. C'est pourquoi nous les examinons de manière spécifique.

4.4.2. Les stratégies intégrant des savoirs de DDM en question

M. Pezard (1984) avait entrepris sa thèse afin d'étudier l'introduction de contenus issus de la didactique des mathématiques en prenant pour hypothèse de son étude (p. 1) que :

«malgré les restrictions suivantes :

- au moins douze ans d'enseignement traditionnel pour les normaliens (sur la proportionnalité),
- un risque d'obsolescence au niveau du contenu,
- des rapports maître-élèves différents par rapport à un enseignement classique, on peut améliorer la formation des élèves-instituteurs et obtenir un progrès qualitatif en construisant un enseignement débouchant sur une **double institutionnalisation**²⁹ à la fois mathématique et didactique.»

Après avoir signalé que l'on ne peut se contenter d'enseigner aux élèves instituteurs comme on voudrait qu'ils enseignent à leurs élèves, elle estime (p. 2) que :

«on peut construire un enseignement qui ressemble à ce qu'on voudrait que les élèves instituteurs réalisent dans les classes et qui, en plus, les fasse réfléchir d'un point de vue didactique à partir des séquences réalisées avec eux.»

Au terme de son travail, M. Pezard note un progrès des connaissances mathématiques sur une notion donnée (il s'agit de la proportionnalité). Cependant, rien n'indique, dans la méthodologie adoptée, si ces progrès sont dus à l'introduction de notions didactiques dans le cours, ou aux activités proposées par le formateur sur des contenus relatifs à la proportionnalité.

Les acquis dans le domaine didactique, jugés à partir de projets de cours proposés par les normaliens, lui semblent bien minces, sauf sur deux points :

- la notion elle-même, étudiée dans un cadre mathématique plus général : cela permet d'analyser des exemples et des contre-exemples de proportionnalité et de mieux caractériser celle-ci,
- l'utilisation des deux cadres numériques et graphiques.

D'une manière générale, M. Pezard remarque que les projets de cours réalisés par les étudiants ont tendance à proposer un enseignement de la proportionnalité similaire à celui que les "normaliens" ont reçu eux-mêmes de cette notion et elle conclut que l'enseignement didactique a été insuffisant.

29. C'est nous qui soulignons. Le terme institutionnalisation est pris, nous dit l'auteur, au sens d'officialisation de connaissances, c'est-à-dire ce qui est fait dans un cours classique.

Si D. Butlen et M. Pezard sont des partisans convaincus de l'intérêt d'une introduction explicite de contenus issus de la DDM, les formateurs que nous avons interrogés restent d'une très grande prudence. Voici par exemple un témoignage typique :

«(...)nous, on est assez prudent sur la didactique étant donné l'équipe qu'on est. Et puis de toutes façons, c'est peut-être moi qui en sais le plus, et je serais encore plus prudente que les autres, enfin je veux dire c'est moi qui ai le plus fréquenté ces milieux-là. On s'est cantonné finalement, pour ce qui est de la didactique essentiellement aux analyses d'erreurs ou aux trucs un peu objectifs.»

Ces interrogations sont partagées par J. Portugais qui, dans sa thèse déclare (1992, p. 11) :

«Ce n'est pas impunément que l'on utilise les concepts et les résultats de la didactique des mathématiques au sein de la formation des maîtres.»

Cela l'amène à poser cinq questions qu'il estime fondamentales (p.30), dont la réponse à la dernière question va constituer l'essentiel de sa thèse.

- «1. Est-ce que la didactique doit être responsable de ce qui concerne l'enseignement de la didactique ? (de sa propre didactification)
2. Quelle articulation doit-on donner au couple didactique des mathématiques / formation initiale des instituteurs ?
3. Comment intégrer (ou réinvestir) les résultats de la recherche en didactique des mathématiques au sein de la formation des instituteurs ?
4. A quelles conditions la didactique est-elle enseignable aux futurs instituteurs ? Comment ?
5. Dans quels types de situations les connaissances didactiques prennent sens pour les futurs instituteurs ?»

Il signale (p. 31) que :

«ce n'est pas la formation des enseignants qui entraîne, parmi les ressources possibles, le recours à la didactique des mathématiques; mais c'est la didactique des mathématiques qui rencontre, parmi les problèmes qui se posent nécessairement à elle, celui de la formation des enseignants à la didactique des mathématiques.»

Cette façon de poser les problèmes l'amène à faire le choix d'étudier la façon dont on peut introduire, donc transposer des contenus de didactique des mathématiques. Il construit ainsi un dispositif de formation utilisant en particulier la notion de situation didactique avec des élèves-instituteurs qui doivent gérer des erreurs de calcul d'élève. La volonté du formateur de ne pas intervenir en leur fournissant des solutions possibles à cette gestion met ainsi, d'après ses conclusions, ses étudiants face à une situation-problème qui leur permet de construire des savoirs dits d'expérience.

Pour modéliser la situation de formation, il postule l'existence de deux systèmes :

- un système didactique constitué du maître, de l'élève et du savoir mathématique (S₁);

- un système didactique constitué du formateur, du formé et du savoir didactique(S2). Il suppose l'existence d'un troisième savoir, qu'il nomme savoir d'expérience (S3) pour désigner la construction qu'effectue le formé à partir du savoir didactique dans une situation d'enseignement proprement dite. Cela l'amène à introduire la notion de contrat de formation dans le système de formation, pendant du contrat didactique dans le système didactique.

D'après J. Portugais (p. 336), le savoir d'expérience :

«diffère profondément de nature avec le "savoir savant" (S1) de la mathématique ou de la didactique des mathématiques (S2). Nous pourrions dire que S3 se définit par les processus d'intervention du maître sur le rapport de l'élève au savoir mathématique»

L'étude de J. Portugais pose clairement le problème du statut des savoirs issus de la DDM dans la formation des maîtres et ouvre des perspectives intéressantes de recherche pour mettre le formé en situation de construire des savoirs servant à enseigner.

4.4.3. Un point commun aux diverses stratégies

Derrière la diversité des stratégies utilisées, apparaît cependant un point commun pour les formateurs, c'est la volonté de satisfaire d'une certaine façon des besoins en mathématiques chez les futurs formés.

C'est souvent net dans la description d'activités qui relèvent des stratégies intégrant les savoirs en DDM.

Examinons une activité intitulée "étude du format A4"³⁰ issue du document déjà cité "Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques"³¹.

Le résumé de l'activité est le suivant :

«l'étude des relations liant les dimensions des différents formats de papier classique permet de définir et travailler la notion de proportionnalité dans divers cadres, numériques, géométriques et graphiques.»

Des objectifs mathématiques (la proportionnalité, une approche de $\sqrt{2}$ par les aires, le coefficient de forme d'un rectangle, la similitude, éventuellement la notion de suite géométrique) ainsi que didactiques (notion de cadres et de changement de cadres, notion de preuve, différentes phases d'une situation d'apprentissage) sont annoncés. Mais si on observe le compte-rendu de l'activité, on peut noter que les étudiants vont être mis en situation de faire des mathématiques ce qui aboutit à une "institutionnalisation" de connaissances mathématiques. Par contre, si l'analyse montre l'intérêt didactique de la

30. M.L. Peltier, C. Houdement, 1993, Étude du format A4, document *COPIRELEM* déjà cité.

31. C'est nous qui soulignons.

situation, il faut noter l'absence d'indications sur les notions didactiques que sont censés apprendre les étudiants. Une confirmation de cette primauté donnée aux mathématiques nous est donnée par les prolongements envisagés de l'activité qui sont tous de nature mathématique.

Dans le travail que nous décrit J. Portugais, le choix de prendre comme support les erreurs des élèves concernant certains algorithmes de calcul, n'est pas innocent. Travailler sur les erreurs des élèves est une activité de type mathématique. À travers l'analyse des erreurs, le processus mis en place vise entre autres, à satisfaire des besoins en mathématiques des futurs enseignants.

5. LE POINT DE VUE ADOPTÉ DANS CETTE ÉTUDE

Ce balayage réalisé autour de la notion de besoin fait ressortir la difficulté pour les formateurs à faire vivre un enseignement de mathématiques dans le cadre de la formation professionnelle des futurs maîtres de l'enseignement élémentaire. Les formateurs ont tous cependant pour objectif de satisfaire les besoins en mathématiques de ces futurs professionnels. Leurs propos reflètent un questionnement sur les savoirs pertinents pour la formation professionnelle et leurs préoccupations sur ce que l'on doit ou non enseigner.

Les formés attendent qu'on leur montre comment enseigner une notion mathématique. Il en résulte que leurs besoins exprimés en mathématiques sont peu délimités et peu stables. Les diverses stratégies des formateurs, notamment celles intégrant des savoirs en didactique des mathématiques, apparaissent ainsi comme un compromis visant à satisfaire les attentes immédiates des formés tout en essayant de satisfaire des besoins en mathématiques qu'ils n'expriment pas spontanément.

Ainsi quelle que soit la stratégie adoptée, il y a une formation mathématique qui vit, même si les objets de savoir proprement mathématiques restent parfois cachés. Ce que nous voulons éclairer, c'est sous quelles contraintes se fait cette formation mathématique, qui apparaît souvent comme très particulière dans un institut de formation.

La question de la pertinence de tel ou tel objet de savoir mathématique est débattue par la noosphère de l'institution de formation. Nous nous interrogerons sur la nature de celle-ci : pour certains objets de savoir qu'il nous faudra déterminer, nous nous demanderons comment s'effectue la transposition didactique.

Pour apporter un éclairage sur la formation en mathématiques, nous choisirons un angle d'attaque à la fois spécifique et limité. Nous étudierons le système didactique en proposant un enseignement de mathématiques à propos de certains objets de savoir. Nous analyserons les rapports qu'entretiennent les formés, les formateurs et ces objets de

savoir en essayant de comprendre pourquoi et comment s'expriment les refus, comment se nouent les compromis entre les différents acteurs de la formation.

Nous allons à présent regarder dans quelles conditions, et à l'aide de quels outils théoriques, ce travail peut être envisagé.

CHAPITRE A2

CADRE DE L'ÉTUDE

Pour réaliser l'étude dont nous avons posé les premiers jalons dans le chapitre précédent, nous considérons l'enseignant du primaire comme un mathématicien d'école. Après avoir fait le choix des "systèmes de nombres" comme objet de savoir "crucial" et donné les raisons du dispositif choisi, nous précisons ce que nous entendons par conditions de fonctionnement des systèmes de nombres dans un système didactique de formation. Les notions de contraintes et de déterminations nous permettront d'aborder la difficulté que nous avons repérée à faire vivre un enseignement de mathématique dans une institution de formation des maîtres. C'est en fixant les contraintes pour certaines situations didactiques que nous comptons mettre en évidence des déterminations pesant sur les systèmes didactiques de formation, ces déterminations modélisant des conditions d'existence d'un enseignement de mathématiques.

1. LA RENCONTRE AVEC L'IGNORANCE

1.1. L'enseignant du primaire considéré comme mathématicien d'école

Nous avons pris le parti délibéré de faire vivre un enseignement de mathématiques dans le cadre de la formation professionnelle. Pour cela, nous allons prendre le point de vue sur l'enseignant développé par Y. Chevallard¹, au moment de la création des IUFM. Depuis que l'école est obligatoire, précise-t-il, et qu'être enseignant est devenu un métier, nous considérons que la qualité d'enseignant est première et que le fait d'enseigner une discipline, en particulier les mathématiques, est second. C'est notre manière habituelle et traditionnelle de penser depuis plus de deux cent ans.

Ceci nous paraît particulièrement net avec les instituteurs où le fait d'enseigner plusieurs disciplines a gommé en quelque sorte la spécification des unes et des autres. Or le fait d'être enseignant ne prend sa signification dans la société que si celle-ci est renseignée sur ce que l'enseignant "enseigne", c'est-à-dire sur les savoirs qu'il souhaite faire apprendre, en l'occurrence pour ce qui nous préoccupe, les savoirs mathématiques.

1. Chevallard Y., 1990, Pour une problématique de travail, texte interne donné au Groupe de travail "Sciences fondamentales et appliquées" au moment de la création de l'IUFM d'Aix-Marseille. Ce texte a été fourni aux participants du séminaire de didactique des mathématiques les 26 et 27 octobre 1991.

Les parents, par exemple, ne se contentent pas de savoir ce que leurs enfants apprennent, encore veulent-ils savoir ce qu'ils sont en train d'apprendre.

Opérant un renversement, Y. Chevallard propose donc d'appeler mathématicien :

«tout sujet d'une institution qui se voit attribué par celle-ci la responsabilité du bon usage et du devenir des mathématiques en son sein.»

Cette définition permet de considérer l'instituteur ou le professeur des écoles comme responsable du sort des mathématiques à l'école primaire et donc de le considérer comme **mathématicien d'école**.

De même, le formateur d'IUFM est considéré comme responsable du sort des mathématiques au sein de l'institut de formation et devient un **mathématicien d'IUFM**. Ce point de vue permet de marquer que l'unité de référence est un savoir et en même temps d'indiquer que celui-ci va se trouver spécifié de manière différente selon l'institution à laquelle l'enseignant appartient. Ainsi pour un savoir donné, nous nous intéresserons à la façon dont il va se fragmenter en différents objets de savoir selon l'institution école primaire, collège, IUFM, etc... Nous nous demanderons quelle est la responsabilité de chacun des protagonistes par rapport à ce savoir dans l'institution à laquelle il appartient.

1.2. Les besoins en mathématiques des formés et la rencontre avec l'ignorance

Les besoins en mathématiques des formés traduisent un manque, qui peut se manifester par leur rencontre avec l'ignorance.

Dans un système d'enseignement habituel, l'avancée du temps didactique est rythmée par l'introduction d'objets nouveaux qui crée de l'ignorance institutionnelle.

Pour qu'il y ait apprentissage, il faut que cette ignorance institutionnellement créée se transforme en «une ignorance personnelle» de sorte que le savoir soit perçu comme une réponse pertinente à celle-ci.

A. Rouchier (1991) a montré que cette réponse ne peut être réalisée que lorsqu'une dimension adidactique de la situation didactique existe et que l'objet de savoir qui sera enseigné, est identifié.

Il s'agit, ajoute A. Mercier (1995) de

«la rencontre par un élève [ici un formé], de l'ignorance institutionnellement créée pour qu'il puisse partager l'intention didactique et faire ce qu'il faut pour apprendre. (...)»

Puisqu'il s'agit de faire vivre un enseignement de mathématiques dans le cadre spécifique d'une formation professionnelle, se pose une double question :

Peut-on organiser la rencontre des formés avec des objets mathématiques nouveaux dans un univers où apparemment seuls les objets de savoir anciens ont droit de cité, afin de leur permettre d'établir des rapports nouveaux avec ces objets anciens ?

A quelles conditions les objets de savoir étudiés en formation vont-ils servir à assumer la responsabilité d'objets de savoir enseignés?

Nous appellerons objets servant à enseigner ceux dont le statut est acceptable et légitime dans la perspective d'une formation professionnelle.

A. Mercier (1995) a d'autre part montré que des «apprentissages institutionnellement invisibles» étaient non seulement possibles mais encore utiles : leur invisibilité étant «nécessaire à l'action enseignante, qui peut en user comme s'ils allaient de soi».

Il précise dans le même article que :

«Ces apprentissages invisibles mais utiles à la réussite des élèves sont le produit, à la fois,
- des contraintes temporelles de la relation didactique, et
- de l'organisation (l'écologie des savoirs) d'enseignements produits par le processus de transposition didactique.»

Aussi pouvons-nous demander :

Où et comment les étudiants apprennent-ils d'eux-mêmes dans le système de formation qui leur est proposé ?

Peut-on se donner les moyens d'en observer les manifestations ?

Pour quels objets de savoir et dans quel dispositif existant, la rencontre des étudiants avec une ignorance institutionnelle est-elle possible ?

2. LE CHOIX DES OBJETS DE SAVOIR ET DU DISPOSITIF

2.1. Des objets de savoir cruciaux

Nous faisons le choix d'objets de savoir "cruciaux", c'est-à-dire des objets de savoir soumis à certaines conditions :

- a) nous pouvons attester leur présence dans l'institution-cible² et dans l'institution de formation sous des formes nettement différenciées; ils sont donc perçus par les acteurs de la formation comme des objets d'enseignement,
- b) ils engendrent des difficultés d'enseignement reconnues dans l'institution de formation,

2. Nous appelons institution-cible, l'institution pour laquelle sont formés ceux qui y occuperont la position d'enseignant.

c) ils ont fait l'objet d'études didactiques dans l'institution-cible qui peuvent être considérées comme des tentatives de détermination des savoirs à enseigner pertinents dans cette dernière. Nous disposons ainsi d'ingénieries pour des élèves du primaire organisées autour de situations ayant une dimension adidactique.

Notre choix portant sur les objets de savoir que nous dénommons, selon le lexique de l'institution-cible, décimaux et fractions³ entraîne une délimitation du sujet d'étude : pour ces objets de savoir, les diverses conditions mentionnées nous paraissent réunies. Nous prenons ainsi acte du projet social, que nous ne discuterons pas, de faire que des élèves de Cours Moyen s'approprient des connaissances relatives à ces objets de savoir. Il est clair d'autre part que les objets d'enseignement désignés ne sont que "les emblèmes", pour reprendre une expression de Chevallard, d'un complexe d'objets d'enseignement en inter-relation les uns avec les autres.

2.1.1. Des objets de savoir présents dans l'enseignement élémentaire et dans les instituts de formation

Les décimaux et les fractions sont apparus et apparaissent toujours comme un enjeu important pour l'enseignement obligatoire. Nous pouvons le constater à partir de la place que leur accordent les anciens comme les nouveaux programmes destinés au primaire.

De même, les manuels font écho aux indications fournis par les programmes. Ainsi un manuel récent⁴, qui consacre un nombre important de pages à ces notions (du même ordre d'ailleurs que les autres collections en vigueur), écrit :

«(...) deux notions nouvelles, les plus importantes du cycle des approfondissements, sont abordées : les fractions et les décimaux. Elles nécessitent la plus grande délicatesse lors de leur présentation, tant sont difficiles

3. Le libellé du programme version 1995, qui ne diffère guère du libellé des programmes précédents est le suivant:

Fractions: écriture, comparaison de fractions de même dénominateur;

Nombres décimaux:

- écriture à virgule, écriture fractionnaire, passage d'une écriture à une autre;

- ordre sur les décimaux (comparaison, encadrement)

- pratique du calcul exact ou approché en utilisant:

les techniques opératoires (addition, soustraction, multiplication et division d'un décimal par un entier);

le calcul réfléchi (mentalement ou avec l'aide de l'écrit);

l'ordre de grandeur (encadrement, valeur approchée);

- problèmes relevant de l'addition, la soustraction, la multiplication de deux décimaux, la division d'un décimal par un entier, de la division décimale de deux entiers.

4. Brégeon J.L., Dossat L., Myx A., Poi B., Vicens P.Y. (1993) *Math en flèche*, Cycle des approfondissements, Livre du maître CM1, Collection Diagonale, Nathan.

les concepts mis en jeu et les usages dans presque tous les domaines de la vie aussi bien dans que hors des mathématiques.»

Nous disposons d'ingénieries ayant fait l'objet d'études didactiques approfondies notamment :

- le processus élaboré par G. Brousseau (1980, 1981, 1987)
- le processus élaboré par R. Douady et M.J. Perrin (1986)

Ces objets de savoir sont aussi présents dans les instituts de formation comme les IUFM en première ou en deuxième année. Ils figurent dans tous les plans de formation que nous avons pu consulter, en particulier celui de Grenoble⁵ :

Décimaux, rationnels et réels : objectifs

- connaître les propriétés élémentaires de D et de Q
- connaître les obstacles à l'apprentissage des décimaux
- distinction entre décimaux, rationnels et réels; propriétés de ces différents nombres
- analyse d'erreurs d'élèves à propos des décimaux et rationnels

Les lexiques sont différents : par exemple "fractions" à l'école élémentaire et "rationnels" dans les IUFM. Mais d'autres objets de savoir "cohabitent" avec les décimaux et les rationnels dans les institutions de formation, par exemple les "réels". Par exemple, dans les concours de recrutement des professeurs des écoles, les deux exercices suivants en témoignent :

Exercice 1⁶

Parmi les nombres suivants, dire ceux qui sont des décimaux et ceux qui ne le sont pas. Justifier votre réponse :

3; 1,9999... (des 9 jusqu'à l'infini); 0,31313131... (des 31 jusqu'à l'infini);

$\frac{1}{3}$ (un tiers); $\sqrt{2}$ (racine carrée de 2) $\frac{4}{5}$ (quatre cinquième)

Exercice 2⁷

On considère un carré OA_1B_1C dont le côté OA_1 , de longueur a , est porté par une demi-droite Ox .

Soit A_2 le point de Ox tel que $OA_2 = OB_1$ et B_2 tel que OA_2B_2C soit un rectangle.

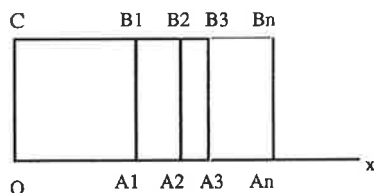
Soit A_3 le point de Ox tel que $OA_3 = OB_2$ et B_3 tel que OA_3B_3C soit un rectangle; et ainsi de suite.

Calculer OA_2, OA_3, OA_4 ; déterminer la valeur de OA_n .

5. Chaque académie dispose de son *propre* plan de formation. Extrait du plan de formation de l'institut universitaire de formation de l'académie de Grenoble 1991-92.

6. Concours de recrutement de professeurs des écoles situé à la fin de la première année de formation pour l'académie de Strasbourg (1992)

7. Concours de recrutement de professeurs des écoles pour l'académie de Toulouse (1992)



On peut se demander si tous les objets de savoir présents dans ces exercices ont le statut d'objets de savoir servant à enseigner, ou encore :

- pour quelle raison un futur professeur des écoles doit-il faire la différence entre un décimal et un irrationnel ?
- en quoi la connaissance des calculs faisant intervenir des racines carrées est-elle nécessaire pour enseigner les décimaux et les fractions à l'école élémentaire ?

Ces exemples nous permettent de préciser que nous n'allons pas nous préoccuper des décimaux d'un côté, des rationnels, voire des réels d'un autre. Ce ne sont pas tant les ensembles de nombres qui nous intéressent en eux-mêmes, mais leur organisation et leurs interrelations au sein du système didactique. Ce sont ces aspects-là qui vont être au centre de notre étude.

C'est pourquoi nous reprenons l'expression **systèmes de nombres** (Chevallard 1989b, p.50-52) pour désigner ces objets de savoir cruciaux. Cette expression est courante dans les pays anglo-saxons, pour indiquer l'unité des ensembles étudiés, contrairement à l'opposition culturelle traditionnelle entre les entiers et les "autres nombres". Les systèmes de nombres seront considérés comme un complexe objectal⁸, auquel appartient une "collection" d'objets de savoir formant ainsi une organisation équilibrée. Nous traduisons ainsi qu'un objet mathématique comme "décimaux" ne fonctionne pas seul dans le système didactique, mais avec d'autres objets de savoir, les uns identifiés par un nom, qui servent d'emblèmes, les autres cachés et cependant bien présents pour assurer l'équilibre de l'ensemble des objets.

2.1.2. Des difficultés signalées

Les difficultés dans les instituts de formation professionnelle, à propos de l'enseignement des décimaux et plus généralement des systèmes de nombres, sont signalées de façon récurrente par les formateurs et par des chercheurs. On peut par exemple lire dans un document destiné aux formateurs des maîtres⁹ :

8. Terme emprunté à Y. Chevallard.

9. Bulten D. (1993), *COPIRELEM, Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, déjà cité.

«Ainsi on peut remarquer pour les nombres décimaux ou les fonctions numériques par exemple, que le maître qui rentre sans formation, dans une classe de CM2, n'en sait pas beaucoup plus sur le sujet que ses élèves. Il fait souvent les mêmes erreurs.[...]. Une réorganisation profonde, voire une réconciliation ou une remédiation des connaissances est de ce fait nécessaire.»

M.J. Perrin pour sa part, signale dans sa thèse (1992, p. 117) à propos d'un questionnaire proposé à des élèves-instituteurs en 1985¹⁰, dans le cadre d'un enseignement du DEUG-instituteurs que :

«il apparaît que, pour la majorité d'entre eux, R est vu sous son aspect ensemble de nombres sans référence géométrique. Les différents sous-ensembles ne sont différenciés les uns des autres que par leur écriture, ce qui fait que R et D sont souvent assimilés comme l'ensemble des nombres à virgule (qu'ils aient ou non un nombre fini de décimales).»

2.2. Le choix du dispositif

Le dispositif "classe de PE1¹¹" nous paraît le plus approprié pour organiser un enseignement de mathématiques.

D'une part les contenus choisis précédemment font partie des plans de formation.

D'autre part, le concours situé en fin de première année est un des éléments qui finalise le dispositif "classe de PE1" et nous avons vu l'importance qui lui est accordée par les formateurs et les formés. Le concours est un moyen qui permet d'objectiver la relation didactique. Celui-ci étant actuellement académique, les formateurs sont dans l'obligation de définir des contenus communs pour la première année afin de faire travailler leurs étudiants sur des sujets qu'ils auront des chances de rencontrer au concours. Ainsi, cette nécessité d'objectivation assure de disposer de documents qui permettent d'analyser des éléments de la formation à ce niveau (annales, productions de livres destinés à la préparation du concours, documents de formation, etc...).

De plus, comme nous l'avons déjà dit, l'enseignement mathématique des systèmes de nombres pose de grandes difficultés dans la formation professionnelle des étudiants.

Ces diverses raisons nous ont conduit à travailler avec des étudiants entrant en première année d'IUFM¹².

C'est donc par rapport à ce dispositif et par rapport à ces savoirs que nous abordons les problèmes de formation en mathématiques. Nous allons préciser à présent les outils théoriques qui vont nous permettre d'avancer dans la clarification de ce problème.

10. Le questionnaire était proposé aussi à des élèves et étudiants de 1^{ère} S, Term. A1, C, D, E, première année de DEUG ou D'IUT. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce questionnaire dans le chapitre B4.

11. Professeurs d'École en première année de formation.

12. L'étude des "systèmes de nombres" font partie du programme de première année établi par les formateurs de l'académie de Grenoble.

3. DÉTERMINATIONS ET CONTRAINTES

3.1. Conditions de fonctionnement des systèmes didactiques

Du point de vue de la théorie anthropologique de Chevallard, l'IUFM, l'ensemble des étudiants "PE1", un groupe-classe "PE1", un groupe classe "PE2", un "atelier mémoire" sont des institutions didactiques. Nous aurons aussi l'occasion de considérer les manuels comme des institutions didactiques et nous verrons tout le parti que nous pourrons tirer de ce point de vue.

Pour modéliser la réalisation de l'intention d'enseigner présente dans ces institutions didactiques, nous considérons des systèmes didactiques (Chevallard, 1992, p.93) :

«Un système didactique (SD) comporte un ou des sujets de I qui viennent y occuper une *position d'enseignant* E, un ou des sujets de I, qui viennent y occuper une *position d'élève* e et enfin un objet O appartenant à EI(e), l'ensemble des enjeux didactiques pour I.»

Pour un enjeu O et pour chacune des positions d'enseignant¹³ et d'élève, il existe un rapport institutionnel à cet objet de savoir. Lorsqu'une personne entre dans une institution I, en position d'élève ou en position d'enseignant, l'objet O va "vivre" pour elle sous la contrainte de ces rapports institutionnels.

Nous étudierons les conditions de fonctionnement de systèmes didactiques de formation en essayant de répondre à des questions qui se rattachent aux deux grands types de questions suivantes :

- à quelles conditions un SD de formation, où l'enjeu didactique est l'objet "Système de nombres" va-t-il pouvoir vivre au sein d'une institution didactique de formation que ce soit l'école primaire, le collège, le lycée, la faculté ou encore l'IUFM? Sous quelle forme, dans quel état, sous quelle version s'y trouve cet objet ?

- comment l'objet "systèmes de nombres" va-t-il pouvoir "vivre" pour des sujets d'une institution didactique de formation, au sein du SD ? Quels rapports à cet objet peuvent se former dans ces institutions ? Pour quelles raisons certains rapports sont-ils empêchés de se former ? Avec quels autres objets va-t-il être en inter-relation ? Va-t-il prendre le statut d'objet servant à enseigner ?

13. Nous utiliserons indifféremment le terme de formateur, utilisé dans l'institution ou celui d'enseignant. En fait, le terme de formateur a été introduit pour signaler que dans une institution de formations, il y avait d'autres enjeux que des enjeux disciplinaires.

Dans le premier cas, nous chercherons des conditions de fonctionnement externes au SD et nous parlerons de **déterminations** (§ 32).

Dans le second cas, il s'agira de conditions de fonctionnement internes au SD. Nous serons amené à parler de **contraintes** (§ 33).

Ces deux types de conditions sont évidemment liés et nous examinerons comment leur étude peut s'articuler (§34).

3.2. Déterminations

3.2.1. Transposition institutionnelle et déterminations

Nous postulons avec Chevallard qu'un savoir S a pour "habitat d'origine" l'institution productrice de savoirs que nous nommons I_p . La façon dont s'est effectué et s'effectue le "transport" du savoir S vers une l'institution didactique qui abrite le système ou les systèmes didactiques que nous étudions crée des déterminations pesant sur le fonctionnement de ces derniers. C'est pourquoi nous examinerons pour les systèmes de nombres comment s'est réalisée la transposition institutionnelle correspondante. Il nous faudra étudier :

- comment ces objets de savoir se sont fragmentés dans les institutions de formation des maîtres et dans les institutions avec lesquelles elles sont en inter-relation,
- comment, du point de vue historique et épistémologique, ceci depuis la création de l'école obligatoire, se sont mis en place les rapports actuels entre les savoirs enseignés au collège, à l'école primaire et dans les institutions de formation des instituteurs.

3.2.2. Déterminations et assujettissements multiples

Parmi les déterminations d'un SD, il en est une qui va jouer un rôle important dans notre étude : c'est, comme nous le rappelle Chevallard le fait que :

«(p.94) (...) un système didactique n'existe *jamais seul*.. Écologiquement, son existence appelle généralement *d'autres types de systèmes didactiques*, fonctionnant en *association* (...) (p.97). L'important est de voir que la formation d'un système didactique - quel qu'il soit- suppose un environnement systémique, dont le rôle est de créer tout un ensemble de conditions nécessaires à l'existence du système didactique.»

Les systèmes didactiques comportant des sujets de l'institution "PE1", un formateur et un enjeu didactique O(S)¹⁴, sont liés potentiellement ou effectivement à d'autres

14. Objet de savoir à enseigner ou objet de savoir servant à enseigner correspondant à un objet de savoir S.

systèmes didactiques comportant des élèves du primaire, des étudiants et un enjeu didactique, par exemple :

- un système didactique réunissant un ou des étudiants d'un IUFM, des élèves, un enjeu didactique O'(S) et un enseignant-formateur, en général un instituteur maître-formateur, au sein d'une institution qu'on peut appeler "classe de stage",

- un système didactique du même type que précédemment, comprenant l'étudiant-enseignant, des élèves et un enjeu didactique O'(S) savoir particulier qui fonctionne au moment des stages dits en responsabilité. Dans ce dernier cas l'étudiant est en position d'enseignant puisque la classe est sous sa propre responsabilité.

Un étudiant "PE1" est ainsi assujéti à plusieurs autres institutions (classes de stage, classes de l'école primaire, manuels...). Comme le signale Chevallard (p.94),

«(...) une personne n'est en fait que l'émergent d'un complexe d'assujétissements institutionnels. Ce que l'on nomme "liberté" de la personne apparaît comme l'effet obtenu en jouant sur un ou plusieurs assujétissements institutionnels contre d'autres.»

Nous avons déjà dit qu'un objet de savoir se fragmente en plusieurs objets de savoir à enseigner dans les diverses institutions par un processus de transposition institutionnelle, en particulier dans l'institution de formation et dans l'institution école primaire. L'institution didactique "PE1" va chercher à ce qu'un étudiant devienne un bon sujet de l'institution de formation. C'est-à-dire, elle manifeste son intention de rendre le rapport personnel de celui-ci à un objet de savoir pour sa position "d'élève", conforme à la norme qu'est le rapport institutionnel. Mais, en même temps, l'étudiant est destiné à devenir un bon sujet de l'institution école primaire en position d'enseignant. L'institution de formation se doit de faire en sorte que le rapport personnel au savoir de l'étudiant soit aussi conforme au rapport institutionnel pour la position d'enseignant dans l'institution-cible. S'il n'en est pas ainsi, l'institution de formation se verrait rapidement taxée d'incompétence, ce qui au demeurant n'est pas exceptionnel.

Il en résulte des déterminations qui vont peser sur les systèmes didactiques de formation. Pour pouvoir les caractériser, nous cherchons à faire fonctionner ces systèmes didactiques au travers de situations sur lesquelles nous avons un certain contrôle théorique. Nous mettrons donc en place une ingénierie de telle sorte qu'une dimension adidactique des situations puisse être assurée. Nous utiliserons pour cela la théorie des situations didactiques de G. Brousseau dont nous précisons quelques éléments centraux pour notre étude.

3.3. Contraintes

3.3.1. Milieu et contraintes pour une situation didactique

Les situations sont modélisées en terme de jeu, en identifiant les stratégies rationnelles mises en œuvre par un "joueur rationnel". La connaissance permet au joueur de contrôler ce que G. Brousseau appelle le "système antagoniste", c'est-à-dire le milieu. Comme il le précise (1992, pp. 320-321) :

«Le système antagoniste du joueur dans une situation est pour le joueur comme pour l'observateur, une modélisation de la partie de l'univers à laquelle se réfère la connaissance en jeu et les interactions qu'elle détermine.

C'est ce système antagoniste que nous avons proposé d'appeler milieu. Il a donc un rôle central dans l'apprentissage, comme cause des adaptations et dans l'enseignement comme référence et objet épistémologique.»

Les interactions de l'élève avec le milieu détermine un jeu "adidactique". Si la situation est vécue comme adidactique, c'est que celle-ci est porteuse des attentes du concepteur de l'ingénierie et du formateur qui sont rendues invisibles pour l'étudiant.

Comme le signalent A. Bessot et D. Grenier (Cours de DEA¹⁵, 1995) :

«le milieu adidactique modélise (...) ce qui dans la situation servira comme référence au fonctionnement des savoirs. Le milieu est donc explicatif des changements d'état du jeu en l'absence des interventions de l'enseignant sur le savoir en jeu : **on modélise ainsi les causes**¹⁶ (et non les raisons) de l'apprentissage de l'élève et la signification des savoirs pour celui-ci.»

Au cours du processus de dévolution, en raison des rétroactions fournies par le milieu, l'entropie du système enseigné augmente dans un premier temps, comme le précise G. Brousseau (1986 p.79) :

«(...) il est nécessaire, pour modéliser les modifications des connaissances de l'élève, d'imaginer qu'il n'envisage pas à l'instant *toutes* les positions permises (bien qu'elles le soient par les règles, objectivement) et qu'une modification de son état de connaissance peut consister non pas à réduire son incertitude mais au contraire à l'augmenter par la considération à l'instant $t+\Delta t$ de possibilités nouvelles ouvertes à son choix.»

Mais la connaissance, qui se développe, elle aussi grâce aux interactions avec un milieu qui lui-même se modifie, réduit l'incertitude du joueur. La fin du jeu est donc déterminée quand celle-ci devient nulle et que le joueur contrôle complètement le jeu.

Les valeurs des variables didactiques fixent les conditions de fonctionnement ou encore les **contraintes** des situations proposées : elles permettent au chercheur et en principe

15. Document interne à l'équipe DIDATECH.

16. C'est nous qui soulignons.

au formateur d'exercer un certain contrôle au sens où elles autorisent l'anticipation de leur déroulement. Comme le signale Margolinas (1993, p. 72) :

«Le milieu est conçu comme un ensemble de contraintes à l'intérieur desquelles l'élève est libre d'exercer sa rationalité. Ces contraintes doivent garantir le fonctionnement pertinent de l'élève du point de vue du savoir à enseigner.»

Celles-ci créent des limitations de la liberté de l'étudiant considéré comme un joueur rationnel. L'analyse a priori des situations, réalisée par le chercheur, en mettant en évidence les variables, et en fixant leurs valeurs, dessine les contours théoriques d'un jeu adidactique possible.

Mais l'analyse du milieu peut être insuffisante pour rendre compte du fonctionnement de la situation telle que le projette le concepteur de l'ingénierie. Ces insuffisances peuvent provenir de la non prise en compte par le chercheur de caractéristiques internes à la situation, c'est-à-dire de valeur de variables qui ne "contraignent" pas suffisamment le joueur dans la situation. Cela nécessite la reprise de l'analyse a priori de la situation. Elles peuvent provenir aussi de déterminations qui sont externes à la situation, mais qui modifient la signification que donne le joueur au problème proposé. Par exemple la limitation du temps disponible empêche de répéter le jeu plusieurs fois, condition parfois indispensable pour que les rétroactions du milieu permettent la mise en place d'un jeu adidactique.

3.3.2. Contraintes et déterminations pour une situation didactique

Dans le cadre de l'ingénierie, les valeurs données aux variables fixant les contraintes des situations permettent un jeu théorique que l'on détermine a priori. L'analyse en terme de milieu permet de rendre visible pour le chercheur quels sont les enjeux pour l'étudiant dans la situation didactique. D'autres jeux sous ces contraintes sont possibles. La signification de la réponse de l'élève peut ne pas être la signification visée : le jeu adidactique de l'étudiant peut être spécifique d'une autre connaissance que celle visée par le concepteur de l'ingénierie.

Mais l'étude du jeu de l'étudiant est interdépendante du jeu du formateur : on ne peut faire l'économie de l'analyse de cette interdépendance pour conduire notre étude des déterminations et des contraintes.

Nous postulons l'existence de certains jeux stables de l'étudiant et du formateur dans des situations didactiques repérables par l'analyse a posteriori, ces jeux stables étant révélateurs de conditions de fonctionnement.

Dans les situations didactiques, on peut interpréter certaines des interventions de l'enseignant comme des moyens pour pallier les insuffisances du milieu¹⁷. Ces palliatifs peuvent être vus soit comme des changements des règles du jeu, cette fois-ci effectué par le formateur, soit comme des réponses aux différents jeux des étudiants. Dans le premier cas, le formateur apporte ainsi des informations nécessaires dont les éléments de la situation ne permettent pas l'émergence ou il porte des jugements sur les actions des sujets ou encore il transforme une phase de validation en une phase d'évaluation. Dans le second cas, il peut négocier les transformations du jeu avec les étudiants. Nous étudierons donc a posteriori le rôle des contraintes en nous donnant les moyens de repérer des jeux stables des étudiants et du formateur afin de rechercher certaines des déterminations qui les règlent.

Des phases d'enseignement peuvent avoir été négociées avec le concepteur de l'ingénierie notamment pour institutionnaliser ce qui a émergé au cours des situations proposées pour fournir aux étudiants un certain texte du savoir. La transformation ou l'interprétation réalisée par le formateur sera aussi révélatrice des déterminations qui pèsent sur le système enseignant.

Enfin, le déroulement effectif de l'ingénierie peut faire apparaître des épisodes non prévus. L'analyse de ces épisodes et de ses effets, en nous plaçant cette fois-ci du point de vue du formateur dans ses interactions avec les étudiants peut nous permettre là aussi de mettre en évidence certaines conditions de fonctionnement externes au système didactique, notamment celles provenant de la transposition didactique.

4. PLAN ET ORGANIGRAMME DE L'ÉTUDE

4.1. Plan

Dans une première partie, une étude historique des évolutions des interrelations entre réels, rationnels et décimaux au sein des différents niveaux de la scolarité obligatoire et des institutions de formation des maîtres, aura pour objectif de caractériser la transposition didactique dans ces différentes institutions. En particulier nous spécifierons le statut des manuels dans le processus de transposition institutionnelle (Chapitre B1), déterminant les conditions d'existence de ces objets de savoir dans les écoles normales. Nous serons amené à préciser quel rôle joue l'institution collège dans ces phénomènes de transposition institutionnelle (Chapitre B2 et B3). Cela nous incitera à examiner les rapports institutionnels actuels aux systèmes de nombres au collège et

17. ou encore comme des réponses à des difficultés de gestion de la situation didactique (par exemple en raison des contraintes de temps)

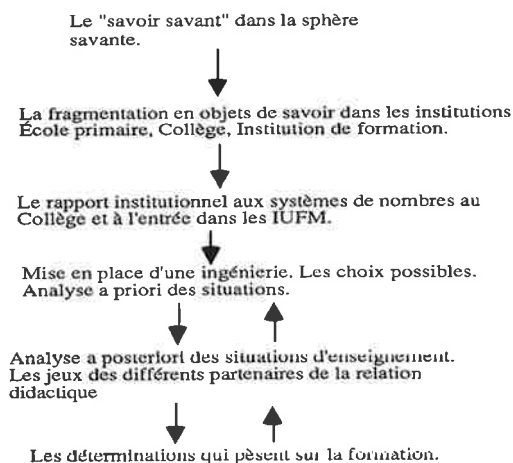
dans les IUFM. Pour cela nous ferons le point à l'aide des questionnaires déjà réalisés et au moyen de notre propre questionnaire (Chapitre B4).

Dans une deuxième partie, nous construisons une ingénierie de formation constituée de situations où l'on peut être assuré d'une dimension adidactique afin que l'ignorance institutionnelle ainsi créée puisse devenir l'ignorance personnelle du formé.

En transformant une ingénierie didactique réalisée pour des élèves de l'école obligatoire, nous spécifierons les contraintes intervenant dans les situations proposées aux formés (Chapitre C1 et C2). L'analyse a posteriori de celles-ci étudiera les différents jeux stables des partenaires de la relation didactique et mettra en évidence des déterminations qui pèsent sur la formation, aussi bien en ce qui concerne les étudiants que les formateurs (Chapitre C3 et C4) .

4.2. Organigramme des différents points étudiés

L'enchaînement des différents points abordés ainsi que leurs interactions sont mises en évidence dans l'organigramme ci-après.



Partie B

CHAPITRE B1

LE MANUEL, PREMIÈRE INSTITUTION DE FORMATION D'ENSEIGNANTS

Nous initialisons le travail en repérant le moment où s'est posé le problème de formation au métier d'instituteur. Nous verrons qu'à ce moment-là, les livres étaient appelés à jouer un rôle important. Nous mettons en évidence quelle est la fonction des livres en ce qui concerne la formation des enseignants. Nous les modélisons en tant qu'institutions de formation dans un sens qu'il nous faudra préciser. Par rapport à ces institutions de formation nous analysons ce que représentent les lieux institutionnels de formation que sont les écoles normales au moment de leur création et de leur développement.

1. LE POINT DE DÉPART DE L'ÉTUDE

Avant la révolution de 1789, on peut dire qu'il existait trois grands types d'école : les "petites écoles", sortes de garderies dépendant la plupart du temps directement des maires et du clergé, les collèges dépendant le plus souvent des facultés et de congrégations religieuses, et les écoles spécialisées type écoles militaires.

Dans les facultés et les écoles spécialisées, ce sont des mathématiciens professionnels qui assuraient l'enseignement concernant les mathématiques. Le problème de leur formation ne se posait pas puisqu'ils étaient issus de ce que l'on pourrait appeler la sphère savante : ils avaient donc la compétence reconnue dans leur matière.

Pour les collèges, dont l'enseignement était destiné aux enfants des classes sociales riches, l'origine sociale et religieuse des enseignants était un gage de compétence : l'enseignement avait un caractère très peu scientifique, en particulier, les mathématiques y étaient quasiment absentes. Là non plus, il n'y avait pas de problème en ce qui concerne la formation scientifique des enseignants.

Pour les "petites écoles", destinées aux enfants du peuple et inégalement réparties sur le territoire, le problème de la formation des maîtres ne se trouvait pas non plus posé. Ainsi par exemple A Rimbaud¹, professeur à la faculté des lettres de Paris, étudiant les conditions d'enseignement à cette époque précise :

«Le premier venu, faute d'un autre gagne-pain, pouvait embrasser cette profession : en général le candidat à ces fonctions passait un examen très

1. Rimbaud, 1887, Article "France", *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, pp. 1053, édition F.E. Buisson, t.1, Paris, Hachette

sommaire devant une commission nommée par l'évêque et recevait de lui l'*approbation* ou permission générale d'enseigner. (...) »

et plus loin, il ajoute :

«Le plus souvent, ces maîtres d'école savaient fort mal ce qu'ils enseignaient, suivaient les méthodes les plus routinières : on leur reprochait de se borner à "exercer la mémoire et à infliger quelques châtements souvent mal entendus".»

C'est donc peu avant la révolution et notamment à la suite du rapport de La Chalotais², que vont se dégager des idées-forces concernant l'éducation des enfants, que l'on va retrouver formulées dans les différents cahiers de doléances rédigés en 1789, c'est-à-dire :

- l'organisation d'un système d'éducation destiné à former des citoyens,
- l'extension de l'enseignement aux deux sexes et à toutes les classes sociales,
- la création d'un corps enseignant,
- une agence centrale présidant à l'exécution d'un plan étendu à tout le royaume.

Les écoles professionnelles, délivrant un savoir spécifique à certains individus pour certaines professions, ne suffisaient pas à assurer les besoins en instruction pour un nombre croissant de citoyens.

De la création d'un corps d'enseignants, vont naître les idées concernant la formation des maîtres où, comme on va le voir par la suite, les ouvrages scolaires vont être amenés à jouer un rôle central. L'idée d'un lieu institutionnel de formation, l'école normale de l'an III, en 1795, même si son existence fut éphémère, marque de manière symbolique la nécessité de lieux institutionnels de formation des instituteurs, qui se traduira par la suite par la création des écoles normales à partir de 1810.

2. L'IMPORTANCE DES TRAITÉS ET DES MANUELS

2.1. Le rôle historique du livre

Comme le montre Gert Schubring (1988), l'état, au moment de la révolution, va considérer explicitement le manuel comme un outil privilégié à la fois pour apprendre de nouvelles connaissances aux élèves mais aussi pour réaliser la formation des enseignants. Déjà dans le plan de La Chalotais déjà cité³, on peut lire les lignes suivantes relevées par Gréard⁴ :

2. La Chalotais (L.R. de), 1763, *Essai d'éducation nationale et plan d'études pour la jeunesse*.

3. Ibidem

4. Gréard, 1887, Article "La Chalotais, *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, pp. 1462-1467 édition F.E. Buisson, t.2, Paris, Hachette

«Ces livres seraient la meilleure instruction que les maîtres puissent donner, et tiendraient lieu de toute autre méthode. On ne peut se passer de livres nouveaux, quelque partie que l'on prenne. Ces livres étant bien faits, dispenseraient de maîtres formés⁵; il ne serait plus alors question de se disputer sur leur qualité (des enseignants), s'ils seraient prêtres, ou mariés ou célibataires. Tous seraient bons, pourvu qu'ils aient de la religion, des moeurs et qu'ils sussent bien lire; ils se formeraient bientôt eux-mêmes en formant les enfants. Il ne s'agirait donc d'avoir des livres, et je dis que c'est la chose la plus aisée présentement.»

Cette position correspond à l'idée fort répandue à l'époque sur le rôle important joué par l'écrit pour communiquer et transmettre les idées et les savoirs. L'idée-force est qu'il n'y a pas besoin de *formation initiale* comme nous le dirions aujourd'hui, mais simplement de quelque chose qui ressemblerait à ce que nous pourrions nommer *formation continue*, formation qui serait assurée justement par le manuel. On peut noter cette idée qui demeure fort répandue que l'on se forme en formant. Mais l'on voit poindre la première contradiction : "pourvu qu'ils sussent bien lire", nous dit La Chalotais, mais comment apprend-on à bien lire?

Mais c'est aussi une position dictée par les contraintes institutionnelles du moment : il aurait été de toute façon très coûteux de créer des lieux institutionnels pour mettre en œuvre une formation d'enseignants. Il faut se rappeler qu'à l'époque les maîtres des "petites écoles", qui furent les ancêtres des écoles primaires, étaient complètement dépendants des maires et du clergé, étaient payés misérablement et assuraient en général simultanément d'autres fonctions que celle d'enseignants. Il aurait été nécessaire que l'état ait une politique cohérente d'éducation nationale articulée sur un consensus national fort. Or certaines personnes sont opposées à l'émergence d'un corps spécifique de formateurs (on sait que cette question est toujours d'actualité). L'idée d'une instruction pour tous est concomitante avec la dislocation de certaines élites (notamment les congrégations religieuses) ayant la main mise sur l'enseignement : l'expulsion des jésuites en 1762 en est un bon exemple.

Condorcet avait vu, entre autres, dans la promotion d'une culture scientifique, le moyen d'évincer les élites notamment religieuses dont l'enseignement était dirigé vers les "humanités". Aussi déclarait-il⁶ qu'on ne pouvait confier une formation d'enseignants :

«...à des corps d'enseignants qui se recrutent par eux-mêmes, ...que ces corps soient des moines, des congrégations de demi-moines, des universités, de simples corporations, le danger est égal. L'instruction qu'ils donneront aura toujours pour but, non le progrès des lumières, mais l'augmentation de leur pouvoir; non d'enseigner la vérité mais de perpétuer les préjugés utiles à leurs ambitions.»

5. C'est nous qui soulignons.

6. Condorcet (édition posthume 1847), pp. 205-206

Cette position était donc guidée par la crainte de voir apparaître ou réapparaître des élites (la référence aux moines, demi-moines, université et congrégations est claire) détenant un pouvoir spécifique contrevenant à l'idée d'égalité qui prévalait à ce moment-là. Le manuel, disponible pour tous, pouvait assurer la fiction d'un savoir égalitaire partagé par tous.

Cette idée du rôle central joué par les manuels est reprise dans les différents rapports concernant l'éducation primaire dont le plus significatif est sans doute celui écrit par Arbogast⁷ en 1792, rapport et projet de décret qui portent exclusivement sur la composition des livres élémentaires destinés à l'instruction publique. Ce rapport, qui montre tout l'intérêt porté aux manuels, était d'ailleurs largement inspiré par Condorcet et on pouvait y lire⁸ :

«Des livres composés ainsi auront le double avantage d'exciter l'émulation des jeunes gens, et de soutenir le travail du professeur, en le leur facilitant; car avec un bon ouvrage, qui sert de base aux leçons, un homme à talents, quand même il ne serait pas profond dans toutes les branches de la science ou de l'art qu'il doit enseigner, **acquerra bientôt ce qui peut lui manquer encore**⁹. N'étant pas obligé de composer des cahiers, il consacre à **se perfectionner**, dans la partie à laquelle il se voue, le temps qu'il aurait utilisé à compiler des écrits médiocres ou plein d'erreurs.»

Nous trouvons ici un argument de taille : les manuels vont permettre de *dégager du temps* pour se former. Nous avons bien ici confirmation que la notion de formation continue était présente avant celle de formation initiale et peut-être qu'en plus, la formation initiale était inutile puisque le manuel palliait tous les besoins de formation.

2.2. Différents types de livres

La distinction était faite à l'époque entre trois degrés d'instruction, le primaire, le secondaire et les instituts. Dans le même rapport, Arbogast précise¹⁰ :

«Il y a deux sortes d'ouvrages à faire composer : ceux qui contiendront les éléments des sciences, des arts et des beaux arts, destinés aux instituts, c'est à dire au degré d'instruction qui répond à celui des collèges actuels; et ceux qui renferment les connaissances directement utiles au commun des citoyens, connaissances dépouillées de la forme scientifique, et mise à la portée de l'intelligence la moins exercée, serviront aux écoles primaires et secondaires.»

7. Arbogast était mathématicien. Ce rapport figure dans la partie "appareil critique" qui suit le livre de Condorcet réédité en 1989 par les éditions Art, Culture, Lecture. La pagination indiquée par la suite fait référence à cet ouvrage.

8. Idem p.210.

9. C'est nous qui soulignons.

10. Idem p.212.

Il y a une hiérarchie dans les ouvrages qui ne sont pas de même nature, les premiers en prise direct avec le savoir savant, contenant les éléments d'une science et les autres, comportant des connaissances dépouillées de la forme scientifique et devant être utiles directement.

Il faut s'arrêter un instant sur les mots "élément", "élémentaire", qui n'ont plus la même signification aujourd'hui et les termes "élémenter", "élémentation", qui ont disparu de la langue française. À l'époque, extraire les éléments d'une science, l'élémenter, c'est fournir un texte du savoir à partir duquel on peut générer l'ensemble des connaissances de l'époque sur la science en question¹¹.

À cette hiérarchie d'ouvrages correspond une hiérarchie de rédacteurs. Ainsi les premiers ouvrages doivent être rédigés¹² :

«par les premiers savants, par les hommes supérieurs dans une science, dans un art, ceux qui en ont sondé toutes les profondeurs, ceux qui ont reculé les bornes, qui soient capables de faire des **éléments**¹³ où il n'y ait plus rien à désirer, parce qu'eux seuls peuvent donner la précision, la clarté et la netteté nécessaires, et extraire de tout l'ensemble de la science les idées fondamentales, et les théories qui doivent entrer dans les **éléments servant d'introduction** à toutes les branches connues de la science elle-même.»

L'idée-force ici, que l'on trouve à deux reprises dans le texte, est que seuls les gens faisant partie de la sphère de production des savoirs sont capables d'élémenter le savoir à enseigner, d'en identifier et d'en organiser les éléments. Il leur est reconnu un rôle que nous pouvons analyser comme celui de noosphérique et ce sont donc des savants qui doivent effectuer le premier niveau de la transposition didactique. Il s'agit de produire des livres effectuant une transformation du savoir en tenant compte des derniers développements de la science. Ce sont donc les savants qui extraient les éléments et ce sont ces éléments qui vont servir de référence pour la deuxième catégorie de livres. Ce type d'ouvrages va se trouver en fait sous le contrôle indirect de ces derniers, mais le

11. Dans l'ouvrage collectif, *La République à l'école*, Une anthologie, 1991, ed. Presses Pocket Agora, C. Kinszler signale que la notion d'élément était un concept très présent à l'époque. Elle signale que "dans le savoir on peut distinguer deux ordres, deux types de successions :

- l'ordre des découvertes ou l'ordre historique (...)

- l'ordre des raisons ou ordre des intelligibilités (...) il rétablit en quelque sorte la succession des principes fondamentaux jusqu'aux conséquences, il ordonne les propositions, les faits, les expériences de manière à placer en première position ce qui conditionne la possibilité et l'intelligibilité de ce qui suit." Les "éléments" sont les notions premières qui permettent cette reconstruction. C Kinszler fait remonter à Descartes l'origine de ce concept mais on peut penser que c'est aussi dans ce sens que l'on peut comprendre "les éléments d'Euclide" qui permettaient de générer l'ensemble des connaissances de l'époque. Plus récemment l'entreprise de de Bourbaki consistant à rédiger des "éléments de mathématiques" relève de la même idée.

12. Idem p.210.

13. C'est nous qui soulignons.

savoir doit subir une nouvelle transformation. Ainsi, toujours dans le même rapport, nous pouvons lire :

«Pour les ouvrages destinés aux écoles primaires et secondaires, la même raison ne subsiste plus dans toute sa force; pour les bien faire, il faut l'habitude d'enseigner et de mettre les connaissances à la portée des enfants, plutôt que des vues profondes dans les sciences...»

Il est clairement indiqué qu'il faut ici d'autres compétences que de disposer du savoir lui-même, par exemple "avoir l'habitude d'enseigner et de mettre les connaissances à la portée des enfants". Les manuels pour le primaire ne devaient donc pas être faits par les savants, mais par des gens de moindre niveau. Cela ne pouvait pas être les maîtres eux-mêmes, **puisque ces ouvrages devaient servir à leur formation.**

«Un livre élémentaire ne peut être bien fait que par ceux qui ont appris bien au-delà de ce qu'il renferme : **on expose mal ce que l'on sait déjà, lorsqu'on est arrêté à chaque pas par les bornes de ses connaissances**¹⁴,»

précise Condorcet dans son premier mémoire (p. 217). Ici, on voit émerger une idée tout à fait intéressante : pour pouvoir enseigner, il faut disposer de savoirs mathématiques distincts des savoirs que l'on veut faire apprendre.

Il faudra donc l'émergence d'une catégorie spécifique de rédacteurs de manuels qui n'existait manifestement pas à l'époque. En effet, suite à un concours lancé par la convention nationale pour la rédaction de manuels élémentaires, les ouvrages réalisés vont se révéler de médiocre qualité, suivant les critères d'un jury de savants qui avait été désigné pour choisir les manuels. D. Julia (1981, p. 239) cite Lakanal, qui faisant partie du jury, critique un grand nombre d'auteurs :

«les citoyens qui ont travaillé (...) ont généralement confondu deux objets très différents, des élémentaires et des abrégés. Resserrer, coarcter [rendre plus étroit] un long ouvrage, c'est l'abrégé ; présenter les premiers germes et en quelque sorte la matrice d'une science, c'est l'élémenter ; il est facile de faire un abrégé de Meseray, tandis qu'il faudrait un Condillac pour faire les éléments de l'histoire. Ainsi l'abrégé, c'est précisément l'opposé de l'élémentaire(...)»

On voit donc la contradiction dans laquelle est plongé le jury : la deuxième catégorie de manuels définis par Arbogast est subordonnée aux traités existants. Leurs auteurs ne peuvent produire que des abrégés, alors que ce qui est souhaité, c'est rendre accessible au plus grand nombre les éléments présents dans la première catégorie d'ouvrages, afin que les jeunes enfants puissent par la suite éventuellement continuer à apprendre les sciences. Il n'est donc pas étonnant que ce soit le livre d'un savant, celui de Condorcet¹⁵, écrit sous un pseudonyme qui a été couronné. C'était à la fois le signe que ce second type de

14. C'est nous qui soulignons.

15. Il s'agit du livre de Condorcet complété par Sarret J.B. à qui sera fait d'ailleurs un procès de plagiat.

manuels n'était pas si simple à réaliser et que la catégorie intermédiaire de rédacteurs capables de les rédiger ne s'était pas encore constituée.

2.3. Le manuel de l'élève et le livre du maître

Dans le cadre que nous venons de rappeler, c'est-à-dire le manuel instrument de formation, Condorcet va initialiser une idée qui va faire recette : réaliser un livre du maître qui accompagne le manuel de l'élève. Il précise¹⁶ quelle doit être la fonctionnalité, à son avis, des livres du maître :

«Ils doivent renfermer :

1° des remarques sur la méthode d'enseigner

2° les éclaircissements nécessaires pour que les maîtres soient en état de répondre aux difficultés que les enfants peuvent proposer, aux questions qu'ils peuvent faire

3° des définitions ou plutôt des analyses de quelques mots employés dans les livres mis entre les mains des enfants, et dont il est important de leur donner des idées précises.»

Il revient plus loin sur le fait qu'un livre "doit surtout contenir une explication des mots isolés", confirmant par là que la fonction principale du livre du maître est une fonction d'apport de connaissances sous une forme relativement achevée. Une autre fonction assignée au livre du maître est d'être un instrument de formation des parents en leur permettant de suivre l'éducation de leurs enfants. Il souligne enfin que ce type de livre crée la distance nécessaire entre les élèves et le maître :

«Un maître qui ne se bornerait pas à la simple explication d'un ouvrage, et qui paraîtrait savoir quelque chose au-delà du livre qu'ils étudient, leur inspirerait plus de confiance...»

Il met donc l'accent sur un point qui, en fait, porte en lui la nécessité d'une formation initiale : c'est le fait que le maître doit être nettement plus *instruit* que les élèves.

Remarquons que la place du livre du maître est tout à fait remarquable à l'heure actuelle et spécifique de l'école élémentaire. Il ne serait pas concevable qu'une maison d'édition ne fasse paraître une collection de livres destinés à des écoliers sans l'accompagner de livres du maître conséquents. Pour ne prendre que deux exemples, pour les collections "Atout-math" et "Diagonale", les livres accompagnant les manuels destinés à un niveau scolaire particulier, le CM1 par exemple, ont respectivement 287 et 415 pages¹⁷, avec des parties comportant des notions théoriques, des descriptions détaillées de mise en œuvre des activités, précisant les objectifs, les contenus abordés, le matériel nécessaire, etc...

16. Condorcet, deuxième mémoire, pp. 237-239.

17. Alors que les livres de l'élève ne comportent respectivement que 192 et 191 pages.

Ce fait est à mettre en parallèle avec les livres du professeur du premier cycle qui se contentent en général de reproduire le livre de l'élève avec quelques ajouts en marge précisant les objectifs des activités proposées.

3. LES DIFFÉRENTES FONCTIONS DES TRAITÉS ET DES MANUELS

3.1. Les livres scolaires, produits d'institutions transpositives

Depuis la théorisation proposée par Chevallard (1985 et 1992) sur la transposition didactique, les livres scolaires sont habituellement considérés comme des produits de certaines institutions transpositives. Celles-ci peuvent être des personnes particulières qui deviendront des auteurs, des commissions ou groupes de personnes chargées de rédiger tel ou tel document. L'étude des livres va donc fournir des indications précieuses sur la transposition didactique de certains savoirs et ils ont été largement utilisés par les chercheurs ces dernières années.

Notre étude, prenant comme point de départ la période précédant la révolution, va s'intéresser particulièrement au traité de Bezout¹⁸. En effet, un questionnaire fait sous la révolution¹⁹ indiquait qu'à l'époque les enseignants de mathématiques des écoles centrales créées en 1795, qui avaient la liberté de choisir leur manuel, se contentaient de reprendre les idées et les notions exposées dans les livres de Bezout. Harlé (1984), étudiant les manuels de l'enseignement élémentaire de la fin du XIX^e siècle et au début du XX^e siècle note l'influence du traité de Bezout sur les manuels de l'époque : pour les manuels d'arithmétique notamment, on retrouve un plan d'étude identique à celui figurant dans le traité d'arithmétique de Bezout .

Nous étudierons plus en détail dans le chapitre suivant, le rôle de ce traité par rapport aux savoirs présents dans les écoles normales et dans l'enseignement primaire.

3.2. Le traité et le manuel, institutions de formation

Nous allons considérer à présent les livres selon un deuxième point de vue, pour traduire le fait que nous avons déjà souligné : les livres ont été explicitement considérés comme des instruments de formation.

3.2.1. Caractérisation

Nous définissons un livre destiné à l'enseignement comme une **institution didactique de formation à l'enseignement**, que nous appelons institution de formation.

18. Bezout, 1764, *Traité d'arithmétique à l'usage des gardes du pavillon et de la marine*; Éléments d'arithmétique, Paris.

19. Cité par Schubring (1988) p.163.

- Les savoirs

À cette institution sont attachés des objets de savoir, produits des institutions de transposition réalisés par certains auteurs. Pour ces objets de savoir se définissent des rapports institutionnels. Dans les manuels dominants, un rapport institutionnel pour un objet de savoir va être représentatif du rapport institutionnel à ce même objet pour la position d'enseignant dans l'institution à laquelle il est destiné (ici l'école élémentaire).

- Les élèves

Un certain nombre d'enseignants vont s'assujettir en tant qu'élève, par exemple un professeur préparant sa leçon en *lisant et en étudiant* un livre. Il se forme ainsi des systèmes didactiques, où le professeur est à la fois enseignant et élève. C'est lui-même qui va prendre l'initiative de lire telle ou telle partie du texte, résoudre tel ou tel exercice, faire des retours en arrière..., et donc modifier son rapport personnel au savoir.

Notons que, lorsqu'un enseignant rédige son cours en utilisant des manuels, il peut être à la fois considéré comme sujet des institutions de formation "livres", mais aussi comme une institution transpositive.

La possibilité pour un même enseignant de s'assujettir à plusieurs livres, donc à plusieurs institutions différentes, va être pour lui un moyen d'accroître sa marge de manœuvre dans l'institution école élémentaire. En particulier un livre marginal permettra à un enseignant de légitimer un rapport personnel qui n'est pas conforme au rapport institutionnel. On voit donc, sous ce point de vue, l'importance des manuels qui vont servir de points d'appui pour des modifications souhaitées par certains protagonistes du système d'enseignement.

3.2.2. Hiérarchie entre les traités et les manuels : les scribes

Cette double modélisation du livre, à la fois comme produit d'une institution transpositive et comme institution de formation, nous permet de rendre compte de la hiérarchie entre deux catégories de livres, hiérarchie que nous avons relevée précédemment.

- Le traité

Nous appelons "traité" le livre produit par un auteur (considéré comme institution transpositive), appartenant à la sphère de production du savoir que nous appelons I_p , ou très proche de celle-ci, dans le but d'élémenter les savoirs à enseigner. Nous dirons que l'auteur d'un traité est assujéti à I_p à un moment t . Ainsi le livre évoqué plus haut, le traité d'arithmétique écrit par Bezout est bien un traité au sens que nous lui donnons ici, puisque Bezout est un mathématicien reconnu (au moment où il écrit son livre). Il en est de même pour Condorcet quand il écrit son livre "Moyens d'apprendre à compter

sûrement et avec facilité”, livre qui est en général considéré plutôt comme un manuel dans le langage habituel. Ce qui va caractériser le traité est ainsi sa forte légitimité épistémologique.

- Le scribe

Lorsqu'un auteur de livres s'assujettit à un traité, considéré comme institution de formation, nous l'appelons "scribe". Il est à la fois assujéti à l'exigence d'élémentation mais aussi aux contraintes des systèmes didactiques. Ainsi Mr Tagnard Jeune déclare dans la préface de son "Traité d'arithmétique" écrit en 1845, c'est à dire quelques 80 ans plus tard que les premières éditions du traité de Bezout, au sujet des "bases de l'arithmétique moderne" :

«Le calcul des nombres décimaux suit immédiatement celui des nombres entiers...Cet ordre du reste ne nous appartient pas, le génie de Newton l'avait indiqué, et c'est à Bezout que revient l'honneur de l'avoir réalisé en France.»

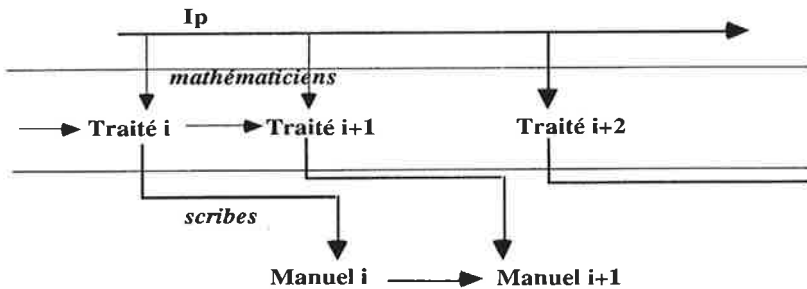
Nous dirons que Mr Tagnard Jeune s'assujettit au traité de Bezout et qu'il est un scribe relativement à celui-ci.

- Le manuel

Nous appelons "manuel", un livre produit par un auteur (lui aussi considéré comme institution transpositive), scribe par rapport à un traité. Avec les définitions que nous venons de donner, le traité de Mr Tagnard Jeune est donc un manuel.

3.3. Des niveaux de transposition didactique

Cette modélisation nous permet de concevoir des "strates transpositives", que nous visualisons par le schéma suivant :



Ip: institution productrice de savoirs

L'auteur d'un traité est un sujet de I_p . Il peut être ou non simultanément assujéti à un autre traité écrit antérieurement. Ainsi dans le schéma précédent l'auteur du traité $i+1$ est assujéti au traité i , mais l'auteur du traité $i+2$ est en rupture avec les traités antérieurs. Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, le livre de Bezout s'appuyait largement sur d'autres traités. C'est la réorganisation des savoirs dans la sphère savante qui détermine que la production d'un traité se présente comme étant en rupture par rapport aux traités précédents.

Ainsi nous pourrons observer les transformations que subit le traité de Bezout pour aboutir à un nouveau traité. Son traité d'arithmétique à l'usage des gardes du pavillon et de la marine publié en 1764, devient le Traité d'arithmétique à l'usage de la Marine et de l'Artillerie par Bezout, avec des notes et des tables de logarithmes par A.A.L Reynaud. En 1828, ce dernier ouvrage en est à sa quatorzième réédition; entre temps A.A.L Reynaud est devenu Baron et ses notes occupent 164 pages alors que la partie rédigée par Bezout n'en comporte que 152.

Ces notes conduiront l'auteur à publier parallèlement un traité d'arithmétique²⁰ qui diffère sur un certain nombre de points du livre de Bezout. Nous étudierons en détail le processus dans le chapitre suivant car il se fait au moment où se développent des programmes pour les différents niveaux du primaire, notamment pour les écoles normales qui sont en train d'être créées.

Nous mettrons à l'épreuve cette modélisation dans les chapitres suivants en essayant d'identifier quels sont les livres qui ont joué le rôle de traité et quels sont les auteurs qui vont occuper les positions de scribes, aux différentes périodes que nous allons étudier depuis la création de l'école obligatoire.

3.4. Ce que permet de voir une modélisation du livre scolaire en tant qu'institution de formation

3.4.1. La formation sur le tas

Pourquoi la société a-t-elle accepté sans réaction notable que quantité d'instituteurs que l'on a nommés comme suppléants ou comme auxiliaires puissent enseigner directement sans formation, c'est-à-dire sans passer par une institution officielle de formation? Pourquoi en est-il de même, de nos jours, où presque personne ne trouve à redire que

20. Reynaud, *Traité d'arithmétique à l'usage des élèves qui se destinent à l'École Polytechnique, à la Marine, à l'École Militaire de Saint-cyr et à l'École Forestière*. En 1832, ce livre en est à sa seizième édition.

certains futurs professeurs d'école²¹ ne disposent que de trente heures de formation en mathématiques tandis que d'autres sont mis directement sur le "terrain"²².

Parce qu'un professeur se forme en enseignant, entend-on souvent dire : il se forme sur le tas. Mais que recouvre une telle expression ?

Comme l'a montré Chevallard (1989), dans le cas d'un apprenti :

«...l'apprentissage sur le tas a toujours été vécu comme un apprentissage *par frayage*, par le moyen (qui est en même temps, ici la fin recherchée) de l'intégration dans une *communauté* professionnelle, par la participation à une *culture professionnelle*. En d'autres termes, le métier n'y est pas en principe réduit à un répertoire d'opérations, mais s'y présente comme une *réalité sociale totale* - comme une *praxis* et comme une *culture*. D'un coup, l'apprenti est plongé tout entier dans la communauté d'activité qui doit devenir la sienne.»

Cet apprentissage par frayage est assuré par le contact avec un professionnel qui "donne à voir" les gestes du métier.

Dans certains cas, on cherche à imiter ce type de formation professionnelle : un maître auxiliaire du secondaire bénéficie d'un tuteur qu'il peut observer quelquefois dans l'exercice de son métier et qui à son tour peut lui rendre visite et le conseiller. Mais qu'en est-il du professeur que l'on enferme le plus souvent seul dans sa classe, charge à lui de trouver dans la solitude les moyens de faire face aux problèmes d'enseignement qu'il rencontre ? Cette position est tout à fait spécifique et diffère de celle présente pour les autres professions.

3.4.2. Le "manuel", institution parallèle de formation, garantie du fonctionnement de l'école publique

La formation par frayage de ces enseignants va être assurée par les institutions parallèles que sont les manuels qui leur décrivent de manière précise les gestes qu'ils doivent accomplir. Comme nous l'indique par exemple un livre du maître récemment paru²³, celui-ci fournit :

«(...) la description des séances donnant à l'enseignant **tous les éléments**²⁴ pour organiser sa classe. Chacune d'elles comprend :

- l'activité dite de "familiarisation numérique" qui reprend en la développant la rubrique "avec les nombres" du livre de l'élève;
- les "objectifs poursuivis par le maître" pour la séance;
- une description détaillée d'une mise en œuvre possible d'activités (matériel, consignes, organisation de la classe, etc...) qui doit permettre de mettre l'enfant au

21. Ceux qui sont recrutés directement par concours en deuxième année dans un IUFM, sans avoir effectué leur première année à l'intérieur de celui-ci.

22. Ceux recrutés sur la liste supplémentaire par exemple.

23. Déjà cité: Livre du maître CM1, Collection Diagonale, math en flèche, p. 4, Nathan.

24. C'est nous qui soulignons.

centre de ses apprentissages en lui assurant les moyens de construire son savoir, seul ou en interaction avec les autres, de développer des compétences en mathématiques, de faciliter la gestion de la classe;
- des remarques sur les procédures des enfants.»

Pour préparer ses cours, trouver des exercices, chercher des réponses aux questions qu'il se pose, l'enseignant va utiliser essentiellement les manuels, comme le montre par exemple une enquête²⁵ sur ce sujet. Les manuels représentent donc bien actuellement des institutions de formation parallèle, qui assurent une formation pour les agents de l'école. Ils représentent pour celle-ci une garantie et par là même fournissent un contrôle sur les enseignants qu'elle plonge dans un milieu inconnu.

La présence de plusieurs manuels peut-elle créer pour l'enseignant une ouverture dans la formation par frayage "différée", comme offrait auparavant la formation par compagnonnage qui permettait à l'apprenti d'être au contact de plusieurs manières de faire? Les manuels "hors norme", dans la mesure où ils peuvent survivre, leur offrent-ils un certain espace de liberté?

Nous allons étudier pour le moment les rapports entre l'institution "manuel", dont nous avons montré qu'elle est apparue la première et l'institution correspondant aux écoles normales qui elles, sont créées peu à peu à partir de 1810. Institution de formation non visible culturellement, nous pensons qu'elle va faire peser un certain nombre de contraintes sur les savoirs existant au sein de l'institution de formation "officielle". C'est sous cet angle-là que nous nous proposons d'étudier l'évolution des savoirs dans les écoles normales. Mais d'abord, regardons les raisons pour lesquelles se sont créées ces dernières.

4. L'ÉCOLE NORMALE "FILLE ET MÈRE" DE L'ÉCOLE PUBLIQUE

4.1. L'école normale de l'an III : acquérir de l'instruction

La première tentative de création d'un lieu institutionnel de formation des maîtres a eu lieu sous la révolution. Même si l'école normale de l'an III ne fût qu'un épiphénomène qui ne devait pas durer, elle marquait le souci de créer un espace physique où pourrait se dérouler une "formation".

Deux idées qui ont présidé à la constitution de cette école normale nous semblent importantes.

25. Enquête citée par Arsac dans *La transposition didactique en mathématiques, en physique, en biologie*, 1989, Irem de Lyon.

La première, la plus éclatante, indique que l'institut de formation doit être le lieu de transposition à partir du savoir savant. En effet, les professeurs choisis par la convention furent des savants reconnus. Lakanal avait précisé :

«pour la première fois, les hommes les plus éminents en tout genre de sciences et de talent, les hommes qui jusqu'à présent n'ont été que les professeurs des nations et des siècles, les hommes de génie vont être les premiers maîtres d'école.»

Cela représentait une première (et peut-être la dernière) tentative d'un contrôle direct par la sphère savante de la formation des enseignants. Son échec signe dès l'origine la quasi-impossibilité de ce passage direct et la nécessité de l'existence de couches intermédiaires permettant à la transposition didactique de fonctionner.

La deuxième est plus cachée et néanmoins significative : on la trouve dans les objectifs qui sont assignés aux travaux de l'école :

«ils [les instituteurs] leur [aux élèves] apprendront d'abord à appliquer à l'enseignement de la lecture, de l'écriture, des premiers éléments de calcul de la géométrie pratique, de l'histoire et de la grammaire française, **les méthodes tracées dans les livres élémentaires adoptés par la Convention nationale et publiés par ses ordres**²⁶.»

Autrement dit un des objectifs de l'école de l'an III est d'apprendre aux maîtres à se servir des manuels. Ce changement de point de vue par rapport à ce qu'énonçait Arbogast dans son rapport sur les livres élémentaires où la simple utilisation des manuels suffisait à former les maîtres était cependant en germe lorsque Condorcet prônait la rédaction de livres du maître. Le manuel va toujours former les maîtres à la profession, mais pour pouvoir se former, il faut déjà avoir un certain degré d'instruction. **C'est donc bien l'institution manuel qui engendre l'institution de formation "école normale"**. Cette idée essentielle se trouve présente à partir du moment où s'est imposée la nécessité d'une formation des enseignants.

Une centaine d'années plus tard, une fois que les écoles normales se seront affirmées dans le paysage culturel français, le dictionnaire F. Buisson²⁷ ne fera plus référence au manuel mais réaffirmera le caractère "instructionnel" des écoles normales, tout en introduisant le caractère "professionnel" de celles-ci :

«les écoles normales sont des établissements publics où les jeunes gens qui se destinent aux fonctions d'instituteur ou d'institutrice viennent compléter leur instruction et s'initier aux meilleures méthodes d'enseignement. Ces établissements ont donc un double caractère : ce sont, à la fois des maisons d'instruction proprement dite et des maisons d'éducation professionnelle.»

26. C'est nous qui soulignons.

27. Article "Normales" (Écoles), *dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, p. 2058 édition. F.E. Buisson, t.2, Paris, Hachette

Nous examinerons ce que signifie "compléter son instruction" dans le chapitre suivant, mais nous allons tout de suite remarquer que le manuel était, là aussi, appelé à jouer un rôle de premier plan.

4.2. L'école normalisatrice

Le mot "*normales*" d'écoles normales était de création nouvelle en 1795. Lakanal en expliqua le sens dans son rapport²⁸ :

«normales, du latin norma, règle. Ces écoles doivent être en effet le type et la règle de toutes les autres.»

L'école normale, institution de formation, fille de l'école publique comme nous l'avons vu précédemment devenait l'exemple et la règle de toutes les autres, la "mère" qui indique le bon chemin.

C'est ce qui allait faire dire à Mr Guizot quelques années plus tard²⁹ :

«l'instruction primaire est toute entière dans les écoles normales : ses progrès se mesurent à ceux de ces établissements.»

Et Jules Ferry renchérisait³⁰ :

«il n'y a pas d'enseignement public sans les écoles normales.»

Ainsi l'école issue elle-même des écoles professionnelles, allait engendrer une école professionnelle d'un type nouveau, une école de formation des maîtres chargée de normaliser en quelque sorte celle-ci. Le lien organique initial unissant l'école et l'école professionnelle qui lui était associée pour former ses agents, se trouvait inversé dans l'esprit non seulement des responsables de l'état, mais aussi d'une fraction de plus en plus large de la société. Ces liens très forts que nous nous proposons d'étudier dans les chapitres suivants, nous pouvons déjà les apercevoir dans les dates concordantes des réformes concernant l'école primaire et l'école normale qui lui était associée.

4.3. Le manuel élément normalisateur

Quoi de plus naturel pour normaliser que d'utiliser le manuel, en s'appuyant sur le fait qu'il s'agit d'une institution de formation *contrôlable*. Aussi le souci constant de tous les législateurs dans une période allant jusqu'en 1880³¹ a été de déterminer les livres

28. Rapport de Lakanal et décret du 9 brumaire an III. Rapporté dans l'article Article "Convention", Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire, p. 559, édition. F.E. Buisson, t.2, Paris, Hachette.

29. Article "Normales" (Écoles), déjà cité, même page.

30. Ibid., p. 2058.

31. Arrêté du 16 Juin 1880 arrêtant le principe que le choix des livres devait revenir aux maîtres eux-mêmes. Mais toutes les listes ainsi dressées sont transmises à l'inspecteur d'académie et une commission,

autorisés. Ainsi par exemple, un arrêté du 30 décembre 1836, pris sous le ministère Guizot, au moment justement où s'accroît de manière significative le nombre des écoles normales, stipulait :

«tous les livres autorisés pour les écoles primaires pourront être placés dans les bibliothèques des écoles normales.»

et il était précisé d'autre part que :

«tous les ouvrages autorisés pour les écoles primaires ou supérieures pourront être utilisés pour les classes d'adulte, selon qu'il s'agira d'y donner les premières instructions ou de compléter et de perfectionner les connaissances acquises.»

Il est donc clair que le manuel fixe la norme à la fois pour l'enseignement, mais aussi pour la formation des enseignants, l'institution école normale étant sous tutelle de l'institution manuel. Le rapport institutionnel au savoir du manuel était transféré de fait dans l'institution officielle de formation.

CONCLUSION

Nous avons commencé notre étude au moment où est en germe la volonté de mettre en place une éducation qui s'adresse à l'ensemble de la population, idée que va s'efforcer de mettre en vigueur la révolution. Nous avons mis en lumière le fait que les livres pouvaient être considérés selon deux points de vue, à la fois comme produits d'institutions transpositives et comme institutions de formation des maîtres pour l'enseignement.

Nous avons mis en évidence deux catégories de livres destinés à l'enseignement : les traités et les manuels. Les auteurs des traités sont des personnes proches de la sphère de production du savoir. Par contre, nous avons appelé scribes les auteurs de manuels qui s'assujétissent à un traité.

Nous avons montré que l'institution manuel a engendré l'institution école normale.

Celle-ci en tant qu'institution de formation va apparaître comme un complément de l'institution manuel, participant elle aussi à la normalisation du système du primaire.

composée des inspecteurs primaires, du directeur et de la directrice des Écoles Normales et des maîtres-adjoints de celles-ci révisé les listes cantonales et arrêté le catalogue pour le département.

CHAPITRE B2

DU TRAITÉ AUX MANUELS, LE DÉCOUPAGE DES SAVOIRS

Nous examinons les livres dont nous pensons qu'ils ont servi de référence pour la mise en place de savoirs dans les institutions de formation écoles normales. Nous mettons à l'épreuve la modélisation amorcée dans le chapitre précédent en regardant l'évolution des traités d'arithmétique et la fonction qu'ils ont jouée par rapport aux manuels rédigés pour les différents ordres d'enseignement du primaire. Nous observons l'impact au niveau des savoirs générés par l'apparition de ce que l'on peut considérer comme un nouveau traité.

1. L'ÉVOLUTION DU TRAITÉ

1.1. Le traité de Bezout

1.1.1. Le statut du traité de Bezout

Le livre de Bezout¹, comme nous l'avons déjà signalé, a servi comme livre de référence dans les écoles centrales au moment de la révolution. Il est donc beaucoup utilisé à la fin du XVIII^{ème} et au début du XIX^{ème} siècle: c'est pourquoi nous en examinons en détail le contenu.

Il s'inscrit dans la lignée du travail de transposition didactique, qui, comme l'ont montré Chevallard et Jullien (1989), a consisté à élaborer une "théorie moyenne" à propos des systèmes de nombres, en particulier en ce qui concerne le statut des fractions, théorie dont nous allons voir les éléments à travers l'analyse qui va suivre.

La théorie des fractions s'est imposée face à la théorie des rapports, dont les auteurs précédents ont pu montrer en détail les caractéristiques de son élaboration au XV^{ème}, XVI^{ème} et XVII^{ème} siècle, théorie des rapports qui remontait au temps d'Euclide.

En effet, les Grecs se refusaient à considérer comme nombre autre chose que les entiers. La théorie des fractions, qui s'est dégagée peu à peu, a envisagé celles-ci comme nombres, étendant ainsi l'ensemble des entiers, et permettant d'exprimer des rapports numériquement.

1. Le livre de Bezout ayant eu beaucoup de rééditions avec des paginations différentes, quand nous ferons une citation, nous donnerons comme indication les numéros de paragraphes, ceux-ci étant numérotés depuis la première édition de 1 jusqu'à 245

Ce sont donc à la fois le produit d'une construction savante et les besoins de l'exposé didactique cherchant à aller du simple au compliqué qui ont imposé progressivement la théorie des fractions que l'on trouve développée à cette époque.

Ainsi, notent les auteurs précédemment cités, ce long travail d'élaboration théorique, en se renforçant, va rejeter à la périphérie du discours principal les problèmes qui avaient justement permis son émergence. Ceux-ci deviendront les applications "pratiques" de la théorie, applications que l'on va trouver en général à la fin de tous les traités et des manuels sous la forme de règles, règles d'escompte, d'alliage, etc...

Nous étudions à présent comment se situe le traité de Bezout dans ce mouvement de longue durée. C'est un livre à visée didactique puisqu'il s'adresse à des candidats à une école militaire : ainsi, le terme de commençan[t]s revient souvent sous la plume de l'auteur, notamment dans la préface :

«J'ai tâché d'aplanir la route, soit en simplifiant des raisonnements déjà employés, soit en substituant de nouveaux qui m'ont paru plus clairs, soit enfin en employant un langage familier et simple.»

Le livre se présente comme une suite de paragraphes non regroupés en chapitres. Cependant dans sa préface, l'auteur indique les grandes rubriques qui sont abordées, rubriques qui seront reprises par ses successeurs, notamment Reynaud dont nous étudierons les notes par la suite. C'est donc ce découpage que nous utilisons à présent pour faciliter l'analyse. Certains paragraphes sont écrits en caractères plus petits, indiquant qu'il s'agit de contenus plus difficiles qui s'adressent à des élèves qui "auraient le désir de s'instruire plus parfaitement". Bezout introduit donc dans son cours une hiérarchie qui jouera évidemment un rôle dans les découpages ultérieurs qui seront faits. Nous en étudions les éléments marquants qui vont jouer un rôle dans la transposition didactique qui va s'effectuer par la suite en direction du "primaire".

1.1.2. Les savoirs dans le traité de Bezout

a) Présentation et définition du nombre. Opérations sur les entiers et les décimaux

«Le nombre exprime de combien d'unités ou parties d'unités une quantité est composée» affirme l'auteur dès la première page de son livre pour préciser par la suite qu'il existe trois sortes de nombres : les nombres entiers, les fractions et les nombres fractionnaires selon que «la quantité est composée d'unités entières, d'unités entières et de parties de l'unité, ou de parties de l'unité». Chaque sorte de nombres est partagée en deux

catégories : les nombres abstraits «qu'on énonce sans désigner l'espèce d'unités» et les nombres concrets «lorsqu'on énonce en même temps l'espèce d'unités».

«Pour évaluer les quantités plus petites que l'unité que l'on a choisie, on partage celle-ci en d'autres unités plus petites», poursuit-il, ce qui le conduit à la notion de nombre complexe quand «un nombre est composé de parties rapportées à plusieurs unités» et celui de nombre incomplexé quand «celui-ci ne comporte qu'une seule espèce d'unités». Le cas où le partage de l'unité est fait en parties de dix en dix fois plus petites l'amène à parler de décimales qui sont «les parties de l'unité que l'on vient de décrire», en fait les fractions décimales qui sont plus petites que l'unité dans la terminologie de Bezout. Dans toute cette partie, le terme de fraction qui a été introduit dans le tout premier paragraphe n'est pas repris, le terme de nombres décimaux n'est pas mentionné. Seul est utilisé le mot "décimales" car «la formation et le calcul des décimales sont absolument les mêmes que pour les nombres ordinaires ou entiers».

Bezout intègre ici ce qui avait fait le succès des décimaux, c'est-à-dire la facilité des calculs, ce qui permet de rabattre les décimaux sur les entiers.

Le nombre est ainsi défini en référence à une collection d'unités ou de parties de l'unité, la manière d'énoncer les nombres avec des décimales étant elle-même significative puisque l'on dira pour l'écriture 34,572, trente-quatre unités et cinq cent soixante douze millièmes. Même s'il y a "évaporation" à un moment donné du nom de l'unité, pour reprendre une expression de Guy Brousseau, ce qui permet de parler de nombre abstrait, la référence implicite sera toujours la comparaison d'une grandeur à une unité. Notons cependant que Bezout n'hésite pas à écrire des nombres ayant six chiffres après la virgule.

Suivent donc l'ensemble des règles permettant de trouver les résultats des quatre opérations aussi bien pour les nombres entiers que pour les nombres comportant des parties décimales.

Bezout ne retient ici que la partie technique des "décimaux" qui évidemment a fait son succès après la vulgarisation de la Disme de Stevin en France par Girard à partir de 1634, occultant par là même le fait que les décimaux servaient à l'époque à résoudre des problèmes dans le savoir savant, par l'utilisation des écritures décimales illimitées. Le traité de Bezout s'inscrit donc dans la filiation des traités précédents pour lesquels c'était une tradition bien établie.

Le cas de la division

La division est toujours ramenée à la recherche d'un quotient qui, multiplié par le diviseur, donne le dividende² :

«On n'a pas toujours pour but dans la division, de savoir combien de fois un nombre en contient un autre; mais on fait l'opération dans tous les cas comme si elle tendait à ce but; c'est pourquoi on peut, dans tous les cas, la considérer comme l'opération par laquelle on trouve combien de fois le dividende contient le diviseur.»

Ce qui le conduit à noter, comme le faisaient d'ailleurs tous les contemporains de Bezout, le quotient de 8769 par 7,1252 5/7. Évidemment ce "nombre fractionnaire" n'a pas exactement sa place dans un paragraphe consacré aux nombres entiers et aux nombres décimaux, mais Bezout s'en tire en signalant qu'il expliquera plus loin ces sortes de nombres, ce qui lui permet par la suite de rattacher les fractions au quotient de deux nombres. Mais dans le même temps, il va parler de valeur du quotient à moins d'un centième près ou à moins d'un millième près.

Se proposant de diviser 12,52 par 4,3 , après avoir ramené cette division à la division de 1252 par 430 et trouvé le quotient indiqué de la manière suivante,

$$\begin{array}{r} 1252 \\ 392 \\ \hline 430 \end{array} \quad \begin{array}{r} 430 \\ \hline 392 \\ 2 \\ \hline 430 \end{array}$$

il déclare³ :

«Mais comme l'objet qu'on se propose, quand on se sert de décimales, est d'éviter les fractions ordinaires, au lieu d'écrire le reste 392 sous la forme de fraction, comme on vient de le faire, on continuera l'opération comme dans l'exemple suivant.

$$\begin{array}{r} 1252 \\ 3920 \\ 500 \\ 700 \\ 2700 \\ 120 \\ \hline 430 \end{array} \quad \begin{array}{r} 430 \\ \hline 2,9116 \end{array}$$

L'évitement en question permet de ramener le quotient de deux décimaux au quotient de deux entiers en choisissant la bonne sous-unité.

Toute expression fractionnaire a ici disparu au niveau de l'écriture du quotient. L'expression «tous les restes de la division peuvent être réduits en décimales» jette un voile discret sur les liens qui relient le nombre décimal ainsi trouvé et la fraction qui

2. Idem §. 59.

3. Idem §. 68.

apparaissait avant dans l'écriture du quotient. Cela évite aussi le fait que le processus engagé soit infini, ce qui renverrait sur les écritures décimales illimitées qui éloigneraient des entiers.

Les opérations abrégées

Signalons une partie importante exposée par Bezout⁴, écrite en caractères plus petits, qui consiste à exposer des techniques permettant de trouver des résultats numériques plus rapidement :

«Comme on emploie ordinairement les décimales dans la vue de faciliter les calculs, en substituant à un calcul rigoureux une approximation suffisante, mais prompte, il n'est pas inutile d'exposer ici un moyen d'abrégé l'opération, lorsqu'on a besoin d'avoir le produit que jusqu'à un degré d'exactitude proposé.»

L'exemple développé consiste à multiplier 45,625957 par 28,635, le produit ne devant être connu qu'à moins d'un millième près. La *technique* proposée est la suivante :

«J'écris ces deux nombres comme on le voit ci dessous, c'est à dire, qu'après avoir renversé l'ordre des chiffres de l'un des deux, je l'écris sous l'autre, en faisant correspondre le chiffre de ses unités sous la décimale immédiatement inférieure de deux degrés à celui auquel je veux borner mon produit. Je fais ensuite la multiplication, en négligeant dans le multiplicande, tous les chiffres qui se trouvent à droite de celui par lequel je multiplie; (...) L'addition de tous ces produits étant faite, je supprime les deux derniers chiffres, en observant cependant d'augmenter le dernier de ceux qui restent, d'une unité, si les deux que je supprime passent 50; après quoi je place la virgule au rang fixé par l'espèce de décimales que je me proposais d'avoir. (...)»

On voit que la technique proposée repose sur le fait que, si on fait le développement polynomial des deux nombres proposés et que l'on multiplie ces deux polynômes, on néglige les termes correspondant à la puissance 10^{-n} avec $n > 6$.

Le fait de négliger les termes de rang $n+2$ peut avoir des effets sur le terme de rang n , mais il est raisonnable de faire ainsi puisque l'effet des termes évoqués précédemment sur le terme en 10^{-3} ne se ferait éventuellement sentir que si le multiplicateur avait 13 chiffres et que si les chiffres aussi bien du multiplicateur que du multiplicande étaient tous des 9.

De même, les précautions prises à la fin du paragraphe cité ne conduisent pas forcément à la meilleure approximation : il suffit par exemple de prendre, en s'inspirant d'un exemple⁵ fourni par Bezout lui-même, à savoir multiplier 0.227538855 par 0.6564178 en ne conservant que 7 décimales au produit. La technique proposée par l'auteur conduit d'abord à 0.128882013, puis en supprimant les deux derniers chiffres, qui correspondent à un nombre inférieur à 50, conduit à 0.1288820. Le calcul effectif du produit lui donne

4. Idem §. 55.

5. Idem §. 55.

0.1288820576636190, pour lequel l'auteur aurait donné pour valeur approchée 0.1288821. Mais là aussi la méthode reste *raisonnable* puisque le cas indiqué est relativement rare.

Une technique du même type est proposée à propos de la division, si l'on ne veut qu'un quotient à une certaine unité près.

On note donc le souci dans cette partie du livre de traiter des nombres qui ne sont pas directement liés à des mesures de grandeur, nombres ayant un grand nombre de décimales, en proposant des problèmes d'approximation. Ces techniques de calcul aujourd'hui disparues, répondant aux besoins de calcul de l'époque, vont perdurer au XIX^e siècle et au début du XX^e puisqu'on les trouve dans des cours de mathématiques⁶. L'arrivée des calculatrices leur fera évidemment perdre beaucoup de leur intérêt.

b) Les fractions / nombres complexes

Une partie importante, pour ne pas dire centrale va être consacrée aux fractions. Le partage des nombres en entiers, fractions et nombres fractionnaires évoqué au début du livre va être développé longuement.

«Les fractions, considérées arithmétiquement, sont des nombres par lesquels on exprime les quantités plus petites que l'unité.»

La première remarque que l'on peut faire est que, dans un premier temps, les entiers ne sont pas des fractions. Dans cette optique, le sous-titre trompeur "des entiers considérés sous la forme de fraction" n'est là que pour relier division et fraction ainsi que pour introduire la notion de nombre fractionnaire, entier accompagné par une fraction. En effet, l'auteur est amené à considérer des expressions où le numérateur est supérieur au dénominateur, extrait "les entiers qui s'y trouvent enfermés" en faisant la division du numérateur par le dénominateur. On retrouve ainsi la justification de la notation du quotient déjà introduite auparavant, qui est du type $n \frac{a}{b}$ avec n, a, b entiers.

Notons que ces différentes catégories de nombres réalisent une partition des nombres considérés jusqu'à présent : cette idée sera largement exploitée dans les transpositions ultérieures qui seront faites en direction des enfants de l'école primaire.

Ces nombres fractionnaires, fruits de la division de deux entiers permettent d'envisager les fractions elles-mêmes comme des quotients⁷ :

«On peut considérer une fraction sous un autre point de vue : on peut considérer le numérateur comme représentant une certaine quantité qui doit être divisée en autant de parties qu'il y a d'unités dans le dénominateur.»

6. Par exemple, De Combrerousse C. 1920, *Cours de mathématiques*, Tome premier, Arithmétique, pp.147-157, Gauthier-villars, Paris

7. Idem §. 96.

Il considère cette fois-ci les entiers comme des fractions ou du moins comme des nombres qui «peuvent être mis sous la forme d'une fraction», puisqu'un entier peut toujours être considéré comme le quotient de lui-même par 1. On voit donc que les «résultats fractionnaires, dont le numérateur est plus grand que le dénominateur»⁸, servent à établir des interrelations entre fractions, nombres fractionnaires, entiers et décimaux.

Des notions concernant les décompositions des nombres en facteurs premiers, la recherche du PGCD de deux nombres par l'algorithme d'Euclide, sont introduites de manière spécifique pour permettre la simplification des fractions et l'introduction des opérations sur les fractions. L'ordre de présentation adopté, identique à celui des entiers, est celui qui s'est stabilisé depuis déjà de nombreuses années.

Cette théorie des fractions ramène les "nombres complexes", issus de mesures avec des unités différentes dans le champ de celles-ci. Il suffit de choisir une unité de référence et les calculs sur les nombres complexes se ramènent à un calcul sur les fractions. Mais Bezout ne faillit pas à la tradition d'introduire les techniques opératoires spécifiques aux nombres complexes, "parce que la division qu'on en fait de l'unité principale en facilite souvent le calcul", montrant par là les talents de calculateurs des mathématiciens de l'époque.

c) Les racines carrées et cubiques

Entre la partie portant sur les fractions et celle consacrée aux rapports et aux proportions s'intercale une étude de racines carrées et cubiques. A une époque où les réels ne sont pas encore construits de manière précise et où les nombres comme les racines carrées, nombres sourds, ou irrationnels, ou incommensurables restent encore mystérieux, l'auteur cherche à raccorder les racines carrées aux nombres déjà connus, c'est à dire les fractions, comme on peut s'en rendre compte avec l'extrait suivant⁹ :

«Ainsi la racine carrée de 72, par exemple est 8 en nombre entier, parce que 72 étant entre 64 et 81, sa racine est entre les racines de ceux-ci, c'est à dire entre 8 et 9, **elle est 8 et une fraction**¹⁰, fraction qu'à la vérité, on ne peut pas assigner exactement, mais dont **on peut approcher continuellement**, ainsi que nous le verrons dans peu.»

La racine carrée n'est donc pas loin d'être une fraction, et l'algorithme de l'extraction de la racine carrée, comme l'ont bien montré Chevallard et Jullien (1989), puis de manière

8. Idem §. 84.

9. Idem, paragraphe 131.

10. C'est nous qui soulignons.

plus détaillée Assude (1992), permet de s'en "approcher d'aussi près que l'on le juge à propos" et "cette approximation se fait commodément par le moyen des décimales". En effet, cet algorithme fournit les différentes décimales l'une après l'autre et donne ainsi des fractions décimales à $1/10^n$ près. Dans ce sens l'extraction de la racine carrée d'un entier ou d'un nombre décimal fonctionne comme la division de deux entiers ou de deux nombres décimaux. Cet algorithme forme alors la cinquième opération, renforçant la cohérence à l'ensemble des notions étudiées jusque là.

d) Rapports et proportions

La notion de rapport se trouve après la notion de fraction. Les rapports permettent d'attribuer des mesures aux grandeurs en fixant une unité. La mise en rapport de mesures qui peuvent être fractionnaires n'étend pas encore la notion de fraction d'entiers : on "opère" sur ces rapports comme on l'avait fait sur les fractions, mais sans utiliser le symbolisme de celles-ci. Ainsi nous dit Bezout :

«Si j'avais à examiner le rapport de $6\frac{3}{4}$ à $10\frac{2}{3}$, je dirais, en réduisant tout en fraction, ce rapport est le même que celui de $\frac{27}{4}$ à $\frac{32}{3}$, ou en réduisant au même dénominateur, le même que $\frac{81}{12}$ à $\frac{128}{12}$, ou enfin en supprimant le dénominateur 12 (ce qui revient au même que de multiplier les deux termes du rapport par 12), ce rapport étant le même que celui de 81 à 128.»

On peut cependant remarquer qu'opérer sur les rapports revient d'une certaine manière à les considérer comme des nombres, même si cela n'est pas dit explicitement.

Les rapports servent toujours à introduire les proportions pour lesquels on utilisait à l'époque une écriture propre $a:b::c:d$, a , b , c , d représentant quatre grandeurs homogènes. De longs développements sur les proportions, qui ne nous intéressent pas directement ici, montrent toute l'importance accordée à ces notions qui fonctionnent encore comme une partie relativement autonome dans l'exposé complet : cette partie intègre la règle de trois et le traitement d'un corpus de problèmes devenus simplement des applications pratiques dans les différents livres dont celui de Bezout est un représentant.

e) Les logarithmes

Nous ne faisons que signaler cette partie, même si nous allons la retrouver dans le travail de transposition didactique en direction du primaire, car elle reste marginale par rapport aux préoccupations qui sont les nôtres.

En résumé, on voit que l'on peut identifier dans le traité de Bezout, traité qui traduit à ce moment là, l'état de la "théorie moyenne", trois blocs, chaque bloc étendant la partie précédente :

- un premier bloc constitué des entiers et des décimaux, ceux-ci étant rabattus sur les entiers ce qui permet d'étendre les calculs sur les entiers, bloc que nous retrouverons plus tard comme caractérisant les savoirs concernant les systèmes de nombres à l'école élémentaire.
- un deuxième bloc, autour des fractions : le quotient de deux entiers est dès le début rattaché aux fractions, les fractions réintègrent les décimaux par l'intermédiaire des fractions décimales, les racines carrées ne sont pas "éloignées" des fractions. En effet les algorithmes de la division et de l'extraction des racines carrées qui fonctionnent de la même manière, permettent de trouver des approximations décimales de n'importe quelle fraction et de n'importe quelle racine carrée (ou cubique). Ce deuxième bloc intègre donc le précédent.
- un troisième bloc relativement autonome, autour de la notion de rapport et de proportion, généralisant la notion relative aux fractions, mais sans utiliser l'arsenal technique relatif à celles-ci. Cela permet de traiter d'une part des problèmes pratiques, problèmes qui vont faire appel aux connaissances vues dans les deux blocs précédents, et d'autre part les progressions arithmétiques et géométriques ainsi que les logarithmes qui avaient constitué une des applications les plus probantes de la théorie des proportions.

1.2. Une tentative de modification du traité précédent : l'école normale de l'an III

Les cours à l'école normale de l'an III avaient été confiés à de grands mathématiciens de l'époque : Laplace, Lagrange et Monge, l'idée étant de les utiliser directement comme formateurs d'instituteurs. Ils étaient donc censés exposer à leurs étudiants les "méthodes nouvelles" et, comme nous avons eu l'occasion de le dire auparavant, leurs leçons étaient destinées à fournir les matériaux pour la rédaction de bons manuels en repensant une refonte éventuelle des contenus prenant en compte les avancées de la science.

Il y avait donc une légitimité de la part des "étudiants" instituteurs à attendre qu'on leur montre comment ils devaient enseigner et ce, dans le langage qu'ils auraient à utiliser avec leurs propres élèves. Or ces grands mathématiciens ne s'étaient adressés jusqu'alors qu'à des étudiants d'écoles professionnelles de haut niveau : par exemple, Laplace n'avait enseigné qu'à l'école militaire de Paris et Lagrange aux écoles royales de l'artillerie à Turin. Ils ne pouvaient donc parler qu'un langage propre à la sphère dans laquelle ils avaient l'habitude de professer : ils ne purent s'empêcher d'enseigner les mathématiques à un niveau très élevé.

Cependant l'occasion était donnée à ces savants de promouvoir leur point de vue sur les mathématiques élémentaires. Voyons donc où et comment Laplace et Lagrange, qui firent des leçons sur l'arithmétique, se démarquèrent des contenus que nous avons examinés précédemment.

Laplace consacre sa première leçon aux nombres entiers et nombres décimaux, qu'il nomme ainsi, en montrant le lien de ces nombres avec les nombres obtenus en utilisant le système métrique : il préfigure en quelque sorte le contenu de l'école élémentaire que l'on trouvera plus de 100 ans plus tard. Sa fameuse neuvième leçon, développant les avantages du nouveau système des poids et mesures, montre le rôle qu'entendaient jouer les savants : être en prise directe dans l'élaboration des contenus d'enseignement.

Mais, pour l'étude que nous sommes en train de mener, c'est sans doute à propos des rapports et des proportions que l'on peut noter le parti pris de Laplace. Il entend s'appuyer sur les savoirs disponibles à l'époque dans la sphère savante pour développer son cours.

Il considère un rapport comme le quotient de deux nombres, qu'il écrit sous la forme $\frac{a}{b}$, les nombres pouvant être entiers, fractionnaires ou irrationnels, et écrit une proportion sous la forme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Comme le note Dhombres (1992), Laplace, dans son introduction à ses leçons (p 20), "écrase la formule $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ par l'équivalence $ad = bc$; il multiplie les grandeurs entre elles et réduit les proportions à la simple résolution des équations du 1^{er} degré".

La notion de rapport apparaît donc comme **un élément unificateur** important pour les systèmes de nombres envisagés ici, liant notamment fraction, division, fractions de fractions, fractions de décimaux. Il sera, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, le ciment de la théorie moyenne assurant une stabilité à celle-ci à la fin du XIX^{ème} siècle et au début du XX^{ème}. Mais en attendant, nous allons assister à une évolution du traité de Bezout et à son découpage dans les différents niveaux du primaire qui sont en train de se mettre en place.

1.3. Le travail de transposition au niveau de la "théorie moyenne"

En effet, les enseignements de savants comme Laplace et Lagrange, n'alliaient pas remettre en cause le solide édifice que nous avons analysé dans le paragraphe 1.1. Cependant, à cette époque-là, les avancées de l'algèbre, dont l'exposé de Laplace était par exemple une illustration, menaçaient cet ordonnancement, notamment en ce qui concerne les proportions.

Nous allons assister à un travail de transposition des savoirs à partir de l'institution "Livre de Bezout", ce travail pouvant être analysé comme une protection contre l'algèbre jugée comme mécanique. Le Baron Reynaud dans son avertissement¹¹, précédant les notes qu'il consacre au livre de Bezout déclare :

«La clarté des méthodes arithmétiques convient à la faiblesse des commençans¹², et les formes variées dont elles sont susceptibles, en exerçant l'esprit des jeunes gens, les disposent à saisir les considérations abstraites de l'algèbre.

Les procédés algébriques, employés de trop bonne heure, accoutument les élèves à se laisser aveuglément conduire par le **mécanisme des transformations**¹³, tandis que les considérations fines et ingénieuses qu'exigent les solutions arithmétiques forment le raisonnement et le préparent aux artifices brillants¹⁴ de l'analyse.»

Mais Reynaud a le souci de fournir plus d'explications, voire de démonstrations que Bezout, ce qui le conduit à regrouper certains éléments et à développer certains points. Examinons quelle va être l'évolution des savoirs.

a) L'abandon d'une écriture fractionnaire pour désigner le quotient de deux nombres entiers et l'utilisation des termes quotient entier et quotient exact¹⁵

Si la division a bien toujours pour but : "connaissant un produit de deux facteurs, nommé dividende, et un des facteurs nommé diviseur, de trouver l'autre facteur nommé quotient", l'auteur n'envisage dans un premier temps que des divisions conduisant à des restes nuls. Il l'étend par la suite au cas où le reste n'est pas nul, ce qui ne correspond évidemment pas à la définition initiale mais l'amène à parler de *quotient entier* ou *partie entière du quotient*. Par opposition, le quotient prend le nom de *quotient exact* quand le reste est nul.

Cette introduction du terme quotient entier permet de faire un chapitre autonome sur les entiers et les quatre opérations, la division faisant correspondre à un couple d'entiers, un autre couple d'entiers.

11. Reynaud (1828) Notes sur l'arithmétique p.1, à la suite du livre de Bezout, *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie*, Bachelier, Paris. Comme pour le livre de Bezout, nous donnerons le numéro des paragraphes comme référence.

12. Orthographe de l'époque.

13. C'est nous qui soulignons.

14. Orthographe de l'époque.

15. Idem, §. 10

b) L'apparition d'un chapitre autonome sur la divisibilité ¹⁶

Des propriétés relatives à la divisibilité d'une somme de nombres, les critères de divisibilité par 2, 5, 9, 10, 11, la notion de nombres premiers, la décomposition en facteurs premiers et la recherche du PGCD de deux nombres sont exposés dans ce court chapitre. C'est dans le but de regrouper des éléments de même nature que l'on trouvait séparés dans le livre de Bezout, d'une part dans le paragraphe sur la preuve par 9 et d'autre part dans le paragraphe sur la simplification des fractions. La règle de la preuve par 9, ainsi que l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD peuvent donc trouver une justification.

C'est donc la logique d'un exposé linéaire, remplaçant les différentes notions dans un environnement théorique plus important qui conduit à la constitution de ce chapitre. Cela permet d'autre part de donner un statut plus "consistant" à l'arithmétique face à l'algèbre.

c) Numération et calcul des fractions. Théorie des décimales

La fraction est envisagée dès le départ comme un quotient de deux nombres et conduit à une écriture $n \frac{a}{b}$. La fraction est très rapidement considérée simultanément¹⁷ :

«[...] comme indiquant le quotient du numérateur par le dénominateur, ou comme exprimant que l'unité a été divisée en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le dénominateur, et qu'on prend autant de ces parties qu'il y a d'unités dans le dénominateur.»

Si le terme de nombre fractionnaire est prononcé (§ 47), l'auteur précise qu'il comprendra ces deux classes de quantités (les nombres fractionnaires et les fractions) sous le nom générique de fractions.

Contrairement à Bezout, les nombres décimaux (le terme nombre décimal est à présent utilisé) se placent après l'étude des fractions, mais évidemment en référence avec les entiers, puisque "le système adopté pour écrire les nombres entiers s'applique aux décimales". Cela permet de parler dans le même chapitre de la réduction des fractions en décimales et d'introduire les fractions décimales périodiques, "dans lesquelles plusieurs chiffres se répètent dans le même ordre et à l'infini". La conversion des fractions décimales en fractions périodiques est abordée sans complexes en réalisant le calcul suivant, l'exemple choisi étant 0,272727 etc¹⁸ :

«pour y parvenir, on désignera par x la valeur de 0,2727 etc; on aura
100 fois $x = 27,272727$ etc
1 fois $x = 0,272727$ etc

16. Idem, paragraphes 12 à 40.

17. Idem, paragraphe 41.

18. C'était la notation utilisée à l'époque. Idem, paragraphe 58.

retranchant les deux égalités, l'une de l'autre, et observant que les parties décimales périodiques disparaissent, on trouvera
 99 fois $x = 27$ donc $x = 27/99$ »

Il signale au passage que $0,999 \text{ etc} = 9/9 = 1$. Reynaud aborde donc le problème des écritures illimitées, parlant en terme d'approximation :

«on approche d'autant plus de la valeur $\frac{8}{15}$ qu'on calcule plus de décimales au quotient»

Il met ainsi en évidence la valeur des restes successifs dans une division :

8 unités	15
80 dixièmes	0,53333 etc.
50 centièmes	
50 millièmes	
etc.	

d) Les mesures anciennes ou complexes

Il s'agit d'un chapitre de transition entre les mesures anciennes et les mesures obtenues dans le cadre du système métrique. On voit donc trois paragraphes distincts : sur les mesures anciennes, sur les mesures nouvelles et sur le passage des anciennes aux nouvelles.

e) Le traitement des problèmes d'arithmétique à l'aide des quatre opérations

Reynaud déclare avoir trouvé en 1800 les méthodes indiquées dans ce chapitre, méthodes qu'il avait publiées à l'époque sous le titre "Introduction à l'Algèbre". Il s'agit des méthodes que l'on va dénommer plus tard "méthode de réduction à l'unité", permettant de se passer de la théorie des rapports et proportions pour résoudre les problèmes dits pratiques. L'auteur y signale en effet "qu'on peut résoudre les problèmes d'arithmétique les plus compliqués à l'aide des seules combinaisons des quatre règles". Cela lui permet effectivement de résoudre des problèmes du type :

«Deux ouvriers qui travaillent 3 heures par jour ont fait en 5 jours 90 mètres d'ouvrage; combien faudra-t-il de jours à 3 ouvriers qui travaillent 7 heures par jour pour faire 126 mètres du même ouvrage?»

L'unité peut être la fraction de l'unité, car après avoir pris soin de signaler que les fractions qui entrent dans les énoncés de ces problèmes sont supposées être réduites au même dénominateur, il propose comme solution au problème suivant

«Combien faut-il de mètres de toile à $5/8$, pour doubler 30 mètres à $6/8$?

Si la toile avait $6/8$ de large, il en faudrait30 mètres,

Si la toile n'avait que $\frac{1}{8}$ il en faudrait 6 fois plus, c'est à dire180 mètres
La toile ayant $\frac{5}{8}$, il n'en faut que le cinquième de 180 m, qui est ...36 mètres»

C'est donc la théorie des fractions qui devient centrale après un travail sur les entiers, puisque les décimaux n'apparaissent plus que comme des fractions particulières, un chapitre sur la divisibilité devenant préparatoire aux chapitres sur les fractions proprement dites. La méthode de réduction par l'unité réintègre dans ce chapitre la plupart des problèmes dits pratiques.

1.4. Le traité de référence

Le traité de Bezout servait de référence, comme nous l'avons vu, dans l'enseignement que nous pouvons appeler secondaire, c'est à dire les lycées et collèges. L'évolution que nous avons constatée sous l'action de mathématiciens de moindre renom comme le baron Reynaud s'est faite sous une double contrainte :

- une contrainte due à l'évolution du savoir savant, en particulier le développement de l'algèbre, qui demande, pour qui se réclamait de l'arithmétique, de disposer d'un texte ayant une plus forte unité et une légitimité accrue, d'où l'affirmation du rôle propédeutique de l'arithmétique par rapport à l'algèbre. Cela entraîne un recentrage de la première partie du traité autour de la notion de fraction avec une partie spécifique sur la divisibilité, puis l'utilisation des fractions pour résoudre certains problèmes "pratiques". La théorie des rapports et des proportions élargissent dans une deuxième grande partie les notions qui avaient été vues auparavant.

- une contrainte proprement didactique, notamment le fait de disposer de méthodes "simples" pour résoudre des problèmes qui apparaissent comme compliqués.

La naissance du primaire à côté du secondaire et la nécessité de définir des découpages va entraîner une utilisation des différentes versions des traités. Il va se dessiner des délimitations de corpus de savoirs spécifiques à différents niveaux à l'école élémentaire qui se mettent en place comme nous allons le voir à présent.

2. LE DÉCOUPAGE DU TRAITÉ

2.1. Les premières tentatives jusqu'en 1870 : le travail des scribes

2.1.1. Les scribes : les inspecteurs

Si jusqu'en 1834, les textes fixant les contenus se bornent, en ce qui concerne l'enseignement primaire, à quelques phrases très courtes du type "premières notions de calcul", c'est à partir de la loi du 28 Juin 1833 que l'on peut observer les premières

tentatives d'un découpage du savoir concernant les systèmes de nombres, qui aboutira en 1887 à une véritable répartition allant jusqu'au trimestre près, voire au mois près, comme nous l'avons déjà signalé.

Ce travail va principalement être assuré par les inspecteurs généraux et les inspecteurs de l'enseignement primaire. Ils représentent la catégorie que nous avons appelée scribes : ils vont faire leur travail de noosphérien en s'assujettissant aux traités que nous venons d'analyser. Cet assujettissement peut être repéré par le fait que le travail de transposition consiste à découper les traités en tranches suivant les niveaux d'enseignement qui sont en voie de création.

Ainsi le statut du 25 Avril 1834, s'appuyant sur la loi précédente, arrêta les contenus suivants pour les trois divisions¹⁹ de l'école primaire :

Première division	Deuxième division	Troisième division
Calcul verbal	Numération écrite et les quatre premières règles de l'arithmétique	Fractions ordinaires et fractions décimales; système légal des poids et mesures

Déjà, les ordonnances de 1816 avaient consacré un premier "découpage" pour délimiter le savoir jugé nécessaire pour les institutrices, lorsqu'elles fixèrent le niveau exigé pour l'obtention du Brevet de Capacité, brevet qui comprenait trois niveaux : en mathématiques, on devait savoir "chiffrer" pour obtenir le troisième ou degré inférieur, connaître le calcul pour le deuxième et les principes de l'arithmétique pour le premier.

Les écoles normales, dont le règlement du 14 décembre 1832 avait fixé les matières d'enseignement furent dotées (le 26 octobre 1838) d'un programme d'arithmétique et de géométrie. Ces niveaux, puis ces éléments de programmes, étaient déterminés par un découpage en "tranches" du début du traité classique correspondant à la théorie moyenne. Tout ce travail de transposition didactique s'est amorcé à partir du traité de Bezout et à partir des traités qui lui ont succédé comme celui du Baron Reynaud que nous avons étudié en détail .

Le règlement de 1851, maintient l'idée de divisions de classe, en acceptant l'idée qu'il peut y en avoir davantage que trois, les enfants étant cette fois classés en fonction de leur

19. Notons que le terme de division utilisé à l'époque, s'entend comme division à l'intérieur d'une même classe constituant l'école (c'est ce que nous appelons maintenant classe unique). Le critère de répartition à l'époque était l'âge des enfants.

savoir. Des répartitions de contenus sont suggérées dont une des plus significatives semble celle proposée par Charbonneau²⁰ :

Première division	Deuxième division	Troisième division
Calcul de mémoire, numération, tables d'addition et de multiplication.	Numération écrite et parlée. Les trois premières règles avec des applications aux problèmes, nombres entiers et décimaux. Commencement du système métrique, connaissances des diverses unités de poids et mesures, explication des termes.	La quatrième règle. Applications ou problèmes, d'abord sur la quatrième règle, puis sur les quatre règles combinées, diverses espèces de problèmes, méthode de réduction à l'unité. Compléments et fin du système métrique

Rapet²¹ va plus loin en proposant un plan d'études²² qui aura un immense succès, découpant le savoir trimestre par trimestre en fonction de l'existence de trois, quatre ou cinq années suivant les cas.

2.1.2. L'édifice institutionnel

Peu à peu se construit un édifice institutionnel parfaitement cohérent qui va être défini par la loi du 30 octobre 1886, dite loi Gobbet, qui précise que

- «L'enseignement primaire est donné
- 1° dans les écoles maternelles et les classes enfantines;
- 2° dans les écoles primaires élémentaires;
- 3° dans les écoles primaires supérieures et dans les classes d'enseignement supérieur annexées aux écoles élémentaires et dites "cours complémentaires";
- 4° dans les écoles manuelles d'apprentissage, telles que les définit la loi du 11 décembre 1880.»

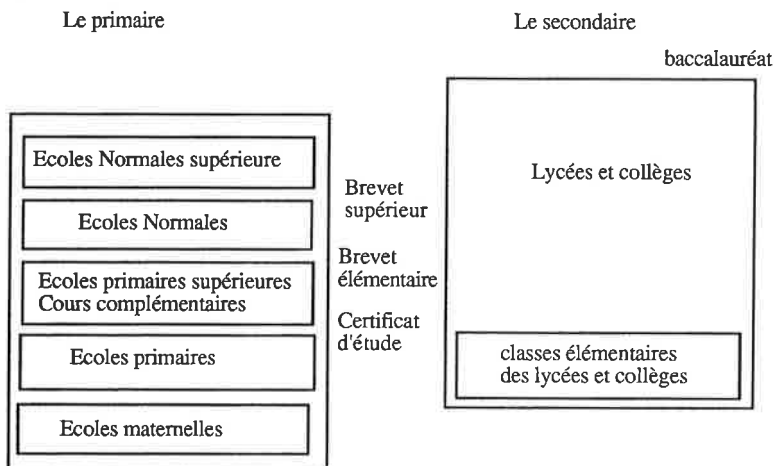
Le quatrième type d'école dépendant à partir de 1892 du ministère du Commerce et de l'Industrie, le primaire reste organisé de 1886 à 1940 en trois niveaux successifs. Les écoles normales sont considérées comme un autre niveau puisque ce sont les écoles primaires supérieures et les cours complémentaires qui préparent au concours d'entrée à l'école normale qui est chargée de la formation des instituteurs. Les écoles normales supérieures de Fontenay pour les filles, et de St-Cloud pour les garçons, dont le

20. Charbonneau M., 1853, L'éducation, Tome III. Charbonneau fut inspecteur de l'enseignement primaire, puis directeur d'école normale.

21. Inspecteur général de l'enseignement primaire, collaborateur du Dictionnaire pédagogique Buisson (DPB).

22. Rapet J.J. (1876), *Cours d'études des écoles primaires*, Paris

recrutement se fait au sein des écoles normales, se chargent, elles, de la formation des professeurs d'école normales. L'édifice est donc bien charpenté, édifice que l'on peut représenter par le schéma suivant :



Il faut noter qu'à côté de ce bloc du primaire coexiste un bloc secondaire installé dans les lycées de la sixième jusqu'à la première et aux classes préparant le baccalauréat, dans lequel l'organisation des savoirs concernant l'arithmétique est depuis déjà longtemps installée. Les lycées possèdent même certaines classes correspondant aux classes du primaire, où exercent des enseignants titulaires d'un diplôme spécial.

2.2. Le découpage des savoirs correspondants dans le primaire

2.2.1. La notion de cours concentrique

La prise en compte, non seulement de l'âge des enfants, mais de leur niveau de connaissances avait entraîné un découpage des savoirs au sein d'une même division. Ainsi va-t-on regrouper dorénavant les enfants au sein de cours, qui, comme le signale Gréard, promoteur de cette réforme ²³ :

«exprime[nt] mieux l'idée d'un degré d'enseignement où les élèves sont de même force, **ont les mêmes livres**, font les mêmes exercices et doivent atteindre les mêmes résultats.»

Classe et cours peuvent donc coïncider, puisqu'à présent, une école à trois cours peut avoir trois maîtres différents enseignant à chacun des niveaux. Ces trois cours sont

23. DPB (1887), Tome 1, p.599.

appelés cours élémentaire, cours intermédiaire et cours supérieur. La scolarité des élèves est de six ans, chaque cours devant durer 2 ans.

Deux contraintes importantes vont peser sur la transposition des savoirs.

La première concerne la notion de cours concentrique, qui marque à la fois une continuité et une rupture avec les conceptions antérieures de l'enseignement. Chaque cours reprend ce qui a été fait antérieurement (c'était l'idée d'un cours organisé que l'on répète autant de fois qu'il est nécessaire dans sa forme initiale), mais auquel on rajoute quelque chose de nouveau (il va falloir déterminer une progression des enseignements).

La deuxième est que chaque cours doit avoir sa propre autonomie et former **un tout structuré**.

Gréard, ardent défenseur des cours concentriques, les justifie par deux arguments²⁴ :

- la nécessité que l'enfant "repassé incessamment sur les mêmes traces". La mémoire étant la base de l'enseignement, on répète à chaque niveau ce qui a été fait au niveau précédent, en rajoutant un certain nombre d'éléments nouveaux,

- le fait que la fréquentation des élèves sur le cursus complet n'étant pas assurée, il faut que chaque cours présente "un ensemble de connaissances essentielles". Un ensemble structuré se mémorise mieux, "rien n'étant moins durable que le souvenir des éléments fragmentaires et sans lien".

Cette différenciation des contenus suivant les cours et la nécessité de produire un tout structuré introduit l'obligation de rechercher dans les traités des blocs cohérents et emboîtés.

2.2.2. Les découpages effectués

Le découpage pour les trois cours va s'étendre aux écoles normales qui, manifestement, dans l'esprit des législateurs, correspondent à un quatrième cours et même à un cinquième, une fois que la notion de cours préparatoire se sera dégagée. Nous nous proposons d'analyser les articles consacrés à l'arithmétique²⁵ dans le Dictionnaire Pédagogique Buisson. Le premier article indique "dans quel esprit, dans quelle mesure et dans quelle méthode ce premier enseignement doit être donné". Le deuxième article propose un découpage pour les quatre cours, cours élémentaire, cours moyen, cours supérieur et école normale. Bien que ces "programmes" ne soient pas officiels au moment de la rédaction de ces articles, ils ont servi de base à la rédaction des programmes publiés en 1887 qui vont reprendre les découpages proposés.

24. Gréard O. 1887, *Éducation et instruction, Enseignement primaire*, p.82, Paris, Hachette.

25. Sonnet H., 1880, article arithmétique, *D.P.B, I ère partie, tome 1*, pp. 115-118.

Sonnet H., 1887, article arithmétique, *D.P.B, II ème partie, tome 1*, pp. 182-184.

Après avoir précisé que le cours élémentaire (en mathématiques) ne comprend que la numération jusqu'à mille, les quatre opérations sur les nombres entiers et les premières notions du système métrique, le dictionnaire propose un découpage détaillé pour les différents "niveaux", cours moyen, cours supérieur et écoles normales. On voit bien que ces trois niveaux forment un tout : à chaque niveau, on reprend les contenus du niveau précédent auxquels on ajoute des suppléments. Nous indiquons les contenus du cours moyen, cours supérieur et école normale, en reprenant les caractérisations qu'en donnait le Dictionnaire Pédagogique Buisson.

a) le découpage pour le cours moyen

L'article signalé plus haut stipule ainsi (p. 116) :

«Ce cours embrasse, outre les matières comprises dans le cours élémentaire, les opérations sur les nombres décimaux, les principaux caractères de divisibilité, le calcul des fractions ordinaires, les règles de trois, d'intérêt, d'escompte, et une étude plus approfondie du système métrique.»

L'étude sur les nombres décimaux intervenait donc immédiatement après un travail de révision sur les nombres entiers étudiés au cours élémentaire. Le quotient est présenté comme le nombre qui, multiplié par le diviseur, est le dividende et on n'étudie que deux cas : le cas où le quotient est entier et celui où il est décimal, dernier cas que l'on ramène au premier en "supprimant les virgules". L'étude des fractions suit donc l'étude des décimaux. Il est indiqué d'autre part que la règle de trois se traite avec la méthode de réduction à l'unité. Dans le programme de 1887, le libellé indiqué pour le cours moyen est "révision du cours précédent. La division des nombres entiers. Idée générale des fractions. Les fractions décimales. Application des quatre règles aux nombres décimaux etc...", ce qui laisserait croire que l'étude des fractions précède l'étude des décimaux. Mais dans la pratique, les décimaux sont introduits tout de suite après les entiers, puis réutilisés au moment des fractions décimales, comme en témoignent les livres de l'époque²⁶. Le système métrique doit permettre, puisque les nombres décimaux sont disponibles, d'insister sur le changement d'unité.

Officiellement, c'est donc la première partie du traité de Reynaud qui sert de référence pour le cours considéré. Mais dans les livres de l'époque, c'est la première partie du traité de Bezout, avec l'adjonction du traitement des problèmes avec la technique évoquée dans le traité de Reynaud qui joue ce rôle.

b) Le découpage pour le cours supérieur

En ce qui concerne le cours supérieur, nous pouvons lire (p. 117) :

«indépendamment des matières enseignées dans le cours moyen, le cours supérieur comprend les nombres premiers, la recherche du plus grand diviseur

26. Notamment l'un des plus utilisés: Leysenne, 1887, 1904, 1912, 1916, la deuxième année d'arithmétique, ou encore Leysenne, 1909, Nouveau cours d'arithmétique, Colin, Paris.

commun et du plus petit commun multiple; la conversion des fractions ordinaires en fractions décimales; les rapports, les proportions, les règles de société, et des notions d'arithmétique appliquée, telles que les rentes, les actions industrielles, la caisse d'épargne.»

Il est précisé qu'on devra mener de front l'étude des nombres entiers et des nombres décimaux, confirmant ce que nous signalions plus haut, puisque l'auteur insiste sur le fait que «ce rapprochement, qui eût été prématuré au cours moyen, sera tout à fait à sa place ici». L'étude des fractions est donc reprise après les notions concernant la divisibilité. Enfin la comparaison des mesures anciennes et du système métrique est faite à ce niveau, mais pour faire ressortir les avantages du système métrique décimal. On retrouve ici un découpage s'appuyant sur le traité style Reynaud, à savoir une partie sur la divisibilité et une partie sur la comparaison entre les mesures anciennes et celles du système métrique, ainsi que le chapitre sur les rapports et les proportions.

c) le découpage pour les écoles normales

Le principe de l'enseignement concentrique s'applique aussi aux écoles normales, ce qui signifie bien que l'enseignement dans ces dernières ne diffère pas de l'enseignement à l'école primaire proprement dit :

«le cours d'arithmétique dans une école normale doit **naturellement** être consacré à la révision détaillée et approfondie du cours supérieur.»

Les éléments nouveaux concernent l'étude des racines carrées et des racines cubiques, ainsi que des progressions et des logarithmes.

Les élèves-maîtres doivent donc recevoir principalement un enseignement dans les termes qu'ils auront à reproduire avec leur propres élèves assorti de quelques techniques à utiliser au moment de la préparation des leçons. Ainsi l'auteur de l'article insiste sur le travail à faire en école normale (p.118) :

«mais il y a un point sur lequel il nous paraît essentiel d'insister auprès des élèves-maîtres : nous voulons parler du choix et de la préparation des exemples à donner dans les cours qu'ils seront chargés de faire.»

Plusieurs exemples sont ainsi développés, indiquant comment s'appuyer "sur l'opération inverse" de celle que les élèves auront à étudier pour fabriquer les "bons" nombres afin de les faire travailler sur un point souhaité : par exemple comment préparer une division qui présente un cas particulier, choisir des fractions dont la somme donne un nombre entier, préparer un exemple de la règle des mélanges, etc...

L'arrêté du 3 Août 1881 précise que le professeur enseignant dans l'école normale :

«évitera avec soin de sortir du cadre de l'enseignement primaire et de traiter des questions d'ordre purement spéculatif. (...) Enfin, il multipliera les exercices et les

problèmes, en ayant soin de les choisir exclusivement parmi ceux qui se rapportent au commerce, à l'industrie, aux arts et à l'agriculture.»

Pour les institutrices, le programme de 1881 est moins étendu, puisque ne figurent pas les racines cubiques, les progressions et l'usage des tables de logarithmes, ce qui nous indique bien les savoirs qui paraissaient comme importants et indispensables aux rédacteurs des programmes de l'époque.

2.2.3. Les éléments évacués : l'évolution de la théorie moyenne

Toutes les parties que Bezout avaient écrites en petits caractères, et donc qu'il considérait comme difficiles, disparaissent du découpage que font les scribes, c'est-à-dire tout ce qui concerne les calculs abrégés, les calculs sur les approximations. Par contre nous allons assister à l'émergence d'un nouveau traité d'arithmétique cette fois destiné aux lycées, prenant en compte l'évolution des connaissances dans le savoir savant sur les réels (appelés encore à l'époque "incommensurables"). Examinons par exemple le contenu d'un livre²⁷ destiné aux candidats au baccalauréat es sciences.

La partie concernant les nombres entiers se trouve amplifiée par une théorie sur les nombres entiers qui représente une amorce d'une théorie sur les congruences. Les décimaux apparaissent comme des cas particulier des fractions, comme dans le traité de Reynaud. Des notions sur les limites permettent maintenant à l'auteur de fournir une démonstration des "fractions ordinaires génératrices des fractions décimales périodiques" s'appuyant sur les limites. Un chapitre spécial va être consacré aux nombres incommensurables. On peut ainsi lire (p. 287), après une définition de ces nombres :

«tout nombre incommensurable est la limite vers laquelle tend un certain nombre décimal variable dont les chiffres décimaux, en nombre infiniment croissant, se succèdent selon un loi déterminée.»

Ainsi, nous sommes près des développements décimaux des réels. Cela permet notamment à l'auteur de concevoir qu'on pourra toujours trouver deux nombres décimaux, différant entre eux de $1/10^n$, comprenant un nombre incommensurable déterminé.

Une partie complète du livre va être consacrée aux approximations numériques dont on voit qu'elles prennent une importance croissante. En particulier est récupéré tout ce que nous avons trouvé dans les traités antérieurs à propos des multiplications et divisions abrégées, prenant ici des noms spécifiques (règle d'Ouhgtred pour la multiplication, règle modifiée de Guy pour la division) avec, là aussi, des démonstrations beaucoup plus précises faisant intervenir les limites. Enfin pour terminer, le chapitre traditionnel sur les

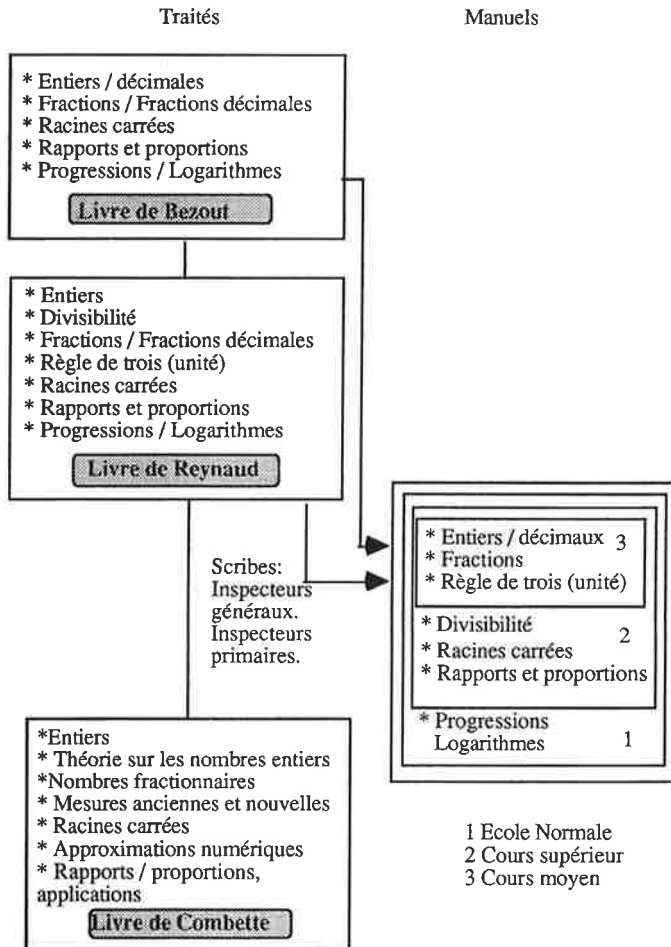
27. Combette E., 1882, *Cours d'arithmétique* à l'usage des aspirants au baccalauréat ès sciences et des candidats aux écoles du gouvernement, Librairie Germer Baillière et Cie, Paris.

rapports et les proportions met l'accent sur la notion de rapport qui concerne aussi les nombres commensurables : les règles de calcul valables lorsque les deux termes d'un rapport sont des entiers ou des fractions sont étendues au cas où les termes sont incommensurables. La notion de rapport apparaît maintenant dans ce traité comme unificatrice de tous les systèmes de nombres vus jusqu'à présent.

2.3. Les traités et les manuels

Les exemples que nous venons d'étudier et que nous résumons dans le tableau de la page suivante, illustrent bien ce que nous avons déjà indiqué dans le chapitre précédent.

Nous mettons ainsi en évidence une strate de traités écrits par des gens proches de la sphère de production du savoir qui intègrent des éléments du savoir savant. Un travail de transposition réalisé essentiellement par les inspecteurs de l'éducation nationale, sujets de ces institutions de formation que sont les traités, s'effectue en identifiant des "tout structuré" à l'intérieur de ceux-ci. Ils vont réaliser un découpage des savoirs en rapport avec les institutions officielles existantes, construisant simultanément des plans d'étude et les manuels correspondant à ces plans d'étude.



L'évolution des traités et les découpages effectués dans les manuels correspondant aux diverses institutions du primaire

3. L'IMPACT D'UN NOUVEAU TRAITÉ

3.1. Le traité de Lebesgue

3.1.1. Les modifications au niveau du savoir savant

La théorie de la transposition didactique va nous permettre de comprendre l'évolution indiquée.

La construction en 1872 du corps des nombres réels par Cantor et Dedekind avait entraîné une réorganisation profonde des systèmes de nombres dans la sphère savante. Cette réorganisation allait se répercuter inévitablement sur la "théorie moyenne". Dans celle-ci, la théorie des fractions occupait une place centrale et avait servi d'ossature aussi bien dans l'enseignement secondaire que pour les différents niveaux de l'enseignement primaire.

3.1.2. Les propositions de Lebesgue

Henri Lebesgue dans la série d'articles regroupés sous le titre "La mesure des grandeurs" (1931²⁸) allait porter une vigoureuse attaque contre la présence des fractions dans l'enseignement secondaire. Ainsi, parlant de l'enseignement des mathématiques à la fin du secondaire (niveau actuel de terminale), il déclarait (p.18, édition 1975) :

«En Mathématiques, on reprend la notion d'entier, puis celle de fraction, puis celle de nombre décimal exact considéré comme fraction particulière. Les définitions des opérations suggérées par l'expérience sont posées de façon purement logique. Tout cela est logiquement cohérent et je n'ai qu'à répéter cette remarque en somme déjà faite : s'il ne s'agit que de légitimer les modes de calcul sur les entiers et les nombres décimaux, c'est là un bien long détour et qui a l'inconvénient pédagogique d'être trop différent de forme des premiers enseignements reçus pour que les élèves reconnaissent bien qu'il s'agit tout simplement d'élucider définitivement ce qu'ils savent depuis l'enseignement primaire.»

S'appuyant sur le fait que «le nombre écrit suivant la numération décimale, est un objet concret sur lequel de jeunes cerveaux raisonnent plus facilement», Lebesgue propose de passer directement de la notion de nombre entier à la notion de nombre le plus général, c'est à dire la notion de nombre réel. Il assimile nombre et mesure d'un segment sur une droite. La comparaison d'un segment AB avec un segment unité U, l'amène par découpages successifs de l'unité U en 10 parties égales, à construire une suite d'écritures telle que «chaque nombre est obtenu en écrivant un chiffre à la droite du précédent». Cela permet d'introduire les écritures constituées d'une suite de chiffres indéfinie sur la droite

28. Nous faisons référence au texte réédité en 1975, éditions A. Blanchard.

(qui sont éventuellement des zéros) et de montrer inversement que toute suite infinie (à condition qu'il n'y ait pas que des 9 à partir d'un certain rang), correspond à un nombre. Et Lebesgue de conclure (p. 24) :

«Mais parlerait-on encore de fractions dans l'enseignement primaire, dans les classes de 6ème et 5ème de l'enseignement secondaire? Non, puisque cela n'est pas indispensable à la théorie et **ne sert à rien pratiquement** ²⁹(...)»

Nous allons voir que l'apparition de ce que l'on peut considérer comme un nouveau traité, et qui n'aura une influence que beaucoup plus tard au niveau de l'enseignement secondaire, au moment de la réforme des mathématiques modernes, a pour effet dans un premier temps de faire émerger un corpus de savoirs pour l'école élémentaire jusqu'au cours moyen. C'est l'œuvre des scribes qui s'appuient simultanément sur un changement de conception à propos de l'articulation des savoirs dans les cours successifs.

3.2. Les effets au niveau du découpage des savoirs

3.2.1. La notion de cours progressif

À la conception du cours concentrique dont nous avons analysé les effets sur le découpage des savoirs, va être opposée une autre méthode dite progressive. Les programmes de 1923, promulgués par le ministre de l'époque Paul Lapie, insistent sur le caractère progressif des notions à enseigner :

«A la méthode concentrique, préférez la méthode progressive. Celle-ci exige, comme celle-là, que les connaissances soient solidement acquises (...) Mais l'enfant n'en aura pas moins l'impression, en passant d'un cours à un autre, qu'il pénètre dans un monde nouveau; et, comme la graduation des programmes apportera à chaque tranche d'âge ce qui lui convient, il retiendra aisément ce qu'il a appris, en temps opportun avec plaisir.»

En fait cette opposition entre deux méthodes avancées par les promoteurs de la réforme n'est pas aussi forte qu'ils pouvaient le prétendre : il s'agit plus d'une continuité dans l'évolution amorcée précédemment pour adapter les contenus de savoir au public visé. Comme le montre A. Prost (1968), les conceptions ne peuvent guère changer fondamentalement, les finalités de l'enseignement restant identiques. L'objectif défini autour des années 1880, apprendre tout le savoir pratique dont un homme a besoin toute sa vie et qui a abouti à une somme de savoirs très étendue, reste le même. Cependant, le nombre d'enfants qui continuent leurs études dans les EPS augmente, ce qui transforme le cours supérieur en classe de fin d'études et ce qui entraînera la rédaction de nouveaux programmes en 1938 pour cette classe.

29. C'est nous qui soulignons.

Dans les programmes de 1923 concernant l'école primaire, on assiste, tout en gardant globalement les mêmes contenus, à une évolution du découpage des objets de savoir enseignés.

3.2.2. Les modifications dans les programmes de 1923 pour le primaire

Au cours moyen, on peut noter deux modifications :

1 - la première concerne l'ordre dans lequel les nombres décimaux sont présentés, ce qui est justifié par les profondes analogies entre entiers et décimaux :

«rien, logiquement, ne distingue les nombres décimaux des nombres entiers : aussi leur étude est une suite immédiate de ce que l'on sait déjà, les calculs où ils interviennent n'embarrassent guère les élèves.»

En effet les programmes insistent sur le fait que les nombres décimaux doivent être enseignés "en liaison avec les unités théoriques et pratiques de monnaie, de longueur, de distances, de poids et de capacité". Les programmes officialisent le bloc "entiers", le bloc "système métrique" et le bloc "décimaux". C'est le système de mesure qui sert de référence pour les décimaux.

La rédaction même des programmes indique que les auteurs s'appuient sur des pratiques déjà en vigueur dans les écoles primaires, ce qui confirme ce que nous avançons dans le paragraphe 222 a.

2 - la seconde a lieu au niveau du cours supérieur; ainsi disparaît :

«l'étude des nombres premiers, les caractères de divisibilité, le plus grand commun diviseur, en un mot tout ce qui est arithmétique pure.»

Le commentaire qui suit est révélateur d'une coupure qui s'amorce entre les enseignements du primaire et ceux de l'école normale :

«évidemment ces questions font la joie de quiconque a du goût pour les mathématiques. Elles continueront d'ailleurs de faire la joie de ceux qui, à l'école normale poursuivront leurs études³⁰.»

En fait les rédacteurs du programme souhaitaient aller plus loin. J. Gal, inspirateur des programmes de 1923 à qui justement on reprochait "d'avoir réservé à l'école normale l'étude des nombres premiers, du PGCD et du PPCM" écrivait dans le journal des instituteurs³¹ :

30. C'est nous qui soulignons.

31. Extrait d'un article de J.Gal reproduit dans le *Vade-Mecum pour l'enseignement du calcul de A. Souché*, p.74, 1931, Nathan.

«les fractions peuvent disparaître sans inconvénient ou presque du programme à l'école élémentaire. Déjà, elles y sont un peu "mises au coin".»

Les arguments avancés étaient de deux ordres :

- on ne se sert jamais dans la pratique des fractions, son expérience de physicien et d'expert devant les tribunaux étant là pour en témoigner,
- il faut rendre progressif l'enseignement en passant par une "pente insensible" du nombre entier au nombre décimal; de celui-ci à la fraction décimale; de celle-ci à la fraction ordinaire.

De plus décimaux et fractions sont rabattus sur les entiers puisque ³² :

«1, 53 (m) est un nombre entier 153 avec l'unité centimètre. De même une fraction ordinaire est un nombre entier dans un système où l'unité prend un nom nouveau, une dénomination nouvelle.»

On peut faire l'hypothèse que l'Inspecteur général J. Gal, compte tenu de sa position dans le monde de l'enseignement, était au courant des positions des mathématiciens représentés par Lebesgue et que, lorsqu'il s'autorise cette diatribe contre les fractions, il le fait sous la caution de déclarations de mathématiciens renommés.

A. Marijon, autre inspecteur général et rédacteur de manuels, énonce en 1928 ³³ les mêmes arguments et dans les mêmes termes que nous avons trouvés sous la plume de Lebesgue :

«on peut et on doit parler aux enfants de tiers, de quarts, même de septièmes. Le chapitre de la division y conduit tout naturellement. La division en parties égales ne demande pas une théorie des fractions. Et la notation $24^m/7$ pour représenter la longueur du septième d'un ruban de 24^m peut être employée sans parler de fractions. Ce symbole de $24^m/7$, qui indique une longueur non exprimable exactement en mètres, décimètres, centimètres..., mais évaluable avec telle approximation que l'on veut ne comporterait pas plus de difficultés au cours moyen que $\sqrt{2}$ n'en comportera plus tard.»

4. CONCLUSION

Les différents traités que l'on peut repérer se constituent soit en prolongement d'un traité existant, soit en rupture. C'est à partir des traités basés sur la théorie des fractions, rapports et proportions, par exemple le traité de Reynaud, lui-même issu de traités antérieurs, notamment celui de Bezout, que les scribes, essentiellement des inspecteurs généraux et inspecteurs primaires, font faire un premier découpage "concentrique". Le

32. Ibidem p.77

33. Marijon A. Manuel général, reproduit dans le *Vade-Mecum pour l'enseignement du calcul de A. Souché*, p.75, 1931, Nathan.

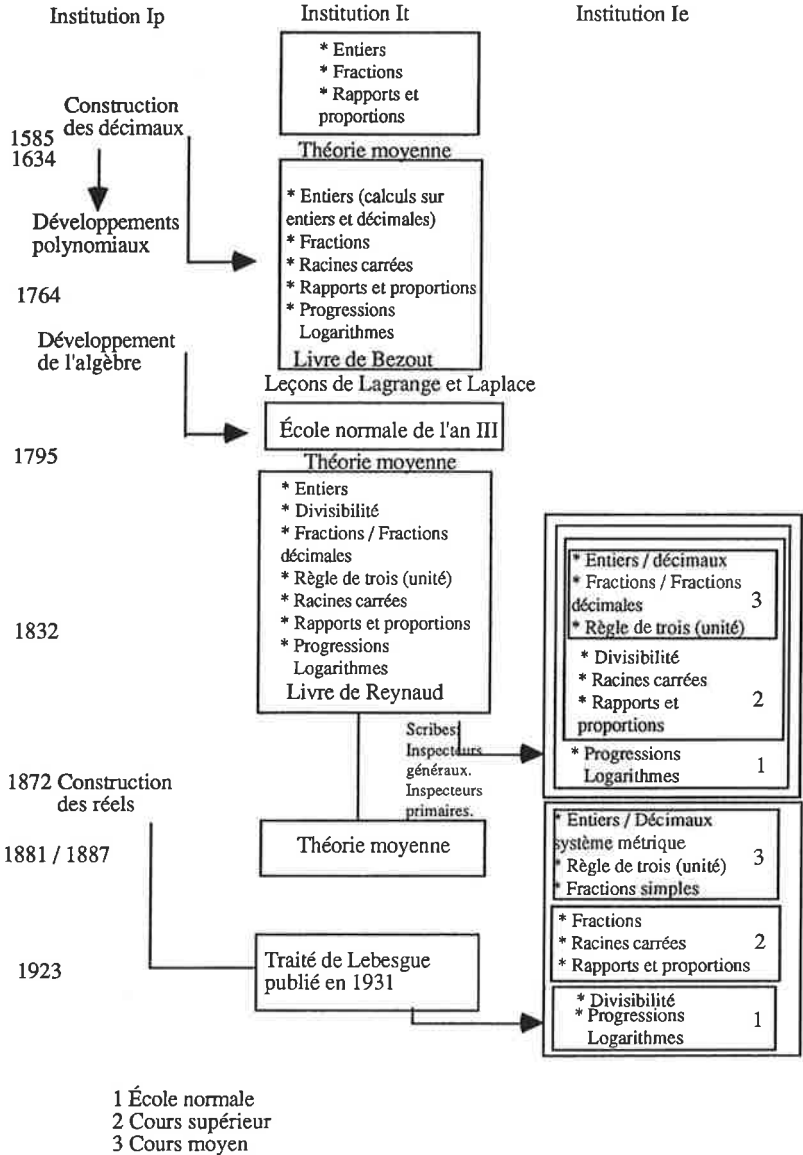
premier va du cours élémentaire jusqu'au cours moyen, le deuxième jusqu'au cours supérieur et enfin le troisième jusqu'à l'école normale. En construisant d'abord des plans d'étude, puis en participant de manière active à la rédaction des programmes officiels, ils vont entraîner la fragmentation du savoir dans les diverses sous-institutions.

Dans le même temps, ils vont rédiger des manuels, en accord avec les plans d'étude, qui vont servir à encadrer les enseignements aux différents niveaux du primaire.

Au cours des années 1930, les articles de H. Lebesgue réunis dans un livre forment un nouveau traité, provenant d'une modification du savoir savant avec l'apparition de la construction des réels : il se trouve en rupture avec le traité précédent. Profitant de l'apparition de ce traité, se met en place un second découpage progressif rejetant la "théorie des fractions" du cours moyen, où son enseignement posait un certain nombre de difficultés, vers le cours supérieur, amorçant une séparation des savoirs entre le primaire et le secondaire.

Ainsi pendant toute la période étudiée, l'institution primaire, constituée des sous-institutions école primaire, école primaire supérieure, école normale, a représenté au niveau des savoirs un bloc assujéti à l'institution de formation "traité de la théorie moyenne".

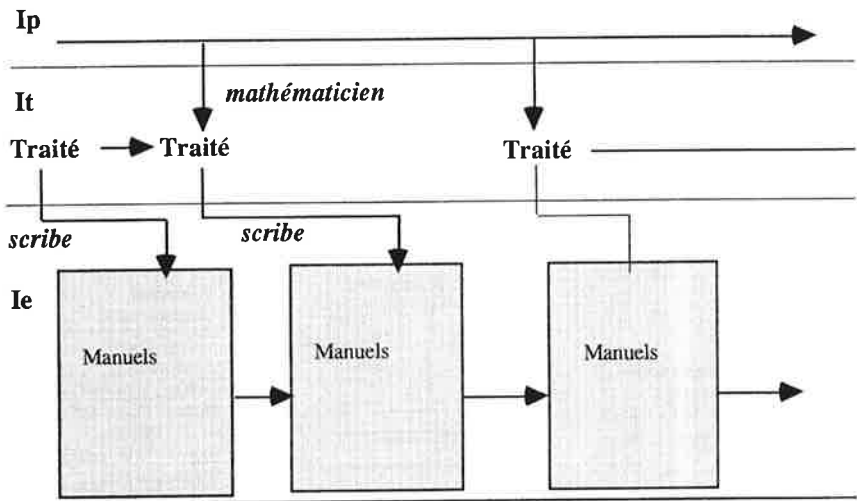
Nous résumons ce que nous avons vu dans l'ensemble des paragraphes de ce chapitre dans le tableau ci-dessous, en distinguant les trois institutions : Ip institution productrice de savoir, It institution transpositive, Ie institution du primaire.



Nous avons donc une illustration de la modélisation amorcée au chapitre précédent (Chapitre B1, §33) :

- la strate des traités, ceux qui s'enchaînent, comme les traités de Bezout et de Reynaud et ceux qui représentent une rupture par rapport aux traités précédents, comme le traité de Lebesgue.
- la strate des manuels qui correspondent à des découpages à un moment donné d'un traité existant, en phase avec des institutions correspondantes dont ils déterminent le fonctionnement des savoirs sous-jacents.

A l'évolution diachronique du savoir savant, d'où tout part, même si d'autres éléments interviennent par la suite, va correspondre, de manière diffractée, l'évolution des savoirs dans les institutions de formation.



Les scribes s'assujettissent au nouveau traité, mais sont aussi assujettis aux manuels existant antérieurement. Les découpages du savoir en différents blocs réalisant chacun un bloc structuré associé à des institutions emboîtées vont représenter autant de boucliers de protection qui mettent à distance le savoir savant. Chaque bloc est ainsi légitimé par le bloc qui le contient.

Nous avons pu noter que la tentative de l'école normale de l'an III, représentant un effort de la part de la sphère savante de contrôle direct de l'enseignement primaire avait rapidement fait long feu.

De même, nous avons pu constater que même un nouveau traité, écrit par un pédagogue aussi éminent que l'était H. Lebesgue, n'avait eu que des effets limités au niveau de l'école primaire et au niveau des écoles normales. Ses idées n'auront d'impact au niveau des manuels que vers les années soixante.

Il n'y aura donc pas pendant une longue période de réorganisation du savoir au niveau du primaire, mais des ajustements locaux, par exemple des glissements de certains savoirs d'une sous-institution à une autre.

Cela va entraîner une très grande longévité des différents contenus abordés au primaire, d'autant plus que le traité qui se met en place au niveau du secondaire, même s'il représente des modifications importantes par rapport aux traités précédents peut cependant toujours servir de légitimité épistémologique aux contenus dont nous avons étudié le découpage.

Cependant, comme nous l'avons noté, la transposition didactique opère à l'intérieur de cette institution sous la pression de certaines réorganisations profondes du savoir savant, via les scribes que sont les inspecteurs généraux, et entraîne des réajustements locaux. Ils portent en germe un fonctionnement séparé des savoirs dans l'école élémentaire et dans l'école normale. Ainsi au sein de l'école primaire, il se confirme que les seuls systèmes de nombres réellement étudiés sont les entiers, les décimaux étant rabattus sur ces derniers via le système métrique. Toute la théorie des fractions bascule du côté des cours complémentaires et des écoles normales.

Par conséquent s'amorce un fonctionnement des savoirs qui va prendre dans chaque institution une certaine autonomie. Par là-même va commencer à se créer *une distance* entre ces deux institutions.

Dans le même temps, compte tenu des liens qui existent entre elles, subsiste une nécessaire interdépendance entre les savoirs présents dans chacune des institutions .

Avec la seconde guerre mondiale, une séparation institutionnelle va se réaliser brusquement, entraînant les deux sous-institutions vers des destins divergents, permettant un fonctionnement spécifique des savoirs concernant les systèmes de nombres. C'est ce nouveau fonctionnement que nous nous proposons d'analyser dans le chapitre suivant dans une période beaucoup plus proche de nous.

CHAPITRE B3

LES SAVOIRS DE RÉFÉRENCE DANS LES ÉCOLES NORMALES

La deuxième guerre mondiale crée une rupture institutionnelle pour les institutions de formation que sont les écoles normales en les séparant de l'école primaire, initialisant une évolution institutionnelle dont nous étudions les grandes lignes. Mais nous avons montré dans le chapitre précédent que cette rupture était déjà en place au niveau des savoirs. Nous étudions donc quels sont les rapports aux décimaux et aux fractions qui se sont installés à l'école primaire, en examinant s'ils sont restés stables ou s'ils ont changé. Nous amorçons une étude du fonctionnement des savoirs depuis cette période dans les écoles normales en mettant en regard les contenus présents dans les programmes du collège et les contenus présents dans les documents destinés à la formation des instituteurs.

1. L'ÉVOLUTION INSTITUTIONNELLE

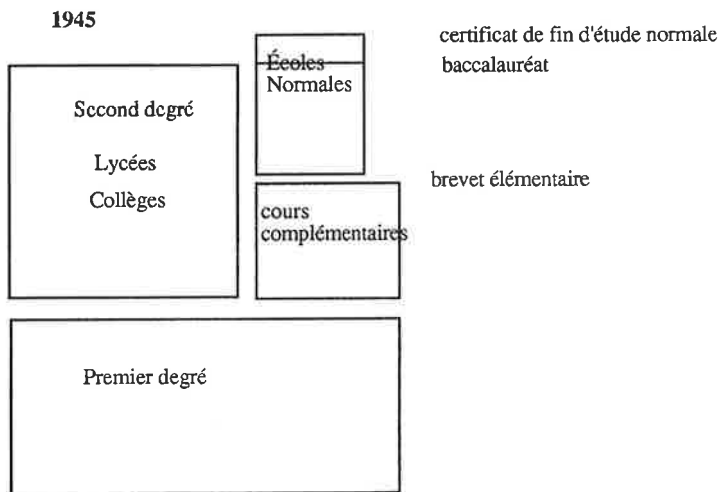
1.1. Les écoles normales et les cours complémentaires dans le second degré

L'augmentation de la scolarité, le nombre croissant d'élèves faisant une scolarité longue, c'est à dire au moins jusqu'au baccalauréat, va hausser le niveau culturel de la France tout au long de la période 1880 - 1940. Compte tenu de sa formation, qui n'a pas changé depuis 1881, l'instituteur en sait moins qu'une partie des parents de ses élèves. Se trouve donc posé à cette époque le problème de la formation des instituteurs. La mise en place progressive de degrés dans l'enseignement, le primaire du côté du premier degré et le secondaire du côté du second degré, va naturellement faire basculer les écoles normales du côté de ce dernier. En 1937, J. Zay propose un projet à l'Assemblée Nationale où il est dit à l'article 16 :

«dans les écoles primaires, nul ne peut exercer les fonctions de directeur ou de directrice, d'instituteur ou d'institutrice, ni être chargé d'une classe, sans être pourvu du baccalauréat.»

Dans l'esprit du promoteur du projet, le baccalauréat doit donc prendre la place du brevet supérieur. Ce projet n'aboutira pas, mais le Régime de Vichy, tout en supprimant les écoles normales, choisit ce niveau pour le recrutement dans les instituts de formation. Cette mutation sera définitivement entérinée à la libération, avec la réouverture des écoles

normales. Celles-ci préparent d'une part au baccalauréat en continuant à recruter au niveau de la troisième¹ et font suivre cet enseignement d'une formation professionnelle d'un an. Nous pouvons visualiser cette organisation de la façon suivante :



Les professeurs enseignant dans les écoles normales sont des professeurs enseignant dans le secondaire sans préparation spéciale à cette fonction spécifique. Ainsi d'une culture exclusivement primaire comme on a pu le voir dans la période précédente, on passe à une culture du type secondaire, ce qui va introduire une contrainte très forte en ce qui concerne le fonctionnement des savoirs.

1.2. L'unification du second degré, l'évolution des écoles normales vers le supérieur

Les cours complémentaires et les écoles normales sont les deux survivances de l'ancienne organisation du primaire dans le second degré. Nous allons assister à un double mouvement : l'unification du second degré et le glissement progressif des écoles normales vers le supérieur.

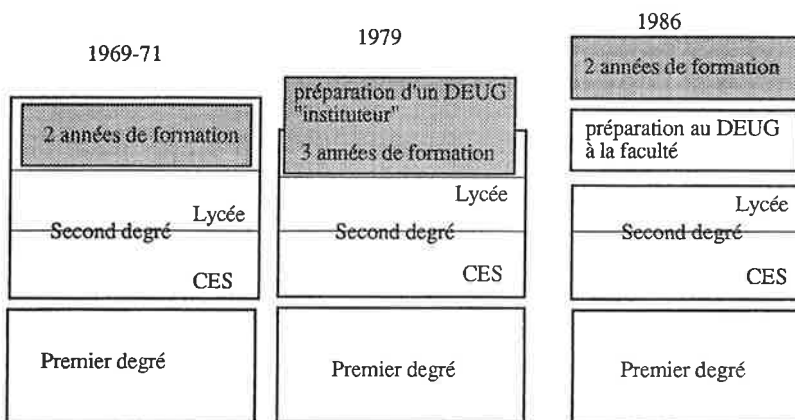
Le principe de programmes symétriques dans les classes parallèles et la création de trois degrés en 1937 est la première étape de l'unification de ce que l'on va appeler le second degré. La transformation des EPS² en collèges en 1941, la suppression des classes

1. En fait il y aura coexistence de deux formations, la seconde étant caractérisée par un recrutement au niveau de la première, la préparation au baccalauréat, puis une formation professionnelle en deux ans.

2. Écoles Primaires Supérieures

élémentaires des lycées et collèges en 1945³ et enfin la création des collèges d'enseignement secondaire en 1963 vont continuer dans cette voie.

La suppression progressive des classes préparant au baccalauréat entraîne le recrutement au niveau de celui-ci et place les écoles normales en marge du secondaire. L'allongement de la formation à deux ans après le baccalauréat en 1969, puis à trois ans en 1979, la formation incluant la préparation d'un DEUG-instituteur marque cette évolution en direction du supérieur. Celle-ci allait se confirmer par le recrutement après le DEUG en 1986.

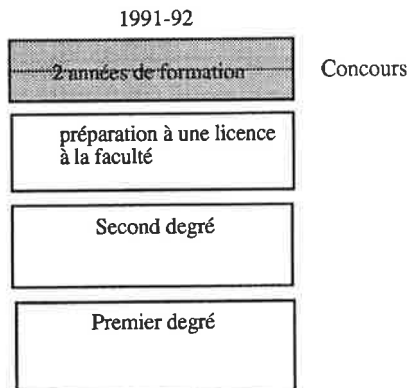


La formation de 1986, réduite à deux ans, introduit une situation paradoxale : les écoles normales reçoivent des étudiants qui, ayant fait deux années d'enseignement supérieur, se retrouvent dans une institution dépendant du second degré.

1.3. L'intégration dans le supérieur des institutions de formation

La création des IUFM en 1991 et 1992 supprime la contradiction précédente en portant le recrutement au niveau de la licence et en rattachant les IUFM à l'enseignement supérieur.

3. L'ordonnance du 3 Mars 1945 en avait décidé la suppression, mais son entrée en application fut très longue. En 1958, on comptait encore 1627 classes primaires dans les lycées. Leur fermeture progressive commence réellement en 1962 et se poursuit jusqu'à la fin des années soixante.



Nous étudierons plus loin les contraintes institutionnelles introduites par ce type de formation, et notamment la présence du concours d'entrée proprement dit placé après la première année de formation. Nous continuons donc l'étude de la transposition didactique en direction des institutions de formation et des institutions qui lui sont liées, en particulier l'école primaire.

2. LE TRAVAIL DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

2.1. La période de 1945 à 1970

2.1.1. Les décimaux

L'évolution amorcée dans les programmes de 1923 se renforce. Le programme officiel de 1945 pour le cours moyen réunit dans un même alinéa les nombres décimaux et les nombres entiers. Ainsi le discours sur le lien entre entiers, décimaux et système métrique est réaffirmé :

«il importe de préciser [aux élèves] leurs connaissances et de leur faire comprendre l'équivalence de deux expressions d'un nombre concret, soit avec deux unités, soit avec une virgule

2 mètres et 15 centimètres = 2,15 m.»

L'analyse des livres de l'époque montre une grande adéquation entre les programmes existants et le contenu des activités proposées. G Brousseau (1980) analysant un manuel représentatif de l'époque caractérisait les savoirs sous-jacents utilisés dans le primaire :

- a) Le décimal est toujours l'expression d'une "mesure"(au sens non mathématique)
- b) Ces mesures s'expriment dans le système métrique

c) Le décimal est défini en tant que naturel muni d'une indication d'unité et d'une virgule qui repère le chiffre de cette unité

d) Les algorithmes de calcul sont présentés comme étant les mêmes que pour les naturels complétés seulement d'une procédure relative à la virgule.»

2.1.2. Les fractions

Le texte portant sur les contenus développés à partir des fractions est lui-même significatif :

«Fractions très simples de grandeurs : demi, tiers, quart, cinquième, dixième, soixantième. Calculer une fraction d'une grandeur et problème inverse. Additionner, comparer et soustraire des fractions dans des problèmes très simples.»

Dans les programmes de 1887, nous avons pu constater que l'expression "idée générale sur les fractions" avait entraîné aussi bien au niveau des plans d'études que des livres de longs développements concernant les fractions ordinaires. Les différents programmes de 1905, 1923 avaient conservé à quelque chose près le même libellé. Par contre le terrain est balisé à présent par les termes de fractions simples. L'utilisation des fractions doit se faire à propos de problèmes simples : on assiste à un véritable *évitement des fractions* en tant que mesures. Le paragraphe 10 des instructions officielles est particulièrement significatif :

«les fractions, comme les pourcentages, sont considérés comme des multiplicateurs abstraits. Prendre les quatre cinquièmes d'une grandeur, c'est partager cette grandeur en cinq parties égales et prendre quatre de ces parties (il est équivalent de prendre 80%) Il suffit pour cela de diviser la mesure de la grandeur par 5 et de multiplier le quotient par 4. On retrouve ainsi le calcul de la règle de trois; par exemple :

$$\text{Poids de farine} = \left[\begin{array}{l} \text{poids de blé} \times \frac{4}{5} \\ \hline \text{poids de blé} \times 4 \\ \hline 5 \end{array} \right]$$

Le problème inverse consiste à chercher une grandeur quand on connaît la valeur de ses $\frac{4}{5}$ ou son produit par $\frac{4}{5}$.(...)

ces deux problèmes peuvent être condensés en une seule formule en disant que :
5 kg de blé donnent 4 kg de farine.»

Dans un livre⁴ destiné aux instituteurs, M. Bompard, professeur d'école normale et A. Chatelet⁵, professeur à la Sorbonne, commentant ces nouveaux programmes et les instructions qui les accompagnaient, emploient le terme d'**opérateurs**⁶ à propos des fractions (p. 86) :

«[Le programme] spécifie que ce sont des "fractions de grandeur", c'est à dire, comme le précisent les instructions (IV, 10), des opérateurs, ou des "multiplicateurs abstraits" indépendants des unités choisies.

Une telle fraction indique une opération, ou une transformation à faire sur une grandeur, qui peut, elle, être définie par sa mesure.»

Le premier argument avancé pour justifier les choix du programme de ne pas commencer "à exposer une théorie de la mesure au moyen des nombres fractionnaires", plus générale qu'une théorie de la mesure limitée à l'usage des nombres décimaux, est que (p. 86) :

«cette généralité n'est pas suffisante, puisque des grandeurs usuelles, comme la diagonale d'un carré d'un décimètre de côté, ne peuvent être exprimées par un nombre fractionnaire.»

Le deuxième argument concerne les écritures :

«alors qu'un nombre décimal n'a qu'une seule écriture possible (sauf adjonction de zéros à la droite des chiffres décimaux), un nombre fractionnaire est représenté par une "infinité" de fractions égales entre elles.»

L'opposition est faite entre :

- les nombres fractionnaires qui ont un grand intérêt théorique, ensemble le plus simple dans lequel sont possibles les quatre opérations élémentaires
- les décimaux largement suffisants pour les problèmes de mesure, puisque ce sont les seuls utilisés "dans le calcul de la vie courante et même de la science de l'ingénieur ou de la physique".

Décimaux et fractions vont donc fonctionner dans des registres différents, les situations dans lesquelles ils sont utilisés étant de nature nettement différente.

4. Chatelet A. , Bompard M. 1963, *Enseignement de l'arithmétique*, Le calcul au cours moyen, cahiers de pédagogie moderne, Collection Bourrelier, Librairie A. Colin, Paris.

5. Le fait, tout à fait rare, qu'un des auteurs de ce livre destiné à l'enseignement primaire, soit un mathématicien, membre de l'enseignement supérieur, mérite d'être signalé. Cela montre que les auteurs (directeurs d'écoles normales, directeurs d'école annexe, inspecteurs), des différents articles composant le livre précédemment cité, cherchent la caution de certains mathématiciens.

6. C'est ce terme qui sera repris par la suite dans les commentaires des programmes de 1970 et qui fera fortune. Il est pourtant déjà bien présent dans le discours noosphérique de l'époque.

2.2. L'évolution des savoirs concernant les systèmes de nombres au collège

Comme le montrent Chevallard et Jullien (1989), les savoirs au collège vont subir deux modifications importantes, qui vont contribuer à l'effondrement de l'organisation de l'exposé classique : l'évacuation de la notion de rapport de deux nombres et la disparition de l'extraction de la racine carrée.

2.2.1. La disparition de la notion de rapport de deux nombres

Dans l'exposé classique, qui va concerner le secondaire, les rapports apparaissent comme étendant la notion de fraction. Cette généralisation déjà rencontrée dans le manuel classique qui a servi de référence au niveau du primaire, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, permet de ramener le quotient de deux décimaux ou de deux fractions à une fraction. Les termes d'un rapport peuvent ainsi être non seulement des entiers, des décimaux ou des fractions, mais aussi des irrationnels. Grâce à l'utilisation de lettres qui permet de généraliser les propriétés des rapports de fractions, les rapports vont servir comme substitut d'une théorie des réels :

«en réalité, le problème que vient résoudre la notion de rapport est celui que pose l'absence d'une théorie des réels (...). La théorie des nombres réels, due à Dedekind, Méray et d'autres, n'est pas encore sortie du cercle étroit des mathématiciens,»

notent Chevallard et Jullien (p.125).

Cependant rapports et proportions vont disparaître, par l'utilisation de la notion de fonction qui, elle, permet de modéliser d'une manière plus générale les mises en rapport de deux grandeurs. Ainsi le mot de rapport qui figure dans le programme de cinquième en 1947 disparaît dans le programme de 1960.

2.2.2. La disparition de la technique de l'extraction de la racine carrée

Comme l'a bien montré T. Assude (1992), l'extraction de la racine carrée apparaît dans le traité classique comme la cinquième opération, fournissant, ainsi que la division, les décimales une à une et permettant d'avoir une valeur approchée par défaut à 10^{-n} près. La technique de la division, ainsi que celle d'extraction de la racine carrée, permettait d'encadrer un nombre x entre $a/10^n$ et $(a+1)/10^n$: tous les nombres entre $a10^{-n}$ et x étaient des valeurs approchées par défaut mais il n'y avait ainsi **qu'une** valeur approchée par défaut à 10^{-n} .

Sous l'action de noosphériens de la sphère savante, cette technique va disparaître au cours des années 60, rendant beaucoup plus complexe tout le problème des calculs approchés concernant les racines carrées.

2.3. Conclusion

Pour la période considérée nous assistons à un double mouvement.

Dans le primaire, le décimal en tant que décimal-mesure devient représentatif des nombres "non entiers". En fait, ils ont l'apparence de nombres différents des entiers, du fait de leur écriture, mais ils sont considérés et traités comme des entiers. Les fractions rejetées à la périphérie de l'enseignement ne sont gardées que pour intervenir dans la résolution de problèmes, notamment les problèmes de proportionnalité.

Dans le secondaire, en particulier au collège, nous assistons à un effondrement de l'organisation antérieure de l'exposé avec la disparition de la notion de rapport, qui fédérait les diverses notions vues jusqu'alors, et la disparition de la technique classique d'extraction de la racine carrée qui contribuait à donner un statut à un certain type d'approximation.

Il nous faut examiner les candidats potentiels à la transposition didactique en direction du collège qui sont susceptibles de servir de remplaçants aux éléments qui sont en train de disparaître de l'exposé classique.

En effet s'est dessiné un mouvement de grande ampleur, appelé "mathématiques modernes", s'intéressant aux structures générales et en particulier aux structures numériques.

3. L'APPARITION DE NOUVEAUX TRAITÉS

3.1. L'état du savoir savant pour les systèmes de nombres décimaux, rationnels et réels

Sous la poussée des mathématiciens professionnels, va avoir lieu une profonde remise en cause des contenus et des méthodes d'enseignement dans l'école obligatoire. Nous nous proposons donc de voir quelques "lignes-forces" concernant l'état du savoir concernant les systèmes de nombres dans la sphère proche de l'institution productrice de savoirs. Nous ne nous intéressons qu'à celles qui nous semblent avoir joué un rôle dans la transposition didactique. Nous nous servons des livres qui traduisent à ce moment-là l'état du savoir savant, soit les livres de référence comme Bourbaki, destinés plutôt aux mathématiciens, ou encore les livres plus "élémentaires" comme ceux de la collection Queysanne et Revuz, utilisés dans les classes préparatoires aux grandes écoles et à la faculté.

3.1.1. La quasi-disparition de l'ensemble des décimaux dans les livres de l'enseignement supérieur

L'intérêt grandissant, dans la première moitié du XX^{ème} siècle, porté aux structures va minorer le rôle des décimaux, "coincés" entre les entiers et les rationnels. Des constructions précises de ces derniers, faites notamment par J. Drach⁷, commencent à s'introduire dans l'enseignement français.

La découverte des propriétés arithmétiques des nombres algébriques (par E. Kummer, R. Dedekind, L. Kronecker, ...) et l'intérêt de plus en plus grand porté aux théories algébriques (J.L. Lagrange, N.H. Abel, et surtout E. Galois) ont mis en lumière l'importance des "corps abstraits", le corps des rationnels et le corps des classes d'entiers modulo n étant parmi les plus élémentaires rencontrés.

Les décimaux vont au mieux n'être rencontrés que comme sous-ensemble des rationnels. La plupart de ces livres ne mentionnent même pas le terme décimal dans leurs index, estimant que la notion va sans doute de soi et n'offre que peu d'intérêt pour la suite de la construction des notions mathématiques.

Il en est toujours de même actuellement. Ainsi dans un livre destiné aux étudiants de première année d'université, A. Deledicq et J. Fluet⁸ ne font qu'un bref rappel sur les décimaux, signalant simplement que c'est le sous-ensemble des rationnels dont une écriture fractionnaire est de la forme $\frac{a}{10^n}$, $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, sous-anneau de \mathbb{Q} , engendré (sur \mathbb{Z}) par 1 et $\frac{1}{10}$ et noté $\mathbb{Z}[\frac{1}{10}]$. Les décimaux sont ainsi considérés comme étant "presque des polynômes à une variable sur \mathbb{Z} , la variable étant assimilée à $\frac{1}{10}$ ".

On peut remarquer une certaine désinvolture concernant les décimaux dans d'autres livres écrits par des universitaires éminents. Ainsi F. et J.P. Bertrandias⁹, professeurs d'université de mathématiques, dans un paragraphe consacré aux variables numériques et à la précision des nombres exprimant la grandeur d'une variable rapportée à une unité, écrivent :

«Les valeurs de la variable sont données avec une certaine précision, qui est en principe indiquée par le nombre de **chiffres significatifs**. (...) En particulier,

7. Borel E. et Drach J., 1895, *Introduction à la théorie des nombres et à l'Algèbre supérieure*, pp. 135 - 140, librairie J. Gibert, Paris. J. Drach procède par adjonction à l'ensemble des symboles désignant les entiers d'un nouveau "symbole" x tel $ax = 1$ ($a \neq \pm 1$) avec des règles de composition de ce symbole avec les symboles désignant les entiers.

8. Deledicq A. et Fluet J., 1982, *Savoir et savoir-faire*, Collection Epistémon, Cedic-Nathan.

9. Bertrandias F. et J.P., 1990, *Mathématiques pour les sciences de la matière et pour la vie*, p.17, Pug.

ne pas oublier les zéros significatifs à la fin d'un nombre : 7,1 et 7,100 par exemple n'ont pas tout-à-fait la même signification¹⁰...»

Cela signifie bien que, à propos des décimaux, le mathématicien peut sans encombre prendre le point de vue "approximation" en le laissant implicite comme le font les physiciens.

3.1.2. Les questions d'approximation des nombres réels

a) Les développements illimités des nombres réels

Quelques livres consacrent, à propos des réels, un paragraphe plus ou moins détaillé au développement des nombres réels, dont l'utilité va être surtout de permettre d'exprimer des valeurs approchées de nombres réels. Ainsi Bourbaki¹¹ développe un paragraphe sur les développements usuels des nombres réels relatifs à une base a . Un simple alinéa signale que :

«Pour les calculs numériques manuels, on emploie les développements de base 10, qui sont dits développements décimaux; dans les calculs sur ordinateurs, on utilise les développements de base 2, (dits développements dyadiques).»

L'intérêt de ces développements décimaux illimités (ddi) est de classer les différents nombres rencontrés suivant la nature de ceux-ci :

- ceux qui ont une période à partir d'un certain rang, qui sont des écritures de rationnels;
- ceux de période 9 ou 0, qui sont des écritures de décimaux;
- ceux qui ne sont pas périodiques, représentant les réels irrationnels.

La non unicité du développement décimal d'un décimal est évidemment une difficulté qui est soulignée.

b) Les fractions continues

L'autre domaine, qui joua un rôle important dans le savoir savant et qui est toujours présent dans la littérature que nous étudions, concerne les fractions continues, dont on pressent qu'elles pourraient être un candidat potentiel à la transposition didactique à propos des systèmes de nombres. Nous pouvons en constater l'émergence dans des livres destinés à la formation des maîtres. Un nombre important d'articles abordant ce thème a ainsi été écrit par des noosphériens. Citons par exemple une partie concernant les fractions continues du livre de A. Engel¹² (1979), qui se trouve dans le deuxième chapitre

10. C'est nous qui soulignons.

11. Bourbaki N., 1971, *Eléments de mathématiques, Topologie générale*, Chapitre IV: Nombres réels, §8: développements usuels des nombres réels, Hermann.

12. Engel A., 1979, *Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique*, Ed. Cedic.

intitulé "Théorie des nombres" montrant la solidarité de cette partie avec d'autres parties, notamment celle traitant l'algorithme d'Euclide. La niche occupée par les fractions continues est celle de l'approximation des réels par des fractions rationnelles.

De même F. Jabœuf¹³ déclare-t-il dans le journal *Quadrature* :

«il y a plus d'une façon de représenter un nombre réel, en dehors de développement décimal. Par exemple le développement en fraction continue. Ce dernier rend d'autres services. Au moins aussi ancien dans son principe, il a été systématiquement étudié depuis trois siècles. Toujours indispensable en arithmétique, on l'emploie aujourd'hui dans bien d'autres domaines.»

Il montre lui aussi qu'un des intérêts des fractions continues, qui sont en fait **une suite de rationnels**, est de traiter le problème des approximations rationnelles d'un réel. Cet aspect fait d'ailleurs l'objet d'un article complet de l'auteur cité ci-dessus.

Nous en trouvons aussi des traces dans la plupart des livres, dans les chapitres concernant les nombres réels. Par exemple J.L. Ovaert et J.L. Verley¹⁴, dans un chapitre sur les propriétés fondamentales des nombres réels, soulignent le grand rôle joué par les fractions continues en théorie des nombres et écrivent quelques pages au sujet du développement en fraction continue des rationnels et des nombres quadratiques.

3.1.3. Q comme cas particulier d'un corps des fractions d'un anneau d'intégrité

La construction méthodique et précise du corps des nombres rationnels à partir des nombres entiers, comme le signale A Chatelet¹⁵, dans un court historique de la notion de corps, est réalisée dans la seconde moitié du XIX^{ème} siècle. Elle est faite soit par adjonction de nombres négatifs et d'inverses d'entiers en utilisant le principe de permanence de H Hankel, (1867), et de J. Drach (1895), soit par considération d'opérateurs sur les grandeurs par Ch. Meray (1889), soit par les classes d'équivalence de "quotients".

C'est cette dernière conception qui a été généralisée pour construire ce que A. Chatelet appelle le corps des "quotients" d'un domaine d'intégrité, qui deviendra, dans une terminologie adoptée depuis lors, le corps des fractions d'un anneau d'intégrité. Examinons par exemple l'exposé "classique" tel qu'on peut le trouver dans Queysanne (1964) (p. 114-115).

13. Jabœuf F., 1989, *Fractions continues*, Irem de Montpellier. Ce fascicule fait par la suite l'objet d'une série d'articles plus complets publiés dans les premiers numéros de la revue *Quadrature*.

14. Ovaert J.L. et Verley J.L., 1983, *analyse vol 1*, collection Epistemon, Cedic - Nathan.

15. Chatelet A., 1956, *Arithmétique et Algèbre modernes, Tome II. Anneaux et corps. Calcul algébrique. Idéaux et divisibilité. Commentaires du § 5 du chapitre III*, p. 406, Presses universitaires de France.

Il s'appuie sur des procédés de symétrisation pour donner une première définition des rationnels positifs \mathbb{Q}^{**} . Il montre d'abord un théorème permettant de définir un groupe G symétrisé d'un ensemble E muni d'une loi T associative, commutative et pour laquelle tout élément est régulier. Il plonge l'ensemble E , dans le groupe G de manière que E soit identifié à une partie G' stable de G .

Prenant comme **ensemble particulier l'ensemble N^*** muni de la multiplication, il construit le groupe \mathbb{Q}^{**} qui est l'ensemble $\frac{N^* \times N^*}{R}$, la relation R étant définie par

$$(a, a') = (b, b') \text{ si et seulement si } ab' = ba'.$$

La partie G' stable de G est l'ensemble des classes des couples (a, a') tels que a' divise a , classe qui contient un couple de la forme $(x, 1)$, x appartenant à N . En identifiant l'élément x de N et la classe correspondante à $(x, 1)$, N se trouve plongé dans l'ensemble \mathbb{Q}^{**} .

Il cherche par la suite (p. 187-191) à plonger un anneau A dans un corps K tel que A soit un sous-anneau de K . Il est donc conduit à formuler le problème d'immersion d'un anneau d'intégrité dans un corps commutatif minimal K .

Utilisant un procédé de symétrisation qui généralise ce qui a été vu dans la partie précédente, il démontre le théorème suivant :

Étant donné un anneau d'intégrité A , il existe un corps commutatif minimal K , à un isomorphisme près, tel qu'un sous-anneau de K soit isomorphe à A .

Tous ces corps sont identifiés à $\overline{A} = \frac{A \times A^*}{R_1}$ où A^* est le symétrisé de A et R_1 la relation d'équivalence $ab' = ba'$ entre éléments de (a, a') et (b, b') de $A^* \times A^*$.

Identifiant pour tout x de A , la classe correspondant au couple (x, e) où e est l'élément unité de A et x , il montre que pour $a' \neq 0$, la classe de (a, a') est le quotient aa'^{-1} . Ce quotient est représenté par la fraction $\frac{a}{a'}$ ou toute fraction $\frac{b}{b'}$ telle que $ab' = ba'$. Il précise que c'est par abus de langage que l'on dit que \overline{A} est le corps des fractions de l'anneau d'intégrité A .

En prenant comme **cas particulier d'anneau d'intégrité Z** , la méthode précédente permet d'obtenir le corps \mathbb{Q} des nombres rationnels. Chacun des éléments de \mathbb{Q} est une classe d'équivalence définie à partir d'un couple (a, a') qui admet pour représentant toute fraction de numérateur x et de dénominateur $x' \neq 0$ telle que $ax' = a'x$. En identifiant la classe de $(a, 1)$ de \mathbb{Q} et a de Z , cela permet de plonger Z dans \mathbb{Q} , et donc de faire en sorte que $Z \subset \mathbb{Q}$.

Dans le cas de \mathbb{Q} , on peut définir un représentant privilégié qui est la fraction dite irréductible, c'est à dire à dénominateur positif et telle que a et a' soient étrangers.

On voit donc que la construction de \mathbb{Q} apparaît là aussi comme un cas particulier d'une théorie plus générale des corps de fractions d'un anneau d'intégrité.

Cette vision générale d'un corps de fractions a pour intérêt notamment de mettre en évidence que si l'on prend comme anneau d'intégrité l'ensemble des décimaux \mathbb{D} , puisque \mathbb{D} est inclus dans \mathbb{Q} et \mathbb{Q} est un corps minimal, **le corps des fractions de \mathbb{D} est \mathbb{Q}** .

Cette notion de corps des fractions d'un anneau d'intégrité, utilisé dans le savoir savant, généralise et unifie la notion de fraction. Elle ne restreint pas son utilisation comme simple représentant d'un rationnel comme va le faire la transposition didactique au niveau du collège. Au contraire, elle nous permet de parler de fraction de deux décimaux d'après la remarque précédente. Elle nous autorise ainsi à user de l'expression "fraction de deux rationnels" puisque le corps des fractions de \mathbb{Q} est lui aussi \mathbb{Q} .

Le jeu entre les termes de fraction, quotient et rationnel est d'ailleurs tout à fait intéressant. Le nombre rationnel, couplé pendant très longtemps au terme d'irrationnel, était défini relativement empiriquement par la notion de raison. Par contre les fractions restaient, comme nous avons pu le voir dans le chapitre précédent, très liées au fractionnement de l'unité. La construction des rationnels comme classe de quotients traduisait bien le fait que l'on cherchait à construire un ensemble par extension de l'ensemble des entiers pour que la division soit toujours possible. Le terme de fraction permettait de distinguer le représentant de la classe nommée rationnel. La généralisation au corps des quotients d'un anneau d'intégrité et la non-nécessité de distinguer à un certain niveau, classe et représentant a donc permis de réinjecter la notion de fraction à la place du terme de quotient.

3.2. Les grandes lignes du nouveau traité

3.2.1. L'élargissement de la notion de traité

Nous avons défini un traité comme une institution didactique de formation à l'enseignement. Jusqu'à présent, il s'est agi d'un ouvrage écrit par un membre de la sphère savante ou proche de celle-ci. Nous pouvions ainsi repérer que certains auteurs de manuels que nous avons appelés scribes s'assujétissaient à ces traités.

Nous élargissons à présent le traité à un ensemble de documents relatifs à certains objets de savoir, textes théoriques destinés aux enseignants pour leur formation personnelle, réflexions théoriques sur l'enseignement de ces objets de savoir avec les élèves d'un niveau déterminé.

3.2.2. Un "premier" ensemble de documents : l'introduction des réels en 1970

Après l'effondrement du traité précédent, comme nous l'avons rappelé dans le paragraphe 22, allait se poser le problème du remplacement de ce dernier. Nous allons assister à la production d'un ensemble de documents convergents aboutissant à la rédaction des programmes de 1970, accompagnés de commentaires très détaillés, ainsi que d'un certain nombre de documents produits par la noosphère de l'époque qui peuvent être considérés comme des éléments constitutifs de ce nouveau traité.

Les programmes de 1970, exhaussant en quelque sorte les souhaits qu'exprimait Lebesgue dans le traité "la mesure des grandeurs", visent à réaliser une approche des réels par l'intermédiaire des développements illimités, les fractions étant complètement marginalisées.

Les décimaux font partie des systèmes de nombres dont se préoccupent les programmes en signalant deux attitudes possibles : soit rappeler des propriétés des nombres décimaux, donc en les considérant comme un préconstruit, soit présenter une véritable construction des décimaux. Le procédé de construction proposé consiste à s'appuyer sur le fait que les décimaux peuvent avoir plusieurs écritures possibles en utilisant les puissances de 10. En appelant P l'ensemble des puissances de 10, on considère dans l'ensemble $Z \times P$, la relation d'équivalence (qui n'est donnée qu'à partir d'exemples dans le texte), que V. Gauthron définit de la façon suivante¹⁶, les couples (a, p) de $Z \times P$ étant notés $a.10^p$
 $a.10^p R b.10^q \Leftrightarrow (p \geq q \text{ et } b = a.10^{p-q}) \text{ ou } (q \geq p \text{ et } a = b.10^{q-p})$.

Par passage au quotient cet ensemble est muni d'une addition qui en fait un groupe commutatif, d'une multiplication, d'un ordre qui prolongent ceux de Z.

Le même auteur propose d'ailleurs un autre moyen de définir D^{17} en cherchant à construire l'anneau le plus "simple" possible contenant Z et dans lequel 10 soit inversible. Elle considère cette fois la relation d'équivalence définie sur $Z \times S$ (avec $S = \{10^n, n \in \mathbb{N}\}$, telle que $(a, 10^p) R (b, 10^q) \Leftrightarrow a.10^q = b.10^p$).

On peut donc remarquer un gros travail de la noosphère pour donner des constructions des décimaux, mais qui cette fois sont utilisés **dans une perspective d'approche des réels**. En effet, ce sont surtout les paragraphes consacrés aux encadrements de décimaux dans D, à l'approche d'un inverse d'un décimal d à 10^p près (c'est à dire la recherche d'un nombre décimal $X = x.10^p$ (x entier positif) tel que $0 \leq d.x.10^p \leq 1 \leq d.(x+1).10^p$) et l'approche d'une racine carrée d'un décimal strictement

16. Proposée par V. Gauthron, 1971, Nombres décimaux, *bulletin de l'APMEP* n° 279, p. 264.

17. Article déjà cité pp. 274-278.

positif (c'est à dire la recherche d'un entier naturel y tel que $(y.10^p)^2 \leq d \leq [(y+1).10^p]^2$), qui font l'objet de développements détaillés.

Un numéro¹⁸ du bulletin de l'APMEP, centré sur le problème de l'enseignement des réels en quatrième fournit un ensemble d'articles, les uns destinés aux élèves, les autres destinés aux professeurs chargés d'enseigner ces contenus : nous faisons l'hypothèse que ce numéro et les commentaires du programme peuvent être considérés comme éléments importants d'un nouveau traité pour l'enseignement des systèmes de nombres au collège.

On y trouve en effet des propositions d'activités pour la classe de quatrième essentiellement. Des méthodes de construction des réels qui peuvent être "enseignées en classe de quatrième", sont proposées par exemple par C. Morin¹⁹, construction similaire à celle de Lebesgue. (Précisons que cet article est cependant rédigé pour les professeurs et destiné à leur suggérer un plan d'étude pour les élèves).

Mais figurent aussi dans le bulletin des articles²⁰ de plus haut niveau destinés aux professeurs dans le cadre de leur formation permanente. On y trouve notamment la construction des réels à l'aide des suites de Cauchy.

Dans ce traité, il est à remarquer que l'on évite soigneusement de parler de rationnels (seul le mot de fraction est présent dans les programmes de 1970), suivant en cela la position affichée par Lebesgue. Ils sont envisagés comme un cas particulier de quotients de réels. Ainsi une circulaire²¹ publiée deux années plus tard et destinée à faire une mise au point à propos de l'application des programmes de 1970 précise :

«Il figure en troisième une introduction du corps Q des rationnels : Q doit être traité simplement ici comme un sous-corps de R et ne pas recevoir un développement autonome. Il n'y a pas lieu d'éviter le mot de fraction; si on l'introduit, il désignera **une écriture d'un quotient**²².»

Il semble donc qu'il y ait eu des réticences de la part des enseignants à abandonner tout un secteur relatif aux fractions, comme le prévoyait déjà Lebesgue en 1930, pour qu'il soit nécessaire de repréciser ce point dans une circulaire. En fait devant les difficultés de mise en place de la réforme de 1970, on va assister à l'émergence d'un traité de remplacement dont nous allons décrire les grandes lignes.

18. Bulletin n° 279, Mai-Juin 1971, APMEP.

19. Morin C., 1971, Construction de l'ensemble R des nombres réels, Bulletin cité.

20. Roumieu M., 1971, Les nombres réels dans l'enseignement du second degré, Bulletin cité.

Kittel B., 1971, Construction des réels à partir des décimaux, Bulletin cité.

21. Circulaire n° 73-087 du 19 février 1973.

22. C'est nous qui soulignons

3.2.3. Un "second" ensemble de documents

Ceux-ci vont s'appuyer sur les constructions théoriques que nous avons rappelées dans le paragraphe 3.1.

Ainsi notamment à partir de 1974, l'APMEP commençait à éditer des fascicules intitulés "Mots" et sous-titrés "Réflexions sur quelques mots-clés à l'usage des instituteurs et des professeurs". Bien que les auteurs se défendent du fait qu'il s'agisse d'un ouvrage de formation, théorique ou pédagogique, des maîtres de l'école élémentaire, nous allons montrer qu'il a joué le rôle d'un traité.

Ces fascicules contenaient plusieurs rubriques concernant notamment : Entiers et Rationnels, Nombre décimal - Nombre à virgule, Fraction, Ensemble de nombres, Division, Comparaison des ordres usuels dans le dictionnaire, dans \mathbb{N} , dans \mathbb{Q}^+ .

La rubrique Entiers et Rationnels propose une présentation de \mathbb{Z} et \mathbb{Q}^+ de manière parallèle, les auteurs précisant que :

«la colonne de gauche décrit une démarche qui est souvent utilisée dans les classes de sixième et cinquième.»

On y reconnaît la construction de l'ensemble \mathbb{Z} par passage au quotient de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par une relation d'équivalence appropriée. La colonne de droite décrit la construction de \mathbb{Q}^+ par passage au quotient de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ par une autre relation d'équivalence.

Les trois rubriques suivantes situent les nombres les uns par rapport aux autres en se basant sur les différentes écritures des nombres, un tableau récapitulatif permettant de montrer l'inclusion des différents ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{D} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} . Ces constructions vont être abondamment reprises dans les documents de recyclage en direction des maîtres de l'enseignement élémentaire, comme par exemple les chantiers mathématiques édités par la régionale de l'APMEP de Paris.

3.3. L'assujettissement du collège aux nouveaux traités

Ces documents, écrits en particulier pour les professeurs de collège, ont servi de référence pour les auteurs de manuels qui se sont assujettis successivement aux deux traités que nous avons décrits précédemment.

Tous les livres de quatrième que nous avons consultés, édités après 1970²³, suivent à la lettre la progression proposée par les commentaires des programmes officiels.

23. Liste des livres consultés:

- Monge, 1972, mathématique 4^e, Belin,
- Queysanne et Revuz, 1975, mathématique 4^e, Nathan,
- Cossart et Théron, 1972, mathématique 4^e, Bordas,
- Girard, 1975, mathématique 4^e, Hachette

Après les programmes de 1978, signalant que :

«la nouveauté réside dans l'accent qui est mis sur la notion de fraction et la possibilité qu'elle procure d'aborder, si on le désire les Rationnels avant les Réels.»

beaucoup de manuels²⁴ vont s'appuyer sur la démarche décrite dans ce que nous avons appelé le "second" traité.

Nous nous intéressons à présent aux savoirs présents à l'école élémentaire et dans les instituts de formation.

4. LA PERMANENCE DES SAVOIRS À L'ÉCOLE PRIMAIRE

4.1. La période de 1970 à 1980

Les instructions officielles de 1970 renforcent le point de vue des programmes de 1945 puisqu'elles vont les faire intervenir dans le cas des grandeurs discrètes :

«Une ville compte 10 850 habitants. Le millier étant choisi comme unité, la population s'exprime par le nombre décimal 10,850. La virgule est utilisée pour repérer le rang du groupement choisi comme unité. D'autres exemples pourront être trouvés à l'occasion d'exercices de mesure utilisant le système métrique. On remarquera qu'à tout nombre naturel exprimant une mesure, on peut associer, par un changement d'unité convenable, un nombre décimal et qu'à tout nombre décimal on peut associer, par un changement d'unité un nombre naturel (et cela de diverses façons).»

Les activités proposées font toujours intervenir des mesures qui peuvent être rattachées à des entiers. Si un nombre complexe intervient, 1 m 25 par exemple, on le traduit sous forme 125 cm. Comme l'indiquent les I.O., à l'aide d'un changement d'unité, en prenant la centaine de centimètres pour unité, on exprime la mesure par l'écriture 1,25. Tout repose donc sur des exercices de conversion. La "technique" mise en avant pour faire apparaître l'écriture décimale étant :

- le choix d'une unité de référence pour obtenir l'écriture d'un entier,

- Mauguin, 1975, mathématique 4^e, Istra.

24. Liste des livres consultés:

- Rouquairol / Dehame, 1979, mathématique 4^e, Collection Queysanne- Revuz, Nathan,

- Mongeot et alii, 1978, mathématique 4^e, Nathan, Belin,

- Gerl, Vitart, Cohen, 1979, mathématique 4^e, collection m, Hachette.

Cependant, certains auteurs, par exemple Galion, mathématique 4^e, Hatier, se démarquent de cette présentation.

- un changement d'unité pour transformer cette écriture sous forme d'une écriture à virgule.

Dans le cas précédent, la signification attachée à l'écriture 1,25 est donc 125 cm. 1,25 n'est jamais vu en tant que décimal-opérateur, il n'est jamais considéré comme opérant sur une certaine quantité, par exemple pour signifier "1,25 fois 1 mètre". Il est vu comme un décimal mesure, c'est-à-dire comme "1 mètre plus 2 dixièmes de mètre plus 5 centièmes de mètre".

En ce qui concerne les fractions, celles-ci sont présentées comme des opérateurs, (c'est à dire des fonctions définies sur \mathbb{N}). Loin de représenter "une nouvelle introduction" comme l'analyseront certaines publications²⁵, cette présentation consomme bien la rupture entre "décimal-mesure et fraction-opérateur", qui était déjà engagée explicitement depuis les programmes de 1945, comme nous l'avons déjà montré.

La fraction est toujours une notation permettant de remplacer par un seul symbole une chaîne d'opérateurs $x a$ suivi de $: b$ ou $x b$ suivi de $: a$. On insiste sur les opérateurs équivalents (sans trop s'appesantir sur les domaines de définition qui ne sont pas les mêmes si a et b ne sont pas premiers entre eux), auxquels on associe des fractions égales. La composition (appelée chaîne d'opérateurs) permet d'introduire la multiplication des fractions et les fractions inverses.

4.2. Les savoirs à l'école primaire depuis 1980

4.2.1. Analyse des programmes 1980

Les nouveaux programmes pour l'école primaire paraissent en Juillet 1980. Ils sont rédigés par cycle sous forme d'objectifs et sont accompagnés d'instructions conséquentes qui éclairent ces derniers. On peut dégager des idées-forces qui sous-tendent ces programmes :

* les entiers sont le centre d'intérêt de l'enseignement du primaire. Ainsi dans la présentation générale des objectifs du cycle moyen, on peut lire qu'il s'agit :

«de réorganiser, d'enrichir et d'approfondir des connaissances antérieures (dans le domaine des nombres naturels par exemple).»

25. Par exemple, APMEP, 1986, Aides pédagogiques pour le cycle moyen, 2, nombres décimaux, p.23, publication n° 61 de l'APMEP. Par contre A. Mercier, dans son mémoire de DEA (1978, p. 59) avait déjà bien montré que le "schéma de "l'opérateur-machine" a été d'abord introduit par des "innovateurs" parce qu'il correspondait à une présentation qui était précédemment utilisée et qu'il faisait -même implicitement- référence à un statut mathématique des situations qu'il décrivait". En fait nous montrons que la référence était explicite chez certains auteurs bien avant 1970.

Un paragraphe entier des objectifs du CM est consacré aux nombres naturels, intitulé "Écrire, nommer et comparer les nombres naturels", faisant suite aux objectifs du cycle élémentaire intitulé de la même manière. Il y est question "de maîtriser l'usage et le fonctionnement des règles de la numération écrite et celles de la numération orale", de "comparer les nombres naturels désignés sous différentes formes" et de "situer les uns par rapport aux autres"

* l'apprentissage des décimaux est affirmé au cycle moyen : les décimaux sont évoqués par deux fois dans les objectifs généraux :

«(...) les activités mathématiques doivent permettre aux enfants (...) d'acquérir de nouvelles connaissances (dans le domaine des nombres décimaux, de la division, par exemple), d'accumuler des expériences qui serviront de support à des formalisations ultérieures (dans le domaine de la géométrie, des nombres décimaux par exemple).»

Mais en même temps, dans l'esprit des rédacteurs de ces objectifs, l'étude des décimaux n'est qu'amorcée au cycle moyen, puisqu'il est précisé en gras au terme du paragraphe "Écrire, nommer et comparer les nombres décimaux" que :

«L'étude des nombre décimaux et de leur structure n'est pas achevée à la fin du cycle moyen. Elle devra se prolonger tout au long de la scolarité au collège.»

Les rédacteurs éprouvent d'ailleurs le besoin de borner les objectifs fixés au cycle moyen puisqu'ils indiquent dans un nouvelle note écrite en gras que :

«Les techniques de calcul des quotients de nombres décimaux ne constituent pas un objectif du cycle moyen.»

A ce souci d'envisager la construction des nombres décimaux sur l'ensemble de la scolarité obligatoire (école primaire et collège) s'ajoutent des indications tout à fait significatives :

* les décimaux doivent apparaître comme de nouveaux nombres, différents des nombres entiers.

Ceci est particulièrement affirmé dans les instructions qui accompagnent les objectifs. Les auteurs insistent de manière répétitive sur le fait que suivant les situations, on est "amené à introduire de nouveaux nombres", que "l'ensemble des nombres naturels est peu satisfaisant", que l'on est amené à prendre conscience "de l'insuffisance des nombres naturels". L'accent est mis sur les propriétés qui distinguent les décimaux des entiers :

«Certes l'ensemble des décimaux ne permet pas de décrire ou traduire toutes les situations auxquelles les enfants sont susceptibles d'être confrontés. Il permet cependant d'approcher d'aussi près qu'on le veut les nombres (non décimaux) qui interviennent alors.»

Les auteurs insistent particulièrement sur l'ordre des décimaux qui diffère de celui des entiers et sur "le fait qu'entre deux décimaux, il y en a toujours une infinité d'autres", "les réflexes acquis à propos des naturels" ne convenant plus.

* le terme de fraction n'apparaît dans les objectifs que de manière atténuée sous la forme de "fractions simples". Cette expression "fractions simples" rejette évidemment celles-ci au rang des accessoires, même si dans les instructions, on évoque une situation possible faisant appel aux fractions.

4.2.2. Les programmes des premières années du collège

Au moment de la parution des objectifs et instructions pour le cycle moyen, les programmes de sixième et cinquième sont déjà parus en 1978 et 1979. L'essentiel demandé aux enseignants est de contrôler les acquisitions concernant les nombres décimaux, acquisitions que l'on suppose avoir été faites antérieurement de manière relativement complète :

«Contrôle de l'acquisition du sens des opérations sur les nombres décimaux, addition, soustraction, multiplication, division (exacte ou approchée) : technique d'exécution de ces opérations, vérification.

Pratique des symboles $<$, \leq , $>$, \geq »

Les décimaux sont donc considérés comme une affaire entendue qui ne nécessite pas un gros travail de reprise, l'essentiel portant sur les algorithmes. Les décimaux relatifs vont être l'occasion de reprendre les règles de calcul introduites à propos des entiers relatifs. Ceci est bien confirmé par le programme de cinquième dont le titre du paragraphe III s'appelle "nombres relatifs", constitué de deux sous-paragraphe dont le premier "Ensemble Z des entiers relatifs, définition, addition, ordre, valeur absolue" est repris dans le même ordre : "nombres décimaux relatifs, pratique opératoire, somme différence, ordre et valeur absolue".

Dès lors, la visée énoncée par les rédacteurs des programmes de l'école primaire ne peut se réaliser. L'apprentissage des décimaux ne se continuant pas au collège, le sort des intentions affichées au primaire se trouve scellé. L'examen du manuel "math et calcul"²⁶, véritable best-seller des années 1980 - 1990, va nous donner la confirmation du rabatement des décimaux sur les entiers.

26. Eiller R., Ravenel S., Ravenel R., (1982), Math et calcul, CM1, CM2, livres du maître et livre de l'élève, 4 volumes, Hachette.

4.2.3. Examen du manuel "math et calcul"

Après avoir rappelé que l'étude des fractions ne figure pas explicitement au programme de 1981, ce que nous avons effectivement vu auparavant, les auteurs précisent qu'ils ont cependant choisi d'introduire les décimaux à partir des fractions. Pour cela, il leur a semblé "indispensable de consacrer **une séance**²⁷ à celles-ci". Le choix de ne consacrer qu'une séance aux fractions est en soi révélateur du compromis que vont réaliser les auteurs des manuels entre les intentions affichées par les programmes et la pression institutionnelle provenant à la fois des pratiques antérieures et celles provenant des programmes des classes du collège en vigueur à ce moment-là.

Quelques pages plus loin²⁸, ils reviennent sur les raisons de leur choix :

«(...) parce qu'elle (l'introduction) est la plus correcte sur le plan mathématique et parce qu'elle permet de familiariser les élèves assez tôt avec les fractions simples et les fractions décimales.»

L'expression, "la plus correcte sur le plan mathématique" est intéressante, car elle renvoie aux éléments théoriques exposés dans la partie "fraction", où Q est construit comme ensemble quotient de $N \times N^*$ par une relation d'équivalence appropriée. Il y a évidemment d'autres constructions tout aussi correctes sur le plan mathématique. En fait, cette construction apparaît comme un coup de révérence au savoir savant, et doit surtout s'analyser par rapport aux pratiques alors en vigueur en quatrième dans les différents livres, qui consistaient à introduire les fractions de cette manière.

Les auteurs reprennent formellement les critiques des programmes antérieurs, en signalant que l'ensemble des décimaux a été plus ou moins consciemment assimilé comme "un greffon" sur l'ensemble des entiers, et que :

«l'amalgame entre D et N s'effectue d'autant plus "naturellement" que les techniques opératoires sur les nombres décimaux sont considérées, moyennant quelques règles à respecter sur la place de la virgule, comme analogues à celles étudiées dans N .»

Étudions comment se fait cependant le traitement des fractions et des décimaux.

La séance consacrée aux fractions consiste à faire plier une bande en deux, trois ou quatre parties, retrouvant la présentation des fractions par fractionnement de l'unité. Après cette première partie, on passe à un codage de points sur papier millimétré, où le point codé 1 correspond à 10 cm et par conséquent le point codé $\frac{1}{10}$ se trouvera à 1 cm. La partie suivante est consacrée aux fractions décimales : elle prend appui essentiellement sur le

27. Idem p 39., c'est nous qui soulignons.

28. Idem p. 43.

codage de points de la droite numérique et c'est donc la fraction décimale-mesure qui arrive sur le devant de la scène.

Un jeu d'écritures avec l'utilisation du tableau de conversions, déjà utilisé pour les entiers, permet de passer aux écritures à virgule, en prenant pour unité de référence le millième. On voit donc nettement que l'on se ramène ainsi à des entiers.

La comparaison de décimaux va nous le confirmer : en effet celle-ci est abordée en considérant successivement les décimaux de l'ensemble D_1 ²⁹, puis D_2 , puis D_3 , c'est-à-dire en prenant bien soin de ne considérer que les ensembles ayant le même nombre de chiffres après la virgule.

Même dans des exercices d'intercalation, qui pourraient paraître à première vue comme un "emblème" spécifique des décimaux, c'est la référence aux entiers qui est utilisée.

Ainsi dans le livre de la collection que nous étudions (édition 1987), qui reprend de manière quasi identique la présentation de l'édition précédente, dans le chapitre concernant la comparaison des nombres décimaux³⁰, on voit proposer des exercices du type suivant :

✎ Écris tous les nombres décimaux ayant trois chiffres après la virgule et qui sont compris :

- entre 7,56 et 7,57
- entre 20,12 et 20,13

Ainsi, dans cet exercice, les élèves sont amenés à chercher un entier entre 7560 et 7570 ou encore entre 20120 et 20130. En effet, une technique consistant à dire qu'il suffit de **rajouter un chiffre après le dernier chiffre** du premier nombre peut ainsi se mettre en place rapidement et permet de répondre à l'ensemble des exercices du type proposé. Cela revient ainsi, à chaque étape, à intercaler un entier entre deux entiers multiples de 10 qui se suivent.

Si on examine les résultats aux enquêtes dont nous disposons³¹, nous nous apercevons que les élèves ont, dès la fin du CM2, un taux de réussite relativement élevé aux questions qui sont du type des exercices rappelés précédemment, par exemple écrire un nombre entre 82,5 et 82,6³². Par contre le questionnaire que nous examinerons dans le chapitre B4 montre que les élèves de seconde ont encore beaucoup de difficultés dans les problèmes d'intercalation quand il s'agit de passer d'un D_i à un D_j où i et j diffèrent de

29. On appelle D_i , l'ensemble des décimaux qui s'écrivent avec i chiffres après la virgule.

30. Exercices et problèmes d'application, pp. 108-113.

31. Evaluations nationales CE2 - 6ème organisées depuis 1989 par le Ministère de l'Éducation Nationale.

32. Exercice proposé dans l'évaluation CE2-6ème 1990 : les résultats ont été les suivants:

64,8% donnent un nombre correct

9,3% proposent un des nombres de l'exercice

25,9 % ne donnent pas de réponse ou une réponse non correcte.

plus de 1, par exemple lorsqu'il s'agit de trouver deux nombres décimaux avec trois chiffres après la virgule qui encadrent le nombre décimal 4,1³³.

Nous venons de voir la grande stabilité du fonctionnement concernant les savoirs à l'école élémentaire. Malgré les velléités des rédacteurs des programmes de 1980, ce sont les systèmes de nombres concernant les décimaux qui restent le centre d'intérêt du primaire, systèmes de nombres dont le fonctionnement est toujours celui des entiers. Nous examinons à présent quel est le fonctionnement de ces savoirs dans les écoles normales et comment il se différencie de celui de l'école primaire.

5. L'ÉVOLUTION PARALLÈLE DU FONCTIONNEMENT DES SAVOIRS AU COLLÈGE ET DANS LES ÉCOLES NORMALES

5.1. La nécessité de travailler les savoirs mathématiques dans les écoles normales.

Le niveau de recrutement devenant en 1945 le baccalauréat, les écoles normales prennent naturellement comme référence en ce qui concerne les systèmes de nombres, les savoirs du collège, puisque c'est à ce niveau qu'y sont enseignées ces notions de base. La formation professionnelle, d'une durée d'une année, issue des formations professionnelles antérieures, ne comporte pas de spécification précise de contenus : il s'agit essentiellement de stages dans les écoles annexes ou les écoles d'application entrecoupés de cours sur les pratiques pédagogiques. En particulier les leçons modèles sont les moments forts de cette formation.

A partir de 1969, avec la formation en deux ans, apparaît la nécessité de travailler sur les contenus mathématiques. Un projet de programme³⁴ ambitieux est alors établi par la commission ministérielle sur l'enseignement des mathématiques. La nécessité d'une solide formation mathématique au niveau de l'université est affirmée pour "disposer pour lui-même [l'élève-maître] de ce bagage minimum sans lequel il serait un sous-développé intellectuel dans le monde de demain" (p. 27). Une réflexion sur la mathématique elle-même est pour la première fois exprimée, qui doit permettre au maître d' "avoir pleinement conscience de la place du jalon qu'il est en train de poser ", qui "pourra

33. Margolinas, 1985, *Un bilan des connaissances sur les nombres après la classe de 4^e*, Université de Bordeaux. Il s'agit de la question 3 du questionnaire, p. 54: seulement 27,2% des élèves parviennent à donner l'encadrement optimum.

34. On trouve notamment ce projet de programme dans le document édité en 1969 par l'APMEP, pp. 29-30 et intitulé "première étape ... vers une réforme de l'enseignement mathématique dans l'enseignement élémentaire" contenant le rapport de la commission ministérielle, rapport ayant proposé les nouveaux programmes du primaire promulgués en 1970.

s'appliquer aux propriétés des structures construites sur N, Z, Q , bien que celles-ci ne figurent pas au programme". Ainsi dans le programme de mathématique pour la formation des maîtres, trouve-t-on :

- dans la partie Algèbre
Analyse des structures de N, Z, Q .
Systèmes de numération, anneau ordonné des nombres à virgule.
- dans la partie Fonctions numériques
Réflexion sur les propriétés fondamentales de R (la construction de R ne sera pas traitée).

De la même façon, la fiche décrivant les unités de formation de base en mathématiques³⁵ pour la nouvelle formation en trois ans, définit à partir de 1979 deux séries d'objectifs : des objectifs de formation mathématique et des objectifs de formation pédagogique. Parmi les objectifs d'ordre mathématique, il est précisé que la formation mathématique doit rendre l'étudiant capable :

- «d'améliorer sa connaissance des mathématiques qui sont objet d'enseignement;
- à partir d'une réflexion sur les contenus et les modes d'acquisition des notions antérieurement rencontrées;
- à l'aide **d'un enrichissement et d'un approfondissement des connaissances mathématiques**³⁶.»

Nous nous proposons de montrer, en nous appuyant sur l'étude des contenus abordés dans les écoles normales à cette période, que les savoirs de référence pour l'ensemble des étudiants³⁷ vont toujours rester ceux du collège. L'institution de formation va être assujettie aux mêmes traités que ceux que nous avons pu identifier précédemment pour le collège.

5.2. Les savoirs de référence après 1970 : analyse de documents destinés à la formation des maîtres

A cette époque, peu de livres sont destinés à la formation initiale des instituteurs en mathématiques, de même que peu d'articles³⁸ décrivant des activités sont écrits en direction de ce public. Cela signifie sans doute que l'on ne considère pas qu'il y a une

35. Fiche du 12 / 10 / 79 en complément de la circulaire du 26/06/79 et de l'arrêté du 13 / 07 / 79 définissant les modalités de la nouvelle formation.

36. C'est nous qui soulignons.

37. Dans cette formation, dans le cadre de la préparation du DEUG instituteur, un système de dominante permettait à une partie des étudiants de recevoir un enseignement universitaire: nous ne nous préoccupons pas de cet enseignement particulier ici.

38. Les actes des colloques des professeurs d'école normale, dont le premier d'envergure réellement nationale s'est réuni à l'Alpe d'Huez en 1975, publient des activités en direction des futurs instituteurs. De même la revue "Grand N", publie quelques activités qui peuvent être considérées comme destinées à la formation initiale et continue des maîtres.

spécificité des contenus abordés dans les écoles normales, en particulier pour les systèmes de nombres. Par exemple le colloque des professeurs d'école normale de Bombannes³⁹, qui se proposait de jeter les bases d'une formation des instituteurs en prenant en compte les avancées des recherches en didactique des mathématiques, ne comporte pas de rubrique ni sur les décimaux, ni sur les fractions. Seuls les entiers sont présents dans deux rubriques, l'une portant sur l'approche du nombre, l'autre sur la numération.

Nous examinons tout d'abord deux livres⁴⁰ destinés aux enseignants et aux futurs maîtres de l'école élémentaire, tous deux écrits par des professeurs d'école normale et représentatifs des enseignements que l'on souhaitait donner à cette époque. D'autre part, un bon indicateur des savoirs de référence pour la formation initiale et continue est représenté par les contenus abordés par les livres du maître accompagnant les manuels puisque nous les avons considérés comme institutions de formation. Pour cela, nous étudions ensuite le livre du maître de la collection "math et calcul"⁴¹, dont nous avons fait une courte analyse plus haut en ce qui concerne le livre de l'élève, en montrant la permanence des savoirs spécifiques à l'école primaire à l'intérieur de celui-ci. Les trois auteurs, de par leur fonction, l'un étant directeur d'école normale, un autre directeur d'école annexe et la dernière conseillère pédagogique, traduisent dans les parties du livre du maître dites théoriques, les savoirs présents à l'école normale. Il est en effet significatif, que depuis 1970, les collections les plus utilisées soient rédigées conjointement par des professeurs d'école normale et des conseillers pédagogiques. Ces nouveaux scribes sont assujettis aux traités que nous avons mis en évidence plus haut et vont avoir un rapport personnel au savoir conforme à celui de l'institution de formation "traité". Leurs rapports institutionnels dans les deux institutions école normale et "manuel" ne pourront donc pas être trop éloignés.

5.2.1. Les livres destinés à la formation

Les deux livres ne font que peu référence aux nombres réels, qui sont considérés comme hors du champ de préoccupation des enseignants du primaire. Nous étudions quels sont les savoirs de référence en ce qui concerne les systèmes de nombres décimaux et rationnels.

39. 6^{ème} Colloque des Professeurs d'Ecole Normale, Bombannes, les 4,5,6 Mai 1979, Irem de Bordeaux
40. Cranney Ch. et Perrot G. (1976), *mathématiques et apprentissage du calcul, tome 2*, collection Pédagogie de l'école élémentaire, Delagrave.

Thirioux A., Sanchez L., Chapeau A. (1977), *formation initiale et continue pour les enseignants des écoles maternelles et élémentaires*, Collection mathématique contemporaine, Magnard.

41. Collection déjà citée.

Le premier livre, "Mathématiques et Apprentissage du calcul", consacre un chapitre à la construction des décimaux, ainsi que de longs développements sur les fractions comme opérateurs.

En ce qui concerne les décimaux, la construction adoptée va être celle qui est préconisée dans les instructions officielles de la classe de quatrième. On peut reconnaître le souci de décrire le fil conducteur de cette construction dans les précautions prises pour justifier les étapes et leur signification.

Après avoir montré que l'ensemble P des puissances de 10 est un groupe multiplicatif, les auteurs s'intéressent à l'étude de la multiplication dans $P \cup N$ en cherchant d'abord les éléments x et y tels que $x \times y$ ait une signification, puis en essayant de donner un sens aux écritures telles que 900×10^{-1} , $10^{-2} \times 240000$, etc... et enfin en introduisant de nouveaux nombres à partir de leurs écritures.

Ce qui amène les auteurs à conclure :

«Nous venons de voir comment obtenir l'ensemble des nombres décimaux positifs ou nuls. Pour rédiger l'exposé mathématique de cette construction, il aurait fallu considérer tous les couples formés d'un nombre naturel et d'une puissance de dix, définir dans l'ensemble de ces couples $N \times P$, une relation d'équivalence. (...)

Cette construction peut être étudiée dans différents ouvrages et en particulier **dans les fiches destinées aux élèves de quatrième**⁴². »

Nous voyons bien là que le système de référence des auteurs est le système des savoirs du collège, notamment ce que nous avons appelé le "premier" traité du collège, où une construction des décimaux était proposée dans la perspective de l'approche des développements illimités des réels.

Ceci nous est confirmé dans une autre partie du livre consacré aux fractions. Les mêmes auteurs déclarent⁴³ à propos de la question: "Qu'est-ce qu'une fraction?", faisant référence cette fois au "deuxième" traité⁴⁴ :

«Il ne s'agit pas d'apporter une réponse de mathématicien. Tout bachelier est censé connaître les propriétés du corps Q des nombres rationnels et le lecteur intéressé **peut se référer aux manuels du secondaire, en particulier des classes de 4^e - 3^e** ⁴⁵. »

Toutes les considérations qui suivent sur les "opérateurs fractionnaires", objets spécifiques introduits à l'école primaire, visent à montrer que ceux-ci se rattachent à la notion de fonction, avec tous les problèmes que cela pose quand on ne dispose pas justement de la notion de fraction en tant que nombre.

42. C'est nous qui soulignons.

43. Ibid, p. 104

44. Notons en effet que le livre est écrit en 1976, au moment où se forme justement ce deuxième traité.

45. C'est nous qui soulignons à nouveau.

Le deuxième livre "Formation initiale et continue ...", qui, lui, paraît un an plus tard, au moment de la gestation des nouveaux programmes de 1978 du collège, précise (p. 200) :

«Il nous a paru intéressant pour les maîtres, d'exposer dans la partie "théorie", la méthode utilisée par les mathématiciens de 1976, pour construire cet ensemble [les rationnels], connaissant N .»

Suit donc la construction que nous avons déjà rencontrée à l'aide des classes d'équivalence de $N \times N^*$.

Les auteurs envisagent deux constructions des décimaux :

- l'une à partir de l'ensemble des nombres rationnels positifs (c'est à dire l'ensemble des rationnels qui contient un couple (a, b) où b est une puissance de 10,
- l'autre à partir de l'ensemble des nombres naturels puisque nous disent les auteurs de manière très rapide (p 218) :

«La construction est la même que celle des nombres rationnels avec la seule différence que, au lieu de classer les couples de $N \times N^*$, on classe les couples (a, b) tels que $a \in N$ et b est une puissance de 10.»

Nous pouvons constater l'assujettissement de ce livre au deuxième traité. La deuxième construction des décimaux, par son analogie avec la construction des rationnels positifs, permet de faire habilement la transition de l'un à l'autre.

5.2.2. Le livre du maître de la collection : "math et calcul"

Nous nous intéressons à l'édition 1982 de ce livre correspondant au livre de l'élève que nous avons étudié. Une partie théorique importante est consacrée aux décimaux et au fractions. Un paragraphe intitulé "Qu'appelle-t-on nombre décimal ?" est subdivisé en deux sous-paragraphe :

1 Qu'appelle-t-on nombre décimal ? Il est proposé une construction de Q similaire à celle que nous venons de décrire;

2 Les nombres rationnels décimaux. Les décimaux apparaissent bien comme rationnels particuliers. Suit comme dans le livre précédent un exposé sur les différentes écritures d'un décimal sous forme de fraction, de fraction décimale, de nombres à virgule.

De manière très claire, l'assujettissement évoqué est ici patent : les auteurs, dans une note de bas de page signalent :

«Nous conseillons aux maîtres de consulter la brochure *Mots 1974*⁴⁶ publiée par l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public. Celle-ci contient des articles particulièrement intéressants sur les notions de nombre naturel, nombre entier et rationnel, nombre décimal et fraction.»

46. C'est nous qui soulignons.

6. CONCLUSION

Après 1945, les savoirs au collège subissent deux modifications importantes, qui vont contribuer à l'effondrement de l'organisation de l'exposé classique :

- d'une part l'évacuation de la notion de rapport qui avait servi d'élément unificateur pour les systèmes de nombres liant notamment fraction, division, fractions de fraction, fraction de décimaux et fonctionnant comme un véritable substitut à la notion de réel,
- d'autre part, la disparition de l'extraction de la racine carrée, cinquième opération fournissant les décimales une à une et permettant d'avoir une valeur approchée par défaut à 10^{-n} près.

À partir de cette période, ce qui joue le rôle de traité est un ensemble de documents écrits par des personnes proches de l'institution de production du savoir, des livres mais aussi certaines publications dans différentes revues de l'APMEP, des IREM, voire les commentaires des programmes. Ceci nous a amené à élargir la notion de traité.

À la fin des années 1960 apparaît alors un nouveau traité: celui des "Mathématiques modernes". Les écrits de ce traité font notamment des propositions pour l'enseignement des nombres dans le secondaire, conformes au point de vue de Lebesgue d'approcher les réels par des développements décimaux illimités, étendant la notion de fraction à la construction du corps des fractions d'un anneau intègre, et vont servir de référence pour les auteurs de manuels de collège.

Les auteurs de manuels du collège, les auteurs de documents de formation pour les écoles normales, les auteurs des livres du maître pour l'école primaire s'assujettissent au même moment à ce même traité de référence comme le montre la grande similitude, dans la période considérée, entre les savoirs abordés dans les institutions de formation et ceux du collège.

Une rupture se crée pour ces trois types de documents avec les manuels antérieurs, notamment au niveau du collège et des institutions de formation.

Le fonctionnement des systèmes de nombres se différencie alors nettement dans l'institution collège (et l'institution de formation) et dans l'institution école primaire. Les décimaux, qui sont un élément central de l'enseignement au cours moyen sont alors enseignés avec la volonté affichée d'introduire de nouveaux nombres. Cependant la classe de problèmes que doivent résoudre les élèves ne crée pas de rupture avec les connaissances qu'ils possèdent sur les entiers. Les décimaux continuent à être manipulés comme des entiers à l'école primaire en restant très liés aux système de mesure et en particulier au système métrique. L'importance des décimaux continue de se renforcer, les fractions intervenant simplement comme notation pour une chaîne de deux "opérateurs"

ou souvent comme alibi rapide pour introduire les décimaux. Par contre l'irruption des réels et des rationnels modifie profondément les objets de savoir enseignés au collège.

Nous complétons le schéma traduisant la modélisation que nous avons commencé à élaborer dans le chapitre précédent de la manière indiquée sur la page suivante.

Nous trouvons :

- la strate des traités, produits des institutions transpositives que sont les mathématiciens de la sphère productrice du savoir Ip ou proches de celle-ci.

- une strate de plusieurs éléments, produits des institutions transpositives que sont les scribes assujettis au traité, au niveau des deux institutions que nous appelons Ic (collège) et If (institut de formation) :

* les manuels du collège⁴⁷,

* les documents de formation⁴⁸,

* les livres du maître correspondant aux livres de l'élève pour le primaire.

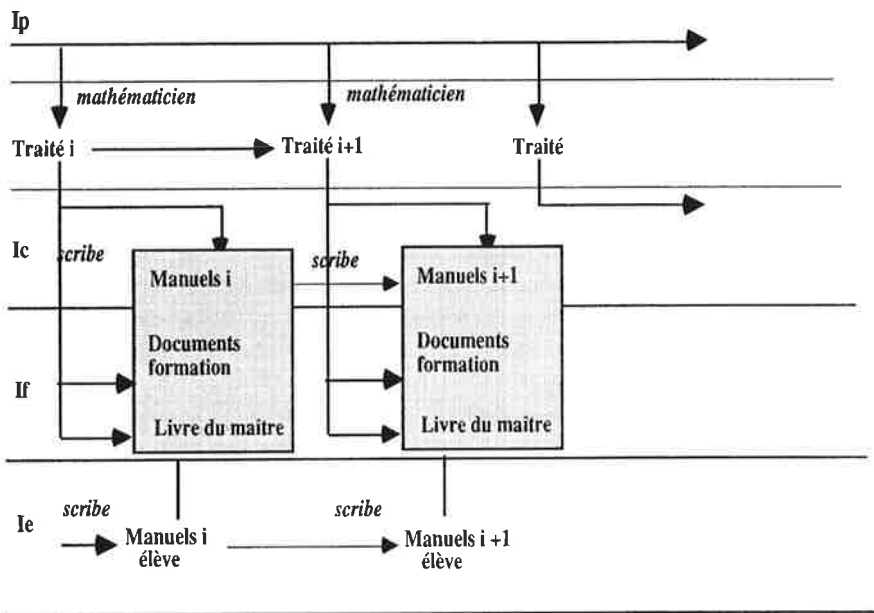
Nous plaçons les livres du maître à ce niveau parce que nous les considérons à la fois comme des produits réalisés par les scribes, mais aussi comme des institutions de formation.

- la strate des manuels de l'école élémentaire, dont la partie la plus importante est écrite par les praticiens des équipes de rédaction. Ceux-ci sont assujettis à la fois aux livres présents dans les institutions de formation mais aussi aux manuels antérieurs.

Les savoirs en jeu à un niveau servent de savoirs justificatifs pour un niveau inférieur. Ainsi les savoirs en jeu dans les manuels du collège, ou dans les documents de formation, ou encore dans les livres du Maître servent de justification pour les savoirs en jeu dans les Manuels de l'École primaire.

47. Les scribes qui les écrivent sont en général des professeurs de lycée ou de collège.

48. Dans cette période, les scribes sont de plus en plus des professeurs d'école normale, remplaçant les inspecteurs qui assuraient ce rôle dans la période précédente.



Actuellement, le traité appelé "Mathématiques modernes" ne sert plus de référence ni pour les auteurs de manuels du Collège, ni pour les formateurs dans les IUFM. Le texte du savoir que l'examen de la couche intermédiaire permet de dégager, apparaît comme un texte incertain, où figurent des fragments des grands traités (ceux de Bezout, de Drach, de Lebesgue par exemple), où la logique qui régit leur organisation n'est pas lisible directement.

Comment se répercute l'état de la transposition didactique des systèmes de nombres? Comment différents fragments de textes du savoir vont être présents dans les institutions de formation ? Comment y vivent-ils?

Pour répondre à ces questions, nous entreprenons

- d'analyser dans le chapitre suivant de plus près quels sont les rapports aux systèmes de nombres dans l'institution collège à l'heure actuelle et à l'entrée à l'IUFM.
- de pénétrer au cœur même du système didactique. C'est l'objet de l'étude développée dans la partie C.

CHAPITRE B4

RAPPORTS AUX SYSTÈMES DE NOMBRES À LA FIN DU COLLÈGE ET À L'ENTRÉE À L'IUFM

Dans ce chapitre nous allons caractériser de manière plus précise quels sont les rapports qui se nouent au collège en ce qui concerne les systèmes de nombres. Pour cela nous examinons un certain nombre de questionnaires s'adressant à des élèves de collège, en particulier des élèves de troisième et de seconde. Cette étude nous permet d'établir un questionnaire que nous faisons passer à la fois à des élèves de fin de collège et à des étudiants entrant en première année de formation dans un IUFM. Nous examinons les liens qui peuvent exister entre les types de réponses pour ces deux populations.

1. LES RAPPORTS AUX SYSTÈMES DE NOMBRES AU COLLÈGE

L'étude réalisée dans les chapitres précédents nous a montré la différenciation qui s'était opérée à propos des systèmes de nombres entre les savoirs présents à l'école primaire et ceux du collège. Nous avons mis en évidence la similitude des contenus abordés au collège et dans les écoles normales, lieux institutionnels de la formation initiale des instituteurs. Cela nous invite à regarder de près l'état des connaissances des étudiants à l'entrée de l'IUFM et à chercher à le mettre en rapport avec l'état des connaissances des élèves à la fin du collège.

Pour cela nous établissons un questionnaire que nous ferons passer à la fois à des élèves de fin de scolarité de collège ainsi qu'à des étudiants entrant à l'IUFM.

Pour le choix des items qui le composent, nous commençons par examiner les résultats provenant de divers questionnaires proposés en direction d'élèves de collège. Ceux qui sont posés en fin de troisième ou au cours de la classe de seconde nous intéressent particulièrement : ils nous apportent des renseignements sur le rapport institutionnel aux systèmes de nombres pour les élèves de l'institution collège.

Les questionnaires examinés sont les suivants :

- un questionnaire d'évaluation¹ proposé dans l'académie de Nice à 320 élèves de sixième de Nice et d'Antibes,
- les questionnaires donnés à des élèves de quatrième en fin d'année dans 8 classes (208 élèves) par M.J. Perrin en 1985, et dont les résultats sont relatés dans sa thèse (1992),

1. Questionnaire transmis par R. Guillemand professeur à l'IUFM de Nice.

- le questionnaire figurant dans le mémoire de DEA de M.L. Izorche en 1977; il a été soumis à 126 élèves de seconde (sections AB₃, AB₂, AA),
- le questionnaire et les entretiens individuels proposés dans le cadre du mémoire de DEA de C. Margolinas en 1985. Le questionnaire s'est adressé à une population de 147 élèves de 4 classes de troisième et de 4 classes de seconde. Souvent les exercices sont "hors norme" et pointent des problèmes qui ne sont pas visibles habituellement,
- le questionnaire, base d'une étude de J.M. Digneau² sur les connaissances des élèves à l'entrée de la seconde, concernant 172 élèves de 5 classes de seconde et réalisé en début d'année scolaire,
- le questionnaire EVAPM de fin de troisième³ et de fin de seconde⁴. La sous-population utilisée peut être considérée comme assez représentative de la population totale des élèves de troisième et de seconde. Il s'agit d'une évaluation des programmes, autrement dit les items proposés sont représentatifs du rapport institutionnel pour l'élève, puisqu'ils sont censés vérifier des capacités exigibles chez les élèves en fin de collège.

Les résultats des questionnaires précédents devant nous aider à retenir quelques items pour notre propre questionnaire, nous considérons aussi un test en direction de deux promotions d'élèves-instituteurs, réalisé par M.J. Perrin dans le cadre d'un enseignement du DEUG premier degré en 84-85 (17 copies) et en 85-86 (13 copies). Ces tests ont été passés pendant ou après un enseignement sur les systèmes de nombres. Ils avaient pour objectif de voir quelles sont les difficultés qui subsistent à propos des systèmes de nombres. Des commentaires sur les résultats figurent dans la thèse (1992), mais aussi dans l'étude faite par J. Robinet (1986) à propos des réels.

De ces diverses études, nous extrayons un certain nombre de conclusions que nous avons regroupées autour de quatre grandes questions :

- le lien entre les différents ensembles de nombres et leurs écritures (§1.1.),
- les liens entre division de deux entiers, rationnels et décimaux (§1.2.),
- les liens entre rationnels, réels et décimaux par l'intermédiaire de l'approximation (§1.3.),
- les liens entre les différents D_i (§1.4.).

2. Digneau J.M. 1989, *Une étude des connaissances sur les nombres à l'entrée de la 2^e, groupe analyse 2^eme cycle*, IREM de Bordeaux.

3. APMEP, 1990, *Evaluation du programme de mathématiques, fin de troisième 1990*, publication de l'APMEP n° 80, Paris.

4. APMEP, 1991, *Evaluation du programme de mathématiques, fin de seconde 1991*, publication de l'APMEP n° 88, Paris.

1.1. Lien entre les différents ensembles de nombres et leurs écritures

Les résultats convergents de ces questionnaires montrent que le lien entre les différents ensembles de nombres n'est pas assuré. J.M. Digneau remarque que les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ posent problème. Les élèves ont des connaissances concernant les écritures des nombres. Par exemple J.M. Digneau note que les élèves reconnaissent facilement que $1,32 = \frac{132}{100}$, ce qui signifierait que des éléments de \mathbb{D} sont perçus comme des rationnels. Mais dans le même temps, pour d'autres problèmes ou exercices, ils dissocient les ensembles auxquels appartiennent ces nombres, par exemple lorsqu'il faut trier parmi un certain nombre d'écritures celles qui sont relatives à des décimaux.

M.J. Perrin signale (p. 176) que des difficultés du même ordre subsistent auprès des élèves-instituteurs :

«la nature des nombres décimaux, leur place par rapport aux autres ensembles de nombres, la différence entre nombre et écriture d'un nombre sont des questions qui sont loin d'être réglées pour les élèves-instituteurs : les fractions sont difficilement acceptées comme nombre décimal par certains alors que des écritures décimales infinies le sont.»

Ce problème de distinction entre nombres et écritures est soulevé par C. Margolinas. Après avoir montré que les liens entre écriture des nombres et les nombres eux-mêmes ont toujours été extrêmement profonds, elle indique qu'il n'y a pas d'explicitation des différences entre les nombres et leurs écritures dans l'enseignement au collège.

Ces réflexions nous ont incité à proposer un item demandant d'identifier les décimaux parmi un ensemble d'écritures se rapportant à des entiers, des décimaux, des rationnels et des réels. L'item est de même type que le premier du test proposé par M.J. Perrin. Nous n'avons cependant pas fait figurer d'écritures à virgule infinies, afin que les décisions des étudiants se fassent entre écritures à virgule finies et les écritures fractionnaires. Les premières ne représentent que les décimaux tandis que les secondes représentent des rationnels parmi lesquels figurent des décimaux.

Parmi les écritures suivantes, entourez celles qui, pour vous, représentent un nombre décimal :

0,66 ; $\frac{1}{3}$; 0,6666 ; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{9}$; 3 ; $\frac{21}{25}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{10}$; $\sqrt{4}$; 3,14 ; 15,00 ;

5,7418 ; $\frac{11}{7}$; $\frac{12}{100}$; 30,06 ; $\sqrt{\frac{4}{4}}$; 0,3 ; $\sqrt{8}$; $\frac{15}{75}$; $\frac{15}{4}$; $\frac{1,3}{3,7}$; $\frac{\sqrt{2}}{100}$.

D'autre part, nous voulions voir quels liens sont établis entre différentes écritures d'un même nombre, dans un domaine où les écritures sont manipulées fréquemment. Nous nous sommes inspiré pour cela d'un item de l'évaluation destinée aux élèves de sixième mettant en évidence que l'équivalence entre 1,4 et $1 + \frac{4}{10}$ n'allait pas de soi.

Parmi les écritures suivantes, entourez celles qui représentent $\frac{14}{10}$:

$$14,10$$

$$1+\frac{4}{10}$$

$$1,14$$

$$\frac{140}{100}$$

$$1+0,4$$

$$0,14$$

1.2. Lien entre division, rationnels et décimaux

Les relations entre les fractions et les autres écritures peuvent se faire via la division qui est un algorithme connu des élèves au collège, mais qui pose encore beaucoup de problèmes "techniques"⁵. Dans le questionnaire de C. Margolinas, à propos de questions portant sur la division (voir annexe B4 a), peu d'élèves sont capables d'anticiper le résultat. Ainsi à la demande qui consiste à écrire une division qui ne finit jamais, il n'y a que 63,9% de réponses justes. Encore s'agit-il souvent de savoirs "locaux" provenant d'apprentissages spécifiques concernant des nombres particuliers comme $1/3$: les élèves savent que "1 divisé par 3, cela ne finit jamais". Cela nous a conduit à proposer un item où les élèves et les étudiants sont invités à se prononcer sur la perception de la nature et du statut du reste de la division.

Une division a été posée :

$$\begin{array}{r} 415 \\ 310 \\ \hline 1180 \\ 28 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 192 \\ 2,16 \end{array} \right.$$

Entourez, parmi les égalités suivantes, celles qui sont exactes :

- (a) $\frac{415}{192} = 2,16$
 (b) $415 = 2,16 \times 192 + 28$
 (c) $415 = 2,16 \times 192 + \frac{28}{100}$
 (d) $415 = 2,16 \times 192 + \frac{28}{1000}$
 (e) $415 = 2,16 \times 192 + 0,28$

1.3. Lien entre rationnels, réels et décimaux par l'intermédiaire de l'approximation

Les nombres décimaux, considérés comme valeurs approchées de rationnels ou de réels, semblent pris et utilisés par les élèves comme s'il s'agissait des nombres eux-mêmes. Ils prennent ainsi le statut de représentants de tous les nombres rencontrés au collège.

Ce sont les problèmes mettant en jeu des encadrements et des approximations, ainsi que des problèmes où l'on ne peut pas mettre en œuvre une technique opératoire habituelle qui sont révélateurs de ce genre de phénomène.

5. J. Guiet montre l'ampleur des difficultés qu'éprouvent les élèves du collège dans la technique opératoire. Guiet J., (1995), Algorithmes et schèmes: cas de la division, séminaire national de didactique des mathématiques, Paris.

C. Margolinas propose l'exercice suivant constitué de deux parties :

1 - Écris deux nombres décimaux avec trois chiffres après la virgule (sans fraction) qui encadrent le nombre $\frac{25}{7}$: ... < $\frac{25}{7}$ < ...

2 - Écris le meilleur encadrement possible avec trois chiffres après la virgule:

$$\dots < \frac{25}{7} < \dots$$

La deuxième partie de l'exercice fournit des renseignements intéressants. Le nombre de réponses justes est très faible (9,5 %), ce qui montre de nouveau la difficulté pour les élèves à établir des interrelations entre décimaux et rationnels.

D'autre part, et c'est ce point qui est significatif, les encadrements du type : $3,570 < \frac{25}{7} < 3,572$ représentent 28,6 % des copies et 84 % des copies produisant un encadrement juste, mais non le meilleur possible. 3,571 est pour ces élèves *la valeur de $\frac{25}{7}$* : un décimal représente donc pour eux le rationnel en question.

Les évaluations EVAPM troisième et seconde (1990 et 1991) se sont intéressés à l'utilisation des calculatrices et aux calculs approchés, qui nécessitent l'utilisation de ces dernières.

«(...) les résultats et l'analyse des copies d'élèves montrent que l'utilisation des calculatrices en situation générale n'est pas vraiment maîtrisée (en particulier dans les exercices demandant des arrondis, des approximations et des troncatures)»,

nous précisent les commentateurs⁶ des résultats des items proposés. L'examen de deux items significatifs montrent qu'à notre avis, ce n'est pas l'utilisation des calculatrices qui est en cause mais plutôt le rabattement de tous les nombres sur les décimaux qui pose problème.

Ainsi par exemple pour l'exercice suivant⁷ :

Pour chacun des calculs suivants, écris dans les cadres un résultat arrondi à un millième près :

$$D = (3,11 + \sqrt{24,3} \times 5) \times (7,31 \times 3,14 - 0,17)$$

$$E = \frac{172,28 \times (47,55 - \sqrt{23,5})^2}{17,38 - 2,5^2}$$

les résultats sont faibles (respectivement 49% et 27 %). Les commentaires⁸ nous signalent que :

«La faible réussite à la question D ou E [exercices précédents] confirme que les élèves ont une grande réticence à mener leur calcul en une seule fois. Ils utilisent

6. EVAPM 3/90 p. 51.

7. EVAPM 3/90: thème calcul machine, exercice 4 et 5.

8. Idem p. 91.

des résultats intermédiaires avec 1, 2, voir 3 chiffres après la virgule⁹.»

Si les élèves ne mènent pas leur calcul en une seule fois, c'est qu'ils souhaitent avoir des moyens de contrôle des calculs qu'ils sont en train de faire. Cela nous semble confirmé par le fait signalé que ceux qui essaient de traiter le calcul de manière globale n'arrivent pas au résultat.

Comme l'indiquent les commentaires, les élèves remplacent les résultats intermédiaires par des nombres décimaux ayant au plus 3 chiffres après la virgule bien que la calculatrice leur en fournisse plus. C'est donc que les nombres intermédiaires sont considérés comme des décimaux avec 1, 2 ou 3 chiffres après la virgule.

Les mêmes calculs ont été proposés dans l'évaluation "seconde"¹⁰, mais sous la modalité QCM. L'augmentation des réussites (respectivement 60 % et 52 %) est essentiellement due au fait que les élèves utilisent cette fois-ci les résultats figurant sur leur calculatrice en se servant de la totalité des chiffres indiqués sur celle-ci, mais sans modifier pour autant la représentation des nombres signalés précédemment. Pour eux, il s'agit toujours d'un décimal, mais dont le nombre de chiffres après la virgule est simplement plus grand. Les exercices proposés dans ce cas-là, conduisent donc à la réussite, sans remettre en cause le fait que tout nombre peut être considéré comme une "collection finie" de décimaux.

Dans la conclusion de son mémoire, C. Margolinas modélise les rapports entre un nombre réel quelconque et les décimaux. Elle considère la relation d'équivalence entre

deux nombres $X = n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ et $Y = m + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}$, n, m entiers, a_k et b_k étant des chiffres de 0 à 9, telle que X est équivalent à Y si $n = m$ et si $a_k = b_k$ pour tout k compris entre 1 et i . Elle émet l'hypothèse que les écritures de D_i sont associées à une des classes d'équivalence définies par la relation précédente. Pour tout élément x d'une classe d'équivalence, l'élément de D_i correspondant est appelé projection de x dans D_i .

Ainsi les stratégies des élèves dans les problèmes d'approximation pourraient être caractérisées par :

- la recherche d'un D_i pertinent pour répondre à la question posée,
- la transformation des nombres donnés ou rencontrés au cours de la résolution par leur projection dans ce D_i .

L'étude des liens entre tous les nombres n'a pas été prise en compte dans sa totalité dans notre questionnaire. Nous nous sommes centré sur ceux que pouvaient établir les

9. C'est nous qui soulignons.

10. EVAPM 2 / 91, questionnaires n° 1 et n° 2 formés de questions à choix multiples, questionnaire n° 1 exercice 24 et questionnaire n° 2 exercice 07.

étudiants entre les décimaux et les rationnels. C'est pourquoi, à propos de la division de 415 par 192,

$$\begin{array}{r|l} 415 & 192 \\ 310 & 2,16 \\ 1180 & \\ 28 & \end{array}$$

nous leur demandons de se prononcer sur l'égalité $\frac{415}{192} = 2,16$.

1.4. Rapports entre les Di : l'ordre dans les décimaux, encadrements et approximation de décimaux par des décimaux

Nous nous sommes aussi intéressé aux rapports que les élèves peuvent établir entre les D_i en nous limitant à l'approximation des décimaux entre eux.

C. Margolinas signale dans son travail que les enfants ont une "tendance" à ne travailler que dans l'ordre de N puisqu'on peut toujours ramener la comparaison de deux décimaux en se plaçant dans un même D_i , c'est-à-dire un ensemble de nombres dont les écritures ont i chiffres après la virgule. Il suffit par exemple d'utiliser soit un procédé d'extension du nombre de décimales avec des zéros pour celui qui en a le moins, soit un procédé de troncature pour celui qui en a le plus.

Mais d'autre part, M.L. Izorche a montré dans l'analyse de son questionnaire, les difficultés que peuvent rencontrer les élèves dans des exercices qui nécessitent le passage d'un D_i à un autre. Ainsi à la question¹¹

Pouvez vous donner, s'il en existe, un nombre réel qui soit compris entre 2,746 et 2,747?

46,8 % des élèves seulement étaient capables de fournir un nombre correct et 48 % répondaient qu'il n'y en avait pas ou qu'ils ne savaient pas.

Nous avons proposé cet item dans notre questionnaire. Mais comme ce type d'exercice est devenu fréquent à l'école primaire et au collège, nous avons aussi présenté un exercice "non classique", demandant quel est le nombre de décimaux compris entre deux élément de D n'appartenant pas à un même D_i .

Combien y a-t-il de nombres entre 12,23 et 12,232 ?

Pour étudier ces problèmes de passage d'un D_i à un autre, C. Margolinas propose l'exercice suivant :

11. Izorche, 1977, question n°5, p. 19.

Écrivez deux nombres décimaux avec trois chiffres après la virgule qui encadrent le nombre 47,2.

..... < 47,1 <

Encadrez le nombre 47,2 par deux nombres décimaux les plus proches comportant trois chiffres après la virgule :

..... < 47,1 <

Elle constate, pour la deuxième partie de l'exercice qui est la plus intéressante pour examiner ces difficultés, que 27,2 % seulement des élèves répondent juste. La difficulté de se placer dans D3 pour encadrer le mieux possible un nombre décimal appartenant à D1 renforce les constats réalisés par M.L. Izorche.

Nous avons repris dans notre questionnaire deux items similaires à celui ci-dessus proposé par C. Margolinas, l'un nécessitant un passage de D1 à D3 du même type que l'exercice précédent et l'autre un passage de D2 à D3.

Écrivez deux nombres décimaux avec deux chiffres après la virgule qui encadrent le nombre 4,157 :

..... < 4,157 <

Encadrez le nombre 4,157 par deux nombres décimaux les plus proches comportant deux chiffres après la virgule :

..... < 4,157 <

2. L'ANALYSE DES ITEMS, LES RAPPORTS AUX SYSTÈMES DE NOMBRES POUR LES ÉTUDIANTS ENTRANT À L'IUFM ET POUR LES ÉLÈVES DE FIN DE COLLÈGE

Pour chacun des items de notre questionnaire (annexe B4 b), nous réalisons une analyse a priori nous permettant de coder les différentes stratégies que l'on peut utiliser pour résoudre les exercices proposés. Nous réalisons une étude qualitative au vu des résultats, que nous complétons par une étude quantitative pour voir s'il n'y a pas de contradiction à propos de nos conclusions. Dans les tableaux de résultats, nous faisons figurer les effectifs observés et les pourcentages correspondants. Nous indiquons également les effectifs attendus afin d'effectuer le test du χ^2 sur les deux populations concernées. Nous testons dans chacun des cas l'hypothèse nulle suivante :

la réussite aux différents items est la même pour les deux sous-populations.

Quand l'étude qualitative nous indique un lien entre les variables, nous utilisons le coefficient de Cramer $Cr = \left[\frac{\chi^2}{N(m-1)} \right]^{\frac{1}{2}}$, avec m le nombre de lignes ou de colonnes le plus petit, N l'effectif total et χ^2 le chi-deux.

La force du lien est estimée à partir des limites ci-dessous :

Cr entre 0,05 et 0,09 : lien faible Cr entre 0,09 et 0,18 : lien moyen

Cr entre 0,18 et 0,36 : lien fort Cr entre 0,36 et 1 : lien très fort

2.1. Lien entre les différents systèmes de nombres

2.1.1. Lien entre rationnels et décimaux

a) Exercice proposé

Parmi les écritures suivantes, entourez celles qui représentent $\frac{14}{10}$:

$$14,10$$
$$1 + \frac{4}{10}$$

$$1,14$$
$$\frac{140}{100}$$

$$1+0,4$$
$$0,14$$

b) Analyse a priori

1) Les rationnels n'ont pas de rapport avec les décimaux; ils fonctionnent comme un couple d'entiers :

Code E : seule la réponse $\frac{140}{100}$ est fournie.

Code EE : les réponses $\frac{140}{100}$ et 14,10 (provenant de la lecture orale quatorze dixièmes) sont fournies conjointement.

Au niveau du dépouillement, ces deux types de réponses sont regroupés sous le seul **code E**.

2) La règle de décalage (qui peut être erronée) assure seule le lien entre rationnel et décimal. Cette règle est héritée de la division du numérateur de la fraction par le dénominateur. Son application permet la production de 1+0,4 par les enchaînements suivants :

$$\frac{14}{10} \text{ -----} > 1,4 \text{ -----} > 1+0,4 \quad \text{ou} \quad \frac{14}{10} \text{ -----} > 0,14$$

La non-production de l'écriture $1 + \frac{4}{10}$ assure que seule cette règle fonctionne.

Code D : réponses 1+0,4 et / ou 0,14 , mais **sans** la réponse $1 + \frac{4}{10}$

3) Seule la numération (écrite) établit le lien entre rationnels et décimaux. $\frac{1}{10}$ est considéré comme nouvelle unité. Cela peut conduire aux deux résultats : $1 + \frac{4}{10}$ (une dizaine de dixièmes et quatre dixièmes), 0,14 (quatorze dixièmes, que l'on place après la virgule puisqu'il s'agit de dixièmes), ou encore 1,14 (une unité figurant dans quatorze dixièmes auquel on rajoute quatorze dixièmes).

Code N : réponse $1 + \frac{4}{10}$ et / ou 0,14 et / ou 1,14 , mais **sans** 1+0,4

Code NE : réponse $1 + \frac{4}{10}$ et / ou 0,14 et / ou 1,14 avec la réponse 14,10

(provenant de la numération orale), mais **sans** 1+0,4

Au niveau du dépouillement, ces deux types de réponses sont regroupés sous le seul **code N**.

4) Les deux réponses attendues $1+0,4$ et $1 + \frac{4}{10}$ figurent, indiquant que l'élève fait les liens entre rationnels et décimaux, soit avec la numération, soit avec la division.

Code C : réponses $1+0,4$ et $1 + \frac{4}{10}$ avec éventuellement la réponse 0,14 ou encore 1,14.

5) Pour les autres réponses non interprétables avec les règles que nous avons énoncées précédemment, nous utilisons :

Code A

c) Résultats

Lien entre rationnel et décimal

Codes	PE / IUFM		3ème / 2ème	
	E(entiers) / EE	1 <i>5,021</i>	1%	10 <i>5,979</i>
D(décalage) /DE	25 <i>23,733</i>	28%	27 <i>28,267</i>	25%
N(numération)	3 <i>4,564</i>	3%	7 <i>5,436</i>	7%
C(correct)	59 <i>54,313</i>	66%	60 <i>64,687</i>	57%
A(autres)	1 <i>1,369</i>	1%	2 <i>1,631</i>	2%
Effectif total	89		106	

Tableau B4-1

* Pour chaque sous-population, dans la colonne de gauche nous avons indiqué les effectifs observés et en italique les effectifs attendus, dans la colonne de droite, les pourcentages correspondant aux effectifs observés.

d) Commentaires

L'étude qualitative montre que le nombre de réponses le plus élevé concerne les deux variables D (décalage) et C (correct). Les pourcentages obtenus sont voisins. Pour un quart des élèves ou des étudiants, seule la règle de décalage assure le lien entre rationnel et décimal. Cela montre que le problème signalé par les résultats obtenus pour le questionnaire de référence réalisé en sixième, où un nombre très faible d'élèves prenaient en compte l'écriture $1 + \frac{4}{10}$, n'est pas encore complètement résolu, même si le travail au collège a fait bouger les connaissances des élèves. Ce pourcentage est plus élevé pour la population IUFM. Les deux tiers trouvent un résultat correct, ce qui est relativement faible pour un exercice qui porte sur des nombres familiers aux élèves depuis l'école primaire. Le travail ultérieur au collège sur cette question a donc eu un faible impact. Le lien entre rationnels et décimaux qui peut s'établir, via la numération, par la signification des chiffres intervenant dans l'écriture des nombres, se fait difficilement pour beaucoup

d'élèves à la sortie du collège ou à l'entrée à l'IUFM. L'égalité entre les écritures $\frac{14}{10}$ et $\frac{140}{100}$ est disponible chez l'ensemble des élèves des deux populations : c'est une connaissance qui s'est naturalisée depuis l'école primaire. Par contre, on peut noter, bien qu'il s'agisse d'effectifs réduits, le nombre nettement plus élevé d'élèves de 3ème/2ème pour qui $\frac{140}{100}$ est la seule écriture qui soit égale à $\frac{14}{10}$. Les activités ultérieures au collège pourraient donc avoir fait évoluer quelques élèves sur ce point.

L'étude quantitative ne contredit pas l'analyse qualitative puisque la valeur 7,961 du χ^2 ne permet pas, au seuil de 0,05 de rejeter l'hypothèse nulle. L'indice de Cramer (0,570) nous indique que le lien que nous avons dégagé entre les variables est très fort.

2.1.2. Lien entre écriture des nombres décimaux et autres nombres

a) Exercice proposé

Parmi les écritures suivantes, entourez celles qui, pour vous, représentent un nombre décimal :

0,66 ; $\frac{1}{3}$; 0,6666 ; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{9}$; 3 ; $\frac{21}{25}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{10}$; $\sqrt{4}$; 3,14 ; 15,00 ; 5,7418 ; $\frac{11}{7}$; $\frac{12}{100}$; 30,06 ; $\sqrt{\frac{4}{4}}$; 0,3 ; $\sqrt{-8}$; $\frac{15}{75}$; $\frac{15}{4}$; $\frac{1,3}{3,7}$; $\frac{\sqrt{2}}{100}$.

b) Analyse a priori

1. Code C

Les réponses sont correctes avec éventuellement l'oubli de $\frac{15}{75}$, ce rationnel nécessitant un calcul pour déterminer si c'est un décimal.

2. Code V

La reconnaissance du nombre décimal se fait selon l'écriture qui contient une virgule, les entiers pouvant ou non faire partie de l'ensemble ainsi déterminé.

Une fraction ne représente pas un nombre décimal, hormis $\frac{1}{10}$ qui est répertorié comme étant un décimal.

3. Code F

Un décimal est représenté par une écriture fractionnaire, c'est à dire un couple d'entiers.

4. Code VF

Un décimal est représenté aussi bien par une écriture à virgule que par une écriture fractionnaire. Rationnels et décimaux sont confondus. Les entiers peuvent ou non faire partie de cet ensemble.

5. Code A

Certaines écritures décimales ou fractionnaires sont entourées, sans que l'on puisse distinguer clairement une règle d'action.

Remarque

L'analyse a priori ne prend pas en compte ici les écritures comportant des radicaux. Nous nous intéressons particulièrement aux significations des écritures à virgule finies et des écritures fractionnaires.

c) Résultats

Liens entre écriture des nombres et décimaux

Codes	PE / IUFM		3ème / 2ème	
C(correct)	2 0,913	2%	0 1,087	0%
V(virgule)	29 36,969	33%	52 44,031	49%
F(fraction)	1 1,369	1%	2 1,631	2%
VF (tous les nombres, sauf les entiers)	52 44,272	58%	45 52,728	42%
NR (Non Réponse)	1 0,456	1%	0 0,544	0%
A(autres)	4 5,021	4%	7 5,979	7%
Effectif total	89		106	

Tableau B4-2

d) Commentaires

Ces résultats confirment ce qui avait été signalé dans les différents questionnaires de référence. Le nombre quasiment nul de réponses correctes dans l'une ou l'autre des populations montre la difficulté pour les élèves et les étudiants d'identifier les décimaux parmi les autres nombres.

Pour un tiers des étudiants, et à un degré moindre pour les élèves de fin de collège, les décimaux sont identifiés à une écriture à virgule.

Pour plus de la moitié, les décimaux et les rationnels sont confondus. Le pourcentage est nettement plus élevé chez les élèves de fin de collège. Il semble qu'il y ait un effet de compensation. Les élèves qui cessent de considérer les décimaux uniquement par le fait que l'écriture présentée est une écriture à virgule, constatent que les décimaux peuvent s'écrire au moins sous les deux formes, écriture à virgule et écriture fractionnaire. A partir de là, ils en infèrent que tout nombre écrit sous la forme d'une écriture à virgule ou fractionnaire est un décimal. Les activités au lycée ou à la faculté auraient donc pour effet de faire "bouger" quelque peu l'identification entre le nombre décimal et l'écriture décimale au profit d'une assimilation des décimaux et des rationnels.

L'étude quantitative ne contredit pas l'étude qualitative puisque le test du χ^2 (valeur 7,398) ne permet pas de rejeter l'hypothèse nulle. L'indice de Cramer (0,530) indique qu'il y a un lien très fort entre les variables.

2.1.3. La division comme lien entre rationnel, décimal et écriture décimale

a) Exercice proposé

Une division a été posée :

$$\begin{array}{r} 415 \\ 310 \\ \hline 1180 \\ 28 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 192 \\ 2,16 \end{array} \right.$$

Entourez, parmi les égalités suivantes, celles qui sont exactes :

- (a) $\frac{415}{192} = 2,16$
 (b) $415 = 2,16 \times 192 + 28$
 (c) $415 = 2,16 \times 192 + \frac{28}{100}$
 (d) $415 = 2,16 \times 192 + \frac{28}{1000}$
 (e) $415 = 2,16 \times 192 + 0,28$

b) Analyse a priori

Nous distinguons les réponses pour l'égalité (a) d'une part et pour les égalités (b), (c), (d), (e) d'autre part.

1) Réponses à propos de $\frac{415}{192} = 2,16$

Code FD : l'égalité $\frac{415}{192} = 2,16$ est entourée.

Le rationnel représenté par la fraction est égal au nombre décimal obtenu comme quotient décimal approché par défaut.

2) Réponses à propos de $415 = 2,16 \times 192 + 28$, $415 = 2,16 \times 192 + \frac{28}{100}$,
 $415 = 2,16 \times 192 + \frac{28}{1000}$, $415 = 2,16 \times 192 + 0,2$.

* Code F (pas de reste) : toutes les égalités (b), (c), (d), (e) ne sont pas entourées (l'égalité (a) par contre est entourée). La réponse est cohérente avec une réponse codée FD : le reste ne peut pas être pris en compte.

* Code E (le reste est nécessairement entier) : seule l'égalité (b) $415 = 2,16 \times 192 + 28$ est entourée.

* Code NE (le reste n'est pas entier) : l'égalité (b) $415 = 2,16 \times 192 + 28$ n'est pas entourée, et les égalités (c) ou (d) ou (e) le sont. Les restes de nature décimale sont perçus. Cela peut provenir d'un simple contrôle par le calcul des égalités. Cependant, ce type de réponse contient cependant en germe la propriété de densité de D dans Q, en posant le problème de la "qualité" de l'approximation d'un rationnel par un décimal.

* Code NR (Non Réponse) : aucune égalité n'a été entourée.

c) Résultats

Division comme lien entre rationnel et décimaux

Code	PE / IUFM		3ème / 2 ème	
	FD (fraction=décimal)	43 49,292	48%	65 58,708
NFD (fraction≠décimal)	46 39,708	52%	41 47,292	39%
Effectif total	89		106	

Tableau B4-3

Codes	PE / IUFM		3ème / 2 ème	
	F (pas de reste)	0 7,759	0%	17 9,241
E (reste entier)	61 49,749	69%	48 59,251	45%
NE (reste non entier)	26 28,754	29%	37 34,246	35%
NR (non réponse)	2 2,738	2%	4 3,262	4%
Effectif total	89		106	

Tableau B4-4

d) Commentaires

Le tableau B4-3 montre que pour les deux populations, la fraction $\frac{415}{192}$ est assimilée au décimal 2,16 pour plus de la moitié dans la population 3ème/2ème et pour moins de la moitié pour la population IUFM. Il faut analyser cela cependant de manière plus fine. En effet si on met en rapport ces résultats avec les résultats du tableau B4-2, les résultats obtenus avec le code VF pourraient laisser penser à une certaine contradiction. Comme nous l'avons déjà remarqué à travers l'analyse des questionnaires, lorsque les étudiants entourent l'égalité $\frac{415}{192} = 2,16$, ils expriment que la fraction $\frac{415}{192}$ est égale à un des décimaux d'une collection finie de décimaux associés à celle-ci. Le choix du décimal est fait en fonction du degré d'approximation souhaitée. Celui-ci est obtenu en utilisant l'algorithme de la division qui fournit la succession des chiffres l'un après l'autre.

Les pourcentages de réponses restent qualitativement du même ordre pour les deux populations. Ceci n'est pas contredit par l'analyse quantitative, puisque le test ($\chi^2=3,312$) ne permet pas de rejeter l'hypothèse nulle au seuil de 0,05 %. Le lien entre variables estimé à l'aide de l'indice de Cramer (0,297) est fort.

Contrairement à la première partie de l'item, le test ($\chi^2=19,806$) appliqué au tableau B4-4 permet de rejeter l'hypothèse nulle. Les populations peuvent être estimées comme nettement différentes. Considérons les raisons qui conduisent à un tel résultat.

Les deux principaux facteurs de discordance proviennent des deux faits suivants :

- de nombreux élèves de fin de collège (17%) répondent qu'il n'y a pas de reste, en étant ainsi cohérents avec la première réponse,

- un nombre bien élevé d'étudiants entrant à l'IUFM qui pensent que le reste est entier.

La division euclidienne est un savoir mathématique institutionnalisé comme technique (dispositif et gestes associés) depuis le CM. La technique reste problématique au niveau du collège, comme nous l'avons déjà dit et continue donc à être travaillée, notamment quand il s'agit de trouver un quotient décimal. Les élèves du collège sont donc sensibilisés au statut du reste de la division.

Aux cours des années d'études ultérieures, la division est considérée comme un objet transparent faisant partie du milieu. Après le baccalauréat, elle devient un objet d'étude mathématique (pour les étudiants poursuivant leurs études scientifiques) comme application de

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

La division généralisée n'a pas de nom en mathématique dans l'institution savante : c'est une notion paramathématique. Elle est simplement un outil de calcul, elle apparaît comme un avatar de la division euclidienne et c'est cette dernière qui continue donc à fonctionner implicitement. C'est la raison pour laquelle le reste est considéré comme un entier chez un nombre important d'étudiants. Une étude complémentaire que nous avons menée auprès d'élèves scientifiques (jusqu'aux classes de Maths Sup. et Maths Spé.) montre d'ailleurs la persistance de réponses erronées de ce type.

2.2. Encadrement et comparaison des décimaux

2.2.1. Les stratégies de comparaison

Pour réaliser les analyses a priori des différents items du questionnaire mettant en œuvre des comparaisons de décimaux, nous allons examiner les stratégies possibles d'un "joueur rationnel".

D'une manière générale, un décimal positif peut s'écrire : $d = E(d) + E_n(d)$, où $E(d)$ est la

partie entière de d , $E_n(d)$ est égal à $\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{10^i}$, d_i étant un nombre compris entre 0 et 9 et n un entier.

Certaines stratégies de comparaison vont s'appuyer sur les propriétés d'approximation des décimaux, d'autres vont essayer de se ramener à des comparaisons d'entiers, qui reposent pour la plupart sur le fait qu'un ensemble D_j quelconque peut s'identifier à

l'ensemble N des entiers. En effet comparer deux éléments de D_1 revient "en supprimant la virgule", à comparer deux entiers.

Nous allons expliciter ces diverses stratégies pour deux décimaux d et d' positifs tels que $d = E(d) + E_p(d)$ et $d' = E(d') + E_q(d')$ avec $p > q$ donc tel $p = q + r$

a) stratégie L basée sur la comparaison chiffre à chiffre (ordre lexicographique)

La propriété fondamentale utilisée est que $\sum_{i=q}^r \frac{d_i}{10^i} < \frac{1}{10^q}$ pour tout $q \geq 0$, donc en

particulier que $\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{10^i} < 1$ pour tout n , ce qui signifie que $E_n(d) < 1$ pour tout n .

- si $E(d) \neq E(d')$, par exemple si $E(d) < E(d')$

puisque en particulier $0 \leq E_p(d) < 1$, il en résulte que $E(d) + E_p(d) < E(d')$ et par suite $d < E(d') < d'$

- si $E(d) = E(d')$

alors $10d = 10E(d) + d_1 + \sum_{i=2}^p \frac{d_i}{10^i}$ et $10d' = 10E(d') + d'_1 + \sum_{i=2}^q \frac{d'_i}{10^i}$.

On est amené à comparer d_1 et d'_1 et on réitère le processus précédent. Ce processus s'arrête au maximum au bout de q fois puisque $p < q$.

b) stratégies basées sur des comparaisons de deux entiers

b1 : le tronçage, stratégie $T_{p,q}$

On considère la partie décimale $T_q(d)$ obtenue en supprimant tous les chiffres à partir de la position $q+1$. Cela revient à considérer d comme un élément de D_q . Une fois que d est tronqué, il suffit de comparer deux éléments de D_q , ce qui revient à comparer deux entiers.

Le résultat obtenu n'est faux que lorsque $E(d) = E(d')$ et $T_q(d) = E_q(d')$. Le domaine de validité de cette stratégie est particulièrement étendu.

b2 : l'extension, stratégie $E_{q,p}$

On considère la partie décimale $E_p(d')$ obtenue en rajoutant $p-q$ zéros à la droite du dernier chiffre. $E_p(d') = E_p(d') + \sum_{i=1}^r \frac{0}{10^{q+i}}$. Cela revient à considérer d' comme un élément de D_p . Une fois que d' est "étendu", il suffit de comparer deux éléments de D_p , ce qui revient à comparer deux entiers. Cette stratégie conduit toujours à un résultat juste. Elle est donc particulièrement efficace et donc concurrente de la stratégie L. Son coût est faible en terme "d'opérations systématiques" à faire : rajouter un nombre de zéros puis comparer deux entiers dans un cas, comparer chiffre à chiffre jusqu'à ce qu'on trouve deux chiffres différents dans l'autre cas.

b3 : le décimal, couple de deux entiers, stratégie C_{ed} (couple partie entière, partie décimale)

On considère les écritures $d = e.f$ et $d' = e'.f'$.

- si $e \neq e'$, (par exemple $e > e'$), alors l'ordre des décimaux d et d' correspond à l'ordre des parties entières ($d > d'$)

- si $e = e'$, alors $d > d'$ si $f > f'$.

Le résultat n'est faux que lorsque $e = e'$, $p \neq q$ et $T_Q(d) < E_Q(d')$. Le domaine de validité de cette stratégie est là aussi étendu.

2.2.2. Intercalation d'un décimal entre deux décimaux

a) Exercice proposé

Pouvez-vous donner, s'il en existe, un nombre qui soit compris entre 2,746 et 2,747 ?

b) Analyse a priori

1) Si on considère la stratégie C_{ed} ou encore si les décimaux sont considérés uniquement comme des éléments de D_3 , stratégie que nous dénommons D_3 , alors la réponse est zéro.

2) Si on considère la stratégie $E_{3,i}$, qui consiste à rajouter $i-3$ ($i > 3$) zéros à la droite des nombres, alors il y a production d'un décimal correct.

3) Un cas particulier mais spécifique apparaît lorsque $i = 4$ et que le chiffre rajouté est un 5 : la stratégie peut s'appuyer sur la considération de type géométrique consistant à placer un point au "milieu" des deux nombres décimaux proposés. Un algorithme qui a fonctionné antérieurement pour des nombres décimaux ayant 1 ou 2 chiffres après la virgule, consistant à placer un 5 à la droite du dernier chiffre est utilisé par la suite. Nous notons cette stratégie $E_{3,4}$: milieu. Mais la production de 2,7465 peut provenir aussi de la stratégie $E_{3,i}$.

c) Résultats

Type de réponses	Stratégie	PE / IUFM		3ème / 2ème	
0	Ced ou D3	9	10%	10	11 %
		9,663		9,337	
2,7465	E _{3,4} : milieu ou E _{3,i}	27	30%	35	42%
		31,531		30,469	
2,7461 ou 2,7462...	E _{3,i}	45	51%	30	34%
		38,143		36,857	
pas de réponse		8	9%	8	9%
		8,137		7,863	
autres		0	0%	3	3%
		1,526		1,474	
Total		89		86	

Tableau B4-5

c) Commentaires

Les résultats, sensiblement les mêmes pour les deux populations, sont nettement différents des résultats obtenus par M.L. Izorche dans son questionnaire de 1977.

Comme nous avons pu le voir dans le chapitre précédent, l'intercalation d'un décimal entre deux décimaux donnés est traitée dès l'école élémentaire dans le cas précis où les nombres décimaux ont le même nombre de chiffres après la virgule. Ceci est fait d'une manière très standard, c'est à dire par un passage d'un D_j à un D_{j+1} , en se limitant dans pratiquement tous les cas à des nombres décimaux **ayant un ou deux chiffres** après la virgule. Cela revient en fait à intercaler un entier entre deux multiples de 10 successifs. Une technique, ici l'algorithme consistant à rajouter un chiffre à droite au plus petit des deux nombres décimaux, est mise en place et permet de produire de "bons résultats". Ce problème, travaillé institutionnellement, peut donc se résoudre en se plaçant dans D_{j+1} uniquement et en utilisant une intercalation entre deux entiers.

On peut en avoir la confirmation de cette analyse en examinant les résultats aux évaluations CE2- 6^{ème}. Par exemple dans l'évaluation de 1991¹², l'exercice suivant¹³ était proposé :

dans la case vide, écris un nombre compris entre :

82,5 et 82,6

82,5		82,6
------	--	------

Les résultats ont été les suivants :

- tout nombre décimal remplissant les conditions.....64,8 %
- l'élève a donné l'une des bornes : 82,5 ou 82,50 ; 82,6 ou 82,60.....9,3 %
- autres réponses ou absence de réponse.....15,9 %

Les élèves ont déjà, dès la fin du CM2 un taux de réussite relativement élevé sur ce type de problème. La différence entre la population IUFM et la population 3^{ème}/2^{ème} consiste en une utilisation moindre de la stratégie $E_{3,j}$ pour cette dernière.

Cependant, si on cumule les résultats corrects, les pourcentages obtenus pour chacune des populations sont très voisins. Notons que les pourcentages des élèves qui ne sont pas capables de donner un résultat correct et ceux qui ne donnent pas de réponses sont aussi très voisins et non négligeables : les difficultés restent importantes, comme va nous le confirmer l'examen des résultats de l'item suivant.

L'étude quantitative ($\chi^2=7,036$) ne contredit pas ce que nous avons remarqué de manière qualitative, l'indice de Cramer (0,532) montrant que les liens entre variables sont là aussi très forts.

12. Enquête nationale réalisée depuis plusieurs années par le ministère de l'éducation nationale.

13. Exercice 16c.

2.2.3. Nombre d'éléments entre deux décimaux

a) Exercice proposé

Combien y a-t-il de nombres entre 12,23 et 12,232 ?

b) Analyse a priori

- a) La stratégie C_{ed} conduit à calculer la différence entre 232 et 23, donc à trouver 209. Les réponses sont 207, 208 ou 209, suivant la prise en compte des bornes.
- b) La stratégie $E_{2,3}$ appliquée au nombre 12,23 conduit à produire le nombre 12,230 : la réponse est 1, éventuellement 2 ou 3, si les bornes sont ou non prises en compte.
- c) La stratégie $T_{3,i}$ ($i=1, 2, 3$) entraîne que les deux nombres obtenus sont identiques, donc la réponse est 0.
- d) La stratégie L permet de comparer les deux nombres 12,23 et 12,232 puis d'insérer de nouveaux nombres entre eux, par exemple 12,231, puis 12,2311, 12,23111 etc... Elle conduit à des réponses du type "beaucoup" ou "une infinité". D'autre part, si on utilise l'égalité $12,232 = 12,23 + 0,002$, l'élément d_3 (12,232) de D_3 est considéré comme un élément d_2 (12,23) de D_2 plus un reste. Cette stratégie conduit à envisager qu'il y a une infinité de nombres (ou beaucoup de nombres).
- e) Deux stratégies consistant à soustraire soit les deux nombres, soit les nombres formés par les deux derniers chiffres conduit, l'une à la réponse "0,002", l'autre aux réponses "8", "9" ou "10".

c) Résultats

Type de réponses	stratégie	PE / IUFM		3ème / 2ème	
207, 208 ou 209	C_{ed}	1	1%	6	7%
1 ou 2 ou 3	$E_{2,3}$	3,560	58%	3,440	42%
		44,754		36	
infinité / beaucoup	L ou $d_3=d_2+\text{reste}$	26	31%	31	36%
		28,989		28,011	
0	$T_{3,i}$ et $T_{2,i}$ $i=1, 2, 3$	0	0%	0	0%
0,002	12,232-12,23	1	1%	5	6%
8, 9 ou 10	de 23 à 32	3,051	0%	2,949	2%
		1,017		0,983	
autres		3	3%	1	1%
		2,034		1,966	
pas de réponse		6	7%	5	6%
		5,594		5,406	
Total		89		86	

Tableau B4-6

d) Commentaires

On ne rencontre pratiquement que les deux types de réponse "1 ou 2 ou 3" et "infinité ou beaucoup" chez les étudiants entrant à l'IUFM, la réponse "1 ou 2 ou 3" étant de loin majoritaire. Cela signifie bien que, pour cet exercice "inhabituel", pour lequel il ne peut y avoir de réponse standard et qui nécessite de passer par des D_i successifs, les étudiants se trouvent en difficulté dans leur majorité. C'est la même situation pour ce qui concerne les élèves du collège, les réponses erronées se dispersant davantage suivant les cas envisagés dans l'analyse a priori. La réponse exacte est plus faible chez la population IUFM, pour qui on peut penser que le mot "combien" entraîne automatiquement un décompte entier au détriment d'une réflexion sur la nature des nombre en jeu. D'un point de vue qualitatif, nous voyons que les réponses pour chacune des populations vont dans le même sens.

La valeur 6,496 du X^2 ne permet pas, au seuil de 0,05 de rejeter l'hypothèse nulle donc ne contredit pas cette analyse. L'indice de Cramer (0,491) indique un lien très fort entre les différentes variables.

2.2.4. Les problèmes d'encadrement par deux décimaux

a) Exercices proposés

Exercice 1) Écrivez deux nombres décimaux avec deux chiffres après la virgule qui encadrent le nombre 4,157 :

..... < 4,157 <

Encadrez le nombre 4,157 par deux nombres décimaux les plus proches comportant deux chiffres après la virgule :

..... < 4,157 <

Exercice 2) Écrivez deux nombres décimaux avec trois chiffres après la virgule qui encadrent le nombre 47,2.

..... < 47,2 <

Encadrez le nombre 47,2 par deux nombres décimaux les plus proches comportant trois chiffres après la virgule :

..... < 47,2 <

b1) Analyse a priori pour l'exercice 1

a) Pour la recherche du nombre inférieur, la stratégie C_{ed} conduit à garder la même partie entière (4) et à chercher le plus grand entier à deux chiffres (99). Pour le nombre supérieur, elle nécessite de prendre pour partie entière 5, puisqu'on ne peut pas trouver d'entier à deux chiffres supérieur à 157, puis le plus petit entier à deux chiffres (00 ou 01). L'encadrement est donc $4,99 < 4,157 < 5,00$ ou $5,01$.

b) La stratégie $T_{3,i}$ ($i = 0, 1, 2$) conduit à trouver respectivement les nombres 4; 4,1; 4,15.

Dans les cas où $i = 0$ et $i=1$, on encadre les nombres tronqués 4 et 4,1 puis on les replonge par extension dans D_2 , ou on plonge par extension dans D_2 et on encadre par la suite, ce qui donne :

- pour $T_{3,0}$ l'encadrement $3,99 < 4,157 < 5,00$ ou $5,01$
- pour $T_{3,1}$ l'encadrement $4,09 < 4,157 < 4,20$ ou $4,16$

Dans le cas où $i = 2$, on encadre le nombre tronqué 4,15 dans D_2 , d'où l'encadrement $4,14 < 4,157 < 4,16$.

c) Deux stratégies conduisent à la solution $4,15 < 4,157 < 4,16$:

- la stratégie L consistant à chercher le plus grand élément de D_2 inférieur à 4,157 et le plus petit élément de D_2 qui lui est supérieur,
- celle considérant 4,157 comme $4,15 + 0,007$.

d) Le fait de ne pas établir d'interrelation entre D_2 et D_3 aboutit à ne pas trouver d'encadrement ou à rester dans D_3 en fournissant l'encadrement $4,156 < 4,157 < 4,158$.

c1) Résultats pour l'exercice 1

Type de réponses	stratégie	PE / IUFM		3ème / 2ème	
4,99<4,157<5,00 ou 5,01 pas d'encadrement ou 4,156<4,157<4,158	C_{ed}	0	0%	0	0%
	$D_2//D_3$	5	6%	2	2%
		3,560		3,440	
3,99<4,157<5,00 ou 5,01	$T_{3,0} / E_{0,2}$	0	0%	0	0%
4,09<4,157<4,20 ou 4,16 4,14<4,157<4,16	$T_{3,1} / E_{1,2}$	0	0%	0	0%
	$T_{3,2}$	22	25%	26	30%
		24,411		23,589	
4,15<4,157<4,16	L ou $d_3=d_2+reste$	59	66%	52	60%
		56,451		54,549	
pas de réponse		3	3%	1	1%
		2,034		1,966	
autres		0	0%	5	6%
		2,543		2,457	
	Σ	89		Σ	86

Tableau B4-7

d) Commentaires pour l'exercice 1

On peut noter la grande concordance entre les réponses des deux groupes. Ce que ne contredit pas la valeur du χ^2 (8,011). Le lien entre les variables est très fort (0,606). Il reste un tiers qui utilise le tronçage sur D_2 avant de faire un encadrement. Cela indique que le rapport entre D_2 et D_3 est mal assuré, bien qu'il s'agisse de D_i "consécutifs". Les difficultés de passage d'un D_i à un autre sont persistantes.

b2) Analyse a priori pour l'exercice 2

a) Pour la recherche du nombre inférieur, la stratégie C_{ed} conduit à prendre pour partie entière 46, puisqu'on ne peut pas trouver d'entier à trois chiffres inférieur à 2 pour la partie décimale. Celle-ci est formée ensuite par le plus grand entier à trois chiffres 999.

Pour le nombre supérieur, on garde la même partie entière (47) puis on indique le plus petit nombre à trois chiffres supérieur à 2 pour la partie décimale (100 par exemple). L'encadrement est donc $46,999 < 47,2 < 47,---14$.

b) On peut encadrer 47,2 dans un D_i (i=1, 2 ou 3) en utilisant avant ou après encadrement le procédé par extension, ce qui donne :

- encadrement dans D₁ puis extension dans D₃, soit $47,1-- < 47,2 < 47,3--$;
- extension dans D₂, encadrement puis extension dans D₃, soit $47,19- < 47,2 < 47,21-$;
- extension dans D₃ puis encadrement dans D₃, soit $47,199 < 47,2 < 47,201$.

c) La stratégie L conduit aussi à l'encadrement $47,199 < 47,2 < 47,201$.

c2) Résultats pour l'exercice 2

Type de réponses	stratégie	PE / IUFM		3ème / 2ème	
46,999<47,2<47,--	C _{ed}	0 1,017	0%	2 0,983	2%
47,1--<47,2<47,3--	D ₁ / E _{1,3}	5 5,086	6%	5 4,914	6%
47,19-<47,2<47,21-	E _{1,2} /D2/ E _{1,3}	11 13,731	12%	16 13,269	19%
47,199<47,2<47,201	E _{1,3} /D ₃ ou L	69 61,537	78%	52 59,463	60%
pas de réponse		0 0,509	0%	1 0,491	1%
autres		4 7,120	4%	10 6,880	12%
	Σ	89		Σ	86

Tableau B4-8

d2) Commentaires pour l'exercice 2

Là aussi comme dans le cas précédent, on note la bonne concordance entre les résultats obtenus pour les deux populations, résultats figurant dans le tableau B4-8. L'étude quantitative ($\chi^2 = 6,767$) ne contredit pas cette analyse, le lien (valeur 0,512) étant très fort. Les réponses exactes sont du même ordre que précédemment (de l'ordre des deux tiers), les résultats étant meilleurs pour la population IUFM.

3. CONCLUSION

D'une manière générale, l'étude qualitative nous a montré que les deux populations concernées obtiennent pour les items du test que nous leur avons proposé des résultats

14. La présence d'un tiret signifie que l'élève peut mettre un chiffre quelconque.

significativement semblables. Les tests du χ^2 appliqués aux différents exercices au seuil de 0,05 nous ont indiqué que l'on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle selon laquelle les résultats des deux sous-populations sont semblables. Le seul point de discordance que nous avons relevé concerne le statut du reste dans la division permettant de trouver un quotient décimal (le reste étant considéré majoritairement comme entier et de manière beaucoup plus forte chez la population dite IUFM).

Après la troisième, la place accordée à l'enseignement des nombres est très réduite. Les instructions et programmes concernant par exemple la classe de seconde (du 5 Février 1987, puis les nouveaux programmes du 17 mai 1990), n'envisagent pas un travail systématique pour les différents ensembles de nombres utilisés au collège (N, Z, D, Q, R). Ils précisent qu'il est nécessaire de consolider et de compléter les connaissances acquises, mais il n'est pas envisagé de travail spécifique remettant en cause les connaissances antérieures.

Au lycée, les ensembles de nombres vont de soi et ne sont pas objets sensibles d'enseignement. D'une manière générale, le domaine numérique est donc considéré comme constitué et par conséquent peu remanié, même si l'introduction d'objets nouveaux peut évidemment modifier par la suite les connaissances des élèves.

Ainsi les difficultés et les erreurs que l'on peut repérer chez l'une ou l'autre des populations sont de même type pour les exercices que nous leur avons proposés et vont dans le sens des remarques que nous avons faites dans l'analyse des différents questionnaires :

- pas de distinction entre les nombres et leurs écritures,
- difficultés à mettre en rapport les différents Di,
- peu d'interrelations entre les différents systèmes de nombres,
- en particulier, difficultés à voir quelle est la fonction des décimaux par rapport aux autres ensembles de nombres.

Après avoir étudié les rapports aux systèmes de nombres à l'entrée de l'IUFM, pour poursuivre notre étude, nous cherchons à analyser les rapports qu'entretiennent les formés et les formateurs dans l'IUFM. Notre choix consiste à étudier les effets provoqués par l'introduction d'une ingénierie dans un système didactique de formation. C'est l'objet de la partie C.

Partie C

CHAPITRE C1

CHOIX POUR LA MISE EN PLACE D'UNE INGÉNIERIE

Nous analysons certains enseignements qui ont pu vivre, même de manière éphémère dans les institutions de formation, à la fois sous l'angle mathématique et sous l'angle didactique. Cela nous permet de préciser certains choix que nous effectuons pour mettre en place une ingénierie de formation. En nous appuyant sur une ingénierie destinée à l'école obligatoire, reposant sur une analyse didactique approfondie, nous procédons à une "contre transposition" de celle-ci. La mise en évidence des points communs et les éléments spécifiques aux situations proposées permet de spécifier les caractéristiques du processus de formation envisagé.

1. DES CHOIX EFFECTUÉS DANS DES INSTITUTIONS DE FORMATION

1.1. Les textes du savoir

Est-il possible de faire des choix donnant une cohérence structurelle aux systèmes de nombres pour une stratégie de formation professionnelle dans les IUFM ?

Pour répondre à cette question, nous allons faire le point sur les possibilités offertes par les traités, traduisant l'état du savoir savant à un moment donné.

Comme nous l'avons déjà vu, la cohérence mathématique nécessite que l'interrelation entre deux ensembles de nombres s'exprime soit comme extension, soit comme une restriction d'un ensemble par rapport à l'autre¹. On s'intéresse ainsi aux propriétés qui se conservent quand on passe d'un ensemble à l'autre ou aux propriétés qui lient certains ensembles entre eux comme la densité.

Résumons ci-après quelques constructions mathématiques ayant eu une existence effective même marginale ou temporaire dans les institutions de formation (écoles normales, IUFM, manuels), où interviennent des interrelations entre les systèmes de nombres : nous chercherons à expliciter simultanément la structuration mathématique sous-jacente.

1. Nous renvoyons aux articles de G. Brousseau (1980 et 1981) pour un catalogue des constructions possibles de D.

1.1.1. Constructions de D comme extensions de N

Nous avons déjà attesté de tentatives de construire D comme extension de N. Ce choix a été fait au cours des années 70 pour le collège, et par voie de conséquence était présent dans les livres de l'époque, destinés à la formation des maîtres. La volonté de mettre en évidence les structures sous-jacentes des ensembles avait ainsi conduit les promoteurs de la réforme à envisager une construction de D en utilisant la relation d'équivalence définie sur $Z \times N$ définie par $(a, n) \approx (b, n)$ si et seulement si $a \cdot 10^n = b \cdot 10^n$.

Comme nous avons pu le constater par exemple dans l'analyse du texte du livre "Mathématiques et apprentissage du calcul" de Cranney et Perrot (voir chapitre B3, §52), l'organisation logique du texte du savoir était proche de celle des traités de l'enseignement universitaire. Les développements y étaient simplement plus longs et plus détaillés, chaque étape de la construction y étant justifiée de manière minutieuse. Nous ne savons cependant pas si un enseignement effectif a pu être fait devant un public de futurs instituteurs.

Ce n'est pas la seule façon de construire D comme extension de N. G. Brousseau (1980, pp. 53-54) décrit un procédé de construction par adjonction d'un élément d tel que $10d = 1$ où il écrit :

« Cette méthode permet de mieux voir que l'on a ajouté le moins de choses possibles à N (...). Par contre elle exige une prise de conscience de ce qui représente toutes les opérations possibles d'un élément avec les autres, c'est à dire le semi-anneau des polynômes à coefficients naturels $N[x]$. »

Mais il critique ainsi cette construction :

« Elle correspond certes à la meilleure récupération des connaissances antérieures des propriétés de N, mais ne favorise pas une rupture qui permettrait de bien différencier D de N. » (1980, p.54)

Nous n'avons pas connaissance de la transposition d'une telle proposition dans des documents de formation.

1.1.2. Constructions de Q comme extension de N, D considéré comme restriction de Q

Ermel (1982)² reprend, dans la partie théorique du chapitre consacré aux décimaux et aux rationnels, la construction de J. Drach (1895, pp. 135-140). Celle-ci consiste à décider

2. Sigle signifiant: Équipe de recherche mathématique à l'école élémentaire. Cette équipe a écrit de 1978 à 1982 six volumes intitulés: *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*, Hatier. Il s'agit ici de: Ermel, 1982, *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle moyen, tome 2*, Hatier.

d'adjoindre formellement à \mathbb{N} des éléments (notés $\frac{a}{b}$) qui permettent de résoudre des équations du type suivant dans ce nouvel ensemble \mathbb{Q} :

$$\begin{cases} b \times x = a \\ b \in \mathbb{N}, b \neq 0 \\ a \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On cherche à définir sur \mathbb{Q} des opérations qui vont prolonger celles définies sur \mathbb{N} , conservant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et l'associativité de la multiplication.

Si l'on a $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ donc $b \times x = a$ et $d \times y = c$ il en résulte

$(b \times d) \times x = a \times d$ et $(b \times d) \times y = c \times b$ et par suite

$$b.d.(x + y) = a.d + c.b$$

$$b.x.d.y = a.c$$

Ces exigences conduisent à définir nécessairement une addition telle que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(d \times a) + (b \times c)}{b \times d}$$

et une multiplication telle que

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Toute écriture d'un même élément de \mathbb{Q} , nommé rationnel, peut se mettre sous la forme $\frac{n \times p}{n \times q}$ où p et q sont premiers entre eux. Les décimaux sont alors des rationnels

particuliers qui s'écrivent sous la forme $\frac{a}{10^n}$ $n \in \mathbb{N}$.

Erme! poursuit en montrant que tout rationnel a un développement décimal illimité périodique et que l'on peut approcher un quotient $\frac{p}{q}$ "d'aussi près que l'on veut",

traduisant ainsi la densité de \mathbb{D} dans \mathbb{Q} .

Il s'agit d'une construction de \mathbb{Q} formelle et économique. On dispose ainsi d'un "système" de relations entre des objets formels, qui permet de modéliser certaines situations, par exemple celles de fractionnement. En effet, considérons une mesure μ sur un ensemble A de parties d'un ensemble Ω tel que pour un élément U de A , on ait $\mu(U) = 1$ et considérons un élément X de A . Dans le cas où on partage U en n parties égales U_n suivant la grandeur considérée [$\mu(U) = n \times \mu(U_n)$] et qu'il existe un entier p tel que $\mu(X) = p \times \mu(U_n)$, alors on voit que la mesure $\mu(X)$ est telle que $n \times \mu(X) = p \times \mu(U) = p$. La valeur de la mesure de X par rapport à U est donc donnée par le rationnel noté $\frac{p}{n}$.

Une autre construction de \mathbb{Q} , qui, nous l'avons vu, a été présente au collège et dans les écoles normales autour des années 80 a consisté à considérer \mathbb{Q} comme ensemble quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en utilisant la relation d'équivalence définie par $(a, b) \approx (c, d)$ si et seulement si $a \times d = b \times c$. Les décimaux sont des rationnels particuliers qui s'écrivent sous la forme $\frac{a}{10^n}$ $n \in \mathbb{N}$.

Là aussi, les présentations très formelles que nous avons pu rencontrer dans les livres autour des années 1975 avaient l'organisation logique des traités de l'enseignement supérieur de cette époque.

1.1.3. Les ensembles \mathbb{D} et \mathbb{Q} , restrictions de \mathbb{R} ensemble préconstruit

Nous rendons compte d'un enseignement donné en première année de formation de professeurs d'école par un professeur d'université nouvellement nommé dans un IUFM³. Pour lui, cet enseignement est une innovation en opposition avec ce qui se fait habituellement. Nous en donnons à présent les grandes lignes.

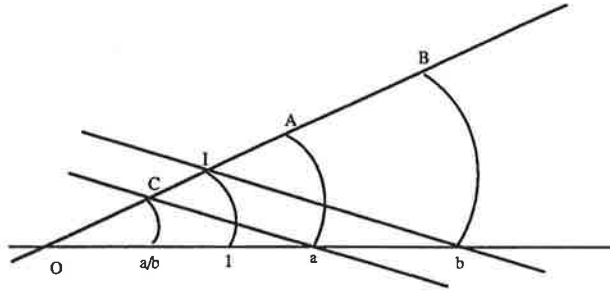
L'ensemble des réels positifs est préconstruit : il est donné par la demi-droite graduée sur laquelle on a placé deux points correspondant à zéro et à un. Un point de la demi-droite représente ainsi un nombre réel positif. L'ordre des points sur celle-ci "traduit" l'ordre des réels. Dans cet ensemble, on "montre" que l'on peut effectuer les opérations suivantes : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines carrées :

pour cela, on s'appuie sur des propriétés géométriques de la droite et sur la construction à la règle et au compas.

Ainsi l'addition et la soustraction de deux nombres s'obtiennent par report de distances à l'aide du compas à partir des points correspondants A et B. Les nombres entiers peuvent donc être désignés sur la droite à partir des points notés 0 et 1: ils apparaissent ainsi comme des réels particuliers.

Pour ce qui concerne la multiplication et la division de deux nombres a et b, on s'appuie sur les propriétés du théorème de Thalès, qui, dans cet enseignement, est un *objet d'enseignement sensible*, bien qu'ancien. Le schéma suivant indique la construction utilisée du point correspondant à $\frac{a}{b}$.

3. Nous remercions Mr Moralès, professeur à l'IUFM de Lyon de bien avoir voulu nous communiquer une première rédaction de son cours.



Les propriétés géométriques du théorème de Thalès permettent de mettre en évidence que $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Dans le cas particulier où les nombres a et b sont entiers, les rationnels avec les fractions qui les désignent sous la forme $\frac{a}{b}$, apparaissent comme quotients de deux entiers.

Tout nombre entier est un rationnel et tout rationnel est un nombre réel. L'ensemble des rationnels est un sous-ensemble de \mathbb{R} et par suite est totalement ordonné.

Le théorème de Pythagore et sa réciproque permettent de construire à l'aide de la règle et du compas le point correspondant à \sqrt{p} . On obtient ainsi l'ensemble des nombres constructibles dont Carrega (1989, p. 37) rappelle qu'il est le plus petit sous-corps de \mathbb{R} stable par racine carrée. Il contient évidemment \mathbb{Q} , mais par contre π n'en fait partie.

La cohérence mathématique des inclusions de \mathbb{N} et de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} est montrée dans toute cette partie du cours par un contexte géométrique où les propriétés et notamment les opérations se matérialisent effectivement. Par contre, elles n'apparaissent pas comme solutions de problèmes posés aux étudiants.

Une deuxième partie du cours va s'intéresser aux relations de densité entre \mathbb{D} , \mathbb{Q} et \mathbb{R} .

L'axiome d'Archimède sous la forme suivante, "Soit b un nombre entier plus grand ou égal à 2, alors tout nombre réel a se trouve entre deux puissances successives de b " est utilisé pour obtenir la décomposition et par suite l'écriture d'un entier selon une puissance de la base b . D'autre part, ce même axiome permet de montrer que tout réel a un développement décimal illimité. Les rationnels et les décimaux sont alors caractérisés par les particularités de leur développement décimal.

Dans sa logique, l'organisation de cet enseignement suit celle de certains textes représentatifs du savoir savant, mettant en évidence que l'ensemble \mathbb{Q} est inclus dans \mathbb{R} et \mathbb{D} dans \mathbb{Q} . C'est l'ensemble des nombres réels qui donne ainsi la cohérence aux autres systèmes de nombres que sont les décimaux et les rationnels. Mais les nombres réels,

implicitement restreints aux nombres constructibles à la règle et au compas, restent eux-mêmes une “nébuleuse” représentée par la droite graduée.

1.1.4. Q et R comme extensions de N, D restriction de Q et de R

La formation proposée⁴ consiste à reprendre avec les étudiants les activités telles qu’elles sont menées avec les élèves, en choisissant plus particulièrement les situations qui “sont susceptibles d’une réflexion plus poussée au niveau de l’enseignant”. L’ingénierie de référence était celle construite par R. Douady (1980).

Les élèves et donc les étudiants résolvent une suite de problèmes qui doivent satisfaire à certaines conditions. Le texte du savoir sous-jacent de l’ingénierie initiale peut se décrire de la manière suivante :

a) **Construction de Q^+ comme extension de N** : c’est la même construction que celle décrite au paragraphe 112, c’est-à-dire celle qui consiste à adjoindre des éléments x tels que $k = x \cdot n$, éléments notés $\frac{k}{n}$. Ceux-ci prennent le statut de nombres grâce aux opérations qu’il est possible de définir et qui étendent les opérations dans N.

b) **Construction de R** : la recherche d’un élément de R se fait par la construction de suites (u_n) et (v_n) de rationnels telles que (u_n) soit croissante, (v_n) soit décroissante et $u_n - v_n$ tende vers 0.

c) **D restriction de Q et de R** : la construction de R et l’utilisation des suites de rationnels montrent l’intérêt des fractions décimales, ce qui amène la mise en évidence d’un sous-ensemble de Q. Ce sous-ensemble noté D est dense dans R et il est aussi dense dans Q.

1.2. La caractéristique actuelle : les systèmes de nombres considérés comme préconstruits

Nous examinons les textes de deux manuels, qui, par l’importance de leur diffusion sont actuellement représentatifs de ce qui est proposé dans le cadre de la formation des professeurs des écoles : le cours diffusé par le centre national d’enseignement à distance (CNED) et un livre ⁵ paru en 1993 “Se former pour enseigner les mathématiques”.

4. Douady R., Didry J., 1978, Que faire en F.P. pour préparer les futurs instituteurs à une utilisation critique des programmes et instructions ? 5^{ème} colloque des professeurs d’école normale, pp. 179- 208, Auberive, Université de Reims.

5. Dubois C., Fénelon M., Pauvert M., 1993, Se former pour enseigner les mathématiques, Tome 3. Numération, décimaux, pp. 63, 119, Armand Colin.

1.2.1. Le cours du CNED

Dans la partie "problèmes spécifiques posés par les nombres décimaux", les auteurs nous signalent que

«l'essentiel de ce qui est rapporté figure de façon plus détaillée dans les pages 5 à 19 - Grand N - 1979»

Nous allons analyser ce document ⁶, que nous avons écrit en 1979 dans cette revue destinée aux maîtres de l'enseignement élémentaire. Il ne s'agit pas à proprement parler d'un document pour la formation initiale, mais la présentation sous forme de fiches de travail, la nature des activités demandées indiquent qu'il s'agit d'un document destiné à la formation des enseignants. Initialement, ces fiches avaient été écrites pour les étudiants en formation initiale.

Le titre de l'article s'intitule "Décimaux", bien que dans celui-ci, nous abordions la question des écritures des rationnels⁷, ce qui est significatif de ce que nous estimions être central à propos de ces questions.

L'article est composé de deux parties, l'une s'intitulant "Écritures", l'autre "Graduations - ordre".

L'objectif de la partie concernant les écritures, qui représente le corps principal de l'article, va consister à élaborer des *critères de reconnaissance* des nombres à partir de leurs écritures. La fiche 1 vise à déstabiliser un critère supposé être utilisé de manière fréquente chez les étudiants : "on est souvent tenté de ne classer comme décimal que les nombres qui se présentent sous forme d'une écriture à virgule". Elle montre que des nombres qui s'écrivent sous forme d'une fraction peuvent aussi s'écrire sous forme d'écriture à virgule. Cette fiche vise à amener le lecteur à faire la distinction entre écriture décimale périodique et écriture décimale finie afin qu'il puisse "assimiler" cette affirmation :

"Un nombre est un décimal s'il a une écriture finie"

La fiche 2 permet d'exhiber une écriture décimale non périodique en l'occurrence 0,010010001... et évoque deux nombres fétiches qui garderont tout leur mystère grâce à cette phrase "On a montré depuis longtemps pour $\sqrt{2}$ et récemment pour π que ceux-ci n'ont pas d'écriture à virgule périodique". Un commentaire historique signale que c'est

6. Neyret R. , 1979, "les décimaux" , Revue GRAND N n°17, pp. 5-19. CRDP de Grenoble. Ce document avait été écrit à la suite d'un travail réalisé avec les normaliens.

7. Ibid. p. 9.

quelque chose de difficile, puisqu'il a fallu attendre 1882 pour voir Lindermann démontrer l'irrationalité de π ⁸. Cette fiche se termine par cette affirmation :

"On reconnaîtra un rationnel s'il a une écriture périodique infinie"

La fiche 3 vise à donner des critères de reconnaissance permettant de distinguer parmi les fractions celles qui désignent un décimal.

Enfin une fiche 4 montre que, suivant la base choisie, un nombre qui a une écriture finie dans un système de numération de base donnée peut avoir une écriture décimale infinie dans un autre système.

Signalons pour conclure sur ce texte que la deuxième partie nommée "Graduations - ordre" est elle aussi centrée en grande partie sur les écritures puisque sont examinés dans la fiche 6 les différents ordres que l'on peut repérer pour les entiers et pour les décimaux à partir de leurs écritures.

L'essentiel du travail proposé ne porte que sur les écritures permettant de catégoriser les différents nombres.

Nous avons pu disposer d'ailleurs de documents montrant la réduction opérée par certains formateurs à partir de cet article, ce qui conforte l'analyse. Les seules activités retenues portaient sur les fiches 1, 2, 3 qui sont centrées exclusivement sur des critères de reconnaissance des écritures. Ainsi était éliminée la fiche 4 qui d'une certaine façon pouvait permettre de relativiser ces critères en montrant que le caractère limité ou illimité des écritures dépend fortement de la base choisie et qu'en définitive, c'est le concept de rationnel qui est unificateur.

1.2.2. Le livre "Se former pour enseigner les mathématiques"

Examinons ce livre, qui fait partie d'une collection de quatre tomes dont l'ambition est de s'adresser à la fois aux formateurs et aux formés. Le problème des savoirs mathématiques nécessaires au futur professeur d'école pour pouvoir enseigner les décimaux et les fractions est abordé dans le paragraphe 4 du chapitre 1 intitulé "Aperçu historique et généralités". Les auteurs dressent une liste des "savoirs à acquérir et à réactiver"⁹ :

« les étudiants doivent découvrir ou se remémorer pourquoi la création d'autres nombres que les entiers a été nécessaire.

- ils doivent savoir déterminer si un nombre donné par une de ses écritures est un nombre décimal, un nombre rationnel, un nombre entier et connaître les relations entre les divers ensembles de nombres abordés à l'école élémentaire.

8. Une erreur s'était glissée dans ce texte puisque c'est Lambert qui en 1761 a montré l'irrationalité de π , Lindermann ayant montré la transcendance de π en 1882.

9. Ibid. p. 72-75

- ils doivent, avant de les enseigner, organiser pour eux-mêmes les diverses propriétés de ces nombres décimaux et leur structure (opérations, relation d'ordre).»

Cette partie du texte s'adresse manifestement aux formateurs et on peut y repérer, même s'il n'est pas développé de manière très détaillée, un texte du savoir cohérent mettant en évidence les éléments participant à la construction des ensembles de nombres et à leur relation entre eux.

Les auteurs distinguent deux catégories d'étudiants¹⁰ :

- ceux qui ont des connaissances estimées insuffisantes.

«(...)certains étudiants ont des connaissances très locales sur décimaux et rationnels, (...) ils disposent de peu d'éléments mathématiques pour contrecarrer des impressions fausses, liées aux écritures par exemple. Leur maîtrise des calculs n'est pas assurée et ils ne disposent guère de moyens pour les contrôler en changeant l'écriture des nombres ou en approximant les résultats.»

Nous dirons que les auteurs estiment qu'ils ne disposent pas de suffisamment de savoirs servant à enseigner pour pouvoir prendre des décisions pédagogiques.

- ceux qui possèdent un texte du savoir, mais ont des difficultés à le rendre opérationnel.

«d'autres étudiants, titulaires de diplômes mathématiques, disent que la connaissance qu'ils ont des structures, intellectuellement satisfaisante, constitue un écran pour la pédagogie de l'apprentissage des décimaux.»

Cela conduit les auteurs à ne pas donner dans l'ouvrage des activités spécifiques sur la structure algébrique de D et Q , même s'ils pensent qu'il est possible de le faire avec certains étudiants.

Étudions à présent les activités proposées aux étudiants et censées leur faire acquérir ces connaissances : elles figurent dans le chapitre 2 "Activités pour les enseignants en formation" .

Huit activités¹¹ sont ainsi proposées : nous nous intéressons particulièrement aux trois premières qui :

10. Ibid. p. 80.

11. p. 81 : 1. Suite d'exercices et problèmes sur décimaux et fractions.

2. Analyse de passations sur les décimaux et construction d'un protocole de passation pour l'observation d'élèves du cours moyen.

3. Lecture de textes théoriques concernant les connaissances des élèves sur décimaux.

4. Étude de problèmes proposés en CM2 et de solutions apportées par les élèves.

5. Traduction de recettes de gâteaux californiens.

6. Analyse d'activités proposées dans l'ouvrage de N. et G. Brousseau: *Rationnels et décimaux pour la scolarité obligatoire* pour l'apprentissage de la multiplication.

7. Critique de quelques exemples de présentations des décimaux à l'école élémentaire.

«(...) doivent être l'occasion, pour chacun, de reprendre à la base leurs connaissances, de les évaluer et de reconstruire éventuellement des connaissances correctes.»

L'activité 1 est composée de huit exercices faisant appel, selon les auteurs à des savoirs différents :

- «- la mise en ordre des décimaux (exercice 1)
- les critères de reconnaissance des décimaux à partir des écritures (exercice 2)
- l'approximation à 10^{-n} de décimaux et de rationnels (exercice 3)
- le problème du quotient de deux entiers (exercice 4)
- l'approximation par un décimal d'une racine carrée (exercice 5)
- le calcul de sommes et de quotients de fractions (exercice 6 et 7)
- la limite d'une suite de fractions continues (exercice 7)
- l'utilisation des fractions pour évaluer les aires (exercice 8)»

En fait les solutions de ces exercices sont des algorithmes, objets d'enseignement de la scolarité obligatoire et supposés connus du public de ce livre : algorithme de comparaison des décimaux, algorithmes de calcul sur les décimaux et les fractions, algorithmes permettant de transformer des écritures. Les exercices sur l'approximation visent à la mise en place d'un algorithme "de troncature au rang n " de la partie décimale de l'écriture décimale, donnée par la calculette, de nombres décimaux, rationnels ou irrationnels (racines carrées). On demande toujours des valeurs approchées à 10^{-n} avec $n < N$, N étant le nombre maximum de chiffres affichés par la calculette. Par exemple on demande de trouver la valeur approchée de $\frac{1}{256}$ à 10^{-0} , 10^{-1} , 10^{-2} près ou encore celle de $\sqrt{38}$ à 10^{-3} près. La recherche de la limite d'une suite de fractions continues pourrait sembler dépareiller dans cette suite d'exercices : il n'en n'est rien, puisqu'il s'agit de calculer avec la calculette un certain nombre de fractions, et que l'on constate qu'elles sont de plus en plus proches de l'écriture décimale "approchée" de $\sqrt{2}$ donnée par la calculette.

«Cet éventail est volontairement large (il pourrait même l'être plus), pour permettre à chacun des étudiants de se poser des questions, de faire le point sur ses connaissances»,

assurent les auteurs. La largeur de l'éventail est celle constituée de types d'exercices repérés comme associés à des pratiques anciennes, supposées problématiques parce que à savoir. Cet éventail est celui, non exhaustif, de types d'exercices que l'on peut trouver actuellement dans les manuels du collège, l'exercice 7 ne faisant exception qu'en apparence.

L'activité 2 propose une analyse de réponses d'élèves de la fin du primaire ou du début du collège à des exercices sur la comparaison des décimaux issus de protocoles de

passation¹² : son objectif exprimé est soit de mettre en évidence "les représentations des élèves à propos des fractions usuelles", soit de repérer leurs erreurs à propos d'exercices concernant l'ordre des décimaux.

L'activité 3 invite les étudiants à lire les articles dont sont extraits les passations précédentes.

Les deux dernières activités visent à sensibiliser le lecteur sur le fait qu'un nombre encore important d'élèves font des erreurs dans le rangement des décimaux au moment où le rapport aux objets de savoirs associés est en cours d'institutionnalisation (fin du primaire et début du collège).

La stratégie de formation, suffisamment représentative pour que les auteurs s'autorisent à la rendre publique, est de se référer successivement :

- à des algorithmes de calcul de l'enseignement obligatoire comme savoirs pertinents pour enseigner les systèmes de nombres (les solutions aux huit exercices, activité 1);
- aux erreurs d'élèves à des niveaux où ces savoirs ne sont plus sensibles et à la signification de ces erreurs, donnée par des chercheurs en didactique.

Cette stratégie apparaît comme une solution au problème de la relation savoir disciplinaire savoir professionnel : elle serre au plus près les objets de savoir tels qu'ils fonctionnent dans l'institution cible. Les choix épistémologiques ne peuvent donc être qu'un reflet de ceux de l'enseignement obligatoire, la référence étant ici encore les savoirs du collège.

Nous avons montré dans la partie B que les choix faits dans les écoles normales à propos des systèmes de nombres s'alignaient sur les choix du collège. L'évolution que l'on peut constater ces dernières années dans les programmes ainsi que dans les manuels du collège est de considérer les systèmes de nombres comme préconstruits : les savoirs y sont présentés de manière éclatée, ce qui entraîne les nombreuses difficultés que nous avons pu repérer à travers l'analyse des différents questionnaires analysés dans le chapitre B4.

Or nous pouvons constater, à travers l'analyse de deux documents de formation, que cette situation de concordance entre les objets de savoir et la façon de les appréhender dans les institutions de formation et au collège, perdue avec la création des IUFM.

12. M.J. Perrin, (1986), *Petit x*, n°10; C. Comiti et R. Neyret, *Grand N*, n° 18; C. Grisvard et F. Léonard, *bulletin APMEP*, n°327.

2. LES CHOIX POUR UNE INGÉNIERIE DE FORMATION

2.1. Des choix différents?

Le curriculum que l'on cherche à construire s'adresse à des étudiants ayant au moins une licence et ayant suivi les enseignements du collège, puis du lycée. Comme nous avons pu le constater dans le chapitre B4, une très grande majorité d'étudiants entrant en formation n'établissent pas de relations nettes entre les décimaux et les fractions. Les fractions ne renvoient pas généralement à un ensemble de nombres. Le terme lui-même de rationnel est mal connu et les liens entre fractions et rationnels peu clairs.

Une contrainte de la transposition didactique, comme l'a montré Chevallard est qu'une ingénierie détient sa légitimité épistémologique du savoir savant. Une ingénierie de formation, s'adressant à des étudiants ayant fait au minimum trois années d'études supérieures après le baccalauréat doit viser à une reprise théorique d'une partie des savoirs concernant les systèmes de nombres. La réorganisation qui en résulterait doit permettre aux étudiants de disposer de connaissances organisées en une "théorie" proche dans la mesure du possible de celles que l'on peut trouver dans certains textes de l'enseignement supérieur (comme précédemment). Cependant comme l'a montré Brousseau, ce n'est pas une simple transformation du texte du savoir qui rend intelligible à l'étudiant la construction mathématique sous-jacente. Analysant les divers procédés formels de transformation du discours mathématique en un autre, il signale (Brousseau, 1981, p.41) :

«Ces divers procédés appliqués de façon presque automatique fournissent toujours un discours, un exposé que l'on peut espérer plus simple, plus clair, plus redondant... et donc plus intelligible, plus assimilable que le discours mathématique initial. (...) ces procédés ont en commun de ne pas remettre en cause, de ne pas interroger la construction elle-même.»

Une étude épistémologique sur laquelle nous ne reviendrons pas et que nous ferons nôtre dans le cadre de ce travail, le conduit à dégager les types de situations qui modélisent les activités à proposer aux élèves. Nous reproduisons ci-dessous les extraits qui justifient aussi nos propres choix : (pp. 51- 52)

«a) Notre étude épistémologique nous permet de comprendre que pour qu'une théorie puisse être institutionnalisée, il est nécessaire qu'au préalable, elle ait fonctionné comme telle dans des débats scientifiques et dans des discussions entre élèves, comme moyen d'établir des preuves et d'en rejeter. (...)

b) Pour que ces théories aient un sens pour celui qui les utilise, il "faut" qu'elles aient préalablement fonctionné comme solution à un problème posé à chaque élève dans des conditions qui lui permettent, soit de trouver lui-même cette solution, ou

plus exactement de la construire (éventuellement progressivement), soit de l'emprunter toute faite de lui-même, entre plusieurs qu'il pouvait envisager sans qu'une intention didactique ou une pression culturelle l'y contraigne. (...)

c) Pour que le vocabulaire soit acquis, et que les termes aient du sens, il "faut qu'ils servent suffisamment à exprimer et à communiquer des informations dans des situations qui en justifient l'emploi et le contrôle. (...)"

Brousseau mettait ainsi en évidence la nécessité de proposer des activités modélisées en tant que situations de validation, d'action et de formulation.

Il nous faut donc trouver un enchaînement de situations qui permettent de créer ce que nous pouvons appeler les causes du savoir chez les étudiants. Une phase d'institutionnalisation doit permettre de reformuler le savoir dans les termes d'un texte du savoir légitime pour la communauté scientifique.

2.2. L'utilisation d'ingénieries existantes pour l'école obligatoire

Une des idées pour construire une ingénierie de formation est de proposer à des étudiants des activités proches de celles figurant dans les ingénieries construites pour les élèves de l'école obligatoire. Ce point avait déjà été souligné dans l'une des stratégies d'enseignement signalées par Kuzniak (1994) nommée stratégie d'homologie. Nous avons pu la trouver par exemple dans un compte rendu des réflexions d'un groupe de professeurs d'école normale¹³ :

«Les situations plus particulièrement intéressantes sont celles qui, se situant dans leur formulation initiale au niveau de la classe primaire, sont susceptibles d'une réflexion plus poussée au niveau de l'enseignant.»

Nous ne disposons pas de la description des activités réellement proposées aux étudiants : seules sont décrites en annexe les activités élèves. S'agit-il des mêmes activités pour les étudiants ou ont-elles été aménagées?

Dans l'analyse de ces stratégies d'homologie, A. Kuzniak signale que l'idéologie sous-jacente à ces pratiques consiste souvent à vouloir faire avec les étudiants ce que les formateurs voudraient qu'ils fassent avec leur élèves. Il en identifie deux grandes formes qu'il décrit ainsi (p.150) :

«La première ignore totalement le processus de transfert qui sous-tend ce type de stratégie. Elle est très proche de la monstration [stratégie qui consiste à montrer comment on enseigne] mais sous une forme indirecte puisque ce sont les étudiants

13. Douady R., Didry J., 1978, Que faire en F.P... déjà cité.

qui jouent le rôle des élèves. Il s'agit d'une reprise directe du modèle de l'enseignement primaire.

La deuxième approche consiste à instiller des éléments propres à provoquer une certaine réflexion critique de la part des étudiants. Les objectifs sont explicités, des détails sur la mise en œuvre de situations dans les classes primaires sont travaillés dans le cadre du cours. Cependant, même dans ce cas, on peut dire que la réflexion sur le phénomène de transposition du savoir qui s'opérera ensuite de la part des étudiants est ignoré. Les explications ne visent de la part du formateur qu'à mieux se faire comprendre.»

Pour notre part, nous pensons qu'il est possible de s'appuyer sur certaines ingénieries existantes, c'est à dire en utilisant la stratégie d'homologie pour reprendre les termes de Kuzniac, en adoptant un point de vue différent.

Nous choisissons de "contre-transposer" une ingénierie reposant sur une analyse didactique approfondie, pour faire en sorte d'exercer un certain contrôle théorique sur les situations de cette ingénierie. Nous faisons en sorte de provoquer une accélération du processus d'enseignement en prenant en compte les contraintes de temps au sein de l'institution de formation ainsi que du passé des étudiants, anciens sujets du collège, du lycée et de la faculté.

2.3. Le choix de l'ingénierie initiale

Notre choix s'est porté sur le processus, classique dans la communauté des didacticiens, élaboré par G. Brousseau (1981)¹⁴. Nous rappelons ses différentes options et en gras, nous indiquons quels sont les choix que nous avons nous-même effectués parmi celles-ci :

- «a) L'acquisition des décimaux-mesure suivra un processus distinct de celui visant les décimaux-applications. Ils se succéderont dans cet ordre
- b) Dans les deux cas, **les décimaux seront présentés comme des rationnels, simple réécriture des fractions décimales. Les rationnels seront donc construits les premiers** dans les deux étapes. Cela n'est pas très original pour les opérateurs. Par contre, **pour les mesures, cela va à l'encontre des habitudes culturelles les mieux établies.**
- c) **les fractions décimales-mesures seront choisies par les élèves pour approcher les rationnels à cause des facilités de calcul qu'elles présentent. Les problèmes topologiques exigent justement de nombreuses comparaisons et des calculs d'intervalles. Ils mettront de plus en évidence les propriétés de l'ordre naturel de Q et de D qui s'opposent à celles de N .**

14. N. et G. Brousseau décrivent en détail le processus dans *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, 1987, Publication de l'I.R.E.M. de Bordeaux.

- d) Cette approche topologique ne sera pas reproduite dans l'étude des applications linéaires rationnelles (...).
- e) Nous tenterons de faire acquérir, ou fonctionner, s'ils sont acquis, les modèles implicites avant d'en provoquer la formulation ou l'analyse. Nous admettrons que les enfants possèdent un modèle implicite de la proportionnalité dans N .
- f) Les sommes d'applications rationnelles, bien que rencontrées, ne seront pas théorisées ni institutionnalisées.»

Nous rajoutons pour notre part :

«une relecture des activités dans les termes d'un texte du savoir sera faite par le professeur au cours de séances de synthèse, relecture permettant de donner un statut épistémologique aux connaissances mises en jeu dans les activités proposées aux étudiants.»

Ces choix portent en eux-mêmes de fortes limitations, dues principalement aux nécessités horaires de la formation : nous disposions, pour respecter la répartition effectuée par les professeurs de l'IUFM de Grenoble, de 12 heures de formation à consacrer à ce sujet. Ces limitations consistent à ne retenir que la première partie du processus de G. Brousseau ce qui signifie que :

- le produit de deux rationnels n'est pas abordé
- le rationnel comme application linéaire n'est pas traité: or on sait que ce point de vue, utilisé par Brousseau permet dans la deuxième partie de son processus de donner une signification au produit de deux rationnels.

Le processus devait en outre comporter une analyse d'extraits de livres, qui finalisait en quelque sorte le travail engagé.

Nous allons à présent décrire le canevas des différentes situations envisagées en les mettant en regard avec les situations décrites dans le processus de Brousseau. L'analyse a priori détaillée de ces situations sera effectuée dans le chapitre suivant C2.

2.4. Une situation fondamentale des rationnels

2.4.1. La formulation générale du problème de la mesure rationnelle

Il peut se formuler dans les termes suivants¹⁵ :

un ou deux joueurs conviennent d'une grandeur et d'un objet U dont chacun dispose. Cet objet U servira de référence pour la grandeur donnée.

* Soit le premier joueur possède n objets : A_1, A_2, \dots, A_n parmi lesquels il choisit un objet que nous désignons par A_{i_0} . Il doit alors transmettre au second joueur un message

15. Cette formulation d'une classe de problèmes est issue d'une formulation donnée par H. Ratsimba-Rajohn (1982, pp. 72-73).

contenant une information concernant la grandeur de cet objet A_{i0} , inconnu pour le second joueur, afin que celui-ci puisse :

- soit reconnaître ou identifier un objet A' choisi parmi les (A_1, A_2, \dots, A_n) tel que A' ait la même mesure que A_{i0} .
- soit retrouver un objet A' ayant la même mesure que A_{i0} .
- soit construire un objet A' ayant même mesure que A_{i0} .

* Soit le premier joueur (éventuellement solitaire) reçoit une information à propos des n objets dont il dispose : il doit déterminer si cette information est relative à l'un de ceux-ci et si oui déterminer cet objet.

2.4.2. Les contextes utilisés dans les situations de commensuration

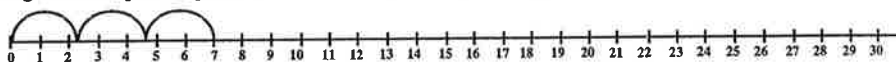
a) Dans l'ingénierie de G. Brousseau : les feuilles de papier

Le contexte utilisé par Brousseau dans la phase 1 de son ingénierie consiste à prendre pour objets deux collections de cinq tas d'environ 200 feuilles de même format, de même couleur mais d'épaisseur différente (feuille de photocopie, bristol, ...). Certaines différences ne peuvent être appréciées au simple toucher. Les enfants disposent de pieds à coulisse pour mesurer éventuellement des épaisseurs de feuille de papier. Un rideau sépare chaque joueur de son correspondant.

b) Dans notre ingénierie de formation : les automates

Une piste est graduée régulièrement uniquement par les entiers naturels. Un automate¹⁶ se déplace sur cette piste en partant du point 0 et en faisant des sauts réguliers. Nous choisissons des automates qui passent par au moins un nombre entier n après un certain nombre de sauts s .

Par exemple, nous définissons un automate par le fait qu'il arrive au point 7 en 3 sauts réguliers, ce que l'on peut représenter de la manière suivante :



Le joueur "possède" un ou plusieurs automates désignés par un couple (n, s) . Il dispose d'une portion de droite numérique et d'un transparent sur lequel figure un réseau de parallèles équidistantes permettant, sur cette portion, de visualiser le "déplacement" de

16. Cette situation, au moins dans sa phase initiale a été utilisée, dans une autre optique et avec un déroulement nettement différent dans ERMEL CM Tome 2 1982, Ed Hatier. Une séquence de formation s'appuyant sur la même situation a été réalisée par A. Bessot et M. Eberhard dans le cadre d'un stage de formation au Laos en 1992.

certains automates en mettant en évidence les "points" par lesquels passe l'automate. Il reçoit un ou plusieurs couples de nombres entiers et doit déterminer si ces couples correspondent ou non aux automates en sa possession.

Examinons à présent les éléments de ressemblance et de différence au niveau des deux problèmes.

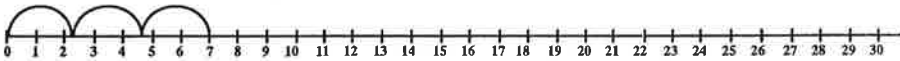
2.4.3. Les caractéristiques communes de ces situations

a) La caractérisation mathématique

Il s'agit dans l'un et l'autre cas d'un problème qui peut se caractériser formellement comme un problème de commensuration, c'est à dire de la manière suivante :

soit μ une mesure sur un ensemble A de parties d'un ensemble Ω telle que pour un élément U de A, on ait $\mu(U) = 1$. Pour un élément quelconque X de A, il existe un élément (p, q) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vérifiant l'égalité $q \times \mu(X) = p \times \mu(U)$. Cela signifie que q objets identiques à X ont même mesure que p objets identiques à U. La mesure $\mu(X)$ représente le rationnel $\frac{p}{q}$.

Par exemple, pour l'automate qui arrive à 7 en 3 sauts :



U est fixé, X définit l'automate.

Il s'agit de déterminer tous les couples (p, q) tels que $7 \times \mu(X) = 3 \times \mu(U)$.

Dans le cas des feuilles de papier si un papier A est tel que q feuilles ont ensemble la même épaisseur que p feuilles d'un autre papier U dont l'épaisseur est prise pour unité, alors la mesure de l'épaisseur d'une feuille est $\frac{p}{q}$. Dans le cas des automates, si avec q

sauts d'un automate A, on arrive au même point qu'avec p sauts d'un automate U, dont le saut est pris comme unité, alors la mesure du saut de l'automate A vaut $\frac{p}{q}$.

b) Le passage du milieu matériel à un autre milieu

Le choix des épaisseurs vise à obliger les enfants à utiliser de manière implicite une relation d'équivalence entre les couples constitués du nombre de feuilles et de la mesure de l'épaisseur du tas correspondant (mesure effectuée à l'aide du pied à coulisse). Comme l'a montré C. Margolins (1992, p. 126 puis pp. 139-140), les nombreuses manipulations de paquets de feuilles ainsi que les approximations des mesures des

épaisseurs amènent peu à peu la disqualification du milieu matériel au profit de l'utilisation de critères de validité basés sur l'utilisation implicite d'un modèle linéaire, modèle qui est par la suite explicité.

Pour la situation des automates, la portion de la droite numérique représentée, ainsi que la possibilité d'utiliser des réseaux de droites parallèles permet de la même façon d'avoir un milieu matériel fournissant des rétroactions à des anticipations que peuvent faire les étudiants. Les limitations produites rapidement, d'une part par l'imprécision relative des réseaux en question, et par les dimensions réduites des portions de droite graduée, créent les contraintes nécessaires à l'apparition d'un autre milieu "mathématique" constitué d'arguments s'appuyant sur la fonction linéaire de N dans N faisant correspondre à un nombre de sauts donné, l'entier n atteint par un automate déterminé.

c) Existence du couple spécifique

L'épaisseur comme le saut est ainsi caractérisée par un ensemble de couples dont l'un peut être choisi comme représentant. Dans les deux situations, il existe un couple tel que les autres se déduisent de celui-ci par multiplication de chacune de ses composantes par un nombre entier.

- pour les feuilles de papier, le couple (f_0, e_0) , tel que f_0 soit le plus petit nombre de feuilles nécessaires pour obtenir une mesure entière e_0 ,
- pour les automates, le couple (n_0, s_0) constitué du premier entier n_0 atteint par l'automate et du nombre s_0 de sauts correspondants.

d) La possibilité de déterminer la comparaison et l'addition

La comparaison et l'addition de ce qui va devenir les "rationnels" se font en s'appuyant sur la signification des situations (l'accolement de deux feuilles pour les épaisseurs, la mise en relais pour les sauts des automates), et en considérant que l'on veut définir des relations et des opérations qui prolongent les opérations déjà existantes dans l'ensemble des entiers.

La comparaison, ainsi que ces opérations, permettent ainsi de donner aux "épaisseurs" ou aux "sauts" le statut de nombre, en l'occurrence celui de nombre rationnel.

Les deux situations permettent de fournir des contextes de construction de l'ensemble des rationnels qui leur donnent le sens suivant :

1. une épaisseur ou un saut est un rationnel;
2. un rationnel a a une infinité de représentants (fractions $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers);

3. l'ensemble des représentants d'un rationnel peut être généré par l'un d'entre eux (fraction irréductible);

4. $\frac{a}{b}$ est l'épaisseur d'une feuille telle que si on "ajoute" b feuilles, on obtient une épaisseur a, ou encore le saut qui permet d'atteindre l'entier a en ajoutant b sauts de longueur $\frac{a}{b}$. $\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplié par b donne a ($a = b \times \frac{a}{b}$).

Ainsi l'addition étant définie, on peut utiliser la division euclidienne pour faire apparaître la partie entière d'un rationnel supérieur à 1. Si a est plus grand que b, on peut diviser a par b au sens habituel de la division euclidienne :

$$a = b \cdot q + r \text{ avec } 0 \leq r < b, \text{ donc } \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \text{ avec } 0 \leq \frac{r}{b} < 1 \text{ et } q \leq \frac{a}{b} < q+1.$$

Ceci permet de situer un rationnel non entier entre deux entiers.

Par contre le produit de deux rationnels ne peut s'interpréter dans les termes de ces situations, entraînant des limitations de sens.

Les rationnels sont ainsi obtenus par passage au quotient sur l'ensemble des couples d'entiers. Les classes d'équivalence sont engendrées par un élément générateur. Cet ensemble muni d'un algorithme de comparaison, d'une addition et d'une soustraction et par la suite d'une multiplication et d'une division par un entier réalise ainsi une extension des nombres entiers.

2.4.4. Les éléments spécifiques de la situation des automates

a) Accélération du passage du milieu matériel à un milieu utilisant des critères de validité

Le passage d'un milieu à un autre doit être beaucoup plus rapide dans le cas de la situation "Automate", compte tenu de la facilité des manipulations, des connaissances des étudiants et de la présence de la fonction linéaire. L'automate est déjà en quelque sorte un "modèle linéaire", ce qui permet cette accélération. Nous examinerons dans le chapitre suivant, à travers l'analyse a priori de la situation, les moyens de ralentir cependant le processus en introduisant des éléments d'incertitude dans le repérage des couples (n, s) rejoignant ainsi en partie les éléments d'incertitude dus aux mesures approximatives des épaisseurs des feuilles de papier dans la situation construite par G. Brousseau.

b) Rôle du couple générateur

Ce contexte fait jouer au couple constitué du premier entier atteint par l'automate et du nombre de sauts correspondants, un rôle tout à fait spécifique, en raison de sa position particulière sur la droite numérique. Ce couple générateur met particulièrement en évidence la fraction irréductible désignant un rationnel.

c) La façon de définir les opérations, en particulier l'addition

Pour la situation "Feuilles de papier", l'accolement des feuilles est prégnant pour définir l'addition, en s'appuyant sur la signification induite : accoler revient à "ajouter" deux feuilles et c'est bien sur cet aspect que s'appuie l'enseignant dans l'ingénierie de G. Brousseau. La nécessité de passer par des arguments liés au fait que l'on souhaite étendre l'ensemble des entiers ne s'impose donc pas.

Par contre, dans la situation des automates, il est possible de définir plusieurs additions en s'appuyant sur la signification fournie dans le contexte des automates (voir chapitre suivant). Il est donc nécessaire de disposer d'arguments mathématiques pour disqualifier certaines des additions qu'un joueur peut fournir.

Fonctionnant rapidement avec un milieu qui cesse d'être matériel, les conditions sont favorables à la production de définitions et d'arguments d'ordre mathématique. Le retour au contexte des automates permet de donner par la suite une signification à l'addition choisie pour des raisons mathématiques.

d) Présence et rôle de la droite numérique

Ce sont les entiers figurant sur la droite graduée, notamment un point particulier noté O correspondant à l'entier 0, qui vont jouer un rôle prépondérant. Les rationnels, construits à l'aide des sauts des automates, peuvent être associés à des points X extrémités des segments OX. Ils réalisent une extension des nombres entiers et sont représentés par les points de cette droite qui visualisent en quelque sorte ce processus d'extension.

2.5. Une situation fondamentale de décimaux

2.5.1. Le problème

Soit un rationnel $\frac{y}{x}$ non connu. Quelque soit $\varepsilon \geq 0$, il existe deux rationnels $\frac{q}{p}$ et $\frac{q'}{p'}$ tels que $\frac{y}{x}$ soit dans l'intervalle $\left[\frac{q}{p}, \frac{q'}{p'} \right[$ et tel que $\left| \frac{q}{p}, \frac{q'}{p'} \right| \leq \varepsilon$

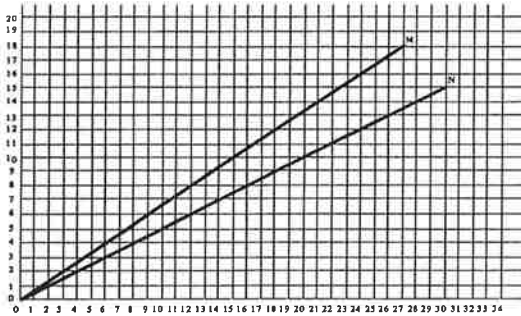
2.5.2. Les contextes utilisés

a) Dans l'ingénierie de G. Brousseau : les explorateurs

Deux joueurs A et B disposent chacun d'une fraction correspondant à un rationnel entre 0 et 10. Chacun doit localiser le rationnel de l'autre joueur, d'abord en proposant des intervalles du type $[a, b]$ dont les bornes a et b sont des entiers, puis des rationnels de telle sorte que l'intervalle soit de plus en plus petit. Les joueurs ont intérêt à coopérer car ce sont ceux qui obtiennent les encadrements les plus fins qui gagnent.

b) Dans notre ingénierie de formation : le tireur d'élite

Nous utilisons un contexte géométrique permettant de visualiser les rationnels. Un réseau à maille carrée est construit à partir de deux axes gradués régulièrement uniquement par les entiers naturels à partir d'un même point O de coordonnées (0, 0). On considère un nœud M de ce réseau repéré par les nombres x et y coordonnées de ce point. A chaque point est associée une fraction $\frac{y}{x}$ et à chaque fraction, un point. Aux diverses fractions désignant le même rationnel, correspond un ensemble de points alignés avec le point O.



On appelle angle de tir le rationnel associé à la fraction $\frac{y}{x}$ (c'est la pente de la droite d'équation $y = ax$). L'angle de tir des divers points associés aux fractions désignant un même rationnel est donc le même. On appelle écart entre deux angles de tir correspondant aux points M (x, y) et M' (x', y'), le nombre $\left| \frac{x}{y} - \frac{x'}{y'} \right|$.

Les joueurs "jouent" par groupe de quatre. Ils jouent deux contre deux. Chaque binôme dispose d'une fraction correspondante à un point du quadrillage que l'autre binôme ne connaît pas. Chacun va s'efforcer de viser au plus près le point inconnu Z de l'autre

binôme, en proposant deux fractions telles que l'écart entre les deux angles de tir soit le plus petit possible, l'angle de tir de Z étant entre les deux angles de tir proposés.

2.5.3. Les caractéristiques communes des situations

a) La caractérisation mathématique

Soit un rationnel $\frac{y}{x}$ non connu, il s'agit de trouver deux rationnels $\frac{q}{p}$ et $\frac{q'}{p'}$, les plus proches possibles tels que $\frac{y}{x}$ soit dans l'intervalle $\left[\frac{q}{p}, \frac{q'}{p'} \right[$

b) Le rôle des décimaux dans la recherche des rationnels "bons" candidats à l'encadrement

Quand on est émetteur, il faut déterminer l'écart entre deux rationnels. Quand on est récepteur, il faut chercher si un rationnel est entre deux autres. Dans tous les cas, on est amené à faire de nombreux calculs d'écart. Pour des raisons d'efficacité, les joueurs vont privilégier les fractions dont les dénominateurs sont des puissances de 2 ou de 10. Les fractions décimales jouent un rôle spécifique en raison des facilités de calcul qu'elles procurent. Nous étudierons de manière plus précise, dans l'analyse a priori de la situation, (Chapitre C2, §3) quelles sont les fractions privilégiées suivant que les binômes sont émetteurs ou récepteurs.

2.5.4. Les éléments spécifiques de la situation du tireur d'élite

a) Le choix du quadrillage

Dans la situation des explorateurs, le support utilisé est la droite numérique : l'ensemble R est considéré comme préconstruit, Q étant un sous ensemble de R. Un point de la droite numérique correspond ainsi à l'ensemble des fractions désignant un rationnel : ces objets tendent donc à être confondus.

Dans le contexte du tireur d'élite, l'objet fraction, associé à un point du quadrillage qui est "visé" par les joueurs, apparaît comme nettement distinct de l'objet rationnel qui correspond à la pente de la droite. Le savoir concernant les fractions et les rationnels apparaît comme "décompactifié", permettant de dissocier deux types d'objets distincts.

D'autre part, cela permet, dans une première partie, de poser le problème de l'approximation d'un rationnel par d'autres rationnels et de donner du sens à la notion d'écart entre deux angles de tir.

Nous fixons ainsi un point Z du quadrillage. Il s'agit de trouver dans *une portion déterminée* du quadrillage contenant le point Z, un point S tel que l'angle de tir de S soit différent et le plus proche possible de l'angle de tir de Z. La formulation générale du problème peut être la suivante :

Soit une fraction $\frac{y}{x}$. Il s'agit de trouver une fraction $\frac{q}{p}$ telle que, p étant inférieur ou égal à p_0 , q inférieur ou égal à q_0 , le rationnel $\frac{p}{q} \neq \frac{x}{y}$ soit le plus proche possible du rationnel $\frac{y}{x}$, c'est à dire tel que $\left| \frac{q}{p} - \frac{y}{x} \right|$ soit le plus petit possible (en étant différent de zéro).

b) L'ouverture possible de la situation

Comme le signale T. Assude (1992, pp. 59-62),

«ce problème est un des rares problèmes élémentaires où la notion d'irrationalité apparaît comme notion-clé.

C'est parce ce que la pente d'une droite passant par l'origine du quadrillage (considéré comme infini) est rationnelle ou irrationnelle, que celle-ci passe ou non par un point du quadrillage. L'existence de droites ne passant par aucun point du quadrillage, a priori peu évident pour les élèves ou les étudiants, est liée à l'existence de nombres irrationnels. L'auteur rapporte un moyen relativement simple proposé par un enseignant¹⁷. Il considère une droite d dont la pente par rapport à l'axe des abscisses Ox est de 60°. Si cette droite passait par un point P de coordonnées (m, n), alors on aurait, en considérant le triangle OPH, H projection de P sur l'axe Ox :

$$m^2 + n^2 = (2n)^2, \text{ soit } m^2 = 3n^2$$

Ce qui aboutit à une contradiction, puisque dans la décomposition de m^2 , les exposants des facteurs sont tous pairs tandis que dans celle de m^2 apparaît le facteur premier 3 avec un exposant impair.

Cette situation permet une ouverture à un formateur qui souhaiterait montrer qu'il existe d'autres nombres que les rationnels.

17. Pascual Ibarra, 1976, Le nombre réel dans l'enseignement secondaire. Leçon active pour élèves de 14 à 15 ans, Actes de la XXVIIIème Rencontre organisée par la CIEAEM.

Ces deux situations (explorateurs et tireur d'élite) permettent de fournir des contextes mettant en évidence la possibilité d'approcher un rationnel d'aussi près que l'on veut par deux décimaux ou par deux nombres dyadiques (densité de D dans Q). Elles permettent de fournir un moyen de trouver le quotient décimal de la division de deux entiers.

3. CONCLUSION

Nous venons de tracer le canevas d'un processus possible pour une ingénierie de formation. Ce choix s'oppose à une simple transformation du texte du savoir, comme nous avons pu le repérer dans divers enseignements proposés, et à une juxtaposition d'exercices ne permettant pas de donner une vision cohérente des systèmes de nombres et de leurs interrelations. Le choix consiste à "contre-transposer" une partie d'une ingénierie, pour laquelle nous disposons d'une étude didactique approfondie, en l'occurrence celle élaborée par G. Brousseau, en l'adaptant pour le public considéré. En utilisant les mêmes situations fondamentales, nous avons construit, dans la classe des différents problèmes possibles, ceux qui nous paraissent adaptés à un public d'étudiants en formation et nous avons indiqué les caractéristiques communes avec les problèmes proposés par Brousseau ainsi que les éléments spécifiques.

Nous rappelons ci-dessous les caractéristiques des systèmes de nombres des deux situations "Automates" et "Tireur d'élite":

Les situations	Caractéristiques des systèmes de nombres
Automates	Rationnel comme mesure, (modèle de la commensuration) rationnel comme classe d'équivalence
Tireur d'élite	Les décimaux, approximations de rationnels : D dense dans Q .

Les connaissances, solutions des problèmes proposés dans l'ingénierie de formation, peuvent être relues dans les termes d'un texte du savoir cohérent, qui apparaisse comme légitime au regard de la communauté scientifique. Nous allons dans le chapitre suivant, en réalisant l'analyse a priori des deux principales situations, en faire une étude plus détaillée.

CHAPITRE C2

ANALYSE A PRIORI DE SITUATIONS ADIDACTIQUES CONCERNANT LES NOMBRES RATIONNELS ET DÉCIMAUX

Nous développons dans ce chapitre l'analyse a priori des deux situations dont nous avons donné le canevas dans le chapitre précédent. Nous mettons en évidence des variables de chacune de ces situations, en précisant quel rôle peuvent jouer certaines des valeurs que l'on peut leur attribuer. Nous verrons ainsi la spécificité de chacune de ces situations au sein des deux grandes classes de situations correspondant l'une à une situation fondamentale des rationnels et l'autre à une situation fondamentale des décimaux.

1. ANALYSE A PRIORI DE LA PREMIÈRE PARTIE DE LA SITUATION DES AUTOMATES

1.1. Formulation du problème

Un automate est défini par un couple que nous appelons couple de base ou plusieurs couples $(n_i, s_j), i \in B, B \subset \mathbb{N}, s_j$ désignant le nombre de sauts lui permettant d'atteindre un entier n_i situé sur une droite numérique dont une portion est représentée. Le fait que l'automate se déplace régulièrement sur une piste remplace la donnée d'une relation d'équivalence entre les couples et fournit implicitement une relation de linéarité entre les entiers et les sauts correspondants. L'explicitation de ces classes d'équivalence apparaît ainsi comme un jeu caractéristique permettant de définir les rationnels.

Les données initiales n'étant constituées que d'un couple ou d'un ensemble fini de couples, on regarde quels sont les *candidats* à être réellement des automates. En particulier, on est donc amené à se poser le problème de la "compatibilité" des couples $(n_i, s_j), i \in B, B \subset \mathbb{N}$, autrement dit, s'il y a une relation de linéarité entre eux. Une fois celle-ci assurée, on recherche l'ensemble P des différents couples ou points (n, s) , c'est à dire les entiers n par lesquels passe l'automate après s sauts, dans le but d'avoir une désignation en compréhension.

Le problème général, lorsqu'on prend en compte plusieurs automates (chacun étant déterminé par au moins un couple dont les deux termes sont fournis) est le suivant:

Par quels points (n^i, s^i) d'une zone (sous-ensemble de N) passent les "candidats" automates A_j $j \in P$, $P \subset N$ définis par les couples (n^i, s^i) $i \in B$, $B \subset N$?

Par exemple, A^1 est défini respectivement par les couples $(4, 6)$ et $(6, 9)$ et A^2 par les couples $(7, 3)$ et $(21, 8)$.

On regarde tout d'abord s'ils sont des automates :

A^1 est un "bon candidat" et l'ensemble des couples est de la forme $(2k, 3k)$, $k \in N$.

A^2 n'est pas un "bon candidat". Il faut donc modifier l'une des données, par exemple le couple $(21, 8)$ en $(21, 9)$: l'ensemble des couples correspondant à cet automate est de la forme $(7k, 3k)$, $k \in N$. Mais on peut remplacer aussi $(21, 8)$ par $(21, 6)$, l'ensemble des couples recherchés étant alors de la forme $(7k, 2k)$, $k \in N$.

Remarques :

1. Certains couples déterminant les automates ne sont donnés que par l'un de ses termes.
2. Certaines données définissant les automates peuvent ne pas être compatibles. L'étude et la modification de celles-ci représentent alors un sous-problème préliminaire du problème général posé plus haut. On cherche dans ce cas à rendre minimales les modifications nécessaires.

1.2. Les variables liées au savoir en jeu

Les variables qui sont du côté du savoir en jeu peuvent être considérées comme des variables de la situation adidactique. En effet, elles permettent, lorsqu'on fixe les valeurs de celles-ci, de caractériser des classes de sous-problèmes pour lesquelles certaines stratégies sont possibles. Nous déterminons celles qui sont pertinentes vis-à-vis de l'apprentissage visé, c'est-à-dire celles qui contraignent un joueur "rationnel" à utiliser telle ou telle stratégie.

Nous avons identifié les variables suivantes, dont nous indiquons les valeurs qu'elles sont susceptibles de prendre :

	Variables	Valeurs des variables
Var 1	nombres d'automates étudiés	1, 2, ..., n
Var 2	mode de détermination d'un automate	1, 2, 3... n couples
Var 3	nature des couples servant à la désignation d'un automate	les couples sont déterminés par deux entiers les couples sont incomplets
Var 4	qualité des points associés aux couples déterminant les automates	les points appartiennent / n'appartiennent pas au dessin matériel
Var 5	données relatives à un même automate	spécifiées comme exactes / non "compatibles" (certaines peuvent être considérées comme erronées)
Var 6	rapport entre les deux nombres entiers n et s figurant dans un couple	n et s sont premiers entre eux n et s ne sont pas premiers entre eux
Var 7	zone dans laquelle on cherche les points par lesquels passe un automate	zone située dans le dessin matériel zone située à l'extérieur du dessin matériel zone mixte

Deux exemples

Nous donnons à titre d'exemples deux classes de sous-problèmes que l'on obtient en spécifiant certaines valeurs des variables.

Exemple 1 : en fixant Var 1 = 1; Var 2 = 3; Var 3 : 2 couples incomplets ; Var 5 : données compatibles, on obtient la classe de sous-problèmes :

Un automate est déterminé par les trois couples (n_1, s_1) , (n_2, s_2) , (n_3, s_3) , compléter les couples proposés.

Ces problèmes reviennent à chercher deux points par lesquels passe l'automate déterminé par (n_1, s_1) , points dont on connaît l'un des deux termes.

Exemple 2 : en fixant Var 1 = 1 ; Var 2 = 4 ; Var 3 par la donnée de 3 couples incomplets ; Var 5 par des données non compatibles, on obtient alors la classe de sous-problèmes :

Un automate est déterminé par les quatre couples (n_1, s_1) , (n_2, s_2) , (n_3, s_3) , (n_4, s_4) , modifier si nécessaire les données (avec un minimum de changements) et compléter les couples proposés.

Le problème revient à vérifier si les diverses données sont compatibles, c'est-à-dire si les automates passent par des points correspondants aux entiers n_1, n_2, n_4 , et si le nombre de sauts s_3 peut être effectivement réalisé compte tenu du nombre de sauts s_3 . On sera

ainsi amené à trois changements maximum, le problème par la suite revenant là à chercher trois points, c'est à dire trois couples dont on connaît l'un des deux termes.

1.3. Deux sous-problèmes "élémentaires"

1.3.1. Premier sous-problème

Si la résolution d'un problème général nécessite obligatoirement la résolution de sous-problèmes, nous dirons que ces derniers sont des *problèmes élémentaires* relativement à ce problème.

Dans le cas que nous étudions, se poser le "problème général" revient à chercher des points par lesquels passe chacun des automates. Puisque nous disposons pour la détermination de chacun des automates d'au moins un couple que nous appelons couple de base, nous sommes amené dans les différents problèmes que nous pouvons envisager à mettre en rapport les autres couples (données compatibles ou non, complètes ou non) avec le couple en question. Nous sommes donc conduit à examiner la classe de sous-problèmes en fixant $\text{var } 1 = 1$, $\text{var } 2 = 1$, ce qui nous permet d'expliciter l'énoncé du premier sous-problème élémentaire :

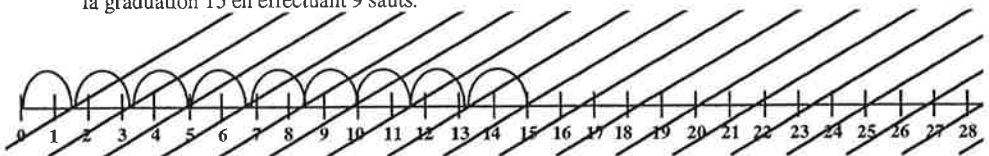
Est-ce que l'automate déterminé par le point (n_1, s_1) passe par le point (n, s) ?

1.3.2. Les stratégies possibles pour résoudre ce sous-problème

a) Stratégie Res s'appuyant sur une pratique d'utilisation d'un réseau de parallèles

Un réseau de parallèles équidistantes découpe sur toute droite sécante des segments égaux. Cette propriété peut être utilisée pour trouver géométriquement les points par lesquels passe un automate arrivant par exemple à la graduation n en s sauts. On partage le segment allant du point gradué 0 au point gradué n , en s segments égaux.

Ainsi, dans le schéma ci-dessous, on a représenté le parcours d'un automate qui arrive à la graduation 15 en effectuant 9 sauts.



On peut constater expérimentalement (à l'aide du réseau) que l'automate passe par les points correspondant aux entiers 5, 10, 15, 20, 25, 30 en faisant respectivement 3, 6, 9, 12, 15, 18 sauts.

Autrement dit, on peut savoir si l'automate passe par un point (n_1, s_1) , $n_1 < L$ de la portion de droite graduée $[0, L[$.

*b) Stratégies utilisant une des propriétés de la fonction linéaire
 $f: n \rightarrow s$ de N dans N*

b1) Stratégie Flimulent

Appelons f la fonction linéaire de N dans N , faisant correspondre les entiers par lesquels passe l'automate et les sauts correspondants. Les règles d'action déterminant la stratégie appelée **Flimulent** s'appuient sur le fait que $f(kn) = kf(n)$, k entier.

Cette stratégie permet d'affirmer que l'automate passe par les points de la forme $(k.n, k.s)$. Elle s'interprète dans les termes de la situation par p répétition d'une suite de s sauts : l'automate atteint ainsi la graduation $p.n$.

En reprenant l'exemple cité plus haut, sans utiliser le support matériel réseau de parallèles, tous les multiples de 15 sont atteints par l'automate, les multiples de 9 correspondants représentant le nombre de sauts.

b2) Stratégie Gén utilisant le couple correspondant au premier point atteint par un automate

Elle consiste à chercher le premier entier, **non nécessairement donné**, atteint par l'automate en utilisant le modèle linéaire précédent grâce aux diviseurs communs des deux entiers n et s du couple déterminant l'automate.

Si (n_0, s_0) est le couple correspondant au premier entier atteint, alors **tous** les autres entiers n atteints en p sauts sont de la forme $n = p.n_0$ et $s = p.s_0$.

En effet, si un entier n atteint en k sauts n'était pas de cette forme, alors n serait compris entre deux entiers de la forme kn_0 et $(k+1)n_0$, atteints respectivement en ks_0 sauts et $(k+1)s_0$ sauts. Il en résulterait que l'entier $n - kn_0 < n_0$ serait atteint en $s - ks_0$ sauts ce qui est contradictoire avec le fait que n_0 est le premier entier atteint.

Par exemple, si l'automate arrive à 15 en 9 sauts, l'entier 5 est le premier atteint en 3 sauts. L'ensemble couples correspondant aux entiers atteints sont de la forme $(3p, 7p)$.

On voit que cette stratégie fait jouer au couple (n_0, s_0) un rôle tout à fait particulier, couple que nous nommerons **couple générateur**.

D'après ce qui précède, si un automate est défini par l'entier n et le nombre de sauts correspondant, alors n_0 divise n et s_0 divise s avec le même quotient, autrement dit il existe d tel que $n_0 = n : d$ et $s_0 = s : d$. d est le **plus grand diviseur** de n et de s sinon n_0 ne serait pas le premier entier atteint.

Ceci donne une méthode systématique pour trouver le couple générateur : il faut chercher le P.G.C.D des deux termes et diviser chaque terme par celui-ci.

b3) Stratégie Flimulrat

Cette stratégie consiste à passer d'un entier à un autre par la succession de deux opérations, division par un entier puis multiplication par un entier. Elle correspond d'abord à la recherche d'un point antérieur $(n:q, s:q)$ au point donné puis à la détermination des points de la forme $(k.(n:q), k.(s:q))$. Il s'agit d'une stratégie intermédiaire entre la procédure Flimulent et la stratégie Gen

c) Stratégie Res/Flimul

Cette stratégie consiste à déterminer le premier point par lequel passe l'automate à l'aide du réseau de parallèles. Comme pour la stratégie Res, elle est dépendante de la représentation sous forme de dessin fournie au moment de la donnée de l'automate.

Les autres sont déterminés en utilisant une propriété de la fonction linéaire f comme pour les stratégies précédentes. Celle-ci permet de trouver tous les points par lesquels passe l'automate.

d) Stratégie Procroix

Elle est basée sur le fait que deux couples (n_1, s_1) et (n_2, s_2) sont considérés comme formant une proportion à propos duquel on applique l'automatisme du produit en croix. Elle permet de vérifier que l'automate passe bien par les deux points correspondants. Elle peut permettre, par des essais successifs, de trouver des points par lesquels passe l'automate déterminé par le point (n_1, s_1) .

e) Stratégies s'appuyant sur les fractions ou les décimaux

e1) Stratégie Frac utilisant les fractions n/s

On recherche les multiples de n_1/s_1 qui sont entiers, soit par addition répétée, soit par multiplication par des entiers successifs. Cette stratégie interprète n/s comme étant la

"longueur" du saut de l'automate. On met ainsi en évidence les points par lesquels passe l'automate, en particulier les entiers.

e2) Stratégie Dec utilisant une approximation décimale de n/s

Elle consiste à calculer le quotient décimal approché q de n par s . On recherche ensuite si des multiples de q sont des entiers. Compte tenu de l'approximation du quotient, cette stratégie ne permet pas, sauf cas particuliers, de trouver les entiers par lesquels passe l'automate.

1.3.3. Étude de coût pour les stratégies, domaine de fonctionnement

Il s'agit toujours du problème :

Est-ce que l'automate déterminé par le point (n_1, s_1) passe par le point (n, s) ? Nous supposons que $n > n_1$ et $s > s_1$ et que s_1 n'est pas multiple de n_1 . D'autre part, n et n_1 sont supposés non premiers entre eux, sinon la réponse au problème est immédiate.

Nous déterminons ici le coût d'une stratégie par le nombre d'opérations arithmétiques qu'il faut faire pour pouvoir résoudre le problème, nous considérons comme négligeable le coût de la manipulation du réseau.

Le coût de la stratégie Res est donc fixée à 0, puisque elle ne nécessite pas d'opérations arithmétiques, elle ne fonctionne que si les points correspondant à n_1 et à n sont dans le dessin matériel.

Pour la stratégie Flimulent, qui ne fonctionne que si n est multiple de n_1 , deux opérations sont nécessaires : diviser n par n_1 et diviser s par s_1 . Le coût est le même pour la stratégie Res/Flimulent, qui ne fonctionne que si le premier couple est dans la zone du dessin matériel. En effet, c'est la manipulation du réseau qui permet de trouver le premier entier par lequel passe l'automate, et par la suite, on est ramené au cas précédent.

Pour la stratégie Flimulrat, qui fonctionne toujours, il faut trouver un entier k que divise à la fois n et n_1 , ce qui conduit au minimum aux deux opérations $n:k$ et $n_1:k$ et ensuite à la vérification que les deux nombres trouvés divisent respectivement s et s_1 .

Pour la stratégie Gen, qui elle aussi, fonctionne toujours, si n et s sont premiers entre eux, le coût est identique à celui de la stratégie Flimulent. Par contre si n et s ne sont premiers entre eux, la recherche du premier couple (n_0, s_0) entraîne la décomposition de n_1 et s_1 en facteurs premiers, c'est-à-dire au moins deux opérations, suivie des divisions de n par n_0 et de s par s_0 . Au total, il faut au minimum quatre opérations.

Procroix nécessite de faire les deux opérations $n_1 \times s$ et $s_1 \times n$, ce qui est toujours possible.

Pour la stratégie Frac, qui fonctionne toujours, la recherche des multiples de n_1/s_1 qui sont entiers, nécessite au moins deux opérations (multiplication de n_1 par un entier et division par s_1). Cela fournit en fait le premier entier n_0 par lequel passe l'automate. Puis une opération pour trouver s_0 est nécessaire, puis deux opérations le sont pour voir si n et s sont multiples respectivement de n_0 et de s_0 .

Nous résumons ce qui précède dans le tableau suivant :

Stratégie	Coût	domaine de fonctionnement
Res	0	ne peut fonctionner que si les points sont dans la zone du dessin matériel
Flimulrat	minimum 4	fonctionne toujours
Flimulent	2	ne fonctionne que si n est multiple de n
Procroix	2	fonctionne toujours
Res/Flimulent	2	ne fonctionne que si le premier couple est dans la zone du dessin matériel
Frac	minimum 5	fonctionne toujours
Gén	* n et s non premiers entre eux : minimum 4 * si n et s premiers entre eux : 2	fonctionne toujours

Remarque :

on peut constater que les stratégies sont les mêmes et leur coût identique pour le problème suivant qui, lui aussi, peut être considéré comme élémentaire.

Est-ce que l'automate déterminé par le point (n_1, s_1) passe par le point (n', s') ?

La deuxième composante n'est pas connue et il s'agit de la spécifier quand la réponse est positive. Quelles que soient les stratégies, on est conduit à faire les mêmes opérations que pour le problème précédent excepté pour la stratégie Procroix, où l'on est amené à faire une multiplication suivie d'une division.

1.3.4. Les contraintes provoquées par le choix des valeurs des autres variables

D'après l'étude qui précède, qui a mis en évidence le domaine de fonctionnement des diverses stratégies, nous voyons les contraintes engendrées sur les stratégies par certaines valeurs des autres variables.

a) La zone dans laquelle on recherche un ou des entiers

Si la zone est à l'intérieur du dessin matériel, la stratégie Res peut toujours fonctionner. Par contre si la zone proposée est à l'extérieur, la stratégie Res se trouve bloquée.

b) Le choix du couple initial désignant l'automate

- Si le point correspondant au couple proposé au départ pour définir l'automate est dans la zone correspondant au dessin matériel de la graduation, il est toujours possible d'utiliser le réseau de parallèle pour mettre en évidence le premier entier atteint (stratégie Res/Flimul).
- Si le point se trouve hors de la zone matérialisée, les stratégies Res et Res/Flimul se trouvent bloquées.
- Si le couple correspond à deux nombres qui sont premiers entre eux, les stratégies Flimulent, Procroix et Gén ont un coût comparable.
- Si le couple est constitué de deux nombres qui ne sont pas premiers entre eux, c'est la stratégie Procroix qui est la moins coûteuse.

Si nous voulons privilégier la stratégie Gén, qui est la stratégie visée par l'apprentissage, il nous faut examiner des problèmes qui rendent les stratégies fonctionnant dans tous les cas plus coûteuses.

1.3.5. Une autre classe de sous-problèmes élémentaires

Pour résoudre le problème général, il faut s'intéresser à chacun des automates. Nous verrons plus loin l'intérêt de poser le problème général concernant plusieurs automates.

Énoncé du deuxième sous-problème élémentaire :

Un automate est déterminé par un couple (n_1, s_1) , par quels points (n, s) passe cet automate pour $L1 \leq n \leq L2$.

Toutes les stratégies envisagées pour le problème précédent peuvent être utilisées pour ce nouveau problème. Seule la stratégie Flimulrat ne se distingue guère de la stratégie Flimulent car elle ne fournit pas non plus toutes les solutions. Nous ne l'envisageons donc pas pour les calculs de coût que nous déterminons à présent.

Nous appelons :

- D le nombre de divisions nécessaires pour déterminer le P.G.C.D de n_1 et de s_1 par décompositions successives,
- p la longueur de l'intervalle $[L1, L2]$,
- $q_{(p;n_0)}$ le quotient entier de p par n_0 , $q_{(p;n_1)}$ le quotient entier de p par n_1 , $q_{(L1;n_1)}$ le quotient entier de L1 par n_1 .

Coût de la procédure Flimulent

On recherche la suite des multiples situés dans l'intervalle considéré de longueur p . Le premier entier situé dans l'intervalle nécessite le calcul du quotient entier de $L1$ par n_1 ($n_1 q(L1:n_1) + 1$). Le nombre de multiples de n_1 dans l'intervalle $[L1, L2]$ est égal au quotient de p par n_1 . La recherche des multiples de n_1 dans l'intervalle nécessite donc $1 + q(p:n_1)$ calculs. Il en est de même pour la recherche des multiples de s_1 . Le coût total est donc de $2 + 2q(p:n_1)$.

Coût de la procédure Gen

Il est nécessaire de trouver le premier n_0 par lequel passe l'automate, ce qui nécessite la recherche du P.G.C.D de n_0 et de s_0 , soit D opérations suivi de 2 divisions, d'où $D+2$ opérations. Ensuite le nombre de calculs pour trouver les entiers situés dans l'intervalle $[L1, L2]$ est du même type que précédemment, c'est-à-dire $1 + q(p:n_0)$. Il en est de même pour la recherche des multiples de s_1 . Le coût total est de $D+4 + 2q(p:n_0)$ ¹.

Coût de la procédure Frac

Pour trouver le premier entier par lequel passe l'automate, les procédés sont divers. Nous admettons que cela consiste à trouver la fraction irréductible correspondante, ce qui conduit à faire $D+2$ opérations. Les mêmes considérations que précédemment pour la recherche des multiples de n_1 et s_1 font que le coût est identique au coût de la procédure Gen.

Coût de stratégie Res/Flimulent

Le premier entier n_0 est déterminé à l'aise du réseau, le coût est donc simplement de $2q(p:n_0)$.

Coût de la procédure Procroix

Pour *chaque* valeur n de l'intervalle $[L1, L2]$, il est nécessaire de faire 2 opérations (produit de n par s_1 , puis division du résultat par n_1 pour déterminer si le point correspondant est un point par lequel passe l'automate), ce qui conduit à $2p$ opérations si p est la longueur de l'intervalle $[L1, L2]$.

Nous résumons ce que nous venons de trouver dans le tableau ci-dessous :

1. Le coût de cette procédure peut être très variable selon les valeurs de n_1 et s_1 .

Stratégie	Coût	Conditions de fonctionnement	Fournit toutes les solutions
Res	0	ne peut fonctionner que si les points sont dans la zone du dessin matériel	oui
Flimulent	$2 + 2q_{(p;n1)}$	fonctionne toujours	non
Procroix	$2 \times p$	fonctionne toujours	oui
Res/Flimulent	$2q_{(p;n0)}$	ne fonctionne que si le premier couple est dans la zone du dessin matériel	oui
Frac	$D + 4 + 2q_{(p;n0)}$	fonctionne toujours	oui
Gén	$D + 4 + 2q_{(p;n0)}$	fonctionne toujours	oui

Si p augmente, p croît plus rapidement que $q_{(p;n0)}$. Par exemple si on prend $p > 1/2(D + 4 + 2q_{(p;n0)})$, les stratégies Frac et Gen ont un coût moindre que la stratégie Procroix. De la même façon, on voit que pour p suffisamment grand, toutes les stratégies ont un coût moindre que Procroix.

1.4. Analyse du problème général : choix des variables

1.4.1. Mode de détermination d'un automate

Nous recherchons les valeurs des variables tendant à rendre nécessaire l'utilisation de la stratégie Gén, qui est la connaissance visée, par un blocage des autres stratégies ou une augmentation importante de leur coût. Nous avons vu que les problèmes élémentaires où un automate est déterminé par un seul couple ne le permettent pas. Il en résulte que nous allons prendre un nombre de couples déterminant un automate supérieur à 2 ($\text{Var } 2 > 2$).

1.4.2. Les données relatives à un même automate

Si les données relatives à un même automate sont compatibles, nous sommes ramené à un ensemble de sous-problèmes élémentaires du type de ceux étudiés précédemment. Nous allons donc choisir au moins un automate dont les données ne sont pas compatibles et examiner les effets sur les stratégies explicitées précédemment.

La non compatibilité des données nécessite donc que celles-ci soient modifiées et nous imposons dans ce cas-là que le nombre de modifications soit minimum. Puisqu'il existe un couple de base complet, celui-ci va servir de référence. Prenons un exemple qui peut

être généralisé : considérons l'automate J donné par trois couples et dont il faut déterminer un point dans une zone délimitée :

	Automate J
1	(;)
2	(; 20)
3	(60 ;)
4	(360 ; 140)

Les stratégies Res et Res / Flimul sont bloquées en raison du choix du couple (360 ; 140). Les stratégies Procroix et Frac permettent de constater que les données ne sont pas compatibles. Pour faire les modifications nécessaires, il faut faire des essais, ce qui rend ces stratégies très coûteuses en terme de nombre d'opérations.

Par contre, la stratégie Gén permet de solutionner le problème de manière économique.

On cherche le couple initial (18 ; 7) à partir du couple (360 ; 140). Ceci est contradictoire avec le troisième couple (; 20). On peut donc penser à modifier les données 20 et 60 en fonction du couple initial, par exemple en les remplaçant par 14 et 72, ce qui correspond à deux modifications.

Une solution consiste à prendre pour les composantes du premier couple un diviseur de 60 ($60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$) et de 20 ($20 = 2 \times 2 \times 5$), par exemple (5, 2) et faire en sorte de ne modifier qu'un terme du dernier couple, ce qui conduit aux solutions :

Solution 1
(5 ; 2)
(50 ; 20)
(60 ; 24)
(350 ; 140)

Solution 2
(5 ; 2)
(50 ; 20)
(60 ; 24)
(360 ; 144)

Ce ne sont évidemment pas les seules solutions possibles avec un **seul** changement, puisqu'on peut prendre d'autres diviseurs de 20 et 60 pour former le premier couple. D'une manière générale, la mise en évidence d'un couple générateur, qu'il soit compatible ou non avec les autres données, permet de résoudre toutes les situations du type suivant :

Solution 1
(;)
(; s1)
(n2 ;)
(n3 ; s3)

ou encore

Solution 2
(n0 ;)
(; s1)
(n2 ;)
(n3 ; s3)

La condition est que les différentes données ne soient pas compatibles mais que n_2 et n_3 dans le cas de la solution 1 et que n_0 , n_2 , n_3 dans le cas de la solution 2 aient un diviseur commun. On est ainsi assuré de n'avoir à faire qu'une modification.

1.4.3. Le nombre d'automates

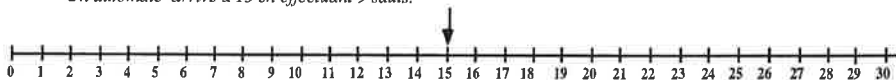
En choisissant plusieurs automates, on peut faire en sorte que la procédure Gén soit la seule procédure qui permette de résoudre **systématiquement** tous les cas. Autrement dit, dans le calcul du coût, nous prenons non seulement le nombre d'opérations que nécessite la stratégie mais aussi le caractère systématique ou non de celle-ci pour résoudre une classe de problèmes donnés. La procédure Gén en assure ainsi le caractère optimal.

1.5. Choix des types de problèmes proposés

1.5.1. Les problèmes proposés

Premier problème

Un automate arrive à 15 en effectuant 9 sauts.



Trouver tous les entiers par lesquels passe l'automate avant 31.

Deuxième problème

Un automate arrive à 10 en 14 sauts : trouver tous les entiers entre 150 et 180 par où passe cet automate ainsi que le nombre de sauts correspondant.

Troisième problème

Vous allez jouer le rôle d'"experts" pour examiner un tableau de relevé de "contrôleurs en automates". Les contrôleurs ont décidé d'écrire (10 ; 14) pour indiquer qu'un automate arrive à 10 en 14 sauts.

Voici un tableau où sont consignés des relevés concernant quatre automates A, B, C, D. Ces relevés incomplets ont été faits par quatre contrôleurs 1, 2, 3 et 4 : ces contrôleurs sont placés de plus en plus loin de l'origine de la piste.

	A	B	C	D
Contrôleur 1	(5 ; 4)	(8 ; 14)	(6 ; 10)	(; 4)
Contrôleur 2	(25 ; 19)	(32 ;)	(12 ;)	(6 ;)
Contrôleur 3	(; 32)	(40 ;)	(; 30)	(12 ;)
Contrôleur 4	(120 ; 96)	(; 84)	(21 ;)	(24 ; 28)

Consigne

Complétez et corrigez ce tableau. (Ne corrigez un nombre que si vous êtes certains que ce nombre est erroné)

Quatrième problème

Même texte et même consigne que précédemment mais avec le tableau suivant :

	F	H	I	J
Contrôleur 1	(12 ; 8)	(15 ; 54)	(16 ; 104)	(;)
Contrôleur 2	(18 ; 12)	(25 ; 90)	(41 ;)	(; 20)
Contrôleur 3	(30 ;)	(35 ;)	(; 507)	(60 ;)
Contrôleur 4	(43 ; 28)	(; 144)	(210 ; 1365)	(360 ; 140)

1.5.2. Le choix de certaines des valeurs des variables

Trois variables différentes identifiées au § 12 affectent le couple de base :

Var 5 : Les données relatives à un automate

Une valeur non compatible avec les autres couples ne peut évidemment être donnée que s'il y a d'autres couples. Dans le cas où il n'y a pas de compatibilité, compte tenu de la contrainte de faire le moins de modifications, nous avons soit une valeur du couple de base que l'on laisse inchangée, soit une valeur qu'il faut modifier : c'est ce que nous notons sous les termes "à laisser" et "à modifier".

Var 6 : Le rapport entre les deux nombres entiers figurant dans le couple

Le couple est ou non générateur. Nous l'appelons générateur contingent quand ses deux termes ne sont pas premiers entre eux, mais qu'il est susceptible d'engendrer les autres couples en multipliant chacun des termes par un entier.

Var 4 : Qualité des points associés aux couples déterminant l'automate

Le point se trouve dans ou hors de la zone matérielle.

Deux variables concernent les autres points (que ce soient ceux qui participent à la détermination de l'automate ou ceux que l'on cherche à trouver).

Var 2 : Mode de détermination d'un automate

Il y a zéro ou plusieurs autres points qui déterminent l'automate (ici les deux valeurs envisagées sont 0 et 3; dans le premier cas, il y a p points à chercher, dans l'autre 0 point).

Var 7 : Zone dans laquelle on cherche les points par lesquels passe l'automate

Les points se trouvent dans ou hors de la zone matérielle.

Le choix des variables est résumé dans le tableau ci-dessous pour un automate déterminé.

Couple de base Autres points		Compatible		Non compatible			
		Générateur	Non générateur	Générateur contingent		Non générateur	
				à laisser	à modifier	à laisser	à modifier
0 point à vérifier p points à chercher	Dans la zone matérielle		1 ^{er} problème				
	Hors de la zone matérielle		2 ^{ème} problème				
3 points à vérifier 0 point à chercher	Dans et hors de la zone matérielle	3 ^{ème} pb. Automate B	3 ^{ème} pb. Automate C	3 ^{ème} pb. Automate A		3-4 ^{ème} pb. Automates D, H *	4 ^{ème} pb. Automates F, I *

* Seuls automates pour lesquels le couple de base est hors de la zone matérielle.

D'après l'analyse a priori faite auparavant, nous pouvons conclure (nous regroupons sous le terme de Flimul toutes les stratégies faisant appel aux propriétés de linéarité de la fonction $n \rightarrow s$ de N dans N) :

Premier problème

Les stratégies possibles sont Res, Flimul, Res/Flimul, Frac, Dec, Gén.

Deuxième problème

La stratégie Res est bloquée, les autres restent possibles.

Troisième problème (concernant les 4 automates A, B, C, D)

Res/Flimul, Procroix peuvent être utilisées localement pour certains automates

Flimul et Gén sont utilisables pour **tous** les automates.

Quatrième problème (concernant les 4 automates F, H, I, J)

Res/Flimul, Procroix, Flimul peuvent être utilisées localement pour certains automates.

Seul Gén est utilisable dans **tous** les cas.

1.6. Les variables organisationnelles ou variables de la situation didactique

Une des variables didactiques concerne l'organisation des interactions entre les étudiants pour les n phases de l'activité. Elle est constituée de n sous-variables correspondant à chacune des phases. Parmi les différentes valeurs que peuvent prendre ces sous-variables nous avons les suivantes : travail individuel, confrontation par groupes, concertation, coopération, etc...

Nous déterminons les valeurs pertinentes afin de créer les conditions pour que certaines phases de la situation puissent être vécues par les étudiants comme des phases adidactiques, c'est-à-dire des phases où leur propre responsabilité est engagée vis-à-vis de l'apprentissage.

La première partie de la situation des automates est organisée en quatre phases. Les valeurs que peuvent prendre les sous-variables correspondantes à celles-ci sont les suivantes :

- première phase : travail individuel,
- deuxième phase : confrontation des différentes procédures pour aboutir à une solution commune,
- troisième phase : coopération au niveau d'un groupe d'étudiants pour obtenir une affiche commune,
- quatrième phase : confrontation des différentes affiches pour permettre le choix de l'affiche la plus représentative de la solution.

Nous détaillons ci-dessous le fonctionnement et le rôle que peuvent jouer ces différentes phases.

1.6.1. Une première phase : mise en place d'une situation d'action

La première activité proposée individuellement se compose de trois problèmes. Pendant cette phase, l'étudiant en tant que joueur exécute des "actions" en vue de résoudre les problèmes proposés. Examinons les décisions et anticipations qu'il est amené à faire au cours de ces problèmes.

Problème 1

Le sujet peut mettre en œuvre des stratégies diverses comme nous l'avons montré dans l'analyse a priori du problème mathématique.

S'il utilise les stratégies Frac et Gén, il dispose de connaissances qui lui permettent de résoudre le problème. S'il utilise une des stratégies Flimul, le milieu matériel constitué de

la droite graduée et du réseau de parallèles lui fournit des rétroactions sur les anticipations qu'il a été amené à faire.

S'il utilise la stratégie de base Res, il n'y a pas d'anticipation de la part du joueur, mais une lecture directe des points par lesquels passe l'automate, qui donne la solution au problème.

Cependant, les imprécisions dues au tracé des parallèles créent les conditions pour que des arguments mathématiques s'appuyant sur l'utilisation du modèle linéaire, permettent notamment d'anticiper le premier point par lequel passe un automate.

Problème 2 et problème 3 pour les automates A, B, C

La stratégie Res est bloquée. Le réseau de parallèles permet toujours de mettre en évidence le premier point entier de chacun des automates. Les rétroactions que peut exercer le milieu matériel sont là pour montrer que les autres entiers par lesquels passe l'automate ne sont pas *exclusivement* les multiples de l'entier qui sert à le définir.

Dans le cas particulier de l'automate C, les données sont compatibles mais le couple de base n'est pas générateur. L'application de la stratégie Flimul ne permet donc pas d'envisager le nombre 21 (premier terme du dernier couple) comme correct, puisque 21 n'est pas un multiple de 6. Cela peut amener certains étudiants à modifier 21 (en 24 par exemple), ce qui pourra être considéré comme une erreur, compte tenu des consignes qui ont été données.

Problème 3 pour l'automate D

Les données ne sont pas compatibles et ont les caractéristiques que nous avons étudiées au paragraphe 14. Cependant les nombres n_3 , n_2 , n_1 sont multiples l'un de l'autre, ce qui facilite la recherche d'un couple initial.

Les automates C et D sont donc susceptibles de fournir des solutions différentes suivant les stratégies utilisées par les joueurs.

Cependant la conclusion sur la validité des résultats trouvés par les joueurs ne peut pas avoir lieu au cours du travail individuel, le milieu matériel servant essentiellement pour réaliser des actions et ne servant que très peu pour des rétroactions relativement à des anticipations. Par contre il participe à la mise en place d'un milieu mathématique qui joue un rôle important dans la phase de confrontation suivante.

Les propositions de réponse concernant les trois problèmes sont reportées sur une fiche individuelle destinée à être le support d'une discussion pour un groupe de quatre à cinq étudiants.

La réalisation de cette fiche dégage, dans la phase des activités individuelles, la responsabilité du formateur par rapport à une demande de la part des étudiants concernant

l'évaluation par ce dernier des résultats et des méthodes utilisées. Celui-ci peut les laisser responsables de leurs propres démarches en les renvoyant à la phase suivante.

Elle place les étudiants en situation réflexive par rapport à leur propre travail et favorise l'explicitation de raisonnements engagés en facilitant la confrontation des méthodes utilisées.

La phase de travail individuel est donc finalisée par une phase de conclusion effectuée par un groupe de pairs.

1.6.2. Une phase de travail de groupe servant comme phase de conclusion du travail précédent

Le travail sur les tableaux comporte, comme nous l'avons vu, plusieurs éléments d'incertitude en ce qui concerne les automates C et D. Plusieurs réponses sont en effet possibles pour compléter ou modifier le tableau précédent, les stratégies pouvant être différentes. La confrontation des résultats et le débat qui s'ensuit doit déboucher sur **une** solution unique proposée par le groupe. Cette solution est recueillie par le formateur avant de passer à la phase suivante; celui-ci ne fait aucun commentaire.

Les conditions pour qu'un débat puisse avoir lieu entre les différents étudiants sont réalisées. Cette phase de conclusion a ainsi les caractéristiques d'une phase de validation, les étudiants disposant de critères de validité² basés sur les propriétés de la fonction linéaire qui fait correspondre entier et nombre de sauts, notamment par l'intermédiaire de relations multiplicatives. En effet, soit les étudiants possèdent les connaissances requises dès le début de l'activité, soit celles-ci se sont mises en place en raison de la disqualification des stratégies basées sur l'utilisation du réseau de parallèles.

La phase de travail individuel et de la phase de confrontation qui la suit peuvent être vécues par les étudiants comme **une situation adidactique d'action**. Les formulations qui interviennent dans la phase de confrontation restent privées vis à vis du formateur et il n'y a pas d'organisation de débat sur les formulations elles-mêmes.

1.6.3. Une phase de travail de groupe : situation de formulation

Les valeurs des variables fixées dans le problème 4, notamment pour les automates I et J visent à contraindre les joueurs à utiliser la stratégie Gén.

2. Nous reprenons ici la définition du critère de validité donné par C. Margolinas (1983) p.130: *Nous appellerons critère de validité une connaissance donnée quand elle sert à l'élève pour la validation dans une phase de conclusion.*

Les étudiants réalisent une seule affiche³ par sous-groupe. Celle-ci est destinée à être présentée à l'ensemble du groupe. Sa rédaction a certaines fonctions similaires à celle de la fiche individuelle décrite au paragraphe 1.6.1. Elle oblige à un travail réflexif sur les procédures utilisées et contraint les étudiants à se mettre d'accord sur les formulations qui seront présentées aux autres. Elle participe donc à l'émergence de critères de validité concernant l'utilisation du couple générateur pour valider leur propre travail.

La responsabilité du formateur quant à la validation du travail dans les petits groupes se trouve là aussi dérogée : il peut donc renvoyer à la mise en débat final les sollicitations éventuelles des membres de certains sous-groupes. Il est par ailleurs précisé par le formateur que le représentant du groupe sera **tiré au sort**, dans le but évident de responsabiliser tous les étudiants.

Durant tout le temps de discussion et d'élaboration de l'affiche, les formulations orales restent privées. Cependant les étudiants doivent produire sur leur affiche des arguments, puisque les consignes de travail précisent :

les affiches des différents groupes permettront **de communiquer vos résultats et justifications à l'ensemble du groupe.**

Ce travail est donc finalisé par un débat collectif qui représente la conclusion de cette phase.

1.6.4. L'organisation d'un débat

La mise en regard des différentes affiches vise à dégager les points de convergence et les points de divergence. C'est le sous-groupe des représentants de chacun des petits groupes qui a la responsabilité de la validation finale. L'accord doit se faire sur les arguments utilisés pour justifier les compléments ou modifications apportés aux tableaux des contrôleurs. Elle doit, cette fois-ci, déboucher sur la rédaction d'une affiche commune à l'ensemble du groupe.

Autrement dit, ce sont non seulement les modifications apportées au tableau mais surtout les arguments qui sont objet d'étude de la part des étudiants, certains arguments devant être validés par ceux-ci.

L'activité de groupe, suivie du débat collectif sur le contenu des différentes affiches, peut donc être vécue comme **une situation adidactique de formulation.**

D'autre part ce débat collectif participe au processus d'institutionnalisation qui doit conduire cette fois-ci l'enseignant à s'engager sur les déclarations faites par les étudiants. Celui-ci met en évidence la connaissance consistant à calculer le couple générateur d'un

3. Le dispositif décrit a déjà été utilisé par Arsac et alli (1992).

automate quand on connaît un de ses éléments. Ce couple permet de désigner de manière commode un automate et de définir en compréhension l'ensemble des désignations possibles.

2. ANALYSE A PRIORI DE LA DEUXIÈME PARTIE DE LA SITUATION DES AUTOMATES

2.1. Le Problème

2.1.1. L'ensemble des sauts, extension de \mathbb{N}

Considérons les automates dont l'ensemble des désignations est de la forme $(3n ; n)$, n étant un entier. On décide de désigner de la même façon le premier point atteint par l'automate et le saut associé à celui-ci. Un entier n est un saut dont le couple générateur est $(n ; 1)$. \mathbb{N} apparaît comme plongé dans l'ensemble S des sauts. Il reste à voir que l'on peut prolonger les opérations (comparaisons, additions et soustractions définies dans \mathbb{N}) à ce nouvel ensemble pour que celui-ci puisse être considéré comme étant potentiellement un système de nombres. Nous ne disposerons pas au terme de ce travail d'opération comme la division de deux rationnels, en raison des limitations apportées par la situation elle-même. Mais les rationnels apparaîtront bien comme des nouveaux nombres englobant les entiers, dont certaines propriétés seront différentes, comme le montrera la situation suivante.

a) la comparaison des sauts

Soient deux automates A et B.

A atteint a en b sauts : son saut S_A peut être désigné par $(a ; b)$

B atteint c en d sauts : son saut S_B peut être désigné par $(c ; d)$.

On peut raisonner de deux façons dans le contexte des automates :

1. S_A est plus grand que S_B si pour un même nombre de sauts l'automate A atteint un entier plus grand que l'entier atteint par B. Ainsi, puisque $(a ; b) = (ad ; bd)$ et $(c ; d) = (cb ; db)$, on peut dire que S_A est plus grand que S_B si $ad > cb$ et que S_A est plus petit que S_B dans le cas contraire.

2. S_A est plus grand que S_B , si un même entier est atteint par A et B avec un nombre de sauts pour A plus petit que le nombre de sauts pour B. Puisque $(a ; b) = (ac ; bc)$ et $(c ; d) = (ca ; da)$, S_A est plus grand que S_B si $cb < ad$ et que S_A est plus petit que S_B dans le cas contraire.

Ces règles étendent bien la comparaison des entiers puisque

$$m > n \text{ si et seulement si } (m ; 1) > (n ; 1) \text{ ou } (mn ; n) > (nm ; m)$$

Dans l'un ou l'autre des cas, nous retrouvons les mêmes conditions pour comparer deux sauts et nous pouvons décider d'adopter arbitrairement la règle suivante : S_A est plus grand que S_B si, pour un même nombre de sauts, l'automate A atteint un entier plus grand que l'entier atteint par B.

b) l'addition des sauts

Le problème est de savoir si on peut définir une addition des sauts $S_A + S_B$ qui puisse étendre l'addition des entiers dans \mathbb{N} . Or, comme nous allons le voir, il est possible de définir plusieurs additions dans le contexte des automates et il va falloir vérifier si celles-ci sont compatibles avec l'addition des entiers.

2.1.2. Les définitions possibles d'une addition

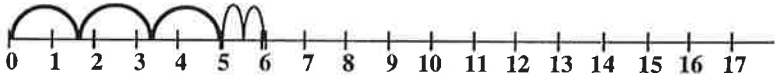
Soient deux automates A et B. A atteint a en b sauts : son saut S_A peut être désigné par $(a ; b)$, B atteint c en d sauts : son saut S_B peut être désigné par $(c ; d)$. On peut, dans le contexte des automates, définir trois grands types d'addition $S_A + S_B$:

Addition 1 : (notée $\text{Add}_{\text{sau.ent}}$)

On additionne les termes de chacun des couples.

$$(a ; b) + (c ; d) = (a+c ; b+d)$$

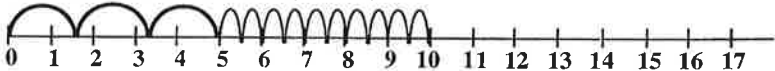
$S_C + S_D$ est ainsi le saut de l'automate désigné par $(a+c ; b+d)$. Ce type d'addition traduit la volonté d'étendre à l'ensemble des couples l'addition dans \mathbb{N} appliquée à chacun des couples séparément. Cela correspond à la succession des sauts du premier puis du second automate.



• Variante 11 ($\text{Add}_{\text{m.sau}}$)

Une première variante est construite à partir de l'idée que si les automates ont parcouru une même distance, alors pour le double de cette distance, on va additionner le nombre de sauts, ce qui donne formellement :

$$(ac ; bc) + (ca ; da) = (2ac ; bc+da)$$



Cela consiste en fait à considérer une "moyenne" des sauts pour une certaine distance parcourue.

• **Variante 12 (Add_{m.ent})**

Une deuxième variante peut être aussi envisagée sur la même idée de moyenne, mais cette fois-ci à partir d'un même nombre de sauts :

$$(ad ; bd) + (bc ; bd) = (ad+bc ; 2bd)$$

Addition 2 (Add_{saut})

Pour un même point atteint par les deux automates, on additionne les sauts correspondants.

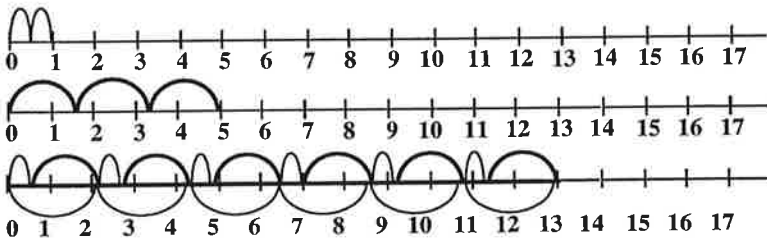
$$(ac ; bc) + (ca ; ad) = (ac ; bc+ad)$$

Addition 3 (Add_{entier})

Pour un même nombre de sauts, on additionne les entiers atteints par les deux automates.

$$(ad ; bd) + (cb ; bd) = (ad+bc ; bd)$$

La somme de sauts de deux automates A et B est le saut qui caractérise un automate fabriqué en associant comme en relais l'automate A suivi de l'automate B.



2.1.3. Des critères de type mathématique

Une addition sur les sauts doit satisfaire les deux critères suivants :

• **Critère "indépendance"**

La somme de deux sauts est un saut indépendant des couples particuliers qui les représentent.

Examinons donc si les trois additions définies précédemment satisfont à ce critère.

L'addition 1 ne satisfait pas à ce critère : il suffit de le constater pour un exemple. On voit que si on prend le couple (5 ; 6) et le couple (1 ; 3), l'addition conduit au couple (8 ; 15) et que si on prend les deux couples (10 ; 12) et (3 ; 9) respectivement équivalents aux deux précédents, leur somme égale au couple (13 ; 21), qui lui n'est pas équivalent au couple (8 ; 15).

Par contre les additions 2 et 3, ainsi que pour les variantes 11 et 12, respectent le critère "indépendance". Pour ces deux définitions, quels que soient les couples choisis, le saut est bien toujours le même : le couple générateur de l'automate S_A est $(a ; b)$ et le couple générateur de S_B est $(c ; d)$, donc tout couple désignant S_A est de la forme $(an ; bn)$ et tout couple désignant S_B est de la forme $(cm ; dm)$.

L'addition 2 consiste à fabriquer le couple $(acmn ; bcmn+admn)$ soit le couple $(acmn ; (bc+ad)mn)$ qui est bien égal au couple $(ac ; bc+ad)$. Il en est de même pour la variante 11, puisque la seule différence avec l'addition 2 est que le premier terme est le double, ce qui n'intervient pas dans les calculs considérés.

L'addition 3 consiste à fabriquer le couple $(admn+bcmn ; bdmn)$ soit le couple $((ad+bd)mn ; bdmn)$ qui est bien équivalent au couple $(ad+bd ; bd)$. Les mêmes considérations que précédemment s'appliquent à la variante 12 qui ne diffère de l'addition 3 que par le fait qu'un des facteurs est multiplié par 2.

• *Critère "prolongement de l'addition sur les entiers"*

Les entiers sont des sauts d'automates et on sait additionner deux entiers. L'addition définie sur les sauts doit pouvoir s'identifier sur les sauts entiers à l'addition de deux entiers.

Pour l'addition 1, examinons ce que donne l'addition pour deux entiers 2 et 3 :

$$(2 ; 1) + (3 ; 1) = (5 ; 2) \text{ qui n'est pas la désignation d'un entier.}$$

Pour l'addition 2, ainsi que pour la variante 11 et la variante 12, pour les deux mêmes entiers 2 et 3, on obtient dans les différents cas des couples qui ne représentent pas des entiers :

$$(2 ; 1) + (3 ; 1) = (6 ; 5)$$

$$(2 ; 1) + (3 ; 1) = (6 ; 3) + (6 ; 2) = (12 ; 5)$$

$$(2 ; 1) + (3 ; 1) = (5 ; 2)$$

Pour l'addition 3, si l'on considère deux entiers quelconques, que l'on désigne respectivement par $(n ; 1)$ et par $(m ; 1)$, alors la somme est la suivante :

$$(n ; 1) + (m ; 1) = (n+m ; 1).$$

Cela est valable quelles que soient les désignations utilisées pour les entiers puisque :

$$(nk ; k) + (mq ; q) = (nkq ; kq) + (mqk ; qk) = ((n+m)kq ; kq).$$

Il en résulte que **seule l'addition 3** satisfait aux deux critères mathématiques que nous avons énoncés plus haut. Nous pouvons donc définir la somme des sauts de deux automates par le saut représenté par le couple $(m+n ; s)$, m et n étant les entiers atteints par les deux automates pour un même nombre de sauts s .

2.2. Les variables organisationnelles ou variables de la situation didactique

2.2.1. Une phase de travail de groupe : situation de formulation.

Le travail de groupe doit permettre la production de formulations privées au sein de chacun des groupes, puisque ceux-ci doivent fournir des règles permettant de définir une addition de deux sauts. Il faut donc définir, à partir de deux couples déterminant deux automates, un troisième couple tel que l'automate qui lui est associé puisse être considéré comme la somme des deux premiers. Ces formulations sont faites en fonction de la situation des automates : elles sont affichées au fur à mesure de leur production pour être rendues publiques et soumises à la critique des autres groupes.

La réalisation d'une affiche par sous-groupe devant indiquer des arguments justifiant le choix ou le rejet des règles écrites au tableau, destinée à être présentée à l'ensemble du groupe, a la même fonction que dans la première partie : elle contraint les étudiants à se mettre d'accord sur les arguments qui seront présentés aux autres. Elle participe donc à l'émergence de preuves de type mathématique pour éliminer certaines propositions d'additions. Ces preuves forment le milieu pour la validation

La responsabilité du formateur quant à la production des petits groupes se trouve donc là aussi dérogée : il peut renvoyer à la mise en débat final les sollicitations éventuelles des membres de certains sous-groupes. Il est également à nouveau précisé par le formateur que le représentant de chaque sous-groupe sera **tiré au sort**.

2.2.2. L'organisation d'un débat

L'exposition des différentes affiches vise à rendre publics les arguments émis au sein des différents sous-groupes. Leurs représentants ont la responsabilité de la validation finale. L'accord doit se faire sur les arguments utilisés pour accepter ou refuser une règle d'addition.

L'activité de groupe, suivie du débat collectif sur le contenu des différentes affiches peut donc être vécue dans ce cas comme **une situation adidactique de validation**.

La possibilité d'additionner deux automates, de façon à ce que les règles produites prolongent celles définies sur \mathbb{N} , en utilisant des **critères mathématiques**, permet de poursuivre le processus d'institutionnalisation à propos d'un ensemble de nombres prolongeant \mathbb{N} , amorcé au cours de la comparaison des sauts.

3. ANALYSE A PRIORI DE LA SITUATION TIREUR D'ÉLITE

3.1. Tir dans une zone limitée

3.1.1. Le problème

Formulation générale :

Soient deux nombres entiers p_0 et q_0 et soit une fraction $\frac{y}{x}$. Il s'agit de trouver une fraction $\frac{q}{p}$ telle que, p étant inférieur ou égal à p_0 , q inférieur ou égal à q_0 , le rationnel $\frac{p}{q}$ ($\neq \frac{y}{x}$) soit le plus proche possible du rationnel $\frac{y}{x}$, c'est à dire tel que $\left| \frac{q}{p} - \frac{y}{x} \right|$ soit le plus petit possible.

On peut contextualiser le problème précédent de la manière suivante :

Soit un point M_0 du réseau de coordonnées p_0 et q_0 . Ce point M_0 se projette en deux points A ($p_0, 0$) et B ($0, q_0$) des axes. Appelons "rectangle OAM₀B" l'ensemble fini des points M(x, y) du réseau tels que $x < p_0$ et $y < q_0$.

Soit Z un point de ce rectangle.

Il s'agit de trouver un point S (p, q) dans le rectangle MAOB tel que l'angle de tir de S soit le plus proche possible de l'angle de tir de Z. Dans ce contexte, le rationnel est considéré comme un "angle de tir".

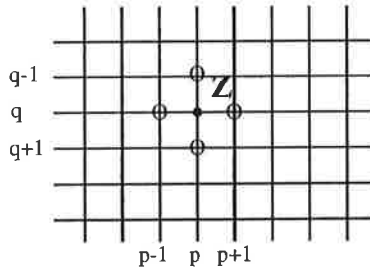
3.1.2. Les stratégies possibles de résolution du problème.

Nous faisons dans un premier temps une analyse des stratégies possibles indépendamment des connaissances des étudiants à qui sera proposé le problème.

Plusieurs stratégies peuvent être envisagées :

a) Recherche des points du réseau proches du point proposé

Une stratégie consiste à rechercher les angles de tir des points les plus proches de Z, la distance étant celle induite par le réseau.



On peut donc examiner les points correspondant aux rationnels $\frac{q-1}{p}$; $\frac{q+1}{p}$; $\frac{q}{p-1}$; $\frac{q}{p+1}$
 $p > 2$.

Des quatre rationnels précédents, le rationnel $\frac{q}{p+1}$ est le plus proche du rationnel $\frac{q}{p}$,
 en effet $\frac{q}{p} - \frac{q-1}{p} = \frac{1}{p}$ et $\frac{q+1}{p} - \frac{q}{p} = \frac{1}{p}$

$$\frac{q}{p} - \frac{q}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)} \quad \frac{q}{p-1} - \frac{q}{p} = \frac{1}{p(p-1)}$$

$$\text{et } \frac{1}{p(p+1)} < \frac{1}{p(p-1)} < \frac{1}{p}$$

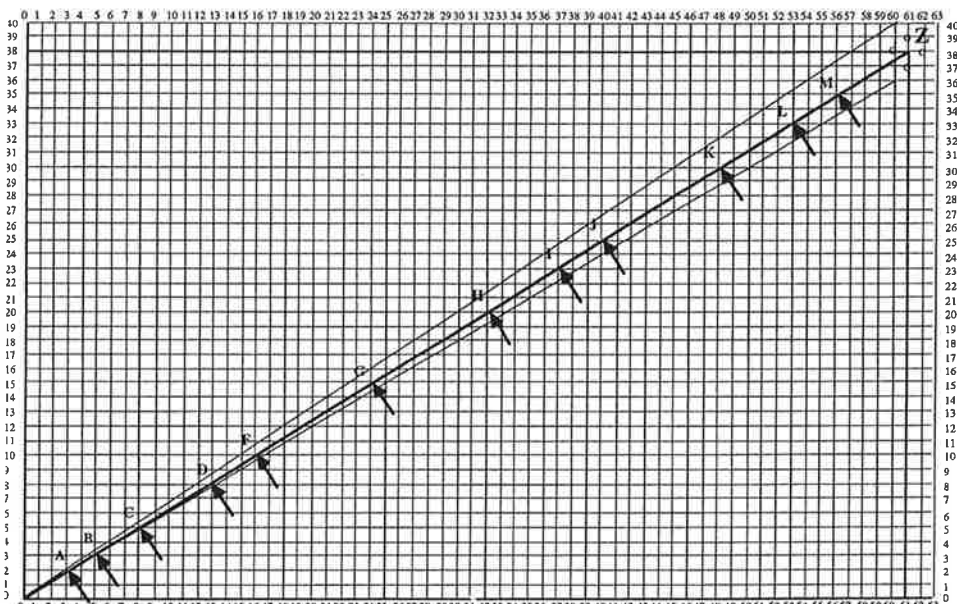
Cette stratégie consiste donc à affirmer que le rationnel le plus proche de $\frac{q}{p}$ est celui de même numérateur et dont le dénominateur est augmenté de 1.

b) Recherche des pentes des droites Ox les plus proches de la pente de la droite OC

Cette stratégie consiste à s'appuyer sur des considérations géométriques pour déterminer les points les plus proches de la droite OC, la distance étant ici la distance euclidienne dans le plan.

Prenons un exemple pour expliciter cette stratégie. Soit le point Z de coordonnées (61,38), à ce point correspond le rationnel que l'on peut désigner par la fraction $\frac{38}{61}$.

Dans le cas proposé, on peut donc constater, en traçant la droite OZ que les angles de tir des points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M sont proches du rationnel considéré. Ils correspondent aux fractions $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{8}{13}$; $\frac{10}{16}$; $\frac{15}{24}$; $\frac{20}{32}$; $\frac{23}{37}$; $\frac{25}{40}$; $\frac{30}{48}$; $\frac{33}{53}$; $\frac{35}{56}$.



On peut remarquer que les fractions $\frac{10}{16}$; $\frac{15}{24}$; $\frac{20}{32}$; $\frac{25}{40}$; $\frac{30}{48}$; $\frac{35}{56}$ sont de la forme $\frac{5r}{8r}$, les numérateurs restant inférieurs à 40 et les dénominateurs restant inférieurs à 63.

En effet tous les points situés sur la droite de pente déterminée correspondent à un même rationnel, dont nous pouvons prendre la fraction $\frac{5}{8}$ comme représentant.

Nous pouvons à présent examiner l'écart entre les différents rationnels associés aux fractions précédentes et le rationnel correspondant au point Z.

$$\left| \frac{2}{3} - \frac{38}{61} \right| = \frac{8}{3 \times 61} , \quad \left| \frac{3}{5} - \frac{38}{61} \right| = \frac{9}{5 \times 61} , \quad \left| \frac{5}{8} - \frac{38}{61} \right| = \frac{1}{8 \times 61} , \quad \left| \frac{8}{13} - \frac{38}{61} \right| = \frac{6}{13 \times 61}$$

$$\left| \frac{23}{37} - \frac{38}{61} \right| = \frac{3}{37 \times 61} , \quad \left| \frac{31}{50} - \frac{38}{61} \right| = \frac{9}{30 \times 61} , \quad \left| \frac{33}{53} - \frac{38}{61} \right| = \frac{1}{53 \times 61} .$$

Or comme $\frac{8}{3} > \frac{9}{5} > \frac{6}{13} > \frac{9}{50} > \frac{1}{8} > \frac{3}{37} > \frac{1}{53}$, il en résulte que parmi les différents rationnels que nous avons trouvés par l'intermédiaire du support géométrique, le rationnel désigné par la fraction $\frac{33}{53}$ est le plus proche du rationnel $\frac{38}{61}$.

On peut remarquer en traçant les droites OA et OB que celles-ci "s'éloignent" nettement de la droite OZ, et que les rationnels $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{5}$ sont plus éloignés que les rationnels correspondant aux autres points C, E, ...M.

Cette stratégie permet de trouver des rationnels proches du rationnel donné, en utilisant la propriété géométrique d'alignement des points du réseau, associés à un rationnel. On n'est cependant jamais assuré de trouver le ou les rationnels qui sont les plus proches.

c) Recherche de la réduite⁴ de rang le plus élevé dans le développement en fraction continue du rationnel proposé.

Les réduites $\frac{a_n}{b_n}$ successives d'un rationnel $\frac{x}{y}$ développé en fraction continue, sont telles que $a_n < x$ et $b_n < y$ donc que $a_n < p_0$ et $b_n < q_0$. Les réduites répondent aux critères énoncés dans le problème. Les points associés à celles-ci sont donc bien dans le rectangle spécifié dans le contexte géométrique

On sait que la réduite $\frac{a_n}{b_n}$ de rang le plus élevé (distincte de la fraction proposée) est celle qui est la plus proche parmi toutes celles dont le dénominateur est inférieur à b_n .

D'autre part, on connaît l'écart entre la réduite de rang le plus élevé et le rationnel initial puisque :

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{x}{y} \right| = \frac{1}{b_n y}$$

On a donc une bonne approximation pour le rationnel déterminé. Ainsi dans le cas qui nous intéresse, les réduites successives dans le développement en fraction continue de $\frac{38}{61}$ sont respectivement : $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{8}$.

$\frac{5}{8}$ est la réduite de rang le plus élevé. L'écart entre $\frac{5}{8}$ et $\frac{38}{61}$ est de $\frac{1}{8 \times 61}$.

On obtient ainsi un rationnel qui donne une bonne approximation. Mais celle-ci peut être améliorée puisque on a déjà pu constater dans le paragraphe précédent que les rationnels

4. Si nous notons $r_{n+1} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n+1}]$, le développement en fraction continue $r_{n+1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n+1}}}}}$ du rationnel $\frac{x}{y}$, nous appelons réduite de rang le plus élevé, la fraction $r_n = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$.

$\frac{23}{37}$ et $\frac{33}{53}$ fournissent une meilleure approximation de $\frac{38}{61}$, les écarts respectifs étant de $\frac{3}{37 \times 61}$ et $\frac{1}{53 \times 61}$.

3.1.3. La détermination des conditions de jeu

Les étudiants sont par binômes.

Ils ont la possibilité de jouer plusieurs fois, mais ne disposent que d'un laps de temps déterminé.

Matériel :

Un réseau limité du type précédent : un point ne peut avoir une abscisse supérieure à $q_0=63$ et une ordonnée supérieure à $p_0=40$.

Consigne :

Soit le point Z du quadrillage repéré par les coordonnées 62 et 27.

Il s'agit en un temps limité de trouver un point P du réseau (différent de Z) dont l'angle de tir soit le plus proche possible de l'angle de tir correspondant au point Z. Le gagnant est celui dont l'écart entre les deux angles de tir est le plus faible.

Remarque : le réseau est à maille relativement serrée, de façon que la perception visuelle ne permette pas de savoir immédiatement quel est le point le plus proche.

Raisons du choix du point C

Il existe un nombre important de points (14) qui sont proches de la droite OC, c'est-à-dire ceux qui correspondent aux fractions suivantes :

$$\frac{3}{7}, \frac{6}{14}, \frac{7}{16}, \frac{9}{21}, \frac{10}{23}, \frac{12}{28}, \frac{13}{30}, \frac{14}{32}, \frac{16}{37}, \frac{17}{39}, \frac{20}{46}, \frac{21}{48}, \frac{23}{53}, \frac{24}{55}$$

Parmi cette liste, il y a trois groupes de fractions qui correspondent chacune à un même rationnel.

$$x_1 : \frac{3}{7}, \frac{6}{14}, \frac{9}{21}, \frac{12}{28}; \quad x_2 : \frac{7}{16}, \frac{14}{32}, \frac{21}{48}; \quad x_3 : \frac{10}{23}, \frac{20}{46}.$$

Ces trois rationnels x_1, x_2, x_3 correspondent aux trois réduites du rationnel $\frac{27}{62}$. Pour des points alignés avec le point O, donc pour différentes fractions désignant un même rationnel, on constate que les écarts sont les mêmes. On compare donc les pentes des droites ainsi déterminées.

Le rationnel le plus proche de $\frac{27}{62}$ est ainsi le rationnel correspondant à la fraction $\frac{10}{23}$, qui est la réduite de rang le plus élevé. Par conséquent, les **deux** points de coordonnées (23,10) et (46,20) permettent de gagner.

La stratégie (§ 312 a) consistant à rechercher des points proches de Z (au sens de la distance usuelle sur quadrillage) peut être considérée comme **stratégie de base** pour entrer dans le problème proposé.

Une stratégie (§ 312 b), que nous considérons comme optimale ici, consiste à chercher les points les plus proches (au sens de distance euclidienne cette fois) de la droite joignant l'origine au point Z.

Cette recherche doit conduire à la conclusion qu'il existe des points qui ont même angle de tir : ce sont des points alignés correspondant au même rationnel.

Le fait que la stratégie de base se révèle très vite insuffisante, la possibilité de répéter le jeu plusieurs fois et le fait que le milieu matériel fournisse des rétroactions, font que la situation proposée a les caractères **d'une situation adidactique d'action**. La connaissance visée (un rationnel correspond à un ensemble de points alignés sur le quadrillage) est logiquement requise pour passer de la stratégie de base à celle qui est considérée comme optimale.

3.2. Tir dans une zone non limitée

3.2.1. Rappel du problème proposé

Soit un rationnel $\frac{y}{x}$ non connu, il s'agit de trouver deux rationnels $\frac{q}{p}$ et $\frac{q'}{p'}$ les plus proches possibles tels que $\frac{y}{x}$ soit dans l'intervalle $\left[\frac{q}{p}, \frac{q'}{p'} \right]$.

Par exemple, un des joueurs peut demander si le rationnel qu'ils recherchent est entre $\frac{19}{31}$ et $\frac{21}{29}$, l'écart proposé $\left| \frac{19}{31} - \frac{21}{29} \right|$ est alors de $\frac{100}{899}$.

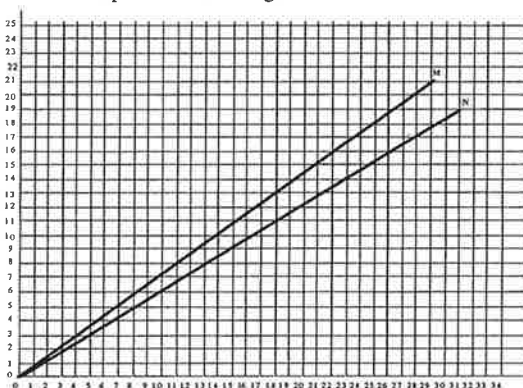
3.2.2. Les conditions de jeu

Comme nous l'avons indiqué (Chapitre C1, § 252 b), les étudiants disposent d'un réseau à maille carrée, zone matérielle d'un quadrillage illimité. Les joueurs jouent par groupes de quatre, deux contre deux, mais en coopérant.

L'animateur fournit à chaque binôme A et B d'un même groupe un rationnel que l'autre binôme ne connaît pas. Le rationnel proposé est plus petit que 1, donné sous la forme d'une fraction $\frac{y}{x}$ avec $y < x$, correspondant à un point (x, y) du quadrillage.

Le binôme A doit arriver à encadrer le rationnel du binôme B (et de même le binôme B celui de A) par deux rationnels tels que l'écart entre eux soit le plus petit possible.

Pour cela, à l'aide de messages écrits, chaque binôme propose à l'autre binôme, un couple de rationnels. Il lui demande si le rationnel cherché est "entre" les deux rationnels proposés, en lui indiquant l'écart correspondant. Le deuxième binôme répond par oui ou non. Si, par exemple, la réponse à la question est oui, on pourra dire que l'angle de tir correspondant au rationnel cherché est à l'intérieur du faisceau ON, OM, N étant le point de coordonnées $(31, 19)$ et M le point de coordonnées $(29, 19)$. Les rôles de chaque binôme sont par la suite échangés alternativement.



Le problème est donc de trouver le faisceau le plus petit. La durée du jeu est limitée dans le temps (par exemple 30 minutes). Au bout de ce laps de temps, le groupe gagnant est celui qui a la somme la plus faible en additionnant le dernier écart du binôme A et le dernier écart du binôme B. C'est pour cette raison que les quatre personnes des deux binômes sont amenées à coopérer.

3.2.3. Les tâches des émetteurs : des stratégies possibles

Ils doivent proposer un intervalle plus petit que celui qui leur a permis d'encadrer le rationnel r , contenu dans le précédent intervalle, afin d'obtenir une information. Ils calculent l'écart entre les deux rationnels donc la différence entre les deux rationnels proposés.

Les stratégies suivantes peuvent être envisagées :

a) Stratégie qua : choix de couples successifs de points du quadrillage

Un couple de points du quadrillage détermine "un angle de tir".

Si la réponse des récepteurs est oui, on propose deux fractions correspondant à deux points à l'intérieur de cet angle de tir. Si la réponse est non, on propose deux fractions correspondant à deux points à l'extérieur de cet angle de tir. On réitère le processus.

b) Stratégie fcd : Choix de fractions à "dénominateurs constants"

On choisit un entier p et on pose des questions à propos des intervalles $\left[\frac{0}{p}, \frac{1}{p}\right]$, $\left[\frac{1}{p}, \frac{2}{p}\right]$,
, $\left[\frac{p-1}{p}, \frac{p}{p}\right]$. Lorsque l'intervalle $\left[\frac{q}{p}, \frac{q+1}{p}\right]$ est déterminé, ce qui fixe un faisceau, on explore par un procédé analogue l'intervalle $\left[\frac{nq}{np}, \frac{n(q+1)}{np}\right]$ qui correspond au même faisceau.

Un cas particulier consiste à prendre $p = 10$ puis $n = 10$.

c) Stratégie d2 : par dichotomie

Cela consiste à poser des questions sur les intervalles de la forme $\left[\frac{a}{2^n}, \frac{a+1}{2^n}\right]$ pour $n = 1, 2, \dots$. Une réponse par oui ou par non détermine à chaque fois dans quel intervalle se trouve le rationnel.

d) Stratégie d10 : par dichotomie appliquée à des intervalles de la forme $\left[\frac{a}{10^n}, \frac{a+1}{10^n}\right]$

Elle combine la stratégie fcd et la stratégie D2. Lorsque l'intervalle $\left[\frac{a}{10^n}, \frac{a+1}{10^n}\right]$ est fixé, on recherche le rationnel dans le même intervalle $\left[\frac{10a}{10^{n+1}}, \frac{10a+10}{10^{n+1}}\right]$. Cela nécessite de poser dans le cas le plus défavorable quatre questions. En effet cela revient à déterminer par dichotomie un nombre entier entre 0 et 10, c'est-à-dire un procédé consistant à séparer l'intervalle $[0 ; 10[$ en deux intervalles disjoints, tels que la réunion de ces deux intervalles soit l'intervalle $[0 ; 10[$.

Les stratégies d2 et d10 sont des stratégies systématiques : il est donc intéressant d'en déterminer le coût. Nous le définissons par le nombre de questions que l'on doit poser

dans le cas le plus défavorable pour être sûr que le rationnel sera dans un intervalle de longueur inférieure à $\frac{1}{10^p}$.

Pour la stratégie d₂, ceci est réalisé quand $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^p}$, donc quand $n > p \frac{\ln 10}{\ln 2}$.

Pour la stratégie d₁₀, il suffit que n soit égal à 4p, puisqu'il faut quatre questions à chaque étape. Comme $\frac{\ln 10}{\ln 2} \cong 3,32$, il est facile de voir que si p= 2, il suffit de 7 questions pour la stratégie d₂ et 8 pour la stratégie d₁₀. L'écart ne fait qu'augmenter quand p croît. La stratégie d₂ est donc la moins coûteuse des deux.

Les rationnels choisis par l'animateur sont non décimaux, proposés sous forme de fractions irréductibles. Les points correspondants ne se trouvent pas dans le réseau dont disposent les étudiants.

Compte tenu de la présentation du problème, une stratégie de base pour amorcer le jeu consiste à choisir deux points du réseau afin de déterminer un angle de tir. On est donc assuré qu'aucun de ces points n'est le rationnel cherché, ce qui interromprait le jeu prématurément. C'est la réitération du jeu et le fait que les deux binômes coopèrent pour obtenir l'encadrement le plus petit au moment de l'arrêt du jeu, qui doit inciter les joueurs à opter pour une stratégie systématique. C'est la stratégie par dichotomie, utilisant les fractions ayant pour dénominateurs une puissance de deux, qui est la moins coûteuse au sens défini plus haut.

Les émetteurs sont ensuite des récepteurs et inversement. C'est pourquoi nous analysons la tâche des récepteurs.

3.2.4. Les tâches des récepteurs

Ils doivent comparer une fraction $\frac{y}{x}$ (dont ils disposent) avec les bornes de l'intervalle

$\left[\frac{q}{p}, \frac{q+1}{p} \right]$ proposées par les émetteurs. Ils ont donc, entre autres, à calculer xq , yp ,

$xq+x$, $qx- py$. Le travail leur est facilité si p est une puissance de 10, les produits par une puissance de 10 étant calculés très facilement. Les calculs sont donc plus rapides si les encadrements sont fournis avec des fractions décimales, ce qui peut inciter les joueurs à utiliser ces dernières.

Quand les joueurs disposent d'une calculatrice, la tâche des émetteurs est inchangée puisqu'ils doivent produire un encadrement avec des fractions. Par contre, la calculatrice permettant de fournir des quotients décimaux approchés, la tâche des récepteurs est allégée, puisqu'il suffit de comparer *convenablement* les quotients approchés

correspondant aux fractions, bornes de l'intervalle qu'ils reçoivent, avec celui correspondant à leur propre fraction. L'incitation à fournir des fractions décimales quand ils sont en position d'émetteur est ici contrainte par l'outil calculette, puisque la comparaison en est considérablement simplifiée au moment où ils sont récepteurs.

3.2.5. Une situation adidactique d'action

Cette situation de communication peut être vécue comme **une situation adidactique d'action**. En effet la stratégie de base "qua" est rapidement inefficace, puisque le réseau matériel est limité et que son prolongement serait vite très coûteux. La répétition des questions-réponses permet aux différents joueurs d'avoir des rétroactions sur les choix effectués : il existe donc un milieu pour la validation permettant aux joueurs de juger de la rapidité avec laquelle ils accèdent à des encadrements de plus en plus fins. La stratégie optimale D10 doit apparaître sans qu'il soit besoin de faire de nombreuses parties.

4. CONCLUSION

L'analyse a priori des deux situations précédentes nous a permis d'identifier quelles sont les variables didactiques. Nous avons montré qu'en leur fixant certaines valeurs, pouvaient être vécues :

- comme situation adidactique d'action, la phase de travail individuel, puis de travail de groupe de la première partie de la situation "Automates",
- comme une situation adidactique de formulation, la phase de travail de groupe puis de confrontation de cette même partie,
- comme situation adidactique de validation, la deuxième partie de la situation "Automate",
- comme situations adidactiques d'action, les deux phases de la situation "Tireur d'élite" (tir dans une zone limitée et tir dans une zone illimitée).

Les valeurs de ces variables fixent les *contraintes* qui limitent la liberté de l'étudiant considéré comme un joueur rationnel. Mais en raison de *déterminations*, dont nous avons précisé le sens dans le chapitre A2, les étudiants peuvent être soumis à d'autres limitations. C'est pourquoi nous nous proposons à présent d'étudier le jeu de l'étudiant face aux situations qui lui sont proposées afin de repérer quelles sont ces déterminations.

CHAPITRE C3

ANALYSE A POSTERIORI DES SÉQUENCES D'ENSEIGNEMENT, CONTRAINTES ET DÉTERMINATIONS DU JEU DE L'ÉTUDIANT

L'analyse a posteriori des deux situations d'enseignement des "Automates" et du "Tireur d'élite" montre des différences significatives selon les deux expérimentations successives de 1992-93 et 1993-94. A partir de ce fait, nous mettons en évidence deux "placements " possibles des formés qui sont permis dans certaines situations par l'existence de deux jeux possibles. Nous cherchons à caractériser ces placements en montrant en quoi ils s'opposent et en quoi ils sont complémentaires. Ils nous permettent ensuite d'analyser et d'interpréter certains faits didactiques. En particulier, nous regardons la stabilité et les passages d'un placement à un autre, passages qui peuvent être source de difficultés, mais aussi moyens d'établir des rapports nouveaux à différents objets de savoir anciens. Ces placements sont révélateurs de déterminations qui règlent les conditions de fonctionnement des situations dans le cadre du système didactique donné.

1. INTRODUCTION

1.1. Le repérage des déterminations

Nous examinons donc à présent, à l'aide du déroulement effectif de la situation didactique, si les contraintes provoquées par certaines valeurs des variables didactiques, qui se situent au niveau microdidactique, ont joué le rôle qui a été envisagé dans les analyses a priori.

Nous avons montré (Chapitre A2) que le formé est assujéti à plusieurs institutions différentes au cours de sa formation :

- en position d'élève dans l'institution de formation elle-même (IUFM),
- en position d'enseignant dans les institutions "classes de stage" au moment où il fait cours,
- en position d'élève et d'enseignant dans les institutions "manuels" lorsqu'il prépare un cours ou qu'il étudie un livre de l'école primaire.

Il a aussi été assujéti en tant qu'élève à plusieurs autres institutions : collège, lycée, faculté, avant d'entrer dans l'institution officielle de formation. Enfin, le projet principal de l'étudiant est de s'assujéti en tant qu'enseignant dans l'institution-cible école primaire.

Nous avons appelé déterminations, les diverses limitations externes, qui cette fois-ci se situent au niveau macrodidactique, provenant de ces divers assujétissements.

Nous utilisons deux éléments pour repérer les déterminations du jeu de l'étudiant :

- 1 - les procédures de base utilisées par les étudiants dans les différents problèmes proposés,
- 2- les distorsions entre l'analyse préalable que nous pouvons faire à partir de l'analyse a priori des situations et le déroulement effectif constaté.

Nous suivons pour cela le déroulement chronologique et donc le découpage en phases considérées soit comme nécessaires, soit comme possibles dans l'analyse des deux situations d'enseignement. Ces situations peuvent être a priori contrôlées grâce aux valeurs fixées des variables.

Deux expérimentations ont eu lieu pendant deux années successives, intégrant les deux situations évoquées ainsi que d'autres séances qui ont pu être différentes suivant les années. Nous rappelons ci-dessous l'organigramme des deux expérimentations :

	Année 1992-93	Année 1993-94
Séance 1	Automates 1 ère partie	Exercices préliminaires
Séance 2	Automates 2 ème partie	Automates 1 ère partie
Séance 3	Analyse de livres	Automates 2 ème partie
Séance 4	Épisode "étudiants" Tireur d'élite 1 ère partie	Synthèse automates Tireur d'élite 1 ère partie
Séance 5	Tireur d'élite 2 ème partie Synthèse / exercices	Tireur d'élite 2 ème partie Synthèse / exercices
Séance 6		Exercices Analyse de livres

Les situations "Automates" et "Tireur d'élite" ont été proposées de manière quasi identique les deux années, à part quelques modifications au cours de la deuxième expérimentation.

En 1993-94, deux changements ont été apportés à l'ingénierie réalisée pendant l'année scolaire 1992-93.

a) Une première séance qui sera analysée dans le chapitre suivant, a consisté à proposer les trois exercices suivants (voir annexe C3a) :

- calculer des produits de deux nombres décimaux dont l'un est une puissance de 10 ;
- classer des nombres en utilisant l'ordre lexicographique ;
- placer un nombre décimal ayant beaucoup de chiffres après la virgule sur une droite graduée.

L'objectif de ces exercices d'apparence simple était de montrer aux étudiants qu'ils pouvaient avoir encore des difficultés. Cela mettait en évidence une certaine ignorance concernant les notions qui allaient être abordées pendant le module de formation .

b) La séance d'analyse de manuels a été placée en fin du processus au cours de la deuxième expérimentation. Nous indiquons à présent rapidement le canevas de l'ingénierie de formation de 1993-94.

1.2. Description de la séquence "les automates"

La séquence commence par la mise en place d'une technique de partages de segments à l'aide d'une fiche de travail "Comment partager un segment en n segments égaux" (annexe C3b : durée 20 minutes).

Par la suite, elle comporte deux parties principales, chacune étant constituée de trois phases, dont nous rappelons les grandes lignes.

1.2.1. Première partie - Lundi 28 Mars 1994¹ (séance 2)

Première phase

Résolution de problèmes en travail individuel : chaque étudiant reçoit la fiche de travail intitulée "Comment désigner le saut d'un automate, activité 1 et activité 2" (on trouvera en annexe C3c page 1 le texte donné aux étudiants). Il remplit une feuille appelée "feuille annexe individuelle" où on lui demande de noter ses résultats et d'indiquer comment il a procédé. Cette feuille est photocopiée immédiatement après la fin de l'activité puis redonnée à chaque étudiant. Elle est destinée à être discutée par groupe de quatre pour aboutir à un corrigé commun. (durée 45 minutes).

Nous disposons donc des notes individuelles à partir desquelles nous avons réalisé les analyses figurant dans le paragraphe 2.1.

Deuxième phase

Travail par groupe de 4 ou 5.

1. Les dates indiquées correspondent à l'expérimentation 1993-94.

a) - les étudiants corrigent les problèmes correspondant aux deux activités précédentes. Le tableau commun corrigé est recueilli.

b) - Ils reçoivent par groupe la fiche de travail "Comment désigner le saut d'un automate, activité 1 " (annexe C3c, page 2).

Ils réalisent dans chaque groupe un poster comprenant un tableau à remplir avec les remarques et les argumentations leur ayant permis de le compléter. Ce poster est destiné à être affiché en fin de séance devant l'ensemble du groupe (durée 50 minutes).

Troisième phase

Les 6 posters sont au tableau. Un rapporteur est désigné par tirage au sort pour chaque groupe. Il doit commenter devant l'ensemble de la section d'étudiants la façon dont le groupe est arrivé au résultat. Seuls les points éventuels de divergence font l'objet d'une discussion entre les rapporteurs. L'objectif est de réaliser une affiche de synthèse. (durée 20 minutes)

1.2.2. Deuxième partie - Mercredi 30 Mars 1994 (séance 3)

Première phase

Distribution du document intitulé "Vers de nouveaux nombres" (voir annexe C3d)

Retour sur la séance précédente. Il s'agit d'une phase d'institutionnalisation : un automate est défini par un ensemble de couples d'entiers qui se déduisent d'un premier couple générateur (durée 45 minutes).

Deuxième phase

Présentation du problème par l'enseignant : certains sauts peuvent être considérés comme des entiers et on cherche à définir des règles de comparaison (durée 30 minutes).

Troisième phase

Travail de groupe. Les étudiants cherchent à répondre à la question : "peut-on additionner deux sauts ?"

Les groupes affichent au fur et à mesure au tableau les diverses règles d'addition qu'ils ont trouvées et prennent connaissance des autres règles proposées. En même temps, ils les inscrivent sur une affiche en essayant d'argumenter le choix ou le rejet des règles trouvées (durée 30 minutes).

Quatrième phase

Discussion entre les groupes à partir des différentes affiches exposées au tableau (durée 10 minutes).

1.3. Description de la séquence du tireur d'élite

1.3.1. Première partie - Mercredi 6 Avril 1994 (séance 4)

Dans un quadrillage limité, recherche de rationnels approchant un rationnel déterminé (voir en annexe C3e, page 1, le texte donné aux étudiants). Ceux-ci proposent par binôme un rationnel. La détermination du "plus proche" se fait collectivement (durée 1 heure).

1.3.2. Deuxième partie - Lundi 11 Avril 1994 (séance 5)

Jeu du tireur d'élite sur fond de quadrillage : recherche par groupes de quatre (deux binômes travaillant en coopération) d'encadrements de plus en plus fins d'un rationnel par d'autres rationnels (voir annexe C3e, page 2, le texte donné aux étudiants). Confrontation des démarches utilisées et des résultats trouvés par les étudiants (durée 1 h). La suite de la séance vise à faire une synthèse par le formateur de tout ce qui a précédé. Le temps consacré à l'activité proprement dite du tireur d'élite est donc de deux heures.

2. LA PREMIÈRE PARTIE DE LA SÉQUENCE DES AUTOMATES : DEUX PLACEMENTS POSSIBLES POUR LE FORMÉ

2.1. Le révélateur : une différence significative des résultats au cours des activités individuelles

2.1.1. Les problèmes 1 et 2 de l'activité 1

a) Rappel de l'activité

- **Activité 1** (individuelle).

Problème 1- Un automate arrive à la graduation 15 en effectuant 9 sauts.



Trouver tous les entiers par lesquels passe l'automate avant 31.

Problème 2- Un automate arrive à 10 en 14 sauts : trouver tous les entiers entre 150 et 180 par où passe cet automate ainsi que le nombre de sauts correspondant.

b) Les résultats

Année 92-93 (21 étudiants)

	Problème 1	Problème 2
Procédure Frac	1	0
Procédure Res	11	4 *
Procédure Gen	9	17

Année 93-94 (22 étudiants)

	Problème 1	Problème 2
Procédure Frac	6	8
Procédure Dec	6	4
Procédure Res	4	0
Procédure Flimulent	2	1
Procédure Gen	4	9

Remarques sur les procédures utilisées :

- La procédure Frac consiste à recourir à des fractions, (ici $5/3$ et $5/7$), puis par addition répétée ou multiplication par des entiers successifs à rechercher les multiples entiers de ces fractions.

Étudiant 1-94 : Je savais qu'en 9 sauts l'automate arrive à la graduation 15. Donc chaque saut correspondait à $15/9$, soit $5/3$ d'unité de graduation. Or seul $15/3$, $30/3$, $45/3$, $60/3$, $75/3$, et $90/3$ sont équivalents à des entiers.

- Le recours aux nombres décimaux, appelée procédure Dec, est le fait des étudiants qui utilisent le quotient approché de 15 par 9 (en général 1,66). Ensuite par additions répétées ou multiplication par un entier, ils recherchent les entiers par lesquels passe l'automate.

Étudiant 13-94 : $15/9 = 1,66$, puis j'ai multiplié ce nombre par 2 puis par 3, puis par 4, ... et j'ai noté les entiers obtenus par ces multiplications jusqu'à 30.

Notons que l'étudiant trouve 4,98 ; 9,96 etc... qui sont assimilés à des entiers dans le cas présent. Par contre, cela conduit certains étudiants à ne pas trouver d'autres entiers que 15, comme l'indique l'exemple suivant.

Étudiant 16-94 : En divisant 15 par 9, je trouve 1,66 sur la graduation, il ne tombe jamais sur un entier. Donc 15 est le premier entier sur lequel il tombe et on peut conclure que 30 sera le second entier.

- La procédure Res consiste à utiliser le réseau de parallèles et permet de déterminer le premier entier par lequel passe l'automate.

* Il s'agit en fait de la procédure Res/Flimulent, adaptation de la procédure Res qui consiste à trouver le premier entier par lequel passe l'automate à l'aide du réseau de parallèles, puis à anticiper les autres valeurs.

Étudiant 7-94 : Grâce au réseau de parallèles, j'ai découpé le segment de 0 à 15 en 9 segments. J'ai regardé lesquels des 9 segments correspondaient aux graduations entières : j'ai trouvé 5, 10 et 15 et par extrapolation, 20, 25 et 30.

- Les étudiants qui utilisent la procédure Flimulent n'envisagent que les multiples des entiers figurant dans le couple définissant l'automate.

Étudiant 14-94 : L'automate n'arrive sur les nombres entiers que par 9 sauts, j'ai donc cherché immédiatement pour 18 sauts.

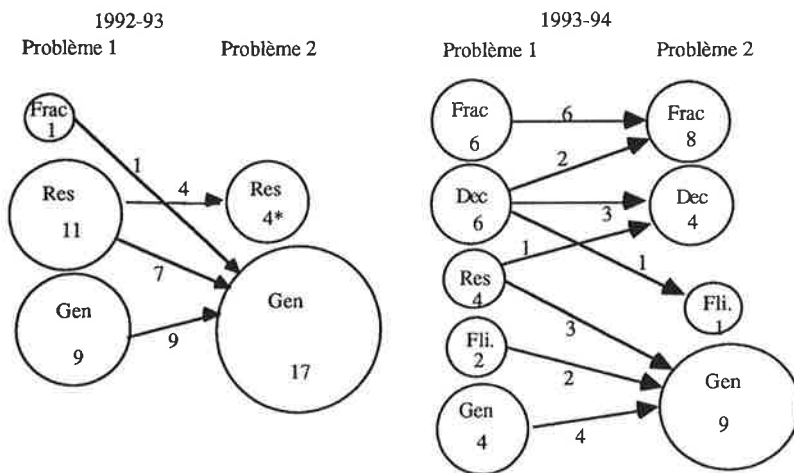
- La procédure Gen consiste à s'appuyer sur le modèle linéaire pour trouver le premier entier par lequel passe l'automate.

Étudiant 94 - 8 : 15----->9; 5----->3, donc 10----->6, etc...

c) Les changements de procédures : le rôle de la contrainte introduite dans le problème 2

Nous faisons figurer les changements de procédures pour les deux expérimentations dans les schémas ci-dessous.

La contrainte introduite par le problème 2 consiste à trouver des entiers hors de la zone matérialisée).



En 1992-93, nous constatons qu'un nombre important d'étudiants utilisent comme procédure de base la procédure Res, sans doute parce qu'ils viennent d'être invités à représenter le déplacement d'un automate en utilisant le réseau de parallèles. Dans les conditions de cette expérimentation, on voit que la contrainte introduite va inciter sept étudiants ayant utilisé la procédure Res, à se servir de Gen en s'affranchissant du matériel. Quatre étudiants vont adapter la procédure Res qui leur permet, à l'aide du

réseau, de trouver le premier entier par lequel passe l'automate, puis ensuite d'anticiper les autres entiers par addition répétée (procédure que nous avons appelé Res/Flimulent dans l'analyse a priori).

En 1993-94, quatre étudiants seulement utilisent la procédure Res dans le problème 1, trois évoluant vers la procédure Gen et le quatrième vers la procédure Dec dans le problème 2.

Pour les étudiants qui entrent dans le problème avec la procédure Res, la contrainte introduite dans le deuxième problème les fait évoluer, à une exception près, vers une procédure de type Gen : les résultats expérimentaux confirment donc le rôle joué par la contrainte quand les étudiants utilisent la procédure de base Res.

2.1.2. L'activité 2

a) Rappel de l'activité

Il s'agit de vérifier des tableaux de relevés faits par des contrôleurs peu compétents (relevés incomplets ou comportant des erreurs) :

- Activité 2 (individuelle) (problème 3)

Vous allez jouer le rôle d'"experts" pour examiner un tableau de relevé de "contrôleurs en automates". Les contrôleurs ont décidé d'écrire (10 ; 14) pour indiquer qu'un automate arrive à 10 en 14 sauts.

Voici un tableau où sont consignés des relevés concernant quatre automates A, B, C, D. Ces relevés incomplets ont été faits par quatre contrôleurs 1, 2, 3 et 4 : ces contrôleurs sont placés le long de la piste, de plus en plus loin de l'origine de la piste.

	A	B	C	D
Contrôleur 1	(5; 4)	(8; 14)	(6; 10)	(; 4)
Contrôleur 2	(25; 19)	(32;)	(12;)	(6;)
Contrôleur 3	(; 32)	(40;)	(; 30)	(12 ;)
Contrôleur 4	(120; 96)	(; 84)	(21;)	(24 ; 28)

Consigne

Complétez sur la feuille annexe n°1 les relevés des contrôleurs en indiquant comment vous avez procédé. Ne corrigez éventuellement un nombre que si vous êtes certains que ce nombre est erroné.

b) Les résultats

Nous examinons les deux éléments pouvant créer problème, c'est à dire les relevés des contrôleurs C et D :

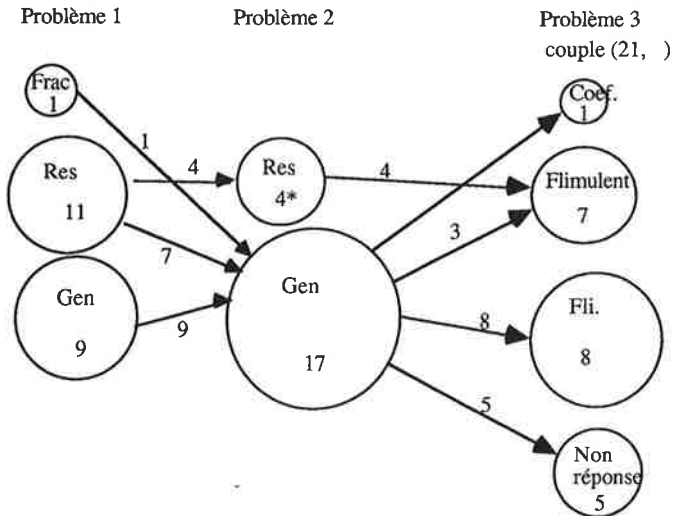
Année 92-93 (21 étudiants)

a) Pour le couple incomplet (21,) du contrôleur C :

Proposition pour le couple (21,)	Maintien de 21	Remplacement par 24	Non réponse
Nombre d'étudiants	9	7	5

Nous avons indiqué ci-dessous les procédures repérées pour maintenir ou remplacer 21, en les mettant en relation avec celles utilisées dans les problèmes précédents.

1992-93



Sept étudiants répondent 24, autrement dit, ils utilisent la procédure Flimulent, prenant pour référence le premier couple indiqué. Parmi ces sept étudiants, on en retrouve quatre qui avaient utilisé uniquement la procédure Res dans les problèmes 1 et 2 précédents, et 2 parmi ceux qui avaient utilisé la procédure Res dans le premier problème et la procédure Gen dans le deuxième. La procédure Gen utilisée par les deux étudiants dans le cas particulier du problème 2, où la détermination du couple origine était facilitée puisqu'il suffisait de diviser par 2 les deux termes du couple (10,14), n'est donc pas disponible dans ce problème.

Certains étudiants qui maintiennent 21, ne mettent pas forcément en évidence le couple générateur, mais ayant constaté que pour 10 sauts, l'automate a avancé de 6, ils envisagent que pour une progression de 5 sauts, l'automate avance de 3 graduations.

Cette remarque leur permet de conclure que pour passer de 18 et 21, il faut 5 sauts supplémentaires, d'où le couple (21,35). Mais l'absence de commentaires explicites pour un certain nombre d'entre eux ne nous permet pas de dénombrer de manière exacte ceux qui procèdent de cette manière. C'est pourquoi nous les regroupons sous le terme générique Fli, c'est-à-dire ceux qui ont utilisé des propriétés que l'on peut rattacher aux propriétés de linéarité.

Les non-réponses proviennent des étudiants qui n'ont pas eu le temps de remplir les colonnes correspondant aux automates C et D. Par contre, on voit à partir des traces écrites, l'utilisation de coefficients multiplicateurs permettant de passer d'un couple à un autre pour les automates A et B.

b) Pour le couple incomplet (0, 4) du contrôleur D :

Premier couple (, 4) complété ou modifié	(3,42;4)	(3,4)	(4,4)	couple (, 4) barré	non* réponse	autre
Nombre d'étudiants	1	10	1	3	6	0

Nous avons confirmation de ce que nous avons noté précédemment dans les réponses concernant l'automate D. La majorité des étudiants se situent dans la logique de la recherche d'un premier couple qui soit compatible avec les données suivantes (6,) et (12,). Cela les conduit à choisir (3; 4) (ou encore (4; 4)) et à modifier le dernier couple en le remplaçant par (24; 32). Quatre étudiants proposent d'ailleurs deux changements possibles pour le dernier couple, c'est-à-dire (24; 32) et (21; 28). L'étudiant qui propose (3,42; 4) est celui qui recherche un coefficient de proportionnalité entre des colonnes.

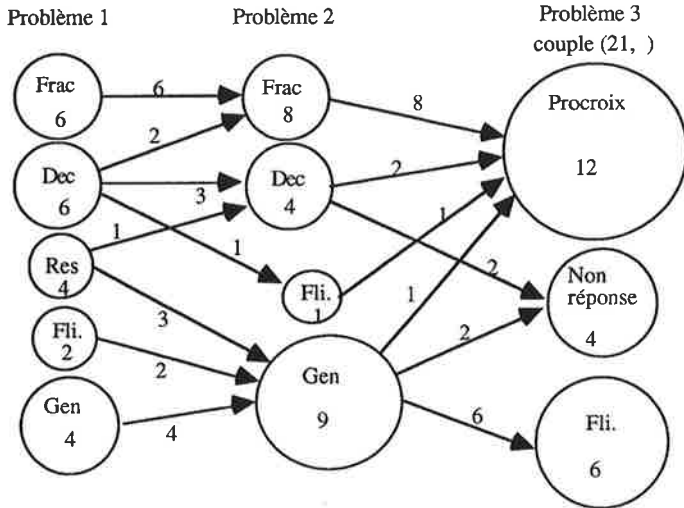
Année 93-94 (22 étudiants)

a) Pour le couple incomplet (21,) du contrôleur C :

Proposition pour le couple (21,)	Maintien de 21	Remplacement par 24	Non réponse
Nombre d'étudiants	18	0	4

La totalité des étudiants qui répondent, ne modifient pas 21. Nous reportons les procédures repérées à partir des traces écrites recueillies, dans le schéma ci-dessous.

* Il s'agit des étudiants qui ne donnent pas de réponse pour le premier couple, ni de réponses pour les autres couple de la colonne.



Ceux qui font référence aux fractions ou aux nombres décimaux utilisent de manière systématique le produit en croix, ce qui les conduit à compléter le couple (21,) par (21, 35) sans nécessairement se poser de question sur la signification de ce résultat. Ceux qui utilisent la procédure Gen dans le problème 2, gardent 21, sans que l'on voie apparaître de manière explicite sur les feuilles le couple générateur. Quant à celui qui se sert de la procédure Flimulent dans le problème 2, ayant utilisé la procédure Dec dans le problème 1, il se sert du produit en croix pour conclure par le maintien de 21.

b) Pour le couple incomplet (0, 4) du contrôleur D :

Premier couple (, 4) complété ou modifié	(3,42;4) ou (24/7;4)	(3,4)	(4,4)	couple (, 4) barré	non * réponse	autre
Nombre d'étudiants	10	3	0	5	3	1

Nous avons confirmation de ce que nous avons noté précédemment. Une majorité d'étudiants donne pour réponse le couple (3,42; 4) ou (24/7; 4) obtenu par l'utilisation de la règle de trois. Ils se placent dans la "logique" de l'utilisation de savoirs dont ils disposent au moment où ils abordent le problème.

2.1.3. La différence entre les deux résultats pour les deux années

D'où provient la différence des procédures observées dans les deux expérimentations ? Les activités précédant la situation "Automates" semblent avoir joué un rôle primordial dans cette différenciation. Pourquoi ?

Un premier niveau d'analyse nous permet de faire les constatations suivantes:

- en 1992-93, la mise en place de la technique de partage d'un segment, qui fournit une procédure de base pour les étudiants, a été placée en tout début de séance. Utiliser dans un premier temps uniquement les réseaux de parallèles comme technique de partage les place dans un environnement de problèmes perçus comme relatifs au primaire. Ils envisagent par la suite la situation proposée comme une situation qu'il est possible de proposer à des élèves du primaire. Ils vont s'attacher à résoudre le problème comme pourraient le faire des enfants de l'école primaire tout en essayant d'avoir une attitude réflexive sur les procédures utilisées. L'utilisation de la procédure Res favorise la prise de conscience de l'existence d'un premier entier par lequel passe l'automate. Cette procédure étant bloquée, la très grande majorité des étudiants passe directement à l'utilisation de la procédure Gen, conformément aux prévisions que fournit l'analyse a priori. D'une manière générale, ils cherchent à mettre en relation les couples les uns par rapport aux autres, en recherchant des multiplicateurs adéquats.

- en 1993-94, une séance entière (séance 1) avait précédé cette partie. Les étudiants devaient résoudre une série d'exercices de présentation relativement anodine, mais suffisamment "résistants" pour provoquer une analyse des raisons des problèmes rencontrés et par conséquent une "mise en appétit de savoir". La séance s'était terminée par la mise en place de la technique de partage d'un segment .

Les trois exercices de la première séance portaient de manière explicite sur les décimaux et les fractions. Un des exercices sur lequel nous reviendrons plus longuement par la suite (chapitre C4, paragraphe 1.1) a créé un événement par l'intérêt qu'il a suscité et par la longueur de la correction qui lui a été consacrée. Les étudiants ayant eu l'occasion de manipuler des décimaux, des fractions, se sentent donc autorisés par la suite à utiliser ces notions sur lesquelles on leur a montré en quelque sorte une certaine ignorance. D'autre part, ils se replacent naturellement dans un environnement de techniques caractéristiques du collège : ceci les amène à interpréter le saut comme un quotient de la "distance parcourue" par le nombre de sauts. D'autre part, l'éloignement de l'activité concernant les réseaux de parallèles, puisque celle-ci a été faite la semaine précédente, n'incite que très peu d'étudiants à l'utiliser comme procédure de base.

Nous allons à présent procéder à une analyse plus fine de la situation "Automates" pour mettre en évidence un phénomène qui rende compte du fait observé.

2.2. Deux jeux possibles

Nous analysons la première situation "Automates" à l'aide du modèle de structuration du milieu de la théorie des situations de G. Brousseau (1986, 1989b). C. Margolinas (1993a, 1993b) a complété et renommé les différents niveaux déjà introduits. On trouvera en annexe C3f le schéma de structuration du milieu présenté par C. Margolinas dans 1993b. Nous adoptons la terminologie proposée pour les noms attribués aux différents milieux et aux différentes situations correspondantes. Nous utilisons par contre le terme de "place" de préférence à celui de "position" que nous réservons pour la théorie anthropologique de Chevallard.

2.2.1. Un jeu sur les entiers

La première partie de la situation "Automates" est construite de sorte qu'elle soit porteuse des intentions de l'enseignant, mais en les rendant invisibles à l'étudiant. C'est ainsi que la notion de fraction, en particulier celle de fraction génératrice permettant de générer l'ensemble des fractions représentant un rationnel, doit rester cachée pour que la situation soit vécue de manière adidactique.

Dans cette situation, le jeu des étudiants peut être caractérisé comme un "jeu sur les entiers", utilisant les propriétés de linéarité de la fonction de N dans $Nf: s \rightarrow ns$.

Pour la situation objective, le milieu matériel est constitué des graduations et réseau de droites parallèles, les connaissances en jeu consistant à lier les nombres correspondant aux graduations, à placer un point sur la graduation pour indiquer par où passe un automate, à tracer des segments sur réseau de parallèles pour pouvoir les partager. Cette situation objective nous permet d'envisager un milieu objectif, constitué des éléments de la situation objective : les connaissances en jeu nécessitent de savoir utiliser le réseau de parallèles pour mettre en évidence les points par lesquels passe un automate défini par un couple (n, s) . Ceci caractérise la situation de référence qui va servir de milieu de référence pour le fonctionnement des savoirs. Ces connaissances sont nécessaires pour mettre en place la stratégie de base Res qui consiste à utiliser le réseau de parallèles pour déterminer sur la graduation l'ensemble des points entiers par lesquels passe l'automate.

Pour la situation d'apprentissage proprement dite S_1 , que nous avons étudiée en détail dans les chapitres précédents, les principales connaissances en jeu concernent les entiers ainsi que les propriétés des fonctions linéaires définies sur l'ensemble des entiers.

L'étudiant qui adopte les règles du jeu des entiers va se trouver dans une situation adidactique d'apprentissage. Nous avons montré, que dans ce cas là, les contraintes de la

situation avaient joué le rôle qui leur avait été assigné. Les procédures que peut mettre en route un joueur rationnel sont les procédures Res, Flimulent, Flimulrat, Res/flimul et Gen. Avec les contraintes fixées, la procédure optimale est la procédure Gen. Mais du fait que le formé se destine à être professeur, il se trouve nécessairement en position réflexive par rapport à sa propre activité : il réfléchit à son propre apprentissage, aux fonctions de la connaissance en jeu, mais dans le même temps cela lui permet d'obtenir des renseignements sur des procédures que pourraient utiliser les élèves, des erreurs qu'ils pourraient commettre, etc... Il peut ainsi disposer de connaissances qui lui apparaissent comme utiles lorsqu'il sera enseignant. Il occupe à la fois les places nommées par C. Margolinas E0 et E1. Cette dernière place est similaire à la place du professeur dans la situation de projet : en effet l'étudiant envisage le projet de réaliser l'activité avec des élèves.

Dans le tableau ci-dessous, nous résumons les principales connaissances en jeu dans les différents niveaux envisagés :

M1: M-didactique	E1: E-réflexif	. connaissances sur les différentes procédures pour résoudre les problèmes	S1: situation de projet
M0: M-d'apprentissage	E0: Élève	. connaissances sur les décomposition des nombres en facteur premiers . connaissances sur les fractions	S0: situation didactique
M-1: M-de référence	E-1: E-apprenant	. connaissances sur les entiers . connaissances sur les propriétés des fonctions linéaires	S-1: situation d'apprent.
M-2: M-objectif	E-2: E-agissant	. connaissances sur l'utilisation des réseaux pour déterminer les points entiers	S-2: situation de référence
M-3: M-matériel	E-3: E-objectif	. connaissances sur les graduations . connaissances des réseaux de parallèles	S-3: situation objective

Tableau C4- a

2.2.2. Le jeu de la mesure

Un deuxième jeu des étudiants est possible: "le jeu de la mesure du saut". Les étudiants vont chercher les entiers par lesquels passent les automates en utilisant la longueur du saut.

Le milieu matériel est différent, les graduations "physiques" et les réseaux de parallèles n'en font pas partie. Il est constitué de la droite numérique, matérialisée éventuellement par un dessin approximatif, et du fait que l'automate progresse de s bonds réguliers pour atteindre un point n entier. Les connaissances en jeu dans la situation objective concernent les entiers et leurs propriétés. Les connaissances à propos des fractions, l'égalité des fractions, le produit en croix, sont mobilisées. Par exemple le saut d'un automate

déterminé par le couple (n, s) est ainsi interprété comme le quotient de n par s et par la fraction $\frac{n}{s}$, deux couples (n, s) et (n', s') sont considérés comme représentant le même automate si $\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'}$ ou encore si le produit en croix est vérifié, c'est-à-dire si $n \times s' = n' \times s$. Le quotient décimal de $n:s$ est considéré comme représentant la fraction $\frac{n}{s}$. Les procédures *Frac*, *Dec*, *Procroix* sont donc utilisées comme procédures de base par l'étudiant, procédures qui mettent en jeu des connaissances anciennes. L'étudiant peut se trouver, mais pour des raisons qui ne sont pas directement liées aux contraintes introduites par le concepteur de l'ingénierie dans la situation, dans des phases adidactiques relatives à certains objets anciens. C'est ainsi que l'introduction d'un ensemble de couples représentant un même rationnel peut faire "bouger" des objets anciens comme le produit en croix. Au niveau de la situation d'apprentissage, il existe donc un milieu adidactique qui sert de référence pour le fonctionnement du savoir, déterminant un jeu adidactique différent de celui prévu par le concepteur. Il s'agit d'une situation S'_{-1} qui est donc bien différente de la situation S_{-1} .

L'étudiant se place en position réflexive E'_{0} par rapport à son propre apprentissage, mais aussi en position réflexive E'_{1} par rapport à la situation didactique, puisqu'il est amené là aussi à réfléchir sur les procédures qui peuvent être utilisées par les élèves du primaire. Il peut ainsi considérer que les connaissances en jeu sont des objets de savoir servant à enseigner et essayer de voir quelles sont les interrelations de ceux-ci avec les objets d'enseignement à l'école primaire.

Les connaissances en jeu dans les différents niveaux sont résumées dans le tableau suivant :

M ¹ : M-didactique	E ¹ : E-réflexif	. connaissances sur les différentes procédures pour résoudre les problèmes de commensuration	S ¹ : situation de projet
M ⁰ : M-d'apprentissage	E ⁰ : Élève	. classe d'équivalence de couples de nombres entiers, couple générateur, relation entre couple générateur et fraction irréductible	S ⁰ : situation didactique
M ⁻¹ : M-de référence	E ⁻¹ : E-apprenant	. relation entre fractions, produit en croix et fonctions linéaires	S ⁻¹ : situation d'apprent.
M ⁻² : M-objectif	E ⁻² : E-agissant	. connaissances sur les fractions, l'égalité des fractions et fractions irréductibles . connaissances sur le produit en croix	S ⁻² : situation de référence
M ⁻³ : M-matériel	E ⁻³ : E-objectif	. connaissances sur la droite numérique	S ⁻³ : situation objective

Tableau C4- b.

L'étude précédente nous amène à compléter l'analyse a priori de la situation "Automates" que nous avons effectuée dans le chapitre C2. En effet, nous avons été amené à mettre sur le même plan les différentes stratégies susceptibles de modéliser les procédures mises en œuvre par les formés.

L'analyse en terme de milieu a permis de montrer que, dans la situation "Automates", deux jeux sont permis correspondant à deux milieux différents, donc à deux situations différentes. En effet, il n'y avait pas de règles explicites interdisant l'utilisation des nombres non entiers. Nous avons montré dans l'analyse a priori que, dans la dernière activité proposée, les stratégies correspondant à ce deuxième jeu étaient rendues coûteuses par rapport à la stratégie Gen.

Cette analyse en terme de milieu ne nous explique cependant pas pourquoi les étudiants vont interagir plutôt avec un milieu correspondant au jeu des entiers plutôt qu'avec le milieu correspondant au jeu de la mesure, c'est ce que nous nous proposons d'examiner à présent.

2.3. Le phénomène : deux placements possibles pour le formé

2.3.1. L'identification des deux placements

Nous considérons la différence observée dans les deux expérimentations comme liée à deux placements possibles que peut prendre le formé au cours d'une activité proposée par le formateur. Nous situons notre analyse du côté du sujet en donnant une description et une caractérisation de ces placements. Nous n'utilisons pas volontairement le terme de "positions" utilisées dans la théorie anthropologique de Chevallard et dans le modèle de structuration du milieu de Brousseau.

Nous distinguons :

- un placement que nous qualifions de **sémantique** : les formés vont résoudre le problème comme ils supposent que pourrait le faire un élève du primaire. Ils acceptent de jouer ce jeu-là parce qu'il sont des futurs professeurs et que cette attitude leur permettra en quelque sorte d'anticiper ce que feront leurs élèves auxquels on proposera une situation similaire. Les phases adidactiques considérées comme nécessaires vont donc se dérouler conformément à l'analyse a priori. Les contraintes de la situation, compte tenu de la transformation effectuée de l'ingénierie, vont provoquer en accéléré les adaptations souhaitées par l'expérimentateur et l'utilisation de la procédure optimale.

- un placement **syntactique** : les formés vont mobiliser des techniques anciennes rendues sensibles par un phénomène d'ignorance, ces savoirs anciens étant rattachés à des techniques de l'école obligatoire. Ils vont essayer de déterminer parmi eux quels sont les

savoirs en jeu dans la situation proposée par le formateur. Ils cherchent à s'assurer que ces connaissances vont pouvoir fonctionner dans le contexte proposé.

Nous allons caractériser maintenant de manière plus précise ces deux placements en nous appuyant sur les échanges ayant eu lieu pendant les activités de groupe.

Au niveau du travail de groupe, les étudiants reviennent dans un premier temps sur le travail individuel (en 1994, nous l'avons finalisé par la production d'un premier tableau commun), puis ils ont à remplir le deuxième tableau suivant (les tableaux ne diffèrent que pour l'automate I) :

	F	H	I (1992-93)	I (1993-94)	J
Contrôleur 1	(12; 8)	(15 ; 54)	(;)	(16 ; 104)	(;)
Contrôleur 2	(18; 12)	(25 ; 90)	(44 ;)	(41 ;)	(; 20)
Contrôleur 3	(30 ;)	(35 ;)	(; 884)	(; 507)	(60 ;)
Contrôleur 4	(43 ; 28)	(; 144)	(420; 2730)	(210; 1365)	(360 ; 140)

Tableau à compléter lors du travail de groupe

En 1994, nous avons modifié la présentation de I en pensant que cela allait favoriser l'apparition du couple générateur.

L'enregistrement de tous les groupes a été effectué pendant l'année 1992-93. En 1993-94, seuls deux groupes ont été enregistrés. Pour les deux expérimentations, nous disposons des posters réalisés par les différents groupes ainsi que de l'enregistrement de la phase de confrontation appelée "panel". C'est à partir de ces éléments que nous avons fait les analyses suivantes. Nous indiquons, pour chacun des étudiants de chaque groupe, les procédures utilisées pour les deux premiers problèmes, les éléments caractéristiques pour le tableau rempli individuellement relativement aux deux problèmes posés par les automates C et D. Les résultats du groupe par rapport à la recherche des couples générateurs ainsi que les arguments fournis sur les posters sont rappelés.

2.3.2. Le placement sémantique

Nous allons étudier un groupe qui a fonctionné pendant l'expérimentation 1992-93, (chronique complète en annexe C3g) . Le groupe est intéressant dans la mesure où il réunit quatre personnes ayant utilisé des procédures différentes dans les problèmes initiaux. La confrontation des points de vue va nous servir de révélateur. Les étudiants vont se trouver dans des placements différents, ce qui va nous aider à caractériser

essentiellement le placement que nous avons appelé sémantique. L'autre placement sera en filigrane: celui-ci sera caractérisé dans le paragraphe suivant, en nous appuyant sur l'analyse du fonctionnement des groupes pendant l'expérimentation 93-94. Nous reviendrons dans le paragraphe 4 sur le "jeu" entre ces deux placements.

Groupe 4 (expérimentation 92-93)

	Pb. 1	Pb. 2	1 ^{er} tableau (individuel)		2 ^{ème} tableau (par groupe)
			Automate C	Automate D	Automates F, H, I, J,
E 12	Gen	Gen	flimulrat : 21	(3,4)	Mise en évidence explicite des couples générateurs
E 3	Gen	Gen	procroix : 21	(3,4)	
E 9	Res	Gen	flimulent : 24	(3,4)	
E 5	Res	Res/flimulent	flimulent : 24	(3,4)	

Argument final fourni par le groupe :

On cherche le plus grand diviseur commun du couple et ce couple, une fois simplifié par le diviseur, sert de base aux autres calculs.

Analyse du déroulement du travail de groupe

Au début du travail par groupe, les étudiants E 5 et E 9 n'arrivent pas à compléter le nouveau tableau qui leur est proposé. Ce sont donc les deux étudiants E 3 et E 12 qui vont s'attacher à expliquer aux autres comment ils procèdent.

L'étudiant E 3 avait utilisé la règle de trois, pour remplir le premier tableau tandis que l'étudiant E 12 avait utilisé la procédure Flimulrat, consistant à diviser par 2 puis à multiplier par 3 chacun des termes du premier couple de l'automate F. On peut estimer que ces deux étudiants occupent un placement syntaxique : ils mobilisent des techniques anciennes issues de l'école obligatoire. E 12 cherche à exposer sa technique aux autres étudiants, tandis que E 3 explique en même temps qu'on peut se servir de la règle de trois.

Les étudiants s'occupent de l'automate F :

(12; 8)

(18; 12)

(30;)

(43; 28)

Extrait 1

E 3 - si tu fais par proportionnalité, par règle de trois, regarde ...

E 12 - oui, ce que tu peux faire à partir de 12, comme tu passes à 18, eh bien 12, tu le divises par 2 et tu multiplies par 3, il faut faire deux opérations successives.

E 5 - et là ça donne 12 ?

E 12 - oui, parce que 8 divisé par 2, ça donne 4 et multiplié par 3, ça donne 12.

E 9 - tu essayes de voir comment tu peux passer de l'un à l'autre ?

E 12 - oui, avec deux opérations, avec deux opérations, ça marche en général, 18 divisé par 3, ça fait 6, multiplié par 5, ça fait 30.

E 5 - oh là là !

Les étudiants E 5 et E 9 sont intéressés dans la mesure où ce que propose E 12 est du même type que la technique qu'ils avaient utilisée dans le premier tableau pour passer d'un couple à un autre. C'est une technique qui leur paraît contextualisée et plus générale que la leur. Ils essaient de la faire fonctionner pour d'autres couples de la colonne de l'automate F, avec les multiplicateurs 2 et 3 comme l'avait fait E 12, mais aboutissent à une contradiction.

Extrait 2

E 5 - donc là, c'est faux le 30.

E 12 - mais si pour passer par exemple de là à là. [il montre les nombres 12 et 30]

E 9 - ah, mais tu repars du 12.

E 12 - ben oui, tu reprends la même méthode, mais tu changes les chiffres chaque fois de 12 à 30.

E 5 - mais, j'ai fait de 18 à 30, divisé par 2 et multiplié par 3.

E 9 - mais, ce n'est pas un coefficient de proportionnalité ?

E 5 - mais ton coefficient, il sera propre à chaque doublette, comment tu veux passer de là à là et de là à là, tu n'as qu'une possibilité.

C'est le caractère apparemment non systématique qui est mis en cause, puisqu'il faut s'appuyer sur une valeur intermédiaire dépendante du couple initial choisi. E 3 en profite pour indiquer que la technique du produit en croix marche à tous les coups. Mais les étudiants sont toujours sur la technique de E 12 à laquelle ils cherchent à attribuer une signification dans le contexte.

Extrait 3

E 5 - ça me gêne de changer de coefficient, c'est gênant de faire un coefficient là, un autre là...

E 3 - oui, mais ça marche à tous les coups aussi, si tu prends la proportionnalité avec un produit en croix

E 5 - ça me gêne qu'on change de coefficient parce qu'on dirait que le robot n'est plus régulier.

E 3 - mais ça ne remet pas en cause le robot !

Cette recherche de signification oblige E 12 à expliciter sa technique qui est en concurrence avec la technique de la règle de trois. Celle-ci va se trouver disqualifiée parce que E 12 est capable d'expliquer sa technique dans les termes de la situation, ce qu'il traduit par l'expression "c'est pareil que la règle de trois, sauf que **cela donne du sens**". En fait, la propriété de linéarité qu'il utilise rend compte de la technique, qui peut s'interpréter dans le cadre de la situation : mise en évidence d'un couple (6; 4) différent des couples (12; 8) et (18; 12) qui correspond à un entier 6 par lequel passe l'automate.

Extrait 4

E 12 - moi, je fais avec le rapport comme ça, comme on passait de 5 à 25, après on fait la même recette sur le nombre 4 et on essaie d'obtenir l'autre.

E 3 - je suis partie avec l'idée ...

E 12 - on cherche un multiplicateur commun.

Extrait 5

E 5 - mais ça me semble plus régulier, tandis que là, ça a l'air vraiment de petits calculs...

E 12 - mais ça revient exactement au même, la règle de trois...

- E 9 - on dirait vraiment que c'est de la cuisine...
- E 12 - la règle de trois, c'est aussi une autre recette de cuisine.
- E 5 - oui deux opérations quoi, pour moi, c'est moins régulier.
- E 12 - c'est pareil que la règle de trois, sauf que ça donne du sens, c'est tout.
- E 5 - mais moi, je ne faisais pas la règle de trois, je faisais rien.

Les expressions "recette de cuisine", "petits calculs", "donner du sens" sont significatives dans cet extrait et montrent bien que l'enjeu de la discussion tourne autour de la question du "sens". Cela amène E 12 à fournir progressivement l'argument de la recherche du premier point par lequel passe l'automate.

Extrait 6

- E 12 - ben si tu veux, on obtient le plus petit possible, si tu divises par deux, ça te fait (6, 4), on peut même obtenir plus petit, c'est (3, 2), si tu divises encore par deux, à partir de là, tu peux obtenir tous les autres, c'est plus facile : là tu multiplies par 6, là par 10.
- E 9 - en fin de compte, on va chercher à chaque coup le plus petit.
- E 12 - oui, on peut faire comme ça, on cherche le plus petit possible.
- E 9 - mais c'est plus facile.

Les étudiants se trouvent alors dans un placement sémantique : un indice confirmant ceci est l'expression "passe" utilisée par E 9 qui se réfère explicitement à un automate.

Cette technique va emporter la conviction des autres membres du groupe parce qu'elle est généralisable et qu'elle se justifie par la recherche du plus grand diviseur commun.

Les étudiants se trouvent alors dans un placement syntaxique.

Extrait 7

- E 9 - oui, avec cette méthode, on passe par le plus petit possible.
- E 5 - je préfère.
- E 12 - oui, mais ça revient au même.
- E 9 - on cherche un multiple commun?
- E 12 - on cherche le plus gros diviseur commun aux deux.

E 3 n'intervient plus à la fin du travail, mais c'est lui cependant qui fournit l'argumentation finale que l'on trouve sur le poster qu'il s'agit de rédiger.

Nous avons ici un déroulement représentatif de recherche de solution. Le placement sémantique prend le relais quand un étudiant ne peut fournir de justifications sur la technique qu'il utilise. Il y a abandon du placement sémantique dès que les étudiants peuvent trouver une justification, par exemple ici, recherche du plus petit couple en divisant chaque terme du couple par le P.G.C.D des deux nombres.

Nous donnons trois caractérisations pour le placement sémantique:

- la première est relative au jeu auquel jouent les étudiants dans la situation déterminée (nous avons mis en évidence deux jeux possibles): ici c'est le jeu sur les entiers dans le contexte des automates. Cette caractérisation est donc du côté des contraintes de la situation.

- la deuxième met en avant la question du sens qui est au centre des propos des formés. Ici le sens est lié au contexte des automates. La linéarité rend compte de la technique, elle permet d'interpréter la technique dans les termes de la situation. Cette recherche du sens découle, semble-t-il, des déterminations que nous cherchons à expliciter et sur lesquelles nous reviendrons.
- la troisième se place du côté des déterminations extérieures à la situation proprement dite. Elle caractérise le fait que les étudiants se sentent autorisés à utiliser des techniques contextualisées.

Caractérisation du placement sémantique

- a - élaboration d'une technique contextualisée dont le domaine de validité est l'ensemble des problèmes proposés (dans le cas de la situation "Automates", il s'agit de la procédure GEN)**
- b - le "sens" de cette technique est celui du contexte dans lequel elle est mise en œuvre,**
- c - la légitimité de cette technique est assurée par le fait qu'elle est rattachable à des techniques de l'institution-cible (ici le primaire).**

Nous avons confirmation de la validité de cette caractérisation grâce aux analyses du fonctionnement des autres groupes 1, 3 et 5 (annexe C3h).

Les groupes 1 et 5 ont ainsi un comportement analogue au groupe 4, même si le niveau d'explicitation est beaucoup plus faible pour le groupe 5.

Le point "a" de la modélisation précédente rend bien compte du fonctionnement du groupe 3. Les étudiants ont ainsi bien élaboré une méthode mais ne comprennent pas exactement pourquoi cela les conduit au résultat. Ils trouvent que leur "méthode" n'est pas assez systématique. La phase collective, par l'intervention d'autres groupes (groupe 4 et groupe 2) ayant mis en évidence les éléments générateurs et le moyen de les obtenir, leur fournira la technique générale souhaitée.

Quant au groupe 2 (chronique complète en annexe C3i), la modélisation précédente ne rend que partiellement compte de son fonctionnement, nous y reviendrons après avoir caractérisé le placement syntaxique .

2.3.3. Le placement syntaxique

Nous nous servons essentiellement des travaux de groupe réalisés pendant l'expérimentation 1993-94, puisque le placement majoritaire était de ce type. Nous ne faisons figurer que les tableaux récapitulatifs, obtenus à partir des éléments recueillis

(fiche individuelle, tableaux remplis et poster réalisé collectivement). Nous indiquons si des couples générateurs sont marqués explicitement sur le deuxième tableau. Nous regroupons les groupes 1, 2, 3, 5 :

- le couple générateur ne figure pas dans le deuxième tableau,
- le produit en croix et des propriétés concernant la proportionnalité sont systématiquement utilisés comme l'indiquent les arguments fournis sur les posters.

Groupe 1 (expérimentation 93-94)

	Pb. 1	Pb. 2	1 ^{er} tableau (individuel)		2 ^{ème} tableau (par groupe)
			Automate C	Automate D	Automates F, H, I, J,
E ₁₁	Dec	Frac	21	(3,43;4)	Pas de couple générateur
E ₁₉	Dec	Frac	21	(3,43;4)	
E ₉	Res	Gen	21	(; 4)*	
E ₇	Res	Dec	21	NR	

Argument final :

On fait le rapport entre 2 graduations ou deux nombres de sauts.

On obtient le coefficient de proportionnalité.

On multiplie ou on divise par ce coefficient pour trouver la valeur manquante.

exemple : $\frac{18}{12} = 1,5$ $1,5 \times 8 = 12$

Groupe 2 (expérimentation 93-94)

	Pb. 1	Pb. 2	1 ^{er} tableau		2 ^{ème} tableau (par groupe)
			NR	NR	Pas de couple générateur
E ₂₀	Res	Gen	NR	NR	
E ₆	Frac	Frac	21	(; 4)*	
E ₁₂	Dec	Dec	21	(1,4)	
E ₃	Frac	Frac	21	(; 4)*	

Argument final :

On a comparé les couples d'un même automate un à un et on a fait le produit en croix pour vérifier la proportionnalité et/ou trouver le nombre manquant.

Pour J

x	20
60	y
360	z+140

on sait que $\frac{360}{x} = \frac{z+140}{20}$

* (; 4) barré

Groupe 3 (expérimentation 93-94)

	Pb. 1	Pb. 2	1 ^{er} tableau		2 ^{ème} tableau (par groupe)
E ₁₀	Frac	Frac	NR	NR	Pas de couple générateur
E ₅	Frac	Frac	NR	NR	
E ₈	Res	Gen	21	(3,4;4)	
E ₂	Gen	Gen	21	(3,4)	

Argument final :

Méthodes :

- rapport d'une paire à l'autre $(12; 8) \times 1,5 \rightarrow (18; 12)$.
- rapport d'une valeur à l'autre $12 \times 1,5 \rightarrow 18$.
- par additions successives :

$$\begin{array}{cccc}
 12 & & 8 & & 20 & & 30 \\
 +18 & \rightarrow & +12 & \rightarrow & +8 & \rightarrow & +12 \\
 30 & & 20 & & 28 & & 42
 \end{array}$$

- passage au rapport fractionnaire.

Remarques :

- comment trouver l'entier le plus proche de 41 pour lequel le rapport sera le même que pour les autres valeurs : 40, 42 ?
- pour la dernière colonne : est-il possible de trouver des valeurs en partant d'un seul rapport $360 \rightarrow 140$? Par exemple, est-ce que $36 \rightarrow 14$ sera valable?

Groupe 5 (expérimentation 93-94)

	Pb. 1	Pb. 2	1 ^{er} tableau		2 ^{ème} tableau (par groupe)
E ₂₂	Gen	Gen	21	(3,4)	Pas de couple générateur
E ₁₈	Gen	Gen	21	(24/7,4)	
E ₄	Dec	Dec	21	(24/7,4)	
E ₁₆	Dec	Flimulent	21	(; 4)*	
E ₁₇	Flimulent	Gen	21	(; 4)*	

Argument final :

On considère que les couples sont proportionnels et on le vérifie par un produit en croix. Si on ne tombe pas sur un nombre entier, on recherche le nombre entier le plus proche qui convient.

Un seul groupe fait référence à une fraction correspondant au couple générateur, mais cela ne remet pas en cause les couples trouvés, qui ne sont pas des couples d'entiers, et donc ne peuvent pas s'interpréter dans le contexte des automates.

Groupe 4 (expérimentation 93-94)

	Pb. 1	Pb. 2	1 ^{er} tableau		2 ^{ème} tableau (par groupe)
E ₂₀	Gen	Gen	21	(3,4)	Référence à une fraction de base correspondant au couple générateur.
E ₁	Frac	Frac	21	(24/7,4)	
E ₁₃	Dec	Dec	21	(3,43;4)	
E ₁₅	Frac	Frac	21	(24/7,4)	
E ₁₄	Flimulent	Gen	21	(3,43;4)	

Argument final :

Pour compléter l'affiche :

- respect de la proportionnalité pour un automate,
- réduction de la fraction à sa plus petite expression ex : $\frac{12}{8} = \frac{3 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{3}{2}$, ainsi 3 graduations correspondent à 2 sauts,
- par référence à la fraction de base, on rectifie les erreurs.
- pour l'automate J, nous avons modifié le dernier relevé (contrôleur 4) afin de n'effectuer qu'une seule correction (360,144)

Le langage et les notions utilisés dans les argumentations (coefficients de proportionnalité, propriétés d'additivité, écritures utilisant les lettres..) font appel à des techniques anciennes que les formés mobilisent majoritairement. Ils essaient d'identifier quels sont les savoirs en jeu et de reconnaître ceux qui vont être utiles dans la situation.

L'utilisation de certains savoirs automatisés peut les conduire à produire des résultats qui ne sont pas interprétables dans la situation, comme par exemple trouver des couples du type (24/7,4) ou (3,43;4).

Cependant, au cours des travaux de groupe, une réflexion s'engage au sein des groupes sur la proportionnalité, le produit en croix et la recherche des multiplicateurs pour passer d'un couple à un autre. C'est ainsi que dans tous les tableaux réalisés collectivement, tout élément rajouté est un nombre entier, contrairement à ce qui avait été indiqué dans de nombreux tableaux au cours du travail individuel. Cela indique qu'au cours de cette phase, un lien a été établi entre les résultats trouvés et la signification du problème. Il s'agit de phases adidactiques au sens où A. Mercier (1992, 1995) a montré que ces phases permettaient d'établir des rapports nouveaux à des savoirs anciens. Certains de ces apprentissages ont été rendus visibles ici par le recueil de données : feuilles individuelles dans un premier temps, puis production des groupes dans un deuxième temps. Des savoirs automatisés, comme le produit en croix, sont repensés, notamment au cours des périodes de travaux de groupes, et mis en rapport avec d'autres procédures qui fonctionnent dans la situation. Les étudiants, futurs enseignants se mettent en position

réflexive et établissent des liens entre les procédures. Ils cherchent ainsi à déterminer quelles sont les raisons qui permettent de justifier ces techniques. Une technique a besoin d'une légitimation, nous dit Chevallard². Cette légitimation peut être réalisée par une technologie, c'est à dire les éléments qui vont pouvoir justifier cette technique. Il sont donc à la recherche de technologies explicatives qui légitiment l'emploi des techniques utilisées. Ils veulent ainsi trouver et reconstruire à travers la situation un certain texte du savoir.

Pour caractériser le placement syntaxique nous reprenons les trois éléments définissant le placement sémantique.

Caractérisation du placement syntaxique

- a) repérage et utilisation de techniques anciennes adaptées aux problèmes proposés qui ont un domaine de validité étendu dans le champ d'expérience (ici le cadre scolaire, par exemple, dans le cas de la situation "Automates" ce sont celles qui relèvent de la proportionnalité),**
- b) le "sens" de ces techniques est celui des raisons qui les justifient,**
- c) la légitimité de ces techniques provient de leur existence en tant qu'objets de savoir déjà étiquetés dans les institutions de référence (ici collège et lycée).**

Nous mettons à présent à l'épreuve cette modélisation. Nous allons retrouver le même phénomène à propos de la séquence du "Tireur d'élite". Nous allons montrer en quoi cette identification de deux placements est éclairante pour comprendre le déroulement de la deuxième partie de la situation "Automates"; cela nous permettra de discuter de la "stabilité" de ces deux placements.

3. LA SÉQUENCE DU TIREUR D'ÉLITE: ANALYSE EN TERME DE PLACEMENT

Comme au cours de la séquence "Automates", l'initialisation du travail à propos de la séquence du tireur d'élite va avoir des conséquences sur le placement pris par les étudiants, ce qui nous permet d'interpréter les résultats obtenus auprès des étudiants.

2. CHEVALLARD Y., 1993, Contrat social et institutions didactiques, Remarques sur quelques notions et problèmes, Séminaire de didactique des mathématiques du 4 Avril 1993, texte non publié, Paris.

3.1. L'activité d'initialisation : tir dans une zone limitée

En 1992-93, le début de la séance avait été perturbé par des défauts de rédaction de la fiche proposée aux étudiants et avait rendu le début de la séance difficile. Ainsi la grande majorité des étudiants n'ayant pas encore compris le problème, deux propositions avaient été faites rapidement par un binôme pour approcher le nombre proposé $\frac{38}{68}$ par les rationnels $\frac{5}{8}$ et $\frac{33}{58}$. Ce dernier rationnel est la meilleure approximation : les deux étudiants l'avaient constaté en se servant des approximations décimales données par leur calculatrice. Nous n'avons pas eu les moyens de repérer si les étudiants utilisaient la procédure de base prévue dans l'analyse a priori et nous n'avons pas vu apparaître des points alignés comme nous le souhaitons. Par la suite nous avons pu cependant observer que deux procédures émergeaient : chercher des points près de l'origine, chercher des points près du point proposé, ce qui tendrait à confirmer ce que nous avançons. Ces points de vue ont été cependant rapidement disqualifiés par le premier binôme expliquant qu'on s'occupait en fait des pentes des droites correspondant aux points repérés.

En 1993-94, nous avons donc repris en choisissant le rationnel $\frac{27}{62}$, correspondant au point Z de coordonnées (62,27). Il a l'intérêt d'avoir un grand nombre de points proches de la droite joignant OZ, ces points se répartissant en diverses classes assez fournies correspondant à différents rationnels.

Effectivement, les diverses propositions faites par les étudiants ont été les suivantes :

$\frac{9}{21}$; $\frac{6}{14}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{12}{28}$; $\frac{25}{58}$; $\frac{27}{63}$, la dernière ayant été proposée plusieurs fois.

Certains constatent que les points correspondant à $\frac{9}{21}$; $\frac{6}{14}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{12}{28}$; $\frac{27}{63}$ sont alignés mais la plupart ont signalé très rapidement que ceux-ci correspondaient au même rationnel. Ils ont donc utilisé un savoir mis en place au cours de l'activité précédente, conformément à ce qui était attendu d'après l'analyse a priori.

Le choix de $\frac{27}{62}$, qui fait partie des rationnels intéressants d'après l'analyse a priori théorique, se justifie donc expérimentalement.

Le constat sur le fait que le rationnel $\frac{25}{58}$ était plus proche de $\frac{27}{62}$ que les autres, est fait par certains étudiants à l'aide des approximations fournies par la calculatrice, court-circuitant ceux qui se lancent dans le calcul à la main de la différence entre les différents rationnels.

L'activité aurait très bien pu en rester là sans l'insistance du concepteur de l'ingénierie à vouloir faire rejouer le jeu avec d'autres nombres rationnels, comme il était prévu sur la

fiche. Il pensait que cela permettrait à ceux qui avaient utilisé la procédure de base d'avoir l'occasion de changer de stratégie. Le formateur a interprété cette demande de la manière suivante : il était nécessaire de bien montrer que les rationnels correspondaient à des pentes de droite et que l'on pouvait comparer ces pentes en utilisant les approximations décimales de ceux-ci. Cela allait donc renforcer le travail sur les approximations décimales et allait avoir une influence sur la suite.

3.2. Tir dans une zone non limitée: deux placements possibles

Nous disposons des feuilles remplies par chaque binôme sur la suite des propositions qu'ils ont faites. C'est à partir de ces traces écrites que nous caractérisons la démarche de chacun des binômes, ce qui nous fera percevoir de nouveau des différences entre les deux expérimentations. De plus, pour chacune des années, nous avons enregistré les propos des deux binômes d'un même groupe : nous analyserons le travail de l'un d'eux car il porte témoignage de l'apprentissage qui peut s'effectuer au cours de cette activité de groupe pour certains étudiants en placement syntaxique, mettant en lumière de manière nette des phases que nous pouvons analyser comme adidactiques.

3.2.1. Des résultats différents pour les deux années

Nous reprenons les codes correspondant aux stratégies envisagées dans l'analyse a priori :

qua : Choix de couples successifs de points du quadrillage,

f_{dc} : Choix de fractions à "dénominateurs constants",

d₂ : Stratégie par dichotomie,

d₁₀ : Stratégie par dichotomie appliquée à des intervalles de la forme $\left[\frac{a}{10^n}, \frac{a+1}{10^n} \right[$.

Deux jeux sont possibles dans la situation. Un premier jeu que nous appelons "tireur d'élite" consiste à essayer de trouver un faisceau de droites qui "contienne" la droite correspondant au rationnel recherché. Les procédures qua et f_{dc}, très contextualisées se rattachent à ce jeu. Un deuxième jeu que nous appelons "encadrement par deux rationnels" fait appel à des connaissances sur les fractions, connaissances indépendantes du contexte : passage écriture fractionnaire / écriture à virgule, fractions décimales, "milieu" de deux nombres désignés par une écriture à virgule ou une écriture fractionnaire, etc... Les stratégies d₂ et d₁₀ se rattachent à ce deuxième jeu.

En ce qui concerne les deux expérimentations, le détail des démarches utilisées par les étudiants figure en annexe C3j. Le tableau récapitulatif pour les deux années indiquant les stratégies initiales et finales utilisées au cours du jeu indiquent les résultats suivants (les

nombre sont relatifs aux binômes de joueurs : au cours de cette séance, les effectifs sont les mêmes).

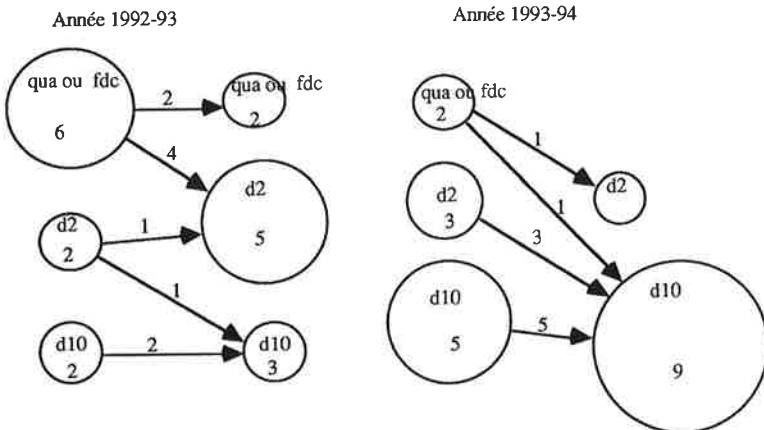
Stratégie	92-93		93-94	
	initiale	finale	initiale	finale
qua	3	1	2	0
fdc	3	1	0	0
d2	2	4	3	1
d10	2	4	5	9
Σ	10	10	10	10

Stratégies initiales et finales utilisées au cours du jeu

Si on regarde séparément les deux années, les résultats sont nettement différents.

- en 92-93, les procédures initiales qua et fdc sont plus importantes (6), les procédures finales d2 et d10 étant équilibrées,
- en 93-94, les procédures initiales d10 sont nombreuses, la procédure finale est presque exclusivement la procédure d10.

Nous faisons figurer sur le schéma ci-dessous les changements de stratégies qui confirment les différences observées.



Changements de stratégie au cours du jeu.

Nous expliquons ces faits par des raisons similaires à celles avancées à propos de la séance 3, c'est-à-dire par le placement des étudiants au cours de cette activité. La première

activité “tir dans une zone limitée” a ainsi joué un rôle important dans la détermination de ce placement.

En 92-93, celle-ci s’est déroulée très rapidement pour les raisons que nous avons expliquées plus haut, la plupart des étudiants sauf deux, n’ayant pas eu véritablement la possibilité “d’entrer” dans le jeu proposé. Elle leur a cependant permis de comprendre en quoi consistait un angle de tir. La deuxième activité fut perçue comme le prolongement de l’activité précédente. Ils ont joué en majorité le jeu dit du “tireur d’élite. Nous avons noté l’utilisation de procédures s’appuyant sur la présence matérielle du réseau (procédure qua) et de procédures s’appuyant sur les fractions ayant un dénominateur fixé (procédure f_{cd}). Les étudiants occupent majoritairement le placement que nous avons défini comme sémantique. Seuls les étudiants appartenant au groupe 1 et au groupe 2 (voir annexe C3j) occupent un placement syntaxique : nous reviendrons plus loin en détail sur le fonctionnement d’un binôme du groupe 1.

Par contre, en 93-94, la répétition des propositions au cours de l’activité d’initialisation a amené le formateur à insister sur les approximations obtenues à l’aide de la calculette, des rationnels considérés comme quotients de deux entiers. Ils vont donc chercher à réutiliser leurs connaissances anciennes dans la situation. Le jeu quasi exclusif est le jeu “d’encadrement des rationnels”. Ce sont donc les décimaux et les fractions décimales qui sont au centre de leurs préoccupations, de sorte qu’ils font jouer rapidement aux fractions décimales un rôle important. Ils occupent un placement que nous avons qualifié de syntaxique.

3.2.2. Une confirmation de la caractérisation du placement syntaxique.

En nous appuyant sur la chronique de la recherche de deux étudiants occupant le placement qualifié de syntaxique (étudiants appelés E₁ et E₂ du binôme 1 du groupe 1 (année 1992-93) (voir annexe C3k), ainsi que sur l’interview d’un des deux étudiants, réalisé à la suite de cette recherche (voir annexe C3l), nous allons retrouver les caractéristiques que nous avons avancées dans le paragraphe précédent.

a) le problème de l’utilisation des techniques anciennes

Les étudiants utilisent des techniques anciennes dont ils ont souvent l’occasion d’éprouver la validité dans les différents domaines où ils les ont mises en œuvre. Après la séquence, cet étudiant met en évidence le problème qu’il a rencontré :

«j’avais l’impression d’avoir compris les décimaux, parce que je les avais employés dans les soustractions, multiplications, etc... dans toute ma scolarité. Pourtant j’étais plutôt scientifique, j’ai fait un bac D. Je les employais

normalement. Mais je n'avais pas la notion de ce qu'étaient ces chiffres après la virgule. Je ne comprenais pas bien.»

Autrement dit, cet étudiant ne ressentait pas le besoin d'apports de connaissances puisque les connaissances ou les savoirs qu'il possédait, lui avaient largement suffi dans toutes les situations qu'il avait rencontrées dans sa scolarité :

«oui, c'est dur parce qu'on a des connaissances qu'on veut absolument calquer. Oui, cet ensemble des rationnels comment on l'appelle. On ne savait pas pourquoi on a besoin de faire les rationnels par rapport aux entiers. Pourtant on savait bien qu'il y avait des choses qui s'emboîtaient. »

Il y a donc une volonté de se servir de connaissances déjà acquises auparavant dans les situations proposées. «On n'a plus l'esprit vierge» déclare-t-il plus loin, signalant par là que ses connaissances ont été un obstacle à l'acquisition de nouvelles. D'où la difficulté de vivre la situation :

«et puis en plus, ça me mettait en situation mal à l'aise parce que ça me faisait voir que ce que je croyais maîtrisé, ce n'était pas ça. Dans le tireur d'élite, je m'en suis bien rendu compte que je maîtrisais pas.»

C'est bien ce qu'exprime un étudiant dans l'épisode que nous analyserons dans le chapitre suivant C4, une discussion s'étant engagée entre le formateur et le groupe sur l'intérêt de la première activité proposée :

«c'est plus difficile à gérer, à faire les liens entre ce qu'on savait déjà et ce qu'on voit là.»

Se trouve donc renforcée dans le cadre de la formation des enseignants, la difficulté de remise en cause de connaissances qui ont eu un champ de validité étendu. Il en résulte une demande forte du travail à faire afin de pouvoir en quelque sorte "cadrer" le travail. Un cours suivi d'exercices lui paraît plus intéressant :

«mais là j'aurais voulu presque plus recentrer mes connaissances avant de passer à l'acte.»

Évoquant les réactions d'un étudiant "contestataire", il signale que c'est aussi la même demande qui est exprimée :

«quand X demande à quoi ça sert, il avait besoin en fin de compte de définitions lui aussi. Le fait que vous donniez des définitions, c'est ce qu'il attendait aussi. Je ne sais pas s'il ressent la même chose que moi, mais ça a été dur.»

b) Les phases adidactiques

Dans certains cas, les étudiants sont amenés à retravailler certaines notions mathématiques. Nous suivons à titre d'exemple des phases adidactiques d'apprentissage

de ces deux étudiants . Ces phases concernent le passage écriture décimale / écriture fractionnaire et la signification des chiffres après la virgule dans l'écriture décimale des nombres décimaux.

b1) passage écriture décimale, écriture fractionnaire:

Les étudiants viennent de démarrer l'activité et ont proposé l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ pour lequel ils ont reçu la réponse oui. Ils adoptent une stratégie de dichotomie utilisant les connaissances qu'ils ont sur les décimaux (ils savent que le "milieu" entre $\frac{1}{2}$ et 1, c'est 0,75). Mais va se poser le problème du passage de 0,75 sous la forme d'une écriture fractionnaire :

Extrait 1

E1 - Il faut cerner en fait les points qui sont compris dans ce domaine là. Là on a fait $[0,5;1[$ donc c'est compris, donc on essaie de faire 0,5 et 0,75, on essaie de partager en deux le domaine.

E2 - en deux, il vaut mieux.

E1 - donc $1/2$ et 0,75, ça fait quoi, ça ? Comment on fait pour le trouver en fraction ?

E2- (petit rire)

E1 - comment on fait ?

E2 - 75 dixièmes ? et si on prenait $2/3$?

(E1 s'adressant à un membre d'un autre groupe)

- un nombre à virgule, comment on fait pour le transformer en fraction ?

autre étudiant - transformer quoi ?

E1 - un nombre à virgule en fraction.

autre étudiant - 0,2 ça fait 2 dixièmes.

E2 - 75 dixièmes ?

E1 - non, 75 centièmes.

On peut remarquer d'après la réponse d'un étudiant "extérieur" que l'exemple standard est un nombre décimal avec un chiffre après la virgule (0,2), exemple qui permet de solutionner le problème posé. Ils vont ainsi déterminer successivement l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, puis les intervalles $\left[\frac{1}{2}, \frac{75}{100}\right[$ et $\left[\frac{1}{2}, \frac{625}{1000}\right[$. Ils ont des connaissances sur les nombres décimaux qui leur ont permis de trouver le milieu de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ puis de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{75}{100}\right[$. Les calculs sont ainsi toujours faits avec les décimaux puis reconvertis en fractions décimales.

b2) la signification des chiffres après la virgule

Les étudiants se trouvent au cours du jeu confrontés au statut de la partie entière pour trouver le codage d'un point situé entre deux autres. Ainsi, pour l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{625}{1000}\right[$, l'écart trouvé de 0,125, écrit par la suite $\frac{125}{1000}$ leur paraît trop grand. Ils sont conduits,

en observant ce qu'ont écrit les étudiants de l'autre binôme, à proposer les intervalles $\left[\frac{56}{100}, \frac{60}{100}\right]$, $\left[\frac{60}{100}, \frac{62}{100}\right]$ et enfin $\left[\frac{60}{100}, \frac{61}{100}\right]$. Se trouve donc posée la question de trouver le milieu de ce dernier intervalle.

Extrait 2

E2 - attends, attends, moi je crois qu'on peut proposer entre 60 et 61, donc l'écart, c'est $\frac{1}{100}$

E1 - allez, c'est bon, on partage encore en deux, on est à 60 pour la borne inférieure et pour la borne supérieure ? 605 ?

E2 - qu'est-ce que tu fais ?

E1 - tu es d'accord? entre 600 et 605 ?

Ils continuent donc à employer la technique précédente, en considérant le milieu de $\left[\frac{600}{1000}, \frac{610}{1000}\right]$, ce qui produit le nombre entier 605. Mais ils sont perplexes car ils veulent faire la liaison avec les parties décimales, ce qui les amène à examiner le statut des nombres entiers 600 et 605.

Extrait 3

E2 - mais, oui, mais entre 60 et 61, 60,5 ; 60,6 c'est forcément entre...

E1 - non, on a proposé ça, et en fin de compte, il aurait plutôt fallu proposer de remettre des chiffres après.

L'observation à nouveau de la méthode utilisée par l'autre binôme leur permet de comprendre le processus d'intercalation en attribuant une signification aux chiffres après la virgule, puis de faire le lien entre le nombre de ces chiffres et l'écriture fractionnaire correspondante. C'est d'ailleurs ce que nous confirme l'étudiant E1 interrogé après la séance :

«j'ai eu un peu le déclic, mais j'ai encore beaucoup de mal à donner du sens à un nombre décimal : par exemple entre 0,602 et 0,610 à cause des chiffres après la virgule. J'ai du mal à voir un dixième, un centième. Pour moi, ce n'est pas très clair. Je me représente un peu quand c'est 0,2, mais quand c'est 0,233, je me sens très mal à l'aise. Ce 233, j'ai envie de le prendre comme 233 et de m'en servir comme un nombre entier.»

Puis précisant les difficultés rencontrées, il nous explique :

«parce que d'encadrer une fraction, j'ai bien vu sur ma calculatrice cela faisait 0, avec plein de chiffres, mais j'ai du mal de le mettre en fraction et de le reporter sur le graphisme, de voir à quoi cela correspond, de cerner ce point, j'avais du mal oh là là. Donc je travaillais avec mon binôme et on se posait des questions : il avait les mêmes difficultés. On avait du mal à calculer, par exemple si on savait que c'était entre 0,65 et 0,66 et on voulait faire la moitié de cet écart. On a pataugé.»

Voilà donc un étudiant, scientifique de surcroît, qui a conservé un rapport fréquent aux mathématiques - dans un cadre scolaire - n'ayant jamais eu de difficultés avec certains

savoirs, confronté à un besoin ou encore un manque qu'il n'avait jamais ressenti. Dure épreuve :

«je suis sorti de cet exercice-là, j'avais moins zéro, parce ce que j'avais l'impression de bloquer, je sentais bien que ça n'allait pas, je n'arrivais pas à aller vite, j'avais du mal à comprendre et en même temps cela me permettait de comprendre un certain nombre de choses.»

Dure épreuve, mais à laquelle il va réagir positivement :

«je viens de m'apercevoir seulement maintenant que je donnais une mauvaise signification à ces chiffres après la virgule. C'est flagrant, je l'ai reconnu dans les petits tests que j'ai passés en premier. (...) Mais je sens encore que ça n'est pas vraiment maîtrisé. Mais je sens qu'il y a un problème. **Je sais où est mon problème, je sais ce qui ne va pas.**»

Cet étudiant s'est mis à douter puis à repérer "son" problème : il s'est mis en position d'apprendre. Il cherche à donner du "sens" aux techniques qu'il emploie, dans l'idée d'en trouver les raisons, de chercher les relations entre des objets de savoir. Il se sent autorisé à utiliser ces techniques car ce sont des techniques anciennes qu'il a déjà rencontrées comme objets de savoir dans les institutions fréquentées antérieurement (notamment collège, lycée et même faculté).

Après avoir mis en évidence ces deux placements, qui s'opposent sur les trois points qui nous ont servi à les caractériser, nous allons nous intéresser aux changements de placement que nous avons pu repérer.

4. LES CHANGEMENTS DE PLACEMENTS

4.1. Changement et permanence de placement : analyse des difficultés rencontrées au cours de la deuxième partie de la situation "Automates"

Au cours des deux années d'expérimentation, le jeu proposé aux étudiants dans la deuxième partie de la situation "Automates" est celui que l'on peut appeler le "jeu de l'extension des nombres entiers". Un placement sémantique est peu probable. Les étudiants sont invités à définir des règles d'addition et à établir des critères de validité de ces règles, mais il est difficile d'établir des règles d'addition dans le contexte des automates.

Nous allons voir que les réactions au cours des deux expérimentations ont été significativement différentes.

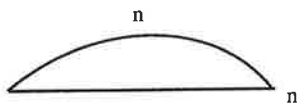
4.1.1. Du placement sémantique à celui de syntaxique (année 1992-93): un passage difficile

Nous avons vu que le placement majoritaire adopté au cours de la première partie de la situation "Automates" a été sémantique.

Pour la deuxième partie, les étudiants reçoivent une fiche de travail (voir annexe C3m) dont l'objectif est de faire établir à la fois des règles de comparaison et des règles d'addition sur les sauts. La présentation du travail commence par l'introduction d'un objet de savoir :

"un entier n peut être considéré comme un saut dont le couple générateur est $(n ; 1)$. On dira que les sauts sont des nombres si l'ensemble des sauts a certaines propriétés analogues à celles de l'ensemble des nombres entiers, c'est à dire si on peut les comparer et faire des opérations."

Cet objet de savoir consiste en l'identification entre la longueur n d'un "saut" et la désignation n du point extrémité correspondant:



Cet objet de savoir ancien est rarement manipulé de manière explicite : il reste caché.

Il leur est demandé par la suite d'établir des règles de comparaison entre les sauts et les règles d'addition.

Cette séance est révélatrice de certaines déterminations qui pèsent sur la formation. Nous avons relevé dans certains groupes des réactions de refus significatives aux décisions du formateur, réactions sur lesquelles nous reviendrons dans le chapitre C4 (§ 1.2). C'est pourquoi nous analysons d'abord le comportement d'un groupe caractéristique. Nous donnons ensuite les règles d'addition apparues dans chaque groupe ainsi que celles qui seront officiellement présentées à l'ensemble de la classe à l'aide des posters.

a) D'un groupe participatif à un groupe contestataire: le passage d'un placement sémantique à un placement syntaxique

Les étudiants du groupe 4 (Chronique complète en C3n), dont nous avons longuement décrit le travail dans le paragraphe 2.3.2., se trouvent dans un placement sémantique. Ils ont aussi réussi à trouver une justification à la technique qu'ils emploient. Ils se trouvent aux prises avec un objet "nouveau" pour eux. Nous allons assister à une contestation qui se déroule en trois temps, comme l'indiquent les extraits significatifs suivants :

- premier temps : expression de la non-compréhension de la consigne

Extrait 1

- n, c'est le nombre de sauts ?
- oui, tu as raison, n c'est la position et 1, c'est le saut.
- **je ne comprends rien** de ce qu'il faut faire.
- monsieur, **on ne comprend pas les consignes.** (le formateur est en fait trop loin pour entendre, il ne s'approche donc pas)
- oh là là, ce n'est pas clair.
- **je ne comprends rien.**

- deuxième temps : contestation du formateur qui ne respecte pas les règles d'un jeu³ qu'il a utilisé auparavant.

Extrait 2

- qu'est-ce qu'il veut, qu'on lui fasse un petit tableau comme ça ?
- c'est à dire que le nombre de sauts doit toujours être un nombre entier.
- oui, mais ça a toujours été comme ça.
- la position sera toujours un entier aussi.
- **regarde, c'est vachement imposé** : un entier n peut être considéré comme un saut dont le couple générateur est n, ils reprennent n, c'est pour un nombre entier ou pour une inconnue.
- pour un nombre entier.
- **pourquoi ils disent un entier n peut être considéré comme un saut ?**
- alors que le saut, c'est ça, mais c'est vachement mal fait.

- troisième temps : mise en cause et critique de la consigne elle-même, ce qui nécessite des explications de la part du formateur, interpellé par les étudiants qui vont intervenir en "rafale".

Extrait 3

- le problème, c'est l'entier : un entier n peut être considéré comme un saut.
- oui, là, c'est mal expliqué.
- en plus, c'est bizarre parce qu'on voulait comparer les sauts.
- ça, c'est une note explicative, qui annonce tout ça ou c'est un truc à faire, je ne comprends pas
- c'est une consigne ?
- c'est super mal fait comme consigne.
- c'est quoi, c'est ce qu'on va faire ?

Les récriminations des étudiants portent essentiellement sur l'assimilation d'un entier à un saut :

Extrait 4

- pourquoi mélanger n en position et vous dites, un entier n se ramène, peut être ramené à un saut.
- cela nous embrouille, il ne fallait pas mettre n.

Le formateur est "contraint" d'abandonner le problème posé qui était celui de l'extension de l'ensemble des nombres entiers au profit du saut considéré comme quotient de deux

3. On peut penser que c'est l'expression contenant la lettre n qui pose problème aux étudiants et qu'en prenant un cas particulier, par exemple l'automate déterminé par le couple (5, 1), les réactions auraient été moins vives. Nous pensons que c'est surtout l'introduction d'un objet de savoir nouveau, l'identification entre un ensemble de couples et un entier qui déstabilise les étudiants.

entiers. Celui-ci est en effet la forme habituelle sous laquelle vit caché le nombre rationnel au collège.

Extrait 5

P : *non, c'est le contraire, essaie de réfléchir un peu, parce qu'un saut, c'est quoi ? Tu as le saut qui te permet en 3 sauts d'arriver à 4, ça veut dire qu'en un saut, tu vas arriver en quel endroit ?*

- en un saut : à 4 divisé par 3.

P : *donc en fait tu cherches à caractériser la longueur du saut, c'est bien l'endroit où tu arrives en un saut.*

- oui, mais c'est pas un entier.

P : *quelques fois, ce n'est pas un entier, ça peut être un entier*

- c'est ce qu'on a vu.

P : *c'est pour ça : ici, ce qui est proposé, c'est qu'effectivement, c'est qu'un entier peut être considéré comme un saut.*

- ah, d'accord !

Les étudiants sont donc invités à reconnaître dans la situation proposée des techniques anciennes caractéristiques de l'école obligatoire. À partir de ce moment, le groupe va s'orienter sur la signification en terme de fraction de la longueur d'un saut, la règle proposée étant celle de l'addition des fractions. L'intervention du formateur amène ainsi les étudiants dans un jeu où les objets de savoir anciens sont plus visibles, ce qui réduit ainsi les tensions observées en début de séance.

b) Les propositions des différents groupes

Nous indiquons pour chacun des groupes de l'année 92-93, le résumé des propositions de règles d'addition qui ont émergé successivement au cours de la discussion et celles qui ont été en définitive retenues pour la rédaction de l'affiche.

Groupe 1

- discussion sur les deux propositions :

. **Addsaut** (pour une même distance , on additionne les sauts),

. **Addentier** (pour un même nombre de sauts on additionne les entiers atteints par les deux automates).

- proposition d'additionner les "longueurs" des sauts, c'est-à-dire les fractions $\frac{5}{6}$ et $\frac{1}{3}$,

qui sera retenue pour la proposition finale.

Groupe 2

- émergence des diverses propositions **Addsau.ent**, **Addm.sau.ent**, **Addsaut**, **Addentier**.

- recherche d'une interprétation de **Addsaut** en terme de relais.

- recherche de la distance parcourue en un saut, extension de l'écriture du couple d'entiers (10 ; 12) et (3 ; 9) sous la forme ($\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$; 1) et ($\frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$; 1). L'addition proposée se fait à partir de l'addition des fractions, le nouvel automate étant défini par le couple ($\frac{7}{6}$, 1).

Groupe 3

- recherche de la "longueur" des sauts traduite à l'aide de nombres décimaux 0,8333 et 0,333.

- émergence des trois propositions **Addsau.ent**, **Addsaut**, **Addentier**.

- retour sur la recherche de la distance correspondant à un saut, exprimée sous forme de fractions.

- recherche d'une moyenne des distances parcourues pour un saut.

- retour sur la valeur d'un saut et addition des fractions correspondantes, proposition qui est faite sur l'affiche.

Groupe 4 (dont nous avons analysé la chronique)

- recherche de la valeur d'un saut : la règle d'addition est proposée sous la forme d'une addition de fraction $\frac{10}{12} + \frac{3}{9} = \frac{7}{6}$.

Groupe 5

- recherche des points où les automates se rencontrent.

- recherche de la valeur d'un saut par la division de 10 par 12, arrêté par le fait que celle-ci ne "termine pas".

- mise sous forme de fraction de la valeur des sauts et présentation d'une règle sous la forme d'une addition de fractions.

Cessant d'apparaître comme une activité pouvant s'adapter au primaire, la situation proposée crée des réactions de refus fortes et explicites dans trois groupes, comme nous avons pu le constater à propos du groupe 4 en particulier. Nous interprétons cette réaction comme un indice de la perception d'une rupture par l'enseignant des règles du jeu antérieurement établies. Ceux qui acceptent le nouveau jeu proposé (groupe 2, groupe 5, puis groupe 3), en proposant au sein des groupes des règles d'addition qui sont d'ailleurs conformes avec l'analyse a priori que nous avons faite, ne le font qu'un moment. Ils vont chercher à reconnaître dans la situation proposée des savoirs anciens, soit qu'ils l'aient déjà fait dans la séance précédente comme le groupe 2, soit qu'ils y soient incités par le formateur lui-même sous la pression des formés comme pour les groupes 3 et 4, soit qu'ils le fassent d'eux-mêmes comme pour le groupe 5. Nous interprétons ce changement d'attitude comme un changement de placement. Ils ne vont donc pas chercher à construire

un nouvel ensemble, mais à “re-connaître” l’ensemble des fractions et de leurs propriétés. C’est ce qui explique la grande uniformité des propositions rendues publiques et formulées sous la forme d’une addition de fractions.

4.1.2. La permanence du placement syntaxique (Année 93-94)

Le déroulement a été modifié en 93-94. Les règles de comparaison sont établies en commun et c’est le formateur qui présente le fait que certains sauts peuvent être considérés comme des entiers. Par contre, l’établissement des règles d’addition sont à la charge des étudiants.

L’activité provoque des questions des formés du type suivant :

“- pourquoi on fait ça?”

signe que nous interprétons là aussi comme une interrogation à propos de l’objet nouveau rappelé plus haut (identification saut et extrémité du saut).

Mais les réactions ne sont pas aussi vives que l’année précédente : le jeu qui s’était établi avec ce groupe dans la séance précédente avait déterminé pour la plupart des formés un placement que nous avons qualifié de syntaxique. D’autre part l’activité faite en commun à propos de la comparaison des sauts des automates avait fixé les nouvelles règles souhaitées par le formateur et le concepteur de l’ingénierie. Les propositions faites par les étudiants vont porter majoritairement sur les couples d’entiers, en faisant beaucoup moins référence aux fractions.

Nous les présentons dans l’ordre et sous la forme où elles ont été écrites au fur et à mesure au tableau par les étudiants pour être soumises à la critique du groupe entier.

a) Les propositions des différents groupes

Groupe 3

(5,6) + (2,6) cela fait (7,6) (**Addentier**).

Groupe 2

(a,x) et (b,x) cela fait (a+b,x) (**Addentier**)

puis (a,x) et (b,y) cela fait (ay+bx,xy).

Groupe 4

Première proposition : (5,6) + (3,8) cela fait (8,8) le premier 8 représentant 5+3, le deuxième le plus grand des deux.

Deuxième proposition : (5,6) et (1,3). On choisit une référence commune : la première graduation atteinte et on fait la moyenne du nombre de sauts.

On trouve (5,6) et (5,15), ce qui donne $(5, \frac{21}{2})$, c’est à dire (10, 21) car $\frac{21}{2}$ n’est pas entier.

Groupe 1

(5,6) + (3,8) cela fait (8,14) (**Addsau.ent**).

Groupe 4 (qui rajoute à nouveau)

On fait la moyenne des graduations atteintes en choisissant comme référence le nombre de sauts. Pour (5,6) et (1,3), cela donne

$$\left(\frac{5+2}{2};6\right)\text{ou}\left(\frac{7}{2};6\right).$$

Puis le groupe écrit par la suite : l'automate "somme" atteint la graduation 7 en 12 sauts.

b) La mise en commun et la fin de la séquence

Il ne restait plus que dix minutes avant la fin de la séance et le formateur tenait à faire une mise en commun sinon "c'est trop inconfortable" d'après ses dires. Aussi, il est intéressant de voir ce qu'il choisit de mettre en évidence pour conclure cette séance. Il s'appuie sur une production d'un groupe, en l'occurrence celle du groupe 2, en validant cette addition par le sens qu'on peut lui donner dans la situation des automates. Il réalise un schéma où l'automate "somme" est constitué en associant comme en relais le premier automate caractérisé par le couple (5; 6) suivi de l'automate caractérisé par le couple (2; 6).

La problématique d'extension des entiers pour laquelle les étudiants paraissaient prêts, avec l'élaboration de critères mathématiques susceptibles de valider ou d'invalider les additions proposées, a donc été abandonnée au profit du "sens" que l'on pouvait donner à une addition dans le contexte proposé.

C'est le formateur qui les invite à se mettre dans un placement de type sémantique : nous analyserons plus en détail dans le chapitre suivant le jeu du formateur.

4.2. L'oscillation d'un placement à un autre

Nous avons déjà pu constater au cours de l'analyse du travail du groupe 4 (année 92-93) que les étudiants occupaient un placement sémantique quand il se trouvaient en difficulté élaborer des justifications pour les techniques employées. Mais cette recherche les conduisait à occuper un placement syntaxique en recherchant des raisons au fonctionnement de la technique GEN. La technique ancienne de décomposition d'un nombre en facteurs premiers leur est apparue comme une technologie rendant compte des divisions successives pour mettre en évidence le premier couple.

Les deux placements sémantique et syntaxique ne sont pas clivés dans la situation, mais apparaissent d'une certaine façon comme complémentaires. Nous regardons le groupe 2 (chronique en annexe C3i) dont le fonctionnement est significatif de ce point de vue.

Il s'agit d'un groupe ayant travaillé pendant l'expérimentation 92-93, dont nous rappelons les résultats globaux à propos de la première partie de la situation "Automates".

Groupe 2 (expérimentation année 1992-93)

	Pb. 1	Pb. 2	1 ^{er} tableau (individuel)		2 ^{ème} tableau (par groupe)
			Automate C	Automate D	Automates F, H, I, J,
E 13	Gen	Gen	21	(,4)*	Recherche des "plus petits couples" qui sont indiqués explicitement sur le tableau. Pour I et J, les couples indiqués ne sont pas compatibles avec les couples du contrôleur 4.
E 7	Gen	Gen	21	(4 ,4)	
E 15	Gen	Gen	21	(,4)*	
E 17	Gen	Gen	NR	NR	

Argument final :

Pour chaque automate, on cherche le plus petit couple (graduation, saut).

On cherche le multiplicateur qui permet de passer d'un contrôleur à un autre (s'il existe) et on applique ce multiplicateur à l'élément manquant.

Analyse du déroulement du travail de groupe

C'est un groupe homogène: le travail demandé leur paraît simple. Ils utilisent d'emblée la procédure Gen dans les deux premiers problèmes. Par contre, dans le troisième problème ils vont utiliser des techniques non contextualisées (produit en croix, coefficient de proportionnalité, recherche de multiplicateurs pour passer d'un couple à un autre...). Nous pouvons dire qu'ils occupent un placement syntaxique. Très sûrs d'eux, ils vont rapidement estimer avoir fini. L'étudiant E 13 a explicité deux procédures possibles, le produit en croix et le fait que le robot doit passer par un point antérieur à ceux figurant dans le tableau. Il n'élabore cependant pas une technique systématique pour trouver le premier point et contrôler les résultats obtenus.

Des erreurs sont commises comme on peut le constater dans l'échange suivant :

* couple (,4) barré

**Il faut compléter
le tableau de
l'automate I:**

I (1992-93)

(;)

(44 ;)

(; 884)

(420; 2730)

E 17 - pour le I, 42 dans 273 ?

E 13 - ça, ça ne se divise pas ça, ah là là !

E 15 - dans 273, il y va 39, ça fait...

E 13 - 273 par 7.

E 17 - 273 par 7 ça pose quelques problèmes...

E 7 - en tête, tu peux bien mettre ce que tu veux.

E 17 - oui, mais chaque contrôleur, il a une zone, celui là il fait 12, 15, l'autre 18, 25, l'autre 30, 35, oui, mais celui là, il va jusqu'à 420, il n'est pas bien.

E 17 - non , mais 39, ça fait 3 fois 13, mais 44, ce n'est pas un multiple de 3 déjà ?

E 15 - 884 divisé par 13.

E 17 - on laisse faire ?

E 15 - 68.

E 13 - donc 68 fois 3, 204, mais qu'est-ce qu'on fait du 44 ? Eh bien 45, ça fait 3 fois 15.

E 15 - 13 fois 15, ça fait 195.

On voit nettement la confusion entre la recherche d'un coefficient de proportionnalité (42 dans 273) et la recherche d'un scalaire multiplicateur 39 ($273 = 13 \times 39$). 39 est pris par la suite comme coefficient de proportionnalité.

Cela les amène à trouver (3,13) comme couple initial pour l'automate I et par la suite à changer 44 en 45.

Les difficultés éprouvées à manipuler et à justifier les techniques utilisées, les incitent à se replacer dans le contexte de la situation. Comme le montre l'argument final à la fin du travail de groupe, c'est la recherche du plus petit couple qui est invoqué.

Dans la deuxième partie de la situation "Automates" (chronique en annexe C3p), nous allons retrouver la même oscillation entre les deux placements.

La nature de la consigne ne leur pose apparemment pas de problèmes : il n'y a pas de remarques de leur part sur ce sujet. De fait, le formateur n'intervient pas auprès de leur groupe, contrairement à l'ensemble des autres groupes.

Nous analysons le déroulement de l'activité :

- ils font appel à leurs connaissances anciennes en leur donnant du sens dans le contexte adopté : c'est ainsi que voulant définir une règle de comparaison par référence à la distance parcourue pour un même nombre de sauts par chacun des automates, ils cherchent à interpréter ce que représente ce nombre (ils ont déjà remarqué dès la séance précédente que la valeur d'un saut correspondait à une fraction) :

Extrait 1

- en fait ça revient à chercher, comment ça s'appelle, les dénominateurs communs?

- oui, les dénominateurs communs.

• de même, au moment de la recherche des règles d'addition, ils essaient de donner une signification en terme de "relais" à l'addition de chacun des couples, ce qui les conduit à constater la non-compatibilité de cette addition avec l'équivalence des couples :

Extrait 2

- on peut imaginer qu'ils prennent le relais : si Sd prend le relais de Sc.
- ah , oui.
- voyons voir si cela marcherait là si on additionne les deux couples de départ, 10 et 3 ça fait 13 et 12 et 9, 21, ben non, puisque là il arrive en 10 en 21 (ils ont déjà observé auparavant qu'en additionnant les couples (5; 6) et (5; 15), on obtenait le couple (10; 21)).

Cela les conduit d'une part à définir une addition qui soit compatible avec la relation d'équivalence et d'autre part qui puisse s'interpréter dans le contexte des automates.

Extrait 3

- il faut les ramener à un dénominateur commun, qu'il soit de l'un ou de l'autre.
- oui, au lieu de faire 5, 6 et 1, 3, on va faire la deuxième colonne pareille.
- tu comprends ce qu'on veut dire!
- ça fait 5, 6 et 2, 6.
- donc ça fait 7, 12.
- si on additionne ça fait quoi, est-ce que ça peut s'interpréter sous forme de relais.
- ça veut dire, il ne va pas sauter en même temps, il vont sauter l'un après l'autre.

Et de nouveau la discussion va s'engager sur le lien entre les fractions qu'ils ont repérées et les couples qu'ils manipulent.

Extrait 4

- si tu mets des fractions, ce n'est pas des entiers.
- mais c'est un nouvel ensemble de nombres.
- là, en un saut, la distance ne peut pas être un nombre entier.
- combien on avait trouvé pour les trucs, 15/6 et 16/6 et là 1 saut.
- on a trouvé le dénominateur commun.
- si on ramène à un saut, comme on a fait au départ.

La question du sens dans le contexte sous la forme de la recherche des raisons des techniques qu'ils emploient est bien au centre de leurs débats.

On voit donc que, dans ce groupe, les changements de placements sont fréquents et permettent aux étudiants de progresser en cherchant à donner du sens aux techniques dans le contexte proposé mais aussi d'établir de nouvelles relations entre des techniques anciennes en essayant de leur trouver des justifications.

CONCLUSION : CONTRAINTES ET DÉTERMINATIONS DU JEU DE L'ÉTUDIANT

L'analyse en terme de milieu que nous avons détaillée à propos de la première partie de la situation des "Automates" nous permet de mettre en évidence les milieux de deux jeux stables repérés par l'analyse a posteriori : un "jeu sur les entiers" et un jeu "sur les mesures". Dans la seconde partie de la situation, nous pouvons repérer deux autres jeux: le jeu de "l'extension des entiers" et un jeu "sur la comparaison et l'addition des

mesures". Il en est de même dans la situation "Tireur d'élite" pour le jeu du "tireur d'élite" proprement dit et le jeu "d'encadrement des fractions".

Si ces jeux sont stables, c'est que certaines conditions de viabilité sont réalisées. C'est pourquoi nous avons associé à ces jeux deux placements caractérisés par trois critères: les techniques employées, la question du sens et la légitimité institutionnelle de l'emploi des techniques.

Nous les rappelons dans le tableau suivant en mettant en regard les éléments qui les différencient:

	Placement sémantique	Placement syntaxique
Les techniques employées	La technique est contextualisée. Son domaine de validité est l'ensemble des problèmes proposés.	Les techniques utilisées sont des techniques anciennes adaptées aux problèmes proposés. Elles ont un domaine de validité étendu dans le champ d'expérience.
La question du sens	Le "sens" de cette technique est celui du contexte dans lequel elle est mise en œuvre.	Le "sens" de ces techniques est celui des raisons qui les justifient.
La légitimité de l'emploi des techniques	La légitimité de cette technique est assurée par le fait qu'elle est rattachable à des techniques de l'institution-cible.	La légitimité de ces techniques provient de leur existence en tant qu'objet de savoirs déjà étiquetés dans les institutions de référence.

La question du sens est centrale dans la caractérisation des deux placements. C'est à elle que nous nous référons pour les qualifications de sémantique et syntaxique. La première caractérisation concernant les techniques employées renvoie aux contraintes de la situation, tandis que la caractérisation à propos de la légitimité des techniques employées renvoie aux déterminations qui pèsent sur la formation.

Les placements sont donc permis par les contraintes de la situation mais aussi par les déterminations qui règlent les conditions de leur fonctionnement dans le cadre du système didactique donné. Celles-ci doivent permettre d'expliquer pourquoi ces placements sont effectivement occupés et stables.

Dans la première partie de la situation "Automates", nous avons remarqué que, dans certains groupes, les étudiants pouvaient passer d'un jeu à un autre et par suite pouvaient adopter l'un ou l'autre des placements. Dans la situation "Tireur d'élite", c'est le placement syntaxique qui va devenir progressivement dominant. Dans la deuxième partie

de la situation "Automates", des résistances à entrer dans le jeu proposé, sont apparues, particulièrement au cours de la première expérimentation.

Dans les situations "Automates" et "Tireur d'élite", qu'est-ce qui permet à certains étudiants d'occuper un placement sémantique et à d'autres un placement syntaxique? Pourquoi une telle résistance à occuper un placement syntaxique dans la deuxième partie des "Automates".

Nous attribuons ces phénomènes aux deux déterminations suivantes :

La première détermination est relative à une position idéologique dominante à l'heure actuelle dans la noosphère du système d'enseignement, qu'a relevée Brousseau (1986, p.48) :

La société voudrait bien que l'enseignement obtienne des élèves la compréhension en plus de l'apprentissage des savoirs institutionnalisés. (...) la recherche de la compréhension se trouve alors directement opposée à celle de l'apprentissage des savoirs institutionnalisés qu'elle est accusée d'abandonner. Ces deux activités ne sont pas logiquement ou techniquement contradictoires, mais elles apparaissent telles, dans le modèle culturel qui régit le contrat didactique.(...) Ces conditions ont conduit les enseignants à reporter sur la connaissance la discrimination qui leur est imposée, et à distinguer dans le savoir une forme et un contenu (ou un sens).

On ne peut enseigner une technique (et plus particulièrement un algorithme) sans enseigner le "sens" de celle-ci, "sens" étant pris dans les deux acceptions qui restent largement implicites :

- l'une qui se traduit par une demande de justifications de cette technique, justifications qui peuvent être fournies par une technologie ou une théorie,
- l'autre qui se réfère à l'activité proprement dite: le sens est donné par le contexte du problème pour lequel cette technique est valide.

C'est pourquoi les étudiants vont accepter un placement sémantique quand ils sont dans l'incapacité de justifier une technique employée. Nous l'avons vu par exemple à propos de l'utilisation de la technique du produit en croix qui se trouve en concurrence avec la technique contextualisée reposant sur la linéarité. Mais ils vont se retrouver dans un placement syntaxique lorsqu'il pourront justifier la technique de recherche du premier entier par une "petite" technologie reposant sur la décomposition en facteurs premiers.

La quête du sens est ainsi un enjeu professionnel dans la situation de formation, et cette quête elle-même est le reflet des débats qui ont cours dans une partie de la noosphère proche du système de formation. Autour de cet enjeu relatif au sens, vont se rattacher une constellation d'objets de savoir qui ne sont pas étiquetés dans l'institution-cible et qui vont représenter pour les formés autant d'objets de savoir servant à enseigner.

La deuxième détermination concerne la légitimité des techniques employées qui ne le sont que lorsqu'elles sont rattachables à des objets à enseigner.

Le “bouleversement” créé par l’introduction de nouveaux objets de savoir que les étudiants n’identifient pas comme pouvant se rattacher à des objets qui pourront être enseignés, entraîne de fortes résistances. C’est ce que nous avons pu voir au début de la deuxième partie de la situation “Automates”, au moment de l’identification d’un ensemble de couples avec un entier : les étudiants manifestent leur désapprobation d’autant plus fortement qu’ils se trouvaient auparavant dans un placement sémantique.

Leurs besoins en mathématiques se limitent à une technologie rudimentaire qui puisse leur permettre de légitimer une technique employée. En l’absence de déterminations fortes provenant d’injonctions de l’institution savante, comme il a pu en exister au moment de la réforme des Mathématiques modernes par exemple, ils ne souhaitent pas disposer d’une théorie trop développée qui pourtant justifierait et unifierait l’ensemble des techniques anciennes qu’ils utilisent.

L’identification des placements et leurs caractérisations nous ont ainsi permis de mettre en évidence deux déterminations pesant sur le formé. Il va de soi que ces placements permettent un jeu du formateur, mais sont aussi permis par lui : c’est cet aspect interactif que nous nous proposons d’étudier plus en détail dans le chapitre suivant afin de poursuivre la recherche des déterminations.

CHAPITRE C4

ANALYSE DU JEU DE L'ENSEIGNANT DANS LES SÉQUENCES D'ENSEIGNEMENT, REPÉRAGE DE DÉTERMINATIONS

La négociation entre les formés et le formateur à propos du savoir, suivant les placements des formés, l'analyse de phases dites de synthèse, où l'enseignant reprend la main pour énoncer un texte du savoir, les épisodes non prévus où le formateur est obligé de réagir face à des sollicitations des formés, nous permet d'examiner le jeu du formateur. La modélisation du texte du savoir tel qu'il apparaît au cours de ces différentes phases, nous permet de l'analyser comme un compromis entre le projet du concepteur de l'ingénierie et les pressions que peuvent exercer les formés. Enfin la recherche d'une légitimité par le formateur s'exerce à travers divers registres que nous précisons. Tous ces éléments nous permettent de cerner les déterminations qui pèsent sur le formateur.

1. LA NÉGOCIATION FORMÉS / FORMATEUR

La pression des étudiants sur le formateur peut se manifester par deux attitudes complémentaires : soit la manifestation de leur accord, qui peut inciter le formateur à développer de manière non prévue une partie de son cours, soit la manifestation d'un désaccord avec pour objectif de ramener le formateur sur le terrain souhaité. Nous examinons deux épisodes qui illustrent ce phénomène.

1.1. La négociation "à la hausse"

1.1.1. La nature de l'exercice proposé

Au début de notre ingénierie, pour l'année 93-94, figurent trois petits exercices (annexe C3a) où interviennent des décimaux, qui ont les caractéristiques d'exercices pouvant être proposés à l'école primaire, donc susceptibles d'être reconnus comme tels par de futurs enseignants du primaire. Les étudiants sont donc amenés à utiliser des techniques anciennes et le placement qui en résulte est donc syntaxique. Nous pouvons prévoir que les étudiants vont être amenés à rechercher des justifications aux techniques employées. Ces exercices comportent un certain nombre de difficultés intrinsèques (que nous analysons par la suite), ce qui contribue, avec les questionnaires initiaux donnés en tout début d'année, à mettre en évidence de l'ignorance. Cette condition avait été jugée à ce

moment-là comme nécessaire en situation de formation professionnelle pour amorcer un apprentissage sur des contenus mathématiques concernant les systèmes de nombres.

Un exercice va nous permettre de revenir sur le jeu des étudiants dont nous avons fait l'étude dans le chapitre précédent et d'illustrer quel va être le jeu du formateur. Il est inspiré d'un item de l'évaluation de l'APMEP¹ destiné aux élèves de sixième qui propose une série de calculs dont celui-ci :

$$0,0278 : 0,001$$

Ce dernier est très faiblement réussi en sixième (34 % de réponses exactes). J. Bolon, dans une étude² comportant un questionnaire en direction d'un public de futurs professeurs d'école dans lequel figure cet item, signale que celui-ci leur pose encore bien des difficultés (63% de réussite).

Ainsi pour augmenter l'effet que nous voulons créer, nous l'avons légèrement complexifié, en tenant compte des diverses techniques qui peuvent être mises en œuvre et que nous étudions dans le paragraphe suivant.

Nous l'avons fait de deux manières différentes :

- en faisant en sorte que les deux nombres décimaux n'aient pas le même nombre de chiffres après la virgule : cela rend le décalage de la virgule moins évident et l'utilisation des puissances de 10 plus difficile, l'exposant n'étant pas le même dans l'écriture de chacun des deux nombres,
- en introduisant un nombre décimal de plus de trois chiffres après la virgule : on rend ainsi plus difficile l'utilisation de résultats mémorisés tels que l'inverse de 0,1 est 10 .

Le texte de l'exercice est le suivant :

Compléter les égalités :

$$0,278 : 0,0001 =$$

$$0,0278 : 0,001 =$$

Dans notre esprit, cet exercice devait être résolu rapidement. Outre l'objectif signalé plus haut, il devait nous permettre d'obtenir des renseignements sur le type de techniques utilisées par les étudiants, techniques renvoyant à telle ou telle institution. En effet nous faisons l'hypothèse que diverses techniques étaient susceptibles d'apparaître, certaines relatives à l'enseignement primaire, puisqu'il s'agit d'un exercice qui est du "type école primaire", certaines relatives au collège, conformément au fait que les savoirs manipulés à l'IUFM sont des savoirs ayant pour référence le collège et enfin d'autres relatives au lycée où des étudiants ont pu suivre des filières scientifiques

1. APMEP, 1989, *Évaluation en sixième*, thème: les nombres, item n° 27, Publications de l'APMEP.

2. Bolon J., 1993, *L'enseignement des décimaux à la charnière école - collège*, mémoire de DEA de sciences de l'éducation, Paris V.

il y a peu d'années.

1.1.2. Les différentes techniques : analyse a priori

a. La technique de l'école primaire

Technique du décalage

Cette technique fait appel aux règles de décalage de la virgule dans la division de deux nombres décimaux, elle s'applique en prenant pour référence soit le diviseur soit le dividende :

- décalage à partir du nombre de chiffres du diviseur : on se ramène à la division de 2780 par 1

$$0,278 \begin{array}{|l} 0,0001 \\ \hline \end{array} \longrightarrow 0,2780 \begin{array}{|l} 0,0001 \\ \hline \end{array} \longrightarrow 2780 \begin{array}{|l} 1 \\ \hline \end{array}$$

- décalage à partir du nombre de chiffres du dividende : on ramène à la division de 278 par 0,1,

$$0,278 \begin{array}{|l} 0,0001 \\ \hline \end{array} \longrightarrow 278 \begin{array}{|l} 0,1 \\ \hline \end{array}$$

ensuite la connaissance locale de la division par 0,1 qui revient à multiplier par 10 conduit au résultat. Cette deuxième façon de faire est rendue possible par le fait que le nombre de chiffres après la virgule du diviseur est supérieur à celui du dividende. Elle nécessite de combiner la règle de décalage avec une autre "technique" très liée au fait qu'il s'agit du décimal 0,1.

b. La technique dominante du collègue

Technique "pour diviser un nombre, on peut multiplier par l'inverse"

C'est "la" technique du collègue qui peut se présenter sous diverses formes :

- L'inverse de 0,0001 est 10000 puisque le produit des deux donne 1

$$0,278 : 0,0001 = 0,278 \times 10000 = 2780$$

- On la trouve sous une forme légèrement différente, utilisant le fait que l'inverse de 10^4 , c'est 10^{-4} puisque $10^{-4} \times 10^4 = 1$

$$0,278 : 10^{-4} = 0,278 \times 10^4 = 2780$$

- On utilise une sous-technique "multiplier par l'inverse" combinée à des calculs sur les fractions.

Le quotient de deux décimaux est considéré comme une fraction de deux décimaux. Mais on envisage de nouveau chaque décimal comme une fraction particulière et leur écriture comme une fraction de fraction. On lui applique alors la règle de "retournement" de fraction, ce qui donne :

$$\frac{0,278}{0,0001} = \frac{\frac{278}{1000}}{\frac{1}{10000}} = \frac{278}{1000} \times \frac{10000}{1} = 278 \times 10.$$

Cette règle de retournement de fraction représente en fait la multiplication par la fraction inverse.

• On trouve enfin une variante de cette dernière technique : seul le dénominateur est considéré comme une fraction. Ainsi 0,0001 est considéré comme une fraction, ce qui conduit au calcul suivant : l'inverse de $\frac{1}{10000}$ étant 10000

$$0,278 : 0,0001 = \frac{0,278}{\frac{1}{10000}} = 0,278 \times 10000 = 2780.$$

Le produit est calculé avec la règle de décalage habituelle.

Plusieurs techniques sont utilisées en fonction des transformations d'écritures que l'on peut effectuer à partir de l'écriture initiale et des correspondances établies entre division et fractions.

c. Les techniques du lycée

Nous regroupons un certain nombre de techniques qui vont cohabiter au lycée, puisque ces questions ne sont pas véritablement retravaillées. Cela ne signifie pas qu'elles ne sont pas apparues au collège, mais elles sont restées périphériques par rapport à la technique dominante du collège.

a) Technique faisant appel aux puissances de 10 et à un calcul formel sur celles-ci

Cette technique repose sur le fait que $10^m : 10^n = 10^{m-n}$.

Tous les décimaux présents dans les écritures sont écrits à l'aide des puissances de 10, en particulier des puissances négatives de 10.

$$0,278 : 0,0001 = 278 \times 10^{-3} : 10^{-4} = 278 \times 10 = 2780.$$

b) Technique faisant appel aux calculs sur les fractions

Le quotient de deux décimaux est considéré comme une fraction de deux décimaux, sur laquelle les règles habituelles de calcul sur les fractions s'appliquent. On multiplie et divise numérateur et dénominateur par un même nombre :

$$0,278 : 0,0001 = \frac{0,278}{0,0001} = \frac{0,278 \times 10000}{0,0001 \times 10000} = 2780.$$

c) Technique combinant puissances de 10 et calcul sur les fractions

S'appuyant sur la transformation d'écriture et sur des règles concernant les puissances de 10 notamment, $\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$, elle entraîne des écritures du type :

$$0,278 : 0,0001 = \frac{278 \times 10^{-3}}{10^{-4}} = \frac{278}{10^{-1}} = 2780.$$

1.1.3. Hiérarchisation des techniques et technologies

Une technique a besoin d'être justifiée par une technologie. Une technologie peut être elle-même justifiée par une théorie qui, à un niveau supérieur, se rapproche du savoir savant (Chevallard³). Suivant la position que l'on occupe dans une institution, une technologie peut être vue comme une théorie ou peut être considérée comme une technique. Nous visualisons dans le schéma qui suit, les éléments qui peuvent être qualifiés de techniques, de technologies ou de théorie suivant les niveaux considérés, sachant qu'à certains niveaux une technologie peut être analysée comme une technique. Nous hiérarchisons donc les techniques signalées dans l'analyse a priori en distinguant quatre niveaux qui correspondent à quatre institutions différentes : le niveau primaire (I_{pri}), le niveau collège (I_c), le niveau lycée (I_l) et le niveau savoir savant (I_p).

Au niveau primaire, on peut constater qu'il n'existe qu'une seule technique qui permet de résoudre le problème (celle du décalage). Elle est donc particulièrement "lisible" par les différents acteurs de l'institution primaire. Il est possible de l'institutionnaliser sans problèmes et elle sera disponible pour tous les protagonistes. L'autre élément que nous avons mis au même niveau est une technique locale, qui consiste à dire que lorsqu'on divise par 0,1, voire 0,01 ou 0,001, il faut multiplier par 10, 100, 1000.

Au niveau du collège, la technique dominante, quand on a une division de ce type à faire, est la règle de multiplication par l'inverse. Une sous-règle connue sous le terme de "fraction retournée" s'applique lorsque la division se présente comme quotient de deux fractions.

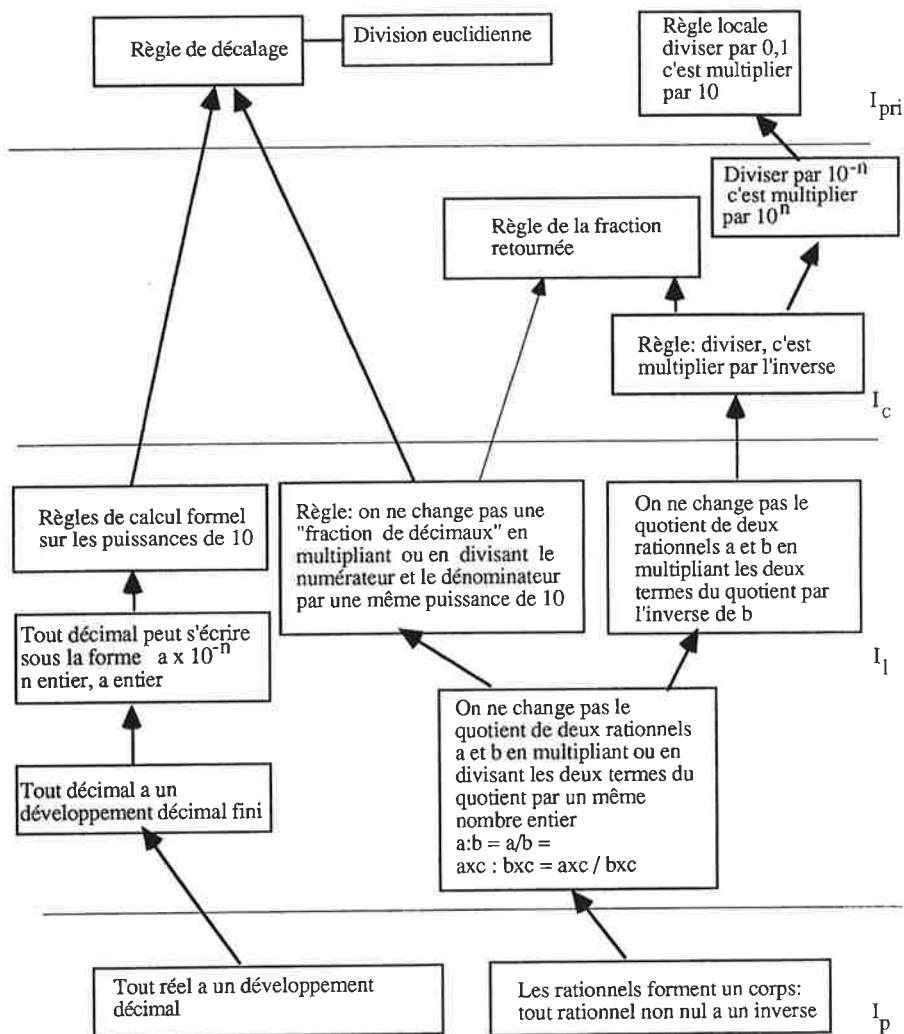
Au niveau du lycée, deux types de règles fonctionnent pour résoudre le type d'exercices proposé et peuvent servir ainsi de technologie pour la règle de décalage :

- l'une s'appuie sur les puissances de dix avec l'utilisation des exposants négatifs.
- l'autre concerne le quotient de deux fractions.

Ces deux techniques coexistent car elles s'appliquent à des domaines de savoirs différents. En effet ces techniques ou technologies du lycée se rattachent, l'une à une "théorie" concernant le corps des rationnels, dans lequel on peut faire "toutes" les

3. CHEVALLARD Y., 1993, Contrat social et institutions didactiques, Remarques sur quelques notions et problèmes, Séminaire de didactique des mathématiques du 4 Avril 1993, texte non publié, Paris.

opérations que l'on veut et en particulier toujours calculer l'inverse d'un nombre, l'autre à la "théorie" des développements décimaux des réels.

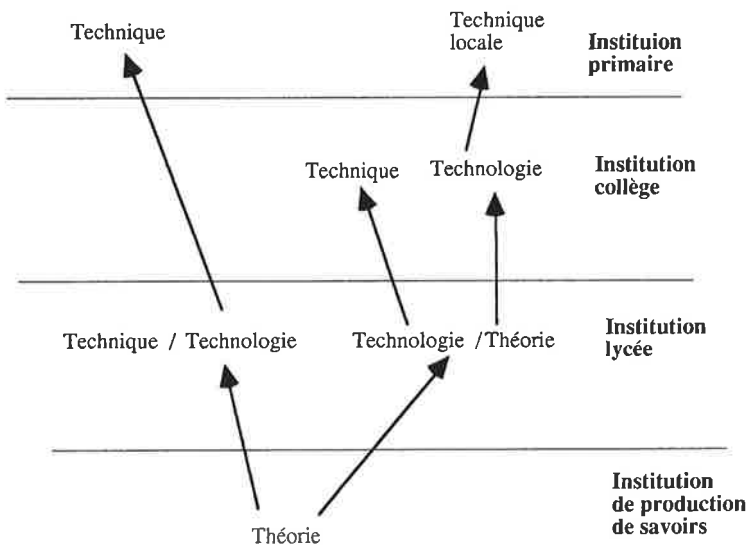


Enfin la technique, concernant le fait que l'on peut multiplier ou diviser les deux termes d'un quotient de rationnels par un même nombre, comme il est indiqué sur le schéma,

va pouvoir aussi servir de technologie pour la technique du collègue (règle de l'inverse).

Sur ce schéma, le sens des flèches indique le "sens" en terme de justifications attribuées à une technique à l'aide d'une technologie ou d'une théorie.

Nous synthétisons le tableau précédent grâce au schéma suivant où l'on peut voir les différentes articulations entre les différentes techniques ou technologies situées dans quatre institutions différentes. Une "rupture" est mise en évidence dans le schéma : la technique du primaire va faire référence à une technologie du lycée et non à une technologie du collègue.



1.1.4. Quelques résultats

Examinons dans un premier temps quelles sont les techniques utilisées dans deux groupes différents d'étudiants pour résoudre l'exercice proposé :

Résultats pour le premier groupe (23 étudiants) :

Règle de décalage (division)	14
décalage portant sur le dividende	5
décalage portant sur le diviseur	5
décalage erroné (de type multiplicatif).....	2
multiplication par 10000 de chaque terme de la division	2
Règle de la multiplication par l'inverse (multiplier par l'inverse de $\frac{1}{10000}$)	8
Utilisation des puissances de 10 :	1
Total	23

Résultats pour le deuxième groupe (22 étudiants) :

Règle de décalage (division)	12
décalage portant sur le dividende	3
décalage portant sur le diviseur	7
décalage erroné (de type multiplicatif).....	1
Règle de la multiplication par l'inverse (multiplier par l'inverse de 0,0001, $\frac{1}{10000}$ ou 10^{-4}).....	6
Utilisation des puissances de 10.....	2
Non-réponse.....	2
Total	22

Les étudiants, dans leur majorité, (environ les deux tiers dans chacun des groupes) utilisent la technique du décalage : elle ne nécessite pas de nouvelles écritures et peut se gérer entièrement mentalement. Un nombre non négligeable d'entre eux utilise cependant la technique du collège et très peu une technique s'apparentant à celle du lycée. Nous remarquons de plus qu'il y a peu d'erreurs ou de non-réponses (trois dans le premier groupe et trois dans le second), montrant que l'exercice n'apparaît pas comme très difficile aux étudiants.

1.1.5. Analyse de la séquence didactique

Dans la construction initiale de la séance conçue avec le formateur, la recherche et la correction des trois exercices devaient être rapides. Si la résolution par les étudiants prit peu de temps, la correction fut beaucoup plus longue que prévue, notamment pour l'exercice que nous sommes en train d'analyser (Chronique complète en annexe C4a).

Celui-ci représentait un enjeu important à la fois pour le formateur et pour les étudiants qui ont été très intéressés durant toute la séance. En effet on peut noter que neuf étudiants (sur 22 présents) vont intervenir sans sollicitation individuelle de la part du formateur, faisant chaque fois rebondir et progresser le débat.

Cela correspond à notre avis à une conjonction d'intérêt des deux parties qui parfois s'opposent, parfois coopèrent.

Le premier élément de réponse est certainement à rechercher dans l'idéologie dans laquelle baignent actuellement tous les protagonistes du système d'enseignement (aussi bien les étudiants, les professeurs que le concepteur de l'ingénierie) : un problème est d'autant plus intéressant qu'il est susceptible de provoquer de la part des élèves des procédures différentes qui pourront être par la suite mises en commun et confrontées entre elles. Du côté de l'étudiant, cela favorise une attitude réflexive sur ses productions; du côté du formateur, cela lui ménage une large latitude pour parler de ce qui lui paraît important au regard de son travail de formation.

Examinons la situation du point de vue du savoir en analysant successivement la séquence selon la position de l'étudiant, puis selon la position du formateur.

a. Du côté des étudiants

a) le centrage sur la technique du primaire

La technique du décalage, propre au primaire, majoritaire, est le centre d'intérêt pendant le temps de la correction. Beaucoup d'interventions des étudiants nous le confirment tout au long de la discussion.

La première intervention porte sur la technique de décalage (sur le diviseur), relayée aussitôt par une deuxième intervention représentant un autre point de vue sur le décalage (sur le dividende). Après un intermède sur une technique mettant en œuvre des écritures où figurent des puissances de 10, un étudiant va de nouveau intervenir pour signaler que le décalage de quatre rangs sur la droite, visant à rendre le diviseur entier est la technique la plus performante. Un deuxième signale par la suite qu'il ne comprend pas les raisons d'un décalage dans une direction plutôt que dans une autre. Un troisième propose de lier décalage et multiplication du dénominateur et numérateur par un même nombre. Après une discussion sur l'utilisation de la technique utilisant l'inverse d'un nombre, un quatrième déclare :

E : Moi, je me rappelle que quand on divisait par 0,000 quelque chose cela donnait un nombre plus grand que le diviseur, alors je me suis dit, on doit pouvoir décaler et j'ai décalé.

Enfin, quelque temps plus tard, un cinquième rappelle des différences entre la technique

de décalage et l'utilisation des puissances.

Nous constatons à travers toutes ces interventions de natures fort diverses que la technique du décalage reste au centre des préoccupations des étudiants qui ramènent régulièrement le sujet dans la discussion. Essayons d'analyser d'un peu plus près quelles sont les grandes lignes de ces discours.

b) la sensibilité aux automatismes et le problème du sens

Il s'agit d'un exercice pour lequel tous les étudiants ont trouvé une réponse en utilisant des automatismes : nous retrouvons trace de cette sensibilité particulière dans l'expression "dans ma tête", comme on peut le remarquer dans les deux exemples suivants :

E4 : pour moi, dans ma tête, c'est automatisé, cela devient des règles sur les exposants (...)

E11: l'expliciter, non, c'est automatique, quand il y a deux fractions l'une sur l'autre (...)

Or ces automatismes, ils vont devoir peut-être les enseigner, mais ils ne sont pas capables d'explicitier les raisons qui justifient leur fonctionnement. Ils sont donc en attente d'un discours explicatif du formateur sur les raisons qui légitiment la technique employée. Un point de vue idéologique en vigueur actuellement et partagé, comme nous le verrons, par le formateur et les formés, est qu'on ne doit pas enseigner une technique "sans lui donner de sens".

Les étudiants sont donc sensibles aux propos du formateur portant sur cet aspect. Cette préoccupation en rapport avec les élèves du primaire, comme en témoigne l'intervention d'un étudiant :

E4 : Le problème que j'ai avec les miens, des gamins de CP, c'est qu'ils retiennent bien les procédures, ils sont très sensibles aux procédures, mais ils ne donnent pas de sens : par exemple décaler une virgule, c'est une procédure automatique.

Cette adhésion aux propos du formateur va porter surtout sur la technique utilisée à l'école primaire : c'est bien la recherche d'un sens relatif au décalage qui est évoquée dans le discours précédent.

c) la technique du décalage comme objet d'étude : recherche d'explications et d'une technologie

Mais dans le même temps, ils vont prendre la technique de l'école primaire comme objet d'étude, d'où les nombreuses interventions portant sur le problème du décalage ramenant le débat sur ce terrain alors que le formateur, manifestement, préférerait le placer sur un autre terrain, comme nous le verrons par la suite.

On peut distinguer plusieurs niveaux de recherche d'explications :

* essai de rattachement à une autre technique connue

La technique se trouve justifiée parce qu'elle peut être identifiée à la technique de la division dans les entiers : l'explicitation par un étudiant de l'intérêt de "rendre entier le diviseur" plutôt que le dividende illustre ce que nous avançons :

E6 : Moi je détache la virgule; je m'occupe du diviseur, je déplace la virgule de quatre rangs, après je déplace la virgule de quatre rangs sur le nombre de gauche
E : cela revient au même.

P : *cela nécessite d'écrire un zéro de plus.*

E6 : Si c'est un gros nombre, on peut très bien voir un nombre avec des chiffres après, mais pratiquement le diviseur n'a pas de virgule et la division ne pose pas de problèmes.

La plus grande généralité de cette règle, qui ramène le calcul à une division euclidienne, n'est pas relevée par le formateur qui signale qu'il s'agit "d'une légère variante" de la règle de décalage rendant entier le dividende, alors que celle-ci ne fonctionne bien ici que parce que le diviseur est égal à 0,1 et que l'on dispose d'une seconde règle sur le fait que diviser par 0,1, c'est multiplier par 10.

* essai de généralisation de la règle de décalage

Les étudiants cherchent à voir si les règles de décalage peuvent s'unifier. Ainsi une étudiante intervient en signalant que lorsqu'elle divise par 10, 100, 1000, la virgule se déplace vers la gauche, alors que là, on la déplace vers la droite. Cette remarque est rapidement écartée par le formateur qui signale que c'est une autre règle quand on divise par 10, 100, 1000, la considérant comme une sous-technique différente.

On peut pourtant les voir comme la *même* technique, c'est à dire :

- quand on divise par 10^n , puis par 10^{n+1} , on déplace la virgule d'un cran vers la gauche,

- quand on divise par 10^{-n} , puis par 10^{-n-1} , on déplace la virgule d'un cran vers la droite.

* recherche d'une technologie

Il s'agit d'un étudiant établissant un lien entre la division de deux décimaux et une fraction. Il applique alors les règles de transformation d'une fraction par multiplication et division par un même nombre.

E8 : Est-ce qu'on ne peut pas donner une règle plus générale : pour qu'un nombre donné sous forme de fraction soit égal à lui-même, il faut multiplier le numérateur par un nombre et il faut multiplier le dénominateur par ce même nombre ou l'inverse.

P : *Tu me suggères, si j'ai bien compris, une autre façon de procéder.*

E8 : en fait, quand il déplace dans 0,0001 la virgule vers la droite, il a multiplié par 10000, donc cela veut dire aussi qu'on multiplie le numérateur par 10000.

Mais considérer une "fraction" de deux décimaux comme une fraction de deux entiers demanderait au niveau explicatif de remonter à un niveau théorique sur le fait que le quotient de deux rationnels est un rationnel. Le formateur ne peut s'attarder sur ce point qui lui demanderait de longs développements et il est en quelque sorte "obligé" d'interpréter les propos de cet étudiant comme l'expression d'une autre procédure.

b. Du côté du formateur

a) Le centrage sur la technique de l'inverse par la reformulation des propos des étudiants

Le projet du formateur vise l'appropriation par les étudiants de la technique d'utilisation du calcul de l'inverse. Aussi va-t-il saisir l'occasion qui lui est donnée au cours de l'exposé d'un étudiant sur l'utilisation des puissances pour l'amener à parler de l'inverse. A plusieurs reprises, il va proposer une transformation du discours de l'étudiant, espérant ainsi permettre à tous d'établir des liens entre divers éléments en jeu.

Quand l'étudiant parle de "fractions l'une sur l'autre", puis de "fraction retournée", il ne se préoccupe de rien d'autre que de l'écriture et de la gestion de celle-ci. Le formateur par contre intervient pour parler de l'inverse, comme en témoignent les extraits successifs suivants concernant son discours :

P : Oui mais tu pars de deux fractions l'une sur l'autre, c'est-à-dire simplement le... le quotient de deux fractions, non ? (...)

Alors tu passes par le quotient de deux fractions et le quotient de deux fractions, c'est diviser deux fractions, c'est...

E11 : Multiplier par la fraction retournée.

P : l'inverse ou la fraction retournée comme vous voulez(...).

Pour faire le quotient de deux fractions, il suffit de multiplier la première par l'inverse de la seconde (...).

De même, peu de temps après une intervention d'un étudiant sur le décalage, le formateur recentre le débat sur l'utilisation de la technique de l'inverse.

P : oui, si on multiplie dividende et diviseur par un même nombre et on ne change pas une fraction si on divise numérateur et dénominateur par un même nombre. Ici, c'est un peu pareil que tout à l'heure : je cherche à éliminer la virgule. On peut être un peu plus précis : je prends l'inverse de 0,0001, c'est-à-dire le nombre qui, multiplié par 0,0001, donne 1. Au passage, j'ai rappelé ce qu'était l'inverse d'un nombre, j'espère que tout le monde l'a bien saisi : l'inverse d'un nombre, c'est le nombre qui, multiplié par ce nombre, donne 1.

Pour le formateur, cette technique est un enjeu important, ce qui l'amène à insister et à rappeler de manière assez solennelle ce que signifie pour lui l'inverse d'un nombre. Cet enjeu rejoint la question du sens comme justification d'une technique.

b) la recherche du sens pour les techniques utilisées

Ce souci transparait dès sa première intervention à propos du quotient de deux fractions.

P : Pour faire le quotient de deux fractions, il suffit de multiplier la première par l'inverse de la seconde en espérant avoir donné du sens à la notion d'inverse d'une fraction.

Pour le formateur, la règle de décalage n'est pas péjorée, mais elle est dénuée de sens. Cela va être la toile de fond de ses interventions initialisées par la déclaration.

P : Je voudrais simplement attirer votre attention sur le fait que la plupart des explications que vous avez données sont essentiellement mécaniques, c'est-à-dire qu'elles sont dénuées de sens.

Or, pour les étudiants, la notion d'inverse n'a pas plus de "sens" que le décalage : en effet, pour lui donner une signification, il faudrait là aussi remonter jusqu'à la structure des rationnels comme groupe multiplicatif, théorie à laquelle pour le moment seul le formateur a accès.

Ce problème du sens est repris plusieurs fois, à propos de la notation 10^{-4} .

P : on peut donner du sens à ceci en disant que 10^{-4} , c'est diviser par 10, 4 fois de suite (...)vous pouvez très bien aider des enfants à construire du sens en étant très proches de la notation avec des exposants, mais sans en parler.

En fait, si on analyse les interventions faites par le formateur avec la grille de lecture que nous propose Chevallard, on peut remarquer que les justifications de sens pour une technique se ramènent à la recherche d'une technologie associée à celle-ci, c'est-à-dire à la recherche d'une logique du savoir. Mais le formateur ressent l'ambiguïté de cette position, car il est bien conscient que le sens se construit aussi au travers des activités.

P : les donne-t-on [les règles] comme des règles dénuées de toute signification si ce n'est que d'appliquer une règle donnée, un déplacement de virgule. Ou il y a possibilité effectivement de mettre ces règles avec des activités qui se traduisent très concrètement et qui donneraient du sens entre guillemets parce que moi, je ne sais pas très bien expliquer ce que c'est que construire du sens, donner du sens, j'ai toujours un peu de mal avec ces expressions. Je crois que l'on arrive cependant à s'entendre là-dessus.

Il exprime par là, la difficulté à articuler aspects syntaxiques et sémantiques.

Dans cette analyse d'un court moment de l'ingénierie, consacrée à l'examen de techniques de résolution d'un exercice, nous avons donc un double phénomène qui illustre les jeux entre formés et formateur quand les étudiants sont dans le placement que nous avons appelé syntaxique :

- un phénomène de coopération entre les étudiants d'une part pour rechercher des

raisons aux techniques employées, parce qu'ils auront peut-être un jour à enseigner ces techniques, du moins celles qu'ils perçoivent comme relevant de l'école élémentaire, et le formateur d'autre part parce qu'elles vont lui permettre de faire des liens entre différents savoir-faire. Pour le formateur, nous pouvons remarquer que la recherche des raisons se fait dans les savoirs relatifs au collège, qui apparaissent comme explicatifs de ce qui est utilisé dans le primaire.

- un phénomène de tension (qui se déroule dans un climat serein, il faut le préciser), en raison du centrage des principaux protagonistes sur des techniques particulières. Celle du formateur (diviser, c'est multiplier par l'inverse) ne peut servir comme technologie de celle utilisée majoritairement par les formés (le décalage). Cela se traduit par la "résistance" qu'opposent certains étudiants aux reformulations faites par l'enseignant, par exemple la déclaration d'une étudiante après une reformulation du formateur.

E11 : Non, mais moi dans ma tête, ce n'est pas l'inverse, c'est la fraction retournée.

On peut noter qu'à ce moment-là, dans l'état d'avancement de l'ingénierie et dans l'état des connaissances des étudiants, il ne serait de toute façon pas possible au formateur de donner une théorie unificatrice pour ces différentes technologies et techniques en usage chez les étudiants. Il en résulte à leur niveau l'impression de savoirs déconnectés les uns des autres. C'est ainsi qu'on peut interpréter la remarque d'une étudiante:

E8 : Si on déplace la virgule de 0,0001, c'est pas la même chose que d'utiliser des puissances de 10 ?

Il faut remarquer que ces deux phénomènes, coopération et tension se conjuguent pour faire progresser la séance, permettant à la fois une écoute mutuelle des arguments avancés par les uns et les autres, mais aussi la relance "à la hausse" du débat dans la recherche de savoirs explicatifs. Il est intéressant de noter que cette négociation à la hausse est provoquée par la recherche du "pourquoi" des techniques employées. Elles renforcent le placement syntaxique des formés, placement dans lequel nous les avons trouvés au début de l'étude de la situation "Automates" pendant l'expérimentation 1993-94 (Chapitre C3, § 4.1.2.).

1.2. La pression des étudiants sur le formateur

1.2.1. Le cadre

Nous nous proposons d'analyser un épisode⁴ (chronique en annexe C4b) non prévu de

4. Nous utilisons le mot épisode dans le sens utilisé par Margolinas (1992) p. 74, terme repris de Voigt

l'ingénierie didactique au cours de l'expérimentation 92-93. Les étudiants ont été amenés à construire au cours de deux séances de deux heures, l'ensemble des rationnels à partir de la situation des automates. Ils ont été invités par la suite à analyser l'introduction des fractions telle qu'elle est proposée dans un livre du CM2.

La quatrième séance a débuté par une synthèse faite par l'enseignant portant à la fois sur les séances de construction des rationnels et sur l'analyse du livre évoqué auparavant. L'enseignant s'apprête à présenter aux étudiants la situation du tireur d'élite susceptible de faire le lien entre rationnels et décimaux.

L'intervention d'une étudiante va alors provoquer un "intermède" d'une durée d'une demi-heure à trois quarts d'heure.

A ce moment là, le groupe est globalement partagé en deux sous-groupes. Le premier sous-groupe que nous appelons G1, représentant environ deux tiers de l'effectif manifeste un intérêt soutenu pour les activités proposées. L'indicateur de cet intérêt est la qualité de la réponse aux "éléments pour une fiche de synthèse"⁵, éléments qui avaient servi à préparer la synthèse de l'activité "Automates". A ce premier sous-groupe appartient le délégué de la section. Le deuxième sous-groupe (appelé G2) est constitué d'un noyau de quatre personnes qui va progressivement manifester son mécontentement. Nous apprendrons par la suite qu'elles se sont concertées le matin et ont fait une démarche auprès du délégué pour que celui-ci intervienne auprès de l'enseignant. Il ne l'avait pas fait, n'étant pas en accord avec les arguments de ce sous-groupe. Autour de ces quatre étudiantes, gravitent deux ou trois personnes qui sont sans doute globalement en accord avec elles mais qui ne se manifesteront que très peu par la suite.

Ainsi l'intervention d'une "représentante" du sous-groupe des quatre étudiantes, dans la mesure où elle crée une perturbation obligeant l'enseignant à réagir "à chaud", va entraîner des réactions aussi bien du côté du professeur que du côté des autres étudiants à propos du savoir.

1.2.2. Les faits : la pression des étudiants sur l'enseignant

Nous voulons montrer que dans le jeu qui se déroule au sein du groupe entre les différents protagonistes agissant avec leur rationalité propre, une fraction du groupe va

(1985). "L'épisode dépend d'une observation particulière, c'est une reconstruction totalement à posteriori. La détermination d'un épisode dépend de l'analyse de protocole"

5. Les étudiants avaient à remplir une fiche où on leur demandait de noter les différentes propriétés construites au cours de l'activité, les significations que l'on pouvait attribuer à la fraction a/b , puis à $1/b$ dans le contexte considéré, d'interpréter l'égalité $(7; 3) = (2; 1) + (1; 3)$ en terme de sauts puis en terme de fraction, enfin de préciser les limites de la construction des rationnels dans le contexte des automates.

être capable d'entraîner le professeur sur les positions souhaitées par ses membres. Nous analysons tout d'abord le début de l'épisode, puisque c'est lui qui va déclencher les diverses interactions. Le professeur annonce que l'on va travailler sur une nouvelle situation. Il est alors interrompu par une étudiante, ce qui entraîne l'échange suivant :

E 1 : sur décimaux, il y a combien de séances ?

P : sur décimaux, il y a encore 3 séances.

E1 : depuis qu'on a abordé le module sur décimaux, je ne vois pas du tout où est-ce qu'on va !

P : où est-ce qu'on va par rapport à quoi ?

E1 : Par rapport à ce que l'on doit apprendre sur les décimaux.

Les arguments vont être développés dans un premier temps sur des registres différents :

* *L'avancée du temps d'enseignement* : il s'agit indirectement de savoir combien de séances il reste pour traiter ce que les étudiants souhaitent voir aborder, indiquant par là que l'on a déjà passé beaucoup de temps sur le sujet. On reconnaît sans peine un phénomène d'obsolescence des situations proposées. Dans la culture commune et sur la base de l'épistémologie spontanée des élèves, le temps d'apprentissage d'un objet de savoir doit être nécessairement court (Chevallard, 1988).

* *Le savoir visé* : tout d'abord l'étudiante rappelle le libellé de l'objet de savoir que l'enseignant est tenu d'étudier. En effet le module s'intitule "Décimaux"⁶ : elle signale ainsi que l'enseignant est tenu d'établir un lien entre ce qu'il propose et le savoir visé. C'est aussi en quelque sorte un rappel à l'ordre pour signaler qu'à l'école primaire, ce sont les décimaux qui sont des objets de savoir centraux et que les rationnels ne sont pas des objets d'enseignement à ce niveau.

Dans un deuxième temps, un troisième registre sera mis en avant :

* *Les moyens pour faire acquérir le savoir visé* :

L'étudiante signale qu'il y a rupture du contrat habituel institué dans le groupe.

E1 : oui, parce que nous, on a une méthode et cela ne correspond pas à ce qu'on faisait avant.

Ceci avait été signalé par un autre étudiant quelques minutes auparavant :

E : ce qu'elle veut dire c'est que c'est plus difficile à gérer, à faire les liens entre ce qu'on savait déjà et ce qu'on voit là.

Le professeur le confirme, puisqu'il déclare à plusieurs reprises que ce qui a été proposé "est plus déstabilisant". En fait c'est déstabilisant pour les formés mais aussi

6. Il est intéressant de noter ici que le titre du module établi par les formateurs de mathématiques de l'académie est identifié *seulement* par le terme "décimaux" et non "décimaux et rationnels", ce qui est manifestement un indice significatif de la place attribué par les formateurs aux décimaux par rapport aux rationnels.

déstabilisant pour lui dans la mesure où cela provient de propositions du concepteur qui ne correspondent sans doute pas à ses habitudes d'enseignement.

Il faut remarquer cependant que cette critique n'entraîne pas l'unanimité des membres du groupe comme en témoigne l'intervention d'un des leaders de l'autre sous-groupe, en l'occurrence le délégué élu.

E : pour un enfant, c'est plus facile de rentrer dans des situations comme ça, que comme nous, on l'a fait avant.

P : *je ne sais pas si c'est plus facile avec l'exemple que l'on vous a donné. Ce que je dis c'est que ça vous a permis de poser des problèmes de l'apprentissage des nombres rationnels.*

E : moi, personnellement, cela me paraît plus intéressant.

Notons que l'étudiant qui intervient ne fait pas référence à l'apprentissage *les concernant*, ni même à l'apprentissage des élèves, mais emploie le terme *enfant*, signalant par là qu'il se situe dans le cadre d'un apprentissage "virtuel" basé sur des situations qui n'ont pas cours actuellement.

Par la suite, une autre étudiante du groupe G2 va relayer la première et amener l'enseignant sur le terrain souhaité par ce sous-groupe :

Étudiante 2 du sous-groupe G2 : moi, je n'arrive pas à faire la différence entre les rationnels et les fractions

P : *moi, je croyais... : quelqu'un peut répondre ou pas ?*

Une discussion animée s'engage dans la salle à propos de rationnels et de fractions.

Intervention d'un membre du groupe G1 : il peut y avoir plusieurs fractions pour un même rationnel, en fait un rationnel, le résultat, c'est une fraction⁷.

P : *10/12, c'est une fraction, 5/6, c'est une autre, d'accord mais ça représente le même rationnel.*

Étudiante 2 : mais le décimal là-dedans ?

Le détour a été fait par rationnel et fraction de façon à ne pas heurter de front l'enseignant, en se plaçant sur son terrain, tout en lui montrant les limites de son enseignement. Mais la dernière intervention replace le débat sur la position souhaitée, c'est-à-dire sur les écritures des différents nombres, débat que l'enseignant voulait éviter au moins pendant un certain temps.

L'enseignant fait une tentative de renvoi au groupe :

P : *le décimal, le problème, moi, je veux bien répondre, le décimal pour vous qu'est-ce que c'est ? Je vous renvoie la question. Quand même, vous avez des idées sur la question ?*

7. On peut remarquer, dans l'intervention de cet étudiant, le rationnel a pris un statut par rapport à fraction, celui de résultat.

Mais devant le mutisme du groupe, il est amené à produire un exemple (5,7) qui va entraîner un flot de questions de la part des étudiants et va l'obliger à aborder le problème des écritures décimales illimitées avec toutes les difficultés inhérentes à ce sujet qui en fait touche les nombres réels.

Le professeur, étant sollicité pour indiquer la différence entre les décimaux et les rationnels, se propose donc de montrer que $1/3$ n'est pas un décimal, en s'appuyant sur le fait que $1/3 \times 3$ doit donner 1. A cet effet, il montre que tout nombre ayant une écriture finie du type 0,333, ainsi d'ailleurs que tout nombre ayant une écriture finie décimale, multiplié par 3 ne peut pas donner 1 (en utilisant l'algorithme classique de la multiplication d'un nombre décimal par un entier). C'est alors qu'un étudiant va envisager le cas des écritures décimales illimitées :

E : et si c'était à l'infini, ce ne serait pas un décimal ?

P : à l'infini, ça devient quoi? Envisageons le. (brouhaha). Ta question ?

E : pourquoi 0,33333...ça n'est pas un décimal ?

P : alors là, je mets des points de suspension pour indiquer que j'ai des 3 qui continuent jusqu'à l'infini. Qu'est ce qui vous pose problème ?

E : si on rajoute des 3 autant qu'on veut et qu'on multiplie par 3, on n'obtient jamais 1.

Le formateur se place sur le même terrain que celui des formés, c'est à dire celui des écritures. Il ne répond que par un argument d'autorité, ne voulant pas entrer dans des démonstrations :

P : le problème, pourquoi on s'est fixé ça ? Une telle opération devrait donner 1 et en réalité, si je m'en tiens aux algorithmes classiques, j'ai cette fameuse écriture 0,999... Pour simplifier, je ne sais pas, il y a 15 ans, on enseignait carrément que ça, c'était une écriture de 1. Peut-être, il y en a parmi vous pour qui 0,999..., ce n'est pas autre chose que 1. Ne discutez pas, c'est 1. Si vous envisagez des écritures décimales illimitées, vous êtes obligés d'envisager que l'écriture 0,99999... c'est 1.

Ce qui est intéressant dans cet épisode, c'est que l'intervention d'une étudiante, représentante d'un groupe minoritaire au début, va entraîner l'ensemble du groupe sur le même terrain. Ainsi le leader déjà signalé et faisant partie du sous-groupe G1 qui a marqué un intérêt soutenu depuis le début de la séquence, va se placer dans la même optique en relançant le débat au moment où l'on aurait pu croire qu'il était clos :

E : on se demandait si π est un rationnel ?

P : π n'est pas un rationnel parce que même $22/7$ est une fraction qui donne une approximation de π .

E : ça se termine ?

P : non, $22/7$ ça ne se termine pas. Il y a une période qui se répète. π , lui, les mathématiciens ont démontré qu'il ne pouvait pas s'écrire sous forme de rationnel.

E : ah bon ?

P : *pardon, sous forme de fraction, donc, ce n'est pas un rationnel.*

E : et quand on fait périmètre divisé par le diamètre, on a bien une fraction ?

Ceci va obliger de nouveau l'enseignant, bien qu'il ait refusé quelques minutes auparavant de répondre à une question du même ordre, à réagir positivement à une sollicitation qui, cette fois, émane d'un étudiant qui le "soutient" . Mais de la même façon que précédemment, la réponse à cette question ne peut se faire qu'à l'aide d'un argument d'autorité :

P : non, parce que ça veut dire que tu n'as pas un entier divisé par un entier. Si tu prends périmètre divisé par diamètre, cela veut dire que si le diamètre est entier, le périmètre ne l'est pas, il n'est même pas rationnel. C'est clair ou pas? Si tu prends par exemple un cercle de diamètre 5, eh bien la longueur du cercle ne peut pas être un rationnel. Sinon π serait ce rationnel divisé par 5, ça serait encore un rationnel. Les mathématiciens ont montré que π n'était pas un rationnel.

Nous voyons d'ailleurs que les arguments d'autorité sont à deux niveaux : l'affirmation que si un diamètre est entier, alors le périmètre n'est pas rationnel, ce qui suppose que implicitement que π n'est pas lui-même rationnel, ce qui revient à dire que π n'est pas rationnel parce qu'il...n'est pas rationnel! D'où la nécessité d'avoir un autre type d'argumentation faisant appel à une *légitimité* extérieure : c'est un point sur lequel nous reviendrons ultérieurement.

Suite à cette tentative d'explication, une nouvelle question va alimenter le débat, à laquelle l'enseignant ne peut plus échapper :

E : moi je ne comprends plus, parce que le rationnel, il a un nombre infini de chiffres après la virgule ?

Celle-ci va de nouveau faire rebondir le débat. Nous voyons donc bien l'enchaînement des questions posées, questions qui nécessitent une réponse de l'enseignant dans les termes souhaités par les étudiants.

Nous voyons à travers cet exemple, que les étudiants en placement syntaxique, s'appuyant sur certaines connaissances issues de leurs études antérieures, dans leur volonté de se constituer un "texte du savoir", obligent progressivement le formateur à fournir des arguments qui vont pour certains dans le sens qu'ils souhaitent, mais aussi à donner des réponse fondées sur des arguments d'autorité.

2. LES SÉANCES DITES DE SYNTHÈSE : LE TEXTE DU SAVOIR DU FORMATEUR ET LE PROJET DU CONCEPTEUR DE L'INGÉNIERIE

2.1. Le projet du concepteur de l'ingénierie

La volonté du concepteur de l'ingénierie à propos des systèmes de nombres est de créer les conditions pour que les étudiants, à travers les activités proposées, engagent une certaine responsabilité par rapport au savoir, enjeu de la formation. De ce fait, la contextualisation du savoir dans ces activités peut être identifiée "au sens du savoir" comme causes de ce savoir. D'où l'adaptation d'une partie d'une ingénierie existante qui puisse permettre au formateur de contrôler les apprentissages des étudiants.

Mais d'autre part, un des choix du concepteur est que ceux-ci aient accès à un texte du savoir qui soit "correct", c'est-à-dire un texte du savoir légitime du point de vue mathématique, afin qu'ils soient en mesure par la suite de procéder au travail de transposition didactique en direction de leurs élèves. Dans l'esprit du concepteur, ce texte est destiné à mettre en évidence l'intérêt des activités menées et doit servir à montrer la cohérence et la pertinence des savoirs enseignés antérieurement.

Les étudiants ont donc accès aux *raisons* du savoir en procédant à une relecture des activités qui soit effectuée dans la logique d'un texte du savoir. Autrement dit, au cours du processus d'institutionnalisation, il est prévu une "traduction" des objets de savoir, enjeux des différentes situations dans les termes de ce texte. Cela doit donner l'occasion aux étudiants de réorganiser un ensemble de notions anciennes plus ou moins bien connues : fraction, fraction irréductible, fractions égales, couple, entier en les rattachant à des notions qui peuvent être nouvelles pour eux comme celle de rationnel. Ces phases de relecture doivent se faire au cours de séances dites de synthèse que nous rappelons ci-dessous, séances sous le contrôle direct du formateur, qui dispose donc d'une certaine marge de manœuvre. Une discussion et éventuellement une négociation a lieu sur certains éléments entre le concepteur de l'ingénierie et le formateur dont nous précisons aussi les modalités.

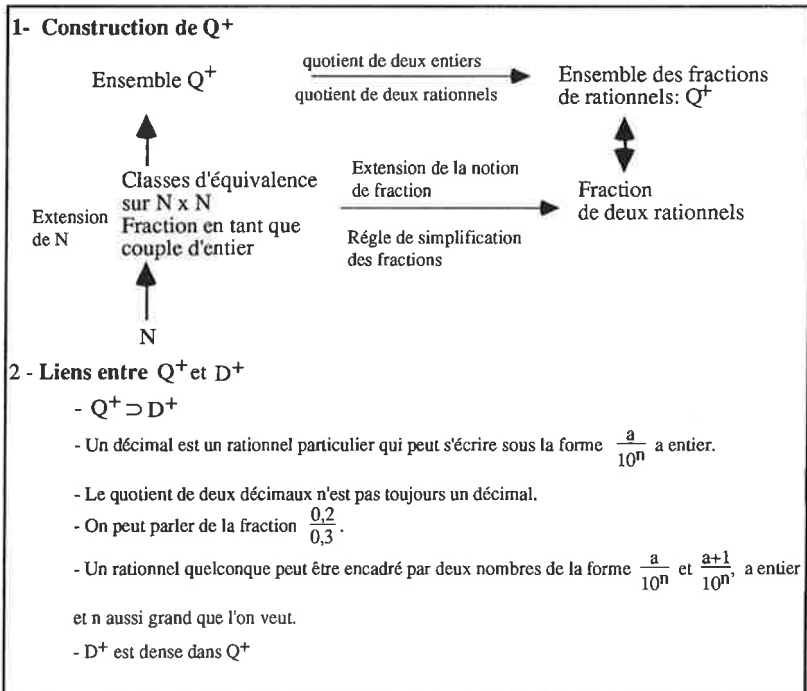
Séquence 1 : Mercredi 6 Avril 1994 (au cours de la séance 4)

La synthèse venant à la fin de la séquence des automates prend appui sur un document intitulé "Construction des rationnels à partir des entiers" (Voir annexe C4c). Cette fiche met en correspondance les éléments intervenant dans la situation des automates (saut d'un automate défini par un couple, couple origine, comparaison et addition des sauts) avec les notions mathématiques (rationnel défini par une fraction, fraction irréductible, comparaison et addition de rationnels). Nous avons rédigé ce document

sous le contrôle du formateur.

Séquence 2 : Lundi 11 Avril 1994 (au cours de la séance 5). Mercredi 13 Avril (au cours de la séance 6)

La synthèse qui suit la séquence du tireur d'élite doit mettre en évidence les interrelations entre les systèmes de nombres rencontrés au cours des séances précédentes : rapport entre rationnels et décimaux au niveau des écritures, lien entre l'algorithme de la division et l'encadrement de plus en plus fin d'un rationnel par des décimaux, densité de D dans Q . Elle doit permettre aussi de préciser la structure de Q . L'accord s'est fait oralement sur ces différents points. Une note manuscrite décrivant les points de la synthèse jugés importants par le concepteur a été remise au formateur, note qui est reproduite ci-dessous :



Pour terminer, il est entendu que le formateur peut proposer certains exercices pour indiquer qu'il y a d'autres nombres qui ne sont pas rationnels.

Nous considérons que les choix faits par le formateur sont révélateurs des déterminations qui pèsent sur ce dernier dans l'institut de formation auquel il appartient. L'analyse des distorsions éventuelles entre les souhaits exprimés plus ou moins explicitement par le concepteur et la réalisation effective au cours des séquences de synthèse nous permet d'amorcer une caractérisation de ces déterminations.

2.2. Le texte du savoir du formateur : le poids de la logique des "savoirs" du collège

2.2.1. Un épisode révélateur

Dans la séance située à la fin de la séquence des automates, la relecture et la réorganisation proposée apparaît donc dans la fiche intitulée "Construction des rationnels à partir des entiers". Au cours de l'élaboration de la fiche, le formateur avait insisté pour que figure sur la fiche la propriété suivante :

Élément de la situation	Propriété portant sur les fractions
Deux couples désignant un même saut peuvent s'additionner. Le couple obtenu désigne le même saut.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

Ses motivations proviennent du fait que la réactualisation de cette connaissance lui permet d'établir une relation avec un travail sur la proportionnalité qui avait été fait quelque temps auparavant. Cet ajout nous paraissant anodin, nous avons accepté, car nous pensions que cela ne demanderait que peu de temps pour être rappelé.

Une "erreur" due à une inattention du formateur (il additionne les deux fractions $\frac{4}{6}$ et $\frac{6}{9}$ en additionnant les numérateurs et les dénominateurs, donc en écrivant $\frac{4}{6} + \frac{6}{9} = \frac{10}{15}$) crée un épisode révélateur (voir chronique en annexe C4d) sur l'importance que le formateur accorde, à ce moment-là, à la propriété mentionnée plus haut. Il va ainsi "rattraper" son erreur en montrant en quoi cette propriété est intéressante selon lui :

P : alors cette propriété, j'attire votre attention sur le fait que c'est cette propriété qui vous permet de déterminer des partages proportionnels.

Suit la proposition de l'exercice suivant : "3 enfants ont par exemple 5, 7, 10 ans, j'ai une somme de 110 francs que je veux partager proportionnellement à l'âge des enfants". Le traitement de cet exercice va prendre en fait plus de temps que l'explicitation des

autres points du document de synthèse.

Or à aucun moment, les étudiants ne manifestent un désintérêt par rapport à l'exercice, bien au contraire. Ce que résume fort bien le formateur à la fin de son intervention :

P : j'insiste sur ce point-là, parce que ce sont des exercices très classiques de partage proportionnel⁸ comme vous pouvez très bien en avoir à faire soit au concours, soit à l'école élémentaire, puisqu'il peut y avoir des problèmes de cet ordre-là, qui peuvent se poser. Ces problèmes ont une solution avec cette propriété.

Nous pouvons noter la conjonction d'intérêt entre les étudiants et le formateur, point sur lequel nous aurons l'occasion de revenir dans le paragraphe suivant, à propos d'un savoir qui paraît aux yeux du concepteur de l'ingénierie comme un savoir éclaté par rapport à la cohérence qu'est censée produire la fiche en question.

Cet épisode manifeste la nécessité pour le formateur de mettre l'accent sur un objet de savoir présent au collège, d'une part pour effacer la mauvaise impression laissée par une écriture inexacte, mais aussi pour maintenir et relancer l'intérêt de l'auditoire qui reconnaît un savoir important.

2.2.2. Le rationnel considéré comme quotient

Pour le formateur, le rationnel est considéré comme un quotient. C'est ce que nous pouvons noter au cours de la séance du 11 Avril 1994 (annexe C4e) dont nous extrayons les extraits suivants de son discours :

P : une fraction, on a vu que c'était une écriture d'un rationnel. Qu'est-ce que c'est que le rationnel $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ ⁹. Quelle est la définition d'un rationnel? On a dit que le module devait apporter des définitions. Depuis deux séances, on parle de rationnel, on le mélange avec le terme de fraction.

(....)

P : oui, le rationnel "a sur b", c'est le quotient de a par b. Comment on va définir le quotient de a par b ?

(...)

P : oui, alors le quotient de a par b, c'est le nombre qui multiplié par b donne a. Lorsqu'on construit les rationnels, on admet que le quotient de deux entiers, dont le deuxième n'est pas nul, existe toujours. Et c'est ce qui fait construire de nouveaux nombres parce que $\frac{2}{3}$ n'est pas un entier. Et à un moment donné, on se dit : est-ce qu'on ne pourrait pas le considérer comme un nouveau nombre?

Le texte du savoir auquel se réfère le formateur peut être modélisé de façon

8. C'est nous qui soulignons.

9. Texte en italique écrit au tableau.

satisfaisante par la description que nous avons donnée d'une construction possible de l'ensemble Q , déjà repéré dans certains textes de formation (Voir chapitre C1, §1.1.2.).

Cette construction consiste à décider d'adjoindre formellement à N des éléments (notés $\frac{a}{b}$) qui permettent de résoudre des équations du type suivant dans ce nouvel ensemble

Q :

$$\begin{cases} b \times x = a \\ b \in N, b \neq 0 \\ a \in N \end{cases}$$

On cherche à définir sur Q des opérations qui vont prolonger celles définies sur N , conservant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et l'associativité de la multiplication.

La situation des automates paraît satisfaisante au formateur, car susceptible de faire apparaître rapidement le saut comme étant un nombre correspondant à la définition donnée ci-dessus et permettant de donner du "sens" à une entité définie de manière abstraite. C'est un moyen de contextualiser un certain texte du savoir, mais en même temps de pouvoir, quand le besoin s'en fait sentir d'en extraire les raisons. Cela permet de "récupérer" les étudiants qui considèrent d'emblée la longueur du saut comme étant la division de la "distance parcourue" par le nombre de sauts et qui ne jouent pas exactement le jeu proposé par la définition des automates.

Cette modélisation du texte du savoir du formateur permet d'expliquer ses interventions qui ne correspondent pas toujours aux souhaits du concepteur de l'ingénierie.

2.2.3. Le rejet d'un certain type de construction des rationnels comme savoir fondamental pertinent

Le discours final de synthèse va revenir à exclure du champ des savoirs de l'étudiant, la construction des rationnels comme extension de N par passage au quotient avec des classes d'équivalence. C'est ainsi qu'au cours de la séance de synthèse du 6 Avril, après avoir signalé que pour répondre à la demande de définition des étudiants, et avoir "tourné la difficulté" en disant que les rationnels étaient des quotients, le formateur explique quel est le point de vue des mathématiciens :

P : mais justement, la question que l'on peut se poser, c'est : est-ce que ce quotient existe, est-ce qu'il n'existe pas, est-ce qu'on en a seulement une valeur approchée, est-ce que c'est un véritable nombre ? Alors justement, ça prendra le statut de nombre si on sait faire des opérations dessus, si on sait comparer. Alors l'idée, c'était : est-ce que à partir de ce qu'on connaît sur les entiers, à l'aide des couples, on peut définir de nouveaux nombres qui prolongent un peu ces entiers ? Alors si vous aviez fait des études de mathématiques, c'est une activité

qui vous aurait été familière. Dès qu'on pousse un peu dans les études mathématiques, on est amené à construire l'ensemble des nombres rationnels. Comment on les construit, les mathématiciens proposent de les construire à partir de couples d'entiers, on essaie de trouver des prolongements des opérations de ces entiers.

Les expressions notées en gras montrent que pour le formateur, il ne s'agit pas d'un savoir qui peut être utile pour le futur professeur des écoles, mais bien d'un savoir exogène à l'institution de formation. Les étudiants sont donc invités à ne pas accorder trop d'importance à ce sujet difficile.

2.2.4. Le gommage de la densité de D dans Q comme savoir fondamental pertinent de la division fournissant un quotient décimal

Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre C1, la situation du tireur d'élite avait été choisie pour déboucher sur un retour réflexif sur la signification des chiffres que l'on obtient en cherchant le quotient décimal issu de la division entre deux entiers. Cela ouvrait la possibilité d'établir des interrelations entre fractions, quotient décimal, quotient décimal approché : cela nécessitait d'y consacrer un temps relativement important. Dans l'esprit du concepteur, il s'agissait de montrer que dans la stratégie appelée d_{10} (stratégie par dichotomie appliquée à des intervalles de la forme $\left[\frac{a}{10^n}, \frac{a+1}{10^n} \right[$), l'affinement des intervalles d'encadrement correspondait à la recherche du chiffre suivant dans l'algorithme fournissant le quotient décimal.

Or ce ne fut pas le choix du formateur qui s'intéressa particulièrement à la comparaison des stratégies mises en œuvre par les étudiants dans la deuxième partie du jeu (pendant environ une demi-heure). En effet la situation lui apparaît intéressante parce qu'elle permet de développer des stratégies diverses. Toutes les stratégies de l'analyse a priori sont apparues: cela a permis une discussion sur celles qui sont les plus économiques, en particulier les procédures d_{10} et d_2 qui ont été longuement étudiées. Il ne développa pas le point évoqué plus haut sur le lien entre la division et les approximations successives qui renvoient à la densité de D dans Q.

2.2.5. Les exercices de clôture

La séquence se termine par un certain nombre d'exercices dont nous avons montré dans la partie B que les techniques de résolution s'étaient naturalisées dans les institutions de formation, à savoir :

- la recherche de la période du quotient décimal de deux fractions avec une calculatrice : ici, il s'agissait de 1 divisé par 23,

- la recherche d'une fraction égale à une écriture décimale périodique,
- la démonstration du fait que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.

Le formateur considère qu'il s'agit d'un savoir important, compte tenu du temps qu'il consacre aux différentes démonstrations, démonstrations qui sont très détaillées. On peut dire que le formateur reprend ici le statut d'enseignant, statut reconnu manifestement par les étudiants qui, bien qu'ayant de la peine en général à suivre les démonstrations proposées, ne protestent pas et prennent des notes consciencieusement.

2.3. Le jeu du formateur : un compromis entre diverses contraintes

Nous pouvons noter à partir de l'analyse précédente que le texte du savoir développé par le formateur va être le résultat d'un compromis entre lui, ses étudiants et le projet du concepteur. Il permet d'intégrer les savoirs présents au collège (notamment fraction, fraction irréductible, décimal, quotient de deux entiers, approximation décimale etc...). Nous retrouvons là une détermination que nous avons déjà plusieurs fois mise en évidence.

Dans le cas où les formés sont dans un placement sémantique, leur problème va être de disposer d'un texte du savoir qui leur permette de se dégager des techniques contextualisées qu'ils ont eu l'occasion de mettre en œuvre dans la résolution des problèmes proposés. Mais ce texte du savoir doit pouvoir intégrer des savoirs anciens afin de pouvoir leur apparaître comme solution aux problèmes de "sens" qu'ils se posent. C'est pourquoi nous avons pu noter la pression exercée par les étudiants sur le formateur, en particulier lorsque celui-ci cherche à respecter l'ingénierie proposée, s'éloignant des attentes professionnelles des formés.

Le texte du savoir du formateur représente un compromis acceptable entre le projet du concepteur et la pression des étudiants qui souhaitent retrouver les objets de savoirs anciens apprêtés de telle manière qu'ils puissent les interpréter dans les termes des situations contextualisées.

La notion de rationnel comme quotient, que nous avons déjà identifié comme rapport institutionnel à ce savoir au collège, va de nouveau agir comme une contrainte sur la volonté de construction des rationnels que nous avons souhaitée.

Ainsi l'extrait suivant (voir annexe C4d) est significatif de "l'accord" qui va se dessiner entre la plupart des étudiants et le formateur, au prix de certaines ambiguïtés :

P : (...) et peut-être que tout de suite, on pourrait donner une définition, ou en tout cas un élément caractérisant la fraction. Pourquoi dans la situation automates, on fait appel aux fractions? Quand on dit par exemple arriver à 12 en 18 sauts, quelle est la première activité que l'on a fait pour dessiner les sauts

des automates ?

E1 : on a divisé 12 par 18.

P : *oui, on a divisé 12 par 18. En réalité qu'est-ce qu'on pourra donner comme définition d'un rationnel ?*

E1 : la division de deux entiers.

P : *effectivement le quotient de deux entiers va définir un rationnel, on verra sous quelles conditions. Douze dix-huitièmes, c'est le quotient de 12 par 18.*

Quand je partage 12 par 18, eh bien j'arrive au rationnel 12 sur 18.

E4 : si on parle de quotient, c'est qu'on sait déjà diviser !

Si un élève avance une objection, étant conscient que si on part de N, on ne sait pas diviser, la grande majorité des étudiants n'arrivent pas se "représenter" le rationnel autrement que comme le "résultat" de la division de 12 par 18, ou encore de 2 par 3, c'est à dire une écriture, comme en témoigne l'extrait suivant :

E1 : le rationnel, c'est le résultat d'une division ?

E2 : c'est le quotient.

E1 : c'est deux-tiers ou c'est deux...? (...)

E3 : deux tiers.

E1 : c'est 0,666 le rationnel ?

P : *est-ce que 0,66 est le rationnel ? A ce moment-là...*

E5 : c'est une valeur approchée du rationnel.

P : *oui, ça sera une valeur approchée, mais moi, je préférerais reprendre ce que j'avais proposé tout à l'heure, c'est à dire le quotient. Le quotient est le même pour 2/3 (deux tiers) pour 4/6 (quatre sixièmes), etc....Qu'est ce qu'elles caractérisent toutes ces fractions, elles caractérisent le même quotient. Ce quotient, si vous voulez, c'est l'équivalent du saut, ça va ? Ca répond à vos questions ou pas ?*

Il ne semble pas que pour la majorité des élèves le travail de synthèse élucide le rapport qu'entretiennent les fractions et les rationnels, mais que le rationnel s'assimile ni plus ni moins à une écriture à virgule, produite par l'algorithme de division de deux entiers tel que le connaissent les étudiants.

Nous aurons confirmation de ce point de vue au cours de la deuxième synthèse (voir annexe C4e), au moment où le formateur désire fournir des définitions (définitions demandées fortement par les formés au cours du questionnaire préliminaire et au cours de la discussion de la séance 4 où le formateur leur avait demandé leur point de vue) :

P : (...) *quelle est la définition d'un rationnel ? On a dit que le module devait apporter des définitions. Depuis deux séances, on parle de rationnel, on le mélange avec le terme de fraction.*

E : c'est un quotient.

P : *oui, c'est le quotient de a par b. Comment on va définir le quotient de a par b, c'est le résultat de la division : c'est ça que tu voulais dire? Seulement il y a des divisions qui ne s'arrêtent pas. Comment peut-on le définir ? C'est ?...C'est le nombre qui... ?*

C'est ainsi que le jeu du formateur, fortement déterminé par les savoirs en jeu au collège, détermine le jeu des formés quand ils occupent les différents placements envisagés. En retour, le jeu des formés pèse sur le formateur pour que celui-ci reste garant d'un texte du savoir qui ne soit pas trop éloigné de celui qu'ils ont eu l'occasion de fréquenter au cours de leurs études antérieures.

3. UNE RECHERCHE DE LÉGITIMITÉ

3.1. L'analyse d'un épisode

Le formateur doit rechercher constamment la légitimité de son enseignement auprès des formés. Nous allons le montrer en poursuivant l'analyse de l'épisode précédent : pour cela, il peut se servir de trois registres différents, le registre historico-mathématique, métamathématique et didactique¹⁰.

** Le registre historico-mathématique*

L'enseignant cherche à justifier le fait d'aborder les rationnels avant les décimaux. Pour cela il va faire appel à l'histoire des mathématiques.

Le premier argument avancé va concerner la justification du fait que les décimaux ont été inventés pour pouvoir étendre les techniques opératoires sur les entiers :

P : les mathématiciens, quand ils ont défini les décimaux, se sont arrêtés à un nombre fini de chiffres après la virgule pour pouvoir définir des opérations sur les décimaux. En réalité, les décimaux ont été construits bien après, au XVI^e siècle, parce que justement, ils permettaient des techniques opératoires très intéressantes par rapport à notre numération. Donc en réalité, quand ils ont défini les décimaux, pour avoir des techniques opératoires, il fallait se fixer un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule.

Implicitement, le professeur montre par là qu'il s'intéresse à autre chose que les techniques opératoires, comme il l'a déjà signalé auparavant, ce qui justifie le choix réalisé.

En deuxième lieu, il montre que l'introduction des décimaux est lié à l'introduction en France du système métrique, ce qui n'est pas le cas pour d'autres pays comme l'Angleterre :

10. Nous utilisons le terme de didactique dans son sens le plus large, autrement dit qui a trait à l'enseignement, mais nous verrons qu'en fait à travers un discours "pédagogue", le formateur cherche une légitimation par rapport à une sphère savante, qui sera soit la sphère des didacticiens, soit la sphère des "scribes" du système de formation. Ici, l'enseignant fait référence de manière implicite à la sphère des didacticiens puisque la séquence a été bâtie avec un "didacticien", ou du moins prétendu tel !

P : les décimaux n'ont été mis en place qu'au XVI^{ème} siècle alors que les rationnels étaient en place dans l'antiquité. Il a fallu d'ailleurs attendre la révolution française qui a imposé le système métrique en France pour que les décimaux puissent être utilisés, parce que c'était lié aussi au système de mesures utilisées. Justement pour vous donner une idée, quand on compte par douzaines, on a encore des traces, vous avez des unités anglaises qui sont faites avec des fractions, pas des décimaux. Ils n'utilisent pas les décimaux parce que leur système traditionnel d'unités n'est pas un système décimal.

Il veut indiquer par là que c'est le concept de rationnel qui est le plus important sur le plan conceptuel, les décimaux n'étant développés que pour leur caractère opératoire notamment en liaison avec le système métrique.

** Le registre métamathématique ¹¹et didactique*

Le discours mathématique, compte tenu du terrain sur lequel les étudiants ont obligé l'enseignant à se placer, ne peut être que de faible niveau. Autrement dit un bon étudiant, ayant quelques connaissances sur les nombres décimaux et rationnels aurait pu sensiblement répondre de la même façon que l'enseignant. Aussi l'enseignant pour réaffirmer sa position spécifique et créer la "distance" correspondante à cette position est naturellement contraint de se placer sur un autre registre que nous pouvons appeler métamathématique ou encore discours de justification des choix faits, à l'aide d'arguments d'ordre mathématique.

P : alors, étant donné le cours, nous, on avait pensé faire les rationnels d'abord et voir les décimaux ensuite. Pourquoi les décimaux peuvent intervenir, parce que chaque fois que l'on a une fraction, on a une approximation décimale de cette fraction. Actuellement, c'est vrai que les décimaux ont pris une grande importance à cause des calculatrices.

Le "on" associe cette fois l'observateur, puisque le travail prévu d'ingénierie devait permettre de traiter les problèmes de densité des décimaux dans les rationnels. Mais à ce moment-là, les problèmes d'approximation ont peu de chances d'être significatifs pour le public visé. Faisant référence aux mathématiques à venir qu'il "était prévu de faire dans le module", l'enseignant reste celui qui a une certaine maîtrise du futur, et, de ce fait, permet de reprendre un certain avantage sur ceux qui ne savent pas encore.

Il s'agit aussi de prendre de la distance par rapport à certains ouvrages de préparation au concours, donc par voie de conséquence par rapport à certaines formes d'enseignement essentiellement basées sur l'apprentissage d'algorithmes, donc péjorées au niveau du "sens" :

11. Nous utilisons le terme de métamathématique ici pour désigner un discours de justification qui va porter sur les mathématiques.

P : je me vois mal faire (...), les opérations sur les fractions, encore que si je regarde certains ouvrages qui se disent vouloir préparer au concours, on voit des calculs de réduction au même dénominateur ou des mises sous forme rationnelle des dénominateurs, c'est-à-dire des connaissances relativement traditionnelles. Je me vois mal par rapport au groupe, faire des activités comme ça. Éventuellement en self-service ¹².

Il s'agit d'un argument à destination d'un public qui, dans la majorité des cas, a été plus ou moins en échec en mathématiques au cours de sa scolarité. L'évocation d'une rupture avec un enseignement dit "traditionnel", et qui correspond dans l'idée du formateur à celui qu'ils ont reçu, doit permettre de recueillir un large accord de principe.

L'argument donné par la suite, porte sur l'utilité de ce qui est fait dans l'optique d'une formation professionnelle.

P : il me semble que cela représente plus d'apport par rapport à ce que vous avez à faire l'année prochaine ou dans deux ans, c'est-à-dire à prendre une classe en charge éventuellement. Il me semblait que cette approche vous donnait plus d'indications justement en tant que futur enseignant.

Le paradoxe apparent, ici, c'est que les étudiants ne peuvent se rendre compte si ce qu'on leur enseigne leur sera utile dans un, voire deux ans. Les seuls critères de référence sont l'enseignement qu'ils ont reçu eux-mêmes quand ils étaient élèves, qui ne renvoie justement pas au type d'apprentissage qui leur est proposé. Ils ne peuvent donc émettre ni objections ni critiques sur ce point-là.

3.2. Une confirmation : la présence dans le discours des formateurs de trois registres différents

Nous allons voir que dans les documents et livres consacrés à la formation déjà évoqués, trois registres de discours "savant" vont aussi se côtoyer, éventuellement s'entrecroiser : le registre historico-mathématique, le registre mathématique "savant" et le registre didactique.

3.2.1. Le registre historico-mathématique

Un premier type de discours est un discours "parallèle", comme nous le propose le livre de Dubois C., Fénichel M., Pauvert M¹³. La première partie notée I commence par

12. Le self-service avait été imaginé pour accompagner la mise en place de l'ingénierie afin de répondre individuellement aux questions que sont susceptibles de se poser les futurs professeurs d'école et donc de limiter d'une certaine manière les pressions de certains étudiants, pressions que nous avons décrites dans le paragraphe précédent. En fait le self, organisé en marge de l'institution, ne peut changer de manière significative le jeu que mènent les différents acteurs au sein d'un groupe de formation professionnelle.

13. Dubois et al., pp. 65-72

"Aperçu historique et généralités" composée de trois sous-paragraphes :

1. L'idée de fractions de l'unité dans trois civilisations anciennes
2. D'une numération décimale positionnelle aux nombres décimaux
3. Pourquoi tant d'obstacles pour les décimaux ?

L'idée développée par les auteurs est résumée par une phrase:

«On ne peut concevoir les décimaux sans numération décimale de position avec le zéro, et sans reconnaître aux rationnels la qualité de nombre.»

Ainsi une partie importante du texte est consacrée aux différents systèmes d'écritures renvoyant en cela à la première partie du livre où de longs développements ont permis d'examiner les différents types de numération.

La justification donnée apparaît en fin de paragraphe :

«Le rapide rappel historique précédent montre la lente gestation d'une découverte et les courants de différente nature qui concourent à l'émergence d'une notion. mais l'étudiant futur enseignant est dans une tout autre situation. Le système de position décimale lui est familier, ses liens avec le système métrique sont pour lui quasi-automatiques (...). Par contre, il n'est pas toujours au clair sur les caractéristiques des différents ensembles de nombres et sur les relations d'inclusion entre ces ensembles.»

Autrement dit le discours historique va servir à montrer qu'il faut savoir quelques mathématiques d'une part, et d'autre part va servir à *marquer la distance* entre le formateur et le formé, ce dernier ne sachant pas grand chose sur toutes ces questions. On peut noter que pas moins de treize auteurs¹⁴, renvoyant à des ouvrages que ne liront sans doute jamais les étudiants, sont cités en notes de bas de pages en moins de quatre pages, alors que peu de notes sont mentionnées dans les autres parties.

De la même façon, J. Briand et G. Vinrich, dans un document déjà cité¹⁵, donnent une justification de l'enseignement proposé à l'aide de deux citations dont l'une semble minimale, celle de Brossard (cahier 18, IREM de Bordeaux):

«Il y a un rapport à établir entre les processus historiques de mathématisation par lesquels les hommes ont construit des modèles pour rendre intelligibles tels aspects du réel, et les processus de mathématisation que l'on s'efforce de susciter chez l'enfant pour que ce dernier s'approprie de manière active les connaissances mathématiques.»

Suite à cette déclaration d'intention, le texte met en avant des éléments épistémologiques sur le développement des notions de fractions et de décimaux, à savoir "les fractions et les irrationnels, révélateurs de deux âges des mathématiques",

14. dont Al-Uqlidisi, Al-Kasi, Rudolph, Viete, Stevin, Dedekind, Kantor, etc.

15. COPIRELEM, p.10

avec le traditionnel exemple de $\sqrt{2}$, la construction des décimaux et les débuts du système métrique en France.

3.2.2. Le registre mathématique "savant"

A côté du registre sur les écritures, que nous avons analysé plus haut et dont nous avons analysé la fonctionnalité, va se développer dans les livres que nous avons examinés un registre de discours "savant", dont nous précisons le contenu et la fonctionnalité. Nous ne l'observons pas de manière aussi systématique dans les articles dont l'ambition est moindre et le contenu souvent plus "pointu".

a) Les ensembles structurés et emboîtés

Examinons, pour commencer, le cours du CNED, tout à fait caractéristique de ce point de vue. Dans le chapitre 2 figure un paragraphe 12¹⁶ "les différents ensembles de nombres", lui-même composé de trois sous-paragraphes :

121 point de vue des ensembles,
122 point de vue de l'algèbre,
123 point de vue de l'analyse.

Dans le paragraphe 121, ce sont les critères de reconnaissance des écritures qui sont évoqués à nouveau : ce point-là va donner lieu à plusieurs exercices dits d'entraînement, dont certains, d'après les auteurs, ne peuvent absolument pas être évités. Le paragraphe 122 va particulièrement nous intéresser. On y apprend (c'est encadré dans le texte) successivement que:

«On dit que $(Z, +, \leq)$ a une structure de groupe abélien ordonné et que $(Z, +, \leq)$ a une structure d'anneau ordonné commutatif (commutativité de \times) et unitaire (1 est neutre pour la multiplication).

On dit que $(Q, +, \times, \leq)$ est un corps commutatif totalement ordonné.

$(R, +, \times, <)$ est aussi un corps commutatif totalement ordonné, de plus toute écriture de la forme $x = y^n$ où $x \in R^+$ et $y \in R^+$ et $n \in N$ où x se réécrit de façon unique en $y = \sqrt[n]{x}$.

L'ensemble $(C, +, \times, <)$ des nombres complexes est un corps commutatif, non totalement ordonné...»

Il y a là brusquement un changement de niveau dans le discours et on peut d'ailleurs constater qu'aucun exercice n'est proposé sur ce paragraphe. Il en est de même de la notion abordée dans le paragraphe suivant, dont nous allons trouver trace dans tous les livres.

16. Cours du CNED, pp. 36-38.

b) la densité de certains ensembles

Dans le même document, quelques phrases sibyllines nous annoncent que N et Z sont des ensembles discrets, D et Q des ensembles infinis *denses* et que dans Q , il y a des "trous", les irrationnels. Le style ici est du type: on peut toujours trouver..., on montre dans Q ... Notons que le terme "dense" est ici utilisé *tout seul*: on peut penser que les auteurs se réfèrent, sans le dire, au fait que l'ordre dans les décimaux et les rationnels est un *ordre dense* en s'appuyant sur la propriété qu'entre deux décimaux, ou entre deux rationnels, on peut toujours en intercaler un autre. Mais la signification, dans l'état d'imprécision du texte, risque d'être celle du langage courant, à savoir qu'il y en a beaucoup et qu'ils sont "rapprochés"!

On trouve la même chose dans le cours de M. Frémin¹⁷

« N et Z sont discrets.

D et Q sont denses mais pas complets.

R est complet: c'est le seul dans lequel deux suites, (l'une minorante, l'autre majorante) dont l'écart tend vers zéro "attrapent" à tout coup un nombre.»

On y trouve l'expression de " D et Q denses", agrémentée du terme "complets", ce dernier terme étant explicité dans une phrase qui laissera perplexe plus d'un étudiant, puisque les suites n'ont jamais été abordées dans une autre partie du cours.

«L'ensemble des décimaux est dense dans l'ensemble des réels» affirment par contre les trois auteurs de "Se former pour enseigner"¹⁸ et ils ajoutent :

«Il est hors de question de demander une justification mathématique aux étudiants. Mais on peut leur faire constater qu'entre deux réels quelconques qu'ils choisissent, ils trouvent toujours un décimal.»

Mais ce qu'il vont proposer, c'est qu'entre deux décimaux, il y a toujours un décimal : on peut penser que les auteurs ont plutôt en tête le fait qu'il s'agit d'un ordre dense!

Les imprécisions, voire inexactitudes du texte, montrent bien que pour les auteurs, cette partie n'est pas très importante : elle ne s'adresse pas manifestement à la sphère savante, sinon une attention beaucoup plus grande aurait été apportée à la rédaction de cette partie, mais participe au fait que l'enseignant doit mener un discours assez court, de type savant, dont la fonction principale est de marquer la différence de position du formateur par rapport au formé.

17. COPIRELEM, p.18.

18. Ouvrage cité p.75.

3.2.3. Le registre didactique.

Les livres consacrés à la formation des futurs professeurs des écoles font presque tous de manière plus ou moins implicite, référence à des savoirs de nature didactique. Ainsi chacun des quatre tomes de "Se former pour enseigner les mathématiques" commence par six pages, identiques pour chacun des volumes, intitulées "À propos de quelques expressions concernant la didactique des mathématiques utilisées dans cet ouvrage". Les auteurs y abordent successivement les notions de situation didactique, situation adidactique, contrat didactique, variables didactiques, dialectique outil-objet, champ conceptuel, jeu de cadres, obstacle, transposition didactique.

De la même façon, dans le cours du CNED, au chapitre 9¹⁹, intitulé "les situations d'apprentissages", le paragraphe 2 traite du "savoir scientifique, savoir à enseigner, savoir enseigné, ou la transposition didactique" en une page et demie. Dans le paragraphe 4, un sous-paragraphe 42 "Comment construire des situations didactiques" aborde en cinq pages les situations adidactiques, les variables didactiques de la situation problème, une typologie des situations didactiques.

Dans un article²⁰ consacré au thème "Quelle didactique en formation des maîtres?", D. Butlen, ferme partisan de l'introduction explicite de contenus didactiques signale, après avoir examiné l'évolution des contenus d'enseignement de certains PEN²¹:

«Ainsi la didactique ne sert plus seulement d'idéologie à ces PEN, ils ressentent la nécessité de l'enseigner. Il leur apparaît nécessaire d'explicitier leurs choix, de présenter les outils qui leur permettent d'une part d'analyser certains phénomènes d'enseignement et d'autre part de déterminer les lignes directrices d'une formation qui leur paraît plus cohérente (même si ces dernières ne sont pas pour autant complètement explicitées).»

Puis il pose tout de suite après la question:

«Il est toutefois nécessaire d'analyser plus précisément les causes de cette évolution et notamment de répondre à cette question: n'est-ce pas le résultat d'une volonté de légitimisation de ces formateurs, par ailleurs soumis à un changement de statut et aux éventuels inconvénients pouvant accompagner ce genre de bouleversements?»

Ici D. Butlen parle donc de légitimisation; il s'agit sans doute dans son esprit d'une volonté de légitimisation en direction de la société, puisqu'il parle de changement de statut des formateurs, mais la suite de l'article montre que ce n'est pas pour cette raison que certains formateurs introduisent des savoirs didactiques. D'ailleurs la polémique

19. Ouvrage cité, pp.171-188.

20. COPIRELEM, pp179-195

21. Professeurs d'Ecole Normale.

autour de cette introduction ²², montre que ce n'est pas de ce côté-là que les formateurs peuvent actuellement recevoir une quelconque légitimité . Plus éclairantes sont les phrases qui suivent:

«(...) En fait on constate, chez une grande partie d'entre nous, la recherche de moyens pour diversifier notre intervention, pour l'enrichir, pour la renouveler afin de répondre aux attentes des formés.(...) Nous faisons l'hypothèse qu'il (un enseignement de didactique) répond de manière relativement efficace, à des besoins ressentis par les formés.»

Le terme de besoin n'est pas précisé dans le corps de l'article, mais on voit nettement que c'est en direction des formés qu'est utilisé le registre didactique qui permet, en disposant de cadres théoriques, de justifier des analyses faites par les formateurs.

Il est tout à fait symptomatique de lire, quelques pages plus loin²³, à la suite d'un débat entre des formateurs ayant participé à un stage national, les notions didactiques pouvant être introduites en formation grâce à un large accord entre les différents participants :

«Les points faisant l'unanimité des participants sont les suivants:

- dégager une classification de procédures d'élèves,
- dégager une classification et une hiérarchie d'erreurs d'élèves (notion d'obstacle en particulier),
- reconnaître les variables d'une situation et, parmi celles-ci, les variables didactiques,
- amorcer une analyse a priori,
- identifier des cadres.»

On voit que cet accord se fait essentiellement sur des termes qui peuvent être interprétés de manière très différente.

Les procédures et erreurs sont des expressions faisant largement partie maintenant du langage courant utilisé à l'école élémentaire. On peut dire que le terme d' "erreurs" a largement envahi le discours à tous les niveaux du Ministère de l'éducation nationale. Il n'y a qu'à se référer aux différents textes concernant les évaluations qui ont été faites de manière institutionnelle ces dernières années. Les notions de variable et particulièrement de variable didactique peuvent, elle aussi, être interprétées de manière différente, d'autant plus qu'elles ne sont pas reliées à la notion de situation adidactique, ni à celle de milieu qui sont pourtant partie constitutive de la théorie des situations de G. Brousseau.

L'analyse a priori est souvent rapidement assimilée à l'analyse préalable que font les enseignants lorsqu'ils préparent leur cours.

22. Comme l'ont mise en évidence les débats parfois très violents de ces dernières années jusqu'au niveau le plus élevé au Ministère de l'éducation nationale!

23. Ibid. p.193

Enfin identifier les cadres signifie sans doute simplement reconnaître si l'on est dans un cadre géométrique, numérique, algébrique ou autre? Cette identification est, elle aussi, séparée du jeu de cadres, qui est un élément important de la thèse avancée par R. Douady.

Nous voyons ainsi que le registre didactique va donc bien être un moyen utilisé par le formateur pour définir sa position de formateur par rapport au formé, en lui indiquant que les questions que se pose celui-ci peuvent se replacer dans des cadres théoriques "savants".

4. CONCLUSION

Une grande partie de la négociation entre formateurs et formés prend appui sur la "quête du sens". C'est une des déterminations fortes que nous avons mises en évidence précédemment qui contraint l'étudiant et le formateur, mais leur ouvre aussi un espace de liberté.

Le fait que le "sens" soit polymorphe, et rattachable aux deux placements sémantique et syntaxique permet aux différents acteurs de négocier. L'analyse d'un épisode nous a montré des partenaires mettant sur le devant de la scène des justifications différentes à propos d'une technique utilisée à l'école primaire. Cela se traduit par un phénomène, que nous avons appelé négociation à la hausse, permettant aux différentes parties de trouver un compromis acceptable au travers de justifications différentes. De même, nous avons pu constater, dans le chapitre précédent, que dans certains cas, le formateur, pour éviter des blocages et emporter l'adhésion des formés, poussait les étudiants dans des placements différents. Par exemple, dans la deuxième partie de la situation "Automates" dans laquelle les étudiants entrent avec réticence, il interprète en terme de relais une règle d'addition des sauts de deux automates en se replaçant dans le contexte de la situation. Inversement, il va auprès de certains groupes "contestataires", s'appuyer sur l'addition des fractions pour permettre à certains formés d'utiliser des savoirs anciens et relancer leur intérêt pour l'activité proposée.

Mais la négociation peut devenir explicite, se transformer en revendication autour de l'objet de savoir en jeu. Au cours d'un épisode significatif, le projet de l'enseignant est tenu en échec au moins momentanément, malgré l'appui du dispositif²⁴ initialement prévu et la présence d'un observateur, qui "contraignent" le professeur à essayer de tenir

24. Dispositif qui avait demandé entre l'observateur et l'enseignant un travail relativement long de préparation et qui rend l'enseignant plus "sûr" de la validité de son enseignement (bien que ce soit la première fois qu'il soit amené à le faire).

ce qui a été préalablement décidé. La pression venant des étudiants est progressivement suffisamment forte pour obliger l'enseignant à se placer sur la forme de savoir souhaitée par eux et entraîner une négociation à la baisse. Le "dialogue" qui s'instaure montre que les étudiants ne souhaitent pas une théorie qui les éloigne trop de leurs connaissances anciennes, mais quelques justifications limitées à leur propos. Le formateur, de part sa culture d'enseignant, dispose de divers registres, les registres historico-mathématique, métamathématique et didactique. Il les utilise pour disposer d'arguments d'autorité afin de trouver un terrain d'entente avec les formés. Il maintient ainsi la distance entre lui et les formés et garde une maîtrise au sein de l'institution.

De la même façon, à propos du phénomène général d'obsolescence des situations, déjà repéré par G. Brousseau et que nous avons retrouvé dans le cadre de la formation, les étudiants indiquent de manière explicite leur désapprobation quand l'activité leur paraît trop longue. Le formateur, déjà contraint par le temps très court de formation, ne peut se permettre de faire durer trop longtemps une situation donnée sous peine d'une revendication très forte des formés.

Ces remarques nous invitent à examiner le jeu entre le professeur et les étudiants sous l'angle du "pouvoir" dont disposent les différents protagonistes. Dans l'analyse systémique que nous faisons de l'institution de formation, nous rejoignons les préoccupations de Crozier et Friedberg (1971) qui, s'intéressant aux "organisations" et en particulier aux "frontières organisationnelles" entre une organisation et son environnement, affirment que :

«(...) on ne pouvait comprendre la stratégie d'un acteur au sein d'une organisation qu'en la replaçant dans l'ensemble des jeux auxquels il participait simultanément, en identifiant, d'autre part, la maîtrise des relations avec des segments de l'environnement comme une source de pouvoir à l'intérieur d'une organisation (...) » (p. 131)

Nous employons le terme de pouvoir dans le sens de Crozier et Friedberg pour lesquels il est «une relation, non un attribut des acteurs.» (p. 65). Le pouvoir est «une relation d'échange, donc réciproque, mais où les termes sont plus favorables à l'une des parties en présence. » (p. 69)

Nous avons déjà souligné qu'il y avait une relation de dépendance institutionnelle d'un institut de formation des maîtres par rapport à l'école, en ce sens que l'existence de celui-ci est subordonnée à l'existence de celle-là. De ce fait, la nature et la fonction des savoirs à l'école pèsent sur la nature et la fonction des savoirs au sein des IUFM. La position de futur enseignant permet aux étudiants d'être les canaux par lesquels se font

ces transactions, ce qui leur permet de renforcer leur pouvoir en tant que formés au sein de l'institution de formation.

La forte légitimité culturelle de l'objet "décimaux" dans notre société a entraîné sa forte pertinence culturelle²⁵ dans l'institution école primaire, c'est-à-dire que l'objet "décimaux" apparaît fonctionnel pour spécifier la culture du primaire. Les étudiants qui peuvent ainsi apparaître comme les garants de la culture du primaire, exercent, dans le système de formation, une pression pour travailler essentiellement sur les décimaux. Cette analyse est largement confortée par l'étude de documents disponibles actuellement, destinés à la formation des futurs enseignants. Les différents caractères que nous avons mis en évidence, la parcellisation des savoirs, l'intérêt presque exclusif apporté aux décimaux, notamment aux écritures de ceux-ci, montrent le poids des déterminations de l'école élémentaire sur le système de formation.

Inversement la transposition didactique qui s'effectue vers l'institution de formation par l'intermédiaire des traités conditionne le fonctionnement des savoirs. Contrairement aux décimaux, les rationnels ont une forte légitimité épistémologique²⁶ dans l'institution savante. L'analyse du "texte du savoir" du formateur nous a permis de montrer que les objets de savoir présents au collège sont déterminants pour établir des compromis entre les propositions du concepteur de l'ingénierie et les revendications des formés.

25. Nous reprenons la terminologie proposée par M. Bosch et G. Nim au cours des travaux dirigés de la VI^{ème} École d'été de Didactique des Mathématiques (1991), Plesin-les-grèves : L'institution dans la culture, légitimités et pertinences.

26. L'objet de savoir "rationnel" appartient au savoir savant et est reconnu en tant que tel par l'institution Ip productrice de savoirs. Cela lui donne, vis-à-vis de l'institution de formation, le statut d'objet incontournable.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les propos de différents acteurs de la formation des enseignants du premier degré manifestent la difficulté à faire vivre un enseignement de mathématiques. Les diverses stratégies des formateurs peuvent s'analyser comme un compromis entre les attentes immédiates des formés, dont les besoins en mathématiques sont peu délimités, peu stables, et la satisfaction de besoins en mathématiques, que les formateurs chargés d'un enseignement effectif, ressentent comme nécessaires pour pouvoir enseigner à l'école primaire.

Notre projet a été d'étudier les déterminations qui règlent le fonctionnement d'un système didactique de formation quand l'enjeu est un objet de savoir mathématique "crucial", c'est-à-dire à la fois incontournable et source de difficultés. Nous avons, pour cela, adopté le point de vue qui consiste à considérer l'enseignant du primaire comme un mathématicien d'école et le formateur comme un mathématicien d'IUFM, responsables chacun du devenir des mathématiques au sein des institutions auxquelles ils sont assujettis. Nous avons choisi comme enjeu didactique les systèmes de nombres, complexe objectal "crucial", où figurent des objets emblématiques comme "décimaux", "fractions", "rationnels", "réels". Ce choix a été fait en raison des problèmes spécifiques posés par l'enseignement de ces notions, problèmes récurrents signalés par les formateurs et les chercheurs depuis de nombreuses années. Ceci nous a été confirmé par un questionnaire (chapitre B4) donné à l'entrée de l'IUFM.

Nous avons postulé que la gestion didactique de cet objet de savoir crucial, par essence difficile, était la mieux à même de nous renseigner sur les déterminations qui contraignent le système didactique. Par les tensions créées au sein de celui-ci, en "grossissant" et en rendant explicite des épisodes significatifs, nous pouvions espérer mettre en relief des phénomènes spécifiques aux institutions de formation.

Pour repérer des déterminations, nous avons alors mené une double étude:

- une étude historique et épistémologique qui nous a permis d'étudier la transposition institutionnelle des savoirs à partir de l'institution de production des savoirs (notée I_p) vers l'institution de formation des enseignants du primaire (notée I_f), mais aussi vers les deux institutions qui sont en interrelation avec celle-ci, l'institution enseignement primaire (I_{pr}) et l'institution collègue (I_c),
- une étude au sein du système didactique lui-même, en élaborant une ingénierie de formation, à vocation phénoménoteknique.

La méthodologie adoptée a consisté à fixer des contraintes de certaines situations adidactiques afin de prévoir a priori un jeu stable des étudiants. L'étude a posteriori, identifiant d'autres jeux stables, nous a permis de montrer que le jeu du formateur avec les jeux des étudiants étaient soumis à des contraintes, nommées déterminations, externes au système didactique. Au cours de cette étude, l'analyse des épisodes identifiés à partir des réactions des formés, la mise en évidence d'un "texte du savoir" du formateur et sa mise en relation avec le "texte du savoir" du concepteur de l'ingénierie, a confirmé des déterminations qui sont apparues soit dans l'analyse historique et épistémologique, soit dans l'analyse des situations considérées a priori comme adidactiques.

L'absence actuelle d'un traité

Les livres ont joué, dès la mise en place d'un système d'enseignement primaire, un rôle important dans le cadre de la formation des enseignants. Nous les avons considérés selon deux points de vue : comme produits d'institutions transpositives et comme institutions de formation des maîtres du primaire.

Cela nous a permis de les hiérarchiser en mettant en évidence le niveau des traités écrits par des personnes proches de la sphère productrice des savoirs et le niveau des manuels écrits par des sujets, appelé scribes, des institutions didactiques que représentent les traités. De ce point de vue, les manuels sont la première institution (au sens de Chevallard) de formation des enseignants.

La nécessité d'avoir des enseignants de plus en plus instruits, a amené les décideurs "politiques" à compléter ce dispositif de formation des enseignants par la création de lieux officiels de formation comme les écoles normales, puis les IUFM, qui ont caché peu à peu le rôle de formation des manuels. Dans ces institutions, des objets de savoir enseignés (résultant d'une transposition didactique) ont le statut implicite de savoirs professionnels au sens où ils seront considérés comme permettant à celui qui les acquiert d'occuper la position d'enseignant d'école primaire. Ces institutions de formation vont apparaître dans un premier temps comme un complément de l'institution manuel, participant ainsi à la normalisation du système du primaire.

L'étude de l'évolution historique des rapports entre les savoirs en jeu dans les institutions I_p , I_f , I_{pr} et I_c , montre comment s'établissent les liens entre les savoirs abordés dans les institutions de formation et ceux du collège.

En élargissant la notion de traité à un ensemble de documents écrits par des personnes proches de l'institution de production du savoir, on constate que les auteurs de manuels du collège, les auteurs de documents de formation pour les écoles normales, les auteurs de livres du maître sont assujettis au même moment à un même traité de référence.

Les différents traités que l'on peut repérer se constituent soit en prolongement d'un traité existant, soit en rupture. Ainsi, nous avons étudié longuement le traité de Bezout basé sur la théorie des fractions, rapports et proportions ainsi que les modifications apportées par le baron Reynaud, mathématicien de moindre renom. Ils ont servi de référence aux scribes à la fois pour découper en tranches le traité, suivant les niveaux d'enseignement du primaire, en particulier pour les écoles normales à partir de leur création progressive en 1810, et en même temps pour réaliser les manuels correspondants. Au cours des années 1930, les articles de H. Lebesgue réunis dans un livre "la mesure des grandeurs" forment un nouveau traité en rupture avec le traité précédent.

Les scribes s'assujettissent au nouveau traité, mais sont aussi assujettis aux manuels existant antérieurement. Ce nouveau traité n'a eu que des effets limités au niveau de l'école primaire et au niveau des écoles normales.

Au niveau du primaire, on assiste simplement à une évolution du découpage des objets de savoir enseignés, tout en gardant globalement les mêmes contenus. On peut ainsi constater que l'évolution est allée dans le sens du rejet des fractions du primaire, au profit des décimaux dont l'étude est rabattue sur celle des entiers et du système métrique.

À la fin des années 1960 apparaît alors un nouveau traité, dans lequel on peut placer les éléments de Bourbaki, qui va jouer un rôle important : celui que l'on peut nommer "mathématique moderne". La notion de fraction est notamment étendue grâce à la construction du corps des fractions d'un anneau intègre. Le traité contient des propositions qui rejoignent le point de vue de Lebesgue d'approcher les réels par des développements décimaux illimités. Il se place ainsi dans la continuité du traité précédent.

Les scribes, auteurs de manuels du collège s'assujettissent alors au traité "mathématiques moderne" et une rupture est créée avec les manuels antérieurs. Il y a ainsi des différences chronologiques entre des ruptures au niveau des traités et des ruptures au niveau des manuels

L'ensemble des documents, manuels du collège, documents de formation, livres du maître, constitue alors un "traité intermédiaire" auquel sont assujettis les auteurs des manuels destinés aux élèves de l'école élémentaire, auteurs en général issus de l'institution-cible.

Nous modélisons ainsi dans notre étude trois strates hiérarchisées de documents, considérées chacune comme Institution de formation pour les sujets de la strate

inférieure: les traités proprement dits, écrits par sujets de I_p , les "traités intermédiaires", et les manuels de l'élève. Les savoirs en jeu à un niveau servent de savoirs justificatifs pour un niveau inférieur. Ainsi les savoirs en jeu dans les manuels du collège, ou dans les documents de formation, ou encore dans les livres du maître, servent de justification pour les savoirs en jeu dans les manuels des élèves de l'école primaire.

Actuellement, le traité "mathématique moderne" ne sert plus de référence ni pour les auteurs de manuels du collège, ni pour les formateurs dans les IUFM. L'analyse du "traité intermédiaire" met en lumière un texte du savoir disparate, contenant des fragments de grands traités antérieurs. Ainsi par exemple, grâce à l'étude du système didactique lui-même, notre analyse a permis de rattacher certains éléments du discours du formateur à propos des systèmes de nombres à un "texte du savoir hypothétique" (Chapitre C4) reprenant des éléments d'un traité ancien, celui de J. Drach écrit en 1895. Ce "texte du savoir", dont nous avons aussi retrouvé des traces dans des documents de formation, peut être considéré actuellement comme représentatif des savoirs en jeu au collège.

De nos jours, l'absence d'un nouveau traité articulé avec une théorie sur les interrelations entre les systèmes de nombres, qui remplacerait le traité "mathématique moderne", ne permet pas aux formateurs d'avoir une légitimité qu'ils tireraient de son existence. C'est pourquoi, à l'intérieur du système didactique, ils sont obligés de jouer sur d'autres registres comme les registres historico-mathématique, métamathématique et didactique. Ces différents registres dont nous avons observé l'utilisation effective, suffisent à l'heure actuelle à créer la distance nécessaire entre formés et formateurs : ils légitiment la position des formateurs et leur assurent la possibilité de disposer d'un pouvoir (au sens de Crozier et Friedberg) au sein de l'institution de formation. Ils leur permettent d'arguments d'autorité à propos des ensembles de nombres, leur permettant de couper court à des développements de nature théorique. Dans l'intimité du système didactique, en l'absence d'un traité actualisé, ces développements théoriques trop élaborés apparaissent aux différents acteurs (étudiants comme formateurs) comme non légitimes et non pertinents.

On peut noter que l'évolution récente des manuels tend à faire disparaître tout développement mathématique dans les livres du maître, tel que celui que nous avons relevé par exemple dans l'édition 1980 de la collection "math et calcul", au profit d'un texte ne comportant que des informations "didactiques". Nous tenons ce phénomène comme un indice supplémentaire venant étayer ce que nous venons de dire précédemment.

Le poids des savoirs du primaire

Les déterminations pesant sur l'école primaire créent des contraintes sur le système didactique de formation. Même si les décimaux, objet d'enseignement important au cours moyen, sont actuellement enseignés avec la volonté d'introduire de nouveaux nombres, ils continuent à être manipulés comme des entiers en restant très liés aux systèmes de mesure, en particulier au système métrique. Ils sont le produit d'un processus de transposition institutionnel (chapitre B3) qui s'est affirmé au moment où le primaire et le secondaire ont suivi des chemins divergents. Les techniques employées, pour les problèmes d'ordre, de mesures, pour les différents calculs mis en œuvre, relèvent essentiellement de techniques relatives aux entiers. L'analyse de documents de formation que nous avons effectuée (chapitre C1) pour fixer les choix épistémologiques de notre ingénierie de formation a montré le poids des savoirs du primaire dans les enseignements existants. La forte légitimité culturelle des décimaux dans notre société a entraîné une forte pertinence culturelle de ces derniers dans l'institution école primaire. Les différents caractères que nous avons mis en évidence, la parcellisation des savoirs, l'intérêt presque exclusif apporté aux décimaux, en particulier aux écritures de ceux-ci, sont le reflet de déterminations de l'école élémentaire sur le système de formation. Comment ces contraintes externes, l'une provenant de la transposition institutionnelle en direction de l'école primaire, l'autre en direction de l'institution collège, via les institutions traités, contraintes apparemment contradictoires, peuvent-elles cependant permettre à un enseignement de mathématiques de vivre dans un institut de formation ? Ceci est possible grâce à une autre détermination que nous avons mise en évidence.

La quête du sens

Pour créer une ignorance institutionnelle à propos des décimaux et rationnels qui puisse se traduire en terme de besoins mathématiques chez les formés, nous avons construit une ingénierie de formation en transformant l'ingénierie proposée par G. Brousseau. Nous avons étudié les variables didactiques de deux situations fondamentales, l'une concernant la mesure rationnelle par commensuration d'un objet, l'autre la densité de D dans Q . Nous avons ainsi fixé les contraintes théoriques pour que les situations puissent être vécues par les étudiants de manière adidactique (chapitre C1 et chapitre C2), en déterminant a priori un jeu stable. Parmi les différents autres jeux laissés possibles par ces contraintes, l'analyse a posteriori en terme de milieu nous a permis d'identifier au moins un autre jeu stable (chapitre C3). Nous avons modélisé l'entrée dans ces deux jeux stables par deux "placements" des étudiants que nous avons nommés placements sémantique et syntaxique. Ces deux placements sont caractérisés par trois aspects complémentaires : les techniques employées, leur légitimité et la quête du sens. C'est

cette dernière caractérisation, dans la mesure où elle joue un rôle central, qui nous a incité à choisir les dénominations.

Le mot d'ordre de "la quête du sens" est le reflet de la position dominante dans la noosphère qui veut qu'une technique ne peut être enseignée que si on lui donne du sens. Cependant le sens associé à une technique est "traité" d'au moins deux manières distinctes :

- l'une se traduit par une demande de justifications de cette technique, justifications qui peuvent être fournies par une technologie ou une théorie.
- l'autre se réfère à l'activité proprement dite ; le sens est donné par le domaine problématique pour lequel cette technique est valide,

Ces deux placements sont à rapprocher des processus de dévolution et d'institutionnalisation.

Le placement sémantique, dans la mesure où il modélise le fait que le formé élabore une ou des techniques contextualisées, participe au processus de dévolution de la situation. La légitimité de ces techniques est assurée par le fait qu'elles sont identifiables à des techniques de l'institution-cible.

Le placement syntaxique traduit la volonté du formé de rattacher des techniques anciennes au problème proposé en essayant de trouver des justifications à ces techniques. Il correspond à l'entrée du formé dans un processus d'institutionnalisation, lui permettant de disposer d'une technologie qui tient lieu de théorie.

La quête du sens est ainsi un enjeu professionnel dans la situation de formation, enjeu autour duquel vont se rattacher une constellation d'objets de savoir, non étiquetés dans l'institution-cible, par exemple les stratégies envisageables pour la classe de problèmes liés à la mesure rationnelle d'un objet. Ils constituent alors pour les formés des objets de savoir servant à enseigner.

La détermination révélée par cette quête du sens contraint les divers protagonistes, mais leur ouvre aussi un espace de liberté, leur permettant de négocier.

- Dans certains cas, il s'agit d'une négociation "à la hausse", entre les étudiants eux-mêmes ou entre le formateur et les étudiants.

Dans des groupes, à des changements de placements correspondent des apprentissages institutionnellement non visibles. Par exemple, la technique du produit en croix, utilisée par des étudiants dans un placement syntaxique, est ainsi repensée, par confrontation avec des étudiants dans un placement sémantique, pour être mise en relation avec une fonction linéaire.

Ces deux placements sont utilisés par le formateur pour négocier et éviter des blocages : retour au contexte si la “théorie” sous-tendant une technique employée paraît trop difficile aux formés, passage à une justification de technique si les étudiants n’arrivent pas à trouver de solutions dans le contexte proposé.

La négociation à la hausse intervient aussi quand les étudiants recherchent une justification à une technique qu’ils ont employée (les étudiants sont alors dans un placement syntaxique : chapitre C4). Grâce aux ambiguïtés sur les différentes justifications qui peuvent être apportées par les uns et les autres, le dialogue peut s’établir et des compromis s’installer sur le “sens” que l’on peut donner à la technique initiale.

• Dans d’autres cas, il s’agit d’une négociation “à la baisse”.

Le placement d’équilibre que tendent à occuper les étudiants est le placement syntaxique dans la mesure où ils leur permet de retrouver des savoirs anciens. Cependant, une théorie rudimentaire, souvent sous la forme d’une autre technique, les satisfait dans la mesure où elle apporte des justifications à ce qu’ils appellent des “automatismes”.

Ainsi, les étudiants offrent une forte résistance à l’élaboration d’une théorie unificatrice, mettant l’accent sur les extensions successives des ensembles de nombres et leurs interrelations et permettant de donner une cohérence à un ensemble de techniques éparpillées en les reliant les unes aux autres. Cette théorie s’éloigne trop de leurs connaissances anciennes. Ils obligent alors le formateur à négocier à la baisse. Nous pouvons expliquer ce phénomène par l’absence actuelle de traité explicite qui fournirait au formateur la légitimité mathématique suffisante pour faire vivre une ingénierie de formation, lui permettant d’institutionnaliser un texte du savoir cohérent avec ceux en vigueur dans la sphère productrice de savoirs.

Le jeu du formateur, fortement déterminé par les savoirs en jeu au collège, détermine le jeu des formés quand ils occupent les différents placements envisagés. En retour, le jeu des formés pèse sur le formateur pour qu’il reste garant d’un texte du savoir qui ne soit pas trop éloigné de celui qu’ils ont eu l’occasion de fréquenter au cours de leurs études antérieures.

En l’absence d’un traité qui, à l’heure actuelle fonderait le lien culturel, social, épistémologique entre les diverses institutions, notamment l’institution IUFM et l’école primaire, le texte du savoir du formateur va donc représenter un compromis acceptable entre le projet du concepteur et la pression des étudiants. Par exemple, la notion de rationnel comme quotient, que nous avons identifié comme rapport institutionnel à ce

savoir au collège, va agir comme une contrainte sur la volonté de construction des rationnels comme classe d'équivalence.

Ce travail est une tentative pour poser et élucider le problème de la constitution d'un fragment de texte de savoir à propos des systèmes de nombres, robuste, compatible entre plusieurs institutions soumises à des exigences épistémologiques et des contraintes différentes.

Des questions restent ouvertes après l'étude que nous avons faite.

L'existence de deux placements sémantique et syntaxique ont été repérés dans le cadre d'une ingénierie de formation centrée sur les systèmes de nombres, construite à partir d'un ingénierie à destination du primaire. Pourrait-on utiliser cette modélisation, en la complétant éventuellement à d'autres domaines en s'appuyant par exemple sur d'autres ingénieries faisant intervenir d'autres objets de savoir?

L'absence d'un traité actualisé à propos des systèmes de nombres représente une détermination forte sur les institutions de formation. Pourquoi cet "arrêt" dans la transposition didactique, pour reprendre l'expression de T. Assude?

La nécessité de disposer d'un nouveau traité qui "coiffe" à la fois le collège et l'Institution de formation des professeurs des écoles nous amène à nous demander quels pourraient en être les contours. Le "texte du savoir" de Brousseau, qui nous a servi pour élaborer notre ingénierie (Chapitre C1), pourrait-il être un élément de ce traité actuellement absent ?

Nous savons le rôle que jouent les manuels dans la pratique quotidienne des enseignants. Nous les avons considérés comme institutions de formation. Or nous ne savons encore que très peu de choses sur leur fonction à l'heure actuelle. C'est donc un champ d'investigation qui reste largement ouvert à l'heure actuelle.

Y retrouvons-nous les mêmes déterminations que nous avons repérées dans les institutions de formation officielles ?

Peut-on notamment identifier, comme nous l'avons montré pour une institution de formation "officielle", des placements possibles distincts pour un enseignant qui s'assujettit à un manuel, notamment un placement syntaxique? Il semble en effet que le placement sémantique est actuellement privilégié par le centrage sur l'activité des élèves.

Bibliographie

Bibliographie

- APMEP (ouvrage collectif), (1986), Aides pédagogiques pour le cycle moyen, Tome 2, Nombres décimaux, *Elem-math VIII, Publication de l'APMEP*, n°61.
- ARSAC G., (1975), Nombres algébriques et nombres transcendants, *Revue de l'APMEP*, n°301.
- ARSAC G., (1989), *La transposition didactique en mathématiques, en physique, en biologie*, Irem de Lyon.
- ARTIGUE M., (1991), Épistémologie et didactique, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol.10.2.3, p. 270*, La pensée sauvage, Grenoble.
- ASSUDE T., (1992), *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique: Ecologie de l'objet "Racine carrée" et analyse du curriculum*. Thèse. Université J Fourier. Grenoble.
- BANCEL D. (1989), *Créer une nouvelle dynamique de la formation des maîtres*, rapport au ministre d'état, Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports
- BERTRANDIAS F. et JP., (1990), *Mathématiques pour les sciences de la nature et de la vie*, PUG.
- BESSOT A., (1993), *Panorama des cadres théoriques de la didactique des mathématiques en France*. Séminaire du CIRADE Connaissance, Représentation et Apprentissage, Publication UQAM, Montréal.
- BESSOT A., LE THI HOAI AN, (1994), Une étude du contrat didactique à propos de la racine carrée, *Petit x*, IREM de Grenoble.
- BESSOT A., EBERHARD M., (à paraître). Le problème de la pertinence des savoirs mathématiques pour la formation aux métiers du bâtiment, in Arsac G. et Al. (éds) *Différents types de savoirs et leur articulation*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- BEZOUT, (1764), *Traité d'arithmétique à l'usage des gardes du pavillon et de la marine, Éléments d'arithmétique*, Paris.
- BOREL et DRACH J., (1895), *Introduction à la théorie des nombres et à l'Algèbre supérieure*, librairie J. Gibert, Paris. J.
- BOSCH M., (1993), Les instruments sémiotiques dans l'activité mathématique, *Colloque des vingt ans de didactique*, Paris.
- BOURBAKI N., (1971), *Éléments de mathématiques, Topologie générale*, Hermann.
- BROUSSEAU G., (1980), Problèmes de l'enseignement des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol.1.1, 1980*, La pensée sauvage, Grenoble.
- BROUSSEAU G., (1981), Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol.2.1, 1981*, La pensée sauvage, Grenoble.
- BROUSSEAU G., (1983), Obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol.4.2*, La pensée sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G., (1986a), La relation didactique: le milieu, *IV ème école d'été de didactique des mathématiques*, IREM de Paris VII.

BROUSSEAU G., (1986b), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol.7.2*, La pensée sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. et BROUSSEAU N., (1987a), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Compte-rendus d'observations de situations et processus didactique à l'école Michelet de Talence, IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU G., (1987b), Représentations et didactique du sens de la division, in *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Actes du colloque de Sèvres*.

BROUSSEAU G., (1989a), Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques, in *Constructions des savoirs, Obstacles et conflits, Actes du colloque du CIRADE*, Ed. arc inc., Ottawa.

BROUSSEAU G., (1989b), Le contrat didactique: Le milieu, *Recherches en didactiques des mathématiques, Vol 9.3*, La pensée sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. et CENTENO J., (1992), Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en didactiques des mathématiques, Vol 11/2.3*, La pensée sauvage, Grenoble.

BUTLEN D., (1993), Quelle didactique des mathématiques en formation des maîtres, *COPIRELEM, Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques, tome 2*, IREM de Bordeaux.

CARREGA J-C., (1981), Théorie des corps, la règle et le compas, Hermann, 1989.

CHALOTAIS (L.R. DE LA), (1763), *Essai d'éducation nationale et plan d'études pour la jeunesse*.

CHARBONNEAU M., (1853), *L'éducation, Tome III*, Paris.

CHATELET A., (1956), *Arithmétique et Algèbre modernes, Tome II*. Anneaux et corps. Calcul algébrique. Idéaux et divisibilité, Presses universitaires de France.

CHATELET A., BOMPARD M., (1963), *Enseignement de l'arithmétique*, Le calcul au cours moyen, cahiers de pédagogie moderne, Collection Bourrelier, Librairie A. Colin, Paris.

CHEVALLARD Y., (1991), *La transposition didactique*, La pensée sauvage, Grenoble, deuxième édition.

CHEVALLARD Y., et alii, (1985), *Pour introduire à l'ingénierie didactique à composante informatique*, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y., (1988), Enseignement des mathématiques et besoins professionnels, le cas des élèves-instituteurs, *Actes du colloque des PEN*, Irem de Bordeaux.

CHEVALLARD Y. et JULLIEN M., (1989), *Sur l'enseignement des fractions au collège, Ingénierie, recherche, société*, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y., (1989), Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de didactique des Mathématiques et de l'informatique*, LSD-IMAG, Grenoble.

- CHEVALLARD Y., (1992), Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.12.1, pp. 73-111, La pensée sauvage, Grenoble.
- CHOQUET G., (1961), L'enseignement de l'arithmétique à l'école primaire et à l'école secondaire, pp.365-372, *Bulletin de l'APMEP*, n° 215.
- COMBETTE E., (1882), *Cours d'arithmétique à l'usage des aspirants au baccalauréat ès sciences et des candidats aux écoles du gouvernement*, Librairie Germer Baillière et Cie, Paris.
- COMITI C. ET GRENIER D., (1994), L'observation, outil de recherche pour la modélisation de phénomènes didactiques, *Cahiers du séminaire R2I 1993-94*, IUFM de Grenoble.
- COMITI C., GRENIER D., MARGOLINAS C., (1994), Différents niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques liés à ces interactions, *Colloque 11-12 décembre 1994*, Lyon.
- CONDORCET, (1799), *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*, réédité par Art, Culture, Lecture Éditions, Paris.
- CONDORCET (édition posthume 1847), pp. 205-206.
- CONNE F., (1992a), Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.12/2.3, La pensée sauvage, Grenoble.
- CONNE F., (1992b), *Du sens comme enjeu à la formalisation comme stratégie : une démarche caractéristique en didactique des mathématiques*, in Sens des didactiques et didactique du sens, Johannert et Lenoir, Collectif, Éditions du CRP, Suisse.
- COUTET C. (textes réunis par), (1991), *La République et l'école, Une anthologie*, Presses Pochet Agora.
- CRANNEY C. ET PERROT G., (1976), *Pédagogie de l'école élémentaire; mathématiques et apprentissage du calcul (tome 2)*, Delagrave.
- CROZIER M., FRIEDBERG E., (1977), *L'acteur et le système, les contraintes de l'action collective*, collection Points, Éditions du Seuil.
- DHOMBRES J., (1978), *Nombre, mesure et continu, épistémologie et histoire*, Irem de Nantes.
- DIGNEAU J.M., (1989), *Une étude des connaissances sur les nombres à l'entrée de la 2^e*, IREM de Bordeaux.
- DUBOIS C., FÉNICHEL M., PAUVERT M., (1993), *Se former pour enseigner les mathématiques, Tome 3. Numération, décimaux*, Armand Colin.
- COPIRELEM (collectif), (1986), *Nombres décimaux, aides pédagogiques pour le cycle moyen*, publications de l'APMEP.
- DE COMBREROUSSÉ C., (1920), *Cours de mathématiques*, Tome premier, Arithmétique, pp.147-157, Gauthier-villars, Paris

- DELEDICQ A. ET FLUET J., (1982), *Savoir et savoir-faire*, Collection Epistémon, Cedic-Nathan.
- DOUADY R., (1980), *Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire, Recherches en didactique des mathématiques, Vol.1.1, pp. 77-110, 1980, La pensée sauvage, Grenoble.*
- DOUADY R., (1984), *Jeu de cadres et dialectique outil-objet*, Thèse, Université de PARIS VII.
- ENGEL A., (1979), *Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique*, Ed. Cedic.
- ERMEL, (1981), *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle moyen, tome 2*, Sermap-Hatier.
- GAL J., (1931), reproduit dans le *Vade-Mecum pour l'enseignement du calcul de A. Souché*, p.74, 1931, Nathan.
- GAUTHRON V. , (1971), Nombres décimaux, *bulletin de l'APMEP n° 279*.
- GRAMAIN F., (1984), Les nombres transcendants, pp 70-79, *Revue Pour la science*.
- GRÉARD O., (1887), Article "La Chatolais", *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, pp. 1462-1467, édition F.E. Buisson, t.2, Paris, Hachette.
- GRÉARD O., (1887), *Éducation et instruction, Enseignement primaire*, p.82, Paris, Hachette.
- GRISVARD C. et LEONARD F., (1981), Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison des décimaux, *Bulletin de l'APMEP n°327, pp.47-60*.
- GRISVARD C. et LEONARD F., (1983), Résurgence de règles implicites dans la comparaison des décimaux, *Bulletin de l'APMEP n°340, pp.450-459*.
- GUILLEMOTEAU R. et MEYER P., (1960), *L'enseignement du premier degré*, in Encyclopédie pratique de l'éducation en France, pp. 112-114, IPN et SEDE.
- HARLÉ A., (1984), *L'arithmétique des manuels de l'enseignement élémentaire au début du XX^e siècle*, Thèse, Université de PARIS VII.
- HASEMANN Klaus, (1981), On difficulties with fractions, pp. 71-87, *Educational Studies in Mathematics, vol 12*, .
- INRP, (1976), Enquête sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire, tome 2, opinion des maîtres, pp 78-83.
- IZORCHE M. L., (1977), *Les réels en classe de seconde*, Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Université de Bordeaux I.
- JABŒUF F., (1989), *Fractions continues*, Irem de Montpellier.
- JULIA D., (1981), *Les trois couleurs du tableau noir : la révolution*, Belin.
- KITTEL B., (1971), Construction des réels à partir des décimaux, *bulletin de l'APMEP n° 279*.

- KMETY-MARCHETTI A.-M., (1992), *Préparation au concours des professeurs des écoles*. Éditions du choix.
- KUZNIAK A. (1994), *Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*, Thèse, Université de Paris VII.
- KUNTZMANN J., (1976), *Évolution et étude critique des enseignements de mathématiques*, Cedic.
- LEBESGUE H., (1931), *La mesure des grandeurs*, réédité en 1975, ed A. Blanchard.
- MARGOLINAS C., (1985), *Un bilan des connaissances sur les nombres après la classe de 4 e, le nombre dans tous ses états, DEA de didactique*, IREM et Université de Bordeaux 1.
- MARGOLINAS C., (1993a), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, La pensée sauvage, Grenoble.
- MARGOLINAS C., (1993b), La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations, *Actes du séminaire national de DDM, annales 1993-94*, La pensée sauvage, Grenoble.
- MARGOLINAS C., STREINBING H., (1993), Double analyse d'un épisode: cercle épistémologique et structuration du milieu, *Actes du colloque les vingt ans de la didactique des mathématiques*, La pensée sauvage, Grenoble.
- MARGOLINAS C., (1994), Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe, *Actes du séminaire DidTech 1993-94*, LSD-IMAG, Grenoble.
- MARIJON A., PEQUIGNOT A. et SEGALA J.-L. (S.D., C.1915), *Arithmétique (cours complet)*, Librairie Felix Juven, Paris.
- MARIJON A., (1931), Manuel général, reproduit dans le *Vade-Mecum pour l'enseignement du calcul de A. Souché*, Nathan.
- MERCIER A., (1978), *Etude des notion "opérateur" et "machine"*, mémoire de DEA, IREM et Université de Bordeaux I.
- MERCIER A., (1988), Comment enseigner les décimaux, (la division comme révélateur des obstacles dans l'enseignement et l'emploi des décimaux), *Actes université d'été sur la didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire, pp. 141-163*, Irem de Bordeaux.
- MERCIER A., (1992), *L'élève et les contraintes temporelles, un cas en calcul algébrique*, Thèse, Université de Bordeaux I.
- MERCIER A., (1995), La bibliographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol.15.1, 1995*, La pensée sauvage, Grenoble.
- Ministère éducation nationale, (1990), évaluation CM2-6ème de Septembre 1989, pp 35-41, Education et Formations.
- MORIN C., (1971), Construction de l'ensemble R des nombres réels, *bulletin de l'APMEP n° 279*.

NEYRET R., (1994), Le traité et le manuel : Institutions de formation, *Séminaire Didatech 93-94*, LSD2-IMAG, Grenoble.

OVAERT J.L. ET VERLEY J.L., (1983), *analyse vol 1*, collection Epistemon, Cedic - Nathan.

PERRIN-GLORIAN M-J., (1986), Représentations des fractions et des décimaux chez les élèves du CM2 et du collège, *Petit x*, n°10, pp.5-29, IREM de Grenoble.

PERRIN-GLORIAN M-J., (1992), *Aires de surfaces planes et nombres décimaux, Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6^{ème}*, Thèse de doctorat d'état, Paris VII.

PERRIN-GLORIAN M-J., (1993), Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les des classes faibles, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol.13.1.2*, pp. 5-118, La pensée sauvage, Grenoble.

PEZARD M., (1985), *Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves-instituteurs*, Thèse, Université de Paris VII.

PORTUGAIS J., (1992), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants; le cas des erreurs de calcul*, Thèse, Université de Genève.

POCHON L.-O., (1991), *Connaissances mathématiques à l'école élémentaire, Bilan des acquisitions en fin de cinquième et sixième année, fascicule 5*, pp 61-163, IRDP. Editions Peter Lang.

RATSIMBA-RAJOHN H., (1982), Eléments d'étude de deux mesures rationnelles, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol.3.1*, pp. 65-113, 1980, La pensée sauvage, Grenoble.

RAJOSON L. (1988), *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas*, thèse de 3^{ème} cycle, Université d'Aix-marseille II.

RAMBAUD, (1887), Article "France", *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, pp. 1053, édition F.E. Buisson, t.1, Paris, Hachette.

RAPET J.J., (1876), *Cours d'études des écoles primaires*, Paris.

REYNAUD A.A.L., (1832), *Traité d'arithmétique à l'usage des élèves qui se destinent à l'École Polytechnique, à la Marine, à l'École Militaire de Saint-cyr et à l'École Forestière*, Paris.

REYNAUD A.A.L., (1828), Notes sur l'arithmétique p.1, à la suite du livre de Bezout, *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie*, Bachelier, Paris.

ROBINET J., (1986), Les réels : quels modèles en ont les élèves? *Cahier de didactique des mathématiques*, n° 21, IREM, Université de Paris VII.

ROUCHE N., (1992), *Le sens de la mesure*, Didier-Hatier, Bruxelles

ROUCHIER A., (1980), Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs, *Vol 1.2, Recherches en didactique des mathématiques*, La pensée sauvage, Grenoble

ROUCHIER A., (1991), *Étude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et en informatique élémentaires: proportionnalité, structures itérato-récurrentes, institutionnalisation*, Thèse d'état, Université d'Orléans.

ROUMIEU M., (1971), Les nombres réels dans l'enseignement du second degré, *bulletin de l'APMEP* n° 279.

SCHUBRING G., (1984), Essais sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques particulièrement en France et en Prusse, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 5.3 pp. 343-385, La pensée sauvage, Grenoble.

SCHUBRING G., (1988), Un savant des lumières, un livre élémentaire pour la république, in Condorcet, *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*, réédité par Art, Culture, Lecture Éditions, Paris.

STARK H.M., (1970), An introduction to Number Theory, Markham publishing company, Chicago.

SONNET H., (1887), article arithmétique, *D.P.B. II ème partie, tome 1*, pp. 182-184.

STEVIN, (1585), La Disme, Arithmétique, appendice de 10 pages, traduction française de A.GIRARD, (1934), réédition 1980, IREM Paris VII, Paris.

THIRIOUX A., SANCHEZ L., CHAPEAU A., (1977), *Formation initiale et continue pour les enseignants des écoles maternelles et élémentaires*, Collection mathématique contemporaine, Magnard.

Note: D.P.B: Dictionnaire de Pédagogie et d'Instruction Primaire de F. Buisson, éditions de 1880 et 1987, Hachette, Paris.

Table des matières

Partie A

Chapitre A1

Le point de vue des acteurs sur la formation

1. Introduction	9
2. Les besoins exprimés par la société en matière de formation initiale des professeurs d'école	10
2.1. Les orientations à travers les textes officiels.....	10
2.2. Parmi les nouveaux dispositifs : un concours en cours de formation.....	12
2.2.1. Le concours comme variable de commande dans le système éducatif.....	13
2.2.2. La nature du concours, révélateur d'une interrogation sur les contenus disciplinaires	14
3. Les besoins exprimés par les formés	15
3.1. Une expression peu délimitée et peu stable des besoins en mathématiques	16
3.2. Le recours aux "livres" comme réponse aux besoins professionnels.....	18
4. La formation en mathématiques : une spécification difficile	18
4.1. La difficulté de répondre aux besoins des formés.....	19
4.2. Des points de vue divergents sur les contenus disciplinaires	20
4.2.1. Le point de vue d'un instituteur maître-formateur	20
4.2.2. Le point de vue d'un membre de l'enseignement supérieur	21
4.3. Le concours, un révélateur des problèmes rencontrés.....	22
4.3.1. La désignation des contenus	22
4.3.2. La réponse à la demande institutionnelle d'une épreuve professionnelle au concours.....	23
4.4. Les stratégies de formation en mathématiques.....	25
4.4.1. Une diversité de stratégies.....	25
4.4.2. Les stratégies intégrant des savoirs de DDM en question.....	28
4.4.3. Un point commun aux diverses stratégies.....	30
5. Le point de vue adopté dans cette étude	31

Chapitre A2

Cadre de l'étude

1. La rencontre avec l'ignorance.....	33
1.1. L'enseignant du primaire considéré comme mathématicien d'école.....	33
1.2. Les besoins en mathématiques des formés et la rencontre avec l'ignorance.....	34
2. Le choix des objets de savoir et du dispositif.....	35
2.1. Des objets de savoir cruciaux.....	35
2.1.1. Des objets de savoir présents dans l'enseignement élémentaire et dans les instituts de formation.....	36
2.1.2. Des difficultés signalées.....	38
2.2. Le choix du dispositif.....	39
3. Déterminations et contraintes.....	40
3.1. Conditions de fonctionnement des systèmes didactiques.....	40
3.2. Déterminations.....	41
3.2.1. Transposition institutionnelle et déterminations.....	41
3.2.2. Déterminations et assujettissements multiples.....	41
3.3. Contraintes.....	43
3.3.1. Milieu et contraintes pour une situation didactique.....	43
3.3.2. Contraintes et déterminations pour une situation didactique.....	44
4. Plan et organigramme de l'étude.....	45
4.1. Plan.....	45
4.2. Organigramme des différents points étudiés.....	46

Partie B

Chapitre B1

Le manuel, première institution de formation d'enseignants

1. Le point de départ de l'étude.....	49
2. L'importance des traités et des manuels.....	50
2.1. Le rôle historique du livre.....	50
2.2. Différents types de livres.....	52
2.3. Le manuel de l'élève et le livre du maître.....	55
3. Les différentes fonctions des traités et des manuels.....	56
3.1. Les livres scolaires, produits d'institutions transpositives.....	56
3.2. Le traité et le manuel, institutions de formation.....	56
3.2.1. Caractérisation.....	56

3.2.2. Hiérarchie entre les traités et les manuels : les scribes	57
3.3. Des niveaux de transposition didactique	58
3.4. Ce que permet de voir une modélisation du livre scolaire en tant qu'institution de formation	59
3.4.1. La formation sur le tas	59
3.4.2. Le "manuel", institution parallèle de formation, garantie du fonctionnement de l'école publique.....	60
4. L'école normale "fille et mère" de l'école publique.....	61
4.1. L'école normale de l'an III : acquérir de l'instruction	61
4.2. L'école normalisatrice	63
4.3. Le manuel élément normalisateur	63
Conclusion.....	64

Chapitre B2

Du traité aux manuels, le découpage des savoirs

1. L'évolution du traité.....	65
1.1. Le traité de Bezout	65
1.1.1. Le statut du traité de Bezout.....	65
1.1.2. Les savoirs dans le traité de Bezout	66
1.2. Une tentative de modification du traité précédent : l'école normale de l'an III.....	73
1.3. Le travail de transposition au niveau de la "théorie moyenne".....	74
1.4. Le traité de référence.....	78
2. Le découpage du traité.....	78
2.1. Les premières tentatives jusqu'en 1870 : le travail des scribes	78
2.1.1. Les scribes : les inspecteurs.....	78
2.1.2. L'édifice institutionnel	80
2.2. Le découpage des savoirs correspondants dans le primaire.....	81
2.2.1. La notion de cours concentrique.....	81
2.2.2. Les découpages effectués.....	82
2.2.3. Les éléments évacués : l'évolution de la théorie moyenne.....	85
2.3. Les traités et les manuels.....	86
3. L'impact d'un nouveau traité.....	88
3.1. Le traité de Lebesgue	88
3.1.1. Les modifications au niveau du savoir savant.....	88
3.1.2. Les propositions de Lebesgue	88
3.2. Les effets au niveau du découpage des savoirs.....	89
3.2.1. La notion de cours progressif.....	89

3.2.2. Les modifications dans les programmes de 1923 pour le primaire	90
4. Conclusion.....	91

Chapitre B3

Les savoirs de référence dans les écoles normales

1. L'évolution institutionnelle	97
1.1. Les écoles normales et les cours complémentaires dans le second degré	97
1.2. L'unification du second degré, l'évolution des écoles normales vers le supérieur	98
1.3. L'intégration dans le supérieur des institutions de formation.....	99
2. Le travail de la transposition didactique	100
2.1. La période de 1945 à 1970.....	100
2.1.1. Les décimaux	100
2.1.2. Les fractions	101
2.2. L'évolution des savoirs concernant les systèmes de nombres au collège.....	103
2.2.1. La disparition de la notion de rapport de deux nombres	103
2.2.2. La disparition de la technique de l'extraction de la racine carrée.....	103
2.3. Conclusion.....	104
3. L'apparition de nouveaux traités.....	104
3.1. L'état du savoir savant pour les systèmes de nombres décimaux, rationnels et réels	104
3.1.1. La quasi-disparition de l'ensemble des décimaux dans les livres de l'enseignement supérieur.....	105
3.1.2. Les questions d'approximation des nombres réels	106
3.1.3. Q comme cas particulier d'un corps des fractions d'un anneau d'intégrité.....	107
3.2. Les grandes lignes du nouveau traité	109
3.2.1. L'élargissement de la notion de traité	109
3.2.2. Un "premier" ensemble de documents : l'introduction des réels en 1970	110
3.2.3. Un "second" ensemble de documents.....	112
3.3. L'assujettissement du collège aux nouveaux traités.....	112
4. La permanence des savoirs à l'école primaire	113
4.1. La période de 1970 à 1980.....	113

4.2. Les savoirs à l'école primaire depuis 1980	114
4.2.1. Analyse des programmes 1980	114
4.2.2. Les programmes des premières années du collège	116
4.2.3. Examen du manuel "math et calcul"	117
5. L'évolution parallèle du fonctionnement des savoirs au collège et dans les écoles normales.....	119
5.1. La nécessité de travailler les savoirs mathématiques dans les écoles normales.....	119
5.2. Les savoirs de référence après 1970 : analyse de documents destinés à la formation des maîtres.....	120
5.2.1. Les livres destinés à la formation.....	121
5.2.2. Le livre du maître de la collection : "math et calcul"	123
6. Conclusion.....	124

Chapitre B4

Rapports aux systèmes de nombres à la fin du collège et à l'entrée à l'IUFM

1. Les rapports aux systèmes de nombres au collège	127
1.1. Lien entre les différents ensembles de nombres et leurs écritures.....	129
1.2. Lien entre division, rationnels et décimaux	130
1.3. Lien entre rationnels, réels et décimaux par l'intermédiaire de l'approximation	130
1.4. Rapports entre les D_i : l'ordre dans les décimaux, encadrements et approximation de décimaux par des décimaux	133
2. L'analyse des items, les rapports aux systèmes de nombres pour les étudiants entrant à l'IUFM et pour les élèves de fin de collège	134
2.1. Lien entre les différents systèmes de nombres	135
2.1.1. Lien entre rationnels et décimaux.....	135
2.1.2. Lien entre écriture des nombres décimaux et autres nombres	137
2.1.3. La division comme lien entre rationnel, décimal et écriture décimale.....	139
2.2. Encadrement et comparaison des décimaux.....	141
2.2.1. Les stratégies de comparaison	141
2.2.2. Intercalation d'un décimal entre deux décimaux	143
2.2.3. Nombre d'éléments entre deux décimaux	145
2.2.4. Les problèmes d'encadrement par deux décimaux	146
3. Conclusion.....	148

Partie C

Chapitre C1

Choix pour la mise en place d'une ingénierie

1. Des choix effectués dans des institutions de formation	153
1.1. Les textes du savoir.....	153
1.1.1. Constructions de D comme extensions de N	154
1.1.2. Constructions de Q comme extension de N , D considéré comme restriction de Q	154
1.1.3. Les ensembles D et Q , restrictions de R ensemble préconstruit.....	156
1.1.4. Q et R comme extensions de N , D restriction de Q et de R	158
1.2. La caractéristique actuelle : les systèmes de nombres considérés comme préconstruits	158
1.2.1. Le cours du CNED.....	159
1.2.2. Le livre "Se former pour enseigner les mathématiques"	160
2. Les choix pour une ingénierie de formation	164
2.1. Des choix différents?.....	164
2.2. L'utilisation d'ingénieries existantes pour l'école obligatoire.....	165
2.3. Le choix de l'ingénierie initiale.....	166
2.4. Une situation fondamentale des rationnels.....	167
2.4.1. La formulation générale du problème de la mesure rationnelle....	167
2.4.2. Les contextes utilisés dans les situations de commensuration....	168
2.4.3. Les caractéristiques communes de ces situations	169
2.4.4. Les éléments spécifiques de la situation des automatés	171
2.5. Une situation fondamentale de décimaux	172
2.5.1. Le problème.....	172
2.5.2. Les contextes utilisés.....	173
2.5.3. Les caractéristiques communes des situations	174
2.5.4. Les éléments spécifiques de la situation du tireur d'élite.....	174
3. Conclusion.....	176

Chapitre C2

Analyse a priori de situations adidactiques concernant les nombres rationnels et décimaux

1. Analyse a priori de la première partie de la situation des automates	177
1.1. Formulation du problème	177
1.2. Les variables liées au savoir en jeu.....	178
1.3. Deux sous-problèmes "élémentaires".....	180
1.3.1. Premier sous-problème.....	180
1.3.2. Les stratégies possibles pour résoudre ce sous-problème.....	180
1.3.3. Étude de coût pour les stratégies, domaine de fonctionnement.....	183
1.3.4. Les contraintes provoquées par le choix des valeurs des autres variables.....	184
1.3.5. Une autre classe de sous-problèmes élémentaires.....	185
1.4. Analyse du problème général : choix des variables	187
1.4.1. Mode de détermination d'un automate	187
1.4.2. Les données relatives à un même automate.....	187
1.4.3. Le nombre d'automates.....	189
1.5. Choix des types de problèmes proposés	189
1.5.1. Les problèmes proposés.....	189
1.5.2. Le choix de certaines des valeurs des variables.....	190
1.6. Les variables organisationnelles ou variables de la situation didactique.....	192
1.6.1. Une première phase : mise en place d'une situation d'action.....	192
1.6.2. Une phase de travail de groupe servant comme phase de conclusion du travail précédent	194
1.6.3. Une phase de travail de groupe : situation de formulation.....	194
1.6.4. L'organisation d'un débat	195
2. Analyse a priori de la deuxième partie de la situation des automates	196
2.1. Le Problème	196
2.1.1. L'ensemble des sauts, extension de N	196
2.1.2. Les définitions possibles d'une addition.....	197
2.1.3. Des critères de type mathématique.....	198
2.2. Les variables organisationnelles ou variables de la situation didactique.....	200
2.2.1. Une phase de travail de groupe : situation de formulation.	200

2.2.2. L'organisation d'un débat.....	200
3. Analyse a priori de la situation Tireur d'élite.....	201
3.1. Tir dans une zone limitée.....	201
3.1.1. Le problème.....	201
3.1.2. Les stratégies possibles de résolution du problème.	201
3.1.3. La détermination des conditions de jeu	205
3.2. Tir dans une zone non limitée	206
3.2.1. Rappel du problème proposé.....	206
3.2.2. Les conditions de jeu.....	206
3.2.3. Les tâches des émetteurs : des stratégies possibles.....	207
3.2.4. Les tâches des récepteurs.....	209
3.2.5. Une situation adidactique d'action.....	210
4. Conclusion.....	210

Chapitre C3

Analyse a posteriori des séquences d'enseignement, contraintes et déterminations du jeu de l'étudiant

1. Introduction	211
1.1. Le repérage des déterminations.....	211
1.2. Description de la séquence "les automates"	213
1.2.1. Première partie - Lundi 28 Mars 1994 (séance 2).....	213
1.2.2. Deuxième partie - Mercredi 30 Mars 1994 (séance 3).....	214
1.3. Description de la séquence du tireur d'élite	215
1.3.1. Première partie - Mercredi 6 Avril 1994 (séance 4)	215
1.3.2. Deuxième partie - Lundi 11 Avril 1994 (séance 5)	215
2. La première partie de la séquence des automates : deux placements possibles pour le formé.....	215
2.1. Le révélateur : une différence significative des résultats au cours des activités individuelles.....	215
2.1.1. Les problèmes 1 et 2 de l'activité 1.....	215
2.1.2. L'activité 2	218
2.1.3. La différence entre les deux résultats pour les deux années.....	222
2.2. Deux jeux possibles	223
2.2.1. Un jeu sur les entiers.....	223
2.2.2. Le jeu de la mesure.....	224
2.3. Le phénomène : deux placements possibles pour le formé.....	226
2.3.1. L'identification des deux placements.....	226
2.3.2. Le placement sémantique.....	227

2.3.3. Le placement syntaxique.....	231
3. La séquence du tireur d'élite: analyse en terme de placement	235
3.1. L'activité d'initialisation : tir dans une zone limitée.....	236
3.2. Tir dans une zone non limitée: deux placements possibles.....	237
3.2.1. Des résultats différents pour les deux années	237
3.2.2. Une confirmation de la caractérisation du placement syntaxique.	239
4. Les changements de placements.....	243
4.1. Changement et permanence de placement : analyse des difficultés rencontrées au cours de la deuxième partie de la situation "Automates"	243
4.1.1. Du placement sémantique à celui de syntaxique (année 1992- 93): un passage difficile.....	244
4.1.2. La permanence du placement syntaxique (Année 93-94)	248
4.2. L'oscillation d'un placement à un autre	249
Conclusion : Contraintes et déterminations du jeu de l'étudiant	252

Chapitre C4

Analyse du jeu de l'enseignant dans les séquences d'enseignement, repérage de déterminations

1. la négociation formés / formateur.....	257
1.1. La négociation "à la hausse".....	257
1.1.1. La nature de l'exercice proposé.....	257
1.1.2. Les différentes techniques : analyse a priori.....	259
1.1.3. Hiérarchisation des techniques et technologies	261
1.1.4. Quelques résultats	263
1.1.5. Analyse de la séquence didactique.....	264
1.2. La pression des étudiants sur le formateur.....	270
1.2.1. Le cadre.....	270
1.2.2. Les faits : la pression des étudiants sur l'enseignant	271
2. les séances dites de synthèse : le texte du savoir du formateur et le projet du concepteur de l'ingénierie.....	276
2.1. Le projet du concepteur de l'ingénierie.....	276
2.2. Le texte du savoir du formateur : le poids de la logique des "savoirs" du collègue.....	278
2.2.1. Un épisode révélateur.....	278
2.2.2. Le rationnel considéré comme quotient	279
2.2.3. Le rejet d'un certain type de construction des rationnels comme savoir fondamental pertinent	280

2.2.4. Le gommage de la densité de D dans Q comme savoir fondamental pertinent de la division fournissant un quotient décimal	281
2.2.5. Les exercices de clôture	281
2.3. Le jeu du formateur : un compromis entre diverses contraintes	282
3. Une recherche de légitimité	284
3.1. L'analyse d'un épisode	284
3.2. Une confirmation : la présence dans le discours des formateurs de trois registres différents	286
3.2.1. Le registre historico-mathématique	286
3.2.2. Le registre mathématique "savant"	288
3.2.3. Le registre didactique	290
4. Conclusion	292
Conclusion générale	295
L'absence actuelle d'un traité	296
Le poids des savoirs du primaire	299
La quête du sens	299
Bibliographie	305

Annexes

Annexe A1a : L'évolution de la formation initiale	325
Annexe A1b : Interview d'un maître formateur	329
Annexe A1c : Interview d'un formateur universitaire	337
Annexe B4a : Items concernant la division	347
Annexe B4b : Questionnaire	349
Annexe C3a : Exercices préliminaires	351
Annexe C3b : Comment partager un segment en n segments égaux	353
Annexe C3c : Situation "Les automates"	355
Annexe C3d : Vers de nouveaux nombres	359
Annexe C3e : Le tireur d'élite	361
Annexe C3f : Schéma de structuration du milieu	363
Annexe C3g : Groupe n° 4 (première partie Automates)	365
Annexe C3h : Analyse des autres travaux de groupes (1, 3, 5)	371
Annexe C3i : Groupe n° 2 (première partie Automates)	375
Annexe C3j : Les travaux des binômes dans la situation "Tireur d'élite"	377
Annexe C3k : Travail du binôme E1 / E2	381
Annexe C3l : Entretien étudiant E1 après le "Tireur d'élite"	383
Annexe C3m : Le saut de n'importe quel automate est-il un nombre ?	387
Annexe C3n : Groupe n° 4 (deuxième partie Automates)	389
Annexe C3p : Groupe n° 2 (deuxième partie Automates)	395
Annexe C4a : Chronique de la correction de l'exercice préliminaire	397
Annexe C4b : Chronique de l'intermède	403
Annexe C4c : Construction des rationnels à partir des entiers	407
Annexe C4d : Automates et rationnels: Synthèse conduite par P.	409
Annexe C4e : Synthèse générale conduite par P.	415

Annexes

Annexe A1a

L'évolution de la formation initiale des instituteurs avant la création des IUFM : Quelques grandes étapes

1 L'émergence d'un enseignement professionnel spécifique

Remontons simplement en 1881, date à laquelle, dans pratiquement tous les départements, est installée au moins une école normale d'instituteurs et date à laquelle paraît un arrêté¹ relatif à "l'emploi du temps, à la répartition des matières d'enseignement et aux programmes d'études".

Le terme de formation n'est donc pas utilisé. Seul figure le mot enseignement. Enseignement général et enseignement professionnel y sont confondus. En fait, dans le primaire, l'enseignement général est encore un enseignement professionnel, puisqu'il doit préparer à toutes les professions. En ce sens, ne s'est pas encore dégagé la spécificité de la profession d'instituteurs qui nécessiterait une formation particulière.

Le professeur d'école normale enseigne des contenus disciplinaires, notamment des contenus mathématiques, fixés par les programmes dans les différentes *matières d'enseignement*. et l'élève-maître les apprend. Cet enseignement est jugé suffisant pour entrer dans le métier, où la formation proprement dite au métier se fera largement sur le tas, par intégration à un corps déjà largement amorcé dans le champ clos de l'école normale, dans ce que l'on pourrait appeler une culture du primaire.

Le décret du 4 Août 1905, fixant les nouvelles modalités d'organisation des études, insiste sur certains aspects professionnels, tout en n'utilisant toujours pas le mot de formation, en donnant notamment à la troisième année une fonction particulière.

Après les différents programmes de chacune des matières d'enseignement, un paragraphe spécial intitulé "Éducation professionnelle des élèves-maîtres" indique que si l'éducation professionnelle a commencé indirectement pendant les deux premières années :

«sous l'influence des qualités de savoir, de méthode, d'intelligence pédagogique des professeurs et des bonnes habitudes d'esprit qu'ils avaient su faire acquérir à leurs élèves,»

elle devient directe la troisième année :

- «- par des leçons choisies, préparées et exposées en vue de l'école primaire (...)
- par l'examen critique des méthodes d'enseignement et des moyens d'éducation, examen qui se fait surtout pendant les cours et conférences de pédagogie (...)
- par les exercices pratiques de l'école d'application (...)

Ainsi, dans le tableau de répartition des *matières d'enseignement*, on distingue pour ce qui concerne les mathématiques, une partie *culture générale* nommée, en ce qui concerne les mathématiques, Mathématiques appliquées, et une partie *éducation professionnelle* intitulée Arithmétique, ce qui est significatif de ce qui est considéré comme important du point de vue professionnel.

1. Arrêté du 3 Août 1881 faisant suite au décret du 29 Juillet relatif à l'organisation des Ecoles normales primaires.

Il s'agit donc d'une juxtaposition d'un enseignement de contenus mathématiques² et d'un enseignement professionnel permettant de reproduire les "rites" du métier. Durant les deux premières années, c'est le professeur d'école normale qui sert de modèle. Dans la troisième, ce sont les exercices pratiques qui vont être le prolongement naturel de l'intégration des "gestes" du métier. Pour les leçons "en chambre", il est typique que le législateur, vantant les mérites des "transpositions de leçons à l'usage de l'école primaire" sans les élèves, remarque qu'ainsi :

«le professeur peut corriger sur le champ la leçon faite, au besoin l'interrompre, la refaire; il peut discuter sur le vif les idées choisies, les procédés employés etc...»

C'est en quelque sorte une répétition "in vitro" de ce que fera le futur professionnel quand il aura charge d'élèves. Le terme de transposition est en lui-même révélateur des contenus en jeu : il s'agit des contenus qui ont été abordés dans les enseignements de première et seconde année, justifiant a posteriori de l'intérêt de ceux-ci auprès des élèves-maîtres.

Dans le texte du 18 Septembre 1920, dans son chapitre IV traitant de l'organisation des écoles normales et de l'enseignement prodigué dans celles-ci, le législateur ne parle plus d'éducation professionnelle. On revient pratiquement aux textes de 1881 qui servent de référence aux rédacteurs. Seul est indiqué aux articles 99 et 100 que les élèves-maîtres devront participer pendant chacune des trois années à cinquante demi-journées de classe dans une école élémentaire ou maternelle, et que, pendant la dernière année d'étude, il est institué un exercice hebdomadaire de pédagogie. Le terme de "conférence" utilisé dans le texte antérieur est ici remplacé par le mot moins noble d' "exercice" indiquant qu'il consiste :

«soit en une leçon à des enfants qui auront été amenés à cet effet, soit dans la discussion d'une question de méthode ou de discipline, soit dans l'examen ou la critique d'ouvrages scolaires, de devoirs écrits, soit enfin dans la lecture expliquée d'une page de pédagogie.»

A travers les plans précédents, on voit transparaître quelques lignes de force pour la période considérée : primauté attribuée aux contenus disciplinaires, mathématiques en particulier. La "formation professionnelle" est essentiellement conçue, même dans la période 1905-1920 où est affirmée une volonté plus marquée concernant cet aspect, par une préparation du futur instituteur à entrer dans *la culture du primaire* qui lui fournira par la suite une formation sur le tas. Il sera, à travers les exercices pratiques, les conférences de pédagogie, les leçons préparées et critiquées en chambre", initié aux gestes du métier.

2 L'affirmation d'une formation professionnelle : la formation pédagogique

Le décret du 6 Juin 1946, traitant de la réorganisation des écoles normales qui avaient été supprimées en 1940, pour être remplacées par celui d'Institut de Formation des Maîtres (c'est la première fois que le terme de formation est employé dans les textes législatifs), parle dans l'article 59, modifiant le décret du 18 janvier 1887, de deux années de *préparation professionnelle*, puis dans le même article :

«A titre transitoire, la préparation au baccalauréat pourra être faite en trois ans, le temps réservé à la formation professionnelle étant alors réduite à un an.»

2. Il s'agit de compléments d'instruction mathématique portant sur la levée des plans et arpentages (10 leçons), la cosmographie (10 leçons), la méthode des sciences mathématiques (3 leçons)

Ainsi dans le cours du texte lui-même, le mot "formation", auquel est accolé celui de professionnelle se substitue à celui de préparation professionnelle. On parlera plus loin de stades de formation professionnelle (article 69). Le mot de formation est donc étroitement lié à celui de *profession*. S'y affirme ainsi la volonté de séparer nettement formation professionnelle des instituteurs et enseignement général.

Les professeurs chargés de l'enseignement dans les années préparatoires au baccalauréat peuvent être appelés à participer à l'*enseignement* de la formation professionnelle. Le terme d'enseignement réapparaît, mais à propos, cette fois-ci, de la formation elle-même. Apparaissent donc des contenus spécifiques à la formation professionnelle et il n'est plus fait référence aux contenus proprement disciplinaires qui ont été étudiés dans les classes préparant au baccalauréat.

La circulaire du 6 Juin 1969, précisant la nouvelle formation de deux ans mise en place, parle d' "instruction pour la *formation pédagogique* des élèves-maîtres et des élèves-maîtresses". Dans le cours du texte, le mot "formation" apparaît parfois seul. On y précise que :

«la première année sera consacrée à la consolidation des connaissances fondamentales, au développement culturel et à une initiation aux problèmes pédagogiques. (...); ils [les élèves-maîtres] étudieront les diverses disciplines enseignées à l'école élémentaire en les abordant au niveau supérieur, en approfondissant leur culture générale et en examinant les problèmes pédagogiques qu'elles posent à la fois en elles-mêmes et dans leurs relations nécessaires au sein d'une action pédagogique globale.»

Le maître mot y est "pédagogie" : formation pédagogique, problèmes pédagogiques, action pédagogique. On relève un discours très général, consolidation des connaissances fondamentales, développement culturel etc, qui marque l'intérêt du législateur pour des considérations sur les méthodes plutôt que sur les contenus confirmant l'orientation que l'on pouvait déceler à travers la nouvelle formation instituée en 1945.

3 La formation professionnelle initiale à la recherche de son identité

La circulaire du 26 Juin 1979 précise que :

«La formation vise à donner aux futurs instituteurs et institutrices une qualification professionnelle affirmée, s'appuyant elle-même sur une formation générale élargie, l'ensemble amorçant et permettant la formation permanente. Elle tend à former des éducateurs autant que des enseignants. (...) On assurera une intégration étroite de la formation théorique et de la formation pratique.»

On voit apparaître la notion de formation initiale, même si le terme ne figure pas explicitement, puisque celle-ci doit amorcer et permettre la formation permanente, formation qui vient d'être instituée. Le mot "éducateur" vient se substituer au mot "enseignant", signifiant sans doute un glissement de la conception de l'enseignant, faisant apprendre des savoirs, vers un éducateur qui s'intéresse surtout aux méthodes : c'est le fameux *apprendre à apprendre* qui commence à faire "école".

La formation est organisée en unités de formation et parmi celle-ci, on distingue les unités de formation de "didactique". Le mot de "didactique", qui est employé pour la première fois, semble l'être comme synonyme de "pédagogique". En effet, dans les fiches du 12 octobre 1979 édités par le ministère de l'éducation nationale pour décrire ces unités, dans le paragraphe intentions - objectifs, on y définit :

- des objectifs de formation mathématique,
- des objectifs de formation pédagogique.

C'est donc la première fois aussi qu'on associe formation et mathématique dans les textes concernant la formation initiale, et on y lit de manière plus précise qu'il s'agit de :

«être capable d'améliorer sa connaissance des mathématiques qui sont objet d'enseignement

- à partir d'une réflexion critique sur les contenus et les modes d'acquisition des notions mathématiques antérieurement rencontrées;
- à l'aide d'un enrichissement et d'un approfondissement des connaissances mathématiques.»

Un programme de mathématiques y est défini, marquant la nécessité d'apprentissages spécifiques concernant la discipline aussi bien que l'enseignement de la discipline.

Dans le texte définissant la formation des instituteurs en 1986, on parle de formations disciplinaires. Le terme d'enseignement mathématique est à nouveau employé, enseignement qui doit établir un lien entre théorie et pratique.

La distinction entre "pédagogique" et "didactique" commence à être faite à propos de ces formations disciplinaires, comme on peut le remarquer dans le texte suivant³ :

«La pédagogie générale a pour objet l'étude des principes généraux et des grandes conceptions de la pédagogie. Elle ne saurait se confondre avec l'étude des démarches, méthodes et procédés pédagogiques particuliers, ni les dicter. Leur découverte, leur évolution et, le cas échéant, leur apprentissage, doivent être réalisés dans le cadre de l'enseignement de chaque discipline et de sa didactique...»

Les termes "didactique" et "pédagogique" sont nettement distingués puisque dans la partie de ce texte concernant spécifiquement les mathématiques, on peut relever deux paragraphes, le premier relatif aux contenus de la disciplines et le second intitulé "aspects didactiques et pédagogiques". Sont placées sous le terme "didactique" les rubriques suivantes :

- «- développement de la pensée logique de l'enfant;
- mise en relation avec les théories psychologiques et didactiques. État actuel des connaissances (courants psychologiques et épistémologiques);
- l'activité mathématique : résolution de problèmes : découverte de nouvelles notions en réponse à des problèmes.»

Les termes "didactique" et "épistémologique" sont donc mis en contrepoint au terme psychologique. On peut voir, à travers ce texte, la reconnaissance de théories ne relevant pas directement de la psychologie qui régnait en maître dans les écoles normales, au point d'avoir créé une catégorie spéciale de professeurs appelés "psychopédagogues". C'est sans doute aussi les retombées des recommandations faites par Alfred Kastler⁴ signalant que toute formation pour des enseignants de sciences doit comporter une partie d'histoire et d'épistémologie de celles-ci.

3. Circulaire du 14 Mars 1986, B.O. n° 35 du 9 Octobre 1986, Ministère de l'éducation nationale.

4. Motion rédigée par Kastler A. et adoptée par l'académie des sciences en 1984.

Annexe A1b

Interview d'un instituteur maître-formateur

(...)A ton avis, quels sont les besoins des étudiants ?

Compte tenu du niveau de recrutement qui est supérieur à celui qui était avant, par exemple à celui d'il y a 10 ou 15 ans, puisque chacun est recruté au moins au niveau de la licence et que dans les faits, ils ont même plus que ça (beaucoup ont même des maîtrises), ils n'ont pas tellement besoin d'un apport disciplinaire, ils ont beaucoup plus besoin d'un apport sur le plan de la formation professionnelle. Maintenant l'apport disciplinaire, c'est vrai que souvent ils sont spécialisés dans un domaine et c'est vrai qu'ils ont besoin de se remettre à niveau. Mais à mon avis, vu leur passé, le niveau qu'ils ont obtenu et les capacités qu'ils montrent, cela pourrait être presque de l'auto-formation ou de l'auto-didactisme. La remise à niveau pourrait presque se faire toute seule. Il suffirait qu'il y ait un moment où il y ait une évaluation et qu'ils prennent conscience de leurs manques. On leur fournirait une certaine bibliographie et ils travailleraient tout seuls pour se former dans les disciplines. Je crois que la baisse qui est intervenue dans la formation se situe surtout au niveau de la formation professionnelle et non pas au niveau des disciplines, ni au niveau de la didactique. Dans la formation professionnelle avant, il y avait de nombreuses interventions des IMF, les stages en tutelle étaient plus nombreux. Les contacts avec les classes étaient beaucoup plus nombreux, il y avait les exercices pratiques, auparavant, il y avait eu même les leçons modèles qui sont très critiquables mais qui avaient des aspects positifs aussi. Tout ça, il y avait un beaucoup plus grand nombre de contacts avec la classe et dans lesquels ils étaient actifs.

Dans le domaine de la pratique de la classe, il faudrait qu'il y ait des stages en tutelle tels qu'ils existaient avant; de manière différente peut-être, c'est-à-dire qu'ils peuvent être plus courts et plus centrés sur certaines disciplines, mais ils ne sont pas actuellement assez nombreux, il faut en faire plus. Les IMF peuvent intervenir, non seulement sur le plan pratique, mais sur le plan de la relation "théorie-pratique"; ils seraient capables de montrer quels seraient les soubassements théoriques aussi bien disciplinaires que pédagogiques ou didactiques qui leur permettent leur action en classe. Et ça, on s'en sert assez peu actuellement dans la formation. Les IMF n'en parlent que de manière périphérique. Les mémoires, on n'en parle que parce que le stagiaire, à propos d'une question..., nous on déborde un peu et on établit la liaison. Les IMF, quand ils sont amenés à faire ce lien théorie-pratique, c'est presque en marge de ce qui leur est demandé. Ils le font en plus, mais à la limite, si on voulait, on ne le ferait pas.

Je te donne un exemple : hier je suis allé voir des PE2 qui font leur mémoire, sur la division. Donc quand je suis allé les voir, on n'aurait pu ne parler que de la division, j'en ai profité, parce que cela me semblait tellement évident et tellement gros, pour leur parler de la gestion de la classe, de la gestion du tableau, la manière de se déplacer, la pratique professionnelle sur le terrain.

Ce que je veux dire, c'est qu'on est obligé de faire ça en marge.

Il y aurait l'aspect recherche; quand la recherche porte sur la didactique ou la pédagogie, il faut bien qu'il y ait une liaison entre la pratique et le terrain. Les IMF, ils ne jouent pas le rôle des profs qui, eux aussi, font une liaison théorie-pratique. Eux, ils partent de la théorie, alors que nous on part plus de la pratique; on se rejoint à un certain moment, mais ce n'est pas la même liaison qui est rencontrée. On part des questions qui sont posées par les élèves-profs. Ils ne posent pas les mêmes questions à un prof qu'à un IMF.

Comment toi, en tant qu'IMF, comment tu formulerais les besoins des futurs enseignants ?

J'évacue les besoins en terme de contenus de savoirs disciplinaires et même de savoirs. Je crois que maintenant, ils ont au moins la licence, ils ont l'habitude de travailler avec des bouquins, ils ont l'habitude de se documenter, il faudrait les laisser autonomes et qu'ils s'approprient eux-mêmes les manques qu'ils ont dans les disciplines. Les besoins qu'ils ont, je pense que ce sont des besoins de relation, de communication, de savoir-faire et d'expérience

Ils ne butent jamais sur les problèmes de contenus quand ils ont à enseigner?

Ça arrive.

Et toi, tu fais l'analyse que lorsqu'ils butent sur les problèmes de contenus...

A mon avis, ce n'est pas moi qui vais les amener et à mon avis ce n'est même pas un prof à l'UFM qui leur amène les contenus. Quand ça arrive au cours d'un stage, et cela arrive souvent, moi je leur dis : vous prenez tel document, vous le lisez et on en reparle après, vous allez lire tel bouquin; on voit comment ce document, cela aide à voir ce qui se passe en classe. Je prends un exemple, en grammaire, même ceux qui ont fait des études de français, ils ne sont pas à l'aise avec la grammaire telle qu'on la pratique en CM2 actuellement. Je ne leur fais pas un cours de grammaire, je leur fais lire certaines parties des instructions officielles, la préface du bouquin de Pruvot sur la grammaire, qui doit faire 5-6 pages, je leur fais lire certaines pages de certains ouvrages et je leur dis on verra dans 4-5 jours. Je leur donne mes progressions et on voit comment l'un est tiré de l'autre.

A propos du concours...

Ils préparent un concours, ce n'est pas de la formation professionnelle. Il y en a qui ont l'air de dire le concours c'est secondaire, mais ils laissent de côté tout ce qui est formation pratique. Il joue le rôle inverse du rôle qu'il devrait jouer. Si c'est tout à fait au début, il faudrait que cela sélectionne des gens que l'on suppose être aptes à suivre l'enseignement et être aptes à devenir un enseignant, qui ont les qualités pour le devenir. Si le concours est tout à fait à la fin, cela peut sanctionner une formation.

L'argument qui a été donné pour le placer au début c'était que les critères de recrutement étaient uniquement des critères disciplinaires, académiques et pas du tout des critères professionnels. Le placer au milieu, cela permettait, via une épreuve professionnelle d'avoir des critères de recrutement autres que purement disciplinaires

D'accord dans le principe, mais on peut pas le placer au milieu, ce qui voudrait dire que la deuxième partie n'est pas professionnelle. Élever encore le niveau théorique ?

(...)

Est-ce que pour enseigner les décimaux et les rationnels, tu as besoin de connaissances un peu plus étendues sur les nombres que les simples nombres eux-mêmes ?

Ça dépend ce que l'on appelle la connaissance sur les nombres eux-mêmes. En tout cas, il faut avoir un niveau nettement supérieur à celui qui est enseigné à l'école primaire. Maintenant quel statut doivent avoir les réels? A priori, le gars qui sait, qui ne fait pas d'erreurs, qui est à l'aise avec les décimaux, les fractions, mais pas seulement avec les décimaux et les fractions, mais avec tout ce que cela signifie, tout cela sous-tend comme notions de base qui entrent dans les décimaux et les fractions...

Qu'est-ce que tu mettras derrière, parce que cela rejoint le problème des besoins ?

Disons que pour les décimaux, il ne suffit pas que l'étudiant sache les ranger les uns par rapport aux autres, ou bien faire des opérations avec les décimaux ou prendre des mesures. Tout ça ne suffit pas, il faut qu'il sache ce que signifie par exemple faire un changement d'unités, qu'est ce que cela signifie qu'encadrer des nombres, mais sur un plan plus général qu'encadrer par deux décimaux, faire une approximation, ...

(...)

Ce n'est pas sûr qu'ayant travaillé dessus, ils puissent l'utiliser, parce qu'au niveau des élèves, cela n'apparaîtra pas forcément de la même manière qu'à leur niveau à eux, parce que les élèves, ils ont en plus d'autres difficultés. Dans un problème, ils ont des difficultés de lecture : donner du sens à ce qui est lu et ensuite donner du sens au problème. (...)

Là dessus, si tu as un problème qui porte sur les décimaux, il y a plus qu'un problème sur les décimaux; donc pour les étudiants, il n'y a pas qu'une difficulté, que de la difficulté relative aux décimaux. Travaillant en dehors d'une classe primaire, en dehors du contact avec les enfants, ce n'est pas sûr qu'ils identifient les problèmes rencontrés par les élèves

(...)

On pourrait imaginer des formes de travail où on ne travaille pas avec la classe mais avec des matériaux issus de la classe.

Comme cela se fait dans le concours, on amène des travaux d'élèves et on dit voilà comment ils ont résolu et qu'est-ce que vous en pensez. Moi, il me semble que quelqu'un qui n'a pas vu fonctionner une classe, ce n'est pas sûr qu'il arrive à identifier dans les travaux, à mettre en correspondance ce qu'il voit dans les travaux des élèves et ce qui a été identifié dans un cours comme par exemple un problème sur les ordres de grandeur. Je reviens toujours à mon truc. Il faudrait qu'ils identifient des problèmes au niveau des enfants.

Est-ce que pour identifier des problèmes, il ne faut pas déjà un outil théorique ?

Oui, mais d'abord, qu'ils se cassent la figure, qu'ils voient les enfants se casser la figure, qu'ils se posent la question : pourquoi ça ne marche pas avec les enfants. Ils peuvent essayer avec eux-mêmes : est-ce que moi, je peux arriver à résoudre ce truc-là ? Tu veux dire que s'ils ont les outils théoriques cela leur permettra de comprendre ce qui se passe chez les enfants.

Peut-être!. Quand tu as ta classe, que tu identifies justement les difficultés, tu les identifies par rapport à tout un construit théorique que tu t'es fait, toi, sur le fonctionnement, qui vient de ta pratique depuis des années. La question que je me pose, c'est quelqu'un qui n'a pas justement tout ce bagage théorique, est-ce qu'il est capable d'analyser ?

Tout seul peut-être pas, mais justement il faut faire des stages avec des gens qui isolent le petit truc et qui le mettent en évidence : voilà qu'est-ce que vous pensez de cette situation, de cette réponse de l'élève ? C'est ce que tu dis que tu fais à partir de travaux d'élèves, enfin c'est ce que tu dis qu'il est possible de faire ?

C'est une question que je me pose.

Mais, il me semble que c'est un peu artificiel, sorti du contexte. Est-ce que cela aura la valeur d'un obstacle ou de quelque chose apporté. D'abord, ce n'est pas tous les enfants qui vont rencontrer ce problème, ensuite, il faut arriver à l'isoler, parce que le gros travail dans une classe, c'est ça : mettre en évidence les problèmes, parce que là le travail il est fait. On dit il y a telle procédure, le travail est fait. Or le gros problème, c'est de faire cette classification. Alors tu vas dire, si on n'a pas les outils pour faire la classification? Mais

justement dans une classe avec un instit, il pourra le faire : qu'est-ce qui s'est passé à ce moment là ? (...)

D'un certain point de vue le mémoire, c'est pas mal. Se centrer sur un type de difficultés et de voir comment cela apparaît dans une classe et de voir tout ce qui, comment les enfants le voient, le mettent en œuvre et tout ça, ça c'est intéressant. Ils se donnent les outils qui vont permettre d'analyser, mais ils se les donnent en même temps qu'ils sont en train d'observer.

Mais là, si on regarde le mémoire, on investit beaucoup de temps pour un truc un peu réduit. A rebours, est-ce que la réalité de la classe n'est pas trop complexe dans un premier temps pour faire tout ce travail d'analyse qui devra effectivement être fait à un moment donné.

Je comprends ce que tu veux dire. Dans les classes, quand il y a les stagiaires, ils le disent tous, ils sont crevés à la fin d'un stage, le maître aussi il est pompé parce que justement, tous les soirs... C'est trop complexe, mais il y a une analyse qui est faite très fine de certaines situations qui sont vécues avec le stagiaire. C'est vrai que l'on ne peut pas tout voir, mais on peut en isoler beaucoup.(...)

Je n'ai pas répondu sur les points en mathématiques. J'ai parlé d'encadrement, d'ordre de grandeur et d'approximation. Ce qui est intéressant c'est de voir quelles sont les procédures utilisées par les gamins dans tous les domaines, y compris les décimaux et les rationnels. Dans l'apprentissage de certaines notions comme celles-là, décimaux et rationnels, j'ai souvent vérifié que pour des adultes qui sont souvent des littéraires, adultes qui ont des problèmes de contenus sur les décimaux et les fractions, ils vont fonctionner de la même manière que les enfants. Ils ne fonctionnent pas, pour résoudre un problème, comment on leur apprend à fonctionner, mais ils fonctionnent beaucoup plus, justement par approximation ordre de grandeur plutôt que mettre en œuvre des règles. Je parle à la fois des adultes et des enfants qui n'ont pas déjà un niveau suffisant pour être déjà dans des moules.

Si je te comprends bien, tu veux dire que leurs procédures sont assez proches de celles des enfants ?

Pour les étudiants "naïfs" pour simplifier, il faudrait leur faire faire des trucs très simples. Hier, j'étais dans la classe des deux filles qui travaillent sur la division : faire une répartition de 2345 feuilles à partager entre 26 élèves) Et bien, moi, la première chose que je fais, et je pense que c'est une démarche que beaucoup d'adultes font, si tu n'as pas de crayon, tu ne poses pas d'opération, tu te dis il va 100 fois, 100 fois 26 c'est à peu près ça, il y a autour de cent feuilles. J'essaye pas de dire je vais faire la division, ... ce sont des procédures mentales d'approximation, ça ne fait pas très mathématique aux yeux des non spécialistes, ils disent ça, ce n'est pas des maths. (...) là ils ne se rendent pas compte qu'ils comprennent : là il y a le sens de l'opération. Les points sur lesquels il faudrait insister sur le plan des contenus, ce n'est peut-être pas des contenus, ce sont des procédures. Je crois qu'il faudrait mettre en évidence des fonctionnements qui sont naturels, non pas naturels, spontanés disons, non pas spontanés, non formalisés. Il y aurait des situations qui font appel justement à autre chose que des formalisations mathématiques : je suis en train de penser justement à quelque chose que j'utilise souvent avec les enfants et aussi avec les stagiaires. Tu connais le bouquin de Sam Loyd, c'est très intéressant, parce que il y en a où il faut faire vraiment des maths, mais il y en a où c'est seulement de la réflexion, arranger les données d'une certaine manière. Je crois que souvent avec les étudiants qui sont naïfs, il faudrait faire plus de choses comme cela que de l'approfondissement mathématique. Quelquefois c'est nécessaire. Pour un même problème, il peut y avoir des procédures et que, quelquefois, la procédure la plus élaborée, ce n'est pas la plus efficace.

Quand tu vois qu'il y a des problèmes au niveau du contenu avec des étudiants, que tu vois qu'ils butent sur une difficulté, tu leur proposes des activités ?

Soit c'est des gens débrouillés et je leur donne ERMEL, je leur dis vous travaillez cette partie là et on en reparle après. Soit je leur donne des petits exercices du genre de ceux que l'on propose aux élèves, ou bien je leur fais faire, c'est un peu caricatural. Par exemple avec un étudiant qui avait des problèmes avec la circonférence du cercle : je lui avais dit, il faudra faire cette séance et à la fin je lui explique ce qu'on peut faire et il me dit qu'est ce que c'est π . Je me dis, il ne sait rien, le gars, je ne lui ai pas donné de formules, rien du tout. Cette séance je vais la faire en classe, tu vas la faire en même temps que les gamins, tu fais comme si tu étais un gamin et tu comprendras ce que c'est que π , comment on calcule la circonférence du cercle et tout. Avec ceux qui sont "naïfs" il faut agir naïvement.

π , avec les gamins tu abordes comment ?

Souvent, j'aborde comme cela, on fait mesurer la roue de vélo, alors il y a une trace, on fait le développement, avec plusieurs circonférences de diamètre différents, puis on fait le rapport longueur du développement sur diamètre et on s'aperçoit qu'il y a une constante, donc on en déduit une régularité qui devient une règle à partir du moment où on la vérifie sur d'autres exemples qui sont des choses fournies. On va trouver quelque chose quelque part et on va vérifier que... A partir d'une expérimentation, on dégage une régularité qui ensuite se transforme en règle parce qu'elle est toujours vérifiée. C'est pas tout à fait mathématique.

Ils savent que c'est une constante, mais ils ne savent pas trop de quoi il s'agit : ils le rattachent à quoi, à un entier ?

On sait, parce que les décimaux, on a beaucoup travaillé dessus, donc cela ne leur pose pas de problèmes.

Donc, ils le rattachent aux décimaux ?

Oui, ils le rattachent aux décimaux, c'est gênant? Ils le rattachent aux décimaux, mais en tant que rapport, parce qu'on l'écrit systématiquement sous la forme circonférence sur diamètre et on voit sur plusieurs exemples. Donc on voit que c'est un nombre qui représente circonférence sur diamètre. J'aborde souvent les décimaux par les fractions et donc ils ont l'habitude : un décimal, on peut toujours l'écrire sous forme de fraction.

L'articulation entre divisions et fractions, les étudiants n'ont pas de problèmes ? Est-ce qu'ils ont des problèmes par exemple entre diviser 37 par 47 et la fraction 37/47 ?

Là, je ne sais pas.

Et au niveau des gamins? L'articulation entre quotient décimal, issu d'une division...

Moi, j'aborde les décimaux par les fractions. Les fractions d'abord, sous forme géométrique si tu veux, on partage une tarte en trois, les trucs bêtes comme ça et les fractions simples $1/2$, $1/4$, $1/5$. On essaie de reconstituer la tarte entière, donc on fait 3 tiers cela fait une tarte et donc, un entier divisé par 3, on se sert beaucoup des calculatrices, on ne fait pas d'opérations. Donc ils auront au bout d'un moment 0,5; 0,3333333; 0,2 donc d'emblée, il y a une liaison qui est établie entre le décimal et la fraction. D'ailleurs cela permet de prendre conscience pour les gamins que 1, 333333 c'est plus petit que 1,4, enfin parce que 1,333333, c'est $4/3$ et on a vu de manière géométrique que 1,4, c'est $7/5$, il y a un moment où on voit, mon exemple est peut-être

mal choisi, géométriquement ou par des diagrammes en bâtons, avec des guide-ânes. On montre à un moment que $7/5$, c'est plus grand que $4/3$.

C'est peut-être plus facile de voir avec $1/3$ et $4/10$?

Là, c'est bon. Ce que je veux montrer, c'est que $1,33333$ avec une infinité de chiffres c'est plus petit que $1,4$. Parce qu'on l'a vu avec le guide-âne et on peut le voir géométriquement, au moins dans certains cas.

Au niveau des adultes, je ne sais pas s'ils établissent un lien, mais au niveau des enfants, ils l'établissent forcément parce que c'est le point de départ en fait.

Les étudiants quand ils font la division de 39 par 17, tu trouves un quotient 2,2, le problème c'est le statut de ce 16? Pour eux, c'est 16 unités : ils mettent toujours un statut d'entier pour le reste. J'attribuais cela sur le fait que le lien n'était pas complètement fait entre le fait de diviser, ce que représentaient les restes à chaque étape et le quotient décimal, qui est une approximation de la fraction $39/17$.

Oui, moi, avec les élèves, je le traite de cette manière. On fait $39/17$, il y a un moment où on écrit $39/17 = 2 + 5/17$ et donc on travaille sur la partie entière et la partie décimale. Je ne le fais pas avec ça, parce que c'est trop compliqué. En général, je le fais avec des nombres décimaux : cela me permet de le voir avec les parties entières, dixièmes, centièmes etc. Donc le reste, il appartient aux dixièmes, aux centièmes etc... En fait une division, on isole la partie entière, puis ensuite, la partie décimale en fait une division, il reste la partie "centimale", puis on retravaille à chaque fois. Ça permet de montrer que le reste appartient à la catégorie où on en est : décimale, centimale...

Moi, ce que j'essaie d'isoler, ce sont les points où il y a des manques. Il me semble qu'il y en a un là. Est-ce qu'il n'y a pas besoin de travailler avec eux : que eux soient placés face à un problème qui fait que le fait de résoudre, le jour où ils trouveront les gamins confrontés à la même difficulté, ils auront l'outil qui leur permettrait d'interpréter la difficulté. S'ils rencontrent la difficulté et que si derrière, il y a un IMF capable de la pointer et de faire bosser dessus, c'est intéressant. Le problème, c'est que l'on ne peut pas le faire sur toutes les notions qu'ils sont susceptibles de rencontrer.

Ce que je proposais, c'est qu'il faudrait débiter par un stage de trois ou quatre semaines. Tu pointes les difficultés. Tu retournes à l'IUFM et là il y a un travail dans lequel interviendraient l'IMF et les profs, qui résoudraient les difficultés propres à l'étudiant, avec des trucs mis sur papier. Il faudrait que l'étudiant lui-même se fasse sa propre évaluation en termes je sais, je ne sais pas, j'ai besoin de... Quels sont mes besoins. L'objectif, ce n'est pas de prendre la classe, c'est un moment pour mettre en évidence des manques. Au retour à l'IUFM, il faudrait des équipes de profs qui centralisent tous les machins, font des listes de points à aborder, les regroupent et ensuite fassent des groupes d'étudiants et ensuite chaque étudiant va travailler dans un ou deux domaines, pas partout, qu'il se centre sur un ou deux domaines et là il y aurait un mois et demi de travail pour exploiter tout ce qui a été mis en évidence dans le stage. Peut-être après, mais je ne le placerais que vraiment à la fin, il y aurait des interventions de type universitaire pour chapeauter le tout, pour formaliser vraiment les choses, pour les intégrer dans un ensemble de savoirs plus vaste.

C'est un renversement de la conception du stage que tu proposes, de tout le monde et en particulier des étudiants, parce que, eux, ils se mettent dans la perspective qu'ils vont avoir à enseigner. Donc ce qui les préoccupe, c'est d'avoir des fiches de préparation.

Moi, c'est ce que je dis toujours, mais c'est quand même de la professionnalisation, un stage professionnel. Ce n'est pas l'efficacité immédiate. Je sais, on avait une réunion à

propos des stages. Moi, j'avais dit cela, il faudrait que les étudiants, eux, pointent, avec l'aide des IMF, leurs savoirs, leurs manques, etc... et que ça soit pris en compte, que cela soit regroupé par les profs à l'UFM. Mais cela demande une réorganisation du travail autre que ce qui existe. On ne fera pas faire à tous la même chose au même moment, si en plus les IMF qui ont participé au stage interviennent.

Le travail de l'IMF, ce serait d'isoler les points sur lesquels il serait nécessaire de travailler ?

Oui, exactement.

Discussion sur le mémoire (...)

Là, il faudrait redéfinir les objectifs du mémoire. Dans le principe, c'est pas mal. Ils sont en situation de rencontrer des problèmes et d'avoir un retour après avec des IMF et des profs pour analyser les problèmes rencontrés. Mais certains sont maintenant tellement obnubilés par le mémoire en tant que papier à produire qu'il va falloir défendre comme outil d'évaluation, que cela perd un peu de sa richesse. Je pense que pour le mémoire, il faudrait leur donner deux séances par semaines en réduisant le temps d'intervention sur quatre semaines. Trop souvent les gamins ont oublié ce qui s'est passé, ou il s'est passé autre chose dans la classe entre temps.

Annexe A1c

Interview d'un universitaire, formateur PE1.

Quel rôle peuvent jouer les membres de l'enseignement supérieur stricto-sensu ?

X m'avait dit que mon rôle consistait à remonter le niveau du concours et que je devais être le garant scientifique de la formation. C'est lui qui a défini mon rôle, moi je connais l'école primaire, mais je ne connaissais pas du tout la formation des maîtres A priori j'étais plutôt orienté pour aller enseigner au CAPES dans la formation disciplinaire. Mais finalement ils ont depuis plusieurs années des problèmes avec le corps des ex-PEN qui ont fait une corporation, qui se défendent contre toute innovation, tout changement. Ils craignent pour leur carrière aussi. Dès le début, ils m'ont dit que je suis l'homme de X. Il y a des problèmes institutionnels. X a déjà voulu réformer un petit peu depuis plusieurs années la formation, définir la formation. Il veut orienter sur des contenus mathématiques plus forts. Il pense que le niveau mathématiques doit être plus fort. On parle toujours de l'équivalent de la formation secondaire, donc on dit niveau troisième, niveau cinquième, niveau sixième ou niveau seconde. La référence, c'est plutôt le collège. Alors X, il préférerait que la référence soit plutôt la seconde. Pour les formateurs c'est toujours le collège, mais pas la troisième, c'est plutôt quatrième ou cinquième. Parfois, ils voudraient se limiter aux mots, au pied de la lettre, du programme de l'école primaire, rien que cela peut-être avec des développements un petit peu plus grands, mais se limiter aux nombres naturels, les décimaux presque pas. D'ailleurs, ils ont mis les décimaux, les rationnels et la didactique des opérations dans les réels en deuxième année, pas en première année. Ils ont évacué de la première année tout ce qui est un peu difficile. Dans le programme en première année, il y a l'introduction des nombres naturels, les entiers sans doute, rapidement un aperçu sur les décimaux et puis on doit ne pas parler ni des opérations, ni des fractions d'ailleurs. Dans le chapitre numération, il y a juste une présentation de matériel, beaucoup de didactique sur la façon de présenter les nombres, peu de contenu sur les nombres. Ils ont laissé pour la deuxième année avec très peu d'heures. En quarante heures, ils doivent faire les opérations et la didactique des rationnels. Je ne pense pas qu'on puisse séparer, parce que les étudiants, ils ont vraiment des difficultés eux-mêmes à propos des décimaux, donc on ne peut pas se contenter de présenter tout simplement des méthodes d'enseignement. La plupart, même ceux qui ont un bac scientifique, ils ont des difficultés.

Quels sont les besoins des futurs professeurs des écoles ?

As-tu un avis aujourd'hui sur la façon dont on peut répondre à ces besoins ?

Je fais un test tout à fait banal si tu veux, au début du chapitre décimaux, je fais un test assez simple, ordonner une suite de décimaux, savoir si tel nombre est décimal, les différentes troncatures de π par exemple, quelques opérations. Donc ordre sur les nombres et classement à l'intérieur de la droite réelle, des nombres réels. Savoir s'ils n'appartiennent pas à l'ensemble des décimaux, si un entier est décimal ou non. Dans le test, il y en a qui font les mêmes fautes que tu vois dans le primaire. A partir du deuxième nombre après la virgule, ils ont des problèmes pour les classer dans l'ordre. Quant à leur place à l'intérieur des nombres réels, là, c'est beaucoup plus dur. Les entiers, ils ne les considèrent pas comme des décimaux, ils considèrent les ensembles de nombres comme disjoints les uns des autres : ça, c'est une conception qui est très ancrée et qui est difficile à éliminer. Après je fait faire quelques exercices de calcul d'opérations avec des nombres entiers, dans lesquels tu dois respecter les priorités des opérations, parenthésage. Là, il y en a quand même qui ne respectent pas les règles de parenthésage, qui confondent addition et multiplication. Même des gens de sciences nat font des erreurs assez grossières : ce ne sont pas uniquement des erreurs de calcul, ce sont des erreurs de non respect des règles de calcul. j'avais fait exprès de mettre des négatifs, des positifs, des

multiplications, des parenthèses, pas très compliqués, mais il fallait quand même respecter les règles.

Tu arrives à repérer les besoins professionnels ?

Oui, je pense déjà qu'un professeur d'école, il ne peut pas se contenter de connaître à ras le niveau du primaire. Il doit avoir une vue un peu plus élevée qui lui permette d'avoir un point de vue global sur le genre de problèmes qu'il est en train de faire développer à ses élèves. Parce que d'une part la classe peut être tout à fait passive et dans ces cas-là un cours peut se passer très bien, mais il y a souvent des enfants, je pense, pas souvent les meilleurs, il y en a des autres qui ont des points de vue tout à fait différents et auxquels le maître peut se trouver confronter. S'il n'a pas une vision un tout petit peu plus globale de la situation, il peut ne pas savoir que ça amène au même résultat. C'est extrêmement important. D'autre part, un professeur d'école, s'il a un niveau un peu plus élevé, cela lui permettra de préparer un peu mieux ses cours, d'avoir une vue extrêmement rapide sur le contenu de ses cours et de ne pas se pencher sur tous les exercices qu'il faut avoir fait. (...) Il y a des problèmes qui m'ont un peu frappé dans l'enseignement primaire, c'est surtout des problèmes liés à la proportionnalité. Il y a beaucoup d'implicites dans l'enseignement : on ne dit pas, mais tout le monde sait que ça doit être une situation de proportionnalité. Ce n'est que maintenant que je vois que dans les manuels apparaissent les deux situations, proportionnalité et non proportionnalité. Avant, cela n'existait pas, il y avait un seul point de vue et on avait tendance à croire que toute situation se ramenait à ce type. En particulier il y a des tas de situations dans lesquelles le maître ne dit pas que la loi que suit ce phénomène relève de la proportionnalité : les élèves disent il n'y a qu'à l'appliquer. (...)

La formation du maître doit être très bonne. Savoir que la pression atmosphérique relève de la proportionnalité jusqu'à une certaine hauteur, les limites de la modélisation. (...)

De même le fameux exercice qui apparaît partout avec l'ombre des arbres, à partir d'un étalon, on peut le mesurer : il faut quand même le dire, c'est le théorème de Thalès, mais on ne le dit pas et le maître ne sait pas non plus que c'est le théorème de Thalès qu'on ne le lui apprend pas. Il applique une règle. Il y avait un livre de Euller où on donne la taille d'un enfant à 2 ans, à 4 ans et on demande à 8 ans : ça tend à faire penser que ça va être proportionnel. En plus le dessin est très suggestif, les têtes des enfants sont alignées. (...) là, c'était simplement un exercice tout petit et l'élève n'avait pas les éléments pour répondre. (...)

Proportionnel, c'est régulièrement croissant, à la rigueur uniformément croissant (...) Il faut faire entrer ce schéma du théorème de Thalès et son interprétation géométrique dans l'enseignement des instituteurs, pas pour déduire des propriétés géométriques compliquées. (...) Je pense qu'il faut l'introduire dans le but des applications simples et surtout dans l'étude de la proportionnalité. Il faut qu'ils le sachent et puis qu'en même temps tout n'est pas situation proportionnelle.

Quel rôle joue le concours situé au milieu de la formation ?

C'est difficile à dire parce que je manque d'expérience. Mais c'est une question qui revient souvent. A l'IUFM, ils sont presque tous pour la suppression du concours ou que le concours soit déplacé avant la première année. Mais je me suis dit que d'autre part, c'est bien que le concours soit placé là : ça permet de faire une formation, peut-être d'améliorer le niveau mathématique et dans les autres matières. Le fait d'avoir un concours, ça les pousse à bosser, c'est un garde-fou aussi bien pour les étudiants que pour les formateurs parce que les formateurs ont un peu tendance à rester dans leurs savates, dans leurs trucs traditionnels. C'est un peu ça la première impression en arrivant à l'IUFM, c'est d'arriver dans une école maternelle dans laquelle les professeurs sont très prévenants vis-à-vis des élèves, des étudiants. On les materne. Certains étudiants me l'ont dit : ça nous choque par rapport à la fac où les gens ne s'occupaient pas de nous, on était là par centaines et on arrive à l'IUFM et on est materné. On les prend par la main, on

leur prépare leur cours pour après. C'est un peu ça, l'organisation : on donne des cours de maths avec très peu de théorie, de vrais cours de maths, mais surtout on prend les leçons comme elles doivent être faites à l'école et on prépare une leçon et puis on passe au chapitre suivant. On prépare vraiment le cours du futur maître. Ça m'a beaucoup choqué ce point de vue dans lequel finalement on ne donne pas de liberté au futur enseignant. C'est bien qu'il ait déjà du matériel prêt pour affronter, certains étudiants demandent ça, c'est vrai. J'ai pas eu de problème avec ceux qui venaient d'arriver, ceux là, ils étaient plutôt contents de voir que cela continuait dans le style de la faculté. Je ne pense pas qu'ils soient moins préparés, mais ils auront pas uniquement à ouvrir le cahier pour aller devant les élèves. Eux-mêmes, ils me disent qu'ils ne vont pas se contenter de suivre un manuel, je veux prendre deux ou trois manuels, puis avec les photocopies... Ils préparent un peu leur cours à la façon universitaire et pas forcément comme les autres l'entendent(...) Ils faut qu'ils préparent un peu leur cours, ce n'est pas la peine de leur donner tout mâché. Après tout, il y a de très bons manuels et de bons livres de maître qui sont d'une qualité exceptionnelle(...) Les livres du maître mâchent le travail, mais c'est un peu ce style-là qui a été adopté dans les écoles normales. Je fais travailler sur des manuels les étudiants et puis après on a regardé les livres du maître et ils étaient heureux : on est rassuré, avec ça on ne peut pas loupser son entrée à l'école, il y a le planning de l'année, le planning de la semaine. Tout est détaillé, les erreurs possibles, l'atelier possible pour ceux qui ont fait telle erreur, l'atelier pour ceux qui ont fait la deuxième erreur... et l'atelier les bons. En début du cours, il te présente des élèves fictifs que tu suis tout le long du cours.

Oui, le concours est un garde-fou qui permet de travailler de manière un peu indépendante, en l'absence du fait qu'il n'y a pas un programme ministériel. Même s'il y a un programme, c'est difficile pour qu'il soit respecté par tout le monde, les gens interprètent. C'est écrit nombres décimaux, il y en a qui vont faire l'addition et d'autres vont le faire en profondeur. S'il y avait un programme fait par le ministère avec un contenu assez élevé, les autres seraient au moins obligés de faire une grosse partie, donc dans ce cas là, ça serait intéressant. Sinon, cela donne l'impression de faire une formation maison, on a nos élèves : le matin je conçois un truc et je me dis je vais le raconter à mes élèves, ça fait un peu ça. Il faut penser d'une façon un peu plus globale et ne pas avoir un seul point de vue sur l'enseignement.

A propos des décimaux, rationnels, réels

Les décimaux et les fractions font partie des programmes de l'enseignement élémentaire. Quel statut doivent avoir à ton avis les réels dans la formation des futurs professeurs d'école? Y a-t-il des points de recoupement possibles avec la formation des professeurs de collège et de lycée ?

Quels sont les points au niveau des contenus mathématiques sur lesquels il faudrait insister à propos des décimaux et des rationnels (fractions) ?

Alors je pense qu'il faut dissocier : la formation pour les maîtres ne peut pas être la même que celle que les maîtres devront donner à leurs élèves. On ne peut pas se contenter de faire les nombres naturels, décimaux, rationnels, comme ça. Il me semble qu'il faut une grande cohérence là-dessus et la cohérence ne peut être apportée que par les nombres réels tout entiers et je vois ça par la présence de la droite graduée. Donc on peut dire que les nombres réels, c'est un ensemble de nombres dans lequel on peut effectuer toutes les opérations, l'addition, la multiplication, la division et après les racines carrées des nombres positifs. Les étudiants connaissent les opérations, ils les ont déjà vues. C'est donc un axiome de départ. C'est un ensemble fourre-tout dans lequel on peut faire ça. Il faut un support physique et pour avoir un support physique, je choisis la droite graduée. Je dis, la droite graduée, cela va représenter la droite réelle : un point sur la droite, c'est un nombre réel. Ensuite, il faut placer le zéro et le un. A partir de là, avec la règle et au compas, on peut démontrer que tous les nombres que les gens connaissent peuvent tous

être placés. Donc on peut montrer que l'on peut additionner : on prend deux points et avec le compas on reporte, on a l'addition. On peut se limiter aux nombres positifs, parce que les relatifs et tout ça, ça pose des problèmes. On n'en a pas vraiment besoin dans l'enseignement primaire et on peut s'en passer. Uniquement en se fixant le zéro et en allant vers les positifs, tu peux faire la multiplication avec la règle et le compas. Tu visualises les opérations et tu montres que les fractions, les décimaux ce sont des nombres et que ce ne sont que des représentations. Quand on écrit $4/5$, pour beaucoup, c'est 4 tiret 5, or ce qui est important, c'est de dire que $4/5$, c'est le résultat de la division de 4 par 5, c'est le nombre qui est le résultat de la division de 4 par 5 et qui est écrit de cette façon et qui est écrit 0,8 après. Tout ça, il faut bien insister entre la représentation d'un nombre dans ces diverses écritures et puis le nombre lui-même qui de toute façon va exister. Du moment que tu as figé ta droite graduée, que tu as mis le 0 et le 1, quatre cinquièmes, 0,8, $4000/5000$, c'est toujours au même endroit parce que c'est le résultat de la division. Ça évite beaucoup de manipulations qu'on fait à l'école élémentaire et qui sont nécessaires, mais au niveau des instituteurs, cela est nécessaire. On évite ainsi le travail formel sur les jeux d'écritures, que si je multiplie par 2 en haut et en bas, ça ils le voient immédiatement : si tu multiplies par 2 et divises par 2, comme c'est une division, cela revient au même : tu peux expliquer avec le dessin que c'est pareil. Ils arrivent à visualiser donc à donner un contenu. Tout ce qu'on utilise, les décimaux ou les fractions, ce ne sont que des représentations des nombres réels qui sont les résultats des opérations. En fait c'est un peu ça mon point de vue, c'est qu'il faut représenter aussi bien les décimaux que les rationnels, ce sont les résultats des opérations qu'on peut faire et que l'on a pas la place dans les nombres entiers pour le faire. On est obligé d'introduire une notation pour indiquer le résultat des opérations. Donc on introduit une notation pour dire que c'est le résultat de la division, mais je pense qu'on insiste très peu là dessus. En général, le rationnel, c'est à lui tout seul un symbole, c'est très lourd. Effectivement, si tu ne connais pas la droite réelle... Les fractions n'ont pas le statut de nombres, on le voit très bien dans la construction des nombres réels, tu pars des naturels, après tu définis une classe d'équivalence, tu passes à \mathbb{Z} , après tu passes à \mathbb{Q} et après tu passes à \mathbb{R} , mais je peux le concevoir très bien dans un enseignement de mathématiques à la fac : on part des objets abstraits dans lesquels on construit, on part du vide quoi! On construit toute la théorie, mais au niveau des élèves et des instituteurs, je pense qu'on ne peut pas se contenter de présenter de cette façon là parce que pour eux, ils n'ont pas l'abstraction nécessaire pour comprendre qu'après tout, on est en train de grandir un ensemble, de l'étendre modulo les relations d'équivalence. Ce n'est pas évident. Par contre, leur dire qu'il y a déjà un ensemble qui contient tout ça et que c'est à l'intérieur de cet ensemble qu'on travaille, c'est déjà fait un peu sur les manuels : on part sur la droite graduée et donc on place les nombres là dessus, c'est un peu leur faire comprendre que les nombres réels se retrouvent tous sur cette droite graduée. A chaque fois, on se rapporte à cette droite graduée, on met des nombres sur cette droite graduée, donc cette droite graduée doit bien contenir tous les nombres qu'on est en train de fabriquer. Mais il faudra peut-être leur dire qu'effectivement elle les contient et elle les contient tous. Cela donne un peu de cohérence. Il y a aussi cette histoire de l'ordre : le fait d'avoir une droite, ça permet d'avoir cette notion d'ordre. Ils comprennent très bien que l'ordre, c'est aller de droite à gauche : ils le voient très bien et du coup, tu n'as pas besoin de définir ce que c'est, parce que pour eux c'est très difficile : si cela arrive en vrac, si les décimaux t'arrivent en vrac, si tu ne vois pas qu'il y a une structure qui fait d'eux qu'ils se trouvent tous alignés sur une droite pourquoi veux-tu qu'il y ait une idée naturelle, qu'il y ait un ordre et pourquoi veux-tu que l'on dise que c'est un ensemble totalement ordonné. C'est encore un truc implicite que les décimaux sont totalement ordonnés, pourquoi? On peut les ordonner en donnant des règles, mais on ne te dit pas que c'est un ensemble totalement ordonné dans lequel si tu prends des éléments, tu peux les ordonner et réciproquement. Il faudrait qu'ils visualisent qu'ils sont ordonnés parce qu'ils se trouvent sur une droite, donc il faut faire un petit travail sur la représentation graphique pour qu'ils voient que du moment que tu les vois alignés, c'est naturel. Tous les nombres réels sont ordonnés, c'est un ensemble totalement ordonné. Les décimaux, souvent pour eux ce sont des entiers déguisés. Pour

les comparer, c'est pareil, ils déplacent la virgule, on rajoute des zéros et après on gomme carrément la virgule, on conseille même parfois de gommer la virgule. On se rabat sur les entiers, c'est commode, mais ça porte préjudice parce que du coup, les décimaux ne sont pas considérés comme des nombres à part entière, dans la catégorie des nombres, mais comme des dérivatifs des entiers. C'est un problème. Autre chose implicite qui joue un rôle important dans l'enseignement, qui n'est nulle part, même pas dans l'enseignement, du supérieur, moi que je fais cette année aux élèves instituteurs, c'est l'axiome d'Archimède. Tout est basé là-dessus, l'écriture des nombres décimaux, l'écriture en base dix, tout est basé là-dessus. C'est un truc illimité que l'étudiant doit avoir en tête que quand ça forme 1, 2, 3, ça te fait une division de la droite réelle que l'on ne dit nulle part, mais on l'utilise souvent. On dit 1,5 est compris entre 1 et 2. Ça tombe un peu comme ça, mais c'est plutôt une définition parce qu'on dit que 1,5 est plus grand que 1 et plus petit que 2. Or tout ça, aussi bien l'écriture décimale que les décimaux font couramment appel à l'axiome d'Archimède, de même que la division euclidienne. Pourquoi tu peux le faire, pourquoi tu divises par un nombre ? L'axiome d'Archimède, ce n'est pas autre chose que l'algorithme d'Euclide, mais ce n'est dit nulle part. Le fait de le pointer, certains ça les choque parce qu'ils ne sont pas habitués, ils ne l'ont jamais vu, mais pour d'autres cela doit les rassurer parce qu'ils doivent se poser des questions comme celles-là et qu'ils n'ont jamais eu de réponses. Ils restent figés avec des questions et ils ne peuvent pas progresser. Je pense que c'est déstabilisant de te poser des questions et qu'on te répond pas et que l'on te répond par des règles tout simplement. Justement le rôle du maître, c'est d'avoir une formation qui donne de la cohérence et qui rassure. De même dans les exercices du concours, il y a très souvent des trucs implicites : on te donne une figure, on ne te dit rien(...).

J'ai vu un exercice de Besançon : tels enfants A, B, C, ils ont trois paquets de billes. Les nombres de billes est proportionnels aux nombres 3, 4, 5 et après la partie, les nombres de billes sont proportionnels à 15, 16, 17. Il dit que sachant qu'un élève a gagné 8 billes en déduire le partage. C'est très implicite : dans la deuxième partie de l'énoncé, quand ils disent que les nombres sont proportionnels, c'est dans le même ordre que c'était au départ. Or il n'y a pas de raison, ça a pu changer complètement (...) Moi, cela me semblait compliqué, j'ai fait la solution en prenant tous les cas, il y avait au moins trois cas et dans la solution, ils considèrent un seul truc sans aucun commentaire. C'est un cas typique de sous-entendu et il n'y a pas de raison : il y a des étudiants qui vont se planter, en particulier ceux qui se posent des questions.

Tu te servais de l'axiome d'Archimède, tu abordais les développements décimaux des réels ?

Oui, carrément, j'aborde les développements décimaux de tous les réels. Je pense qu'ils ont compris. Je ne l'ai pas fait dans toute sa généralité, d'abord, j'ai insisté sur l'écriture décimale d'un nombre entier plus grand que 1 et après j'ai parlé des nombres décimaux compris entre 0 et 1. Parce que ce sont eux-mêmes qui m'ont demandé : c'est le problème des changements de base. Ils disaient, je n'ai jamais rien compris, je ne sais rien, mais une fois quel'ai fait par l'axiome d'Archimède, c'est allé. De la même façon que l'on présente la base dix, tu présentes n'importe quelle base, ils ont très très bien compris, donc ils ont fait leurs schémas avec nb , $(n+1)b$ tout ça en base b . Même ceux qui ne comprenaient rien aux bases, ils ont compris, ils calculaient dans n'importe quelle base. Et c'est eux-mêmes qui m'ont dit et les nombres entre 0 et 1. Plus tard, j'ai fait la même chose pour les nombres entre 0 et 1 avec les puissances de 1 sur 10^i , donc c'est pareil. Mais je ne l'ai fait qu'en base 10. Puis j'ai présenté le fameux théorème qui est dans tous les livres. Mais j'ai pris la formulation dans un des livres pour la formation des maîtres pour l'énoncer dans toute sa généralité, qui dit que tout nombre réel s'écrit avec une écriture infinie.

Oui, dans les livres, c'est le nœud central sur les systèmes de nombres, le développement décimal illimité.

Sur les systèmes de nombres, c'est très important le développement en base quelconque. Dès que tu parles de nombres, dès que tu veux entrer dans les systèmes de nombres, les nombres réels, tu es obligé de faire le développement en base décimale. C'est pareil, pour le faire pour les nombres décimaux simplement ou pour tout nombre réel, c'est exactement la même chose, sauf que pour les décimaux, tu vas t'arrêter à un moment donné. Il n'y a vraiment pas de raison de le faire exclusivement pour les nombres décimaux. D'ailleurs cela pourrait induire des ambiguïtés. Il faut le faire pour tous les nombres réels. Tout nombre réel a une écriture décimale, du même coup, tu parles d'écriture décimale et pas des nombres décimaux, même si on en parle de toute façon.

Pour de nombreux étudiants il y a confusion entre écriture décimale et nombre décimaux.

Il y a toujours le problème entre nombre et sa ou ses représentations. Le problème, c'est justement de voir qu'il y a beaucoup de représentations d'un même nombre. Ce ne sont que des représentations, des manipulations. Cela a un intérêt de travailler dans d'autres bases ou dans des systèmes numérique anciens, dans ce but pour leur montrer que ce ne sont que des représentations. En définitive, c'est le même nombre. Pour eux, effectivement, ils commencent à dissocier : ils ont un ensemble de nombres en base 10, un autre ensemble en base 5, un autre ensemble de nombre en langage maya et donc du coup cela peut devenir un truc immense et extrêmement compliqué. Or ils travaillent dans un seul ensemble, c'est la droite réelle, et les autres ne sont que des représentations. En parlant de tout ça, tu les rassures en même temps parce que, pour eux, il y a les entiers là, les rationnels, ils sont un petit peu plus loin par là, les décimaux sont là, ils ne se touchent pas, il y a des conflits entre eux et c'est extrêmement compliqué. En mettant tout ça ensemble et en disant que ce ne sont que des points de vue, des représentations, qu'on ne peut pas les saisir et qu'il faut bien qu'on les manipule et qu'on leur donne des noms. Il faudrait faire plus.

Quand tu prends ce point de vue là, tu ne te réfères plus du tout au collègue. Au collège, ce n'est pas fait du tout ?

Oui, ce que je présente se rapproche plus de l'organisation du savoir à la fac. Depuis que j'enseigne à la fac, en licence ou en DEUG B, j'ai toujours remarqué que l'axiome d'Archimède faisait défaut, c'est-à-dire que pour les étudiants, cela manquait dans leur imagination. Ils ne savent pas utiliser ce truc : si tu as deux nombres, l'un sera compris entre deux multiples de l'autre. C'est un truc extrêmement simple : même au CAPES, il y a des exercices dans lesquels ça joue un rôle très important. C'est la base de la division, de la complétude de \mathbb{R} , des limites ... On doit aller à l'infini quand on fait comme ça : quand on prend les multiples d'un nombre positif, on va à l'infini, ce n'est pas du tout évident. Si on prend deux points et si on prend les multiples de l'un, à un moment donné, on va le dépasser. D'ailleurs, c'est le paradoxe de Xénon et la tortue, ce n'est pas pour rien que c'est un paradoxe. Je l'ai d'ailleurs vu dans certains examens du concours, j'ai été très étonné qu'ils leur posent : la réponse c'est quand même la notion de limite et tout ça. Avec quels éléments on peut juger à part de philosopher là dessus. L'infiniment petit et l'infiniment grand, si tu prends un infiniment petit, si tu le répètes un nombre très grand de fois, ça va être plus grand qu'un infiniment grand. Ce sont des choses extrêmement dures, mais il faut les donner. Cela choque beaucoup de monde de voir l'axiome d'Archimède là-dedans mais je tiens bon : ça fait progresser à l'intérieur des mathématiques de savoir que ce n'est pas du tout évident ça. En fait c'est trivial, mais on ne le dit pas. Que ce soit formulé comme ça et qu'il ne soit pas besoin de se le reformuler dans son propre langage, que ce soit formulé en langage abstrait, je pense que cela apporte beaucoup. Sinon, il doit se le formuler à chaque fois, dans chaque situation : il faudrait chercher dans l'enseignement dans quelles applications éventuelles on peut avoir ça, mais je pense que c'est un point qui est négligé et qui devrait y être dans toutes les écoles.

Même dans l'enseignement supérieur, on parle peu des réels.

Ça a été évacué complètement. Ça tient au fait que cela a été présenté de façon abstraite. Avant les nombres réels, on faisait la construction de Peano ou la construction de Cantor avec les naturels. Donc avec toute sa liste d'axiomes : souvent dans le bouquin d'analyse, c'était comme ça, en première page, il y avait les nombres réels et toute la liste d'axiomes à décourager n'importe qui. Finalement petit à petit, on a décidé de travailler dans les réels sans le dire. D'autre part, on ne fait plus tellement de démonstrations dans le DEUG et du coup, si on fait pas de démonstrations, tu n'en as pas besoin. Tu n'as pas besoin de savoir que \mathbb{R} est complet, tu n'as pas besoin de savoir qu'il y a un ordre total, tu n'as pas besoin de rien du tout. Tu ne fais pas de démonstration, chaque fois que tu as besoin de quelque chose, tu fais un dessin.

C'est le dessin droite réelle qui remplace tout.

La notion de limite, tu ne dis pas que \mathbb{R} est complet, ni quoi que ce soit. Tu définis la limite, c'est implicite encore une fois que la limite c'est un nombre réel. Donc on ne travaille plus avec les epsilon parce que ça en a découragé plus d'un, on a évacué des chapitres entiers de l'enseignement : tout ce qui est nombre réel, tout ce qui fait démonstration, connaissance de la droite réelle et tout et les parties difficiles du programme ont été évacuées au profit de techniques. Donc l'enseignement en DEUG A et DEUG B ressemble beaucoup plus à un technicien qui sait calculer des limites des dérivées, qui sait calculer des intégrales, qui connaît des calculs assez compliqués, qui sait quand même qu'il y a des embûches dans le calcul des limites, que tout n'est pas permis. Il y a des différences avec un ingénieur mais il connaît extrêmement peu de démonstrations. Il sait faire quelques récurrences, mais les démonstrations, il ne sait pas, donc il y a un manque très important de logique par exemple. Il ne manipule pas d'ensemble infinis non plus puisque la droite est unique : c'est un seul objet. Ça arrive en licence de maths qu'il y a ce concept de voir que les nombres réels, c'est un truc discret. Le fait que les nombres réels soit un ensemble continu disparaît et il y a encore cette persistance, comme à l'école élémentaire de deux ensembles qui sont donnés un peu en fractionnant. Ça pose énormément de problèmes, parce qu'en licence de maths, on commence à démontrer, on reprend toutes les démonstrations et ils ne savent pas du tout démontrer. Ils ne manipulent pas ni la logique, ni la théorie des ensembles par exemple, toute l'algèbre de Boole, ils ne savent pas faire ça. Ils n'ont pas une connaissance réelle des nombres réels. Pourtant, ils travaillent avec les réels, les nombres complexes, parfois des trucs plus compliqués, mais ils n'ont pas une maîtrise de l'objet très concrète. Là, dans la préparation du CAPES de maths, il y a des trucs classiques dans lesquels on fait intervenir aussi bien la division euclidienne que l'axiome d'Archimède, il y a des propriétés très simples dans lesquelles si tu ne connais pas ces trucs, tu es coincé. Pour étudier les groupes, les sous-groupes de \mathbb{R} , tu es bien obligé d'utiliser tout ça et tu es complètement cuit.

A propos de la didactique

Vous avez évacué en première année tout ce qui est didactique des décimaux et rationnels ?

Moi, je le fais.

Justement qu'est-ce que tu fais sur cet aspect ?

Je suis moins à l'aise : je prends un peu des problèmes des concours, la partie professionnelle. Je fais aussi travailler sur des thèmes qui sont travaillés dans ERMEL ou dans d'autres livres de formation des maîtres. Je m'inspire un peu des visites que je fais

dans les écoles. Je fais travailler beaucoup sur les manuels. Chaque fois, on examine les manuels, on les critique, on les compare.

Quand vous examinez les manuels, qu'est-ce que tu fais faire ?

Par exemple, sur les décimaux, j'avais fait un grand travail et je ne savais pas que la didactique des décimaux était évacuée de la première année. J'avais pris 5 ou 6 manuels différents et pas de la même époque et on a examiné la façon dont les gens introduisaient les décimaux dans chaque manuel. On ne peut pas s'empêcher de les comparer, j'en avais des vieux, 70, 80, j'en avais qu'un seul qui était moderne qui était "diagonale"; "math et calcul" était de la version des années 70. Le but était qu'ils se rendent compte des façons qu'ont les gens pour introduire un concept comme les nombres décimaux. Mais on avait déjà fait la théorie là dessus, j'avais fait tout le travail de représentation des décimaux sur la droite réelle. Donc ils ont été étonnés par la plupart des manuels : la présentation les a choqués, c'était que des nombres, toute une liste, de même que les exercices étaient tous du type calculatoire. Les exercices étaient souvent des opérations ou des classements. Il n'y avait pas un seul dessin de droite graduée déjà, mais il fallait les classer selon une règle. On n'avait même pas fait du travail préliminaire pour la règle. Ils ont vu que dans un autre manuel, il y avait un travail préliminaire avec les mots dans un dictionnaire. Juste après le classement des nombres décimaux. Cela leur avait plu : ils avaient dit oui, comme ça on comprend très bien, on voit qu'il y a une analogie. Comme on avait ça, l'ordre lexicographique, ils avaient vu ça. Il y avait aussi un manuel dans lesquels ils présentaient les nombres décimaux avec une infinité de zéros, je crois que c'est Kangourou, un truc comme ça. Cela les a choqués : ils ont dit, c'est très compliqué de concevoir un nombre avec une infinité de chiffres à droite. Après dans le livre, ils reviennent, ils s'expliquent. Cela les avait beaucoup choqués qu'un enfant puisse concevoir comme ça. C'est certain qu'une fois qu'on a fait le travail sur les décimaux et qu'on voit que l'écriture peut être infinie, on peut peut-être travailler là-dessus. Là c'était en premier que c'était présenté comme ça. Il n'y avait pas de présentation très bien. Oui, ils versaient du lait aussi avec un litre dans des verres et il restait un petit bout. Deux litres ça monte, trois litres ça monte encore, à cinq litres ça fait un verre entier et à côté on marque combien de verres ça fait. Mais comme ils n'ont pas d'écriture décimale, le nombre de verres changeait de toute façon... Il y avait des sauts, les décimaux n'étaient introduits que plus tard, à la page d'après, cela les avaient frappés parce qu'ils disaient mais comment un enfant peut comprendre ça, que là ça fait 2 verres, 3 verres et tout d'un coup ça fait un verre de plus. Ça va même à l'encontre de la proportionnalité. Dans le tas de livres que j'avais apporté, il y avait la dernière version de diagonale, ils étaient ravis : c'était bien présenté, c'était clair mais ce n'était pas unanime. Je donne un livre à chaque groupe et ils doivent prendre des notes, noter toutes les critiques qu'ils font, d'abord la façon dont ils présentent le sujet, les exercices s'ils sont adaptés ou pas, les commentaires, qu'est-ce qu'on devrait faire pour améliorer. Il y en a un parmi eux qui fait le secrétaire, ensuite on échange les manuels. A la fin on fait la synthèse, c'est vite fait : en général, cela se transforme en plébiscite d'un manuel. Récemment, je les ai fait travailler sur la géométrie : un groupe va faire CP, un groupe va faire CE1 ect. Pour le CP, vous allez me prendre tel livre je choisis entre "diagonale" et "objectif calcul". Ils ont dû avoir une vue globale dans laquelle ils avaient à présenter le manuel en géométrie, montrer le chapitre et l'évolution et présenter une leçon particulière avec les exercices du livre. Je leur ai donné deux semaines à l'avance.

L'analyse des livres du maître, cela fait partie de la didactique. Sinon je prends ERMEL, je prends une activité de ERMEL, je les fais travailler là-dessus. Dans ERMEL, il y a déjà les conclusions et tout. Parfois, je prends aussi des articles de Grand N. Par exemple celui sur les décimaux, j'ai expliqué. De même sur la maternelle, un article sur partage. Je fais la moitié du temps de la didactique : ce n'est peut-être pas didactique au sens de la didactique. Je leur explique les difficultés. Ça leur permet de voir là où il faut mettre le paquet, parce qu'a priori, ils ne se rendent pas compte de leurs propres difficultés. Au

moins qu'ils sachent qu'il y a des difficultés et que, s'ils ont eux-mêmes des difficultés, qu'ils soient rassurés.

Ils ont déjà des connaissances. Des fois il faut les déstabiliser ?

Oui, il faut les déstabiliser et aussi les rassurer qu'ils sont comme tout le monde, que s'ils ne comprennent pas tel ou tel chapitre, ce n'est pas très grave à condition qu'il le sachent et qu'ils se mettent à travailler là dessus, que de toute façon, ce n'est pas insurmontable, c'est surtout ça. S'ils entrent en début d'année en disant, je suis nul en maths, de toute façon je n'ai jamais rien compris aux maths et qu'à la fin de l'année ils disent la même chose, l'enseignement il a servi à rien. Il faut qu'au niveau manipulateur, au niveau technique, il faut qu'ils acquièrent quelques techniques qui leur permettent d'être un peu à l'aise pendant leur enseignement. Après ils vont être devant des élèves et il faudra qu'ils répondent juste tout de suite : pour les élèves le maître est quelqu'un de très supérieur, ce n'est pas comme à la fac où on peut se permettre de raconter des conneries d'une semaine à l'autre en disant la semaine dernière je me suis complètement planté, tu rectifies. Au primaire ce n'est pas possible, je ne crois pas que tu puisses leur dire "la semaine dernière je vous ai dit quelque chose de faux". J'ai remarqué que si tu racontes quelque chose de faux aux enfants, cela reste et c'est très difficile à évacuer après. Ils te disent "vous avez dit la semaine dernière que..". c'est peut-être lié à la psychologie de l'enfant, remettre en cause des choses.(...)

A propos du mémoire

A ton avis, quel intérêt présente le mémoire pour les futurs PE?

Apparemment ça marche parce que j'ai vu les titres : la place des décimaux dans l'enseignement primaire, la place des rationnels, la numération, ... Les contenus, je ne suis pas allé voir et les notes de mémoire sont très bonnes. C'est pour ça que je te dis que ça marche. Maintenant les contenus, il faut aller voir. Comme il y a de plus en plus de scientifiques, je crois qu'ils vont prendre des mémoires en maths. Mais je n'ai pas d'avis très précis là-dessus.

ANNEXE B4-a

Items concernant la division dans le questionnaire de C. Margolinas

Question 11

- 1) Ecrivez une division qui ne finit jamais: :
- 2) Pensez-vous qu'il y a une règle pour trouver les divisions qui finissent?
- oui
- non

Si oui, pouvez-vous dire à quelle règle vous pensez:

.....

- 3) Y a-t-il des valeurs entières du nombre a pour lesquelles la division $a : 4$ ne finit pas:
- oui
- non

Question 12

On se pose la question suivante : la fraction $\frac{3}{31}$ a-t-elle une écriture décimale illimitée périodique?

oui, le développement est périodique car

.....

non, il ne se répète pas car

.....

On donne le début de l'opération $3:31$

$$\begin{array}{r} 30,0 \\ 21,0 \\ 23,0 \\ 13,0 \\ 06,0 \\ 2,9 \end{array} \quad \begin{array}{r} \underline{31} \\ 0,0967741 \end{array}$$

Question 14

- Y a-t-il des nombres qui ne sont pas le résultat de la division de deux nombres entiers
- oui, je peux en dire un :
- non, il n'y en a pas
- oui, mais je peux pas dire lesquels

ANNEXE B4-b

QUESTIONNAIRE

1• Parmi les écritures suivantes, entourez celles qui représentent $\frac{14}{10}$:

14,10

1,14

1+0,4

$1+\frac{4}{10}$

$\frac{140}{100}$

0,14

2• Parmi les écritures suivantes, entourez celles qui, pour vous, représentent un nombre décimal:

0,66 ; $\frac{1}{3}$; 0,6666 ; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{9}$; 3 ; $\frac{21}{25}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{10}$; $\sqrt{4}$; 3,14 ; 15,00 ;

5,7418 ; $\frac{11}{7}$; $\frac{12}{100}$; 30,06 ; $\sqrt{\frac{4}{4}}$; 0,3 ; $\sqrt{8}$; $\frac{15}{75}$; $\frac{15}{4}$; $\frac{1,3}{3,7}$; $\frac{\sqrt{2}}{100}$;

3• Une division a été posée:

$$\begin{array}{r|l} 415 & 192 \\ 310 & \hline 1180 & 2,16 \\ 28 & \end{array}$$

Entourez, parmi les égalités suivantes, celles qui sont exactes:

$$\frac{415}{192} = 2,16$$

$$415 = 2,16 \times 192 + 28$$

$$415 = 2,16 \times 192 + \frac{28}{100}$$

$$415 = 2,16 \times 192 + \frac{28}{1000}$$

$$415 = 2,16 \times 192 + 0,28$$

4•1 Ecrivez deux nombres décimaux avec deux chiffres après la virgule qui encadrent le nombre 4,157:

.....< 4,157<

Encadrez le nombre 4,157 par deux nombres décimaux les plus proches comportant deux chiffres après la virgule:

.....< 4,157<

4•2 Combien y a-t-il de nombres entre 12,23 et 12, 232 ?

4•3 Ecrivez deux nombres décimaux avec trois chiffres après la virgule qui encadrent le nombre 47,2.

.....< 47,2<

Encadrez le nombre 47,2 par deux nombres décimaux les plus proches comportant trois chiffres après la virgule:

.....< 47,2<

4•4 Pouvez-vous donner, s'il en existe, un nombre qui soit compris entre 2,746 et 2,747 ?

Annexe C3a

Exercices préliminaires (travail individuel)

Essayer de répondre aux trois exercices suivants. (Compléter en laissant apparent vos calculs et vos recherches)

1. Compléter les égalités

$$0,278 : 0,0001 =$$

$$0,0278 : 0,001 =$$

2. Ranger du plus petit au plus grand les nombres suivants

22 - 19 - 2010 - 10 - 1001 - 103 - 13 - 1412 - 2004 - 20

Dresser la liste de ces nombres dans l'ordre où ils apparaîtraient s'ils étaient rangés de la même façon que l'on range les mots d'un dictionnaire, l'ordre correspondant à l'ordre normal des chiffres, c'est à dire 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Comparer les deux listes. Sont-elles différentes?

3. Sur une portion de droite graduée, on a placé 1,2 et 1,3 en A et B.

Placer le nombre 1,240457 sur cette droite en tenant compte de la graduation existante.

Annexe C3b: Comment partager un segment en n segments égaux ?

Mise en place d'une pratique de partage

Étant donné un segment tracé sur une feuille, il faut partager ce segment en n segments égaux en disposant d'un réseau de parallèles. Ce réseau fournit des familles d'échelles régulières (guide).

Justification géométrique de cette pratique

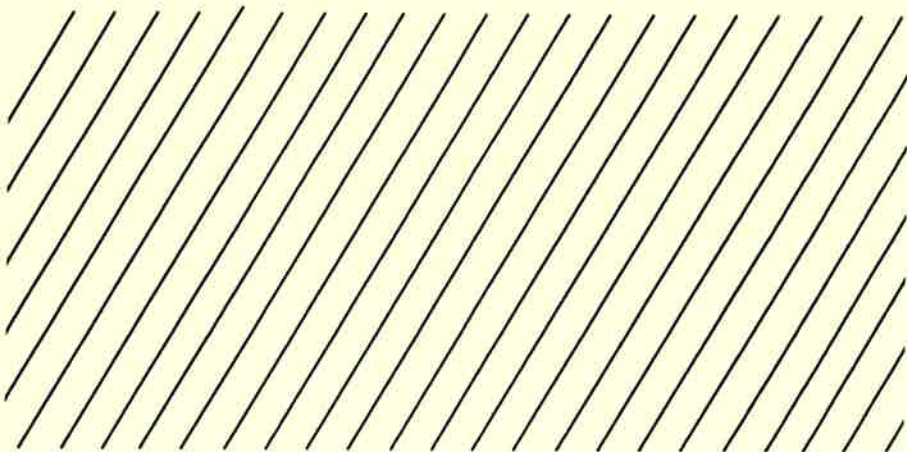
Si un faisceau de parallèles découpe sur une sécante des segments, il découpe sur toute autre sécante des segments égaux (propriété de Thalès).

Matériel

- un réseau de parallèles.
- une feuille de papier blanc transparent sur laquelle sont tracés deux segments AB et CD.
- la règle graduée n'est pas disponible.

Consigne

Partager avec le réseau de parallèles le segment AB en 5 parties égales et le segment CD en 7 parties égales (feuille annexe dessin).



Limite de l'utilisation d'un réseau de parallèles

La possibilité de partage d'un segment donné est limitée par la taille du réseau de parallèles.

Annexe C3c: Situation "Les automates"

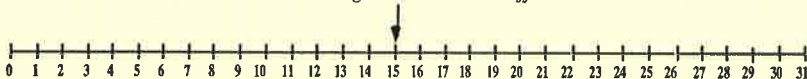
Situation générale

Une piste est graduée régulièrement uniquement par les entiers naturels. Un automate se déplace sur cette piste en partant de la graduation 0 et en faisant des **sauts réguliers**. Un automate est caractérisé par son saut. Nous cherchons à répondre à la question suivante:

Comment désigner le saut d'un automate ?

- **Activité 1 (individuelle).**

Problème 1- *Un automate arrive à la graduation 15 en effectuant 9 sauts.*



Trouver tous les entiers par lesquels passe l'automate avant 31.

(Remplir la feuille questionnaire annexe n°1)

Problème 2- *Un automate arrive à 10 en 14 sauts: trouver tous les entiers entre 150 et 180 par où passe cet automate ainsi que le nombre de sauts correspondant.*

(Remplir la feuille questionnaire annexe n°1)

- **Activité 2 (individuelle).**

Vous allez jouer le rôle d'"experts" pour examiner un tableau de relevé de "contrôleurs en automates". Les contrôleurs ont décidé d'écrire (10 ; 14) pour indiquer qu'un automate arrive à 10 en 14 sauts.

Voici un tableau où sont consignés des relevés concernant quatre automates A, B, C, D . Ces relevés incomplets ont été faits par quatre contrôleurs 1, 2, 3 et 4 : ces contrôleurs sont placés le long de la piste, de plus en plus loin de l'origine de la piste.

	A	B	C	D
Contrôleur 1	(5; 4)	(8; 14)	(6; 10)	(; 4)
Contrôleur 2	(25; 19)	(32;)	(12;)	(6;)
Contrôleur 3	(; 32)	(40;)	(; 30)	(12 ;)
Contrôleur 4	(120; 96)	(; 84)	(21;)	(24 ; 28)

Consigne

Complétez sur la feuille annexe n° 1 les relevés des contrôleurs en indiquant comment vous avez procédé.

Ne corrigez éventuellement un nombre que si vous êtes certains que ce nombre est erroné.

- Activité 3

Pour cette activité, vous travaillez par groupe de 4. Voici un tableau où sont consignés des relevés concernant quatre automates F, H, I et J. Ces relevés incomplets ont été aussi faits par les quatre contrôleurs 1, 2, 3 et 4.

	F	H	I	J
Contrôleur 1	(12; 8)	(15 ; 54)	(16 ; 104)	(;)
Contrôleur 2	(18; 12)	(25 ; 90)	(41 ;)	(; 20)
Contrôleur 3	(30 ;)	(35 ;)	(; 507)	(60 ;)
Contrôleur 4	(43 ; 28)	(; 144)	(210; 1365)	(360 ; 140)

Consigne:

Complétez les relevés des contrôleurs en justifiant vos propositions et ne corrigez éventuellement un nombre que si vous êtes certains que ce nombre est erroné.

Réalisez une affiche avec le tableau complété, vos remarques et vos argumentations.

Les affiches des différents groupes permettront de **communiquer vos résultats et justifications à l'ensemble du groupe.**

Le saut de n'importe quel automate est-il un nombre?

On se propose d'étendre l'ensemble des nombres entiers grâce à l'ensemble des sauts: les règles de comparaison et les règles d'addition définies sur ce nouvel ensemble devront fonctionner aussi sur l'ensemble des entiers.

Règles de comparaison

On décide d'adopter la règle de comparaison suivante : S_A est plus grand que S_B si pour un même nombre de sauts l'automate A atteint un entier plus grand que l'entier atteint par B: cette règle fonctionne bien sur l'ensemble des entiers.

A présent on se propose d'examiner la question suivante:

Peut-on additionner deux sauts ?

Soient deux automates C et D:

C atteint 10 en 12 sauts: son saut S_C peut être désigné par (10; 12)

D atteint 3 en 9 sauts: son saut S_D peut être désigné par (3; 9).

Consigne

Vous travaillez par groupe de 4 ou 5 et vous allez essayer de construire un nouvel ensemble de nombres.

1) Proposez des règles permettant de définir une addition des sauts S_C et S_D . (10 à 15 minutes): inscrivez-les sur une affiche que vous exposerez au tableau.

2) Prenez connaissance des autres affiches et des règles proposées.

Essayez de trouver des arguments justifiant le choix que vous feriez pour une règle particulière au niveau de votre groupe.

Annexe C3d: Vers de nouveaux nombres

Deux questions à propos de la séance précédente.

Un groupe a proposé de remplacer 41 par 40 ou 42. *Est-ce légitime ?
Comment corriger le contrôleur n°3 ?*

Ensemble des couples relatifs à un automate

Déterminer l'ensemble de couples relatifs à l'automate F , ... à l'automate H .

Comparaison des sauts des automates

*Comparer les sauts de F et H à partir de l'ensemble des couples les définissant.
Comparer les sauts des automates caractérisés par les listes suivantes :
(4, 3) (8, 6) (12, 9) (16, 12) (20, 15) ...
et (3, 2) (6, 4) (9, 6) (12, 8) (15, 10) ...*

Les sauts de certains automates sont des entiers

Lesquels ?

Peut-on additionner deux sauts ?

On se propose d'étendre l'ensemble des nombres entiers grâce à l'ensemble des sauts, les règles de comparaison fonctionnent.

Peut-on définir des règles d'addition sur ce nouvel ensemble.

Soient deux automates C et D :

C atteint 10 en 12 sauts: son saut S_C peut être désigné par (10; 12).

D atteint 3 en 9 sauts: son saut S_D peut être désigné par (3; 9).

Consigne

Vous travaillez par groupe de 4 ou 5 et vous allez essayer de construire un nouvel ensemble de nombres.

1) Proposez des règles permettant de définir une addition des sauts S_C et S_D à partir de la liste des couples les caractérisant :(vos propositions seront inscrites au fur et à mesure au tableau).

2) Prenez connaissance des autres règles proposées.

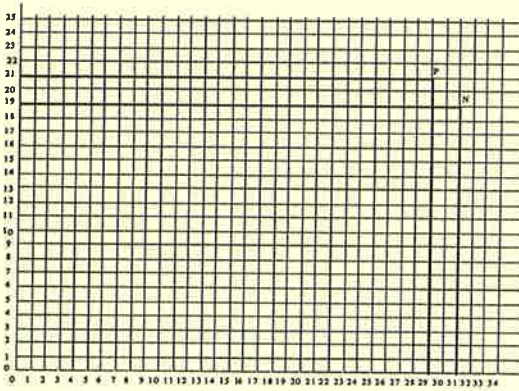
Essayez de trouver des arguments justifiant le choix ou le rejet que vous feriez pour une règle particulière au niveau de votre groupe.

Réalisez une affiche pour la mise en commun.

Annexe C3e: LE TIREUR D'ÉLITE

Un réseau à maille carré est construit à partir de deux axes gradués régulièrement uniquement par les entiers naturels à partir d'un même point O de coordonnées (0, 0).

On considère un nœud N de ce réseau repéré par les nombres x et y coordonnées de ce point, par exemple le point (31, 19). A chaque point peut être associée une fraction $\frac{y}{x}$



Le jeu consiste à viser un point N (x , y) à partir du point O. On appelle angle de tir le rationnel associé à la fraction $\frac{y}{x}$. Par exemple l'angle de tir correspondant au point N est le rationnel $\frac{19}{31}$. L'angle de tir du point P (29 , 21) est $\frac{21}{29}$ et l'écart entre les deux angles de tir est de $\frac{21}{29} - \frac{19}{31} = \frac{100}{899}$.

Première situation (mise en place)

Vous disposez d'une portion d'un réseau que nous appellerons rectangle MAOB (le point de coordonnées maximum M (63, 40) se projette sur les axes en A et B).

Un point Z de ce rectangle, correspondant à un rationnel est choisi par l'animateur.

Il s'agit de trouver *en un temps déterminé* un point S (p , q) différent de Z dans le rectangle MAOB tel que l'angle de tir du point S soit le plus proche possible de l'angle de tir du point Z.

Gagne celui dont l'écart entre les deux angles de tir est le plus faible.

Deuxième situation

Vous allez "jouer" par groupe de quatre. Vous allez jouer deux contre deux, mais en étant coopérants.

L'animateur va fournir à chaque binôme A et B d'un même groupe un rationnel que l'autre binôme ne connaît pas. Les rationnels proposés **sont plus petits que 1**.

Le rationnel est donné sous la forme d'une fraction $\frac{y}{x}$ avec $y < x$, correspondant à un point (x, y) . Attention, cette fois le **quadrillage n'est pas limité**.

Le binôme A devra arriver à encadrer le rationnel du binôme B (et de même le binôme B celui de A) par deux rationnels tels que l'écart entre eux soit le plus petit possible.

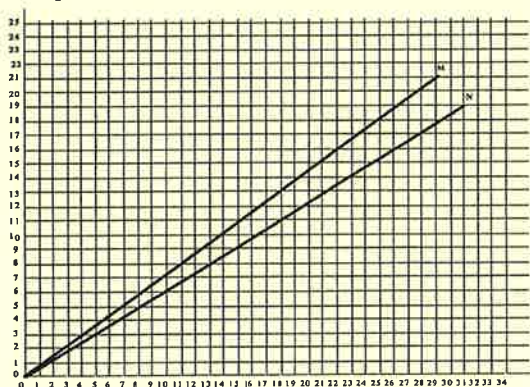
Pour cela, à l'aide de messages écrits, chaque binôme proposera alternativement à l'autre binôme un couple de rationnels en lui demandant si le rationnel cherché est "entre" les deux rationnels proposés et en indiquant l'écart correspondant.

Par exemple, il peut lui demander si le rationnel qu'ils recherchent est entre $\frac{19}{31}$ et $\frac{21}{29}$,

l'écart proposé sera alors de $\frac{100}{899}$.

Les réponses se font par oui ou par non.

Si la réponse à la question précédente est oui on pourra dire que l'angle de tir correspondant au rationnel cherché est à l'intérieur du faisceau ON, OM



Le problème est donc de trouver le faisceau le plus petit.

La durée du jeu est limitée dans le temps (par exemple 30 minutes).

Au bout de ce laps de temps, le groupe gagnant de 4 personnes sera celui dont la somme du dernier écart du binôme A et du dernier écart du binôme B est la plus faible.

ANNEXE C3f

SCHEMA DE STRUCTURATION DU MILIEU DE C. MARGOLINAS¹

Comme dans le schéma de Brousseau, on a toujours $M_{n+1}=S_n$, le niveau n est donc toujours englobé dans le niveau $n+1$ (structure "d'oignon"), on a $S_n=(M_n, E_n, P_n)$ ².

M3: M-de construction		P3: P-noosphérien	S3: situation noosphérienne	sur
M2: M-de projet		P2: P-constructeur	S2: situation de construction	di dac
M1: M-didactique	E1: E-réflexif	P1: P-projeteur	S1: situation de projet	ti que
M0: M-d'apprentissage	E0: Elève	P0: Professeur	S0: situation didactique	
M-1: M-de référence	E-1: E-apprenant	P-1: P-observateur	S-1: situation d'apprentissage	a-
M-2: M-objectif	E-2: E-agissant		S-2: situation de référence	di dac
M-3: M-matériel	E-3: E-objectif		S-3: situation objective	ti que

Commentaire:

- Je qualifie ici de "sur-didactique" les niveaux positifs, plutôt que de "méta-didactique" qui aurait pu être proposé. En effet, pour tout niveau n , le niveau $n+1$ est méta (méta (n) = $n+1$), si l'on considère que: «l'on adjoint ce préfixe à des activités cognitives pour nommer la forme que revêtent ces activités lorsqu'elles se prennent elles-mêmes pour objet³», ce qui est très exactement le cas.

¹Le schéma présenté ci-dessous correspond à celui de Margolinas 1993b.

²Plus exactement, la situation S_n correspond aux rapports entre M_n, E_n, P_n .

³BOUFFARTIGUE Jean et DELRIEU Anne-Marie, 1981, *Trésors des racines grecques*, ed Belin, p. 72.

Annexe C3g : Groupe n°4 (première partie automates)

- 1 E : j'ai compris ta méthode, mais je n'arrive pas à l'appliquer.
2 E : vous avez gardé le 28 vous, dans l'activité 2.
3 E : vous voulez revoir l'activité 2, parce que les autres ça va quoi.
4 E : il y a ça, là 10 en 14 sauts.
5 E : nous on a pris 7 en fait sur la graduation en considérant que une unité, ça passait par
6 deux sauts, donc on a pris 7.
7 E : les autres, on a fait par tâtonnement.
8 E : nous, on a fait le contraire, on a multiplié par 2, mais ça revient au même. C'est pareil
9 que vous, on a multiplié l'échelle par 2.
10 E : eux, c'est ça qu'ils ont multiplié par deux et nous, c'est les sauts.
11 E : et les premiers, vous les avez fait au pif?
12 E : non pareil avec les échelles, on ne peut pas faire autrement.
13 E : bon on fait l'activité 2, comment vous avez fait?
14 E : ben, moi au début, je faisais en additionnant, et après en multipliant et en divisant,
15 quoi, avec la calculatrice.
16 E : en fait, vous trouvez quoi?
17 E : (5,4), (25, 20), (40, 32), (120, 96), (8,14), (32,56), (40, 70), (48, 84), (6,10), (12,
18 20), (18, 30), (24, 45), (3, 4), (6, 8), (12, 16) et (24, 32).
19 E : tu as mis (24, 32), il n'est pas bon.
20 E : et le dernier tu as mis combien, on peut aussi avec 21.
21 E : non tu ne peux pas, il faut changer, c'est (24, 60).
22 E : oui, ou (18, 42).
23 E : au lieu de changer le 24 en 32, j'ai changé en 24, 24(inaudible).
24 E : en fait, il n'y a pas le même rapport entre les deux.
25 E : et si c'est ça 24, 32.
26 E : moi, j'ai mis (4, 4), (6, 6), (12, 12), (24, 24).
27 E : oh joli, oui, oui.
28 E : oui, mais là ça dépend si tu considères qu'il...
29 E : ben là, c'est pareil, il arrive à 4 en 4 sauts.
30 E : oui, parce que toi, tu rectifies aussi là, à la fin pareil.
31 E : il y a plusieurs solutions en fait.
32 E : 21 était considéré comme multiplié par...
33 E : tu n'as rien changé d'autre?
34 E : si, j'ai mis celui-là, 25, 52, mais 52, ce n'est pas juste.
35 E : tu n'en as changé aucun pour le C.
36 E : j'ai multiplié par 3,5, ça fait 21.
37 E : oui.
38 E : et 15 multiplié par 3,5 ça fait 52,5 je crois...
39 E : j'avais mis 52, parce qu'on pouvait dire que c'était un peu...
40 E : oh non, ce sont des entiers.
41 E : d'accord.
42 E : le coefficient de corrélation, il n'a pas besoin d'être entier, mais les nombres là
43 doivent être entiers.
44 E : on est d'accord?
45 E : le tableau de l'activité 3.
46 E₃ : si tu fais par proportionnalité par règle de trois, regarde...
47 E₁₂ : oui, ce que tu peux faire à partir de 12, comme tu passes à 18, eh bien 12 tu le
48 divises par 2 et tu multiplies par 3, il faut faire deux opérations successives.
49 E₅ : et là ça donne 12?
50 E₁₂ : oui, parce que 8 divisé par 2, ça donne 4 et multiplié par 3, ça donne 12.
51 E₉ : tu essayes de voir comment tu peux passer de l'un à l'autre?
52 E₁₂ : oui, avec deux opérations, avec deux opérations, ça marche en général.

Annexe C3g : Groupe n°4 (première partie automates)

- 53 E5 : oh là là!
54 P. passe en renversant le micro
55 E : oh là là ça déménage!
56 E : ça n'existe pas les micros sans fill! etc....
57 E5 : donc là, c'est faux le 30.
58 E12 : mais si pour passer par exemple de là à là [il montre les nombres 12 et 30].
59 E9 : ah, mais tu repars du 12.
60 E12 : ben oui, tu reprends la même méthode, mais tu changes les chiffres chaque fois de
61 12 à 30.
62 E5 : mais, j'ai fait de 18 à 30, divisé par 2 et multiplié par 3.
63 E9 : mais, ce n'est pas un coefficient de proportionnalité?
64 E5 : mais ton coefficient, il sera propre à chaque doublette, comment tu veux passer de là
65 à là et de là à là, tu n'as qu'une possibilité.
66 E : c'est plus une...
67 E : si c'est une proportionnalité, puisque tu en as un là.
68 E : oui, mais tu procèdes de 2 en 2.
69 E : ben oui, de toute façon, c'est obligé, quand tu as un coefficient...
70 E : je crois que c'est faux ça.
71 E : ben oui, écoute.
72 E : ça doit rester le même sur toute la colonne.
73 E : oui, c'est comme si tu changeais, tu changes de sauts.
74 E : voilà.
75 E : mais ce n'est pas par rapport à ça.
76 E : il faut que ce soit toujours un demi ou toujours trois demis.
77 E : mais comment tu peux passer alors? parce que là, ils ne disent pas qu'ils sont à
78 intervalles réguliers.
79 E : oui, mais il est bidon ce tableau! (rires)
80 (à P. qui vient d'arriver)
81 E : est-ce que notre robot, il fait toujours les mêmes sauts.
82 E : non, ce n'est pas ça.
83 P.: *le robot, c'est le robot...*
84 E : tu vois, il est réglé pour faire tant de sauts et...
85 E : mais ça, cela ne remet pas en question ça, la question c'est: est-ce que les quatre
86 contrôleurs sont à des distances proportionnelles les uns des autres, on ne sait pas
87 exactement.
88 P.: *effectivement, ils sont dans des zones le long de la piste et effectivement celui là il est*
89 *aux environs de... par exemple là, il estime qu'il passe en 25 en 90 sauts.*
90 E : donc il est à 25
91 P.: *aux environs de...*
92 E : c'est gênant de le prendre...
93 E5 : ça me gêne de changer de coefficient, c'est gênant de faire un coefficient là, un autre
94 là...
95 E3 : oui, mais ça marche à tous les coups aussi, si tu prends la proportionnalité avec un
96 produit en croix.
97 E5 : ça m'a gêne qu'on change de coefficient parce qu'on dirait que le robot n'est plus
98 régulier.
99 E3 : mais ça ne remet pas en cause le robot.
100 P.: *ton idée, toi, c'est que le contrôleur, il est toujours au même endroit?, le contrôleur est*
101 *aux environs de 18.*
102 E : elle veut avec une méthode comme ça passer de l'un à l'autre et de celui-là à celui là.
103 E : je voudrais toujours rester à la même chose.

Annexe C3g : Groupe n°4 (première partie automates)

- 104 E : mais les contrôleurs ne sont pas forcément au même endroit, il y en a un qui peut être
105 là, l'autre là, l'autre effectivement être là et le quatrième, il peut être là.
106 E : oui, mais pourquoi ça marchait dans l'aure cas, de là à là.
107 E : quand tu fais la règle de trois, cela marche.
108 E : mais pourquoi cela marchait ici, on avait un coefficient de proportionnalité.
109 E : ça va, si tu prends la proportionnalité avec un produit en croix.
110 P.: *mais entre quoi et quoi? tu as le même coefficient de proportionnalité?*
111 *effectivement, il y en a un qui est coefficient de proportionnalité, éventuellement, mais ça*
112 *dépend, entre quoi et quoi?*
113 E : mais il change ton coefficient.
114 P.: qu'est-ce qui change d'après toi?
115 E12 : moi, je fais avec le rapport comme ça, comme on passait de 5 à 25, après on fait la
116 même recette sur le nombre 4 et on essaie d'obtenir l'autre.
117 E3 : je suis partie avec l'idée ...
118 E12 : on cherche un multiplicateur commun.
119 E : oui, voilà, il est clair que tu ne peux pas passer de celui là à celui là avec une méthode
120 et passer de celui:là à celui:là avec la même recette, à chaque fois, il faut trouver autre
121 chose pour passer de celui:là à celui:là.
122 E : oui, mais moi, à chaque fois, je reprenais du haut.
123 E : moi aussi.
124 E : d'accord, mais même en reprenant du haut, tu ne peux pas avec une seule méthode
125 passer là, tu obtiendras à chaque fois le même chiffre si tu multiplies 5 par 4, tu ne peux
126 obtenir que 25 par exemple, mais tu ne pourras pas obtenir 40 avec le même nombre 4.
127 P.: *autant prendre 5*
128 E : 5 oui, mais après
129 P.: *de 5 à 25, tu multiplies par 5 et après effectivement, ce qu'il dit, c'est que c'est pas en*
130 *multipliant par 5, mais ce n'est pas ça qu'elle faisait, elle en reprenait un autre.*
131 E : oui, mais je repartais toujours du haut.
132 E : mais ça revient au même puisque tu changeais le coefficient.
133 P.: *oui, c'est la même méthode, vous êtes d'accord.*
134 E : pour passer de là à là, tu ne multipliais pas par le même nombre que pour passer de là
135 à là.
136 E : on change de coefficient pourquoi, parce qu'il n'est pas à la même hauteur?
137 E : parce qu'ils ne sont pas placés au même endroit.
138 E : un contrôleur peut être à 4 carreaux et puis il peut aller à 10 mètres de 4 carreaux
139 E : oui, c'est la position des contrôleurs.
140 P.: *oui, la position des contrôleurs n'est pas régulièrement répartie. Mais en fait, tu as*
141 *bien changé, puisque là, tu avais proposé.*
142 E5 : mais ça me semble plus régulier, tandis que là, ça a l'air vraiment de petits calculs...
143 E12 : mais ça revient exactement au même, la règle de trois...
144 E9 : on dirait vraiment que c'est de la cuisine...
145 E12 : la règle de trois, c'est aussi une autre recette de cuisine.
146 E5 : oui deux opérations quoi, pour moi, c'est moins régulier.
147 E12 : c'est pareil que la règle de trois, sauf que ça donne du sens, c'est tout.
148 E5 : mais moi, je ne faisais pas la règle de trois, je faisais rien.
149 P.: *effectivement, ce qu'elle te dit, c'est que là il y a un multiplicateur entier, là, c'est*
150 *multiplié par 5, là multiplié par 8.*
151 E : bon d'accord, mais comment elle fait pour passer de là à là?
152 E : bon d'accord, je comprends que tu ne puisses pas le faire et que tu cherches une
153 méthode pour essayer de passer de celui:là à celui:là, mais ça fait cuisine
154 P.: *ça a l'air de cuisine, mais justement qu'est-ce qui différencie, parce que toi tout à*
155 *l'heure tu as dit quelque chose qui me paraît important.*

Annexe C3g : Groupe n°4 (première partie automates)

- 156 E : parce quand je prends celui-là et que je le divise par 5, je trouve tout de suite le
157 coefficient et tout de suite, je remultiplie l'autre par le même coefficient .
158 P.: *effectivement.*
159 E : là tu peux le faire mais tu n'auras pas un entier, c'est tout.
160 P.: *là, tu disais que tu te servais toujours du contrôleur du haut et est:ce que tu vois*
161 *pourquoi tu ne peux pas.*
162 E : parce qu'ils ne sont pas à intervalles réguliers, les contrôleurs.
163 P.: *mais là non plus, ils n'étaient pas à intervalles réguliers puisque là, il y avait 5...*
164 E : oui, ils n'étaient.
165 P.: *effectivement, là, il y a des multiples et là il n'y a pas tout à fait des multiples. Bon*
166 *ben avancez. Alors toi, tu es gênée par cette cuisine effectivement; Qu'est:ce qu'elle*
167 *permet cette cuisine? de diviser par deux d'abord ?*
168 E : c'est d'arriver à un multiple.
169 E12 : ben si tu veux, on obtient le plus petit possible, si tu divises par deux, ça te fait (6,
170 4), on peut même obtenir plus petit, c'est (3, 2), si tu divises encore par deux, à partir de
171 là, tu peux obtenir tous les autres, c'est plus facile: là tu multiplies par 6, là par 10.
172 E9 : en fin de compte, on va chercher à chaque coup le plus petit.
173 E12 : oui, on peut faire comme ça, on cherche le plus petit possible.
174 E9 : mais c'est plus facile.
175 P.: *à ce moment là, peut-être, cette petite cuisine.*
176 E : oui, on voit mieux, ça ne fait qu'une opération au lieu d'en faire deux., d'accord.
177 E : ben voilà oui.
178 E : je n'ai pas suivi là.
179 E : au lieu de faire deux opérations, on réduit celui là au plus petit possible, tu peux
180 diviser par quatre, ça fait 3, et là ça fait 2, cela fait qu'après, tu peux les obtenir tous.
181 E : d'accord oui..
182 E : oui, c'est mieux.
183 (ils cherchent à appliquer cette méthode aux autres automates).
184 E : mais le deuxième, tu ne peux pas.
185 E : il faut toujours diviser par le même nombre pour trouver le plus petit?
186 E : oui, mais à partir de lui là tu peux.
187 E : par deux...
188 E : non, par deux, tu ne peux pas.
189 E : par 5 alors, non par 3 alors.
190 E : oui, par trois.
191 E : tu remplis le premier.
192 E9 : oui, avec cette méthode, on passe par le plus petit possible.
193 E5 : je préfère.
194 E12 : oui, mais ça revient au même.
195 E9 : on cherche un multiple commun?
196 E12 : on cherche le plus gros diviseur commun aux deux.
197 E : voilà.
198 E : et tu peux diviser?
199 E : ben ça on pourra le limiter au maximum pour obtenir ça.
200 E : mais celui-là je fais d'abord divisé par 2 puis par 5?, il faut toujours que je divise des
201 deux côtés par la même chose.
202 E : oui, voilà.
203 E : et après tu mets quoi?
204 (calcul à partir du couple (420, 2730) puis du couple (360, 140).
205 E : c'est bon tu l'as? tu peux encore avoir plus simple.
206 E : et pour celui là, tu trouves 18, 7 (il s'agit du couple (360, 140).
207 E : oui, tu vois, celui-là, il te pose problème.

Annexe C3g : Groupe n°4 (première partie automates)

- 208 E : oui.
209 E : c'est bon l'autre (il s'agit de l'automate H).
210 E : oui, 35, 136 et 40, 144.
211 E : le dernier, parce qu'on est pas tous d'accord, combien tu trouves? 18, 7, oui ça fait
212 blocage.
213 E : oui, il faut changer.
214 E : nous on a changé directement celui-là, on a mis 350, après c'est possible, mais ça fait
215 un gros changement quoi.
216 E : ce n'est pas du tout, du tout possible?
217 E : si tu gardes 18, 7, ça te fait changer deux trucs, le 60 et le 20.
218 E : oui, là, tu n'en changes qu'un.
219 E : pourquoi tu ne peux pas faire ça.
220 E : parce que tu changes deux trucs et tu es assez éloigné.
221 E : et vous avez pris quoi alors?
222 E : 350, 140.
223 E : et ça marche?
224 E : comment vous avez fait pour trouver 350.
225 E : pour passer de 140 à 20, il faut diviser par 7, il faut que l'autre soit divisible par 7 et
226 le plus proche de 360, c'est 350.
227 E : ben tu sais, 350, ça fait 10, 72 ça fait 12 d'écart, oui, l'avantage pour vous, c'est
228 qu'après tu ne changes plus quoi.
229 E : oui, là, on pourrait faire de plusieurs façons différentes.
230 E : oui, tu vois ce que je veux dire.
231 E : oui, mais comme celui là, il est loin, on peut supposer qu'il a plus de chance de se
232 tromper que ceux qui sont près.
233 E : oui (sceptique).
234 E : tu verras sur le premier tableau, il n'y a que ceux qui sont loin qui se sont trompés
235 E : oui, bon ben on a fini.
236 Nous allons rendre l'antenne, à vous les studios de Cognac-Jay.
237 Rédaction de l'affiche.
238 Fin du travail de groupe.

Annexe C3h: Analyse des autres travaux de groupes (groupes 1, 3, 5)

Groupe 1

	Exo 1	Exo 2	1 ^{er} tableau		2 ^{ème} tableau (par groupe)
E 14	Res	Gen	24	(,4) *	Mise en évidence de couples de référence (sans que ce soient les couples générateurs)
E 8	Res	Gen	21	(3 ,4)	
E 10	Res	Gen	24	NR	
E 21	Res	Gen	NR	NR	
E 11	Gen	Gen	24	(3 ,4)	

Argument final:

Pour F, deux méthodes pour un même résultat:

- . soit dans la première colonne, on ajoute 6 et dans la deuxième 4,
- . soit on trouve la référence inférieure minimale, le multiple de base (6, 4) et on multiplie par 2,3,6,7.

Analyse du déroulement du travail de groupe

Il s'agit de cinq étudiants dont quatre sont entrés dans le problème par la procédure Res. Une longue discussion va avoir lieu à propos du premier tableau, certains n'ayant pas trouvé les mêmes résultats. L'accord se fait au sein du groupe pour déduire les éléments manquants à partir du premier couple, ce qui ne pose pas de problèmes pour A, B, C.

On retrouve dans ce groupe deux méthodes s'appuyant sur les deux raisonnements:

- l'un utilisant l'addition réitérée, ce qui conduira d'ailleurs plus tard l'un des étudiants promoteur de cette méthode à rajouter un élément quand il examine par la suite des positions occupées par l'automate F,
- l'autre reposant sur le modèle linéaire et l'utilisation des multiples.

La proximité des méthodes n'apparaît pas d'emblée à l'ensemble du groupe comme en témoigne une longue discussion à propos du couple (43, 28) (dernier couple de l'automate F) que les uns ont remplacé par (42, 28) et les autres par (42, 32) (les étudiants ayant raisonné par addition s'étant trompés dans le calcul).

Ceci les amène d'ailleurs à s'interroger sur la validité de leur méthode:

- et on n'a pas le droit de faire par addition?
- si.
- mais on n'arrive pas aux mêmes résultats.
- non, deux méthodes différentes devraient arriver au même résultat.
- il y a quelque chose qui cloche quelque part.

* couple (,4) barré

La mise en correspondance élément par élément et le rajout d'un couple supplémentaire (24; 18) leur permet de corriger leur erreur.

L'addition réitérée empêche ces derniers de voir que l'automate peut passer par des points antérieurs aux premiers donnés et d'imaginer que l'on puisse avoir des renseignements sur un couple situé antérieurement au premier de chaque colonne.

La solution apportée par l'étudiant E 8 à propos de l'automate D (diviser par 2 à partir de 32 plusieurs fois) permet aux autres d'envisager des points antérieurs au premier proposé dans le tableau.

La compréhension de cette méthode va leur permettre de lever la difficulté à concevoir l'existence d'un couple antérieur de base et ce sont eux qui vont déterminer les éléments manquants pour l'automate H.

Groupe 3

	Exo 1	Exo 2	1 ^{er} tableau		2 ^{ème} tableau (par groupe)
E 20	Gen	Gen	NR	NR	Décomposition de chaque couple en un produit de la forme (xXa, yXb)
E 18	Res	Res/Flimulent	NR	NR	
E 1	Gen	Gen	21	(3,43,4)	de telle sorte que a et b apparaissent
E 4	Gen	Gen	21	(3,4)	dans chaque terme de la colonne.

Argument final: seul figure le texte suivant (la colonne J n'est pas remplie) qui traduit le perplexité du groupe relativement aux relevés concernant l'automate J.

J: si on considère 360 et 60 "justes", on a $6 \times 60 = 360$, mais 140 n'est pas divisible par 6. Si on considère 140 et 20 "justes", on a $7 \times 20 = 140$, mais 360 n'est pas divisible par 7.

Analyse du déroulement du travail de groupe

L'étudiant E 1 s'est servi du coefficient de proportionnalité $\frac{5}{4}$ dans le premier tableau pour trouver 40 (deuxième élément du troisième couple pour l'automate A), mais, utilisant le même coefficient pour le premier élément du deuxième couple du même automate, cela le conduit à remplacer 19 par 31,25, ce qui est fortement contesté par les autres. Cette méthode se trouve alors disqualifiée et c'est le raisonnement utilisé par E 4 pour trouver le couple (3,4) (diviser successivement 24 par 2 trois fois de suite) qui les amène à rechercher des décompositions possibles des différents termes du tableau.

C'est ce que rappelle le rapporteur E 1 au cours de la mise en commun:

P: (4, 26) vous l'avez trouvé comment?

- ben (rires), quand on est arrivées à 44 et 186, on avait 11 fois 4 d'un côté et 11 fois 26 de l'autre et j'ai repris le 4 et le 26.

P: oui, mais le 26 comment tu l'as trouvé?

- parce que 884, ça faisait 34 fois 26.

P: *ah oui!, c'était en décomposant?*

- On a tâtonné quoi et on vu que ça marchait. **On n'a pas vraiment de méthode.**

P: mais vous avez vérifié que 26 marchait pour 420 et 2730 quand même?

- on a vu que 2730, c'était 105 fois 26.

P: *est ce que vous vous êtes servi pour choisir 26...*

- on s'est servi du 420 et du 2730.

P: *ou de 884 non? c'est de 420 et de 2730?*

- on a remarqué que 44, c'est 4 fois 11, **non on n'a pas vraiment de méthode.**

Ce qui caractérise le compte rendu du groupe et que l'on trouve dans le protocole de dépouillement du travail proprement dit, c'est l'expression que nous avons soulignée précédemment et qui revient cinq fois dans les propos du rapporteur "on n'avait pas de méthode". Deux extraits du travail de groupe soulignent ce souci de trouver ce que nous appelons une technique:

Extrait 1

- **il faut trouver une méthode** pour justifier, on avait 5 et 4 et 120 et 96. Moi, ce que j'ai fait: est-ce qu'on peut trouver 5 et 4 avec 120 et 96? On voit que si on fait 24 fois 5 on trouve 120 et 24 fois 4, on trouve 96, après j'en ai déduit que 5 et 4, c'était bon après, tu gardes ton 5 et ton 4 et après chaque nombre tu le multiplies.

- Moi, j'ai pas fait ça, j'ai dit en quatre sauts, on arrive à 5, donc on a passé par $5/4$, on a multiplié 4 par $5/4$, donc 96 par $5/4$ ça fait 120. Là, il fallait que je fasse 25 divisé par $5/4$, or j'ai fait multiplié, c'est pour ça que j'ai trouvé 31,25 au lieu de 20.

- Enfin, **c'est dur de trouver une technique**, en fait c'est des tâtonnements.

Extrait 2

- Moi, je serais curieuse de savoir si avec la **méthode** qui utilise les coefficients, on pouvait être sûr de trouver les résultats.

En fait, ce qui gêne ces étudiants, ce n'est pas tant l'absence de méthode, puisqu'ils en ont une, mais bien plutôt de ne pas comprendre exactement pourquoi cela les conduit au résultat. Ils ont donc besoin d'un savoir mathématique explicatif. En ce sens la phase collective, par l'intervention de groupes (groupe 4 et groupe 2), ayant mis en évidence les éléments générateurs et le moyen de les obtenir, leur fournira la technologie nécessaire à la compréhension de leur méthode. L'étudiant E1 nous déclarera d'ailleurs la semaine suivante, après un travail sur un exercice du même type, avoir compris les raisons justifiant la recherche du PGCD des termes de certains couples figurant dans le tableau.

Groupe 5

	Exo 1	Exo 2	1 ^{er} tableau		2 ^{ème} tableau (par groupe)
E 16	Res	Gen	24	NR	Mise en évidence de couples de référence dans les colonnes F et H.
E 19	Res	Res/Flimulent	NR	NR	
E 2	Res	Res/Flimulent	24	(3,4)	Utilisation d'un coefficient de proportionnalité pour I.
E 6	Res	Gen/Procroix*	21	(3,4)	

Argument final:

Il n'y a pas de texte écrit sous le tableau. Dans la colonne F, figure l'indication multiple de 6, multiple de 4, dans la colonne H multiple de 5, multiple de 18, dans la colonne I figure le couple (2,13) et l'indication d'un coefficient de proportionnalité 6,5 reliant 420 et 2730. La colonne J n'est pas remplie: il y figure l'indication multiple de 6 pour les premiers termes des couples.

Analyse du déroulement du travail de groupe

Les quatre étudiants ont utilisé la procédure de base Res dans le premier exercice, que deux ont abandonnée au profit d'une procédure par calcul (Gen ou produit en croix). Une longue discussion dans le groupe va porter sur la validité de cette technique et la justification va en être fournie:

- soit par l'utilisation du modèle linéaire:

- ce qu'on peut dire, c'est que, on ne sait pas si ça provient du dessin, suivant où tu places ton dessin sur le graphique, ça porte à confusion: si tu ne t'en tiens qu'au graphique, tu peux avoir effectivement des nuances et si tu passes par une méthode mathématique de calcul, tu arrives forcément à une logique.

- c'est plus fiable que simplement par le graphisme.

- soit par l'utilisation du produit en croix:

- moi, j'ai trouvé qu'en divisant 10 en 7 parties égales, on a remarqué qu'en 7 sauts, on arrivait en 5. Quand je divise, je trouve 7 sauts. Donc quand tu fais 14 sauts tu tomberas effectivement sur 10, le double. Si en 7 sauts, il arrive sur 5, en 14 sauts, il arrivera sur 10. C'est logique. Si tu fais un produit en croix, s'il fait 7 sauts, il arrive sur 5, 14 sauts, il arrivera forcément sur 10 par un produit en croix. Donc moi, j'ai trouvé que tous les 7 sauts, il tombe sur un nombre entier qui est de 5 en 5.

Nous allons donc trouver ces deux "technologies" mises en œuvre pour expliquer la technique utilisant les réseaux de parallèles.

* P₂ est utilisé conjointement avec le produit en croix.

Annexe C3i : Groupe n°2 (première partie automates)

- 1 E : J'ai pris ma grille et j'ai vu, bon, ça fait tous les multiples de 5, après pour 150, ça
2 allait de multiples de 5 en multiples de 5. Pour compléter les tableaux, j'ai recherché une
3 inconnue avec les produits en croix, par exemple pour (5;4) et (;32), on fait 5×32 et on
4 divise par 4.
5 E : (12, 8), donc il en fait 6 en 4.
6 E : il fait même 3 en 2.
7 E : le robot H il fait du 5 en 18, 18 fois 7, ça fait combien?
8 E : 126.
9 E : et dans 144, il ne va pas 8 fois?
10 E : donc ça fait 40.
11 E : le I, c'est 2 en 20 fois.
12 E₁₇ : pour le I, 42 dans 273?
13 E₁₃ : ça, ça ne se divise pas ça, ah là là...
14 E₁₅ : dans 273, il y va 39, ça fait...
15 E₁₃ : 273 par 7.
16 E₁₇ : 273 par 7 ça pose quelques problèmes...
17 E₇ : en tête, tu peux bien mettre ce que tu veux.
18 E₁₇ : oui, mais chaque contrôleur, il a une zone, celui là il fait (12, 15), l'autre (18, 25),
19 l'autre (30, 35), oui, mais celui là, il va jusqu'à 420, il n'est pas bien.
20 E₁₃ : non, mais 39, ça fait 3 fois 13, mais 44, ce n'est pas un multiple de 3 déjà.
21 E₁₅ : 884 divisé par 13
22 E₁₇ : on laisse faire?
23 E₁₅ : 68.
24 E₁₃ : donc 68 fois 3, 204, mais qu'est-ce qu'on fait du 44? Eh bien 45, ça fait 3 fois
25 15.
26 E₁₇ : 13 fois 15, ça fait 195.
27 E : alors le 36 et 140?
28 E : c'est 14.
29 E : ça va pas plus loin, on va mettre 19, 7.
30 E : il va y avoir un problème avec le 60 et le 20.
31 E : oui, on va être emmerdé, le 60, ça va être 57 non, 19 fois 3.
32 E : oui, c'est ça.
33 E : (57, 21), eh ben en dessous, c'est le même, c'est pas grave.
34 E : ou alors, il faut prendre celui qui est en dessus, au lieu de (57, 21), tu prends juste
35 celui qui est au dessus.
36 E : oui, mais ça fait loin, ça fait 76, d'accord, il a bu mais il est placé avant celui-là
37 quand même.
38 E : ben voilà, c'est une affaire qui se conclut.
39 E : le papier blanc, c'est pour mettre les remarques.
40 P. : c'est vrai, il y a un expert d'expert!
41 E : j'aime travailler avec eux!
42 E : ca, c'est le plus petit couple d'entiers.
43 P. : *vous avez pu vous mettre d'accord avec des explications suffisamment claires?*
44 E : oui!
45 E : oui, ça sert à rien de dire qu'il y a un contrôleur 1, 2, 3, 4.
46 P. : *oui, on les a simplement répartis le long de la piste, qu'est-ce qu'il y avait dans votre*
47 *question?*
48 E : moi, j'ai utilisé le coefficient de proportionnalité et bien sûr, je trouvais des
49 contradictions parfois, donc cela ne va pas parce qu'on ne peut pas faire des demi-sauts
50 ou des trois-quarts de sauts et je me demandais s'il ne pouvait pas y avoir des erreurs
51 possibles du fait que si l'expert était loin de la ligne d'arrivée, avec la distance, il y a une
52 marge d'erreur possible.

Annexe C3i : Groupe n°2 (première partie automates)

53 P.: oui, en fait, il y a une confusion, vous dites: plus ils sont loin, mais ils sont loin de
54 quoi? Dans l'idée de la présentation, ils étaient loins du point de départ. On peut imaginer
55 la situation où il y a un automate qui a un compteur de sauts, si tu veux et qui est le long
56 d'une piste. Tu vois son compteur, là, chaque fois qu'il fait un saut, il y a son compteur
57 qui avance, d'accord, et après tu as un contrôleur qui est le long le piste, mais la piste,
58 c'est le papier transparent, c'est ça la piste. S'il y en a un qui est près, il est près du
59 départ. Il est par exemple aux environs de la zone 5, alors il voit que lorsque l'automate A
60 passe, il tombe pile sur 5 quand son compteur affiche 4. Autrement dit, en 4 sauts, il
61 arrive à 5. Puis il y en un autre qui est dans cette zone-là, aux environs de 25, et alors il
62 juge qu'il va tomber pile sur 25 au moment du 19^{ème} saut. Oui, qu'est-ce que tu avais
63 compris?

64 E : j'avais compris que le premier expert, il est là et les autres ils sont de plus en plus
65 loin. Par exemple s'il voit qu'il est sur le 17, en fait, il est sur le 16.

66 P.: oui, c'est ça. Ils contrôlent le long de la piste. C'est que, peut-être, les contrôleurs, ils
67 font plus ou moins attention, il peut y avoir effectivement des erreurs dans les
68 estimations.

69 Au groupe entier: tout à l'heure, il y en avait certains qui avaient des problèmes en disant:
70 il arrive à 10 en 14 sauts, il y a des gens qui se sont demandé: "mais est-ce qu'il passe
71 par 5?". Dans le premier travail, vous, vous avez dit tous les 5.

72 E : au début je ne comprenais pas pourquoi vous cherchiez (19, 7).

73 E : on cherche le plus petit multiple et on est sûr qu'il ne passera que par les multiples de
74 celui-là..

75 E : on cherche le facteur multiplicateur entre le nombre donné et ce plus petit rapport, non
76 avec le nombre correspondant.

77 E : j'avais écrit: connaissant le rapport graduation, nombre de sauts, je commence par
78 réduire le rapport. C'est le rapport réduit en fait, non, ce n'est même pas un rapport.

79 E : on cherche le multiplicateur....

80 Rédaction de l'affiche.

81 Fin du travail par groupe.

Annexe C3j : les travaux des binômes dans la situation du tireur d'élite

a) Activités de groupe: année 92-93

	Étudiants	Stratégies	Nb. tours	Écart obtenu
Groupe 1	Che / Nic	d ₁₀	14	$\frac{4}{100000}$
	Rom E1 Cat E2	d ₁₀	14	$\frac{1}{1000}$

Le deuxième binôme de ce groupe utilise une stratégie de dichotomie, mais s'appuyant sur des connaissances sur les nombres décimaux (division par 2 d'un nombre décimal).

Ils vont tout d'abord demander si le nombre cherché est dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, puis les

intervalles $\left[\frac{1}{2}, \frac{75}{100}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}, \frac{625}{1000}\right]$, les conversions nombres décimaux ne se faisant d'ailleurs pas sans problème. Ce n'est que par la suite, au vu des questions posées par l'autre binôme qu'ils feront une recherche systématique pour trouver successivement un encadrement à un centième près, puis à un millièmè près.

	Étudiants	Stratégies	Nb. tours	Écart obtenu
Groupe 2	Car / Lau	d ₂	20	$\frac{1}{1032192}$
	Flor / Oph	d ₂	20	$\frac{1}{1048576}$

Ce groupe, qui obtient l'encadrement le plus fin en adoptant la stratégie d₂ se trouve au moment de l'interruption du jeu à la limite de calcul possible avec la calculette. Celle-ci ne peut plus leur donner l'approximation décimale des nombres rationnels qu'ils proposent comme bornes de leur encadrement. Un des binômes nous a déclaré par la suite qu'ils ont envisagé d'utiliser la stratégie d₁₀, mais que la stratégie d₂ leur paraissait plus sûre du fait qu'on avait un renseignement déterminant à chaque étape. Il serait intéressant de poursuivre le jeu plus longtemps pour voir s'ils allaient changer de stratégie.

	Étudiants	Stratégies	Nb. tours	Écart obtenu
Groupe 3	Mar / est	qua - d ₂ (6)	12	$\frac{1}{1152}$
	Chr / Mar	f _{dc} - d ₂ (6)	12	$\frac{1}{400}$

Ce groupe s'appuie sur le support quadrillage pour visualiser les angles de tir, en choisissant des points à l'intérieur de l'angle de tir choisi précédemment. Le premier binôme va faire des choix s'appuyant sur cette visualisation pendant 6 tours avant de mettre en place une stratégie systématique qui lui permet de s'affranchir du support. L'autre binôme ayant choisi de rechercher des angles de tir avec les points ayant tous une même abscisse 50, va trouver un encadrement à $\frac{1}{50}$, puis à partir de là trouver des

encadrements à $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{200}$ puis à $\frac{1}{400}$ près.

	Étudiants	Stratégies	Nb. tours	Ecart obtenu
Groupe 4	Vér / Cla	f_{dc}	8	$\frac{1}{12}$
	Mur / Eli	$f_{dc} - a(3)$	8	$\frac{1}{100}$

Le groupe 4 utilise la même méthode que le groupe précédent, mais n'arrive pas à se détacher du support, ce qui explique le peu de performance des encadrements obtenus.

	Étudiants	Stratégies	Nb. tours	Ecart obtenu
Groupe 5	Bla / Nat	$qua - d_2(4) - d_{10}(10)$	20	$\frac{1}{10000}$
	Béa / Nat	$qua - d(2)$	20	$\frac{1}{100000}$

Ce groupe étant entré dans le jeu par la procédure de base va rapidement l'abandonner au profit de stratégie de dichotomie basée sur l'utilisation des fractions décimales et devient vite performant.

b) Activités de groupe: année 93-94

	Étudiants	Stratégies	Nb. tours	Écart obtenu
Groupe 1	Lau / Kar O	d ₁₀	15	$\frac{4}{100000}$
	Ann / Cél	d ₁₀	15	$\frac{1}{20000}$
Groupe 2	Van / Mag	qua - d ₂ (2) - d ₁₀ (4)	8	$\frac{2}{100}$
	San / Cla	d ₂	8	$\frac{1}{128}$
Groupe 3	Mar / Sté	d ₁₀	13	$\frac{5}{100000}$
	Mar / Fab	qua - d ₁₀ (3)	13	$\frac{1}{10000}$
Groupe 4	Car / Kar Emm	d ₂ - d ₁₀ (7)	13	$\frac{1}{1000}$
	Mar / Kry Mag	d ₂ - d ₁₀ (3)	13	$\frac{2}{10000}$
Groupe 5	Pie / Kry Mag	d ₁₀	23	$\frac{1}{1000000}$
	Gio / Phil / Dor	d ₁₀	23	$\frac{1}{1000000}$

Annexe C3k : Travail du binôme E1 / E2 (tireur d'élite)

E1 - Il faut cerner en fait les points qui sont compris dans ce domaine-là. Là on a fait 0,5 et 1 donc c'est compris, donc on essaie de faire 0,5 et 0,75, on essaie de partager en deux le domaine.

E2 - en deux, il vaut mieux.

E1 - donc 1/2 et 0,75, ça fait quoi, ça? Comment on fait pour le trouver en fraction?

E2- (petit rire).

E1 - comment on fait ?

E2 - 75 dixièmes ? et si on prenait 2/3?

(E1 s'adressant à un membre d'un autre groupe):- un nombre à virgule, comment on fait pour le transformer en fraction ?

autre étudiante - transformer quoi ?

E1 - un nombre à virgule en fraction.

autre étudiante - 0,2 ça fait 2 dixièmes.

E2 - 75 dixièmes.

E1 - non, 75 centièmes.

E2 - oui, (rire).

E1 - et l'écart, c'est 25 centièmes.

(réception du message).

E1 - donc c'est compris entre 0,5 et 0,75.

E2 - on divise encore par 2 l'intervalle, 15 divisé par 2, ça fait 7,5, plus 0, ...

E1 - ça ne marche pas, réfléchis!

E2 - on partage l'intervalle en 2 entre 0,5 et 0,75, l'écart, cela fait 15, donc 7,5.

E1 - l'écart, c'est 0,25, donc divisé par 2, cela fait 0,12.

E2 - donc ça fait 0,62. Cela fait 1/2 et 625 divisé par 1000 et l'écart est de 0,125, 125 divisé par 1000.

E1 - ça peut être de l'autre côté.

Elles reçoivent le message.

E2 - alors, c'est bon ?

E1 - oui.

E2 - on divise par 2 encore, 0,5 et 0,625; ça fait quoi comme écart.

P. (à la classe entière): *juste une seconde, il y a un élément que je n'ai pas donné. A la fin, on va s'arrêter dans quelque temps, on regardera, parmi tous les groupes, on regardera ceux qui sont arrivés au tir le plus précis. Il y a un challenge intergroupe, si vous voulez, on regardera quel est le groupe qui est arrivé à affiner son tir le plus possible. Vous avez donc intérêt à jouer sur la rapidité des calculs.*

E2 - nous, on est mal parti (rires).

(à l'autre binôme):

E2 - attends, on a même pas fini de réfléchir.

E1 - c'est compris entre... il faut prendre la borne inférieure 0,56.

P.: s'ils ont dit oui là et non là, qu'est-ce que vous pouvez en déduire ?

E1 - en fait il y a deux chiffres après la virgule, on est sûr que c'est là dedans.

E2 - non, tu remets 1/2.

E1 - non, je ne remets pas 1/2, je remets 56 quoi, tu es d'accord ?

E2 - attends, attends, moi je crois qu'on peut proposer entre 60 et 61, donc l'écart, c'est 1/100.

E1 - allez, c'est bon, on partage encore en deux, on est à 60 pour la borne inférieure et pour la borne supérieure ? 605 ?

E2 - qu'est-ce que tu fais ?

E1 - tu es d'accord? entre 600 et 605 ?

E1 - donc, c'est entre 605 et 61.

E1 - tu es d'accord, on le divise en 2 encore? Ca fait 0,607.

(allez dépêchez-vous)

E2 - Attends, attends, il faut être sûr ?

(mais de quoi doutez-vous?) (rires)

P.: ca y est, ça accélère un peu ! (rires) alors là, vous semblez tenir une précision.

E1 - là, c'est bon.

E2 - la !, ça va mieux.

(elles répondent vite mais c'est pour poser les questions)

E1 - oui, mais on réfléchit pas bien. Laisse tomber qu'on aille doucement !

E2 - attends, c'est non, donc c'est supérieur à 607.

E1 - d'accord oui..

E2 - 609 par exemple on met...

E1 - Attends, là, c'était compris entre ça et ça.

E2 - 609 on peut mettre ou 61?

E1 - tu pourrais reprendre, oui, mais enfin, tu vois ce qu'ils font eux, ils rajoutent à chaque fois leur chiffre derrière.

E2 - mais là ce n'est pas bon.

E1 - en fin de compte, nous on essaie de s'approcher par tâtonnement et tu vois ce que je veux dire et on se plante.

E2 - C'est pas par tâtonnement, ce n'est pas là-dedans, donc c'est après.

E1 - tu vois ils remontent d'une unité à chaque fois.

E2 - on fait comment alors?

E1 - ben 0,607 c'est ça et 0, 609 et ils nous ont dit non, alors regarde tout ce qu'on a comme "non", alors que là on avait 0,60...

E2 - mais, oui, mais entre 60 et 61, 60,5 ; 60,6 c'est forcément entre...

E1 - non, on a proposé ça, en fin de compte, il aurait plutôt fallu proposer, remettre des chiffres après.

E2 - là on sait que ce n'est pas compris dedans, donc c'est forcément supérieur à 0,609 c'est forcément compris entre 609 et 610.

E1 - oui, mais on s'égare, parce qu'on avait bien cerné entre ça et ça.

E2 - oui, mais c'est imprécis, il faut un troisième chiffre.

E1 - mais pourquoi avoir mis toujours ce chiffre 5.

E2 - mais non on a mis d'abord 60 c'est 600, ça revient à la même chose. Après 605, on nous a dit non, donc on monte plus haut, entre 605 et 607, on nous a dit non, donc on monte plus haut 607 et 609, on nous a dit non, donc c'est encore plus haut. Tu ne crois pas ? moi je proposerais 61.

E1 - 0,61, c'est ça que tu dis ?

E2 - non j'arrive pas à rajouter un autre chiffre, puisque c'est entre ça (0,609) et ça (0,61).

P. : *On peut arrêter là...*

P. : *Est-ce qu'on peut stopper les activités de groupe...*

(si c'est pas bon, c'est que vous nous avez donné une fausse information)

E1 - c'est bon, celui-là, il est supérieur à celui qu'on a nous, donc forcément il n'est pas bon.

E2 - le nombre qu'on a nous, si vous mettez <.

E2 - c'est un chiffre à virgule qui se termine, celui que tu as calculé!

E2 - non ça ne se termine pas, ce n'est pas possible que ça se termine, je mettais les chiffres qu'il y avait derrière.

(intervention de P.)

Annexe C3I : Entretien étudiant E1 après le tireur d'élite

Ce qui m'a dérangé dans les exercices, c'est que j'ai beaucoup de mal à voir ce que sont ces chiffres après la virgule.

P: *Ton problème, ce sont les chiffres après la virgule?*

Oui, c'est vraiment un problème. J'ai eu un petit peu le déclic, c'est avec le tireur d'élite, quand on a commencé à encadrer notre cible par deux nombres. J'ai eu un peu le déclic, mais j'ai encore beaucoup de mal à donner du sens à un nombre décimal: par exemple entre 0,602 et 0,610 à cause des chiffres après la virgule. J'ai du mal à voir un dixième, un centième. Pour moi, ce n'est pas très clair. Je me représente un peu quand c'est 0,2, mais quand c'est 0,233, je me sens très mal à l'aise. Ce 233, j'ai envie de le prendre comme 233 et de m'en servir comme un nombre entier. A vrai dire, j'ai aussi appris qu'un nombre décimal, ça finissait. Le fait d'utiliser ses connaissances dans des exercices, ça m'a remis en situation maths comme j'étais en terminale. Je savais pas trop par quel bout prendre l'exercice et je me sentais mal en situation. Au lycée, on faisait des exercices pour aborder la fameuse connaissance en mathématiques, ça m'a toujours mise mal à l'aise. Je ne dis pas que le cours magistral, qui est hors portée, c'est mieux. Mais là j'aurais voulu presque plus recentrer mes connaissances avant de passer à l'acte. Moi, j'avais du mal à voir ce que c'était ces chiffres après la virgule. C'est vrai que j'avais du mal à voir où on allait avec le premier exercice. La finalité de l'exercice, je crois que c'est ça qui a été un peu gênant.

P: *Ça, c'est la première situation.*

Les petits rebonds? oui. Moi, ça a été plus le déclic avec tireur d'élite et encadrement.

P: *Ça répondait aux questions que vous vous posiez?*

C'était aussi parce que nous étions avec en face l'autre groupe qui marchait bien et poussait à aller vite. Donc il fallait qu'en réfléchissant sur 0,60, le mettre sous forme "fractionnelle" et il fallait aller vite. Et la correction, voir que 0,62, c'était 62/100 et 620/1000.

R1: *C'était l'objectif de la séance de voir qu'un rationnel pouvait être encadré par les décimaux. Cela donne du sens, non seulement aux chiffres après la virgule pour les nombres décimaux, mais aux chiffres après la virgule pour les rationnels.*

Voilà. Je suis sortie de cet exercice-là, j'avais moins zéro, parce que j'avais l'impression de bloquer, je sentais bien que ça n'allait pas, je n'arrivais pas à aller vite, j'avais du mal à comprendre et en même temps cela me permettait de comprendre un certain nombre de choses. Tandis que le robot...

P: *c'est celui-là qui a déclenché le refus?*

Le robot. Je me retrouvais avec N. et C. qui sont rapides. Ils m'amenaient à raisonner dans le bon sens si je puis dire. Parce que je m'en suis rendu compte quand il a fallu réexpliquer, je n'ai pas su réexpliquer et c'est là que je me suis aperçu que je n'avais pas si bien compris que ça. Quand on se retrouve avec des gens qui ont une pensée qui va droit au but, moi, je ne suis pas, j'ai du mal à suivre.

1. Il s'agit de l'observateur de la séance.

R: *Justement par rapport à un cours magistral, l'hypothèse que l'on fait c'est qu'il y a des interactions au sein des groupes. Vous pouvez intervenir plus facilement au sein d'un groupe que dans un cours magistral.*

Avec le tireur d'élite, j'ai commencé à voir la correspondance fractions-décimaux. Je ne voyais pas du tout. J'ai compris le rapport des chiffres après la virgule avec les fractions. Je ne peux pas dire encore que je trouve ça très facile. Je n'aurais pas besoin d'un cours magistral, mais de reprendre...

P: *Est-ce que tu peux identifier la nature du travail que tu vas faire maintenant?*

Je vais regarder le cours et je pense que le tireur d'élite ou le robot, je vais voir ça d'un autre œil. Parce quand j'ai fait le robot et le tireur d'élite, c'était vraiment le tâtonnement. Au départ, je ne voyais pas que l'écart en fin de compte, cela donnait la direction de tir. Je ne voyais pas.

P: *La situation t'a posé problème?*

Elle m'a posé problème. Parce que d'encadrer une fraction, j'ai bien vu sur ma calculatrice cela faisait 0, avec plein de chiffres, mais j'ai du mal de le mettre en fraction et de le reporter sur le "graphisme", de voir à quoi cela correspond, de cerner ce point, j'avais du mal oh là là. Donc je travaillais avec mon binôme et on se posait des questions: il avait les mêmes difficultés. On avait du mal à calculer, par exemple si on savait que c'était entre 0,65 et 0,66 et on voulait faire la moitié de cet écart. On a pataugé.

P: *Vous l'identifiez très bien ça. Tu as du mal à faire le lien entre décimal et fraction?*

Oui.

R: *Vous avez des connaissances. Rationnels, c'est quelque chose qui n'est pas connu, si on annonce à l'avance ce que l'on veut vous faire apprendre, on tue la situation. Parce que justement les situations, elles visent à ce que les gens reconstruisent un certain nombre de notions.*

J'aurais eu un cours magistral sur les décimaux: c'est une écriture avec une virgule etc... Je ne pense pas que je me poserais les questions que je me pose. J'avais l'impression d'avoir compris les décimaux, parce que je les avais employés dans les soustractions, multiplications, etc... dans toute ma scolarité. Pourtant j'étais plutôt scientifique, j'ai fait un bac D. Je les employais normalement. Mais je n'avais pas la notion de ce qu'étaient ces chiffres après la virgule. Je ne comprenais pas bien.

R: *Le problème, c'est que vous allez avoir à les enseigner. Il va falloir trouver des contextes où les enfants vont devoir donner du sens.*

Je viens de m'apercevoir seulement maintenant que je donnais une mauvaise signification à ces chiffres après la virgule. C'est flagrant, je l'ai reconnu dans les petits tests que j'ai passés en premier. C'est flagrant, quand il a fallu donner le nombre de chiffres entre deux décimaux. Moi, j'ai fait une soustraction. Mais je sens encore que ça n'est pas vraiment maîtrisé. Mais je sens qu'il y a un problème. Je sais où est mon problème, je sais ce qui ne va pas. Ce que je n'ai pas aimé, c'est aussi les situations, à la fin, ça angoisse pas mal: on se dit que des petits exercices ça irait plus vite. Et puis en plus, ça me mettait en situation mal à l'aise parce que ça me faisait voir que ce que je croyais maîtrisé, ce n'était pas ça. Dans le tireur d'élite, je m'en suis bien rendu compte que je maîtrisais pas. Même dans le robot.

R: Nous faisons l'hypothèse qu'il y a apprentissage que s'il y a une phase de déséquilibre. Il faut qu'il y ait une stabilisation par la suite.

P: C'est ce que j'avais essayé de faire la dernière fois en faisant les mises au point, en particulier la définition du décimal, du rationnel, je vous l'ai donnée, les critères de reconnaissance, je les ai donnés. Petit à petit.

Moi, cela ne s'est vraiment déclenché qu'après la correction du tireur d'élite. J'ai compris ce qu'était vraiment un décimal parce qu'avant, je ne savais pas.

P: Tu confirmes qu'il n'y a apprentissage que si il y a déstabilisation parce que j'imagine...

Il y aurait eu un cours magistral, j'aurais rien vu en fait. Quand N. demande à quoi ça sert, elle avait besoin en fin de compte de définitions elle aussi. Le fait que vous donniez des définitions, c'est ce qu'elle attendait aussi. Je ne sais pas si elle ressent la même chose que moi, mais ça a été dur.

P: Il m'a semblé qu'il y a eu un problème avec la dénomination. On a appelé Modules Décimaux et on a commencé à parler de fractions et de rationnels.

Oui, c'est dur parce qu'on a des connaissances qu'on veut absolument calquer. Oui, cet ensemble des rationnels comme on l'appelle. On ne savait pas pourquoi on a besoin de faire les rationnels par rapport aux entiers. Pourtant on savait bien qu'il y avait des choses qui s'emboîtaient.

R: Pour moi, c'est rassurant parce que, quand les gens se posent des questions, ce sont de bonnes questions. Le problème, c'est de pas créer une déstabilisation trop grande: il faut à la fois qu'il y ait un déséquilibre mais pas trop fort pour que les gens ne se sentent pas complètement perdus.

Pourtant, toutes ces choses-là, il faut que ce soit clair dans ma tête si je veux pouvoir les enseigner correctement. C'est important que je clarifie tout ça.

P: A un moment donné, N., il part du principe qu'il a besoin de connaissances. Alors là, il y avait besoin de connaissances par rapport aux décimaux. Il y avait un module "décimaux", je prends un exemple, je ne sais pas ce que c'est que tous ces chiffres après la virgule, j'ai oublié, il peut avoir éventuellement le même point de vue et nous on arrive au lieu de parler de décimal, on parle de fractions et de rationnels.

R: Nous, on pense que les décimaux sont intéressants que si on les situe par rapport aux rationnels. C'est difficile de parler de décimaux si on ne parle pas de rationnels.

(une autre étudiante rejoint le groupe)

Toi, cela t'a gêné les séances sur les décimaux?

Non, pas particulièrement.

Moi, c'est plutôt ça: je pensais avoir bien compris et en fin de compte cela m'a tout foutu en l'air. Parce que je me suis aperçu que je ne mettais pas de sens.

R: Le problème, c'est d'avoir un processus qui vous aide à reconstruire.

Oui, oui, mais je l'ai reconstruit à la fin en sortant du tireur d'élite. Pas avant, pas avec le robot.

P: *Est-ce que vous pensez qu'il y a eu des séances qui ont été trop longues?*

En principe le travail d'aujourd'hui sur calculatrices vise à faire le lien entre valeurs approchées. C'est bien préparé par le tireur d'élite. Là, on doit voir les limites de ces décimaux par rapport aux autres objets mathématiques que l'on manipule comme $1/3$ ou $\sqrt{3}$, parce que la calculatrice est obligée d'interpréter pour être conforme au fait que $1/3 \times 3$ cela doit faire 1. Sinon elle ne répondrait que des 9.

Dans le robot, je n'ai pas vu de décimaux là dedans.

R: *On voulait montrer que les rationnels étaient en quelque sorte indépendants des décimaux. Dans le test de départ, il y a deux catégories de gens, ceux pour qui c'est tout le même "pataquès", fractions, décimaux, c'est tout pareil et les autres qui séparent: ce sont les trucs avec une virgule. A part pour une ou deux personnes pour lesquelles cela semble clair, pour la plus grande partie, "décimal" est associé à "fraction". L'activité est donc forcément déstabilisatrice parce qu'elle dissocie les deux dans un premier temps.*

Pour moi, c'était ça, pour moi c'était pareil. La fraction et la division, je ne sais plus: une division comme on en a parlé, c'est plus facile de la voir par itérations. On n'a plus l'esprit vierge.

Bon, moi, les mathématiques, j'ai toujours eu du mal. En physique, on parle par exemple d'un petit skieur, ou même en Biologie, c'est parlant. La biologie, on voit. En mathématiques, moi, je ne sens pas.

Annexe C3m

Le saut de n'importe quel automate est-il un nombre?

Un entier n peut être considéré comme un saut dont le couple générateur est $(n ; 1)$
On dira que les sauts sont des nombres si l'ensemble des sauts a certaines propriétés analogues à celles de l'ensemble des nombres entiers, c'est à dire si on peut les comparer et faire des opérations .

Consigne

Vous travaillez par groupes de 4 ou 5 et vous allez essayer de construire un nouvel ensemble de nombres. Vous devez produire une affiche permettant de communiquer à tous les résultats et leurs justifications.

1. Peut-on comparer deux sauts ?

Soient deux automates A et B:

A atteint 8 en 3 sauts: son saut S_A peut être désigné par $(8 ; 3)$.

B atteint 5 en 2 sauts: son saut S_B peut être désigné par $(5 ; 2)$.

Proposer des règles de comparaison des sauts S_A et S_B .

Fournissez des arguments sur la pertinence des règles fournies.

2. Peut-on additionner deux sauts ?

Soient deux automates C et D:

C atteint 10 en 12 sauts: son saut S_C peut être désigné par $(10 ; 12)$.

D atteint 3 en 9 sauts: son saut S_D peut être désigné par $(3 ; 9)$.

Consigne

Proposez des règles permettant de définir une addition des sauts S_C et S_D .

Fournissez des arguments sur la pertinence des règles fournies.

Annexe C3n : Groupe n°4 (deuxième partie automates)

- 1 E : n, c'est le nombre de sauts ?
2 E : oui, tu as raison, n c'est la position et 1, c'est le saut.
3 E : je ne comprends rien de ce qu'il faut faire.
4 E : monsieur, on ne comprend pas les consignes.
5 E : oh là là, ce n'est pas clair.
6 E : je ne comprends rien.
7 E : Zorro est arrivé!
8 E : qu'est-ce qu'il veut, qu'on lui fasse un petit tableau comme ça ?
9 E : c'est-à-dire que le nombre de sauts doit toujours être un nombre entier.
10 E : oui, mais ça a toujours été comme ça.
11 E : la position sera toujours un entier aussi.
12 E : regarde, c'est vachement imposé: un entier n peut être considéré comme un saut dont
13 le couple générateur est n, ils reprennent n, c'est pour un nombre entier ou pour une
14 inconnue.
15 E : pour un nombre entier.
16 E : pourquoi ils disent un entier n peut être considéré comme un saut.
17 E : alors que le saut, c'est ça, mais c'est vachement mal fait.
18 E : il y a A. qui dit pour tout le monde.
19 E : il y a P. qui parle pour tout le monde (rires).
20 E : je ne comprends rien, je sens que ça va m'énerver.
21 E : et puis c'est vachement mal fait.
22 E : pardon Monsieur.
23 E : pourquoi tu rigoles.
24 E : regarde, un entier peut être considéré comme un saut dont le couple générateur est n et
25 1, et 1, c'est la position du saut et n c'est la position de l'automate.
26 E : oui, c'est considéré pour la position et pour le saut.
27 E : avant n, c'était pour la position, regarde, là un automate arrive à 10 en 14 sauts. Donc
28 au début, 10 c'était la position.
29 E : n était bien entier aussi.
30 E : mais c'était la position.
31 E : n, c'est l'entier où on arrive en 1 saut.
32 E : oui, regarde, l'entier n peut être considéré comme un saut.
33 E : si en fait, c'est ça, il atteint 8 en 3 sauts.
34 E : oui, c'est ce que j'ai compris depuis le début, non, mais ce que je n'aime pas...
35 E : c'est bien le même couple alors ?
36 E : non, moi je disais que c'était pareil, mais vous m'avez fait changer.
37 E : le problème, c'est l'entier: un entier n peut être considéré comme un saut.
38 E : oui, là, c'est mal expliqué.
39 E : en plus, c'est bizarre parce qu'on voulait comparer les sauts.
40 E : ça, c'est une note explicative, qui annonce tout ça ou c'est un truc à faire, je ne
41 comprends pas.
42 E : c'est une consigne ?
43 E : c'est super mal fait comme consigne.
44 E : c'est quoi, ce qu'on doit faire ?
45 P.: *vous devez produire une affiche pour communiquer à tous les résultats et leur*
46 *signification. Le problème: vous voulez comparer deux sauts.*
47 E : mais je ne vois "essayer de construire un nouvel ensemble de nombres".
48 E : parce qu'effectivement, un saut va être considéré comme un nombre.
49 E : moi, je cherchais ça, mais je ne comprends pas.
50 P.: *regarde, le saut de n'importe quel automate est-il un nombre? Un entier n peut être*
51 *considéré comme un saut.*
52 E : ben ça c'est faux, parce que position, c'est n et 1, c'est le saut. On a changé alors.
53 P.: *non, en 1 saut il arrive à 3.*

Annexe C3n : Groupe n°4 (deuxième partie automates)

- 54 E : pourquoi mélanger n en position et vous dites, un entier n se ramène, peut être ramené
55 à un saut.
56 E : justement, cela peut être ramené à 1, parce que c'est un saut.
57 P.: *c'est un saut.*
58 E : combien il fait en un saut, c'est très...
59 P.: *ça caractérise .*
60 E : cela nous embrouille, il ne fallait pas mettre n.
61 E : c'est employer n .
62 P.: *non, c'est le contraire, essaie de réfléchir un peu, parce qu'un saut, c'est quoi ? . Tu*
63 *as le saut qui te permet en 3 sauts d'arriver à 4, ça veut dire qu'en un saut, tu vas arriver*
64 *en quel endroit ?*
65 E : en un saut à 4 divisé par 3.
66 P.: *donc en fait tu cherches à caractériser la longueur du saut, c'est bien l'endroit où tu*
67 *arrives en un saut.*
68 E : oui, mais c'est pas un entier.
69 P.: *quelques fois, ce n'est pas un entier, ça peut être un entier.*
70 E : c'est ce qu'on a vu.
71 P.: *c'est pour ça ici, ce qui est proposé, c'est qu'effectivement, c'est qu'un entier peut*
72 *être considéré comme un saut.*
73 E : ah, d'accord.
74 P.: *on a pas dit que tous les sauts étaient des entiers, mais que tous les entiers peuvent*
75 *être considérés comme des sauts.*
76 E : oui.
77 P.: *tu n'as pas l'air d'être convaincu.*
78 E : non, mais c'est la manière dont c'est écrit, c'est mal écrit.
79 E : ce n'est pas explicite.
80 P.: *effectivement, mais je crois que c'est parce que le sujet est difficile. Vous refusez,*
81 *parce qu'il me semble que ce qui vous choque, c'est que d'un côté, il y a un entier, et*
82 *d'un autre côté, il y a un couple et il y a le même n. Pour vous, un saut, c'est un couple et*
83 *à un moment donné, on va dire qu'un saut, ça peut être aussi un entier. Si je dis en 1*
84 *saut, j'arrive à 3, moi, j'aurais envie de dire, c'est ça. Je laisse tomber.*
85 E : et si en deux sauts, j'arrive à 3, ben mon saut, il sera de 1,5.
86 E : c'est pertinent.
87 E : d'accord.
88 E : donc nous, on s'intéresse qu'aux couples comme dans cet exercice, où ça tombe sur
89 des entiers en fait.
90 P.: *ou alors, tu vas essayer de caractériser.*
91 E : un saut.
92 P.: *non, parce que regarde! vous allez essayer de construire un nouvel ensemble de*
93 *nombres.*
94 E : mais, c'est ça qu'on ne comprend pas, construire un nouvel ensemble de nombres.
95 P.: *justement, parce que là on parle des sauts. Le problème, c'est que parfois, les sauts*
96 *sont des entiers, alors là, ça va bien, mais quand c'est pas des entiers qu'est-ce que tu*
97 *fais ? Tu écarteras les sauts si tu veux prendre en compte... .*
98 E : ben non.
99 P.: *justement, c'était pour répondre à cette préoccupation..*
100 E : d'accord.
101 P.: *Et vous, vous ne vous êtes pas intéressés à cette question.*
102 E : ben, on essayait de comparer les sauts.
103 E : si on essayait de trouver le rapport.
104 E : on cherche qui va le plus vite ou qui va le moins vite. Comment comparer ?
105 E : on ne pourra pas aller voir le rapport pour un saut ?
106 E : il arrive à 8 en 3 sauts.
107 E : si parce qu'il y a 6 sauts à un moment donné pareil.

Annexe C3n : Groupe n°4 (deuxième partie automates)

- 108 E : on ne pourra jamais l'avoir.
109 E : on ne peut pas avoir la même position pour le même nombre de sauts.
110 E : si c'était 9, 3 ça serait bon, mais là on a 8, 3, c'est pas possible parce que 8 n'est pas
111 divisible par 3.
112 E : construire un nouvel ensemble de nombres.
113 E : c'est ça qui ne va pas !
114 E : non d'abord, il faut les comparer
115 E : avec cet exercice, on doit arriver à construire un nouvel ensemble de nombres, c'est ça
116 qu'on doit faire !
117 E : les décimaux, oui, d'accord.
118 E : laisse tomber, là on ne peut pas. Il faut qu'on compare, ensuite on verra.
119 E : si on comparait avec le même nombre de sauts.
120 E : voilà.
121 E : et bien il y a 6 et 6.
122 E : ben oui, là tu multiplies ici par 2 et là par 3 tu vois que le premier, il fait 16, 6 et le
123 deuxième il fait 15, 6.
124 E : et alors.
125 E : ben avec 6 sauts, il y a en a un qui est dans la position 16 et l'autre dans la position
126 15, donc il y en a un qui trace plus vite que l'autre.
127 E : un petit peu plus vite.
128 E : l'automate A est plus rapide que l'automate B.
129 E : et pour poser les règles de comparaison, c'est de chercher le même nombre de sauts
130 E : celui d'en haut va plus vite.
131 E : ou alors, si on ramène à un saut, cela fait $8/3$ et $5/2$.
132 E : tu ramènes à un saut ?
133 E : ça évite de ramener aux entiers.
134 E : c'est pourquoi, ma méthode est beaucoup plus pertinente.
135 (rires)
136 E : on peut utiliser les deux en fait.
137 E : et là, tu fais par 30 ?
138 E : en 21 sauts à quelle position est-ce que cela va se trouver? c'est ça qu'on nous
139 demande ?
140 E : les sauts tu peux arriver à les additionner, ce que tu ne peux pas additionner, ce sont
141 les positions.
142 E : et pourquoi tu additionnerais comme ça les sauts ?
143 E : oui, mais justement, là cela fait un couple de sauts, cela a rapport à ce qu'il avait dit, il
144 faut additionner un saut de C et un saut de D. Là, il en a fait 12, là il en fait 9, donc il faut
145 ramener à 1. Donc ça, c'est pour un saut ce sera $10/12$ et l'autre en saut il va être en $3/9$,
146 et donc, il faut additionner ces deux sauts.
147 E : il faut donc retourner à l'unité: en un saut, tu peux les ajouter.
148 E : et justement, cela les fait sous forme de fractions.
149 E : cela ajoute les deux sauts.
150 E : il faut mettre au même dénominateur.
151 E : ben oui.
152 E : c'est bien un saut de C et un saut de D qu'il faut additionner.
153 E : il faut donc bien mettre au même dénominateur, ce qui fait $5/6 + 2/6, 7/6$.
154 E : attends.
155 E : c'est fini, tu as deux automates C et D, un saut de D peut être désigné par la doublette
156 (3, 9). Si on a un automate et qu'on le règle de telle sorte qu'il fasse un saut de C et un
157 saut D.
158 E : oui, il faut que chacun saute son tour.
159 E : mais tu ne peux pas le désigner autrement.
160 E : en additionnant un saut de C et un saut de D, on obtient $7/6$. On peut le noter de la
161 forme suivante, c'est à dire, il sera à la position $7/6$ en un saut.

Annexe C3n : Groupe n°4 (deuxième partie automates)

- 162 E : oui.
- 163 E : ou alors, à la position 7 en 6 sauts.
- 164 E : oui, c'est bon.
- 165 E : on revient comme ça à des nombres entiers, alors...
- 166 E : c'est l'addition des deux couples (5, 6) et (2, 6).
- 167 E : voilà.
- 168 E : ben, c'est bon.
- 169 E : proposer des règles.
- 170 E : ben, ça y est !
- 171 E : la règle, c'est de chercher à quoi correspond un saut.
- 172 E : fournissez des règles sur la pertinence des règles, c'est très pertinent !
- 173 E : comment tu as additionné? Tu as réduit avant d'additionner, tu n'as pas fait comme ça.
- 174 E : comment ça, je n'ai pas fait comme ça? 10/12 et 5/6 c'est bien pareil.
- 175 E : oui, tu réduis à 1/3 , c'est bien pareil!
- 176 E : ben oui, tu peux réduire, enlever les 2 et les 3.
- 177 E : fais-le avec ta machine 3/9 et 1/3, c'est le même nombre.
- 178 E : pour les additions, c'est pas pareil.
- 179 E : oui si tu as $5+2/6+2$, tu ne peux pas faire 5/6.
- 180 E : oui, d'accord.
- 181 E : arguments sur la pertinence des règles (rires).
- 182 E : oui, il faut des arguments.
- 183 E : déjà la première phrase n'était pas vraiment claire, alors la pertinence !
- 184 E : ce n'est pas un objectif clair !
- 185 E : on reprend la comparaison, comment on a fait ?
- 186 E : on essaie de voir à quelle position on arrive avec le même nombre de sauts.
- 187 E : à mon avis, il fallait utiliser la même méthode avec les deux, si on ramène à un rapport à un, on va voir aussi quel est celui qui va le plus vite. Le premier, il va être à la position 8/3 alors que l'autre il va être à la position 5/2.
- 188 E : oui.
- 189 E : comme ça chaque fois, on essaie de revenir à un saut.
- 190 E : mais ça ne tombe pas sur un entier.
- 191 E : justement, ça permet de voir que l'on peut passer par des nombres qui ne sont pas entiers.
- 192 E : mais après, comment tu compares ?
- 193 E : ben en un saut...
- 194 E : mais on du mal à évaluer, je trouve cela moins précis.
- 195 E : 5/2, c'est 2,5 et 8/3, c'est plus que 2,5.
- 196 E : moi, ça ne me parle pas, ça me parle mieux 16, 6 et 15, 6 que ...
- 197 E : tu peux faire les deux.
- 198 E : mais ce que tu peux faire après, c'est les calculer.
- 199 E : d'accord en calculant oui.
- 200 E : même sous forme d'une fraction, 8/3 et 5/2 on peut très bien multiplier 2 en bas et en haut, ça fait 16/6 et là 15/6. Si on réduit au même dénominateur.
- 201 E : on arrive de nouveau au 15, 6 et au 16, 6.
- 202 E : oui, mais on l'a sous une autre forme.
- 203 E : mais c'est moins visible.
- 204 E : moi, je ne vois pas la différence.
- 205 E : si, là ça permet d'avoir toujours 1.
- 206 E : ce que je voulais dire c'est ça au départ, trouver le couple (n,1), c'est ce qu'on a fait là et là, tandis que là, on n'a pas les couples sous la forme (n,1).
- 207 E : de toutes façons, il faut bien arriver aux décimaux, donc !
- 208 E : donc le nouvel ensemble de nombres, cela devient des fractions !
- 209 E : en moins clair.
- 210
- 211
- 212
- 213
- 214
- 215

Annexe C3n : Groupe n°4 (deuxième partie automates)

- 216 E : et produire une affiche pour communiquer à tous les résultats !
217 E : c'est pour montrer qu'en fait dans beaucoup de cas on arrive pas à obtenir en un saut
218 une position définie.
219 E : si le robot fait un saut aléatoirement, il y a vraiment peu de chances qu'il tombe sur un
220 nombre entier!
221 E : oui.
222 E : et tous ces autres nombres. Un nombre entier on pourra l'obtenir s'il fait plusieurs
223 sauts et après on pourra l'exprimer sous forme de fraction, c'est ce qu'on a fait en fait.
224 E : qu'est-ce que tu as dit là.
225 E : dans l'ensemble des nombres, il y a peu de chances qu'il tombe sur un nombre entier,
226 mais on pourra toujours le ramener à une position entière si on fait plus de sauts et ensuite
227 exprimer le saut sous forme de fraction.
228 E : d'accord, dans le cas ici, ce n'est quand même pas un nombre entier.
229 E : là, non justement, c'est pour montrer qu'en un saut, il arrive très rarement sur des
230 décimaux. On peut très bien obtenir un entier si on multiplie tout ça par 9...
231 E : ça me gêne d'avoir construit ce nouvel ensemble de nombres.
232 E : ben si on l'a fait ça, on va marquer cela d'entrée, avec un saut, il y a vraiment peu de
233 chance qu'il tombe sur un entier, il tombera sur un décimal en fait.
234 E : C'est la conclusion, on le dira à la fin.
235 E : Oui, c'est ça notre ensemble..
236 E : oui, notre ensemble, c'est l'ensemble de toutes les positions qui peuvent s'exprimer
237 quand le robot fait un seul saut et vu la quantité de décimaux qu'il y a par rapport aux
238 entiers, et ben il a vraiment peu de chances.
239 E : mais tu peux avoir aussi $7 \frac{1}{4}$ en un saut.
240 E : oui, tous les décimaux, tu pourras les exprimer sous forme d'entiers. Il y a des cas où
241 tu pourras tomber sur un décimal.
242 E : et jamais sur un entier alors ?
243 E : 3, 333333... c'est un décimal ?
244 E : si, c'est un décimal.
245 E : non, c'est un réel.
246 E : ça ne finit jamais.
247 E : donc il n'en fait pas partie.
248 E : donc on n'a pas à se poser la question.
249 E : comment on écrit ça.
250 E : quand même la phrase de départ avec son (n, 1).
251 (rédaction de l'affiche).
252 E : tu te rappelles quand on faisait les devoirs de maths avec les "donc, d'où, par
253 conséquent" (rires).

Annexe C3p : Groupe n°2 (deuxième partie automates)

- 1 E : il faudrait approximer sur l'échelle.
2 E : tu fais pareil pour l'autre.
3 E : on compare les deux sur les deux graduations.
4 E : celui là il va de 5 en 5.
5 E : il y a plus simple, celui-là, en 6 sauts, il arrive à 15 et celui-là en 6 sauts, il arrive à 14
6 E : tu as trouvé quelque chose de commun.
7 E : oui, là, ça fait 6, j'ai multiplié par 2 en haut et par 3 en bas pour arriver au sixième saut pour trouver un entier.
8
9 E : en 6 sauts Sa atteint 14 et Sb atteint 15, attends, je vais continuer.
10 E : celui-là, il va de 2 en 2 et l'autre de 3 en 3.
11 E : on peut continuer, encore multiplier par 2 et encore multiplier par 3, 12.
12 E : et tu fais ça pourquoi ?
13 E : pour comparer les sauts Sa et Sb.
14 E : oui, mais ils ne se rejoignent pas.
15 E : c'est pas 14, c'est 16.
16 E : oui, 16, Sa, il va plus loin que Sb.
17 E : en fait ça revient à chercher, comment ça s'appelle, les dénominateurs communs.
18 E : oui, les dénominateurs communs.
19 E : on peut revenir à 2 sauts...
20 E : 16, 6 et 15, 6, les règles de comparaison, par exemple en regardant ça, on peut dire
21 que celui qui est arrivé en 16 en 6 sauts et l'autre qui atteint 15 en 6 sauts.
22 E : donc Sa va plus loin que Sb.
23 E : le saut de Sa est plus grand que le saut de Sb.
24 E : c'est ça les règles de comparaison.
25 E : on réduit au même dénominateur.
26 E : pourquoi on a choisi ce couple là 3 et 2 et pas celui-là ?
27 E : on peut faire pareil avec 40, on peut multiplier par 5.
28 E : là, il ferait 40 en 15 sauts et là il ferait 40 en 16 sauts.
29 E : oui, de toutes façons, Sa est plus grand que Sb.
30 E : les règles de comparaison, c'est de trouver les dénominateurs communs aux deux.
31 E : on aurait pu le trouver aussi avec ça.
32 E : non, il lui faut un saut de plus.
33 E : il faut multiplier par 5 et là par 8.
34 E : mais ça revient au même de toutes façons.
35 E : ici il arrive en 15 en 6 sauts et l'autre en 16 en 6 sauts, donc lui il a des sauts plus...
36 non, attends !
37 E : plus courts.
38 E : Sa va plus loin que Sb.
39 E : donner des arguments sur la pertinence des règles.
40 E : mais quel est l'intérêt d'additionner deux sauts.
41 E : tu en es déjà là, toi.
42 E : et vous ?
43 E : ben à trouver des arguments sur la pertinence des règles.
44 E : les arguments de toute façon, c'est de trouver le dénominateur commun.
45 E : oui, c'est la règle qui nous permet justement de comparer les deux automates soit au même nombre de sauts, soit à la même distance.
46 E : peut-on additionner des sauts ?
47 E : ben oui, tu peux le faire avec les dénominateurs communs.
48 E : ça sert à quoi ?
49 E : je ne sais pas.
50 E : donc, il faut additionner ça.
51 E : ils n'ont pas la même longueur de sauts.
52 E : oui, ils n'ont pas la même longueur de saut.
53 E : et bien, tu te ramènes soit au même nombre de sauts, soit à la même distance, comme ça on ajoute, il me semble.

Annexe C3p : Groupe n°2 (deuxième partie automates)

- 56 E : attends, moi, je veux bien additionner.
57 E : donc 5, 6 et 5, 15.
58 E : si tu additionnes, ça fait le truc 5 en 21.
59 E : tu peux aussi rediviser par 6.
60 E : mais j'ai déjà divisé par 3 le tout.
61 E : tu peux encore rediviser par 2.
62 E : mais ça veut dire que C atteint 5, 6 tous les 5, 15.
63 E : ils sont tous les deux à la distance 5 en 21 sauts.
64 E : il faut ajouter les distances aussi.
65 E : comment ça ?
66 E : lui, il arrive à 5 en 6 sauts, et celui là , il arrive en 5 en 15 sauts, si tu les additionnes
67 tous les deux avec leurs sauts, ils arrivent en 10, ils ne peuvent pas arriver en 5.
68 E : oui, c'est vrai .
69 E : on peut imaginer qu'ils prennent le relais: si Sd prend le relais de Sc.
70 E : ah , oui.
71 E : voyons voir si cela marcherait là si on additionne les deux couples de départ, 10 et 3
72 ça fait 13 et 12 et 9, 21, ben non, puisque là il arrive en 10 en 21.
73 E : proposer des règles.
74 E : il faut les ramener à un dénominateur commun, qu'il soit de l'un ou de l'autre.
75 E : oui, au lieu de faire 5, 6 et 1, 3, on va faire la deuxième colonne pareille.
76 E : tu comprends ce qu'on veut dire.
77 E : ça fait 5, 6 et 2, 6.
78 E : donc ça fait 7, 12.
79 E : si on additionne, ça fait quoi, est-ce que ça peut s'interpréter sous forme de relais.
80 E : ça veut dire, il ne va pas sauter en même temps, il vont sauter l'un après l'autre.
81 E : si tu mets des fractions, ce n'est pas des entiers.
82 E : mais c'est un nouvel ensemble de nombres.
83 E : là, en un saut, la distance ne peut pas être un nombre entier.
84 E : combien on avait trouvé pour les trucs, 15/6 et 16/6 et là 1 saut.
85 E : on a trouvé le dénominateur commun.
86 E : si on ramène à un saut, comme on a fait au départ.
87 P. à l'ensemble de la classe: *vous pensez...*
88 (ils amorcent la rédaction de l'affiche)
89 E : ce nouvel ensemble, c'est les fractions en fait, ce n'est pas les décimaux, ce n'est pas
90 la même chose.
91 E : on laisse sous forme de fraction.
92 E : on ne peut pas le mettre sous forme décimale.
93 E : tous les entiers sont des décimaux, puisque $1 = 1,00000$ donc c'est un décimal.
94 E : bon en un saut, cela donne $8/3$ pour 1.
95 E : et pour Sb tu feras comment ?
96 E : la même chose, $5/2$ pour 1, on ramène tout à 1.
97 E : dans la consigne, rien ne dit qu'on ramène à 1.
98 E : non, mais il fallait construire un nouvel ensemble: nous, on est resté dans les entiers.
99 E : quoique, non, on n'est plus dans les entiers, là.
100 E : quand on ramène au même dénominateur, on parle de fractions.
101 E : là, il faut diviser par 6 pour ramener à un saut.
102 E : si on formule, là, on a ramené au même dénominateur commun en ramenant à un seul
103 saut dans un premier temps.

**Annexe C4a : Chronique de la correction de l'exercice préliminaire
21/03/94**

P : Quelles réponses ?

E 19 : Moi, je me suis occupé de la virgule, 4 chiffres après la virgule. Je me suis dit 0,0001, il y a 4 chiffres après la virgule, donc je vais déplacer la virgule de 4, je la supprime.

P : Autrement dit, ce n'est peut-être pas comme ça que tu le conçois mais si je pose la division et que je décale la virgule, je la pose comme ça.
(la division est écrite au tableau)

E 19 : J'ai barré la virgule.

P : Je barre la virgule.

E : Moi j'avais commencé par 0,278, je la déplace de 3 pour avoir un nombre entier 278 et ensuite je refais la même chose sur l'autre nombre, donc j'ai 0,1. Donc à la suite de ça, la division elle est facile: 278 divisé par 0,1, on sait qu'on va décaler la virgule d'un rang à gauche pour le nombre 278. On n'est même pas obligé de la poser, cette division.

P : Tu n'es même pas obligé de la poser ?

E : Oui, parce que j'ai les données uniquement sur les virgules.

P : Autrement dit, tu continues le décalage.

E : Oui, mais dans l'autre sens. Dans ma tête, je me dis 278 divisé par 0,1. Disons que je raisonne dans l'autre sens pour aboutir au fait que je divise un nombre par 1 et ce nombre divisé par 1, c'est 27,8.

$$\begin{array}{ccc}
 0,278 & \left| \begin{array}{l} 0,0001 \\ \hline \end{array} \right. & \text{transformé en} & 278 & \left| \begin{array}{l} 0,1 \\ \hline \end{array} \right.
 \end{array}$$

P : Alors la, tu raisones dans l'autre sens pour diviser par 0,1. Il y en a qui ne sont pas d'accord ?

E11 : Il faudrait qu'elle continue dans le même sens, à continuer de décaler sa virgule vers la droite.

P : Elle a commencé à décaler vers la droite. A un moment donné, elle a voulu repartir dans l'autre sens. Toi tu proposes de continuer le décalage vers la droite: là je continue à décaler et pour pouvoir continuer à décaler, je rajoute un zéro. Donc la méthode de décalage. Il semblerait, c'est un peu ce que tu exprimes, que tu as eu peur de te tromper, tu savais pas trop bien dans quel sens il fallait décaler. Il y a d'autres méthodes ?

E4 : Avec des puissances de 10.

P : Vas-y je t'écoute.

E4 : $0,278 = 278 \times 10^{-3}$ divisé par $0,0001$, c'est 10^{-4}

P écrit $0,278 : 0,0001 = 278 \times 10^{-3} : 10^{-4}$
 $= 278 \times 10^{-3} \times 10^4$.

Tu l'écris comme ça ?

E4 : J'ai tout de suite écrit 10^4 .

P : Comment tu l'expliques ça ?

E4 : Ca correspond à une fraction, en fait $10^{-1} = \frac{1}{10}$ et $10^{-4} = \frac{1}{10000}$.

(E8 encourage et approuve ce qui vient d'être dit).

P : Vous suivez là. Les remarques des uns et des autres, c'est intéressant pour la réactualisation de connaissances, parce qu'il y a des aspects auxquels on n'a pas pensé, auxquels pense l'autre, qui peuvent être intéressants à réactualiser.

E4 : Donc l'inverse de ça, c'est 10000.

P : Donc tu utilises une règle qui est diviser, c'est aussi...

E4 : Multiplier par l'inverse.

P : Diviser, c'est aussi multiplier par l'inverse, donc vous utilisez cette règle. Est ce que vous avez envie de distinguer légèrement cette méthode diviser, c'est multiplier par l'inverse, mais la méthode qui avait été utilisée ici. Je précise: est-ce que pour vous, c'est une règle sur les exposants ou est-ce que , Pierre, quand tu expliques ta méthode est-ce que tu fais référence à des règles sur les exposants ou est-ce que tu fais référence à cette règle multiplier par l'inverse?

E4 : Pour moi, dans ma tête, c'est automatisé, cela devient des règles sur les exposants.

P : Ah! des règles sur les exposants, peut-être est-ce qu'on va les expliciter avec une règle diviser, c'est aussi multiplier par l'inverse:

$$0,278 : 0,0001 = 278 \times 10^{-3} \times \frac{1}{10^{-4}} = 278 \times 10^{-3} \times 10^4 .$$

Il y a une légère nuance: toi, tu es complètement automatisé au niveau des règles sur les écritures. Dans les deux cas on trouve 278×10 . Je n'ai pas trop déformé vos deux explications?

D'autres...?

E11 : Moi j'ai posé sous forme de fractions:

$$\frac{0,278}{0,0001} = \frac{\frac{278}{1000}}{\frac{1}{10000}} = \frac{278}{1000} \times \frac{10000}{1} = 278 \times 10$$

et j'ai réduit les deux fractions.

P : Est-ce que tu peux expliciter la règle que tu utilises?

E11 : L'expliciter, non, c'est automatique, quand il y a deux fractions l'une sur l'autre...

P : Oui mais tu pars de deux fractions l'une sur l'autre, c'est à dire simplement le... le quotient de deux fractions, non?

E11 : Oui.

P : Quand tu dis deux fractions l'une sur l'autre...

E11 : Oui, le quotient de deux fractions.

P : Alors tu passes par le quotient de deux fractions et le quotient de deux fractions, c'est diviser deux fractions c'est...

E11 : Multiplier par la fraction retournée.

P : L'inverse ou la fraction retournée comme vous voulez.

E11 : Non, mais moi dans ma tête, ce n'est pas l'inverse, c'est la fraction retournée.

P : D'accord, alors effectivement, pour diviser deux fractions, on n'a qu'à multiplier la première fraction par la deuxième retournée. Si on essaie de donner un petit peu plus de sens à cette règle un peu mécanique, comment tu l'énoncerais ? Pour faire le quotient de deux fractions, il suffit de multiplier la première par l'inverse de la seconde en espérant avoir donné du sens à la notion d'inverse d'une fraction.

Fais-nous part de tes remarques.

E6 : En fait, j'ai une seule règle: c'est de déplacer la virgule du nombre qui divise jusqu'à ce qu'il n'y ai plus de virgule et à la fin on s'arrange pour finir la division:

$$0,2780 \quad | \quad 0,0001 \quad \text{transformé en} \quad 2780 \quad | \quad 1$$

P : Au lieu de commencer par 0,278, ta règle c'est...

E6 : Moi je détache la virgule; je m'occupe du diviseur, je déplace la virgule de quatre rangs, après je déplace la virgule de quatre rangs sur le nombre de gauche.

E : Cela revient au même.

P : Cela nécessite d'écrire un zéro de plus.

E6 : Si c'est un gros nombre, on peut très bien voir un nombre avec des chiffres après, mais pratiquement le diviseur n'a pas de virgule et la division ne pose pas de problèmes.

P : D'accord, c'est une légère variante avec cette méthode là (la première énoncée). Ce qui te guide, c'est le diviseur. D'autres remarques ?

E7 : Quand on a divisé

, la virgule, elle se déplace vers la droite, mais quand je divise par 10, 100, 1000, elle se déplace vers la gauche ?

P : Vous avez tous entendu? La division par 10, est-ce qu'elle invoque la même règle dans ce cas-là. Si tu veux, il t'a donné une règle lorsqu'il y avait une virgule au diviseur. Quand on divise par 10, il n'y a pas de virgule au diviseur. C'est une autre règle dans ce cas.

E8 : Est-ce qu'on ne peut pas donner une règle plus générale: pour qu'un nombre donné sous forme de fraction soit égal à lui-même, il faut multiplier le numérateur par un nombre et il faut multiplier le dénominateur par ce même nombre ou l'inverse.

P : Tu me suggères, si j'ai bien compris, une autre façon de procéder.

E8 : En fait quand il déplace dans 0,0001 la virgule vers la droite, il a multiplié par 10000, donc cela veut dire aussi qu'on multiplie le numérateur par 10000.

P : Est-ce que tout le monde est d'accord avec ça, tachez de ne pas décrocher parce que je crois, là dessous il y a tout un tas de connaissances qui sont mises en jeu: on ne change pas une fraction, on ne change pas un quotient si on multiplie...

E : Les deux.

E8 : Oui, les deux.

P : Oui, si on multiplie dividende et diviseur par un même nombre et on ne change pas une fraction si on divise numérateur et dénominateur par un même nombre. Ici, c'est un peu pareil que tout à l'heure: je cherche à éliminer la virgule. On peut être un peu plus précis: je prends l'inverse de 0,0001, c'est à dire le nombre qui, multiplié par 0,0001, donne 1. Au passage, j'ai rappelé ce qu'était l'inverse d'un nombre. J'espère que tout le monde l'a bien saisi au passage: l'inverse d'un nombre, c'est le nombre qui, multiplié par ce nombre, donne 1.

E : On peut aussi dire que c'est le numérateur et le dénominateur.

P : Oui, oui.

E : Au niveau du langage...

P : Oui, numérateur et dénominateur, mais j'ai multiplié par l'inverse de 0,0001 parce que là c'était commode de faire apparaître 1 en dénominateur. 10000 est l'inverse de 0,0001 parce que c'est le nombre qui, multiplié par 0,0001, donne 1.

D'autres procédures encore ?

E4 : 0,2780 : 0,0001, on est dans la même unité, donc c'est équivalent à 2780.

P : Donc, si j'ai bien compris ta règle, tu t'arranges...cela te renvoyait à des techniques utilisées à l'école élémentaire. Tu proposes d'avoir le même nombre de chiffres après la virgule. La première action qu'il a, c'est de compléter l'écriture de 0,278 pour avoir le même nombre de chiffres après la virgule, ici quatre chiffres après la virgule.

E4 : Et après, comme c'est dans la même unité, on dit que c'est équivalent.

P : Je dirais qu'on est dans le même nombre de chiffres après la virgule. L'unité ne change pas, je te signale qu'entre 0,278 et 0,2780, est-ce que tu as changé d'unités.

E4 : L'idée, c'était de dire, comme on peut dire des millièmes, non des dix millièmes.

P : Oui, l'idée, c'est d'aller jusqu'aux dix millièmes.

D'autres remarques ? Je voudrais simplement attirer votre attention sur le fait que la plupart des explications que vous avez données sont essentiellement mécaniques, c'est à dire qu'elles sont dénuées de sens.

E3 : Elles sont intuitives !

E4 : Je ne sais pas si elles sont automatisées ou si c'est automatique.

P : Vous dites que c'est automatisé; Mais quand vous voulez expliquer à quelqu'un: quand tu dis, je décale la virgule de 4 rangs, comment vous pouvez qualifier ce genre de situation ?

E3 : Moi, je me rappelle que quand on divisait par 0,000 quelque chose cela donnait un nombre plus grand que le diviseur, alors je me suis dit, on doit pouvoir décaler et j'ai décalé.

P : Tu comprends bien que quand tu dis, je décale la virgule, tu n'as aucune explication relative à un sens, tu n'as pas de repères, tu ne peux pas le mettre en relation avec autre chose qu'une simple règle que tu dis.

E4 : Le problème que j'ai avec les miens, de gamins au CP, c'est qu'ils retiennent bien les procédures, ils sont très sensibles aux procédures, mais ils ne donnent pas de sens: par exemple décaler une virgule, c'est une procédure automatique.

P : Tu appelles ça une procédure, j'appelle ça une règle: ils retiennent bien une règle

E4 : Oui, mais ils ne sont pas capables de donner du sens à la règle. Les meilleurs retiennent ça sans problèmes, mais eux, je suis confronté justement...

E20 : Mais toi, tu en donnes du sens à la règle ?

E4 : Je construis du sens, mais quand je construis du sens cela marche pour les meilleurs

P : Mais comment tu construis du sens par rapport à ça ?

E4 : Pas par rapport à ça, mais moi je travaille sur autre chose. Mais on pourrait toujours expliquer le sens par exemple on le donne là.

E8 : Si on déplace la virgule de 0,0001, c'est pas la même chose que d'utiliser des puissances de 10.

P : Aider quelqu'un à voir que 0,1 c'est la même chose que quoi ?

E8 : Que un dixième.

P : 0,01 c'est la même chose que un centième, mais un centième, c'est encore diviser par 10, et je vous signale que c'est pareil: on peut donner du sens à ceci en disant que 10^{-4} , c'est diviser par 10, 4 fois de suite. Tout à l'heure dans le groupe, il y a quelqu'un qui a dit oui, mais avec 10 exposant quelque chose, on ne peut pas avoir ce type d'explication à l'école élémentaire. Effectivement la notation 10^{-4} ou 10^{-3} , vous ne la rencontrerez pas et vous ne la donnerez pas à l'école élémentaire, mais on peut très bien dire que 0,0001 c'est divisé par 10 quatre fois de suite, et vous pouvez très bien aider des enfants à construire du sens en étant très proche de la notation avec des exposants sans en parler.

10^3 c'est multiplier par 10 par 10 et par 10. Vous pouvez aussi construire du sens en disant: si je prends un numérateur 10 fois plus grand, et un dénominateur 10 fois plus grand, je ne vais pas changer. Alors vous pouvez commencer en disant si le numérateur est 10 fois plus grand, le résultat est 10 fois plus grand, si je prends un diviseur 10 fois plus grand, le résultat est dix fois plus petit. En ayant multiplié le numérateur par 10, je multiplie le résultat par 10, en multipliant le dénominateur par 10, je divise le résultat par 10, quand je fais les deux à la fois, eh bien je ne change pas la valeur du quotient: vous pouvez essayer d'imaginer des explications qui permettent de donner un peu plus de sens à ces questions-là.

P : Le deuxième exercice, juste la deuxième réponse.

(Il écrit $0,0278 : 0,001 =$)

Rapidement, qu'est-ce qu'on peut dire en bref?

E : On peut appliquer les mêmes procédures qu'avant.

E22 : C'est le même résultat.

P : On va retrouver toutes les procédures de tout à l'heure qui vont pouvoir s'appliquer ici. Plus ta remarque que tu avais envie de faire. C'est le même résultat d'après toi ? Comment tu expliquerais que c'est le même résultat ?

E2 : Non !

P : Toi, tu n'es pas d'accord. Est-ce que c'est le même résultat ou pas. Qui est pour le même résultat ?

E : Non, non ce n'est pas le même résultat.

P : Comment tu pourrais aider, quand tu dis que c'est le même résultat. Est-ce qu'on pourrait aider pour savoir, est-ce qu'on peut relativiser les deux résultats. Est-ce qu'on peut sans faire.... Je vous propose de répondre à cette question en disant qu'il y a les mêmes procédures que tout à l'heure mais que par contre on peut très bien calculer le résultat en faisant référence à la question précédente. Comment je m'y prends, alors vas-y !

E2 : On a 0,0278, par rapport au premier on a divisé par 100. Le nombre est divisé par 100.

E20 : Non par 10.

E2 : Oui, par 10.

P : Donc on part de 2780 à 278 et on ne tient pas compte de ça.

E2 : Pour le deuxième, c'est pareil, on a divisé par 10.

E : Moi, j'ai pas multiplié, j'ai divisé le premier exemple.

E : Oui, mais cela ne marche pas.

E2 : Moi j'ai comparé 0,278 et 0,0278.

P (écrit au tableau)

E : On a divisé par 10.

P : Alors quand tu passes de là à là, tu divises par 10 ?

E : Après, j'ai comparé 0,0001 et 0,001.

P : (écrit au tableau), attends, je vais mettre ça dans l'ordre chronologique:

0,278 : 0,0001

0,0278 : 0,001

On est d'accord avec ça, la première opération que l'on a faite:

tu passes de 0,278 à 0,0278 en divisant par 10,

tu passes de 0,0001 à 0,001...

E2 : en multipliant par 10.

P : Ah c'est mieux, tout le monde est d'accord. Tu dis cela fait rien, parce qu'on obtient le même résultat parce que d'un côté on divise par 10 et de l'autre côté on multiplie par 10

E : On divise et on multiplie pas les mêmes nombres, donc on ne peut pas comparer.

P : Quand on divise 0,278 par 0,0278, qu'est-ce qui se passe ? quand on divise le numérateur par 10 ?

E : On multiplie par 10.

P : Toi, tu as référence au "multiplier", mais le résultat n'est-il pas lui même... un numérateur qui est un dividende plus petit, à l'arrivée le nombre va être comment ?

E : Eh bien 10 fois plus petit si je ne change pas le diviseur. C'est clair ou quoi ?

Si au lieu de partir d'un nombre que je m'étais donné dans une première opération, je prends un nombre qui est 10 fois plus petit, le résultat que je vais trouver est 10 fois plus petit. Maintenant, si au lieu de diviser par 0,001 je divise par quelque chose qui est 10 fois plus grand.

E : Le résultat est 10 fois plus petit.

P : Là c'est pareil si je multiplie le diviseur par 10, cela va diminuer le résultat et cela va diviser le résultat par 10. C'est bien cette idée, puisque que j'ai partagé en 10 fois plus de parties, mais chacune de mes parties sera 10 fois plus petite. Là aussi cela nécessiterait de faire des manipulations pour donner du sens à ceci: qu'est-ce qui se passe quand je multiplie le diviseur par un nombre ? Le résultat est divisé par 10 et tout à l'heure, on a dit que le résultat était divisé par 10. Quand je conjugue ces deux actions, je divise le résultat par 100. Donc vous avez trouvé 27,8 au lieu de 2780.

Vous pouvez essayer de répondre à la question suivante: comment donne t-on les méthodes relatives aux opérations ? Les donne-t-on comme des règles dénuées de toute signification si ce n'est que d'appliquer une règle donnée, un déplacement de virgule ? Et il y a possibilité effectivement de mettre ces règles avec des activités qui se traduisent très concrètement et qui donneraient du sens entre guillemets parce que moi, je ne sais pas très bien expliquer ce que c'est que construire du sens, donner du sens, j'ai toujours un peu de mal avec ces expressions. Je crois que l'on arrive cependant à s'entendre là dessus.

Bon on passe à l'exercice suivant.

Annexe C4b: Chronique de "l'intermède" du 06/04/93

P : Pour la suite, vous changez de situation.

E : Sur décimaux, il y a combien de séances ?

P : Sur décimaux, il y a encore 3 séances.

E : Depuis qu'on a abordé le module sur décimaux, je ne vois pas du tout où est-ce qu'on va!

P : Où est-ce qu'on va par rapport à quoi ?

E : Par rapport à ce que l'on doit apprendre sur les décimaux.

P : Pour répondre à la question, est-ce que cela veut dire que tu ne fais pas le lien entre décimaux et fractions ? Est-ce que tu ne fais pas le lien entre fraction et rationnel ? Ou est-ce que tu ne fais pas le lien entre l'activité que l'on a proposée et les connaissances sur les fractions ?

E : Entre l'activité et les connaissances.

P : Concernant les rationnels, qu'est-ce qui vous tracasse ? Est-ce qu'on n'est pas arrivé à donner une définition de rationnel ? Peut-être que justement vous ne le voyez pas à l'issue de l'activité "Automates". Par exemple à un moment donné, vous m'avez posé la question: mais qu'est-ce que c'est qu'un rationnel ? qu'est-ce que c'est qu'un décimal ? qu'est-ce que c'est qu'un nombre réel ? La question "qu'est-ce que c'est qu'un rationnel", est-ce qu'on n'est pas arrivé avec cette synthèse à y répondre ?

E : Si. (plusieurs voix dans la salle)

P : Je crois qu'on est arrivé à dire qu'un rationnel, c'était une écriture de la forme a/b , a et b étant entiers, et on sait qu'il y a deux aspects là-dedans, ça représente à fois $1/b$ et $a/b \times b$ donne a (il écrit au tableau). Ce sont les deux caractérisations du rationnel a/b . Il me semblait... , mais peut-être que ça veut dire qu'on a pas assez fait la synthèse. Alors par rapport à ça, vous voyez qu'il y a des écritures fractionnaires des rationnels, et pour additionner des rationnels, on a vu qu'il fallait les réduire au même dénominateur, que pour comparer des rationnels on a vu qu'on pouvait, soit les réduire au même dénominateur, soit les réduire au même numérateur. Quand vous avez deux rationnels à comparer, vous pouvez très bien... Si par exemple, je veux comparer $3/4$ et $2/3$, je peux très bien m'arranger pour avoir ici $6/8$ et là $6/9$. Ou alors on peut passer par $9/12$ et $8/12$. Dans le contexte que l'on avait choisi, il me semble que ces connaissances étaient apportées. En principe, la situation que l'on vous propose devrait faire le lien entre décimaux et rationnels. Ca va ? tu n'as pas l'air bien convaincue ? Qu'est-ce que tu voulais apprendre par rapport aux rationnels que tu penses qui te manque ?

E : Je ne sais pas, je ne savais pas à l'avance.

P : Tu trouves que c'est déstabilisant comme méthode (silence). L'année dernière, le module "décimaux / rationnels" on l'avait fait assez bref. Je me vois mal faire si tu veux, les opérations sur les fractions, encore que si je regarde certains ouvrages qui se disent vouloir préparer au concours, on voit des calculs de réduction au même dénominateur ou des mises sous forme rationnelle des dénominateurs, c'est-à-dire des connaissances relativement traditionnelles. Je me vois mal par rapport au groupe, faire des activités comme ça. Éventuellement en self-service. Dans un module de formation, cela me paraît peu utile. On sait tous à peu près additionner ou soustraire ou comparer des fractions.

E : Les puissances, on ne connaît pas bien.

P : Oui, les puissances, c'est au niveau de l'écriture. Ce que l'on pourra faire, c'est faire un travail avec des puissances de 10 encore que l'on avait revu la notation des puissances au moment du module multiplicatif. D'un autre côté, il m'a semblé qu'il était intéressant de pouvoir réfléchir à l'apprentissage des fractions et des rationnels.

E : (phrase inintelligible)

E : Ce qu'elle veut dire c'est que c'est plus difficile à gérer, à faire les liens entre ce qu'on savait déjà et ce qu'on voit là.

P : Il me semble que cela représente plus d'apport par rapport à ce que vous avez à faire l'année prochaine ou dans deux ans, c'est à dire à prendre une classe en charge éventuellement. Il me semblait que cette approche vous donnait plus d'indications justement en tant que futur enseignant. Elle est plus déstabilisante.

E : Oui, parce que nous, on a une méthode et cela ne correspond pas à ce qu'on faisait avant.

E : Pour un enfant, c'est plus facile de rentrer dans des situations comme ça, que comme nous, on l'a fait avant.

P : Je ne sais pas si c'est plus facile avec l'exemple que l'on vous a donné. Ce que je dis c'est que ça vous a permis de poser des problèmes de l'apprentissage des nombres rationnels.

E : Moi, personnellement, cela me paraît plus intéressant.

P : Tu voulais dire ?

E : Moi, je n'arrive pas à faire la différence entre les rationnels et les fractions.

P : Moi, je croyais... : quelqu'un peut répondre ou pas ?

(Une discussion animée s'engage dans la salle à propos de fraction et rationnel).

E : Il peut y avoir plusieurs fractions pour un même rationnel, en fait un rationnel, le résultat, c'est une fraction.

P : 10/12, c'est une fraction, 5/6, c'est une autre, d'accord, mais ça représente le même rationnel.

E : Mais le décimal là dedans ?

P : Le décimal ? le problème, moi, je veux bien répondre, le décimal pour vous qu'est-ce que c'est ? Je vous renvoie la question. Quand même vous avez des idées sur la question ?

E : Maintenant, je ne sais plus.

P : Qu'est ce que 5,7 ?, c'est un décimal, vous êtes tous d'accord. Vous savez qu'est-ce que c'est ?

E : Oui, je suis d'accord, mais les limites...

E : Mais ça peut être un nombre entier aussi!

E : Un décimal, ça ne peut pas être un rationnel ?

E : Un décimal, c'est un genre particulier de rationnel!

P : Est-ce que 1/3 est un décimal ?

E : Non! (plusieurs non dans la salle)

P : Justement, le problème, est-ce qu'on arrive à donner une écriture à virgule de 1/3 ?

E : Non! (plusieurs non dans la salle)

E : 0,333

P : X disait que c'est le décimal 0,333. Tu sais que le rationnel 1/3 multiplié par 3 doit donner 1. Donc 0,333 x 3 devrait donner 1. Est-ce que 0,333 x 3 donne 1 ?

E : Non.

P : 1/3 est un rationnel mais 1/3 n'est pas un décimal, désolé, mais c'est comme ça. Parce que chaque fois que je vais avoir une écriture décimale multiplié par 3, je ne peux pas obtenir 1.

E : Et π , c'est un rationnel ?

P : Ça, je ne peux pas te répondre actuellement.

E : Et pourquoi 0,3333 n'est pas un décimal ?

P : Tu me dis que 0,3333 ce n'est pas un décimal.

E : Je demande pourquoi ?

P : Ça, c'est un décimal, ça aussi c'est un décimal (il montre 0,333)

E : Et si c'était à l'infini, ce ne serait pas un décimal ?

P : À l'infini, ça devient quoi ? Envisageons-le. (brouhaha). Ta question ?

E : Pourquoi 0,33333... ça n'est pas un décimal ?

P : Alors là, je mets des points de suspension pour indiquer que j'ai des trois qui continuent jusqu'à l'infini. Qu'est ce qui vous pose problème ?

E : Si on rajoute des 3 autant qu'on veut et qu'on multiplie par 3, on n'obtient jamais 1.

P : Si c'était un décimal, tu as appris à faire des opérations avec des décimaux, si tu as un décimal, on doit savoir multiplier par 3. Alors on y va ? Comment on va démarrer, on ne peut pas parce qu'on n'a pas le premier, mais est-ce qu'on ne peut pas imaginer ?

E : 0,3.

P : ça veut dire quoi, ça ?

E : C'est une approximation.

P : Parce qu'à ce moment là, ça voudrait dire que 0,33 avec une infinité de 3 est-ce que c'est $1/3$ ou pas ? Pour toi, j'ai l'impression que $1/3$, c'est 0,3333... avec une infinité de 3, c'est ça ?

E : Oui.

P : Bon, $1/3$ multiplié par 3, cela donne 1. Alors, ce n'est pas si simple que ça ! En réalité, on ne pourrait pas envisager les décimaux comme ayant une infinité de chiffres après la virgule. Les mathématiciens, quand ils ont défini les décimaux, ils les ont définis comme ayant un nombre de chiffres fini après la virgule. Parce que sinon, il faudrait apprendre... j'essaie de donner un argument, je vous signale que c'était prévu dans le module, parce que, quand vous m'avez demandé combien il restait de séances, on voulait simplement le faire en guise de synthèse une fois que l'on avait bien vu. Je vais quand même m'arrêter parce que je ne veux pas tout faire avant, mais je vais essayer de m'en sortir. Les mathématiciens, quand ils ont défini les décimaux, se sont arrêtés à un nombre fini de chiffres après la virgule pour pouvoir définir des opérations sur les décimaux. En réalité, les décimaux ont été construits bien après, au XVI^{ème} siècle, parce que justement, ils permettaient des techniques opératoires très intéressantes par rapport à notre numération. Donc en réalité, quand ils ont défini les décimaux, pour avoir des techniques opératoires, il fallait se fixer un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule. Le problème, pourquoi on s'est fixé ça : une telle opération devrait donner 1 et en réalité, si je m'en tiens aux algorithmes classiques, j'ai cette fameuse écriture 0,999... Pour simplifier, je ne sais pas, il y a 15 ans on enseignait carrément que ça, c'était une écriture de 1. Peut-être, il y en a parmi vous pour qui 0,999..., ce n'est pas autre chose que 1. Ne discutez pas, c'est 1. Si vous envisagez des écritures décimales illimitées, vous êtes obligés d'envisager que l'écriture 0,99999... c'est 1. On appelle nombre décimal, un nombre qui comporte un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule. Au bout d'un moment, ça s'arrête. Ca va, ça éclaire un peu ?

E : On se demandait si π est un rationnel ?

P : π n'est pas un rationnel parce que même si $22/7$ est une fraction, elle donne seulement une approximation de π .

E : Ça se termine ?

P : Non, $22/7$ ça ne se termine pas. Il y a une période qui se répète. π , lui, les mathématiciens ont démontré qu'il ne pouvait pas s'écrire sous forme de rationnel.

E : Ah bon ?

P : Pardon, sous forme de fraction, donc, ce n'est pas un rationnel.

E : Et quand on fait périmètre divisé par le diamètre, on a bien une fraction ?

P : Non, parce que ça veut dire que tu n'as pas un entier divisé par un entier. Si tu prends périmètre divisé par diamètre, cela veut dire que si le diamètre est entier, le périmètre ne l'est pas, il n'est même pas rationnel. C'est clair ou pas ? Si tu prends par exemple un cercle de diamètre 5, eh bien la longueur du cercle ne peut pas être un rationnel. Sinon π serait ce rationnel divisé par 5, ça serait encore un rationnel. Les mathématiciens ont montré que π n'était pas un rationnel.

E : Moi je ne comprends plus, parce que le rationnel, il a un nombre infini de chiffres après la virgule.

P : Il peut avoir, non, $2/5$ est un rationnel. 3 est un rationnel : il peut s'écrire 3,0, il n'y a pas de chiffres non nuls après la virgule.

E : Oui, mais il peut avoir un nombre de chiffres infini après la virgule.

P : oui, bien sûr. $1/7$...

E : Mais quelle différence avec π ?

P : La différence est essentiellement la suivante, c'est que dans l'écriture décimale de $1/7$, si je divise 1 par 7, il y a au maximum 7 restes possibles 0, 1, 2, 3, ..., 6, mais au bout d'un moment, j'abaisse toujours des zéros, ça ne va jamais s'arrêter, comme je ne peux avoir comme reste 0, je vais avoir soit 1, soit 2 soit 3, soit 4.....au bout d'un moment comme les restes sont limités et comme on abaisse toujours un zéro, il va y avoir le quotient qui va se reproduire. Là aussi, j'anticipe, c'est prévu: on doit vous faire faire des activités pour vous montrer qu'il y a des écritures à virgule qui reviennent. Ce sont les écritures à virgule dites périodiques. Tous les rationnels peuvent s'écrire de cette façon et peuvent avoir des approximations par un décimal aussi proche que l'on voudra et au bout d'un moment, tu peux te rendre compte que les différentes approximations sont de plus en plus précises. Au bout d'un moment, les chiffres reviennent, donc tu as une approximation décimale périodique de n'importe quel rationnel. La chose qui se passe, c'est qu'on est sûr qu'au bout d'un moment les chiffres de l'approximation rationnelle de π ne reviennent pas régulièrement. C'est exactement la même chose que $\sqrt{2}$, le nombre dont le carré vaut 2, il n'est pas rationnel, il ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction. Je m'arrête là. Vous avez les nombres entiers qui sont contenus dans les décimaux, qui eux-mêmes sont contenus dans les nombres rationnels. Quand, j'en suis là, π n'y est pas encore. (Le professeur dessine des "patates" successives représentant les différents ensembles).

E : Les rationnels ce sont des quotients ?

P : Oui, des quotients d'entiers. Bon, π n'y est pas encore là dedans ni $\sqrt{2}$, ils sont en dehors. Ceux qui sont en dehors, on les appelle les irrationnels et tous les nombres qu'on considère là, sont les nombres réels. Tous les nombres que l'on connaît à ce niveau là, que ce soit les rationnels ou les irrationnels, tous les nombres issus de la mesure si vous voulez, sont appelés les nombres réels.

E : Les irrationnels sont à part ?

P : Oui, ce qui est appelé irrationnel, c'est l'extérieur, les irrationnels ne sont pas les rationnels. Si je mettais une étiquette ici, ce serait les réels. Est-ce que j'ai répondu à vos interrogations ? Je vous signale qu'au point où on en est, on a construit les rationnels. On n'a pas parlé encore des décimaux. Les fractions permettent d'atteindre les rationnels. Il se trouve que, quand on fractionne une unité, quand on partage 4 en 7 parties égales, on tombe sur les rationnels. Les rationnels ont été connus et étudiés, mis en évidence, utilisés avant les décimaux. Les décimaux n'ont été mis en place qu'au XVI^{ème} siècle alors que les rationnels étaient en place dans l'Antiquité. Il a fallu d'ailleurs attendre la Révolution Française qui a imposé le système métrique en France pour que les décimaux puissent être utilisés, parce que c'était lié aussi au système de mesures utilisé. Justement pour vous donner une idée, quand on compte par douzaines, on a encore des traces, vous avez des unités anglaises qui sont faites avec des fractions, pas des décimaux. Ils n'utilisent pas les décimaux parce que leur système d'unité traditionnel n'est pas un système décimal. Alors, étant donné le cours, nous, on avait pensé faire les rationnels d'abord et voir les décimaux ensuite. Pourquoi les décimaux peuvent intervenir ? Parce que chaque fois que l'on a une fraction, on a une approximation décimale de cette fraction. Actuellement, c'est vrai que les décimaux ont pris une grande importance à cause des calculatrices.

Annexe C4c: Construction des rationnels à partir des entiers

<p>Un saut est désigné par un couple: exemple (12;18).</p> <p>Il est aussi désigné par le couple d'origine (2;3) obtenu en divisant 12 et 18 par leur PGCD.</p> <p>Si deux couples (a;b) et (c;d) désignent le même saut, alors $ad = bc$.</p> <p>Il est aussi désigné par l'ensemble des couples: (2;3) , (4;6) , (6;8).....(2k; 3k) k entier.</p>	<p>(12;18) est la fraction $\frac{12}{18}$.</p> <p>(2;3) est la fraction irréductible $\frac{2}{3}$.</p> <p>$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$ (produit en croix).</p> <p>Un rationnel est défini par l'ensemble des fractions $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \dots = \frac{2k}{3k}$.</p> <p>On dit que les fractions sont égales puisqu'elles désignent le même rationnel.</p>
<p>Deux couples désignant un même saut peuvent s'additionner. Le couple obtenu désigne le même saut.</p>	<p>$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.</p>
<p><u>La comparaison de deux sauts S_a et S_b</u> désignés par (a; b) et (c; d) correspondant à deux automates A et B .</p> <p>$S_a < S_b$</p> <ul style="list-style-type: none"> • si pour le même nombre de sauts, l'entier atteint par A est inférieur à l'entier atteint par B, • si pour le même entier atteint , le nombre de sauts de A est supérieur au nombre de sauts de B. <p>La recherche du même nombre de sauts correspond à la recherche du PPCM de b et de d (produit de b et d si b et d sont premiers entre eux).</p>	<p><u>La comparaison de deux rationnels r et t</u> désignés par deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.</p> <p>$r < t$</p> <ul style="list-style-type: none"> • si ayant réduit au même dénominateur les deux fractions, le numérateur de la première est inférieur au numérateur de la seconde, • si ayant réduit au même numérateur les deux fractions, le dénominateur de la première est supérieur au dénominateur de la seconde. <p>Réduire au même dénominateur consiste à rechercher le PPCM de b et d (produit de b et d si b et d sont premiers entre eux).</p>
<p><u>L'addition de deux sauts S_a et S_b</u> désignés par (a; b) et (c; d) correspondant à deux automates A et B .</p> <p>C'est le saut défini par le nouvel automate défini par le couple (n; s) s étant un même nombre de sauts réalisés par chacun des automates, n la somme des entiers atteints par chacun des automates.</p> <p>Exemple (12;18)+(15;12)=(24;36)+(45;36)=(69;36) ou (2;3)+(5;4)=(8;12)+(15;12)=(23;12)</p>	<p><u>L'addition de deux rationnels r et t</u> désignés par deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.</p> <p>C'est le rationnel désigné par la fraction $\frac{a}{b}$ obtenu en additionnant les numérateurs après avoir réduit au même dénominateur (en cherchant le PPCM de b et d).</p> <p>Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont irréductibles alors $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$.</p>

Annexe C4d : Automates et rationnels. Synthèse conduite par P. Séance du 06/04/94

P : Vous voyez, un saut est désigné par un couple. Par exemple, l'automate qui arrive à 12 en 18 sauts. Le saut, lui-même, la longueur du saut, vous l'avez dit vous-même, puisqu'en 18 sauts il arrive à 12, eh bien, chaque saut peut être caractérisé par la fraction $12/18$. Donc en fait le $12/18$ correspondra à la longueur du saut. Et peut-être que tout de suite, on pourrait donner une définition, ou en tout cas un élément caractérisant la fraction. Pourquoi dans la situation "Automates", on fait appel aux fractions ? Quand on dit par exemple arriver à 12 en 18 sauts, quelle est la première activité que l'on a fait pour dessiner les sauts des automates ?

E1 : On a divisé 12 par 18.

P : Oui, on a divisé 12 par 18. En réalité qu'est-ce qu'on pourra donner comme définition d'un rationnel ?

E1 : La division de deux entiers.

P : Effectivement le quotient de deux entiers va définir un rationnel, on verra sous quelles conditions. Douze dix-huitièmes, c'est le quotient de 12 par 18. Quand je partage 12 par 18, eh bien j'arrive au rationnel 12 sur 18.

E4 : Si on parle de quotient, c'est qu'on sait déjà diviser !

P : Alors qu'est-ce qui te gêne dans le fait d'avoir déjà divisé ?

E4 : Dans la mesure où il y a des fractions qui ne se terminent pas.

P : Justement, qu'est-ce qu'on vous a proposé pour arriver à représenter les automates: est-ce qu'on vous a demandé de poser des divisions ?

E4 : Non !

P : Et comment vous avez fait pour trouver chaque saut ?

E2 : Quand on calcule, on a plus dans l'idée de calculer un coefficient de proportionnalité.

P : Le calcul du coefficient de proportionnalité revient au calcul de quotient. La question que tu poses, que j'entends, c'est: comment vous arrivez à calculer un quotient: vous parlez de rationnel et je ne sais pas calculer un quotient. Si je pose une division et je risque effectivement d'avoir des problèmes parce que la division ne se termine pas, c'est la question que tu poses ? Comment on peut répondre à cette question ? Est-ce qu'on vous a proposé de faire une division ?

E : (plusieurs) Non.

P : Comment on vous a proposé au départ pour représenter les sauts des automates ?

E : Avec un réseau.

P : Oui, qu'est-ce que vous a permis de faire ce réseau ?

E : Le fait que ce soit des intervalles réguliers.

P : Le réseau vous a permis de partager 12 en 18 parties, il aurait pu permettre de partager 12 en 18 parties. Donc on arrivait à se donner un idée de ce fameux quotient en disant... alors, comment on pourrait le caractériser, ce quotient ? Pour l'instant, on arrive à le dessiner approximativement, est-ce qu'on peut en calculer une valeur approchée ? Alors là, tu penses à la division. Je pense que la division nous permettra d'avoir une valeur approchée, mais est-ce qu'on arrivera à une valeur exacte ? Dans certains cas, il faudra peut-être se poser la question. Tu auras peut-être un lien entre les nombres rationnels et les nombres décimaux par l'intermédiaire de ces valeurs approchées ou par l'intermédiaire de rationnels particuliers. Justement on pourrait faire le lien entre l'activité automates, qui effectivement peut très bien être utilisée pour une certaine approche de la notion de fraction, en tout cas de la notion de quotient. Quand je sais que l'automate arrive avec des sauts réguliers à 12 en 18 sauts, c'est qu'il franchit chaque fois douze dix huitièmes. La situation "Automates" permettait de donner un certain sens à cette situation là. On va aller assez vite. Vous m'arrêtez si vous trouvez que ça va trop vite ou si vous avez des remarques intéressantes. Est-ce que vous arrivez à suivre un peu le contenu de la fiche ?

P : On arrivait à la notion de couple origine, vous l'aviez appelé couple origine, c'est-à-dire c'est la fraction irréductible. $12/18$ peut s'écrire $2/3$ parce que je simplifie par 6 en haut et en bas. Pour cela au passage, j'utilise le PGCD. Après, on avait vu que deux couples désignent le même saut et vous aviez utilisé le produit en croix. Deux fractions sont égales si le produit en croix(...). L'ensemble des couples était caractérisé par l'ensemble des couples $2k/3k$, k entier. Un rationnel est défini par l'ensemble des fractions $2k/3k$. On pourra même envisager k négatif, ce qui n'était pas envisagé dans le cas de la situation des automates.

E : Le rationnel, c'est le résultat d'une division ?

E : C'est le quotient.

E : C'est $2/3$ ou c'est $2...$?

P : Si je ne te réponds pas et que je te renvoie à la situation des automates. Qu'est-ce que c'était ? Il y avait les couples et l'ensemble des couples caractérisait quoi ?

E : Le saut.

P : Le saut, c'est-à-dire le saut, c'est ça (il fait un dessin); l'ensemble des couples qui caractérisaient les automates, c'était le saut élémentaire que faisait l'automate en question. Maintenant si je regarde, $2/3$, $4/6$, $6/9...$ quel est le nombre qui caractérise ?

E : $2/3$.

E : C'est 0,666 le rationnel ?

P : Est-ce que 0,66 est le rationnel ? A ce moment là...

E : C'est une valeur approchée du rationnel.

P : Oui, ça sera une valeur approchée, mais moi, je préférerais reprendre ce que j'avais proposé tout à l'heure, c'est-à-dire le quotient. Le quotient est le même pour $2/3$ pour $4/6$, etc... Qu'est ce qu'elles caractérisent toutes ces fractions, elles caractérisent le même quotient. Ce quotient, si vous voulez, c'est l'équivalent du saut, ça va ? Ca répond à vos questions ou pas ?

E : On reformule ce qu'on avait déjà appris. (rires)

P : Oui ce qu'on avait déjà appris avec l'automate.

Alors deux couples désignant un même saut peuvent s'additionner, alors le couple obtenu désigne le même saut, alors ça c'est une propriété. Vous vous souvenez, si je prends le couple 4,6 et le couple 6,9, c'est à dire l'automate qui arrive à 4 en 6 sauts, c'est aussi un automate qui arrive en 6 en 9 sauts et on avait vu qu'on pouvait additionner les premiers termes du couple en disant que cet automate arrive à 10 en ...

E : En 15 sauts, (après une discussion et une erreur due à une faute de frappe).

P : J'attire votre attention sur cette propriété, si je regarde la fraction $4/6$ et la fraction $6/9$. Qu'est ce que vous pensez de cette égalité ?

E : Elle n'est pas juste !

E : Si, elle est juste !

P : Essayons de donner du sens à ça.

E : Ce n'est pas ce qu'on a essayé de faire la dernière fois, on avait deux sauts.

P : Attendez, on n'est pas encore dans l'addition des automates, on avait remarqué que pour un même automate A, ça me paraît important parce que c'est une connaissance que j'ai envie de réactualiser, il me semble qu'on a un peu de mal avec ça, votre réaction ne m'étonne pas. Je suis toujours obligé de m'y reprendre à deux fois: j'ai un même automate (2,3), (4,6), ...on avait remarqué qu'on pouvait ajouter les éléments de chaque couple et on tombait sur un couple définissant le même automate. Si je traduis ça en terme de fraction, ça veut dire que $4/6 + 6/9$ me donne la fraction $10/15$. Alors cela paraît étonnant parce que vous n'avez pas le souvenir d'avoir effectué des sommes de fractions comme ça.

E : Le problème , on peut pas écrire comme ça, parce que cela a fait un saut plus un saut ...

E : Ca fait $2/3 + 2/3$.

P : Je le note comme ça $4/6 = 6/9 = 10/15$, oui vous avez raison, je me suis complètement planté excusez moi, c'est pas ça. Excusez-moi, je vous ai mis dans le doute.

E : Moi, je n'ai rien vu (rires). Cela ne m'a pas gênée, je ne comprends rien. (rires)

P : Il ne s'agit pas de somme de fractions, je ne sais pas pourquoi j'ai écrit ça. (...) Alors, est ce qu'on a le droit d'ajouter les numérateurs et les dénominateurs de deux fractions égales comme ça ?

E : Oui !

P : Par rapport à la situation.

E : Puisque le quotient est le même, on peut écrire les égalités..

P : Est-ce que vous êtes étonnés que l'on ajoute les numérateurs et les dénominateurs et qu'on obtienne la même fraction. Cette propriété, si on le fait dans le cadre de l'addition,

ce que j'avais fait tout à l'heure, si vous essayez d'appliquer cette méthode à cette addition, est-ce que cela va fonctionner ?

E : Non !

P : Pour l'addition des fractions, on n'a pas le droit d'additionner les numérateurs et les dénominateurs. Par contre, je ne change pas de fraction si j'ai une égalité et que je forme une nouvelle fraction en additionnant les numérateurs et les dénominateurs. Alors cette propriété, j'attire votre attention sur le fait que c'est cette propriété qui vous permet de déterminer des partages proportionnels.

Quand vous avez par exemple la situation suivante: 3 enfants ont par exemple 5, 7, 10 ans, j'ai une somme de 110 francs que je veux partager proportionnellement à l'âge des enfants, vous comprenez ce que je veux dire ? Eh bien si je dis que je donne au premier enfant x , au second y et au troisième z , cette propriété me permet de trouver facilement la solution de ce partage.

Si je veux que le partage soit proportionnel aux âges, il faut que le quotient de chaque part par l'âge correspondant soit le même: c'est ça l'idée de proportion. Eh, bien, si on cherche à résoudre ce problème avec la somme que j'ai donnée, on est coincé, parce qu'on n'y arrive pas. Alors que si vous pensez que quand vous avez l'égalité de proportions, vous obtenez la même proportion en ajoutant les numérateurs d'une part et les dénominateurs d'autre part, il y a, à ce moment là, la somme des trois parts que vous partagez ... la proportion $x/5 = y/7 = z/10 = x+y+z/5+7+10 = 110/22$, donc $x/5 = 110/22$ (...).

J'insiste sur ce point-là, parce que ce sont des exercices très classiques de partage proportionnel, comme vous pouvez très bien en avoir à faire, soit au concours, soit à l'école élémentaire, puisqu'il peut y avoir des problèmes de cet ordre-là, qui peuvent se poser. Ces problèmes ont une solution avec cette propriété.

Excusez-moi encore pour mon erreur.

P: Alors la comparaison de deux sauts, on avait vu qu'on pouvait comparer deux sauts, soit en les ramenant à la même graduation, soit en la ramenant au même nombre de sauts. Alors est-ce qu'il en est de même pour les fractions ? Est-ce qu'on peut comparer des fractions et si oui comment ? Je veux comparer $2/3$ et $3/4$, comment je m'y prends ?

E : On les réduit au même dénominateur.

P : Il y a moyen de les réduire au même dénominateur et de comparer les numérateurs. Est-ce qu'on peut faire autrement ?

E: On peut les réduire au même numérateur.

(écriture des fractions)

P : Eh bien, quand je partage 6 en 9, j'en ai moins que si je partage 6 en 8. Le quotient de 6 par 9 est plus petit que le quotient de 6 par 8. Vous retrouvez une deuxième stratégie possible. Tu ne comprends toujours rien ?

E : Non, ça va mieux. (rires)

P : Bon, on va en profiter pour continuer.

(étude des additions avec le critère d'additions des entiers)

P : Je ne vais pas m'attarder longtemps, mais j'aurais aimé y revenir brièvement.
(...)

P : Ce que l'on voulait vous faire remarquer, je n'ai pas assez insisté. On avait dit que le cas particulier des entiers: si on applique les règles que vous aviez proposé à des entiers, alors là, c'est un peu plus difficile, il faut que je prenne un exemple (2,1) et (3,1).

(...)

P : Autrement, si à partir de la situation "Automates" et à partir de ce que je connais sur les entiers, je prends les couples qui caractérisent les automates et grâce à ce que je sais sur les entiers, je définis une comparaison ou une addition, je me rends compte que parmi toutes les règles que vous avez proposées, il n'y a que cette règle qui permet de prolonger les opérations sur les entiers. Alors les mathématiciens justement se sont posé des questions à propos de ces nombres rationnels. Vous me dites: comment les définir ? Vous souhaitez avoir une définition tout de suite, on a un peu tourné la difficulté en disant que les quotients, c'était dans un premier temps, pour fixer un peu les idées. Mais justement, la question que l'on peut se poser, c'est est-ce que ce quotient existe, est-ce qu'il n'existe pas, est-ce qu'on en a seulement une valeur approchée, est-ce que c'est un véritable nombre ? Alors justement, ça prendra le statut de nombre si on sait faire des opérations dessus, si on sait comparer. Alors l'idée, c'était: est-ce que à partir de ce qu'on connaît sur les entiers, à l'aide des couples, peut-on définir de nouveaux nombres qui prolongent un peu ces entiers, alors si vous aviez fait des études de mathématiques, c'est une activité qui vous aurait été familière. Dès qu'on pousse un peu dans les études mathématiques, on est amené à construire l'ensemble des nombres rationnels. Comment on les construit, les mathématiciens proposent de les construire à partir de couples d'entiers, on essaie de trouver des prolongements des opérations de ces entiers. On va définir de la même façon les opérations sur les rationnels, mais en respectant, en prolongeant les entiers. J'appelle entier un couple (2,1), tout couple de la forme (a,1). Je me rends compte qu'avec la règle d'addition que j'ai encadrée, quand j'additionne deux couples qui sont caractérisés avec le nombre de sauts égal à 1, j'arrive à un couple qui peut être ramené à la forme (x, 1). Autrement la somme de deux couples qui sont des entiers sera un couple d'entiers. Ça va ?

Oui, en faisant la somme de deux sauts entiers, j'arrive à un saut entier. Ça va ?

Annexe C4e: Synthèse générale conduite par P. 11/04/94

Le formateur a tout d'abord proposé l'exercice suivant :

Écrire un entier naturel à la place du point pour que ce soit :

un entier naturel	un décimal non naturel	un rationnel non décimal
$\frac{\cdot}{85}$	$\frac{\cdot}{85}$	$\frac{\cdot}{85}$
$\frac{85}{\cdot}$	$\frac{85}{\cdot}$	$\frac{85}{\cdot}$

Il enclenche la synthèse à partir de la correction de cet exercice.

P : C'est facile d'avoir une fraction qui soit un entier naturel ! Qu'est-ce qu'il faut prendre pour numérateur ?

E : Un multiple du dénominateur.

P : Donc, vous donnez une réponse du type $\frac{85 \times n}{85}$. Tout nombre entier peut s'écrire sous forme d'une fraction. Une fraction, on a vu que c'était une écriture d'un rationnel.

Qu'est-ce que c'est que le rationnel $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$. Quel est la définition d'un rationnel? On a dit que le module devait apporter des définitions. Depuis deux séances, on parle de rationnel, on le mélange avec le terme de fraction.

E : C'est un quotient.

P : Oui, c'est le quotient de a par b. Comment on va définir le quotient de a par b, c'est le résultat de la division : c'est ça que tu voulais dire ? Seulement il y a des divisions qui ne s'arrêtent pas. Comment peut-on le définir ? C'est ?....C'est le nombre qui...?

E : C'est le nombre qui multiplié par 3 donne 2.

P : Oui, alors le quotient de a par b, c'est le nombre qui multiplié par b donne a. Lorsqu'on construit les rationnels, on admet que le quotient de deux entiers, dont le deuxième n'est pas nul, existe toujours. Et c'est ce qui fait construire de nouveaux

nombre parce que $\frac{2}{3}$ n'est pas un entier. Et à un moment donné, on se dit : est-ce qu'on ne pourrait pas le considérer comme un nouveau nombre ? L'automate qui arrive en 2 en 3 sauts, vous vous rappelez : on peut considérer des additions et même un produit par un entier. Mais dans la dernière activité, on vient d'utiliser des rationnels un peu particuliers? E : Ils avaient un dénominateur qui était une puissance de dix.

P : Voilà. Les rationnels qui s'écrivent sous la forme $\frac{a}{10^n}$, $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ sont appelés

nombre décimaux. Alors quand vous avez $\frac{534}{1000}$, on peut l'écrire sous la forme d'un nombre à virgule, les chiffres après la virgule signifiant : le premier chiffre donnant le nombre de dixièmes, le deuxième le nombre de centièmes, puis le troisième, le nombre de millièmes, etc... A cause des conventions d'écritures, les chiffres après la virgule sont des dixièmes, des centièmes, des millièmes.. à cause de la numération de position en base 10. Cela permet d'écrire d'une autre façon des rationnels qui ont pour dénominateur une puissance de dix. Le problème, c'est que les rationnels ont plusieurs écritures. Un même

rationnel a plusieurs écritures fractionnaires : $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$... Donc, on peut se poser la

question pour $\frac{0,2}{0,3}$, est-ce que l'on considère que c'est une écriture fractionnaire ou pas?

E : oui.

P : Les avis sont partagés, je ne sais pas trancher : (se tournant vers l'observateur) je ne sais pas ce que tu en penses R.¹? Je crois qu'il y a des personnes qui considèrent que $\frac{0,2}{0,3}$ est l'écriture d'une fraction et il y en a d'autres qui considèrent que ce n'est pas l'écriture d'une fraction.

R : Cela dépend à quel niveau on se place !

P : Là où les ouvrages sont à peu près concordants, c'est pour dire que les fractions sont essentiellement des écritures. Alors, il y en a qui ont l'air de dire que la fraction $\frac{2}{3}$ n'est

pas tout à fait la même chose que la fraction $\frac{4}{6}$, mais que cela définit le même rationnel. A cause de ça, certains ouvrages disent que ce sont des fractions équivalentes au lieu de dire que ce sont des fractions égales. Qu'est-ce que c'est que $\frac{2}{3}$? On a un partage en 3 et on

prend 2 parts. Qu'est-ce que c'est que $\frac{4}{6}$? On a un partage en 6 et on prend 4 parts. Alors suivant les approches, suivant les livres, certains diront que cela représente des

fractions équivalentes, d'autres diront des fractions égales. Mais le rationnel $\frac{2}{3}$ est le même que le rationnel $\frac{4}{6}$, le rationnel qui a l'écriture $\frac{2}{3}$ est le même que le rationnel qui a

l'écriture $\frac{4}{6}$. Par contre ceux qui prennent le point de vue "fraction", c'est un partage. Eh bien à ce moment là, ils auront envie de dire que les fractions sont équivalentes.

Je vous signale que dans la notion de rationnel, il y a l'idée de rapport au lieu de partage. Dans fraction, il y a plutôt l'idée de fractionner, de partager, tandis que dans rationnel, il y a plutôt l'idée de chercher le rapport qu'il y a. Et le rapport, ce n'est pas autre chose que le quotient. Alors on retrouve bien ces distinctions. Oui, un rationnel a toujours plusieurs

écritures fractionnaires et l'écriture décimale représente un décimal. Est-ce que $\frac{17}{25}$ est un décimal, oui ou non ?

E : Oui, parce qu'on peut atteindre 100 à partir de 25.

P : Tu dis qu'on peut atteindre 100 avec 25, tu précises ?

E : On peut transformer le dénominateur en une puissance de 10.

P : Voilà!

Si tu as $\frac{17}{30}$, d'après toi est-ce qu'on arrive à une puissance de 10 ?

E : Si cela représente un décimal, c'est que ça représente déjà un rationnel.

P : On est bien d'accord, c'est un rationnel ? D'accord ?

E : Alors, ce n'est pas une fraction décimale ?

P : Est-ce que $\frac{17}{23}$ est un décimal ?

E : Non.

P : Est-ce qu'il peut se mettre sous la forme d'une puissance de 10 ? Est-ce qu'à partir de 23, tu peux arriver à une puissance de 10 ? Tu ne pourras absolument pas. Donc ce

1. Il s'agit de l'observateur.

rationnel n'est pas un décimal. Alors est-ce que $\frac{17}{30}$ est un décimal ou pas. On a parlé de multiple de 10 ou de puissance de 10 ?

E : Non, c'est pareil.

P : À quelle condition une fraction peut-elle être transformée en une fraction égale, mais dont le dénominateur est une puissance de 10 ?

E : À condition que le dénominateur soit un diviseur entier d'une puissance de 10.

P : Alors, tu me donnes des exemples ?

E : 25, 4.

P : Oui, à partir de quel moment a-t-on un diviseur d'une puissance de 10 ? Quels sont les diviseurs d'une puissance de 10 ?

RÉSUMÉ

L'étude didactique porte sur les déterminations ("externes") et les contraintes ("internes") à propos des systèmes de nombres (décimaux, rationnels, réels) qui délimitent le champ des possibles dans la formation des professeurs d'école.

La première partie, utilisant principalement la théorie anthropologique de Chevallard analyse l'évolution des savoirs dans l'institution de formation des maîtres. Les manuels sont envisagés comme une institution de formation des enseignants. De ce point de vue sont mis en évidence deux niveaux dans la transposition didactique : d'une part la production par des mathématiciens ou de gens proches de la sphère savante de traités dont le but est d' "élémenter" le savoir à enseigner, d'en identifier et d'en organiser les éléments, d'autre part la réalisation d'un traité intermédiaire, texte du savoir à l'usage des maîtres (et des formateurs), écrit par les "scribes", assujettis à l'exigence d'élémentation, mais aussi aux contraintes des systèmes didactiques.

Dans une deuxième partie on entreprend de pénétrer au cœur même du didactique, dans l'espace où vivent ensemble, s'affrontent et collaborent formateurs et formés. Le choix consiste à étudier la perturbation du système par le biais d'une introduction d'un produit didactique issu d'une ingénierie didactique. Cette ingénierie, s'appuyant sur la théorie des situations de Brousseau, vise à créer les causes du savoir chez les étudiants et à permettre une institutionnalisation dans les termes d'un texte du savoir. L'analyse des différents placements des étudiants (sémantique et syntaxique), ainsi que les négociations à propos des systèmes de nombres permet d'identifier deux déterminations : l'une dominante actuellement dans la noosphère, qui veut que l'on ne peut enseigner une technique sans lui donner du sens, l'autre relative à la légitimité institutionnelle des techniques employées (technologie justificative ou retour au contexte).

Ce travail est donc une tentative pour poser et élucider le problème de la constitution d'un fragment de texte de savoir à propos des systèmes de nombres, robuste, compatible entre plusieurs institutions soumises à des exigences épistémologiques et des contraintes différentes.

Mots clés

enseignement obligatoire, formation des maîtres, manuels, traités, situation didactique, situation adidactique, milieu, institution, transposition, didactique, ingénierie, détermination, contrainte, systèmes de nombres, épistémologie, placement sémantique, placement syntaxique, stratégie, technique, technologie, théorie, acquisition des connaissances